

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

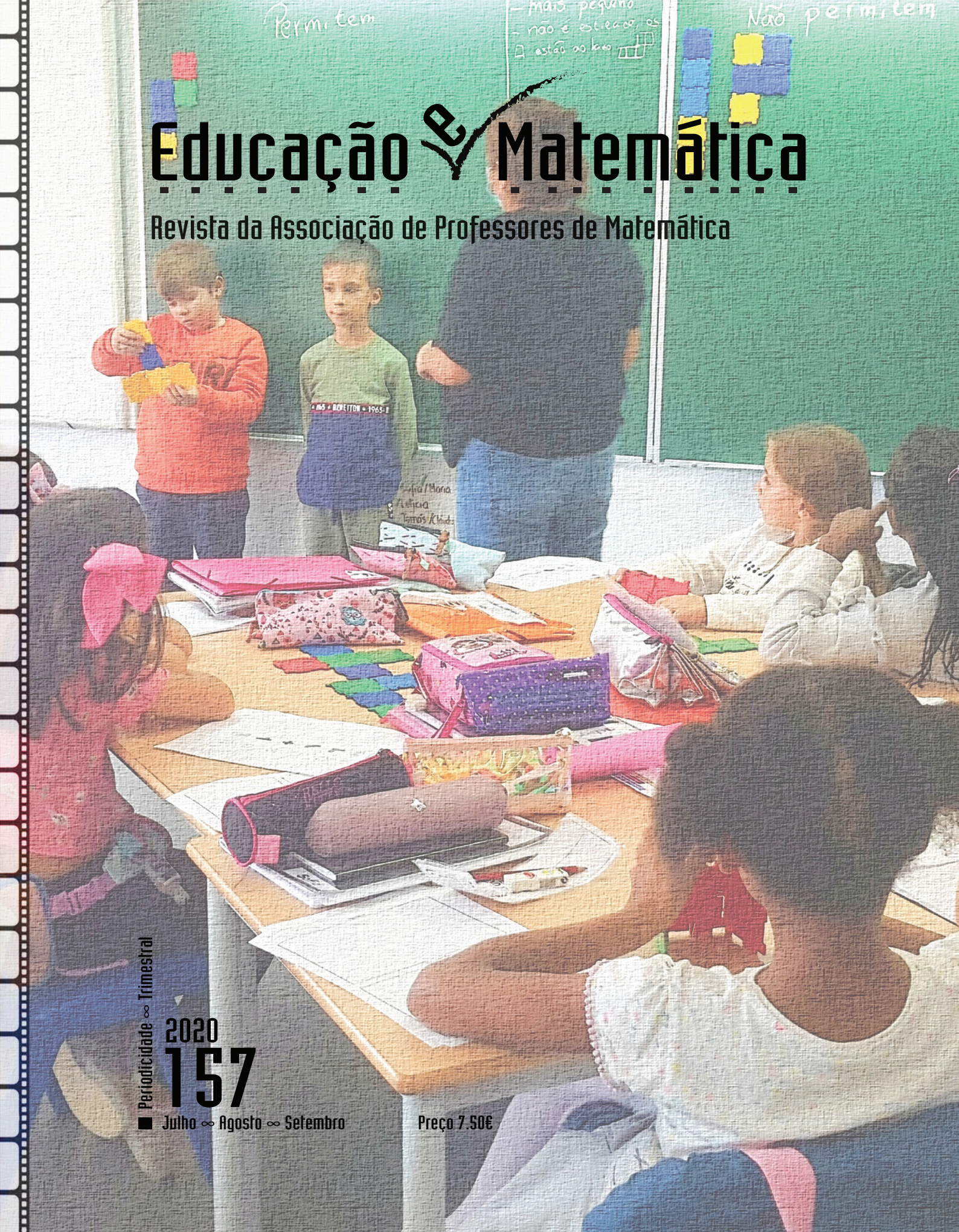
Periodicidade ∞ Trimestral

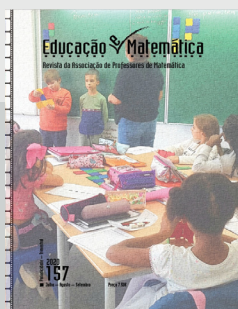
2020

157

Julho ∞ Agosto ∞ Setembro

Preço 7.50€





EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Editores	Ana Isabel Silvestre
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Elvira Santos
	Filipa Machado
	Helena Gil Guerreiro
	Irene Segurado
	João Terroso
	Manuela Pires
	Silvia Zuzarte
	Teresa Olga Duarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Setembro de 2020

Tiragem 1000 exemplares

Periodicidade Trimestral

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

As razões invocadas para o regresso à sala de aula dos alunos, de todos os níveis de ensino, em tempos de pandemia, com o cumprimento rigoroso de todas as regras de segurança, definidas pela Direção-Geral da Saúde, para além dos aspetos sempre presentes do crescimento e desenvolvimento proporcionados pela interação física e emocional no micromundo que é a escola têm/deve ter também presente a necessidade de, como refere Ana Paula Canavarro, no editorial, “proporcionar aos alunos o seu desenvolvimento com múltiplas aprendizagens de qualidade”.

Os professores estão assim perante um novo desafio de conciliar as regras de segurança com a gestão de espaços e implementação de estratégias que considerem os diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos, investindo na capacidade de inovar anulando as limitações pedagógicas impostas pela ainda existente e resistente “sala em autocarro”.

Mário Baía

Neste número também colaboraram

Ana Isabel Cunha, Ana Isabel Desterro, Ana Paula Canavarro, Anabela Gaio, António Domingos, Cristina Cruchinho, Elvira Ferreira, Hélia Jacinto, Joaquim Félix, Lina Brunheira, Manuela Gabriel, Manuela Subtil, Maria José Carvalho, Marta Caseiro, Nélia Amado, Nuno Inácio, Paula Diogo, Paulo Almeida, Paulo Correia, Sílvia Zuzarte, Sónia Mendes, Susana Almeida, Susana Brito, Susana Carreira, Susana Silva e Vânia Mateus.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.
- Pela relevância das cores nalguns artigos deste número, a sua versão digital disponibilizada aos sócios no site da APM será publicada a cores.

Resistir e investir

O início do ano escolar de 2020/21 iniciou-se de forma presencial e assim está previsto que continue enquanto a pandemia o deixar. Boas e diversas razões foram convocadas para esta opção e as escolas prepararam-se para criar condições que permitam a habitabilidade conjunta dos espaços. Na medida do possível, delimitaram-se espaços, descruzaram-se horários, orientaram-se setas, regularam-se normas estritas de ação e convivência, constituindo-se uma nova normalidade que em muito contraria o que marca a escola que todos conhecemos. Este esforço organizativo, que envolveu muito tempo e energia, tem, como propósito vital, resistir — o resistir ao vírus no espaço da escola, o resistir da própria escola.

Mas se resistir é vital, nestes tempos de desconcerto não podemos prescindir de uma reflexão atenta sobre as implicações da nova normalidade da sala de aula no que mais importa na escola: proporcionar aos alunos o seu desenvolvimento, com múltiplas aprendizagens de qualidade. A título de exemplo, interrogo os efeitos das regras relativas à atual logística que têm a ver com a arrumação dos alunos nas salas e com a partilha de materiais. Nas múltiplas reportagens que as televisões transmitiram em setembro, abundaram as imagens das salas imaculadamente organizadas em filas, com carteiras individuais isometricamente colocadas. O modelo das carteiras alinhadas (ao qual ouvimos chamar de “sala em autocarro”), que senta os alunos em posições fixas, nas quais dão as costas uns aos outros e a cara ao professor, incorpora implicitamente um modelo de ensino que a escola praticou durante décadas: um ensino de natureza expositiva. Este modelo de sala de aula, acrescido da recomendação ao professor de que restrinja a sua circulação ao espaço mínimo em frente ao quadro, coaduna-se bem com a dinâmica de aula em que o professor transmite e os alunos rececionam, em que as tarefas são realizadas em trabalho individual pelo aluno e corrigidas no quadro exclusivamente pelo professor, pois a partilha de materiais (giz, apagador, folhas ...) também é de evitar a todo o custo ou até mesmo proibida. Que implicações aporta este modelo para a natureza das aprendizagens dos alunos? De que forma este modelo se pode compatibilizar com o desenvolvimento das aprendizagens essenciais que a escola tem de proporcionar aos alunos, nomeadamente em Matemática? Poder-se-á passar todo um ano letivo a trabalhar neste modelo?

Estas são algumas interrogações genuínas que me parecem, ao lado de outras, dever ser equacionadas com vista à regulação das regras que condicionam o trabalho no período que se irá seguir, passados os receios dos tempos iniciais e conquistada

a confiança possível — isto numa perspetiva otimista, claro. A escola atual está mais exigente do que nunca e muito há que cuidar. Se é verdade que é preciso respeitar a etiqueta respiratória, é igualmente preciso respeitar a etiqueta do aprender — e se a primeira valoriza o distanciamento no individual, a segunda valoriza as interações no coletivo. As aprendizagens dos alunos são socialmente mediadas e requerem uma abordagem dialógica, quer pela natureza do processo de aprendizagem, quer pela natureza dos objetos que a aprendizagem deve focar, quer ainda pelas atitudes que, em simultâneo, há a promover.

Nos meses que se seguem, é fundamental que os professores possam investir o seu espírito crítico e criatividade no ensaio de estratégias que favoreçam aprendizagens em sintonia com tudo o que se espera que os alunos aprendam, contornando os obstáculos que a logística potencialmente gera. É verdade que a “sala em autocarro” não inviabiliza a realização de discussões plenárias, feitas no coletivo, a partir de trabalho realizado individualmente pelos alunos, mas tem dificuldades e limitações no seu alcance, nomeadamente a de incluir todos os alunos ou a de potenciar plenamente o desenvolvimento da resolução de problemas ou do raciocínio matemático. É importante pensar o espaço-aula de modo a admitir estratégias diferenciadas de trabalho, em especial o trabalho de grupo, imprescindível para a exploração de tarefas desafiantes que se enriquecem com a discussão das ideias entre os alunos do grupo, com a produção coletiva de uma resolução do grupo, com a escolha conjunta de como bem representar o que pensou o grupo, com a decisão do grupo sobre os argumentos a usar para explicar à turma o seu trabalho.

Apesar de os tempos em que vivemos serem marcados pelo provisório, prevê-se que 2021/22 possa iniciar-se com novos documentos curriculares, em sintonia com as *Recomendações para a Melhoria das Aprendizagens dos Alunos em Matemática*, da autoria do Grupo de Trabalho em Matemática, recentemente publicadas na página eletrónica da Direção-Geral da Educação. Esta revisão curricular definirá, de forma independente e com desenvolvimento adequado, as aprendizagens essenciais a realizar por todos os alunos no Ensino Básico e no Secundário. Além disso, as novas orientações curriculares serão acompanhadas pelo apoio ao trabalho dos professores nas escolas, com uma aposta em dinâmicas colaborativas. Temos, pois, boas expectativas para resistir e investir.

ANA PAULA CANAVARRO
UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Avaliação externa em tempos estranhos - entranha-se alguma coisa?

Quando, a 15 de março, as aulas presenciais desapareceram, em muitos de nós, professores e alunos, a par de várias preocupações, os exames logo começaram a ser uma das maiores!

O E&D começou e a constatação de que muitos iriam ficar para trás, na quantidade e na qualidade das aprendizagens que era possível ir desenvolvendo, assolava-nos a consciência.

Em abril e maio foram tomadas decisões, sobre a avaliação externa, de carácter excepcional, como não poderia ter deixado de acontecer.

A prova final do 3.º ciclo (exame de 9.º ano) não se realizou. Fez falta? Irá a sua ausência fazer-se sentir nos alunos que ingressam agora no 10.º ano? Alguma vez o desempenho dos alunos no 10.º ano foi diferenciado em função da sua prestação nesta prova? Que correlação existe entre a classificação no exame e as avaliações no 10.º ano? É positiva com certeza, mas é forte? Ou precisamos enquanto sociedade de um exame apenas para “enquadrar” o trabalho dos professores e “credibilizar” o sistema perante uma opinião publicada que gosta sempre de saborear algumas gotas de sangue?

Quanto ao ensino secundário, continuaram a existir os três exames de Matemática. A solução encontrada porventura não poderia ter sido muito diferente. As provas estavam feitas e qualquer alteração corria sempre o risco de pôr em causa o seu equilíbrio. Por outro lado a gestão do programa não é feita de forma uniforme em todas as escolas e por isso não se poderia garantir o que, até ao início do E@D, tinha ou não sido trabalhado com os alunos, apesar de ainda termos voltado à escola para um mês de ensino presencial. A opção incidu assim sobre a forma como a classificação da prova foi obtida.

Não sendo agora possível distinguir entre alunos internos e alunos externos, podemos considerar que os resultados não tiveram alterações significativas em Matemática B e em MACS. Já em Matemática A os resultados foram claramente superiores, sendo de 19 valores a moda das classificações da 1ª fase e a média subiu para 13,3 valores. Foi o bastante para logo aparecer gente com um *“aqui-del rei” que o facilitismo está de volta...* sem saber sobre o que falavam ou o que escreviam.

De facto, mais alunos concluíram o ensino secundário porque não estiveram dependentes dos exames para isso. A consequência imediata foi o aumento, desejável sempre, do número de candidatos ao ensino superior. Por outro lado, todos os alunos realizaram provas como autopropostos. Por isso só realizou exames quem porventura não tinha avaliação interna para aprovar na disciplina (não sabemos que percentagem, mas não serão mais que uns 15 a 20%) ou aqueles que eventualmente contariam com as provas especificamente para o concurso de acesso ao ensino superior. Matemática A é a mais requerida como prova específica. Repare-se que, este ano, realizaram a

prova menos 10000 estudantes que no ano transacto – cerca de 22% menos do que em 2019 (*). A maioria significativa dos que realizaram esta prova, realizaram-na, porque quiseram e estariam, pois, razoavelmente bem preparados para isso.

Quem classificou provas de Matemática A, como nós, constatou que as classificações “negativas” (inferiores a 9,5 valores) pareceram revelar estudantes que efetivamente não adquiriram conhecimentos fundamentais e estruturantes. Já quanto às classificações mais elevadas, fomos surpreendidos com algumas delas – vinte valores? Alguns vintes, na verdade, não correspondiam a provas de 20, com respostas às vezes completamente estranhas em alguns itens, mas que não contribuíam para a classificação da prova. Outros sim – eram provas resolvidas completamente de forma correta. Também algumas das provas obtiveram razoáveis classificações com pouco mais do que os itens de escolha múltipla resolvidos correctamente.

Baixada a poeira, algumas velhas questões merecem que voltemos a elas e outras novas que as olhemos de outros ângulos.

Os exames são reguladores ou espartilhos das aprendizagens?

Para que serve o exame do 9.º ano?

Continua a fazer sentido fazer do ensino secundário um refém do acesso ao ensino superior? Estamos em condições de autonomizar completamente um do outro? É possível encontrar um sistema de acesso justo, que valorize as competências dos estudantes candidatos, mas que ao mesmo tempo não deixe à sua mercê aqueles que só dependem do que a escola pública lhes pode e consegue proporcionar?

Enquanto prova específica para acesso ao ensino superior, nas condições em que actualmente é utilizada, não é relevante que provas com níveis de desempenho diferentes tenham a mesma classificação?

Mas, *a contrario*, com exames a contribuírem para a formação da classificação final de disciplinas no ensino secundário, ciclo terminal da escolaridade obrigatória, não será justo um sistema de classificação que valorize, num conjunto de itens, o melhor que os alunos conseguem fazer?

Enfim, pode ser que estes tempos estranhos e estas medidas excepcionais façam refletir e repensar um conjunto de ideias que tendem a sacralizar-se no nosso sistema de ensino.

Pense nisto!

CRISTINA CRUCHINHO

ESC. SEC. FILIPA DE VILHENA - PORTO

JOAQUIM FÉLIX

AE GABRIEL PEREIRA - ÉVORA

(*) Dados consultados nos relatórios do Júri Nacional de Exames disponíveis em <https://www.dge.mec.pt/relatoriosestatisticas-0> (consultado a 2/09/2020)

Pequenos projetos com grandes resultados: criatividade, autonomia e empenho

NÉLIA AMADO

SUSANA CARREIRA

Os sistemas educativos debatem-se frequentemente com enormes dificuldades em transpor para a prática as mudanças desejadas. Entre vários fatores que podem justificar a dificuldade de traduzir diretrizes globais em práticas efetivas estão as conhecidas oscilações pendulares, verificadas periodicamente um pouco por todo o mundo, que levam ao alinhamento alternado dos programas curriculares e orientações oficiais com perspetivas educacionais distintas e visivelmente antagónicas. Exemplos dessa discussão, no que diz respeito à educação matemática, podem encontrar-se em English & Sriraman (2010) e Van den Heuvel-Panhuizen (2010).

Em Portugal, vive-se no presente uma circunstância algo peculiar quanto a orientações curriculares. De facto, as normas curriculares encontram-se fragmentadas e dispersas, bem como desconectadas, além de refletirem perspetivas educacionais contraditórias. Neste cenário, é provável que o sistema reaja sensivelmente a diversas condições iniciais, das quais consideramos relevantes: as visões dos professores sobre as mudanças preconizadas, as suas práticas de sala de aula e a forma como interpretam e realizam processos de inovação curricular.

Neste contexto é necessário adotar estratégias que apoiem os professores na implementação destas medidas em sala de aula. Na Região Autónoma dos Açores, a Secretaria Regional de Educação e Cultura deu início, em 2018/19, a um Plano de Formação e Acompanhamento Pedagógico de Docentes da Educação Básica (PFAPDEB). Para tal foi constituída uma equipa de nove professores formadores, com experiência no 3.º ciclo do Ensino Básico, junto da qual temos desenvolvido o papel de coordenadoras científicas. Atendendo à dispersão geográfica do arquipélago dos Açores, os nove professores estão distribuídos por três núcleos: Pico, Terceira e S. Miguel. O Núcleo do Pico tem dois formadores, um dos quais dedicado exclusivamente ao projeto e uma professora a 50%, que acompanham as escolas do Pico, Faial, Flores e Corvo. O Núcleo da Terceira é composto por três professoras, com uma dedicação de 50% a este projeto, que acompanham os professores das escolas da Terceira, Graciosa e S. Jorge. Por fim, o núcleo de S. Miguel tem a seu cargo o maior número de professores de matemática do 3.º ciclo e conta com quatro formadoras, duas das quais com dedicação exclusiva a este projeto. Este núcleo acompanha os professores das escolas de S. Miguel e Sta. Maria.

As sessões de formação assumem dois formatos, em cada núcleo: sessões alargadas, com a totalidade dos professores envolvidos, e sessões que se realizam com grupos mais pequenos de professores.

As sessões alargadas, com a duração de 6 horas, são dinamizadas pelas coordenadoras científicas e envolvem todos os professores de cada núcleo. Estas sessões incluem duas partes: uma primeira em plenário e a segunda em pequenos grupos onde é proposta a realização de trabalho prático. Para as restantes sessões, cada um dos núcleos divide os professores em pequenos grupos de modo a facilitar o acompanhamento de cada grupo de professores ou de uma determinada escola. Estas sessões são conduzidas por dois formadores de cada núcleo e podem ter uma duração de duas ou três horas.

Todas as sessões de formação são preparadas, em conjunto, pela equipa de formadores e coordenadoras. Após uma reunião inicial na qual se decide e discute o tema a tratar, a equipa desenha uma proposta de planificação da sessão. No entanto, cada um dos núcleos procura adequar as tarefas, materiais e estratégias às suas realidades específicas. Um aspeto a que é dada grande importância em quase todas as sessões é a partilha de experiências de sala de aula por um conjunto de professores de uma determinada escola ou por alguns dos professores individualmente. Os professores são convidados a relatar e apresentar o processo de implementação em sala de aula de estratégias ou tarefas desenvolvidas na formação ou a descrever outras propostas e iniciativas que considerem relevantes para discutir com os colegas.

No primeiro ano, foram envolvidos os docentes de todas as escolas da região que lecionavam o 7.º ano de escolaridade. Em 2019/20, o programa foi alargado aos professores que lecionavam o 8.º ano. E no próximo ano letivo será alargado aos professores que lecionam o 9.º ano de escolaridade. O principal propósito desde plano é promover a mudança das práticas em sala de aula de acordo com as atuais recomendações curriculares. Este plano concilia um processo de formação contínua de professores, que se operacionaliza através de uma Oficina de Formação e decorre ao longo de cada ano letivo, com o acompanhamento em sala de aula dos professores que se mostram interessados em ter o apoio dos formadores na preparação e implementação de experiências didáticas nas suas aulas.

Os temas tratados na Oficina de Formação são escolhidos e planificados pela equipa, podendo em determinados momentos acolher propostas ou solicitações dos professores das escolas. Por exemplo, o tema da avaliação é frequentemente abordado a propósito das tarefas ou das propostas de trabalho que são discutidas. Ao longo destes dois anos de formação temos procurado, de forma integrada, articular a planificação de tarefas, com ou sem recurso às tecnologias, com práticas de avaliação. A título de exemplo, foram realizadas sessões sobre modelação matemática para o 7.º e 8.º ano de escolaridade em que foram discutidos alguns instrumentos de avaliação mais adequados a este tipo de tarefas. O trabalho de projeto foi um tema abordado com alguma profundidade numa sessão que se desenvolveu em dois momentos distintos. Para apoiar os professores neste tema foi ainda disponibilizada uma brochura com um conjunto de conceitos e ideias-chave e de sugestões práticas (Amado & Carreira, 2019a). Como resultado, foi desenvolvido um vasto conjunto de experiências de trabalho de projeto que envolveram os alunos de diversos professores envolvidos na Oficina de Formação, com especial destaque para iniciativas que tiveram lugar ao longo do período de confinamento.

Um outro tema que mereceu grande interesse por parte dos professores foram os Problemas de Fermi (Amado & Carreira, 2019b) que têm sido trabalhados e, sucessivamente, aperfeiçoados em diversas escolas e ilhas do arquipélago. Este tema tem dado origem a vários trabalhos de elevada qualidade realizados nos Açores, o que justificou a sua apresentação no EIEM 2019 (Amado, Carreira, Aroeira, Duarte, Pacheco, Morais, Freitas, Romano, Freitas, Valadão & Faria, 2019).

Em março de 2020, as medidas de confinamento e o consequente encerramento das escolas levou à interrupção das sessões presenciais de formação. A equipa do PFAPDEB procurou adaptar-se às mudanças e, consciente de que o acompanhamento aos professores neste novo contexto era uma prioridade, delineou estratégias para apoiar e ajudar os professores no ensino online. Neste artigo apresentamos os aspetos mais relevantes de um Trabalho de Projeto proposto pelo grupo dos professores de Matemática de uma escola de Angra do Heroísmo, onde uma das formadoras desta equipa é docente. A tarefa foi proposta no período de confinamento a todas as turmas do 7.º, 8.º e 9.º anos da escola, ou seja, a cerca de 120 alunos. O projeto envolveu ainda os respetivos professores de Educação Visual e Educação Tecnológica.

O PROJETO: A CASA À MINHA MEDIDA



Em período de confinamento o tema do projeto foi a casa que cada um idealizava. Os professores sugeriram aos alunos que pensassem na sua casa de sonho para criar um espaço à sua medida. Para tal, foram apresentados os seguintes objetivos:

- Construir uma maquete (esboço à escala de redução) que corresponda à divisão da casa que pretendes transformar.
- Selecionar, de forma adequada e criteriosa, os materiais a utilizar na construção das paredes e do chão do compartimento da casa e os materiais para o seu revestimento.
- Construir objetos a partir de planificações de sólidos e/ou reutilizar ou reciclar objetos do quotidiano.
- Utilizar e transformar as diversas figuras planas e os sólidos geométricos em elementos decorativos do espaço a recriar.
- Mobilizar conteúdos matemáticos para definir uma escala, calcular as áreas e os volumes dos objetos utilizados.

Não é difícil adivinhar que o espaço da casa que foi predominantemente escolhido pelos alunos foi o seu quarto, talvez por ser o espaço onde passaram a estar mais tempo neste período e também aquele com o qual se identificam mais. Devido ao facto de este projeto ter sido desenvolvido ao longo do período de confinamento, o trabalho foi realizado individualmente.

Para orientar os alunos na realização da tarefa foi enviado um PowerPoint com toda a informação necessária e as fases necessárias para concluir o projeto. Para a elaboração deste projeto os professores disponibilizaram várias informações que incluíam pequenos filmes do YouTube, sites e até vídeos produzidos pelos próprios docentes.

FASE 1- PLANIFICAÇÃO

Nesta fase, os alunos necessitavam de construir uma maquete. Um dos conceitos requeridos para a construção de uma maquete é o de escala. Para ajudar os alunos a recordarem este conceito foi disponibilizado um link para um filme no YouTube¹.

Para ajudar a pensar na decoração foram sugeridos diversos sites relacionados com a construção e decoração de casas².

Atendendo a que se pretendia mobilizar e desenvolver os conhecimentos de geometria foram sugeridos alguns sites relacionados com a planificação de sólidos geométricos³.

Foi feito apelo ao sentido estético e à criatividade na escolha e seleção de materiais para decorar a casa, o que revela uma preocupação com competências fundamentais do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (ME, 2017).

Esta primeira fase envolveu maior apoio dos professores de Matemática e de Educação Visual.

FASE 2- OPERACIONALIZAÇÃO: CONSTRUÇÃO DA MAQUETE

Nesta fase era necessário imaginar e selecionar as peças para decorar o quarto. Desenhar a cama e os restantes móveis

¹https://www.youtube.com/watch?v=MlpfXdvG_04

²<https://www.homify.pt/livros-de-ideias/3744540/20-quartos-rusticos-para-inspirar-o-seu>

³<https://escolakids.uol.com.br/matematica/planificacao-de-solidos-geometricos.htm>

e calcular as medidas que cada uma das peças ocupa na maquete e no verdadeiro quarto. Era também o momento de procurar materiais para a decoração do espaço, que teria de ser baseado em figuras geométricas. Foi sugerida a reciclagem ou reutilização de objetos disponíveis e acessíveis para a decoração do quarto, como tintas, tecidos, cartão, cartolina, embalagens, etc. Independentemente dos materiais escolhidos, os alunos necessitavam de calcular as quantidades de tinta, de papel de parede e de pavimento para o chão, assim como o respetivo custo. Nesta fase foi indispensável o apoio dos professores de Matemática, Educação Visual e Educação Tecnológica.

FASE 3- MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS E PROCEDIMENTOS MATEMÁTICOS

Escolhidos os materiais e desenhado o quarto foi necessário calcular as quantidades de tinta, de papel de parede e de pavimento para o chão, assim como o respetivo custo. Os alunos deviam selecionar à sua vontade cinco figuras planas para usarem na decoração, o que implicava o cálculo das respetivas áreas, assim como escolher cinco objetos de decoração com a forma de sólidos geométricos.

Para ajudar os alunos foram disponibilizados vídeos e outros sites com informações sobre os sólidos, as planificações, o cálculo de áreas e volumes⁴.

Esta terceira fase envolveu sobretudo o apoio dos professores de Matemática uma vez que era necessário mobilizar e aplicar conhecimentos de geometria.

FASE 4 – ELABORAÇÃO DE UM RELATÓRIO E AVALIAÇÃO

Os professores elaboraram um guião para ajudar os alunos a produzir o relatório do projeto. Por fim, foi sugerida a seguinte ficha de autoreflexão

Autoreflexão

1. Quais foram as principais ideias matemáticas envolvidas neste projeto?
2. Com base nesta atividade, completa, pelo menos, duas das frases seguintes:
Eu aprendi que _____
Eu fiquei surpreendido porque _____
Eu descobri que _____
Eu fiquei satisfeito porque _____
Eu gostava ainda de saber mais sobre _____
3. O que é que tu aprendeste com os teus colegas?
4. Como avalias o teu próprio desempenho nesta atividade?

Esta fase envolveu os professores das três disciplinas que participaram na experiência. Como exemplo de uma reflexão dos alunos acerca do processo e dos resultados do projeto, transcrevemos parte do relatório de uma aluna do 9.º ano que ilustra muitos dos aspetos pertinentes do trabalho de projeto, as aprendizagens que favorece e as competências que promove.

⁴ <https://pt-pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-shapes/basic-geo-geometric-solids/v/recognizing-common-3d-shapes>

Na primeira fase deste projeto não recorri à ajuda de ninguém pois foi fácil fazer a escala e o esboço da minha sala de estar. Na segunda fase, construí a minha maquete e defini uma outra escala, por conveniência em termos de decoração e disposição dos objetos, tive ajuda da minha mãe para a realização da maquete. Para construir as minhas paredes utilizei papelão, para o chão reutilizei o azulejo de minha casa. Em relação à elaboração dos meus móveis, utilizei caixas de telemóveis e caixas de fósforos. No móvel da televisão, para fazer a flor, utilizei uma tampa de cola líquida e um tecido roxo. Para forrar a parede da sala usei cortiça e as restantes paredes foram pintadas com tinta branca, o tapete foi feito com papel de alumínio e cartolina azul para o losango. Para fazer os quadros nas paredes e nos pilares, utilizei também cartão e cartolina azul. O meu prisma também foi feito em cartolina. Elaborei as minhas cortinas em rede mosquiteira. E os meus três espelhos realizei-os em cartolina preta e papel alumínio. As minhas escadas realizei-as em cartão e inseria-as na parede. Como podemos verificar, nas imagens da minha maquete, tenho uma planta debaixo das escadas e o vaso dela foi realizado com cartão e fita preta e a planta é verdadeira. A fase 3 em termos de calcular as áreas e volumes foi fácil, não tive quaisquer dúvidas, mas tive bastantes dificuldades na parte da quantidade de tinta gasta na maquete e na realidade, contudo a professora ajudou-me e consegui perceber a matéria. Para este procedimento ser realizado foi preciso saber a área da maquete e do real e fiz uma experiência com 1 dl de tinta e pinte uma superfície rectangular até a tinta se esgotar. De seguida calculei a área dessa superfície e fiz a regra de três simples. Também calculei a área do chão na maquete e no real que foi só fazer o comprimento vezes a largura. Estes procedimentos todos foram complicados de se conseguir pois a minha maquete não estava à escala, mas com trabalho e dedicação consegui ultrapassar estes obstáculos.

As principais ideias matemáticas do projeto, foram principalmente, relembrar matéria passada, sendo assim o nosso trabalho ficou mais fácil, pois já tínhamos ouvido falar daquilo. E às vezes até dizemos que a matemática não está presente no nosso dia-a-dia mas com isto provamos o contrário, esta disciplina está presente em tudo nas nossas vidas.

O que mais me motivou neste trabalho foi sem dúvida alguma a realização da maquete, gostei de ir procurar materiais, construir, dar-lhes um novo uso. Também não sou uma pessoa muito criativa, mas com este trabalho, acho que consegui aperfeiçoar esta minha característica. O mais desmotivador é o facto de fazermos a maquete para depois não a utilizarmos, no entanto como eu acho que fiz um ótimo trabalho irei guardá-la. Um ponto desmotivador é eu ser um pouco perfeccionista e querer tudo ao mínimo pormenor, e depois o facto de não ter saído como eu queria, deixou-me um pouco stressada e ansiosa.

ALGUNS PRODUTOS DESTE PROJETO

Selecionámos algumas imagens das maquetes construídas pelos alunos (figuras 1, 2, 3) que ilustram a criatividade e o empenho dos mesmos na realização deste projeto: duas das maquetes representam quartos e uma delas mostra uma sala de estar. As diversas maquetes revelam a utilização de figuras planas para representar quadros de parede ou tapetes ou os sólidos geométricos que compõem várias peças de mobiliário do quarto ou da sala.



Figura 1. Maquete de uma sala



Figura 2. Maquete de quarto de cama individual



Figura 3. Maquete de um quarto com cama de casal

COMENTÁRIO FINAL

Se existissem dúvidas de que em situação de confinamento é possível desenvolver pequenos projetos em que os alunos

mobilizam e ampliam os seus conhecimentos com criatividade, desenvolvendo várias competências, os resultados e produtos deste projeto trazem uma prova inequívoca. O facto de a comunicação entre os professores e os alunos se realizar online, em nada impediu a realização do projeto; pelo contrário, os professores naturalmente esclareceram dúvidas e enviaram feedback sempre que necessário, o que se revelou muito eficaz para o cumprimento dos objetivos do trabalho e da calendarização inicial. Neste caso, os professores e os alunos recorreram a uma diversidade de meios para estabelecerem a comunicação: grupo no WhatsApp, Messenger, e-mail, SGE (plataforma oficial da escola), Facebook do Grupo MAT9-2020 e, pontualmente, a chamada telefónica. Também os recursos para a elaboração do projeto foram diversificados; a recomendação para reciclar e reutilizar, para além da sua relevância intrínseca, constitui uma estratégia adequada para contornar a impossibilidade de comprar materiais.

Em relação aos conteúdos matemáticos envolvidos, a realização deste projeto permitiu a aplicação de conteúdos anteriormente estudados, mas também a aprendizagem de novos conhecimentos. Para os professores de Matemática esta experiência foi uma importante contribuição para desenvolver a autonomia dos seus alunos, porque os levou a “liderarem as suas aprendizagens perante situações concretas da vida real” (professora e formadora).

O trabalho de projeto é sempre uma oportunidade para desenvolver várias competências e aprendizagens. Embora os alunos tenham desenvolvido o projeto individualmente, houve alguns casos em que os pais tiveram oportunidade de dar apoio, fabricando tapetes, colchas e outros elementos decorativos. Regista-se, portanto, a oportunidade de envolvimento dos pais e das famílias nesta tarefa.

As atividades da Oficina de Formação abriram com o tema do trabalho de projeto no ano letivo que veio a impor o ensino a distância em tempos de confinamento. Nessa fase inicial, ninguém antevia o trabalho de projeto como uma estratégia de ensino-aprendizagem totalmente arredada da sala de aula. O que é interessante destacar é que estes professores encontraram no trabalho de projeto uma oportunidade para as suas práticas de ensino a distância e conseguiram daí retirar vantagens e ganhos.

O exemplo que acabámos de apresentar revela que é possível estabelecer formas de articulação entre as múltiplas orientações curriculares atuais. Para além das aprendizagens envolvendo conhecimentos de geometria, está patente a valorização de diversas competências presentes no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Acreditamos que o trabalho que tem sido desenvolvido na oficina de formação, associado à ação de acompanhamento e apoio aos seus colegas que a professora e formadora desta equipa protagonizou, foi determinante para os resultados alcançados. O sucesso desta e de outras experiências desenvolvidas nos Açores constituem uma forte motivação para o alargamento da formação e acompanhamento aos professores de 9.º ano, mas também para o desafio recente de avançar com

este programa para o ensino secundário em algumas escolas do ensino secundário da Região Autónoma dos Açores. Permite ainda realçar a importância sobejamente conhecida de programas de acompanhamento da atividade docente, centrados nas práticas de sala de aula e no desenvolvimento do conhecimento didático do professor, para a mudança e a inovação pedagógica na educação matemática.

Agradecimentos:

Agradecemos aos colegas da equipa do PFAPDEB pela sua capacidade e determinação, ao redobram os seus esforços para manter em marcha o Plano de Acompanhamento a distância. Uma palavra de agradecimento, em particular, à colega Joaquina Freitas que assumiu a tarefa de pôr em marcha estes projetos na sua escola e pela partilha dos materiais e produções dos alunos.

Referências

- Amado, N. & Carreira, S. (2019a). *Trabalho de Projeto*. Governo dos Açores, Secretaria Regional de Educação e Cultura.
- Amado, N., & Carreira, S. (2019b). Problemas de Fermi: uma oportunidade para a interdisciplinaridade na aula de matemática. *Educação e Matemática*, 151, 3-7.

AAmado, N., Carreira, S., Aroeira, A., Duarte, C., Pacheco, C., Morais, E., Freitas, J., Romano, J., Freitas, M., Valadão, M. & Faria, R. (2019). Problemas de Fermi: a interligação entre o estabelecimento de pressupostos e a formulação de problemas. In N. Amado, A. P. Canavarro, S. Carreira, R. T. Ferreira & I. Vale (Eds.), *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2019*, (pp. 349-343). Lisboa: SPIEM.

English, L. & Sriraman, B. (2010). Problem Solving for the 21st Century. In B. Sriraman, & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*, (pp. 263-290). Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-642-00742-2_27

Ministério da Educação (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Direção-Geral da Educação.

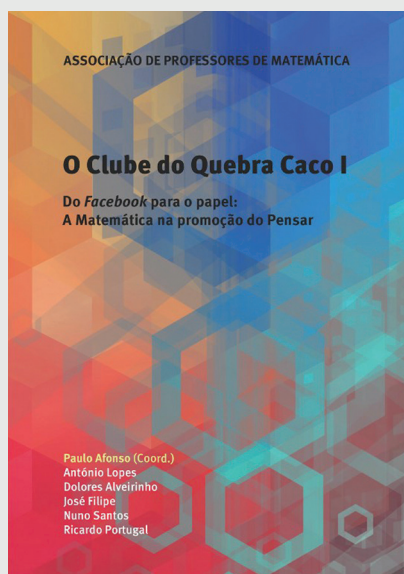
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2010). Reform under attack – Forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? No way!. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp. 1-25). Fremantle: MERGA

NÉLIA AMADO

SUSANA CARREIRA

UNIVERSIDADE DO ALGARVE & UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

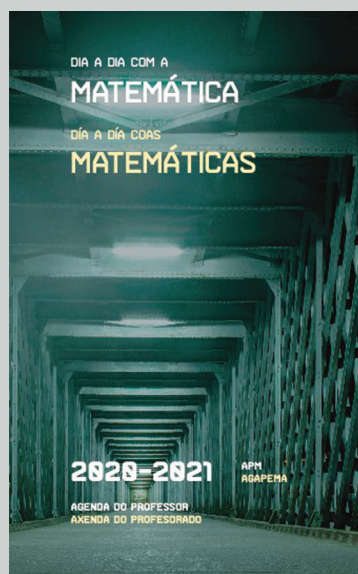
O CLUBE DO QUEBRA CACO I



Do Facebook para o Papel: A Matemática na promoção do Pensar

Está para breve o lançamento de mais esta publicação de APM, coordenada por Paulo Afonso. Este livro contempla os 84 desafios que foram propostos nos quatro primeiros meses do Projeto O Clube do Quebra Caco — grupo facebookiano dedicado à resolução de problemas constituído por um grupo de colegas de Castelo Branco — e os mesmos são apresentados e analisados tendo em conta a ordem cronológica em que foram propostos. Estes 84 desafios poderão ser distribuídos por 3 grandes grupos: Quebra cabeças (22 desafios); de Natureza Numérica (32 desafios) e de Natureza Geométrica (30 desafios).

AGENDA DO PROFESSOR 2020/2021



Dia a dia com a Matemática

Um novo ano letivo está a começar. Para ele preparamos uma agenda bilingue (português / galego) a partir de um concurso de resolução de problemas que a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA), têm vindo a organizar desde há 6 anos letivos, o Matemáticas na Raia. Compre já, na loja da APM ou na Loja online.

Preço de sócio: 6,00€; preço de não sócio: 7,00€

Resolução de problemas, geometria dinâmica e dissecções

Vale a pena revisitar com regularidade os escritos mais significativos sobre a resolução de problemas e associar ideias apresentadas a resoluções realizadas por alunos em situações de aprendizagem.

Neste caso, o ponto de partida é um problema de geometria proposto aos alunos de Geometria da Licenciatura em Educação Básica na ESE de Lisboa. O problema era opcional, entre outros problemas, e foi escolhido por seis alunas. Esta situação foi proposta no fim de um trabalho muito intenso de resolução de tarefas com recurso a geometria dinâmica.

Quem gosta de resolver problemas de geometria não dispensa o recurso a um ambiente de geometria dinâmica para os resolver. Implicitamente, um recurso desta natureza permite colocar em ação uma das estratégias de Polya para a resolução de problema. Esta estratégia consiste em partir de um caso particular ou de uma restrição e procurar construir a solução a partir de uma resolução parcial.

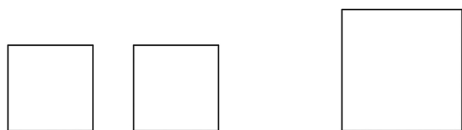
O problema

Novos lenços de pescoço

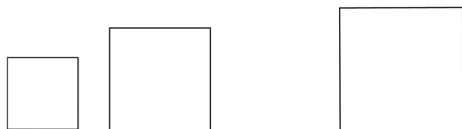
Com 2 pequenos lenços iguais e quadrados pretende-se obter um novo lenço quadrado.

O objetivo é aumentar o tamanho perdendo o mínimo de tecido. Isto é, só se pode perder tecido nas costuras que vão ter que ser feitas. Por isso, o número de cortes e o comprimento das costuras a fazer têm que ser minimizados.

Qual é a melhor solução para obter um novo lenço?



E se os lenços tiverem tamanhos diferentes?



Este problema é um problema matemático muito conhecido, no entanto, o seu contexto é original e, a meu ver, revelou-se como fundamental para a compreensão do problema e para a sua resolução.

RESOLUÇÕES DA 1ª PARTE DO PROBLEMA

A primeira parte é de resolução acessível. Foram apresentadas pelas seis alunas duas resoluções distintas (figuras 1 e 2).

Recordando que uma dissecção geométrica é um corte de uma ou mais figuras geométricas em várias peças que depois podem ser rearranjadas para formar outra ou outras figuras, temos

aqui dois bons exemplos de dissecções geométricas. Em ambos os casos a geometria dinâmica permite verificar que ambas são independentes das dimensões dos quadrados iniciais. Além disso, a geometria dinâmica favorece a curiosidade de saber o que acontece se os quadrados iniciais não forem iguais.

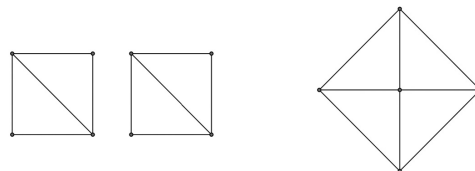


Figura 1

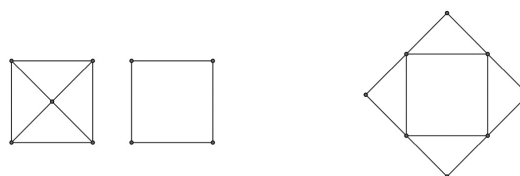


Figura 2

RESOLUÇÕES PARTICULARES DA 2ª PARTE DO PROBLEMA

Para a 2ª parte selecionei três das seis resoluções distintas realizadas pelas alunas. Uma delas foi construída com recurso a uma decomposição do quadrado maior em 4 triângulos retângulos equiláteros iguais. Esta solução foi obtida a partir da exploração da situação com recurso ao geogebra. A solução é particular e só é possível se o lado do quadrado maior for o dobro do lado do quadrado menor (figura 3).

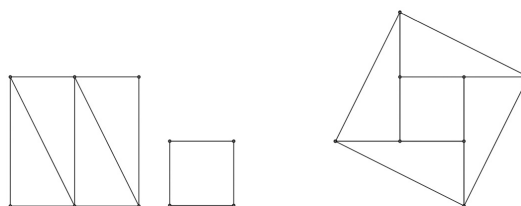


Figura 3

Outra solução particular recorre à decomposição do quadrado maior em 4 retângulos iguais. Esta solução também é obtida com recurso ao geogebra e só funciona se o lado do quadrado menor for 3/4 do lado do quadrado maior (figura 4).

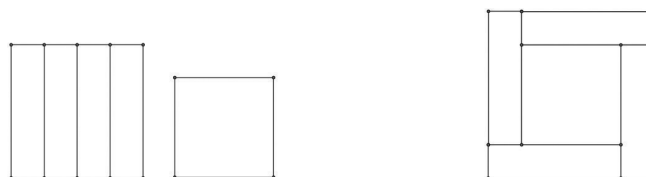


Figura 4

Um das resoluções obteve uma solução geral. Neste caso a estratégia contempla uma ideia diferente que consiste em colocar os dois quadrados iniciais justapostos e pensar os cortes mantendo essa justaposição (figura 5).

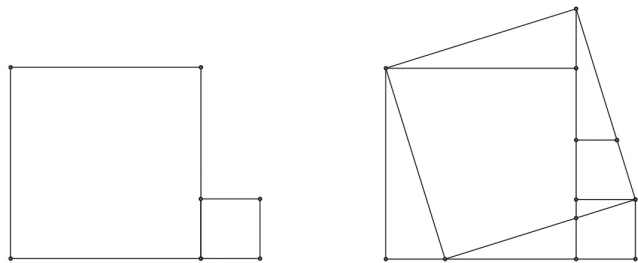


Figura 5

Esta estratégia é perfeita e generalizável para qualquer relação entre os lados dos dois quadrados iniciais. Esta estratégia é conhecida como disseção de Paul Mahlo, sendo a sua referência histórica de 1908 (Frederickson, 1997). Um outro aspeto muito relevante a evidenciar é que a construção dinâmica desta solução permite incluir a solução da 1ª parte do problema como caso limite (figura 6).

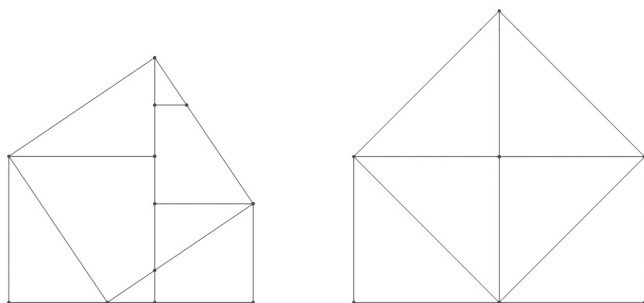


Figura 6

Estas três resoluções foram escolhidas porque nos ajudam a discutir algumas ideias relevantes e é importante registar que apenas esta última resolução apresenta uma solução geral.

ALGUMAS REFLEXÕES

Nesta resolução de solução generalizável destaco dois aspetos presentes na descrição apresentada pela aluna. Estes dois aspetos são a utilização das ferramentas da geometria dinâmica e a influência do contexto.

A utilização das ferramentas da geometria dinâmica percorre toda a descrição em apontamentos do tipo: “apliquei uma translação”, “apliquei uma rotação”. Ao longo da descrição, a aluna identifica corretamente os elementos fundamentais da figura e usa uma linguagem formal, embora às vezes com falhas. Selecciono um excerto um pouco mais longo.

“Por fim percebi que o pedaço que faltava para construir o quadrado grande era o quadrilátero BJKL e portanto apliquei-lhe uma rotação de 90 graus no sentido horário e depois uma translação pelo vetor v obtendo assim a restante parte da aresta que faltava.”

Destaco este excerto porque nele também está subjacente a referência ao contexto do problema quando a aluna refere “o

pedaço que faltava”. Aliás esta referência ao contexto está presente em várias afirmações que a aluna faz, como por exemplo:

“Podemos ligar estes triângulos ao outro lenço através das arestas.”

“Assim foi possível obter o quadrado maior $K'K'1K'2K'3$, que representa o lenço grande, apenas com 4 cortes num dos lenços.”

“Obtive assim o quadrado maior final $ID'FK$ ” apenas com dois cortes no quadrado maior e um no mais pequeno.”

A própria referência a “arestas”, errada na perspectiva geométrica formal, pode ser influenciada pelo contexto pois a palavra “arestas” faz parte da linguagem corrente e não está totalmente associada a situações tridimensionais.

Na análise que faço, considero que a existência de um contexto familiar, a costura dos lenços, foi facilitadora da resolução e conjeturo que foi decisiva para que esta aluna obtivesse uma solução perfeita. A ideia chave nesta resolução foi a justaposição inicial dos dois quadrados originais. Na minha análise, a ideia de justapor os dois quadrados decorre do contexto de costura do problema. A aluna revela essa compreensão ao combinar sistematicamente a linguagem matemática formal com a linguagem informal do contexto do problema.

Do ponto de vista matemático, nos problemas sobre disseções, uma das estratégias poderosas de resolução consiste precisamente na justaposição das figuras de partida.

É interessante destacar também que outras resoluções apresentadas, embora não tão perfeitas como esta, também referem o contexto, como por exemplo:

“Deste modo é possível concluir que esta forma pode ser generalizada para todos os lenços de tamanhos diferentes, estando sempre no centro o lenço de menores dimensões e em torno deste os quatro triângulos isósceles, correspondentes ao lenço de maiores dimensões.”

Esta solução diz respeito a uma outra resolução em que a aluna não respeita o conceito de disseção. Porém encontra uma solução geral aceitável na perspectiva do contexto do problema.

Esta breve discussão pretende relacionar algumas ideias relevantes sobre a resolução de problemas, a geometria dinâmica e as disseções geométricas. Nesta discussão foram valorizados o papel da geometria dinâmica e do contexto do problema. Porém, vários outros aspetos ficaram por discutir ligados às possibilidades que este problema oferece para a formulação de novos problemas e para a reflexão e aprendizagem sobre a resolução de problemas na formação de futuros professores. As resoluções das alunas confirmam estas potencialidades e deixam-nos várias questões em aberto.

Referências

- Frederickson, Greg N. (1997). *Dissections: Plane & Fancy*. Cambridge University Press.
- Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Gradiva.

Da área ao volume – quando a intuição nos desafia

LINA BRUNHEIRA

Este artigo é uma espécie de sequência do artigo *Valorizar o raciocínio espacial no ensino e na aprendizagem da Geometria (e não só)*, publicado na EM 155. Nesse artigo, discuti o conceito *raciocínio espacial* recorrendo a várias resoluções do problema *Frascos de perfume*, também publicado no mesmo número, na secção *Materiais para a aula de matemática*. Retomo o mesmo problema neste artigo, concentrando-me, desta vez, num aspeto diferente – a relação entre a área e o volume e o papel da intuição na compreensão desta relação. Para facilidade de leitura, reproduzo este problema na figura 1.

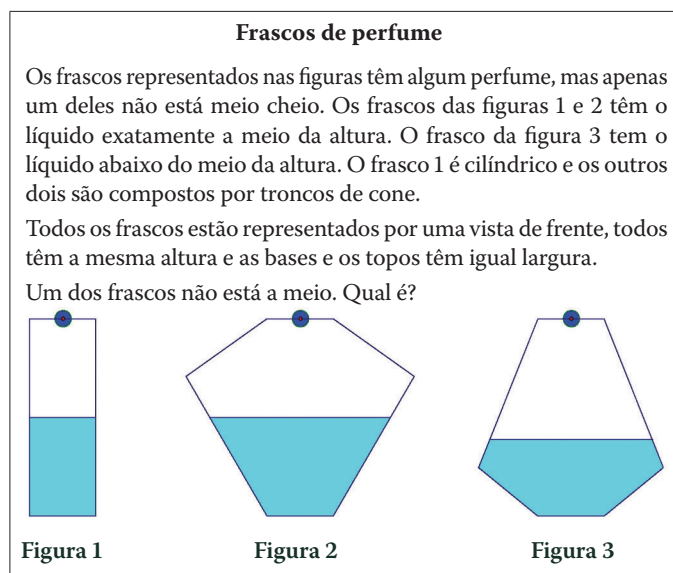


Figura 1. Enunciado do problema

No artigo atrás referido, afirmo que se trata de um problema do espaço 3D que se reduz a um problema do espaço 2D. Efetivamente, os frascos 2 e 3 são composições de troncos de cone, logo podemos raciocinar com base numa única vista.

Desse modo, concentremo-nos no frasco 2. Se decompusermos o hexágono correspondente à representação da parte vazia do frasco, obtemos um trapézio congruente com o correspondente à parte do frasco com perfume e ainda dois triângulos congruentes (figura 2). Sabemos que os trapézios são congruentes porque as suas bases são congruentes, são trapézios isósceles e têm a mesma altura. Consequentemente, há uma parte vazia do frasco

igual à parte com perfume, sobrando ainda duas partes sem perfume (representadas pelos triângulos). Logo, o frasco não está a meio. Note-se ainda que nesta resolução não recorremos ao cálculo de áreas, veremos de seguida porque é que esse é um aspeto sensível.

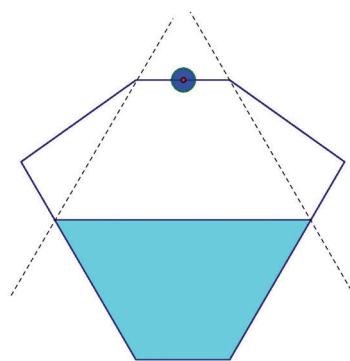


Figura 2. Decomposição do frasco 2

ÁREAS IGUAIS IMPLICAM VOLUMES IGUAIS?

Este ano letivo, alguns estudantes resolveram analisar ainda o frasco 3, apesar de já terem percebido que o frasco 2 era solução. Calcularam as áreas da parte vazia e da parte com líquido e, com surpresa, afirmaram “mas o frasco 3 também não está a meio!”. A razão da sua afirmação é simples – na figura apresentada, as áreas das partes com e sem líquido não são iguais. Então se as áreas não são iguais, como poderão sê-lo os volumes das partes dos frascos correspondentes?

Consideremos uma situação mais simples, como a do frasco 1 que é cilíndrico. Podemos argumentar que se os retângulos que decompõem a vista do frasco nas partes vazia e preenchida (retângulos branco e colorido) são congruentes, assim serão os respetivos cilindros e, portanto, o frasco está a meio. Neste caso, não há apenas igualdade na medida das áreas, mas também igualdade de figuras. No entanto, a questão não é assim tão simples. Imaginemos que usamos o mesmo retângulo para formar dois cilindros: o primeiro cilindro é obtido fazendo a revolução em torno de um eixo de simetria do retângulo e o segundo cilindro é obtido usando o outro eixo, tal como se mostram as figuras 3 e 4. Teremos o mesmo volume?



Figura 3

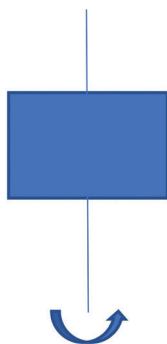


Figura 4

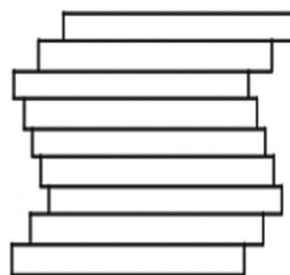
Designemos as medidas do retângulo por a e b . Calculando as expressões relativas aos volumes dos dois cilindros obtemos $\pi \times \left(\frac{b}{2}\right)^2 \times a$ para um caso e $\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times b$ para outro. Ora, igualando as expressões para obtermos os mesmos volumes, resulta facilmente a conclusão de que $a = b$, ou seja, só para o caso particular do quadrado é que os volumes dos sólidos gerados são iguais. Significa, portanto, que o facto de as figuras serem congruentes não é condição suficiente para que os volumes gerados pela revolução em torno de um eixo gerem sólidos com o mesmo volume. Em particular, a mesma conclusão se pode tirar para duas figuras com a mesma área.

O DESAFIO DA INTUIÇÃO

A conclusão a que acabámos de chegar não envolve processos muito complexos, podendo até ser facilitada com a utilização de valores específicos. Contudo, não só foi surpreendente como foi difícil de aceitar para muitas estudantes, pelo que deparei-me com o desafio de procurar “desmontar” esta convicção e encontrar o motivo que nos faz intuir que se as medidas das áreas forem iguais, os respetivos sólidos também terão o mesmo volume. Como referem Martinho e Rocha (2018) num artigo desta revista, “alguns alunos tendem a tirar conclusões precipitadas com base na intuição, o que ocorre quando transportam para novas situações um contexto que, apesar de lhe ser alheio, lhes aparece como logicamente coerente” (p. 35) e referem Stavy e Tirosh (2000) que explicam que, frequentemente, os alunos usam regras intuitivas como “mais A – mais B” ou “mesmo A – mesmo B”. Um dos exemplos dado pelas primeiras autoras envolve também cilindros: “Imaginemos dois cilindros construídos com uma folha de papel A4 [com a maior dimensão] ora na horizontal ora na vertical. Neste caso alguns alunos tendem a considerar que, se a folha (área da superfície lateral) é a mesma, então o volume dos cilindros também o será (regra “mesmo A – mesmo B”)” (p. 35). No caso que estamos a analisar, aplicar-se-á também a regra “mesmo A – mesmo B”, ou seja, mesma área, mesmo volume. Haverá alguma razão lógica para crermos nesta regra?

De facto, se pensarmos em dois prismas com igual altura e bases com a mesma medida de área, os dois prismas têm o mesmo volume e o mesmo acontece se compararmos um cilindro e um prisma com bases equivalentes. Na verdade, o mesmo se aplica

a outros sólidos com formas irregulares, mas que mantêm a mesma base e que, quando seccionados por um plano qualquer paralelo às bases, originam figuras equivalentes. Este resultado decorre do princípio de Cavalieri e a sua compreensão pode ser muito facilitada por experiências simples, envolvendo estruturas em camadas (figuras 5 a 8), como ficou patente no artigo de Cristina Loureiro, no *Caderno de Apontamentos de Geometria* da revista 143 (2017). Pensar num paralelepípedo como sendo a “acumulação” em altura de figuras iguais à base, por impreciso que seja já que as figuras não têm espessura, ajuda-nos a compreender a fórmula do volume do prisma ou do cilindro e relacionar duas variáveis – a área da base e o volume do sólido.



Figuras 5, 6, 7 e 8. Estruturas em camadas (Retirado de Loureiro, 2017)

Contudo, esta associação em que se aplica a regra “mesma área – mesmo volume” (desde que as alturas sejam iguais) deixa de ser válida para o caso em análise e, em última instância, para os nossos frascos. Vejamos porquê recorrendo a diferentes formas de estruturar mentalmente os sólidos, tomando como exemplo um cilindro. De acordo com a perspetiva anterior, podemos encarar o cilindro como a “acumulação” em altura da circunferência da base. Em alternativa, podemos perspetivar este sólido a partir da rotação de um retângulo em torno de um eixo de simetria. No primeiro caso, sempre que seccionamos o cilindro paralelamente à sua base obtemos circunferências congruentes (figura 9), pelo que se aplica o princípio de Cavalieri. No segundo caso, obtemos retângulos congruentes quando seccionamos o cilindro através de planos que contêm o eixo de rotação (figura 10), contudo esses planos não são paralelos, pelo que não se aplica o princípio de Cavalieri.

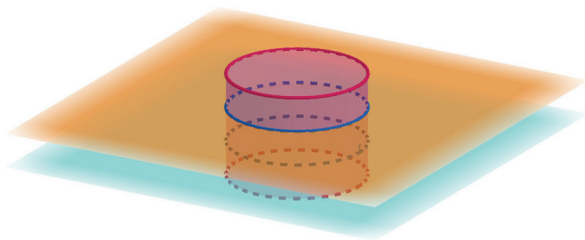


Figura 9

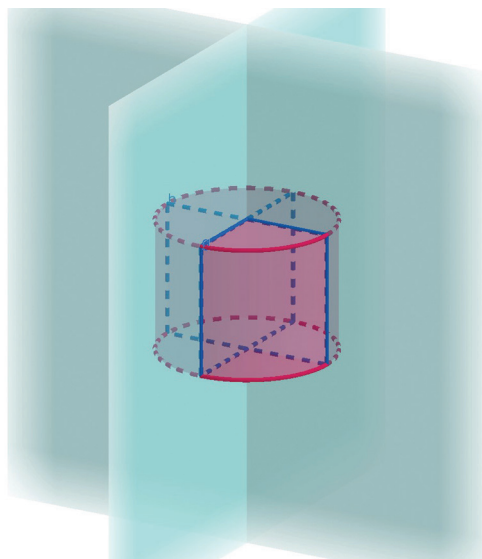


Figura 10

Claro que é possível que esta abordagem não seja suficiente para abalar a forte intuição de que os volumes devem ser sempre iguais... Se isso acontecer, é sempre possível recorrer a uma outra estratégia: colocar a figura do frasco 3 num programa de geometria dinâmica como o GeoGebra (figura 11), identificar os três troncos de cone que compõem o frasco e calcular o seu volume usando uma folha de cálculo. É evidente que o resultado obtido será um valor aproximado, mas talvez seja o suficiente para convencer...

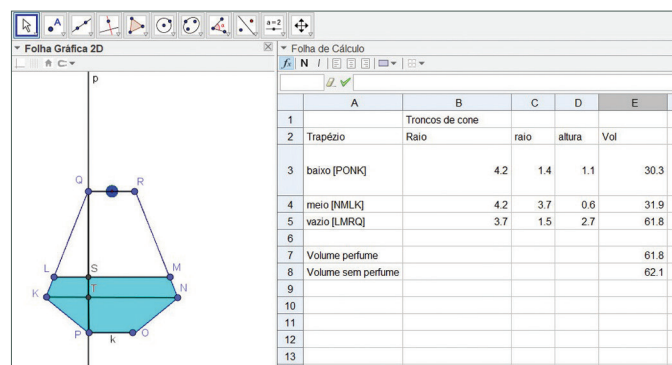


Figura 11

Chegados a esta fase, pode o leitor perguntar-se qual é a minha “posição” sobre a intuição. Esta não é uma questão estranha.

Na verdade, como tão bem descrevem Davis e Hersh (1995), a intuição pode ser vista como uma substituta perigosa e ilegítima para a demonstração ou, noutros contextos, pode ser vista como uma luz inexplicável através da qual alguns felizardos adquirem conhecimento matemático. Aliás, aqueles autores apresentam uma lista de seis significados atribuídos à intuição que mostram bem estas visões contraditórias. Por exemplo, *intuitivo é o oposto de rigoroso*, denotando um aspeto negativo, se bem que, como afirmam, também não sabemos bem o significado de rigoroso; *intuitivo significa plausível*, algo que é muito valorizado numa conjectura e que nos leva a avançar para a demonstração; *intuitivo significa visual*, o que pode também ser encarado positivamente porque a componente visual pode atribuir significado (ao contrário do abstrato) ou, pelo contrário, negativamente se formos levados a tomar como óbvia uma afirmação dúbia ou falsa (como a resposta errada relativa ao frasco 3).

Apesar destas visões contraditórias, é inegável o papel da intuição na matemática, como assinalaram matemáticos famosos tais como Hadamard, Steen ou Poincaré (Saraiva, 2008), pelo que é fundamental o reconhecimento da sua importância no ensino. Esta opção levanta duas questões: Como a desenvolvemos? Que propostas fazemos aos nossos alunos para mobilizá-la? Para responder à primeira, voltamos a Davis e Hersh:

Temos intuição porque temos representações mentais dos objectos matemáticos. Adquirimos estas representações, não através da memorização de fórmulas verbais, mas através de experiências repetidas (a um nível elementar, experiências de manipulação de objetos físicos; a um nível avançado, experiências de resolução de problemas e descoberta de coisas por nós próprios) (p. 366).

À segunda pergunta, ousou dar a minha resposta: criamos situações onde a intuição seja nossa aliada, mas também outras que nos desafie ou mesmo que nos engane. Propomos e, sobretudo, discutimos.

Referências

- Davis, P. J. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Loureiro, C. (2017). Como ligar 2D com 3D? Sólidos em camadas, uma possibilidade inesperada e fascinante. *Educação e Matemática*, 143, 24-25.
- Martinho, H. & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em Geometria. *Educação e Matemática*, 149-150, 34-38.
- Saraiva, M. (2008). Raciocinar em Matemática com imagens visuais vagas e com intuição. *Educação e Matemática*, 100, 29-32.
- Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics*. New York: Teachers College Press.

LINA BRUNHEIRA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

Entrevista aos professores autores das aulas de Matemática do 9.º ano do projeto #EstudoEmCasa

Para responder à interrupção das aulas presenciais, devido pandemia provocada pelo Covid-19, o Ministério da Educação desenvolveu algumas iniciativas, sendo uma delas o #EstudoEmCasa. Esta iniciativa tinha como objetivo a transmissão de aulas, em sinal aberto, através da televisão e foi pensada para os alunos sem acesso a meios informáticos e/ou internet. Entre outras disciplinas, o Agrupamento de Escolas Fernando Casimiro Pereira da Silva, foi convidado para lecionar as aulas de Matemática do 9.º ano e a revista Educação e Matemática procurou conhecer a experiência do grupo de professores que as concretizaram. Os rostos visíveis nas 19 aulas foram os professores Paulo Almeida e Susana Almeida, mas o grupo, que foi apresentado na penúltima aula, era ainda constituído pelos professores do Agrupamento: Vânia Mateus, José Costa, Patrícia Lima, Teresa Maximino, de Matemática e Nuno Leal, Tiago Ribeiro, de outros grupos disciplinares e pelo aluno António Coito. Paulo Correia, professor de Matemática do Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal, foi também convidado a integrar a equipa, desde o início.

Após a visualização das aulas de Matemática do 9.º ano, a equipa editorial da Educação e Matemática pensou ser importante dar a conhecer a experiência vivida por este grupo de professores, pelo que lhes dirigiu um convite para responderem por escrito a algumas questões. Das respostas coletivas da equipa de Matemática do 9.º ano (**Equipa MAT 9**) damos conta nas páginas que se seguem.

A equipa editorial da Educação e Matemática (EM).

EM: Pelo que sabemos o convite foi dirigido ao Agrupamento de escolas Fernando Casimiro Pereira da Silva, de Rio Maior. Aceitaram de imediato? Como se organizaram?

Equipa MAT 9: O convite chegou ao Agrupamento de Escolas Fernando Casimiro Pereira da Silva, no dia 1 de abril, através de telefonema do senhor Secretário de Estado da Educação, João Costa. O repto era simples, contribuir para encontrar uma solução para os alunos que não tinham ao seu dispor os meios de comunicação que os ligassem aos seus professores. Apesar de simples, o desafio lançado foi imenso. Num espaço de pouco mais de duas semanas estávamos em estúdio a gravar as primeiras aulas, sem formação, cortes, edições ou tempo para adaptação.

Dadas as circunstâncias extraordinárias que se viviam à altura, a decisão era urgente para poder dar início aos trabalhos com um calendário muito apertado. Nesse sentido foram convocados os docentes do agrupamento para uma reunião geral no sentido de se tomar uma decisão partilhada. Os docentes aceitaram prontamente o desafio proposto, naturalmente com receios e dúvidas, aos quais de juntavam o medo de falhar, da exposição mediática, do desconhecido, do formato e até das câmaras, associados à falta de experiência em ambientes televisivos ou de referenciais que permitissem uma orientação em termos de gestão curricular. Tudo teria que ser criado de novo.

Contudo, a equipa foi fabulosa e entendeu a missão, percebeu que Portugal chamava por cada um e que era preciso arriscar a bem de algo maior, os alunos. A melhor forma de lidar com os anseios, medos e novidades era sem dúvida o trabalho em equipa. O agrupamento teve a seu cargo 14 disciplinas dos 3.º e 4.º anos e do 9.º ano de escolaridade, assim como, a oferta de Espanhol como segunda língua para todo o 3.º ciclo.

O passo seguinte foi o de criar as equipas responsáveis por cada disciplina, o que em alguns casos passou por integrar



Figura 1. Imagem da equipa MAT 9 na penúltima aula apresentada

docentes de outras escolas para enriquecer o projeto. Foi ainda necessário mobilizar alguns professores com outras valências, nomeadamente ao nível da edição de som e vídeo para apoiar as diferentes equipas na produção de materiais.

A equipa do agrupamento que abraçou este projeto teve perto de 70 elementos, entre professores, educadores e até alunos. Nem todos foram pivôs, mas foram muitos os que estiveram na retaguarda a produzir materiais e a preparar em conjunto os trinta minutos que se apresentavam em cada sessão do #EstudoEmCasa.

A introdução na equipa de docentes de outras áreas disciplinares trouxe valor acrescentado. Por um lado, permitiu a elaboração de materiais diversificados e ricos em diferentes experiências, por outro lado permitiu estabelecer pontes entre a matemática e as outras áreas trazendo à equipa o saber instrumental de cada um destes elementos.

A equipa (figura 1) considerou pertinente integrar o colega Paulo Correia com o objetivo enriquecer o perfil, já por si, diferenciado, de valências individuais e pela sua experiência enquanto educador matemático.

EM: Quais foram as vossas dificuldades iniciais? Como as ultrapassaram?

Equipa MAT 9: O desconhecimento e a falta de experiência de um modelo de aula sem alunos foram o maior obstáculo. Planificar uma aula num tempo mais restrito, gerir tempos sem pausas e propostas de atividades sem expectativa de feedback era uma realidade nova para todos e a solução foi experimentar, refletir e (tentar) melhorar.

A organização das sessões de preparação das aulas, foi a única dificuldade completamente ultrapassada. Depois da fase inicial de alguma desorganização do trabalho, foram sendo criadas rotinas, ajustadas as tarefas assumidas por cada elemento numa lógica de complementaridade e no final este processo de organização do trabalho funcionava muito bem.

A gestão do tempo televisivo foi outra dificuldade que tivemos de ultrapassar. O tempo limite era estanque e não podíamos, de forma alguma, ultrapassar os trinta minutos definidos para cada bloco pedagógico. No nosso entendimento, não seria sensato terminar uma aula deixando algum dos assuntos sem uma abordagem completa. A forma de ultrapassar esta adversidade passou muito pelo treino, simulação e a experiência da prática. As sessões eram simuladas por forma a averiguar se o tempo disponível era suficiente para o planificado em cada aula.

A gestão do currículo trouxe dificuldades muito semelhantes à planificação de qualquer aula. Selecionar as melhores tarefas, definir a ordem de encadeamento das ideias e a intencionalidade de cada elemento na aula, incluir o grau de formalismo adequado a cada situação e usar uma linguagem rigorosa e clara ao mesmo tempo foram dificuldades comuns a todos os professores, embora agravadas pela consciência da visibilidade deste trabalho.

EM: Como é que estruturaram estas aulas de 30 minutos em televisão? Quais foram as adaptações que foram introduzindo?

Equipa MAT 9: A duração das aulas teve um efeito paradoxal... por um lado 30 minutos parecia um tempo limitado para o que se pretendia, mas por outro lado a ausência de tempos destinados ao trabalho dos alunos (para não gerar tempos “mortos” em televisão) e a ausência de dúvidas e comentários dos alunos, aceleravam o ritmo, o que obrigou a estruturar as aulas de forma radicalmente diferente ao que estávamos acostumados.

Ficou claro desde cedo que 30 minutos num formato expositivo seria uma abordagem muito pouco envolvente para os alunos. Assim fomos ensaiando elementos que se articulassem na criação de “espaços” diferentes dentro da aula. A utilização de vídeos breves e de animações construídas com recurso ao GeoGebra (figura 2) foram elementos que consideramos adequados para criar algum dinamismo numa exposição contínua.

A apresentação dos registos pelos professores também foi feita sob vários formatos para permitir criar algum dinamismo e a adequação a diferentes situações. Sistematizações com recurso

a esquemas ou frases longas dependiam normalmente de apresentações digitais em que eram “desocultados” os registos previamente feitos, o preenchimento de tabelas ou explicitação raciocínios foram quase sempre realizados em tempo real no quadro interativo e a inclusão de outros elementos multimédia assentaram quase sempre em vídeos breves produzidos pelos elementos da equipa.

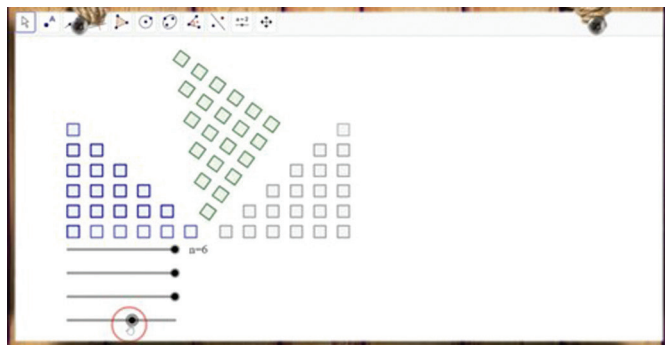


Figura 2. Vídeo de exploração de um applet com sequência de números triangulares

Com o evoluir do projeto passamos a incluir participações especiais para acrescentar elementos de interesse às aulas e ajudar a promover atitudes positivas em relação à disciplina.

As dificuldades com o grau adequado de formalismo nos registos escritos e com o equilíbrio difícil entre rigor e clareza do discurso verbal nunca deixaram de ser uma dificuldade. Com o passar do tempo fomos ganhando alguma confiança com as decisões que eram necessárias tomar, mas estas preocupações continuaram a ser um elemento central nas sessões de preparação até à última aula.

EM: Constatamos que todas as aulas do MAT 9 começavam por um desafio. Tiveram algum feedback sobre a motivação que produziram em alunos ou colegas?

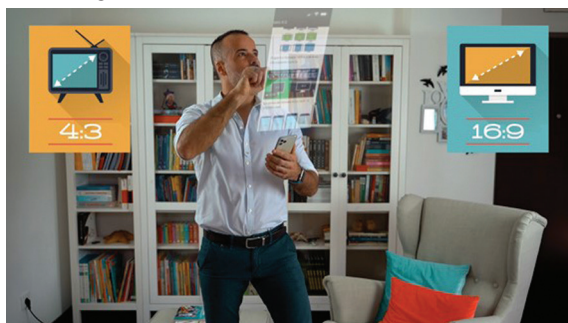
Equipa MAT 9: De facto a aposta em valorizar a resolução de problemas foi uma opção consciente e consideramos que foi uma aposta ganha. Os desafios desempenharam ainda o papel de criar um contexto favorável às abordagens que se seguiam. E foram chegando até nós algumas reações muito favoráveis... desde logo dos nossos alunos e de alguns colegas já aposentados que acompanhavam as aulas e valorizavam em particular os desafios propostos. Tiveram ainda o efeito de criar um elemento de ligação entre o final de cada aula e o início da aula seguinte criando uma especial atenção para o “próximo episódio” ao jeito das séries e telenovelas.

Foi sempre uma preocupação da equipa propor soluções distintas para a resolução de cada um dos problemas, evitando o recurso sistemático à algebrização, introduzindo técnicas distintas de resolução de problemas que foram aparecendo ao longo das diferentes sessões.

Os desafios/problema permitiam também a exploração de conexões entre os diferentes temas matemáticos, introduzindo muitas vezes realidades e vivências com que os alunos contactam diariamente ou com as quais podiam estreitar laços com os

outros elementos do agregado familiar. A percepção de que o mundo que nos rodeia nem sempre se organiza da forma ou modo que conhecem ou que muitas vezes a intuição atraiçoa alguns dos nossos pensamentos induzindo resultados que depois não se verificam, foi igualmente um aspecto que tentámos explorar.

Por isso, foi natural o aparecimento de questões como “Quantas dobragens precisamos de fazer numa folha de papel para chegarmos à lua?”, “Será que o dobro de 10 é sempre vinte?”, “Qual será o volume de um cubo cheio de sal com o dobro da aresta de um cubo unitário?”, “O meu filho mais velho toca piano”, “Quais as dimensões de um televisor num formato 4:3 com área de ecrã igual a outro no formato 16:9?” ou ainda “sapo aos saltos” (figuras 3 e 4).



Desafio “As dimensões de um televisor”

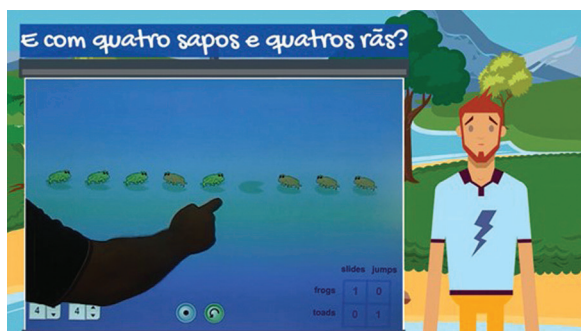
Um televisor, com formato 16:9, 32 polegadas de diagonal, tem 40 cm de largura e 71 cm de comprimento.

Determina as dimensões do ecrã de um hipotético televisor, com formato 4:3, que tenha a mesma área do ecrã do televisor, com formato 16:9.

Apresenta o resultado aproximado às décimas.

Figura 3. Desafio sobre as dimensões de um televisor.

Os desafios que propusemos eram, em alguns casos, recheados de elementos da História da Matemática, que valorizavam igualmente o papel da matemática em outros domínios da actividade humana e social, desenvolvendo a persistência, autonomia e confiança dos alunos na medida em que lhes ia permitindo perceber que a matemática é uma disciplina chave para o seu desenvolvimento individual.



Qual é o número mínimo de movimentos que teremos de efectuar para mudar quatro sapos e quatro rãs de lugar? E se fossem vinte sapos e vinte rãs?

Figura 4. Desafio “Sapos aos Saltos” com recurso a applet de <https://nrich.maths.org/> e adaptado pela equipa.

Foi dentro desta lógica que apareceram, por exemplo, “O Hotel de Hilbert”, “As pontes de Königsberg”, “O método de D’Hont”,

“O problema de Monty Hall” e “O problema da duplicação do cubo” (figura 5).

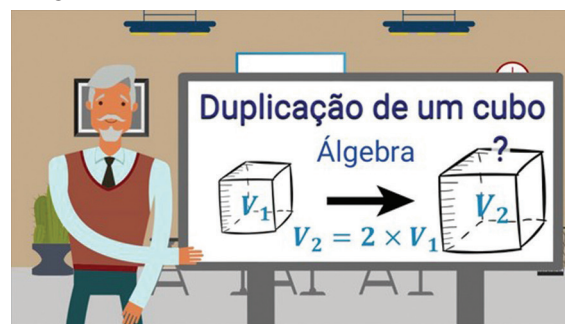


Figura 5. Abordagem ao problema clássico da “Duplicação de cubo” com recurso a animação produzida pela equipa.

EM: Pedimos que escolham 2 aulas que tenham tido algum significado especial para vocês, pela inovação, dificuldade, trabalho colaborativo desenvolvido ou outras razões. Falem-nos sobre elas.

Equipa MAT 9: A aula 11 (“Uma fórmula especial”) foi uma oportunidade para aprender, discutir e experimentar uma estratégia diferente para a abordagem à álgebra. O recurso a “peças algébricas” (algebra tiles) surgiu como a abordagem preferencial pelo papel da visualização no raciocínio algébrico (figura 6), muito propício num contexto televisivo. A discussão em torno de questões de rigor e formalismo, bem como a necessidade de ultrapassar a nossa falta de experiência nesta abordagem, proporcionou um momento formativo de excelência, que embora não tivesse um reflexo direto na aula que foi transmitida, tornou-se um dos momentos mais ricos neste nosso percurso.

Resolução de equações completas

$x^2 + 2x - 3 = 0$

Método de completar o quadrado

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \pm \sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2 \vee x + 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - 1 \vee x = -2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

$S = \{-3, 1\}$

Figura 6. Resolução de equações do 2.º grau com o método de completar o quadrado com recurso a Algebra Tiles (Aula n.º 11).

A aula 14 (“A curva dos quadrados”) foi uma aula difícil de preparar, mas de que gostámos muito. A exploração do gráfico da função quadrática é um tema que, ao nível do 9.º ano, sem a possibilidade de propor uma atividade onde o aluno assumisse um papel ativo revelou-se um verdadeiro desafio para não redundar na exposição do conteúdo. A opção por criar um contexto para observar a representação gráfica da função, por duas vias pouco conhecidas, o procedimento com as moedas e a construção geométrica a partir do Teorema de Tales (figura 7) permitiu uma abordagem pouco comum, mas que consideramos bem-sucedida. O trabalho de criação de uma abordagem, em

vez de selecionar uma de entre as já bem conhecidas, revelou-se uma tarefa que gerou discussões aceras na preparação da aula, mas que permitiram arriscar por caminhos novos com maior segurança... e por isso mais gratificantes.

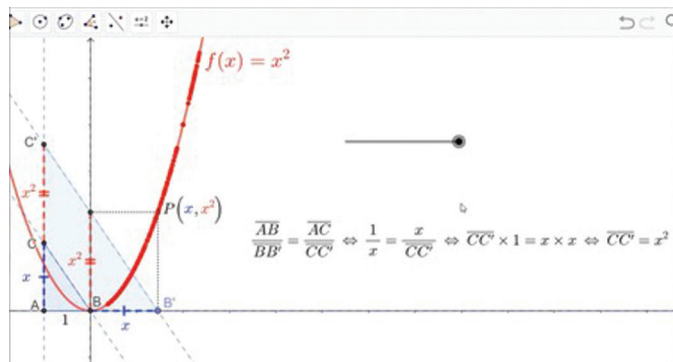


Figura 7. Construção da “Curva dos Quadrados” com recurso a um applet em geogebra (Aula n.º 14).

EM: Utilizaram vários recursos, como o geogebra, animações de sites e vídeos, alguns produzidos pela equipa. Na vossa opinião, quais as mais valias que estes recursos trazem ao ensino-aprendizagem da matemática? Como podem estes recursos ser mobilizados no futuro, a distância ou presencial?

Equipa MAT 9: Consideramos que a diversificação de estratégias e recursos numa aula é a melhor forma de chegar a todos os alunos. Tentar contemplar ritmos, estilos e afinidades específicas de cada aluno só é possível diversificando. Se isto é verdade para dezenas de alunos, será ainda mais para milhares...

Nas nossas opções procuramos diversificar os recursos em estreita articulação com a metodologia e adequando ao tema em estudo, no nosso contexto que era muito específico. Não faríamos da mesma forma se as aulas fossem presenciais, nem sentimos a necessidade de usar um recurso por si, mas antes pelo facto de considerarmos que acrescentava valor à metodologia que estávamos a selecionar.

A relação com a tecnologia revelou-se paradoxal. Por um lado, tínhamos facilidade em apresentar abordagens sustentadas em tecnologia, mas por outro lado estas abordagens eram sustentadas no professor deixando ao aluno apenas o papel de observar, sem poder experimentar. Não é esta a opção com que nos identificamos, mas as circunstâncias, nomeadamente o facto de estarmos a falar para alunos sem acesso a meios tecnológicos impediram-nos sempre de sugerir um papel ativo dos alunos na manipulação da tecnologia.

A diversificação dos recursos não se restringe à tecnologia, a utilização de materiais manipuláveis assenta em princípios e constrangimentos semelhantes aos que explicitámos para a tecnologia. Porém o recurso a experiências com pessoas reais e objetos que são mais ou menos familiares para os alunos (como líquidos, o sal de Rio Maior, moedas) permitiu ligar a experiência matemática a contextos não formais, e estabelecer pontes para outro tipo de experiências educativas que devem ser valorizadas (figuras 8 e 9).



Figura 8. Comparação do volume do cone e do cilindro.

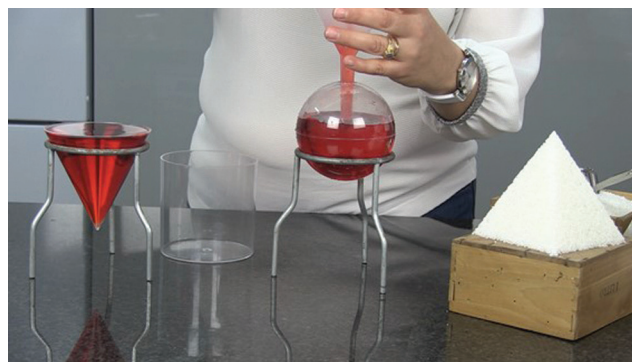


Figura 9. Comparação do volume do cone e da esfera.

Os vídeos e os materiais utilizados foram sendo disponibilizados na página do #EstudoEmCasa e estamos atualmente a ponderar a criação de um espaço (plataforma) onde possam ficar disponíveis num formato em que a sua exploração numa sala de aula comum seja facilitada.

EM: Querem relatar algum episódio significativo desta vossa experiência?

Equipa MAT 9: A gravação das aulas 18 e 19 foi a oportunidade para nos encontrarmos presencialmente, para alguns pela primeira vez. Mais do que o conforto do contacto presencial, após tantas horas de trabalho através de videoconferência e correio eletrónico, a alegria do encontro refletiu uma valorização do trabalho colaborativo que contribuiu decisivamente para o sucesso do projeto.

A experiência vivenciada pelos elementos do grupo que não eram pivôs permitiu que observassem, em contexto, a forma como eram vividos os momentos de gravação e, em especial como era a gestão do tempo disponível.

Da experiência, que talvez fosse profícuo que acontecesse numa das primeiras sessões, o grupo pode entender a linguagem muito própria do ambiente televisivo e aperceber-se das dinâmicas dos pivôs durante a gravação. Neste sentido, ficou claro que muitas das ações tidas durante o período de gravação não se conseguiam passar para o bloco gravado. Nomeadamente, alguns aspectos cénicos próprios da actividade do docente em aula, que aconteciam em estúdio, mas que por impossibilidade de exploração com a equipa de gravação, não se conseguiam transportar para a gravação que aparecia depois em casa de cada

um. Apesar de serem aspectos laterais, todos nós concordamos que seria mais rica a experiência se conseguíssemos que algumas movimentações dos professores durante a filmagem ficassem registadas no vídeo final. Falamos de aspectos relacionados com a linguagem corporal que não se conseguem transpor por tela cheia.

Estas duas aulas foram um momento presencial de encontro e reencontro, deixando clara a força da união criada durante as outras semanas entre pessoas que passaram a conhecer-se de forma mais profunda e a respeitar os aspectos em que cada um era mais forte, construindo assim um todo que é, sem dúvida mais rico que a soma das nossas partes.

Como o Paulo Almeida diz muitas vezes “sozinhos podemos ir mais depressa, mas juntos vamos (fomos) mais longe...”

EM: Como é que este trabalho de desenvolvimento curricular influenciou o vosso trabalho no grupo disciplinar? O que pensam mobilizar desta experiência para a implementação do currículo?

Equipa MAT 9: A experiência acumulada do Agrupamento de Escolas Fernando Casimiro Pereira da Silva, de Rio Maior, na gestão flexível do currículo foi determinante na assunção da autonomia na gestão curricular, assumindo o grupo a responsabilidade das opções tomadas, de forma consciente e reflectida. No atual cenário em que vários documentos orientadores do currículo concorrem sem a desejável compatibilidade, a necessidade de fazer escolhas e assumir opções na gestão curricular é um imperativo. Mesmo com um cenário mais favorável ao nível dos documentos curriculares será sempre necessário fazer escolhas. Os professores são artífices do currículo, na medida em que o interpretam, lhe dão corpo e consistência. Esta experiência tornou-nos bem mais confiantes neste processo, mais corajosos para assumir as opções e mais capazes de explicitar e justificar as decisões.

O espírito de equipa e o trabalho complementar de cada elemento fez emergir as vantagens de trabalhar colaborativamente e a existência de espaços de discussão e partilha de decisões, materiais e posicionamentos veio lembrar experiências gratificantes do trabalho desenvolvido no âmbito do Plano de Ação para a Matemática.

A experiência perdurará de dois pontos de vista distintos. Por um lado, a amizade criada em momentos únicos, por vezes até altas horas da madrugada, por outro lado a convicção que todos podemos ganhar ao trabalhar desta forma, na certeza que a distância não será, depois de todas as experiências pessoais de cada docente, um impeditivo para que o trabalho colaborativo se realize.

É imperioso criar comunidades de aprendizagem, nas quais os professores discutam aspectos pedagógicos, partilhem experiências e resultados, planifiquem e criem entendimentos, demonstrem as suas conquistas mas também apresentem os seus constrangimentos.

EM: Percebemos que, nesta experiência, foi importante o trabalho colaborativo em que tomaram decisões curriculares.

No nosso país já tivemos excelentes iniciativas como o Programa de Formação Contínua em Matemática, o Acompanhamento do Secundário e o Plano da Matemática, com efeitos na prática dos professores e nas escolas. Na vossa opinião, de que forma é que esta iniciativa e outras em que participaram podem ser continuadas?

Equipa MAT 9: Consideramos que o estabelecimento de programas de formação em articulação com a prática letiva, na linha do Programa de Formação Contínua, ou em modelos de formação continuada, estruturada, participada e com horizontes temporais alargados é uma forma eficaz de promover o desenvolvimento profissional dos professores e de mudança efetiva das práticas, como nos parece evidente da experiência com o Plano da Matemática. Como no #EstudoEmCasa, a criação de tempos e espaços para a reflexão continuada e integrada em torno do currículo, das metodologias e dos recursos para criar cenários de aprendizagem adequados a cada contexto parece-nos essencial... será ainda necessário incluir outros elementos fundamentais como a avaliação que, no contexto desta experiência, não faria sentido incluir.

Outra vertente que em que nos parece importante investir é na criação de recursos, ou na sua seleção, organização e disponibilização. A dispersão de recursos e materiais na Internet não facilita o trabalho dos professores e implica um investimento significativo de tempo para a sua mobilização adequada. Por outro lado, a existência de elementos integradores desses recursos em cenários de aprendizagem, com sugestões de implementação e avaliação, seria um auxiliar precioso para os professores.

Enfim, é urgente recrear o conceito de escola aprendente. É imprescindível que se entenda que o foco da ação de cada escola e de cada docente é o currículo, entendido num conceito mais lato.

A construção colectiva do saber, com a envolvimento de todos os atores educativos será um dos grandes ganhos do sistema educativo. Esta pandemia, colocou às escolas e aos seus professores enormes desafios, mas deixou também a certeza que na adversidade, os professores demonstraram profissionalismo, compromisso e dedicação. Que saibamos todos aproveitar esta experiência difícil para criarmos experiências recheadas de momentos de desenvolvimento profissional.

PELA EQUIPA DO #ESTUDOEmCASA DE MATEMÁTICA DO 9.º ANO

PAULO ALMEIDA

PAULO CORREIA

SUSANA ALMEIDA

VÂNIA MATEUS

Projeto interdisciplinar «Eu sinto logo je suis»: Uma colaboração entre Francês - Português - Matemática

NUNO INÁCIO
SÓNIA MENDES
SUSANA SILVA

No ano letivo 2018/2019, na Escola Básica Quinta Nova da Telha, no Barreiro, duas professoras e um professor de disciplinas diferentes, francês, português e matemática decidiram unir esforços para proporcionar aos seus alunos experiências de aprendizagem enriquecedoras e integradoras de várias áreas do conhecimento. Numa lógica preconizada pelo Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória e pela flexibilidade curricular, estes professores decidiram promover metodologias de aprendizagem ativa articulando saberes/competências. O tema escolhido teria de aglomerar as especificidades de cada disciplina e, simultaneamente, ser atual e potencializador de atitudes cívicas. Numa clara ação colaborativa, o projeto foi desenvolvido em turmas de ciclos diferentes (6ºB e 7ºB) abrangendo um total de quarenta alunos (cada uma com vinte alunos). A turma de sexto ano integra cinco alunos abrangidos pelo Decreto-lei 54/2018 e a de sétimo três alunos, que participaram em todas as atividades deste projeto inclusivo.

Os alunos de 6º ano (nas disciplinas de português e matemática) e de 7º ano (na disciplina de francês) realizaram, durante vários meses, o projeto em torno dos direitos humanos e da delicada questão dos refugiados, migrantes e requerentes de asilo. Qual o produto final? Um percurso interativo focado na aprendizagem cooperativa/colaborativa, que integrasse o uso das tecnologias, em que foram trabalhados vários domínios numa versão bilingue, em conjunto com a disciplina de matemática.

O portefólio digital *Seesaw* agregou as saberes apoiados em conteúdos das Aprendizagens Essenciais/Programa e Metas Curriculares. Para potenciar a tomada de consciência de problemas da atualidade, numa perspetiva de aprendizagem prática e recíproca, as ferramentas escolhidas foram imprescindíveis e eficazes servindo diferentes objetivos. Para proporcionar, contribuir, desenvolver e propulsionar um diálogo coletivo, colaborativo interdisciplinar, a investigação coletiva, a visão integrada dos conteúdos e a metacognição foram utilizadas as seguintes ferramentas: *Learning Apps*; *WordArt*, *Wheel Decide*, *Tricider*, *Powerpoint*, *Genially*, *Speakpic* e o *QRstuff*.

Verificou-se uma articulação entre domínios, competências/objetivos desenvolvidos, nas três disciplinas, no decurso do projeto, de acordo com o Programa e Metas Curriculares (6º ano) e as Aprendizagens Essenciais (7º ano). No português desenvolveram-se os domínios oralidade, leitura e escrita e

no francês potenciaram-se as competências comunicativa, intercultural e estratégica. Na matemática trabalharam-se percentagens, escalas, posições relativas entre retas, volumes entre outros assuntos que surgiam naturalmente no decorrer do projeto, ou que eram introduzidos pelo professor quando oportuno. Os alunos calcularam a percentagem de refugiados por país para se poder fazer uma comparação adequada, utilizaram as escalas para terem a noção do tamanho e compararam as áreas de modo a que, simultaneamente, os pudessem desenhar à escala, num tamanho maior. As turmas trabalharam a posição relativa de duas retas com material de desenho específico, com o intuito de aprimorarem a técnica para a construção da planificação de um paralelepípedo. Os volumes foram trabalhados a partir da planificação do paralelepípedo e do paralelepípedo propriamente dito, depois deste estar montado para se ter a noção do espaço ocupado.

DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

As notícias sobre refugiados faziam eco em todos os média e integravam conversas de alunos e professores e, prontamente, surgiu o desafio para um novo projeto sendo o portefólio digital *Seesaw* um aliado fundamental na comunicação, na colaboração e na concentração dos diferentes produtos. O mote foi lançado numa aula conjunta (6ºB/7ºB) com o visionamento da curta-metragem de Pascale Hecquet “Une girafe sous la pluie” e exploração dos livros “Soy un punto” de Giancarlo Macrì e Carolina Zanotti e “A Declaração Universal dos Direitos do Homem” (Edicare). Para orientar a abordagem à temática, a criação de uma nuvem de palavras (*WordArt*) e de um *Tricider*, alimentaram o debate. Concluída a fase da “Motivação”, a roda girou (*Wheel Decide*) e constituíram-se os grupos com elementos de cada turma e integrando os alunos com necessidades educativas específicas. Entusiastas, os alunos assumiram os guiões de trabalho e entraram na etapa “Exploração”. Aqui, munidos de ferramentas e vontade, as ideias fervilharam e deram início a várias pesquisas e atividades reflexivas acerca das migrações, dos países, dos conflitos e da pirâmide das necessidades de Maslow. Como jovens interventivos na sociedade, fizeram suas as canções “Au Rap Citoyen” (Jean Luc Brouillon) e “Liberdade” (Sérgio Godinho) num grito comum apelando aos Direitos Humanos.

Chegados à fase “Construção/Composição”, reuniram-se, novamente, em várias aulas conjuntas para iniciarem a construção/elaboração de jogos bilingues (*Learning Apps*), dos storyboards, da realidade aumentada (*Speakpic*), dos diferentes materiais e da planta do percurso interativo. Para dar voz aos próprios textos, procedeu-se ainda a gravações diversas. Aliando os sentidos, as ferramentas digitais ao esquadro e à régua, na disciplina de matemática, a partir das pesquisas elaboradas e dos dados recolhidos, calculou-se a percentagem de refugiados por cada país, desenharam-se os mapas dos países, à escala, em folhas A3 para a apresentação/exposição do projeto (figura 1). Estas escalas foram determinadas, usando as medidas reais e as medidas do desenho original, para se identificar a escala em que foi desenhado o mapa, usando-se a proporcionalidade direta.

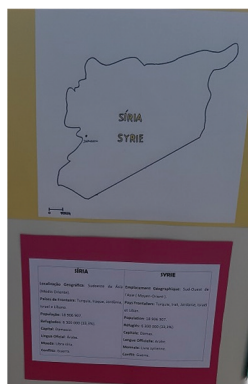


Figura 1. Mapa da Síria

Posteriormente, uma caixa representando um tijolo foi concebida para acomodar o convite para pais/encarregados de educação, professores e direção (figura 2). O “tijolo” simulou o muro/obstáculo a transpor pelos refugiados. A caixa consistiu num paralelepípedo cuja planificação foi desenhada pelos alunos, numa folha de cartolina cor-de-laranja, usando material e técnicas de desenho adequados. A planificação foi recortada e o respetivo paralelepípedo/caixa montado e decorado.

A surpresa surgiu ainda no decorrer do projeto com a gravação do Webinar da DGE “Metodologias de Aprendizagem Ativa” (<https://webinars.dge.mec.pt/webinar/metodologias-de-aprendizagem-ativa>) onde houve oportunidade para explicar as diferentes etapas do processo e o produto final.



Figura 2. Caixa com os convites

Com os convites enviados e a divulgação feita, nervosismo e excitação à flor da pele, apresentou-se o percurso interativo à comunidade educativa em que pais/encarregados de educação se também colaboraram ativamente nas diferentes atividades.

Em vários momentos foi necessária a reflexão sobre os diversos trabalhos realizados e ferramentas/recursos utilizados. A utilidade dos feedbacks e consequentes ajustes permitiram manter o foco e levar a bom porto o desafio lançado.

CONCLUSÕES

Durante a realização do projeto, salientam-se as capacidades de cooperação, de resolução de problemas e atitudes/comportamentos de todos os alunos envolvidos face à delicada temática abordada. Os alunos assumiram-se como produtores de conhecimento e estiveram cientes das expectativas relacionadas com a colaboração, bem como da autonomia e responsabilidade na sua própria aprendizagem e na do grupo. A colaboração foi uma parte fundamental neste projeto, os discentes tiveram sempre um papel ativo ao trabalharem em conjunto, desenvolvendo o pensamento crítico e a criatividade, entre outras competências, com o objetivo de criarem diferentes produtos e apresentá-los à comunidade educativa.

Ao longo do processo, os alunos contribuíram na promoção da coadjuvação/cooperação através de ferramentas digitais, compartilhando e discutindo as informações, bem como refletindo sobre os resultados e/ou reajustando-os, partilhando responsabilidades e tomando decisões significativas em conjunto.

Os professores assumiram-se como facilitadores e enquadreadores de todas as tarefas, centrando a aprendizagem nos alunos tendo também como objetivo inovar a prática pedagógica, com benefícios claros para as aprendizagens dos alunos. Simultaneamente, apresentaram uma visão geral da organização e do que se esperava dando espaço à negociação; incentivaram o uso de diferentes ferramentas e dispositivos; proporcionaram aprendizagens significativas; incentivaram os alunos a trabalharem colaborativamente, a estudarem recursos, a analisarem materiais e a apresentarem conclusões de forma criativa; ajudaram os alunos a integrar produção multimédia, produção web e tecnologias na publicação dos seus projetos; apoiaram a produção contínua de conhecimentos; consciencializaram para a interdependência entre direitos e responsabilidades, valores do comportamento ético, da responsabilidade, da empatia e do respeito pelos outros; promoveram e auxiliaram a comunicação entre as turmas e a comunidade escolar; promoveram a avaliação reflexiva e forneceram feedback/sugestões durante todo o processo.

Os pais/encarregados de educação foram sempre colaboradores nas autorizações de aulas extra e gravações áudio/imagem e, no dia da apresentação, participaram ativamente e com entusiasmo nas etapas do percurso.

NUNO INÁCIO
SÓNIA MENDES
SUSANA SILVA

ESCOLA BÁSICA QUINTA NOVA DA TELHA, BARREIRO

Aprender e Ensinar Matemática online: possibilidades das Salas Simultâneas

HÉLIA JACINTO
PAULA DIOGO

O Zoom é uma plataforma online de áudio e videoconferência. Inicialmente desenhada como uma solução empresarial, a sua versão gratuita rapidamente fez sucesso noutras áreas, como a Educação, sobretudo durante o período de ensino remoto de emergência. Esta plataforma apresenta um conjunto de potencialidades que têm inspirado outras plataformas do género. Uma dessas vantagens é a possibilidade de organizar o coletivo de participantes numa reunião, como uma turma de alunos, em grupos de variadas dimensões: as designadas Salas Simultâneas. Neste texto exemplificamos o modo de funcionamento das Salas Simultâneas no Zoom e, a partir das experiências que vivemos no período de confinamento, apresentamos algumas possibilidades da sua utilização no ensino e aprendizagem da matemática no 3º ciclo¹, tanto em sala de aula como num clube online de matemática.

COMO CRIAR AS SALAS SIMULTÂNEAS

O Zoom permite criar até 50 Salas Simultâneas. Enquanto a reunião decorre, o anfitrião pode criar as Salas e atribuir a cada uma os participantes que entender (figura 1). É possível *renomear* ou *excluir* cada Sala, definir se os participantes podem regressar à sessão principal, estipular o tempo de duração para o trabalho nas Salas e o tempo que os participantes têm para terminar os trabalhos após o anfitrião dar indicação para fechar as mesmas (figura 2).



Figura 1. Menu da reunião Zoom, com localização da opção de Salas Simultâneas

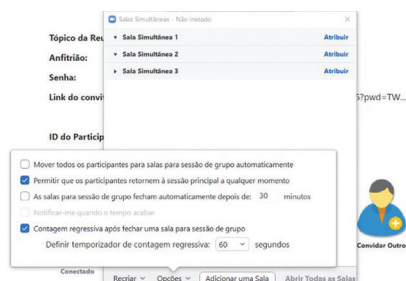


Figura 2. Configuração de opções das Salas Simultâneas, após a reunião iniciar.

Esta modalidade de trabalho também pode ser configurada antecipadamente com pré-atribuição de Salas Simultâneas

¹ Sílvia Zuzarte relata uma experiência com Salas Simultâneas no Ensino Secundário no artigo E@D: Práticas e Aprendizagens, pag. 40, deste mesmo número.

aquando do agendamento da reunião (figura 3). O anfitrião pode, nesse momento, solicitar a atribuição “automática” dos participantes a cada sala (i.e, aleatoriamente) ou fazê-lo manualmente, selecionando os endereços de e-mail dos participantes autorizados a ingressar numa determinada Sala (figura 4). Pode criar as Salas que desejar, renomeá-las, atribuir os participantes a cada uma ou, em alternativa, importar essa informação a partir de um ficheiro cvs, dado que o Zoom disponibiliza um *template* para esse efeito.

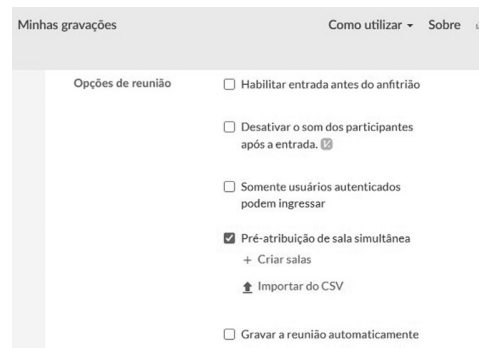


Figura 3. Configuração de opções das Salas Simultâneas, antes de a reunião iniciar.

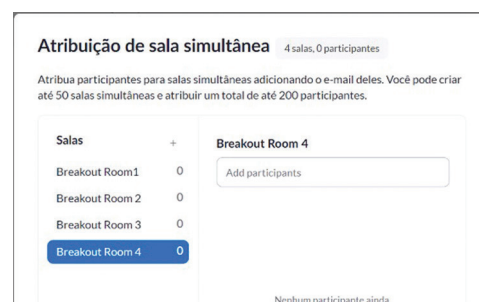


Figura 4. Configuração da pré-atribuição de Salas Simultâneas.

Já nas Salas Simultâneas os alunos podem colaborar para dar resposta às solicitações do professor e, em caso de dúvida, podem chamá-lo à sua Sala. Neste caso, o professor recebe uma notificação e pode, de imediato, entrar na sala que solicitou a sua presença. Também é possível enviar uma mensagem curta para as Salas e o professor pode permitir a partilha de ecrãs de modo a que os alunos possam colaborar a partir de documentos nos seus computadores ou com recurso ao *quadro branco* (*whiteboard*) do Zoom. No final do tempo estipulado, ou quando o professor assim resolver, as Salas encerram-se e os alunos regressam à sessão principal.

POSSIBILIDADES DE USO DAS SALAS SIMULTÂNEAS PARA A AULA DE MATEMÁTICA ONLINE

Um dos desafios que se coloca ao professor de matemática é de que forma pode continuar a proporcionar aos seus alunos, e em tempos de ensino remoto de emergência, experiências de aprendizagem ricas e diversificadas. É nossa convicção de que a organização do trabalho dos alunos em Salas Simultâneas pode criar oportunidades para o desenvolvimento de várias capacidades que, tendo por base as Aprendizagens Essenciais, vão ao encontro das competências plasmadas no Perfil do Aluno.

Tal como na sala de aula, com o trabalho em pequenos grupos, a utilização de Salas Simultâneas favorece o desenvolvimento da competência de trabalho colaborativo, da capacidade de comunicação, da autonomia dos alunos. Estes têm oportunidade para aprender a adequar as suas ações em contextos de colaboração e de partilha e também para aprender a utilizar diferentes meios para comunicar e trocar ideias, ou ainda elaborar um relatório de uma atividade realizada em grupo. Os alunos podem usar, por exemplo, ferramentas do Office 365 ou o Google Drive para armazenamento de documentos partilhados que todos os elementos do grupo podem editar em simultâneo (como o Google Docs ou o Google Sheets). Já que todos têm acesso a um mesmo documento e nele podem escrever ao mesmo tempo, todos os alunos colaboram efetivamente na construção do produto final.

Mas como tirar partido das Salas Simultâneas para a aula de Matemática online? Apresentamos de seguida algumas possibilidades, com base nas experiências vividas no último período letivo.

USO DE SALAS SIMULTÂNEAS ANTES DA INTRODUÇÃO DE UM NOVO CONTEÚDO

A gestão curricular relaciona-se com a interpretação que o professor faz dos documentos curriculares, mas sempre “tendo em conta as características dos seus alunos e as suas condições de trabalho” (Ponte, 2005, p. 11). Assim, antes de lecionar um novo conteúdo é necessário aferir quais os conhecimentos anteriores que necessitam de consolidação de modo a melhor planejar a abordagem aos novos conteúdos.

Por exemplo, no tema Organização e Tratamento de Dados do 7.º ano, o professor pode planificar a avaliação formativa a partir de uma revisão dos conteúdos abordados no 2.º ciclo relativamente a este tema. Por serem conteúdos com um grau de dificuldade acessível, essa proposta pode ser feita através de Salas Simultâneas com recurso a uma plataforma como o SIMA – Sistema Interativo de Monitorização das Aprendizagens. Esta ferramenta digital foi desenvolvida pelo Centro de Competência Entre Mar e Serra em parceria com a DGE, integrado na Equipa de Recursos e Tecnologias Educativas.

A utilização da aplicação permite que os alunos, em pequenos grupos nas Salas Simultâneas, respondam a uma série de questões de escolha múltipla relativas ao tema. Na tomada de decisões é necessário discutir e chegar a um acordo sobre que opção assinalar. Através da aplicação, o professor

recebe informação com as respostas de todas as Salas e, com a turma reunida em grande grupo, pode analisar as dúvidas que surgiram e sistematizar os conhecimentos anteriores que considera fundamentais às novas propostas de trabalho e, consequentemente, às aprendizagens que tem em vista.

USO DE SALAS SIMULTÂNEAS COM VISTA À DIFERENCIAÇÃO PEDAGÓGICA

A diferenciação pedagógica é uma medida universal de suporte à aprendizagem prevista no DL 54/2018. O professor deverá identificar as necessidades dos seus alunos e proporcionar condições adequadas aos estilos e ritmos de aprendizagem, às motivações, aos interesses e às necessidades dos seus alunos. Este propósito poderá ser conseguido na aula de matemática online, através do uso de Salas Simultâneas. Enquanto os alunos trabalham nas suas Salas, o professor tem oportunidade de visitar cada grupo para esclarecer dúvidas e dar orientações ao seu trabalho, mas também para observar e conhecer melhor cada aluno, identificando as suas capacidades e as suas dificuldades. Esta observação pode contribuir para a diferenciação pedagógica, não só ao nível da planificação de tarefas específicas para alunos ou grupos de alunos, mas também da definição de estratégias de ensino-aprendizagem a adotar em sessões futuras.

Numa turma heterogénea, e dependendo da sua dimensão, uma possível configuração é a abertura de duas Salas Simultâneas em que numa delas o professor coloca alunos mais autónomos e aos quais propõe tarefas mais desafiantes, enquanto acompanha o trabalho do outro grupo, por exemplo, incentivando a consolidação de conteúdos e esclarecendo dúvidas. Esta organização também é flexível no sentido em que o professor pode ir transferindo alunos de uma sala para outra, à medida que se encontrem dificuldades ou que os objetivos sejam atingidos.

De um modo geral, a utilização de Salas Simultâneas pode ajudar o professor a gerir a diversidade das dificuldades de aprendizagem dos seus alunos no sentido em que permite i) adequar o tempo que disponibiliza para cada tarefa às necessidades de cada grupo de alunos, ii) gerir as dificuldades de cada grupo a partir de tarefas adaptadas mas que permitam trabalhar os mesmos conteúdos ou atingir os mesmos propósitos, iii) adequar a quantidade ou a profundidade dos trabalhos solicitados a grupos com características distintas, ou iv) promover a colaboração entre pares.

USO DE SALAS SIMULTÂNEAS PARA PROMOVER O ENSINO EXPLORATÓRIO

As Salas Simultâneas também se constituem como oportunidades para que os alunos se envolvam numa atividade matemática de natureza mais exploratória, em que o professor “deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13).

O professor pode seguir o modelo de quatro fases para a estrutura de uma aula de cunho exploratório: 1) introdução da tarefa; 2) desenvolvimento da tarefa; 3) discussão da tarefa, e 4) sistematização das aprendizagens matemáticas (Canavarro,

Oliveira & Menezes, 2012). Deste modo, o professor pode apresentar a tarefa no início da sessão à turma, esclarecendo o que se pretende, o tempo destinado para a sua realização, qual o produto esperado no final do trabalho e formatos da sua apresentação, e em seguida organiza os alunos nas Salas Simultâneas (neste tipo de trabalho, será vantajoso criar grupos heterogêneos). Durante o trabalho autônomo dos alunos, o professor pode circular pelas Salas Simultâneas questionando ou elucidando, registrando estratégias e descobertas ou dificuldades. No final desse trabalho, os alunos regressam à sessão principal e o professor poderá orquestrar uma discussão a partir das observações ou conclusões de cada grupo de alunos, a que se deve seguir uma síntese das principais ideias ou conceitos. No âmbito desta estratégia de ensino-aprendizagem, considera-se que a aprendizagem decorre da reflexão que os alunos realizam sobre as atividades em que se envolveram (Ponte, 2005).

Relatamos em seguida uma experiência decorrida numa turma de 7.º ano, durante o período de ensino remoto de emergência, a propósito do conteúdo de aprendizagem ‘Semelhanças’ do tema ‘Geometria e Medida’. A tarefa (figura 5) tinha como propósitos levar os alunos a construir figuras, justificar a semelhança entre figuras, determinar razões de semelhança, e prever e descrever as relações existentes entre perímetros e áreas de figuras semelhantes com as respetivas razões de semelhança.

A tarefa foi apresentada aos alunos em grande grupo a que se seguiu a organização do trabalho em Salas Simultâneas. O sistema fez a distribuição dos alunos presentes em Salas de 4 alunos de forma aleatória mas, como se pretendia que os grupos fossem heterogêneos, a professora procedeu em seguida a pequenos ajustes. O seu papel resumiu-se assim ao circular entre Salas, observando o modo de trabalhar dos alunos já que, nos grupos, os alunos com mais autonomia colaboravam com os colegas tendo sido poucas as vezes que os alunos utilizaram a função de “pedir ajuda”.

Durante o trabalho nas Salas, a professora pôde observar que os alunos revelaram algumas dificuldades em relacionar o valor do quociente entre as áreas com o quadrado da razão de semelhança. Por exemplo, quando a razão de semelhança era igual a 3 e a razão entre as áreas era igual a 9, os alunos concluíam que “o quociente entre as áreas é igual ao triplo da razão de semelhança” e não “igual ao quadrado da razão de semelhança” como se pretendia. No final, em grande grupo, foi necessário clarificar este aspeto e sistematizar a relação fazendo emergir a coerência com as conclusões obtidas nas outras situações exploradas. Em relação ao cálculo do perímetro da circunferência, os alunos revelaram dificuldades ao trabalhar com o valor exato de π , o que já se esperava por serem alunos de 7.º ano e este aspeto não ter sido ainda devidamente trabalhado. Ultrapassado este obstáculo, conseguiram continuar a tarefa.

No final do tempo estipulado para o trabalho nas Salas Simultâneas estas foram encerradas e os alunos regressaram à sessão principal, onde foram convidados a apresentar as suas conclusões. Após uma discussão dos contributos de cada grupo,

houve lugar a uma sistematização das relações existentes entre perímetros e áreas de figuras semelhantes com as suas razões de semelhança. O trabalho de consolidação que se seguiu foi feito a partir das propostas do manual.

**Tarefa: Relação entre perímetros e áreas de figuras semelhantes
7.º ano**

1. Desenha um retângulo com de base e de altura (retângulo I). À sua direita constrói um retângulo com de base e de altura (retângulo II).
 - 1.1. Determina a razão de semelhança, considerando que o retângulo II é uma ampliação do retângulo I.
 - 1.2. Calcula o perímetro do retângulo I e seguidamente calcula o perímetro do retângulo II.
 - 1.3. Divide o perímetro do retângulo II pelo perímetro do retângulo I. Compara o valor obtido com o valor da razão de semelhança. O que concluis?
 - 1.4. Calcula a área do retângulo I e seguidamente calcula a área do retângulo II.
 - 1.5. Divide a área do retângulo II pela área do retângulo I. Compara o valor obtido com o valor da razão de semelhança. O que concluis?
2. Desenha um triângulo retângulo com de base e de altura (triângulo I). À sua direita constrói um triângulo retângulo com de base e de altura (triângulo II).
 - 2.1. Justifica que os dois triângulos são semelhantes. Determina a razão de semelhança, considerando que o triângulo II é uma ampliação do triângulo I.
 - 2.2. Calcula a área do triângulo I e seguidamente calcula a área do triângulo II.
 - 2.3. Divide a área do triângulo II pela área do triângulo I.
 - 2.4. Compara o valor obtido com o valor da razão de semelhança. O que concluis?
3. Desenha uma circunferência de raio (circunferência I). À sua direita desenha uma circunferência de raio (circunferência II).
 - 3.1. Comenta a afirmação: “Duas circunferências são sempre semelhantes”. Calcula a razão de semelhança, considerando que a circunferência II é uma ampliação da circunferência I.
 - 3.2. Calcula o perímetro da circunferência I e seguidamente calcula o perímetro da circunferência II. Utiliza o valor exato de π .
 - 3.3. Divide o perímetro da circunferência II pelo perímetro da circunferência I. Compara o valor obtido com o valor da razão de semelhança. O que concluis?
 - 3.4. Calcula a área do círculo I e seguidamente calcula a área do círculo II.
 - 3.5. Divide a área do círculo II pela área do círculo I. Compara o valor obtido com o valor da razão de semelhança. O que concluis?

Figura 5. Tarefa apresentada aos alunos de 7.º ano.

Os alunos apreciaram o momento de trabalho conjunto, revelaram facilidade na organização do trabalho dentro do grupo, mostraram-se motivados e empenhados, conseguiram respeitar sempre as opiniões dos colegas e ajudar os alunos com maiores dificuldades. A tarefa revelou-se simples de implementar e permitiu que os alunos, à semelhança do que aconteceria numa aula presencial, conseguissem chegar às relações pretendidas.

POSSIBILIDADES DE USO DAS SALAS SIMULTÂNEAS PARA ATIVIDADES ONLINE DE ENRIQUECIMENTO MATEMÁTICO

Sendo certo que a adaptação ao período de confinamento foi de grande exigência, tanto para professores como para alunos e suas famílias, compreende-se que o foco da comunidade educativa tenha sido na promoção de aprendizagens curriculares, ditas formais. No entanto, é possível continuar a dinamizar clubes, campeonatos e outras iniciativas de enriquecimento matemático, pela via virtual.

O Clube de Matemática Tecn@Mat² é um desses exemplos. Inserindo-se num projeto de investigação em curso no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, a organização do Clube promoveu a resolução colaborativa de problemas de matemática com tecnologias digitais ao longo de várias sessões de trabalho online com estudantes de 3º ciclo de escolas de várias regiões do País.

Em cada sessão foram propostos dois desafios matemáticos (ver exemplo na figura 6), que podem ser apelidados de problemas não rotineiros (Jacinto & Carreira, 2014) no sentido em que não estão alinhados com o currículo mas visam estimular intelectualmente os participantes. Era permitida a utilização de qualquer recurso matemático e qualquer recurso tecnológico ao seu dispor, mas requeria-se explicitamente a explicação dos processos de resolução utilizados. Desta forma, os alunos eram impelidos a desenvolver *formas produtivas de pensar matematicamente* acerca de cada desafio, utilizando conhecimentos informais e incorporando elementos descritivos da sua abordagem podendo, naturalmente, recorrer a esquemas, figuras, cálculos e qualquer outra forma de expressar o processo e justificar os seus raciocínios.

Em cada sessão foram usadas Salas Simultâneas para criar um espaço de trabalho colaborativo para os elementos de cada equipa. Foi também facultado um espaço de trabalho no Google Drive, de acesso exclusivo a cada equipa, onde os participantes podiam colaborar em ficheiros Google Docs e Google Sheets para resolver os problemas ou elaborar a solução final de cada problema. Os participantes tiveram ainda oportunidade de explorar programas mais específicos para matemática como ambientes de geometria dinâmica (e.g., o GeoGebra) ou folhas de cálculo (e.g., o Excel), e ainda de explorar vantagens matemáticas de determinadas funcionalidades em programas de uso comum, como o editor de texto ou o editor de apresentações, e ainda programas de criação de animações e vídeo.

Findas as atividades, os participantes foram convidados a expressar as suas impressões sobre a experiência neste tipo de Clube. Alguns dos que já utilizavam a plataforma Zoom nas atividades letivas síncronas, conheciam as Salas Simultâneas mas para outros esta funcionalidade constituiu uma agradável novidade. De um modo geral, os participantes valorizaram o facto de assim poderem discutir e trocar ideias com os colegas sobre uma atividade que apreciavam: a resolução de desafios de matemática. Também manifestaram muito agrado com o facto de ficarem a conhecer colegas de outras escolas que, com eles, partilham este gosto pela matemática, pelos desafios e pelas tecnologias.

Apesar de dominarem o uso de várias ferramentas tecnológicas e conhecerem algumas que são habitualmente conotadas com Matemática, pelo menos de ouvir falar aos seus professores, estes alunos desconheciam formas úteis de as usar para resolver problemas e para expressar esses processos de resolução usando representações adequadas. Alguns explicaram que já usaram a

folha de cálculo na disciplina de TIC, para elaborar um horário; outros viram apresentações do professor que continham figuras construídas no GeoGebra. Um outro aspeto que marcou a sua aprendizagem ao longo das sessões do Clube consistiu na criação de uma explicação coerente e detalhada do processo de resolução, com justificação do raciocínio, atividade praticamente ausente nas suas experiências de sala de aula. Os participantes, encarregados de educação e professores foram unânimes em recomendar a continuidade do Clube tendo ainda sugerido que, em edições futuras, seja possível abarcar alunos de outros níveis de escolaridade.

Desafio 8: Reencontro de amigos

O Alexandre e o Bernardo vivem a uma distância de 22 km um do outro e querem encontrar-se mas só têm uma forma de fazer o caminho... a pé! Estão a combinar ir ao encontro um do outro logo que as aulas terminarem. O Alexandre irá partir da sua casa às 8 horas da manhã e vai caminhando a uma velocidade de 4 km por hora. O Bernardo prevê sair de casa uma hora mais tarde mas vai caminhar a uma velocidade de 5 km por hora. Mesmo que nenhum dos dois amigos leve relógio, é possível saber a que horas se vão encontrar. A que horas se dará o reencontro dos dois amigos? **Não se esqueçam de explicar o vosso processo de resolução!**

Horas	Km Alexandre	Km Bernardo
09:00	4	0
10:00	8	5
11:00	12	10
12:00	16	15
13:00	20	20
14:00	24	25
15:00	28	30

→ A distância da casa do Alexandre à casa do Bernardo era 22 Km
 → O Bernardo andou sempre a 5 Km (horas)
 → O Alexandre andou sempre a 4 Km (horas)
 → O Alexandre saiu de casa às 8:00.
 → O Bernardo saiu de casa 1 hora depois de o Alexandre ter começado

No início vimos a quantidade de quilómetros feita por hora por cada amigo, e fomos somando. Até chegarmos a uma hora em que a soma dos quilómetros dos amigos era igual a 22 Km. Logo, como o Alexandre demorou 2 horas e o Bernardo 1 hora, eles encontraram-se às 11:00.

Figura 6. Desafio colocado no Clube Tecn@Mat e solução apresentada pela Equipa 1, com tabela elaborada na folha de cálculo Google Sheets e inserida posteriormente num ficheiro Google Docs.

QUESTÕES DE SEGURANÇA ONLINE

Apesar de termos aqui apresentado possibilidades de uso pedagógico das Salas Simultâneas, parece-nos igualmente oportuno alertar para o facto de o professor não conseguir monitorizar todos os grupos ao mesmo tempo quando utiliza esta configuração no Zoom. Deixamos, portanto, algumas recomendações bem a propósito das questões de segurança em plataformas desta natureza:

– O professor pode decidir quem entra na sala (e quando) ao ativar a ‘sala de espera’ e desativar a ‘entrada antes do anfitrião’.

²<https://compst2025.wordpress.com/tecnamat/>

- No caso de, por lapso, o professor permitir a entrada de um utilizador indesejado, é possível removê-lo da reunião ou enviá-lo para a sala de espera.
- É possível impedir (ou possibilitar) que os alunos partilhem os seus ecrãs.
- É possível silenciar todos os participantes durante a reunião, mas essa configuração também se pode fazer aquando do agendamento da reunião.
- Uma vez que o professor não conseguirá controlar a sala de chat do Zoom, sempre que não se pretenda que os alunos troquem mensagens entre si deve desativar o ‘bate-papo’.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Da nossa experiência com a plataforma Zoom, tanto na aula de Matemática online como numa iniciativa de enriquecimento matemático, destacamos como principal vantagem da utilização de Salas Simultâneas a oportunidade para estimular o desenvolvimento de competências matemáticas dos alunos de forma mais autónoma e em colaboração com os pares. Quanto às propostas de trabalho para a aula de Matemática online, o professor pode e deve continuar a diversificar as experiências que propõe aos seus alunos, adequando o tipo de tarefa à modalidade de organização da sala virtual mais indicada.

Recentemente, foi anunciado que outras plataformas estão a trabalhar no sentido de facultarem funcionalidades semelhantes, pelo que um eventual regresso ao ensino remoto de emergência permitirá continuar a tirar partido da organização do trabalho em Salas Simultâneas para o ensino e a aprendizagem da matemática online.

Referências

- Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In Canavarro, P., Santos, L., Boavida, A., Oliveira, H., Menezes, L., & Carreira, S. (Orgs.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*. Portalegre: SPIEM.
- Jacinto, H. & Carreira, S. (2014). Resolver problemas de matemática: um desafio ao alcance de todos, fora e dentro da sala de aula. *Educação e Matemática*, 130, 71-77.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

HÉLIA JACINTO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA, LISBOA, PORTUGAL

PAULA DIOGO

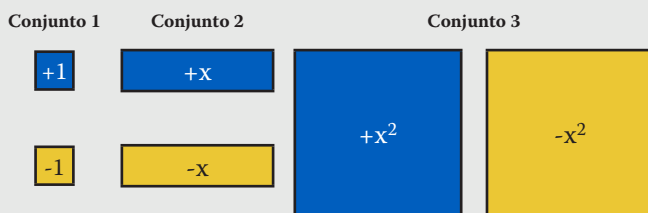
ESCOLA SECUNDÁRIA ARCO ÍRIS, PORTELA, LOURES, PORTUGAL

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

O produto de polinómios com “Algebra Tiles”

“Algebra Tiles” permitem modelar operações algébricas entre polinómios com recurso a peças de forma retangular com dimensões e cores distintas.

As peças estão organizadas em três conjuntos diferentes e em cada conjunto existem peças de duas cores, no caso azuis correspondendo aos monómios de coeficiente 1 e amarelas de coeficiente -1.



- O primeiro conjunto é constituído por peças quadradas com dimensões 1 por 1;
- No segundo conjunto estão representadas peças retangulares com dimensões 1 por x;
- O terceiro conjunto é constituído por peças quadradas de dimensões x por x.

A proposta de tarefa a seguir apresentada teve por base peças construídas pelos alunos a partir de folhas de papel coloridas. Contudo, a tarefa pode ser realizada com recurso a applets disponíveis na Internet, por exemplo:

- <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Algebra-Tiles/>
- <https://www.geogebra.org/m/rnhkc5qr>

A tarefa a seguir apresentada atinge com maior facilidade os seus objetivos se for precedida de uma sequência de aprendizagem em torno das operações com polinómios e casos notáveis também realizadas com recurso a Algebra Tiles.

PAULO ALMEIDA

SUSANA ALMEIDA

VÂNIA MATEUS

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS FERNANDO CASIMIRO PEREIRA DA SILVA – RIO MAIOR

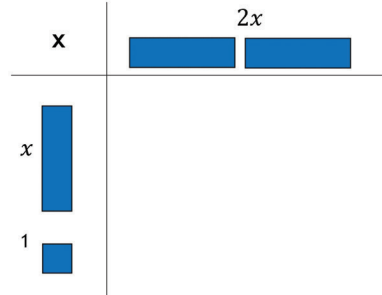
PAULO CORREIA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE ALCÁCER DO SAL

O produto de polinómios com Algebra Tiles

1. Considera o produto de polinómios: $2x \times (x+1)$.

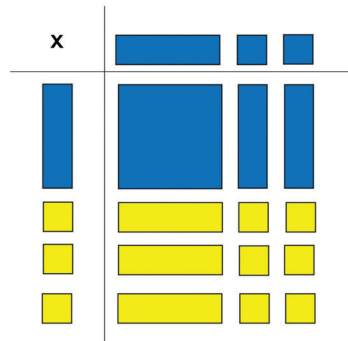
- Com recurso às tuas peças, constrói um diagrama semelhante ao da figura e completa-o com as peças correspondentes a cada um dos produtos.
- Observa as peças que acrescentaste no diagrama e apresenta o produto na forma de um polinómio reduzido.



Quando multiplicas x por x preenches o espaço com a peça do x^2

2. No diagrama da figura está representado o produto de dois polinómios do primeiro grau.

- Identifica os fatores envolvidos no produto representado no diagrama da figura.
- Apresenta o produto na forma de um polinómio reduzido.



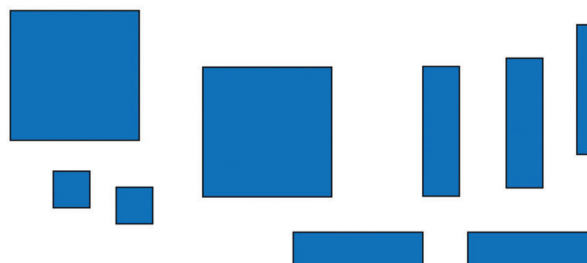
Não te podes esquecer que deves sempre remover os pares de peças cuja soma seja zero.

3. Com recurso a um diagrama semelhante aos utilizados nas questões anteriores, obtém o polinómio reduzido correspondente ao produto:

$$(2x-1) \times (-x+2)$$

4. Com as peças abaixo podes obter o polinómio reduzido

$$2x^2+5x+2$$



- Usando todas as peças, dispõe as mesmas de modo a obteres um retângulo.
- Identifica as expressões algébricas que representam as dimensões dos lados do retângulo.
- Escreve o polinómio anterior na forma de um produto de polinómios.

Articulando Matemática A e Aplicações Informáticas: Iterações, o Método das Bisseções sucessivas e o Teorema de Bolzano-Cauchy

ANA ISABEL CUNHA

CRISTINA CRUCHINHO

MARIA JOSÉ CARVALHO

A autonomia das escolas permite-lhes “dispor de maior flexibilidade na gestão curricular, com vista à dinamização de trabalho interdisciplinar, de modo a aprofundar, reforçar e enriquecer as Aprendizagens Essenciais” (Decreto-Lei n.º 55/2018). A articulação das diferentes disciplinas em detrimento de um conhecimento fragmentado, permite desenvolver competências como o raciocínio e a resolução de problemas e o pensamento crítico e o pensamento criativo, centrais no Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.

As aprendizagens tornam-se significativas quando integradas num contexto real de aplicação, conjugando saberes que se mobilizam com sentido na abordagem interdisciplinar do currículo. Esta visão global que combina as várias áreas curriculares induz a agregação do conhecimento enquanto ferramenta fundamental para a resolução de problemas no concreto. Mais do que acumular informação, importa que o aluno seja capaz de relacionar construindo saberes de forma crítica que aplicará em contexto e não como uma mera reprodução.

Este texto pretende contribuir para a reflexão sobre estas questões, ilustrando a concretização de uma experiência de interdisciplinaridade na Escola Secundária Filipa de Vilhena e apontando para implicações e eventuais atividades futuras.

INTERDISCIPLINARIDADE

Quando se fala em interdisciplinaridade rapidamente surgem questões como «nas escolas é possível realmente fazer interdisciplinaridade? De que forma?». Contudo, é igualmente importante e pertinente perguntarmo-nos sobre «porque é que é importante a articulação curricular? O que podem desta forma os alunos aprender e que atitudes podem desenvolver?»

As práticas de articulação curricular reconhecem que os desafios do presente e do futuro necessitam de uma utilização interdisciplinar dos conhecimentos, de uma construção contínua do saber, que vai muito além da difusão de informação. Note-se que o acesso à informação é quase tão simples e imediato quanto assustador, mas o tratamento dessa informação de forma crítica e consciente não é trivial. Para se saber estar na atual sociedade, é preciso aprender: aprender a conhecer,

aprender a fazer, aprender a viver com os outros e aprender a ser. Nesta perspetiva, a educação deve coexistir ao longo de toda a vida e deve procurar um equilíbrio entre o conhecimento, a compreensão, a criatividade e o sentido crítico.

Respeitando as singularidades de cada disciplina, deve procurar-se desenvolver competências transversais comuns, a partir do trabalho que ocorre nas diferentes áreas. As disciplinas e as respetivas áreas não são autossuficientes e como tal o trabalho colaborativo entre elas, para além do realizado nos laboratórios e nas bibliotecas, é também essencial na escola. A articulação horizontal entre os conhecimentos das várias disciplinas permite integrar visões de um mesmo assunto sob diferentes ângulos, promovendo uma compreensão mais ampla e, conseqüentemente, melhores aprendizagens e o desenvolvimento de competências mais complexas. Claro que tal exige que o currículo, encarado como ferramenta para promover o sucesso escolar, seja organizado e gerido de forma consciente e ponderada. Numa lógica de trabalho colaborativo, devem ser organizadas equipas multidisciplinares para organizar um percurso de ensino e aprendizagem orientado por objetivos claros e que seja tão adequado quanto possível aos alunos ou turma em causa.

As atividades e os projetos de interdisciplinaridade devem assim ser planeados nesta linha de pensamento, com o intuito de:

- Consolidar, aprofundar e enriquecer as aprendizagens essenciais;
- Desenvolver competências através da mobilização e articulação de conhecimentos das várias disciplinas com vista à resolução de problemas;
- Implementar metodologias centradas no aluno, ator principal no processo de aprendizagem, potenciando aprendizagens significativas.

A planificação passa, numa primeira fase, por identificar as aprendizagens essenciais que são comuns ou que estabelecem relações entre as várias disciplinas ao nível dos conhecimentos, capacidades e atitudes. Com o propósito de desenvolver as competências identificadas, podem ser desenhados projetos ou atividades que as trabalhem em articulação prática, potenciando a assimilação das aprendizagens.

Conceber a integração de aprendizagens essenciais, comuns ou relacionadas, ganhará relevância se planificada para dar resposta a uma questão-problema pensada conjuntamente e cuja resolução implicará um processo articulado de construção ativa de conhecimento e capacidades.

A concretização e a monitorização da atividade delineada permitirão depois avaliar os resultados em função daquelas que eram as suas finalidades. Parte desta avaliação passa por refletir no sentido de procurar melhorar a atividade, fazendo as alterações que se acharem convenientes. Este desafio de contínua planificação, concretização e avaliação da atividade é crucial neste processo de gestão do currículo de forma integrada e contextualizada. No esquema (figura 1) encontra-se representado este processo em que a prática docente assenta.

A constante ação-reflexão é de facto necessária para a conceptualização das estratégias pedagógicas, que se pretendem concretizadas e reajustadas a cada grupo-turma e ao currículo que se pretende veicular.



Figura 1. Estratégia pedagógica

RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA NA ESCOLA FILIPA DE VILHENA

O trabalho que relatamos neste texto surgiu no contexto de uma atividade de interdisciplinaridade com a turma A do 12.º ano da Escola Secundária Filipa de Vilhena no ano letivo 19/20, levada a cabo pelas três autoras do texto: Maria José, diretora de turma e professora de Aplicações de Informática (API) do 12ºA; Cristina Cruchinho, professora de Matemática A do 12ºA e orientadora de estágio de Ana Isabel; Ana Isabel, a frequentar o Mestrado em Ensino da Matemática para o 3º ciclo do ensino básico e ensino secundário, na FCUP.

Na abertura do ano letivo, dinamizado pela direção da escola, decorreram reuniões com os professores de cada ano de escolaridade com o objetivo de analisarem as aprendizagens essenciais, num caminho de reflexão, interiorização e discussão das mesmas. Num ambiente de trabalho colaborativo e com vista a promover o trabalho interdisciplinar, foram discutidas propostas de articulação dos conteúdos das várias disciplinas, sugeridas pelos professores, que elaboraram documentos por ano de escolaridade.

Neste âmbito, foi sugerida e aprovada uma atividade interdisciplinar entre Matemática A e Aplicações Informáticas (API) que consistia na implementação em C++ do método das

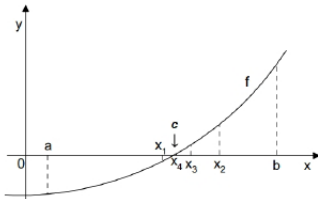
bisseções sucessivas, em articulação com o Teorema de Bolzano-Cauchy. O currículo das duas disciplinas cruzaria as estruturas de repetição (ciclos iterativos) implementadas na linguagem de programação C++ e o Teorema de Bolzano-Cauchy, numa abordagem conjunta.

Em primeiro lugar, os alunos trabalharam o Teorema de Bolzano-Cauchy e só mais tarde, já no 2.º período, deram início ao estudo das estruturas de repetição em API. Estando a lecionação dos conteúdos programáticos necessários numa fase adequada, reuniram-se condições para implementar a atividade interdisciplinar. Próximo da sua data de implementação, que viria a ser a 7 de fevereiro, as professoras reuniram para elaborar uma planificação da atividade a curto prazo, tendo elaborado um documento suporte para auxiliar o desenvolvimento da aula interdisciplinar, que se encontra representado na figura 2.

 Bom Trabalho!	ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA Disciplinas de Aplicações Informáticas e Matemática A 12º Ano de Escolaridade
--	--

Método das bisseções sucessivas

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \times f(b) < 0$.
Designemos por $c \in]a, b[$ um zero desta função. Observa a figura:



Dividindo o intervalo $[a, b]$ segundo o seu ponto médio, obtém-se x_1 . Passa a existir dois subintervalos $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$ a ser considerados. Se $f(x_1) = 0$ então já encontramos o zero da função. Caso contrário, o zero da função encontra-se num dos dois subintervalos. Calculando a imagem de x_1 conseguiremos perceber em qual dos subintervalos estará. Porquê?

Podemos repetir este processo até que se obtenha uma aproximação para c , com um certo erro, fazendo um número maior ou menor de iterações.

Algoritmo:
Repetimos enquanto $b - a > \text{erro}$:

- Calculamos o ponto médio do intervalo: $m \rightarrow \frac{a+b}{2}$
- Calculamos valor $\rightarrow f(a) \times f(m)$:
 - Se valor = 0 então o zero da função é m .
 - Caso contrário, se valor < 0 então o zero da função está em $[a, m]$: $b \rightarrow m$
 - Caso contrário, se valor > 0 então o zero da função está em $[m, b]$: $a \rightarrow m$

Vamos programar!
Considera a função f real de variável real definida por

$$f(x) = x^2 - 5x + 2$$

Sabe-se que f tem um zero no intervalo $[0,1]$. Elabora um programa que te permita encontrar o zero de f com um erro de 0.01 e com um erro de 0.001.

Figura 2. tarefa proposta

A atividade foi planeada para duas aulas de 50 min, numa sala com computadores e passando pelos seguintes momentos:

- apresentação do método das bisseções sucessivas e associação com o Teorema de Bolzano-Cauchy;
- interpretação do problema ao nível da programação – estruturação do algoritmo e posterior implementação na linguagem C++
 - definição do objetivo do programa

- b. definição das variáveis necessárias e respetivos tipos de dados
 - c. operações a realizar – estruturas de controlo e de repetição
 - d. apresentação do resultado
3. programação do método das bisseções sucessivas aplicado a uma função e intervalo, pelos alunos e nos respetivos computadores.

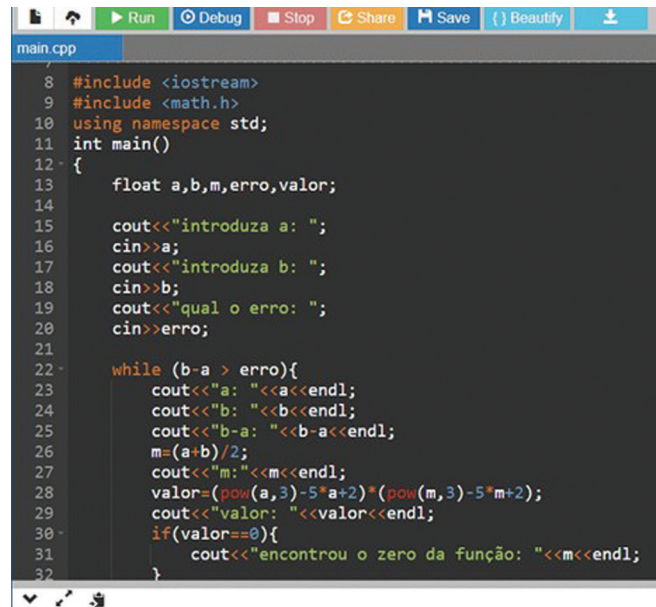
Antes da realização da aula interdisciplinar, Ana assistiu a uma das aulas de API do 12ºA, onde teve oportunidade de conhecer mais proximamente o trabalho dos alunos em programação, constatando o interesse e as dificuldades que tinham na implementação das suas ideias. Durante essa aula, um grupo de alunas explicou e mostrou a Ana um jogo em que o jogador tem como adversário o computador. Este gera um número inteiro aleatório num certo intervalo e o jogador vai gastando tentativas para adivinhar esse número, sendo que após cada tentativa o computador lhe indica se o número certo é inferior ou superior ao seu palpite. O raciocínio subjacente ao algoritmo pressupunha exatamente o método iterativo controlado por condições (usando a lógica de Boole) e aproximações sucessivas, o que ia ao encontro da tarefa que iam realizar na aula interdisciplinar.

A aula interdisciplinar ocorreu durante dois tempos letivos de matemática, onde, contrariamente ao planificado, estava apenas disponível um computador, o da mesa do professor, uma vez que não foi possível requisitar uma sala de informática. Este facto obrigou a uma adaptação da metodologia inicialmente prevista, decorrendo todo o trabalho em grande grupo.

Assim, a aula iniciou-se com a apresentação do método das bisseções sucessivas, dinamizada por ambas as professoras. De seguida, o desafio proposto aos alunos – implementação do método das bisseções sucessivas – começou a ser analisado do ponto de vista da programação, partindo da questão “Será que conseguimos elaborar um programa que nos permita encontrar o zero de f com um erro de 0.01 e com um erro de 0.001?”

O desenvolvimento do algoritmo foi sucedendo naturalmente, solicitando-se aos alunos a mobilização do que já conheciam das aulas de programação, mas num contexto de aplicação concreto. Definiram-se variáveis, construiu-se a estrutura de repetição com base na condição $b-a > \text{erro}$ e testaram-se sucessivamente os valores de $f(a)$ e $f(b)$ com a estrutura condicional `if...else` em aproximações sucessivas ao zero da função dada. Conseguiram ainda extrapolar o conceito de função em C++, otimizando o algoritmo e tornando o programa mais eficiente.

Um aluno voluntariou-se para escrever o código (figura 3) enquanto este era construído com a colaboração da turma. Na fase final da aula foi testado o programa para encontrar um zero de uma dada função, que se sabia *a priori* existir num determinado intervalo (figura 4). Foi ainda abordada a questão dos erros cometidos nas aproximações a que o programa permitia aceder e sobre como obter valores sucessivamente mais próximos do valor exato.

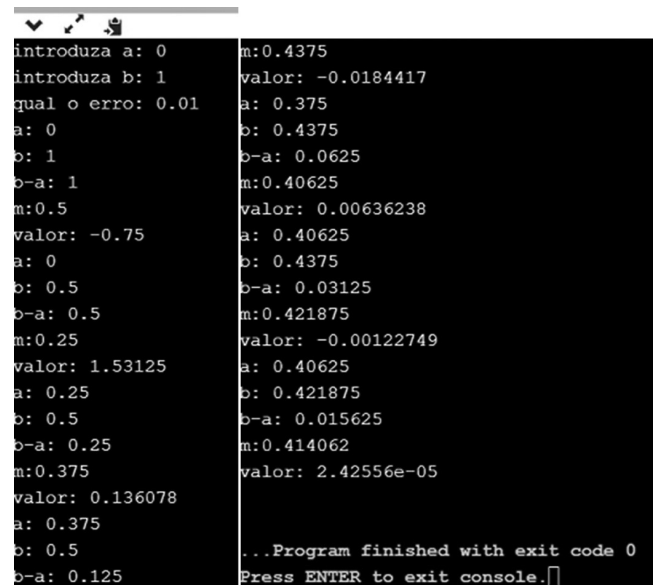


```

8 #include <iostream>
9 #include <math.h>
10 using namespace std;
11 int main()
12 {
13     float a,b,m,erro,valor;
14
15     cout<<"introduza a: ";
16     cin>>a;
17     cout<<"introduza b: ";
18     cin>>b;
19     cout<<"qual o erro: ";
20     cin>>erro;
21
22     while (b-a > erro){
23         cout<<"a: "<<a<<endl;
24         cout<<"b: "<<b<<endl;
25         cout<<"b-a: "<<b-a<<endl;
26         m=(a+b)/2;
27         cout<<"m: "<<m<<endl;
28         valor=(pow(a,3)-5*a+2)*(pow(m,3)-5*m+2);
29         cout<<"valor: "<<valor<<endl;
30         if(valor==0){
31             cout<<"encontrou o zero da função: "<<m<<endl;
32         }
33     }
34 }

```

Figura 3. Excerto do programa “Método das bisseções sucessivas”



```

introduza a: 0      m:0.4375
introduza b: 1      valor: -0.0184417
qual o erro: 0.01   a: 0.375
a: 0                b: 0.4375
b: 1                b-a: 0.0625
b-a: 1              m:0.40625
m:0.5               valor: 0.00636238
valor: -0.75        a: 0.40625
a: 0                b: 0.4375
b: 0.5              b-a: 0.03125
b-a: 0.5            m:0.421875
m:0.25              valor: -0.00122749
valor: 1.53125      a: 0.40625
a: 0.25             b: 0.421875
b: 0.5              b-a: 0.015625
b-a: 0.25           m:0.414062
m:0.375             valor: 2.42556e-05
valor: 0.136078     a: 0.375
a: 0.375            b: 0.5
b: 0.5              ...Program finished with exit code 0
b-a: 0.125          Press ENTER to exit console.

```

Figura 4. Execução do programa “Método das bisseções sucessivas”

A intenção inicial era fomentar a construção ativa de aprendizagens permitindo que os alunos, após a apresentação do método das bisseções sucessivas e a sua análise, tentassem implementar o código em trabalho de pares e com alguma apropriação do método que se apresentou. Porém, apenas alguns alunos participaram ativamente nesta atividade, o que consideramos ter sido influenciado pelo facto de os alunos não terem os seus computadores de trabalho, como tínhamos planeado.

O PONTO DE VISTA DOS ALUNOS

Foi realizado um questionário com o objetivo de compreender o modo como os alunos sentiram a aula interdisciplinar e em que medida consideraram oportuna ou não esta articulação.

Os alunos consideraram que aula foi bem articulada e afirmaram que gostariam de ter mais aulas com articulação curricular. Expressaram ainda que:

Pude aprender mais sobre programação.

Por articular disciplinas distintas levou com que acabássemos por nos sentir cativados sobre como duas matérias que aparentemente não têm nada em comum, se conjugarem perfeitamente.

Ter melhor a noção de que duas diferentes matérias podem sim estar relacionadas e, assim, ter uma outra perspectiva sobre um conteúdo.

CONCLUSÃO E IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA LETIVA

A atividade que implementamos tinha como objetivo que os alunos apreendessem a complexidade da situação apresentada – o método das bissecções sucessivas – e a interiorizassem articulando os seus conhecimentos e competências das duas disciplinas envolvidas. O cruzamento de saberes e de opiniões diversas podia assim contribuir para uma interpretação mais sólida e uma compreensão mais ampla da situação.

No sentido de avaliar o trabalho, tínhamos intenção de propor uma questão aos alunos sobre o método das bissecções sucessivas, com o intuito de compreender que significado tinham atribuído ao método e que articulação faziam com o teorema de Bolzano-Cauchy. Também, já estávamos a delinear com outra turma a implementação inicialmente prevista, em que cada par de alunos elaborasse um programa no seu computador. Estas atividades não foram levadas a cabo devido ao fecho das escolas a 13 de março devido à atual situação de pandemia por Covid-19.

Tendo em conta que os alunos aprendem mais significativamente quando trabalham em grupo, explorando e discutindo as suas ideias com os pares, pensamos implementar esta metodologia numa implementação futura.

Nesse sentido, a atividade pode ser concretizada num projeto interdisciplinar de Matemática A e Aplicações Informáticas, com uma duração prolongada no tempo. Lançando como questão/problema “Como encontrar o zero de uma função com um erro de $x \dots$ ”, dar-se-ia início a uma estratégia de ensino construtivista e centrada no aluno. Organizados em grupos, os alunos seriam desafiados a investigar o método das bissecções sucessivas e mais tarde, com as ferramentas e competências adquiridas em API, iriam procurar forma de o implementar. Além de compreender, explicar e implementar o método, os alunos seriam ainda estimulados a investigar o erro cometido nas aproximações obtidas e a sua relação com o número de iterações realizadas, além de elencar potencialidades deste método. O culminar deste trabalho poderia ser um relatório escrito por cada grupo e/ou uma apresentação, sujeitos a avaliação pelas duas disciplinas. O resultado/solução encontrado pelos alunos deveria ser partilhado com a comunidade em que se inserem, pelo que propomos igualmente sessões de apresentação e debate com outras turmas do mesmo nível de escolaridade e o mesmo currículo.

Esta conceção de aprendizagem dialógica, baseada no diálogo e na interação, está claramente relacionada com o funcionamento da sociedade em que vivemos. Também a aprendizagem depende cada vez mais das interações que os alunos têm com as pessoas que os rodeiam e na multiplicidade de espaços de aprendizagens e desenvolvimento. Nesta perspetiva de ensino-aprendizagem encontram ferramentas essenciais para a construção de novos conhecimentos.

Será válido mantermos a segmentação do currículo e do conhecimento, ignorando o que muda à nossa volta? Por vezes, privilegia-se o trabalho individualizado e a instrução, não valorizando devidamente uma aprendizagem com significado e capaz de permitir a aquisição de competências pessoais e profissionais. O caminho é, sem dúvida alguma, a aposta no trabalho colaborativo e na exploração do conhecimento através da descoberta autónoma de soluções para problemas reais que mobilizem o currículo a aprender.

ANA ISABEL CUNHA

CRISTINA CRUCHINHO

MARIA JOSÉ CARVALHO

ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA

XXIII ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES



MATEMÁTICA NOS PRIMEIROS ANOS é o encontro nacional promovido pela Associação de Professores de Matemática especialmente dedicado a docentes da educação Pré-Escolar e dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico; acolhe também estudantes da formação inicial.

O Encontro será realizado online a 7 de novembro de 2020.

Mais informações e inscrições na página da APM, www.apm.pt.

OS APURADOS

Três amigos participaram num concurso matemático. Dois deles ficaram apurados para a fase seguinte e o outro foi eliminado. Eis o que me disseram quando lhes perguntei quais tinham sido os resultados.

Alice: Eu fiquei apurada.

Luís: A Alice e eu já estamos na fase seguinte.

Susana: O Luís e a Alice passaram esta eliminatória. Descobri depois que só um deles me disse a verdade. Quem foram os dois apurados?

Respostas até 31 de dezembro, para zepaulo46@gmail.com

QUEM SERÁ O CAMPEÃO

O problema proposto no número 155 da *Educação e Matemática* foi sugerido por Helder Pinto:

Na Matemática existe um conceito muito importante que é a transitividade. É válido em várias situações.

Por exemplo, na desigualdade de números reais. Se $a < b$ e $b < c$, então conclui-se que $a < c$.

Na vida real nem sempre isto acontece. Vejamos no futebol. Se o clube A ganhou ao clube B e se B ganhou ao clube C, não se pode concluir que, necessariamente, o clube A irá ganhar ao clube C. Se a transitividade existisse no futebol, existiam muitos jogos que não eram necessários pois já se sabia, de antemão, quem os ganharia.

Na tabela estão representados os resultados das duas primeiras jornadas da Divisão de Honra, Série 1, Sub 8, temporada 2018-19, da A.F. Porto. Note-se que esta série é disputada por 9 clubes.

Jornada 1

Leça do Balio	2	-	4	AD New Team
FC Infesta	2	-	3	Padroense FC
SC Salgueiros	2	-	0	SC Coimbrões
Panther Force	3	-	0	CF Serzedo

Jornada 2

AD New Team	2	-	4	FC Infesta
Padroense FC	0	-	4	SC Salgueiros
SC Coimbrões	0	-	0	Panther Force
CF Serzedo	10	-	1	EF Benfica

Com estes resultados, se existisse transitividade no futebol, já seria possível garantir que uma das equipas é melhor que todas as outras? Se sim, qual é essa equipa?

Ou o “confinamento” desmoralizou os nossos leitores ou o problema não os entusiasmou. É que recebemos apenas quatro respostas: Carlos Dias (Silveira), Letícia Martins (Guimarães), Mário Roque (Guimarães) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Os processos de resolução foram praticamente iguais. Demos a palavra ao Mário:

O “velhinho” Salgueiros seria o campeão e apenas com vitórias.

De facto, utilizando o símbolo “<” para “perde com” e o símbolo “=” para “empata com”, teríamos:

Leça < AD < Infesta < Padroense < Salgueiros

Benfica < Serzedo < Coimbrões < Salgueiros

Panther = Coimbrões < Salgueiros

Ou seja, considerando a transitividade... todas as restantes 8 equipas perderam ou acabariam por perder com o Salgueiros.

A Letícia foi mais longe na análise:

A partir dos dados fornecidos não conseguimos saber a posição de todas as equipas. Por exemplo, (...) na última posição poderia ser Leça do Balio ou EF Benfica.

A única equipa de que conseguimos garantir a posição é a do Salgueiros, em 1º lugar.

O Carlos acrescentou ainda:

Para os segundo e terceiro lugares teríamos que esperar por mais jornadas.

No entanto, o segundo lugar teria de ser para uma das seguintes três equipas: Padroense FC, SC Coimbrões ou Panther Force.

Uma partilha de práticas com matemática no Jardim de Infância

ANA ISABEL PINTO DESTERRO

ELVIRA FERREIRA

É hoje reconhecida a importância da aprendizagem da matemática nos primeiros anos, nomeadamente, na Educação Pré-Escolar. Neste contexto, o papel do educador surge como fundamental, quer como ativador das múltiplas aprendizagens em matemática, quer como mobilizador dos vários contextos educativos e dos interesses das crianças. O conhecimento do educador é determinante na integração da matemática na sua prática diária, encarando-a como um contexto intencional de aprendizagem, de prazer e de desafio para as crianças. Este foi um dos pressupostos que norteou a oficina de formação contínua “Aprender matemática no Jardim de Infância”, dinamizada pela segunda autora deste artigo, cujos objetivos eram: (i) conceber, planificar, implementar e refletir sobre tarefas no Domínio da Matemática na Educação de Infância; e (ii) refletir acerca das potencialidades do questionamento da educadora durante a resolução e explicação das tarefas pelas crianças.

Durante a formação, solicitou-se às educadoras que, entre cada sessão presencial, desenvolvessem tarefas na sua sala seguindo os temas matemáticos, Números e Operações, Organização e Tratamento de Dados (OTD), o Pensamento Algébrico e as metodologias abordadas. Foi ainda pedido que elaborassem um guião de aula e registassem as questões a colocar às crianças, tanto na introdução, como no desenvolvimento e na síntese das tarefas. Solicitou-se, também, o registo depois da discussão coletiva das tarefas realizadas pelas crianças. Todos estes materiais solicitados pela formadora foram alvo de análise e reflexão conjunta nas sessões presenciais.

Tendo em consideração a idade das crianças, procurou-se inserir a matemática no quotidiano da sala de aula do Pré-Escolar, sendo fundamental que as educadoras apresentassem “propostas intencionais, progressivamente mais complexas, que estimulassem e contextualizassem as aprendizagens” (OCEPE, 2016, p. 74). Assim, solicitou-se que as educadoras, aquando da implementação das tarefas, criassem dinâmicas de questionamento, dando oportunidade às crianças de exporem as suas ideias matemáticas. Esta dinâmica de sala de aula cria desafios às educadoras nas suas práticas diárias, nomeadamente, no que respeita às normas pré-estabelecidas e à criação de “ambientes que proporcionem oportunidades para pensar em vez de estabelecer regras e procedimentos padronizados” (Araman, Serrazina & Ponte, 2019, p. 469). Ambientes em que

as crianças são encorajadas a desenvolver, registar e explicar a todo o grupo as estratégias usadas na resolução de problemas, bem como as dos seus colegas, contribuindo para a “construção de significado e para a consolidação das ideias e, ainda, para a sua divulgação” (NCTM, 2007, p. 66).

Nesta formação, foi dada particular atenção aos registos escritos das crianças, tanto os que resultaram das resoluções coletivas, como os produtos do seu trabalho individual, procurando que as educadoras ajudassem as crianças a consolidar e a clarificar as suas ideias acerca das noções matemáticas desenvolvidas na aula. Assim, podiam, de modo mais eficaz e sistematizado, obter evidências sobre o que a criança já sabe, o que ainda não sabe e planificar de acordo com o que “observa, regista e documenta sobre o grupo e cada criança” (OCEPE, 2016, p. 13). Como resultado do que observou e registou, a educadora pode, de maneira mais adequada, selecionar e preparar tarefas para explorar noções matemáticas em que as crianças evidenciaram alguma fragilidade.

As educadoras demonstraram adesão à discussão e à implementação das tarefas na sala de aula, o que pode evidenciar a importância dada ao seu desenvolvimento profissional e, como referido por todas, “um contributo para a melhoria das suas práticas de sala de aula”. Como afirma Ponte (2012) “é importante ter como referência central o contexto profissional dos educadores (...) em vez de se usar referenciais abstratos de cunho teórico que deformam, inapelavelmente, a visão de quem é o professor e como se realiza o seu trabalho (Ponte, 2012, p. 11). Pensamos que os momentos de formação podem contribuir para uma mudança ao nível das tarefas trabalhadas na sala, nomeadamente, no que respeita à sua seleção e no seu aprofundamento. Paralelamente, a discussão conjunta das tarefas durante a formação, sobretudo, a análise do conteúdo matemático e de outras estratégias de ensino/metodologias, pode proporcionar o aprofundamento do conhecimento matemático e didático das educadoras (Ferreira, 2002). Ao mesmo tempo, é importante que aconteça uma mudança nas práticas das educadoras. A mesma autora refere que as mudanças nas práticas das educadoras de infância ocorrerão com mais frequência na medida em que seja possível o confronto com as suas práticas, se sintam seguras e em que haja oportunidades de reflexão dessa prática, onde formadoras e educadoras trabalham em colaboração.

Assim, este artigo descreve a implementação de duas tarefas, desenvolvidas no ano letivo de 2019/2020, bem como a reflexão dos contributos da formação contínua em Matemática nas práticas da primeira autora, educadora no concelho de Ourém e uma das participantes na formação. A sua sala é frequentada por 24 crianças, 17 rapazes e 7 raparigas, dos 3 aos 5 anos.

TAREFAS IMPLEMENTADAS

As duas tarefas apresentadas neste artigo são habitualmente desenvolvidas pela primeira autora na sua sala, tendo sido reformuladas durante a formação, nomeadamente, no que respeita aos conteúdos matemáticos e atendendo ao questionamento das crianças, aos registos individuais e coletivos e à discussão final. A primeira tarefa, com foco na OTD, foi realizada em novembro e a segunda tarefa, com foco no Pensamento Algébrico, foi realizada em março, a partir de uma história infantil.

PRIMEIRA TAREFA – QUADRO DO TEMPO



Figura 1. Quadro do tempo



Figura 2. Registro pelo “chefe” da informação observada

As crianças dos 3 aos 5 anos registraram diariamente o estado do tempo que observavam. Antes da formação, o registro era feito de uma forma simplificada. Uma criança do grupo dos 3 anos era escolhida por um seu colega de 4 ou 5 anos, designado de “chefe”, que observava como estava o tempo. De seguida, rodava o ponteiro para o estado do tempo que observava (figura 1). Posteriormente, era realizado o registro icónico pelo “chefe” que fazia a representação na tabela criada para cada mês (figura 2). Por decisão do grupo de crianças, os estados do tempo representados foram associados a uma cor: o sol à cor verde, a chuva à cor cinzenta, as nuvens à cor vermelha, o sol encoberto à cor azul e a trovoadas à cor amarela.

Após a sessão presencial relativa à OTD, a educadora planificou uma tarefa O nosso quadro do tempo e a OTD, nomeadamente, um guião com as perguntas a colocar às crianças durante o desenvolvimento da tarefa e construiu uma folha de registro para que todas fizessem o registro próprio do pictograma coletivo.

Um aspeto que a primeira autora teve em atenção na planificação e que antes da formação não acontecia, refere-se às fases de investigação em OTD: a primeira fase, formulação do problema, sempre que possível emergindo das questões das crianças;

segunda fase, planificação da recolha de dados, como fazer e quem; terceira fase, organização e tratamento de dados, como organizar e registar os dados e; quarta fase, interpretação e análise dos mesmos.

Durante a primeira fase da investigação, e após finalizado o registro iconográfico do mês de novembro (figura 3), discutiu-se com as crianças como podiam saber facilmente quantos dias de sol, de nuvens, de chuva e sol e nublado tinha havido durante o mês. Algumas das crianças, os mais velhos, sugeriram “fazer semelhante ao que fazemos com os “votos”, quando escolhemos atividades ou mesmo histórias”. Isto é, num gráfico. Logo, uma criança questionou se “era como faziam os “grandes” o ano passado”. A palavra gráfico não lhes pareceu assim estranha.



Figura 3. Registro do tempo no mês de novembro

No planeamento da recolha de dados, que corresponde à segunda fase, as crianças de 4 e 5 anos, tendo em conta o registro efetuado, procederam à inventariação dos materiais necessários para fazer o gráfico. Assim, sugeriram: canetas para fazer a representação icónica dos estados do tempo, cola para colar essas representações em cartão para se tornarem mais resistentes e usarem nos meses seguintes, tesoura para os recortar para posterior recolha e registro de dados (figuras 4).



Figuras 4. Materiais necessários para a recolha de dados

Durante este processo, a educadora foi questionando as crianças:

Educadora: Quantos estados de tempo há no nosso quadro?

Crianças: 2...5 (O William quis ir contar ao quadro do tempo para confirmar.)

Educadora: já temos feitos 3, quantos faltam?

Artur: 2 (mostra 2 dedos)

Rafael: 3

Cristiano: faltam 2, já temos 3 mais 1 quatro e mais 1 cinco.

Educadora: se somar 3 mais 2, fico com quantos?

Alice: são 6.

William: não, são 5 (mostra os 5 dedos da mão)

De seguida, organizaram-se os cartões fazendo a correspondência com os estados do tempo, colocando-os, separadamente, em pratos de papel, dado que a cada estado do tempo corresponde uma cor (figuras 5).



Figura 5. Separação dos cartões do estado do tempo em pratos de papel

Em situação de grande grupo, as crianças construíram o pictograma do estado do tempo do mês de novembro, partindo da tabela de registo diário (figuras 6). Na colocação dos cartões nas colunas, atendeu-se à cor e ao seu significado.



Figuras 6. Elaboração do pictograma do estado do tempo

O recurso ao pictograma (figura 7) como forma de representar os dados, pareceu-nos a mais adequada tendo em conta as várias representações trabalhadas na formação, a melhor forma de responder à questão formulada, os nossos dados e a idade das crianças. Após a finalização do pictograma, passou-se à quarta e última fase, análise e interpretação dos dados como mostra o diálogo seguinte:

Educadora: Quantos dias de sol houve no mês de novembro?

Pedro: 6 dias

João: Dias de nuvens 5

Educadora: Quantos dias esteve trovoada?

Artur: zero dias que houve trovoada

Educador: e quantos dias de chuva?

João: 5, é igual, são dois de 5 porque os das nuvens são iguais aos de chuva

Educadora: Como viste isso? Como pensou a tua cabeça?

João: Vi aqui (apontou para o gráfico)

Educadora: Qual tem mais?

Artur: O sol ganha porque só há dois de 5 e o sol encoberto são 3. Se tirarmos um sol fica 5 igual às nuvens e à chuva.

Educadora: Quantos dias de sol são a mais do que os dias com nuvens?

Artur: (Contou os dias com nuvens.) Para ser igual ao sol tem que ter mais 1. (Apontou para o sol encoberto.) Se metermos

aqui mais 3 ficam 6, fica igual ao sol. (Mostrou os dedos.) 1, 2, 3, ficam 3 para ficar igual ao sol.

Educadora: Qual é o estado do tempo que tem menos registos?

Liliana: É o sol encoberto, tem 3.

Pedro: Não... É o zero, na trovoada, não há nada, há zero dias em que houve trovoada.

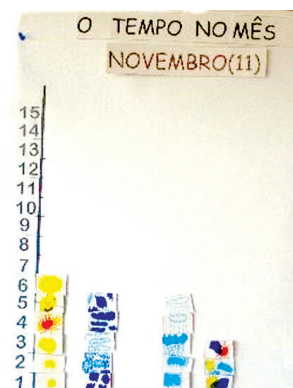
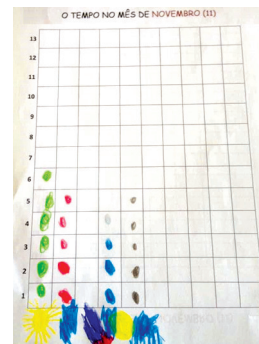
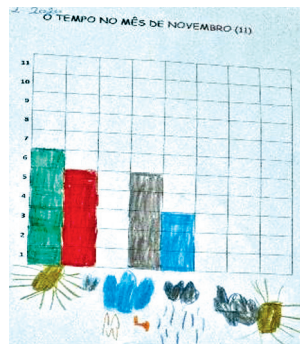


Figura 7. Pictograma do tempo

No final, pudemos verificar que, com este pictograma, facilmente sabemos o número de dias de cada estado do tempo, dando assim resposta à nossa questão inicial.

Posteriormente, cada criança individualmente fez o seu registo escrito, preenchendo uma matriz fornecida pela educadora (figuras 8 e 9).



Figuras 8 e 9. Registos escritos do Pedro e do João

De um modo geral, as crianças compreenderam os vários momentos de desenvolvimento da tarefa. Para a primeira autora, a experiência foi significativa, dado que era a primeira vez que planeava uma tarefa que envolvia as fases de uma investigação em OTD. O guião que contemplava as questões a colocar às crianças ao longo da tarefa foi, na sua opinião, uma mais-valia para o êxito da mesma. Contudo, após a análise do registo dos diálogos, considerou que podia ter ido mais além no questionamento às crianças, um aspeto que gradualmente, tenciona melhorar. Nas suas palavras, a primeira autora, considera que a mudança precisa de tempo, isto é, tempo para experimentar e refletir sobre o que correu bem, menos bem e procurar melhorar.

2.ª TAREFA – OS PADRÕES E A ZEBRA ZEZÉ

“A zebra Zezé” (figura 10), uma história infantil, foi o cenário escolhido pela primeira autora para desenvolver nas crianças

alguns aspetos do Pensamento Algébrico, da criatividade em matemática, bem como o sentido estético.



Figura 10. História “A zebra Zezé”

A primeira autora revelou que não dava muita atenção a estes aspetos antes da formação, mas que procurou pô-los em prática logo após as primeiras tarefas nas sessões presenciais. Deste modo, aquando da realização da tarefa “A zebra Zezé”, o termo padrão já era conhecido das crianças, pois já tinham realizado tarefas com padrões de repetição e de crescimento (figura 11). A identificação do grupo de repetição e os registos individuais são aspetos essenciais no desenvolvimento algébrico. Na figura 11, podemos observar como uma das crianças criou, com recurso a material manipulável, um padrão de crescimento e o registou.

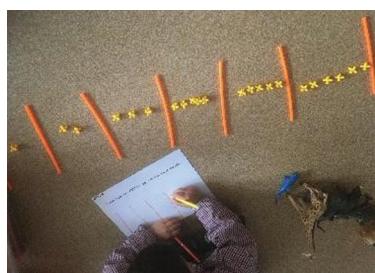


Figura 11. Tarefa anterior com padrões de crescimento e respetivo registo

As histórias podem representar um bom contexto para potenciar o trabalho com foco nos conteúdos matemáticos, na educação pré-escolar. Neste caso, a história foi contada pela educadora ao grande grupo e depois recontada por solicitação de muitas crianças. Posteriormente, a história foi explorada na área da Formação Pessoal e Social.

De seguida, foi pedido às crianças que colorissem, a seu gosto, a zebra Zezé, criando o seu próprio padrão (figura 12).

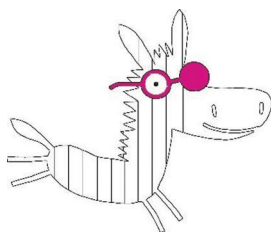


Figura 12. A zebra Zezé

De imediato, os alunos começaram a selecionar as cores que iriam usar.

A Liliana selecionou 2 cores, o Artur selecionou 5 cores, mas referiu que a cor preta só para pintar as patas (figura 13).



Figura 13. As cores selecionadas pelo Artur

A educadora foi questionando as crianças para perceber se as crianças conseguiam identificar o padrão, nos diferentes momentos de trabalho:

Educadora: Qual é o teu padrão?

Artur: É um padrão [com as cores] azul, verde, amarelo e rosa e depois sempre assim. As cores têm que estar sempre a repetir, azul, verde, amarelo e rosa.

Educadora: Leonardo, a tua zebra tem um padrão?

Leonardo: Sim, apontando para as cores cada vez que mudava de cor (figura 14).

Alice: Eu vi esta zebra no Jardim Zoológico. É um padrão preto, roxo, vermelho e rosa. É sempre o mesmo

Educadora: Pedro, o que me queres dizer do teu trabalho?

Pedro: Para fazer um padrão têm que se repetir as cores, tipo azul, vermelho, roxo e amarelo e repetir sempre assim.

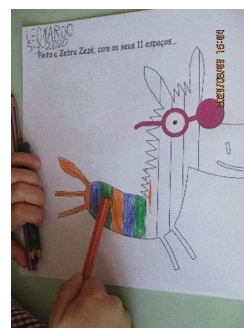


Figura 14. A zebra de Leonardo

O William tentou criar um padrão com 4 cores, mas introduziu outra cor, o amarelo, não completando o padrão iniciado (figura 15). Quando questionado se tinha feito um padrão e para o descrever, respondeu: “sim”. Ao referir as cores usadas, diz: “vermelho, castanho, azul, verde, vermelho, castanho, azul, amarelo”. Quando nomeia esta cor, apercebe-se que o amarelo não faz parte, e pede à educadora para repetir o trabalho.



Figura 15. A zebra do William

Seguidamente, as crianças de 5 anos descreveram às crianças de 4 anos o seu padrão. Depois, formaram-se pares e as crianças de 5 anos ajudaram as de 4 anos a realizar a mesma tarefa, sendo a escolha do padrão da responsabilidade dos mais pequenos (figura 16).



Figura 16. As crianças de 5 anos a apoiarem os colegas de 4 anos

A Leonor (4 anos) descreveu a sua pintura: “Fiz a zebra Zezé de amarelo, azul, amarelo, azul, é um padrão porque tem 2 cores e está sempre igual, as cores” (figura 17). A Rita, por coincidência, pintou a zebra com as mesmas cores referindo que “é um padrão porque tem 2 cores que vai repetir”.



Figura 17. A Zebra de Leonor

Da análise dos padrões de repetição criados pelas crianças, verificou-se que estes são, essencialmente, de dois tipos: AB - por exemplo, o Pedro usou 2 cores (figura 19); ABC - por exemplo a Liliana usou 3 cores (figura 20); e ABCD - por exemplo, o Artur usou 4 cores (figura 18).

As crianças revelaram saber identificar e descrever um padrão. Contudo, à medida que o número de cores selecionadas aumentou, verificaram-se algumas pequenas incorreções na pintura da zebra. O papel da educadora foi fundamental no questionamento às crianças ajudando-as também a detetar o erro e na sua correção.



Figura 18

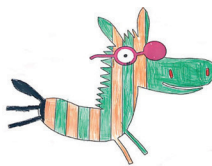


Figura 19



Figura 20

BREVE REFLEXÃO DA PRIMEIRA AUTORA

Ser educadora não é parar no tempo mas estar desperta para os novos e constantes desafios. Estes foram os grandes ensinamentos que guardo da formação inicial, que foram

reavivados aquando da publicação das OCEPE (2016), pois este documento preconizava uma nova abordagem e novos conteúdos da matemática. Assim, senti necessidade de aprofundar o meu conhecimento para melhorar o meu desempenho enquanto educadora de infância, pelo que decidi frequentar esta oficina de formação. Esta foi dinamizada de uma forma peculiar, isto é, os conteúdos apresentados e trabalhados estavam diretamente relacionados com a minha prática o que o permitiu, em muitos momentos, mobilizar as situações do quotidiano do jardim de infância, para aprofundar e inovar o trabalho que envolve a Matemática. Realço o facto de as tarefas e outros materiais estarem ajustadas às crianças, o que nem sempre acontece nas formações que frequentei anteriormente.

O aprofundamento do conhecimento matemático ajudou-me a identificar outras potencialidades nas tarefas que já usava na minha sala. A análise e a discussão dessas tarefas durante as sessões presenciais ampliou a intencionalidade do ponto de vista da matemática do trabalho que já realizava. Por exemplo, percebi que poderia usar, ainda que de forma muito elementar, o ciclo de investigação estatística, guiando as crianças através do questionamento. O mesmo aconteceu relativamente ao trabalho com padrões, com a identificação dos diferentes grupos de repetição que cada criança construiu.

Como referi, as temáticas destas tarefas já estavam presentes no meu trabalho com as crianças, mas os guiões das tarefas solicitados no início desta formação permitiram-me olhar para a importância do questionamento, o ouvir com mais pormenor as ideias matemáticas verbalizadas pelas crianças sobre as suas contagens, o que observa nas representações gráficas e na identificação do grupo que se repete. Por fim, não menos importante, a pertinência em solicitar às crianças os seus próprios registos. Estes foram os aspetos que destaco e que ganharam mais relevo nas minhas aulas quando trabalho matemática.

Referências

- Araman, E. M. O., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2019). Eu perguntei se o cinco não tem metade: Ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática*, 21, n.º2 (pp.466-490). São Paulo: Pesquisa.
- Ferreira, E. (2002). Da professora à formadora. In GTI (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 235-256). Lisboa: APM.
- Ponte, J.P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), *Educación matemática: Teoría, crítica y práctica*. Barcelona: Graó.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Silva, I., Marques, L., Mata, L., & Rosa, M. (2016). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Educação.

ANA ISABEL PINTO DESTERRO

JARDIM DE INFÂNCIA DO BAIRRO, AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE OURÉM

ELVIRA FERREIRA

O texto que se segue mostra a importância do uso de tecnologias e tem características de um texto de investigação. Por essas razões, foi selecionado em simultâneo para duas secções da EM: Espaço GTI e Tecnologias na Educação Matemática.

Hélia Pinto - Coordenadora do GTI

António Domingos - Responsável pela secção Tecnologias na Educação Matemática

A calculadora gráfica no ensino básico – uma conexão entre os domínios de Funções do 7.º ano e Geometria do 9.º ano

Tendo em consideração as indicações metodológicas impostas pelo Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico, em Portugal (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013), a utilização da calculadora só deverá ocorrer em situações pontuais que envolvam resolução de problemas, como por exemplo, um elevado número de cálculos, o uso de valores aproximados, operações de radiciação ou a determinação de razões trigonométricas ou de amplitude de ângulos dada uma razão trigonométrica e desde que seja mesmo imprescindível.

Porém, segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2017), um programa de Matemática de excelência deverá contemplar a integração da tecnologia, dado que favorece a aprendizagem e compreensão das ideias matemáticas, o raciocínio matemático e a comunicação de raciocínios. Lopes e Domingos (2015), num estudo que realizaram, concluíram que é viável utilizar a calculadora gráfica no ensino básico, promovendo ambientes ricos e motivadores de aprendizagem.

Um ensino eficaz, de modo a promover um aprofundamento na compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, requer que os alunos estabeleçam conexões entre representações matemáticas. E, ainda, a articulação entre vários domínios da Matemática, pode amenizar fronteiras, na medida em que os alunos podem usar ideias sobre uma determinada área, para compreenderem melhor outra área da Matemática (NCTM, 2017).

A situação de aprendizagem que a seguir é descrita, envolveu a realização de uma tarefa de natureza exploratória (Canavarro, 2011), com recurso à calculadora gráfica. Não sendo aconselhado o uso desta ferramenta no currículo prescrito do ensino básico, os autores apresentam uma dinâmica curricular inovadora neste nível de ensino, com a inclusão da calculadora gráfica TI-nspire CX, da *Texas Instruments*. Procurou-se fazer uma conexão entre o domínio das Funções, Sequências e Regularidades (FSS7) no 7.º ano de escolaridade e o domínio da Geometria e Medida no 9.º ano de escolaridade. Esta tarefa foi proposta no final da unidade de Funções. Anteriormente, os alunos tiveram oportunidade de realizar tarefas com a calculadora gráfica, nos

dois domínios distintos, mas nunca em conjunto. Tendo em consideração o *software* da calculadora gráfica, nomeadamente as aplicações **Geometria**, **Listas** e **Folha de Cálculo e Dados e Estatística**, pretendeu-se que os alunos transitassem entre várias representações (Tripathi, 2008), de modo que, através da construção de conceitos inerentes ao 9.º ano de escolaridade, consolidassem o conceito de função linear intrínseco ao programa do 7.º ano de escolaridade.

METODOLOGIA

A tarefa realizou-se numa turma do 7.º ano, no ano letivo de 2016/2017, numa escola pública do distrito de Setúbal, no primeiro ano de uma experiência de ensino mais ampla. A mesma teve a duração de dois anos consecutivos, nos 7.º e 8.º anos de escolaridade, respetivamente, e envolveu tarefas de índole exploratória, com recurso à calculadora gráfica.

Num Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) proporcionado pela calculadora gráfica, desenvolveu-se uma prática de ensino e aprendizagem segundo a perspectiva de Freire (2000), “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção” (p. 25).

Os métodos utilizados para recolher os dados apoiaram-se nos relatórios escritos dos alunos, observação direta, imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica Texas TI-nspire CX e diário de bordo da professora titular da turma, que assumiu o duplo papel de professora e investigadora (Creswell, 2012).

Embora o estudo tivesse sido realizado com os 29 alunos da turma, decidiu-se pela modalidade de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994), de modo a obter uma observação, compreensão e descrição mais minuciosa e dados mais consistentes, sobre a atividade dos discentes. Assim, a investigação recaiu nas ações de quatro alunos, tendo sido adotados os nomes fictícios de Berta e Maria, para um grupo e José e Pedro, para outro grupo. As razões desta escolha justificam-se pelo facto destes alunos evidenciarem um percurso académico semelhante na disciplina de Matemática, boa capacidade oral e escrita, bom comportamento, disponibilidade e motivação para participar no estudo.

A TAREFA E A ANÁLISE DO TRABALHO DOS ALUNOS

Os conteúdos da tarefa (figura 1) explorados nas alíneas a) e b) são específicos do currículo prescrito do 9.º ano de escolaridade e o tópico tratado na alínea c), do currículo prescrito do 7.º ano de escolaridade, de acordo com o Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013). Pretendeu-se que os alunos compreendessem os conceitos de ângulo inscrito e ângulo ao centro, numa circunferência, reconhecessem que a medida da amplitude de um ângulo ao centro é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito, que lhe corresponde, conseguindo perceber que o modelo matemático que se adequa à situação é o modelo linear. Quando a tarefa foi distribuída aos alunos, estes foram informados que a tinham de resolver a pares e posteriormente fazer um relatório individual. De seguida, seria promovida a discussão coletiva, monitorizada pela professora, seguindo-se a sintetização das descobertas dos alunos (Stein, Engle, Smith & Hughes (2008).

1. Utilizando a calculadora gráfica, constrói a figura ao lado.

a) Qual é a diferença entre um ângulo inscrito ABC e um ângulo ao centro AOC , numa circunferência?

b) Qual é a relação que existe entre a medida da amplitude de um ângulo inscrito ABC e a medida da amplitude do ângulo ao centro AOC , que lhe corresponde?

c) Qual é o modelo matemático que se adequa a esta situação?

Sugestão:

- Na **Página 1**, da aplicação **Geometria** define a variável b para o ângulo ABC e a variável o para o ângulo AOC .
- Na **Página 2**, insere a aplicação **Listas e Folha de Cálculo** e faz uma **captura de dados** relativamente aos valores das variáveis b e o .
- Na **Página 3**, insere a aplicação **Dados e Estatística** e traça uma função tendo em conta as variáveis b e o .

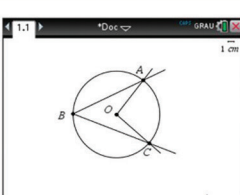


Figura 1. A tarefa apresentada aos alunos.

No que concerne à alínea a), possivelmente através da função de visualização, os alunos conseguiram mobilizar o conceito de ângulo. Por outro lado, através da função de arrastamento, ao arrastar os pontos A e C, toda a figura foi transformada, mas todas as propriedades definidas pelo procedimento de construção, foram mantidas, ou seja, invariantes. Neste sentido, perceberam a diferença entre um ângulo inscrito ABC e um ângulo ao centro AOC , numa circunferência.

No ângulo ABC o vértice B está sobre a circunferência.
No ângulo AOC o vértice O é o centro da circunferência.

Figura 2. Resolução escrita, da alínea a) da tarefa, pela Berta.

No decorrer da discussão coletiva, o aluno José utilizou o significado pessoal de “cortam”, que se movimentou para o significado matemático de “intersectam”, com a interferência da professora, promovendo-se o entendimento de que os lados de um ângulo inscrito são sempre secantes à circunferência, como se pode observar no seguinte excerto:

Professora: Muito bem! E relativamente aos lados desses ângulos? O que é que vocês podem concluir?

José: “Cortam” sempre a circunferência em dois pontos. Um deles é o vértice e o outro ponto também pertence à circunferência.

Professora: Meninos! O que significa cortar? Não sei o que é isso?

José: Oh Stora! “Intersectam” a circunferência em dois pontos.

Professora: Ah! Ok! Assim já entendo! E o que significa intersectar a circunferência em dois pontos?

José: É secante à circunferência!?

Posteriormente, a professora, com o objetivo de formalizar uma definição matemática entre ângulo inscrito e ângulo ao centro, solicitou uma síntese, tendo a mesma sido dada pela aluna Berta, conforme o excerto seguinte:

Berta: Então stora: “No ângulo inscrito ABC , o vértice B está sobre a circunferência e os lados do ângulo são secantes à circunferência. No ângulo ao centro AOC , o vértice O é o centro da circunferência e os lados do ângulo são secantes à circunferência”.

Tendo em consideração a última parte da afirmação da aluna, quando afirmou que os lados de um ângulo ao centro são secantes à circunferência, a mesma ao ser questionada pela professora, argumentou que deveria ter referido que cada lado contém o raio da circunferência e que aplicou a palavra “secante” por ser sinónimo de “concorrente”¹. Por conseguinte, na continuação da discussão gerida e incentivada pela docente, a aluna conseguiu perceber que cada lado do ângulo ao centro é constituído por uma semirreta com origem no centro da circunferência, cujo prolongamento a intersecta num único ponto.

Relativamente à alínea b) os alunos mediram a amplitude do ângulo inscrito ABC e do ângulo ao centro AOC , antes de definirem variáveis b , para a amplitude do ângulo inscrito ABC e a variável o , para a amplitude do ângulo ao centro AOC , conforme a primeira sugestão do enunciado. De seguida, os alunos procederam à divisão da variável b pela variável o ou à divisão da variável o pela variável b , com o objetivo de relacionar a medida da amplitude entre o ângulo inscrito e a medida da amplitude do ângulo ao centro, que lhe corresponde. Entretanto, recorreram à função de arrastamento e alteraram as dimensões da circunferência ou movimentaram os pontos A e C, pertencentes aos lados dos ângulos, verificando que as relações $\frac{b}{o}$ e $\frac{o}{b}$ se aplicam a qualquer circunferência e que se mantinham constantes (figura 3).

Neste contexto, os alunos verificaram que a medida da amplitude de um ângulo inscrito ABC é metade da medida da amplitude do ângulo ao centro AOC , que lhe corresponde, ou que a medida da amplitude do ângulo ao centro AOC é o dobro da medida da amplitude de um ângulo inscrito ABC , que lhe corresponde (figura 3 e figura 4).

¹ A aluna fez confusão com a posição relativa entre retas e planos.

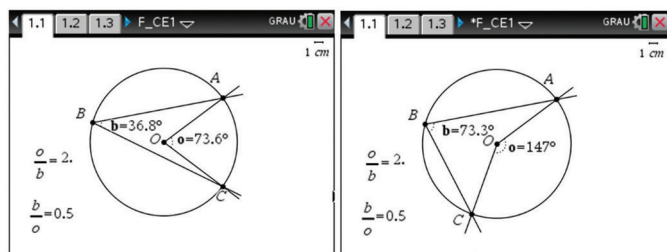


Figura 3. Resolução na calculadora gráfica (utilização da função de arrastamento) da alínea b) da tarefa, pelo Pedro.

Quando nós tiramos o ângulo AOC foi 2 vezes a amplitude do ângulo ABC, ou seja, multiplicamos por 2 o ângulo ABC, isto é, o ângulo AOC, mesmo que mudamos a figura.

$$\frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{A\hat{B}C}{2} ; A\hat{O}C = A\hat{B}C \times 2$$

Figura 4. Resolução escrita, da alínea b) da tarefa, pelo Pedro.

No que respeita à alínea c), os alunos seguiram a segunda e terceira sugestão do enunciado, respetivamente e construíram a **Página 2 - Listas e Folha de Cálculo**² (figura 5) e a **Página 3 - Dados e Estatística** (figura 6 e figura 9).

A	ango	B	angb	C	D
=	=capture(')	=capture(')			
1	85.9104	42.9552			
2	88.6837	44.3419			
3	92.0253	46.0127			
4	92.6101	46.3051			
5	95.0188	47.5094			
A.1	=85.910395207258				

Figura 5. Resolução na calculadora gráfica (captação de dados, na aplicação Listas e Folha de Cálculo), da alínea c), pelo Pedro.

Os alunos Maria, José e Pedro mobilizaram o significado matemático da representação simbólica e representação gráfica de uma função linear³, relacionaram a alínea b) (figura 4) com a alínea c) e definiram um modelo linear que se adequou à situação. Os alunos delinearam o modelo: $y=0,5x$ ($b=0,5$ o) colocando cuidadosamente a variável dependente e a variável independente⁴ (figuras 6 e 7). O Pedro explorou a posição das variáveis com o objetivo de verificar qual a relação existente entre as mesmas. O aluno estabeleceu o modelo $y=2x$ ($o=2b$) (figura 6), pois na alínea b) também chegou a duas relações (figura 4).

No entanto, surgiram algumas imprecisões. A Berta, na última página⁵ (**Página 3**), no que concerne à colocação das variáveis b (angb) e o (ango), como variável dependente ou variável independente, respetivamente (figura 9), inseriu aleatoriamente as variáveis. Neste sentido, quando surgiu uma representação

² Quando os alunos capturaram os valores das variáveis o e b para a folha de cálculo, denominaram essas variáveis por ango e angb, respetivamente.

³ Quando surgiu uma imagem no ecrã da calculadora gráfica, caracterizada por pontos que representam uma reta que passa pela origem.

⁴ Os alunos colocaram o cursor da calculadora gráfica nos vários pontos da função e verificaram que o valor da variável dependente (ordenada) era sempre metade do valor da variável independente (abscissa).

⁵ Aplicação Dados e Estatística na calculadora gráfica.

no ecrã da calculadora gráfica, definida por pontos alinhados semelhante à representação gráfica da expressão analítica de uma função linear, desenvolveu o significado matemático de função linear. Posto isto, fez uma relação com a resposta que tinha dado na alínea b) (figura 8) e definiu o modelo linear, $y=2x$ ($ango=2angb$) (figura 10).

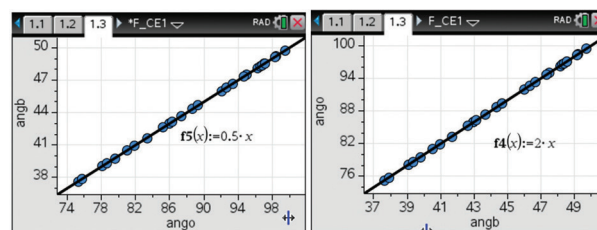


Figura 6. Resolução na calculadora gráfica, da alínea c) da tarefa, na aplicação Dados e Estatística, pelo Pedro.

O modelo matemático que se adequa a esta situação é $y=0,5x$, pois a equação é uma função linear do tipo $y=ax$. Neste caso, temo de ser $b=\frac{1}{2}o$, onde b é a variável dependente e o é a variável independente.

Figura 7. Resolução escrita, da alínea c) da tarefa, pela Maria.

Neste contexto, podemos conjecturar que a aluna demonstrou uma ausência de pensamento crítico, visto que não percecionou que segundo a sua colocação das variáveis (figura 9), o modelo que se adaptava à situação seria $y=0,5x$ ($angb=0,5ango$). A aluna não posicionou o cursor nos vários pontos do gráfico de modo a verificar a relação existente entre a abscissa e a ordenada, isto é, a relação entre as variáveis, que tinha evidenciado na alínea b). Apenas interpretou a imagem que surgiu no ecrã da calculadora gráfica.

A relação que os ângulos têm é que a amplitude do ângulo AOC é sempre o dobro da amplitude do ângulo ABC, mesmo que movamos os pontos A e C.

$$A\hat{O}C = 2A\hat{B}C$$

Figura 8. Resolução escrita, da alínea b) da tarefa, pela Berta.

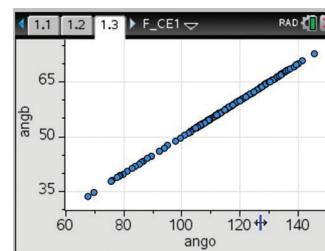


Figura 9. Resolução na calculadora gráfica, da alínea c) da tarefa, pela Berta.

O modelo matemático que se adequa a esta situação é $y=2x$ que significa $o=2b$. Assim conclui-se que a variável dependente é b e a independente é o .

Figura 10. Resolução escrita, da alínea c) da tarefa, pela Berta.

Contudo, esta ambiguidade, foi esclarecida e colmatada na discussão coletiva, conforme se pode verificar no seguinte excerto:

Berta: Oh, stora, o modelo que eu fiz, foi $y=2x$, porque eu vi que a reta passava pela origem do referencial, logo só podia ser uma função linear. Então, eu pensei que era **ango=2angb** porque na alínea b) eu concluí que a medida da amplitude do ângulo ao centro é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito. Devia ter dito que **ango** é a variável dependente e **angb** é a variável independente.

Mas, eu sei que me enganei! Na aplicação Dados e Estatística, o meu erro, foi ter colocado as variáveis ao contrário e não reparei que o valor da abcissa é sempre metade do valor da ordenada, nesta situação, claro! E então eu deveria ter percebido que o modelo era $y=0,5x$ (**angb=0,5ango**). Portanto, neste caso, o **angb** é a variável dependente e fica no eixo das ordenadas e **ango** é a variável independente e fica no eixo das abcissas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os alunos mostraram um excelente desempenho e motivação na resolução desta tarefa de natureza exploratória, num AGD, promovido pela calculadora gráfica. No entanto, em certas situações, como por exemplo, na resolução da alínea c), pela Berta, verificou-se que a gestão e monitorização da professora na discussão coletiva, foi crucial para a construção do conhecimento matemático. Ainda, na mesma alínea, esta aluna fez transparecer uma dificuldade técnica, que podemos conjecturar que se tratou de um problema conceptual (Drijvers & Trouche, 2008). Quando relacionou a resposta que apresentou na alínea b) com a imagem que obteve no ecrã da calculadora gráfica na alínea c) e definiu o modelo linear $y=2x$, construiu o modelo matemático sem ter em consideração a relação de dependência entre as variáveis. Dado que colocou aleatoriamente as variáveis na aplicação Dados e Estatística, não percecionou que o modelo que se ajustava à situação, seria a função linear $y=0,5x$ e não $y=2x$.

Tendo em consideração o objetivo didático da tarefa, os alunos evidenciaram facilidade em transitar entre as várias representações: geométrica, tabular, gráfica e algébrica, tendo-se promovido uma conexão entre os domínios de Geometria e Funções.

Referências

- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Revista Educação & Matemática*, 115, 11-17.
- Creswell, J. W. (2012). *Educational Research, Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. (4th ed.). Boston: Pearson.
- Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (pp. 363–448). Charlotte, NC: Information Age.
- Freire, P. (2000). *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. (15.ª ed.) São Paulo: Paz e Terra.
- Lopes, L., & Domingos, A. (2015). A utilização da calculadora gráfica no currículo do ensino básico: uma experiência no 8º ano. *Educação e Matemática*, 131, 45-48.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a Ação - Assegurar a Todos o Sucesso em Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original publicada em 2014).

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438–445.

MARIA MANUELA SUBTIL

ESCOLA BÁSICA 20, 30 CICLOS FRAGATA DO TEJO; UIED, UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO

ANTÓNIO DOMINGOS

CICS.NOVA – CENTRO INTERDISCIPLINAR DE CIÊNCIAS SOCIAIS
UIED, UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO
DCSA, DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS - FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Nota: Este trabalho é suportado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017

GRUPO T3 - APM

“O Grupo T3-APM, disponibiliza na página da APM um conjunto de recursos (propostas de atividades, resoluções, ficheiros para a TI, vídeos /webinars), como os que se seguem, que esperamos poderem transformar-se em desafios interessantes para a aula de Matemática”.

E@D: Práticas e Aprendizagens

Neste número da EeM continuamos a partilhar os testemunhos de professores de matemática sobre as formas que encontraram para responder ao desafio do ensino a distância durante o período de confinamento, do ano letivo 2019-20.

Este caderno apresenta os depoimentos das professoras Anabela Gaio, Marta Caseiro, Manuela Gabriel, Sílvia Zuzarte e Susana Brito sobre as adaptações que introduziram no seu processo de ensino, a diversidades de estratégias e recursos usados, bem como a sua perceção sobre o que os alunos aprenderam.

EQUIPA EDITORIAL DA EM

Uma experiência de avaliação a distância

SÍLVIA ZUZARTE

Início este artigo referindo que o trabalho que nele descrevo foi planificado, em discussão e reflexão com o colega de escola que leciona a mesma disciplina que eu.

Num contexto em que os alunos estão isolados nas suas casas, é ainda mais importante proporcionar-lhes experiências de aprendizagem em que tenham de interagir com os colegas, discutir ideias e aprender autonomamente, pelo que lhes propus a experiência que passo a descrever. Esta decorreu no período do ensino a distância com os alunos das minhas turmas de 11º ano. Já acompanho estes alunos desde o 10º ano e promovo desde essa altura o trabalho colaborativo em sala de aula e, pontualmente, fora da sala de aula. Em contexto de sala de aula já haviam sido incentivados, a propósito de outro trabalho de criação de recursos que realizaram parcialmente em casa, a criar um Powerpoint e a partilhá-lo através do GoogleDocs ou do Office online.

Numa 2ª feira em que disponibilizei o plano de trabalho da semana e as tarefas a realizar, disponibilizei também um vídeo, gravado por mim, em que explicava o que se pretendia na tarefa principal proposta para essa semana. A minha opção por apresentar a tarefa através de uma gravação em vídeo prendeu-se apenas com o facto de não dever ter muitas sessões síncronas na mesma semana e de querer usá-las para os alunos trabalharem colaborativamente em salas simultâneas no Zoom.

A tarefa proposta foi de índole exploratória e visava o estudo da família de funções homográficas. Os alunos começaram por realizar individualmente as cinco primeiras alíneas nas aulas assíncronas (fazendo variar cada um dos parâmetros à vez e formulando conjecturas) e depois, na aula síncrona, discutiram em grupo (4 elementos) as resoluções individuais, elaborando um relatório com as experiências realizadas, conjecturas formuladas e um quadro síntese, num documento partilhado, disponibilizado pela professora para cada grupo (figura 1).

6. Elabora um relatório, em grupo, relativamente ao trabalho desenvolvido nas questões anteriores. O relatório deverá conter os seguintes elementos:
- Experiências realizadas.
 - conjecturas formuladas.
 - Um quadro síntese com as características observadas na família de funções
- $$y = a + \frac{b}{x-c}$$
- As principais dificuldades sentidas na resolução (identificando o elemento do grupo que as sentiu).
 - O que foi mais fácil de realizar (identificando o elemento do grupo).

Figura 1. Questão da tarefa para realizar em grupo

Criei um documento por grupo no Office 365, uma vez que todos os alunos têm email institucional. O facto de ter partilhado cada documento com cada elemento do grupo permitiu-me ver as entradas dos alunos no documento e acompanhar a evolução do trabalho.

Assim, na última aula da semana, aula síncrona de duas vezes 20 minutos, os diferentes grupos foram divididos por salas simultâneas no Zoom e iniciaram a discussão de ideias e a elaboração do relatório. Eu fui visitando as várias salas, esclarecendo dúvidas aos alunos e monitorizando o trabalho. Não conseguiram concluir o relatório nessa aula, mas tinham ferramentas para poderem continuar a fazê-lo: o documento partilhado para trabalharem e diferentes meios para comunicar, WhatsApp, Discord, Zoom, Teams,...

Eu fui acompanhando o trabalho através do documento partilhado, colocando algumas observações (figura 2) na forma de comentário e estando disponível para esclarecer dúvidas. Submeteram o trabalho até ao final da semana no Teams.

Com o enunciado da tarefa foi entregue um conjunto de rubricas e foi dito aos alunos para terem em conta essas rubricas aquando da elaboração do relatório, pois a professora iria tê-las como referência na sua avaliação. Apesar desta informação dada pela

Domínio	Contradomínio	Monotonia	Zeros	Assíntotas	Sinal
Qualquer que seja o valor que é atribuído a b , o seu domínio não se altera.	Qualquer que seja o valor de b , o seu contradomínio não se altera.	A monotonia altera-se consoante os valores atribuídos a b . $b < 0$: crescente $] -\infty, 0 [\cup] 0, +\infty [$ $b > 0$: decrescente $] -\infty, 0 [\cup] 0, +\infty [$	Não tem zeros.	As suas assíntotas são $x=0$ e $y=0$ para $b=1$ e $b=-1$.	Os gráficos sofrem alterações consoante o valor de b e por isso quando $b=1$: implica $f(x) > 0 \quad] 0, +\infty [$ e $f(x) < 0 \quad] -\infty, 0 [$ para $b=-1$: implica $f(x) > 0 \quad] -\infty, 0 [$ e $f(x) < 0 \quad] 0, +\infty [$
O domínio desta função é $\mathbb{R}$ exceto 1 se $c=1$ e $\mathbb{R}$ exceto -1 se $c=-1$.	Qualquer que seja o valor que é atribuído a c , o seu contradomínio será sempre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.	Para esta função, a monotonia muda consoante os valores atribuídos a c mas é sempre decrescente.	Não tem zeros.	As suas assíntotas são $x=1$ e $y=0$ para $c=1$ e $x=-1$ e $y=0$ para $c=-1$.	O sinal da função é sempre o mesmo seja qual for o valor atribuído a c então $f(x) > 0 \quad] 0, +\infty [$ e para $f(x) < 0 \quad] -\infty, 0 [$

Silvia Machado Boa estratégia de organização

Silvia Machado E qual é?

Silvia Machado E qual é?

Silvia Machado E se b tiver outros valores?

Silvia Machado Deveriam generalizar para $b \neq 0$

Silvia Machado Não podemos usar este símbolo.

Silvia Machado Não são estes os intervalos. Os

Silvia Machado Escrever mesmo os intervalos

Silvia Machado Muito bem dizem como se altera

Figura 2. Parte de um relatório com comentários da professora

professora no início e durante a realização do relatório, alguns alunos não tiveram em conta estas rubricas, tendo isso tido reflexo na classificação que obtiveram.

Posteriormente realizaram outro relatório (em grupo), agora com mais autonomia, criando um dos alunos o documento e partilhando-o com os colegas e comigo. A qualidade deste relatório foi superior, o que penso dever-se ao facto de os alunos terem tido em conta o feedback dado no relatório anterior e as rubricas de avaliação. Realizaram ainda, a pares, um trabalho de pesquisa, um trabalho de recolha, tratamento e análise de dados com a respetiva apresentação dos resultados oralmente. Todos estes relatórios e trabalhos enquadram-se numa perspetiva formativa da avaliação, tal como é defendido por Domingos Fernandes, pois a avaliação formativa surgiu integrada no processo de ensino e de aprendizagem, quando

os alunos estavam a aprender e eu a ensinar, tendo os alunos assumido um papel ativo na realização das tarefas propostas. Contudo, também contribuíram para a avaliação sumativa, pois foi-lhes atribuída uma classificação final e foi feito um balanço sobre as aprendizagens realizadas.

Concluo, destacando que estes trabalhos realizados a distância poderão ser perfeitamente realizados no ensino presencial e que temos de repensar as metodologias e estratégias de ensino e de aprendizagem em simultâneo com as de avaliação.

Referências

Fernandes, Domingos (2020). *Avaliação formativa (versão de trabalho)*. Projeto Maia.

SÍLVIA ZUZARTE

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CASQUILHOS, BARREIRO

Discussão de estratégias e cálculo mental, mesmo a distância...

SUSANA BRITO

Após o fecho das escolas e percebendo que a única forma de comunicar com os meus alunos de primeiro ano era através dos meios virtuais o primeiro pensamento que tive foi o de criticar-me por não ter dado a devida importância ao trabalho com os tablets e computadores no primeiro semestre, pois tinha decidido que seria neste segundo semestre o momento mais adequado para o fazer. Como não adianta chorar sobre leite derramado, coloquei mãos e instrumentos à obra e pedi ajuda aos pais para pôr a funcionar momentos síncronos e assíncronos diários com os meus alunos.

As primeiras sessões foram de experiência e de adaptação. Contudo, ao fim de uma semana, estes pequenos de 6 e 7 anos

já dominavam a tecnologia e estavam familiarizados com a Plataforma Teams. Colocavam emojis, enviavam mensagens e mudavam o fundo da sua imagem quando estavam online.

Todo o meu receio se foi desvanecendo, pois uns ajudavam os outros. Foi assim com os alunos, com os pais, com os professores. E assim avançámos com o trabalho em E@D. Continuámos a trabalhar diariamente juntos.

Em cada semana, de terça a quinta-feira, trabalhávamos em apoios e parcerias entre alunos, professor coadjuvante e professor titular das 10 às 11 horas. Todos os dias, das 14:30 às 15:30 tínhamos aulas síncronas em coletivo com a participação de 18 dos 20 alunos da turma. Os outros dois alunos que não



Figura 1. Ler, contar e mostrar_

tinham acesso a internet seguiam um plano de trabalho entregue semanalmente, com trabalho adaptado.

As aulas síncronas começavam sempre com a rubrica, “Ler, contar e mostrar”, na qual cada aluno que se inscreve apresenta uma produção sua. Pode ler, um texto de sua autoria, um livro de histórias ou um texto trabalhado na sala de aula e compilado no livro de leitura da turma. Pode contar, um acontecimento do seu dia a dia. Ou pode mostrar, um desenho, uma dobragem, algo especial para si, um desafio de matemática, como por exemplo (figura1), um cálculo mental, uma operação, um problema...

Numa dessas partilhas, a propósito de um trabalho de contagens pedido como trabalho de matemática, um dos alunos, cujo o avô tem um pomar, inventou um problema que colocou à turma:

“O meu avô tem um pomar com 5 laranjeiras, 5 pereiras, 5 macieiras, 5 cerejeiras e 5 bananeiras. Quantas árvores de fruto tem o meu avô?”

Os colegas pensaram e colocaram o dedo no ar. O aluno escolheu um dos colegas que respondeu 25, a quem pediu que explicasse como tinha pensado.

“Pensei 5+5+5+5+5”, respondeu.

Outro dos colegas fez a contagem e disse que eram 35. Houve então necessidade de escrever na tela como cada um tinha pensado para esclarecer as dúvidas existentes. No momento de exploração, um dos alunos disse ainda que era a mesma coisa que 5×5 porque o 5 repetia 5 vezes.

Outro exemplo de um desafio foi o cálculo de $30 + 20$. Foi pedido por um dos alunos que os colegas calculassem mentalmente. Quando colocaram o dedo no ar, escolheu um e pediu, como era habitual, que explicasse como pensou. O colega disse que era 50 porque 20 era igual a $10 + 10$ e que primeiro juntou 10 ao 30 e deu 40 e em seguida juntou o outro 10 ao 40 e deu 50 (figura 2).

Após esta explicação senti necessidade de a escrever na tela para que todos acompanhassem a estratégia de raciocínio. Em seguida perguntei se mais alguém tinha pensado de outra forma e uma das alunas explicou que tinha feito 3 mais 2 e que deu 5 e que colocava o 0 e dava 50. Pedi-lhe que explicasse melhor, dizendo o que representavam nos números 3, 2 e 0 e porque os tinha adicionado. Ela recorreu ao trabalho que tínhamos feito na escola e explicou que o 10 representa uma dezena que são 10 unidades, o 20, duas dezenas e o 30, três dezenas e que três *d* (dezenas) mais duas *d* (dezenas) eram cinco *d* (dezenas), que são 50 unidades (figura 2).

Antes do período de E@D, na sala de aula, na escola, tínhamos todos os dias momentos de cálculo mental, que diariamente

envolviam tarefas diferentes. A tarefa que os alunos mais gostavam era a do Número do Dia. No período E@D pediram-me para mantermos esta rotina, o que fez todo o sentido. Coloquei-a como tarefa do Plano Individual de Trabalho (PIT), que depois explorávamos em algumas aulas em coletivo. Nesses momentos coletivos, os alunos apresentavam as suas descobertas e discutiam como cada um pensou, sendo partilhadas na tela as diferentes estratégias de cálculo apresentadas (figura 3).

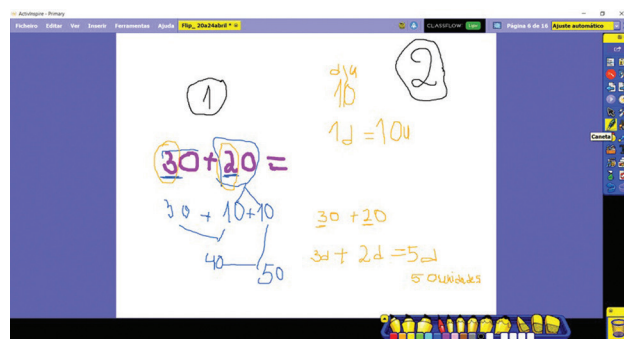


Figura 2. Desafio de Cálculo Mental

Semanalmente, também lhes pedia que realizassem uma tarefa matemática no tempo autónomo (sessão assíncrona) para que a sua resolução pudesse ser discutida por toda a turma (figura 4). Esta tarefa era apresentada no PIT da semana e resolvida individualmente ou a pares, se os alunos quisessem e os pais pudessem ajudar com a vídeo chamada. À quinta-feira eram apresentadas as descobertas, explicadas pelos autores, escritas

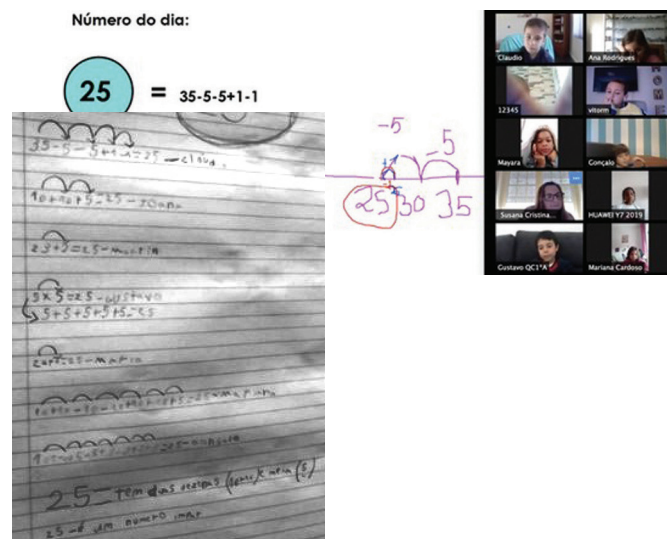


Figura 3. Número do dia

para serem colocadas em comum e compreendidas por todos, como exemplifica a figura 5. As questões levantadas eram também escritas para que pudessem pensar e para que as explorássemos na aula seguinte.

Figura 4. PITD (Plano Individual de Trabalho à Distância)

Esta tarefa era apresentada no PIT da semana e resolvida individualmente ou a pares, se os alunos quisessem e os pais pudessem ajudar com a vídeo chamada. À quinta-feira eram apresentadas as descobertas, explicadas pelos autores, escritas para serem colocadas em comum e compreendidas por todos, como exemplifica a figura 5. As questões levantadas eram também escritas para que pudessem pensar e para que as explorássemos na aula seguinte.

Presencialmente é mais fácil sentir as dúvidas, as hesitações, perceber se estão atentos, se estão a acompanhar, se estão a pensar por eles.

1. Regista no retângulo as descobertas que fizeste.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Descobertas:

- Existem dez linhas e dez colunas e que ao todo são 100 quadradinhos, porque $10 \times 10 = 100$
- Em linha andamos de 1 em 1, acrescentamos +1 ao número;
- Em coluna de 10 em 10 e acrescentamos +10;
- nas colunas o algarismo das unidades mantém-se igual e o das dezenas muda porque somamos 10 que é uma dezena;
- na primeira coluna os números são pares, na segunda são ímpares, na terceira são pares, na quarta são ímpares e assim sucessivamente;

Para descobrir:

- Por que é que há mais números com 2 algarismo do que com um?
- Por que é que só vai até ao 99?

Figura 5. Descobertas durante a exploração coletiva de uma das tarefas de matemática semanal

Os materiais estão próximos de todos. O quadro e o giz estão “à mão” para qualquer registo, os colegas estão junto a nós para ajudar a pensar, a turma funciona como um todo, como uma comunidade de aprendizagem. No entanto, foi possível estarmos juntos, diariamente. Uns com os outros, os alunos puderam partilhar descobertas, colocar dúvidas e aprender em conjunto, tornando o E@D promotor de uma efetiva aprendizagem, nomeadamente de matemática.

Para todos...? Assim pudéssemos ter estado todos juntos!

SUSANA BRITO

EB QUINTA DA CONDESSA - AGRUPAMENTO DE ESCOLAS BRAAMCAMP FREIRE, PONTINHA

Uma experiência com tecnologias durante o projeto #ESTUDOEMCASA

MANUELA GABRIEL

Este depoimento apresenta de forma sucinta os aspetos mais relevantes do trabalho realizado com as minhas quatro turmas, duas do 7.º ano e duas do 8.º ano, durante as 14 semanas letivas, tempo que mediou entre o encerramento das escolas às atividades letivas presenciais e o final do ano letivo.

Faltavam três semanas para a interrupção letiva da Páscoa quando foi tomada a decisão governamental de suspender as atividades letivas presenciais. Foi decisão da minha escola apoiar os professores na utilização de metodologias de ensino a distância (EaD) que lhes permitissem dar continuidade aos processos de ensino e aprendizagem. Este apoio visou sobretudo manter o contacto regular dos alunos com os seus professores e colegas por um lado, e, por outro, consolidar e desenvolver novas aprendizagens.

Dada a grande diversidade de contextos, privilegiei soluções com processos simples e não exigentes de muita tecnologia. Durante três semanas foi proposto aos alunos a realização de tarefas sobre aprendizagens já trabalhadas presencialmente até ao dia 13 de março. As tarefas propostas selecionadas constavam do manual do aluno e do caderno de atividades. Como metodologia de trabalho proposta, os alunos enviavam as suas resoluções dos trabalhos, em formato de fotografia e/ou digitalizado para o e-mail que eu disponibilizei para o efeito. Era feita, individualmente, a sua correção e dado o feedback do trabalho de cada aluno. Foi uma troca constante e diária de email's o que dificultou a gestão das tarefas nestas primeiras três semanas, quer por parte do professor quer por parte dos alunos, como referido por alguns pais. Para o professor com

envio de feedback individuais, e por parte dos alunos para darem resposta em tempo útil às solicitações das diferentes disciplinas do seu plano de estudos.

Com a interrupção letiva da Páscoa, a Escola teve algum tempo para se organizar e definir orientações para as últimas 11 semanas de aulas do ano letivo. Passaríamos a trabalhar, todos os professores da Escola, com a ferramenta Google Classroom, nos momentos assíncronos, e com a ferramenta Zoom, nos momentos síncronos.

ACOMPANHAMENTO DURANTE O PROJETO

#ESTUDOEMCASA

As aulas do #EstudoEmCasa iniciaram-se a 20 de abril na televisão e foram disponibilizadas nos sites: <https://estudoemcasa.dge.mec.pt>; <https://www.rtp.pt/estudoemcasa>. Esta atividade constitui-se como um complemento e como um recurso de apoio destinado, primeiramente, aos alunos sem conectividade e/ou equipamento, independentemente de outras utilizações que pudessem ter sido feitas pelos docentes. Para cada uma das aulas, foram disponibilizados os temas tratados, as aprendizagens essenciais desenvolvidas e, ainda, propostas de trabalho/desafios, podendo complementar o trabalho dos professores.

A partir do momento que começaram a ser emitidas, em canal televisivo aberto, as aulas de Matemática do 7.º e 8.º anos (MAT7e8) do denominado projeto #EstudoEmCasa e como mencionei anteriormente para evitar a proliferação de ferramentas e de plataformas para que existisse uma harmonização de métodos de ensino e aprendizagem, informei todos os meus alunos que passariam a assistir às aulas de MAT7e8, às terças feiras entre as 14:40 e as 15:10 e às sextas feiras entre as 14:00 e as 14:30. Estas viriam a ser complementadas com as sessões síncronas, via Zoom, e por outras tarefas. Informei, ainda, que deveriam fazer um registo da aula, onde conste o assunto, as explicações dadas pela professora e as tarefas resolvidas. Além disso, deveriam apresentar a resolução das tarefas propostas para a aula seguinte (figuras 1 e 2), bem como os materiais manipuláveis, solicitados pela professora aquando da experimentação de tarefas de modelação (figura 3).

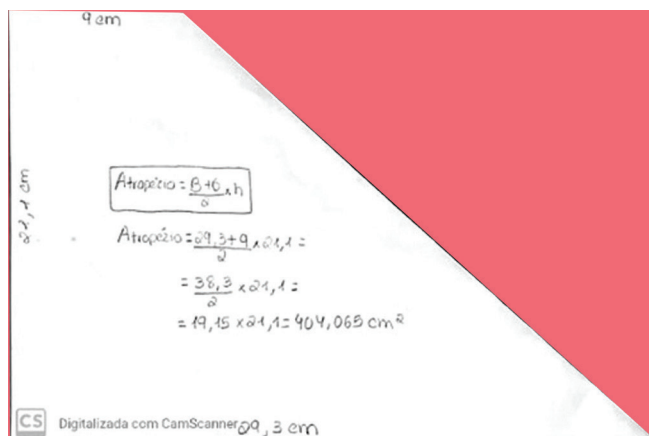


Figura 1. Resolução, feita por um aluno, do desafio proposto, através de um vídeo, na aula 1 de MAT7e8 que consistiu em calcular a área do trapézio que o próprio “construiu” numa folha A4.



Figura 2. Resolução, feita por um aluno, de um dos desafios propostos numa das aulas de MAT7e8

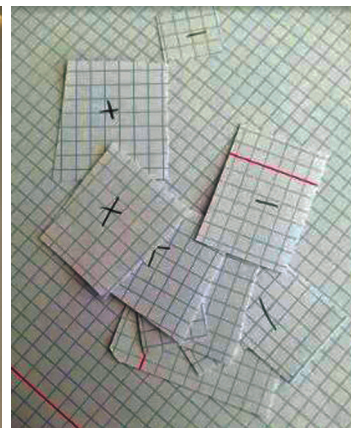


Figura 3. Material manipulável, produzido por um aluno, para a modelação das operações com números inteiros, proposta na aula 4.

Com o passar das semanas fui introduzindo gradualmente mudanças à metodologia de trabalho proposta inicialmente, das quais destaco: (i) Realização de trabalhos em grupo, tendo como finalidade fundamental promover a interação entre os alunos dado o momento de confinamento a que todos estamos sujeitos; (ii) Apresentação da resolução dos desafios colocados no final de cada aula em formato de pequenos vídeos da sua autoria (figura 4); e (iii) Sessões Zoom para pequenos grupos de alunos, máximo 5 alunos.

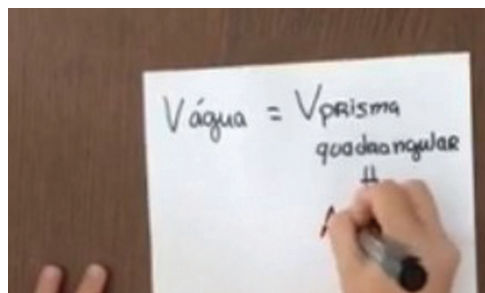


Figura 4. Resolução, em formato vídeo, do desafio proposto no final da aula 18 de MAT7e8

ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE O PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM

Ao longo das semanas as tarefas foram sendo ajustadas quer pelos conteúdos trabalhados e aprendizagens desenvolvidas quer pelas dificuldades/dúvidas colocadas pelos alunos na semana anterior. Aos alunos com medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão foram asseguradas as suas especificidades e individualidades. Estando algumas das aulas do MAT7e8 a incidir sobre Aprendizagens Essenciais do 7.º ano, para as turmas do 8.º ano tive que complementar com outras atividades (fichas de trabalho, resolução de exercícios do manual e do caderno de atividades). Sempre que as temáticas não tinham sido trabalhadas no regime presencial utilizava as sessões síncronas em contexto turma e as sessões síncronas em pequeno grupo para consolidação. A título de exemplo, nas turmas do 7.º ano

o tema Semelhanças (aula 3 transmitida a 28 de abril) como ainda não tinha sido trabalhado no regime presencial teve que ser trabalhado de uma forma mais pormenorizada utilizando mais exemplos, tanto nas sessões em contexto turma como nas sessões em pequeno grupo.

Os vários programas curriculares da disciplina de Matemática têm vindo a valorizar o uso de tecnologias disponíveis por todos os alunos, como calculadoras desde as elementares às gráficas, computador associado a programas de apoio ao trabalho com diferentes domínios da Matemática e ainda para utilizar as potencialidades educativas da Internet. No entanto, pela primeira vez e de uma forma “obrigatória” todos foram empurrados, sem alternativa, para o uso das tecnologias. O recurso ao computador, ao tablet, ao telemóvel e às ferramentas digitais foi inevitável para o EaD. Foi um processo de permanente aprendizagem para todos os intervenientes neste processo (professores, alunos, pais, encarregados de educação, decisores). Contudo, não posso deixar de referir que a minha escola teve a preocupação de dar formação inicial da ferramenta Google Classroom a todos os professores, recorrendo aos professores com formação em Tecnologias de Informação e Comunicação ou com experiência na utilização da ferramenta Google Classroom.

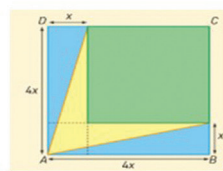
A experiência que alguns alunos tiveram ao apresentarem a resolução de tarefas em formato de pequenos vídeos proporcionou-lhes verdadeiros momentos de aprendizagem. Quando questionei um dos alunos sobre o número de vezes que tiveram que repetir a gravação este respondeu que tinha repetido muitas vezes. Acrescentou, ainda, que teve a ajuda dos pais para fazer a gravação e quando terminou verificou que tinha o chão da sala cheio de papéis das várias tentativas. De um modo geral, os alunos não só tiveram cuidado com a nitidez da imagem que apresentaram como em exprimir oralmente e por escrito, ideias matemáticas com precisão e rigor, para justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática. Acresce, ainda, referir que foi também uma experiência que proporcionou aos alunos uma relação positiva com a disciplina. Será com certeza uma das experiências a repetir mesmo em ensino presencial. Deste modo, os alunos mobilizam o seu conhecimento prévio sobre representações, no contexto de um determinado tema e organizam uma sequência de aprendizagem (para além do conhecimento matemático para resolver o exercício o aluno teve que dominar outros conhecimentos como: tecnológico, organização espacial da resolução numa folha de papel, dicção, colocação e a projecção de voz, etc.). Esta metodologia coloca o aluno no centro da sua própria aprendizagem, assumindo o compromisso da realização autónoma, sem a presença do professor, de tarefas que tradicionalmente estão associadas à sala de aula. A metodologia utilizada na construção e realização de pequenos vídeos considero ter sido muito enriquecedora para o processo de ensino e aprendizagem, de tal modo que pondero nos próximos anos letivos recorrer a esta metodologia e caso os recursos produzidos sejam de qualidade poderão os

mesmos servir de tutoriais de aprendizagens matemáticas para os restantes alunos da(s) turma(s).

Uma outra oportunidade para a utilização da tecnologia foram as sessões síncronas, via Zoom, com pequenos grupos de alunos que proporcionou mais um momento rico de partilha de saberes e experiências. Nestas sessões e com o recurso à Google Drive (Google Docs) foram apresentadas tarefas realizadas em momento síncrono quer individualmente quer no pequeno grupo. Durante a resolução, os alunos apresentavam as suas estratégias, analisaram as estratégias dos colegas e apresentaram comentários e sugestões e o professor deu feedback imediato. Dada a dificuldade inicial ao utilizar o processador de texto na questão dos símbolos matemáticos e das operações, os próprios alunos criaram uma codificação na escrita simbólica de matemática para entendimento entre os pares a qual foi sendo aprimorada com o decorrer das sessões (figuras 5 e 6).

Considera o quadrado [ABCD] que está decomposto em três regiões coloridas: uma azul, uma amarela e outra verde. A região verde tem a forma de quadrado e a expressão algébrica que corresponde à área da região amarela é $3x^2$.

Determina o perímetro do quadrado verde se a região amarela tiver 12 cm^2 de área.



A amarela = $3(x)(2) = 12 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x)(2) = 12 : 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x)(2) = 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \text{raiz quadrada de } 4 \vee x = - \text{raiz quadrada de } 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 2 \vee x = -2$
 $\Rightarrow x = 2$
 $\Rightarrow CS = (2)$
 $\Rightarrow x = 0$
 P verde = $3x \times 4 = 12x$
 P verde = $12 \times 2 = 24 \text{ cm}$
 R: 24cm

(adaptado do manual Novo Espaço 8, Porto Editora)

Figura 5. Exemplo com escrita simbólica de matemática utilizada pelos alunos nas sessões síncronas.

O tempo, t , em minutos, para um ciclista subir s km e descer d km é dado pela fórmula: $t = 15s + 3d$

Resolve a equação dada em ordem a d . (adaptado do manual Matemática 8, Porto Editora)

1.ª Versão

$$\begin{aligned} t &= 15s + 3d \Rightarrow \\ \Rightarrow -3 \times d &= 15s - t \Rightarrow d = \frac{15s - t}{-3} = \frac{15s}{-3} - \frac{t}{-3} \\ \Rightarrow d &= (15s - t) / (-3) \Rightarrow d = \frac{15s}{-3} - \frac{t}{-3} \end{aligned}$$

2.ª Versão

$$\begin{aligned} t &= 15s + 3d \Rightarrow \\ \Rightarrow -3 \times d &= 15s - t \Rightarrow d = \frac{15s}{-3} - \frac{t}{-3} \\ \Rightarrow d &= (15s - t) / (-3) \Rightarrow d = \frac{15s}{-3} - \frac{t}{-3} \end{aligned}$$

Figura 6. Exemplo com escrita simbólica de matemática utilizada pelos alunos nas sessões síncronas

E para finalizar não podia deixar de fazer uma referência à avaliação como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem. Como todos sabemos e em conformidade com os normativos que regulam a avaliação interna, de acordo com a finalidade que preside à recolha de informação, inclui as modalidades formativa e sumativa. Contudo, com o EaD foi uma das questões que mais “preocupação” gerou desde o momento que as escolas deixaram de ministrar aulas em formato presencial. Dada a experiência, da generalidade dos professores numa modalidade de ensino presencial, é quase unânime que para a avaliação sumativa contribui em muito os instrumentos escritos presenciais. Mas, para um ensino não presencial, era imprescindível construir instrumentos que tanto professores, alunos e pais se sentissem confortáveis com a avaliação (figura 7). Afigura-se-me que foi um dos desafios que as escolas, departamentos disciplinares e professores tiveram ao criar



(1.ª página do registo realizado em grupo da aula 12 do Mat7e8)

Classificação	
15/15	:
Rubrica ☒ 15/15	
utiliza corr...	2/2
Reconhece...	
3/3	
Representa...	
6/6	
a descrição...	
2/2	
Desafio final	
2/2	

instrumentos de avaliação em que todos os intervenientes no processo ensino-aprendizagem considerassem que o processo avaliação sumativa dos alunos fosse coerente.

MANUELA GABRIEL

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS CARLOS GARGATÉ, CHARNECA DA CAPARICA

Figura 7. Exemplo de um instrumento de avaliação utilizado através da ferramenta Google Classroom

Sobre a aplicação Milage Aprender +

MARTA CASEIRO

No início deste ano letivo, 2019/2020, comecei a usar a aplicação Milage Aprender + por sugestão de uma amiga, que tinha feito formação nesta aplicação. Após ter feito alguma pesquisa e ter visto os tutoriais disponibilizados no site milage.io, decidi usar a mesma com os meus alunos do 7º e 9º ano. Assim, comecei por usá-la nas aulas de apoio de Matemática com grupos pequenos de alunos para observar as suas reações. Não foi surpresa nenhuma quando eles disseram: “Adorei! Faço os exercícios no caderno, mas uso o telemóvel. Acho giro tirar fotos.” A ideia de poderem visualizar a sua resolução e a correção proposta pelo professor era uma ideia que me agradava e que cativou os alunos. No 9º ano permitiu que os alunos intensificassem o treino da resolução de inequações bem como dos intervalos de números reais, que é uma área onde têm muitas dificuldades. Tinha tudo planeado para, no terceiro período, com a colaboração de uma colega, trabalhar em grupos de dois alunos, em contexto de sala de aula, utilizando os tablets da escola. Mas tudo o que tinha idealizado sofreu uma grande reviravolta com a suspensão das aulas presenciais. Durante a interrupção da Páscoa Inscrevi-me na formação da Associação de Professores de Matemática (APM) “Oficina Aprender Matemática com a APP Milage Aprender +”

para adquirir competências, conhecimentos e prática na criação de recursos. Esta formação superou as minhas expectativas. Afinal a app pode ser rentabilizada de muitas outras formas. Ia conseguir que os meus alunos trabalhassem de forma autónoma e com a minha monitorização. Ia conseguir ter portefólios digitais onde eu e os alunos pudéssemos ver a sua evolução. Além disso, *nada melhor do que resolver uma alínea e poder logo de seguida ver a sua correção e autoavaliar-me*, dizia um aluno. Mas, no meio da “desorganização” que foi o início da planificação do 3º período de aulas surgiu-me um obstáculo. Como vou aproveitar a app Milage para continuar a trabalhar com os meus alunos surdos, uma vez que eles em sala de aula adoravam fazer os exercícios por lá? Equações, como vou ensinar a resolver equações no 7º ano a distância? Todas estas dúvidas pairavam sobre a minha cabeça e foi aí que a formação começou realmente a dar frutos. Eu podia criar a minha turma, podia estruturar as fichas de trabalho do meu modo, indo ao encontro do que pretendia, lentamente, ensinar os alunos.

Comecei por criar fichas de trabalho simples, tutoriais, vídeos explicativos... e aí fez-se luz. Vídeos explicativos: vídeos com a resolução dos exercícios passo a passo com áudio a explicar

a resolução. Nesses vídeos introduzi um outro vídeo em que a intérprete, de Língua Gestual Portuguesa, Manuela Barreto, foi o meu elo de ligação com os meus meninos surdos (figura 1). Os powerpoints com áudio e interpretação simultânea em Língua Gestual Portuguesa são materiais que facilitam a inclusão, uma das metas da Escola Básica D. Dinis, em Leiria, uma unidade de referência para alunos surdos.

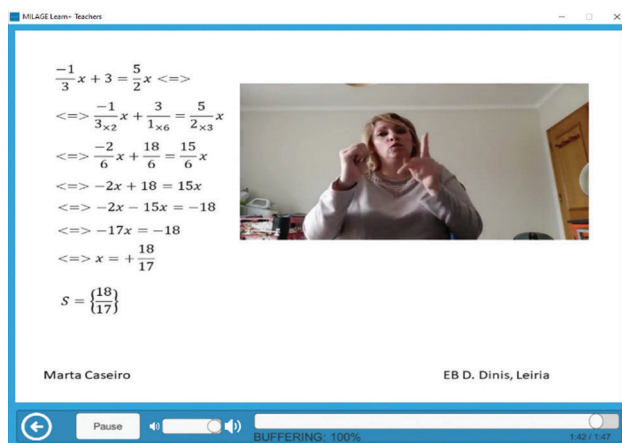


Figura 1. Vídeo com a intérprete de Língua Gestual Portuguesa

Assim, ao longo de todo o tempo em que estivemos no modelo de ensino a distância, trabalhei com os meus alunos usando a App Milage Aprender +, aplicando os recursos criados na formação da APM, bem como desenvolvendo outros adaptados aos alunos surdos. A plataforma Milage Aprender + permite, para cada aluno, obter um portefólio por capítulo com todos os enunciados seguidos da resolução do aluno, cotação da pergunta, resolução do aluno e resolução da plataforma (figura 2). O facto dos alunos poderem aceder a este portefólio digital foi de extrema importância uma vez que houve encarregados

de educação que, no início, diziam que preferiam que os filhos tivessem o enunciado copiado no caderno diário e de seguida a resolução. Deste modo, e após ter solicitado a um aluno a sua autorização para enviar o seu portefólio digital aos encarregados de educação da turma, estes concordaram que o portefólio digital era o mesmo que o caderno diário, mas com uma apresentação diferente, e para melhor, porque permitia ter também a resolução feita pelo professor. Outra grande vantagem desta App é a motivação dos alunos uma vez que usam o telemóvel ou tablet como uma ferramenta de trabalho e o factor *Gaming* teve também um grande impacto. O facto de existirem pontuações a atribuir e poderem ver a sua evolução comparativamente aos colegas fez com que o factor competição viesse ao de cima e levasse à resolução de mais exercícios, pelo que, na minha opinião, existiu consolidação de conhecimentos.

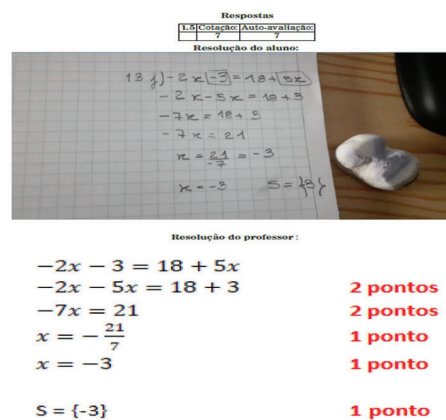


Figura 2. Imagem de uma página do portefólio

MARTA CASEIRO
ESCOLA BÁSICA D. DINIS, LEIRIA

E de repente muito mudou...

ANABELA GAIO

Em março deste ano, deparamo-nos com muitos desafios que implicaram repensar o que se fazia e como era feito. Esse desafio aplicado a uma escola TEIP situada num contexto socio económico muito desfavorecido implicou muitas horas de trabalho extra na preparação e organização de soluções. O ensino a distância no nosso agrupamento começou por ser no final do mês de março, baseado em fichas e apresentações ou vídeos de apoio, enviadas via email, mas depressa percebemos que essa metodologia não nos satisfazia, pois, o contacto com os alunos era quase nulo e o retorno e percepção do que era feito por eles era muito diminuto.

As questões organizativas implicaram que o terceiro período começou em termos de aulas síncronas e assíncronas cerca de

uma semana e meia depois do calendário oficial, sendo que no compasso de espera foram propostos aos alunos tarefas via email, para serem realizadas em família, como por exemplo adequar as quantidades de uma receita de uma muito saudável sobremesa ao número de pessoas da família, utilizando os conhecimentos de proporcionalidade, partilhando com o professor de matemática e com os colegas os resultados, as dúvidas e até muitas outras receitas. Depois de analisada a situação recorremos à plataforma que ainda era muito pouco usada no agrupamento – Microsoft Teams.

Tendo duas turmas de sexto ano, de matemática com características muito diversificadas (uma com vinte e oito alunos em que dez eram de português língua não materna

e outra com vinte alunos com dois alunos autistas e vários alunos com imensas dificuldades), foi necessário analisar o modo como poderia adequar o trabalho que tinha sido feito até ao momento em contexto presencial para o ensino a distância. Para a preparação deste trabalho foi essencial a minha rede de contactos em termos de professores, sendo que muitos pertencem à APM, e as interações entre os professores de Matemática que já eram um hábito aqui passaram a ser uma necessidade premente. As partilhas de experiências nas redes sociais sobre uso de ferramentas digitais, melhores metodologias e outros aspetos inerentes ao E@D foram outro ponto de apoio. Deixo aqui um excerto de alguns momentos de trabalho com uma das turmas, em que todos os vinte alunos tiveram acesso às aulas síncronas ao contrário do que sucedeu na outra turma. Nesta turma a integração de dois alunos autistas implicou desde o quinto ano que a preparação das unidades tinha de ser feita a contar com a sua participação, ao nível do que conseguiam fazer. Criei para as aulas síncronas e assíncronas uma equipa por turma e foi definido que teríamos duas vezes trinta minutos semanais em modo síncrono e depois momentos de apoio individual/grupo. As aulas marcadas no horário em videoconferência, tiveram por base diferentes suportes, desde vídeos a apresentações minhas e dos alunos, tendo sempre intervenções dos alunos e interação entre eles em termos de questionamento e explicação. Os momentos ditos assíncronos eram feitos através da referida plataforma na equipa/disciplina mas através de conversa escrita, sendo que aqui os alunos se ajudavam muito entre si, passando muitas vezes para videochamada se considerassem ser necessário analisar um problema ou resolver uma tarefa. Um dos exemplos é o do que foi feito em relação ao conteúdo de aprendizagem figuras planas e sólidos geométricos, em que de modo a levar os alunos e reconhecer o significado de fórmulas para o cálculo de volumes de sólidos (prismas retos e cilindros) comecei por apresentar atividades que implicassem fazer revisões relacionadas com aprendizagens anteriores nomeadamente descrever figuras no plano e no espaço com base nas suas propriedades e nas relações entre os seus elementos e fazer classificações explicitando os critérios utilizados e calcular perímetros e áreas de figuras planas, incluindo o círculo, recorrendo a fórmulas, por enquadramento ou por decomposição e composição de figuras planas.

A primeira atividade proposta implicava fazer uma composição geométrica só com polígonos (figuras 1 e 2). Podiam fazer de várias maneiras, desenhando e partilhando-a na equipa da turma ou usando os meios ao seu dispor fazer no Microsoft Word utilizando as formas disponíveis. Seguiu-se um momento de apresentação do trabalho de cada aluno associado à descrição em termos das características e outros aspetos que foram destacando.

A correção do que foi sendo feito pelos alunos e posteriormente por mim, permitiu que alguns trabalhos tivessem melhorado e muito. Seguiu-se o trabalho com o tangram nas suas várias hipóteses nomeadamente a possibilidade de o construírem ou de usarem o tangram virtual. Sendo algo já conhecido eles descobriram muitas mais possibilidades e a partilha do que

foram fazendo e das suas descobertas nas conversas da equipa ou nos momentos de trabalho entre eles permitiu que algumas das dificuldades fossem sendo ultrapassadas. Outras propostas foram apresentadas, intercaladas com momentos de resolução de exercícios em Microsoft Forms. Os pontos de situação e os resumos feitos em modo colaborativo na equipa, em que cada aluno podia acrescentar o que se ia trabalhando num documento, ou acrescentando aprendizagens que ia fazendo como as fórmulas e exemplos de como utilizá-las permitiu que os tradicionais resumos fossem um documento apropriado por eles e não algo que o professor apresenta ou que consta do manual. Todas estas atividades e tarefas tinham como objetivo levá-los a compreender melhor o cálculo de volumes. Tenho a perceção que muito ficou por fazer e que nem todos conseguiram atingir o que se pretendia, no entanto houve a interação possível, sendo que se manteve a colaboração entre todos.

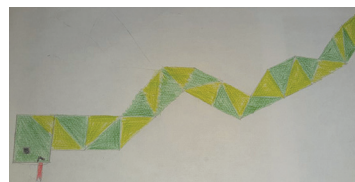


Figura 1

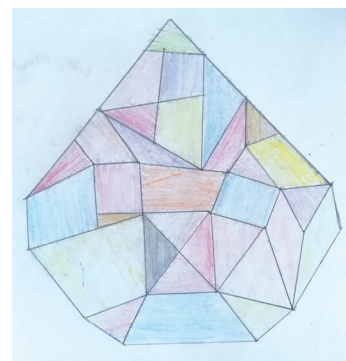


Figura 2

A avaliação dos alunos teve subjacente o que tinha sido feito em modo presencial e tudo o que todos foram fazendo em termos da resolução dos exercícios, da apresentação das suas conclusões relacionadas com a realização das tarefas propostas, entre outros aspetos.

Analisando o que aconteceu e como decorreu, posso afirmar que ultrapassou as minhas expectativas, implicou novas aprendizagens e a aplicação de muitas coisas que conhecia, mas que nunca tinha feito. Garanto que não troco o presencial pelo E@D mas sei que vou utilizar cada vez mais outras ferramentas e metodologias a elas ligadas (infelizmente na minha escola as condições são péssimas ao nível das salas de aula e dos recursos tecnológicos). Estes são tempos que nos desafiam e implicam que a partilha e colaboração inerentes a associações como a APM são essenciais no apoio a todos nós professores.

ANABELA GAIO

ESCOLA BÁSICA 2,3 MÁRIO DE SÁ CARNEIRO, AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CAMARATE

APM 2020 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP

e duas modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

A APM e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado **aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP** que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @sócio da APM.

Pode inscrever-se indistintamente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.º de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de associado da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF da Revista Educação e Matemática no nosso portal; todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas.

A revista Quadrante é publicada online (<https://quadrante.apm.pt>) e é de acesso livre.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem duas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Quotas anuais para 2020

Modalidades de associado individual	2020
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio (residente em Portugal ou no estrangeiro)	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

* Poderão inscrever-se nestas modalidades, estudantes em formação inicial (licenciatura ou mestrado profissionalizante)

Modalidades de associado institucional	Quota
Modalidade I (1 exemplar da EeM)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da EeM)	95,00 €

Assinatura da revista Educação e Matemática

		3 números + 1 número duplo temático
Associado individual	Portugal	
	Estrangeiro	
Não associado individual	Portugal	50,00€
	Estrangeiro	70,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€
	Estrangeiro	95,00€

Preço de capa da revista Educação e Matemática

Educação e Matemática		
Associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€
Não associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€

índice

Editorial

- 01** Resistir e investir
Ana Paula Canavarro

Artigos

- 03** Pequenos projetos com grandes resultados: criatividade, autonomia e empenho
Nélia Amado, Susana Carreira
- 10** Da área ao volume – quando a intuição nos desafia
Lina Brunheira
- 13** Entrevista aos professores autores das aulas de Matemática do 9.º ano do projeto #EstudoEmCasa
Paulo Almeida, Paulo Correia, Susana Almeida, Vânia Mateus
- 18** Projeto interdisciplinar «Eu sinto logo je suis»: Uma colaboração entre Francês - Português - Matemática
Nuno Inácio, Sónia Mendes, Susana Silva
- 20** Aprender e Ensinar Matemática online: possibilidades das Salas Simultâneas
Hélia Jacinto, Paula Diogo
- 26** Articulado Matemática A e Aplicações Informáticas: Iterações, o Método das Bisseções sucessivas e o Teorema de Bolzano-Cauchy
Ana Isabel Cunha, Cristina Cruchinho, Maria José Carvalho,
- 31** Uma partilha de práticas com matemática no Jardim de Infância
Ana Isabel Pinto Desterro, Elvira Ferreira

- 40** E@D: Práticas e Aprendizagens
Uma experiência de avaliação a distância, *Sílvia Zuzarte*
Discussão de estratégias e cálculo mental, mesmo a distância..., *Susana Brito*
Uma experiência com tecnologias durante o projeto #ESTUDOEMCASA, *Manuela Gabriel*
Sobre a aplicação Milage Aprender +, *Marta Caseiro*
E de repente muito mudou..., *Anabela Gaio*

Secções

- 02** Pense Nisto
Avaliação externa em tempos estranhos - entranha-se alguma coisa? *Cristina Cruchinho, Joaquim Félix*
- 08** Cadernos de apontamentos de Geometria *Cristina Loureiro*
Resolução de problemas, geometria dinâmica e dissecções
- 25** Materiais para a aula de Matemática
O produto de polinómios com Algebra Tiles, *Paulo Almeida, Susana Almeida, Vânia Mateus, Paulo Correia*
- 30** O problema deste número *José Paulo Viana*
Os apurados
- 36** Espaço GTI - Tecnologias na Educação Matemática - Grupo de Trabalho de Investigação da APM-António Domingos
A calculadora gráfica no ensino básico – uma conexão entre os domínios de Funções do 7.º ano e Geometria do 9.º ano, *Maria Manuela Subtil, António Domingos*