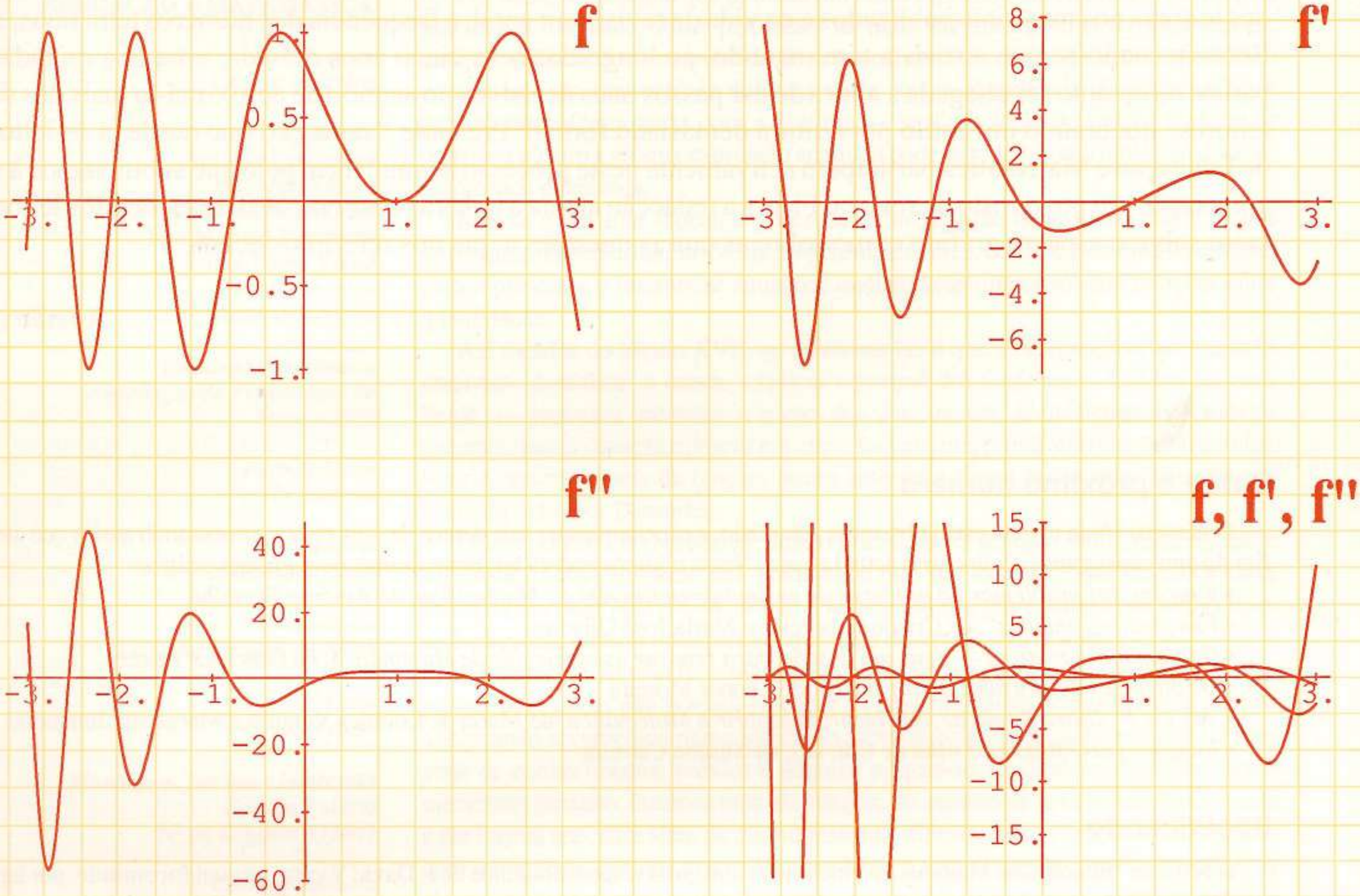
Educação e Matemática

Nº 15 — *3º trimestre de 1990*



$$f(x)=\text{sen}(x-1)^2$$

Revista da Associação de Professores de Matemática

Um novo rosto para *Educação e Matemática*

Com este número iniciamos um processo de transformação da nossa revista, em múltiplos aspectos. Nas últimas reuniões a redacção encetou uma reflexão crítica sobre as várias facetas do funcionamento da revista, e começou a questionar a formulação gráfica, a extensão e tipo de artigos, o nível de colaboração dos leitores nos materiais publicados e na vida da revista em geral, a frequência dos números temáticos, etc. Reconhecendo-se que a revista tem mantido, ao longo dos seus cinco anos de vida, uma boa qualidade, parece no entanto ser chegada a altura de dar passos mais decisivos no sentido de aproximá-la mais dos seus leitores, quebrando um estilo porventura demasiado formal. Pretende a redacção que desde já os leitores de Educação e Matemática participem activamente neste processo de mudança, pelo que submetemos à sua apreciação um novo rosto da revista. Ficará a redacção atenta a todas as observações e reacções dos leitores, tanto sobre o aspecto gráfico como sobre as outras questões a que nos referimos acima.

A redacção

Sobre o próximo número

O número 16 da revista está já bastante adiantado, e esperamos que saia dentro de dois meses, procurando assim que até ao fim do ano consigamos recuperar o actual atraso. Nesse número poderá ler, entre outros, os seguintes artigos:

- *Funções dos problemas no processo de ensino/aprendizagem da Matemática*, de António Borralho
- *Funções "escondidas"*, de Cristina Loureiro e Maria José Oliveira
- *Calculadoras gráficas — mais um desafio para renovar os currículos de Matemática*, de Graciosa Veloso
- *Os alicerces do pensamento algébrico*, de Leonor Moreira
- *MVT-CP: Outra forma de, a brincar, descobrir a Matemática*, de Maria de Lourdes Ventura e Margarida Junqueira
- *Funções periódicas na Folha de Cálculo*, de Susana Carreira

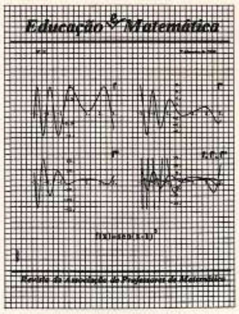
Rectificando

O Nº13 de "Educação e Matemática" incluiu um artigo da responsabilidade de J. David Vieira, no qual foi omitido, por lapso, o subtítulo: "**Manuais de Matemática do 1º ano**"; a este subtítulo deverá reportar-se a nota referenciada por (*), que no texto publicado apareceu subordinada ao título: "**Manuais escolares no Ensino Primário**".

No Nº14, página 21, o artigo intitulado "**Trânsito, casa e lógica**" de Arsénio Coelho, inclui na linha 24: "... a circulação correcta do trânsito é **a=b**"; trata-se de uma incorrecção, já que deveria antes constar: "...a circulação correcta do trânsito é **a=~b**".

A capa deste número

Os gráficos incluídos foram primeiramente obtidos por meio do programa *Mathematica*, onde, depois de definida a função $f(x)=sen(x-1)^2$, foram calculadas a primeira e segunda derivadas de f, e pedidos os três gráficos (f, f' e f'') e em seguida os três gráficos sobrepostos. Os gráficos foram depois gravados no formato Encapsulated Postscript, o que significa que, quando posteriormente forem impressos numa laser, o que é enviado para a impressora são as fórmulas matemáticas e não os próprios gráficos. Desta forma obtém-se a melhor qualidade possível na impressão de gráficos. O quadriculado foi desenhado directamente no PageMaker, com linhas de espessura "hairline" (0.25 pontos). Depois os gráficos e o texto foram importados para a mesma página e sobrepostos à quadrícula. Finalmente foi feita uma separação relativa às duas cores, amarelo e vermelho, para envio à tipografia.



Na peugada de Galileu

nº 15
3º trimestre
de 1990

Leonor Moreira

Título da publicação
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora
Leonor Moreira

Redacção
António Bernardes
Eduardo Veloso
Henrique Guimarães
José Manuel Varandas
José Paulo Viana
Paulo Abrantes
Susana Carreira

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade
Trimestral

Tiragem
2000 exemplares

Composição
Gabinete Técnico da APM

Capa
Eduardo Veloso

Montagem, fotolito e impressão
Costa e Valério
Nº de Registo: 112807

Correspondência
Associação de Professores de Matemática
Av. 24 de Julho, 134 4º
1700 Lisboa

A preparação da arte final foi executada num Mac II, cedido à APM pela Interlog, SA.

Nota: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Poder-se-ia dizer que, depois de um número centrado nas aplicações matemáticas (nº 12), nada mais natural que publicar um outro especialmente dedicado às relações funcionais. De facto, estas permeiam as mais diversas esferas da vida (social, biológica, física...) — os prémios de seguros variam com a idade do segurado, o crescimento de uma colónia de focas varia com a abundância de alimentação, a pressão atmosférica varia com a altitude — sendo a ideia de função tanto mais poderosa quanto a mesma expressão analítica pode descrever uma multiplicidade de fenómenos diferentes.

Mas se a ideia de função é poderosa na modelação do real, ela não é menos importante no âmbito exclusivo da própria matemática, constituindo uma ferramenta para representar e interpretar situações matemáticas que envolvam relações entre quantidades.

Até meados do século XVII, os cientistas (se é que a designação é adequada!)[1] tentavam identificar a causa, explicar o porquê dos fenómenos. Galileu foi mais longe — procurou entender o como dos fenómenos; identificava as variáveis presentes numa situação e procurava, incessantemente, prováveis relações entre elas. Nascia, assim, a ideia de função, muito embora o termo tenha sido utilizado, em primeira mão, por Descartes.

Não é possível compreender tudo o que se passa à nossa volta, dada a grande variedade e complexidade dos fenómenos que nos cercam. Mas devemos fazer esforço para isso! Não é essa, afinal, a atitude natural das crianças que nos deixam embaraçados, quando nos colocam questões do tipo "como é que...?".

Infelizmente, há uma forte tendência para adiar as respostas a estas questões. Não porque as crianças não possam entender a resposta quando adequada, mas porque, alicerçando argumentos numa lógica do saber já construído, achamos que há uma série de conhecimentos prévios a adquirir e, quando, finalmente, consideramos o momento oportuno, fazemos uma abordagem do assunto de uma forma tão abstracta e tão formal que, para além de desinteressante, dificilmente se percebe a sua relação com a realidade que nos cerca. Mas também, a esta altura dos acontecimentos, os alunos já não esperam, de nós, respostas para nada, cansados que estão de ouvirem "aprenderás isso mais tarde".

Isto para dizer que o estudo formal das funções qué ocorre no Ensino Secundário deveria ser uma extensão natural das experiências informais vividas pelos alunos desde os primeiros anos de escolaridade.

Procuraremos, com este número, apresentar diversas abordagens, teóricas e práticas, deste tema, e também dar exemplos de actividades a propor a alunos dos diferentes níveis etários, desde as que proporcionam a construção intuitiva do conceito de função, até às que, utilizando as novas tecnologias, permitem explorações que o simples papel e lápis jamais proporcionariam.

1. Na verdade o termo pode pecar por omissão, dado que o âmbito dos interesses e dos trabalhos a que se dedicavam não se restringia a uma área específica, como agora acontece.

Publicações APM

Calculadoras na Educação Matemática
2ª edição, Novembro de 1990, 151 pp.
700$00 (sócios 500$00)

O computador na aula de Matemática
2ª edição, Agosto de 1988, 73 pp.
400$00 (sócios 280$00)

Cronologia Recente do Ensino da Matemática
3ª edição, Setembro de 1989, 94 pp.
520$00 (sócios 360$00)

O Geoplano na Sala de Aula
1ª edição, Agosto de 1988, 276 pp.
1175$00 (sócios 825$00)

Jogos, Enigmas e Problemas
2ª edição, Julho de 1988, 48 pp.
280$00 (sócios 200$00)

Mais Jogos, Mais Enigmas, Mais Problemas
1ª edição, Setembro de 1989, 64 pp.
290$00 (sócios 200$00)

A Matemática na Vida das Abelhas
2ª edição, Julho de 1988, 80 pp.
400$00 (sócios 280$00)

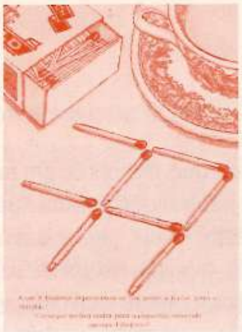
A Natureza da Matemática
1ª edição, Setembro de 1988,75 pp.
570$00 (sócios 400$00)

O Problema da Semana
4ª edição, Julho de 1988, 86pp.
520$00 (sócios 360$00)

PROFMAT nº 4
1ª edição, Janeiro 1989, 269 pp.
820$00 (sócios 580$00)

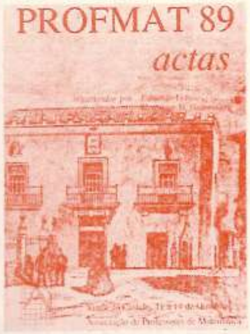
Renovação do Currículo de Matemática.
3ª edição, Abril de 1990, 112 pp.
570$00 (sócios 400$00)

Colecção de POSTAIS (com problemas)
16 postais
850$00 (sócios 600$00)



novo

novo



PROFMAT nº5
1ª edição, Setembro 1990, 493 pp.
2000$00 (sócios 1400$00)

Publicações — Envio pelo Correio

Envie fotocópia da ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para:

Associação de Professores de Matemática
Faculdade de Ciências de Lisboa
Av. 24 de Julho, 134, 4º, 1300 Lisboa

Viagem de Ida e Volta
1ª edição, Agosto de 1988, 56 pp.
400$00 (sócios 280$00)

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA
Agenda do Professor 1990/1991
1ª edição, Julho 1990, 144 pp.
530$00 (sócios 380$00)

Jogo "MAGIC STONE",
350$00

Educação e Matemática
nº1 a nº6
200$00
nº7 a nº12
250$00
nº13 e seguintes
400$00
Nota: Alguns números estão esgotados e são vendidos ao mesmo preço em fotocópias.

Títulos	Nº de Ex.	Preço Unitário (*)	Custo

Sócio da APM ☐ Nº ______ Assinatura ______
Não Sócio ☐
Nome ______
Morada ______
______ C. P. ______
Data do pedido ______

Subtotal
Portes do Correio (20 %)
Valor Total

Para uso da APM
Assinatura
Pedido recebido em ______
Enviado em ______

(*) As publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM.

O conceito de função no currículo de Matemática

João Pedro da Ponte

Neste artigo apresentam-se alguns dos aspectos mais salientes da história e da natureza do conceito de função, bem como das suas ligações com as outras ciências e da sua utilização para o estudo de situações da realidade. O problema do seu enquadramento didáctico é equacionado em termos da natureza e generalidade do conceito, das suas formas de representação e do tipo de actividades a desenvolver pelos alunos, discutindo-se ainda as implicações derivadas da moderna tecnologia.

Diversos ramos da Matemática lidam directa ou indirectamente com funções: na Análise Infinitesimal consideram-se funções de uma, duas, três ou n variáveis, estudando-se as suas propriedades bem como as das suas derivadas; nas teorias de equações diferenciais e integrais procura-se resolver equações cujas soluções são funções; na Análise Funcional trabalha-se com espaços cujos objectos são funções; na Análise Numérica estudam-se os processos de controlar os erros na avaliação de funções dos mais diversos tipos, etc. Outros ramos da Matemática tratam de perto com conceitos que constituem generalizações desta noção. Assim, na Álgebra consideram-se operações e relações, na Lógica estudam-se as funções recursivas.

A origem da noção de função

O conceito de função é justamente considerado um dos mais importantes de toda a Matemática. O ponto, a recta e o plano eram os elementos de base da Geometria Euclideana, a teoria dominante desde o tempo dos Gregos até à Idade Moderna. As noções de função e derivada constituem a partir de então o fundamento do Cálculo Infinitesimal, a nova teoria que acabou por se revelar capital no desenvolvimento da Matemática contemporânea.

Não se trata portanto de uma noção muito antiga. É verdade que aspectos muito simples deste conceito podem ser encontrados em épocas anteriores (eles já estão presentes, por exemplo, na mais elementar operação de contagem). É também um facto que alguns percursores se aproximaram da sua formulação moderna. Mas o seu surgimento como conceito claramente individualizado e como objecto de estudo corrente em Matemática remonta apenas aos finais do Século XVII.

A origem da noção de função confunde-se assim com os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Ela surgia de forma um tanto confusa nos "fluentes" e "fluxões" de Newton (1642-1727). Este autor também usou os termos "relata quantitas" para designar variável dependente e "genita" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.

Foi Leibniz (1646-1716) quem primeiro usou o termo "função" (em 1673), mas ainda apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência duma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais. Introduziu igualmente a terminologia de "constante", "variável" e "parâmetro".

Com o desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos, tornou-se indispensável um termo para representar quantidades dependentes de alguma variável por meio duma expressão analítica. Com esse propósito, a palavra "função" foi adoptada na correspondência trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e João Bernoulli (1667-1748).

O termo "função" não aparecia ainda num léxico matemático surgido em 1716. Mas dois anos mais tarde João Bernoulli publicou um artigo, que viria a ter grande divulgação, contendo a sua definição de função de uma certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes. Um retoque final nesta definição viria a ser dado em 1748 por Euler (1707-1783) — um antigo aluno de Bernoulli — substituindo o termo "quantidade" por "expressão analitica".

A noção de função era assim identificada na prática com a de expressão analítica, situação que haveria de vigorar pelos Séculos XVIII e XIX, apesar de cedo se perceber que conduzia a diversas incoerências e limitações (de facto, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes!).

Esta noção, associada às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações, que lhe alteraram profundamente a sua natureza e significado.

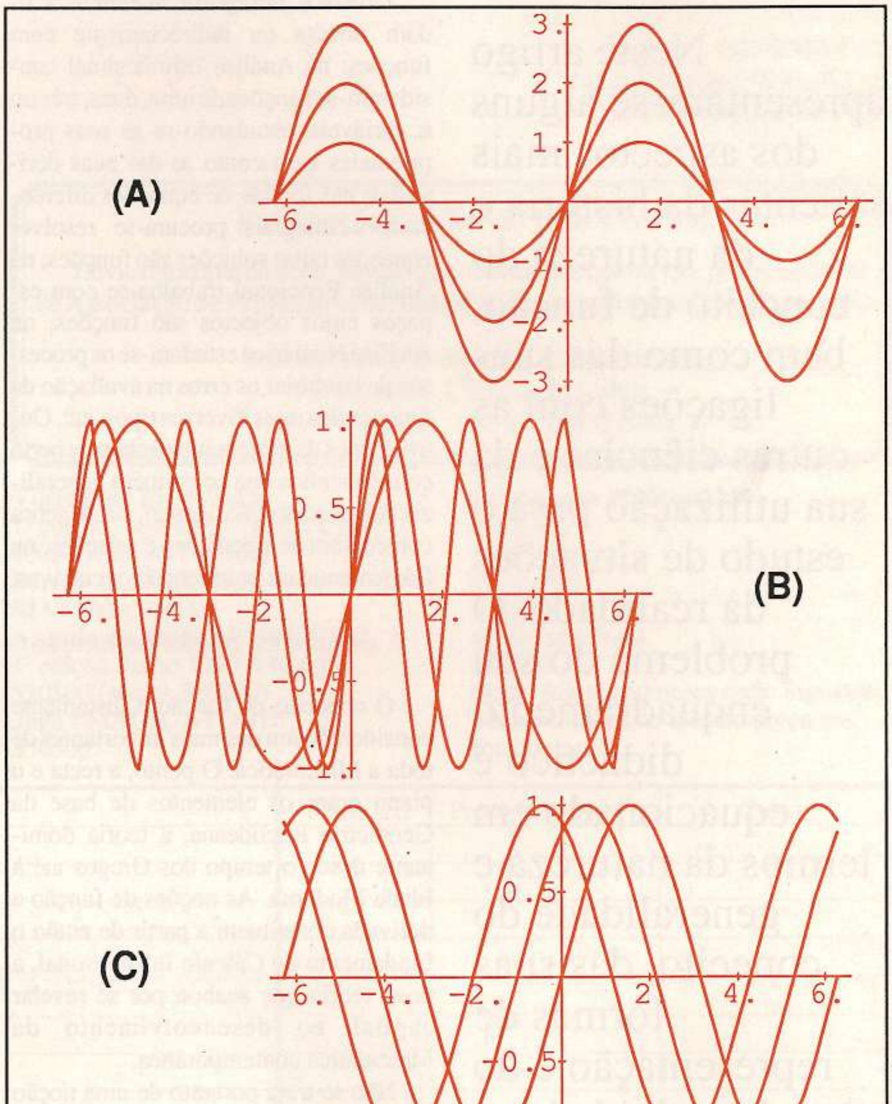
Um dos momentos mais marcantes desta evolução resultou dos trabalhos de Fourier (1768-1830), que se ocupava dos problemas da condução do calor nos objectos materiais, considerando a temperatura de um corpo como uma função de duas variáveis, o tempo e o espaço. Fourier conjecturou a certa altura que para qualquer função seria possível obter um desenvolvimento em série trigonométrica, num intervalo apropriado, mas não deu uma prova matemática dessa afirmação. O problema viria a ser retomado por Dirichlet (1805-1859), que formulou as condições suficientes para representabilidade duma função por uma série de Fourier. Dirichlet separou então o conceito de função da sua representação analítica, formulando-o em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos (em 1837). Uma função seria simplesmente uma correspondência entre duas variáveis, tal que a todo o valor da variável independente se associa um e um só valor da variável dependente.

Finalmente, com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918), a noção de função acabaria por ser estendida já no Século XX de forma a incluir tudo o que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não.

Trata-se de uma evolução que ainda não parou. Da noção de correpondência passou-se à noção de relação. Um parente próximo da ideia de função constitui um conceito primitivo da Teoria das Categorias. Na Teoria da Computabilidade (por exemplo, no Cálculo-λ), encara-se uma função já não como uma relação mas como uma regra de cálculo.

Começando por designar correspondências entre objectos de natureza geométrica, a ideia de função impôs-se através da sua associação ao estudo das expressões analíticas, ideia que se viria a revelar extremamente fecunda (e que continua na prática a impregnar a nossa linguagem actual). Ao indicar o papel histórico da fase em que a noção de função esteve na prática confundida com a de expressão analítica, o matemático soviético Youschkevitch (1976) comentou:

> "Foi o método analítico de introduzir funções que revolucionou a Matemática e, por causa da sua extraordinária eficiência, reservou um lugar central para a noção de função em todas as ciências exactas."



Já existem vários programas de computador que permitem sobrepor gráficos de duas ou mais funções, o que facilita, por exemplo, o estudo da influência dos vários parâmetros numa família de funções. Os gráficos desta figura representam funções da família y=asen(wt+b). Em A) podem ver-se os gráficos de y=sen(t), y=2sen(t) e y=3sen(t), em B) os de y=sen(t), y=sen(2t) e y=sen(3t), e em C) representámos os gráficos de y=sen(t), y=sen(t+1) e de y=sen(t+2).

A noção de função e a realidade física

A noção de função não apareceu por acaso na Matemática. Ela surgiu, como tão bem mostrou Bento Caraça (1951), como o instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenómenos naturais, iniciado por Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630). O seu desenvolvimento apoiou-se nas possibilidades expressivas proporcionadas pela criação da moderna notação algébrica por Viète (1540-1603), e, muito em especial, da Geometria Analítica, por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601--1665).

Reagindo às tradições verbalistas e redundantes da escolástica medieval, Galileu sublinhava ser a Matemática a linguagem apropriada para estudar a natureza. Era preciso medir grandezas, identificar regularidades e obter relações que tivessem tanto quanto possível uma descrição matemática simples. O estudo do movimento da queda dos graves, do movimento dos planetas, e em geral, dos movimentos curvilíneos, conduziram à necessidade de considerar as funções de proporcionalidade directa e inversa, bem como as funções polinomiais (incluindo as cónicas) e as trigonométricas.

A Matemática e a Física estavam nesta altura estreitamente ligadas entre si. Um dos maiores matemáticos de todos os tempos, Newton, seria simultaneamente um físico proeminente. Muitos outros matemáticos como Bernoulli, Euler, Lagrange, Fourier manifestaram igualmente grande interesse por problemas de ordem física.

As funções são instrumentos por excelência para estudar problemas de variação. Uma dada grandeza pode variar no tempo, variar no espaço, variar segundo outras grandezas, e mesmo variar simultaneamente em diversas dimensões. Essa variação pode ser mais rápida ou mais lenta, pode desaparecer de todo, pode, em suma, obedecer às mais diversas leis ou constrangimentos.

Por exemplo, uma das descobertas mais extraordinárias de Newton, é que a lei de movimento de um corpo (em notação moderna, dada pela função **e(t)** — o espaço variando com o tempo) não tem uma relação directa com a força aplicada nesse corpo. Essa relação também não existe para a lei da velocidade (dada por **v(t)**, em que v é a função derivada de **e**, **de/dt**). Mas, no entanto, tal relação existe para a aceleração do corpo (dada por **a(t)**, a função segunda derivada, **dv/dt**), e é expressa por uma lei extremamente simples: **f=ma**!

A noção de função está assim associada na sua origem à noção de lei natural. A ideia de "regularidade" era um dos seus elementos constitutivos mais determinante.

Na verdade, podemos considerar três elementos essenciais na formação do primitivo conceito de função:

(a) a notação algébrica, portadora de importantes factores como a simplicidade e o rigor, permitindo a manipulação de expressões analíticas condensando uma grande quantidade de informação;

(b) a representação geométrica, proporcionando uma base intuitiva fundamental (de que é exemplo a associação das noções de tangente a uma curva e de derivada duma função);

(c) a ligação com os problemas concretos do mundo físico, associada à ideia de regularidade, que forneceu a motivação e o impulso fundamental do estudo.

O conceito de função acabaria por seguir uma evolução própria, afastando-se destes três elementos. Começaram a considerar-se funções às quais não corresponde qualquer expressão analítica, que não são susceptíveis de representação geométrica simples, e que não têm qualquer relação com problemas concretos do mundo físico.

Essa evolução viveu os seus momentos de dramatismo — recordemos o horror provocado pelas "funções-monstros", como as funções contínuas sem derivada em nenhum ponto, que pareciam não ter outro propósito senão roubar aos matemáticos a confiança nos seus raciocínios. Tal evolução teve como pano de fundo a procura de coerência e generalidade, mas não deixou de estar fortemente associada ao estudo de questões matemáticas significativas e interessantes.

A noção de função e os novos desenvolvimentos da Matemática

A Matemática hoje em dia já não está vinculada de forma tão exclusiva como no passado às ciências físicas. Ela viu desdobrarem-se os seus domínios de aplicação, servindo igualmente de instrumento para o estudo de fenómenos e situações das ciências da vida, das ciências humanas e sociais, da gestão, da comunicação, da engenharia e da tecnologia, constituindo um meio de descrição, explicação, previsão e controlo.

Esta aplicação da Matemática às áreas mais diversas é feita essencialmente através da noção de modelo. Um modelo matemático constitui uma representação duma dada situação, através de objectos, relações e estruturas com que se procura descrever os elementos considerados fundamentais dessa situação, ao mesmo tempo que se ignoram deliberadamente os elementos tidos como secundários. Um modelo matemático pode ter diversas formas, mas usualmente é constituído por variáveis, relações entre essas variáveis, e as respectivas taxas de variação.

O processo de construção de um modelo matemático envolve diversas etapas, podendo ser necessários vários ciclos de aperfeiçoamento sucessivo até se obter uma descrição satifatória da situação em causa. De acordo com Niss (1987), as seguintes actividades constituem parte integrante deste processo: (a) identificar os elementos da situação que se pretende estudar; (b) selecionar os objectos, relações, etc., relevantes para este fim; (c) idealizá-los de forma apropriada para uma representação matemática; (d) escolher um universo matemático para servir de base ao modelo; (e) efectuar uma translação da situação para este universo; (f) estabelecer relações matemáticas entre os objectos traduzidos, acompanhados por hipóteses e propriedades; (g) usar métodos matemáticos para obter novos resultados e conclusões relativos ao modelo; (h) interpretar estes resultados e conclusões no quadro da situação original; (i) avaliar o modelo confrontando-o com a realidade (com dados observados ou previstos), comparando-o com outros modelos e/ou relacionando-o com conhecimentos teóricos; e (j) construindo, se necessário, um modelo novo ou modificado.

Entre os modelos matemáticos mais frequentes contam-se os sistemas dinâmicos. Nestes, as variáveis fundamentais que indicam o estado do sistema representam quantidades que podem aumentar ou diminuir ("acumulações"), tais como a distância à origem, a massa, a energia cinética, o volume de um líquido, o número de organismos vivos, etc. Equações envolvendo as taxas de variação destas quantidades regem a sua mudança no tempo.

Mas os modelos podem ser de outros tipos. Nos modelos de distribuição espacial estuda-se como diversos objectos ou quantidades se posicionam e movem no espaço. Nos modelos probabilísticos discretos temos uma série de acontecimentos ocorrendo no tempo, de acordo com determinadas funções de probabilidade. Em qualquer dos casos é sempre de grande interesse estudar os efeitos dos diversos parâmetros que influem na situação, o que se faz de forma tanto mais eficiente quanto mais próximo se está de estabelecer uma relação funcional entre cada um deles e as variáveis fundamentais do modelo.

A noção de função é por isso de importância central na concepção e no estudo de modelos, qualquer que seja a sua natureza, continuando por isso a ser uma noção-chave na Matemática actual.

As funções no currículo de Matemática

Já no início do Século XX, Felix Klein (1908-1945) argumentava que a noção de função devia estar presente em todo o ensino da Matemática, a nível secundário. No entanto, e apesar da sua importância nunca ter sido posta em causa, as funções têm tido por vezes um lugar subordinado e modesto nos currículos de Matemática.

O papel curricular do conceito de função pode ser visto tendo em conta três aspectos essenciais: (a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem, (b) a generalidade do conceito, e (c) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências.

De facto, há duas formas distintas de conceber o estudo da álgebra elementar. Numa, a prioridade é dada às equações e expressões designatórias. Noutra, a prioridade é dada à noção de função e à sua representação gráfica. Aparentemente, pouco divergem. Através de ambas se dá praticamente a mesma matéria. Mas a verdade é que se tratam de caminhos muito distintos, privilegiando o primeiro os aspectos simbólicos e formais e o segundo os aspectos intuitivos e relacionais.

Outra questão importante tem a ver com a maior ou menor generalidade da definição que se adopta e, muito especialmente, com que se trabalha (na verdade, estas nem sempre coincidem!). Privilegiam-se as funções numéricas ou procura-se fazer uma abordagem em termos mais gerais, envolvendo correspondências entre elementos dos mais diversos conjuntos?

Em Portugal, não se chegou a cair nos exageros cometidos noutros países, nomeadamente no período da chamada "Matemática Moderna". Houve bom senso suficiente para nunca se adoptar definições no estilo bourbakista "uma função é um conjunto de pares ordenados". O estudo das proporcionalidades directa e inversa manteve-se sempre nos programas, bem como o das funções quadráticas e trigonométricas.

Mas se entre nós as orientações seguidas se podem caracterizar pela moderação, o certo é que se têm inclinado sempre mais para a consideração do aspecto algébrico e a procura duma ampla generalidade. São disso exemplo a forma insistente como se valorizam noções como injectividade e sobrejectividade, e a importância que se dá a temas como a composição de funções, cujo tratamento, à míngua de aplicações interessantes, se torna profundamente maçador. Trata-se de noções sem dúvida importantes, mas introduzidas duma forma prematura e imprópria, sem se ter em conta se os alunos estão ou não em condições de delas poderem tirar o desejável proveito.

A preocupação em introduzir muita terminologia abstracta, que nunca chega a ser usada de forma significativa, é uma tentação frequente dos programas, não só portugueses mas também de outros países. Eventualmente ela satisfaz o sentido estético dos seus autores, que mostram assim saber bastante Matemática. Mas, se essa terminologia não constitui uma ferramenta prática para lidar com situações interessantes — exteriores ou interiores à Matemática — ela constitiu um vocabulário que meramente se memoriza sem se compreender nem valorizar.

Num aspecto a tradição portuguesa no ensino das funções tem sido particularmente pobre: na dificuldade em dar um lugar de relevo à ligação da Matemática com a realidade. Tem prevalecido a ideia de que nesta disciplina o que é preciso é que os alunos aprendam as técnicas e os algoritmos, ficando a sua aplicação às diversas situações exclusivamente a seu cargo ou, quando muito, ao cuidado dos professores das outras matérias.

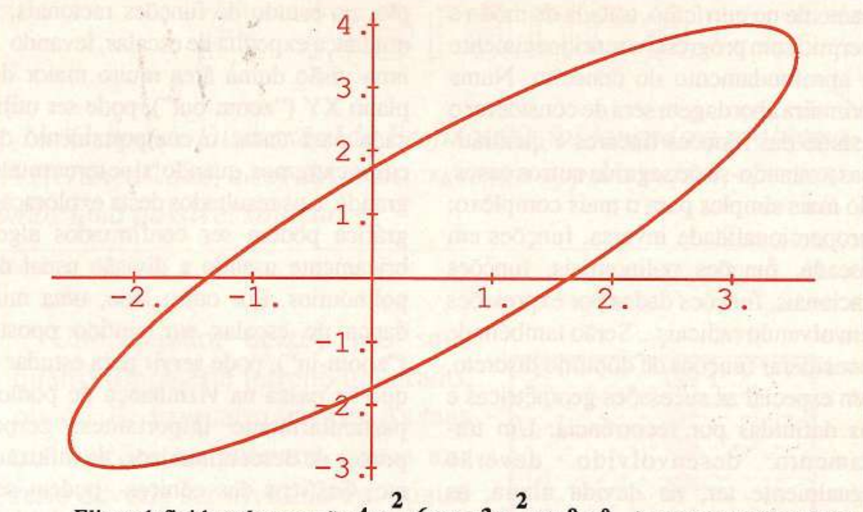
De nada serviu o esforço de José Sebastião e Silva (1964a, 1964b), que nos seus "textos piloto" e "guias" discutia em profundidade numerosos exemplos e salientava a importância didáctica das aplicações. As suas recomendações não foram minimamente tidas em conta nos programas posteriores. O reconhecimento de que a capacidade dos alunos aplicarem os conceitos adquiridos é tão ou mais difícil de adquirir quanto os próprios conceitos, e que os dois processos devem seguir a par e passo, leva a concluir que estamos perante um dos aspectos mais negativos das nossas orientações curriculares.

É possível introduzir a ideia de função como relação binária logo na Escola Primária. Isto tem sido tentado duma variedade de maneiras. Uma delas, é através de diagramas sagitais. Os conjuntos em causa raramente excedem os três ou quatro elementos. O que é preciso saber é que de cada elemento do domínio sai uma e uma única seta. Outra, é a conhecida ideia da "máquina de transformação": um objecto é introduzido por um lado, originando que algo saia pelo extremo oposto. Em qualquer das formas não é difícil de apresentar as operações aritméticas usuais nos números inteiros e a sua composição. Podem-se calcular imagens de números dados, números que têm dadas imagens, e até procurar adivinhar as regras de transformação. Mas estas classes de funções não possuem quaisquer aplicações significativas nem propriedades interessantes. Trata-se apenas de versões fortemente trivializadas de um conceito matemático.

O problema da trivialização não tem solução fácil. Ele tem de ser enfrentado qualquer que seja a abordagem. É um problema muito sério porque fornece aos alunos uma imagem distorcida da Matemática. No passado traduzia-se por proporcionar um contacto limitado a uma classe muito restrita das funções: as algébricas e as transcendentes, um pequeno subconjunto das funções contínuas. De facto, na sua maioria tratava-se mesmo de funções analíticas, embora isso não chegasse a ser explorado.

Enquanto na abordagem algébrica a principal restrição tem a ver com a natureza do domínio (que é discreto, finito, e normalmente se restringe a um pequeno número de elementos), classicamente ela dizia respeito à natureza da relação funcional. Mas a organização clássica correspondia a um melhor compromisso entre a generalidade e a simplificação. Permitia seguir um processo de generalizações sucessivas, ao contrário da abordagem algébrica, cujo único mérito é fornecer desde o princípio um quadro muito geral donde podemos partir para conceitos mais restritos por um processo de sucessivas particularizações. E, o que é fundamental, é mais fácil encontrar aplicações e fazer um estudo conduzindo a propriedades interessantes para as funções numéricas clássicas do que para as relações binárias com uma condição de univocidade.

Já lá vai o tempo em que o objectivo último de qualquer programa inovador em Matemática era introduzir os conceitos mais abstractos tão cedo quanto possível, de preferência logo no Ensino Primário. Hoje, parece ser cada vez mais aceite que a noção de função deve ser introduzida, como conceito com identidade própria, no 7º ou no 8º ano de escolaridade, ou seja, no 3º Ciclo do Ensino Básico (ver, por exemplo, NCTM, 1989). A forma mais natural para o fazer será provavelmente a propósito do estudo da proporcionalidade.



Elipse definida pela equação $4x^2 - 6xy + 3y^2 - x - 9 = 0$. A representação gráfica foi obtida pelo processo indicado na pág. 8, e utilizando o programa *Mathematica*.

Mas muitos alunos chegam a este nível de escolaridade ainda com muitas dificuldades no raciocínio abstracto. Lidar com expressões algébricas e mesmo com gráficos cartesianos não constitui para a maioria tarefa fácil. O ensino das funções deverá por isso atender à necessidade de articular de forma permanente as três formas de representação conhecidas dos alunos: o numérico, o gráfico, o algébrico.

Construir tabelas, calcular valores numéricos, desenvolver um sentido do quantitativo, adquirir sensibilidade para o que são aproximações aceitáveis e inaceitáveis, são aspectos importantes da competência matemática que só podem ser desenvolvidos se se lidar correntemente e com desembaraço com números concretos (se possível, provenientes de contextos da vida real).

A interpretação de aspectos complexos dos gráficos deve ter igualmente um lugar bem estabelecido no currículo de Matemática. Ideias relacionadas com a variação (crescimento, decrescimento, constância, máximo, mínimo), e com a variação na variação (variação rápida e lenta, taxa de variação, regularidade, continuidade), são melhor apreendidas a partir de representações gráficas. Os estudantes devem ser capazes de usar estes conceitos para fazer predições, interpolar e extrapolar. Sobrepondo gráficos, devem ser capazes de relacionar diversas funções. Devem igualmente saber construir linhas de regressão que aproximem relações entre dados obtidos empiricamente e ter uma intuição para o grau de associação entre as duas variáveis.

O trabalho com expressões analíticas continua naturalmente a ser importante. Mas mais do que manejar correctamente longas e intrincadas expressões, é fundamental que os alunos compreendam o seu significado em relação a casos concretos. As fórmulas da Geometria, da Física, da Química, e das outras ciências devem ser tomadas correntemente como exemplos e exploradas nos seus diversos significados.

O estudo analítico das funções não deverá por isso ser posto de parte. Mas, em vez de se bastar a si próprio, ele deve pelo contrário surgir com base em actividades sistematicamente feitas a partir das representações numérica e gráfica. Trata-se de reforçar o desenvolvimento dos aspectos intuitivos na fase inicial do trabalho, reservando as aspectos de formalização para a segunda fase.

A noção de função, uma vez introduzida, deverá passar a aparecer ciclicamente no currículo, tratada de modo a permitir um progressivo enriquecimento e aprofundamento do conceito. Numa primeira abordagem será de considerar o estudo das funções lineares e quadráticas, tratando-se de seguida outros casos, do mais simples para o mais complexo: proporcionalidade inversa, funções em escada, funções polinomiais, funções racionais, funções dadas por expressões envolvendo radicais... Serão também de considerar funções de domínio discreto, em especial as sucessões geométricas e as definidas por recorrência. Um tratamento desenvolvido deverão igualmente ter, na devida altura, as funções trigonométricas, a exponencial e a logarítmica.

O estudo numérico, gráfico e analítico deverá estender-se a famílias de funções, como

$$y = a \text{ sen } (wt + b)$$

e

$$y = a \exp (wt + b)$$

Diversos instrumentos proporcionados pela moderna tecnologia podem ter um papel de grande alcance no estudo das funções, em especial, as calculadoras gráficas e os computadores que disponham de programas apropriados — traçadores de gráficos ou folhas de cálculo electrónicas. A tecnologia pode ajudar os estudantes a desenvolver uma actividade matemática mais profunda, facilitando a generalização, dando-lhes poder para resolver problemas difíceis, e fornecendo ligações concretas entre domínios tão diversos como a Geometria, a Álgebra, a Estatística, as situações reais e os modelos matemáticos associados.

Como referem Demana e Waits (1990), a tecnologia tem o potencial necessário para nos levar a mudar a maneira como trabalhamos. Estes autores sugerem também que as representações gráficas feitas em computador ou na calculadora podem encorajar a manipulação algébrica. Raízes e factores de polinómios podem ser estimados a partir de um gráfico e confirmados por processos analíticos. Treino na manipulação algébrica pode ser conseguido de forma perfeitamente natural através de interessantes actividades de representação gráfica em computador. Por exemplo, no estudo de funções racionais, a mudança expedita de escalas, levando a uma visão duma área muito maior do plano XY ("zoom-out"), pode ser utilizada para testar o comportamento de casos extremos, quando $|x|$ se torna muito grande, e os resultados desta exploração gráfica podem ser confirmados algebricamente usando a divisão usual de polinómios. Por outro lado, uma mudança de escalas em sentido oposto ("zoom-in"), pode servir para estudar o que se passa na vizinhança de pontos particularmente importantes: zeros, pontos de descontinuidade, de inflexão, etc. Gráficos das cónicas podem ser obtidos usando a fórmula quadrática,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

resolvendo em ordem a y, e representando depois as duas equações resultantes. Por exemplo, para

$$4x^2 - 6xy + 3y^2 - x - 9 = 0$$

temos:

$$y = \frac{6x + \sqrt{36x^2 - 12(4x^2 - x - 9)}}{6}$$

ou

$$y = \frac{6x - \sqrt{36x^2 - 12(4x^2 - x - 9)}}{6}$$

Conclusão

As funções estudadas na Análise Infinitesimal e usadas nas aplicações retêm no fundamental a ideia de dependência entre variáveis. As consideradas na Álgebra têm como ideia central a noção de relação. As estudadas nas Ciências da Computação valorizam os aspectos algorítmicos.

O conceito de função numérica associa duma forma natural três aspectos fundamentais da Matemática: (a) as representações analíticas, uma vez que entre as funções mais interessantes pelas suas propriedades se contam as que são dadas por uma expressão analítica simples (ou por uma expressão composta de várias expressões analíticas simples); (b) as representações gráficas, por via da Geometria Analítica; e (c) a ligação com a realidade, uma vez que tudo o que pode ser contado ou medido pode ser representado por uma função.

Embora seja possível definir função de forma muito geral, privilegiando a perspectiva da Álgebra na Matemática escolar, a verdade é que as funções numéricas gozam de propriedades elementares particularmente interessantes, têm uma representação geométrica simples e intuitiva, e descrevem de uma forma muito sugestiva situações da mais diversa natureza.

O seu estudo permite aos estudantes uma ancoragem em conhecimentos anteriores e em múltiplas representações de situações suas conhecidas. De alguma forma, estes seguem assim um percurso semelhante nas suas linhas gerais ao caminho historicamente percorrido pela comunidade matemática.

O conceito de função desenvolveu-se devido à convergência de dois factores fundamentais: uma base matemática adequada e uma forte motivação externa. Estas condições reuniram-se pela primeira vez em simultâneo no final do Século XVII. Seria certamente um erro pretender que na actualidade os estudantes precisariam de possuir exactamente a mesma base matemática e a mesma motivação. Mas a forma mais natural de construir este conceito é fazer apelo à sua relevância em função de necessidades práticas e relacioná-lo com muitas outras ideias matemáticas. As funções numéricas, aproveitando o trabalho anterior realizado na Aritmética e na Álgebra, fornecem uma nova perspectiva para olhar para noções já aprendidas e estabelecem uma ponte com a Geometria através da representação cartesiana. São por isso uma forma particularmente apropriada de introduzir esta importante noção matemática.

Pedagogicamente parece aconselhável introduzir as funções como correspondências entre conjuntos numéricos. Os exemplos "bem comportados", em que existe uma expressão analítica ou uma regra simples devem ser de todo salientados. A identificação na prática pelos alunos de função e expressão analítica, se ocorrer, não precisa de ser vista como um "grave erro". Trata-se, como nos mostra a história, de uma associação natural e fecunda, que não traz quaisquer dificuldades a um nível elementar. Os alunos que disso necessitarem terão oportunidade na devida altura de reflectir sobre esta questão e generalizar o seu conceito.

A facilidade em lidar com expressões algébricas não chega para resolver problemas reais. A tecnologia pode desempenhar um importante papel educativo, mudando o foco do ensino dos processos mecânicos e repetitivos para a compreensão da Álgebra e do Cálculo Infinitesimal como instrumentos que permitem a modelação de problemas. A tecnologia pode ser usada para realizar as manipulações ou determinar as soluções dentro dos modelos matemáticos, simplificando a parte rotineira do trabalho e proporcionando uma maior concentração naquilo que é verdadeiramente importante — a compreensão do significado dos conceitos, a elaboração e implementação de estratégias para a resolução dos problemas, e a sua análise crítica e discussão.

Bibliografia

Caraça, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (1ª edição conjunta das partes I, II e III). Lisboa: Sá da Costa.

Demana, F., & Waits, B. (1990). The Role of Technology in Teaching Mathematics. *Mathematics Teacher*, Vol. 83 (1), p. 27--31.

Klein, F. (1908/1945). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* (tradução do original alemão de E. R. Hedrick & C. A. Noble). New York: Dover.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Niss, M. (1987). *Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula.* Conferência plenária no ICMTA 3, Kassel, RFA.

Silva, J. S. (1964a). *Compêndio de Matemática* (texto piloto). Lisboa: Edição policopiada.

Silva, J. S. (1964b). *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática* (texto piloto). Lisboa: Edição policopiada.

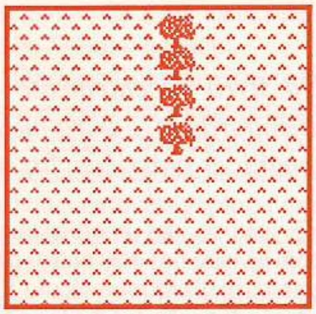
Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 16, 37-85.

João Pedro da Ponte
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

A herança

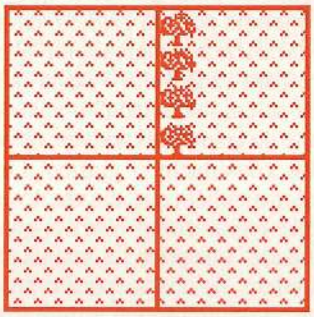
No Grupo de Discussão1do Profmat 90, foi lançado o problema "A Herança" que, a seguir, transcrevemos e, para o qual, apresentamos uma possível solução.

Um lavrador deixou aos seus quatro filhos este terreno quadrado, onde existiam quatro árvores. As suas disposições estipulavam que o terreno deveria ser dividido em quatro partes iguais, com a mesma configuração e tendo um árvore em cada uma das parcelas. Os filhos satisfizeram integralmente a vontade do pai. Como foi possível?

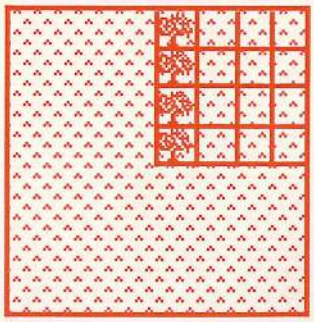


Uma proposta de solução

Uma estratégia possível consiste na divisão do terreno em quatro quadrados, num dos quais estão incluídas as quatro árvores.



A partir de cada um destes quadrados continua-se sempre a dividir por quatro.



Ao todo encontramos 64 quadradinhos, cabendo a cada filho 16 desses quadradinhos.

Se encontrar outra solução para este problema, partilhe-a connosco, enviando-a para a APM.

Nota: Além deste problema, foram propostos neste Grupo de Discussão mais quatro muito interessantes: "O muro", "O peixe", "O cubo" e "Os números. Caso esteja interessado em resolvê-los, poderá encontrá-los no Vol. II das Actas do Profmat 90, que será publicado em breve.

Lurdes Serrazina
Rosário Ribeiro

Para este número seleccionámos

O método das coordenadas e o conceito de função

Jean Dieudonné

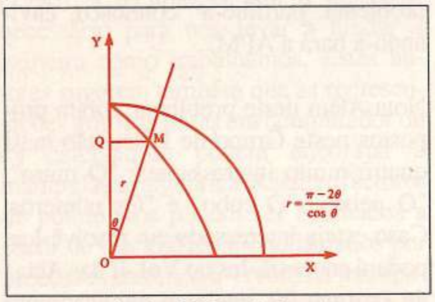
Do livro recentemente editado pelas publicações Dom Quixote, "A Formação da Matemática Contemporânea", extraímos uma passagem onde Dieudonné, ao referir-se aos objectos e métodos das matemáticas clássicas, faz uma breve incursão pelo tema deste número de Educação e Matemática.

O método das coordenadas está também na base dos dois outros grandes progressos realizados no século XVII: a introdução da noção de *função* e o cálculo infinitesimal. Diz-se muitas vezes que as concepções matemáticas dos Gregos eram fundamentalmente *estáticas* e são postas em oposição à ideia de variação que o pensamento científico moderno oferece.É verdade que os *Elementos* de Euclides estão centrados no estudo de figuras cuja posição e cuja grandeza são *fixas*. Mas desde os primórdios do pensamento grego, as tentativas de compreensão dos movimentos e das mudanças de forma ou de natureza não tinham deixado de preocupar os filósofos, e as noções de movimento *uniforme* - rectilíneo ou circular - tinham sido claramente desenvolvidas desde o momento em que se soube medir o tempo. Sabe-se que foi por combinação destes movimentos que os sistemas astronómicos dos Gregos tentaram dar conta das trajectórias dos planetas. E se bem que a noção de tempo não seja parte integrante da geometria grega, pelo menos duas curvas planas, a quadratriz de Hípias e a espiral de Arquimedes, eram definidas por combinações de movimentos uniformes.

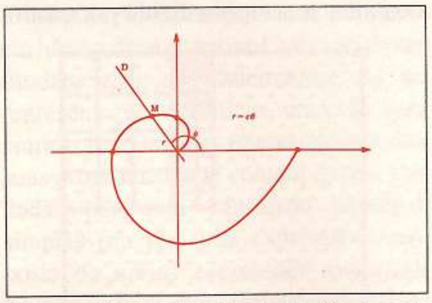
Parece que é antes do mais para o estudo dos movimentos rectilíneos não necessáriamente uniformes - nomeadamente a queda dos corpos, assunto que preocupava bastante as escolas filosóficas da Idade Média - que Oresme, no século XIV, teve sem dúvida pela primeira vez a ideia de representar a variação de uma grandeza que muda com o tempo por um *gráfico*, em que a medida do tempo é marcada na "abcissa" OX, e para cada valor *t* desta medida, coloca-se em "ordenada" o valor nesse instante da grandeza variável ; os pontos obtidos constituem o gráfico. Oresme considera também que, em vez do tempo, se pode tomar como abcissa qualquer "qualidade" que pode ser assinalada por um número; na nossa época o processo tornou-se omnipresente e muitas vezes abusivo.

No século XVII, conjuga-se com o método das coordenadas, para nos familiarizar com a ideia de um número y "dependente" de um número x que varia num intervalo I. No final do século, dir-se-á que y é *função* de x; o seu gráfico é portanto uma curva que intersecta num único ponto qualquer paralela a OY que passam por um ponto de I. Mas *inversamente* qualquer curva que tenha esta propriedade define uma função[...]

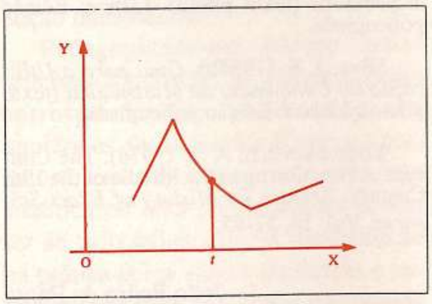
É esta correspondência que no século XIX permitirá definir uma noção geral de função como um objecto matemático no sentido platónico (ver capítulo V, § 3, B). Mas, até aí, não havia preocupação com os fundamentos; a noção de função, por muito "intuitiva" que seja, vai abrir uma era de progressos insuspeitados, tanto em matemáticas como nas suas aplicações, e todos os matemáticos se debruçaram sobre ela. Isto deveu-se antes do mais ao facto de a noção de função estar na base da terceira invenção do século XVII - talvez a mais importante de toda a história das matemáticas - o cálculo infinitesimal.



A quadratriz de Hípias é descrita por um ponto M tal que OM roda em torno de O num movimento uniforme, e a projecção Q de M sobre OY move-se uniformemente.



A espiral de Arquimedes é descrita por um ponto M tal que D gira uniformemente em volta de O e M desloca-se uniformemente sobre D.



A ideia de Oresme no sec. XIV: representar num gráfico a variação de uma grandeza *em função* do tempo t.

Encontros em 1991

Conferência sobre avaliação em Matemática

No âmbito de um estudo internacional intitulado "Assessment in mathematics education and its effects", o ICMI (*International Commission on Mathematics Instruction*) organiza em Calonge (Costa Brava), Espanha, de 11 a 16 de Abril de 1991, uma conferência sobre o tema indicado. Os participantes, cujo número será limitado a cerca de 75, serão convidados pelo Comité do Programa que é dirigido pelo Prof. Mogens Niss, IMFUFA., Roskilde University, P.O. Box 260, DK 4000 Denmark. A organização local é dirigida pelo Prof. Claudi Alsina da Universitat Politecnica Catalunya em Barcelona.

CIEAEM-43 em Locarno

A CIEAEM (*Comission Internationale pour l'Etude et Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*) promove o seu 43º Encontro na cidade suiça de Locarno nos princípios de Julho de 1991. O encontro será restrito aos membros da Comissão e destina-se a preparar as conferências dos dois anos seguintes: 1992, em Chicago (tema: o aluno); 1993, na Sardenha (tema: avaliação).

Os contactos com a CIEAEM devem ser feitos para: Rijkje Dekker, ILO/ CIEAEM, University of Amsterdam, Herengracht 256, 1016 BV Amsterdam, The Netherlands.

PME-XV em Assis (Itália)

A 15ª Conferência Anual do PME (*International Group for the Psychology of Mathematics Education*) terá lugar na cidade italiana de Assis (a cerca de 200 km do aeroporto de Roma), entre 29 de Junho e 4 de Julho de 1991. A conferência incluirá sessões plenárias, um painel, comunicações orais, grupos de discussão, grupos de trabalho e comunicações em "poster".

Os contactos devem ser feitos para o Secretariado do Programa da Conferência: Paolo Boero, Dipartimento di Matematica, Universitá, Via L.B., Alberti 4, 16132 Genova, Itália.

ICTMA-5 na Holanda

A quinta *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* decorrerá de 9 a 13 de Setembro de 1991 na cidade holandesa de Noordwijkerhout.

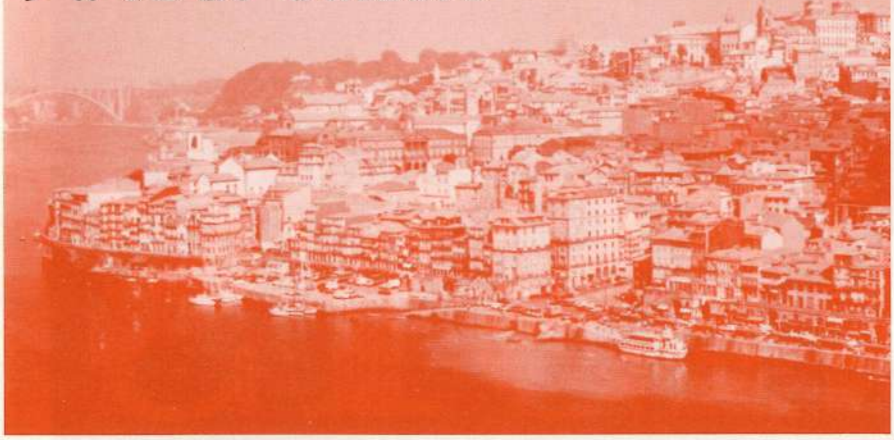
"O principal objectivo da conferência é proporcionar um forum para apresentação e troca de informações, experiências, perspectivas e ideias entre pessoas envolvidas na investigação ou na prática do ensino de modelos e aplicações da Matemática. O foco será no *ensino da Matemática pelas aplicações*. Todos os níveis de ensino serão considerados".

ICTMA 5

Teaching Mathematics by Applications

Todos os contactos devem ser feitos para o Presidente da Comissão Organizadora: Jan de Lange, ICTMA-5, OW&OC, Tiberdreef 4, 3561, GG Utrecht, The Netherlands.

ProfMat 91 no Porto
9 a 12 de Outubro

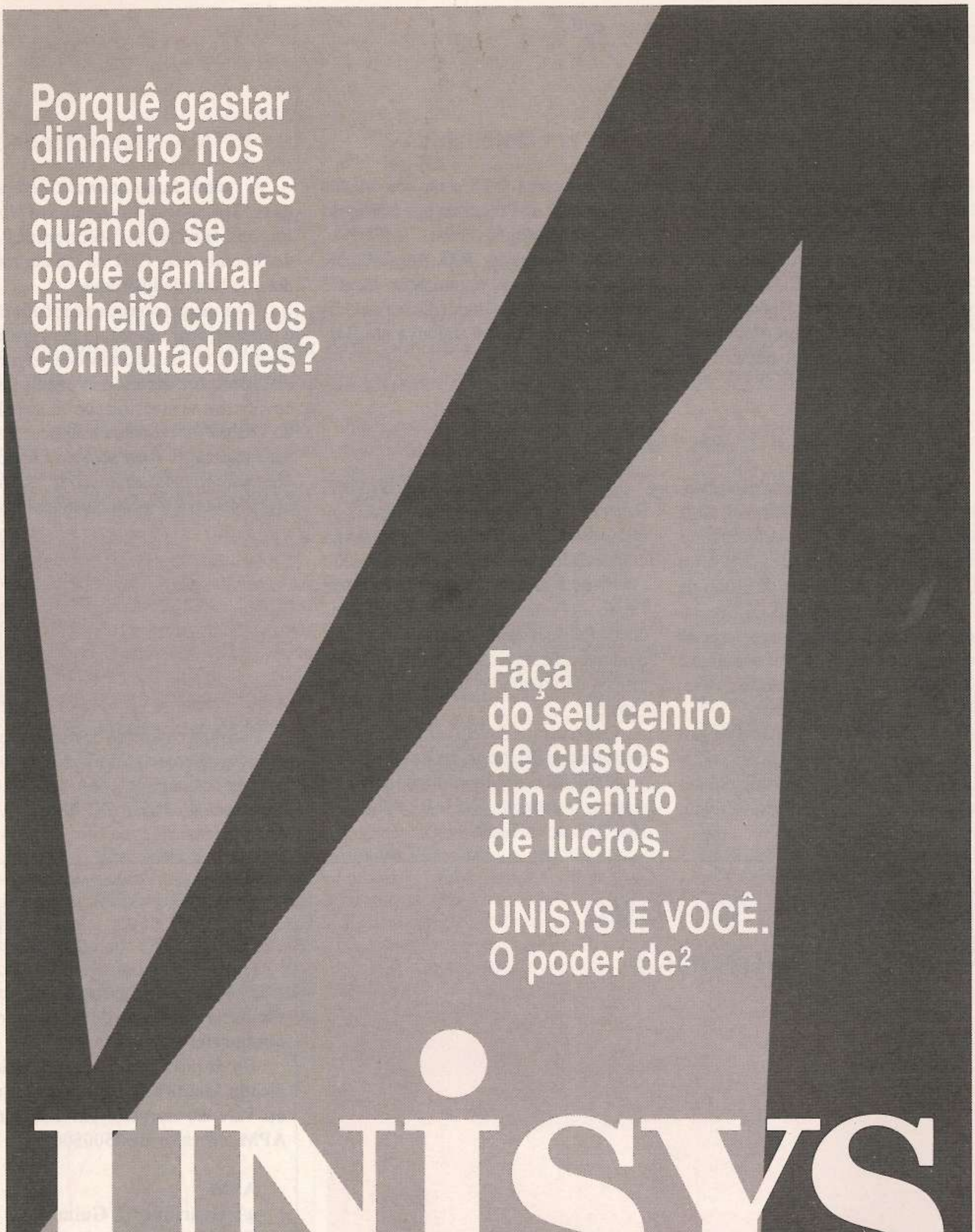


Quotas 1991

Lembramos novamente aos sócios da APM que devem pagar a quota referente a este ano.

Envie para a morada abaixo indicada, identificando-se, um cheque ou vale do correio, em nome da APM, no valor de 2500$00.

APM
a/c Henrique M. Guimarães
Faculdade de Ciências de Lisboa
Av. 24 de Julho, 134, 4º
1300 Lisboa


Porquê gastar dinheiro nos computadores quando se pode ganhar dinheiro com os computadores?
Faça do seu centro de custos um centro de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

Funções no terceiro ciclo do ensino básico - uma possível abordagem...

Leonor Cunha Leal

O estudo das funções constitui um dos aspectos centrais dos programas de Matemática para o 3º ciclo do Ensino Básico mas suscita geralmente vários tipos de dificuldades de aprendizagem. Neste artigo, descreve-se e comenta-se a abordagem adoptada pelo Projecto MAT_{789} para o estudo deste tema no 8º ano, no âmbito do currículo experimental que o Projecto tem vindo a desenvolver.

Poder-se-á afirmar que o estudo das funções no 3º ciclo do ensino básico levanta normalmente, junto dos alunos, dificuldades de vária ordem. Ainda este ano no Profmat, numa sessão prática, onde este tema serviu de base para reflexão, foram indicados, pelos professores presentes, vários tipos de dificuldades sentidas pelos alunos. Entre elas, pode-se apontar a interiorização do conceito de função, sendo a razão que justifica tal dificuldade o elevado grau de abstracção, as questões de linguagem, a dificuldade em distinguir o contradomínio do conjunto de chegada, e ainda a compreensão do significado de função injectiva, de função sobrejectiva e de função inversa.

Esta problemática é do mesmo modo sentida e reconhecida por um conjunto de cinco professores responsáveis por um projecto de inovação curricular, o Projecto MAT_{789} (1). Este projecto propõe-se conceber, aplicar e avaliar um novo currículo de Matemática, para o 3º ciclo do ensino básico, acompanhando os alunos nos três anos que compõem este ciclo. Tendo-se iniciado, no ano lectivo de 1988/89, com duas turmas do 7º ano de escolaridade, na Escola Secundária de D. Pedro V, incluiu, no ano lectivo seguinte, duas novas turmas do mesmo ano, uma delas ainda da mesma escola e a outra pertencente à Escola Secundária da Amadora.

Opções fundamentais

No âmbito deste Projecto o tema das funções foi desenvolvido de acordo com algumas opções fundamentais, a saber:

- incidir o seu estudo essencialmente no 8º ano, embora propondo para o 7º actividades práticas envolvendo gráficos sem, contudo, haver qualquer preocupação de formalização;
- dar a conhecer aos alunos uma diversidade, tão grande quanto possível, de funções, não compartimentando o seu estudo a este ou aquele tipo, ao contrário do que os novos programas parecem sugerir;
- propor actividades com o objectivo primordial de favorecer a construção, por parte dos alunos, do conceito de função, remetendo para segundo plano toda a carga formal muitas vezes associada a este tema;
- atribuir à representação gráfica de funções um peso, no mínimo, idêntico ao da representação analítica;
- incluir actividades de modelagem, por se entender que o tema proporciona naturalmente este importante tipo de actividades, surgindo relações significativas com a realidade, onde os alunos podem contactar com o "poder da Matemática".

Desenvolvimento do tema

Para tornar mais claro o que foi exposto, veja-se como de facto este tema foi desenvolvido. O primeiro contacto que os alunos tiveram com as funções foi feito através de um programa de computador, programa este ou um seu similar já anteriormente utilizado noutras escolas e por outros professores. Os alunos trabalharam em pequenos grupos, na sala do Projecto Minerva, durante duas horas, jogando com o programa. Foi-lhes anteriormente explicado que tinham sido introduzidas no computador algumas leis de transformação que seriam escolhidas aleatoriamente. Os alunos teriam de introduzir os valores que quisessem até conseguirem descobrir qual a lei que naquele momento estava a ser utilizada pelo computador. Ao descobrirem, voltariam a iniciar todo o processo. Este trabalho deveria ser acompanhado do registo, nos cadernos, dos pares de valores que iriam sendo calculados. Poder-se-á perguntar, o que é que isto tem de especial? Tem algum interesse?

Na nossa opinião e de acordo com a nossa vivência, a resposta é claramente afirmativa. Se mais não fosse, a prova foi o facto de os alunos mais tarde, ao longo deste estudo, ao sentirem os seus colegas por vezes confundidos, recorrerem ao exemplo do que tinham feito neste programa para esclarecer os outros. Esta nossa posição vem, aliás, de encontro ao que Fey (1989) afirma, ao referir-se a um série de projectos de desenvolvimento orientados por Leitzel e Demana (1988) no sentido de analisar os efeitos do uso de diferentes instrumentos de cálculo numérico na transição do raciocínio aritmético para o algébrico: "A estratégia básica é valorizar a procura de modelos em tabelas de valores, para variáveis numéricas relacionadas, como um primeiro passo para a expressão algébrica formal dessas relações. Os resultados da investigação sugerem que esta transição para as abstracções da álgebra enriquecida por elementos computacionais é nitidamente mais eficaz do que as abordagens tradicionais" (p. 4).

Trata-se de um processo dinâmico, em que o aluno se confronta com um desafio que terá de ultrapassar, estando nele incluído um processo competitivo. Para além deste aspecto, a necessidade de apresentar a lei de transformação escrita correctamente na sua forma analítica, pois caso contrário o computador não aceita a resposta como certa, leva a que os alunos de uma forma natural se esforcem em utilizar uma linguagem matemática adequada. Por várias vezes, alguns alunos chamavam a atenção dos seus colegas de grupo para este aspecto, sendo eles próprios a atenderem a este facto ao contrário da situação, por nós todos tão conhecida, de ser o professor a impôr uma escrita correcta sem os alunos sentirem verdadeiramente a sua necessidade. Um terceiro aspecto é o de um processo deste tipo permitir ter acesso a um elevado número de exemplos diferentes na turma, o que poderá vir mais tarde a ser explorado em aula. Tal foi o que, de facto, veio a acontecer.

Nas aulas que se seguiram a esta actividade, os alunos discutiram entre si e com o professor os casos que não tinham conseguido resolver, dando por vezes origem a discussões muito interessantes. É o caso, por exemplo, de uma função cuja expressão analítica era $1/x$ e em que o computador tinha indicado, quando os alunos introduziram o zero, que tal valor não podia ser considerado. Ou ainda, no caso da função definida por $(x+1)^2$, em que o computador tinha considerado errada a resposta x^2+2x+1, por não ter sido por nós prevista aquando da elaboração do programa, e uma aluna insistir que a sua resposta estava correcta. Note-se que estes alunos ainda não tinham trabalhado com polinómios, nem com casos notáveis, explicando-se o facto da aluna ter chegado a este resultado através de cálculos do tipo já anteriormente feitos. Ao encarar a "função" como uma "caixa negra" que actuava sobre cada valor de x, compreende-se um raciocínio centrado sobre o que tinha acontecido ao x: eleva-se ao quadrado, soma-se o dobro, soma-se um.

Concluída esta fase, seguiu-se-lhe a elaboração do gráfico de algumas funções que os alunos tinham já em seu poder. Essas funções foram propostas geralmente pelo professor e foram diferentes de grupo para grupo. Quando os alunos sentiam necessidade, calculavam mais pares de valores para se aperceberem do esboço do gráfico da função. No final, foi feita a apresentação, por cada grupo, do seu trabalho, aproveitando-se para fazer uma ampla exploração dos vários gráficos, sendo possível levar a cabo um estudo comparativo.

Terminada esta sequência de aulas, foram propostas aos alunos algumas actividades, ainda para trabalho em pequenos grupos, de quatro ou cinco alunos por grupo, no sentido de continuar a exploração de gráficos e a construção do conceito de função. O recurso a situações da vida real — temperaturas, temperaturas médias, precipitação(2) — bem como a outras com origem dentro da própria Matemática (perímetros e áreas de quadrados e rectângulos, valores inteiros e decimais, domínio e conjunto de chegada) foi levado a cabo. Uma observação deve ser feita neste momento para melhor entendimento do que se passou. No nosso entender, as situações da vida real, quando exploradas, devem surgir de um modo significativo e consideradas em todas as suas vertentes, dando oportunidade ao aluno de conhecer as potencialidades que a Matemática nos oferece para entender o mundo que nos rodeia, não as encarando como uma mera via possível de "motivação" para o aluno. Neste sentido, e a título de exemplo, refira-se a abordagem feita do fenómeno do arrefecimento de um café. Para isso construíu-se uma tabela dos valores da temperatura em função do tempo, para o que se procedeu à leitura, de cinco em cinco minutos, na aula de duas horas, da temperatura de um café colocado numa chávena. Para segurança do processo foram utilizados dois cafés e as leituras foram feitas separadamente por dois grupos simultaneamente. Deve ser dito que esta situação tão simples levantou algumas dúvidas aos professores que tiveram que recorrer aos colegas do grupo de Química para seu esclarecimento. Foi, a partir dos dados recolhidos por eles próprios, que os alunos fizeram de seguida o respectivo gráfico e procuraram ver qual o tipo de função que se ajustava melhor ao fenómeno físico que se estivera a estudar.

Ainda de acordo com o mesmo pressuposto e considerando, como já anteriomente referido, que o estudo das funções favorece o aparecimento de actividades de modelagem, os alunos desenvolveram, com o auxílio da folha de cálculo, duas situações problemáticas surgidas a partir da vida real. Diziam ambas respeito às distâncias percorridas em função do tempo, ora por um ciclista na tentativa para bater o record da hora, ora por uma bola a deslocar-se num plano inclinado, pretendendo-se que os alunos encontrassem funções que se ajustassem tanto quanto possível aos valores experimentais que a realidade nos tinha oferecido. O aluno tinha que optar entre uma função linear ou uma quadrática e dispunha do gráfico dos pontos dados. Ao atribuir valores aos parâmetros, quer de ax+b, quer de ax^2+b, de acordo com a opção tomada, o gráfico da função obtida iria ser desenhado no mesmo referencial do já existente, podendo o aluno não só verificar se a sua escolha estava ou não próxima da desejada, assim como do tipo de variações que as suas opções iriam determinar. Deve ser dito que todos os grupos de alunos conseguiram resolver as duas questões, embora não tenha sido considerado previamente, por nós, como uma tarefa simples. Esta situação favoreceu igualmente uma discussão interessante, tendo os alunos sentido que nem sempre uma situação real tem na Matemática uma tradução exacta, mas antes uma tradução tão aproximada quanto possível.

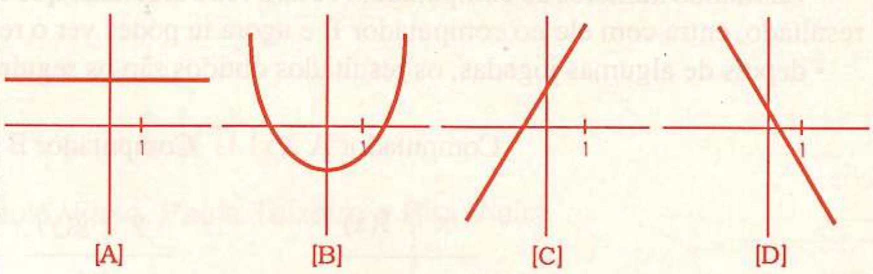
Ao longo destas actividades e sempre que era oportuno foram sendo introduzidos termos como domínio, objectos, conjunto de chegada, contradomínio e imagens. No entanto, elas não foram encaradas como "um campo de batalha", onde alunos que não as utilizassem não pudessem prosseguir nas suas actividades. No final desta sequência, foi entregue e discutido um texto de apoio, onde estas noções foram retomadas, seguindo-se-lhe mais algumas propostas de trabalho, agora com o recurso a uma escrita mais formalizada. Mais uma vez, a análise de gráficos e a noção de função foram exploradas.

Teste de avaliação

Este estudo terminou com um teste escrito feito em duas etapas. O teste "em duas etapas" (que é o tipo de teste escrito habitual neste Projecto) é feito numa primeira fase na sala de aula em tempo limitado e, após ter sido visto e brevemente comentado pelo professor, volta ao aluno para que este desenvolva e repense as questões que desejar, em casa e num prazo pré-acordado. O teste não só tinha por objectivo determinar o que cada aluno já conseguia fazer como, do mesmo modo, avaliar o nosso próprio trabalho.

Apresentam-se, em seguida, dois exemplos ilustrativos do que foi dito. Uma primeira questão revela, na nossa perspectiva, algumas vantagens dos alunos terem um conhecimento "amplo" e "experimental" sobre funções de vários tipos. A questão em causa aparecia com a seguinte formulação:

Observa com atenção os gráficos seguintes



a) Qual dos gráficos poderá representar a função de **Q** em **Q** definida pela expressão f(x)=3/2 x + 1? Porquê?

b) Qual é o valor de f(x) para x=3? E para x=2? E para x=0?

c) Tenta indicar expressões para as três funções de **Q** em **Q** que te pareçam corresponder aos outros três gráficos.

Debrucemo-nos, por momentos, nas respostas obtidas e no que respeita apenas à primeira alínea desta questão. As respostas dadas pelos alunos podem-se agrupar em dois grandes grupos, aquelas em que os alunos utilizaram valores numéricos e em seguida foram verificar a qual dos gráficos correspondiam os pares de valores obtidos e aquelas que, sem recorrerem a valores concretos, apresentaram uma justificação mais trabalhada, baseada no estudo sobre funções feito anteriormente. Apresenta-se, de seguida, um exemplo de cada um destes tipos de respostas:

Exemplo A:

"O gráfico que poderá representar a função Q em Q definida pela expressão f(x)= 3/2 x + 1 é o C.

Para explicar porque digo que é o gráfico C, eu faço o seguinte esquema para demonstrar o meu modo de pensar.

x	f(x)
0	1
1	2,5
2	4

e estes resultados dão para o gráfico C".

Exemplo B:

"O gráfico que poderá representar a expressão algébrica f(x)= 3/2 x + 1 é o gráfico C. Porque: o gráfico (A) corresponde a uma função onde as imagens são todas iguais, não importando qual é o objecto, o gráfico (B) por ser uma parábola por isso há-de corresponder a uma função em que o x tenha expoente par, menos outro número, que neste caso deve ser 1,25; e o gráfico (D) porque esta recta corresponde a uma função mais ou menos assim f(x)= - x + O,5 ou 1. Por isso só sobra o gráfico C que é porque a recta passa pelo ponto (O,1) ou seja, somaram-lhe 1, f(x)= 3/2 x + 1, e os outros cálculos também são deste gráfico mas não se podem ver exactamente pois o gráfico não está numa folha de papel milimé-trico".

Uma outra questão, introduzida no teste, era para nós uma incógnita no que diz respeito à reacção dos nossos alunos. Nunca tendo sido abordada, ao longo das aulas, a noção de função composta, surgia uma questão que, recorrendo ainda ao exemplo do programa de computador já referido, estava formulada da seguinte forma:

Imagina que tu e o teu colega estão a jogar ao jogo das funções e utilizam dois computadores A e B.

O jogo é assim:

• cada um dos computadores escolhe uma função, o computador A a função f e o computador B a função g, tu vais tentar descobrir quais são as funções f e g;

• vais dando números ao computador A e não vês o resultado que ele dá, o teu colega, que pode ver esse resultado, entra com ele no computador B e agora tu podes ver o resultado final.

• depois de algumas jogadas, os resultados obtidos são os seguintes:

Computador A		Computador B	
x	f(x)	y	g(y)
2	.....	.....	6
3	.....	.....	8
0	.....	.....	2

a) Tenta descobrir que funções f e g foram escolhidas pelos computadores.

b) Achas que há apenas uma solução para o problema? Se não, tenta descobrir outras funções diferentes f e g que resolvam o problema.

Muitos dos alunos ultrapassaram as nossas expectativas, havendo mesmo quem tivesse escolhido uma função definida por dois ramos. Evidentemente que não a indicou recorrendo à forma normalmente utilizada, mas sim arranjando um processo por si considerado expedito. A título de exemplo, apresentam-se dois tipos de resposta.

"f(x)=2x
g(y)=y+2

resolvem o mesmo problema
f(x)=(1+x)•2
g(y)=y

f(x)=2x+2
g(y)=y ".

Outra resposta:

"$f(x) = x^2$;
g(y) = y + 2 quando y é par,
g(y) = y - 1 quando y é ímpar".

O facto mais notável ligado a esta resposta é que ela revela uma compreensão elevada do que é uma função, se considerarmos a idade e experiência de um aluno do 8º ano.

Antes de concluir, deve ser dito que ao apresentar-se esta abordagem sobre o estudo de funções não se tem por objectivo defender-se que é a melhor, nem tão pouco a única, mas antes que se acredita que o conhecimento do que os outros fazem leva a uma reflexão mais rica sobre a nossa própria prática. Quanto mais conhecermos das experiências dos outros, criticando-as, vendo o que de positivo e negativo cada uma delas nos apresenta, mais facilmente conseguiremos construir a nossa própria abordagem. Está longe, felizmente, o tempo de "orgulhosamente sós"!

Notas:

(1) A equipa responsável pelo Projecto MAT_{789} é constituída, para além da autora deste artigo, por Eduardo Veloso, Margarida Silva, Paula Teixeira e Paulo Abrantes.

O desenvolvimento do Projecto beneficia do financiamento da Fundação Calouste Gulbenkian.

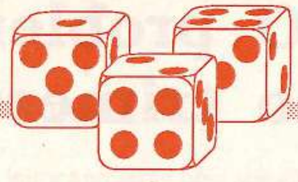
(2) Uma das fichas com que os alunos trabalharam nesta unidade, relacionando a Matemática com alguns aspectos da realidade concreta ("Um estudo sobre o clima"), é publicada no presente número da revista, na secção "Materiais para a aula de Matemática".

Referências Bibliográficas

Demana, F & Leitzel, J. (1988). Establishing fundamental concepts through numerical problem solving. In A. F. Coxford e A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of Algebra K-12* — 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, USA, 61-68.

Fey, J. (1988). *Technology and Mathematics Education. A Survey of Recent Developments and Important Problems.* Conferência apresentada em Budapeste no 6º International Congress on Mathematics Education (ICME 6).

Leonor Cunha Leal
Escola Secundária de D. Pedro V
Lisboa

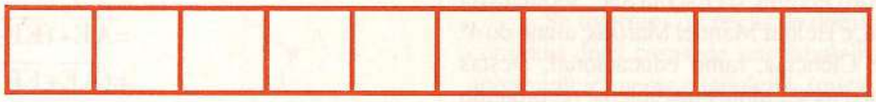


Vamos jogar

Linha

José Paulo Viana, Paula Teixeira e Rita Vieira

Propomos para este trimestre um jogo de autor desconhecido e que encontrámos no livro "Jeux Mathématiques" de Martin Gardner (Ed. Pour la Science, Paris)



Nº de jogadores: 2

Material: várias marcas, todas iguais; um tabuleiro formado por uma fila de casas quadradas (no nosso exemplo dez casas).

Regras: alternadamente, cada jogador coloca uma marca numa das casas livres. Ganha quem primeiro conseguir fazer um alinhamento de três marcas adjacentes.

Comentários:

Como as regras são extremamente simples, não é necessário qualquer aprendizagem: começa-se imediatamente a jogar. Existe uma estratégia ganhadora para um dos jogadores, isto é, um deles (o que inicia o jogo, ou o outro) consegue ganhar sempre que jogue adequadamente.

Uma actividade que vos propomos, e que podemos propor aos alunos, é que, após alguns jogos de adaptação, tentem justamente descobrir qual dos jogadores consegue ganhar sempre e que jogadas deve efectuar em função das jogadas do adversário.

Descoberta a estratégia que dá a vitória, altera-se o tamanho do tabuleiro, começando por reduzir o número de casas. É que, depois de se ter feito o estudo do jogo para 10 casas, já não é difícil fazê-lo para 6 ou 8 e rapidamente se vê qual dos dois jogadores está em vantagem em cada um dos casos.

Pode depois tentar-se com tabuleiros maiores (12 casas ou mais). Como não se conhece uma estratégia aplicável para qualquer número de casas, o jogo nunca perde interesse. Logo que se descobre a estratégia ganhadora e o jogo se torna monótono, o que há a fazer é aumentar mais duas casas ao tabuleiro. Tudo se altera e já não sabemos quem está em vantagem.

Finalmente, uma observação. Talvez tenham estranhado que os tabuleiros propostos têm todos um número par de casas. O facto tem uma explicação: é que, se o número de casas for ímpar, existe uma estratégia geral para o primeiro jogador que lhe permite ganhar sempre. Aqui vai ela: basta começar por colocar uma marca na casa central e depois jogar sempre na casa simétrica da que o adversário ocupar na jogada anterior. A certa altura, o adversário é obrigado a fazer uma jogada que nos dá a vitória.

Jogos no Centro de Recursos da APM

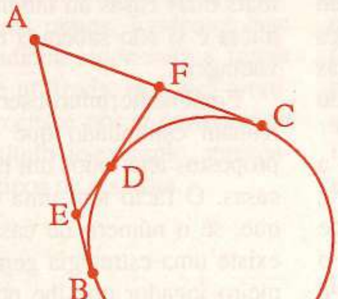
O Centro de Recursos da APM tem à disposição dos sócios bastantes jogos, puzzles e quebra-cabeças, tais como: *O Prisioneiro, O Ovo Mágico, A Geometria Maravilhosa, O Quadrado Mágico, O Soma-cubo, Tangram; Somas; Diâmetros* e muitos outros. Poderá requisitar este material, por um período de 15 dias, bastando para isso que se desloque até à sede da APM a fim de determinar a sua escolha e preencher a ficha de requisição.

Caso possua alguns jogos e esteja disposto a oferecê-los ao Centro de Recursos, poderá enviá-los para a nossa sede, pelo que desde já agradecemos a sua colaboração. Aceitamos também filmes, slides, livros, etc., está claro...

O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

Relativamente ao problema proposto no número anterior de *Educação e Matemática*, recebemos várias respostas, entre as quais as de Paulo de Carvalho, da Escola C+S de Miranda do Corvo, António Pedro Pereira, da Escola Sec. Seomara da Costa Primo, Amadora, e Helder Manuel Martins, aluno do 4º ano da Faculdade de Ciências, ramo educacional. Destas respostas transcrevemos as seguintes passagens, recordando no entanto que era pedido o perímetro do triângulo [AEF], sendo [AB], [AC] e [EF] tangentes à circunferência, D um ponto da circunferência e o comprimento de [AB] igual a 8.



Paulo de Carvalho

Se supusermos o ponto D a aproximar-se do ponto B (sem que contudo, nunca com ele coincida), o segmento de recta [EF] aproximar-se-á tanto quanto quisermos do segmento [AB], ao mesmo tempo que o segmento [AF] terá uma medida de comprimento tão pequena quanto queiramos. Logo fácil será intuir que o perímetro é $2 \times \overline{AB} = 16\,cm$ Provemo-lo.

1) O triângulo [ABC] é isósceles, visto que os ângulos em B e em C são iguais. Consequentemente,

$$\overline{AB} = \overline{AC} = 8\,cm$$

2) De modo análogo, são isósceles os triângulos [BED] e [DFC]. Logo

$$\overline{EB} = \overline{ED} \quad e \quad \overline{DF} = \overline{FC}$$

3) Designando por **P** o perímetro do triângulo [AEF], teremos

$$\begin{aligned} P &= \overline{AE}+\overline{EF}+\overline{FA} = \overline{AE}+(\overline{ED}+\overline{EF})+\overline{FA} \\ &= \overline{AE}+(\overline{EB}+\overline{FC})+\overline{FA} \\ &= (\overline{AE}+\overline{EB})+(\overline{FC}+\overline{FA}) \\ &= \overline{AB}+\overline{AC} = 16\,cm \end{aligned}$$

***Nota:** É interessante notar que este problema, no fundo, se resolve por aplicação repetida de uma mesma propriedade, a saber: os segmentos tangentes a uma circunferência tirados de um mesmo ponto exterior têm comprimentos iguais.*

Problema proposto

Quatro moínhos estão dispostos nos vértices de um quadrado de lado igual a um quilómetro.

Queremos construir uma rede de estradas, de modo que se possa ir de qualquer um dos moínhos para outro, e queremos gastar o mínimo de dinheiro. Portanto, a rede terá de ser a menor possível (quilometragem mínima).

Quantos metros de estrada teremos de construir?

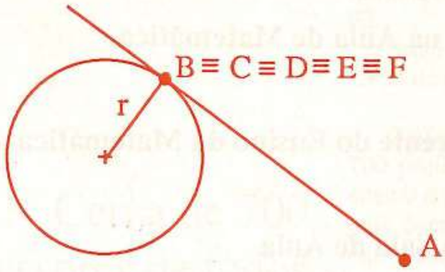
Nota: envie-nos a sua resposta com brevidade, afim de poder ser apreciada e eventualmente comentada no próximo número.

António Pedro Pereira

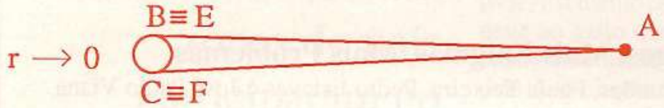
Este leitor apresenta uma solução muito parecida com a anterior. Contudo, no final, apresenta três casos "estranhos".

***Nota**: se os casos 1) e 2) são pacíficos, o terceiro parece-nos estranho "demais". Que pensam os nossos leitores?*

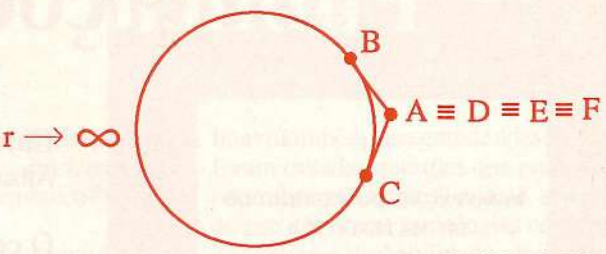
1) B coincide com C. Então P = 16 cm.



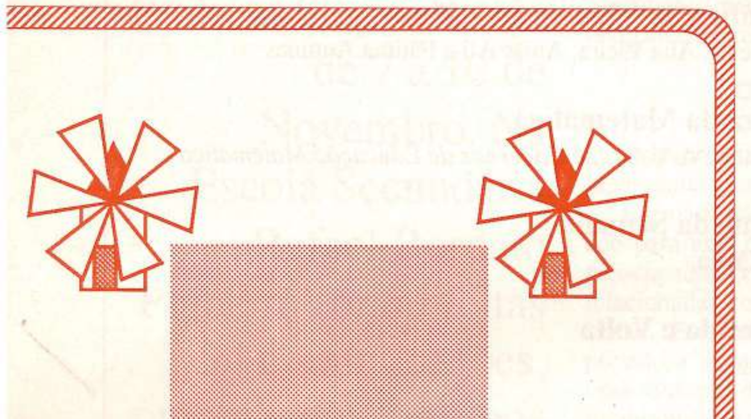
2) A circunferência tem "raio quase nulo". Neste caso P = 16 cm.



3) A circunferência tem "raio enorme". Neste caso o valor de P será 0, 16, 32 ou ...?



José Paulo Viana

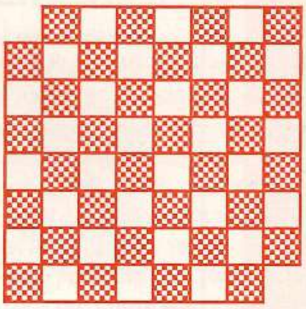


Sobre o problema do trimestre da revista nº 13

O Problema do Trimestre publicado no Nº13 de Educação e Matemática colocava o seguinte desafio:

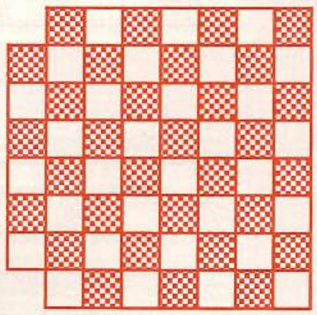
Se tivermos 32 peças de dominó, cada uma das quais cobrindo duas casas de um tabuleiro de xadrez, podemos cobrir inteiramente o tabuleiro (que é um quadrado com 8x8 casas) .

E com 31 dessas peças, poderemos cobrir um tabuleiro ao qual foram retirados dois cantos como a figura mostra?



A questão é: ou encontramos uma maneira de cobrir o tabuleiro ou, alternativamente, provamos que é impossível fazê-lo. A primeira impressão pode ser a de que é possível pois...31x2=62. Mas algumas tentativas revelarão dificuldades talvez inesperadas.

Se os cantos em falta fossem aqueles que a nova figura indica, a tarefa seria fácil.



Porém, faltando duas casas de cantos diagonalmente opostos, sucede que faltam duas casas... da mesma cor!

Ora, qualquer arrumação que se faça das peças de dominó obrigará sempre a que cada peça cubra uma casa branca e uma casa preta.

Na situação do nosso problema, 30 peças cobrirão 60 casas do tabuleiro, das quais 30 são brancas e 30 são pretas. Ficaremos com uma peça na mão e com duas casas pretas por cobrir. Estas, como são da mesma cor, nunca serão consecutivas. E o problema é impossível...

Paulo Abrantes

Profmat 90. Como foi?

José Manuel Varandas

Cerca de 700 professores de todos os níveis de ensino e vindos de diferentes zonas do país participaram no Profmat 90, realizado de 7 a 10 de Novembro. Na Escola Secundária Rafael Bordalo Pinheiro foram feitas 34 comunicações, organizados 7 grupos de discussão e realizado um grande número de sessões práticas, com um balanço final francamente positivo.

Realizou-se, na Escola Secundária Rafael Bordalo Pinheiro em Caldas da Rainha, de 7 a 10 de Novembro, o Profmat 90.

Estão a Educação Matemática e a APM de parabéns!

O número de participantes, cerca de 700 professores de todos os níveis de ensino e vindos de diferentes partes do país, é sem dúvida um marco importante em encontros deste género. Claro, este número apenas será ultrapassado no Profmat 91!!

A proximidade de Lisboa, dirão uns, é a causa de tamanha adesão a esta iniciativa. No entanto estou convicto que ela se deve ao êxito dos encontros realizados anteriormente, ao trabalho desenvolvido pela Associação e ao interesse cada vez maior dos professores pela Educação Matemática, numa época em que a palavra chave é renovação.

O local...

Pela primeira vez o Profmat teve lugar numa escola secundária.

O cenário não podia ser mais apropriado para um encontro de professores preocupados com as grandes questões relacionadas com a sua prática profissional. Estavamos, permitam-me a expressão, a "jogar em casa", o que nos deu uma sensação de conforto e à vontade, imprescindíveis ao trabalho e reflexão.

Naquela escola aconteceu, não uma interrupção da actividade escolar, como foi referido por alguns, mas um outro tipo de actividade escolar sem dúvida tão importante ou mais que aquela vivida dia a dia pelos professores e alunos que ali trabalham.

Os cursos...

Nos dois dias que antecederam o Profmat realizaram-se cursos aos quais houve também uma grande adesão. Neles foram tratadas questões que preocupam os professores, nomeadamente, as ligadas ao uso das novas tecnologias no ensino, estatística e probabilidade, geometria e outros.

No curso em que participei, "Folha de cálculo e calculadora como instrumentos de exploração de conceitos", para além de uma formação teórica sobre a utilização da calculadora e folha de cálculo, foram exploradas actividades, tendo-se ainda reflectido sobre as suas potencialidades na Educação Matemática.

Duas sessões plenárias...

Fazer uma conferência plenária para 700 participantes quer seja no início do encontro (onde as pessoas se reencontram muitas vezes ao fim de um ano... e há tanta coisa a perguntar), quer seja no encerramento (ainda há umas últimas questões a pôr... e as despedidas), não me parece tarefa fácil. Não posso deixar de afirmar que para alguns participantes estas sessões passaram despercebidas... mas foi pena!

Rui Canário abordou um assunto de grande importância, a formação de professores em geral, e não exclusivamente dos de Matemática, centrando-se fundamentalmente no papel que cada professor e cada escola deve assumir no processo de formação que, creio, todos nós desejamos.

Na sessão de encerramento, Henrique Guimarães alertou-nos, com clareza, para os desafios que nos serão colocados devido à necessidade de renovação educativa na nossa disciplina.

Painéis temáticos...

Pela primeira vez o Profmat incluíu painéis temáticos. Foram escolhidos os seguintes temas: a Matemática no 1º ciclo do ensino básico, a formação inicial e continua dos professores, o computador e o ensino da Matemática, experiências de inovação curricular e actividades de aprendizagem.

Em cada painel, para além do moderador, foram convidados colegas que, pela sua experiência e conhecimentos no respectivo tema, ajudaram a reflectir sobre as questões em debate.

No painel em que participei, "A formação inicial e contínua dos professores", debareram-se questões relacionadas com a formação inicial dos cursos ministrados pelas ESEs, a formação contínua na perspectiva de uma mudança e inovação da prática dos professores, a formação em serviço e os estágios das licenciaturas em Ensino da Matemática. A duração da sessão e o tema tão vasto não permitiram um aprofundamento do debate que o tema proposto exigia.

Comunicações...

Foram feitas 34 comunicações.

O facto de se realizarem em dois dias distintos permitiu que cada participante pudesse escolher três comunicações para assistir. A dificuldade era escolher... As comunicações a que assisti, foram muito interessantes. O colega Eduardo Veloso,na sua comunicação "História da Matemática e Matemática escolar: que relação?", relatou algumas ideias recolhidas num seminário, no qual participou em Inglaterra, e as perspectivas em que é abordada a História da Matemática nos projectos dos novos programas. Foram igualmente debatidas algumas iniciativas que os professores poderão e deverão tomar neste campo.

Os colegas Carlos Próspero e Rogério Bacalhau em "Logo...já agora Trigonometria" apresentaram um programa construído em LOGO, já experimentado com os seus alunos para o estudo da Trigonometria.

A colega Cristina Loureiro, na sua comunicação "Das variáveis às funções no 7º ano – contributo da resolução de problemas e da calculadora", relatou uma experiência realizada por Rita Bastos, com a sua colaboração, sobre o tema indicado.

Sessões práticas...

Foi também elevado o número de sessões práticas que se levaram a cabo. Tendo em conta o número referido de comunicações e de sessões práticas sou levado a constatar o interesse cada vez maior dos professores em partilhar experiências e propostas concretas vividas nas suas escolas com os seus alunos.

Aumentando o número de sessões, como é desejavel, seria bom que as futuras comissões organizadoras diversificassem os momentos reservados à concretização destas, o que seria sem dúvida uma medida do agrado dos participantes em futuros encontros pois, dado o seu carácter prático, é dos momentos de mais interesse para a maioria dos professores.

Na sessão que participei, "Jogos geométricos e não só..." jogou-se, discutiu-se estratégias e sobretudo reflectiu-se sobre as potencialidades educativas dos jogos.

Mas houve tantas outras em que gostaria de ter participado!

Grupos de discussão...

Foram organizados sete grupos com temas de muito interesse para os professores.

No grupo que integrei, "Materiais manipulativos no ensino da matemática", apesar da preparação e organização dos animadores, devido ao elevado número de participantes os objectivos não foram de todo conseguidos.

Grupos mais reduzidos desinibem os participantes fomentando o debate.

As comunicações dentro destes grupos seriam também um bom contibuto como ponto de partida para sessões deste tipo. No entando, no segundo momento de encontro deste grupo, onde o trabalho foi mais voltado para questões práticas (mostra de material e jogos), a participação foi muito mais rica.

E ainda...

A feira de ideias e materiais apresentou neste Profmat um novo espaço/atelier onde os participantes podiam construir material. Foi uma ideia bastante inovadora mas o tempo foi uma condicionante à adesão a este trabalho.

Quanto à mostra em si, penso que não esteve à altura da de Viana do Castelo. Terá havido a preocupação de não repetir materiais? Se houve foi pena!. Na presença de material, mesmo já conhecido, é sempre possível tirar novas ideias e aplicações para eles.

A quantidade não pode de modo algum significar qualidade, mas é necessário fomentar as comunicações em cartaz.

A abertura do encontro à população esteve bastante concorrida. Havia realmente população mas... estavam muitas caras conhecidas!

A componente social do encontro (havia até programa para acompanhantes), tão importante também, foi muito completa, variada e bem organizada. Foram bons momentos de convívio onde mesmo aí se realizaram alguns "encontros paralelos"... É pois natural que mesmo aí se acabe por falar em Matemática... afinal alguns só se encontram de ano a ano...

Mas...

Claro que houve falhas, alguns alojamentos menos confortáveis, rectroprojectores que não seriam tão bons como se desejaria, a porta que deveria estar aberta..., no entanto foram perfeitamente naturais em organizações desta envergadura e com os recursos que todos sabemos as nossas escolas dispõem.

No entanto...

O balanço é francamente positivo e por isso reafirmo que estão a educação matemática, a APM e a comissão organizadora de parabéns!

Não referir, seria de facto um lapso que não quero cometer, o apoio que a Escola Secundária Rafael Bordalo Pinheiro prestou ao Profmat através do seu conselho directivo, professores, (designadamente de texteis que ofereceram uma bandeira bordada à associação, e de cerâmica que com os membros da organização fabricaram as lembranças oferecidas), funcionárias que tão amavelmente nos receberam e alunos que de uma maneira ou outra se empenharam neste encontro.

A Cencal, Câmaras Municipais de Caldas da Rainha e Óbidos, Região de Turismo do Oeste, Governo Civil de Leiria e Fundação Calouste Gulbenkian apoiaram também esta iniciativa.

As minhas últimas linhas teriam que ser para felicitar a organização deste encontro que se deve sentir orgulhosa pelo excelente trabalho desenvolvido, tanto na preparação como na realização do Profmat 90.

José Manuel Varandas
Esc. Sec. Seomara da Costa Primo

Funções e Folha de Cálculo

Maria da Paz Martins
Maria Teresa Capelão

Ao longo da nossa prática lectiva, sentimos a necessidade de novas formas de abordagem da Matemática. No ano lectivo de 1989/90, decidimos realizar uma experiência em duas turmas do 11º ano, relacionada com o estudo das funções e envolvendo o uso da Folha de Cálculo.

O trabalho realizado com as duas turmas do 11º ano teve como objectivos:

• fazer o estudo das funções e dos elementos de análise a partir da interpretação gráfica;

• dar ao aluno um lugar mais activo no processo de aprendizagem;

• estimular e desenvolver no aluno as capacidades necessárias à compreensão e à intervenção nos problemas correntes do mundo envolvente;

• estimular a atitude crítica do aluno, o gosto de organizar raciocínios e de comunicar.

Com a integração da Escola no Projecto Minerva e com os vários tipos de software colocados à nossa disposição, decidimos utilizar na nossa sala de aula, o computador como recurso e o programa Folha de Cálculo, atendendo às suas potencialidades.

A Folha de Cálculo é um programa interactivo: o utilizador fornece os dados e as relações entre eles, pode alterá-los, analisando os efeitos produzidos por essa mudança, liberta o utilizador de cálculos repetitivos, permite com facilidade a elaboração de gráficos de diversos tipos e possui funções lógicas, trigonométricas, aritméticas e estatísticas. A possibilidade de interligar estruturas de carácter numérico, algébrico, lógico e gráfico permite compreender melhor as situações.

Organização do trabalho

Foi proposto às turmas a utilização da Folha de Cálculo e, como metodologia, o trabalho de grupo.

Os alunos levantaram algumas questões:

"Como trabalhar com a Folha de Cálculo? Será difícil?"

"A matéria vai ser dada? Vamos cumprir o programa?"

"Se pedirmos transferência para outra Escola estaremos em condições de nos integrarmos em qualquer outra turma?"

Depois de alguma discussão, os alunos deram o seu aval à experiência, entusiasmados com a utilização do computador e o trabalho em pequeno grupo, embora com a salvaguarda de a suspender se chegássemos à conclusão que não estava a resultar.

Participaram na experiência 34 alunos, sendo 12 da turma de Economia e 22 da turma de Quimicotecnia. A experiência decorreu ao longo de todo o ano e cada aluno utilizou o computador em média 2 horas por semana.

Uma vez que o Núcleo Minerva só dispunha de 4 computadores, os alunos trabalharam em grupos de 3 (na turma de Economia) e 2/3 (na turma de Quimicotecnia). Nesta, os grupos organizaram o trabalho a desenvolver e ocuparam os computadores rotativamente.

No final de cada actividade, cada grupo elaborou um relatório escrito que foi depois apresentado e discutido em grande grupo (toda a turma).

A discussão na turma ajudou à síntese do trabalho realizado, à clarificação e compreensão dos conceitos, ao levantamento de novas questões e propostas de actividades.

Funções trigonométricas

Para o estudo das funções trigonométricas como funções reais de variável real, apresentámos o seguinte problema:

No relógio representado na figura, o ponteiro dos minutos mede 1 cm.

Determina as posições da extremidade do ponteiro dos minutos entre as 10h 15m e as 11h 15m.

E entre as 10h 15m e as 12h 15m?

Supondo que precisas atrasar o relógio quais as posições da extremidade do ponteiro dos minutos entre as 10h 15m e as 9h 15m?

Os alunos começaram por escolher um referencial e fazer o estudo de cada uma das funções que representam as coordenadas dos pontos que correspondem às posições da extremidade do ponteiro dos minutos.

Pensámos que iriam surgir várias funções uma vez que há diversas soluções para a escolha do referencial, mas todos os alunos optaram pelo sistema de eixos coordenados com origem no centro do relógio.

Fixado o referencial, identificaram o relógio com o círculo trigonométrico e para definir as coordenadas dos pontos fizeram corresponder à abcissa a função co-seno e à ordenada a função seno.

Construiram uma folha de cálculo e estudaram as restrições das funções seno e co-seno aos intervalos:

$[-2\pi, 0]$ - posição da extremidade do ponteiro dos minutos entre as 10h 15m e as 11h 15m;

$[-4\pi, 0]$ - entre as 10h 15m e as 12h 15m;

$[0, 2\pi]$ - quando se atrasa o relógio das 10h 15m para as 9h 15m.

Por exemplo, para o estudo das funções no intervalo $[-4\pi, 0]$ veja-se a figura 1.

A 1ª coluna apresenta os valores das amplitudes do ângulo x; os valores correspondentes nas 2ª e 3ª colunas foram facilmente calculados introduzindo na 1ª linha de cada coluna, respectivamente, as funções cos x e sin x e utilizando o endereço da célula relativa ao 1º dado da coluna das amplitudes e copiando-as ao longo dessas colunas.

Construiram os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$ (ver fig.2).

Como a Folha de Cálculo constrói os gráficos ligando por segmentos de recta os pontos, foi necessário alterar o incremento da variável independente para os tornar mais precisos.

A partir da análise dos gráficos, os alunos fizeram o estudo das funções, indicando o domínio, o contradomínio, os zeros e a variação do sinal, a monotonia, os máximos e os mínimos, a paridade e o período.

Na aula de síntese foi formalizado o conceito de período de uma função e, utilizando este conceito, prolongou-se o estudo das funções sin x e cos x a **R**. A

amplitudes x	abcissas f(x)=cos x	ordenadas g(x)=sin x
-12.5664	1	0
-12.4093	.9876883	.1564345
-12.2522	.9510565	.3090170
-12.0951	.8910065	.4539905
-11.9381	.8090170	.5877853
-11.7810	.7071068	.7071068
-11.6239	.5877853	.8090170
-11.4668	.4539905	.8910065
-11.3097	.3090170	.9510565
-11.1527	.1564345	.9876883
-10.9956	0	1
-10.8385	-.156434	.9876883
-10.6814	-.309017	.9510565
-10.5243	-.453990	.8910065
-10.3673	-.587785	.8090170
-10.2102	-.707107	.7071068
-10.0531	-.809017	.5877853

Fig. 1

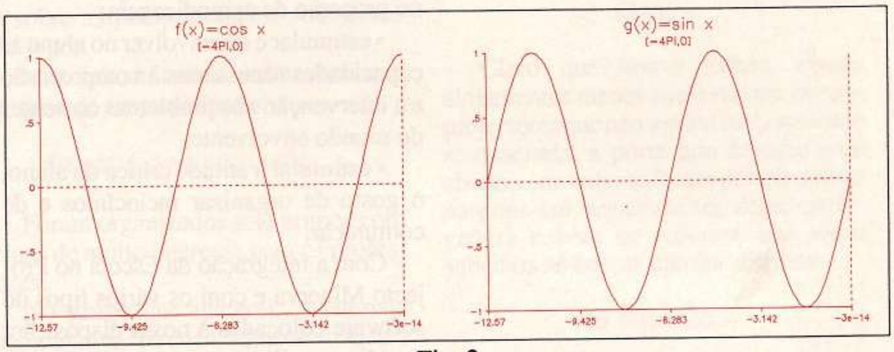


Fig. 2

Folha de Cálculo mostra o valor das células tornando-se mais fácil entender o significado do número π e o argumento de cada razão trigonométrica como um número real. Foi ainda sugerido aos alunos que escolhessem outros referenciais. Um dos escolhidos foi o que tem como centro o ponto da circunferência que limita o mostrador do relógio junto do calendário. Este referencial permitiu o estudo da função $h(x) = -1 + \cos x$ e dado que a Folha de Cálculo permite a definição simultânea de vários gráficos do mesmo tipo ou de tipos diferentes, os alunos construiram gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $h(x) = -1 + \cos x$ (ver fig.3).

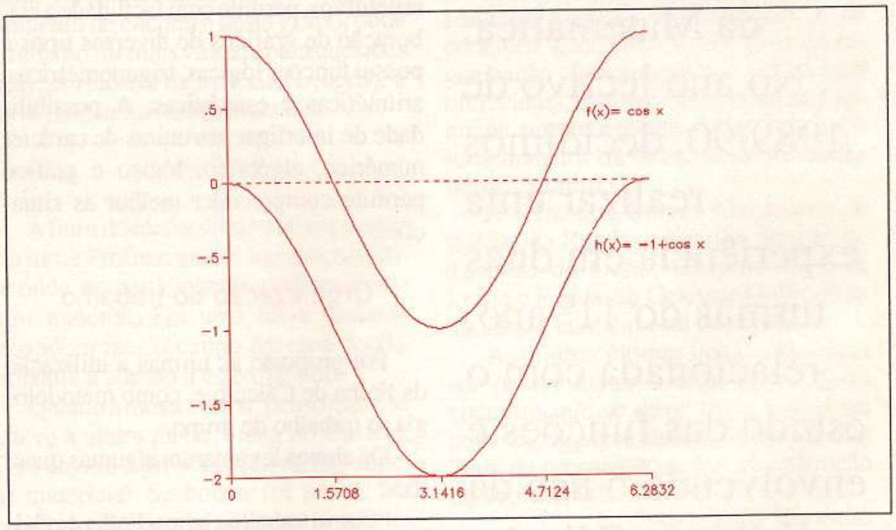


Fig. 3

Assim, através do estudo comparativo dos mesmos, observaram que o segundo gráfico pode obter-se do primeiro por meio de uma translação associada ao vector (0, -1).

Foi proposto ainda o estudo de outras funções, como por exemplo y = tan x -1.

Pelo facto de a Folha de Cálculo ligar por segmentos de recta os pontos, surgiu o gráfico da fig. 4. Este gráfico suscitou alguns comentários:

"Que esquisito! Tem zeros onde não está definida!"

"O nosso computador está maluco!"

O grupo da mesa ao lado, sem olhar para o ecrã do computador dos colegas, retorquiu:

"Fizeram asneira!"

Mas passados alguns segundos:

"O nosso gráfico também está estranho. Tem um segmento de recta oblíquo!"

"Deixem ver o vosso gráfico."

"O melhor é ver se introduzimos bem os dados!"

Feita a verificação dos dados nos dois grupos, por sugestão da professora os 5 alunos reuniram-se para analisar a questão.

"O segmento de recta oblíquo não existe. Vamos enganar o computador, construindo o gráfico a partir da sobreposição das restrições da função aos intervalos]-π/2, π/2[e]π/2, 3π/2[" (fig. 5).

Na sequência das questões levantadas, foi introduzido o conceito de assímptota a uma curva.

Os alunos comentaram:

"O segmento de recta oblíquo corresponde a uma assímptota vertical. Se diminuirmos o incremento da variável independente, os valores ficam mais próximos de π/2."

"Vamos experimentar!"

Os alunos diminuiram o incremento e observaram o gráfico, concluindo que o segmento de recta se aproximava da vertical. Alteraram o incremento até a posição do segmento "parecer" vertical (ver fig. 6).

Avaliação

No final de cada uma das actividades, foi feito, com a colaboração dos alunos, um balanço que nos deu orientações sobre

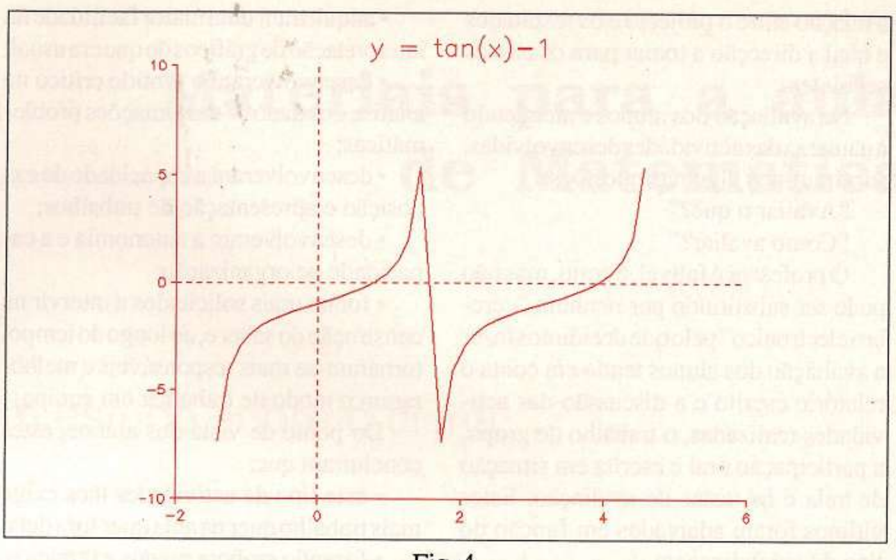


Fig. 4

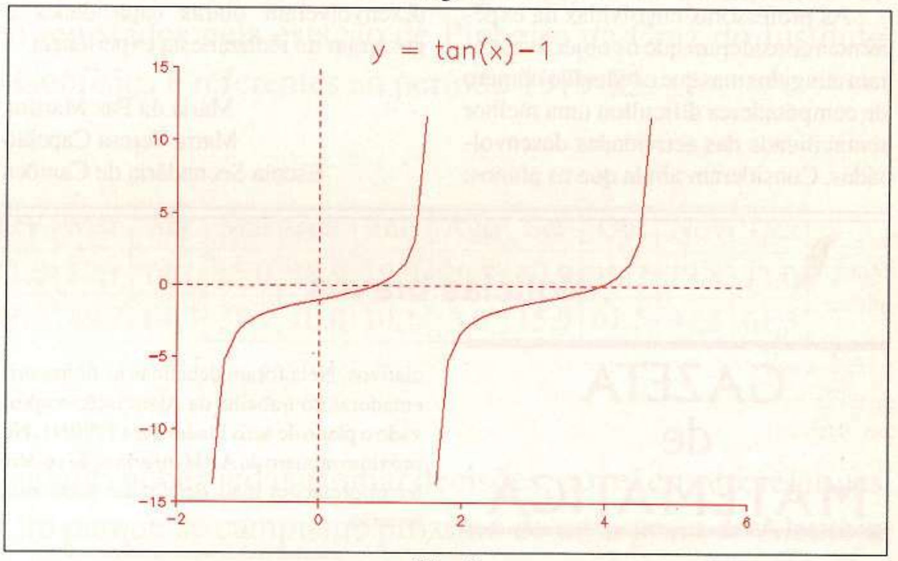


Fig. 5

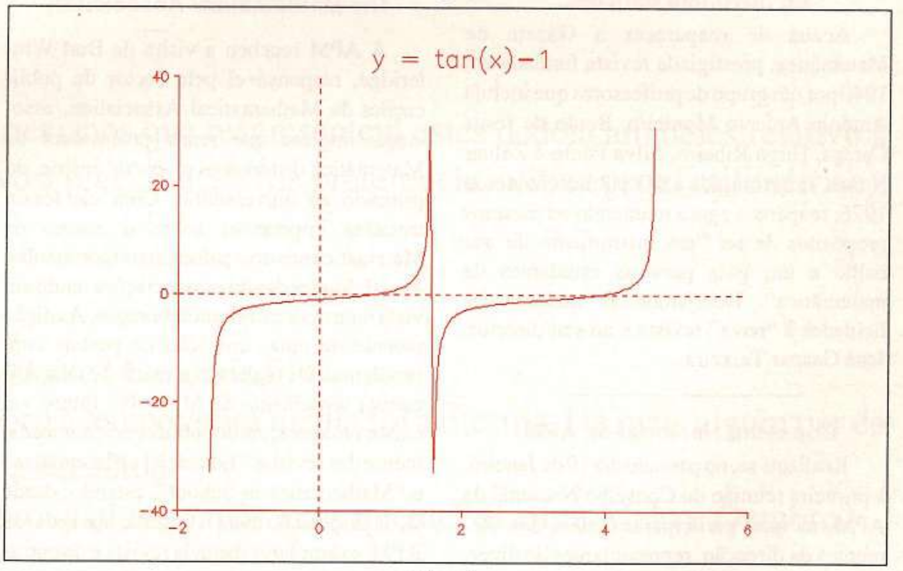


Fig. 6

a relação entre o projecto e os resultados e qual a direcção a tomar para os passos seguintes.

Na avaliação dos alunos e atendendo à natureza das actividades desenvolvidas, surgiram-nos algumas questões:

"Avaliar o quê?"

"Como avaliar?"

O professor é falível, é certo, mas não pode ser substituído por nenhum "cérebro electrónico" pelo que decidimos fazer a avaliação dos alunos tendo em conta o relatório escrito e a discussão das actividades realizadas, o trabalho de grupo, a participação oral e escrita em situação de aula e os testes de avaliação. Estes últimos foram adaptados em função do tipo de aprendizagem.

As professoras envolvidas na experiência consideram que os objectivos foram atingidos mas que o reduzido número de computadores dificultou uma melhor rentabilidade das actividades desenvolvidas. Consideram ainda que os alunos:

- adquiriram uma maior facilidade na interpretação de gráficos do que era usual;
- desenvolveram o sentido crítico na análise dos dados e das situações problemáticas;
- desenvolveram a capacidade de exposição e apresentação de trabalhos;
- desenvolveram a autonomia e a capacidade de organização;
- foram mais solicitados a intervir na construção do saber e, ao longo do tempo, tornaram-se mais responsáveis e melhoraram o modo de trabalhar em equipa.

Do ponto de vista dos alunos, estes concluiram que:

- este tipo de actividades lhes exige mais trabalho quer na aula quer fora dela;
- fazendo embora menos exercícios, desenvolveram outras capacidades e gostaram de realizar esta experiência.

Maria da Paz Martins
Maria Teresa Capelão
Escola Secundária de Camões

Notícias breves

GAZETA de MATEMÁTICA

De novo nas bancas...

Acaba de reaparecer a Gazeta de Matemática, prestigiada revista fundada em 1940 por um grupo de professores que incluía António Aniceto Monteiro, Bento de Jesus Caraça, Hugo Ribeiro, Silva Paulo e Zaluar Nunes. Interrompida a sua publicação desde 1976, reaparece agora mantendo os mesmos propósitos de ser "um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de matemática". Desejamos as maiores felicidades à "nova" revista e ao seu director, José Gaspar Teixeira.

Conselho Nacional da APM

Realizou-se, no passado dia 19 de Janeiro, a primeira reunião do Conselho Nacional da APM, na qual participaram, além dos elementos da direcção, representantes de diversos núcleos da APM e de outros orgãos associativos. Nela foram debatidas as linhas orientadoras do trabalho da Associação e aprovado o plano de actividades para 1990/91. No próximo número do ***APM informação*** poderá ler informações mais detalhadas sobre esta reunião.

The Mathematical Association

A APM recebeu a visita de Bud Winteridge, responsável pelo sector de publicações da Mathematical Association, associação inglesa que reúne professores de Matemática de todos os níveis de ensino, do primário ao universitário. Com ele foram trocadas impressões sobre o ensino da Matemática nos dois países, assim como sobre as actividades das duas associações tendo em vista uma mais estreita colaboração. A edição recente de uma colecção de postais com problemas foi realizada a partir de uma iniciativa semelhante da M.A.. No futuro vai existir uma permuta de publicações, nomeadamente das revistas "Educação e Matemática" e "Mathematics in School", estando, desde já, à disposição para consulta, na sede da APM, exemplares daquela revista e de outras publicações.

Materiais para a aula de Matemática

A ficha de trabalho "Um estudo sobre o clima" foi proposta em 89/90 nas turmas associadas ao Projecto MAT_{789} tendo constituído no 8º ano uma das actividades da unidade sobre Funções — que é descrita neste número da revista, num artigo da nossa colega Leonor Cunha Leal.

A mesma ficha foi proposta aos alunos do 7º ano, mas neste caso a intenção foi "apenas" de proporcionar uma experiência de construção e interpretação de gráficos num contexto real sem se pretender avançar na formalização de conceitos mais abstractos. Uma actividade pode não estar imediatamente ligada a um tópico do programa — desde que, em si mesma, tenha interesse e seja significativa enquanto experiência de trabalho.

Dada a sua natureza e o seu objectivo central (proporcionar oportunidades para o uso de ideias matemáticas em situações da realidade) a ficha poderá ser proposta a alunos de diferentes anos. A nossa experiência sugere as seguintes ideias:

- A ficha é adequada para trabalho em pequenos grupos.
- Numa aula, os grupos poderão trabalhar as quatro primeiras questões. A quarta desempenha um papel central, ao pedir um relatório em que é preciso usar dados numéricos mas num contexto de aplicação, para ilustrar ou defender uma ideia. Além disso, apela à imaginação dos alunos (que tenderão a imaginar nomes para a "sua" agência, inventar "slogans", etc.).
- A quinta questão poderá motivar a ajuda do professor de Geografia e/ou a observação de um pluviómetro.
- A última questão é adequada para uma discussão geral na aula seguinte, depois de os alunos terem tido tempo para pensar e escrever as suas ideias.
- Seria útil que os relatórios (pelo menos) fossem entregues ao professor para uma avaliação mais atenta.

E uma recomendação: falar de "objectos" e "imagens" em vez de meses e temperaturas, ou desprezar os aspectos extra-matemáticos envolvidos, pode ser uma óptima maneira de estragar tudo. Mesmo a presença óbvia da Matemática...

Paulo Abrantes

Materiais para a aula de Matemática

Um estudo sobre o clima

Valores da temperatura média do ar (em graus centígrados) e da quantidade de precipitação (em milímetros) registados pela estação de Pinheiro da Cruz do Instituto Nacional de Meteorologia e Geofísica e referentes ao período 1979-85:

Meses do ano	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Temperatura	9,9	11,0	12,1	14,1	15,0	18,9	19,9	20,8	19,9	16,7	13,8	11,0
Precipitação	66,8	73,0	49,2	64,7	35,1	10,0	10,1	3,0	15,9	61,5	94,5	61,5

O conhecimento destes valores pode ajudar a tomar decisões, por exemplo, relativas à agricultura ou ao turismo. Um parque de campismo próximo de uma praia do Alentejo afixou-os na recepção...

1. Constrói dois gráficos cartesianos que respresentem estes dados, um deles relativo à temperatura e o outro relativo à precipitação (de preferência, utiliza papel milimétrico).

2. Sobre a temperatura:

- Qual foi o mês mais quente? E o mais frio?
- Em Julho e em Setembro a temperatura média foi a mesma. Há mais algum par de meses em que isto tenha sucedido?
- Entre Junho e Setembro qual foi o mês mais quente? E entre Maio e Outubro?

3. Sobre a precipitação:

- Qual foi o mês em que choveu menos? E aquele em que choveu mais?
- Há dois meses que registaram igual precipitação? Quais?
- Entre Junho e Outubro qual foi o mês em que choveu menos? E entre Maio e Outubro?

4. Imagina que trabalhas para uma agência turística e que te pedem um relatório sobre as condições climatéricas desta região... Procura escrever esse relatório.
Apresenta as informações e opiniões que te pareçam importantes. Podes ter em conta, entre outros, aspectos como:

- Quais os meses mais convenientes para se marcarem férias nesta região?
- Será preferível marcar as férias em Junho ou em Setembro?
- Se já não houver vagas no período de Junho a Setembro, é preferível optar por Maio ou por Outubro?

5. Ainda uma questão sobre a quantidade de precipitação:

A quantidade de precipitação é o número de litros de chuva que, num determinado dia, cai em cada metro quadrado do solo.
Esse valor é geralmente apresentado em milímetros porque o número de litros de água que cai num recipiente com a forma de um prisma tendo por base um quadrado de 1 m de lado é igual ao número de milímetros que a altura da água atinge num tal recipiente.
És capaz de explicar porquê?
Averigua e explica como é que, na prática, se faz a recolha de dados sobre a quantidade de precipitação. Compara o processo utilizado com a informação anterior.

6. E outra sobre a temperatura média do ar:

Os primeiros valores apresentados nesta ficha foram os da temperatura média do ar em Janeiro, em Fevereiro, etc., referentes ao período 1979-85. Repara que se está a falar de

Uso das calculadoras em trigonometria

Arsénio Coelho

Foi uma entrevista publicada na "Educação e Matemática" do 3º trimestre de 1989, onde os colegas do núcleo de estágio da Escola Secundária Marquês de Pombal relatavam as suas conclusões sobre as actividades com calculadoras, que me levou a elaborar este trabalho.

Recordo passagens como: "Realmente estando a utilizar a máquina de calcular não faz sentido a racionalização de denominadores de fracções ou resolver equações trigonométricas" ou "Aconteceu-me uma vez no primeiro teste de trigonometria. Depois de o ter feito verifiquei que com a máquina de calcular aquilo não tinha a mínima dificuldade".

Debruçando-me particularmente sobre o problema do ensino da trigonometria usando a calculadora, venho aqui apresentar o meu ponto de vista procurando também, dar algum contributo a este tema.

Quando pretendemos tratar um assunto com a máquina de calcular devemos primeiro perguntar: - Que capacidades e limitações tem a minha calculadora? - Ao elaborar o trabalho nunca devemos esquecer estes dois parâmetros.

Vamos resolver as várias questões que se seguem com a TI 66:

1 - Determinar a amplitude do menor ângulo positivo cujo seno é - 0,5.

Assim, colocamos no visor -0,5, pressionando, sucessivamente, as teclas

$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{sin}}$

Curiosamente, no visor aparece um ângulo negativo (-30°). Portanto a máquina não resolveu o problema; apenas forneceu um ponto de partida para se chegar à solução (v. fig. 1).

2 - Determinar a amplitude dum ângulo positivo do segundo quadrante cujo seno é:

a) 0,309016994 b) 0,8660265404

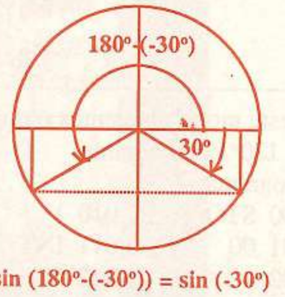
A máquina indica, nos dois casos, ângulos do primeiro quadrante: próximos de 18° e 60° respectivamente. A resolução destas questões leva-nos a desenvolver os raciocínios esquematizados na fig.2.

Estas situações poderiam servir como motivações numa sala de aula, levando os alunos a interpretar as figuras seguintes (fig.3) e a concluir que

sin (180° - α) = sin α

As limitações da máquina obrigam-nos a saber interpretar com muito rigor o que se passa nesta e no círculo trigonométrico.

Deste modo, podemos verificar que



sin (180°-(-30°)) = sin (-30°)

fig. 1

ao determinarmos com a calculadora o seno de um ângulo do segundo quadrante esta redu-lo ao primeiro, tal como os ângulos do terceiro quadrante são reduzidos ao quarto.

3 - Determinar:

a) sin 1920°

b) O quadrante a que pertence 1920°

Resolução:

a) **1920** $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{sin}}$ e no visor aparece-nos 0,866025404.

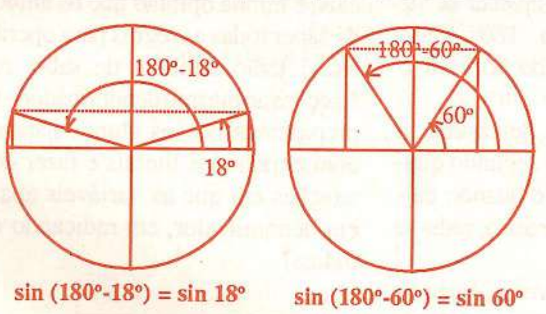
b) Se, contendo no visor 0,866025404, fizermos

$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{sin}}$

para determinarmos o quadrante, estamos a cometer um erro.

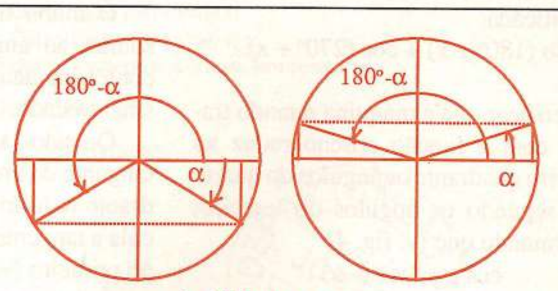
Devemos então usar a fórmula:

D = (D/360) $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Intg}}$ **x 360 =**
= RESTO



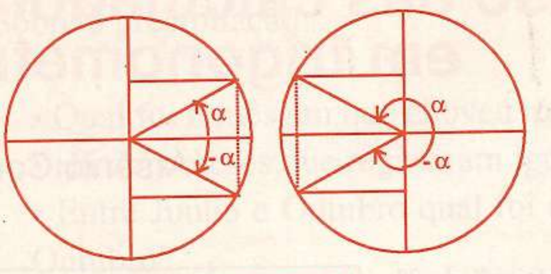
sin (180°-18°) = sin 18° sin (180°-60°) = sin 60°

fig. 2



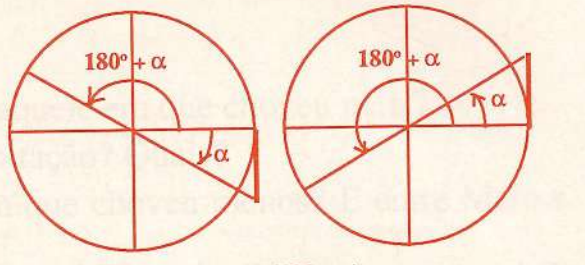
sin (180°-α) = sin α

fig. 3



cos α = cos (-α)

fig. 4



tg α = tg (180°+α)

fig. 5

Deste modo obteremos o quadrante certo: 120° (2º quadrante)

Programa:

000 STO	010)
001 00	011 INT
002 -	012 X
003 (	013 3
004 RCL	014 6
005 00	015 0
006 /	016 =
007 3	017 R/S
008 6	018 RST
009 0	

4 - Simplificar a expressão:

$\sin(900° + x) + \cos(1710° + x)$

A calculadora não simplifica a expressão porque não trabalha com variáveis - apenas com valores concretos. Valerá a pena simplificar a expressão uma vez que, se tal não for feito, ao concretizarmos a variável a máquina faz normalmente os cálculos? - É da maior importância simplificar as expressões antes de as fornecermos à máquina reduzindo o número de operações, o erro cometido e o tempo de cálculo.

Assim se usarmos o programa anterior colocamos a expressão pronta a ser simplificada:

$\sin(180° + x) + \cos(270° + x)$.

5 - Verificar que a máquina quando trabalha com a função coseno reduz ao primeiro quadrante os ângulos do quarto e ao segundo os ângulos do terceiro; confirmando que (v. fig. 4)

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha)\,.$$

Tomar como exemplo o cálculo de cos 240° e cos 330°, determinando de seguida o ângulo cujo coseno está no visor.

6 - Resolver a equação

$$\sin X = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A máquina, como já verificamos anteriormente, poderá não resolver equações. Neste caso apenas nos indica uma solução: 45°. Para além disto, está o aluno com a sua capacidade de generalização e abstracção.

A única vantagem (grande vantagem!) da utilização da máquina é a de o discente não ser obrigado a saber de cor alguns valores das razões trigonométricas e existir maior velocidade de cálculo.

7 - Determinar cos X sabendo que $0° < X < 270°$ e que

$$\operatorname{tg} X = -\frac{4}{3}$$

a) Com calculadora usando a tecla $\boxed{\text{INV}}$

b) Com a calculadora, supondo a referida tecla avariada.

A resolução da alínea a) será $-4/3 = \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{tg}}$ e no visor aparecerá -53,13010235. Ora este ângulo não pertence ao domínio - é do quarto quadrante; pretendemos um do segundo.

O aluno não pode esquecer-se de somar, ao ângulo obtido, 180°. Caso contrário, determina o coseno com o sinal trocado.

Quando a máquina determina a tangente de um ângulo do segundo quadrante redu-lo ao quarto e quando calcula a tangente dum do terceiro, redu-lo ao primeiro (v. fig. 5)

É desnecessário resolver a alínea b) mas, como já verificaram, os conhecimentos utilizados são diferentes dos aplicados em a).

Para testar as capacidades do homem temos as limitações da máquina. Quando estas não chegam devemos impor restrições ao uso de certas teclas para que seja evidente que a calculadora deve ser utilizada numa perspectiva de superioridade do homem sobre a máquina.

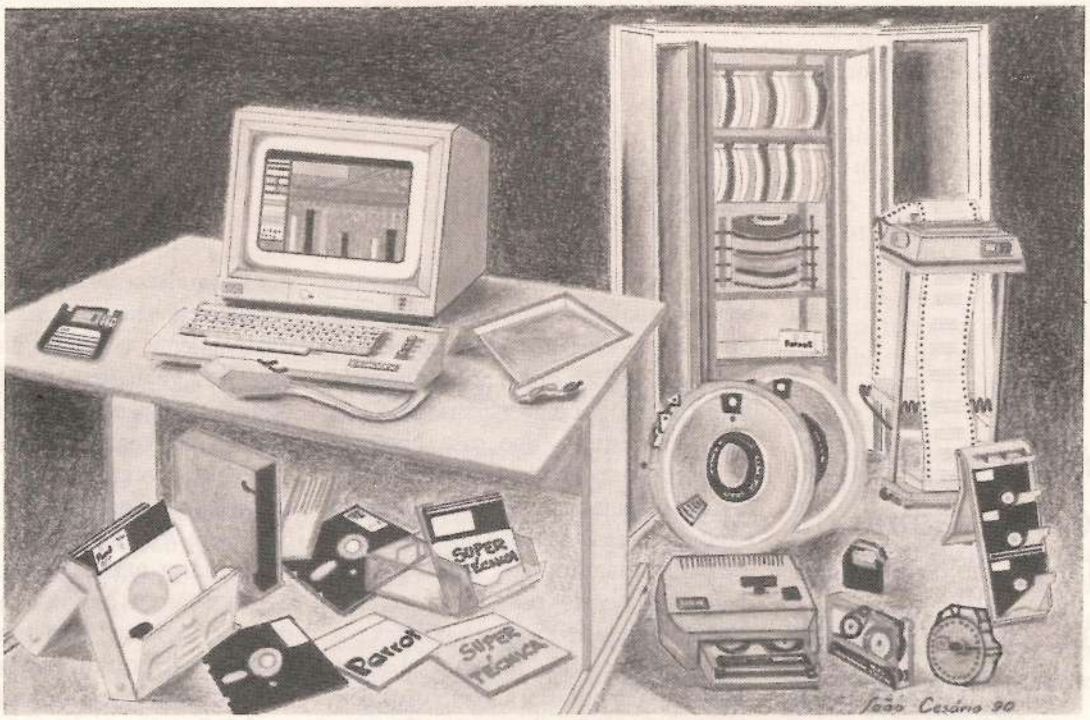
Conclusões

Conclusões sobre a utilização da calculadora:

- É necessário saber a trigonometria como se não usássemos a máquina; somente não necessitamos de saber de cor valores das razões trigonométricas.
- A máquina para cada função trabalha em dois quadrantes.
- A resolução de equações tem muita importância.
- A lei fundamental da trigonometria e outras fórmulas poderão passar a ter menor ênfase.
- Podemos explorar as capacidades/limitações das calculadoras como motivação na aula.
- É importante saber simplificar expressões onde aparecem variáveis.

No que respeita ao capítulo dos radicais, é minha opinião que os alunos têm de saber todas as regras para operar com estes; terão também de saber reduzir fracções ao mesmo denominador. - Como preparamos nós os alunos para operar com expressões literais e fazer demonstrações em que as variáveis aparecem em denominador, em radicando ou em índice?

Arsénio Coelho
Esc. Sec. nº 3 da Figueira da Foz



O QUE DE BOM TEMOS PARA SI

Data Cartridges Streamer, Discos
Bandas Magnéticas, CALCULUS-EUROMAGNETICS
Diskettes
Fitas Tinta para Impressoras
Arquivo p/ Diskettes, Bandas, Discos, Pastas, etc.
Suportes Rotativos p/ Terminais de Computadores
Monoblocos contra fogo p/ Registos Magnéticos
Etiquetas Autocolantes, Papel de Formulários
Diskettes de Limpeza p/ Unidades de Gravação
Pastas p/ Arquivo de Formulários e Conj. Separadores
Anti-Reflectores p/ Vídeos, Monocromáticos e a Cores
Computadores COMMODORE
Impressoras STAR, C. ITOH
Máquinas de Limpeza de Óxidos p/ Cartridges (Streamers)
Visionador de Cabeças de Drive de Cartridges (Streamers)
Conjuntos de Limpeza p/ Drives de Diskettes, Cartridges, Teclados, Ecrans, Impressoras

DISTRIBUIDOR AUTORIZADO

COMPUTADORES COMMODORE

Software e Jogos

DEPARTAMENTO JOVEM

DISCOFITA
COMERCIALIZAÇÃO DE SUPORTES MAGNÉTICOS, LDA.

Sede:
Rua Artilharia Um, 39-1.°
☎ 69 34 37 - 69 34 08 Telex 64179
1200 LISBOA

Filial:
Rua Damasceno Monteiro, 116-B
☎ 82 01 85 - 82 77 36
1100 LISBOA

O problema do ProfMat 90

Pedro Esteves

Enquanto decorria o encontro anual da A.P.M. nas Caldas da Rainha, foi colocado à arte dos participantes o problema "Os dois campistas mentirosos". Dezoito corajosos matemáticos arriscaram os seus nomes. Três responderam em equipa, um propôs duas soluções separadas e outro apresentou, de uma só vez, quatro versões e comentários finais.

A grande maioria das respostas baseou-se na seguinte **opção pragmática do guia**: *3 campistas seguirão pela 1ª vereda, 3 pela 2ª, 2 pela 3ª e ele próprio pela 4ª*. O modo como, nessas respostas, está demonstrado que essa opção *é suficiente* para fundamentar uma boa decisão do guia ao fim dos 40 minutos de exploração das veredas é que varia.

Uma maneira de catalogar as demonstrações dos nossos problemistas é: se são estudadas todas as hipóteses por intermédio de uma "árvore", tal como um computador faria, a demonstração é do tipo "exaustiva"; se são afastadas previamente várias hipóteses, mediante raciocínios simples, e/ou se as hipóteses são agrupadas por forma a permitir que os encadeamentos dedutivos sejam feitos sobre conjuntos de hipóteses, então a demonstração é do tipo "heurístico".

Como ninguém se situa em absoluto num destes extremos e porque alguns dos solucionistas pura e simplesmente *não demonstraram as suas conclusões* e portanto estas não podem ser catalogadas relativamente, o melhor é começar por apreciar algumas das contribuições mais originais independentemente da estrutura de cada resposta individual.

Os dois representantes mais próximos da **via exaustiva**, Jaime Carvalho e Silva (J.C.S.) e José S. Fernandes (J.S.F.), utilizaram a mesma ideia base para a organização das hipóteses que se podem deparar ao guia (sem que este saiba perante que caso está): ou ninguém mente, ou apenas um mente, ou há dois a mentir.

J.C.S. pormenoriza um pouco mais a última possibilidade: ou os dois mentirosos estão no mesmo grupo, ou estão separados. Deste modo, J.C.S. inventaria num quadro (adiante adaptado) as hipóteses constantes do quadro 1.

A seguir J.C.S. elimina todas as configurações das respostas dos oito campistas em que ou surge um SSS ou dois grupos NNN (pela evidência do seu

Os dois campistas mentirosos...

Oito jovens campistas e o seu guia estão perdidos no interior de uma floresta ao fim da tarde. Exactamente uma hora antes de ser noite cerrada e de já não se poder caminhar na floresta, chegam a um ponto de onde saem quatro veredas, uma das quais - mas não se sabe qual! - conduz ao acampamento em 20 minutos.

A solução para o guia parece ser mandar seguir durante 20 minutos pequenos grupos - onde ele próprio se pode incluir - pelas várias veredas, voltarem à intersecção dos caminhos ao fim de quarenta minutos, já sabendo então qual a vereda a tomar, e depois gastarem os últimos 20 minutos da hora a dirigirem-se todos ao acampamento. O problema é que o guia sabe que dois dos oito jovens campistas - embora não saiba exactamente quais! - dizem mentiras de vez em quando...Como poderá o guia descobrir assim a boa vereda?

(em "*Público Magazine*", 4/11/1990, página semanal de "*Desafios*" a cargo de Eduardo Veloso e José Paulo Viana)

Quadro 1

		Pergunta: "O teu caminho é bom"? Respostas dos oito campistas, organizadas por grupos de 3 + grupo de 3 +grupo de 2		
Ninguém mentiu		SSS+NNN+NN	NNN+SSS+NN	NNN+NNN+SS
Um mentiu		NSS+NNN+NN	SNN+SSS+NN	SNN+NNN+SS
		SSS+SNN+NN	NNN+NSS+NN	NNN+SNN+SS
		SSS+NNN+SN	NNN+SSS+SN	NNN+NNN+NS
Dois mentiram...	...e estão juntos	NNS+NNN+NN	SSN+SSS+NN	SSN+NNN+SS
		SSS+SSN+NN	NNN+NNS+NN	NNN+SSN+SS
		SSS+NNN+SS	NNN+SSS+SS	NNN+NNN+NN
	....e estão separados	NSS+SNN+NN	SNN+NSS+NN	SNN+SNN+SS
		NSS+NNN+SN	SNN+SSS+SN	SNN+NNN+NS
		SSS+SNN+SN	NNN+NSS+SN	NNN+SNN+NS

significado para o guia) e restam-lhe 15 casos, bem distintos, portanto "um catálogo sem ambiguidades dos três possíveis caminhos para o acampamento"; se a cada S fôr atribuída 1 unidade, cada caso é transformável num número escrito na base 3:

NSS+NNN+NN —> 200
NNS+NNN+NN —> 100
NSS+SNN+NN —> 210
NSS+NNN+SN —> 201
NNN+NSS+NN —> 20
NNN+NNS+NN —> 10
SNN+NSS+NN —> 120
NNN+NSS+SN —> 21
SNN+NNN+SS —> 102
NNN+SNN+SS —> 12
SSN+NNN+SS —> 202
NNN+SSN+SS —> 22
SNN+SNN+SS —> 112
SNN+NNN+NS —> 101
NNN+SNN+NS —> 11

sendo cada número característico de um único caso.

Enquanto J.C.S. se entusiasmou com esta construção, deixando o guia numa posição bem embaraçosa ("o guia tem então apenas que construir este catálogo, ouvir as respostas e indicar instantaneamente qual o caminho certo"!), J.S.F. foi mais cuidadoso e, após um percurso demonstrativo diferente, procurou uma conclusão fácil de aplicar ("para uma decisão rápida do guia aquando do regresso dos diferentes grupos"): se "Dos dois grupos de três um é unânime e o grupo de dois é unânime - as más respostas são verdadeiras, ignorando-se a resposta do outro grupo de três"; se "Os dois grupos de três são unânimes - as suas respostas são verdadeiras, ignorando-se a resposta do grupo de dois"; se "Nos dois grupos de três há, em cada um, um discordante - as suas respostas são verdadeiras, aliás, também é verdadeira a resposta do grupo de dois"; se "Num dos grupos de três e no grupo de dois há, em cada um, um discordante - tomam-se como verdadeiras as respostas dos dois grupos de três ignorando-se a resposta do grupo de dois", entendendo-se sempre como "resposta" de um grupo a que resulta duma unanimidade ou de uma maioria" ; assim o guia pode juntar à resposta que conhece sobre o caminho que explorou pessoalmente pelo menos mais duas respostas verdadeiras sobre os outros três caminhos, o que é suficiente para decidir.

Como pensaram os problemistas que seguiram a **via heurística**?

Houve entre as respostas dadas três tipos básicos de intuição:

a) partir das indicações dadas acerca dos bons/maus caminhos;

b) partir das unanimidades/ divergências verificadas na opinião dos três grupos de campistas;

c) especular sobre os casos que poderiam surgir conforme não se tenha verificado nenhuma mentira, ou só uma mentira, ou as duas possíveis.

A 1ª versão de Margarida Graça (M.G.) é um misto dos tipos a) e b):

"1- Só um grupo indica o "bom" caminho:

* todos estão de acordo em cada grupo;

* os "mentirosos" não mentiram nesse dia;

* o monitor deve dirigir-se pelo caminho indicado.

2 - Nenhum grupo indica o "bom" caminho:

* todos estão de acordo em cada grupo,

* os mentirosos estão ambos a mentir, estão juntos e sozinhos no grupo de dois;

* o grupo de dois mente;

* o monitor deve dirigir-se pelo caminho onde foi o grupo de dois.

3 - Dois grupos indicam o "bom" caminho:

* todos estão de acordo em cada grupo;

* os mentirosos estão ambos a mentir, estão juntos e sozinhos no grupo de dois;

* o grupo de dois mente;

* o monitor deve seguir a indicação do "bom" caminho do grupo de três.

4 - Há um grupo que não se "entende" quanto à resposta a dar:

• se é um grupo de dois:

* só um mentiroso mente nesse dia;

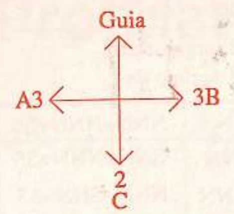
* o monitor deve ignorar a resposta desse grupo e tomar em conta as respostas dos outros grupos para tirar conclusões;

* consegue-se saber qual o "mentiroso";

Os problemistas

Ana Paula Alves
Cristina Viegas Henriques
Dalva Domingues
Inês Queiroz
Isabel Brandão
Isabel Costa
Jaime Carvalho e Silva
José Freire Ferreira
José M. Duarte
José S. Fernandes
Margarida Graça
Maria Amélia Pereira
Maria Fernanda Mendes
Maria Teresa Sanches
Olga Gomes Coelho
Paulo Silva Simões
Pedro Almeida
Rijkje Dekker

Quadro 2



1	Os 3 de A concordam Os 3 de B concordam	⟹	A determinado * B determinado Guia determinado	⟹ C det.
2	Os 3 de A não concordam Os 3 de B não concordam	⟹	1 mentiroso em A ⟹ A det.** 1 mentiroso em B ⟹ B det. Guia det.	⟹ C det.
3a	Os 3 de A concordam Os 3 de B não concordam Os 2 de C não concordam	⟹	A det. 1 mentiroso em B ⟹ B det. 1 mentiroso em C Guia det.	⟹ C det.
3b	Os 3 de A concordam Os 3 de B não concordam Os 2 de C não concordam	⟹	A det. pelo menos um *** de C diz a verdade ⟹ C det. Guia det.	⟹ B det.

* número de mentirosos ≤ 2 ⟹ se 3 concordam os 3 det.
** número de mentirosos = 1 ⟹ 2 dizem a verdade ⟹ 3 det.
*** se os dois concordam e 1 diz a verdade ⟹ os 2 dizem a verdade ⟹ 2 det.

•se é um grupo de três:

* ignora-se a posição desse grupo e como no caso anterior o monitor deve considerar as respostas dos outros grupos e tirar conclusões;

* consegue-se saber quem mente.

5 - Há dois grupos que não se entendem:

* os mentirosos estão ambos a mentir e em grupos separados;

• se é um grupo de três e um grupo de dois:

* o monitor deve considerar a opinião da maioria do grupo de três e excluir a do grupo de dois;

• dois grupos de três:

* o monitor deve considerar a opinião da maioria em cada grupo."

No tipo b) inclui-se a solução de José M. Duarte, (J.M.D.), em dois grupos; só há um problema num grupo; não há polémica em nenhum grupo - e desenvolve as casas que nelas estão contidas, tirando claras conclusões.

Mas a resposta que melhor ilustra a utilização deste segundo tipo de intuição e que ao mesmo tempo é a formalmente mais elegante e a mais económica (embora não se preocupe com os aspectos práticos da conclusão - guia sofre!) é a de Rijkje Dekker, reproduzida na integra (traduzida do original inglês) no quadro 2.

Finalmente, o último tipo aproxima-se da forma usada pelos solucionistas "exaustivos" e esteve na base da 2ª versão apresentada por M.G.

Integrando-se nas soluções baseadas numa intuição do tipo b) e preocupando-se com a **apresentação final** dos resultados, de modo a estes serem facilmente legíveis e rapidamente utilizáveis, as soluções de Paulo Lopes Simões e de Maria Fernanda Mendes, muito parecidas, são a seguir reunidas num único quadro adaptado (v. quadro 3). Estas duas soluções convergem com a de J.S.F.

Um outro quadro bem curioso foi proposto por Isabel Brandão, Dalva Domingues e Olga Coelho, que trabalharam em equipa.

Utilizando E.V.C. como abreviatura de "Encontrei a Vereda Correcta", propõem ao guia, para o caso dele próprio não encontrar a V.C., que siga pela vereda experimentada:

"•por um dos grupos de três em que:

* todos afirmem E.V.C.;

* apenas dois afirmem E.V.C. desde que não mais de um outro campista o afirme;

* apenas um afirme E.V.C. desde que ninguém mais o afirme;

•pelo grupo de dois em que:

* ambos afirmem E.V.C. e mais nenhum grupo seja unânime a afirmá-lo;

* apenas um afirme E.V.C. desde que não mais de um outro campista o afirme;

* ninguém afirme E.V.C.."

Grupos de 2	Grupos de 3	Grupos de 3	Falam verdade além do guia	Para conhecer a verdade sobre 3 caminhos e, portanto, sobre o outro
U	D	D	o grupo U e 2 elementos de cada grupo D	tomar como verdade a maioria nos grupos D
U	D	U	os grupos U	—
D	D	U	o grupo U e dois elementos do grupo D	tomar como verdade a maioria nos grupos D
D	U	U	os dois grupos de 3	
U	U	U	os dois grupos de 3	

U = unanimidade ; D = divergência

Quadro 3

Uma solução bastante sintética baseada no simples discurso e que combina muito bem a demonstração (elementar) e a informação prática (para o guia) é a de José Freire Ferreira, da qual se reproduz um extracto ilustrativo:

"Se há desacordo apenas num grupo de três: tanto faz que minta um ou dois, o guia não o ouve e assume as opiniões dos outros grupos.

Se há desacordo num grupo de três e no grupo de dois: então um (e só um) mentiroso está no grupo de três e percebe-se a opinião correcta (da maioria [= 2]). Além disso, desmascara-se o mentiroso do grupo de dois."

Mas ... teria sido a *opção 1+2+3+3* do guia uma **opção necessária**?

Curiosamente, apenas em duas das respostas há traços de preocupação em relação a esta questão:

- numa das versões de M.G. surgem, sem qualquer comentário (como se de um rascunho se tratasse), as hipóteses do quadro 4.

- na resposta de J.M.D. começa por estar escrito:

"O ideal para o guia seria explorar uma vereda e enviar equipas de cinco jovens para as outras veredas. É que em cada equipa de cinco, mesmo que os dois "mentirosos" lá estivessem e mesmo que os dois "mentirosos" estivessem de facto a mentir, a maioria de três "verdadeiros" falaria verdade, e poderia confiar-se no depoimento da maioria (que seria seguramente verdadeira).

O único "contra" deste método é que é impossível de aplicar, porque não há 2x5=10 jovens, mas apenas 8; mas nada mais diz sobre as outras possibilidades e passa imediatamente à configuração já conhecida (1+2+3+3).

Consultando a solução proposta pelos autores do "desafio" (em "Público Magazine" de 11/11/90), também aí não está demonstrada a unicidade obrigatória da configuração dos grupos de pesquisa das veredas. Nem sequer no original de onde o problema foi retirado, "The Puzzling Adventures of Dr. Ecco", de Dennis Shasha (1988).

Quem quererá contribuir com uma demontração de que a configuração 1+2+3+3 *além de suficiente, é uma condição necessária*?

caminhos	A B C D		A B C D		A B C D
nº de caminheiros	3 3 3 0	ou	4 4 1 0	ou	1 2 3 3

monitor

Quadro 4

E para terminar: este problema também deu oportunidade à boa disposição, à rebeldia contra a artificialidade das condições que o tornam "problema" e até ao desabafo.

Aí vão alguns extractos:

"Ordem do monitor: um dos elementos do grupo que chegar ao acampamento deve trazer a bandeira" (M.G., versão zero);

"Devo dizer que os campistas que encontram o acampamento devem logo aí ficar. (...). Se um campista mentiroso não encontrar o acampamento vai regressar necessariamente, pois pode ser mentiroso mas não é burro de certeza: não vai querer passar a noite ao relento (haverá feras?). O problema está quando o mentiroso encontra o acampamento mas regressa mesmo assim para enganar o guia. (...). Se o mentiroso está no grupo de dois, só surge um problema quando os dois elementos desse grupo são ambos mentirosos e regressam ambos. Mas então, o guia sabendo que um dos caminhos leva ao acampamento, exclui os caminhos dos grupos de três, pelo que, por exclusão de partes deixa o caminho de dois como o caminho certo (e, descobertos, os mentirosos ficam sem sobremesa uma semana inteira!)." (J.C.S.);

"Senti-me "inibida" em resolver o problema por ter sido dedicado aos professores de Matemática e colocado por *vocês*. Fiquei desconfiada e insegura.

Considero que percebi que este problema é interessante para formação de professores porque a solução é fácil, encontrar um *processo* simples e sintético é que é o verdadeiro problema.

(...)". (M.G.).

Pedro Esteves
Esc. Sec. do Seixal

Os vencedores

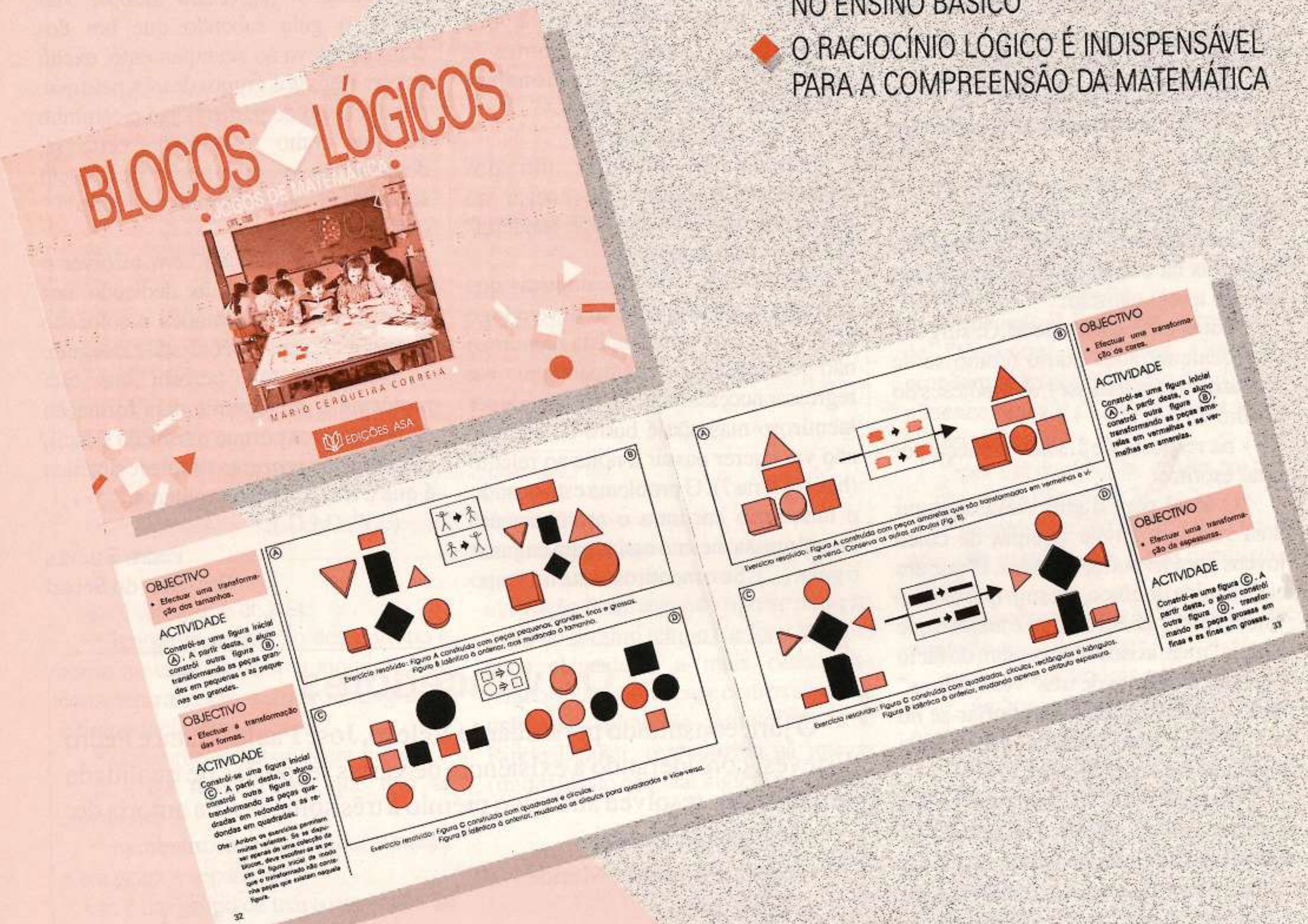
O júri, constituído por Eduardo Veloso, José Paulo Viana e Pedro Esteves, considerando a existência de várias respostas de qualidade semelhante, resolveu atribuir o prémio a três soluções, da autoria de:

- Margarida Graça
- Maria Fernanda Mendes
- Rijkje Deker

O prémio atribuído, como tinha sido anunciado, é o livro "100 Problemas Numéricos", de Pierre Berloquin, oferecido pela Editora Gradiva.

BLOCOS LÓGICOS

- UM MATERIAL ESSENCIAL NO ENSINO BÁSICO
- O RACIOCÍNIO LÓGICO É INDISPENSÁVEL PARA A COMPREENSÃO DA MATEMÁTICA



▶ UM LIVRO COM DEZENAS DE SUGESTÕES DE ACTIVIDADES POR MÁRIO CERQUEIRA CORREIA

- JOGOS
- DIAGRAMAS DE VENN, DE CARROLL E DE ÁRVORE
- TRANSFORMAÇÕES
- SEQUÊNCIAS

▶ CAIXA COM AS 48 PEÇAS COLORIDAS

EDIÇÕES ASA

Índice