Educação e Matemática

N.º 14

2.º trimestre de 1990

400$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Publicações APM

MAIS JOGOS, MAIS ENIGMAS, MAIS PROBLEMAS
Autores: Odete Bernardes, Paula Teixeira, Pedro Esteves e José Paulo Viana

Para quem gosta de jogos, enigmas ou problemas, continuação do volume «Jogos, Enigmas e Problemas».
☐ 1.ª Edição, Setembro 1989: 64 pp.; preço: 290$00 (sócios 200$00)

CALCULADORAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA
Autores: Albano Silva, Cristina Loureiro, Graciosa Veloso

A calculadora como ferramenta com grandes potencialidades educativas. Actividades com calculadoras para vários níveis de ensino, do 5.º ao 12.º ano.
☐ 1.ª Edição, Setembro 1989; 151 pp.; preço 570$00 (sócios 400$00)

- *Dia-a-dia com a Matemática — Agenda do professor 1989/90 —* Ana Vieira Lopes, António Bernardes, José Manuel Varandas
  ☐ 1.ª Edição, Agosto 1989: 140 pp.; *preço: 360$00 (sócios 300$00)*

- *Agenda para a Acção* — recomendações para o ensino da Matemática nos anos 80
  ☐ 4.ª Edição, Fevereiro 1988: 58 pp.; *preço: 250$00 (sócios 180$00)*

- *O Computador na Aula de Matemática* — Eduardo Veloso
  ☐ 2.ª Edição, Agosto 1988: 73 pp.; *preço: 400$00 (sócios 280$00)*

- *Jogos, Enigmas e Problemas* — Odete Bernardes e Paula Teixeira
  ☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 48 pp.; *preço: 250$00 (sócios 180$00)*

- *A Matemática na Vida das Abelhas* — Ana Luísa Teles, Ana Vieira, Aniss Ali e Fátima Antunes
  ☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 80 pp.; *preço: 400$00 (sócios 280$00)*

- *PROFMAT N.º 3*
  ☐ 1.ª Edição, Setembro 1987: 188 pp.; *preço 660$00 (sócios 460$00)*

CRONOLOGIA RECENTE DO ENSINO DA MATEMÁTICA
Autor: José Manuel Matos

Um itinerário aliciante, dos anos quarenta aos anos oitenta. Reedição melhorada e aumentada.
☐ 3.ª Edição, Setembro 1989: 87 pp.; preço 520$00 (sócios (360$00)

QUOD NOVIS
Autoras: Georgina Tomé e Susana Carreira

Uma experiência de abordagem do programa do 11.º ano, a partir de um conjunto de problemas propostos, utilizando a folha de cálculo.
☐ 1.ª Edição, Outubro 1989: 395 pp.; preço: 1370$00 (sócios 960$00)

- *PROFMAT N.º 4*
  ☐ 1.ª Edição, Janeiro de 1989: 269 pp.; *preço: 820$00 (sócios: 580$00)*

- *Cadernos de Educação e Matemática - n.º 1 / A Natureza da Matemática*
  ☐ 1.ª Edição, Setemboro 1988: 75 pp.; *preço 570$00 (sócios 400$00)*

- *O Geoplano na Sala de Aula* — Lurdes Serrazina e José Manuel Matos
  ☐ 2.ª Edição, Abril 1989: 276 pp.; *preço 820$00 (sócios 580$00)*

- *Viagem de Ida e Volta* — Paulo Abrantes
  ☐ 1.ª Edição, Agosto 1988: 63 pp.; *preço: 400$00 (sócios 280$00)*

- **Educação e Matemática**, disponíveis exemplares dos números 2, 3, 4, 7 e seguintes. *Preço de cada número: 200$00 (1 a 6), 250$00 (n.º 7 a 12); 400$00 (13 e seguintes).*
  N.ºs 1, 5 e 6 disponíveis em fotocópia a 200$00 cada um.

Editorial

É preciso avisar toda a gente

FICHA TÉCNICA

Título da publicação:
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 14, 2.º trimestre de 1990

Directora: Leonor Moreira

Redacção:
António Bernardes
Eduardo Veloso
Henrique Guimarães
José Manuel Varandas
José Paulo Viana
Paulo Abrantes
Pedro Esteves

Capa: concebida e executada por Texto Editora

Entidade Proprietária:
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade: Trimestral

Tiragem: 2000 exemplares

Fotocomposição, montagem e fotolito:
Execução e oferta da Texto Editora, Lda.

Impressão: Costa e Valério

N.º de Registo: 112807

Correspondência:
Associação de Professores de Matemática
a/c de Leonor Moreira
Rua Prof. Francisco Gentil, 38-6.º-E
1600 LISBOA

NOTA: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

...que um doutorado em matemática não preparará, necessariamente, a sua equipa de futebol (neste caso, a selecção da Jugoslávia presente no Itália 90) para jogar, *segundo um esquema rígido, sem rasgos de criatividade*; que um doutorado em matemática pode, pelo contrário, imaginar a táctica adequada às características dos opositores que um doutorado em matemática pode desenvolver nos seus pupilos: a capacidade de afrontar novas situações, a aptidão de esboçar estratégias que melhor logrem destruir a barreira defensiva dos seus adversários, a criatividade e o espírito de observação necessários para gizar uma jogada de ataque e colocar a bola nos pés (ou na cabeça) do goleador melhor colocado; afinal, capacidades tanto ou mais importantes do que a habilidade de transformar em golos, lances de bola parada, rigorosamente esboçados e treinados durante meses de preparação. Se assim não fosse, a equipa da Jugoslávia não teria, com certeza, chegado aos quartos de final deste campeonato do Mundo, não teria obrigado os actuais campeões, a selecção da Argentina, a um prolongamento, cedendo, apenas, aos pontapés apontados da marca de grande penalidade, por sinal situações que podem ser repetida e rigorosamente treinadas.

É preciso avisar toda a gente que, por muito aplicável que seja a matemática, dificilmente se conseguirá *logaritmizar a lide dos toiros* e, se tal acontecesse, daí não adviria, forçosamente, perda de beleza ou de espectacularidade para a festa brava.

Vem isto a propósito, como devem adivinhar (ou recordar), das afirmações de dois locutores da nossa televisão que comentavam, para grandes audiências (sobretudo no primeiro caso), os dois tipos de espectáculo.

Estão estas afirmações na «berlinda» por corresponderem à imagem que da matemática ficou, desde os bancos de escola, para estes profissionais da comunicação: qualquer coisa de rigoroso, de rígido, de rotineiro, de feio, de... Já teria importância dois indivíduos terem da matemática uma imagem tão distorcida, preocupante se torna pensar que esta imagem passou, no primeiro caso, para milhões de espectadores e dramático se torna constatar que aquela é a imagem que da matemática tem grande parte dos portugueses, a maioria dos nossos jovens!

Tendo a escola um papel privilegiado na educação matemática dos indivíduos, é preciso avisar todos os professores da responsabilidade que lhes pesa sobre os ombros. É preciso perguntar, a todos nós professores, para quando a coragem de mudar? Para quando, nas nossas aulas, actividades que envolvam os alunos em experiências ricas e aliciantes que proporcionem o desenvolvimento de capacidades, mas também o gosto pela matemática, que propiciem a descoberta do papel que a matemática desempenhou e desempenha na nossa sociedade, na nossa cultura, mas também a descoberta da sua beleza? Para quando, nas nossas aulas, actividades que dêem, da matemática, a sua verdadeira imagem?

É preciso que seja já!!!

Leonor Moreira


ACREDITE, SE LER NO EXPRESSO.
Mesmo quando a realidade ultrapassa a ficção, o leitor do EXPRESSO acredita no que lê: sabe que uma investigação profunda dos factos apurou exaustivamente a sua veracidade.
É esta paixão pela realidade em permanente evolução que obriga o EXPRESSO — o mais antigo semanário português — a uma inovação permanente. Com efeito, não lhe basta ser o número 1. Depois de ter sido o primeiro semanário no país a editar uma Revista, o EXPRESSO é agora o único a oferecer aos seus leitores quatro cadernos autónomos que permitem organizar e classificar os grandes temas da Informação — Política/Nacional, Internacional, Economia e Desporto — além do Cartaz (agora renovado), que oferece uma panorâmica sobre os espectáculos e acontecimentos culturais.
Quanto mais complexo se torna o mundo em que vivemos, tanto mais o EXPRESSO se transforma num mundo de informação, onde a verdade do que acontece é dada a ler e a ver, semana a semana, a centenas de milhares de leitores.
Revista
Expresso
Cartaz
Freitas admite aliança com os socialistas em 91
Soares recebe Savimbi
internacional
economia
desporto e motor
emprego
Expresso
UM JORNAL DE CONFIANÇA

Fibonacci e a Natureza

Isabel A. Rocha e Margarida Font Amado, Esc. Sec. n.º 1 da Marinha Grande

> *«A rejeição da Matemática prejudica todos os ramos do conhecimento, visto que aquele que a ignora não poderá aprender as outras ciências e tudo o que se relacione com este Mundo»*
>
> *Roger Bacon*

Muitos professores de Matemática já ouviram falar de Fibonacci e da sua sucessão. Mas poderão não estar é tão familiarizados com a sua ocorrência na Natureza e o seu potencial para um Trabalho de Projecto. Trabalho de Projecto, trabalho de interdisciplinariedade e por isso nos atraiu, pois pensamos que o caminho para o sucesso escolar passa também por aqui. É necessário trabalhar com os colegas de outros grupos, num espírito de cooperação mútua, em projectos como os que a seguir se apresentam.

Fibonacci foi um dos grandes matemáticos dos séc. XII e XIII e, possivelmente, o mais produtivo da Idade Média. O seu nome era Leonardo de Pisa. O nome do seu pai, pensa-se ter sido Guglieno Bonaccio e daí o nome de Fibonacci, «filho de Bonaccio». O pai era um oficial italiano que trabalhava na costa do Norte de África.

Fibonacci foi educado por um tutor e depois viajou muito como comerciante, visitando o Egipto, a Síria, a Grécia e o Sul de França. Estudava em profundidade os intercâmbios comerciais desses países. À medida que o fazia ia acumulando conhecimentos sobre os diferentes sistemas de cálculo, mas considerou-os inferiores ao sistema Hindo-Árabe que, como sabemos, é o sistema numérico com que ainda hoje trabalhamos.

De regresso a Itália, Fibonacci escreveu livros de Aritmética e Álgebra — *Liber Abaci*, *Liber Geometrical* e *Liber Quadratorum* — e é num destes livros que se encontra uma sucessão a que posteriormente se associou o seu nome. Esta sucessão surgiu quando Fibonacci pensou no seguinte problema:

Problema de Fibonacci

Quantos pares de coelhos podem ser obtidos de um único par se:

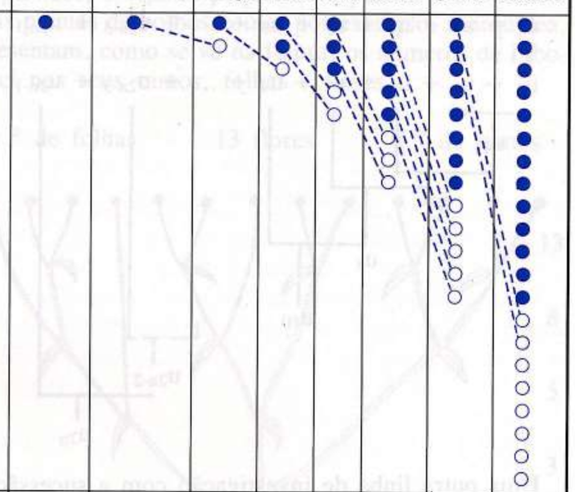
— Cada par gera um novo par em cada mês, a partir do segundo mês de vida.

— Não ocorrem mortes.

Conclusão: Cada termo da sucessão é a soma dos dois anteriores. Ao fim de 1 ano teríamos 233 pares de coelhos (ver quadro seguinte).

Aos termos da sucessão deu-se o nome de **números de Fibonacci**.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …



MÊS	JANEIRO	FEVEREIRO	MARÇO	ABRIL	MAIO	JUNHO	JULHO	AGOSTO
N.º de casais nascidos	0	0	1	1	2	3	5	8
N.º total de casais	1	1	2	3	5	8	13	21

Investigações sobre a sucessão

Mesmo os alunos mais novos entendem que a sucessão é um processo de recorrência, porque os números sucedem-se de acordo com uma lei e além disso recorre-se aos termos anteriores para obter um determinado termo. No problema de Fibonacci, tem-se a seguinte relação de recorrência:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Vejamos então alguns exemplos de trabalhos que podem ser colocados aos alunos do secundário para desenvolver o seu espírito de investigação, levando-os a descobrir propriedades dos referidos números.

- A soma dos quadrados dos primeiros **n** números de Fibonacci é igual ao produto do último número considerado (u_n) pelo seguinte.

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$$

- A soma de números de Fibonacci de ordem par é igual à diferença entre o de ordem ímpar seguinte e a unidade.

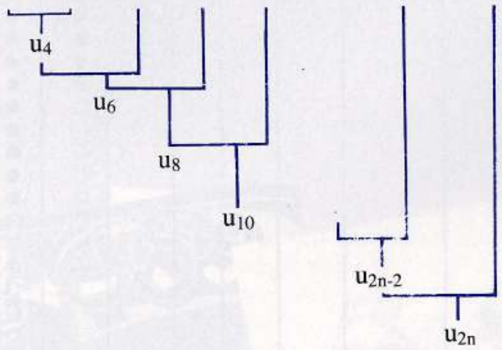
$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

- A soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar é igual ao de ordem par seguinte:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$$

Demonstração:

$$u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + \ldots + u_{2n-3} + u_{2n-1} =$$
$$\parallel$$
$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + \ldots + u_{2n-3} + u_{2n-1}$$



Uma outra linha de investigação com a sucessão de Fibonacci é procurar modelos dentro da própria sucessão. Esta pesquisa, que já pode ser feita independentemente do nível etário, poderia mesmo ser proposta como actividade de projecto aos alunos mais velhos do Ensino Primário ou, pelo menos, aos do Ensino Preparatório com o auxílio de uma máquina de calcular. Outro aspecto interessante deste trabalho é o facto de os alunos se familiarizarem com as máquinas de calcular.

- Dividindo os números de Fibonacci por 2, 3, 4, ... obtêm-se modelos interessantes com os restos. Vamos ver um exemplo com a divisão por 2 em que o modelo 110 se repete por blocos de três números consecutivos de Fibonacci.

  Outros modelos se obtêm, para os restos, nas divisões por 3, 4, 5, 6, ...

Divisão por dois

Ordem	Números de Fibonacci	Quociente	Resto
1	1	0	1
2	1	0	1
3	2	1	0
4	3	1	1
5	5	2	1
6	8	4	0
7	13	6	1
8	21	10	1
9	34	17	0
10	55	27	1
11	89	44	1
12	144	72	0

Divisão por	Modelos de restos	Blocos
2	110	3
3	11202210	8
4	112310	6
5	11230331404432022410	20
6	112352134150554314532510	24
7	1123516066542610	16

Quando divididos por 10 ou números superiores não é possível encontrar modelos para os restos dentro dos limites das calculadoras de bolso e da paciência dos alunos.

- Outro modelo interessante obtém-se quando cada número de Fibonacci é dividido pelo anterior. É de observar os quocientes obtidos.

Número de Fibonacci	Antecedente	Quociente
1		
1	1	1
2	1	2
3	2	1,5
5	3	1,66666
8	5	1,6
13	8	1,625
21	13	1,61538
34	21	1,61905
55	34	1,61765
89	55	1,61818
144	89	1,61798
233	144	1,61806
377	233	1,61803
610	377	1,61804
987	610	1,61803

É interessante verificar que estes quocientes são valores aproximados do número de oiro (1,61803...).

- Outro modelo interessante é a relação existente entre os números de Fibonacci e as teclas do piano. As 13 teclas formam uma oitava da escala cromática. São 8 teclas brancas que constituem a escala maior e 5 teclas pretas constituindo a outra escala e agrupadas a 3 e a 2.

$\left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right>$ agrupamentos das teclas pretas.

5 → n.º de teclas pretas.

8 → n.º de teclas brancas.

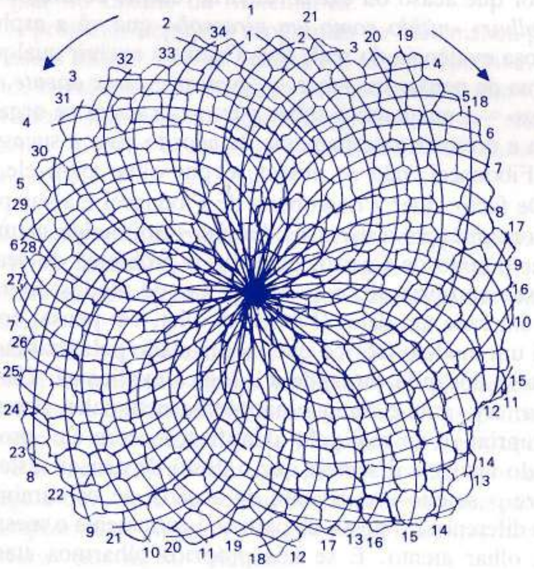
13 → n.º total de teclas.

A Sucessão de Fibonacci e a Natureza

Muitos modelos desta sucessão vêm-nos da Natureza, em especial do mundo das plantas. Aliás, Fibonacci reflectia bem o seu interesse pelo mundo vegetal tendo deixado um livro intitulado FLOS, que significa «flor» ou «flor de fruto», onde refere a aplicação das suas ideias à flora.

O mais notável aparecimento dos números de Fibonacci é nas plantas da família *Compositae* e nomeadamente no girassol. Ao examinarmos as variedades mais comuns, nos discos das flores estão sementes que formam dois conjuntos de espirais logarítmicas. Umas no sentido dos ponteiros do relógio (sentido negativo) e outras no sentido positivo.

O número de sementes de cada conjunto é diferente mas são dois números consecutivos de Fibonacci. Usualmente 34 e 55 nos girassóis mais comuns. Contudo, nos gigantes, esses números elevam-se a 89 e 144.



Outro exemplo é a margarida.

Os alunos poderão fazer estas observações através de um microscópio. Usualmente encontram-se 13 sementes em espiral num sentido e 21 no outro sentido. Também, noutras variedades, se encontram 21 e 34, respectivamente.

É interessante observar a piteira, onde se encontram não 2 mas 3 conjuntos de sementes em espiral e que são em número correspondente a três números consecutivos de Fibonacci, usualmente 13, 21 e 34.

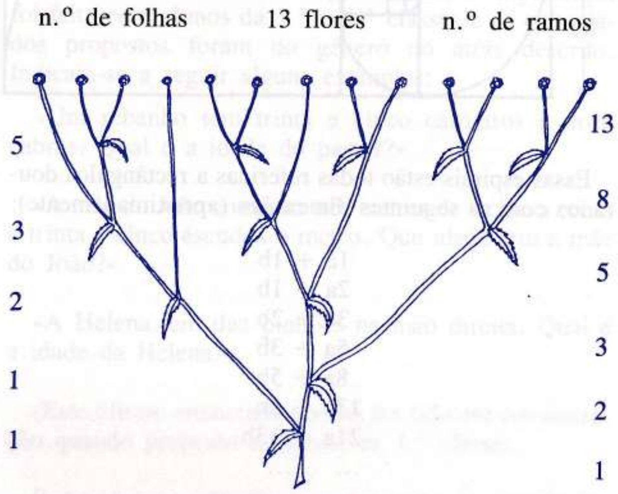
Mais raramente também se encontram com 8, 13 e 21, respectivamente.

A partir daqui pode-se pedir aos alunos que observem os discos das flores de outras plantas da família *Compositae* para identificar o modelo das sementes em espiral.

Cada espécie de planta tem o seu próprio modelo de desenvolvimento, não obstante estar sujeita a uma variação ocasional dentro da espécie. Esse modelo de desenvolvimento pode ser relacionado com os números de Fibonacci.

Por exemplo a eufórbia, uma pequena flor azul ou branca que se encontra em solos calcários, tem 2 sépalas grandes, 3 sépalas pequenas, 5 pétalas e 8 estames.

As plantas de bolbos como, por exemplo, a orquídea, apresentam, como se vê na figura, os números de Fibonacci nos seus ramos, folhas e flores.



Outra planta que os alunos podem encontrar nos jardins e levar para observar na sala de aula é a dália, e nas suas flores irão encontrar modelos dos números de Fibonacci.

Casca do caracol

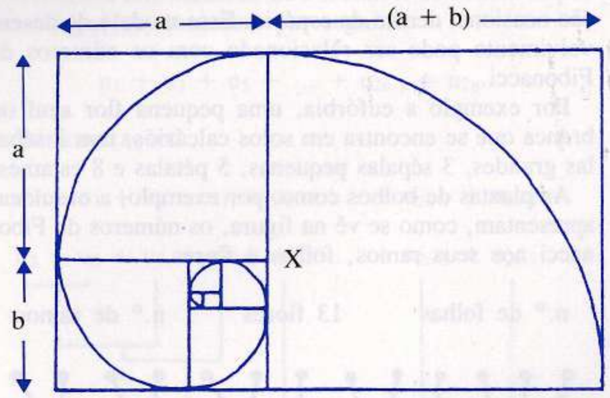
Embora a ocorrência de espirais nas plantas possa ser novidade para os nossos alunos, já é mais familiar a sua ocorrência na casca do caracol.

As espirais mais vistas na natureza são as logarítmicas. A casca do náutilo é uma espiral logarítmica. Este habitante do mar desenvolve uma série de sulcos sucessivamente mais largos à medida que cresce. Os sulcos vão aumentando mas a forma permanece constante. Esses sulcos são as espirais que se vêem na casca. A espiral da casca do náutilo está muito relacionada com o rectângulo dourado.

Como sabemos, este nome está associado à secção ou proporção dourada:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Artistas, pintores e arquitectos usavam as proporções divinas nos seus trabalhos, utilizando o rectângulo dourado. O centro ou foco de um quadro com as divinas proporções estará na posição X, como se assinala na figura.



Essas espirais estão todas referidas a rectângulos dourados com as seguintes dimensões (aproximadamente):

1a + 1b
2a + 1b
3a + 2b
5a + 3b
8a + 5b
13a + 8b
21a + 13b
... .

Aqui temos mais um modelo, que como é óbvio, nos conduz aos números de Fibonacci.

1. Ao ouvir falar da sucessão de Fibonacci e de como ela está presente nos girassóis não pude deixar de me lembrar de um poema de Alberto Caeiro:

O meu olhar é nítido como um girassol.
Tenho o costume de andar pelas estradas
Olhando para a direita e para a esquerda,
E de vez em quando olhando para trás...
E o que vejo a cada momento
É aquilo que nunca antes eu tinha visto,
E eu sei dar por isso muito bem...
Sei ter o pasmo essencial
Que tem uma criança se, ao nascer,
Reparasse que nascera deveras...
Sinto-me nascido a cada momento
Para a eterna novidade do Mundo...

Creio no mundo como um malmequer,
Porque o vejo. Mas não penso nele
Porque pensar é não compreender...

O Mundo não se fez para pensarmos nele
(Pensar é estar doente dos olhos)
Mas para olharmos para ele e estarmos de acordo...

Eu não tenho filosofia: tenho sentidos...
Se falo na Natureza não é porque saiba o que ela é,
Mas porque a amo, e amo-a por isso,
Porque quem ama nunca sabe o que ama
Nem sabe por que ama, nem sabe o que é amar...
Amar é a eterna inocência,
E a única inocência é não pensar...

Trago-o aqui por crer que, muitas vezes, aquilo que aparentemente é apenas um acaso, uma lembrança à toa, encerra uma razão de ser, nexos escondidos, e que desta atenção aos aparentes acasos nasceram muitas das descobertas que hoje constituem o património científico da humanidade (sem ter a pretensão tola de ser este o caso, evidentemente...).

Pergunto pois por que acaso ou outra razão Caeiro fala precisamente de girassóis, flores relacionadas com a sequência de Fibonacci? Por que acaso ou outra razão neste mesmo poema se fala do *«pasmo essencial»* que Caeiro sabe ter e o leva a ver a *«espantosa realidade das coisas»*, atitude que, na minha opinião, é partilhada por Fibonacci que, a partir de ninhadas e ninhadas de coelhos, descobriu uma sequência lógica na sua multiplicação, e ainda por aqueles que utilizaram essa sucessão para ver com mais nitidez o girassol?

Por que acaso ou extraordinária relação contraditória o *«olhar» «nítido como um girassol»*, que vê a esplendorosa evidência do real, leva Caeiro a excluir qualquer forma de pensar ou saber — *«pensar é estar doente dos olhos»* —, enquanto o saber que os girassóis se organizam e crescem internamente de acordo com a sucessão de Fibonacci, não se obtém só por olhar para ele.

De facto, quer a descoberta de Fibonacci e a sua posterior aplicação a diversos domínios do mundo natural, quer o texto de Caeiro, colocam o problema do real e da sua apropriação; e se esta se faz de modos diferentes em cada um deles (Fibonacci olha, vê, pensa, constrói um modelo teórico que, confirmado pela realidade, dela se apropria tornando-a a lógica/explicável; Caeiro olha, crê, ama e diz que não pensa nem sabe, dizendo apropriar-se do real pela identificação com ele, procurando anular a distância que o gesto de pensar instaura entre o sujeito e o objecto da acção), se os caminhos são diferentes, o ponto de partida é certamente o mesmo: um olhar atento. E se nós próprios olharmos atentamente, veremos que afinal — e sempre dizendo que não — Caeiro produz um discurso teórico (a teoria de que só pelo olhar se conhece a teoria de que nada se deve acrescentar à realidade — nem sentimentos, nem interpretações subjectivas, nem generalizações abstractas. Ver, apenas — teoria exclusivamente teórica!). Isto é, ambos pensam, em ambos se faz o trabalho do pensamento, seja fazer poesia, seja fazer matemática...

Voltaremos certamente aos girassóis, nítidos como um olhar, nítidos como um pensar...

2. A sucessão de Fibonacci leva-nos igualmente a pensar num mundo cheio de coelhos; e assim seria, se não houvesse outros factores que limitam efectivamente a reprodução desses animaizinhos.

Não se trata aqui de um problema levantado especificamente por aquela sucessão, mas sim por qualquer

(Continua na página 36)

A resolução de problemas: qual o estado das coisas?

Licínia Brandão Costa, ESE do Porto

Muito e de há muito se tem vindo a falar do lugar que a resolução de problemas deve ocupar no Ensino de Matemática.

A Associação de Professores de Matemática (NCTM) dos USA, em 1980, na sua Agenda para a Acção, recomenda que *«o foco do Ensino da Matemática nos anos 80 seja a resolução de problemas»*. A Associação de Professores de Matemática, APM, através de numerosos artigos na revista Educação e Matemática, através de outras publicações dedicadas ao tema e através de comunicações, cursos e sessões práticas nos diferentes «PROFMAT», tem dedicado especial atenção, desde a sua criação em 1986, ao papel do problema e à importância do processo de resolução como objectivos a privilegiar no Ensino da Matemática.

Os projectos de novos programas de Matemática para o Ensino Básico vêm de encontro a esta perspectiva. De facto, consideram a resolução de problemas como «*...a actividade fundamental desta disciplina ...*» (1.º ciclo) e como «*...eixo organizador do Ensino da Matemática...*» (2.º e 3.º ciclos).

É caso para dizer que nos podemos dar por satisfeitos pois, finalmente, foi dado o lugar e o significado devidos aos problemas (pelo menos ao nível das intenções).

Mas em que pé estamos?

Num interessante artigo intitulado *«A resolução de problemas»*, de Leonor Moreira, publicado no primeiro número da revista Educação e Matemática, a autora descreve o seguinte episódio que lhe foi contado por uma colega e que, embora considere 'anedótico', lhe parece *«exemplarmente ilustrativo dos comportamentos desenvolvidos»* nos nossos alunos:

Um professor propõe a seguinte questão:

«A Rita comprou seis quilos de laranjas ao preço de cento e cinquenta escudos o quilo. Que idade tem a Rita?»

Um aluno resolve a questão raciocinando do seguinte modo:

$6 \times 150 = 900$. É muito grande, ninguém tem esta idade!

$150 + 6 = 156$. Ainda é muito grande para a idade de uma pessoa.

$150 - 6 = 144$. É igualmente grande.

$150 \div 6 = 25$. Achei! A Rita tem 25 anos!

No citado artigo não se refere o nível de ensino em que hipoteticamente se teria passado tal «anedota», mas, espontaneamente, associei-a ao Ensino Primário e nunca pus em causa esta conexão.

O certo é que este exemplo me impressionou, acima de tudo porque receei que não fosse tão anedótico como isso.

E este ano decidi-me a experimentar. A experiência foi feita com alunos da 3.ª e 4.ª classes e os enunciados propostos foram do género do atrás descrito. Indicam-se a seguir alguns exemplos:

«Um rebanho tem trinta e cinco carneiros e doze cabras. Qual é a idade do pastor?»

«A mãe do João comprou três metros de tecido a cento e trinta e cinco escudos o metro. Que idade tem a mãe do João?«

«A Helena tem dez pinhões na mão direita. Qual é a idade da Helena?»

(Este último enunciado apenas foi tido em consideração quando proposto a alunos da 3.ª classe).

Pode parecer estranho que em todos os enunciados se peça sempre a idade, mas a intenção foi a de que os alunos rejeitassem resultados que fossem inaceitáveis para a idade de uma pessoa. No entanto alguns dos professores que propuseram os enunciados nas respectivas classes, elaboraram outros, igualmente absurdos, em que a questão posta era diferente, como os que a seguir se transcrevem:

«Num campo colheram-se duas toneladas de batata e duzentos quilos de feijão. Quantos litros de vinho colheu o dono do campo?»

«Numa laranjeira havia trezentas e cinquenta laranjas. O vento deitou abaixo um quarteirão. Quantos metros mede a altura da laranjeira?»

Para que a experiência fosse realizada, dentro do possível, nas mesmas condições, propôs-se que os alunos resolvessem o problema individualmente numa folha de papel na qual indicariam a idade, a classe e todos os cálculos efectuados. Toda a pergunta ou reparo que qualquer aluno pretendesse fazer, teria que processar-se por solicitação ao professor de modo a não ser ouvido pelos colegas.

A experiência foi realizada em Escolas Primárias de Alfena, Maia, Amarante, Arganil, Braga, Castro Daire, Cinfães, Famalicão, Matosinhos, Pombal, Porto, Rebordosa, Paredes de Coura, Valpaços, Vila Nova de Gaia e Vinhais.

Nos resultados que se apresentam a seguir, não se destingue o que se passou a nível da 3.ª e da 4.ª classes, porque as reacções dos alunos são muito semelhantes.

Modo como o aluno reagiu à tarefa	N	%
«Resolve» o problema	454	80
Considera que não se pode resolver	102	18
Diz que não sabe ou que não percebe	11	2
Total	567	100

Sem pretender fazer generalizações precipitadas, acho que estes resultados falam por si.

As minhas suspeitas confirmaram-se, infelizmente. Afinal estas situações ocorrem de facto. Não podemos continuar a pensar que são caricaturas da realidade.

A única diferença relativamente às previsões é a de que não é certo que os alunos se preocupem muito com a razoabilidade do valor encontrado para a idade. A grande maioria faz uma única tentativa e apresenta o valor encontrado. Como esse valor, na maior parte dos casos, é plausível para a idade de uma pessoa, ficamos sem saber se o processo de resolução teve ou não em conta aquele aspecto. Mas, embora poucos em relação ao número total, há alunos que admitem para a sua própria idade valores como 2, 18, 5, 20 e para idade de um adulto valores como 480, 2, 4, 120!

Em jeito de apontamento, descrevo algumas reações de alunos e professores:

Alunos:

«Achei os problemas engraçados, mas complicados!»

«Achei-os tão malucos! Primeiro pareceram-me difíceis, mas depois lá consegui resolvê-los!»

«Carneiros com cabras não sai idade.»

«Não concordo com o problema!»

«Os problemas põem uma pessoa a olhar para a Lua!»

«Achei os problemas disparatados, mas até eram engraçados!»

«O enunciado está correcto mas a pergunta está trocada!»

«Ele é que sabe!» (em relação à idade do pastor)

«125 + 5 = 130 mas deve ser muita idade!
Então se eu tirasse 5?
Oh! Estes problemas são chatos! Fazem pensar. Mas parecem palermas...»

«Prof. — Então tu tens 18 anos?!
Aluna — Tenho.
Prof. — Mas isso não pode ser! Tu tens 18 anos?
Aluna — Mas a professora não vê? Eu tenho 8 anos, mais 10 faz 18! Tenho 18 anos.»

Não deixa de ser surpreendente que, por exemplo, numa classe em que a maior parte dos alunos considera os «problemas» disparatados, 78% dos alunos os tenha resolvido!

Professores:

«Estou tão desanimada! E eu que tanto tenho trabalhado com eles!»

«Depois de ver como eles reagiram até os mandei todos para o recreio a ver se arejavam aquelas cabeças!»

«Foi uma experiência que deu para, em Conselho Escolar, haver uma reflexão sobre os resultados e uma ponderação para uma modificação da prática pedagógica.»

«Achamos a experiência engraçada e gostávamos de conhecer os resultados.»

Um professor formando da Formação em Serviço, tendo-me ouvido comentar estes resultados, decidiu fazer a experiência numa das suas turmas do Ciclo Preparatório. Quando me mostrou o que obteve, não tive nenhuma dúvida em alargar a experiência ao 2.º Ciclo do Ensino Básico.

As Escolas em que se realizou a experiência foram as seguintes: C+S de Custóias, Prep. de Matosinhos, Prep. de Rio Tinto, Prep. de S. Mamede de Infesta, Prep. Soares dos Reis (V.N. de Gaia), C+S de Passos de Sousa.

Os enunciados propostos foram todos do tipo do referido no artigo atrás citado.

Também neste ciclo, por análise dos resultados, se verificou que não se justificava separar o 5.º ano do 6.º ano.

Modo como o aluno reagiu à tarefa	N	%
«Resolve» o problema	468	69
Considera que não se pode resolver	144	21
Diz que não sabe ou que não percebe	54	8
Não escreve nada	16	2
Total	682	100

Estes resultados continuam a ser inquietantes!

Mas afinal o que se passa com todos estes alunos? Embora estejamos acostumados a ouvir, entre professores, comentários não muito abonatórios relativamente às capacidades intelectuais das crianças, nem os mais intolerantes ousariam afirmar ser tão elevada a percentagem dos desfavorecidos pela natureza. Seria o mesmo que admitir que o futuro do País correria sérios riscos de sobrevivência!...

(Continua na página 32)

Uma Matemática diferente

Rijkje Dekker, Universidade de Utrecht

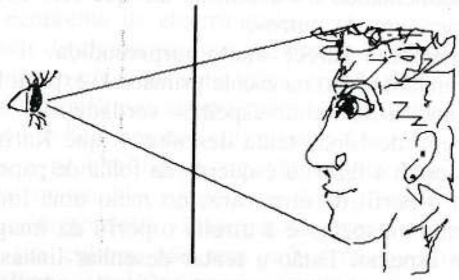
O sistema educativo holandês difere do português em muitos aspectos. Os estudantes holandeses são obrigados a frequentar a escola até aos 16 anos de idade. Como as nossas escolas primárias começam aos 4 anos, entre os 4 e os 16 anos todas as crianças vão à escola diariamente.

Em Portugal, a escolaridade obrigatória está a mudar nesta direcção e eu posso prever que esse facto terá uma enorme influência no vosso papel como professores. Passarão a ter, nas vossas aulas, crianças que antes teriam saído do sistema por diversas razões. As diferenças entre os vossos alunos quanto a motivação, conhecimentos, capacidades de aprendizagem e origem social e cultural aumentarão; como professores responsáveis por todos esses alunos, terão que encontrar uma forma de reagir a essa nova situação.

Na Holanda, reagimos muito mal às diferenças entre os alunos. Aos 12 anos de idade, no fim da escola primária, mandamos os nossos alunos para diferentes escolas secundárias: umas para os alunos mais fracos, outras que dão acesso a cursos médios e de natureza vocacional e outras, ainda, que preparam para a Universidade. Portanto, aos 12 anos de idade, faz-se uma escolha decisiva para o futuro dos nossos alunos. Teoricamente, três factores influenciam esta escolha: um teste nacional no fim da escola primária, o parecer do director da escola e a decisão dos pais. Na prática, parece ser a origem social e cultural dos alunos que determina quase exclusivamente esta *escolha*.

Na Holanda, muitas pessoas contestam este sistema que está constantemente sob discussão. Diversas escolas tentam, numa base experimental, outros sistemas. Algumas mantêm os alunos juntos durante os três primeiros anos da escola secundária sem reprovarem e oferecendo-lhes um programa que é uma espécie de combinação dos programas dos vários tipos de escolas secundárias.

Nestas escolas experimentais, as aulas são organizadas de um modo muito diferente do que se passa geralmente nas escolas tradicionais porque os professores querem ter uma atitude positiva face às diferenças entre os seus alunos. Em Matemática, por exemplo, os professores deixam que os alunos trabalhem muitas vezes em pequenos grupos (de cerca de quatro alunos) para que eles possam discutir, entre si, diferentes soluções para os problemas que encontram e ajudar-se uns aos outros. Os pontos de partida para as aulas de Matemática são muitas vezes escolhidos a partir do ambiente dos alunos. Isto é feito para motivar os alunos e para relacionar a Matemática com os conhecimentos que eles já têm do dia-a-dia. Os professores não dão uma importância tão grande ao conhecimento de factos e técnicas matemáticas, mas tentam estimular o pensamento matemático discutindo as diferentes formas como os alunos resolvem os problemas e procurando que estas formas se vão tornando progressivamente mais matemáticas. Contudo, melhor do que explicar por palavras esta abordagem diferente da Matemática, será mostrar um exemplo concreto, deixando-vos decidir sobre se ele tem ou não alguma coisa de interessante.



Sexta-feira de manhã, segundo tempo. A turma 1E, uma turma do sétimo ano de escolaridade com 27 alunos, tem Matemática. Os alunos estão sentados por pequenos grupos. Raparigas e rapazes, negros, morenos e brancos, todos os grupos são mistos. Discutem o teste de Holandês que tiveram na aula anterior. O teste tinha sido muito mais difícil do que eles esperavam.

R., a professora, põe a mala em cima da mesa. Uma série de pequenos espelhos saem de dentro da mala: cor-de-rosa, amarelos, azuis, redondos, triangulares e quadrados.

«Olhem», diz ela, «comprei-os muito baratos no mercado. Eu queria um espelho que apenas reflectisse a minha cara. Mas tentei com todos e nenhum deles é suficientemente pequeno, por isso de pouco me servem».

Pega num pequeno espelho triangular e segura-o em frente da cara, como se quisesse verificar uma vez mais, numa tentativa final.

«E se o colocar mais distante da cara?», sugere um aluno.

R. segue a sugestão, mas diz que não resulta.

«Para mim, devia ter comprado um espelho com o tamanho da sua cara», diz um outro aluno.

«Sim, claro», responde R., «mas eu gostava de saber se seria possível com um mais pequeno».

«Mas não com um triangular», diz outro aluno, «porque a sua cara não é triangular, ou é?».

Risos.

«Estou a ouvir muitas ideias», diz R., «mas um conselho vosso um pouco mais preciso seria bem-vindo. Por isso, tentem encontrar no vosso grupo o tamanho de um pequeno espelho no qual consigam ver apenas a vossa cara. Eu irei vendo o que vocês vão descobrindo».

A actividade começa...

Jane leva o seu grupo até à porta da sala de aula onde há um grande vidro. Como fora da sala está mais escuro do que dentro, o vidro funciona como um espelho. Ela tira o *baton* da mala e desenha o contorno da sua cara reflectida no vidro. Então começa a experimentar, andando para trás e para a frente.

«Para mim, não faz diferença estar mais perto ou mais longe», diz ela. Os outros elementos do grupo também querem experimentar.

«Nós limpamos isto depois», diz Jane para R. que se aproximava.

Karim tinha pegado num bocado de papel muito grande e segura-o entre dois colegas do seu grupo.

«Agora, faz um buraco no papel», diz a outro colega, «e vai aumentando o buraco, só até que eles consigam ver a cara um do outro».

R. aparece e parece muito surpreendida.

«Aprendemos isto na escola primária», explica Karim, «é a maneira de imitar espelhos verdadeiros».

O grupo de Linda tenta desenhar o que Karim e os colegas estão a fazer: à esquerda da folha de papel desenharam o perfil de uma cara, no meio uma linha que representa o espelho e à direita o perfil da imagem da cara no espelho. Estão a tentar desenhar linhas rectas do olho da cara para a parte de cima do cabelo e para o ponto mais baixo do queixo da imagem.

R. dá-lhes uma régua grande.

Marcel e o seu grupo não parecem estar a avançar muito. Pegaram em alguns dos espelhos de R. e passam o tempo a olhar para eles enquanto piscam os olhos. R. vem ver o que se passa.

«Repare», diz Marcel, «se eu olhar com os dois olhos para este pequeno espelho triangular vejo as duas orelhas ao mesmo tempo. Mas se olhar só com um olho isso não é possível».

R. pega no espelho e tenta ela própria.

«Ela devia pensar que estávamos a piscar o olho às raparigas», diz Marcel baixinho quando R. se afasta.

No fim da aula, os grupos relatam uns aos outros o que descobriram. Jane explica de que modo ela e os colegas do seu grupo descobriram que quando se está muito longe do espelho não se vê mais da própria cara do que quando se está perto.

«Por isso, colocar um espelho longe da cara como fiz no princípio da aula não serve de nada», conclui R. que em seguida lhes pergunta se eles descobriram porquê. Jane responde que não conseguiram descobrir exactamente porquê, mas julgam que isso tem alguma coisa a ver com o facto de, ao estarmos mais longe, vermos a cara mais pequena mas vermos também o espelho mais pequeno.

Karim e o seu grupo mostram o buraco na folha de papel através do qual dois alunos vêem, precisamente, a cara um do outro. O buraco é obviamente mais pequeno que as caras, mas tem mais ou menos a mesma forma.

«Então um pequeno espelho triangular como o que eu usei no princípio não é de facto tão adequado», comenta R. para a seguir perguntar se eles tinham descoberto alguma coisa sobre o tamanho do buraco.

Não, não tinham tido tempo suficiente para isso.

«Nós descobrimos qualquer coisa», diz Linda mostrando o desenho que havia feito com os seus colegas. «Vejam», diz ela, «desenhámos a partir de um olho da cara linhas para o ponto mais alto do cabelo e para o ponto mais baixo do queixo da imagem e onde estas linhas cruzam o espelho é para onde temos de olhar no espelho para vermos o cabelo e o queixo. E se olharmos para estes tracinhos no espelho vê-se que é mais ou menos metade da cara».

«Então vocês são de opinião que a altura do espelho deve ser mais ou menos metade da altura da cara?», pergunta R.

«Sim», responde Jane um pouco hesitante, «mas nós não temos a certeza, estimámos um pouco».

«E para a largura é completamente diferente!», interrompe Marcel, «porque com dois olhos vê-se mais do que com um».

R. sintetizou no quadro tudo o que os alunos haviam descoberto. Mas, além das descobertas, há também novas questões. Ela anuncia que este estudo continuará na próxima aula. Com desenhos geométricos, como o grupo de Linda tentou fazer, descobrirão o tamanho exacto do espelho e a influência que tem olhar apenas com um olho ou com ambos. E ainda por que razão não interessa, de facto, colocar o espelho longe ou perto da cara. Então, descobrirão também muitas coisas novas sobre a reflexão e sobre triângulos semelhantes.

«Estranho», diz Jane no fim da aula, «todos os dias nos vemos ao espelho, mas quando começamos a pensar nisso, não sabemos nada sobre ele».

E, para mostrar a Jane e aos outros alunos que nesta aula eles já tinham descoberto mais do que muitos adultos, R. conclui lendo uma citação de uma novela holandesa, «Nunca mais durmas» de W. F. Hermans, sobre um geólogo que trabalhava nas montanhas da Noruega:

«Abro a minha bússola e olho para a minha cara no pequeno espelho.

Quando ma deu, Eve disse: 'Não sabia que a Geologia era uma ciência em que se tinha que estar sempre a olhar para o espelho'.

Tinha então doze anos, a minha irmãzinha. E ela tinha razão.

Uso a bússola muito mais vezes para ver a minha cara do que para medir a minha posição.

O espelho é tão pequeno que se vejo o nariz e os olhos, as orelhas são invisíveis. Se olho para o queixo, não consigo ver os olhos.

Mesmo quando afasto o espelho e o seguro à distância de um braço, ele ainda assim não reflecte inteiramente a minha cara.»

Nota: Rijkje Dekker é licenciada em Matemática e investigadora no Departamento de Educação da Universidade de Utrecht. É actualmente secretária-geral da CIEAEM.

Artigo traduzido por Paulo Abrantes

Novas aplicações da «Matemática Incerta» (Matemática?)

João Filipe Matos, Departamento de Educação da FCUL

Em geral os dicionários traduzem a palavra *fuzzy* como incerto, confuso ou indistinto. E foi com curiosidade e alguma confusão que comecei a ler sobre *fuzzy mathematics* (matemática incerta) a partir de um artigo publicado recentemente na *Time*.

O conceito de *fuzzy logic* (que traduzirei por «lógica incerta») foi desenvolvido em meados dos anos 60 por Lofti Zadeh, professor de origem soviética na especialidade de ciências de computação na Universidade de Berkeley. Mas o que é a lógica incerta?

Em contraste com a lógica aristotélica em que por exemplo a inclusão de um dado elemento num conjunto é uma questão bem definida (por exemplo, um número ou é ou não é par), na perspectiva da lógica incerta esse problema assume aspectos peculiares. Por exemplo, o que dizer àcerca da inclusão de uma dada mulher no conjunto das mulheres bonitas, ou da inclusão do autor deste texto no conjunto dos homens altos? Para abordar este tipo de situações, Zadeh propôs que a relação de pertença a um dado conjunto seja avaliada não através dos elementos da lógica binária (0/1 ou não/sim) mas através da atribuição de um valor entre 0 e 1 para caracterizar essa relação. Assim, no conjunto das pessoas altas, Larry Bird (jogador de basquete do Boston Celtics, 2,17 m) poderia ter um valor de pertença de 0.95 enquanto Rosa Mota poderia tomar o valor de 0.65. A partir desta linha de princípios é possível desenvolver todo um conjunto de teorias que permitem lidar de forma exacta com expressões como «geralmente correcto».

Esta «Matemática» tem vindo a ser desenvolvida por diversos autores embora não tenha colhido muito entusiasmo entre os matemáticos, nomeadamente nos Estados Unidos. Durante os anos 70 alguns dos seus príncipios foram sendo aplicados como contribuição para o desenvolvimento de sistemas periciais, cujo objectivo é em última análise a resolução de problemas complexos para os quais é necessário recorrer em geral a uma grande quantidade e diversidade de informação.

No entanto, e mais recentemente, diversos investigadores, de entre os quais se destacam os de origem japonesa, deram à «lógica aproximada» um novo e importante impulso, graças ao conjunto de aplicações em que de facto começou a revelar-se de extrema utilidade. Pense-se por exemplo no caso de um vulgar aquecedor eléctrico equipado com termostato. Dentro da lógica tradicional, aquele aparelho só conhece dois estados — ligado e desligado.

Quando a temperatura do ambiente desce abaixo de um dado valor o aquecedor é ligado e irá desligar quando a temperatura ultrapassar certo valor. Um aquecedor *fuzzy* reconhece que algumas temperaturas estão mais próximas do conforto das pessoas do que outras. Assim o seu sistema começará a diminuir gradualmente a temperatura aproximando-se da temperatura ideal. Os resultados seriam traduzidos num maior conforto e certamente numa economia de electricidade.

Apesar de algum sucesso que estes conceitos têm tido sobretudo ao nível das aplicações, grande parte dos cientistas e matemáticos argumentam que o incerto e vago pode muito bem ser descrito através dos métodos estatísticos e probabilísticos da Matemática. No entanto diversos matemáticos japoneses foram menos resistentes à aceitação desta «Matemática» eventualmente porque a sua cultura não tem raízes tão profundas no racionalismo científico como a cultura ocidental. E a grande quantidade de aplicações actualmente em utilização ou desenvolvimento vêm exactamente do oriente, nomeadamente o controlo automático através de um computador *fuzzy* da condução do metropolitano de Sendai (Japão), permitindo arranques e paragens tão perfeitas que são dispensáveis manípulos para os passageiros se segurarem.

E dezenas de aplicações menos espectaculares estão actualmente em utilização, como por exemplo na focagem automática em máquinas fotográficas, controlo de tráfego, sistemas de travagem anti-blocagem, etc. Segundo um dos cientistas mais entusiastas deste campo «os conceitos *fuzzy* começam onde acaba a lógica ocidental...»

TUDO ISSO ESTÁ MUITO BEM, PROFESSORA. MAS NÃO SERIA MAIS IMPORTANTE APRENDER A SER UM TIPO DECENTE?

HEXATRIS
Para desenvolver uma atitude investigativa

> «Manipular material, ver por si mesmo como se formam e organizam as relações, corrigir os seus próprios erros, reter só o que se constatou e de que se teve consciência, vale mais, evidentemente, do que repetir sons simplesmente ouvidos e não relacionados com a nossa experiência.»
>
> Caleb Cattegno

Se a manipulação de objectos concretos pode favorecer o processo de abstracção, o simples facto de os manipular não é suficiente, segundo Piaget, para a elaboração de determinados conceitos. Para que a criança elabore operações intelectuais, é necessário que capte o sentido e aprecie o valor dessas manipulações.

O conjunto de actividades, que a seguir se propõe, inscreve-se nesta perspectiva. Largamente inspirado no artigo *Hexiamonds*, publicado em Novembro de 1986, em *The Computing Teacher*, apresenta as modificações que a nossa perspectiva perante a aprendizagem e a modularidade da linguagem Logo impunham.

Tal como os Poliminós e o Tangram, as actividades à volta dos Hexatris — figuras formadas por seis *(hexa)* triângulos *(tris)* equiláteros congruentes — proporcionam aos alunos boas oportunidades de investigação matemática e de construção de conceitos. O recurso, em simultâneo, a materiais concretos e à programação em Logo, propicia uma compreensão mais profunda dos conceitos em jogo, ao mesmo tempo que permite a descoberta de relações que, de outra forma, permaneceriam ignoradas.

Depois das duas primeiras actividades, realizadas em simultâneo por todos os grupos de alunos, todas as outras podem ocorrer em momentos diferentes para os diferentes grupos, o que alivia bastante o peso do material necessário.

Materiais

— cerca de 80 triângulos equiláteros congruentes, por grupo de alunos
— cerca de 20 hexatris de cada tipo
— computador
— software para programar em Logo

1.ª Actividade

Descobrir todas as figuras diferentes constituídas por seis triângulos equiláteros do mesmo tamanho — os Hexatris.

2.ª Actividade

Comparar as áreas e os perímetros dos diferentes Hexatris.

3.ª Actividade

- Conceber um procedimento em Logo para construir um qualquer triângulo equilátero.
- Com base no procedimento anterior, construir todos os Hexatris.

4.ª Actividade

- O hexágono é um dos Hexatris. Será possível construir um hexágono semelhante utilizando outros Hexatris?
  Em caso afirmativo, construí-lo, também, em Logo, a partir dos procedimentos dos Hexatris respectivos.
- O mesmo relativamente a outros Hexatris.

5.ª Actividade

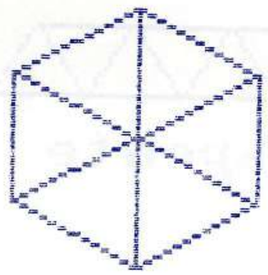
Descobrir os Hexatris com os quais é possível pavimentar o plano.

6.ª Actividade

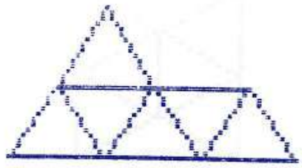
- Construir um paralelogramo com todos os Hexatris.
- O mesmo em Logo.

A propósito da primeira actividade, não se considerarão diferentes figuras simétricas ou obtidas por rotação de outras já descobertas.

Pode-se pedir aos alunos que atribuam designações aos diferentes Hexatris. Segue-se o desenho dos 12 Hexatris construídos em Logo.



hexágono

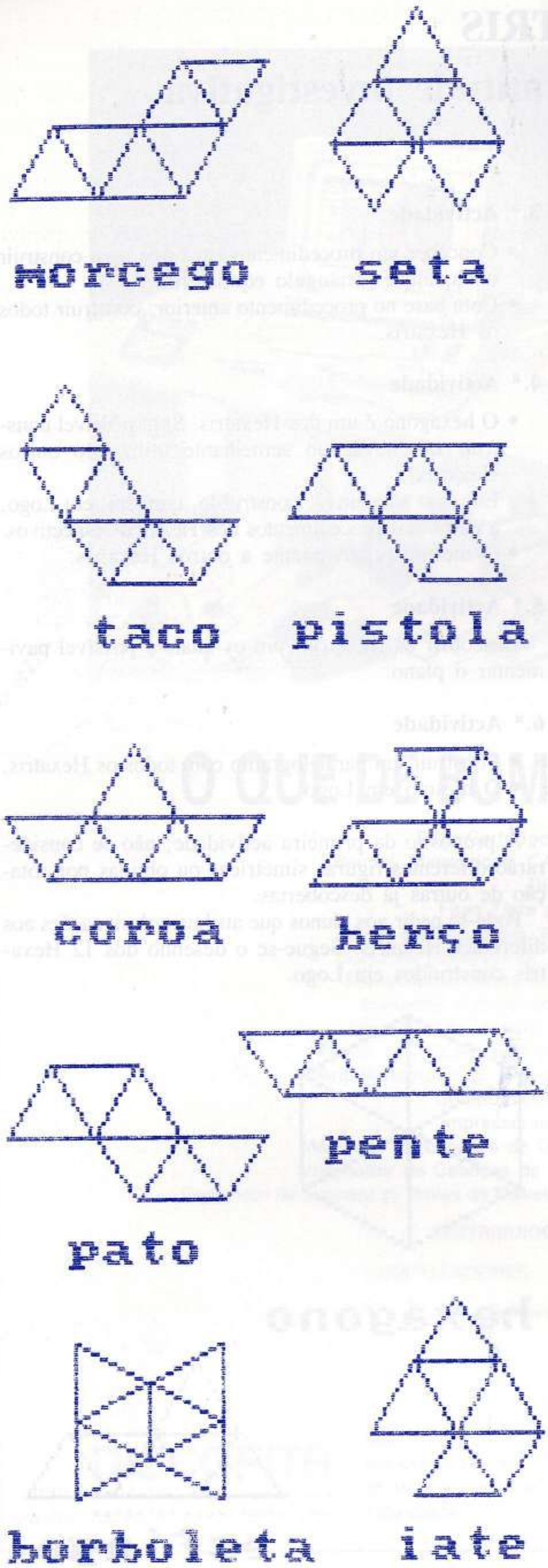


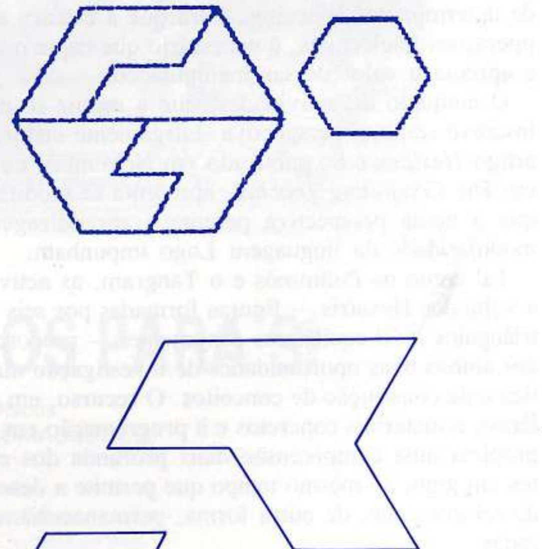
esfinge

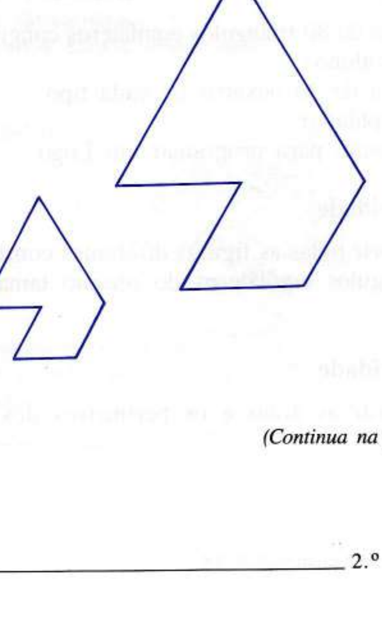
A segunda actividade também pode proporcionar a construção do conceito de área se os alunos ainda o não detêm. De qualquer forma, a questão dos perímetros pode ser colocada em seguida.

Se não se quiser explorar a modularidade da linguagem Logo, mas antes a amplitude dos ângulos de cada Hexatris, a terceira actividade deve propor, exclusivamente, a construção dos Hexatris.

A designação de Hexatris semelhante (4.ª actividade) pode ser substituída por outra se os alunos não forem detentores deste conceito. Neste último caso, a actividade pode servir para uma primeira abordagem deste conceito, sugerindo-se a descoberta da relação entre os comprimentos dos lados correspondentes nos dois Hexatris.







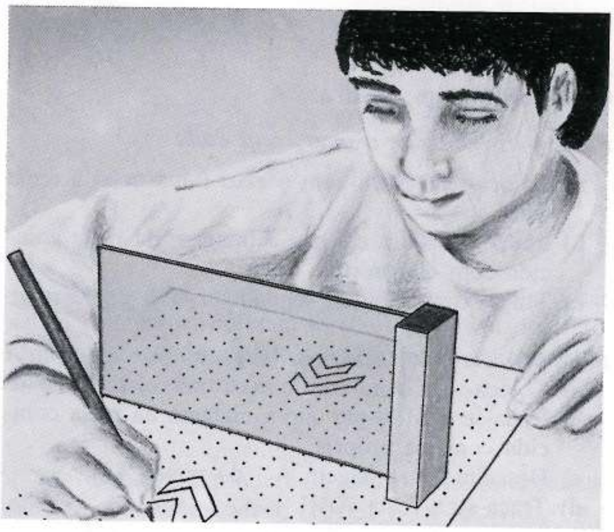
(Continua na página 36)

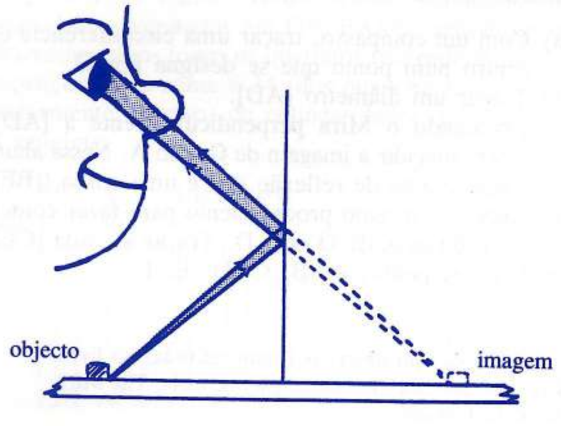
Mira: um novo material para o ensino da Geometria

Lina Fonseca, Pedro Palhares, Teresa Pimentel,
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo

Contrariando o excessivo formalismo e rigor de linguagem com que a Geometria tem sido tratada a nível elementar, sobretudo a partir dos anos sessenta, a perspectiva actual é de um tratamento intuitivo, físico, mais de acordo com as vivências da criança. De facto, no ensino básico, a construção dos conceitos deve passar por uma prévia acção sobre os objectos e, como tal, é indispensável que a criança comece por utilizar materiais manipulativos adequados, na abordagem de qualquer conteúdo programático.

Propomo-nos aqui apresentar um material de origem americana — o Mira — que nos parece ser altamente motivador para a aprendizagem da Geometria, visto que associa a propriedade de reflexão do espelho à transparência, de modo a fornecer uma nova abordagem informal e cativante da Geometria, desenvolvendo nas crianças atitudes como a curiosidade, o espírito de pesquisa e a criatividade.

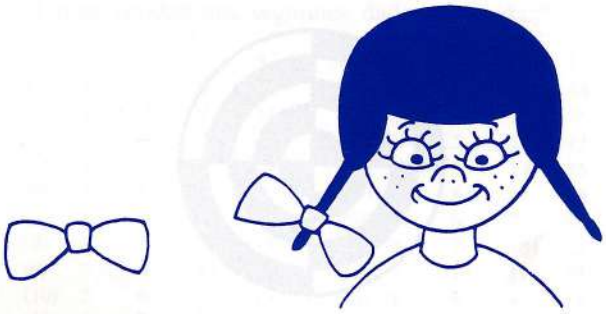




Não vamos fazer uma análise exaustiva das potencialidades deste material, limitando-nos a apresentar de seguida algumas actividades que podem ser desenvolvidas, primeiro de um modo lúdico, e depois explorando os conceitos de simetria (e sua aplicação à classificação de triângulos), perpendicularidade e paralelismo.

Brincando com o Mira

— A Rita perdeu o lacinho. Poderá o Mira ajudar-nos a pôr-lhe o lacinho no totó?



— A partir da figura

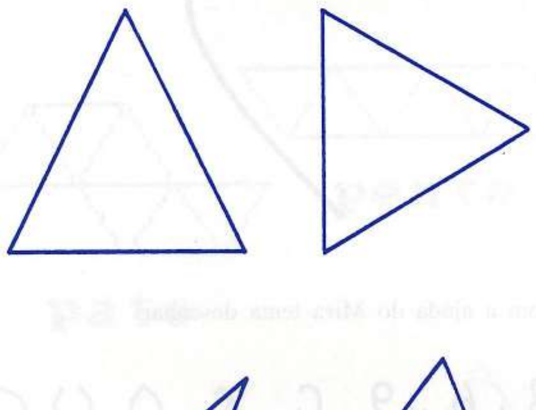
e com a ajuda do Mira tenta desenhar:

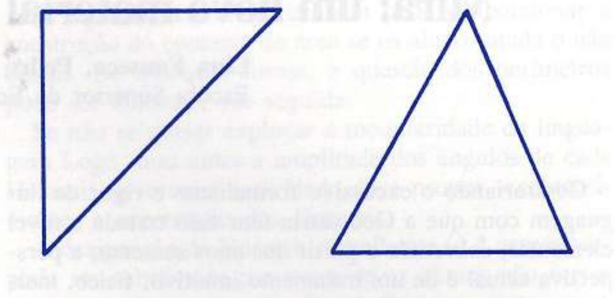
3 , 6 , 9 , C , X , O , U , ∩

Simetrias com o Mira

— Usando o Mira, descobre se as seguintes figuras são simétricas em relação a um eixo. Em caso afirmativo, desenha o eixo.

— Desenha os eixos de simetria dos triângulos abaixo, nos casos possíveis.





Destes triângulos, quais têm um eixo de simetria?

Um triângulo com um eixo de simetria chama-se isósceles.

Que triângulos têm mais do que um eixo de simetria? Quantos eixos têm?

Um triângulo com 3 eixos de simetria chama-se equilátero.

Que triângulos não têm eixo de simetria?

Um triângulo que não tem eixos de simetria chama-se escaleno.

Construções com o Mira

Recta perpendicular a uma recta dada

a) Coloca-se o Mira com o eixo transversal à recta dada.
b) Roda-se o Mira até que a imagem da recta coincida com ela própria.
c) Traça-se uma recta, segundo o eixo do Mira.

Recta paralela a uma dada recta a passar por um ponto A

a) Coloca-se o Mira com o eixo transversal à recta.
b) Roda-se o Mira até que a imagem da recta coincida com ela própria.
c) Desenha-se a imagem A'' do ponto A.
d) Traça-se a recta AA''

Construir um hexágono regular

a) Com um compasso, traçar uma circunferência de centro num ponto que se designa por O.
b) Traçar um diâmetro [AD].
c) Colocando o Mira perpendicularmente a [AD], fazer coincidir a imagem de O com A. Nessa altura traçar o eixo de reflexão que é uma corda ([BF])
d) Repetir o mesmo procedimento para fazer coincidir a imagem de O com D. Traçar a corda [CE].
e) Unir os pontos A, B, C, D, E, F.

As actividades aqui descritas foram retiradas do livro «Mira math activities for elementary school», The Mira math Co., Canada

Sobre o quadrado mágico de Dürer

O nosso leitor e colaborador, engenheiro Alberto Canelas, aceitou o desafio de descobrir, no quadrado mágico de Durer (Fig. 1), todos os quadriláteros cujos vértices têm por soma 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 1

Publicamos de seguida a sua resposta.

(...)

«Vamos representar esquematicamente, e identificar, os vértices:

.1	.5	.9	.13
.2	.6	.10	.14
.3	.7	.11	.15
.4	.8	.12	.16

Figura 2

Consideremos, ainda, que 4 pontos, desde que 3 não sejam colineares, definem um, e um só, quadrilátero. O número total de quartetos não ordenados e sem repetições é dado por:

$$^{16}C_4 = 1820$$

São muitos quadriláteros a testar! Mesmo excluindo os casos de colinearidade ($10 + {}^4C_3 \times 10 \times 12 + 4 \times 13 = 542$), ficamos com 1278 quadriláteros a testar, o que é ainda muito! Vamos, então, utilizar um programa de computador em GW-BASIC através do qual determinaremos todos os quartetos não ordenados e sem repetições cuja soma é 34 (dos quais excluiremos posteriormente os casos de colinearidade). O programa é o seguinte:

```
5  LET A=0: LET B=0
10 DIM A(16)
15 LET A(1)=16: LET A(2)=5: LET A(3)=9:
   LET A(4)=4: LET A(5)=3: LET A(6)=10:
   LET A(7)=6: LET A(8)=15: LET A(9)=2:
   LET A(10)=11: LET A(11)=7: LET A(12)=14:
   LET A(13)=13: LET A(14)=8: LET A(15)=12:
   LET A(16)=1
20 FOR I=1 TO 16
25 FOR J=I+1 TO 16
30 FOR K=J+1 TO 16
35 FOR L=K+1 TO 16
40 LET X=A(I)+A(J)+A(K)+A(L): LET A=A+1
45 IF X=34 THEN LPRINT I; " "; J; " "; K;
   " "; L,: LET B=B+1
50 NEXT L: NEXT K: NEXT J: NEXT I
55 LPRINT
60 LPRINT
65 LPRINT A; "CASOS TOTAIS"
70 LPRINT
75 LPRINT B; "CASOS FAVORÁVEIS"
```

o qual conduz aos seguintes dados de saída:

(1)	1	2	3	4	(44)	3	6	9	13
(2)	1	2	9	10	(45)	3	7	10	14
(3)	1	3	9	11	(46)	3	9	10	15
(4)	1	4	7	14	(47)	4	5	12	13
(5)	1	5	9	13	(48)	4	6	14	15
(6)	1	6	7	9	(49)	4	8	11	14
(7)	1	8	9	16	(50)	5	6	7	8
(8)	2	3	14	15	(51)	5	7	10	12
(9)	2	4	13	15	(52)	5	10	11	13
(10)	2	6	7	13	(53)	6	8	9	11
(11)	2	7	8	14	(54)	6	10	15	16
(12)	2	8	13	16	(55)	7	9	12	15
(13)	3	4	6	10	(56)	8	10	11	16
(14)	3	4	13	14	(57)	9	11	13	15
(15)	3	5	12	14	(58)	13	14	15	16
(16)	3	6	12	16	(59)	1	2	7	11
(17)	3	8	9	14	(60)	1	3	5	7
(18)	4	5	8	15	(61)	1	4	5	10
(19)	4	6	11	13	(62)	1	4	13	16
(20)	4	8	9	13	(63)	1	5	12	16
(21)	4	10	11	15	(64)	1	7	10	16
(22)	5	6	13	14	(65)	2	3	11	13
(23)	5	8	9	12	(66)	2	4	10	12
(24)	6	7	10	11	(67)	2	5	12	15
(25)	6	9	12	14	(68)	2	6	11	15
(26)	7	8	15	16	(69)	2	8	9	15
(27)	7	12	13	16	(70)	2	11	12	14
(28)	9	10	13	14	(71)	3	4	11	12
(29)	11	12	15	16	(72)	3	5	8	11
(30)	1	2	5	6	(73)	3	6	11	14
(31)	1	2	15	16	(74)	3	7	11	15
(32)	1	3	14	16	(75)	3	10	13	16
(33)	1	4	9	15	(76)	4	6	7	12
(34)	1	5	11	14	(77)	4	7	10	13
(35)	1	6	11	16	(78)	4	8	12	16
(36)	2	3	7	12	(79)	5	6	11	12
(37)	2	4	6	8	(80)	5	7	13	15
(38)	2	5	8	10	(81)	5	10	14	15
(39)	2	6	10	14	(82)	6	8	14	16
(40)	2	7	10	15	(83)	7	8	9	10
(41)	2	9	12	13	(84)	7	11	13	14
(42)	3	4	7	8	(85)	9	10	11	12
(43)	3	5	6	15	(86)	10	12	14	16

1820 CASOS TOTAIS
86 CASOS FAVORÁVEIS

Nos 86 casos favoráveis há 14 casos de colinearidade. Portanto existem 72 quadriláteros cujos vértices «somam» 34.

Alberto Canelas

Os 14 casos de colinearidade, identificados por Alberto Canelas, correspondem aos quartetos: (1), (5), (35), (36), (39), (44), (49), (50), (58), (74), (77), (78), (81), e (85).

Dos 72 quadriláteros que cumprem a condição especificada, são côncavos os que correspondem aos quartetos: (4), (6), (10), (11), (21), (43), (46), (52), (56), (70), (75) e (76). Destes destacamos o (56) e o (76) por terem uma forma curiosa que lembra um boomerang (fig. 3).

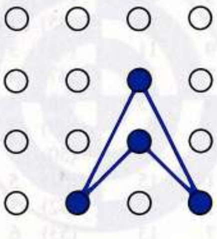
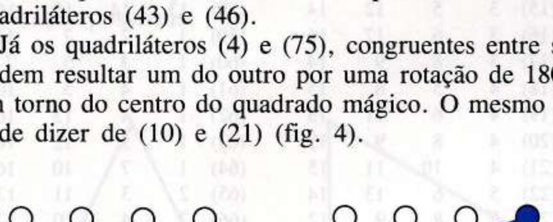


Figura 3

De notar, ainda, uma certa regularidade na sua distribuição. De facto, são simétricos a uma das mediatrizes do quadrado, o mesmo se passando com os quadriláteros (43) e (46).

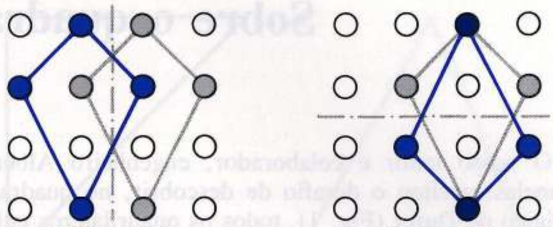
Já os quadriláteros (4) e (75), congruentes entre si, podem resultar um do outro por uma rotação de 180º em torno do centro do quadrado mágico. O mesmo se pode dizer de (10) e (21) (fig. 4).



(21) (10)

Figura 4

São também 12 os quadriláteros convexos não trapézios: (12), (16), (18), (25), (27), (33), (38), (41), (48), (55), (61), (72). Também, entre estes, temos os que resultam um do outro por rotação de 180º. Veja-se os casos dos quadriláteros (18) e (41) ou dos quadriláteros (12) e (33). Um caso curioso é o dos *papagaios*, (25), (38), (55), e (72), cada um dos quais tem um simétrico, relativamente a cada uma das mediatrizes (fig. 5).



(38) e (25) (25) e (55)

Figura 5

São ainda doze os quadrados: o quadradão (62) coincidente com o quadrado mágico; quatro quadrados, (3), (66), (80), e (82), cada um dos quais com um vértice coincidente com vértice do quadrado mágico (fig. 6); dois quadrados, (15) e (69), com todos os vértices assentes sobre os lados do quadrado mágico (fig. 7); cinco quadradinhos, um coincidente com a quadrícula central, (24), e outro correspondendo às quadriculas com vértices coincidentes com os do quadrado mágico, (28), (29), (30) e (42).

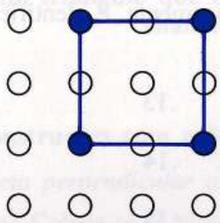


Figura 6

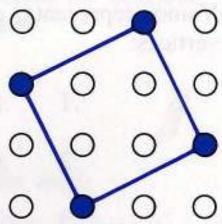
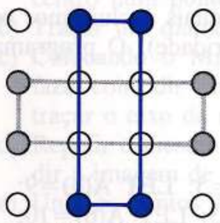


Figura 7

Os rectângulos são, igualmente, 12: dois rectângulos 1x3, (8) e (23), perpendiculares entre si (fig. 8); quatro rectângulos 1x2, (37), (57), (60) e (86), cada um dos quais com um dos vértices coincidente com um dos vértices do quadrado mágico (fig. 9); também quatro rectângulos 2x1, (2), (22), (26) e (71), nas mesmas condições; finalmente, 2 rectângulos (17) e (67) cujos lados maiores são paralelos a uma das diagonais (fig. 10).



(8) e (23)

Figura 8

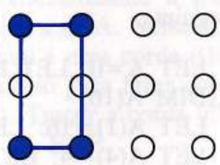
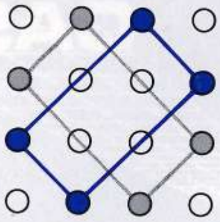


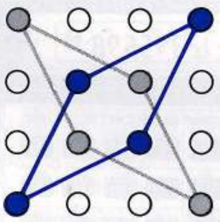
Figura 9



(17) e (67)

Figura 10

Existem, ainda, 2 losangos, cujas diagonais maiores coincidem com as diagonais dos quadrados: (19) e (64) (fig. 11).



(19) e (64)

Figura 11

Trapézios são quatro, (13), (54), (59) e (84), todos eles isósceles e cada um deles com um dos vértices coincidente com um vértice do quadrado de Dürer (fig. 12).

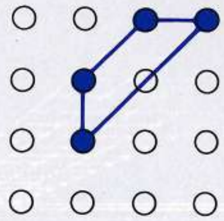
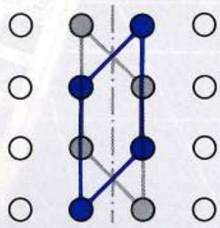
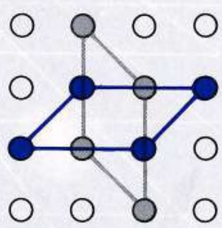


Figura 12

Finalmente, são 18 os paralelogramos obliquângulos. Com a excepção de dois, (34) e (65), todos os outros têm dois sósias congruentes: um é o seu simétrico relativamente a uma das mediatrizes; o outro resulta da rotação em torno do centro do quadrado inicial. Assim, por exemplo, o (51) tem um simétrico relativamente à mediatriz que é o (53) e por rotação do (51) obtém-se o (73); este por sua vez tem um simétrico que é o (40). Rodando, por sua vez, o (40) obtém-se o (53) (fig. 13).



(51) é o simétrico de (53)



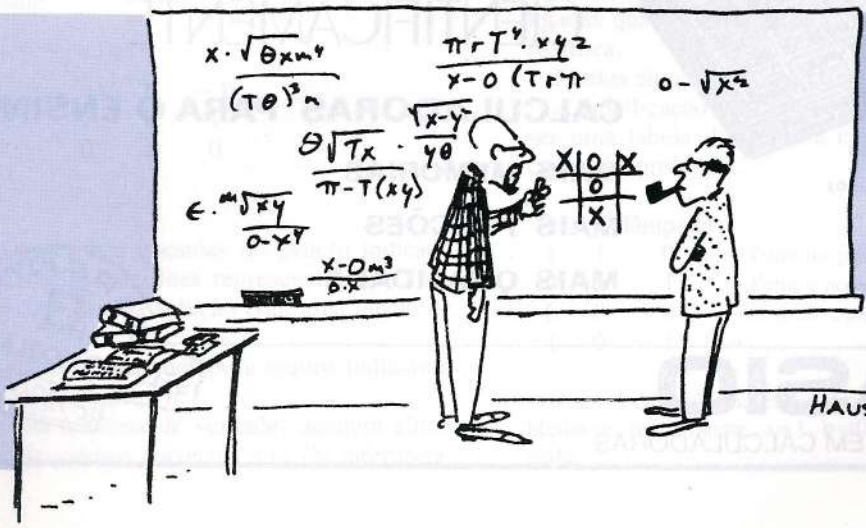
(51) e (73)

Figura 13

Idênticas situações se verificam entre os paralelogramos (14), (20), (31) e (63); (7), (9), (32) e (47); (45), (68), (79) e (83).

Trata-se, de facto, de um mágico quadrado mágico!

Leonor Moreira



CASIO
fx-5000F
* 128 Fórmulas incorporadas
* Programável
fx-82B
* Calculadora Científica Básica
* 75 Funções
CALCULANDO O FUTURO CIENTIFICAMENTE
fx-7500G
* Calculadora Científica
* Programável c/ gráficos
* Visor Gráfico
CALCULADORAS PARA O ENSINO
MAIS MEMÓRIAS
MAIS FUNÇÕES
MAIS QUALIDADE
exija
GARANTIA
BELTRÃO COELHO, LDA.
2 ANOS
CASIO
LIDER MUNDIAL EM CALCULADORAS

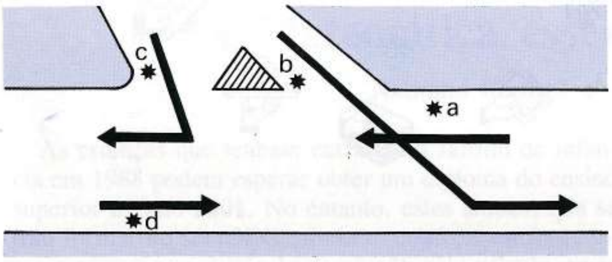
Trânsito, casa e lógica

Arsénio Coelho, Escola Secundária N.º 3 da Figueira da Foz

A propósito de aplicações da Matemática, tema num encontro de professores em Viana do Castelo, comecei a pensar nas aplicações da lógica.

Agarrei no meu «padiolas», uma Diane, e dei uma volta pela Figueira da Foz à procura de Matemática.

Nas proximidades do Mercado deparei com uma situação de trânsito, comandada por semáforos, que pode reproduzir-se com a figura seguinte:



* O trânsito circula no sentido das setas
* **a, b, c** e **d** são semáforos

Transportei esta figura para as aulas do 10.º ano e coloquei a seguinte questão:

— Traduz por uma expressão lógica o funcionamento correcto do trânsito e verifica a solução no local.

Como reagiram os alunos? — Uns calaram-se surpreendidos, outros argumentaram:

— Isto não é Matemática!

O problema provocou alguma discussão entre os alunos. Sei que alguns foram ao local, mas ninguém arriscou soluções. Resolvi apresentá-la: se os semáforos **b** e **c** têm a cor verde/laranja então **a** e **d** têm a cor vermelha e vice-versa.

Assim **a=d** e **b=c**. Logo, a expressão que nos traduz a circulação correcta do trânsito é **a=b**. Com uma tabela de verdade:

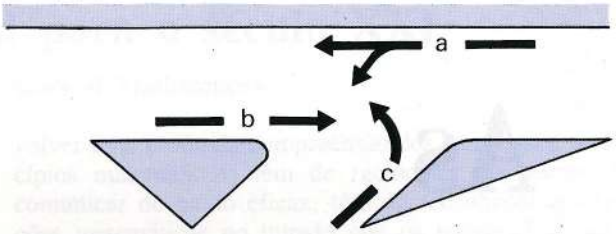
a	b	~b
1	0	1
0	1	0

A seguir coloquei-lhes questões do género indicado pela figura abaixo. Mandei-lhes representar **c** em função de **a** e **b** e confirmar a solução com uma tabela de verdade.

O interesse dos alunos aumentou e muitos indicaram a resposta certa: **c= ~a∧~b**.

No que respeita à tabela de verdade, nenhum aluno conseguiu atribuir valores correctos a **c**. Da interpretação da figura concluímos que o trânsito **c** só circula quando **a** e **b** não circula:

a	b	c
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1



A outra parcela da tabela já era correctamente feita por todos:

a	b	c	~a	~b	~a∧~b
1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Os alunos fizeram correctamente o que resultava da manipulação de símbolos na tabela mas revelaram dificuldades na representação da realidade.

A conclusão anterior é confirmada por um problema colocado no teste de avaliação:

— O teu irmão entra em casa e acende a lâmpada da escada; tu, na outra extremidade, apaga-la, ele acende-a novamente... A brincadeira repete-se.

Que operação lógica permite esta diversão, sabendo que ambas as extremidades do comutador de escada estão ligadas quando a lâmpada está, inicialmente, apagada? Justifica.

Muitos alunos responderam certo: disjunção exclusiva.

A justificação não a conseguiram dar, mas poderia ser uma tabela de verdade com a sequência do enunciado do problema:

a	b	lâmpada	
1	1	0	→ Dado do problema
0	1	1	→ Entra e acende — «a» muda de estado
0	0	0	→ O irmão apaga — «b» muda de estado
1	0	1	→ ....

Nota: A equivalência material poderia resolver o último problema se, inicialmente, a=1, b=0 e a lâmpada estivesse apagada.

Em resposta ao movimento «back to basics» que procurava privilegiar a aprendizagem do cálculo, o National Council of Supervisors of Mathematics dos EUA produziu, em 1977, um documento que procurava definir, de forma alargada, o que deveria ser entendido por «competências básicas» em Matemática. Este documento teve na altura larga repercussão, estando na origem da elaboração da Agenda para a Acção para os anos 80 *do NCTM. Aquela mesma organização, que agrupa educadores com funções de supervisão, apoio pedagógico, inspecção e especialistas curriculares, ligados a autoridades estaduais e locais, apresenta agora uma versão actualizada daquele documento, procurando ter em conta tanto as mudanças sociais e tecnológicas como as novas orientações pedagógicas que progressivamente se têm vindo a impor no ensino desta disciplina.*

A Matemática essencial para o século XXI

National Council of Supervisors of Mathematics

As crianças que tenham entrado no Jardim de infância em 1988 podem esperar obter um diploma do ensino superior no ano 2001. No entanto, estes alunos, que se irão formar no séc. XXI, ainda se confrontam frequentemente com um currículo dominado pelo cálculo, mais adequado ao séc. XIX.

Para corrigir esta incongruência, o National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) vem actualizar as suas recomendações de 1977, descrevendo as competências essenciais de que os cidadãos irão precisar quando iniciarem a sua vida adulta no próximo milénio. Esta posição de NCSM pretende complementar e fundamentar as posicões sobre educação matemática do National Council of Teachers of Mathematics e de outros grupos profissionais.

O nosso mundo tecnológico está a mudar a uma taxa de crescimento cada vez maior e as nossas responsabilidades em assuntos internacionais continuam a aumentar. À medida que as exigências da sociedade se modificam, assim se alteram as competências essenciais necessárias aos indivíduos para uma vida produtiva em sociedade. Todos os estudantes, de todas as raças e ambos os sexos, necessitarão de competências em áreas essenciais da Matemática.

O que é essencial?

O NCSM considera «essenciais» as competências que são necessárias para que as portas do mundo do trabalho ou do ensino superior se mantenham abertas. A matemática essencial, tal como é aqui descrita, representa o conjunto de competências matemáticas para que os estudantes possam ter uma vida adulta responsável.

Os alunos, que hoje educamos mudarão, muito provavelmente de actividade profissional, várias vezes durante a sua vida. As ocupações profissionais que tiverem desenvolver-se-ão e modificar-se-ão à sua volta. Muitas vezes, as capacidades específicas de um trabalho não se transferirão facilmente para outro. Para se prepararem para a mobilidade, os alunos devem desenvolver uma profunda compreensão dos conceitos e princípios matemáticos; têm de raciocinar claramente e comunicar de modo eficaz; têm de reconhecer aplicações matemáticas no mundo que os rodeia; e devem enfrentar problemas matemáticos com confiança. Os indivíduos irão necessitar de capacidades básicas que lhes permitam aplicar os seus conhecimentos a novas situações e controlar a própria aprendizagem ao longo da vida.

A capacidade de cálculo com números inteiros não é um indicador adequado de realização matemática. Também não é suficiente desenvolver capacidades sem as respectivas aplicações ou memorizar regras sem a compreensão dos conceitos nos quais essas regras se baseiam. Os alunos têm de compreender os princípios matemáticos; devem saber como e quando usar o cálculo; e têm de desenvolver a sua capacidade em resolução de problemas e raciocínios de ordem superior.

O manifesto do NCSM de 1977 foi uma reacção contra o movimento do «back to basics» com a sua concepção retrógada de focar, apenas, capacidades básicas. Agora, quando olhamos para o futuro, reconhecemos que o uso de calculadoras e de computadores e as aplicações de métodos estatísticos continuarão a expandir-se. A resolução criativa de problemas, o raciocínio rigoroso e a comunicação eficiente aumentarão a sua importância. Para desempenhar funções com eficiência, no próximo século, os alunos irão necessitar de um conjunto mais vasto de competências matemáticas. A lista que se segue identifica doze áreas fundamentais de competências matemáticas. Não implica uma sequência de ensino ou uma prioridade de qualquer uma das áreas. De facto, as doze áreas matemáticas essenciais estão interligadas; competência numa área requer competência noutras áreas.

Doze componentes da Matemática essencial

Resolução de Problemas. Aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar Matemática! Resolver problemas consiste no processo de aplicação de conhecimentos, previamente adquiridos, a situações novas e não rotineiras. Resolver problemas típicos é uma forma da resolução de problemas, mas os estudantes também devem ser confrontados com outros tipos de problemas. As estratégias de resolução de problemas envolvem a formulação de questões, a análise de situações, a tradução e a ilustração de resultados, a elaboração de diagramas e o ensaio e erro. Os alunos devem ver resoluções alternativas para os problemas e devem ter experiência na resolução de problemas com mais do que uma solução.

Comunicação de ideias matemáticas. Os estudantes devem aprender a linguagem e a notação matemática. Devem compreender, por exemplo, o valor de posição e a notação científica. Devem aprender a captar ideias matemáticas, ouvindo, lendo, e visualizando. Devem ser capazes de apresentar ideias matemáticas por via oral, por escrito, através de desenhos e gráficos e de efectuar demonstrações com modelos concretos. Os alunos devem, ainda ser capazes de se envolverem em discussões matemáticas e de formularem questões acerca da matemática.

Raciocínio matemático. Os alunos devem aprender a fazer as suas próprias investigações sobre os conceitos matemáticos. Devem ser capazes de identificar padrões, fazer generalizações e usar experiências e observações para formular conjecturas. Devem aprender a usar contra-exemplos para provar a falsidade de uma conjectura e devem aprender a usar modelos, factos e argumentos lógicos para a validar. Devem ser capazes de distinguir entre argumentos válidos e inválidos.

Aplicar a Matemática a situações do dia-a-dia. Os alunos devem ser encorajados a considerar situações do dia-a-dia transferindo-as para representações matemáticas (gráficos, tabelas, diagramas, expressões matemáticas, etc.), resolvê-las e interpretar os resultados à luz da situação inicial. Devem ser capazes de trabalhar com fracções, calcular proporções e percentagens e resolver problemas de proporcionalidade directa e inversa.

Os estudantes devem ver, não só como a matemática é aplicada ao mundo real, mas também como se desenvolve a partir do mundo que os rodeia.

Verificar a razoabilidade dos resultados. Na resolução de problemas, os alunos devem questionar a razoabilidade da solução ou da conjectura formulada, relativamente ao problema inicial. Têm de desenvolver o sentido de número para determinar se os resultados dos cálculos são razoáveis relativamente aos dados originais e às operações usadas. Com o aumento do uso das calculadoras esta capacidade é cada vez mais importante.

Estimação. Os alunos devem ser capazes de efectuar rapidamente cálculos aproximados, através do cálculo mental e de técnicas de estimação. Quando o cálculo é necessário num problema ou num cenário de consumo, a estimação pode ser usada para verificar a razoabilidade da solução, para examinar uma conjectura ou tomar uma decisão.

Os alunos devem adquirir técnicas simples para estimar medidas de comprimento, área, volume e massa (peso). Devem ser capazes de decidir quando é que um resultado particular é suficientemente preciso para o objectivo em causa.

Competências de cálculo. Os alunos devem efectuar com facilidade as operações básicas: adição, subtracção, multiplicação e divisão, com números inteiros e decimais. Os cálculos complicados devem ser feitos com calculadoras ou computadores.

O conhecimento da tabuada é essencial e o cálculo mental é uma capacidade valiosa. Aprendendo a aplicar o cálculo, os alunos devem praticar a escolha do método mais apropriado: cálculo mental, algorítmico ou a utilização da calculadora. Além do mais, situações do dia-a-dia necessitam do reconhecimento e do cálculo simples com fracções. A capacidade de reconhecer, usar e estimar percentagens também deve ser desenvolvida e mantida.

Pensamento algébrico. Os estudantes devem aprender a usar variáveis para representarem quantidades matemáticas e expressões. Devem ser capazes de representar funções matemáticas e relações usando tabelas, gráficos e equações. Devem compreender e usar correctamente os números relativos, a ordem das operações, fórmulas, equações e inequações. Devem reconhecer a natureza da variação de uma quantidade em relação a outra.

Medida. Os alunos devem compreender os conceitos fundamentais de medida através de experiências concretas. Devem ser capazes de medir a distância, a massa (peso), o tempo, a capacidade, a temperatura e os ângulos. Devem ainda calcular perímetros, áreas e volumes simples. Devem ser capazes de efectuar medições, tanto no sistema métrico como no sistema usual americano, usando os instrumentos e os níveis de precisão adequados.

Geometria. Os alunos devem compreender os conceitos geométricos necessários para trabalharem eficazmente no espaço tridimensional. Devem ter conhecimento de conceitos tais como: paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria. Devem também conhecer propriedades das figuras planas e dos sólidos geométricos. Devem visualizar e verbalizar como os objectos se movem no mundo, usando translações, simetrias e rotações. Os conceitos geométricos devem ser explorados de modo a envolverem medições e resolução de problemas.

Estatística. Os alunos devem planear e concretizar a recolha e organização de dados para responder a questões do dia-a-dia das suas vidas. Devem saber como construir, ler e tirar conclusões de tabelas, mapas, plantas e gráficos simples. Devem ser capazes de apresentar informações acerca de dados numéricos, tais como medidas de tendência central (média, mediana, moda) e medidas de dispersão (intervalo de variação, desvio). Os alunos devem reconhecer, em casos simples, as utilizações correctas e indevidas da representação e da inferência estatística.

Probabilidade. Os alunos devem compreender noções elementares de probabilidade para determinar a verosimilhança de futuros acontecimentos. Devem identificar situações nas quais experiências imediatamente anteriores não afectam a probabilidade de futuros acontecimentos. Devem familiarizar-se com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões, tais como resultados de eleições, projecções comerciais e resultados de acontecimentos desportivos. Devem aprender como a probabilidade se aplica a resultados de pesquisas e a processsos de tomar decisões.

Clima de aprendizagem

Para aprender a matemática essencial necessária para o sec. XXI, os alunos necessitam de um ambiente de aprendizagem não ameaçador no qual sejam encorajados a pôr questões e a aceitar riscos. O clima de aprendizagem deve esperar muito de todos os alunos, independentemente do sexo, raça, deficiência ou estatuto socioeconómico. Os alunos precisam de explorar a matemática usando materiais manipulativos, utensílios de medição, modelos, calculadoras e computadores. Precisam de ter oportunidade de falar com os outros sobre matemática.

Os alunos necessitam de métodos de ensino que sejam adequados para a crescente ênfase em resolução de problemas, em aplicações e em capacidades de raciocínio de ordem superior. Por exemplo, a aprendizagem em grupo permite aos alunos trabalhar em conjunto em situações de resolução de problemas, colocar questões, analisar situações, tentar estratégias alternativas e verificar a razoabilidade dos resultados.

Para implementar as novas estratégias educacionais, serão necessárias vastas oportunidades de desenvolvimento profissional, bem como novos materiais de aprendizagem.

Tecnologia

As calculadoras devem ser usadas pelos alunos ao longo de todo o programa de Matemática, a começar nos níveis elementares. Quando adultos, os alunos irão usar calculadoras ou computadores para fazerem cálculos difíceis. Irão necessitar de habilidade com as contas de um só dígito, de capacidade de estimação e de cálculo mental e devem ser capazes de determinar se os resultado obtidos pelas calculadoras ou computadores são razoáveis. Os alunos irão necessitar de prática em decidir se os cálculos devem ser feitos mentalmente, com papel e lápis ou com instrumentos de cálculo.

O uso de computadores deve ser associado a todo o currículo de Matemática. As salas de Matemática devem ser equipadas com computadores e meios de projecção ou com vários monitores de ecrã largo para demonstrações na turma. Além disso, todos os alunos devem ter acesso a laboratórios de informática. Os computadores não devem ser usados no treino de destrezas isoladas de baixo nível, mas antes para um envolvimento significativo dos alunos em resolução de problemas e desenvolvimento de conceitos.

A tecnologia das telecomunicações deve ser usada para oferecer oportunidades de aprender matemática a todos os alunos de todas as localidades.

Avaliação

A avaliação em cada nível administrativo, desde o nível estadual ou provincial até ao da turma, deve ser coerente com os objectivos do currículo. Nesta altura, dever-se-á ter cuidado ao usar testes padronizados para medir o progresso dos alunos e avaliar a eficácia do ensino. Os testes padronizados existentes podem perpectuar o domínio das competências de baixo nível nos currículos matemáticos. Na preparação para o séc. XXI são necessários novos testes que protagonizem a mudança de ênfase do cálculo para a resolução de problemas e para o raciocínio.

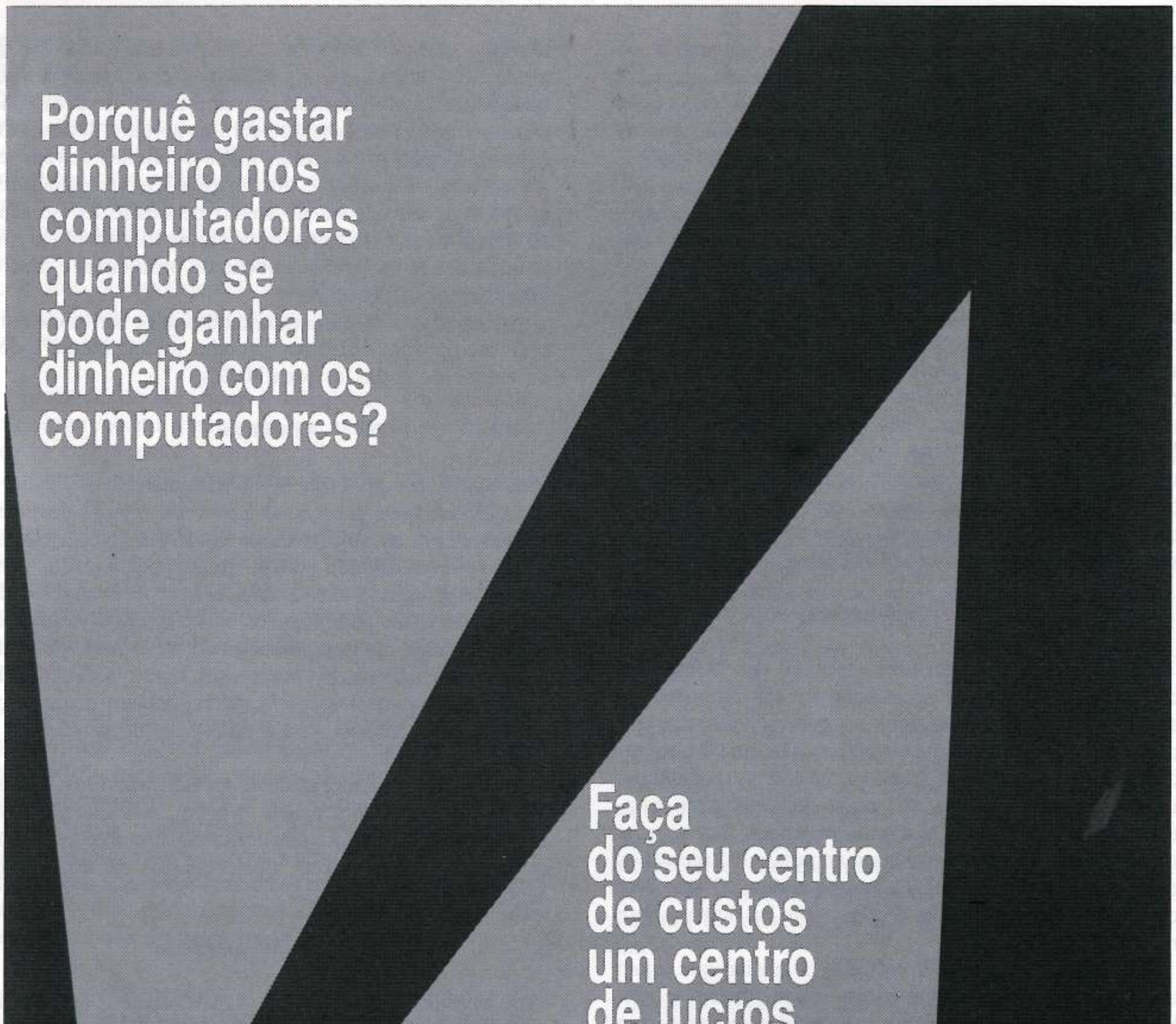
O uso de calculadoras deve ser permitido nos testes. Além dos testes com caneta e papel, a avaliação deve envolver outros meios, tais como observações por parte do professor, entrevistas, projectos dos alunos e apresentações.

Para lá do essencial

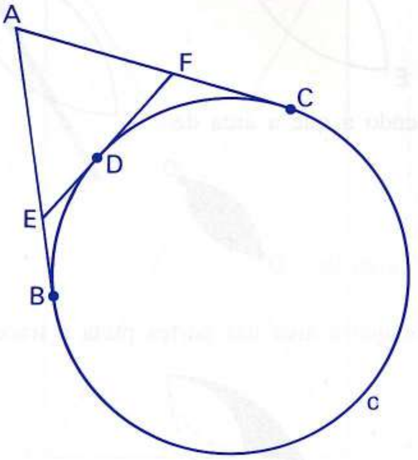
À medida que se caminha da sociedade industrial do séc. XX para a sociedade da informação do séc. XXI, o conhecimento matemático torna-se cada vez mais importante para indivíduos que queiram ter acesso a carreiras e educação superior. Quase todas as carreiras requerem uma formação matemática prévia.

A maioria das áreas de especialização universitária requerem que os alunos tenham no ensino secundário disciplinas de álgebra elementar, álgebra avançada e geometria como pré-requisitos. Além disso, os alunos que se especializem em campos como engenharia, ciência ou economia, irão necessitar de um curso de pré-cálculo que inclua trigonometria. Hoje em dia quase todas aquelas áreas envolvem alguma estatística. Em todas as escolas superiores se deve dar oportunidade aos alunos de aprenderem estatística, probabilidades, matemática discreta e de trabalharem com computadores. Os alunos que completarem um curso de pré-cálculo no seu último ano do secundário devem ter oportunidade de, no ensino superior, ter acesso a um curso de cálculo. Os alunos devem estudar matemática todos os anos, eliminando, assim, as falhas da sua aprendizagem em matemática que, de outra forma, teriam de remediar quando termi-

(Continua na página 35)


Porquê gastar dinheiro nos computadores quando se pode ganhar dinheiro com os computadores?
Faça do seu centro de custos um centro de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

O PROBLEMA DO TRIMESTRE

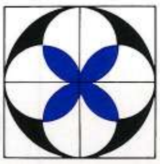


Na figura ao lado, **A** é um ponto exterior à circunferência **c**, [AB] e [AC] são segmentos tangentes à circunferência nos pontos B e C. [EF] é um segmento tangente à circunferência no ponto D. O segmento [AB] mede 8 cm.

Qual é o perímetro do triângulo [AEF]?

Respostas recebidas: o penúltimo problema do trimestre

Qual é a relação entre as áreas em destaque neste azulejo?



Das quatro respostas que nos chegaram publicamos seguidamente três, a primeira de uma grande elegância (Alberto Canelas), a segunda caracterizada por imaginativos artifícios geométricos (Cristina Rodrigues) e a terceira particularmente bem simbolizada e organizada (António Pereira).

Alberto Canelas

«A — área do círculo maior
B — área de um dos círculos menores
V — área «colorida»
P — área «preta».

Como a medida do comprimento do raio do círculo maior é o dobro da de cada um dos círculos menores, conclui-se que:

(i) $A = 4B$

Por outro lado, observando a figura, verifica-se que:

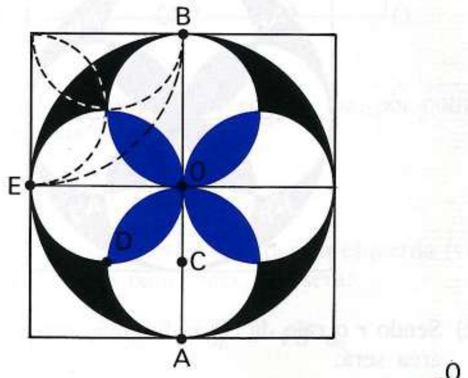
(ii) $A = 4B - V + P$

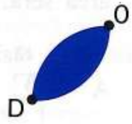
De (i) e (ii) conclui-se que:

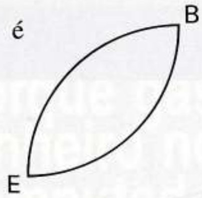
$\boxed{V = P}$

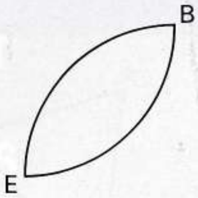
Cristina Rodrigues

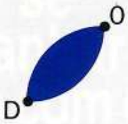
«Na homotetia de centro A e razão 2, a imagem do círculo de centro em C e raio [CO] é o círculo de centro em O e raio [OB], este com o quádruplo da área daquele.



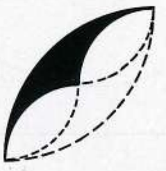
Na mesma homotetia, a imagem de 

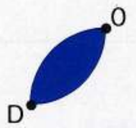
é 

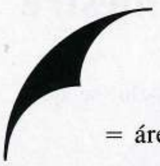
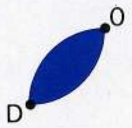
Atendendo a que a área de 

= 4 × área de 

conclui-se que a área das partes preta e tracejada de



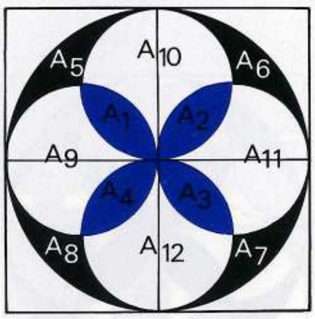
= 2 × área 

Então, a área de  = área de 

Logo, a área da zona a preto é igual à da zona «colorida».

António Pereira

1) Pretende-se saber a relação entre a área «colorida» (soma das áreas A_1, A_2, A_3, A_4) e a área a preto (soma das áreas A_5, A_6, A_7, A_8).



2) Sendo r o raio da circunferência maior, então a sua área será:

$$A = \sum_{i=1}^{12} A_i = \pi r^2$$

3) A área de cada uma das circunferências menores é igual a $\frac{\pi r^2}{4}$.

4)
$$A_9 + A_1 + A_2 = \frac{\pi r^2}{4}$$
$$A_{10} + A_1 + A_3 = \frac{\pi r^2}{4}$$
$$A_{11} + A_2 + A_4 = \frac{\pi r^2}{4}$$
$$A_{12} + A_3 + A_4 = \frac{\pi r^2}{4}$$

somando

$$A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{12} + 2(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = \pi r^2$$

5) De (2) e (4) temos:

$$A = \sum_{i=1}^{12} A_i = A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{12} + 2(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

$$\Longleftrightarrow A_5 + A_6 + A_7 + A_8 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

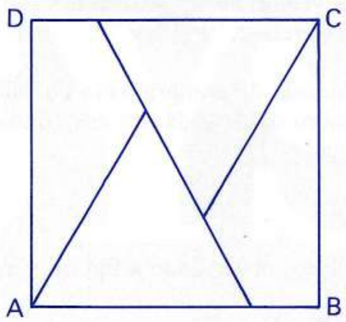
6) Área «colorida» = área a preto.

Mais problemas

J. S. Cabral (Esc. Sec. Amadora) enviou-nos, com o título «Sobre um problema de geometria...», uma resolução alternativa de uma das questões propostas este ano na 1.ª eliminatória das Olimpíadas Nacionais de Matemática, as VIII^as, na categoria B (destinada a alunos dos complementares).

A questão:

Na figura abaixo, [ABCD] é um quadrado. Os dois triângulos indicados são ambos equiláteros e os seus lados medem 1. Quanto mede o lado do quadrado?



A justificação de J. S. Cabral:

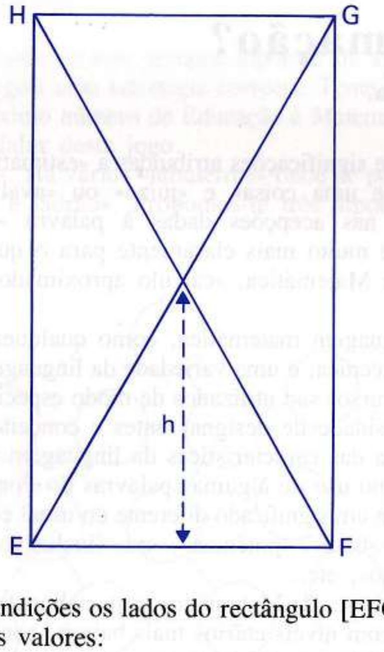
«As 'sugestões' para a resolução deste problema indicam duas soluções: uma, envolvendo conhecimentos de Trigonometria e a outra envolvendo conhecimentos de Geometria Analítica.

Julgo que a resolução de qualquer problema se torna tanto mais 'interessante' quanto mais simples forem os métodos usados, ou, por outras palavras, quanto mais rudimentares forem os conhecimentos necessários para a sua resolução.

Seguindo esta orientação, procurou-se um processo que estivesse ao alcance de um aluno do 9.º Ano de Escolaridade, isto é, sem utilizar nem Trigonometria nem Geometria Analítica».

E a sua alternativa de solução:

«Coloquemos inicialmente os dois triângulos equiláteros de lado 1 como se indica na figura:



Nestas condições os lados do rectângulo [EFGH] têm os seguintes valores:

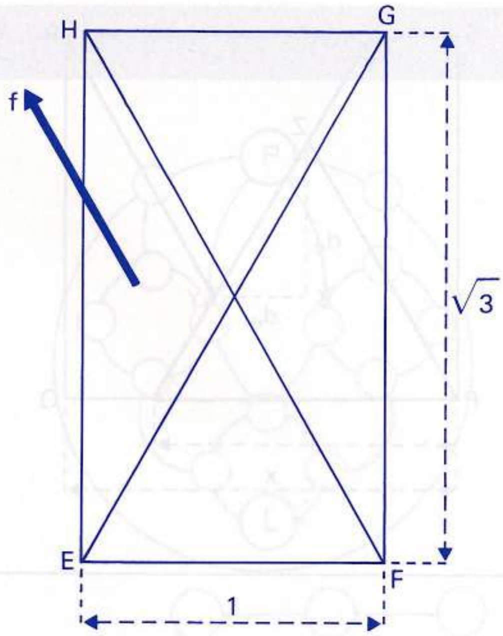
lado [EF]: $\overline{EF} = 1$ por ser o lado do triângulo equilátero dado;

lado [EH]: o valor deste lado será o dobro da altura do triângulo equilátero de lado 1, ou seja, de:

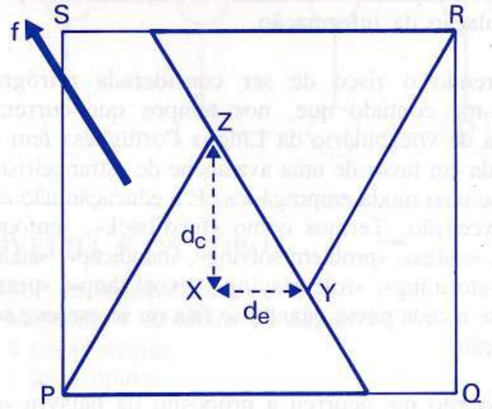
$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então $\overline{EH} = 2h = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

A figura será então:



Vamos agora fazer «deslizar» o triângulo inferior no sentido da flecha f; ele será deslocado simultaneamente para a esquerda e para cima de forma a obter-se a figura:



que se pretende que seja um quadrado, ou, por outras palavras, que seja:

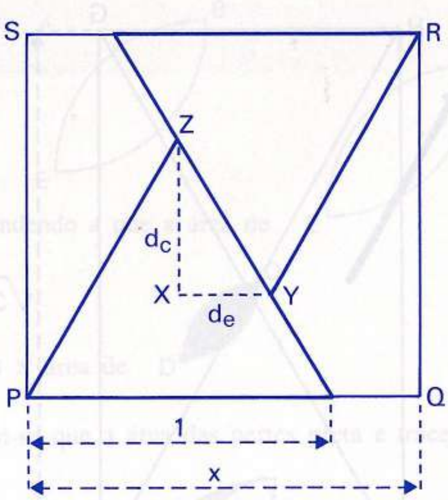
$$\overline{PQ} = \overline{PS}$$

Designando por d_e a deslocação para a esquerda (ver figura), a deslocação para cima, d_c, será:

$$d_c = \sqrt{(2d_e)^2 - d_e^2} = \sqrt{3}\, d_e$$

Seja x o valor do lado do quadrado, isto é, o valor a determinar.

A figura é agora desenhada da seguinte forma:



Ora, $\overline{XY} = x - 1$ (é a deslocação para a esquerda, d_e) e $\overline{XZ} = \sqrt{3}\,(x - 1)$ (porque $d_c = \sqrt{3}\, d_e$)

Então será $\overline{PS} = \sqrt{3} - \sqrt{3}\ (x - 1)$ (altura inicial menos $\overline{XZ}$)

Portanto $x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\ (x - 1)$
ou

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$$

Ao nível do 9.º Ano de Escolaridade o resultado estava encontrado.

No entanto, pode-se ainda escrever:

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$x = 3 - \sqrt{3}\ .»$$

Estimativa? Estimação?

Uma questão linguística.

Uma língua viva, como a própria expressão sugere, não pode estagnar. A sua evolução é consequência da criatividade dos falantes e de influências exteriores tanto mais fortes quanto mais fáceis são as comunicações e a circulação da informação.

Correndo o risco de ser considerada retrógrada, parece-me contudo que, nos tempos que correm, a riqueza de vocabulário da Língua Portuguesa tem sido preterida em favor de uma avalanche de estrangeirismos. É quase uma moda empregá-los. E a educação não constitui excepção. Termos como «feed-back», «enfoque», «skill», «status», «problem-solving», «handicap», «atelier», «brain-storming», «role playing», «workshop», «praxis», usam-se a cada passo quando se fala ou se escreve sobre Educação.

Tudo isto me ocorreu a propósito da palavra «estimação». Não se trata, é claro, de um estrangeirismo mas quase. Só ultimamente se usa «estimação» com tanta ou mais frequência do que «estimativa» e isso deve-se, penso, ao termo inglês «estimation». Como «estimação» me lembra logo o Tareco lá de casa a fazer rom-rom no nosso colo, consultei o dicionário para aclarar ideias. E então o dicionário diz assim:

Estimação — o mesmo que estima; apreciação de uma coisa.

Estimativa — cálculo aproximado; juízo; avaliação; cálculo; consideração.

Como era de esperar, pois são palavras com a mesma raíz, dão-se significações para «estimação» que se aproximam de significações atribuídas a «estimativa«: «apreciação de uma coisa» e «juízo» ou «avaliação». No entanto, nas acepções dadas à palavra «estimativa» aponta-se muito mais claramente para o que nos interessa em Matemática: «cálculo aproximado».

A linguagem matemática, como qualquer outra linguagem técnica, é uma variedade da linguagem corrente cujos recursos são utilizados de modo especial, em face da necessidade de designar entes e conceitos específicos. Uma das características da linguagem matemática consiste no uso de algumas palavras do Português corrente com um significado diferente do usual como «anel», «corpo», «base», «potência», «ou» (inclusivo), «primo», «aplicação», etc..
Os professores de Matemática, especialmente os que trabalham com níveis etários mais baixos, conhecem bem a dificuldade adicional que esta característica acarreta. Porquê então usar, desnecessariamente, palavras que conduzam a ambiguidades?

Eu opto por ESTIMATIVA!

Licínia Pereira Lima Brandão Costa

Referências:

Florido, M.B. e Silva, E.D. — *Novos caminhos para a Linguagem*, Porto Editora, 1981.

Machado, José Pedro, coord. — *Grande Dicionário da Língua Portuguesa*, vol. IV, Lisboa, Amigos do Livro Editores, 1981.

Para este trimestre aqui vão duas propostas de jogos de perseguição.

POLÍCIA E LADRÃO

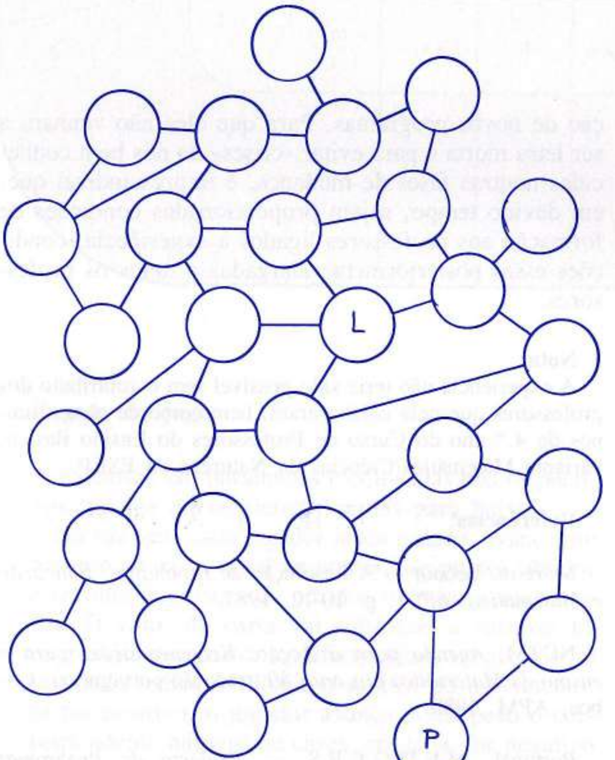
N.º de jogadores: 2
Material: tabuleiro
2 marcas diferentes (uma representa o polícia e outra o ladrão).
Regras: A marca do polícia é colocada na casa P e a do ladrão na casa L.

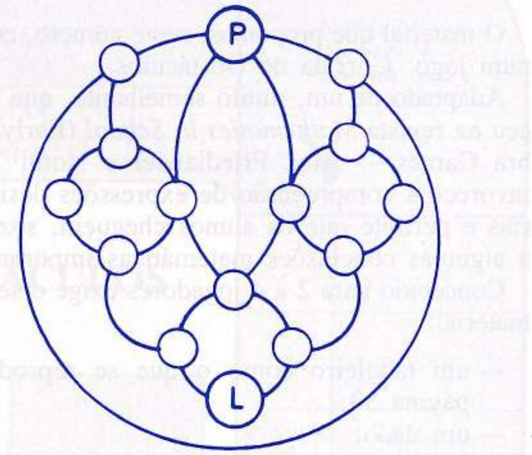
Os jogadores jogam alternadamente, movendo a respectiva marca para uma das casas vizinhas, seguindo uma das linhas do percurso.

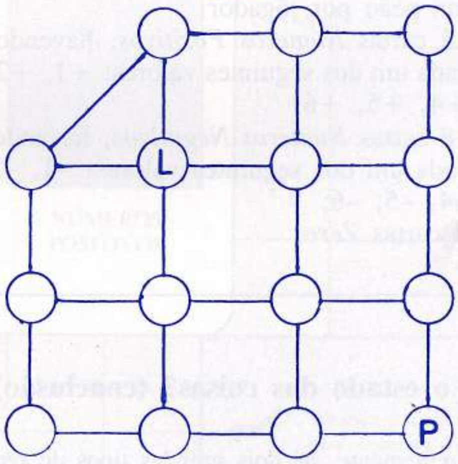
O polícia é o primeiro a jogar e o seu objectivo é «agarrar» o ladrão. É evidente que o ladrão tenta não ser apanhado.

Nota: O polícia tem sempre hipótese de apanhar o ladrão se seguir uma estratégia correcta. Tenta descobri-la. No próximo número de Educação e Matemática voltaremos a falar deste jogo.

Variantes: Há vários «tabuleiros» onde se pode jogar ao «polícia e ladrão». Propomos-te três hipóteses.







A OVELHA E OS LOBOS

N.º de jogadores: 2
Material: tabuleiro de damas
4 peças negras
1 peça branca

Regras: Um jogador tem a peça branca (ovelha) e o outro 4 negras (lobos).

À partida, os lobos ocupam as quatro casas pretas da primeira linha horizontal do tabuleiro e a ovelha está numa das casas pretas da oitava linha horizontal.

As peças movem-se sempre em diagonal para uma das casas vizinhas. Os lobos apenas podem avançar. A ovelha tanto pode andar para a frente como para trás. O objectivo dos lobos é cercar a ovelha de modo a impedi-la de jogar. A ovelha pretende escapar ao cerco.

Pergunta: Conseguirá algum dos jogadores ganhar sempre? Se sim, qual?

Paula Teixeira, Rita Vieira, José Paulo Viana

Materiais para a aula de Matemática

O material que propomos, neste número, consiste num jogo: Corrida de Obstáculos.

Adaptado de um, muito semelhante, que apareceu na revista *Mathematics in School* (Early Algebra Games — Alex Friedlander e Nomi Taizi), favorece a compreensão de expressões designatórias e permite que os alunos cheguem, sozinhos, a algumas conclusões matemáticas importantes.

Concebido para 2 a 4 jogadores exige o seguinte material:

- um tabuleiro como o que se reproduz na página 33;
- um dado;
- um peão por jogador;
- 18 cartas *Números Positivos*, havendo 3 de cada um dos seguintes valores: +1, +2, +3, +4, +5, +6;
- 18 cartas *Números Negativos*, havendo 3 de cada um dos seguintes valores: –1, –2, –3, –4, –5, –6;
- 5 cartas *Zero*.

Jogado nas turmas do 7.º ano de escolaridade, teve bastante sucesso entre todos os alunos. Como para os alunos deste nível de escolaridade os números racionais ainda são «novidade», inicialmente, as opções feitas, em cada jogada, entre negativo — zero — positivo, nem sempre foram as melhores.

Em geral, a casa **–(1 – x)** foi considerada «difícil». Outras casas conduziram a generalizações, como conta o Gil Coutinho do 7.º A:

«Em certas casas, tive algumas dificuldades que, só depois de jogar uma vez, as consegui resolver.

Por exemplo: nas casas **y-y-1** *e* **–z/z** *anda-se sempre uma cada para trás.*

Já na casa **2m/m** *anda-se sempre duas casas para a frente e na casa* **1/1/n** *o resultado da expressão designatória é o valor da incógnita (sem escolher zero).*

Teresa Barandela
Esc. Sec. Fontes Pereira de Melo

Qual o estado das coisas? (conclusão)

Aparentemente, há dois grandes tipos de reacções:

— O aluno considera o «problema» disparatado mas, apesar disso, «resolve-o».

— O aluno não dá importância à falta de coerência lógica do enunciado, ou seja, à relação entre os dados e a questão posta. Reconhece no enunciado uma certa «forma» e lança-se na «resolução».

O mais importante é verificar que, em ambas as hipóteses, os alunos «resolvem» o problema. E isto porquê? Porque os problemas que o professor propõe são sempre para resolver e encontra-se a solução fazendo umas contas com os dados que aparecem no enunciado. Tudo o resto é «feitio». Então, mais uma vez, os alunos corresponderam àquilo que se costuma esperar deles!

Ora os projectos de novos programas não trazem uma varinha de condão que faça com que, de um momento para o outro, se alterem velhos e arreigados hábitos, perspectivas, metodologias. Por isso nos preocupa o modo como serão (ou estão já a ser) experimentados, avaliados e posteriormente utilizados generalizadamente.

É necessário que se encare com muito optimismo mas também com muito sentido da realidade, a implementação de novos programas. Para que eles não venham a ser letra morta e para evitar «crises» de nós bem conhecidas noutras fases de mudança, é imprescindível que, em devido tempo, sejam proporcionadas condições de formação aos professores ligados à experiência, condições essas posteriormente alargadas a todos os professores.

Nota:

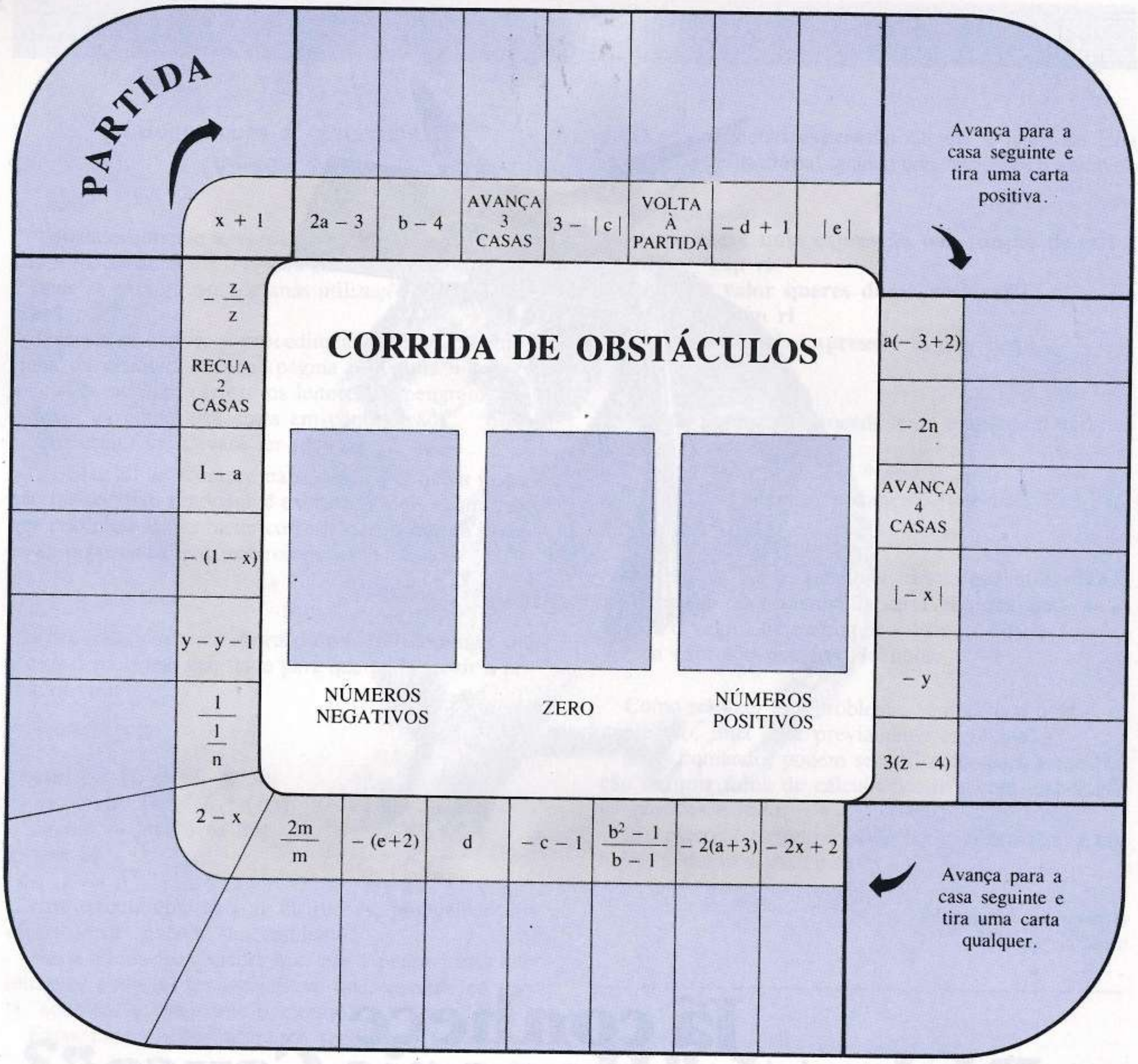
A experiência não teria sido possível sem o contributo dos professores que nela colaboraram, bem como de alguns alunos do 4.º ano do Curso de Professores do Ensino Básico, variante Matemática/Ciências da Natureza da ESEP.

Referências:

Moreira, Leonor — A Resolução de Problemas, *Educação e Matemática*, n.º 1, p. 10-12, 1987.

NCTM, *Agenda para a Acção: Recomendações para o ensino da Matemática nos anos 80* (tradução portuguesa), Lisboa, APM, 1980.

Portugal, M.E.D.G.E.B.S. — *Projecto de Programa: Ensino Básico 1.º, 2.º, 3.º ciclos: Matemática: Documento elaborado para recolha de parecer*, Set. 1989.



Regras do jogo

As cartas são baralhadas e colocadas nos respectivos lugares do tabuleiro, viradas para baixo.

Na sua vez, cada jogador lança o dado, avança um número de casas igual ao número de pontos obtidos e recolhe uma carta de um dos montes, à sua escolha. O valor da carta vai substituir a variável na expressão designatória. Efectuados os cálculos, o resultado indica o valor e o sentido do movimento: se for positivo, o jogador avança o seu peão o correspondente número de casas; recua se for negativo e se for zero não se desloca.

Se o peão cair numa casa que contenha uma instrução, o jogador deverá executá-la nessa mesma jogada.

Finalmente, sempre que um jogador escolha um número que anule o denominador da expressão designatória em causa, deve, como punição, regressar à casa de partida, perdendo assim o avanço que já tinha nessa volta (e só nessa).

O vencedor é o jogador que, primeiro, completar duas voltas.

Nota: caso algum dos três montes se esgote antes do fim do jogo, então as cartas respectivas devem ser novamente baralhadas e recolocadas no seu lugar.

Diálogos com a tartaruga?! (Versão 2.0)

Lamentavelmente a versão 1.0 deste artigo (Educação e Matemática n.º 11) saiu com um «bug» no ponto 2 onde se exploravam algumas utilizações da primitiva **Key?**

Quando se explica o procedimento **parar**, na última linha da primeira coluna (página 30), falta a palavra «não», como com certeza os leitores suspeitaram, pois o texto tal como está entra em contradição.

Correctamente deverá ler-se:

...«Mas tal só acontece na segunda vez que a instrução **make "lixo readchar** é executada, pois na primeira vez **readchar** lê o carácter correspondente à tecla já premida e portanto *não* interrompe nada.»...

*

* *

Continuando o tema abordado no referido artigo tentemos descobrir o que faz e para que pode servir a primitiva **run**:

Experimente:

```
run [fd 60 rt 90 fd 30]
show run [4 + 5 * (-1)]
make "a [rt 90 fd 80]
run :a
```

run executa uma lista de instruções, produzindo um efeito ou devolvendo um resultado.

Nesta altura com certeza que está a pensar: mas que interesse pode ter uma primitiva que, estando ou não lá, acontece exactamente o mesmo?!

Experimente o procedimento seguinte:

```
to efeitos
rg
make "lista [fd rt setc]
repeat 50
[make "primitiva item 1 + random 3 :lista
make "input random 180
make "instrução list :primitiva :input
run :instrução
wait 20]
end
```

Mande executar este procedimento. Não é engraçado? Mas **run** é um auxiliar precioso na construção de procedimentos interactivos.

Vejamos um exemplo que poderá animar os menos adeptos dos «bonecos da tartaruga». Ensinemos-lhe álgebra e ela tornar-se-á um respeitável animalzinho!

O procedimento **expressão** calcula o valor de uma expressão designatória, quando concretizamos a variável:

```
to expressão
pr [Escreve uma expressão (em função de :x)]
make "exp rl
pr [Que valor queres dar à variável?]
make "x run rl
(pr [O valor da expressão é] run :exp)
end
```

Mande executar o procedimento e atribua à variável valores do tipo:

2, 3.14, 3/4, sqrt 5, 2 * sqrt 5, etc.

Como é que este procedimento funciona? Fica para vocês pensarem!

A verdade é que funciona, desde que utilizemos a mesma letra para o nome da variável global onde guardamos o valor que queremos substituir e para a variável da expresão que introduzimos.

Como resolver este problema, sem obrigar a usar, na expressão, uma letra previamente escolhida?

Estes comandos podem ser utilizados para a construção de uma folha de cálculo pessoal, com elaboração de gráficos e tudo.

Eis como a tartaruga pode fazer concorrência aos todos poderosos utilitários!

Margarida Junqueira
Sérgio Valente

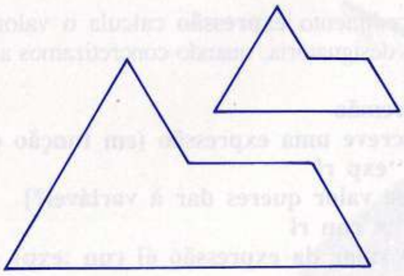
Seleccionámos (conclusão)

nassem os seus estudos. Quanto mais matemática os alunos possam ter nos seus estudos, mais opções virão a ter no futuro.

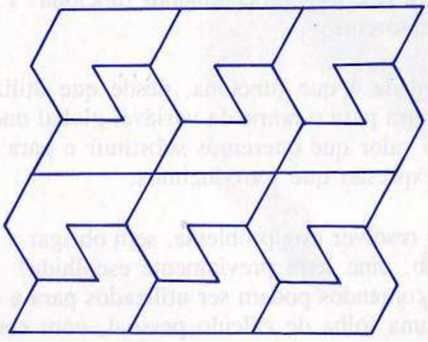
Na nossa sociedade, as desigualdades sexuais e raciais em empregos, ordenados e frequência de cursos, em que a Matemática é necessária, são frequentes. Para conseguir uma sociedade equilibrada no próximo século, devemos abolir, neste século, as desigualdades em educação matemática. Trabalhando conjuntamente, com grandes expectativas em relação a todos, poderemos oferecer aos nossos alunos uma educação que lhes abra caminhos para a sua realização no séc. XXI.

Tradução de Lina Fonseca e Pedro Palhares
Revisão de Leonor Moreira

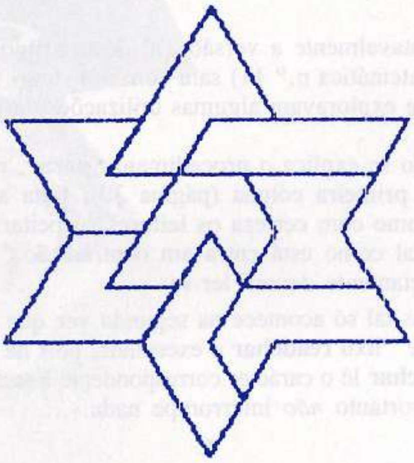
Hexatris (conclusão)



Segue-se um exemplo de pavimentação.



Como actividade suplementar, pode-se também desafiar os alunos a construírem uma estrela de seis pontas com oito dos Hexatris.



E aguarde-se pelas surpresas que um conjunto de actividades deste tipo sempre proporciona!

Leonor Moreira

Bibliografia

Martin, K. et al. (1986). Hexiamonds. *The Computing Teacher*, Vol. 14, n.º 3, pp. 32-36.

Fibonacci (conclusão)

sucessão infinita. É como quando assistimos constantemente à ultrapassagem de novos recordes desportivos: quem nunca pensou que, a continuarem assim, os atletas de corrida, por exemplo, que conseguem demorar cada vez menos tempo, um dia destes não demoram mesmo tempo nenhum? Ou, caso ainda mais extremo, atingem a meta antes de partir? É, confessêmo-lo, uma hipótese divertida, embora perfeitamente inverosímil. A verdade é que a matemática produziu um conceito que nos diz que não é assim: é a noção de limite assimptótico que, se não estou em erro, é o limite para o qual tende uma progressão interminável, não sendo no entanto nunca atingido. Assim, é fácil de perceber que na sucessão 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; etc., o limite assimptótico será 1, que nunca será atingido (é sempre possível acrescentar mais um 9 à direita dos que já lá estão...); igualmente numa sucessão de polígonos (polígono de três lados, polígono de 4 lados, e de 5, de 6,..., de 10, ..., de 20, ..., etc.), inscritos numa circunferência, esta será o respectivo limite assimptótico, não havendo nunca completa coincidência entre a sua linha e a dos polígonos, aos quais é sempre possível acrescentar mais um lado...

Nota:

No ano de 1987/88 surgiu no Plano de Formação da Escola Sec. n.º 1 da Marinha Grande uma acção intitulada «O lado humano da Matemática» dinamizada por uma professora de Matemática (Isabel Azevedo Rocha) e outra de Português (Margarida Font Amado). O objectivo era contribuir para a diminuição do insucesso na Matemática, ajudando a modificar atitudes de professores de outras áreas (especialmente de Letras...), em relação à Matemática. Por outro lado tentava-se esboçar um trabalho de tipo interdisciplinar e de «investigação colaborante» entre professores de áreas aparentemente tão distintas.

Realizaram-se, nesse ano e nos seguintes, 3 sessões todas obedecendo a este objectivo e destinadas a um público de professores de formações diversas; o artigo que aqui se publica é a transcrição de parte da referida sessão subordinada ao tema «Infinito».

91·92

MATEMÁTICA

5.º ANO
MATEMÁTICA 5

6.º ANO
MATEMÁTICA 6

Leonor Filipe
Leonor Moreira

5.º ANO
MATEMATICANDO

6.º ANO
MATEMATICANDO

5.º/6.º ANOS
MATEMATICANDO
Problemas

2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO
MATEMÁTICA
Curso Nocturno

Isabel Moura
Cristina Loureiro
Maria José Delgado
M.ª José Correia de Oliveira

O NOVO M 7,
O NOVO M 8
O NOVO M 9

ACTIVIDADES
O NOVO M 7, M 8 e M 9

Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

O NOVO M 10
O NOVO M 11

Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

M 12

Armando Machado
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

EXERCÍCIOS
M 10, M 11 E M 12

Inês dos Santos
Judite Barros
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

MATERIAL DIDÁCTICO PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

COLECÇÃO DE TRANSPARÊNCIAS — 7.º, 8.º e 9.º anos

SOFTWARE
Equações / Núm. Int. Relativos — 7.º ano
Utilidades I — 7.º ano
Geometria Analítica — 10.º ano
Gráficos de Funções — 10.º/11.º anos

CONHEÇA AS NOSSAS PUBLICAÇÕES
CONSULTE O NOSSO CATÁLOGO

ÍNDICE