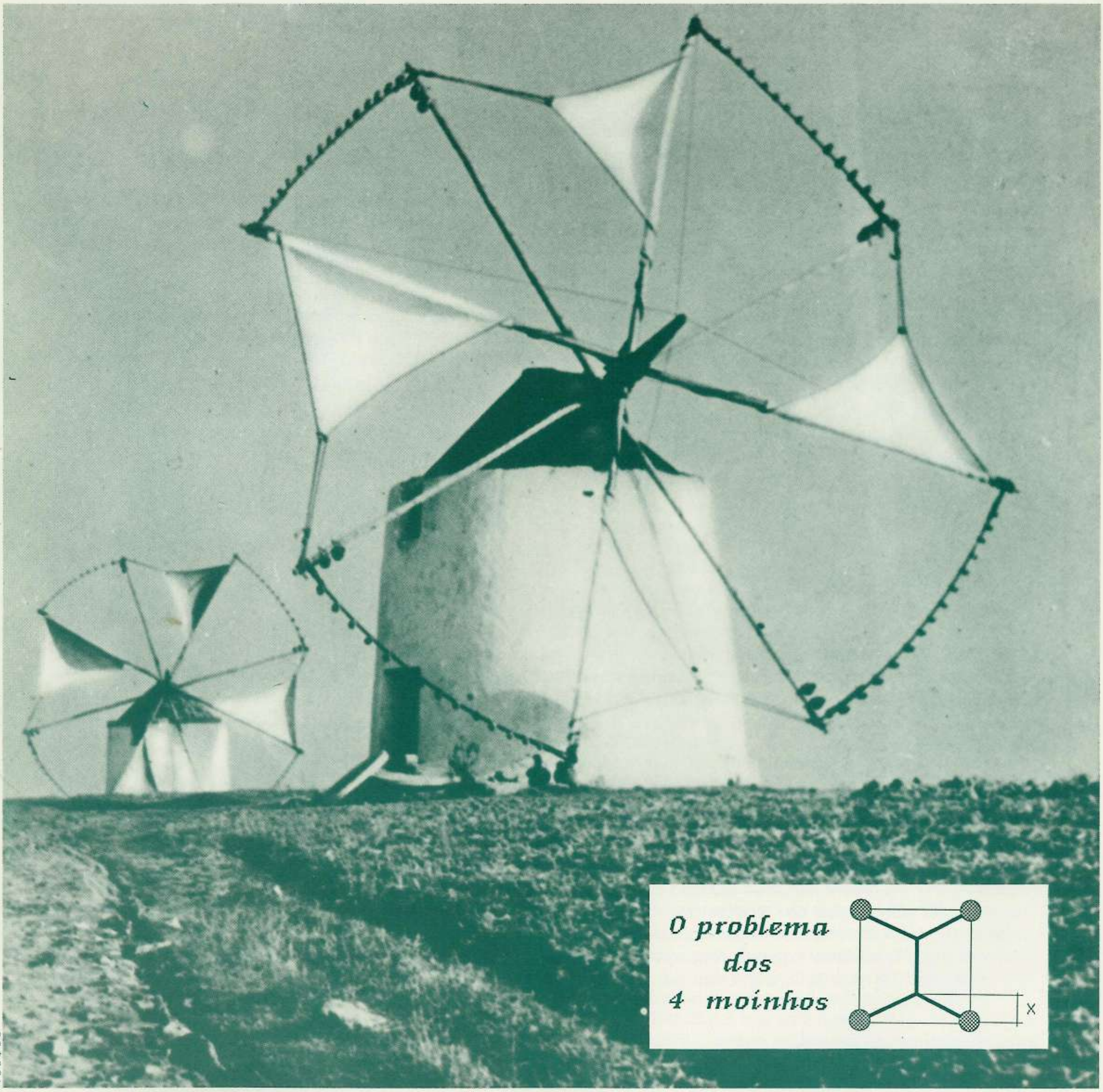
Educação e Matemática

Nº 16 *4º trimestre de 1990*



Revista da Associação de Professores de Matemática

Educação e Matemática em renovação

Conforme dissémos neste mesmo local no número anterior da revista, está a decorrer um processo de renovação de *Educação e Matemática* que queremos seja participado pelos nossos leitores e colaboradores. Nesse sentido realizou-se no passado dia 25 de Março uma reunião para que foram convocados todos os colegas que até hoje colaboraram na revista. Nessa reunião, em que estiveram presentes 25 pessoas, reflectiu-se sobre o papel da revista e sobre as linhas que devem orientar a sua renovação. Foi reconhecida a importância que a revista tem tido, tanto em termos de qualidade como no impacto que a sua existência tem representado no âmbito da nossa associação. Foi sugerida por alguns dos presentes na reunião que deveria ser dedicado maior espaço na revista aos problemas específicos dos professores de Matemática, no que diz respeito à sua vida profissional, nos seus vários aspectos. Tanto num texto distribuído previamente como no decorrer da reunião a redacção salientou a necessidade de desenvolver entre os leitores da revista a prática da colaboração espontânea, através por exemplo do envio de artigos, pequenas notas e cartas, ou relatos de experiências.

Em reunião posterior, a redacção adoptou um conjunto de medidas relativas aos seus métodos de trabalho e planificou o seu trabalho para este ano. Entretanto foram convidados a fazer parte da redacção Rosário Ribeiro e José Manuel Matos.

Uma das decisões da redacção foi que o director da revista seria eleito entre os seus membros, por um período de três anos. A nossa colega Leonor Moreira, que desde há quatro anos tem dirigido com reconhecido exito a revista, pediu para ser substituída na redacção e na direcção. Foi eleito director para os próximos três anos Eduardo Veloso.

Como os nossos leitores certamente já notaram, a revista está a sair com algum atraso. Assim, este número, que corresponde ao quarto trimestre de 1990, sai em Maio de 1991. Contamos até ao fim deste ano recuperar este atraso.

Neste número colaboraram

Cristina Loureiro, Graciosa Veloso, Helena Osório, João Pedro da Ponte, Leonor Moreira e Maria José Costa.

Sobre o próximo número

Por falta de espaço não puderam sair neste número os artigos *Funções dos problemas no processo ensino/aprendizagem da Matemática*, de António Borralho, *Passeio pela cidade*, de Ana Vieira Lopes, António Bernardes e José Manuel Varandas e *MVT-CP: outra forma de brincar, descobrir a Matemática*, de Maria de Lourdes Ventura e Margarida Junqueira, pelo que serão publicados no próximo número.

Rectificando

Pedimos desculpa aos nossos leitores e colaboradores pelos seguintes erros referentes ao nº 16:

1. Na secção "Materiais na sala de aula" saíu uma gralha na questão 6. Assim, passamos a transcrevê-la:

"Os primeiros valores apresentados nesta ficha foram os da temperatura média do ar em Janeiro, em Fevereiro, etc., referentes ao período 1979-85. Repara que se está a falar de temperatura média num determinado mês e num período de seis anos...

Como é que imaginas que esta temperatura média é calculada?"

2. No artigo *Uso das calculadoras em trigonometria* há duas emendas a fazer:

- na pág. 29, na última expressão, que começa por D=(D/360)..., deve substituir-se o primeiro sinal "=" pelo sinal "-".
- na pág. 30, a meio da coluna central, em vez de -4/3=2nd tg deve ler-se -4/3=INV 2nd tg.

A capa deste número

A fotografia que escolhemos para a capa deste número foi extraída do livro *Sistemas de Moagens — Tecnologia Tradicional Portuguesa*, de Ernesto Veiga de Oliveira, Fernando Galhano e Benjamim Pereira, edição do INIC, 1983.

nº 16
4º trimestre
de 1990

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Director
Eduardo Veloso

Redacção
António Bernardes
Henrique M. Guimarães
José Manuel Matos
José Manuel Varandas
José Paulo Viana
Paulo Abrantes
Rosário Ribeiro
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
2500 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
António Bernardes

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Av. 24 de Julho, 134 - 4º
1300 Lisboa

A preparação da arte final foi executada num Mac II, cedido à APM pela Interlog, SA.

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Diz-me como avalias, dir-te-ei como ensinas...

Paulo Abrantes

O exame torna-se um objectivo, o que vem para exame um programa, o ensino da matéria para exame um método
Hans Freudenthal

No dia 21 de Dezembro, quando folheava um jornal diário, a minha atenção foi atraída por uma pequena notícia intitulada "Inferno dos exames acaba no Japão". A notícia, extremamente curiosa, começava assim: "Após ano e meio de deliberações, um comité de sábios apresentou um projecto de reforma do ensino no Japão destinado a pôr termo ao "inferno dos exames" que ameaça a saúde física e mental de numerosos alunos". Depois de referir a competição que o sistema gera entre os alunos para entrar nas universidades, o comité de sábios concluía que o ambiente educativo "provoca uma grande pressão psicológica sobre os alunos japoneses" e lamentava "a importância excessiva exigida às capacidades escolares".

Mas os exames não são o único problema a suscitar grande apreensão quando se pensa no ambiente educativo. Num artigo sobre a educação no seu país (a Dinamarca), Mogens Niss escreve que um grande desafio do futuro será evitar a discriminação entre os alunos perante a previsão de que, dentro de uns trinta anos, praticamente todos os jovens estudarão até ao final do ensino secundário: "Se se deseja que o desenvolvimento nas próximas três décadas seja democrático e não centrífugo, então ser-nos-ão exigidos enormes esforços em termos de reflexão, discussão, recursos e vontade política".

Se, em países como a Dinamarca, salvaguardar um sistema tradicionalmente democrático constitui uma preocupação, noutros discutem-se os efeitos sociais de praticar alguma discriminação. Num artigo publicado no nº 14 de *Educação e Matemática*, Rijkje Dekker fala das enormes diferenças entre os alunos do seu país pelo facto de todas as crianças entre os 4 e os 16 anos irem à escola, e comenta: "Na Holanda, reagimos mal às diferenças entre os alunos. Aos 12 anos de idade, no fim da escola primária, mandamos os nossos alunos para diferentes escolas secundárias... Muitas pessoas contestam este sistema que está constantemente sob discussão. Diversas escolas tentam, numa base experimental, outros sistemas...".

Estas reflexões lembraram-me que tinha acabado de sair um projecto do nosso Ministério sobre a avaliação dos alunos nos ensinos básico e secundário. Decidi-me a relê-lo e, de facto, lá estava, preto no branco: as reprovações têm que dimunuir mas, a partir do 7º ano, os alunos (mais fracos) poderão ser colocados em turmas onde estudem algumas disciplinas apenas a "nível introdutório"; a escolaridade até aos 15 anos é para todos mas alguns terão apenas um certificado de frequência que não lhes permite continuar a estudar; a avaliação é essencialmente formativa mas, desde os 10 anos de idade, expressa-se uma vez por período numa escala de 0 a 20; no final do 9º ano, será reposto um exame nacional; a diversidade de interesses é para respeitar mas há disciplinas que pesam mais na média do que outras;...

Estas medidas serão mesmo necessárias? Serão um tributo que precisamos de pagar em troca de uma maior "democratização" do sistema? Em Espanha, por exemplo, não há qualquer exame até ao fim do Ensino Secundário e a nova reforma — que alarga a escolaridade obrigatória para 10 anos — substitui a tradicional escala de 1 a 10 por uma escala qualitativa de seis níveis (quatro positivos) enquanto nas universidades se usa uma escala ainda mais reduzida de três níveis positivos.

Não me parece que este tipo de medidas seja uma consequência inevitável do alargamento da escolaridade... A menos que se pretenda alargar com custos mínimos em termos de recursos, formação de professores, reflexão e discussão sobre o que deve ser o ensino para todos, etc. Mesmo que a evolução, mostrando taxas de reprovações de "nível europeu", seja afinal mais "centrífuga" do que democrática.

Calculadoras na Educação Matemática
2ª edição, Novembro de 1990, 151 pp.
700$00 (sócios 500$00)

O computador na aula de Matemática
2ª edição, Agosto de 1988, 73 pp.
400$00 (sócios 280$00)

Cronologia Recente do Ensino da Matemática
3ª edição, Setembro de 1989, 94 pp.
520$00 (sócios 360$00)

O Geoplano na Sala de Aula
1ª edição, Agosto de 1988, 276 pp.
1175$00 (sócios 825$00)

Jogos, Enigmas e Problemas
2ª edição, Julho de 1988, 48 pp.
280$00 (sócios 200$00)

Mais Jogos, Mais Enigmas, Mais Problemas
1ª edição, Setembro de 1989, 64 pp.
290$00 (sócios 200$00)

A Matemática na Vida das Abelhas
2ª edição, Julho de 1988, 80 pp.
400$00 (sócios 280$00)

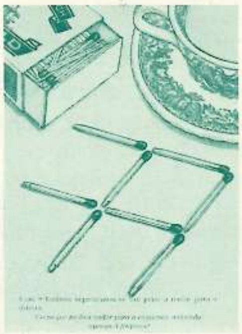
A Natureza da Matemática
1ª edição, Setembro de 1988,75 pp.
570$00 (sócios 400$00)

O Problema da Semana
4ª edição, Julho de 1988, 86pp.
520$00 (sócios 360$00)

PROFMAT nº 4
1ª edição, Janeiro 1989, 269 pp.
820$00 (sócios 580$00)

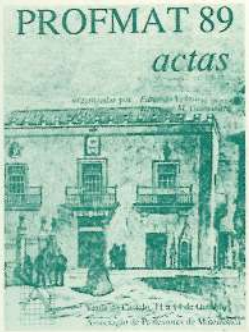
Renovação do Currículo de Matemática.
3ª edição, Abril de 1990, 112 pp.
570$00 (sócios 400$00)

Colecção de POSTAIS (com problemas)
16 postais
850$00 (sócios 600$00)



novo

novo



PROFMAT nº5
1ª edição, Setembro 1990, 493 pp.
2000$00 (sócios 1400$00)

Publicações — Envio pelo Correio

Envie fotocópia da ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para:

Associação de Professores de Matemática
Faculdade de Ciências de Lisboa
Av. 24 de Julho, 134, 4º, 1300 Lisboa

Viagem de Ida e Volta
1ª edição, Agosto de 1988, 56 pp.
400$00 (sócios 280$00)

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA
Agenda do Professor 1990/1991
1ª edição, Julho 1990, 144 pp.
530$00 (sócios 380$00)

Jogo "MAGIC STONE",
350$00

Educação e Matemática
nº1 a nº6
200$00
nº7 a nº12
250$00
nº13 e seguintes
400$00
Nota: Alguns números estão esgotados e são vendidos ao mesmo preço em fotocópias.

Títulos	Nº de Ex.	Preço Unitário (*)	Custo
		Subtotal	
		Portes do Correio (20 %)	
		Valor Total	

Sócio da APM ☐ Nº ☐ Assinatura
Não Sócio ☐ ______________________
Nome ______________________
Morada ______________________
______________________ C. P. ______________________
Data do pedido ______________________

Para uso da APM — Pedido recebido em ________
Assinatura — Enviado em ________

(*) As publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM.

Calculadoras gráficas — mais um desafio para renovar os currículos de Matemática

Graciosa Veloso

Os instrumentos tecnológicos, como o computador e a calculadora, vêm possibilitar novas formas de explorar conceitos fundamentais, vêm revalorizar os processos de compreensão, de análise crítica, secundarizando as técnicas de cálculo. As calculadoras gráficas poderão ser mais um desafio da mudança em que o professor e os alunos são protagonistas vitais.

Não creio que nem a qualidade nem a quantidade de ideias e projectos que temos, nasçam por geração espontânea e como uma actividade meramente individual. Provavelmente o prazer que se tem, as contradições que se experimentam, os compromissos que se fazem, as relações que se estabelecem, a forma como se vive todo o processo de gestação das coisas, será único para cada pessoa. Mas, tudo tem uma história, que embora colectiva, não abdica da participação de cada um(a), por mais constrangimentos que sintamos ou nos queiram fazer sentir.

Mas que tem isto a ver com o título do artigo? A razão é que sinto que provavelmente não escreveria este texto, se não fosse a experiência, para mim importantíssima, que há já algum tempo tenho vivido. Um programa de formação de professores com utilização educativa de calculadoras e folha de cálculo desenvolvido com colegas no ano lectivo passado, foi uma oportunidade única de reflexão e aprendizagem; o mestrado foi espaço de reflexão distanciada e balanço da experiência profissional, de estudo e confronto com problemáticas no campo da educação matemática, foi oportunidade de iniciar uma experiência de investigação em que as Tecnologias de Informação e as suas possíveis implicações no processo de renovação curricular da Matemática têm constituído um desafio em que me tenho encontrado e empenhado com outros.

Neste processo foram inesquecíveis as horas de trabalho com dois colegas, na preparação das acções de formação que dinamizámos no núcleo regional de Lisboa da APM, em 88/89, e da publicação *Calculadoras na Educação Matemática* (edição APM, Setembro 89). Os Profmat têm constituído também um espaço importante de participação e renovação de ideias e iniciativas. No Projecto Minerva comecei a utilizar processamento de texto com o apoio de uma aluna que pertencia ao núcleo da escola onde então trabalhava. Foi neste Projecto também, que comecei a pensar e a organizar actividades que propus aos alunos com utilização do computador. Foram pelo menos estas experiências e vivências recordadas que me ajudaram a solidificar algumas das convicções que actualmente balizam o meu jeito de intervir no colectivo da educação matemática. Assim, as preocupações educativas que orientam a minha participação no processo de renovação curricular da Matemática são basicamente as seguintes:

(a) É necessário e possível transformar a situação de crise do ensino da Matemática.

(b) *Todos os alunos* podem aprender e cada um é construtor das suas aprendizagens.

(c) A Matemática é uma ciência cuja história e finalidade é contribuir para o desenvolvimento humano e social. As aplicações da Matemática e a resolução de problemas são causa e efeito do desenvolvimento desta ciência.

(d) A intuição, a tentativa e erro são capacidades a utilizar nos processos de descoberta, de conjectura matemática.

(e) A exploração de situações problemáticas é um processo em que naturalmente para além de se tentarem respostas, se formulam questões.

(f) Quando se reconhece uma relação, se estabelece uma conjectura, se chega a uma conclusão, está em presença um encadeado de argumentos que contribui para o desenvolvimento de um pensamento crítico e independente.

(g) A natureza da Matemática e a da aprendizagem têm semelhanças suficientes que à primeira vista levariam a estranhar a situação pouco animadora do ensino da Matemática.

(h) O professor de Matemática é um orientador das aprendizagens dos alunos, preocupado com a organização de um ambiente agradável e estimulante. O professor faz parte de um grupo que dispõe de instrumentos vários para fazer Matemática. As aulas de Matemática são espaços em que a experimentação, a tentativa e o erro são elementos constitutivos do processo de trabalho em que cada grupo e cada um tem papel activo e responsável. O professor de Matemática está em formação permanente, com(o) os outros professores, porque gosta de aprender, gosta de aceitar desafios, a resolução de problemas é um bom exemplo e ... cada vez quer recuperar mais do prazer que não teve quando foi ensinado.

(i) As propostas de utililização do computador e da calculadora neste quadro de referência mobilizam esforços significativos nas áreas de formação de professores e de inovação curricular.

Renovação do ensino da Matemática e Tecnologias de Informação

Ao procurar rever em publicações nacionais relativas à Educação Matemática destes últimos cinco anos, o que se discutia, o que se comunicava como fruto da experiência e propunha ao nível da renovação do ensino da Matemática, compreendi que quanto à utilização do computador e da calculadora há actualmente três linhas de orientação fundamentais com as quais sinto bastantes afinidades: (a) a participação activa dos alunos no processo de aprendizagem, o desenvolvimento do gosto pela actividade matemática, nomeadamente no apreço da ciência e das suas relações com a realidade; (b) uma concepção da Matemática como uma ciência cuja dimensão social tem de implicar mudanças significativas a nível curricular, onde a resolução de problemas será o núcleo central de organização e de desenvolvimento; (c) a importância da formação contínua dos professores, encarada como um processo em que cada um é profundamente envolvido como protagonista dos projectos educativos que vai (re)criando com outros parceiros no processo de formação (Projecto Minerva, 1990).

No segundo Encontro Nacional de Professores de Matemática, promovido pela APM, Ponte (1986), em documento sobre a evolução da Educação Matemática em Portugal, coloca o computador e a calculadora como instrumentos poderosos e estimulantes no processo de construção do conhecimento e recomenda o estudo dos impactos da sua utilização educativa.

Fonseca (1987), explica o funcionamento de uma Folha de Cálculo Electrónica e propõe actividades em que se revelam potencialidades educativas importantes deste programa.

Moreira (1989), estudou as implicações da utilização da folha de cálculo electrónica no desenvolvimento das capacidades de formular e resolver problemas, com alunos do 6º ano de escolaridade. Entre as conclusões explicitadas é reconhecida a importância da folha de cálculo como ferramenta na descoberta de regularidades e na resolução de problemas por tentativa e erro.

Carreira & Tomé (1989), utilizaram sistematicamente a folha de cálculo electrónica na exploração de situações problemáticas durante um ano lectivo com alunos do 11º ano. Foi ultrapassada a expectativa das professoras, na medida em que a análise de dados por via numérica e gráfica estimularam entusiasticamente os alunos em investigações matemáticas.

Silva (1989), reafirma a importância da participação do aluno no processo de resolução de problemas, servindo a calculadora não só como intrumento de cálculo mas como um contributo para a exploração de situações mais ligadas à realidade.

Para além desta breve revisão senti uma certa curiosidade por procurar o que se tinha já produzido anteriormente a estes últimos cinco anos. Das leituras que fiz, pareceu-me que as propostas de utilização do computador e da calculadora, como instrumentos de mudança do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, que em Portugal começaram a ser feitas com maior incidência nos últimos cinco anos, articulam-se com propostas de renovação curricular iniciadas no país, no princípio da década de 80. Até aqui, o ensino praticado era essencialmente o do movimento conhecido por Matemática Moderna, lançado a partir de 1960 e caracterizado pela rigidez dos métodos associada a uma concepção da Matemática como ciência profundamente formal e estruturada.

St. Aubyn (1981), apresenta como causas importantes do "relativo insucesso" deste movimento, o carácter predominantemente dedutivo do ensino da disciplina, e a não participação dos professores dos graus de ensino não superior na formulação das propostas contidas na reforma da Matemática Moderna. Em 1981 a SPM publicou um documento que analisa e critica os programas pelo seu carácter formal, rígido, desligado da realidade e omitindo as aplicações. Ponte (1981), propõe as aplicações da Matemática como uma componente importante do ensino da Matemática, invocando como principais razões a natureza marcadamente social, o carácter evolutivo e dinâmico desta ciência, a par de uma concepção de aprendizagem centrada no aluno. Prosseguindo estas ideias, Abrantes & Ponte (1982), propõem como principais preocupações metodológicas para o ensino da Matemática a resolução de problemas. Os principais argumentos utilizados são o desenvolvimento de (a) capacidades de interpretar, analisar e decidir; (b) atitudes de curiosidade e gosto pelo pensamento independente.

Calculadora Gráfica

O estudo das funções é já um conteúdo clássico dos currículos de Matemática. Continua claramente a ser um conteúdo importante, nomeadamente a nível do ensino secundário. Mas os instrumentos tecnológicos, como o computador e a calculadora vêm possibilitar novas formas de explorar conceitos fundamentais, vêm revalorizar os processos de compreensão, de análise crítica, secundarizando as técnicas de cálculo. As calculadoras gráficas poderão ser mais um desafio da mudança em que o professor e os alunos são protagonistas vitais.

Que potencialidades tem uma calculadora gráfica?

As calculadoras gráficas são máquinas que facilmente fazem traçado de gráficos e permitem fazer estudos quer localizados, quer globais da função a que cada gráfico corresponde. São programáveis, com regras de programação geralmente simples e permitem também trabalhar as funções estatísticas e gráficos associados mais utilizados.

As calculadoras fazem já parte dos materiais utilizados em escolas do ensino básico e secundário, sendo encaradas e utilizadas de par com outros instrumentos, como computadores, livros, materiais de desenho, audio-visuais, por exemplo.

Embora o custo de uma calculadora gráfica seja mais elevado que o de uma científica simples, este facto não inviabilizará certamente a possibilidade da sua aquisição, dadas as suas potencialidades e as hipóteses que o mercado oferece.

Não pode ser ignorada a existência da calculadora, nomeadamente porque as suas capacidades gráficas constituirão motivo para reflexão e questionamento de concepções curriculares em que as técnicas de cálculo, numérico e algébrico, hegemonizam o processo de ensino da Matemática.

A calculadora gráfica é uma ferramenta para a resolução de problemas e para a exploração de conceitos.

Fomentar e desenvolver o gosto pela Matemática, e a capacidade de resolver problemas, são objectivos para os quais a utilização da calculadora gráfica se revela adequada. As metodologias a adoptar devem contemplar propostas de actividades e materiais que vão de encontro ao leque diversificado de interesses e processos de trabalhar dos alunos. Toda a gente tem uma preferência por utilizar a intuição de uma forma mais ou menos geométrica (é bastante comum ouvir-se dizer que um "esquema" ajuda a compreender e a ter ideias para resolver uma situação). A utilização das capacidades gráficas da calculadora pode constituir apoio significativo na resolução de problemas, na construção de conceitos, na descoberta de uma relação, na localização e estimação de raízes de equações ou inequações. As técnicas *zoom-in e zoom-out* permitem não só resolver graficamente muitas questões que habitualmente se fazem por processos algébricos, como também explorar novas situações.

A par de outros processos, os de visualização podem facilitar em muitos alunos a actividade de formular questões, estabelecer conjecturas e descobrir conceitos matemáticos importantes.

Analisar uma situação problemática, com recurso a processos geométricos e algébricos contribui com certeza para que o aluno compreenda mais profundamente o problema que está a estudar.

Com os exemplos que apresento de seguida pretendo clarificar o que acabei de referir.

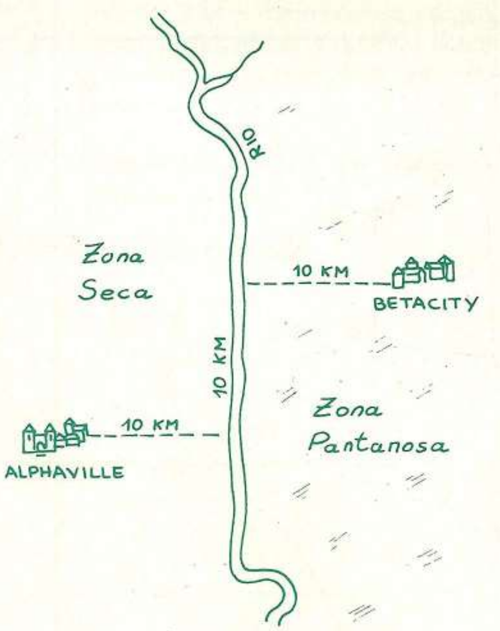
Os problemas de optimização são importantes não só porque traduzem aplicações da Matemática, como porque também constituem propostas para os alunos compreenderem e utilizarem conceitos e processos de raciocínio matemático relevantes. Sem deixar de reconhecer importância à utilização do estudo das funções derivadas em problemas de optimização, nem sempre esta estratégia se revela a mais adequada. Está neste caso a actividade proposta pelo colega José Paulo Viana no nº12 da revista Educação e Matemática, *Um caminho de ferro económico*, (pág. 28/30) – ver caixa.

Calcular a primeira derivada da função é tarefa morosa e sem interesse, que a não se fazer, impede o cálculo dos possíveis zeros.

A utilização da calculadora gráfica poderá revelar-se vantajosa, uma vez que o ponto óptimo procurado é facilmente localizável no gráfico correspondente à função que modeliza o preço do custo da construção da linha de caminho

Um Caminho de Ferro Económico

Um certo rio atravessa uma região em que de um dos lados o terreno é seco enquanto que do outro é pantanoso. Existem na zona duas cidades situadas conforme se indica no mapa da figura ao lado.
Pretende-se construir uma linha de caminho de ferro desde Alphaville até Betacity. O preço de cada quilómetro de via em terreno seco é de 1000 contos, mas na zona pantanosa a construção é K vezes mais cara.
Descobre, (com aproximação à centésima) em que local a linha deve atravessar o rio de modo que o preço total da obra seja o mais baixo possível"...



de ferro. Estou a pensar nos alunos que escrevem a expressão que traduz o preço da linha de caminho de ferro, em função da localização do ponto de separação dos dois terrenos.

Seria contudo precipitado considerar a proposta aqui apresentada como alternativa à da construção e análise da tabela numérica sugerida pelo Zé Paulo, uma vez que, ao contrário do que as aparências muitas vezes levam a supôr não é óbvio que os alunos do ensino secundário escrevam a expressão algébrica que define a expressão do gráfico.

Esta actividade, com as duas abordagens sugeridas tem grande probabilidade de envolver *todos os alunos* no seu processo de resolução. Este é também um motivo desta proposta, pois o ensino da Matemática é *para todos os alunos* deste grau de ensino.

O conceito de limite de uma função, por exemplo, pode com as potencialidades gráficas desta calculadora, ser explorado em contextos mais significativos que os reduzidos meios propiciados pelo simples papel e lápis.

Os gráficos das funções polinomiais seguintes têm relações que podes procurar. Que afinidades encontraste? E que diferenças? Como poderá explicá-las?

$y=x^2$ $\quad y=2x^2-3x$ $\quad y=-x^4$

$y=-x^4+x^3$ $\quad y=5x^3$

$y=5x^3-3x^2+x$ $\quad y=-7x^5$

$y=-7x^5-3x^4$

Com base nas explorações anteriores é possível estabelecer alguma conjectura quanto ao limite de qualquer função polinomial quando a variável x tende em valor absoluto para $+\infty$

Relativamente a este tipo de actividades há a salientar que cada utilizador tem a possibilidade de experimentar rapidamente um conjunto de situações que ele pode criar, o que torna a actividade mais personalizada. Por outro lado, para esta situação, mostra-se adequada a visualização gráfica global (graphing zoom-out). *Zoom-out* é um método que permite visualizar rapidamente o comportamento global ou assimptótico de uma função, pela visualização do gráfico em écrans sucessivos, em que cada um contém o anterior.

O método *zoom-in* permite fazer um estudo ampliado de uma "porção" do gráfico seleccionada. Com este processo consegue-se uma visualização sucessiva do gráfico em écrans sucessivos, ficando cada um contido no anterior. Vejamos uma possível aplicação destes processos.

Quais serão as soluções da equação $2^x=x^4$?

Nesta actividade foi uma surpresa o número de soluções!

Comecei por considerar a função $y = 2^x - x^4$ e o primeiro gráfico que obtive foi o da figura 1.

Mas estariam aqui contidos todos os zeros? A visão global do gráfico (*zoom-out*) foi adequada para ter uma ideia do número de zeros da função (fig. 2a e 2b).

Após isto, há que estimar o valor de cada uma das *três* raízes. A raíz de maior

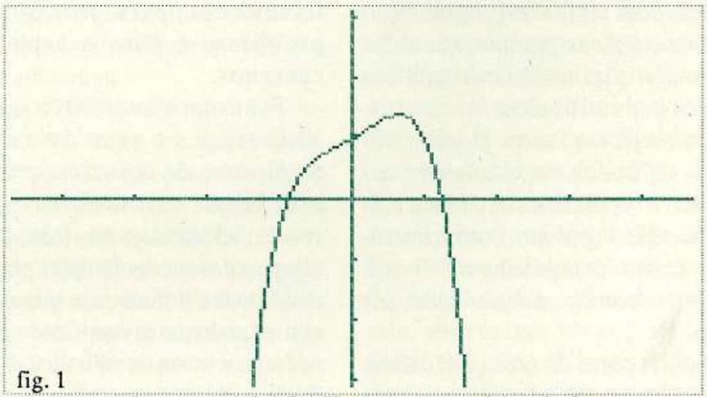


fig. 1

eixo dos xx': [-4.7,4.7]; eixo dos yy': [-3.1, 3.1]

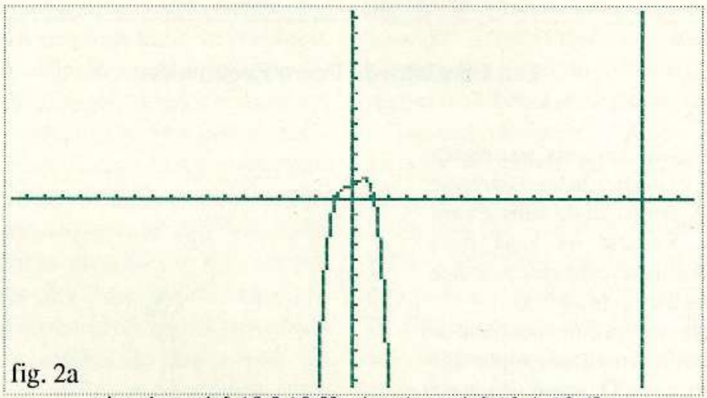


fig. 2a

eixo dos xx': [-18.8,18.8]; eixo dos yy': [-12.4, 12.4]

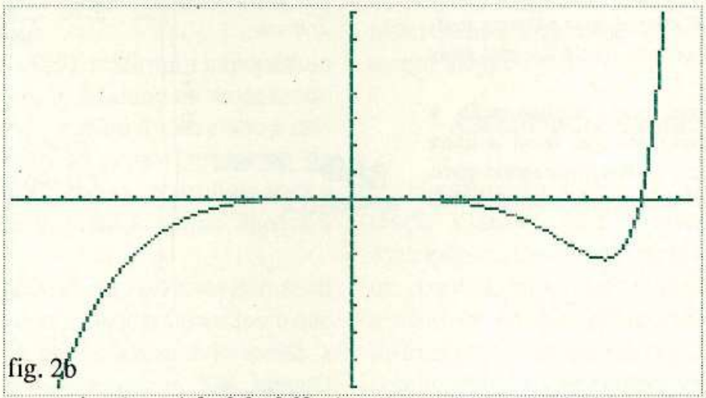


fig. 2b

eixo dos xx': [-18.8,18.8]; eixo dos yy': [-70.000, 70.000] valor obtem-se neste caso rapidamente, utilizando a função **TRACE**.

Para a localização de cada uma das outras duas raízes poderá utilizar-se o método *zoom-in*, a partir do gráfico da fig. 1. Utilizando novamente a função **TRACE**, poderá dizer-se que uma das raízes é aproximadamente - 0.87 (fig. 4).

A versatidade deste tipo de calculadora permite que não haja necessariamente restrições *a priori*, quanto ao tipo de funções a estudar. Particularmente quanto às funções polinomiais terá interesse que as funções lineares e quadráticas sejam vias de construção de outras funções que se relacionem com elas por utilização de operações.

Algumas explorações matemáticas

Para terminar este conjunto de exemplos, mais dois que envolvem situações de exploração que habitualmente não é possível fazer sem utilitários gráficos.

É possível, graças à rapidez da máquina no traçado de gráficos, fazer explorações de conceitos e estabelecer relações que habitualmente eram feitas com o uso de técnicas numéricas e analíticas. Do ponto de vista da participação dos alunos, a possibilidade de utilizarem a abordagem gráfica, permitir-lhes-à colocarem-se questões e construirem respostas que dificilmente se conseguem num contexto de utilização de papel e lápis. O exemplo seguinte pretende fundamentar esta sugestão.

Desenha os gráficos das funções

$y = \sin x$ $\qquad$ $y = \sin x + 4$

$y = \sin (x-3)$ $\qquad$ $y = \sin (x+2)$

$y = -2 \sin (x+5)$

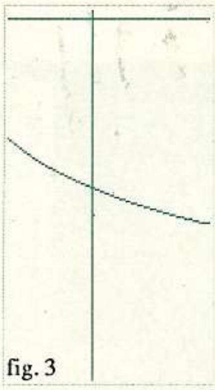


fig. 3

eixo dos xx': [-1.84, 0.04]
eixo dos yy': [-0.72, 0.52]

Prevê o gráfico da função

$$y = a \sin (x + b),$$

em que *a* e *b* são números reais.

Explorações deste tipo ajudarão os alunos no desenvolvimento da interpretação geométrica do papel de parâmetros *a*, *b* e *c* no traçado do gráfico de funções do tipo $y = a \sin (x + b) + c$, a partir do gráfico de $y = \sin x$.

Será que o papel de cada um destes parâmetros se mantém em qualquer função $y = a f (x + b) + c$? Experimente com as funções $y = x$, $y = | x |$, $y= x^2$, $y = 1/x$.

Um outro tipo de exploração que pode ser feito é, como no caso a seguir, a partir do traçado de um gráfico, descobrir uma expressão analítica que o defina.

O gráfico da figura 4, que expressão analítica pode ter?

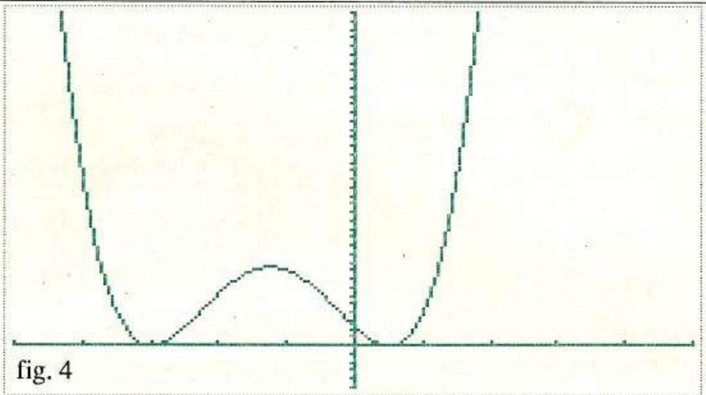


fig. 4

eixo dos xx': [-5, 5]; eixo dos yy': [-5, 40]

Gostava de dizer que me deu muita satisfação escrever este artigo, porque correspondeu a um certo balanço da minha intervenção profissional, porque descobri mais algumas potencialidades da calculadora gráfica, porque espero que algumas colegas (pelo menos quatro...) continuem a participação sobre esta temática.

Referências

Abrantes & Ponte (1982). Os Problemas no Ensino da Matemática. *Actas do Colóquio "O Ensino da Matemática nos anos 80"*.

Demana & Waits (1990). The Role of Technology in Teaching Mathematics. *Mathematics Teacher*, Volume 83, número 1.

Fonseca, E. (1987). *Vamos Trabalhar com a Folha de Cálculo*. Lisboa: Projecto Minerva, DEFCUL.

Matos, J. M. (1986). *Cronologia Recente do Ensino da Matemática*. Lisboa: APM.

Moreira, M. Leonor (1989). *A Folha de Cálculo na Educação Matemática*. Lisboa: Projecto Minerva, DEFCUL.

National Research Council (1989). *Everybody Counts*. Washington: National Academy of Sciences.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Ponte (1981). Interdisciplinaridade: A utilização das aplicações no ensino da Matemática. *Inflexão*, nº 2.

Ponte (1986). Investigação, Dinamização Pedagógica e Formação de Professores - Três Tarefas Para a Renovação Da Educação Matemática. *Profmat nº 2*.

Projecto Minerva (1990). *Actividades e Organização*. Lisboa: DEFCUL.

Silva, Albano (1989). Calculadoras na Educação Matemática - contributos para uma reflexão. *Educação e Matemática*, nº 11.

St. Aubyn (1981). Matemática Moderna em crise? *Inflexão*, nº 2.

Tomé, G. e Carreira, S. (1989). *Quod Novis*. Lisboa: APM e Projecto Minerva, DEFCUL.

Viana, José Paulo (1990). Materiais para a aula de Matemática. *Educação e Matemática*, nº 12.

Graciosa Veloso
Esc. Sec. da Cidade Universitária

Funções "escondidas"

Cristina Loureiro
Maria José Correia de Oliveira

> O conceito de função é dos mais ricos e interessantes de toda a Matemática. Interessante porque está ligado a imensas situações de aplicação, quer exteriores, quer interiores à própria Matemática. Rico porque envolve muitos outros conceitos e permite estabelecer ligações com áreas de conhecimento matemático habitualmente encaradas separadamente. Além disso, uma função é e será sempre um instrumento matemático fundamental.

Mas é exactamente porque as funções são intrumentos ricos e interessantes que elas permitem explorações motivadoras e plenas de potencialidades formativas. Muito embora a sua riqueza, do ponto de vista matemático, exija uma formalização elaborada, o seu interesse permite uma abordagem informal e concreta, a partir da resolução de problemas ou da exploração de situações bastante simples.

Neste tipo de abordagem não é preciso, nem desejável, usar o termo "função", embora seja essencial explorar aspectos inerentes ao conceito de função, como por exemplo: entrada/saída e respectivos valores possíveis; tipos diversos de variação; representação e análise de gráficos.

Por estas e por muitas outras razões, é possível e desejável trabalhar com funções em qualquer nível de escolaridade matemática, mesmo quando as funções não fazem parte dos objectivos, dos conteúdos ou temas do programa. É por isso que propomos trabalhar com funções quando as funções estão "escondidas". Mas quando? A partir de quê? De que maneira?

Julgamos que há três referências essenciais quando se pretende explorar e construir o conceito de função com os nossos alunos: problemas, tabelas e gráficos. A primeira questão é encontrar bons problemas, adaptados ao nível de desenvolvimento dos alunos e, se possível, enquadrados pelas situações ou temas programáticos. A segunda questão é como explorar esses problemas tendo em vista a construção do referido conceito. Apresentamos a seguir algumas situações possíveis de explorar no 2º ciclo de escolaridade, em que uma calculadora simples pode dar ajudas preciosas.

1 - Compras na padaria

Na padaria do Sr. Tomé, reparei que estava afixada na parede uma tabela de preços, muito suja e meio rasgada.

Vi logo que era uma tabela desactualizada, olhei para ela várias vezes e comecei a pensar: será que com os 500$00 que aqui tenho para comprar agora 40 pães, conseguiria comprar 80 pães ao preço antigo?

Nº de Pães	Preço	Nº de Pães	Preço	Nº de Pães	Preço
1		11		21	1[illegible]
2				22	
3				23	
		14		24	
		15		25	
	39$00	16		26	
	45$50	17			
	52$00	18			

2 - A campanha do Sr. Barnabé

O Sr. Barnabé, que é proprietário de um minimercado, decidiu fazer uma campanha de promoção de vendas. Para isso pensou fazer uma distribuição de folhetos publicitários por todas as caixas de correio do bairro.

Para esse trabalho de distribuição contratou o João e o Jaime, dois miúdos seus vizinhos que estavam de férias. Combinou com eles que lhes pagaria de acordo com a seguinte tabela:

Número de folhetos distribuídos	100	200	300	400	500	600	700
Pagamento em escudos	300	400	550	750	1000		

O João e o Jaime esforçaram-se bastante, foram até a alguns prédios dos bairros vizinhos, e conseguiram distribuir 2500 folhetos. E fizeram-no com muito cuidado, não esquecendo nenhuma caixa de correio nem deitando mais do que um folheto por caixa, pois o Sr. Barnabé não iria gostar da graça se viesse a saber.

Afinal de contas, que quantia conseguiram receber os dois amigos?

Perante os cálculos efectuados para obter a quantia que ganharam, o João e o Jaime, comentaram que bem tinham valido o esforço os últimos 100 folhetos entregues!

3 - Poupanças diabólicas

A Luísa decidiu juntar dinheiro. Começou por guardar duas moedas de um escudo e duplicou, todos os dias, a sua pequena fortuna. Que quantia tinha a Luísa ao fim de 10 dias?

Mas o seu irmão Luís, ao ver crescer as economias da Luísa, decidiu também poupar dinheiro segundo o mesmo esquema, com a esperança de conseguir prolongar a poupança durante 20 dias, o que, infelizmente, não aconteceu. Que quantia teria conseguido poupar o Luís, se tivesse economizado até ao fim desse tempo?

És capaz de encontrar uma explicação para o falhanço do Luís?

Tenta arranjar um plano de poupança semelhante a estes, mas que permita prolongar o tempo de duração por mais de 20 dias.

4 - Um passeio de bicicleta

O João e a Maria resolveram dar um passeio de bicicleta, mas só tinham uma bicicleta...

A Maria sentou-se atrás, no suporte, e lá partiram. Ao fim de 1 hora, quando já tinham andado 8 Km, a Maria, incomodamente instalada, e o João, cansado, tomaram a decisão de se separarem.

A Maria, sem demoras, voltou calmamente para casa a pé, a uma velocidade média de 3 Km/h. O João descansou 1/4 de hora e continuou o seu passeio. Andou mais 12 Km durante 1 hora, deu meia volta e voltou para casa o mais depressa possível, a 20 Km/h, para tentar apanhar a Maria ainda no caminho. Será que conseguiu?

Alguns comentários

Os dois primeiros problemas permitem confrontar dois tipos de variação muito diferentes, e por isso pensamos que devem ser propostos um a seguir ao outro. A tendência dos alunos é generalizar a utilização da proporcionalidade directa a todas as situações; ora parece-nos que eles devem desenvolver a capacidade de a utilizar criticamente a partir da possibilidade e da impossibilidade de o fazer em situações significativas. Além disso, a variação da função subjacente ao segundo problema parece-nos poder desencadear discussões interessantes: Não será que, para os dois amigos, valia a pena terem entregue ainda mais 100 folhetos? E para o Sr. Barnabé? E se os rapazes estivessem dispostos a prolongar a distribuição de propaganda, será que o Sr. Barnabé estaria pelos ajustes de continuar a utilizar a mesma tabela de pagamento?

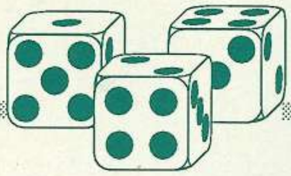
Quanto ao terceiro problema, o que está em jogo é o crescimento demasiado rápido de uma função exponencial. Mas basta construir uma tabela simples para se ter essa percepção de modo extremamente sugestivo, os números falam por si e mostram a impossibilidade real de continuar o plano de poupança. No entanto, a sugestão para imaginar outros esquemas semelhantes de obtenção de economias pode permitir o confronto entre o crescimento aritmético e o crescimento geométrico.

Já quanto ao último problema, a estratégia de resolução será a elaboração de um gráfico. Este permite comparar visualmente os percursos dos dois amigos, possibilitando até que sejam colocadas outras questões. Se o João tivesse estado parado mais um quarto de hora, teria a Maria chegado primeiro? A que velocidade média deveria ter andado a Maria para ter chegado ao mesmo tempo ou primeiro que o João, tendo este estado parado apenas um quarto de hora?

Estas são apenas algumas situações, que nos parecem extremamente estimulantes para os nossos alunos do 5º ou do 6º anos, e até mesmo do 7º, e em que consideramos estarem presentes aspectos muito significativos do trabalho com funções.

O que consideramos fundamental reforçar relativamente a todas estas situações, é que, mobilizando apenas conhecimentos sobre operações numéricas, os alunos podem resolver problemas ricos e interessantes do ponto de vista matemático. Estes exemplos permitem-nos dar mais uma achega à ideia de que não são necessários muitos conhecimentos matemáticos para viver experiências matemáticas significativas.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa
Maria José Correia de Oliveira,
Escola C+S Francisco Arruda



À procura de quadrados

Rosário Ribeiro

Propomos para este trimestre um jogo que encontrámos no livro "Divertimentos matemáticos" de Brian Bolt (Editorial Labor, Barcelona).

Nº de jogadores: 2

Material: Este jogo pode jogar-se numa folha de papel quadriculado. Para isso basta que se desenhe nela um quadrado de 6 x 6, ou maior.

Regras: Os jogadores vão pondo nas quadrículas, círculos e cruzes alternadamente e ganhará a partida o primeiro jogador a conseguir que quatro dos seus sinais ocupem os vértices de um quadrado.

Na partida representada na figura 1, ganhou o jogador que usou círculos.

Uma variante do jogo consiste em continuar a jogar até que todo o tabuleiro esteja marcado e depois verificar qual foi o jogador que fez mais quadrados.

Ainda outra alternativa é jogar de maneira a não formar quadrados. Perde primeiro o jogador que se vê forçado a construir um quadrado.

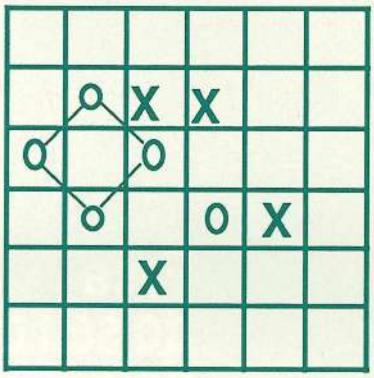


Fig. 1

Nota: Não nos podemos esquecer que, além dos quadrados de lados paralelos aos lados do tabuleiro, há também os de lados inclinados, como se pode ver na figura 2.

Comentários: Este jogo que vos propomos é bastante simples, pelo que poderá ser jogado por crianças desde o ensino primário.

Deixamos aqui este desafio:

De quantas maneiras se pode formar um quadrado num tabuleiro de 6 x 6 ?

Esta é, com certeza, uma tarefa difícil para as crianças da 1º fase, mas poderá despertar muito interesse às crianças da 2ª fase.

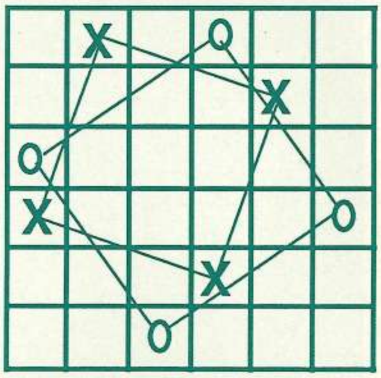


Fig. 2

Mais jogos no Centro de Recursos da APM

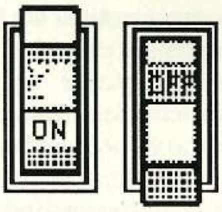
O Centro de Recursos da APM tem à sua disposição novos jogos e quebra-cabeças.

Todo este material que, a seguir, referimos, encontra-se à venda, mas poderá também ser requisitado pelos sócios:

- ***Prisioneiro*** **(em madeira: 1200$00; em plástico: 350$00)**
- ***Quatro em linha*** **(em madeira: 3000$00)**
- ***Juntos*** **(em madeira: 1200$00)**
- ***Cruz*** **(em madeira: 1200$00)**

Alguns *'sim'*, *'mas'* e *'talvez'*, a propósito do ensino das funções
- começo de um debate? -

A propósito do artigo 'O conceito de função no currículo de Matemática' ,da autoria de João Pedro da Ponte, publicado no número anterior de Educação e Matemática, *Eduardo Veloso escreveu uns* 'sins' *e alguns* 'mas'. *João Pedro da Ponte leu e retorquiu. Publicamos a seguir o que ambos nos fizeram chegar. Iniciar-se-á, desta maneira, um debate mais alargado a este propósito? Talvez...*



Sim, sim, mas...

Eduardo Veloso

Do último número de Educação e Matemática, dedicado às funções, permito-me destacar o artigo de J. Pedro Ponte, intitulado "O conceito de função no currículo de Matemática". Deste importante e estimulante artigo uma parte é dedicada precisamente às "funções no currículo de Matemática" e é a este respeito que gostaria de fazer alguns comentários — correspondentes ao "sim,sim" do título desta nota — e acrescentar algumas observações — correspondentes estas ao "mas"...

Vejamos primeiro o "sim, sim". Passei alguns meses da minha vida, no período militante da Matemática Moderna (MM), a tentar explicar aos tele-espectadores portugueses (quantos?), no horário nobre das sete da tarde, durante meia hora, o conceito de função *como devia ser* — "são dados dois conjuntos A e B, e uma lei..." ou, ainda melhor, "consideremos um subconjunto do produto cartesiano AxB verificando a condição..." — e dando em seguida os clássicos exemplos das funções *pai*, *avô paterno*, etc.. Reconheço hoje que *nesse aspecto*, e certamente noutros, as orientações da MM estavam erradas. Foi sobretudo completamente irresponsável e absurda a generalização e "trivialização", como lhe chama J. Pedro Ponte, que se seguiu a esses tempos pioneiros, quando as *bolinhas e setas*, erigidas em esquema absoluto, invadiram todos os níveis de ensino desde o primário. Acredito hoje que a *base concreta* a partir da qual devemos *começar* a ajudar cada aluno a ir construindo o conceito de função deverá ser constituída pelas funções numéricas.

A experiência que já temos, no projecto MAT_{789} — ver Leonor Cunha Leal, *Funções no terceiro ciclo do ensino básico- uma possível abordagem*, no mesmo número da revista — confirma também grande parte das linhas de orientação apontadas por J. Pedro Ponte — nomeadamente a importância dos aspectos quantitativos, da construção de tabelas, da aquisição da sensibilidade quanto às aproximações e da articulação permanente entre as várias representações (numérica, gráfica, analítica), com o estudo analítico "a surgir com base em actividades sistematicamente feitas a partir das representações numérica e gráfica". Portanto, até aqui, muitos "sim"...

Vejamos agora o "mas...". Considero que pelo menos dois aspectos do problema "funções no currículo" merecem uma atenção que não lhes é concedida no artigo que estamos a comentar — ou, pelo menos, uma maior atenção.

Um desses aspectos refere-se ao carácter algorítmico que pode ser associado a cada função. Parece-me que a importância da função como algoritmo não está relacionada apenas com o facto de ser esse o aspecto considerado nas Ciências da Computação mas principalmente, do ponto de vista educativo, de que essa visão dinâmica da relação funcional é facilmente aceite e compreendida pelos alunos, no início do terceiro ciclo do ensino básico e talvez mesmo antes. Uma função numérica pode ser apresentada de modo intuitivo como uma *máquina* chamada *f* que *transforma* cada número x que lhe fornecemos no número $f(x)$. Essa máquina pode ser facilmente simulada por um pequeno programa de computador. No projecto MAT_{789} , foi esta precisamente a primeira abordagem que se fez do conceito de função, com resultados que consideramos muito positivos (v. artigo citado de L. Cunha Leal).

Um outro aspecto não considerado no artigo de J. Pedro Ponte, refere-se a um ponto de vista sobre o ensino das funções, em meu entender correcto e fundamental, que estava pelo menos implícito no movimento da M.M. — embora não passado à prática nos programas vigentes — e que seria muito negativo se fosse deitado para o lixo juntamente com as *bolinhas e as setas*... Quero referir-me à perspectiva de que para a compreensão do conceito de função existem dois aspectos essenciais e complementares, que resumirei da seguinte forma:

• no primeiro aspecto, as funções são consideradas *uma de cada vez*, e explicitadas e representadas nas várias formas possíveis, tal como está extensa e exemplarmente explicado no artigo que estamos a comentar;

• no segundo aspecto, as funções tornam-se objectos da Matemática *relacionáveis e combináveis.*

Seria errado, no meu entender, desprezar, no ensino das funções, mesmo elementar, este segundo aspecto. É certo que ele apenas se explicitou neste século, é precisamente uma conquista e das mais importantes da Matemática contemporânea. Mas seria mau que os alunos do ensino básico ficassem, a este respeito, na Matemática do século passado, estando a do nosso século reservada para os que prosseguem os seus estudos. Parece-me claro que o primeiro aspecto, no ensino, deve preceder obrigatoriamente o segundo, e que este deve ser abordado de modo muito intuitivo e elementar. Mas seria ficar a um nível muito *rasteiro* e insuficiente ocuparmo-nos apenas do primeiro aspecto. Tal como para conhecer uma paisagem nos elevamos a um ponto alto, com o fim de *ganhar perspectiva*, no estudo das funções devemos dar, por pequeno que seja, um passo no mesmo sentido, elevando-nos de **f(x)** para **f**, e depois considerando duas funções **f** e **g**, procurando os valores de x para os quais são iguais, tentando dar significado a **f + g** e **f.g**, etc..

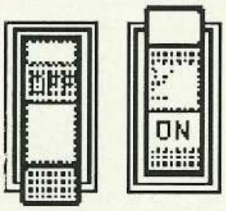
Tudo isto pode e deve ser feito sem formalismos desnecessários, de modo intuitivo, experimental e com grande apoio nas representações gráficas. Pode por exemplo estudar-se a função **f(x) = 2x** e traçar-se o seu gráfico. Depois dar um exemplo de uma função constante, a função **g(x)=1**. O seu gráfico também pode ser traçado. Que poderá significar **f+g**, podemos mesmo dizer **f+1**? Qual será o seu gráfico? Como pode ser obtido a partir dos dois gráficos? Numa ocasião posterior, **f** e **g** já são outras funções, **f(x)=x** e **g(x)=-1**. Traçamos os seus gráficos. Que significará o produto **f.g**? Como será o seu gráfico? Sendo **f** agora uma função qualquer, por exemplo dada pelo seu gráfico, qual será o gráfico da função **-1.f**?

Julgo também que a composição de funções deve ser abordada, embora, está claro, de forma intuitiva e não técnica. Na realidade, estamos perante uma nova forma característica de combinar objectos matemáticos. Se o conceito de função foi inicialmente abordado no seu aspecto algorítmico, a composição de funções é uma operação quase trivial — é fácil imaginar duas máquinas encadeadas, em que o que sai de uma dá entrada na outra... Os alunos do projecto MAT_{789} tiveram o seu primeiro contacto com a composição de funções no decorrer de um teste, e consideramos a experiência positiva (v. artigo citado de L. Cunha Leal). Julgo que as transformações geométricas, que inicialmente devem ser abordadas numa perspectiva não funcional, podem constituir um bom material para encontrar exemplos interessantes da composição de funções, num processo essencialmente matemático de simplificação e enquadradamento num esquema unificador.

Parece-me que assim, e relativamente ao conceito de função, o currículo de Matemática pode cumprir um dos seus objectivos mais relevantes — o de ajudar a adquirir progressivamente, por parte dos alunos, a compreensão da natureza e da importância dos objectos e dos processos matemáticos, nomeadamente dos mais actuais.

Eduardo Veloso
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências de Lisboa

Sim e não (ou talvez)



João Pedro Ponte

Agradecendo os diversos "sins" manifestados por E. Veloso em relação ao meu artigo no número anterior da revista Educação e Matemática, creio merecerem alguns comentários os "mas" entretanto levantados.

Começarei pelo segundo, que me parece francamente mais simples. A adição, subtração, multiplicação e divisão de funções são temas que devem ser abordados no ensino secundário (eventualmente de forma muito elementar no 3º ciclo do ensino básico). A composição de funções pode ser igualmente tratada, embora, como conceito mais delicado, exija os necessários cuidados. Neste ponto não haverá grandes discordâncias, com a ressalva de que, na minha opinião, não se tratam de "conquistas da Matemática do Século XX" mas antes de aspectos do conceito de função que estão presentes desde a sua origem. Lembremos que, por exemplo, já Leibniz trabalhava com produtos de funções, tendo tido aliás grande dificuldade em acertar com a regra da derivada do produto, que imaginava seguir uma lei do tipo D(fg)=(Df) (Dg). O uso de uma notação moderna, obviamente vantajoso neste caso, não nos deve fazer esquecer a origem concreta dos conceitos.

Passemos então à outra questão. O conceito de algoritmo constitui uma perspectiva nova e prometedora, alimentada pelo desenvolvimento das Ciências da Computação. Por um reforço da perspectiva algorítmica da Matemática escolar se têm batido alguns matemáticos, como A. Engel. Mas o facto é que dispomos ainda hoje de reduzidas indicações concretas sobre o valor pedagógico desta abordagem.

Apresentar uma função como um algoritmo só poderá ter interesse se isso vier a dar origem ao estudo de diversos algoritmos e das suas propriedades. Como procurei defender no artigo em causa, não serve de nada falar de conceitos que não são devidamente explorados. Poderá satisfazer o nosso sentido estético mas a realidade é que os alunos nem sequer se chegam a aperceber do seu verdadeiro significado. O objectivo do ensino da Matemática não é apresentar umas tantas ideias consideradas muito importantes para simples contemplação, sejam elas modernas ou antigas, mas sim constituir uma base conceptual rica em oportunidades de problematização, exploração, investigação, dedução e aplicação. Mas a apresentação das funções como algoritmos não é indispensável para a introdução deste conceito (de resto já conhecido desde o 1º ciclo do ensino básico), tal como no estudo das transformações geométricas estas não têm que ser necessariamente consideradas como funções. A ideia de algoritmo é conceptualmente bastante diferente da ideia de função numérica como correspondência entre dois conjuntos dada por uma expressão analítica (simples ou composta). Recordemos que a execução de um algoritmo comporta um número variável de passos, muitas vezes em sequências bastante distintas, conforme os valores iniciais dados. Num algoritmo interessa saber se termina ao fim de um número finito de passos, se resolve o problema proposto, se é eficiente (segundo diversos critérios). Numa função numérica interessa saber se tem zeros, intervalos de monotonia, assímptotas, se é contínua, etc. Só mais tarde, quando estes conceitos estiverem suficientemente trabalhados é que poderá haver interesse na sua unificação num quadro conceptual mais alargado.

Funções como algoritmos? Se for apenas para dar o exemplo das "máquinas de transformação" o efeito poderá até ser negativo, levando a uma maior confusão sobre o que é um algoritmo. Quanto ao estudo dos algoritmos, isso é outra questão: investigue-se, façam-se experiências de natureza curricular, avalie-se do interesse educativo desta abordagem. Quando houver dados que permitam uma certa margem de segurança, decida-se pela sua inclusão ou não nos currículos, e como.

João Pedro Ponte
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências de Lisboa

Em Memória de Hans Freudenthal

No passado dia 13 de Outubro, morreu uma das maiores figuras da Educação Matemática das últimas décadas — Hans Freudenthal.

Embora conhecido mundialmente como holandês, Freudenthal nasceu em Luckenwalde, na Alemanha, a 17 de Setembro de 1905. Estudou nas Universidades de Berlim e Paris, tendo depois ido viver e trabalhar para Amsterdão. Em 1946 ocupou um lugar de professor na Universidade de Utrecht. O seu trabalho, como matemático, foi dedicado especialmente à Geometria e aos fundamentos da Matemática.

A partir de 1955, o seu centro de interesses começou a deslocar-se da Matemática para a Educação Matemática. Foi representante da Holanda no ICMI, de que veio a ser presidente entre 1966 e 1970. Em 1968, iniciou a revista *Educational Studies in Mathematics* com a publicação das actas do colóquio "How to teach mathematics so as to be useful". Foi depois director do IOWO que veio a originar o grupo de investigação OW&OC de Utrecht.

Freudenthal escreveu dezenas de livros e artigos sobre educação matemática nas últimas décadas que influenciaram decisivamente o rumo que esta área veio a tomar, não só na Holanda como em


H. Freudental e A. -Z. Krygowska no CIEAEM de Leiden em 1985 (Foto de H.M.Guimarães)

todo o mundo. O seu livro *Mathematics as an Educational Task* (1973) é um marco histórico. Uma das ideias que sempre acompanhou o seu trabalho foi a de que as crianças nos podem ensinar muito e que é preciso observar vezes sem conta os processos individuais de aprendizagem. A paciência é uma das grandes virtudes pedagógicas, escreveu ele num dos seus livros.

Embora se tenha reformado em 1975, continuou a trabalhar até morrer com 85 anos de idade. No dia 12 de Outubro, foi pela última vez ao seu gabinete nas instalações do OW&OC. O seu último livro está ainda por publicar; intitula-se *Revisiting Mathematics Education* e sairá em 1991.

Freudenthal morreu num sábado de Outono, sentado num banco do jardim onde costumava passear com os netos, a ler o seu jornal preferido — jornal onde publicou não só muitos artigos sobre educação mas também diversos poemas, contos e ensaios.

Os trabalhos de Freudenthal são uma referência essencial para todos aqueles que se dedicam à educação matemática. E o seu estudo é seguramente a melhor forma de homenagear a grande figura que ele foi.

Paulo Abrantes

Publicações APM

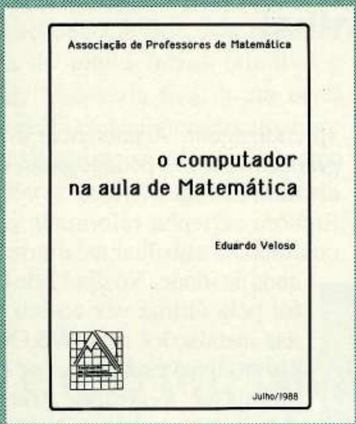
Calculadoras na Educação Matemática
Albano Silva, Cristina Loureiro e Graciosa Veloso

O computador na Aula de Matemática
Eduardo Veloso

Cronologia Recente do Ensino da Matemática
J.Manuel Matos

O Geoplano na Sala de Aula
Lurdes Serrazina e J.Manuel Matos

Jogos, Enigmas e Problemas
Odete Bernardes e Paula Teixeira



Mais Jogos, Mais Enigmas, Mais Problemas
Odete Bernardes, Paula Teixeira, Pedro Esteves e José Paulo Viana

A Matemática na Vida das Abelhas
Ana Luisa Teles, Ana Vieira, Aniss Ali e Fátima Antunes

A Natureza da Matemática
Primeiro volume da colecção *Cadernos de Educação Matemática*

O Problema da Semana
Maria João Costa

Viagem de Ida e Volta
Paulo Abrantes

Renovação do Currículo de Matemática
Textos do Seminário de Vila Nova de Milfontes

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA
Agenda do Professor 1990/1991
Ana Vieira Lopes, António Bernardes e J.Manuel Varandas

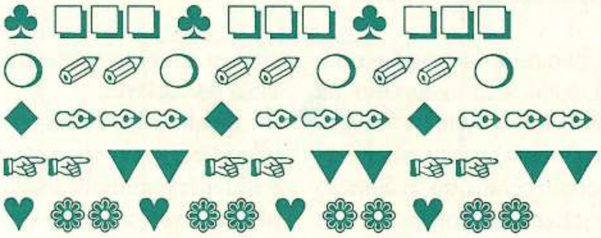
Veja na página 2 a lista completa das publicações, que inclui as últimas novidades. Nela encontrará também a ficha de pedidos para envio pelo correio.

Os alicerces do pensamento algébrico

Leonor Moreira

As bases conceptuais em que deve assentar o pensamento algébrico e a construção dos conceitos de função e de variável devem ser lançadas logo nos primeiros anos de escolaridade. A ideia de função pode ser desenvolvida intuitivamente, a partir do reconhecimento de regularidades em acontecimentos, formas ou conjuntos de números e da generalização e criação de padrões.

Reconhecer uma regularidade pode consistir na previsão do que se segue, numa sequência de acontecimentos, expandindo assim essa mesma sequência.



Propositadamente, nesta figura, a primeira e a terceira sequências são representações diferentes do mesmo padrão, o mesmo se passando com a segunda e a quinta a respeito de outro padrão. Finalmente a quarta não tem aí similar. Propostas deste tipo permitem que as crianças identifiquem a estrutura de cada um dos padrões considerados. As diferentes estruturas consideradas no exemplo podem ser descritas verbalmente como:

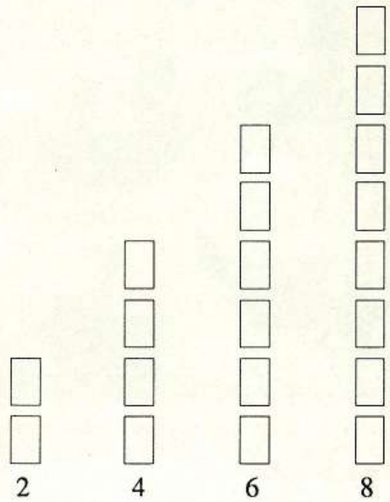
um / um, dois, três / um / um, dois, três / um / um, dois, três / ...

um / um, dois / um / um, dois / um / um, dois / um / um, dois / ...

um, dois / um, dois, três / um, dois / um, dois, três / ...

É evidente que se aconselha, nos primeiros tempos, a utilizar materiais concretos como os Blocos Lógicos, as Barras Cuisenaire, frutos secos, etc. Mas é desejável a evolução para situações figurativas como as que apresentámos neste exemplo.

As crianças devem também ser encorajadas a procurar regularidades no seu pequeno (grande) mundo: uma bicicleta tem duas rodas, duas bicicletas têm quatro rodas, três bicicletas têm seis rodas,... Uma situação com a mesma estrutura pode ser, facilmente, reconhecível pelas crianças — uma pessoa tem dois olhos, duas pessoas têm quatro olhos, três pessoas têm seis olhos,... Esta mesma estrutura pode ser recriada, utilizando materiais manipulativos, por exemplo, cubos de material plástico.



Questões como *"Quantos cubos haverá na próxima torre?"* , *"E na outra a seguir?"*, ajudam a verbalizar a regra *"adicionar dois"* para obter o número de cubos da torre seguinte (ou o número de rodas, ou o número de olhos!).

E aqui a máquina de calcular também pode desempenhar um papel importante. No caso anterior, utilizando a potencialidade de adicionar uma parcela fixa e pressionando repetidamente a tecla =, o aluno pode organizar uma tabela do tipo:

Nº de vezes que = foi premida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	20	...	50	...
Resultado	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...	40	...	100	...

Colocados perante a questão de como continuar a tabela, sem o auxílio da máquina de calcular, os alunos "inventarão", possivelmente, várias alternativas: alguns reconhecerão que "o número de baixo se obtém, adicionando o de cima com ele próprio"; outros dirão que "o número resultado é o dobro do número de vezes que se premiu a tecla ="; e outros ainda dirão, simplesmente, "multiplica-se por dois".

E, assim, o simbolismo matemático será a consequência lógica das suas observações:

$$\square + \square = 2 \times \square$$

em que $\square$ pode ser interpretado como qualquer número, no fundo uma primeira ideia de variável.

Procurar, à sua volta, outras situações que sejam descritas pela mesma relação ajuda a reforçar o conceito de relação e a ideia de variável.

Igualmente, devem ser solicitados a identificar outro tipo de situações e a traduzi-las simbolicamente. Por exemplo, como cresce o número de rodas com o número de carros, ou como cresce o número de dedos com o número de mãos:

$$\square + \square + \square + \square + \square = 5 \times \square$$

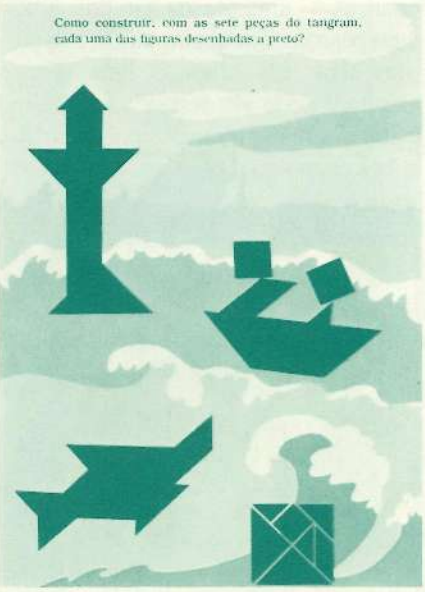
Alguns alunos, mais perspicazes, concluirão que esta última identidade traduz também o número de rodas de carros, desde que se inclua, também a roda sobresselente.

Qualquer professor poderá estruturar actividades mais interessantes do que estas, se as enraizar no quotidiano das crianças, se partir das vivências das mesmas. Procurou-se, apenas, dar alguns exemplos de actividades que encorajam o pensamento algébrico e que proporcionam as bases para um estudo mais abstracto e formal nos anos subsequentes. Pretendeu-se, também, evoluir de experiências concretas para abordagens figurativas e que o uso do simbolismo fosse uma consequência natural da linguagem das crianças para descreverem as situações.

Bibliografia

Howden, H. (1989). Patterns, Relationships and Functions. *Arithmetic Teacher*, vol. 37 nº 3, pp. 18- 24.

Leonor Moreira
Projecto Minerva
Pólo da ESE de Lisboa



Poderá encontrar outros postais relacionados com tangrans, como o da figura, na colecção editada pela APM

Materiais para a aula de Matemática

As actividades que se propõem não devem ser lidas como uma sequência rígida (inalterável) nem como uma série a executar num só tempo. Elas são apresentadas tendo em conta uma progressão que nos parece aconselhável; pretendemos apresentar actividades inicialmente exploratórias, mais ou menos livres, de acordo com o desenvolvimento das crianças que as executem. Procurámos apresentar depois actividades de grau crescente de dificuldade. Cada grupo constitui apenas alguns exemplos do tipo de actividades que nos parece ser possível desenvolver. As próprias crianças nos poderão propor outras de acordo com os seus interesses.

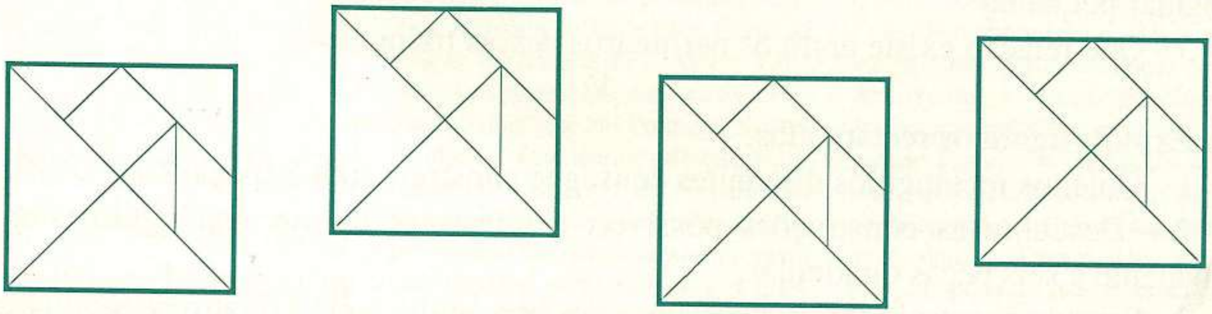
Todas as actividades aqui propostas são de possível execução no primeiro ciclo do Ensino Básico. A sua aplicação, nos diferentes anos de escolaridade dependerá do nível de desenvolvimento das crianças e deverá ter em conta a progressão natural de cada criança, partindo do princípio que é através da manipulação do jogo que as descobertas serão feitas e se obterão os resultados.

Este material poderá e deverá ser utilizado nas áreas curriculares, nomeadamente no estudo das figuras geométricas e das áreas e perímetros, tendo no entanto em conta que não substitui o uso de outros materiais, mas os complementa e é complementado por eles.

Helena Osório

Materiais para a aula de Matemática

Actividades com o Tangran



I

A partir de *tangrans* de diversos materiais explorar diferenças e semelhanças observáveis.

1 - Qual a forma original do *tangran* ?
2 - Em quantas partes se divide?
3 - Quais as características do material (textura, espessura, cor, ...) ?
4 - Que forma geométrica apresenta cada componente do jogo?
5 - Como construir um jogo igual?

II

Comparando as peças do jogo é possível estabelecer relações e fazer construções.

1 - Como podemos obter o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio a partir dos triângulos pequenos?

2 - De quantas formas diferentes podemos obter com as peças do jogo o triângulo grande?

3 - E de quantas formas diferentes podemos obter um triângulo equivalente a dois triângulos grandes?

III

Com este jogo podemos construir, de forma diferente, oito quadrados.

1 - Tente descobri-los anotando cada modo de construção.

2 - Quantos quadrados de diferente medida é possivel construir?

3 - Que relação existe entre a área destes quadrados?

4 - Tomando como unidade de medida a peça quadrada, é possível construir um quadrado com área igual a nove? Porquê?

IV

O número possível de triângulos a construir é bastante superior ao dos quadrados.

1 - Quantos triângulos de diferente área é possível construir?

2 - E qual a área de cada um deles? (Pode tomar como unidade de medida a peça triangular pequena)

3 - Que relação existe entre os perímetros desses triângulos?

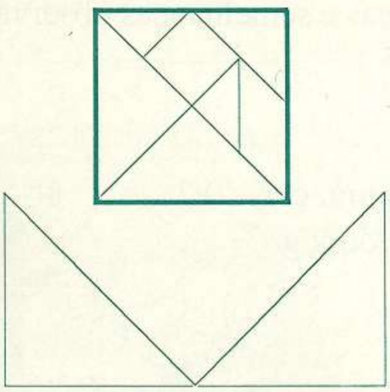
V

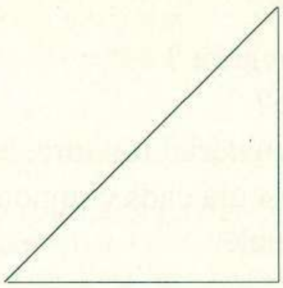
Explore agora os rectângulos.

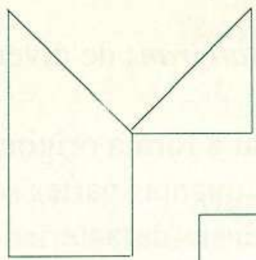
1 - Quantos rectângulos diferentes consegue construir com as peças?

2 - Descubra as construções possíveis e diferentes de um rectângulo com área equivalente a seis peças quadradas.

3 - Procure construir dois rectângulos com área equivalente a quatro peças quadradas e diferente perímetro.







VI

Experimente também fazer transformações.

1 - Com as cinco peças menores construa um quadrado, transforme-o num rectângulo e depois num triângulo. Que relação existe entre o perímetro dessas figuras?

2 - Construa agora o quadrado inicial com todas as peças do *tangran*. Tome apenas duas peças e rodando-as sobre um vértice transforme o quadrado num triângulo.

3 - Tome agora apenas uma peça e rodando-a também sobre um vértice procure obter um rectângulo.

4 - Que lhe ocorre dizer sobre as áreas e os perímetros destas figuras?

José Anastácio da Cunha - um matemático português do período barroco

Maria José Costa

«Não posso deixar Valença sem falar de um dos génios mais extraordinários que jamais se ouviu. É um moço de quase vinte e quatro anos, português e tenente de artilharia naquela praça. É de uma família pobre e sem alguma colocação; veio a ser, por força do seu engenho e grande aplicação, um prodígio deste século.»

Natural de Lisboa onde faleceu a 1 de Janeiro de 1787, passou alguns anos da sua vida em Valença do Minho e outros em Coimbra: aqui como Lente e ali como militar; foi protegido do Marquês de Pombal no reinado de D. José e de Pina Manique, o Intendente Geral da Polícia, no reinado de D. Maria. Entre estas duas protecções, esteve à mercê da Santa Inquisição; em Portugal, e neste século, foi descoberto, primeiro pelos homens das letras e só depois pelos das ciências. Camilo Castelo Branco dedica-lhe algumas das suas *Noites de insomnia offerecidas a quem não póde dormir*, Aquilino Ribeiro, romanceando a sua vida, escreve *Anastácio da Cunha, o lente penitenciado* .

Como conseguiu J. A. da Cunha esta distribuição da sua vida?

A vida

Nascido a 11 de Maio de 1744, dum casal modesto, vê-se órfão de pai, «pintor de profissão», aos dezasseis anos após o que ingressa na *Casa das Necessidades da Congregação do Oratório de Lisboa*; aqui aprende Gramática, Filosofia e Retórica com os padres oratorianos e Matemática e Física por sua própria iniciativa. Em 1762 assenta praça no Regimento de Artilharia do Porto, recentemente criado; e, pouco tempo depois, é nomeado, como primeiro-tenente para a Companhia dos Bombeiros daquele regimento. É neste posto que, mais tarde, vai, em destacamento, para a praça de Almeida, e desta para a de Valença - uma das praças incluídas no plano de reforma militar que o conde de Lippe, marechal dos exércitos de Portugal, tinha iniciado e para a qual contava com oficiais estrangeiros.

A permanência de J. A. da Cunha em Valença na qualidade de oficial permite-lhe a convivência com esses oficiais estrangeiros e, consequentemente, com a sua cultura e as suas ideias; vive integrado num ambiente de livre-pensamento e livre-comportamento; lê Voltaire, traduz obras do britânico Pope e do grego Anacreonte, revela-se apreciador de Shakespeare que frequentemente escolhe para declamar; vive "amancebado" com uma minhota chamada Margarida com quem aprende o alfabeto maçónico e a quem dedica algumas das suas composições poéticas (não é, contudo, em Valença que se inicia na poesia, pois data de 1760 a primeira produção poética de J. A. da Cunha: intitula-se *Ode* e foi escrita aquando da morte de seu pai).

Bem cedo J. A. da Cunha se destaca na estratégia militar e o seu talento não passa despercebido aos chefes militares, em particular a James Ferrier, governador da praça de Valença e ao próprio Conde de Lippe: produz, por sua iniciativa ou a convite, obras referentes às artes da guerra, como, por exemplo, a *Carta Físico-Matemática sobre a teoria da pólvora em geral e a determinação do melhor comprimento das peças em particular* e *Ensaio sobre as minas* (obra que viria a ser publicada a título póstumo, em 1838, por iniciativa dos capitães Vitorino Damásio e Diogo Kopke). Mas, se a primeira destas obras lhe valeu uma detenção, aplicada pelo conde de Lippe (não por inadequada, mas por revelar consultas a obras que o conde de Lippe proibira que se lessem), no todo, a actuação de J. A. da Cunha na praça de Valença valeu-lhe uma promoção e uma recomendação a Sebastião José de Carvalho e Melo, na altura conde de Oeiras, ambas da autoria do próprio conde de Lippe, e justificadas pelos conhecimentos demonstrados, não só de Balística mas também de Física e sobretudo de Geometria.

É esta recomendação que vai levar Sebastião José de Carvalho e Melo, já Marquês de Pombal, a nomear lente J. A. da Cunha, precisamente o primeiro lente de Geometria da Universidade de Coimbra: tem o nomeado 29 anos de idade e este acontecimento ocorre no segundo ano de funcionamento da Faculdade de Matemática, criada aquando da chamada reforma pombalina daquela Universidade.

Em Coimbra e nas funções para que foi nomeado se mantém durante quatro anos, nem sempre apreciado pelos seus pares: é que J. A. da Cunha usa frequentemente o uniforme militar, em vez das vestes académicas, não se limita a ler a sebenta nas aulas, aproveitando esse tempo para chamar a atenção para as partes mais delicadas do assunto em estudo, seja pela sua dificuldade, seja pela sua importância, e ainda pretende - aliás como preconizam os estatutos recentemente elaborados - escrever os textos que servirão de apoio às suas aulas em vez de usar ou fazer traduções doutros existentes.

Com a morte do rei D. José, a vida de J. A. da Cunha sofre alterações profundas, devidas por um lado à demissão do Marquês de Pombal do cargo de Ministro, por outro ao começo da repressão inquisitorial contra o Regimento de Valença. J. A. da Cunha é avisado (por Margarida, que lhe escreve usando o alfabeto maçónico) que vai ser preso e, apesar de convidado a partir para Inglaterra por James Ferrier, J. A. da Cunha resolve ficar. Após várias denúncias feitas por presos que tinham pertencido ao regimento de Valença, e que envolviam o nome de J. A. da Cunha, é sobre este efectuado um inquérito, pretendendo confirmar as acusações feitas ou acrescentar outras.

É de 20 de Junho de 1778 e emitida pelo Conselho Geral do Santo Ofício a ordem de prisão de J. A. da Cunha sendo preso nos cárceres da Inquisição de Coimbra, no dia 1 de Julho do mesmo ano: ser libertino, conviver com herejes, manter uma manceba, discutir pontos da religião, comer carne em dias proibidos, ler livros proíbidos, embebedar-se, são algumas das principais acusações que sobre ele caem. Em Novembro deste mesmo ano, é nomeado um substituto para a cadeira de Geometria (Manuel Joaquim Coelho da Costa Maia), mas só em Outubro de 1783 é a cátedra de novo ocupada (por Vitúrio Lopes Rocha).

O processo inquisitorial de J. A. da Cunha é organizado primeiramente em Coimbra e, em Setembro, é-lhe lido o libelo acusatório após o que é transferido para a Inquisição de Lisboa. No mês seguinte, as penas propostas pela Inquisição de Coimbra são confirmadas pela Mesa do Conselho Geral do Santo Ofício: incluem um período de 3 anos de reclusão na Congregação do Oratório de Lisboa e outro de 4 anos de degredo para Évora.

Mas, expirado o período de reclusão na Congregação, já se encontra criada e inaugurada a Casa Pia de Lisboa e, em Janeiro de 1781, é-lhe concedido, pelo Santo Ofício e a pedido de J. A. da Cunha, o perdão dos quatro anos de degredo em Évora; no mesmo mês, é nomeado para regente de estudos e substituto do curso de Matemática do colégio de S. Lucas (a funcionar na dita Casa Pia). Nesta situação viveria até 1785 pois neste ano foi suprimido o cargo docente ocupado por J. A. da Cunha na Casa Pia; com essa medida deu-se também a sua saída desta instituição. Para isso contribuiu a chamada "Questão entre J. A. da Cunha e Monteiro da Rocha" como na época ficou conhecida a discordância de opiniões sobre a decisão de um concurso matemático lançado pela Academia Real das Ciências: a dissertação premiada, elogiada por Monteiro da Rocha, um dos Lentes fundadores da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, terá merecido comentários bastante discordantes por parte de J. A. da Cunha. Da correspondência trocada sobre esta questão, ressaltam, por parte de Monteiro da Rocha, aspectos coincidentes com o processo inquisitorial de J. A. da Cunha, enquanto da parte deste sobressai a responsabilização de escolas de Matemática, com tais mestres, na condenação de uma nação à perpétua ignorância.

Foi durante os escassos quatro anos que J. A. da Cunha se manteve na Casa Pia de Lisboa que completou a sua obra de maior imporância na Matemática: *Princípios Matemáticos*. Iniciada, ainda em Valença ou já na sua situação de lente (o "Compêndio de Elementos práticos de Geometria", apresentado à Congregação da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, em 1776, e que ficou para ser apreciado pelos outros professores sem que tivesse tido qualquer seguimento, terá sido a primeira versão desta obra), começou a ser impressa em 1782, saindo em cadernos utilizados para a instrução no referido Colégio de S. Lucas. Na véspera da sua morte ainda reviu as últimas provas dessa obra mas a sua edição só em 1790 foi concluída.

No fim da vida J. A. da Cunha era já um homem desiludido e atormentado: em *Noticias Literárias de Portugal* (um manuscrito que Joel Serrão encontrou no Brasil, escrito em francês em 1780, não assinado mas registado em nome de J. A. da Cunha) escreve: «[...] verá o verdadeiro cidadão que apenas a lamento [a Pátria] e reconhecerá, talvez com algum espanto, que a amo. Com algum espanto porque julgava — confessá-lo-ei — apenas não a odiar. Pobre de mim!»

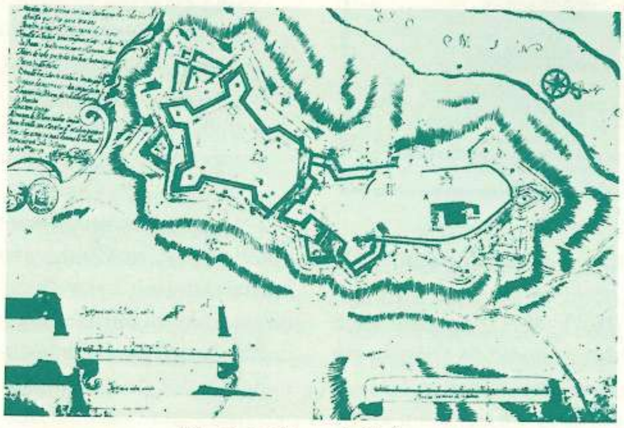
Nos seus últimos momentos, quando um amigo lhe perguntava «Sofreis muito?», respondeu: «je craîndrais de ne pas mépriser assez la vie. - Some dreams of humanity qui me déchirent plutôt qu'ils me consolent...»

Alexandre Herculano, reconhecendo quanto injusta lhe foi a pátria, escreve em *Antologia do Pensamento Político Português* obra dirigida por Joel Serrão: «Foram vítimas e testemunhas desse sistema do baixo- império, desse governo de eunucos imorais, de salteadores legítimos [...], José Anastácio da Cunha [...] e tantos outros homens que a glória vingou dos velhacos corruptos, que reduziram esta nação livre, forte e respeitada há quatrocentos anos a ser, como era já na segunda década deste século, a fábula e o escárnio das gentes».

Não há qualquer imagem da sua figura, mas numa carta de Simon Fraser (major da praça de Valença) encontramos este retrato de José Anastácio da Cunha:

«Não posso deixar Valença sem falar de um dos génios mais extraordinários que jamais se ouviu. É um moço de quase vinte e quatro anos, português e tenente de artilharia naquela praça. É de uma família pobre e sem alguma colocação; veio a ser, por força do seu engenho e grande aplicação, um prodígio deste século. É tão grande matemático que o coronel Ferrier, profundo nesta ciência, me diz que este moço o excede em muito. Ele é senhor de todas as obras de Sir Isaac Newton, ainda naquelas partes mais escuras, que os mesmos matemáticos julgam dificultosas; conseguintemente, é um algebrista completo e um astrónomo. Tem-se aplicado à ciência particular que se requer na sua profissão, que inclui engenharia, artilharia e outras muitas cousas pouco necessárias em matemáticas puras. Mas, o que é ainda mais extraordinário, este moço acrescentara a esta aplicação (que absorve a atenção de todos os que a estudaram) um perfeito conhecimento da história, das línguas e das belas-letras. É excelente poeta e bom crítico nas línguas mortas; sabe muito bem a italiana, francesa, espanhola e inglesa; e o coronel Ferrier, que possui perfeitamente estas línguas e pode ser juiz competente, afirma que este moço escreve a sua própria língua com mais pureza que muitos, e talvez que qualquer dos autores mais célebres deste país. Tem traduzido em elegante português, não só algumas das melhores obras de Pope, mas também algumas das nossas mais famosas comédias. Também traduziu no mesmo idioma algumas peças do célebre poeta grego Anacreonte, por onde diz o coronel Ferrier, bom conhecedor do grego, que lhe parece que as graças destas peças não só se conservaram, mas se aperfeiçoaram na sua tradução.

Parece que não emprega o seu tempo em estudar e, pela sua timidez, não conversa, ainda nas matérias mais indiferentes, senão com os mais íntimos amigos. É tosco (desalinhado) na sua pessoa e familiaridades, e parece desconhecer tão pouco os termos da civilidade, quanto é versado em todo o género de ciência e literatura. Com seus amigos, várias vezes recita algumas das melhores obras dos nossos poetas ingleses, particularmente Shakespeare e faz nele tal efeito a sua recitação que parece arrebatar-se; e nessas ocasiões uma só gota de vinho do Porto o faz inebriar. Este homem extraordinário parece a qualquer um desconhecido um simples. Ri-se muito, e em todo o seu proceder não se descobre nenhuma daquelas excelências de que é ricamente adornado.»



Planta da Praça de Valença

A obra científica

Alguma obra científica de J. A. da Cunha foi publicada após a sua morte por seus discípulos e fora do país (foi o caso de *Ensaio sobre os Principios da Mecânica* em 1807, em Londres, por D. Domingos António de Sousa Coutinho e *Princípios Matemáticos*, em 1811, em Bordéus em tradução francesa devida a João Manuel de Abreu). Outra, como é o caso de uma compilação de cerca de 20 títulos, já preparada para publicação, ainda aguarda a sua vez (o seu organizador, João Manuel de Abreu, faleceu antes de a dar à estampa); há ainda outras de cuja existência se sabe - por correspondência trocada - mas cujo paradeiro se desconhece.

A obra *Princípios Matemáticos* , já anteriormente referida quanto à sua elaboração e primeira finalidade, está organizada em 21 capítulos (intitulados livros como era uso na época), e aborda os seguintes temas: Geometria de Euclides, Aritmética, Álgebra, Geometria Analítica, Trigonometria, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral e Problemas de Máximos e Mínimos; está ilustrada com esquemas ilucidativos das teses defendidas em doze desses capítulos, organizados em apêndice.

Em *Panegíricos e Conferências* (publicado em 1925), no capítulo intitulado *Elogio Histórico ao Doutor José Anastácio da Cunha*, Gomes Teixeira, numa apreciação geral à obra, salienta: «o nosso geómetra misturou as doutrinas de que trata, sem atender à sua divisão em ramos, dando à exposição um aspecto de desordem, mas na qual as proposições estão lògicamente encadeadas, de modo que cada uma tem anteriormente aquelas de que depende.». E acrescenta: «Nesta desordem aparente há um certo encanto, pela variação dos assuntos e meios de os tratar. Ao examinar esta disposiçao das doutrinas, temos a impressão de que o autor propôs a si mesmo o problema de expor as matérias de um curso regular de Matemáticas puras lògicamente e no mínimo espaço, evitando repetições e tratando cada doutrina, quer seja elementar, quer não, no lugar em que dispunha de meios para mais ràpidamente a estudar.». E mais adiante, depois de fazer uma análise ao modo como algumas das doutrinas são expostas aponta J. A. da Cunha como um «lógico distinto» e mais à frente: «foi ali [ao Mundo dos números] procurar os caminhos mais curtos e seguros para explorar as riquezas scientíficas que geómetras eminentes tinham anteriormente descoberto.».

No *Curso de Álgebra Superior* de Vicente Gonçalves, pode ler-se: «Foi José Anastácio da Cunha quem primeiro (1790) formulou em termos rigorosos a definição de série convergente, definição mais tarde (1821) redescoberta por Cauchy. Em seus *Princípios Matemáticos*, Cunha desenvolve impecavèlmente alguns pontos da doutrina». Anteriormente, em 1940, aquando do Congresso do Mundo Português, ao fazer a análise a um dos livros de *Princípios Matemáticos* - o livro VIIII (sic) - Vicente Gonçalves afirmava: «...diremos sem hesitar que êste Livro VIIII dos *Princípios Mathematicos* é, por todos os títulos, trabalho de grande mérito, profundo e originalíssimo de concepção, limpo e sóbrio na execução; algumas disposições de cálculo mostram verdadeira finura de engenho e largo senhorio da arte. Nêle se estabelecem as bases da teoria das séries, fundamento essencial da análise moderna, e se expõem os princípios do cálculo exponencial, pela primeira vez organizados com unidade e clareza.

Criador nas séries, reformador nas potências, em umas e outras levou Cunha boa dianteira às maiores figuras do tempo.».


PRINCIPIOS MATHEMATICOS
PARA INSTRUCÇAÕ
DOS ALUMNOS DO COLLEGIO
DE
SAÕ LUCAS,
DA REAL CASA PIA DO CASTELLO
DE
SAÕ JORGE:
OFFERECIDOS
AO SERENISSIMO SENHOR
D. JOAÕ,
PRINCIPE DO BRAZIL:
COMPOSTOS PELO DOUTOR
JOSE' ANASTACIO DA CUNHA,
DE ORDEM DO DESEMBARGADOR DO PAÇO
DIOGO IGNACIO DE PINA MANIQUE,
Intendente Geral da Policia da Corte, e Reino, &c, &c, &c.
LISBOA
NA OFFIC. DE ANTONIO RODRIGUES GALHARDO.
Impressor do Eminentissimo Senhor Cardeal Patriarca.
ANNO M.DCC.XC.
Com licença da Real Meza da Commissaõ Geral sobre o Exame, e Censura dos Livros.

Princípios Matemáticos

Mas, em 1973, A. P. Youschkevitch lembra aos historiadores da Ciência em geral e da Matemática em particular J. A. da Cunha ao publicar um artigo em *Revue d'Histoire des Sciences* intitulado *J. A. da Cunha e os fundamentos da análise infinitesimal* . O autor, começando por afirmar «Le nom de da Cunha, mathématicien portugais du XVIII^e siècle, n'était pas très connu de son temps, et maintenant il est presque oublié.», cita, a seguir, algumas das obras onde procurou e não encontrou qualquer referência a J. A. da Cunha (*Dictionary of scientific biography* e *Histoire générale des sciences*); considera que «a actividade pedagógica e científica de J. A. da Cunha exerceu uma influência considerável no desenvolvimento das matemáticas em Portugal» e acrescenta duas opiniões sobre os *Princípios Matemáticos* , obra considerada a mais importante por todos os que se têm debruçado sobre ela - uma da autoria de Cajori e a outra de Timtchénko. O primeiro, depois de se referir à vida do matemático português considera a obra *Princípios Matemáticos* concisa e com demonstrações rigorosas, contendo ideias novas e frescas nas suas explicações; o segundo, considerando-a uma obra notável, afirmando mesmo «que representa o primeiro ensaio de uma exposição estritamente formal da matemática no seu conjunto», sublinha a definição formal e rigorosa de diferencial dada por J. A. da Cunha. No mesmo artigo, Youschkevitch faz o estudo da concepção das séries infinitas, da teoria da função exponencial e dos elementos de cálculo infinitesimal que J. A. da Cunha apresenta na sua obra.

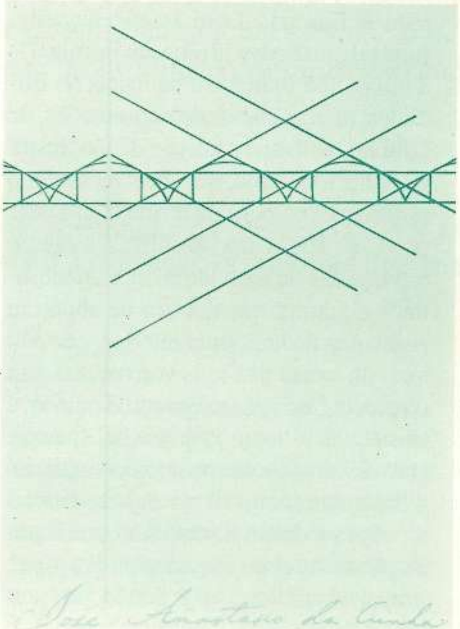
Ao longo deste estudo, o matemático soviético vai estabelecendo comparação entre a teoria de J. A. da Cunha e a que é defendida por outros matemáticos, atribuindo a J. A. da Cunha a formulação da primeira definição analítica e rigorosa de diferencial e afirmando que é essa a definição que é retomada e utilizada pelos matemáticos do século XIX.

Após analisar uma das proposições contidas no livro XV, identifica-a com o teorema fundamental do cálculo integral donde se tira a fórmula dos acréscimos finitos de Lagrange; mas acrescenta de imediato não haver provas de que este conhecesse a obra do matemático português; para Youschkevitch nem a versão original nem a sua tradução francesa tivera, naquela época, outro comentário senão o que Playfair, matemático e físico escocês tinha emitido na revista *Edinburgh Review* (e que começa dizendo que é a primeira obra científica portuguesa que recebem e que não traria descrédito para qualquer país pelos seus conhecimentos filosóficos). Afirma ainda que se poderá dizer que a obra partilhou o mesmo destino trágico do autor, pois não exerceram a influência que mereciam no progresso do pensamento matemático.

Cinco anos depois, em novo artigo desta vez intitulado *C. F. Gauss et J. A. da Cunha* , Youschkevitch vem rectificar algumas das afirmações feitas; de facto, além dos discípulos que fora de Portugal publicaram e defenderam os trabalhos de Anastácio, uma revista, na altura muito em voga (*Göttingische gelehrte Anzeigen*), publicava em 1811 uma apreciação muito detalhada mas anónima dos *Princípios Matemáticos*, que valoriza «les traits caractéristiques de l'ouvrage de da Cunha : l'unité de son plan et de son style, la rigueur constamment observée de la méthode démonstrative, enfin un style très condensé qui a permis à l'auteur de ne laisser échapper aucun sujet, tant soit peu important, des mathématiques pures élémentaires et superieures dans un livre comprenant moins de 300 pages». E é do mesmo ano, embora só tornada pública setenta anos mais tarde, uma carta escrita por Gauss na qual este matemático se refere a ideias novas de Anastácio da Cunha, nomeadamente à definição de exponencial e de logaritmo e a uma certa notoridade atingida pela obra em questão, na Alemanha no início do século XIX.

Jaime Carvalho e Silva e António Leal Duarte, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, defendem a primazia de Anastácio da Cunha ao comparar definições e noções que aparecem em *Princípios Matemáticos* com as que são atribuidas a outros autores, ou realçam o esclarecimento por ele prestado à definição dada, nomeadamente: as noções de "infinito matemático", de série binomial, de infinitésimo e de integral impróprio, as definições do produto de dois números negativos, de série convergente, de exponencial e logaritmo, de diferencial e ainda as aplicações geométricas do Cálculo Diferencial.

Perante estas caracterizações, é lícito perguntar: como cai tal homem e tal obra



Traçado de tangentes a arcos, livro XVII

em tão grande esquecimento, quando outros por bem menos são elevados à fama e à glória? Em Portugal, com toda a contiguidade que rodeou o matemático, seria difícil que ele fosse seguido ou a obra acarinhada: as peripécias de que a sua vida se viu recheada bastariam para que autor e obra fossem banidos. Mas, se é verdade existir uma unanimidade de opiniões favoráveis quanto ao conteúdo de *Princípios Matemáticos*, há outros pontos de vista segundo os quais se pode avaliar um trabalho. Assim, alguns consideram a obra demasiado lacónica, outros acham-na condensada em demasia e há até quem a considere pouco pedagógica. Por fim, uma apreciação que se tem de levar em linha de conta, aponta obra e autor como demasiado avançados para a época; é de acrescentar ainda o facto de a tradução publicada no estrangeiro não ter sido a mais adequada.

No ano de 1987, em Portugal, são feitas comemorações nacionais do bicentenário da morte de José Anastácio da Cunha, com sessões de homenagem e colóquios em Lisboa, Coimbra e Évora Durante um dos colóquios realizados, du as novidades aconteceram: o relato de como uma cópia da obra *Princípios Matemáticos* foi enviada para a União Soviética em pleno exercício do Estado Novo e a apresentação do manuscrito *Ensaio sobre as Minas*, uma das obras até agora considerada perdida, descoberta pela Dr.ª Fernanda Estrada docente da Universidade do Minho (este manuscrito de difícil leitura pela caligrafia e pela ortografia, está a ser preparado para publicação). O Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra associou-se às homenagens: docentes desta Universidade fizeram diversas comunicações chamando a atenção para a vida e, sobretudo, a obra matemática de J. A. da Cunha, dando o relevo que tal obra merece no contexto histórico das teses por ele demonstradas (hoje são usadas como descobertas no século XIX e atribuídas a outros matemáticos não sendo mais que as que Anastácio defendeu quase um século antes); mas, desta vez, o Departamento de Matemática, sucessor da estrutura "Faculdade de Matemática" que abrigou J. A. da Cunha e lhe torpedeou o alcance do lugar de honra que a sua sapiência merecia, procedeu à edição fac-símile da obra *Principios Matemáticos* e prepara-se para publicar uma outra obra igualmente importante: *Princípios da Mecânica*.

Uma das actividades integrada nestas comemorações consistiu numa exposição sobre a vida e a obra de J. A. da Cunha, cujo catálogo exibia na capa precisamente uma construção da autoria de Anastácio da Cunha e referente ao traçado de tangentes a uma curva.

A obra literária

A obra poética de J. A. da Cunha viria também a ser publicada postumamente.

Em 1839, Inocêncio Francisco da Silva publica em Lisboa *Composições Poéticas do Dr. José Anastácio da Cunha*; o livro foi altamente criticado pelo título, (considerado abusivo o atributo de doutor a J. A. da Cunha) e, além disso, foi considerado abuso de liberdade de imprensa em matéria religiosa, pelo que o responsável pela publicação foi processado e os exemplares à venda apreendidos.

Hernani Cidade, quase um século depois, alargou a publicação de Inocêncio: compilou mais algumas das poesias dispersas dando, assim, ao prelo *Obra Poética do Dr. José Anastácio da Cunha*; provavelmente, ainda não será o conjunto de todas as que escreveu, pois crê-se que muitas se terão perdido. Hernani Cidade, que considera Anastácio da Cunha «... uma das mais ricas personalidades do Portugal de setecentos» diz sobre a sua poesia: «O que antes de tudo nos surpreende na poesia de José Anastácio, é precisamente o facto, raro na época, de ser uma poesia tôda cheia de realidade moral. As ansiedades da sua inteligência, tanto como os abalos da sua emotividade, fugidiamente as primeiras, mais vincadamente os segundos, deixaram vestígios nos versos que de umas e de outras jorraram em borbotões».

Jacinto Prado Coelho (1961) estabelece a diferença entre a poesia anterior à de Anastácio e a deste: «Antes de José Anastácio a lírica portuguesa mantivera quase sempre uma casta reserva em relação ao amor carnal... Para José Anastácio o verdadeiro amor é algo de religioso, divino, tão puro, tão elevado, que não precisa de sanções rituais ou legais. Aflora aqui o naturalismo deísta do século XVIII, a Natureza é boa, as almas bem formadas caminham espontaneamente para o Bem, a ideia de pecado original está completamente posta de lado».

Também Almeida Garrett se debruçou sobre os poemas anastacianos, escrevendo em *Bosquejo da história da poesia portuguesa*, em 1826: «De José Anastácio da Cunha, que das matemáticas puras deu o melhor curso, que há em toda a Europa, desse infeliz engenho (que talento houve já feliz em Portugal?) a quem não impediam as rectas de Euclides, nem as curvas de Arquimedes, de cultivar também as musas; de tão ilustre e conhecido nome, que direi eu senão o muito que me pesa da raridade das suas poesias? Todas são filosóficas, ternas, e repousadas de uma tão meiga sensibilidade algumas, que deixam na alma um como eco de harmonia interior, que não vem do metro dos seus versos, mas sim das ideias, dos pensamentos. Todavia, é mister lê-lo com prevenção, porque (provàvelmente estropiado por copistas) a frase nem sempre é portuguesa de lei.»

Apesar destes testemunhos, na introdução a *Notícias Literárias de Portugal*, da responsabilidade de J. Serrão, pode ler-se: «Afigura-se legítimo supor que foi de pequeníssimo relevo o papel ou os papéis que os fados lhe permitiram representar na cena nacional coetânea». À frente aponta a base da sua suposição: trinta e cinco anos depois ainda havia à venda exemplares de *Obra Poética do Dr. J. Anastácio da Cunha* . E acrescenta: «torna-se patente como o poeta J. A. da Cunha não logrou chegar ao público, nem no seu tempo nem depois, e tem servido apenas de pasto complacente a alguns eruditos e especialistas.»

Apêndice

Numa das escolas de Valença do Minho, aquando de uma visita à localidade integrada no programa social do Profmat/89, foi prestada uma singela homenagem a J. A. da Cunha, com a presença do sr. Presidente da Câmara local; numa posterior e informal troca de impressões, o autarca presente mostrou interesse em conhecer mais pormenores sobre a vida e a obra do laureado e a maior disponibilidade em perpetuar a memória deste grande homem dando, por exemplo, o seu nome a uma das novas ruas de Valença do Minho.

Quando percorríamos as muralhas da antiga Praça de Valença do Minho, um transeunte anónimo falou a umas colegas no matemático e militar que por ali tinha andado e até tinha o nome numa sala: e, para que elas pudessem constatar a veracidade das suas palavras, levou-as a um edifício onde funciona um departamento público (que não sei especificar qual é). É de prever que a iniciativa de celebrar uma vez mais a presença de José Anastácio da Cunha em Valença do Minho vá ter o apoio local!

Recolha feita a partir de documentos variados, nomeadamente:

• *Princípios Matemáticos* (edição fac-simile- U. Coimbra)

• *Panegíricos e conferências* (Gomes Teixeira- Coimbra-1925)

• *História das Matemáticas em Portugal* (Gomes Teixeira-Lisboa-1934)

• *Memória Histórica da Faculdade de Mathematica nos cem annos decorridos* (F. Castro Freire-1872)

• *Notícias Literárias de Portugal-1780*, de J. A. da Cunha (publicado por Joel Serrão-Seara Nova, 1971)

• *Catálogo da Exposição de Homenagem a J.A.da Cunha* (Biblioteca Nacional- 1987)

• *História* (nº 100 e seguintes)• *Colóquio Ciências* (nº 1- Lisboa 1988)

• *Revue d'Histoire des Sciences - Volumes nº26* (1973) e 31 (1978)

Maria José Costa
E.S. de Augusto Gomes
Matosinhos

Avaliação dos alunos: primeira posição da APM sobre o projecto do Ministério

Ainda no 1º período do corrente ano lectivo, a Secretaria de Estado da Reforma Educativa divulgou para discussão nas escolas e outras instituições o projecto de um novo diploma relativo ao sistema de avaliação dos alunos dos ensinos básico e secundário. Este projecto mereceu uma primeira crítica por parte do Conselho Nacional da A.P.M. que discutiu um documento crítico sobre esse projecto (no dia 19 de Janeiro de 1991) que viria a ser aprovado pela generalidade dos seus elementos e que, posteriormente, mereceria também a aprovação da Direcção, como uma primeira posição face ao referido projecto de diploma.

Reproduz-se a seguir o referido documento crítico ao mesmo tempo que se transcrevem alguns dos artigos aparentemente mais polémicos do projecto do Ministério. Entretanto, a Direcção da A.P.M. planeia outras iniciativas — entre as quais a realização de um seminário de dois dias — com o propósito de aprofundar o debate sobre o problema da avaliação dos alunos no quadro da nova reforma educativa.

Primeira posição crítica do Conselho Nacional e da Direcção da A.P.M. sobre o projecto de diploma do Ministério da Educação relativo à avaliação dos alunos dos ensinos básico e secundário

Segundo a Lei de Bases do Sistema Educativo, o Ensino Básico é definido como "universal e obrigatório", garantindo "o direito a uma justa e efectiva igualdade de oportunidades no acesso e sucesso escolares" e tendo como primeiro objectivo "assegurar uma formação geral comum a todos os portugueses que lhes garanta a descoberta e o desenvolvimento dos seus interesses e aptidões".

De facto, um dos grandes desafios que a expansão da escolaridade nos coloca é o de resistir à discriminação dos alunos. Um sistema que pretenda manter todos os jovens na escola mas que os divide, desde muito cedo, por classes de diferentes níveis e com diversas perspectivas e possibilidades de acesso aos diplomas escolares e à continuação dos estudos, só na aparência será um passo para a democratização do ensino.

Hoje, um diploma sobre avaliação dos alunos deveria ser um documento que clarificasse as funções da avaliação e a sua articulação com as principais finalidades e objectivos do sistema de ensino. Isso implicaria destacar a natureza formativa que a avaliação deve assumir, explicitar os princípios orientadores da avaliação escolar — nomeadamente, o carácter positivo que ela deve ter (procurando determinar e valorizar aquilo que o aluno sabe, gosta e é capaz de fazer), a sua integração plena no processo educativo (criando novas oportunidades para aprender) e a sua desejável consistência com os objectivos, as metodologias e a natureza das actividades de cada uma das disciplinas ou áreas curriculares. Em particular, deveria explicitar a necessidade de se recorrer a formas e instrumentos de avaliação variados de acordo com esses princípios e de se combater ideias como a de que exames e testes escritos, iguais para todos os alunos, são formas privilegiadas, mais "objectivas" e mais justas de avaliação — ideias que correspondem a uma visão da sociedade e do papel da escola própria de uma época ultrapassada.

Por outro lado, um diploma sobre avaliação deve reconhecer que o insucesso escolar tem múltiplas causas e assume várias formas, não se confundindo com as taxas de reprovações. E deve ser claro na ideia de que, para combater o insucesso, é preciso atacar as suas causas e não pretender resolver o problema através de falsas soluções visando reduzir as taxas de reprovações por processos meramente administrativos.

O Projecto de diploma sobre avaliação dos alunos dos Ensinos Básico e Secundário é um documento que suscita uma grande apreensão. Embora, no seu preâmbulo, mencione importantes princípios consignados na Lei de Bases do Sistema Educativo, em particular o de que a avaliação tem, entre outras, as funções de "estimular o sucesso educativo de todos os alunos, favorecer a confiança própria e contemplar os vários ritmos de desenvolvimento e progressão", a verdade é que diversas disposições do Projecto são incoerentes, ou têm uma coerência duvidosa, com aqueles princípios e até com aspectos importantes da própria reforma.

1. O Projecto coloca diversos tipos de dificuldades ao que chama "retenção" dos alunos no mesmo ano de escolaridade, procurando diminuir as taxas de repetências. No entanto, como algumas escolas e grupos de professores têm salientado, o "insucesso" é apresentado como uma coisa que, quando não resulta claramente da "incapacidade" do aluno, se deve à incapacidade do professor e da escola. Não é usado o mesmo tom para questionar aspectos decisivos do sistema educativo, nomeadamente as condições de trabalho das escolas e dos professores, as orientações curriculares e os programas das várias disciplinas, etc.

2. O Projecto "compensa" a diminuição das "retenções" com medidas como a distinção entre diplomas (que permitem a continuação dos estudos para além do Ensino Básico) e meros certificados de frequência (que não a permitem), a existência de "classes com diferentes níveis de exigência", a frequência de disciplinas apenas "a nível introdutório", etc. Infelizmente, nada se adianta sobre o que são, por exemplo, estes níveis introdutórios (que tipo de programas lhes está associado, que futuro terão os alunos na disciplina, etc.) mas o que parece é que, no conjunto, estas medidas tendem a estabelecer desde muito cedo uma discriminação dos alunos que, nos primeiros anos, não respondam de uma forma considerada satisfatória pelo sistema. A não reprovação surge deste modo como uma espécie de "presente envenenado" que traz escondidas perspectivas sobre o futuro escolar dos alunos.

3. O Projecto afirma, no início, que a avaliação formativa é a "principal modalidade" de avaliação, "traduzindo-se normalmente de forma descritiva e qualitativa". No entanto, na prática, aquilo que é proposto é que "para efeitos da avaliação formativa... o conselho de turma reune regularmente... no fim de cada período lectivo", e, nessa altura (nos segundo e terceiro ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário), "a avaliação formativa assume um carácter descritivo e quantitativo e expressa-se numa escala de 0 a 20".

Nada se diz sobre as razões que levam a propor um retrocesso para a escala de 0 a 20 desde o 5º ano de escolaridade inclusive. Mas é claro que o sistema proposto acentua o carácter quantitativo (em vez de qualitativo) e relativo (em vez de absoluto) da avaliação dos alunos, contradizendo alguns dos princípios enunciados no preâmbulo do próprio Projecto.

Além disso, a chamada "avaliação aferida" — em que "o instrumento utilizado... é um teste ou bateria de testes" — que, para além do final do Ensino Secundário, se propõe agora também para o final do Ensino Básico, bem como a afirmação de que a "avaliação sumativa... é regida de modo especial por critérios de objectividade", deixam entender que se pretende dar aos testes e exames escritos uma importância ainda maior (do que actualmente) no sistema de ensino, com todas as consequências daí resultantes.

Certamente, a competitividade ganhará pontos e envolverá mesmo os alunos mais novos (desde os 10 anos de idade) enquanto se reforçará a ideia de que as capacidades dos alunos estão estreitamente ligadas aos seus resultados escolares, expressos por um número numa escala.

4. O Projecto contém diversas outras disposições extremamente duvidosas, como é o caso da que estabelece que "no segundo e terceiro ciclo do Ensino Básico... um aluno é passível de retenção

Associação dos Professores de Matemática preocupada com o projecto sobre as avaliações

"Falsas soluções" para o insucesso escolar

Ana Sousa Dias

Em vez de reprovar, o aluno avança até ao 9 ano em condições especiais, aprendendo apenas "níveis introdutórios", e depois não terá diploma, mas "certificado de frequência". O insucesso escolar será só um problema de estatística?

LUÍS RAMOS

As notas de 0 a 20 voltam a partir do quinto ano

O Conselho Nacional da Associação dos Professores de Matemática, que se reuniu no sábado em Lisboa, manifestou grande apreensão relativamente ao projecto de diploma sobre a avaliação nos ensinos básico e secundário e sublinhou que os princípios nele contidos contrariam os princípios que estão na base da reforma educativa lançada pelo Ministério.

Na reunião de sábado, realizada nas instalações do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa, os 25 membros do Conselho

acrescentou: "restringir a um inquérito de resposta de cruz uma apreciação dos professores

fendem os professores de Matemática, poderá criar "um 'presente envenenado' que traz es-

um aluno "passaria" sempre até ao limite do ensino obrigatório (9º ano), seguindo um circuito paralelo aos alunos com sucesso, e no fim teria um certificado de frequência, sem poder com ele continuar a avançar nos estudos.

"O que parece — defende Paulo Abrantes — é que, no conjunto, estas medidas tendem a estabelecer desde muito cedo uma discriminação dos alunos que, nos primeiros anos, não respondam de uma forma considerada satisfatória pelo sistema".

Zero a 20

Para os responsáveis da Associação dos Professores de Matemática, não é dada no projecto qualquer explicação para "o retrocesso para a escala de 0 a 20 desde o 5º ano de escolaridade inclusive" e o sistema proposto "acentua o carácter quantitativo (em vez de qualitativo) e relativo (em vez de absoluto) da avaliação dos alunos, contradizendo alguns dos princípios enunciados no preâmbulo do próprio projecto". E contrariando igualmente "os princípios que têm sido anunciados como base de toda a reforma educativa", sublinhou Henrique Guimarães.

Os professores consideram ainda que "se pretende dar aos

Reproduzido do "Público" de 22 de Janeiro de 1991 quando... obtenha uma média ponderada inferior a 10 valores...", sendo esta média calculada por uma fórmula em que cada disciplina tem um peso relativo correspondente ao respectivo número de horas semanais. Admitindo que há disciplinas que "contam" mais do que outras, o Projecto entra em contradição com princípios enunciados na própria Lei de Bases do Sistema Educativo e que foram acima referidos.

5. O Projecto não contempla os aspectos atrás indicados como essenciais a um documento sobre avaliação. Não se refere de um modo adequado às causas do insucesso escolar ou às formas que ele assume. Não define quaisquer princípios educativos sobre a natureza da avaliação, nem sobre as formas e instrumentos de avaliação a desenvolver, nem sobre a sua articulação com os objectivos, métodos e tipo de actividades propostos nos currículos.

Em conclusão, há muitos motivos para estarmos apreensivos com o aparecimento deste Projecto que, aparentando estabelecer algumas regras apenas sobre um aspecto do sistema educativo, põe em causa questões fundamentais que têm a ver com esse sistema no seu conjunto e com o papel global da escola na sociedade. Por isso mesmo, ele deve ser amplamente discutido pelos professores antes que quaisquer medidas concretas sejam aprovadas.

Algumas "novidades" do projecto de diploma sobre avaliação

8.1. Todos os professores fazem uma avaliação formativa contínua ao longo do ano.

8.2. Para efeitos da avaliação formativa, nos segundo e terceiro ciclo do ensino básico e no ensino secundário, o conselho de turma reune regularmente, presidido pelo respectivo Director de Turma, no fim de cada um dos períodos lectivos, de acordo com o calendário escolar aprovado.

(...)

8.6. A notação da avaliação formativa deve obedecer aos seguintes princípios:
(...)
b) no segundo e terceiro ciclos do ensino básico e no ensino secundário a avaliação formativa assume um carácter descritvo e quantitativo e expressa-se numa escala de 0 a 20.

12.1. No terceiro ciclo do ensino básico e no ensino secundário, os alunos com aproveitamento desigual podem ser colocados em classes com diferentes níveis de exigência, podendo o aluno frequentar em cada ano um máximo de três disciplinas a nível introdutório e as restantes a nível geral.

13.1. A decisão de retenção tem sempre carácter excepcional depois de se ter esgotado o recurso a medidas de compensação educativa e o benefício de colocação em níveis introdutórios de exigência, devendo, portanto, revestir-se de especial cuidado para garantir a sua necessidade, utilidade e justiça.

(...)

13.4. No segundo e terceiro ciclos do ensino básico considera-se que um aluno é passível de retenção quando, de acordo com este nº 13.1, o aluno obtenha uma média ponderada inferior a 10 valores, de acordo com a seguinte fórmula:
[segue-se uma fórmula em que cada disciplina tem um peso correspondente ao respectivo número de horas]

7.7. A avaliação aferida para efeito de progressão escolar dá-se apenas no final do ensino básico e no final do ensino secundário.

7.8. O instrumento utilizado para a avaliação aferida mencionada no número anterior é um teste ou bateria de testes que mede com validade e fidedignidade o cumprimento de objectivos curriculares do ensino básico e do ensino secundário, devendo o resultado ser aferido e dado numa escala graduada que permita uma variedade de utilizações.

15.1. No final do terceiro ciclo do ensino básico serão atribuídos certificados de frequência ou diplomas pelo órgão de gestão da escola, nos termos dos números seguintes.

15.2. Ao aluno que obtiver aprovação na avaliação sumativa, a qual inclui o resultado da prova aferida no final do 3º ciclo do ensino básico, será atribuído o diploma do Ensino Básico.

15.3. O aluno que tenha frequentado o 9º ano de escolaridade e que não se queira submeter à avaliação sumativa do 3º ciclo ou que, submetendo-se, não fique aprovado, pode requerer um certificado de frequência do ensino básico.

15.4. O certificado de frequência do ensino básico pode ainda ser atribuído mediante requerimento do aluno ou do seu encarregado de educação, quando aquele tiver atingido a idade limite da escolaridade obrigatória e tiver frequentado a escola com assiduidade.

15.5. Por motivos disciplinares, o Conselho de Turma pode indeferir o requerimento de certificado de frequência.

15.6. O certificado de frequência do Ensino Básico é para todos os efeitos equivalente ao Diploma do Ensino Básico, com excepção da faculdade de prosseguimento de estudos.

O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

Relembremos o enunciado do problema proposto no nº 15 de *Educação e Matemática*:

"Quatro moínhos estão dispostos nos vértices de um quadrado de lado igual a um quilómetro.

Queremos construir uma rede de estradas de modo que se possa ir de qualquer um dos moínhos para outro, e queremos gastar o mínimo de dinheiro. Portanto a rede terá de ser a menor possível (quilometragem mínima).

Quantos metros de estrada teremos de construir?"

Recebemos cinco respostas. Uma, conjunta, de Albano Silva e António Bernardes, e as outras de Alberto Canelas, J. Sacadura Cabral, Cristina Viegas Henriques e Roberto Oliveira. Todas elas seguem caminhos essencialmente parecidos, embora a primeira tenha uma fase de pesquisa com calculadora e folha de cálculo e a segunda tenha mais considerações teóricas.

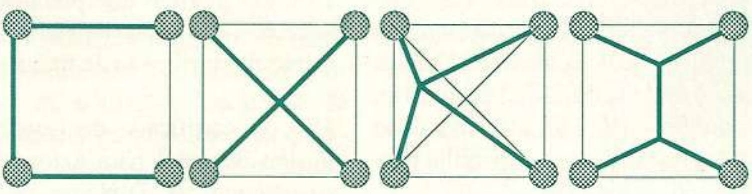
Na impossibilidade de transcrevermos todas as respostas, aqui fica o essencial.

Se os caminhos seguirem directamente de um moínho para outro mais próximo (fig. 1), o comprimento total é 3000m.

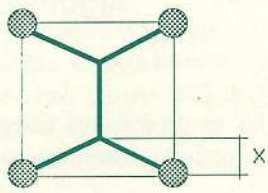
Se os caminhos seguirem as diagonais do quadrado (fig. 2), a distância total é $2 \times 1000 \times \sqrt{2} = 2828{,}43$m.

É fácil verificar que, se os quatro caminhos que saem dos moínhos se encontram num único ponto (fig. 3), a distância é mínima quando esse ponto é o centro do quadrado. Com efeito, para se ir de um moínho para o que está no vértice oposto, o percurso é mínimo quando se segue pela diagonal.

Finalmente, vejamos o que acontece se os caminhos se encontrarem em dois pontos diferentes, com um troço comum, conforme se indica na figura 4. Não se esqueça que, devido à simetria do quadrado, o troço comum vai passar no centro.



1 2 3 4



5

Seja x a distância indicada na figura 5. Por simples aplicação do teorema de Pitágoras, a distância total da rede de estradas será dada por

$$d(x) = 4\sqrt{x^2 + 1/4} - 2x + 1 .$$

Agora podemos, utilizando a folha de cálculo, descobrir o valor aproximado do mínimo desta função, ou, para se obter o seu valor exacto, aplicar os conhecimentos de derivadas. Fazendo a primeira derivada e igualando a zero, obtemos

$$x = \sqrt{3}/6$$

que, pelo sinal da segunda derivada neste ponto, confirmaríamos ser um mínimo.

Para sabermos o comprimento total da rede de caminhos basta substituirmos na função d o valor que obtivemos para x. Efectuados os cálculos, encontramos então:

$$d = 2732{,}05 \text{ metros.}$$

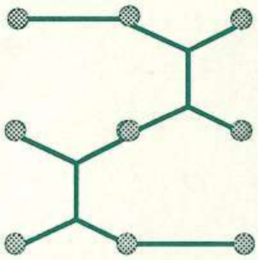
A solução apresenta uma regularidade curiosa. Os três caminhos que se encontram num ponto fazem ângulos de 120 graus entre si e cada caminho que sai de um moínho faz um ângulo de 30 graus com o lado do quadrado.

Finalmente, J. Sacadura Cabral propõe duas extensões do problema, a primeira para 9 moínhos e a segunda para 16, estando em qualquer dos casos os moínhos dispostos nos vértices de uma malha quadrangular.

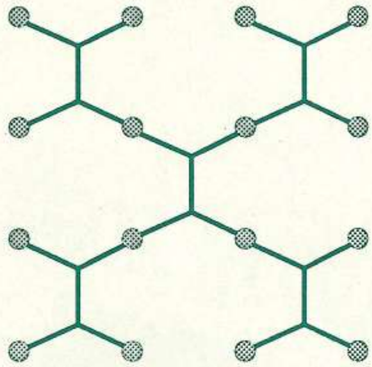
As soluções serão as indicadas nas figuras,obtendo-se os seguintes valores:

$d_9 = 7464{,}10$ m
$d_{16} = 13660{,}25$ m.

José Paulo Viana



6

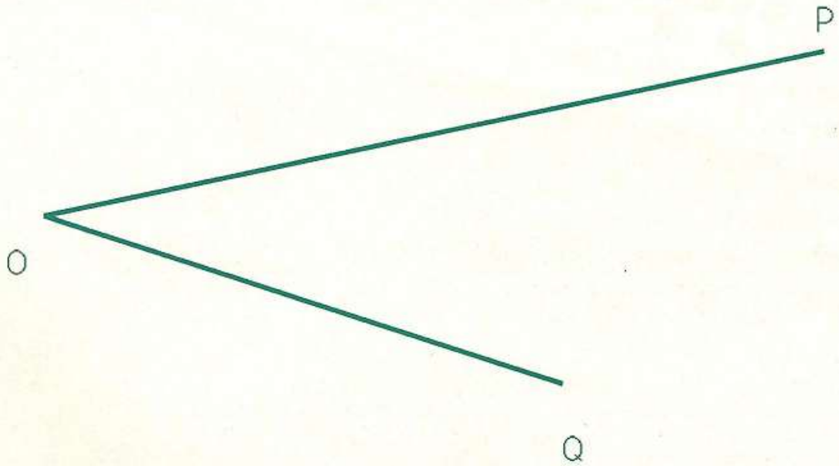


7

Problema Proposto

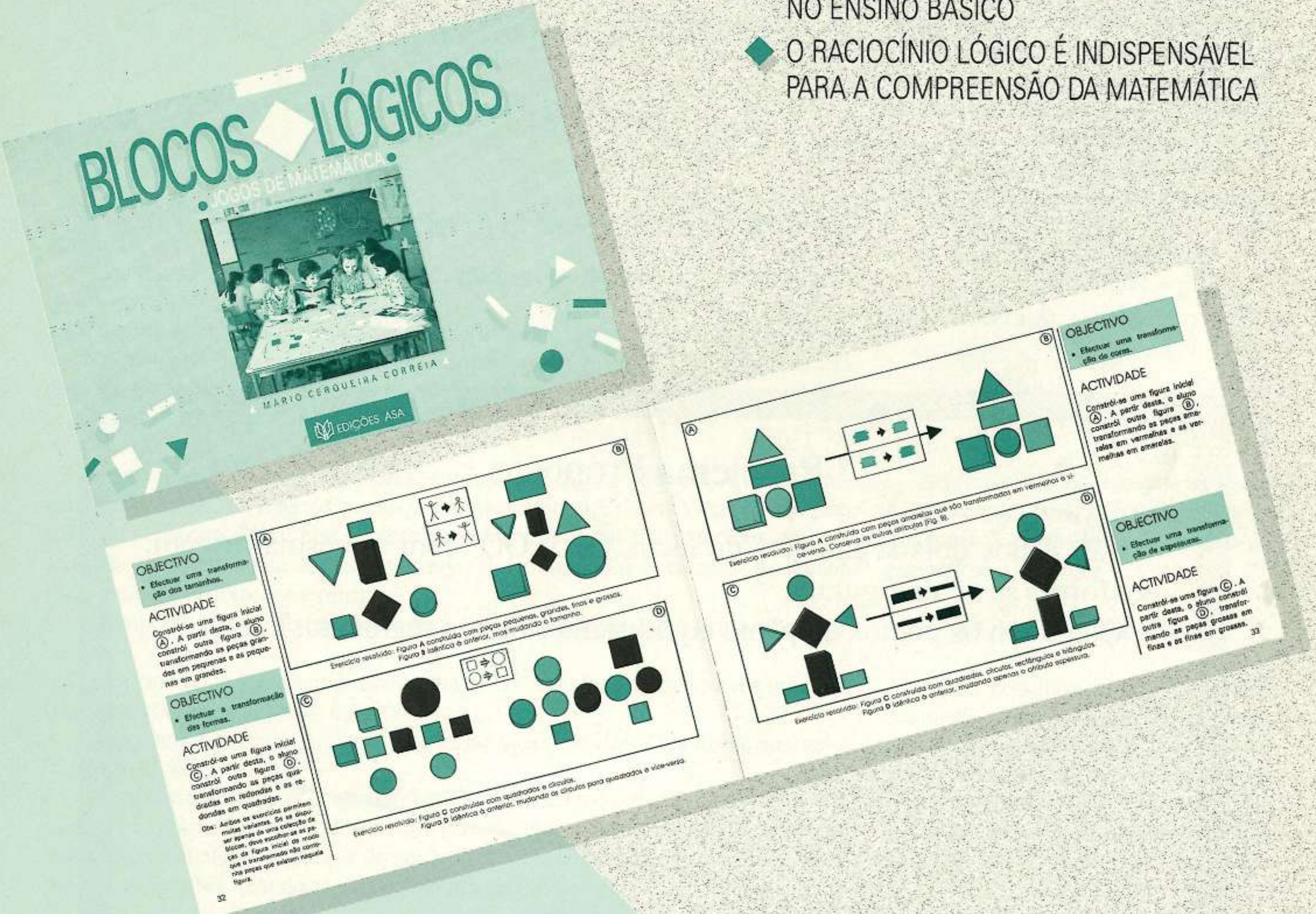
São dados dois segmentos de recta, OP e OQ, com a mesma origem, conforme se vê na figura.

Quais são os pontos do plano equidistantes destes segmentos?



BLOCOS ◆ LÓGICOS

- UM MATERIAL ESSENCIAL NO ENSINO BÁSICO
- O RACIOCÍNIO LÓGICO É INDISPENSÁVEL PARA A COMPREENSÃO DA MATEMÁTICA



▶ UM LIVRO COM DEZENAS DE SUGESTÕES DE ACTIVIDADES POR MÁRIO CERQUEIRA CORREIA

- JOGOS
- DIAGRAMAS DE VENN, DE CARROLL E DE ÁRVORE
- TRANSFORMAÇÕES
- SEQUÊNCIAS

▶ CAIXA COM AS 48 PEÇAS COLORIDAS

EDIÇÕES ASA

índice