

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

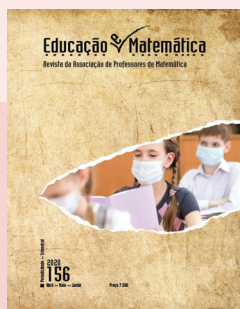


Periodicidade ∞ Trimestral

2020
156

■ Abril ∞ Maio ∞ Junho

Preço 7.50€



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Editores	Ana Isabel Silvestre
	Cristina Cruchinho
	Cristina Moraes
	Elvira Santos
	Filipa Machado
	Helena Gil Guerreiro
	Irene Segurado
	João Terroso
	Manuela Pires
	Silvia Zuzarte
	Teresa Olga Duarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Junho de 2020

Tiragem 1000 exemplares

Periodicidade Trimestral

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
 Registo no ICS n.º 124051
 ISSN 0871 – 7222
 Porte Pago

Sobre a capa

Terminou o ano letivo, terminou uma aventura, terminou um acontecimento que, eventualmente, ficará na história da educação.

Prepara-se um novo ano e, embora todos tenhamos consciência da incerteza e imprevisibilidade associada à evolução da pandemia, a criação de condições de segurança para o regresso à sala de aula com o foco no bem estar dos alunos é de importância crucial para o desenvolvimento de novas aprendizagens e consolidação das anteriores.

Que não se perca, o que se ganhou em experiência e inovação. Que se desenvolvam novos recursos e metodologias que reforcem a capacidade de resposta a um próximo mas incerto futuro.

Mário Baía

Neste número também colaboraram

Ana Cunha, António Manso, Cristina Cruchinho, Cristina Loureiro, Fátima Alexandrino, Filipa Machado, Francisco Monteiro, Gorete Fonseca, Heitor Miranda, Helena Gil Guerreiro, Irene Segurado, Isabel Rocha, Jaime Carvalho e Silva, João Pedro da Ponte, Joana Conceição, Joana Mata-Pereira, José Luiz Pastore Mello, José Paulo Viana, Manuela Pires, Margarida Rodrigues, Maria Cristina Costa, Marisa Quaresma, Paula Figueiredo, Paulo Correia, Paulo Santos, Sandra Nobre, Sofia Ribeiro.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.
- Pela relevância das cores nalguns artigos deste número, a sua versão digital disponibilizada aos sócios no site da APM será publicada a cores.

E se agora tudo começasse a mudar...

No Editorial da Revista anterior (E de repente tudo mudou...), os seus autores apresentaram-nos, como num espelho, uma imagem polifacetada do que vivíamos nesse tempo de confinamento e ensino a distância e ajudaram-nos a fazer uma leitura — ao mesmo tempo, uma interpelação — dessas várias realidades que nos devolveram.

Agora é tempo de olharmos para lá do espelho e ousarmos sonhar o futuro da educação, lutando pelas mudanças que virmos necessárias para o melhorar.

Esta irrupção de uma nova forma de estar obrigou-nos a olhar de frente as fragilidades e as potencialidades do nosso sistema educativo e da escola. E certamente obrigará a mudanças, algumas há muito por nós reclamadas.

A Direção da APM e o Conselho Nacional da Associação, cedo divulgaram as suas preocupações com esta situação (posição de 6 de abril de 2020), elencando já um conjunto de princípios que defendemos agora e no futuro.

O primeiro, o da inclusão efetiva: o ensino obrigatório em Portugal até ao 12.º ano de escolaridade (ou até aos 18 anos do aluno) supõe que nenhum aluno possa ficar para trás e que ninguém seja discriminado em função de qualquer tipo de incapacidade ou carência que introduza desigualdades de acesso à aprendizagem. Reafirmamos também a importância das metodologias ativas e interativas entre docentes e alunos, e entre alunos, como a forma privilegiada para suscitar aprendizagens significativas nos alunos (e também nos professores), privilegiando tarefas investigativas e projetos. Também estes tempos nos devolvem um (re)pensar a avaliação como parte integrante de todo o processo de ensino e aprendizagem e não reduzida a uma classificação final que parece ser possível atingir como se de uma corrida de obstáculos se tratasse e em que o sprint final é que conta; a priorização das aprendizagens e das avaliações feitas pelos professores (com critérios de qualidade e variedade de instrumentos) que acompanham a evolução dos seus alunos, em relação a classificações de provas externas (sobretudo quando aplicadas com funções seletivas e de acesso ao ensino superior) são assim uma questão pendente de reflexão e de decisões, especialmente urgente no ensino secundário para que não seja refém do acesso ao ensino superior. Necessário é também repensar a função reguladora da avaliação externa, nas suas formas e aplicações.

No centro deste debate para o futuro próximo está a organização curricular e os programas: currículos e programas que devem ser suficientemente sucintos e focados por forma a poderem ser reiteradamente trabalhados e apropriados ao longo de um ciclo de escolaridade e que permitam trabalhar também em torno de projetos abrangentes, culturais e artísticos, científicos e meio-ambientais, de cidadania e solidariedade.

As opções didáticas têm de passar agora necessariamente pela integração da tecnologia, pelo equilíbrio de tempos expositivos em aula ou por meios digitais, de tarefas de investigação, de trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em grupo, através de seminários por eles preparados, realização de projetos, e um grande etcetera fruto do trabalho conjunto e partilhado dos professores.

Para fazer possível esta cultura de escola e para tornar mais fecundo e gratificante o trabalho dos professores e mais incisiva a importância educativa e social da escola, há que criar condições de trabalho — com recursos, certamente, mas com o maior recurso que torne tudo isto possível: o tempo! Tempo de qualidade para os professores, tempo de estudo e preparação individual, tempo para a formação contínua e especializada, tempo de trabalho colaborativo, tempo de qualidade com os alunos, tempo liberto de burocracias e espartilhos.

Recordamos que, no que diz respeito à Matemática, grande parte destas questões foram objeto de análise por parte do Grupo de Trabalho para a Matemática num Relatório e Recomendações, cuja versão final esperamos para breve, mas ainda não conhecemos à data da escrita deste Editorial.

Tudo isto é um sonho? Certamente! Um sonho que sempre orientou a APM e que tentámos contagiar a muitos outros e assim tornar possível.

E se agora, sim, tudo começasse efetivamente a mudar?

A DIREÇÃO DA APM

PS.: Se não fora a covid-19, esta Educação e Matemática seria lançada no ProfMat2020. Pela primeira vez na sua história, o ProfMat “falha” um ano. Com a tristeza desta ausência, fica o compromisso de tudo fazermos para que o (re)encontro seja possível e em breve.

Diário matemático de uma epidemia em Portugal

JOSÉ PAULO VIANA

Com a chegada da pandemia, muitos de nós pensámos logo que esta seria uma oportunidade de aplicar a Matemática a uma situação real, observando a evolução de covid-19 no nosso país.

A situação mais simples de analisar é a de uma doença epidémica que não provoca mortes, que se torna crónica nos indivíduos infetados que mantêm a sua contagiosidade ao longo do tempo, e que não provoca alterações de comportamentos numa população isolada (por exemplo, uma doença destas numa comunidade de coelhos numa ilha). Neste caso, a evolução do número de elementos infetados ao longo do tempo é, aproximadamente, uma função logística.

A função logística é do tipo $f(x) = \frac{M}{1 + e^{-k(x-x_i)}}$, em que k é um parâmetro que define a rapidez com que a doença se espalha, x_i é a abcissa do ponto de inflexão e M é o total de indivíduos que serão afetados (o efetivo da população menos, eventualmente, o número de indivíduos naturalmente imunes à doença).

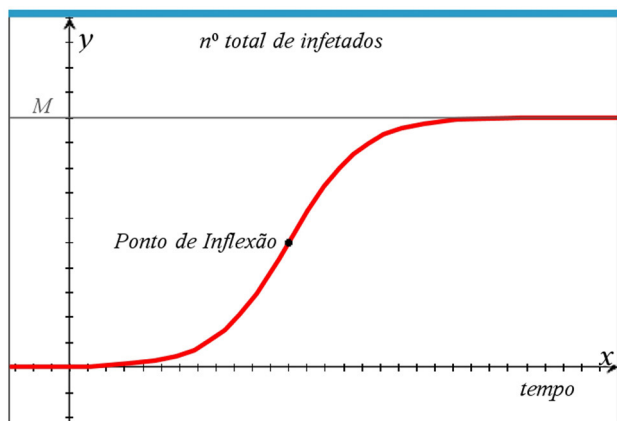


Figura 1. Função logística

Podemos distinguir três fases. Na primeira, a logística confunde-se com uma função exponencial e o crescimento é cada vez mais rápido. A segunda é uma fase intermédia que inclui o ponto de inflexão. Na terceira, o crescimento é cada vez mais lento, a epidemia vai apaziguando e a função tende para M .

Observemos a sua derivada, que nos dá o número diário de novos infetados.

O gráfico é uma curva em forma de sino, mas que não se pode confundir com a curva da distribuição normal. O máximo da derivada, que corresponde ao ponto de inflexão da função

logística, indica-nos o dia em que a epidemia atingiu o seu pico. A partir daí, o número de novos infetados vai diminuindo progressivamente e tender para zero.

A evolução de uma epidemia entre humanos é bastante mais complicada mas as considerações anteriores podem servir de ponto de partida para o nosso caso.

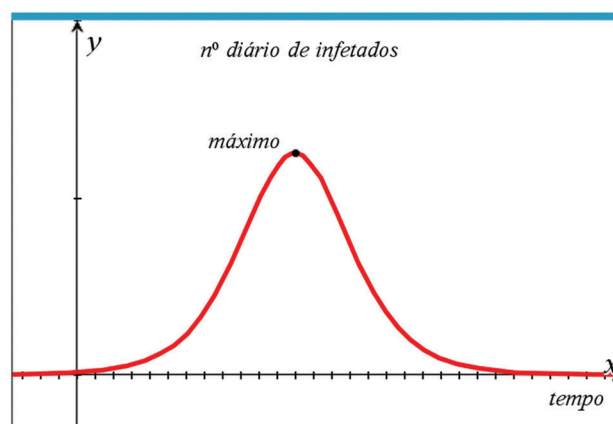


Figura 2. Derivada da função logística

Para fazer o estudo da evolução de covid-19 foram recolhendo-se os dados referentes ao total de infetados desde o início, divulgados diariamente pelas autoridades (ver anexo). Por coincidência, os primeiros casos conhecidos da doença em Portugal foram detetados no dia 1 de março, pelo que a variável "dia" começou a contar a partir dessa data.

OS PRIMEIROS DIAS

Foi preciso esperar algum tempo até se ter um número suficiente de dados. Como se pode ver na figura 3, o nº total de infetados em função do tempo (em dias) é uma exponencial quase perfeita. A nuvem de pontos coincide quase exatamente com o gráfico da função e isso é confirmado pelo coeficiente de determinação r^2 . Este coeficiente pode variar entre 0 (quando não existe qualquer relação entre duas variáveis) e 1 (quando os pontos da nuvem pertencem ao gráfico da função) e, neste caso, ele é altíssimo: 0,9876.

A base da potência da função exponencial (1,404) corresponde ao grau de crescimento da função. Nestes 15 dias, o número de infetados pela doença cresceu 40,4% em cada dia.

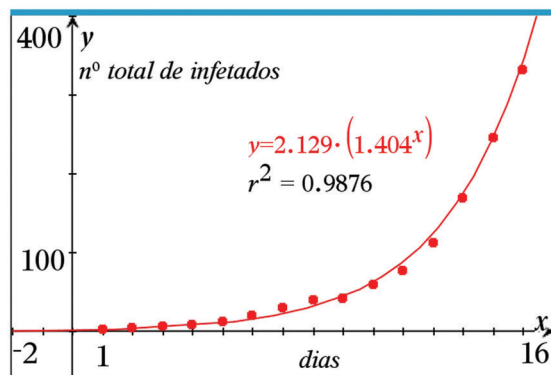


Figura 3. Os primeiros 15 dias

Com os dados atualizados diariamente, fomos fazendo novos modelos, mas os valores obtidos pouco se alteravam. A taxa de crescimento rondava sempre os 40% e r^2 passou a ser superior a 0,99. Os modelos descreviam com precisão a evolução da doença e era bonito ver a matemática a funcionar tão bem. Contudo, isto não permitia prever o mais importante: quando se dariam as alterações para entrar na fase de abrandamento nem, muito menos, quando estaria controlada a epidemia.

A SEGUNDA FASE

A partir do dia 20 os novos pontos começaram a afastar-se do modelo exponencial. Na figura 4 temos a situação dia 22.

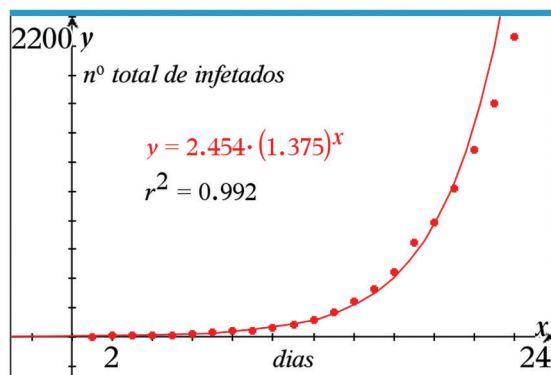


Figura 4. Exponencial no dia 22

Os últimos pontos estão já bastante afastados da exponencial e, apesar de r^2 continuar muito elevado, nota-se claramente que este modelo deixou de servir.

Tínhamos entrado na segunda fase e o modelo logístico tornou-se muito melhor. Como se vê na figura 5, o gráfico da curva passa muito perto dos pontos, ou seja, os desvios (ou resíduos) são muito pequenos.

A vantagem, agora, é que já podíamos começar a fazer previsões. Procuramos o ponto de inflexão do gráfico, que corresponde ao dia 24, o que significaria que o pico da epidemia seria daí a dois dias. Pela expressão da função, o número de infetados no fim da epidemia seria de 5897 e, consultando a tabela de valores da logística, via-se que isso aconteceria a 25 de abril. Parecia demasiado bom.

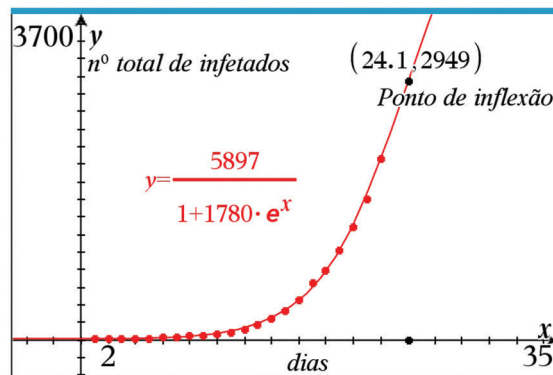


Figura 5. Modelo logístico no dia 22

Nos dias seguintes, continuámos a determinar o modelo logístico com os dados atualizados:

- dia 24 - fim no dia 28 de abril, 6814 infetados
- dia 25 - fim no dia 29 de abril, 7770 infetados
- dia 26 - fim no dia 30 de abril, 9581 infetados
- dia 27 - fim no dia 01 de maio, 12918 infetados
- dia 28 - fim no dia 09 de maio, 13397 infetados

A cada dia que passava, o final da epidemia ficava mais longe e o número total de infetados aumentava. Ou seja, estes modelos descreviam muito bem o passado mas, claramente, não eram nada bons a prever o futuro. Era preciso investigar mais sobre o assunto. A ajuda de João Sardo, que me indicou várias locais da internet, foi essencial.

A evolução de uma epidemia entre a população humana depende de uma grande quantidade de parâmetros. Alguns são fixos (grau de contagiosidade da doença, tempo de incubação, intervalo de tempo que um doente pode contagiar outras pessoas, distribuição populacional por meios urbanos e rurais), outros são variáveis com o tempo (percentagem de pessoas imunes, existência de doentes assintomáticos) e outros vão mudando devido a decisões individuais ou coletivas (isolamento social, distanciamento social, quarentenas preventivas, isolamento dos doentes). Como os comportamentos globais se alteram devido às decisões que se tomam, a doença não progride naturalmente e a função logística deixa de servir.

Outros fatores vêm complicar um estudo que se pretenda rigoroso. Há vários parâmetros associados à doença que não podem ser medidos com um mínimo de rigor e alguns deles só no final da epidemia serão conhecidos. Por outro lado, os dados oficiais divulgados estão sujeitos a erros (quando se fazem poucos testes, detetam-se menos infetados; pessoas doentes com sintomas ligeiros podem não contactar as autoridades de saúde; devido ao excesso de trabalho, os técnicos podem esquecer-se ou adiar o registo de doentes, etc.).

Por estes motivos, todas as tentativas de, nesta fase, encontrar um modelo seguro e fiável estão votadas ao fracasso. As previsões sobre a evolução da doença ficam sujeitas a um enorme grau de imprecisão. Dois vídeos com excelentes explicações sobre este assunto são os de Henry Reich [2] e 3Blue1Brown [3].

Não era só eu que sabia pouco sobre o futuro. Estava explicado o facto de as autoridades irem anunciando datas muito diversas para o aparecimento do pico da infeção. Por outro lado, percebi que os artigos catastrofistas que iam aparecendo em certos jornais e no Facebook não tinham qualquer credibilidade (como se foi confirmando depois).

Voltemos ao nosso estudo. Durante mais uns tempos foram existindo funções logísticas sempre bem adaptadas aos dados do momento e com previsões cada vez mais longínquas para o final da epidemia. Mas, a certa altura, a logística começou a falhar. Os desvios começaram a acentuar-se.

Ora, um artigo no Blog Que Treta! [4] e o vídeo de Henry Reich [3] explicavam que o gráfico da evolução de uma epidemia começa por ser uma logística mas depois passa a ser uma reta. Era o que estava a acontecer aqui. Veja-se, na figura 6, o gráfico referente ao dia 39 (8 de abril), em que já aparecem vários pontos afastados do gráfico da função.

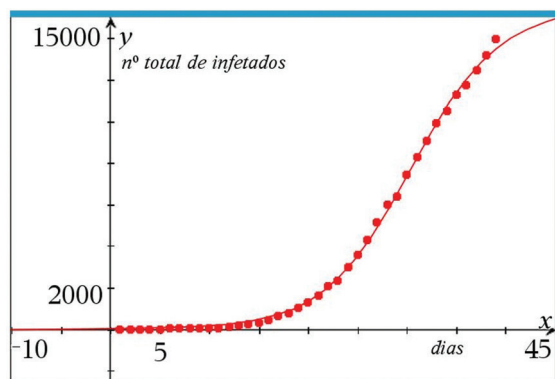


Figura 6. Modelo logístico no dia 39

Podemos confirmar, fazendo o gráfico entre os dias 24 e 39, que estamos já num crescimento retilíneo (figura 7).

A expressão analítica da reta indica-nos que, em média, o crescimento de novos infectados por dia foi de 741.

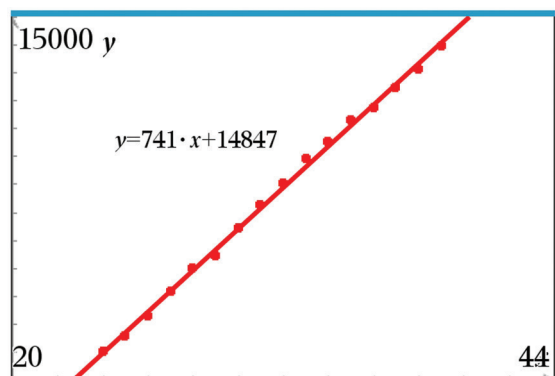


Figura 7. Dias 24 a 39

Henry Reich sugere uma outra forma gráfica de ver a evolução da epidemia, representado, em escalas logarítmicas, a relação diária entre o total de infectados e o número de novos infectados. Nota: como a variabilidade destes números é muito grande, opta-se por

usar o número de infectados nos últimos quatro a sete dias (ou a sua média). O comportamento é muito parecido de país para país. Inicialmente e durante algum tempo, os pontos dispõem-se segundo uma reta crescente, depois começam a aglomerar-se numa zona mais alta e, finalmente, descem rapidamente, marcando o final da epidemia.

Como os meios técnicos de que disponho não permitem fazer gráficos com escalas logarítmicas, foi preciso usar um artifício, colocando, no eixo horizontal, o logaritmo do total de infectados e, no eixo vertical, o logaritmo do número de novos infectados nos últimos quatro dias.

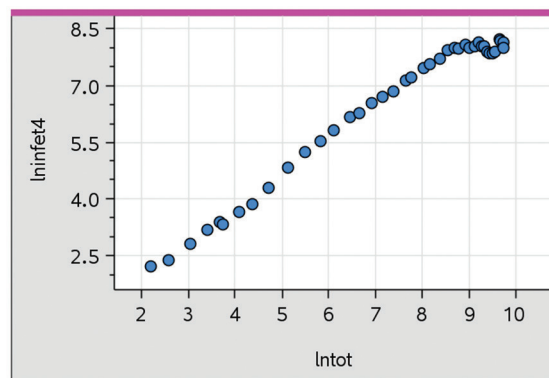


Figura 8. Gráfico logarítmico (até dia 44)
Total de infectados / Infectados em 4 dias

Como se vê na figura 8, depois do período inicial com pontos alinhados segundo uma reta, entrou-se já na segunda fase (aglomeração de pontos na parte superior).

Regressemos às representações habituais. A partir do dia 40 (9 de abril), a situação voltou a alterar-se. Os novos dados indicavam um menor crescimento do número de infectados, com os pontos alinhados numa reta de declive inferior. O gráfico da figura 9 mostra precisamente isso, quando se estava no dia 56.

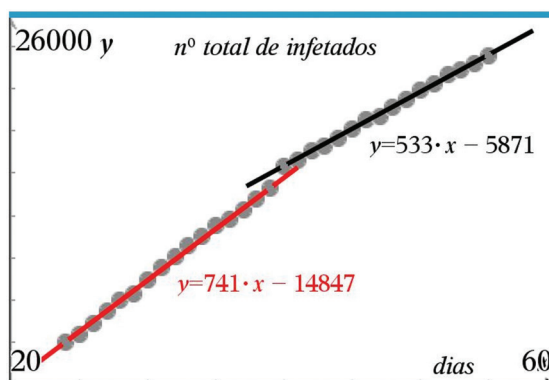


Figura 9. Dias 24 a 56

Nos últimos 16 dias, o crescimento médio de novos infectados diário tinha descido para 533, uma melhoria sensível quando comparada com o crescimento de 741 no período anterior.

Vejam, na figura 10, o gráfico logarítmico nesta altura.

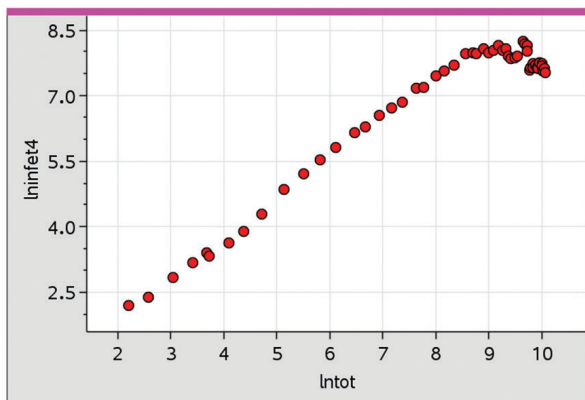


Figura 10. Gráfico logarítmico (até dia 56)
Total de infectados / Infectados em 4 dias

Havia nessa altura um segundo aglomerado de pontos, já abaixo do primeiro. Era mais um bom sinal.

Como, aparentemente, se tinha entrado na fase de apaziguamento do covid-19, podemos analisar o passado e tentar situar o pico da epidemia, isto é, o momento em que o crescimento do número de novos infectados atingiu o seu máximo. Isso terá acontecido entre os dias 8 e 10 de abril, embora não se possa ter a certeza.

A FASE DE APAZIGUAMENTO

Os dados dos dias que se seguiram foram bastante animadores, tanto mais que no dia 62 (2 de maio) foi anunciado que os dados referentes à semana anterior estavam inflacionados devido à duplicação de algumas participações de doentes infectados. Como não foi possível descobrir os verdadeiros valores para esses sete dias, a solução foi distribuir o erro proporcionalmente. Mesmo que isso não corresponda exatamente aos valores reais, as alterações aos modelos e às conclusões serão mínimas.

Nos dias 66 a 68 os números voltaram a subir, quebrando a tendência de abrandamento. Será isto um fenómeno isolado ou, com o cansaço, as pessoas terão começado a ter menos cuidados? Vai ser preciso esperar para se saber.

Como este artigo tem de seguir para a paginação, vejamos os gráficos referentes à situação até agora, dia 68.

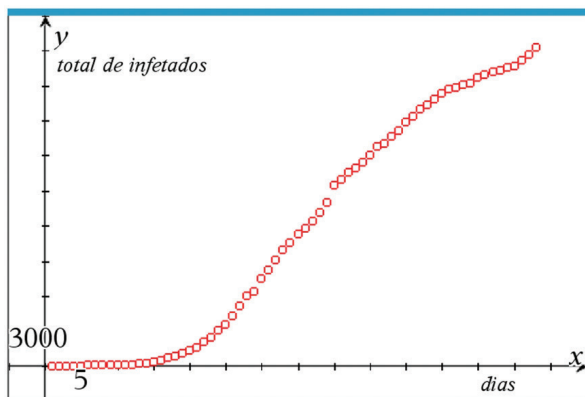


Figura 11. Evolução do número total de infectados até 7 de maio

Como se pode verificar, os três últimos pontos estão acima do alinhamento dos anteriores.

Com mais pormenor, temos o gráfico dos períodos de crescimentos lineares após o período logístico.

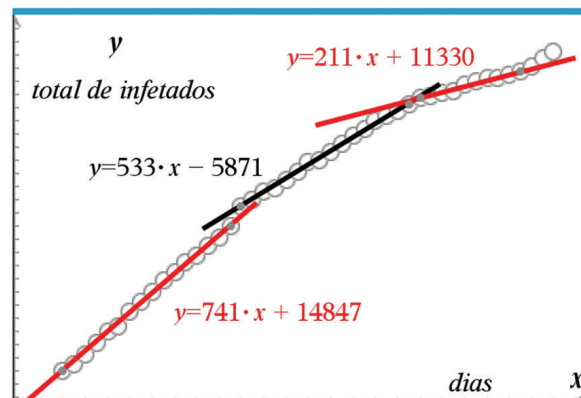


Figura 12. Dias 24 a 68

Entre os dias 56 e 65, o crescimento médio foi de 211 novos infectados diários mas, como é visível, os pontos dos três dias seguintes estão desalinhados e acima da reta. O crescimento médio nos dias 66 a 68 foi de 522, bastante maior que antes.

Finalmente, temos o gráfico em escalas logarítmicas.

Os novos pontos estavam a descer de forma sensível, aproximando-se do eixo horizontal e mostrando o abrandamento da doença. Pena é a existência das três exceções finais. Veja-se o ponto 68 (a cheio) bem acima dos anteriores. Tudo voltou atrás. Resta-nos agora esperar pelos próximos tempos, em que possamos voltar a estar ao vivo com os nossos alunos e a analisar com eles toda a matemática associada a este e a outros fenómenos reais.

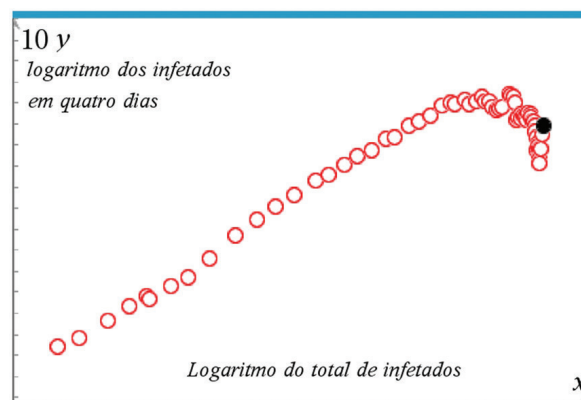


Figura 13. Gráfico logarítmico (até dia 68)
Total de infectados / Infectados em 4 dias

Referências

- [1] IHME COVID-19 Projections, <https://covid19.healthdata.org/portugal>

Mostra graficamente a evolução diária do nº de mortes, do total de mortes e dos meios hospitalares disponíveis, indicando, em

cada caso, as projeções para o futuro (sempre com uma amplitude muito grande, dado o grau de incerteza).

- [2] Henry Reich Minute Physics <https://youtu.be/54XLXg4fYsc>
Explica como analisar a evolução da epidemia usando gráficos com escala logarítmica e chama a atenção para as imprecisões dos dados e para as limitações e precauções a ter, quer com os resultados obtidos, quer com as projeções.
- [3] 3Blue1Brown <https://www.youtube.com/watch?v=gxAaO2rsdIs>
Explica o que é o modelo SIR de uma epidemia, com a evolução das três classes em que a população se pode dividir: Suscetíveis (os que podem apanhar a doença), Infeciosos (os que estão doentes) e Removidos (os recuperados e os falecidos). Mostra muitas simulações da forma como uma epidemia alastra, de acordo com a influência de muitos parâmetros: contagiosidade, grau de contactos entre pessoas, isolamento social (e quando algumas pessoas começam a quebrá-lo), distanciamento social, isolamento de doentes, existência de casos assintomáticos, meio urbano versus meio rural, existência locais de aglomeração de pessoas, viagens entre comunidades separadas, etc.
- [4] Blog Que Treta! <https://ktreta.blogspot.com/2020/04/inflexao.html>
Explica como o gráfico da evolução de uma epidemia começa por ser uma logística e depois passa a ser uma reta.

JOSÉ PAULO VIANA

ANEXO

Número total de infetados, contados a partir de 1 de março de 2020

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº	2	4	6	9	13	21	30	39	41	59
Dia	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nº	78	112	169	245	331	448	642	785	1020	1280
Dia	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Nº	1600	2060	2362	2995	3544	4268	5170	5962	6408	7443
Dia	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Nº	8251	9034	9886	10524	11278	11730	12442	13141	13956	15472
Dia	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Nº	15987	16585	16934	17448	18091	18841	19022	19685	20206	20863
Dia	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Nº	21379	21982	22353	22797	23307	23712	23852	24105	24262	24725
Dia	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Nº	24987	25190	25282	25524	25702	26182	26715	27268		

Nota: os valores dos dias 55 a 61 são estimados.

ESTATUTO EDITORIAL DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

A Educação e Matemática é uma publicação periódica da Associação de Professores de Matemática (APM). A sua periodicidade atual é de cinco números anuais, sendo um deles temático e duplo. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática. Dirige-se aos professores de matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro. Os principais objetivos da Educação e Matemática são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas atuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A Educação e Matemática publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, resenhas de livros, resolução de problemas, notícias... A Educação e Matemática tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com carácter permanente. A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista. À semelhança das outras revistas informativas, a Educação e Matemática assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A DIRETORA DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?

JOÃO PEDRO DA PONTE

MARISA QUARESMA

JOANA MATA PEREIRA

Um dos grandes objetivos do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocinar. Mas o que é raciocinar? Quais os aspetos fundamentais da capacidade de raciocínio? De que modo pode o professor na sala de aula promover o desenvolvimento desta capacidade? São questões que iremos analisar, procurando conjugar perspetivas teóricas e exemplos concretos da sala de aula.

RACIOCINAR E PENSAR

É um lugar-comum dizer-se que “a Matemática requer raciocínio” e também que “desenvolve o raciocínio”. Mas o termo “raciocinar” tem vários sentidos, como, por exemplo, os que lhe são dados pelo dicionário:

Raciocinar: 1. fazer uso da razão para depreender, julgar ou compreender; 2. encadear pensamentos de forma lógica; 3. apresentar razões; 4. ponderar; reflectir; pensar (Do lat. ratiocinári) (Dicionário Porto Editora)

Depreender, julgar, compreender, pensar de forma lógica, apresentar razões, ponderar, refletir... São muitos significados diferentes! O que é então raciocinar?

Desde logo, coloca-se a questão se “raciocinar” será o mesmo que “pensar” ou se será algo mais específico, ou seja, “pensar de certa maneira”. No nosso entender, consideramos que se deve atribuir a “raciocinar” um significado mais restrito que “pensar” (figura 1). Na nossa perspetiva, raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado. Este entendimento está em consonância com outro dicionário, (Merriam-Webster) que diz que raciocinar é estabelecer inferências ou conclusões a partir de factos conhecidos ou assumidos como verdadeiros. Acrescentamos apenas que isso deve ser feito de forma fundamentada e não ao acaso. Descrever um objeto, relatar um acontecimento, exprimir um sentimento ou formular um desejo, sem mais, envolvem pensamento, mas podem não envolver raciocínio.

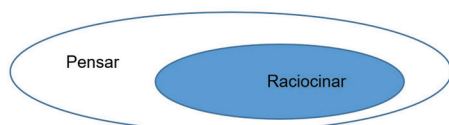


Figura 1. Raciocinar e pensar.

RACIOCÍNIO DEDUTIVO, INDUTIVO E ABDUTIVO

O raciocínio não é exclusivo da Matemática. Existe em todos os domínios do conhecimento bem como na vida do dia-a-dia. Há alguns aspetos, no entanto, que são caraterísticos da Matemática. Desde logo, há a referir a importância do raciocínio dedutivo, muitas vezes também referido como raciocínio lógico ou raciocínio lógico-dedutivo, que ocupa um lugar fundamental nesta ciência. Em Matemática, assumimos um conjunto de afirmações como verdadeiras (axiomas ou postulados) e assumimos um conjunto de regras de inferência, para obter novas afirmações verdadeiras (teoremas). Deste modo “raciocinar dedutivamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento” (Ponte, Branco & Matos, 2008, p. 89). Desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros “o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas” (Oliveira, 2008, p. 7). Como refere Oliveira (2002), o raciocínio dedutivo constitui “o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático” (p. 178), sendo através dele que se validam as afirmações matemáticas. A importância do raciocínio dedutivo em Matemática é de tal ordem que Davis e Hersh (1995) afirmam mesmo que a dedução é o “selo da Matemática”.

No entanto, as novas descobertas, na maior parte dos casos, não surgem através de raciocínio dedutivo mas sim de outros tipos de raciocínio, nomeadamente de raciocínio indutivo e abdutivo. George Pólya (1990) valorizou de forma eloquente o papel do raciocínio indutivo em Matemática. Como indica, a indução é a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares. Já a abdução é um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência (Silva, 2009). Este tipo de raciocínio foi teorizado por Charles Sanders Peirce (1931–1958), que afirma que “[a] abdução, ao fim e ao cabo, não é senão conjectura... é o processo de escolher uma hipótese” (Vol. 7, p. 219). Pelo seu papel na formulação de conjecturas e generalizações, a abdução e a indução são muitas vezes usadas em conjunto (Rivera & Becker, 2009). O facto insólito ou invulgar para o qual se formula uma conjectura (raciocínio abdutivo), pode levar à identificação de casos particulares que permitem a observação de uma regra geral (raciocínio indutivo).

QUE LUGAR PARA OS DIFERENTES TIPOS DE RACIOCÍNIO NA AULA DE MATEMÁTICA?

Durante muito tempo, os estudos em educação matemática centravam-se exclusivamente no raciocínio dedutivo (Balacheff, 1988; Galbraith, 1995; Hanna, 2002). A maior parte destes estudos tendia a ver os raciocínios indutivo e abdutivo como obstáculos ao raciocínio matemático. Mais recentemente, registou-se uma grande mudança a este respeito – em vez de serem vistos como estando em conflito, estas diferentes formas de raciocínio passaram a ser vistas como complementares. Cada uma tem um papel importante e insubstituível – o raciocínio indutivo e abdutivo na criação de novo conhecimento e o raciocínio dedutivo na sua validação. O raciocínio dedutivo tem um lugar incontornável na validação das afirmações matemáticas, mas muitas dessas afirmações são descobertas através de raciocínio indutivo e abdutivo. Deste modo, os alunos devem aprender a raciocinar dedutivamente em Matemática mas devem igualmente aprender a raciocinar indutiva e abductivamente (Rivera & Becker, 2009).

Assim, é de grande importância saber como pode o professor, na sala de aula de Matemática, contribuir para que os alunos desenvolvam a capacidade de raciocínio nas suas diversas formas.

RACIOCÍNIO EM TAREFAS ENVOLVENDO FRAÇÕES

Um modelo de aula propício ao desenvolvimento do raciocínio é a aula em três fases. Esta aula organiza-se do seguinte modo:

1. Lançamento da tarefa, com uma pequena discussão para promover o envolvimento dos alunos.
2. Trabalho autónomo dos alunos, realizado em pares, em grupos, ou em modo individual.
3. Discussão coletiva, com apresentação e confronto de resoluções e síntese final.

Numa só aula, qualquer que seja a sua duração, podem existir um ou mais ciclos com este tipo de sequência de trabalho. Vejamos alguns exemplos de raciocínios que se evidenciam em respostas escritas dos alunos a tarefas matemáticas realizadas durante o trabalho autónomo.

Um exemplo é apresentado na figura 2.

5.

a) Será que $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$?

Sim.

$0,5 = 0,5$.

b) Dá uma (ou mais) justificações para a tua resposta à pergunta anterior.

$\frac{2}{4} = 0,5$ $\frac{8}{16} = 0,5$ $0,5 = 0,5$

um número a dividir pelo seu dobro é igual a 0,5.

Figura 2. Justificação e generalização de Catarina (6.º ano).

Na primeira alínea pergunta-se “Será que $\frac{2}{4}$ é igual $\frac{8}{16}$?”, Catarina responde afirmativamente e, sem que tal lhe tenha sido perguntado, avança de imediato com uma breve *justificação*: $0,5 = 0,5$, baseada numa mudança de representação. Na resposta à questão b), a aluna detalha mais a sua *justificação* indicando que $\frac{2}{4}$ é igual a 0,5 e $\frac{8}{16}$ é igual a 0,5, concluindo portanto (embora sem verbalizar) que $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{8}{16}$, no pressuposto que duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si. Apresenta ainda uma curiosa *generalização*: “Um número a dividir pelo seu dobro é igual a 0,5”.

Vejamos outro exemplo. Trata-se de uma outra tarefa, muito mais complexa, envolvendo comparação de frações (figura 3). A resposta de Marco evidencia uma *justificação por contraexemplo*, um importante processo de justificação matemática. O aluno indica que a resposta à questão é negativa porque num dado caso a afirmação é falsa.

É interessante notar que o aluno efetuou diversas mudanças de representação para dar a sua resposta. Primeiro, converteu as frações ($\frac{7}{4}$ e $\frac{5}{2}$) para quocientes (7:4 e 5:2) e depois estes para numerais decimais (1,75 e 2,5). É nesta representação que o aluno considera que a justificação se torna convincente dado que 1,75 é sem qualquer dúvida menor que 2,5.

Se uma fração tem numerador e denominador maiores que uma outra fração, será necessariamente maior que esta segunda fração?

Não Porque o exemplo de $7:4 = 1,75$ e o $5:2 = 2,5$
 $1,75 < 2,5$ é de
que isso não é verdade.
Marco

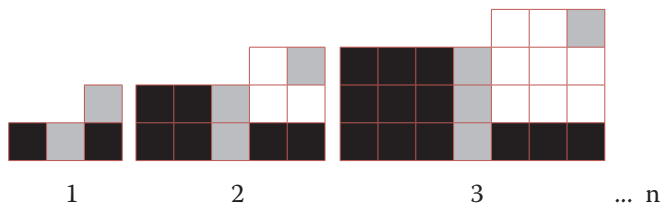
Não é verdade, porque podemos ter $\frac{5}{5} = \frac{3}{3}$. O numerador e o denominador podem ser maiores por exemplo: $\frac{5}{5} = \frac{3}{3}$ e $\frac{7}{7} = \frac{4}{4}$.
Mas o resultado é igual.
Bruno

Figura 3. Respostas de Marco e Bruno a uma tarefa de comparação de frações (6.º ano)

Um outro aluno, Bruno, responde também apresentando um contraexemplo. Mas a escolha de frações é surpreendente, pois são todas equivalentes à unidade ($\frac{5}{5}, \frac{3}{3}, \frac{7}{7}, \frac{4}{4}$). Trata-se de uma resposta extremamente interessante, não só pelo seu carácter inesperado, mas também porque a sua verificação é muito simples, dada a natureza dos cálculos envolvidos. Ambos os exemplos mostram a relação estreita entre representações e raciocínio. Mostram, também, o à-vontade dos alunos relativamente ao significado dos conceitos envolvidos.

RACIOCÍNIO NUMA TAREFA COM UMA SEQUÊNCIA COM QUADRADOS

Vejamos um exemplo de uma questão que apela à realização de raciocínio dedutivo (figura 4) e para a qual os alunos elaboraram as suas respostas durante o trabalho autónomo.



Mostra que, para cada termo, a diferença entre o número de quadrados pretos e o número de quadrados brancos é igual ao número de quadrados cinzentos.

Figura 4. Tarefa com uma sequência com quadrados.

Na parte de cima da sua resposta (figura 5), Pedro aponta os quadrados pretos da figura (que são 6), mas não se percebe porque determina metade (*justificação incorreta*). Aparentemente, o aluno procura estabelecer relações. Depois, à esquerda, indica os três termos gerais, mas não determina a diferença entre os termos gerais que interessam. Finalmente, à direita, mostra que a afirmação é verdadeira, apresentando apenas um exemplo (*justifica com um caso*).

na figura 2, se adicionarmos os
 □ pretos vão dar 6, ou seja, metade
 de 6 é 3, que é o nº de quadrados
 cinzentos.

quadrados
 pretos = $n^2 + n$

quadrados
 brancos = $n^2 - 1$

quadrados
 cinzentos = $n + 1$

$\blacksquare - \square = \blacksquare$
 $5^2 + 5 = 30$
 $5^2 - 1 = 24$
 $5 + 1 = 6$
 $30 - 24 = 6$

Figura 5. Resposta de Pedro (8.º ano) à tarefa.

Na mesma tarefa, Ana procura fazer uma *generalização*. Para isso, começa por determinar as diferenças em cada uma das três figuras (ensaia um passo do raciocínio indutivo) (figura 6). A partir daqui não consegue avançar. Depois, determina os termos gerais (em baixo à esquerda) (raciocínio indutivo). Finalmente, faz uma verificação algébrica da igualdade pedida (em baixo à direita), o que constitui uma *justificação* (raciocínio dedutivo). Em ambos os casos, os alunos usam nas suas respostas elementos de uma variedade de representações: linguagem algébrica, linguagem natural e representações icónicas.

Fig. diferença = $2 - 0 = 2$
 Fig. 2 diferença = $6 - 3 = 3$
 Fig. 3 diferença = $12 - 8 = 4$

$\blacksquare n^2 + n$
 $\square n^2 - n + 1$
 $\blacksquare n + 1$

$(n^2 + n) - (n^2 - 1) = n + 1$
 $n^2 + n - n^2 + 1 = n + 1$
 $n + 1 = n + 1$

Figura 6. Resposta de Ana (8.º ano) à tarefa.

RACIOCÍNIO NUMA DISCUSSÃO COLETIVA

Os momentos de discussão coletiva de uma aula em três fases são também importantes para levar os alunos a explicar os seus raciocínios ou mesmo para formular novos raciocínios. Vejamos uma tarefa que envolve três equações, relativas a uma situação imaginária em que três alunos, Catarina, Ricardo e Inês, registam o crescimento das suas plantas (esta situação e todos os diálogos que surgem adiante são retirados de Mata-Pereira & Ponte, 2017). A altura de cada planta é dada, em cada momento, pelas funções:

$$c(x) = 0,6x + 2$$

$$r(x) = 2 + (3/5)x$$

$$i(x) = 1 + 0,6x$$

Na discussão coletiva, a professora começa por pedir uma *justificação* (J), que é efetivamente dada pelo aluno. Mais adiante, incentiva um aluno (Vasco), a apresentar uma *conjetura* que tinha feito (C). Na última intervenção, o aluno começa por fazer uma *justificação*, rematando com uma *generalização*. Usa uma linguagem incorreta para se exprimir, mas a professora valoriza a ideia do aluno que, subtilmente, rediz (R) numa linguagem matemática apropriada.

Professora: Porque é que têm de ser duas retas paralelas? (J?)

Vasco: Porque a da Catarina e do Ricardo começaram com dois centímetros de altura e vão sempre acrescentar e depois a da Inês começou com um centímetro de altura e a somar.

Professora: E só há... Há outra hipótese das retas não se intersectarem sem serem paralelas?

Vários alunos: Não.

Professora: Não, então, graficamente, nós temos isto.

...

Professora: E ainda quero que o Vasco partilhe connosco aqui uma coisa que observou muito interessante. (C).

Vasco: Como a Catarina e o Ricardo começaram com a mesma altura e como ambas as plantas crescem ao mesmo ritmo, não se vão cruzar, a da Inês como cresce todos os dias...

Professora: Não se vão cruzar, estas aqui?!

Vasco: Sim. Então, já estão cruzadas.

Professora: Ah, já estão sobrepostas, coincidentes. E estas duas?

Vasco: A da Inês, como todos os dias cresce a mesma altura das restantes e começou com menos um centímetro... Vai ficar sempre mais pequena.

Professora: Vai ficar sempre mais pequena, daí que nunca se intersete [com os outros]. Exatamente, exatamente. (R)

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: CONJETURAR, GENERALIZAR E JUSTIFICAR

Há uma variedade de aspetos e processos que podem estar envolvidos no raciocínio matemático. São vários os autores que desenvolveram modelos que pretendem destacar o que envolve raciocinar matematicamente. Por exemplo, para

Lannin, Ellis e Elliot (2011) “raciocinar matematicamente é um processo dinâmico envolvendo conjecturar, generalizar, investigar porquê, e desenvolver e avaliar argumentos” (p. 12). Um outro modelo do raciocínio matemático, de Mata-Pereira e Ponte (2012), enquadra o raciocínio com dois outros processos, representar e dar significado (figura 7), evidenciando que o raciocínio matemático apoia-se necessariamente em representações e requer atribuição de significados aos objetos e ações envolvidos. Este modelo tem por base o processo de realização de uma investigação ou resolução de um problema matemático, começando pela formulação de questões, passando para a formulação de conjecturas e estratégias de resolução (que podem envolver generalização), aplicando essas estratégias e testando as conjecturas, até ao processo de validação (através da justificação).

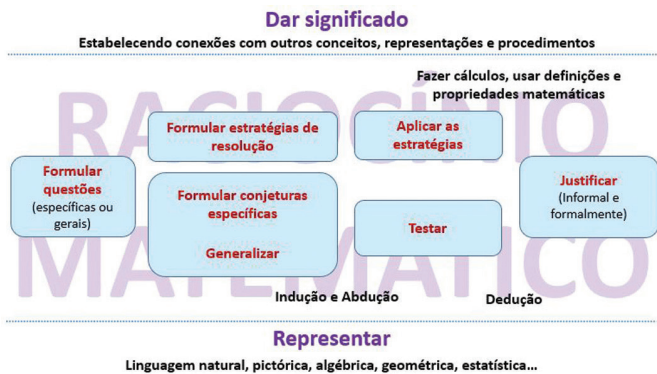


Figura 7. Modelo do raciocínio matemático adaptado de Mata-Pereira e Ponte (2012).

Conjeturar, generalizar e justificar destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático. Conjeturar, como vimos, é central no raciocínio abdutivo. Generalizar, ou seja, formular conjecturas de natureza geral, é um processo-chave dos raciocínios indutivo e abdutivo. Justificar, pelo seu lado, é um processo essencial do raciocínio dedutivo. Alguns elementos em que estes processos se podem basear e formas que podem assumir estão indicados na tabela 1.

É de sublinhar que o trabalho em torno do raciocínio matemático não é exclusivo dos anos de escolaridade mais avançados – pode e deve começar nos primeiros anos. Ou seja, conjecturar, generalizar e justificar são processos que podem ser valorizados desde o início da escolaridade.

ABORDAGEM EXPLORATÓRIA

A aula em três fases permite pôr em prática a abordagem de ensino exploratório (Ponte, 2005). Nesta abordagem, os alunos trabalham em tarefas para as quais não têm um método de resolução imediato – para as resolver têm de construir as suas próprias estratégias, usando conhecimentos prévios. Deste modo, os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução. São chamados a apresentar e justificar os seus raciocínios. Os alunos

Tabela 1. Conjeturar, Generalizar e Justificar

Conjeturar	<i>Podem ter por base</i> - observação; - construção;	<i>Pode assumir formas como</i> - identificar uma possível solução para um problema; - formular uma estratégia para resolver um problema;
Generalizar	- transformação do conhecimento prévio; - combinações de observação, construção e transformação.	<i>Pode assumir formas como</i> - reconhecer um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos; - alargar o domínio de validade de uma propriedade a um conjunto mais alargado de objetos.
Justificar	<i>Pode ter por base</i> - definições; - axiomas, propriedades, princípios gerais; - representações; - combinações de definições, propriedades e representações.	<i>Pode assumir formas como</i> - coerência lógica; - uso de exemplos genéricos; - uso contraexemplos; - por exaustão; - por absurdo.

têm assim oportunidade para construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas.

Nesta abordagem, o professor, em lugar de ensinar diretamente conceitos, procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar, propõe aos alunos um trabalho de exploração e descoberta, e promove momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva.

A abordagem exploratória tem dois suportes principais. Um deles é a escolha de tarefas apropriadas, suscetíveis de promover a construção de conceitos, a formulação de conjecturas, generalizações e justificações. O outro é o estabelecimento de um ambiente de comunicação na sala de aula capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos, com relevo para os momentos de discussão coletiva. A tabela 2 apresenta algumas das caraterísticas das tarefas e das ações do professor que favorecem o desenvolvimento do raciocínio dos seus alunos, conduzindo a comunicação na sala de aula.

A abordagem exploratória permite enfatizar a construção de conceitos, a modelação de situações e também a utilização de definições e propriedades de objetos matemáticos para os alunos realizarem raciocínios – nomeadamente para conjecturar, generalizar e justificar. Deste modo, presta atenção aos aspetos computacionais da Matemática, mas valoriza também os aspetos concetuais – ou seja, considera importante obter resultados, mas mais importante ainda compreender a estratégia que foi usada e a sua justificação.

CONCLUSÃO

Ao longo deste artigo procurámos salientar diversas ideias fundamentais:

Tabela 2. Tarefas e ações do professor para promover o raciocínio

Caraterísticas das tarefas a selecionar	Ações do professor durante a realização da tarefa		
	No lançamento da tarefa	Durante o trabalho autónomo	Na discussão coletiva
• Ter natureza diversa e com diferentes graus de desafio, incluindo questões de exploração e/ou problemas; • Permitir uma variedade de estratégias de resolução; • Suscitar a formulação de conjecturas e generalizações; • Solicitar a justificação de respostas ou estratégias de resolução.	• Assegurar que todos os alunos compreendem os termos matemáticos do enunciado; • Assegurar que todos os alunos compreendem o contexto; • Desenvolver uma linguagem comum para descrever os aspetos essenciais da tarefa; • Destacar processos de raciocínio que podem estar envolvidos na tarefa, como conjecturar, generalizar e justificar; • Promover o envolvimento dos alunos na realização da tarefa sem diminuir o seu grau de desafio.	• Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, sem reduzir de modo significativo o seu grau de desafio; • Para os alunos com dificuldades em formular ou concretizar uma estratégia de resolução, dar sugestões ou colocar questões facilitadoras que os ajudem a chegar por si próprios a uma estratégia; • Para os alunos que rapidamente resolvem a tarefa, propor extensões, envolvendo a exploração de novas questões, possíveis conjecturas e generalizações ou a formulação de justificações alternativas.	• Encorajar a partilha de ideias; • Explorar desacordos entre alunos, levando-os a argumentar as suas posições; • Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique; • Solicitar a explicação do “porquê”, a apresentação de justificações de respostas ou estratégias de resolução e a formulação de justificações alternativas; • Solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, destacando o que as valida; • Promover a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados; • Propor demonstrações sempre que pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos; • Desafiar os alunos a formular novas questões e estabelecer novas conjecturas e generalizações.

- O raciocínio é uma capacidade transversal que, embora não exclusiva da Matemática, pode e deve ser promovida no trabalho em Matemática.
- Vertentes fundamentais do raciocínio em Matemática são as conjecturas (obtidas por raciocínio abdutivo), as generalizações (obtidas na sua maioria de forma indutiva e abdutiva) e as justificações (alicerce do raciocínio dedutivo).
- A abordagem de ensino exploratório, baseada numa seleção criteriosa de tarefas e num ambiente estimulante de comunicação, com destaque para as discussões coletivas, proporciona um ensino da Matemática com compreensão e é uma base importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

A aula exploratória permite aos alunos grande protagonismo na realização das tarefas e na expressão dos seus raciocínios. A valorização do raciocínio matemático na sala de aula pode ser feita naturalmente a partir do trabalho dos alunos. Muitos professores trabalham já hoje com os seus alunos a partir de tarefas e não a partir de explicações e exemplos. Trata-se de um modo de trabalho que pode levar os alunos não só a desenvolver o seu raciocínio e os seus conhecimentos e capacidades em Matemática mas também a assumir uma perspetiva muito mais positiva sobre o que é esta ciência como atividade humana.

Nota: Este artigo foi elaborado no âmbito do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores e tem em conta o quadro teórico do projeto. O Projeto REASON tem apoio da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, contrato IC&DT – AAC02/SAICT/2017 e PTDC/CED-EDG/28022/2017.

Referências

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Modélisation et simulation* (Tese de doutoramento, Institut National Polytechnique de Grenoble; Université Joseph-Fourier - Grenoble I).

- Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher*, 88(5), 412-417.
- Hanna, G. (2002). Proof and its classroom role: A survey. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Eds.), *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 75-104). Lisboa: SPCE.
- Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, 21(2), 81-110.
- Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, 100, 3-9.
- Peirce, C. S. (1931–1958) *Collected papers* (8 vols). In C. Hartshorne, P. Weiss & A. Burks (Eds.), Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (ed. orig. 1954, Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, 100, 89-96.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(4), 213-221.
- Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática*, 101, 37-41.

JOÃO PEDRO DA PONTE

MARISA QUARESMA

JOANA MATA PEREIRA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

Polígonos e poliedros: trabalhar a relação 2D-3D

JOANA CONCEIÇÃO

MARGARIDA RODRIGUES

Nos últimos anos têm surgido trabalhos de investigação que sugerem a importância de trabalhar a bidimensionalidade e a tridimensionalidade de forma integrada (Johnston-Wilder & Mason, 2005; Sinclair, Mamolo & Whiteley, 2011). O trabalho integrado 2D-3D permite aprofundar as relações que os alunos são capazes de estabelecer dentro de cada representação para depois utilizarem essas relações no trabalho entre as duas representações. Segundo Johnston-Wilder e Mason (2005), para que os alunos se familiarizem com as figuras geométricas e estabeleçam relações entre as diferentes formas de representação, é necessário que manipulem essas figuras, analisando-as, explorando-as e estabelecendo relações que, à medida que são compreendidas, são também percebidas como propriedades. Apesar de haver uma tendência para considerar que os alunos mais novos devem começar pelas figuras tridimensionais, trabalhando depois as figuras bidimensionais, estes autores referem que um dos caminhos possíveis é trabalhar a geometria espacial e a geometria plana de forma integrada.

Neste artigo, temos como objetivo compreender como é que os alunos do 1.º ano do ensino básico relacionam poliedros e os polígonos presentes nas suas faces, em particular que tipo de relações estabelecem entre representações 2D e 3D de poliedros.

DESAFIOS NA RELAÇÃO 2D-3D

Tradicionalmente, a aprendizagem da geometria nos primeiros anos baseia-se na classificação pelo aspeto visual das figuras, sem um trabalho consistente na exploração de relações, passando depois para um formalismo excessivo (Gutiérrez, 1998). Esta falta de exploração da estrutura das figuras associada a uma abordagem de figuras 2D independente de figuras 3D tem levado a que surjam dificuldades na interpretação de diferentes representações.

Hallowell, Okamoto, Romo e La Joy (2015) identificaram algumas dificuldades que os alunos de 1.º ano revelam ao relacionar representações 2D de figuras bidimensionais correspondentes aos componentes de sólidos (como por exemplo, o retângulo enquanto componente do prisma reto ou do cilindro) ou de figuras 3D correspondentes a sólidos (cubo, esfera, prisma reto, pirâmide e cilindro) com os manipuláveis físicos representativos dessas figuras 2D (em papel fino) ou 3D. As dificuldades evidenciadas foram: a tendência para sobrevalorizar as partes pontiagudas, nomeadamente as triangulares, sem reconhecerem outros componentes, ou a dificuldade em imaginar representações

planificadas de figuras tridimensionais (por exemplo, imaginar o retângulo como representação da superfície lateral do cilindro). Estes alunos recorriam a aspetos visuais, quando não conheciam a estrutura e as propriedades dos objetos. Neste estudo, Hallowell et al. (2015) adiantam que o facto de os alunos não explorarem as figuras de modo a apropriarem-se das diferentes partes, para depois as poderem relacionar com o todo, torna esta relação, entre as partes e o todo, um aspeto desafiante.

ESTRUTURAÇÃO ESPACIAL E RACIOCÍNIO ESPACIAL

O estabelecimento de relações entre representações bidimensionais e tridimensionais implica que os alunos estruturam espacialmente as figuras, isto é, que criem um modelo mental, estabelecendo relações entre componentes e compostos e entre estes e o todo (Battista & Clements, 1996). Essas relações contribuem para o raciocínio espacial, que é definido por Battista (2007) como a “capacidade de ‘ver’, examinar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações, envolvendo gerar e analisar imagens, transformar e operar com imagens, e colocá-las ao serviço de outras representações mentais” (p. 843). Davis, Okamoto e Whiteley (2015) apresentam uma definição de raciocínio espacial assente em processos que estão organizados em duas partes interligadas: *compreender*, numa dimensão mental; e *transformar*, numa dimensão física. Nos primeiros anos, o trabalho de composição e decomposição de figuras tridimensionais, associado ao processo de transformar, permite reconhecer relações na estrutura de uma figura, que podem ser articuladas com representações bidimensionais (Conceição & Rodrigues, 2019). Estas relações emergem na transformação 2D-3D, através de processos de raciocínio espacial. Para isso, o processo de estruturação espacial é fundamental. A estruturação pode ser local, se as relações são apenas entre componentes ou entre compostos, ou global se as relações são estabelecidas entre componentes, compostos e o todo.

Para além da relação entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade se apresentar como uma conexão crítica (Francis & Whiteley, 2015), a fluência entre representações 2D e 3D é essencial para o raciocínio. Francis e Whiteley (2015) atribuem o desenvolvimento do raciocínio espacial a experiências com figuras tridimensionais, à exploração das respetivas representações bidimensionais, onde os desenhos das figuras 3D têm uma importância significativa, mas também

à interação entre pares e com o professor. Para isso, e dado que o raciocínio espacial implica justificações, é importante valorizar, na sala de aula, diferentes formas de comunicação não-verbal, como gestos ou desenhos, por serem meios de expressão do raciocínio espacial (Conceição & Rodrigues, 2019; Whiteley, Sinclair & Davis, 2015).

EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Num estudo que desenvolvemos com uma turma de 24 alunos do 1.º ano do ensino básico em conjunto com a professora titular, incidente no processo de estruturação espacial, foi-lhes proposta uma tarefa em que relacionassem polígonos e poliedros: “*O que vocês vão ter de descobrir é(...) que figuras é que ela [a Joana] usou para construir esses sólidos*”. Para isso, foi-lhes dado um conjunto de sólidos 3D construídos em papel e um conjunto de polígonos, também em papel, correspondentes às faces dos sólidos, para que estabelecessem essa relação, registando depois as suas descobertas na folha de trabalho.

ESTRUTURAÇÃO LOCAL E ESTRUTURAÇÃO GLOBAL NAS RELAÇÕES 2D-3D

Raquel, como outros colegas utiliza, inicialmente, a sobreposição para relacionar os polígonos com as faces dos poliedros, mas, ao reconhecer a sua congruência, passa a contar as faces iguais. Por vezes, surgem erros na contagem, possivelmente associados ao facto de Raquel ainda não ter um modelo mental que relacione as partes e o todo. Raquel parece assim associar os polígonos às faces dos sólidos, mas o seu registo (figura 1) ainda não evidencia uma relação entre os polígonos, nem uma relação entre estes e o todo, o que sugere que a aluna faz uma estruturação local.

Ao longo da tarefa, Raquel usa alternadamente as duas pirâmides, parecendo reconhecê-las pelo aspeto global. Associa os triângulos às faces laterais, mas parece ter dificuldade em relacionar o número de faces laterais com o polígono da base. No caso dos prismas, a aluna desenha as duas bases para os prismas triangular e quadrangular, mas, para o prisma hexagonal, regista apenas uma base numa figura semelhante ao quadrado, mostrando dificuldade em desenhar o hexágono. Mesmo podendo manipular os sólidos, Raquel analisa com frequência a representação 2D, o que poderá ser desafiante, dado que a aluna parece ainda não dominar a relação entre as duas representações. Na estratégia de Raquel, diferentes processos de raciocínio espacial estão presentes, como relacionar e localizar, associados a *compreender* e *transformar* respetivamente, quando a aluna sobrepõe polígonos às faces do poliedro e quando reconhece a congruência das faces. A decomposição é também um processo de raciocínio aqui evidente.

Frederico, por sua vez, apresenta um registo que evidencia relações diferentes das de Raquel (figura 2).

Este aluno regista os polígonos referentes ao prisma triangular sob a forma de planificação, parecendo mostrar que reconhece relações entre eles. Também para o prisma hexagonal, as faces laterais juntas podem indicar que o aluno reconhece uma continuidade entre elas, embora isto não se verifique para outros sólidos. No caso do prisma triangular, regista uma base oposta

à outra enquanto, no prisma hexagonal, regista as bases lado a lado. Surgem também erros de contagem, nas faces laterais da pirâmide hexagonal, e falta o registo das bases do prisma quadrangular. O desempenho de Frederico sugere que o aluno já é capaz de fazer uma estruturação global dos polígonos na sua relação com os poliedros, como é o caso do prisma triangular, mas, nos outros casos, a estruturação que faz é ainda local. Possivelmente, o aluno encontra-se numa fase de transição entre níveis.

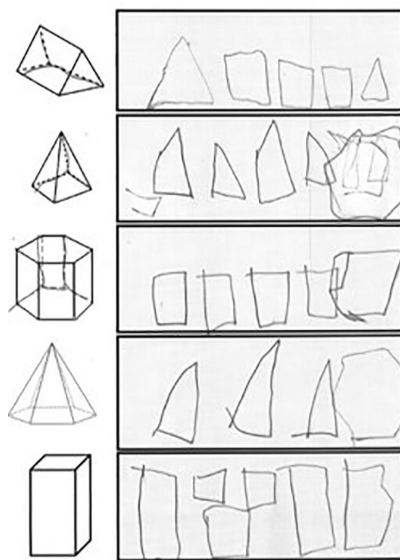


Figura 1. Registo do trabalho realizado por Raquel

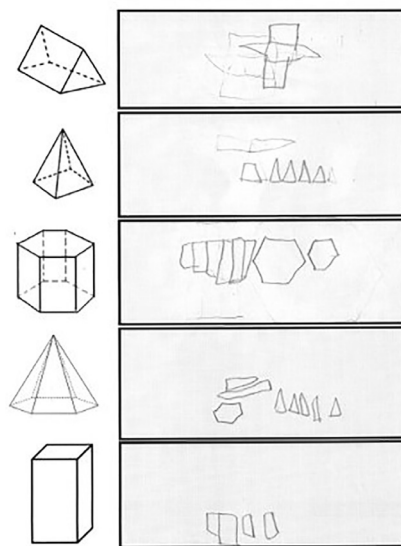


Figura 2. Registo de Frederico

Frederico parece utilizar processos de raciocínio espacial como relacionar, decompor e reorganizar, associados a *compreender*, e localizar e mudar de dimensão, associados a *transformar*.

No registo de Luísa (figura 3), é possível ver que considera todas as faces dos sólidos (à exceção da pirâmide hexagonal). No caso do prisma triangular, desenha as duas bases, em lados opostos,

e, nos prismas hexagonal e quadrangular, um polígono mais pequeno dentro do maior, dando a ideia de que deve ficar mais elevado. Este registo evidencia dois tipos de relações possíveis para os prismas, uma tendo como elemento central o polígono da base, onde são “encaixadas” as faces laterais e uma segunda base, e outra mais centrada nas faces laterais que são desenhadas lado a lado, tendo as bases localizações opostas. Em ambos os casos, é evidente a identificação de que as bases se encontram em posições opostas.

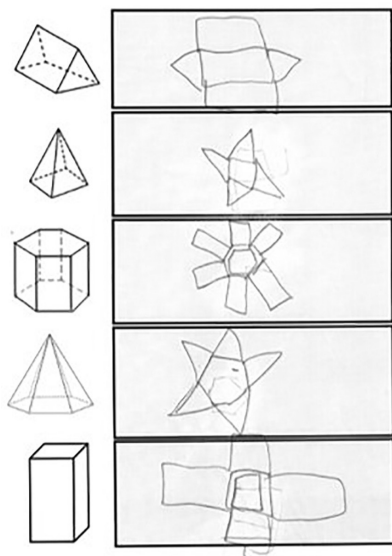


Figura 3. Registo de Luísa

Luísa explica à turma como pensou:

Luísa: Nós juntámos as peças deitadas na mesa e... juntámos para ver se estavam certas e depois metemos junto ao (*Aponta para o hexágono, mas não se lembra do nome.*)

Professora: Meteste deitadas na mesa, é isso? Hum...

Luísa: E depois juntei para ver se eram as peças certas ou erradas e desenhei aqui. Esta é a detrás (*Aponta para um dos hexágonos.*), esta é a da frente (*Aponta para o outro hexágono.*) e estas são as de lado (*Aponta para os retângulos.*) (*Vai mostrando no desenho e no sólido as partes a que se refere.*). Foi preciso... (conta as faces laterais) seis lados de retângulos... (*pausa*) (*Aponta para o hexágono.*).

Professora: Foi preciso seis lados de retângulos para construíres esse sólido, foi?

(...)

Luísa: Pusemos dois hexágonos e depois... e depois...

Investigadora: Por que é que eram precisos dois hexágonos?

Luísa: Para fazer a parte de cima e a parte de baixo.

Investigadora: E havia mais algum sólido onde fosse preciso também um hexágono?

Luísa: Sim.

Investigadora: Qual?

Luísa: Este. (*Aponta para a pirâmide hexagonal.*)

Investigadora: E quantos é que eram, nesse? Quantos hexágonos?

Luísa: Um.

Investigadora: Porquê?

Luísa: Porque depois em cima também não era preciso porque era este (*Aponta novamente para a pirâmide hexagonal.*)

Luísa mostra compreender as relações entre as diferentes faces e bases do prisma hexagonal quer na representação bidimensional quer na representação tridimensional, relacionando ainda as duas representações, ao longo da sua explicação. No caso da pirâmide hexagonal, desenha um pentágono como base, o que pode estar relacionado com erros de contagem dos lados do polígono, ou com um registo de uma figura globalmente idêntica ao hexágono, atendendo ao aspeto visual, sem a preocupação de contar rigorosamente os lados. Ainda assim, Luísa parece perceber que a cada lado do polígono corresponde um triângulo. Mostra ainda reconhecer diferenças entre o prisma e a pirâmide, embora seja pelo seu aspeto visual, distinguindo-os sobretudo pelo número de bases, sem conseguir construir uma justificação adequada. A aluna estabelece relações diferentes e adequadas entre as faces, relacionando a sua disposição no plano com a sua posição no espaço. Luísa evidencia assim uma estruturação global, onde relaciona os polígonos entre si, na sua relação com o poliedro.

A aluna parece colocar em ação processos de raciocínio espacial como decompor, reorganizar e visualizar, associados a *compreender*, e dobrar, rodar e mudar de dimensão, associados a *transformar*.

CONCLUSÕES

Estes alunos relacionam de forma adequada os polígonos com as faces dos poliedros. Estabelecem relações entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade com base no reconhecimento de polígonos nas faces dos poliedros, tratando-se de uma estruturação local. Dada a natureza ainda superficial das relações entre polígonos e poliedros, os alunos tendem a valorizar os aspetos visuais mais salientes que usam na distinção de sólidos. Noutros casos, as conexões 2D-3D são mais profundas, porque emergem de relações entre polígonos que, por sua vez, são influenciadas pela relação com o poliedro. Nestes casos, estamos perante uma estruturação global.

Em ambas as situações, parecem estar presentes processos associados ao raciocínio espacial quer seja pela ação de compreender ou pela ação de transformar, que contribuem para a progressão no nível de estruturação espacial. Ao mesmo tempo, um aprofundamento do tipo de relações estabelecidas, potenciado pelo desenho das faces dos poliedros, parece contribuir para o aprofundamento dos processos de raciocínio espacial.

Agradecimentos:

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/130505/2017).

Referências

- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–909). Reston, VA: NCTM.
- Battista, M. T. & Clements, D. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258–292.
- Conceição, J. & Rodrigues, M. (2019). Polígonos e poliedros: trabalhar as conexões dentro da geometria. In N. Amado, A. P. Canavaro, S. Carreira, R. T. Ferreira & I. Vale (Eds.), *Livro de atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática – EIEEM 2019* (pp. 251–256). Alte, Loulé: Escola Profissional Cândido Guerreiro.
- Davis, B., Okamoto, Y., & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In Davis, B. (Ed.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 121–136). New York: Routledge.
- Francis, K. & Whiteley, W. (2015). Interactions between three dimensions and two dimensions. In Davis, B. (Ed.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 139–150). New York: Routledge.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema*, 3(3), 193–220.
- Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F., & La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM*, 47(3), 363–375.
- Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.
- Sinclair, M., Mamolo, A., & Whiteley, W. J. (2011). Designing spatial visual tasks for research: the case of the filling task. *Educational Studies in Mathematics*, 78(2), 135–371.
- Whiteley, W., Sinclair, N., & Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? In Davis, B. (Ed.) *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 3–14). New York: Routledge.

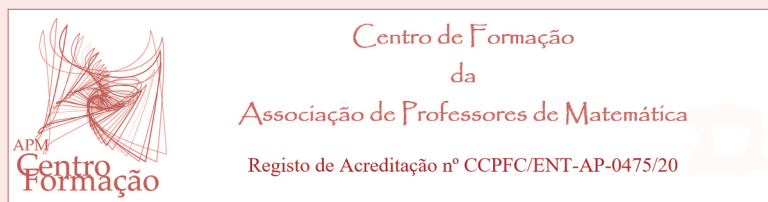
JOANA CONCEIÇÃO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

MARGARIDA RODRIGUES

CIED, ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA & UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

FORMAÇÃO APM - 2020-2021



Tarefas de avaliação com o GeoGebra Classroom.

Curso de formação de 20h em e-learning, acreditado pelo CCPFC para professores do grupo 500 a lecionar Matemática A
Sessões síncronas: 14, 19 e 26 de outubro; 2 e 9 de novembro de 2020

Sessões assíncronas: 8, 16, 21 e 28 de outubro; 11 de novembro de 2020

APP MILAGE APRENDER+: Um recurso para aprender Matemática.

Oficina de formação de 30h (15h e-learning + 15h trabalho autónomo) acreditado pelo CCPFC para professores dos grupos 230 e 500

Sessões síncronas: 15, 22 e 29 de setembro; 20 de outubro; 28 de novembro de 2020

Sessões assíncronas: 16 de outubro; 6 de novembro de 2020

Promover o pensamento algébrico desde os primeiros anos.

Curso de formação de 20h em e-learning, acreditado pelo CCPFC para professores dos grupos 110 e 230

Sessões síncronas: 6 e 20 de outubro; 3 e 17 de novembro; 9 de dezembro de 2020

Sessões assíncronas: 13 e 17 de outubro; 10 e 24 de novembro; 2 de dezembro de 2020

A calculadora no ensino a distância (Grupo CASIO+ APM).

Ação de curta duração e-learning de 5h, certificada pela Comissão pedagógica do CFAPM.

17 e 21 de outubro de 2020

Para mais informações, consulte a página do centro de formação: <https://cformacao.apm.pt/>

Caso pretenda solicitar formação ou obter informações sobre ações em divulgação contacte-nos: centroformacaoapm@gmail.com

Estruturas e Geometria Dinâmica

A ideia de estrutura é intrínseca à matemática a nível superior. No entanto, quando pensamos sobre a matemática nos níveis elementares esta ideia parece estar ausente e a utilização deste termo é rara. Vale a pena pensar sobre o que está inerente aos vários níveis do conceito de estrutura na aprendizagem da geometria.

Este texto é também uma oportunidade de uma reflexão, ainda a quente, sobre as consequências das alterações de fundo vividas nas últimas semanas nas práticas de uma unidade curricular de Geometria na licenciatura em Educação Básica.

VER E MANIPULAR ESTRUTURAS

Quando olhamos para um quadrado recortado em cartolina, para um retângulo de uma folha de papel ou para uma peça compacta de plástico que representa uma figura geométrica plana, muito pouco ficamos a saber sobre a estrutura de cada um destes objetos matemáticos.

A afirmação de que para aprender geometria é indispensável recorrer a materiais manipuláveis é universalmente aceite. Ninguém se atreve a discordar. Ao longo dos anos muitos tipos de materiais manipuláveis têm sido criados e colocados à disposição dos professores e educadores, ao serviço da aprendizagem. É frequente utilizarmos a designação de materiais estruturados, porém, paramos pouco para pensar nas estruturas ou nos elementos das estruturas que estão subjacentes à conceção de um determinado material didático.

Um dos exemplos que considero mais interessante para ajudar a refletir sobre a estrutura dos materiais é o dos polydrons (figura 1). Quando surgiram em Portugal, no início dos anos noventa, eram peças de plástico compactas, que representam polígonos. A sua forma de encaixe, através dos lados dos polígonos, permite criar estruturas de poliedros. Algum tempo depois, as peças deixaram de ser compactas e passaram a representar a estrutura dos lados dos polígonos. Tudo o resto se manteve, a forma de encaixe e as cores. Além disso, foram criadas novas formas, como por exemplo outros tipos de triângulos para além do equilátero.



Figura 1

Esta nova conceção das peças dos polydrons permitiu ver as estruturas dos poliedros com destaque para os seus elementos constituintes. As peças compactas destacam as faces, as peças sem interior destacam as arestas dos poliedros. Uma diferença de grande impacto para estudar as relações entre os elementos que compõem a estrutura e obter as propriedades dos objetos geométricos representados.

A aprendizagem da geometria é feita de múltiplas experiências sobre os objetos geométricos representados por estruturas que também têm de ser diversas. No entanto, pensar que uma criança fica a conhecer o quadrado porque manipula algumas peças quadradas como os blocos lógicos ou tangran é um erro que permanece em gerações sucessivas de professores e educadores.

É com mágoa que observo, ano após ano, a presença deste erro no discurso e nas práticas de muitos professores e educadores.

A orientação de que a aprendizagem da geometria exige um trabalho longo e sistemático sobre as estruturas geométricas nos seus três níveis continua a não vingar nas práticas profissionais. As estruturas espaciais, geométricas e lógico-formais, indispensáveis à aprendizagem da geometria, não se constroem com meia dúzia de atividades de manipulação de materiais. Assim como algumas pinceladas dispersas não constituem uma composição artística. Não basta ver e manipular algumas estruturas de objetos geométricos, mesmo que sejam diversas, em meia dúzia de tarefas separadas e espalhadas ao longo da escolaridade.

CONSTRUIR ESTRUTURAS

O salto qualitativo sobre o conhecimento das estruturas é feito quando temos que construir as próprias estruturas ou quando usamos o conhecimento sobre as estruturas para construir objetos geométricos. Penso que há duas ideias decisivas a discutir sobre a construção de estruturas, uma ligada à educação artística e a outra à utilização da geometria dinâmica.

Não vou discutir agora a primeira sobre a qual se têm debruçado alguns artigos desta seção. Nesses artigos é reconhecido que as forças decisivas para a realização destas construções foram dadas pelo conhecimento das estruturas geométricas de objetos geométricos bidimensionais e tridimensionais, em combinação com a componente artística visual. Todas as experiências relatadas foram realizadas por crianças com as suas educadoras.

Com crianças pequenas a criação destas estruturas geométricas pode ser aliciante e desafiadora, mas para crianças um pouco mais velhas temos à nossa disposição o poder dos ambientes dinâmicos. O valor destes ambientes para a aprendizagem é incomparavelmente mais forte do que o dos materiais manipuláveis. Não podemos mais ignorar este desafio, formando professores e educadores para que passem a usar

sistematicamente os ambientes de geometria com todo o seu potencial.

Em 1999, o encontro designado por “Ensino da Geometria no virar do milênio”, organizado pelo Departamento de Educação da FCUL, marcou uma discussão alargada sobre esta temática. Vale a pena recordar as atas do encontro.

Num texto que escrevi então, com o título de Computadores no Ensino da Geometria, usei várias vezes as palavras vida e viva para apontar as possibilidades dessas “ferramentas que foram criadas para a velha geometria, mas que abriram possibilidades ignoradas”, referindo que a geometria se pode transformar e tornar viva (Loureiro, 1999).

Passaram mais de vinte anos sobre a escrita desse texto. Este ano voltei a dar aulas na formação inicial de professores e educadores e tenho muitos alunos que já nasceram neste século, depois do texto ter sido escrito. Embora não sejam todos meus alunos, partilho com a Lina Brunheira as turmas da unidade curricular de Geometria em que há cerca de 120 alunos. As primeiras aulas foram de choque. O desconhecimento e a resistência à geometria dinâmica eram enormes e, às vezes, assustadores. Não vou falar da vontade que tive de desistir, porque o que vale a pena referir aqui foi o que aconteceu devido às medidas de contingência, ao confinamento e ao ensino, que passou a ser totalmente à distância.

De um momento para o outro as condições de trabalho alteraram-se. Por um lado, passou a haver um total constrangimento para a utilização em sala de aula de materiais concretos manipuláveis e, por outro, todos os alunos tinham acesso à utilização da geometria dinâmica, neste caso o Geogebra. Esta situação favoreceu o recurso à geometria dinâmica no plano e prejudicou o desenvolvimento da geometria no espaço associada ao recurso a materiais manipuláveis. Este favorecimento permitiu um investimento na conceção de novas tarefas geométricas, integradoras das aprendizagens que os alunos tinham feito até então, nomeadamente, aprendizagens sobre propriedades das figuras bidimensionais e sobre transformações geométricas. O estudo sobre a simetria das figuras bidimensionais e o desenvolvimento do raciocínio espacial foram amplamente reforçados. As construções geométricas passaram a ser o foco principal das tarefas.

Progressivamente, as aulas de grande grupo a distância passaram a ser dominadas pela geometria dinâmica. Praticamente todos os alunos passaram a trabalhar com este recurso e o entusiasmo pela geometria aumentou muitíssimo. O Geogebra 3D passou também a ser um recurso indispensável. E nessa utilização as destrezas digitais dos alunos ultrapassaram as nossas. Vários aspetos de conhecimento geométrico inerente à utilização das estruturas 3D ficaram por trabalhar, porém, a apropriação da geometria dinâmica vingou finalmente. Uma verdadeira revolução.

Esta é uma apreciação ainda muito a quente e até, talvez, empolada pelo entusiasmo do que conseguimos fazer juntos nestas últimas semanas. Porém, o que venho pensando há

muito tempo sobre as estruturas geométricas, a sua relação com a utilização de materiais manipuláveis e a sua relação com a geometria dinâmica confirmou algumas das minhas convicções sobre a aprendizagem da geometria e adquiriu uma nova convicção muito forte relativamente à formação de professores e educadores.

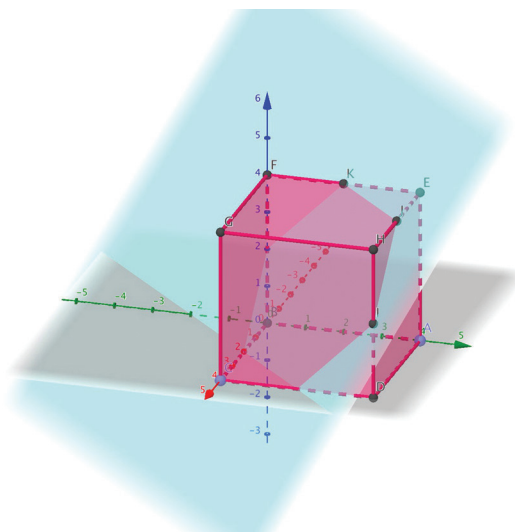


Figura 2. Construção em Geogebra 3D

Foi preciso largar totalmente os materiais manipuláveis para que a geometria dinâmica ganhasse finalmente terreno. Formulo por isso três ideias, em jeito de conjecturas, em que fico a pensar.

- As tarefas de aprendizagem são organizadas de modo a entrar a fundo na geometria dinâmica, sendo este o principal instrumento metodológico, e reduzindo o recurso a materiais manipuláveis que são colocados sempre, mas sempre mesmo, em ligação com a utilização digital.
- As tarefas de aprendizagem trazem para primeiro plano o estudo das estruturas geométricas bidimensionais e tridimensionais, assumidamente como tal, isto é, as referências a estruturas devem fazer parte dos conceitos a trabalhar.
- A avaliação contempla obrigatoriamente o recurso a ambientes dinâmicos ou a outras ferramentas digitais.

Para além de recordar o encontro sobre Ensino da Geometria no virar do milênio, evoco também o desejo de que “no século XXI a geometria seja uma fonte de situações ricas e luminosas com um potencial excecional em prol de uma melhor apreciação da matemática” (Graf & Hogdson, 1998, p. 156). Ainda vamos a tempo!

Referências bibliográficas

- Graf K. & Hogdson (1998). The computer as a context for new possible geometrical activities. In C. Mammana & V. Villani (Eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. (144–158). Kluwer Academic Publishers.
- Loureiro, C. (1999). Computadores no Ensino da Geometria. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte, & P. Abrantes, 43–50. DEFCL.

E@D: Para lá do espelho

CRISTINA CRUCHINHO

FILIPA MACHADO

HELENA GIL GUERREIRO

Um novo contexto educativo abalroou a escola no dia 16 de março. Inesperado, trouxe consigo incertezas e preocupações, mas também ações. De um momento para o outro fecharam-se as portas das escolas e foi necessário cuidar dos que ficavam em casa, sem perder tempo, com a mesma determinação que nos caracterizou noutros momentos de catástrofe da nossa história.

Os professores agiram de modo eficaz, com destreza, agilidade e firmeza, para estabilizar a situação educativa, sendo muitas vezes impiedosos com a sua vida pessoal. A EeM entrevistou, através da escrita, quatro professores de Matemática, um de cada nível de escolaridade, do 1.º ciclo do ensino básico ao ensino secundário. Quisemos saber como fizeram para se reinventar, professores e alunos, nestas aulas, síncronas e assíncronas, que decisões tomaram, como geriram tarefas, aprendizagens e emoções nos dois primeiros meses de construção da resposta da escola à situação de emergência vivida.

AS DUAS PRIMEIRAS SEMANAS DE ISOLAMENTO SOCIAL (16 A 27 DE MARÇO)

Paula Figueiredo (1.º CEB). Quando soube que as escolas iam fechar e provavelmente por um longo período, considerei que seria importante manter um contacto diário com os alunos, por videoconferência, para podermos discutir e sistematizar as tarefas que realizavam, a partir de algumas resoluções, e para continuarmos a apresentar produtos que construíssem por iniciativa própria, na apresentação de produções. Assim, para este efeito, após algumas pesquisas, elegi o *Zoom* como aplicação para a interação com os alunos (videoconferência), por ser muito intuitiva e não necessitar de email ou qualquer tipo de registo.



Figura 1. Aula na plataforma Zoom. Momento de apresentação e discussão de produções.

Na fase inicial mantive duas sessões diárias, de uma hora cada, com apresentação de produções e discussão de tarefas que estavam no Plano de Trabalho Autónomo (PTA). De início foi

muito importante a discussão das regras da “nova” sala de aula, e as primeiras sessões foram de exploração e de adaptação a uma nova maneira de estar na escola. Na parte da manhã, a aula síncrona era mais dirigida pelos alunos, na Apresentação de Produções. À tarde discutíamos e sistematizávamos as tarefas que foram propostas, a partir das resoluções que os alunos enviavam para o *Padlet*, que é uma ferramenta de partilha e comunicação. As resoluções eram por mim colocadas no *Activinspire*, uma ferramenta familiar para os alunos e partilhadas nas aulas síncronas, pela partilha de ecrã. Constituíram momentos de grande interação!

Este processo de interação foi facilitado, porque a turma já estava familiarizada com o uso de algumas ferramentas digitais. Desde o 1.º ano que os alunos usam o *tablet* na escola para fazerem projetos, para comunicarem através do *Padlet* e para treinarem/verificarem aprendizagens, através de questionários online, nas aplicações *Quizizz* e *Kahoot*.

Para além das videoconferências, durante os primeiros tempos, o *Padlet* foi o nosso outro meio de comunicação. Através dele os alunos recebiam o Plano de Trabalho e partilhavam as suas resoluções e produções. Todos íamos dando feedback, através de comentários e sugestões. Desta forma, o *Padlet* permitia-nos organizar a semana, que estava estruturada de uma forma muito dirigida, com atividades obrigatórias a serem realizadas diariamente.

Ao longo deste processo comecei a sentir alguns constrangimentos. Os alunos passaram a demonstrar cansaço. Duas horas em videoconferência exigem imenso e não correspondem certamente, a duas horas de trabalho em sala de aula física. Por outro lado, também o *Padlet* começou a não ser adequado, tornou-se muito lento e limitado, os alunos não estavam a conseguir partilhar, nem comentar.

Irene Segurado (2.º CEB). As duas semanas que antecederam as férias da páscoa foi um tempo de dilemas constantes. Que caminho seguir num ensino a distância para o qual nem eu nem os alunos estávamos preparados? Que opções tomar? Num primeiro momento pensei talvez não ser muito difícil pois sabia trabalhar com algumas plataformas educativas e estava habituada a fazer vídeo conferências com colegas. Rapidamente me apercebi que esta minha “bagagem” ser-me-ia útil, mas de maneira nenhuma colmataria as dificuldades com que fui confrontada. Se de um lado estava eu, ciente de ter investido no meu desenvolvimento profissional na área das tecnologias,

do outro estavam os alunos nos quais eu não tinha investido o suficiente, para poder agora promover um ensino à distância. Com os alunos utilizei, por opção, algumas das potencialidades das plataformas educativas, mas sempre como apoio ao ensino presencial, no qual acredito.

Nestas duas semanas o meu e-mail foi “inundado” com sugestões das várias editoras que procurando “ajudar” os professores disponibilizaram gratuitamente as suas plataformas bem como planificações e grelhas de recolha de dados para a avaliação à distância. Foi esta diversidade de recursos que me veio ajudar a tomar uma decisão “vou seguir um caminho que todos os alunos possam trilhar e para o qual os tenha minimamente preparado”. Assim, e para poder elaborar, com calma, uma planificação coerente, quer com os conhecimentos adquiridos pelos alunos até ao momento quer com os meios tecnológicos a que estes tinham acesso, e que era necessário ir averiguar, enviei-lhes apenas, através dos e-mails dos encarregados de educação, um conjunto de problemas desafiantes que denominei “Um problema por dia”, disponibilizando-me para tirar dúvidas quer por e-mail quer por *WhatsApp*. Aconselhei também que aproveitassem o tempo para jogar com os familiares. Não consegui manter neste período contacto com todos os alunos! No fim do segundo período tinha consciência que iria ter desafios difíceis de contornar sendo o mais importante encontrar um processo de me manter “ligada” a todos os alunos, aspeto que considero fundamental no desenvolvimento de competências emocionais e sociais tão importantes como a aquisição de conhecimentos.

Sandra Nobre (3.º CEB). Nas duas primeiras semanas de isolamento promovi sessões síncronas para cada uma das minhas turmas. Utilizei o *Zoom* para dinamizar estas sessões, tendo cada sessão a duração aproximada de 40 minutos. Os alunos resolveram essencialmente tarefas de consolidação das aprendizagens. Neste período continuamos a utilizar, para além do email, grupos de *WhatsApp* para o estabelecimento da comunicação.

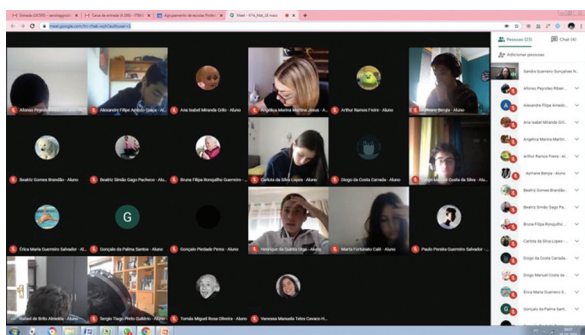


Figura 2. Sessão síncrona de trabalho no Zoom

Houve alguns constrangimentos, como o facto de alguns alunos não terem acesso à Internet, nem computador e alguns nem telemóvel, o que os impediu de frequentar estas aulas. Na última semana de aulas, os alunos fizeram a sua auto e hetero avaliação num formulário do Google, como já era habitual procederem. Através deste formulário recolhi também as suas

opiniões acerca desta nova modalidade de aulas. Todos os alunos referiram ter gostado das aulas e ter se empenhado nas mesmas, conforme alguns excertos que apresento: “Estas aulas têm sido bastante boas, apesar de serem curtas a professora ensina-nos como se estivéssemos em sala de aula o que é bastante bom”, “Estas últimas aulas foram muito interessantes, e acho que cumpriu o objetivo de continuarmos a ter um ambiente de sala de aula, mesmo em isolamento. Acho que a maioria da turma respeitou e marcou presença nas videoconferências e procuraram fazer os exercícios.”, existindo mesmo alguns que preferem ter aulas a distância como refere este aluno “...este novo sistema é genial e muito propício para melhorias e podia ser trabalhado para se tornar tão bom quanto as aulas físicas. Sempre quis ter aulas a partir de casa e apesar de tudo não deixa de ser um sonho concretizado”.

Outro aspeto também reconhecido pelos alunos foi o facto de termos continuado a dialogar também um pouco acerca da situação que vivenciamos e não só de assuntos relacionados com a aula de Matemática como refere esta aluna: “Estas aulas são muito interessantes e apesar de estarmos distantes conseguimos assim manter o contacto e manter a matéria em dia”.

Paulo Correia (ES). Nas duas semanas que antecederam o final do segundo período tivemos que experimentar. Ferramentas, metodologias, equipamentos, procedimentos... novas formas de sermos professores.

A primeira diferença que foi possível identificar foi... o tempo. A gestão do tempo não é igual. A primeira abordagem de manter videoconferências por períodos de tempo semelhantes às aulas convencionais revelou-se rapidamente uma opção pouco eficaz. Talvez esta tentação seja um reflexo de uma tentação maior de simular as aulas convencionais num enquadramento diferente. Uma parte significativa das abordagens tradicionais falhou quando foi tentada a sua replicação sem as devidas adaptações para o ensino a distância (E@D). Rapidamente ficou claro que nas sessões síncronas de videoconferência, mais tempo não significa melhores aprendizagens, que é importante deixar tempo aos alunos para poderem tentar, errar e procurar respostas antes de lhes serem fornecidas o que torna mais necessário escolher melhor as tarefas a propor aos alunos.

Ainda durante o final do segundo período emergiu uma nova realidade no trabalho dos professores... a necessidade de um desenvolvimento profissional sustentado na prática e no trabalho colaborativo. Foi necessário ler artigos sobre E@D, procurar opiniões de colegas mais experientes com as ferramentas que, de repente, se tornaram fundamentais, tornou-se importante assistir a webinars de especialistas e passou a ser fundamental refletir sobre as nossas práticas. As mudanças tornaram clara a importância (e a necessidade) dos processos formativos na atividade docente... formação para a utilização das ferramentas tecnológicas mas também para a avaliação das aprendizagens, para a gestão de processos organizacionais da escola e todas as outras dimensões da atividade docente que se “cristalizaram” em formatos tradicionais e que foram agora colocados em causa...

todos, ao mesmo tempo, com uma intensidade sem precedentes. Naturalmente os professores que defendiam a integração da tecnologia na escola, sentiram uma validação quase automática e quase universal desse posicionamento. Este terá sido um dos fatores sentidos como “mais positivos”. De repente todas as críticas e dúvidas em relação à substituição do papel pelos formatos digitais, à integração de dispositivos móveis nas atividades a desenvolver, e à mediação da comunicação através de plataformas, desapareceram. Até os mais cépticos se renderam. Fica o desafio (e a responsabilidade) de promover a integração das tecnologias nos processos de aprendizagem, para além da facilitação da comunicação. Ainda há muito por fazer...

A enumeração dos constrangimentos e dificuldades sentidas seria uma tarefa difícil e aborrecida... quase tudo foi difícil. Mas talvez a questão mais complicada tenha sido (e continua a ser) a avaliação.

A parte boa é que a avaliação já era um problema... uma espécie de gigante adormecido, que acordou - talvez só nos tenhamos tornado mais conscientes que a avaliação precisava de mais atenção.

Os procedimentos de avaliação tradicionais, que já tinham problemas de fiabilidade e validade estavam “certificados” pelo hábito e pela familiaridade de professores, alunos e encarregados de educação. Este novo contexto colocou o foco na avaliação por levantar problemas (antigos) acentuados pelo E@D. Avaliar o quê? Como? Com que frequência? Devemos confiar no feedback automático para os alunos das ferramentas digitais? Devemos ignorar esta alternativa? Como conjugar este tipo de feedback com o formato tradicional, mais demorado e significativo? E os testes... parece que afinal podemos viver sem eles, ou pelo menos, ficou claro que perderam alguma importância (até os exames perderam importância, por exemplo, no 3.º ciclo deixou de ser importante a preparação para o exame).

REGRESSO APÓS A PÁSCOA: REFLEXÃO E MUDANÇA

Paula Figueiredo (1.º CEB). Para além dos constrangimentos apontados anteriormente, durante as férias da Páscoa surgiu outro. As questões de segurança do **Zoom** criaram a obrigatoriedade, no meu agrupamento, de usar o **Microsoft TEAMS**. Esta plataforma de partilha e interação veio resolver o meu problema com o **Padlet**, mas veio condicionar as videoconferências, dado que, na altura, só permitia serem visualizados quatro alunos, constituindo, no meu ponto de vista, um constrangimento na interação. Assim sendo, no que à videoconferência diz respeito, para substituir o **Zoom**, selecionei a plataforma **Cisco Webex**, pois era considerada mais segura. Para familiarizar os alunos no **Microsoft TEAMS** e em todas as outras aplicações/ferramentas, como tem sido habitual neste período, fiz tutoriais que partilhei com eles e com os pais. Era importante torná-los autónomos e neste processo o apoio dos pais foi incondicional! Relativamente à agenda semanal, decidimos, após auscultar os pais e os alunos, por meio de um questionário e de uma reunião de pais, que os alunos, diariamente, estariam uma hora em aula síncrona e uma hora em trabalho autónomo. A primeira semana do 3.º

período foi uma semana de esclarecimento tanto a alunos como a pais e encarregados de educação, uma verdadeira aventura!!!

Irene Segurado (2.º CEB). No início do terceiro período embora ainda não muito segura das opções que tinha tomado face aos constrangimentos detetados sabia bem o que não queria. Não queria contribuir para aumentar a ansiedade de pais e filhos face às alterações do seu dia a dia. Como sou diretora de turma foi fácil aperceber-me dos inúmeros constrangimentos que podem surgir neste ensino à distância nomeadamente: meios tecnológicos praticamente inexistentes e/ou de fraca capacidade, geralmente partilhados com outros elementos do agregado familiar a que podemos associar, na maioria dos casos, uma iliteracia digital. Após sondagem feita sabia que praticamente todos os alunos tinham acesso a telemóvel com ligação à internet.

Assim, optei por me centrar no ensino assíncrono, assente em: correio eletrónico (os alunos criaram uma conta com autorização do encarregado de educação), **WhatsApp** e plataforma **MilageAprender+** (plataforma já utilizada pelos alunos em sala de aula). As tarefas enviadas por e-mail são colocadas também no **WhatsApp** e rececionadas pelo mesmo processo. O tempo de realização de uma tarefa é acordado previamente. O **WhatsApp**, organizado em grupos, é o meio privilegiado para esclarecimento de dúvidas e conversas informais entre professora e alunos e alunos com alunos. A plataforma **MilageAprender+**, utilizada para consolidação de aprendizagens, irá sendo enriquecida com itens que possam servir de apoio às aprendizagens vinculadas às tarefas propostas. Há ainda a referir como outro recurso, o **#EstudoemCasa**, que apesar de até ao momento os conteúdos aí lecionados serem já do conhecimento dos meus alunos, aconselho o seu visionamento como suporte à realização de tarefas de cunho exploratório ou lúdico que sempre que adequado envio.

Foi elaborado, pela escola, um horário para os alunos e professores. Deste modo os alunos sabem em que dia e hora uma tarefa pode entrar no seu e-mail e ter o professor da disciplina, à sua disposição, para tirar as suas dúvidas. Estas dúvidas são sempre respondidas na base do questionamento, tentando levar o aluno à resposta pretendida.

Sandra Nobre (3.º CEB). No caso da Matemática do 9.º ano, ficou estabelecido que semanalmente os alunos têm duas aulas síncronas (40 minutos cada) com recurso ao **Zoom** ou **Google Meet**, duas aulas de “Trabalho autónomo” e uma aula “Tira-dúvidas”. Os professores devem elaborar, para cada turma, um plano semanal onde indicam as tarefas a realizar pelos alunos. Neste momento, estou a iniciar o capítulo da trigonometria e para a apresentação dos principais conceitos tenho elaborado power points e vídeos explicativos que apresento e disponibilizo aos alunos. Relativamente às tarefas, as que tenho proposto são maioritariamente do manual adotado. Já usei também formulários do Google para os alunos responderem a questões, de diferentes naturezas, acerca desta temática em estudo. Tenciono, mais tarde, propor o desenvolvimento de um trabalho no âmbito da aplicação da trigonometria na resolução de problemas.

Os alunos nas aulas síncronas têm continuado a resolver as tarefas que vou propondo, esclarecem as suas dúvidas, recebendo feedback tanto meu como dos seus colegas. Relativamente às aulas assíncronas, os alunos enviam-me as resoluções das tarefas que solicito, maioritariamente através de *WhatsApp*. O *feedback* é igualmente dado, individualmente a cada um deles.

Os Encarregados de Educação também recebem informação acerca do envolvimento dos seus educandos nas tarefas escolares, através de uma grelha preenchida semanalmente pelos diferentes professores e enviada pelo Diretor de Turma.

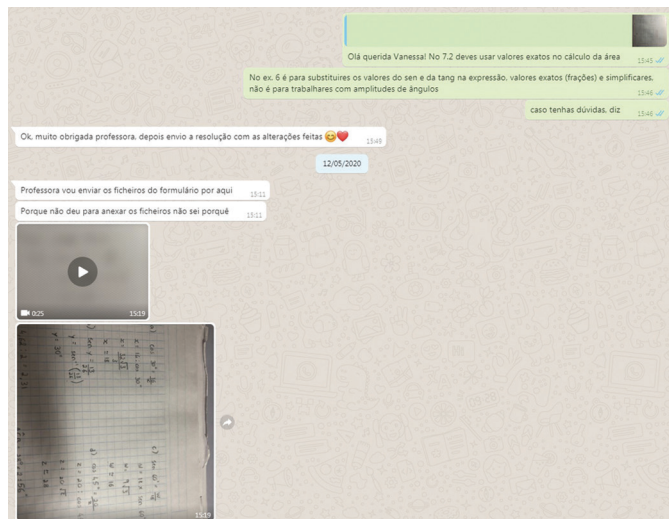


Figura 3. Interação e feedback através do whatsapp

Paulo Correia (ES). A interrupção das atividades letivas, no final do segundo período, proporcionou uma primeira oportunidade de reflexão e análise do processo de E@D, muito modesta e muito breve, mas que já trouxe alguns benefícios.

Foi necessário estruturar as ideias e as práticas em consonância com um plano E@D do agrupamento. As experiências individuais e apressadas de cada um, passaram a acomodar um plano mais estruturado e enquadrado na linha de acção do agrupamento. Apesar da incerteza que envolveu o início do terceiro período já foi possível preparar as atividades, escolher ferramentas, experimentar alternativas com menor grau de improviso.

Na matemática em particular o recurso a aplicações para dispositivos móveis que desempenham na perfeição o papel de calculadoras gráficas permitiu colmatar dificuldades de acesso a alunos que dependiam dos dispositivos da escola. Mas o E@D veio facilitar a recolha de produtos de alunos em formato digital, nomeadamente construções em ambientes de geometria dinâmica, ou folhas de cálculo, construídas pelos alunos. Este tipo de recolha tornou-se mais frequente, quer pela acessibilidade dos equipamentos, quer pela necessidade de desenhar tarefas para um trabalho mais autónomo por parte dos alunos.

A hipótese de criar questões para serem respondidas pelos alunos a partir de uma construção geométrica realizada no Geogebra, permite a recolha e análise das construções, e dar *feedback* ao aluno sobre a construção e não apenas sobre o produto escrito.

Esta não é uma novidade absoluta, mas foi criado um contexto tecnológico que torna mais fácil investir num papel mais ativo do aluno e que merece ser explorado.



Figura 4.

A autonomia dos alunos ganhou centralidade... tornou-se mais necessária para a Escola, e como tal, tornou-se ainda mais necessária promovê-la. Vai ficando claro que a diversificação das atividades, das tarefas e das abordagens permite que mais alunos desenvolvam mais competências.

Como a avaliação, a diversificação dos processos de ensino, não sendo uma ideia completamente original, também ganhou importância ao mesmo tempo que levanta grandes dificuldades de implementação efetiva... a boa notícia é que a tecnologia parece ser um aliado forte e disponível para esta mudança.

ENVOLVIMENTO DOS ALUNOS NUMA AVALIAÇÃO PARA AS APRENDIZAGENS

Paula Figueiredo (1.º CEB). Nas aulas síncronas para além da partilha e discussão das tarefas realizadas pelos alunos e da apresentação das suas produções, passou a existir, no início da semana um tempo de planificação, onde em conselho de cooperação os alunos: i) apresentam o seu plano de trabalho autónomo, identificando as dificuldades e quais as tarefas que selecionaram para as trabalhar; ii) planificam os apoios com os professores e as parcerias a serem realizadas com os colegas; iii) acordam as apresentações a serem realizadas na semana; e iv) combinam a tarefa diária de “fazer a ata” da sessão síncrona. No final da semana, também em conselho, passou a haver um momento de avaliação, de reflexão, de monitorização sobre o trabalho decorrido na semana.

No Trabalho Autónomo, os alunos, para além de dois trabalhos obrigatórios que serão discutidos em aula síncrona, terão de trabalhar as suas dificuldades. Para isso, nos “ficheiros” do *Microsoft TEAMS*, em pastas organizadas, os alunos podem aceder a ficheiros, dispostos por áreas e temas; aos textos que a turma melhorou em coletivo e aos apontamentos que resultaram das sistematizações efetuadas nas aulas síncronas. Para apoiar os alunos na tomada de decisão, num canal criado intitulado de “Avaliação”, a turma acede às listas de verificação que estavam na parede da sala de aula. Assim, conseguem facilmente identificar o que já sabem e o que precisam trabalhar.

Ainda no trabalho autónomo, para combaterem as dificuldades, os alunos passaram a ter o apoio dos professores e a estabelecer

parcerias com os colegas, em sessões de 20 minutos e a partir da criação de salas simultâneas no **Microsoft TEAMS**. Diariamente, os alunos, após resolverem as tarefas planificadas, adicionam-nas nas “tarefas” do **Microsoft TEAMS**, através de foto, de partilha de documento e até de vídeo. No final da semana, após avaliarem o plano de trabalho autónomo, devolvem para o professor a fim de receberem o feedback. À segunda-feira, de acordo com o feedback fornecido, tanto pelo professor como pelos professores coadjuvantes, e de acordo com as suas dificuldades e dúvidas que foram registando no PTA da semana anterior, planificam a semana no plano de trabalho autónomo. Todo o trabalho desenvolvido é de consolidação de aprendizagens, pelo desenvolvimento de competências, essencialmente de leitura, escrita, resolução de problemas e interação.

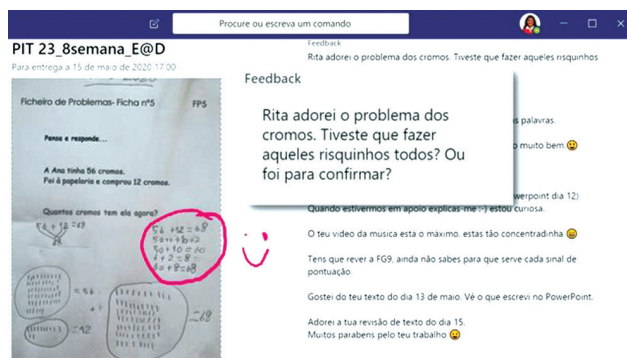


Figura 5. Feedback da professora (no Teams) a uma tarefa de Matemática do Plano Semanal

A participação dos alunos é contínua. Eles definem o que precisam de trabalhar e selecionam tarefas para o efeito. Para isso contam com o feedback sistemático dos professores e com o trabalho em parceria com os colegas. Para apoiar este feedback, consoante as necessidades, são construídas com a turma uma lista de níveis de desempenho esperados. Para além de definirem o seu trabalho, eles participam nas “publicações” do **TEAMS**, partilhando os seus trabalhos, deixando desafios aos colegas e comentando os trabalhos. Também usam as “conversas privadas” para colocarem dúvidas e pedirem ajuda. A partir de uma dada altura, passei a fazer tutoriais específicos a pedido dos alunos por esta via. Nesta altura os alunos estão completamente adaptados à nova ferramenta de trabalho em cooperação. Já utilizam as suas diversas funcionalidades, quer para conversas informais, como para tirar dúvidas, contar novidades e também lançar desafios. Um pouco como o que já faziam antes, mas a um nível mais intenso.

Esta é a sala de aula que é possível criar neste momento. Nada é definitivo, todos os processos estão em constante melhoramento a partir da participação e interação de TODOS.

Irene Segurado (2.º CEB). As tarefas enviadas aos alunos até ao momento, foram sempre assentes em pequenas questões possíveis de serem realizadas sem apoio familiar. Há sempre associada à tarefa uma data de entrega, geralmente 5 a 6 dias de modo a que seja possível dar feedback da sua realização antes do envio de uma próxima tarefa.

A realidade vivida pelas duas turmas que leciono não é de modo algum semelhante. Na escola os alunos estão organizados por níveis de proficiência. Numa das turmas as tarefas chegam-me corretas, sem haver praticamente dúvidas, sendo contudo evidente em alguns casos o apoio dado por um pai, irmão, explicador,... o que não seria grave se não fossem utilizados processos para os quais os alunos ainda não estão preparados para utilizar. Dou como exemplo a utilização da regra de três simples na ampliação/redução dos ingredientes da receita de um bolo. Quando dado o feedback da tarefa voltei a realçar a importância de tentarem resolver estas com os conhecimentos adquiridos até ao momento, valorizando as diferentes estratégias utilizadas e desvalorizando subtilmente a regra de três simples, não mencionando, contudo, o aluno que a havia utilizado. Na outra turma as coisas fluem com mais naturalidade sendo colocadas dúvidas para desbloquear determinadas situações.

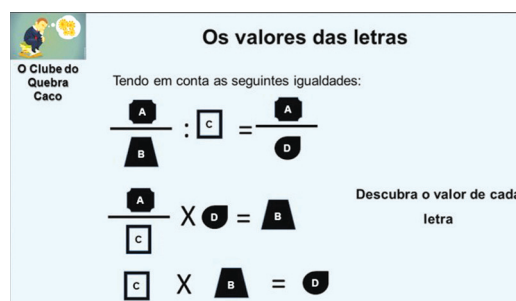


Figura 6. Desafio proposto aos alunos.

Outro exemplo de feedback que posso referir é o dado a uma tarefa de exploração/investigação. A divulgação das várias descobertas feitas pelos alunos promove o aparecimento de outras, estando estas tarefas sempre em crescimento. Caso a resolução de alguma tarefa dada seja bastante criativa ou sirva para estimular o grupo esta será divulgada. Uma das atividades que realizaram foi a construção de um monstro formado por polígonos que teriam de classificar. Irá ser enviado um painel, por mim construído, aos alunos, com os trabalhos realizados, com o objetivo destes perceberem o empenho que alguns colegas colocam na realização das tarefas. Os trabalhos não serão identificados.

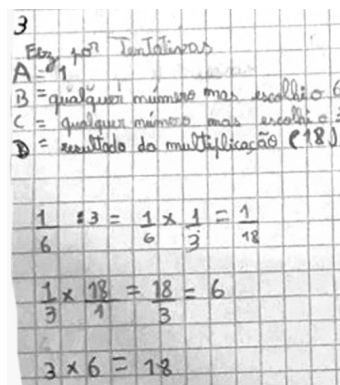


Figura 7. Resposta de um aluno ao desafio

Sempre que uma tarefa não é respondida tento contactar o aluno para saber a causa do não envio. Esta minha postura, pouco crítica e não assente no papão da avaliação está a ter bom resultados. Nada substitui, contudo, o feedback presencial, onde o confronto de opiniões promove uma aprendizagem efetiva. Esta minha opinião é corroborada por uma aluna que me escreveu no *WhatsApp* "... é giro, mas gosto muito mais das aulas onde posso falar com a professora e colegas para tirar as minhas dúvidas. Até tenho saudades dos ralhetes..."

Sandra Nobre (3.º CEB). No meu entender, o ensino a distância tem revelado aspetos positivos e apesar de toda esta situação pandémica, presenciamos um momento que tem um grande potencial para impulsionar mudanças no ensino da Matemática. Atualmente, como professora, vivo uma fase de intensa reinvenção em que vou tentando adequar as estratégias de ensino às necessidades dos meus alunos. Constató que novas ferramentas e formas de comunicação instantânea estão a ser usadas pelos alunos na aprendizagem da Matemática. É com bastante naturalidade que os alunos me enviam fotografias das suas produções, algumas editadas onde destacam as dúvidas ou as conclusões, ficheiros de áudio com explicações dos raciocínios ou a colocar determinadas dúvidas, vídeos onde explicam diferentes estratégias de resolução... A comunicação matemática está, neste momento, a assumir dimensões que vão muito além daquilo que habitualmente era feito em sala de aula.

Contudo, se por um lado é notória esta evolução em termos do uso das ferramentas digitais ao serviço da aprendizagem, sendo este um processo bastante natural para a maioria dos alunos, ainda há alunos que continuam alheios a esta realidade por não possuírem dispositivos digitais, nem acesso à Internet. Atualmente, em relação ao período anterior, um maior número de alunos tem acesso às aulas síncronas, no entanto ainda não estão todos on, um facto que é bastante preocupante e que cria grandes assimetrias em termos do acesso a um ensino para todos!

Paulo Correia (ES). São coisas do mundo que só se podem ver ao longe. A ideia de uniformização do ensino também foi incontornavelmente colocada em causa... cada escola escolheu metodologias específicas dentro do seu contexto, cada professor assumiu escolhas de ferramentas e processos diferentes e cada aluno evoluiu no seu processo de autonomia de forma própria. Nada disto é completamente novo, nem essencialmente mau... escolhas curriculares, das metodologias, dos procedimentos e das ferramentas sempre foram assumidas pelas escolas e pelos professores de forma mais ou menos discreta e com graus de intensidade diferentes.

O exercício da autonomia dos professores, que deve ser fomentado e apoiado pelas estruturas de gestão centrais e locais, tem dificuldades e potencialidades. Dá-nos - a nós professores - mais trabalho e também mais poder... precisamos de ter a capacidade e a coragem, mas também, as condições favoráveis para fazer escolhas de ferramentas (digitais ou convencionais) diferentes; de formas de avaliar inovadoras; de abandonar

processos que consideramos ultrapassados; de investir nos processos formativos que consideramos mais promissores e de gerir o currículo em função das contingências inerentes a cada situação particular de cada aluno, de cada professor e de cada escola.

Como no verso da canção dos Heróis do Mar, também os processos de E@D são "coisas do mundo" que precisam de alguma experiência e distanciamento para permitirem uma análise mais cuidada e conclusões mais sustentadas.

Precisamos de continuar a tentar, observar e a pensar... a dificuldade está em "ver ao longe" sem nos distanciarmos... mais!

@ DISTÂNCIA, MAS POUCO DISTANTE

Professores e alunos recriaram a escola. Tornaram possível consolidar aprendizagens a partir de casa, mas ainda não é possível para todos, nem para todos da mesma maneira. Infelizmente, não é possível garantir que ninguém fica para trás. Apesar de todo o investimento de professores e alunos, o "direito a uma justa e efectiva igualdade de oportunidades no acesso e sucesso escolares", preconizado na Lei de Bases do Sistema Educativo Português, não assiste todos os alunos, o que deixa a escola pública em maus lençóis.

No E@D, alunos e professores, embora juntos, não comunicam da mesma maneira. Faltam aquele gesto, aquela expressão, aquele olhar, tão esclarecedores. Faltam também o cruzar uns com os outros nos corredores, o dizer bom dia, retribuindo olhares cúmplices, o chegar a todos e a cada um. Surgem preocupações. A avaliação é uma delas. Reforçou-se a necessidade de triangular, triangular estratégias, técnicas, avaliadores, instrumentos. Reforçou-se a avaliação para uma efectiva melhoria das aprendizagens, com devolução de feedback. Preocupações como oportunidades para mudar e fazer melhor.

Os constrangimentos ainda são muitos, tecnológicos, pedagógicos, familiares, de afetos, mas o caminho vai-se fazendo. Vivemos um distanciamento social, que é, na verdade, um distanciamento físico. Importa lembrar que escola não acontece com a diminuição da sua dimensão social. E mesmo a física, queremos acreditar, nunca será totalmente dispensável.

Agradecimento:

Aos professores Irene Segurado (Agrupamento de Escolas de Lapiás, Sintra), Paula Figueiredo (Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, Odivelas), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal) e Sandra Nobre (Agrupamento de Escolas Professor Paula Nogueira, Olhão), que prontamente se disponibilizaram a relatar, por escrito, as suas práticas.

CRISTINA CRUCHINHO

FILIPA MACHADO

HELENA GIL GUERREIRO

DA REDAÇÃO DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Quem quer comprar um livro com 100% de devolução?

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

“o perigo da meia verdade é você dizer exatamente a metade que é mentira”

Millôr Fernandes

Quando imaginamos que as “armadilhas” do comércio para fisgar o consumidor não nos enganam mais, eis que a astúcia do setor aparece com novas armas. O que acha da seguinte promoção, real, feita por uma livraria?



Nada mal, não é? Aos olhos de um crédulo consumidor, ele poderá comprar “Ensaio sobre a Cegueira” e, com 100% de devolução, lerá Saramago sem ter gasto centímo algum.

Nada disso, leitor. Trata-se de mais uma daquelas promoções que se revelam bem menos interessantes quando apontamos a lupa para o regulamento.

De acordo com as regras da promoção, compras realizadas no dia anunciado teriam 100% do seu valor devolvido em créditos para novas compras a serem realizadas alguns dias depois do dia da promoção. Até aqui, continua parecendo bom. Se compra um livro de 10 €, dias depois recebe 10 € em créditos para comprar um novo livro nesse valor. A livraria devolve 100% do valor, porém, para usufruir do crédito total, supostamente o cliente tem que fazer uma nova compra de mesmo valor e, nesse caso, o desconto aplicado à soma das duas compras não é de 100%, mas sim de 50% já que foram gastos 10 € para adquirir livros que, fora da promoção, custariam 20 €. Com esta regra a promoção perde um pouco do interesse, mas ainda parece ser boa já que um desconto de 50% ainda pode ser considerado vantajoso para alguns consumidores.

Não se precipite, colega. Leia um pouco mais as condições da promoção porque ainda tem carço nesse angu¹. Vejamos o que o regulamento diz sobre como proceder para usar o crédito devolvido: ele (o crédito) será “aplicável numa ou em várias encomendas até ao limite de 50% do valor total dos livros da encomenda...”. Agora ficou confuso, não é? Mais adiante o regulamento apresenta alguns exemplos que esclarecem a questão para os persistentes que seguirem leitura até o fim. Digamos que faz uma compra de 10 € no dia da promoção, então, dias depois, receberá 10 € em créditos. Quando for usar o crédito, se você fizer uma nova compra de 10 € só poderá abater 50% desse valor com seus créditos acumulados na promoção. Caso queira utilizar todo o seu crédito acumulado, de 10 €, então terá que fazer uma compra de 20 €. Nesse caso, como 50% de 20 € é igual aos 10 € que tem de créditos, pode utilizá-lo integralmente como abatimento na despesa.

Agora entendi! Se eu fizer uma compra de 10 € na promoção, e uma nova compra de 20 € quando eu tiver recebido o crédito de devolução, então terei realizado uma compra acumulada de 30 € pela qual pagarei apenas 20 €. Ficou claro.

Nessa sutil promoção, a livraria não mente ao dizer que devolve 100% do valor gasto no dia da promoção, mas ao custo, para o consumidor, de uma nova compra no montante do dobro do valor gasto no dia da promoção. Aquilo que parecia ser uma dádiva de 100%, rapidamente virou apenas um bom desconto de 50% e, na ponta do lápis, a desilusão de um desconto real de aproximadamente 33%, na melhor das hipóteses. E veja você, leitor, esta promoção ocorreu no dia 1 de abril, o dia internacional da mentira. O comércio é mesmo astuto, não acha? Acabaram de colocar roupas novas na velha e conhecida promoção do “Leve 3 e pague 2”.

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO
COLÉGIO SANTA CRUZ - BRASIL

¹ Expressão usada no Brasil quando se quer dizer que alguém está escondendo algo. A origem da expressão remonta a um artifício que era usado pelos escravos para conseguir se alimentar melhor. O prato frequentemente servido era composto exclusivamente de uma porção de angu de fubá. O angu era preparado por escravas na cozinha da casa grande, e no preparo elas escondiam pedaços de carne no alimento que seria servido aos escravos. Se alguém observasse a refeição, perceberia que havia algo escondido no angu, uma espécie de carço.

Dar sentido ao ensino das (e com as) frações

ISABEL ROCHA
MANUELA PIRES

Ao longo do tempo, têm sido publicados na Educação e Matemática textos excelentes sobre o sentido do número, cálculo mental e operações, envolvendo números racionais. Consideramos ser oportuno continuar a refletir e a escrever sobre este assunto, entre outras razões, porque: (1) os alunos mostram grandes dificuldades no trabalho com estes números, sendo necessário continuar a analisar verticalmente o que se faz entre ciclos/anos de escolaridade; (2) é necessário continuar o trabalho consistente realizado no âmbito do PAM (Plano de Ação da Matemática), no Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM), no Programa de Matemática de 2007 e no Plano da Matemática (PM), devido ao revés sofrido com o programa de 2013, que preconiza a introdução de operações formais desde cedo, sem referência aos vários sentidos dos números racionais.

Vivemos estes problemas com professores de todos os ciclos, com quem trabalhámos nos dois últimos anos, em oficinas de formação. Procuramos refletir neste artigo sobre o número racional na forma de fração, sentidos e operações, fazendo algumas referências a manuais escolares, enquanto recurso largamente utilizado na sala de aula.

O QUE SE PASSA COM AS FRAÇÕES?

A palavra fração tem vários significados, nem todos matemáticos, e os vários usos que dela fazemos podem causar confusão e dificuldades de comunicação sobre um assunto que é complicado. Por exemplo, na vida corrente, o termo fração é associado a *uma pequena parte*, a *um pouco* e na escola, desde os primeiros anos, os alunos trabalham formalmente com frações, que muitas vezes são maiores que a unidade. Algumas questões se colocam: que significado atribuem os alunos às frações? como são tratadas ao longo da escolaridade? quais as perceções dos professores sobre elas? como são tratadas nos manuais?

Nas discussões ocorridas nas oficinas de formação, verificámos que existiam diferentes conceitos de fração: (1) apenas como comparação parte/todo; (2) para referir qualquer número escrito na forma simbólica $\frac{a}{b}$; (3) com o mesmo significado que número racional.

A comparação parte/todo é muitas vezes usada para iniciar o estudo das frações. Esta tradição fez com que se encarassem como sinónimos os termos *fração* e *fração parte/todo* e isso empobreceu a visão dos números racionais. Felizmente, cada vez mais os professores se tornam conscientes das várias interpretações das frações, referindo-se a elas também como

operador, medida, razão e quociente, devendo as interpretações estar em igualdade.

Segundo Lamon (2006), sob um único símbolo de fração, existem diversas interpretações, formas de pensar e operar associadas. Na aprendizagem das frações, os alunos precisam de um ponto de partida com um dos sentidos de números racionais e aí desenvolver as ideias de unidade, partes da unidade representadas por frações, estratégias de comparação e equivalência de frações e depois precisam de tempo suficiente para trabalhar os vários sentidos.

A mesma autora defende que, quando se inicia o trabalho com frações, a matemática dá um salto qualitativo na sofisticação. De repente, significados, modelos e símbolos que funcionam ao adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números inteiros não são transponíveis para operar com frações. Vários saltos conceptuais contribuem para a dificuldade dos alunos em compreender frações. Enquanto, na contagem, a unidade “um” se refere a um único objeto, nas frações a unidade pode consistir em mais de um objeto (●●●● = 1 unidade) ou pode ser uma unidade composta, isto é, pode consistir em vários objetos agrupados como um (uma embalagem com 6 garrafas de água). A unidade pode ainda ser dividida em partes iguais e tem de se usar um novo tipo de número para nomear partes daquela unidade (⊕). Contribuem para o elevado grau de dificuldade as situações explicitadas abaixo:

– em cada nova situação, a unidade pode ser algo diferente (figura 1).

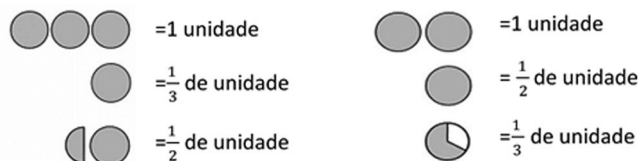


Figura 1. Unidades formadas por mais do que um objeto

– a mesma representação pode corresponder a partes diferentes da unidade (figura 2).



Figura 2. Representações idênticas, quantidades diferentes

– não há uma representação única para nomear parte de uma unidade. A mesma quantidade pode ser representada por frações equivalentes, mas com nomes diferentes. Por

exemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{12}$ e $\frac{9}{18}$ da mesma unidade, são a mesma quantidade, pois representam a mesma parte dessa unidade. Nos manuais escolares¹ que analisámos encontramos opções diferentes relativamente ao conceito de fração, aos sentidos e aos contextos em que se trabalham as frações. No 1.º ciclo, é mais frequente aparecerem vários sentidos das frações em contextos diversificados, embora em alguns manuais se privilegie o contexto algo abstrato da representação da fração numa reta numérica. No 2.º ciclo, há uma tendência para haver referência apenas a um dos sentidos e identificámos problemas aquando da formalização do conceito de fração.

Há manuais em que se define fração como quociente entre dois inteiros e se afirma que “qualquer número que possa ser representado por uma fração diz-se um número racional” parecendo haver a identificação de *fração* com *número racional*.

Mas, segundo esta definição, que nome se poderá dar às representações $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5,6}{3,4}$ ou $\frac{1}{\frac{1}{8}}$ trabalhadas neste nível de escolaridade ou ao número irracional $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, trabalhado no 7.º ano?

Noutros manuais afirma-se que uma fração tem dois termos: denominador e numerador, que se definem respetivamente por “o número de partes iguais em que dividimos o todo” e “o número dessas partes que se tomaram do todo”. Como estes significados dos termos apenas têm sentido na fração como parte/todo e não identificámos situações nos vários manuais em que, para os outros sentidos, se questione o que representam o numerador e o denominador, o conceito de fração fica muito empobrecido e pode ser inadequado para interpretar um contexto real, em que exista, por exemplo, uma razão ou partilha. Estas podem ser algumas das causas para as dificuldades que os alunos têm na compreensão dos números racionais.

Por verificarmos que as situações descritas acima são restritivas e originam confusões, identificamo-nos com a perspetiva de que *frações* são símbolos bipartidos, uma forma para escrever números: $\frac{a}{b}$. Neste sentido, a palavra fração refere-se a uma representação, dois números escritos com uma barra entre eles.

SENTIDOS DAS FRAÇÕES E CONCEITOS/PROCEDIMENTOS OPERATÓRIOS

Uma boa compreensão das frações adquire-se em contextos diversificados que evidenciem os seus diferentes sentidos. São também esses contextos que dão significado aos termos da fração e aos papéis que o numerador e o denominador assumem em cada um dos sentidos. Lamon (2006) salienta que o cálculo não deve ser separado do sentido das frações e recomenda que quando forem introduzidas as operações e quando forem consolidadas, se ligue cada procedimento operatório a contextos e sentidos adequados. Um ensino que se baseie apenas num dos sentidos de fração e em regras operatórias traz problemas

na aprendizagem dos alunos com compreensão. Assim, apresentamos em cada uma das quatro secções que se seguem os sentidos e os respetivos procedimentos que são adequados trabalhar, começando por mostrar essas relações num esquema.

FRAÇÃO COMO PARTE/TODO E COMO QUOCIENTE (PARTILHA)

O esquema (figura 3) pode ajudar a visualizar as relações, que procuraremos contextualizar em seguida, quando se trabalha com estes sentidos.

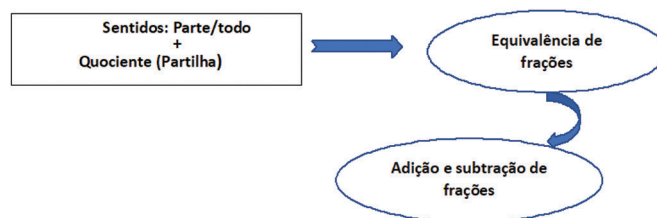


Figura 3. Número racional como parte/todo e como quociente

A representação geométrica da divisão de chocolates retangulares em partes iguais (quociente/partilha equitativa)² é um bom modelo (modelo de área) para a comparação de frações, nomeadamente quando têm o mesmo numerador ou denominador. Já na comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes, a utilização da reta numérica e a consideração de números de referência (como 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...) é uma boa estratégia para a comparação e/ou utilização de frações equivalentes. É algo que entendemos ser, regra geral, trabalhado nas aulas e nos manuais, pelo que não vamos desenvolver esta questão.

Para exploração inicial da adição de frações apresentamos um problema muito comum:

Quatro amigos partilham 3 chocolates de forma equitativa. Representa essa partilha, pelo menos de duas maneiras diferentes, através de um desenho, em que os chocolates estão representados por retângulos. Sombreia a parte que corresponde a cada amigo.
Que quantidade coube a cada um?
Que significado atribuis ao numerador e denominador da fração obtida?

Para facilitar a discussão sobre o que pretendemos explorar, a equivalência e a adição de frações, em cada uma das situações solicitamos que a região sombreada seja representada por uma expressão com frações, como está ilustrado na figura 4. Além disso é importante perceber que, independentemente da representação obtida em cada figura, a partilha foi equitativa logo a quantidade que cabe a cada um é sempre a mesma $\left(\frac{3}{4}\right)$. E nesta fração o numerador representa o número de itens a partilhar (os 3 chocolates) e o denominador o número total de partilhas (os 4 amigos), representando a fração a quantidade de chocolate que cabe um.

¹ No artigo “Como manuais escolares abordam o tema Números Racionais”, publicado no número temático 144/145 da revista Educação & Matemática (Delgado et al., 2017, pp.75-80) podemos ver uma análise detalhada de vários aspetos dos manuais sobre os números racionais.

² Seção Materiais para a aula de Matemática da EM 148: Número racional como quociente

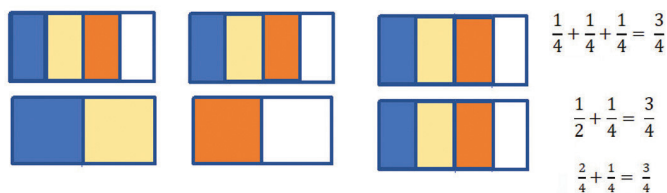


Figura 4. Adição de frações

Na primeira representação, a estratégia usada foi a divisão dos três chocolates em quatro partes iguais, enquanto que na segunda, dois chocolates são divididos ao meio e assim ficam com quatro partes iguais (metades), cabendo $\frac{1}{2}$ a cada amigo. E ainda há um chocolate que terá de ser dividido em quatro partes iguais, cabendo mais um quarto a cada um (figura 4).

A representação destas partilhas pelas respetivas expressões numéricas permite explorar a adição de duas frações: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, recorrendo ainda à equivalência de frações $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, “para se compreender a relação da soma com as parcelas”. A partir daqui pode-se explorar a equivalência de frações e a adição de frações com denominadores diferentes, mas em que um é múltiplo do outro.

A equivalência de frações será a estratégia adequada para converter a adição de frações com denominadores diferentes em adição de frações com o mesmo denominador.

Em nosso entender, este tipo de exploração, iniciada nos primeiros anos de escolaridade, tem de ter continuidade nos ciclos do ensino básico, para se adquirir a compreensão necessária para a interpretação das operações.

FRAÇÃO COMO OPERADOR

O esquema que abaixo apresentamos (figura 5) permite visualizar os procedimentos, que procuraremos contextualizar, em seguida, quando se trabalha com este sentido.



Figura 5. Número racional como operador

Na *interpretação como operador*, os números racionais surgem como transformadores de uma situação (operam sobre ela), pensamos nos números racionais como funções. Por exemplo, aumentam ou reduzem o número de itens num conjunto discreto (e.g. $\frac{2}{3}$ de 6), transformam uma figura geométrica plana noutra da mesma forma (figura 6), mas com dimensões diferentes (maior ou mais pequena), consoante o operador. Esta é uma situação em que devemos questionar quais os operadores que levam a um acréscimo e quais levam a um decréscimo, o que proporciona uma maior compreensão das frações menores ou maiores do que a unidade (figura 6). Estamos a falar em ampliações, reduções, aumentar, encurtar, ou seja, multiplicar e dividir.

Sendo assim, compreender os números racionais como operadores implica compreender os efeitos da aplicação sucessiva de dois ou mais operadores, quando o segundo operador

é aplicado ao resultado obtido com a aplicação do primeiro operador. Este tipo de composição surge com frequência em situações do dia a dia.

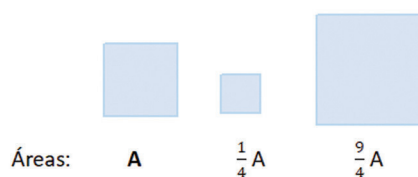


Figura 6. Fração como operador

Claramente esta interpretação das frações como operadores fornece um contexto muito útil para a multiplicação de frações. O modelo de área também é útil para a multiplicação de frações, explorada nos materiais da EM 146³ de aplicação sucessiva de operadores que se traduz na multiplicação de frações.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ significa tirar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ da unidade.



Figura 7. Modelo de área para a multiplicação de números racionais

Primeiro divide-se, na vertical, a unidade de partida em 4 partes iguais e assinalamos 3 dessas partes que corresponde à fração $\frac{3}{4}$. Depois dividimos a parte sombreada em 3 partes iguais (agora na horizontal, que facilita) e sombreamos duas dessas partes e obtemos o produto das frações (figura 7) que corresponde à área de um retângulo que é metade da área inicial (da unidade de partida), logo metade da unidade: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

Vamos traduzir por uma expressão aritmética todos os passos que demos na representação geométrica, começando por ler da direita para a esquerda: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 2 \times \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{4}$.

Como já verificámos, o resultado final (parte sombreada mais escura) corresponde à área de metade da unidade (figura 7) ou considerando a divisão inicial em quatro partes iguais a $\frac{2}{4}$ da unidade.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 2 \times \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

E mais tarde (não tem (e nem deve) de ser no 5.º ano), estes problemas serão ótimos para ajudar os alunos a intuir “a regra”. Ao voltar à representação geométrica e olhar o resultado em termos da subunidade mais pequena (quadrado mais pequeno) concluir que o resultado se pode escrever como

$$\frac{6 \text{ (n.º de quadrados da parte obtida)}}{12 \text{ (n.º de quadrados em que a unidade está dividida)}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$$

Depois deste percurso os alunos irão deduzir a relação do numerador e denominador desta fração com os respetivos

³ Seção Materiais para a aula de Matemática da EM 146: Número racional como operador

numeradores e denominadores das frações, fatores da multiplicação efetuada.

Em vários manuais dos 1.º e 2.º ciclos, a multiplicação é introduzida a partir de um problema e um contexto intencional que permite intuir uma regra. É usado o sentido fração como operador, quer de um todo discreto quer contínuo, recorrendo-se, neste caso, quase sempre ao modelo retangular. No entanto, observámos duas situações em alguns manuais: (1) apresentam-se apenas regras; (2) não interpretam os resultados e não utilizam a linguagem própria do operador, possivelmente por fazerem apenas referência ao sentido parte/todo.

FRAÇÃO COMO MEDIDA

A medição é um dos grandes tópicos do currículo dos primeiros anos de escolaridade e os conceitos associados à medição têm um papel relevante na compreensão dos *números racionais (como medida)*. Os programas do 1.º e 2.º ciclos contemplam todos os tópicos relacionados com a medição: unidades de medida, medição de perímetros, áreas, volumes/capacidades e tempo. Ao trabalhar as unidades de medida, e para se obter uma medição tão precisa quanto se precisar, verifica-se a necessidade de dividir a unidade de medida considerada em subunidades cada vez menores. As frações são aqui perfeitamente integradas, o que também nos questiona sobre a necessidade de estes conceitos serem trabalhados em simultâneo.

O esquema que abaixo apresentamos (figura 8) permite visualizar os procedimentos, que procuraremos contextualizar, em seguida, quando se trabalha com este sentido.

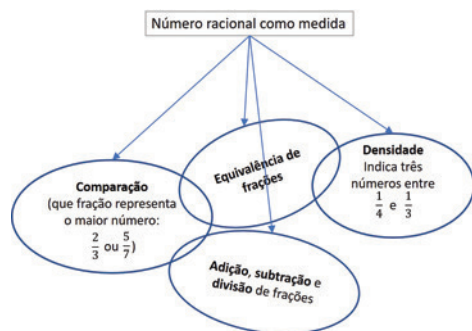


Figura 8. Número racional como medida

Há vários contextos para os primeiros anos de escolaridade em que esta necessidade de obter subunidades cada vez menores pode ser trabalhada ainda com unidades informais, por exemplo, na medição das alturas dos colegas da sala ou da sua própria altura, com uma régua em cartolina que é escolhida para unidade e quase sempre fica “um bocadinho” por medir que é menor que a unidade escolhida e assim tem de se dividir a unidade em subunidades.

O que nos leva à discussão da *densidade* dos números racionais, porque existe um número infinito de frações entre qualquer par de frações, não importa quão perto elas estejam, e é essa propriedade que permite a aproximação mais rigorosa de uma medição.

Aliás os números racionais não inteiros surgiram da necessidade de traduzir o resultado de uma medição.

Outros conceitos (além da densidade) e procedimentos que podem ser potenciados são comuns aos da interpretação da fração como quociente e parte/todo mas agora neste contexto de medição de grandezas: comparação, equivalência, adição e subtração de frações. Mas surge uma nova operação, a divisão de frações, que consideramos dever ser iniciada com tarefas envolvendo frações em contexto de medida.

A investigação nesta área aponta a abordagem desta operação em contextos de medida como adequada (Pinto, 2011). Este estudo evidenciou a pouca familiaridade dos alunos participantes com o significado da divisão como medida. Adaptámos uma das tarefas exploradas nesse artigo (figura 9).

Vamos encher copos de $\frac{1}{4}$ de litro com água da garrafa que tem 1 litro. Quantos copos se enchem? E se a garrafa tiver $\frac{1}{2}$ litro? E se os copos só levarem $\frac{1}{8}$ litro?

Afinal o que se pretende é dividir um litro de água por copos com capacidade de um quarto de litro. Nesta divisão, o dividendo representa a quantidade a dividir, o divisor a medida considerada, pelo que o dividendo e divisor têm a mesma natureza, a água, em litros e o quociente representa o número de copos, uma nova grandeza.

1.ª questão: dividendo $1l$ (capacidade da garrafa); divisor $\frac{1}{4} l$ (capacidade do copo)

$$\frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 \div \frac{1}{4} = 4 (\text{quantidade de copos})$$

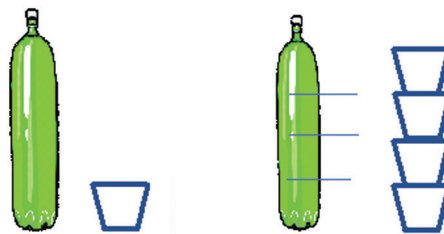


Figura 9. Simulação da divisão como medida

2.ª questão: E se a garrafa tiver meio litro de água?

A resposta deve ser procurada a partir da 1.ª questão e só depois formalizar (se a garrafa tem metade da água que a outra tinha, vai encher mais ou menos copos, e quantos). Com a resposta encontrada (2, porque enchemos metade dos copos que enchemos com a garrafa de um litro $\frac{4}{2}$), escrevemos então a expressão numérica que traduz a operação:

dividendo/numerador: $\frac{1}{2}$ divisor/denominador: $\frac{1}{4}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{2} = \frac{1}{2} \text{ de } 4$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{2} = \frac{1}{2} \text{ de } 4 = 2$$

Número inverso do denominador

operador

3.ª questão: E se os copos só levarem $\frac{1}{8}$ litro?

Mais uma vez a resposta deve ser procurada a partir da 2.ª questão e só depois formalizar. Nesta situação em que a garrafa tem a mesma capacidade da garrafa da questão anterior, meio litro, e o copo é que tem menor capacidade (metade da capacidade dos copos da questão anterior), precisaremos do dobro dos copos, ou seja, 4. Esta relação inversa nem sempre é fácil de deduzir. Este trabalho deve vir na continuidade do já realizado no 1.º ciclo sobre a divisão com números inteiros em contextos idênticos (por exemplo: de quantas caixas necessitamos para distribuir 48 maçãs por caixas de 6? E se as caixas levarem 12 maçãs? E ...)⁴

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} = \frac{8}{2} = 4 = \frac{1}{2} \text{ de } 8 \text{ (número de copos)}$$

A divisão também pode ser interpretada com o modelo de área:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$$

Quantas vezes $\frac{2}{3}$ da unidade cabe em $\frac{3}{4}$ da mesma unidade? Começamos por representar a unidade e sombreadar $\frac{3}{4}$ da unidade (dividindo a unidade em quatro partes iguais na vertical) (figura 10).

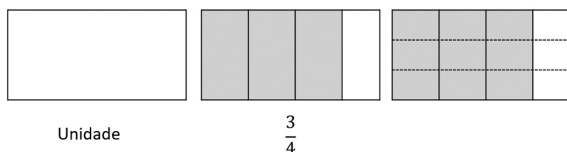


Figura 10. Modelo de área na divisão de frações

O que pretendemos saber é quantas vezes uma área de $\frac{2}{3}$ da unidade cabe nesta área sombreada (figura 10). Então dividimos em 3 partes iguais, na horizontal, a área sombreada (figura 10). Mas não esquecer que $\frac{2}{3}$ da unidade corresponde à área sombreada mais escura da figura 11, ou seja, corresponde à área de 8 quadrados, ficando a unidade inicial dividida em 12 partes.

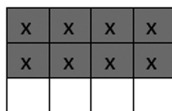


Figura 11. $\frac{2}{3}$ da unidade

Vamos então ver quantas vezes estes 8 quadrados (figura 11) cabem na área de $\frac{3}{4}$ da unidade.

Vê-se que cabem uma vez (sombreado mais escuro) e ainda há um quadrado sobrando (figura 12). E este corresponde a que fração da área de $\frac{2}{3}$? Se esta área corresponde a 8 quadrados (figura 12) então um quadrado representa $\frac{1}{8}$ dessa área.

⁴ Rocha, I. e Menino, H. (2008). A aprendizagem da divisão nos primeiros anos, perspectivas metodológicas e curriculares. Em J. Brocardo, L. Serrazina e I. Rocha (Org.). O sentido do número-reflexões que entrecruzam teoria e prática (pp.183-200). Lisboa: Escolar Editora

Logo a área de $\frac{2}{3}$ cabe uma vez mais um oitavo na área de $\frac{3}{4}$.

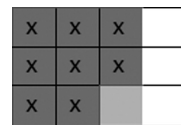


Figura 12. Representação do resultado da divisão $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$

Podemos então concluir que $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$

Porquê $\frac{1}{8}$? Quando estamos a averiguar quantas vezes cabe $\frac{2}{3}$ numa área de $\frac{3}{4}$, o que sobra tem de ser referido à área de $\frac{2}{3}$ (ao divisor) e não à unidade inicial ou ao dividendo.

E, como na multiplicação, só muito mais tarde, quando o professor sentir que o aluno consegue relacionar o resultado com os numeradores e denominadores das frações, poderá ser o aluno questionado, como na multiplicação, para intuir a regra operatória que tornará o cálculo mais rápido.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{9}{8}$$

Pela nossa experiência, e como também aponta a investigação, a divisão de frações em problemas de contexto de medida é melhor compreendida pelos alunos do que na utilização do modelo de área. Em termos de formação de professores entendemos que se devem discutir todos os modelos.

Os manuais dos 1.º e 2.º ciclos analisados introduzem a divisão da mesma forma que a multiplicação, pelo que alguns apresentam apenas regras. Nos que apresentam contextos da divisão como partilha e/ou medida fazem-no com níveis de exploração diferentes, não havendo incidência no que significam, em cada contexto, o numerador/dividendo e o denominador/divisor, qual a natureza das grandezas com que se trabalha e qual a que se obtém como resultado.

FRAÇÃO COMO RAZÃO

No esquema que se segue (figura 13) procuramos sistematizar os procedimentos potenciados por este sentido.

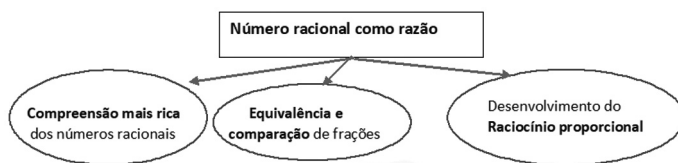


Figura 13. Número racional como razão

A interpretação da *fração como razão*, surge quando se comparam grandezas de tipos diferentes ou quando se compara a medida da parte de um conjunto com a medida de outra parte do conjunto (de que é exemplo muito usado, a comparação do número de rapazes com o número de raparigas de uma turma ou escola, etc.). Mas, se usarmos o exemplo: numa escola existem 12 computadores para cada grupo de 20 alunos $\frac{12 \text{ computadores}}{20 \text{ alunos}}$ as grandezas que se comparam são diferentes e não se pretende um resultado, apenas a razão entre computadores e alunos (para analisar necessidades de aquisição, ou sua distribuição, etc).

As razões são um desafio na sala de aula devido à diversidade de situações no seu uso diário. Isso significa que, ao resolver problemas de razão, é importante discutir todas as questões e entendimentos relacionados com todo o tipo de informação que pode ser obtida das informações — implícitas ou explícitas que se retiram das razões (Lamon, 2006). Parece-nos relevante refletir sobre as questões que esta autora indica que devem ser colocadas nas discussões de situações de razão:

- Além dos factos explícitos, o que mais se sabe sobre essa situação?
- Faz sentido reduzir a razão? A razão pode ser ampliada?
- Se se ampliar ou reduzir a razão, que informações são obtidas ou perdidas?
- Se se escolher uma amostra menor ou maior, podemos aplicar a razão?
- Qual é o significado de uma razão dividida (onde se observa apenas o resultado da divisão)?

Vejamos situações de razão em que se discutem algumas destas questões:

- Bruno tem 32 anos e o filho tem 4 anos. Esta razão é extensível, ou seja, aplica-se nos anos seguintes? A proporção $32:4 = 8:1$ compara a idade do pai com a idade do filho neste momento, em que o pai é oito vezes mais velho que o filho. No próximo ano, o pai terá 33 e o filho 5, logo não é verdade que o pai será oito vezes mais velho que o filho e isso também não acontecerá noutro ano futuro. Qual foi o efeito de reduzir esta proporção? Facilitou a comparação das idades, mas perdeu-se a informação sobre as idades atuais.
- Numa turma de 27 alunos, a razão de raparigas para rapazes é de 3:6. Além do que está explícito, que mais podemos saber desta turma?
 - Se reduzirmos a razão 3:6 a 1:2, ficamos a saber que para cada rapariga existem dois rapazes na turma. O que nos permite saber que um terço dos alunos da turma são raparigas, mesmo sem ainda sabermos quantas são.
 - Será que podemos saber o número exato? Podemos ampliar a razão até que a soma dos dois termos da razão dê 27 e como é um número ímpar terá de resultar da soma de um ímpar com um par: $5:10$ ($5+10 \neq 27$); $7:14$ ($7+14 \neq 27$), $9:18$ ($9+18=27$). Ficamos a saber que nesta turma há 9 raparigas e 18 rapazes.
 - A razão será extensível? Poderemos saber quantos rapazes haverá numa turma de 31 alunos? Não podemos esquecer que esta razão se aplica a esta turma, não é generalizável a outra turma.
 - E se escolhermos aleatoriamente 6 alunos da turma, posso esperar que sejam 2 raparigas e 4 rapazes? A razão 3:6 refere-se a toda a turma e não a um subconjunto da mesma. Escolhendo 6 alunos, nada nos garante que sejam 2 raparigas e 4 rapazes. Significa que ao escolher uma amostra menor a razão não se aplica.
- Um exemplo do contexto desportivo: na nossa equipa preferida de voleibol no final das primeiras 16 jornadas (cerca de metade da competição) a razão entre vitórias e derrotas era de 12:4. Faz sentido reduzir ou ampliar a razão?

Ao reduzir, afirmamos que foi uma razão de 3 vitórias para 1 derrota, mas então referimo-nos a 4 jogos. A razão dada diz respeito a um conjunto de 16 jogos e nos 4 primeiros jogos a equipa até pode ter ganho todos, ter ganho 2 e perdido 2, etc., logo não faz sentido. Da mesma forma não sabemos se esta razão se mantém nos jogos que faltam disputar.

- Em consequência da pandemia, somos diariamente confrontados com muita informação sobre a Covid 19, incluindo informação matemática. Esta deve ser aproveitada para aumentar a literacia matemática da população em geral e dos nossos alunos, em particular. Vejamos uma notícia do Público online no dia 12 de maio:

Portugal registou até esta terça-feira 1163 mortes, mais 19 que na segunda-feira, um aumento de 1,8%. Foram identificados mais 234 casos nas últimas 24 horas, o que corresponde a uma taxa de crescimento de 0,8%. Desde o começo do surto, já foram identificados 27.913 casos.

Qual é o significado destas percentagens? Como foram obtidas? Em ambos os casos estamos perante crescimentos relativos, ou seja, a informação é sobre qual foi o aumento num dia relativamente ao número total de casos que existiam. No caso do número de mortes, vejamos a comparação entre o aumento verificado em 24 horas de 11 para 12 de abril e de 11 para 12 de maio (dados do site da DGS em 12 de maio). No dia 11 de abril o total de mortes registado foi 470 e no dia seguinte 504. Em 24 horas houve 34 mortes, que representou um aumento de 7,23% relativamente ao número existente no dia anterior:

$$\frac{34}{470} \approx 0,0723 = \frac{7,23}{100} = 7,23\%$$

Um mês depois, no mesmo período de 24 horas, o número de mortes foi de 19, obtendo-se o aumento relativo a 1144 ($1163-19$) fazendo: $\frac{19}{1144} \approx 0,0166 = \frac{1,66}{100} = 1,66\% \approx 1,7\%$, (o valor apresentado na notícia é 1,8%). Nos dois casos os aumentos são baixos, mas o aumento diário do dia da notícia é muito menor do que há um mês atrás.

Relativamente ao número de infetados, outra opção é comparar o número total de infetados num dia com o número total do dia anterior e interpretar essa informação. Comparando as mesmas duas datas, em 12 de abril o número é 1, 037 vezes maior que o do dia anterior, logo o aumento foi de 3,7% ($\frac{16585 \text{ infetados no dia } 12/4}{15987 \text{ infetados no dia } 11/4} \approx 1,037$) (e em 12 de maio é 1,008 vezes maior do que no dia anterior, sendo o aumento de 0,8% ($\frac{27913 \text{ infetados no dia } 12/5}{27679 \text{ infetados no dia } 11/5} \approx 1,008$)) (bastante inferior ao do mês anterior, o que mostra que no número de infetados também continua a haver aumento, mas menor. Nos dias 11 e 12 de março não havia óbitos, mas já havia pessoas infetadas, sendo o aumento nessas 24 horas de 32%. É um aumento brutal relativamente a maio, embora os números absolutos fossem muito pequenos ($\frac{78 \text{ infetados no dia } 12/3}{59 \text{ infetados no dia } 11/3} \approx 1,32$). Para uma melhor compreensão destes aumentos é importante analisar as razões

que lhe deram origem, mantendo as etiquetas no numerador e no denominador.

Este trabalho com razões pode desenvolver a capacidade dos alunos de analisar as mudanças em termos absolutos e relativos e de raciocinarem proporcionalmente nos contextos adequados. Apesar dos alunos trabalharem desde cedo razões e proporções e resolverem, ao longo da escolaridade nas várias disciplinas, exercícios e problemas envolvendo proporcionalidade, verificam-se grandes dificuldades na compreensão de número racional e conceitos multiplicativos relacionados em alunos de todas as idades.

CONCLUSÃO

Dada a complexidade dos números racionais e o empobrecimento que se verifica no seu tratamento, o ensino das frações exige um compromisso entre os professores que os alunos encontram ao longo dos anos. É um grande desafio escolar que pode ser potenciado e facilitado pela estrutura dos agrupamentos de escolas, mas pressupõe um aumento do diálogo entre os professores dos vários ciclos e anos e um envolvimento das coordenações dos departamentos e das direções. Em cada Agrupamento de Escolas deve haver um conhecimento claro do que se trabalha em cada ciclo e das decisões tomadas que podem ter uma sequência do tipo:

Os vários sentidos dos racionais na forma de fração devem ser trabalhados em todos os ciclos, pois a consolidação não fica feita nos primeiros anos. Após iniciar o estudo das frações com o sentido parte-todo, selecionar em cada ano um ou mais dos outros sentidos dos números racionais: quociente, operador, medida ou razão, que devem ser trabalhados com profundidade. Em cada um dos sentidos e nos contextos escolhidos, os alunos devem interpretar os papéis que o numerador e o denominador assumem, bem como o número que a fração representa.

Nos 2.º e 3.º ciclos, em que há um reforço do cálculo com frações, este deve ser ligado a contextos, sempre que possível, com reforço do cálculo mental.

O cálculo não pode ser separado dos sentidos das frações e na introdução das operações e sua consolidação deve ligar-se cada sentido do número racional ao procedimento operativo:

- os sentidos de fração como parte/todo e quociente como partilha são apropriados na equivalência de frações e na adição e subtração;
- o sentido de número racional como medida é apropriado na comparação de frações; equivalência e densidade, bem como nas operações adição, subtração e divisão;
- o sentido de número racional como operador é apropriado nas operações multiplicação e divisão.

Ao longo da escolaridade, os alunos precisam de trabalhar em contextos que envolvam os sentidos das frações para interiorizarem o conceito de número racional e adquirirem compreensão sobre as operações. Só os professores poderão planificar de forma a que os alunos tenham o tempo necessário para essa compreensão, contrariando a pressa de chegar às regras, tantas vezes mal aplicadas. A cada um de nós, professores, cabe o papel decisivo na incorporação de ideias e seleção de tarefas, e o trabalho colaborativo entre pares ajuda a que nos sintamos confortáveis e confiantes para isso.

Referências

- Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey: Lawren Erlbaum Associates, Inc.
- Pinto, H. (2013). Problemas de contexto no ensino-aprendizagem da divisão de números racionais. *Educação & Matemática*, 124, 8-11

ISABEL ROCHA

MANUELA PIRES

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Na sequência da secção “Pense Nisto” relativa à promoção de desconto numa livraria, apresentam-se as seguintes condições sobre as quais importa que os alunos reflitam.

Após a compra é emitido um vale utilizável numa ou várias compras até ao limite de 50% do valor total dos livros da compra.

Exemplos:

- Vale emitido: 20€

Após a emissão do vale, se fizer uma compra igual ou superior a 40€ será aplicada a totalidade do valor do vale (20€), uma vez que 20€ é 50% de 40€, ou seja, o valor do vale não é superior a 50% do valor total da compra.

- Vale emitido: 15€

Após a emissão do vale, se fizer uma compra de 12€ serão aplicados 6€ de desconto pois o vale utilizado não pode ultrapassar 50% do valor da compra. O valor restante, 9€ (15€-6€) poderá ser utilizado numa outra compra que continue a respeitar o limite de 50% dessa compra.

Depois de descrita a situação do regulamento da promoção de desconto da livraria, estas são algumas perguntas que podem ser feitas aos alunos. As perguntas que se apresentam abrangem diversos ciclos.

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO
COLÉGIO SANTA CRUZ - BRASIL

Condições da Campanha

100% de volta*



1. O João comprou um livro de 12 € no dia da promoção dessa livraria e, dias depois, comprou um livro de 8 € para usar o seu desconto.
 - a. Qual foi a percentagem de desconto que João teve na aquisição dos seus dois livros?
 - b. Se João quiser fazer uma nova compra na livraria para exercer o total do desconto que ainda tem direito, de quantos euros deverá ser sua compra?
2. A Maria comprou um livro de 8 € no dia da promoção da livraria. Como ela gostou muito do livro, resolveu fazer uma segunda compra de mais exemplares do mesmo livro para dar de presente para as suas amigas. Nessa segunda compra, Maria usou todo o desconto que tinha direito.
 - a. Para quantas amigas Maria poderá dar de presente um exemplar do livro?
 - b. Qual foi a percentagem de desconto que Maria teve no total das duas compras que fez na livraria?
 - c. Frequentemente o comércio utiliza promoções do tipo “Leve 5, Pague 4”. No caso da promoção da livraria, se o cliente exerce o direito total do seu desconto, a promoção seria equivalente a “Leve X, Pague Y”. Quais são os menores valores possíveis para X e Y?
3. O Tiago fez uma compra de 30 € na livraria no dia da promoção e, no dia seguinte, outra compra na mesma livraria. Juntando as duas compras, Tiago calculou que seu desconto total foi de 10%. Qual foi o gasto de Tiago no segundo dia de compra?
4. Admita que a Lúcia faça uma compra de X euros no dia da promoção e de Y euros em outro dia, para poder usar (total ou parcialmente) seu desconto.
 - a. Escreva uma expressão algébrica com X e Y cujo valor numérico represente a percentagem de desconto que Lúcia terá nas suas compras. Qual é o domínio de validade da expressão escrita?
 - b. Faça gráficos, em um mesmo plano cartesiano, que representem a relação entre X e Y para descontos de 10%, 20% e 30%.

* Após a compra será emitido um vale utilizável numa ou várias compras até ao limite de 50% do valor total dos livros da compra.

Di-vi-so-res – como encontrá-los? Uma experiência exploratória no 1.º ciclo do ensino básico

FÁTIMA ALEXANDRINO
GORETE FONSECA

As orientações curriculares têm vindo a assumir cada vez mais como prioridade a promoção da qualidade das aprendizagens de todos os alunos. Espera-se que o professor no desenvolvimento da sua prática profissional, adote estratégias para ajudar o aluno a: (i) tomar consciência do que deve aprender; (ii) saber quais os processos cognitivos a ativar para adquirir esse conhecimento; e (iii) mostrar o que aprendeu de modo articulado e integrado (ME, 2017) valorizando, assim, o papel ativo do aluno na aprendizagem. Diversos autores vêm chamando à atenção para a importância da adoção de estratégias de ensino e de aprendizagem, da matemática, baseadas na prática de ensino exploratório (*inquiry-based teaching*) (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012; Ponte, 2005) de modo a dar oportunidades aos alunos para realizar “tarefas matemáticas significativas que lhes permitam raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas” (Canavarro et al., 2012, p. 256).

Sabemos que a tarefa como ponto de partida para a aprendizagem na sala de aula deve assumir um caráter sistemático e deve ainda promover nos alunos a reflexão, a partilha e a discussão em pequeno ou grande grupo. A discussão, enquanto momento que permite aos alunos expressar o seu pensamento, para além de dar a oportunidade para analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas, contribui para estabelecer conexões e institucionalizar, através da generalização, conhecimento matemático novo (Canavarro, 2011; Ponte, 2005, 2014).

A natureza do trabalho exploratório descritivo interpretativo de que se faz relato neste artigo consubstancia a aplicação de uma tarefa aberta que incidiu sobre o tópico dos divisores. Pretendeu-se, a partir dos registos dos alunos, conhecer as estratégias usadas para resolver a tarefa. Importa dizer que a tarefa integrou um conjunto mais amplo de atividades exploratórias desenvolvidas no âmbito de um projeto que visava a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos matriculados no 1.º ciclo do Agrupamento de Escolas da Lourinhã.

Nesta atividade participaram 11 docentes e 104 alunos, que à data da realização da tarefa exploratória, frequentavam o quarto ano de escolaridade distribuídos por 9 turmas das diferentes escolas do 1.º ciclo que integram o Agrupamento.

Para o efeito, recorreu-se aos trabalhos produzidos pelos alunos e às notas de observação direta recolhidas pelos docentes como fontes privilegiadas na recolha de dados. Os dados foram analisados recorrendo a processos de análise de conteúdo.

Seguidamente são apresentados os objetivos da tarefa, os segmentos didáticos previstos e o modo de trabalho dos alunos.

A TAREFA

A tarefa teve como principais objetivos: (i) identificar divisores de um número natural; (ii) dar exemplos de divisores de um número natural; e (iii) compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores).

Como competências transversais pretendeu-se que os alunos fossem capazes de: (i) utilizar os conhecimentos e as capacidades para resolver problemas em contextos diversos; (ii) resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos; e (iii) discutir processos matemáticos, explicitando-os e justificando-os.

A implementação da tarefa decorreu numa aula de 90 minutos e respeitou os segmentos indicados na tabela 1.

Tabela 1. Segmentos previstos para a aula e duração aproximada

Segmentos	Tempo
1. Apresentação da tarefa	10 minutos
2. Trabalho autónomo	50 minutos
3. Discussão	20 minutos
4. Síntese final	10 minutos

O enunciado da tarefa procurou levar os alunos a refletir sobre o modo como se podem descobrir os divisores de um dado número. A partir de uma situação problemática “A Maria quer distribuir 48 bombons por várias embalagens. Ela não quer que sobre nenhum e todas as embalagens têm de ter o mesmo número de bombons.” foram colocadas as seguintes questões:

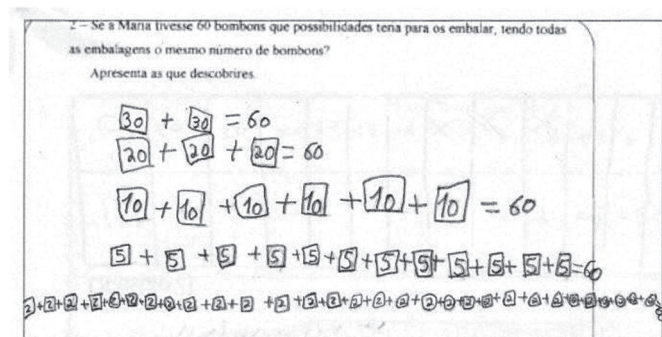
- “Se colocar em cada embalagem 8 bombons, quantas embalagens serão necessárias?”;
- “E se for em 4 embalagens?”
- “Será possível guardar os bombons em 5 embalagens? Justifica a tua resposta.”

A tarefa foi resolvida essencialmente a pares e em grande grupo no respetivo enunciado. Após a implementação da tarefa foram recolhidos os enunciados com as respostas dadas pelos alunos, o testemunho oral e uma pequena reflexão dos professores que a aplicaram. Estes dados foram, posteriormente, analisados procurando sobretudo categorizar as estratégias utilizadas pelos alunos, mas também identificar as aprendizagens efetuadas. É essa análise que partilhamos de seguida.

Consideradas as múltiplas estratégias utilizadas pelos alunos, expostas nas suas respostas, a propósito das questões colocadas, optamos por agrupá-las de acordo com a operação matemática utilizada, quando esta foi evidenciada. Essas estratégias estão relacionadas com a representação mental que os alunos fazem das situações apresentadas podendo corresponder a estádios de desenvolvimento diferenciado. Assim, apresentamo-las seguindo uma lógica que definimos como das menos elaboradas, em termos de desenvolvimento do raciocínio e da linguagem matemática, para as que revelam um maior domínio nesta área, sendo a sua eficiência também ponderada.

O recurso à representação icónica associada a uma operação, nomeadamente a multiplicação (mas também a divisão), foi a estratégia utilizada por mais de 50% dos alunos participantes. A observação das respostas categorizadas neste grupo faz-nos acreditar na ideia de que estes utilizaram as operações como um reforço da explicitação da solução/resposta encontrada (figura 1) e não como a primeira estratégia. Parece ser necessário primeiro *concretizar* a viabilidade da solução recorrendo ao desenho para depois de *visualizada* a possibilidade ensaiada, confirmar com a operação.

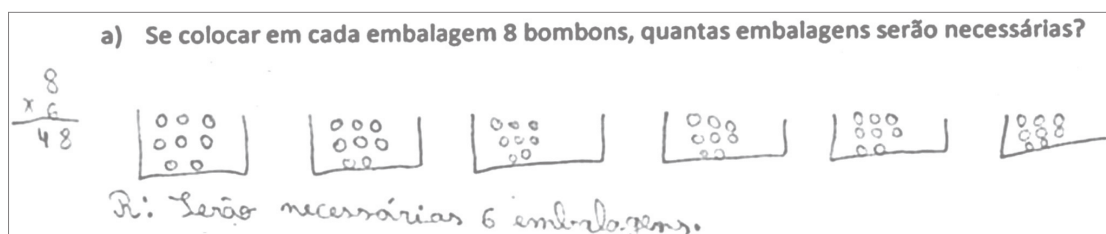
Um grupo reduzido de alunos (menos de uma dezena) usou a adição como estratégia para comunicar a solução encontrada para a questão 1. A maioria desses alunos apresentou uma adição correta, de parcelas iguais, tipo: “ $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48$ ” para justificar o seu raciocínio. A mesma estratégia foi utilizada como solução da questão 2 da tarefa, como podemos observar na figura 2.



O recurso ao raciocínio aditivo é uma das etapas iniciais aquando da exploração do sentido da operação da multiplicação, pelo que consideramos estarmos na presença de uma estratégia de resolução de nível inicial, tal como no recurso à representação icónica.

Uma estratégia largamente utilizada para responder às questões colocadas foi o recurso ao raciocínio multiplicativo. Enquanto o raciocínio aditivo envolve grandezas de um mesmo universo, o multiplicativo envolve duas grandezas de naturezas distintas, sendo mais complexo neste sentido. A existência de uma relação fixa entre duas variáveis é a essência deste raciocínio, no sentido em que a situação multiplicativa envolve duas quantidades em relação constante entre si.

Relativamente à questão: *Será possível guardar os bombons em 5 embalagens. Justifica a tua resposta?* a quase totalidade (mais de 95%) dos alunos conseguiu apresentar uma justificação plausível manifestando ter compreendido o enunciado. Os



34

exemplos seguintes parecem-nos ilustrativos: “Não, porque ficam duas embalagens com um a menos.”; “Não, porque sobram bombons.” ou “Não, porque sobram 3 bombons.”

b) E se for em 4 embalagens?

$4 \times 1 = 4$ $4 \times 7 = 28$ R: Serão necessárias 12 embalagens.
 $4 \times 2 = 8$ $4 \times 8 = 32$
 $4 \times 3 = 12$ $4 \times 9 = 36$
 $4 \times 4 = 16$ $4 \times 10 = 40$
 $4 \times 5 = 20$ $4 \times 11 = 44$
 $4 \times 6 = 24$ $4 \times 12 = 48$

Figura 3. Resolução produzida com recurso à construção da tabuada

Alguns alunos utilizaram a palavra *tabuada* ou *multiplicação*, ou mesmo o seu registo, para a justificação, como podemos observar na figura 4.

$5 \times 8 = 40$
 $5 \times 9 = 45$
 $5 \times 10 = 50$
 R: Não porque na tabuada 5 não existe o número 48.

Figura 4. Resolução produzida com recurso à tabuada

De entre os alunos que usaram esta estratégia, um subgrupo indicia ainda ter compreendido que a divisão teria de ser exata, expressando o seu pensamento de modo explícito: “Não, porque o resto não foi zero.”

O recurso à multiplicação foi igualmente utilizado por um grupo de alunos mais restrito que demonstrou possuir um conhecimento muito claro do conceito de divisores e de que estes se podem encontrar aos pares, tornando explícita essa justificação. A comunicação matemática utilizada nas suas respostas explicita o que o recurso à multiplicação significou na sua estratégia de descoberta dos divisores: “A possibilidade que eu arranjei foi meter em 2 embalagens com 24 bombons cada uma, porque $2 \times 24 = 48$. Encontrei 2 divisores: 2, 24. A possibilidade que eu arranjei foi meter em 1 embalagem com 48 bombons cada uma, porque $1 \times 48 = 48$. Encontrei 2 divisores: 1, 48.” Esta comunicação foi repetida para as restantes possibilidades encontradas.

Divisão

Um outro grupo representativo de alunos (cerca de 25%) recorreu ao raciocínio partitivo para encontrar os divisores, revelando competência para coordenar relações entre duas variáveis. A figura 5 mostra-nos que estes alunos realizaram uma sequência de divisões tendo compreendido ser necessário que a divisão tivesse resto zero para que o divisor pudesse ser considerado como possibilidade de resposta.

Consideramos o raciocínio multiplicativo/partitivo, exposto nos últimos exemplos, mais desenvolvido e eficiente quando comparado com as estratégias iniciais apresentadas, pois evidenciam a relação estreita encontrada entre divisão e multiplicação para a descoberta dos divisores de um número.

Em termos de desenvolvimento das capacidades matemáticas, compreender este raciocínio recorrendo, como no caso presente, quer à multiplicação, quer à divisão, estabelecendo uma relação

entre as duas, envolve complexidade a nível cognitivo, sobretudo se pensarmos não apenas nas questões de cálculo, mas também em termos de modelação “dado que envolvem novos significados para os números e novos tipos de relações entre eles” (Carvalho & Gonçalves, 2003, p. 24).

Procura arranjar uma estratégia de modo a registar todas essas possibilidades.

$48 : 1 = 48 (r: 0)$ $48 \overline{) 1 \times}$ $48 \overline{) 2 \times}$ $48 \overline{) 3 \times}$
 $48 : 2 = 24 (r: 0)$ $\begin{array}{r} -4 \quad 48 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -4 \quad 24 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -3 \quad 16 \\ \hline 0 \end{array}$
 $48 : 3 = 16 (r: 0)$ $\begin{array}{r} -0 \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -0 \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -1 \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$
 $48 : 6 = 8 (r: 0)$ $\begin{array}{r} -0 \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -0 \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -1 \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$
 $48 : 7 = 6 (r: 6)$ $\begin{array}{r} -0 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -0 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -1 \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$
 $48 : 9 = 5 (r: 3)$ $\begin{array}{r} -0 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -0 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} -1 \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$
 $48 : 48 = 1 (r: 0)$

As possibilidades são 1, 48, 2, 24, 3, 16.
 Os divisores são 1, 2, 3, 16, 24 e 48.

Figura 5. Resolução produzida com recurso à divisão (questão 1d)

Tabela de dupla entrada

Por último, em 4 das 9 turmas, um grupo de alunos (cerca de 20%) utilizou a tabela como estratégia instrumental para encontrar as várias possibilidades. Subjacente à sua construção está o recurso às operações da multiplicação ou divisão (figura 6). Nos exemplos seguintes observamos que os alunos inscreveram na tabela várias hipóteses e testaram a possibilidade de ser divisor, usando um X para assinalar a *não possibilidade*, evidenciando um raciocínio mais estruturado.

Questão 2)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	60
	60	30	20	15	12	16	X	X	X	6	5	4	3	2	1

Figura 6. Resolução produzida com recurso à tabela de duas entradas

No caso exemplificado pela figura 7 estão incluídos os *pares de divisores*, tornando claro que, por exemplo, o *valor 1* pode referir-se quer ao número de bombons, quer ao de embalagens, o que também já se verificou no exemplo anterior.

Estes alunos acrescentaram à tabela uma linha para inserir o total (correspondente à multiplicação da primeira linha pela segunda linha) demonstrando a veracidade de cada hipótese registada.

R: as possibilidades foram: 1, 48, 2, 24, 3 e 16.

bombons	48	24	16	12	8	6	2	3	1
embalagens	1	2	3	4	6	8	24	16	48
total	48	48	48	48	48	48	48	48	48

Figura 7. Resolução produzida com recurso à tabela de duas entradas (questão 1d)

Aprendizagens evidenciadas pelos alunos

O reconhecimento de que os divisores (as hipóteses) podiam ser encontrados aos pares foi evidente nos registos produzidos.

As respostas apresentam as hipóteses agrupadas aos pares para todos os casos encontrados, como evidenciam as resoluções apresentadas na figura 8.

Divisores de 20 são: 1 2 4 5 10 20
Divisores de 40 são: 1 2 4 5 8 10 20 40

Figura 8. Resolução produzida - registo dos divisores aos pares

De acordo com enunciados escritos dos alunos, e os registos dos docentes envolvidos, em metade das turmas, observou-se uma dificuldade inicial em conceber a possibilidade do 1 como divisor, bem como a do próprio número enquanto divisor de si próprio. Estas não foram hipóteses imediatas para muitos dos alunos. Os momentos de diálogo coletivo foram fundamentais no sentido de permitirem uma reorientação dos alunos para o trabalho a desenvolver e no esclarecimento de dúvidas que persistiam. Permitiram igualmente garantir que os alunos pudessem, a partir da comunicação e justificação das estratégias seguidas, ter a possibilidade de ver os conhecimentos matemáticos surgir com significado e sistematizar conhecimentos. As sínteses produzidas no final da tarefa contribuíram para a uma melhor clarificação dos conceitos trabalhados, momento considerado essencial nesta faixa etária.

Relativamente às conclusões encontradas após a discussão coletiva, os exemplos seguintes ilustram algumas das sínteses feitas e corroboram a convicção de que os objetivos definidos para a tarefa terão sido globalmente alcançados.

a) “Os números que podemos usar para dividir outros números e não sobrar nada damos o nome de divisor.”; b) “Os divisores de um número são todos os números que multiplicados entre si, são o próprio resultado.”; c) “Em cada possibilidade descobrimos sempre um par de divisores.” Ao longo da tarefa procurou-se que os alunos fossem construtores do seu próprio conhecimento, pois como refere Ponte (2003) “Aprender resulta sobretudo de fazer e de refletir sobre esse fazer. (...) Criar as condições para que isso aconteça, desafiando os alunos e diversificando as situações de aprendizagem, é responsabilidade do professor” (p. 16).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Da análise dos dados emergem algumas considerações que põem em evidência a necessidade de desenvolver, o quanto antes, estratégias de ensino centradas nos processos e estilos de aprendizagem, tendo por base o currículo, de modo a promover aprendizagens mais significativas e participadas dos alunos. Ainda que globalmente os alunos tivessem conseguido identificar os divisores de um número natural, dar exemplos de divisores e compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e vice-versa), foi evidente, na maioria dos alunos, o recurso a estratégias de resolução que implicavam a mobilização de processos cognitivos menos complexos, nomeadamente a representação icónica, como estratégia de resolução dos desafios propostos, traduzindo-se na estratégia menos eficiente para a descoberta dos divisores.

O recurso à multiplicação e à divisão foram as estratégias utilizadas por um grupo representativo de alunos, mas também aqui os dados evidenciaram diferentes níveis de compreensão do conceito de divisores e de que estes se podem encontrar aos pares. Estas estratégias revelaram-se mais facilitadoras da descoberta dos divisores, portanto mais eficientes do que as anteriores, e evidenciam um raciocínio mais complexo a nível cognitivo. Contudo, a estratégia explicitada que se revelou mais eficiente na descoberta dos divisores de um número - a tabela de duas entradas -, foi apresentada por uma baixa percentagem de alunos corroborando a ideia de que o ensino e a aprendizagem dos divisores de um número natural no 1.º ciclo do ensino básico é uma tarefa complexa, e por vezes difícil.

Salientamos a importância de o docente saber interpretar e compreender os processos de raciocínio dos alunos de modo a planificar e estruturar tarefas que se aproximem do estágio de desenvolvimento dos seus alunos, ao mesmo tempo que os ajuda a progredir no desenvolvimento dos conceitos.

Por último reforçar o postulado da necessidade de dar relevância aos momentos de discussão coletiva. Estimular e valorizar os raciocínios dos alunos procurando que estes os explicitem com a clareza que a sua idade permite e potenciar momentos para reagir e refletir sobre os raciocínios apresentados pelos colegas é algo que o docente deve colocar no centro da sua ação pedagógica. Por sua vez, ao tornar-se mais próximo e conhecedor do processo de aprendizagem do aluno, o docente otimiza a eficácia das estratégias de ensino e contribui para a qualidade do sucesso educativo dos alunos.

Referências

- ME (2017). Aprendizagens Essenciais. Lisboa: Ministério da Educação, DGE.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11–17.
- Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In Canavarro, P., Santos, L., Boavida, A., Oliveira, H., Menezes, L., & Carreira, S. (Eds), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática* (pp.255–266). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Carvalho, A., & Gonçalves, H. (2003). Multiplicação e divisão: conceitos em construção*Educação e Matemática*, 25, 23–25.
- Ponte, J. P. (2003). O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In Conselho Nacional de Educação, *O Ensino da Matemática: Situação e Perspetivas*, 21–56. Obtido em 2019, de <http://www.cnedu.pt/pt/publicacoes/seminarios-e-coloquios/762-o-ensino-da-matematica-situacao-e-perspetivas>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34): Lisboa: APM.
- Ponte, J. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática, In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 13–77). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

FÁTIMA ALEXANDRINO

GORETE FONSECA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DA LOURINHÃ

Promover a aprendizagem das STEM através de uma aplicação de realidade aumentada

INTRODUÇÃO E ENQUADRAMENTO - ACADEMIA DA CIÊNCIA, ARTE E PATRIMÓNIO

A Academia da Ciência, Arte e Património (AcademiaCAP) foi criada em 2013 e está integrada nas Unidades de Formação do Instituto Politécnico de Tomar (IPT). Um dos principais objetivos da AcademiaCAP (www.facebook.com/academiacap) é o de desenvolver competências consideradas essenciais para o século XXI, tais como criatividade, competência colaborativa, resolução de problemas e pensamento crítico, as quais estão relacionadas com conhecimentos na área das STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics). A aquisição de conhecimentos e competências na área das STEAM é considerada crucial, pela comunidade internacional, para fazer face aos desafios cada vez mais exigentes e complexos das sociedades modernas e para contribuir para o desenvolvimento científico e económico das nações. Neste sentido, a AcademiaCAP centra a sua atuação no estabelecimento de uma visão construtivista do conhecimento, oferecendo à população mais jovem, um conjunto de atividades que permitem construir o conhecimento científico numa perspetiva experimental, que inclui a manipulação de materiais concretos e a realização de atividades sobre as quais os participantes possam observar, questionar, refletir e construir, discutindo os resultados com vista à aprendizagem.

No âmbito dos objetivos da AcademiaCAP são promovidas diversas iniciativas, entre elas, dinamização de sessões com crianças e jovens nos laboratórios do IPT nas suas férias escolares e diversos workshops na área das STEAM em colaboração com entidades externas tais como Centros de Formação, Câmaras e Bibliotecas Municipais, entre outras. Além disso, também são realizadas visitas às escolas do ensino básico, para realizar atividades práticas hands-on, que vão de encontro aos conteúdos programáticos deste nível de ensino, em colaboração com os respetivos professores titulares das turmas. Desde 2015 que são promovidas ações de formação acreditadas interdisciplinares relacionadas com as STEAM, destinadas aos professores dos três ciclos do ensino básico em parceria com o Centro de Formação “Os Templários” e aprovadas pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua (Costa, 2017). A AcademiaCAP conta, ainda, com alunos finalistas de licenciatura e de mestrado (e.g., Engenharia Informática e Engenharia Eletrotécnica e de Computadores) que criam e desenvolvem protótipos e artefactos, no âmbito do seu projeto de final de curso, para serem usados nas atividades da AcademiaCAP incluindo a formação de professores. Neste contexto, vários recursos como

por exemplo jogos tais como o Sonicpaper (Ferreira, Neves, Costa, & Teramo, 2017), SolarSystemGO (Costa, Patrício, Carranço, & Farropo, 2018) e PlanetarySystemGO (Costa, Manso, & Patrício, 2020), entre outros, foram desenvolvidos neste âmbito e estão a ser implementados nas escolas. Para a realização destes projetos é usada uma metodologia de Problem-based learning, a qual é recomendada em cursos de engenharia por contribuir para o desenvolvimento de competências do século XXI. Trata-se, assim, de um trabalho colaborativo entre o IPT e a comunidade envolvente, o qual resulta em benefícios para todos os intervenientes.

Neste artigo, apresenta-se uma abordagem integradora da educação STEM através de uma aplicação de realidade aumentada que está integrada num sistema de informação intitulado PlanetarySystemGO que tem vindo a ser desenvolvido por alunos do curso de engenharia informática do IPT, no âmbito dos seus projetos finais de licenciatura.

MODELAÇÃO DO SISTEMA SOLAR

Conteúdos relacionados com o Sistema Solar estão incluídos no currículo escolar desde o primeiro ciclo do ensino básico. A maioria das propostas de modelação do Sistema Solar não estão à escala e são estáticas, o que não corresponde à realidade uma vez que os planetas têm o movimento de translação com diferentes velocidades à volta do Sol e, ainda, o movimento de rotação em torno do próprio eixo. Um exemplo de uma versão estática com as órbitas dos planetas à escala (considerando o Sol com 1m de diâmetro) foi realizada colocando o Sol no campus do IPT (39°36'02.4"N 8°23'27.9"W) e simulando a posição dos planetas no mapa da cidade de acordo com o seu raio orbital. A tabela 1 apresenta o diâmetro dos planetas e o respetivo raio orbital médio em torno do Sol com várias dimensões: dimensão real do diâmetro do Sol em km, com o tamanho de uma bola de ténis (cerca de 67 mm) e com 1 metro de diâmetro.

O Sol com 1m de diâmetro foi construído por engenheiros civis do IPT e os planetas foram modelados em argila por crianças durante sua participação na edição de férias da Páscoa 2016 da AcademiaCAP no campus do IPT (figura 1).

Após a construção dos planetas, foram escolhidas diferentes localizações estratégicas conhecidas pelos cidadãos da cidade de Tomar para posicionar os planetas de acordo com a sua distância ao Sol, de acordo com os valores indicados na tabela 1. Nesta modelação, os quatro primeiros planetas ficam localizados no campus do IPT (figura 2).

Tabela 1. Diâmetro do Sol e dos planetas com o respetivo raio orbital médio.

Sistema Solar	Sol com dimensões reais (km)		Tamanho de uma bola de ténis		Diametro do Sol com 1 m=1000 mm	
	Diametro	Raio orbital (Km)	Diametro (mm)	Raio orbital (m)	Diametro (mm)	Raio orbital (m)
Sol	1391900		67 mm		1000 mm	
Mercúrio	4866	57950000	0,234228034	2,78946045	3,4959408	41,63373806
Vénus	12106	108110000	0,582730081	5,203944249	8,697463898	77,67080968
Terra	12742	149570000	0,613344349	7,199647963	9,154393275	107,4574323
Marte	6760	227840000	0,325396939	10,96722466	4,856670738	163,6899203
Júpiter	142984	778140000	6,882626625	37,45626841	102,7257705	559,0487822
Saturnos	116438	1427000000	5,604817875	68,68956103	83,65399813	1025,217329
Urano	46940	2870300000	2,259487032	138,163733	33,72368705	2062,145269
Neptuno	45432	4499900000	2,18698484	216,6055751	32,64027588	3232,919032

No contexto do programa de desenvolvimento profissional de professores, estes são incentivados a implementar esta modelação nas suas escolas, colocando o Sol e os planetas no seu município. Também propomos discutir outras escalas, por exemplo considerando o Sol com meio metro de diâmetro ou do tamanho de uma bola de basquete ou ténis (tabela 1). Para cada caso, os professores podem reproduzir a mesma atividade desenvolvendo tarefas matemáticas e discutindo o tamanho dos planetas e onde eles podem ser colocados no mapa do seu município em locais conhecidos pelos alunos da respetiva turma. Contudo, esta é uma versão estática que não representa o movimento real dos planetas em torno do Sol com diferentes velocidades. Por este motivo, entendeu-se recorrer a aplicações de realidade aumentada para se obter uma ideia mais aproximada

do nosso Sistema Solar através de um jogo dinâmico e interativo que de uma forma lúdica também promovesse a aprendizagem dos alunos. Para além de introduzir conhecimentos sobre os movimentos dos planetas, um dos principais objetivos também é o de os alunos adquirirem a noção da dimensão do Sistema Solar trabalhando diferentes escalas com os alunos de forma a compreenderem onde cada planeta estará localizado de acordo com a escala escolhida.

PLANETARYSYSTEMGO – PROMOVER A APRENDIZAGEM SOBRE O UNIVERSO

O PlanetarySystemGO é um sistema de informação que é constituído por várias componentes: uma aplicação de realidade aumentada, uma aplicação web e um back-office. A aplicação de



Figura 1. O Sol com um metro de diâmetro e os planetas construídos com argila pelas crianças

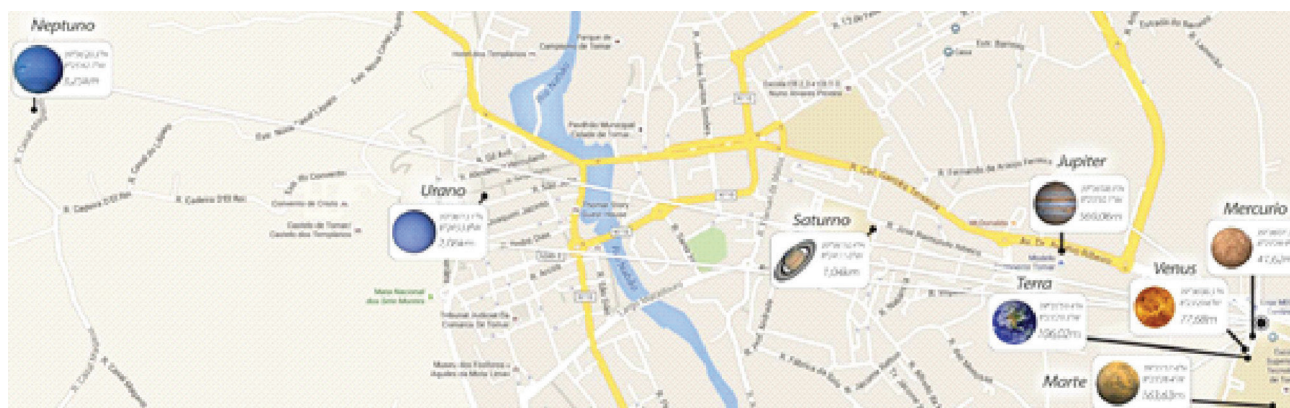


Figura 2. Modelação do Sistema Solar no município de Tomar

realidade aumentada pode ser usada em telemóveis ou tablets que tenham câmara, Global Position System (GPS), giroscópio e acelerómetro. Os jogadores precisam de andar no mundo real para encontrarem objetos virtuais que consistem em órbitas e corpos celestes tais como planetas de sistemas planetários. Antes de iniciar o jogo, deve ser selecionada uma escala que corresponde ao raio orbital do último planeta que no caso do nosso Sistema Solar corresponde ao Neptuno (figura 3). Quando o jogo se inicia, a posição do jogador no mundo real representa o Sol no mundo virtual. Após capturar o Sol aparece uma questão sobre o mesmo com 4 opções de resposta.



Figura 3. Quatro opções de escala: 50 m, 100 m, 500 m ou 1000 m.

De seguida, o objetivo é “viajar” pelo Sistema Solar de forma a encontrar as órbitas e os respetivos planetas. Quando cada planeta é capturado aparece uma questão de escolha múltipla e se o jogador tocar no planeta aparece informação sobre as características do mesmo.

O jogador ganha pontos quando encontra a órbita, o planeta ou responde corretamente às perguntas sobre os corpos celestes. A figura 4 apresenta algumas sequências do jogo no caso em que o sistema planetário é o nosso Sistema Solar. Nesta sequência, o jogador acumulou 37 pontos. As órbitas depois de encontradas passam de amarelo a verde e após responder corretamente à questão o planeta fica identificado com uma bandeira que contém o logótipo da AcademiaCAP.

Este jogo de realidade aumentada tem vindo a ser implementado nas escolas do 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB) tendo-se revelado muito eficaz para promover o interesse dos alunos pela aprendizagem sobre o Sistema Solar. Os professores titulares das turmas onde o jogo foi implementado também consideraram que este era adequado e que esta era uma forma mais eficaz de ensinar os alunos sobre estes conteúdos de uma forma muito mais motivadora.

Quanto à aplicação web, esta pode ser usada pelos professores na sala de aula sem haver necessidade de ir para o exterior como acontece com a aplicação móvel que precisa de GPS. A aplicação web permite simular a modelação do Sistema Solar num mapa

com informações georreferenciadas, sendo possível visualizar os corpos celestes (que se encontram em movimento) com diferentes níveis de detalhe através de um menu e manipular o zoom do mapa (figura 5). Para mais detalhes sobre esta aplicação, o leitor poderá consultar Costa et al. (2020). Em situações de confinamento como a resultante da pandemia Covid 19, os professores podem ainda usar esta aplicação online e fazer partilhas de écran de modo a ensinar os conteúdos aos alunos.

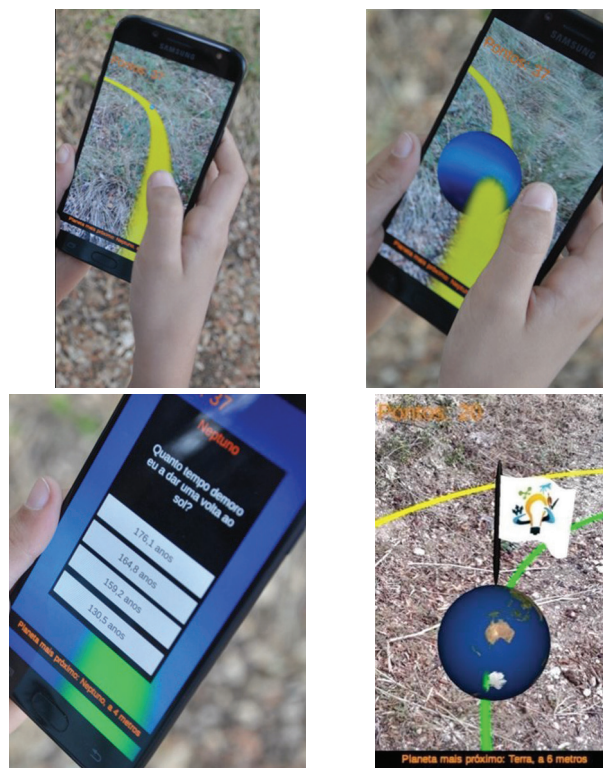


Figura 4. Sequências do jogo: encontrar a órbita, capturar o planeta e responder à questão.

Finalmente, através do back-office (figura 5) os professores podem introduzir informação sobre os corpos celestes e as questões de escolha múltipla que considerarem adequadas para os seus alunos responderem. A informação introduzida pelos professores no back-office é a mesma que vai aparecer na aplicação móvel e também na aplicação web, de acordo com os níveis de ensino que leciona. Mais ainda, o professor pode implementar estas aplicações selecionando outros sistemas planetários do Universo que entenda explorar com os seus alunos.

Além de poderem editar e inserir informação e / ou questões com as respetivas respostas, os professores têm acesso à informação que o back-office recolhe sobre o jogo de realidade aumentada, nomeadamente sobre a pontuação obtida por cada jogador e quais as questões em que acertou ou falhou podendo assim aferir sobre a aprendizagem dos alunos. A figura 7 mostra os gráficos que resultaram de uma implementação do jogo que decorreu numa escola do 1.º CEB, onde a aplicação foi jogada com 5 equipas, tendo cada equipa usado um telemóvel.

Planetas do Sistema Solar

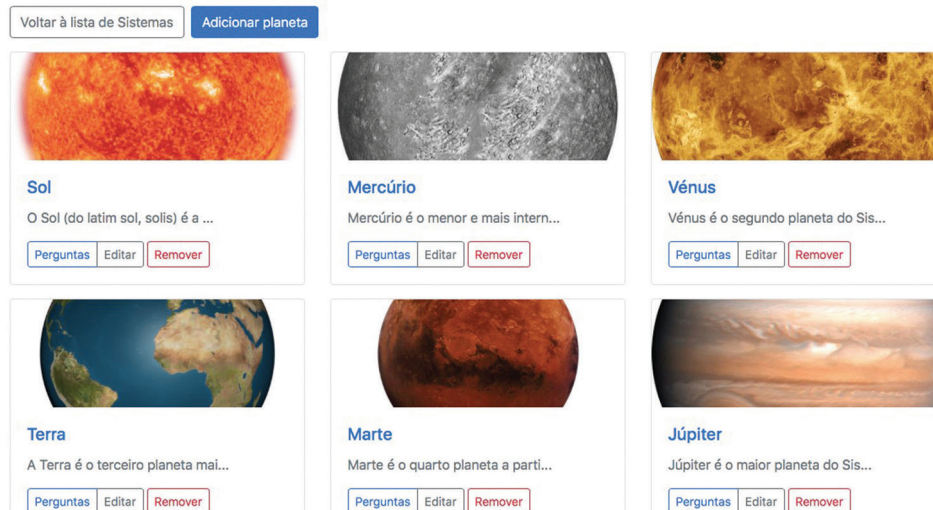


Figura 5. Back-office - Parte do repositório que inclui o Sistema Solar.

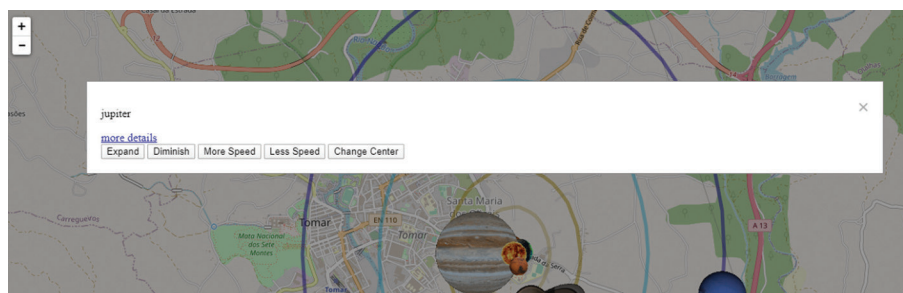


Figura 6. Interação com o Sistema Solar sobre um mapa.

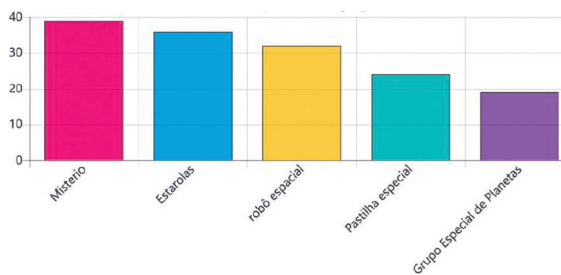


Figura 7. Resultados das equipas obtidos a partir do back-office

Como se pode observar na figura, a equipa vencedora (Mistério) ganhou 39 pontos e a equipa pior classificada (Grupo especial planetas) obteve 19 pontos.

Quer através da aplicação móvel quer através da aplicação web que interagem com o back-office, o PlanetarySystemGO é um sistema de informação que permite introduzir conteúdos, por exemplo sobre o Sistema Solar, de modo a motivar a aprendizagem de uma forma interdisciplinar. Os professores podem introduzir os conteúdos que entenderem através do back-office e as aplicações irão decorrer de acordo com a informação introduzida pelos professores. Desta forma, o jogo pode ser adaptado a qualquer nível de ensino. Atualmente, a equipa de desenvolvimento do PlanetarySystemGO está a desenvolver parcerias para implementar o jogo em novos ciclos para além do 1.º CEB, pelo que os interessados em participar podem enviar email para o contato deste artigo de forma a se articular possíveis parcerias.

Referências

- Costa, M. C. (2017) *Matemática, ciências e tecnologia: um projeto de intervenção pedagógica colaborativo e multidisciplinar*. Disponível em: <http://cftemplarios.com/index.php/publicacoes1/261-matematica-ciencias-e-tecnologia-um-projeto-de-intervencao-pedagogica-colaborativo-e-multidisciplinar>.
- Costa, M. C., Manso, A., & Patrício, J. M. (2020). Design of a mobile augmented reality platform with game-based learning purposes. *Information*, 11(3), 127.
- Costa, M. C., Manso, A., Santos, P., Simões, H., & Marçal, V. (2020). Modelling the solar system: innovative resources in a digital era. In *12th Annual International Conference on Education and New Learning Technologies (EDULEARN20)*. IATED, 6 a 7 de julho de 2020, Palma de Maiorca, Espanha. In Press.
- Costa, M. C., Patrício, J. M., Carrança, J. A. & Farropo, B. (2018). Augmented reality technologies to promote STEM learning. In *Information Systems and Technologies (CISTI)*, 2018 13th Iberian Conference on (pp. 1-5). IEEE.
- Ferreira, C., Neves, P., Costa, C., & Teramo, D. (2017, June). Socio-constructivist teaching powered by ICT in the STEM areas for primary school. In *Information Systems and Technologies (CISTI)*, 2017 12th Iberian Conference on (pp. 1-5). IEEE.

MARIA CRISTINA COSTA

ANTÓNIO MANSO

PAULO SANTOS

FRANCISCO MONTEIRO

INSTITUTO POLITÉCNICO DE TOMAR

TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

António Domingos

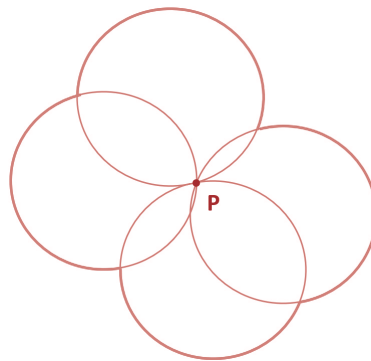
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Um “polígono” curvo

Quatro circunferências, cada uma de raio 5 centímetros, passam todas por um ponto P, interior à figura por elas definida.

Qual é o perímetro desta figura?

(Respostas até 13 de setembro, para
zepaulo46@gmail.com)



SOL E SOMBRA (e um pouco de astronomia)

O número 154 de *Educação e Matemática* teve como tema a *Interdisciplinaridade*. Por isso, com o objetivo de ligar a matemática com a astronomia e com a geografia, propusemos este problema:

O Alberto foi passar estas últimas férias de verão a Cabo Verde. No centro da grande praça, em frente ao hotel da Cidade da Praia onde se alojou, havia um enorme poste com a bandeira daquele país.

Num dos dias, o Alberto reparou que, num certo momento, o poste não fazia qualquer sombra.

Duas horas depois a sombra do poste media 6,73 metros.

Qual foi o comprimento da sombra passadas mais duas horas?

Pergunta adicional: Consegues descobrir em que dia isto pode ter acontecido?

O grau de dificuldade deve ter sido maior que o habitual porque apenas recebemos três resoluções, enviadas por Alice Martins (Torres Novas), Mário Roque (Guimarães) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha). Todos responderam à primeira questão, mas só a Alice, com a ajuda de Máximo Ferreira, se aventurou pela pergunta adicional.

Primeira pergunta

No seu movimento aparente, o sol descreve uma circunferência (360°) em 24 horas, ou seja, 15° por hora.

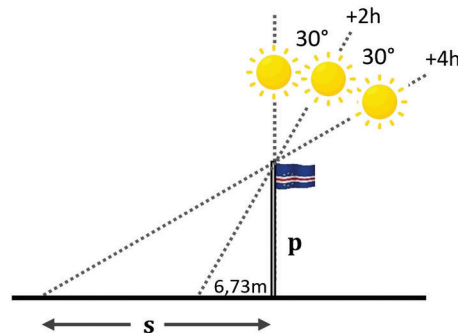
Se, num certo momento, o poste não fazia sombra, é porque o sol estava na vertical (meio-dia solar). Duas horas depois tinha avançado 30° e mais 30° passadas outras duas horas. Façamos um esquema, em que é a altura do poste e o comprimento da sua sombra à hora 4.

Temos então, considerando o triângulo formado no momento +2h,

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{6,73}{p} \Leftrightarrow p = \frac{6,73}{\operatorname{tg} 30^{\circ}} \Leftrightarrow p \approx 11,657 \text{ m}$$

No momento +4h, o Sol rodou 60°, pelo que o comprimento da sombra se poderá obter do seguinte modo:

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{s}{11,657} \Leftrightarrow p = \operatorname{tg} 60^{\circ} \times 11,657 \Leftrightarrow s \approx 20,19 \text{ m}$$

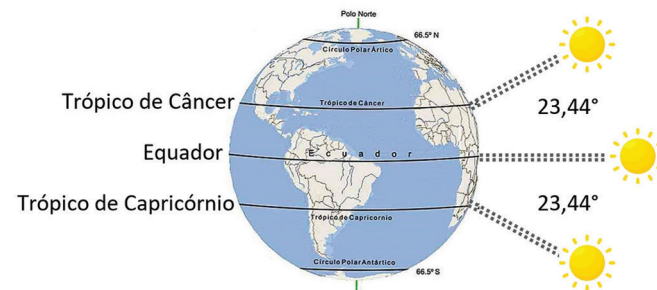


A sombra é exatamente o triplo do que era duas horas antes.

Pergunta adicional

Agora é preciso recordar conhecimentos anteriores e fazer alguma pesquisa.

O eixo de rotação da Terra não é perpendicular ao plano em que a Terra está quando roda em torno do Sol. Por isso, ao longo do ano, o Sol só está no plano do equador em dois dias, nos equinócios da Primavera (20 ou 21 de março) e Outono (22 ou 23 de setembro). Desloca-se 23,44° para norte até ao Trópico de Câncer (que atinge no solstício de verão, a 21 ou 22 de junho) e 23,44° para sul até ao Trópico de Capricórnio (onde chega no solstício de inverno, a 21 ou 22 de dezembro).



Procurando na internet, ficamos a saber que a latitude da Cidade da Praia é 14° 55' 53" N ≈ 14,92°N.

Chama-se declinação do sol ao ângulo que os raios solares fazem com o plano do equador (esta definição não é rigorosa mas serve perfeitamente para efeitos práticos). Assim, o sol estará “a pique” na Cidade da Praia no dia em que a declinação coincidir

com a sua latitude. Entre março e setembro, o sol estará então duas vezes na vertical desta cidade.

A variação da declinação L ao longo do ano é uma função sinusoidal, de período um ano (365 dias) e contradomínio $[-23,44; 23,44]$

$$L(t) = 23,44 \times \sin\left(\frac{360t}{365}\right)$$

com t em dias a contar do equinócio da primavera.

Resolvendo a equação $L(t)=14,92$, vem $t=40,1$ ou $t=142,4$.

Estes valores correspondem aos dias 29 de abril e 12 de agosto.

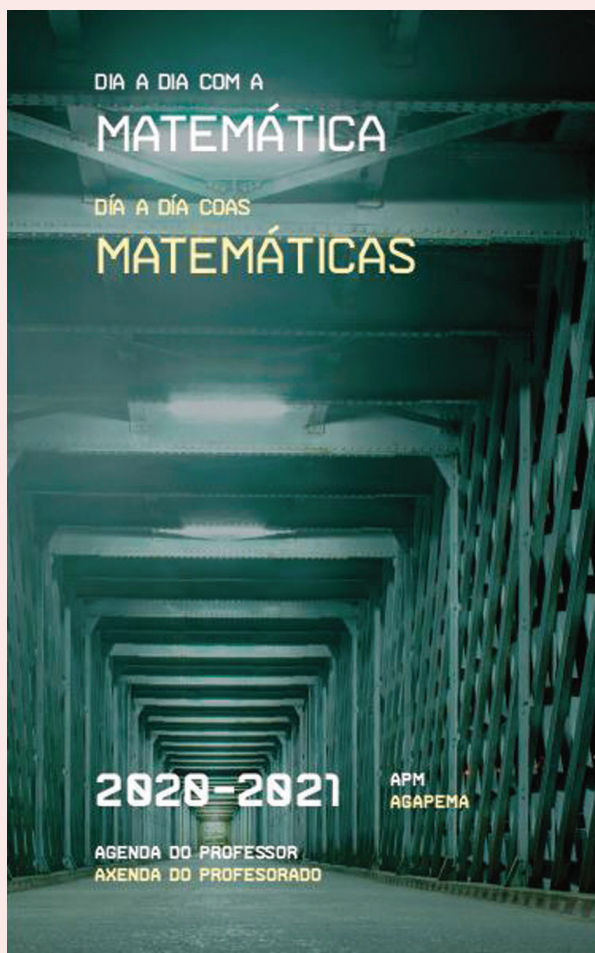
Como tudo se passou nas férias de verão, a resposta é 12 de agosto de 2019.

Outro processo é usar sítios da internet que permitam chegar à resposta. Um deles é o da Associação Nacional de Cruzeiros (<https://www.ancruzeiros.pt/ancdrp/declinação-do-sol>). Aí encontramos a fórmula da declinação e, no fim da página, podemos confirmar que foi no dia 12/08/2019 que a declinação do sol coincidiu com a latitude da Praia.

Máximo Ferreira indicou o *Stellarium* (<https://stellarium.org/pt/>), que tem “tudo” para quem goste de astronomia.

PUBLICIDADE APM

Dia a dia com a Matemática Día a día coas Matemáticas



Um novo ano letivo vai começar. Para ele preparamos uma agenda bilingue a partir de um concurso de resolução de problemas que a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA), têm vindo a organizar desde há 6 anos letivos.

Matemáticas na Raia é o nome desse concurso anual, dirigido a turmas do 9.º ano da Região Norte de Portugal e do 3.º ESO da Galiza. As turmas inscritas realizam uma prova, que consiste em resolver, em hora e meia, cinco problemas. A prova tem lugar no mesmo dia, à mesma hora e com o mesmo enunciado, bilingue, na Galiza e em Portugal. A partir desta prova, é selecionada uma turma vencedora em cada país, sendo o prémio um fim de semana na Galiza ou no Norte de Portugal, em anos alternados. Durante o fim de semana, os alunos participam em atividades diversificadas, de carácter lúdico e matemático, organizados em equipas mistas. Assim, ao longo de 2020/21, as páginas desta agenda dão a conhecer um pouco do que tem sido esta dinâmica.

Sugerimos a todos os colegas que lecionem em turmas que possam participar no concurso, que o façam mesmo. Só a experiência de ver os alunos empenhados na resolução dos problemas em grupo, as discussões que organizam para melhorar e adequar a resolução, valem por si.

Desejamos a todos um bom ano letivo 2020/2021, ainda que porventura vivido num clima de incerteza e de mudança. Acima de tudo, que seja um ano com saúde e boas descobertas.

Preço de sócio: 6,00€

Preço de venda ao público: 7,00€

Disponível na loja e na loja online (www.apm.pt)
ou por encomenda para encomenda@apm.pt

O que pensam os alunos sobre E@D

Perguntámos a 25 estudantes, distribuídos pelo ensino básico e secundário, o que pensam da experiência forçada em que todos e todas fomos parar a partir de 13 de março fruto da pandemia do Covid-19.

Este grupo de alunos começou o ensino à distância a 17 de março, através da plataforma **Discord**, parando assim um só dia. Mais à frente, no início do terceiro período, o trabalho continuou através da plataforma **Teams**. Os estudantes, responderam a este inquérito quando ainda estavam todos em ensino à distância. Parte deles, regressaram a 18 de maio às aulas presenciais por serem alunos de 12º ano. Outros continuaram à distância por serem alunos de 9º ano.

Assim, quisemos saber como se sentiram com estas decisões, se alguma vez tinham tido experiência de ensino à distância e se estariam à espera de não haver interrupção entre a paragem das aulas presenciais e o início das aulas à distância.

Em relação ao ensino à distância, perguntámos o que funcionou, que dificuldades sentiram, o que tinha de melhor, o que não gostaram. Insistimos ainda em perceber os pontos fortes e os menos bons nos dois tipos de ensino.

Ainda questionámos sobre as aprendizagens, perguntando-lhes como consideram que se apropriaram de novos conteúdos programáticos nestes últimos tempos. Finalmente, já com o regresso às aulas presenciais marcado, perguntámos como encararam esta nova fase.

O QUE NOS RESPONDERAM

Efetivamente, apenas um estudante já tinha tido uma experiência de ensino à distância.

Havia quem acreditasse que o recomeço das aulas, embora à distância, pudesse ser rápido, mas a maioria não esperava encontrar-se com os professores de matemática tão depressa. Ninguém referiu como uma má experiência. Percebemos que

muitos consideraram que correu bem, apesar da resistência que diversos fatores ofereceram. Registámos ideias como: “foi uma experiência diferente; acho que todos, tanto alunos como professores, demos o nosso melhor para que corresse tudo bem; correu melhor do que eu esperava”; “as não presenciais eram algo que desconhecia; no início era um pouco difícil de me concentrar, pois não conseguia ver os professores e os alunos, e porque estava num ambiente diferente, em casa, onde há tanto que se pode fazer; a parte do funcionamento do **Discord**¹ e depois do **Teams** era também um pouco complicada”.

Vários alunos referiram que, para eles, no início tinha sido um pouco estranho pois ainda não estavam habituados, mas que agora já estavam mais orientados. Para além disso, expressaram alguma “ansiedade por parar com as aulas presenciais por não saber o que iria acontecer no futuro”. Destacaram ainda “a tristeza pela ausência do convívio presencial”, revelando “saudades das pessoas e da rotina que tinha”.

Todavia, houve quem identificasse vantagens, afirmando que “desde o início da quarentena até hoje, sinto uma certa ansiedade, nervosismo e insegurança constantes devido às proporções que a COVID-19 tomou, mais concretamente no assunto dos exames nacionais e progressão dos estudos. Ao mesmo tempo, este «tempo extra» acabou por me favorecer no âmbito de que já tenho uma noção mais concreta dos meus planos para o futuro [faculdade].”

Outros que reconheceram aspetos positivos determinantes, explicando que “Apesar de tudo, os meios investidos para a realização das aulas são bastante positivos, já que, potencializaram vários aspetos importantes, como a comunicação, mesmo que não se possa comparar com as aulas presenciais. De qualquer forma, sempre parte da vontade do aluno em aprender. Com efeito, muitos passaram ou passam dificuldades técnicas, seja porque não têm muito contacto seja porque os seus equipamentos não são os melhores para a função.”

O reconhecimento pelo trabalho desenvolvido por todos foi destacado, tendo sido apontado o “esforço e perseverança de todos, professores, alunos, intermediários, que fazem deste ensino à distância, algo melhor do que o que eu próprio esperava. Se colocasse numa escala as aulas presenciais e as aulas por casa, sendo 10 as aulas presenciais, daria 8 às aulas por casa.”

Alguns focaram na comparação do o número de horas das aulas e identificaram como sendo “algo diferente, mas não significa que seja mau de todo. Temos uma carga horária menor, o que no



¹Aplicativo que permite conversar por canais de voz e texto, com a facilidade de se poder passar de uns para os outros rapidamente, permitindo que os alunos trabalhassem em pequenos grupos e os professores acompanhassem facilmente o seu trabalho

caso é um pouco prejudicial para as disciplinas sujeitas a exame nacional. Provavelmente será até mais confortável este método de ensino à distância do que quando voltarmos à escola com todas estas novas medidas de proteção e distanciamento social.»

Outros ainda referiram haver “sempre um ganho de autonomia em relação às tarefas propostas, o estar em casa, proporciona momentos de preguiça e lazer. Assim, a autodisciplina é importante nestes tempos. Sem as aulas presenciais, perde-se várias coisas como: maior facilidade de aprendizagem, tanto no entendimento da matéria como nas dúvidas, maior dificuldade em transmitir a matéria o que liga a uma complicação em entender, também, o conteúdo.”

Na questão sobre se gostaram do ensino à distância, os estudantes foram respondendo, positivamente, que as plataformas funcionavam bem, que era deveras diferente do habitual, mas fê-los sentir bem. Percebemos que consideraram tratar-se de uma experiência impensável, fácil haver monotonia, às vezes aborrecido, mas, outras, preferível às aulas presenciais, todavia sentiam-se aliviados por perceberem que os conteúdos continuavam a ser lecionados. Uma vivência inédita, pois só um dos estudantes inquiridos já usara o *Discord* antes do aparecimento da pandemia, para reuniões familiares à distância. Sobre o que funcionou, o que teve de melhor, as dificuldades que sentiram e o que não gostaram?

Disseram-nos que “tudo funciona: a partilha, a cooperação, a organização, a comunicação, a interatividade, a dinâmica. As aulas são ativas e estimulam a participação, contudo é difícil dar a entender que estamos atentos e concentrados.” Reforçaram “em termos de aprendizagem, que os conhecimentos passam todos para este lado. É possível tirar dúvidas e intervir na aula, o que é muito bom.”

E se, por um lado, “no ensino presencial, podemos estar uns com os outros, conviver. Podemos fazer apresentações orais, trabalhar mais em equipas, fazer trabalhos práticos, utilizarmos o quadro para demonstrarmos o nosso ponto de vista. Mas, as aulas são muitas vezes de duas horas e na segunda, já não estamos com tanta atenção.”

Por outro, “no ensino à distância, não precisamos de acordar tão cedo e podemos estar mais confortáveis. Mas às vezes, nos grupos de trabalhos não existe muita comunicação e debate de ideias e na minha opinião, estamos a avançar menos com a matéria.”

O “não gosto de não poder conviver, de não estar fisicamente numa aula, de não ver a cara dos professores e dos meus colegas, não gosto de estar sempre ao computador, de os dias parecerem sempre iguais, do que não se pode controlar com falhas técnicas, da sobrecarga de trabalhos” é, sobretudo, um sentimento comum a todos nós.

Quando pedimos para compararem os dois tipos de ensino, estes alunos salientaram que “nas presenciais é melhor a consolidação dos conteúdos e menos bom os testes, à distância há maior conforto, mas muitos trabalhos para realizar.” Destacaram que

“no presencial, o professor percebe melhor se o aluno está a apreender os conteúdos, mas à distância adquirimos maior independência. No presencial, o professor entende melhor as nossas dúvidas, à distância é difícil expô-las, mas, por outro lado “consigo estar mais concentrado.” A avaliação no presencial incide sobre os conhecimentos teóricos e práticos, “contrariamente ao que acho que acontece na avaliação à distância”.

Há quem tenha sintetizado: “Pontos fortes presenciais: menor margem para distrações, maior facilidade em aprender, maior facilidade em retirar dúvidas, maior socialização, melhor desenvolvimento das capacidades cognitivas. Menos positivo nas presenciais: menor autonomia. Pontos fortes no ensino à distância: segurança, trabalho cooperativo, partilha de trabalho, organização, maior autonomia, melhoria do trabalho individual. Pontos menos positivos do ensino à distância: falhas técnicas, maior dificuldade em aprender, não se retém de um mesmo modo a informação”.

Há ainda quem tenha detetado que “podemos contactar os professores fora de aulas com mais facilidade” e que “em matemática acho que em geral corre bem, tudo funciona como previsto, os professores dão a aula e distribuem-nos em grupos de trabalho a fazer exercícios/propostas e ajudam-nos sempre a tirar as nossas dúvidas”. Uma ideia reforçada com um, “não sinto grande diferença em matemática, mas nas outras disciplinas sinto muito.”

A alteração que foi imposta à escola, enquanto sistema em equilíbrio, com falhas, mas em equilíbrio, parece ter provocado alguns sentimentos no sentido de contrariar esta alteração. Deixamos alguns, como reflexão para o futuro.

“Eu acho que andamos muito carregados com trabalhos, onde nas aulas presenciais não o íamos fazer todos.” “O ensino presencial é bom porque temos uma maior facilidade em aprender e não temos dificuldades com o microfone por exemplo. Neste momento já nem consigo ver pontos menos bons no ensino presencial.”

“Para além disso podemos estar com os nossos amigos e com os professores, nada que se possa comparar com o ensino à distância.”

“O ensino presencial é muito mais dinâmico que o ensino à distância, mas, por essa razão, às vezes, é difícil estar concentrado. Já, o ensino à distância promove o estudo conjunto entre alunos, mas não é tão estimulante nem motivador como o ensino presencial.”

ANA CUNHA

CRISTINA CRUCHINHO

HEITOR MIRANDA

SOFIA RIBEIRO

ESCOLA SECUNDÁRIA COM 3.º CICLO FILIPA DE VILHENA, PORTO

Os dilemas do acesso ao Ensino Superior

JAIME CARVALHO E SILVA

O acesso ao Ensino Superior é um dos dramas nacionais que mais atenção recebe da comunicação social e mais discussões provoca no Ensino Secundário e no Ensino Superior (sendo evidentes grandes divergências de opinião). O psicólogo Eduardo Sá, com as frases fortes a que nos habituou, declara mesmo que “a escola está, perversamente, virada, quase em exclusivo para promover a entrada no ensino superior” (in “O maior dos perigos da adolescência são os pais”¹).

Quando em 1972 entrei no Ensino Superior o panorama era muito diferente em vários aspetos. Por um lado, havia relativamente poucos alunos que terminavam o Ensino Secundário e prosseguiam para o Ensino Superior e, por isso, não havia *numerus clausus*. Por outro lado, havia exames de acesso, os chamados **Exames de Aptidão**, de que se podia dispensar com a nota obtida no Ensino Secundário (no meu tempo a nota de dispensa era de 14 valores). Havia poucas Faculdades, poucas opções, mas havia espaço para todos os candidatos que eram aprovados ou eram dispensados do Exame de Aptidão.

Em 1970/1971 havia 137269 estudantes inscritos² no Ensino Lical e 125390 estudantes inscritos nas Escolas Comerciais e Industriais. Em 2018/2019 havia 399386 estudantes inscritos no Ensino Secundário.

Em 1970/1971 havia 49461 estudantes inscritos no Ensino Superior. Em 2018/2019 havia 385247 estudantes inscritos. Quase 8 vezes mais, mas não atingindo ainda a média europeia.

Por aqui se vê um pouco a dimensão do problema: a quantidade de alunos é completamente diferente. Em contraste, durante muito tempo (na parte final do século XX) nem sequer houve em Portugal lugares disponíveis no Ensino Superior para todos. Atualmente o número total de vagas disponíveis no Ensino Superior público é de 51560 sendo que a taxa de ocupação dessas vagas é de 94,5% no ensino universitário e de 76,1% no ensino politécnico³.

A existência de alguma forma de *numerus clausus* é o principal problema não resolvido para os estudantes que pretendem

ingressar no Ensino Superior sendo que os sistemas de candidaturas e os sistemas de exames são altamente complexos na maior parte dos países, começando o processo de candidatura muitas vezes seis meses antes do ano letivo seguinte.

Um relatório⁴ da União Europeia de 2017 analisa os múltiplos aspetos do processo do Acesso ao Ensino Superior, estudando em que medida todos os jovens têm possibilidades de acesso a alguma forma de Ensino Superior (não têm todos), em que medida esse acesso é justo e inclusivo (não é em geral) e como é que os estudantes e as escolas do Ensino Superior definem e organizam as respetivas escolhas.

Nesse relatório afirma-se que o “mérito” do estudante para lhe ser dado acesso ao curso do Ensino Superior da sua escolha é “efetivamente definido – ou pelo menos é medido – como a capacidade de ter sucesso em testes académicos feitos durante ou no final do ensino secundário”. Aspetos como a “criatividade, curiosidade, serviço público” não são considerados porque “é difícil avaliá-los objetivamente e, portanto, são vistos como potencialmente injustos, se não impraticáveis”. O uso de testes académicos é “justo no sentido em que todos os estudantes inscritos na parte final do ensino secundário podem efetuar o mesmo teste e os resultados serão vistos como objetivos”⁵.

Contudo, o uso de testes académicos é muitíssimo variado, indo desde testes “comerciais” a que os alunos se candidatam o número de vezes que pretenderem, desde que paguem o respetivo valor, e depois apresentam nas escolas a que se pretendem candidatar (como o caso do SAT ou do ACT nos Estados Unidos), até provas reguladas pelo estado, que podem mesmo assim variar enormemente em conteúdo e formato (como em Inglaterra onde há várias entidades independentes que produzem e administram exames).

DIFERENTES SISTEMAS DE ACESSO

É assaz difícil enumerar todos os diferentes sistemas de acesso ao ensino superior existentes.

¹ <https://www.eduardosa.com/blog/damas-vagabundos/o-maior-dos-perigos-da-adolesc%C3%Aancia-s%C3%A3o-os-pais/>

² Estatísticas da Educação 1971, INE.

³ Estatísticas da Educação 2018/2019, DGEEC.

⁴ Study on the impact of admission systems on higher education outcomes, vol. 1, European Union, 2017.

⁵ Study on the impact of admission systems on higher education outcomes, vol. 1, p. 55.

Um dos mais controversos é o do **sorteio**. Na Holanda há vários cursos sujeitos a *numerus clausus*, nomeadamente na área da saúde; nestes casos, sendo necessário satisfazer critérios base como ter efetuado com sucesso o exame nacional, é depois feito um sorteio (embora condicionado). Em França todos os alunos precisam de completar o exame nacional do ensino secundário (conhecido como *baccalauréat*) nalguma das suas vertentes (geral, tecnológico ou profissional) mas a respetiva classificação não conta para a entrada no ensino superior. Alguns cursos (das chamadas Grandes Escolas) exigem estudos preparatórios de dois anos com um exame de admissão no final desses estudos e outros têm uma limitação na entrada (na realidade um *numerus clausus* embora esse nome não seja usado). Nestes casos (em medicina, informática e educação física, nomeadamente) durante vários anos foi efetuado um sorteio. Uma enorme controvérsia levou a que esse sorteio fosse substituído por um processo de apresentação de dossiês de candidatura que é por sua vez muito contestado pela falta de transparência. O atual governo francês tem um plano em marcha de transformar o *baccalauréat* num exame nacional de acesso cuja nota determinará o acesso aos cursos superiores. Note-se que o *baccalauréat* é diferente de muitos outros exames nacionais, pois aí a disciplina de Filosofia é obrigatória para todos os estudantes.

ENTREVISTAS COMO FORMA DE ACESSO

Muitas pessoas defendem que as entrevistas permitirão determinar melhor a adequação do perfil de um estudante ao curso superior a que se pretende candidatar. Este método é muito usado pelos países anglo-saxónicos, mas tem estado sob forte contestação por uma série de insuficiências que foram detetadas e que até deram origem a processos judiciais.

A professora Natasha Warikoo da Universidade de Harvard defende⁶ mesmo que o processo mais justo é o do sorteio, por ser o mais transparente e que menos ansiedade coloca nos estudantes, suas famílias e na própria administração. Esta discussão vem na sequência de um processo judicial que revelou que as entrevistas realizadas aos candidatos à Universidade de Harvard eram racialmente discriminatórias para os estudantes de origem asiática por serem genericamente considerados sem “qualidades especiais que justifiquem a admissão” à universidade. A Universidade de Harvard inclui nas suas entrevistas a análise do “caráter, personalidade e promessa” do candidato. No caso da igualmente famosa Universidade de Yale as entrevistas são até conduzidas por estudantes mais velhos, o que deixa obviamente lugar para a existência de preconceitos discriminatórios.

UM CASO DE CONFLITO

Em Espanha não tem havido exame final do ensino secundário (apesar de alguns governos terem tido planos para tal) e o acesso

ao ensino superior é feito por uma prova essencialmente gerida pelas universidades. Antes o exame chamava-se “Selectividad”, mas agora chama-se EBAU - *Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad*. Os problemas associados a estas provas são muitos: por um lado a prova é regional e por isso há diferenças no grau de dificuldade da mesma, tanto mais graves quando a classificação obtida tem aplicação nacional; por outro lado o programa escolhido para as provas condiciona de forma decisiva o ensino secundário pois pais e estudantes exigem que seja dada ênfase a essa parte do programa oficial.

O caso mais recente de conflito tem a ver com a determinação das universidades de não autorizar o uso de calculadoras gráficas na EBAU. A FESPM⁷ tem-se manifestado vigorosamente contra tal determinação⁸. Os professores de Matemática espanhóis defendem que se deve “promover o cumprimento daquilo que estabelece o currículo sobre o uso de tecnologias em sala de aula e especificamente, sobre a presença da calculadora no ensino e aprendizagem da matemática”. A FESPM defende que “essa decisão tem consequências negativas para o modo de ensinar, aprender e avaliar tanto no final do ensino secundário como em anos anteriores”, mas as entidades regionais que supervisionam as provas não são sensíveis a esta questão.

Note-se que os programas escolares internacionais (Universidade de Cambridge e *Baccalauréat* Internacional) usam regularmente calculadoras gráficas nos seus exames, cujos resultados são reconhecidos por mais de uma centena de países, incluindo Espanha e Portugal, como forma de acesso ao ensino superior de cada país.

O CASO DO JAPÃO

A situação no Japão é particularmente curiosa por, em muitos aspetos, ser semelhante à europeia e em muitos outros aspetos ser única. Por um lado, cerca de 80% das universidades são privadas, mas as universidades mais prestigiadas são as universidades públicas, onde a maioria dos candidatos pretende entrar. No Japão obter um diploma de uma universidade prestigiada é uma garantia absoluta para o futuro, e muitas das melhores empresas só recrutam diplomados das sete mais prestigiadas universidades públicas.

O exame UECE (*University Entrance Center Examination*) foi entre 1990 e 2020 obrigatório no Japão para quem queria entrar nas universidades públicas (e algumas privadas). Em 2021 o formato do exame irá ser alterado.

Este exame é nacional, baseado no programa do ensino secundário, administrado por uma agência governamental e é constituído apenas por questões de escolha múltipla. A escolha

⁶ Why elite colleges should use a lottery to admit students, The Conversation, January 8, 2019.

⁷ Federação Espanhola das Sociedades de Professores de Matemática que engloba 20 sociedades regionais de toda a Espanha.

⁸ Los profesores de matemáticas llaman a la movilización ante las restricciones del uso de calculadoras en la EBAU, ABC, 05/03/2020.

múltipla assume formas variadas; uma dessas formas funciona a partir dos espaços em branco que o estudante precisa de preencher exclusivamente com os números de zero a nove e os símbolos (+) e (-).

Os espaços entre chavetas e os sublinhados devem ser preenchidos com os números de zero a nove e com os símbolos (+) e (-). A resposta correta à questão apresentada inclui, por ordem, os seguintes símbolos: 2,3,1,2,7,-,7,3,7,9,1,0,0.

Cada universidade pública e privada realiza os seus próprios exames de admissão à universidade; devido ao calendário dos exames, os estudantes apenas conseguem fazer dois exames de admissão: isto significa que muitos estudantes não conseguem entrar na universidade da sua preferência logo no primeiro ano em que se candidatam. Muitos estudantes ficam mais um ano a preparar-se de novo para fazer o exame de admissão às universidades (são os chamados **Ronin**) e frequentam as escolas privadas de preparação conhecidas por **Yokibou**. Em 2011 um total de 110211 *Ronin* submeteram-se a exame, contra um total de 442421 alunos que terminaram o ensino secundário. Muitos estudantes que não conseguem entrar na universidade entram noutras escolas de ensino superior, nomeadamente universidades municipais.

UECE 1990⁹

Suponha que o polinómio $P(x)$ com coeficientes inteiros satisfaz as seguintes condições:

- (A) Se $P(x)$ é dividido por $x^2 - 4x + 3$, o resto é $65x - 68$.
- (B) Se $P(x)$ é dividido por $x^2 + 6x - 7$, o resto é $-5x + a$.

Então sabemos que $a = \{1\}$.

Procuremos o resto $bx + c$ quando $P(x)$ é dividido por $x^2 + 4x - 21$.

A condição (A) implica que $\{2\} b + c = \{3\} \{4\} \{5\}$ e que $a = \{1\}$.

A condição (B) implica que $\{6\} \{7\} b + c = \{8\} \{9\}$.

Segue-se que $b = \{10\}$ e $c = \{11\} \{12\} \{13\}$.

Os exames são muito competitivos devido à baixa taxa de admissão de alunos nas universidades públicas (em 1990 era de 26%) e assim os estudantes começam logo no ensino básico a frequentar aulas suplementares à noite ou aos domingos para se prepararem para o exame de acesso ao ensino superior.

Enquanto o exame UECE pretende medir o nível atingido pelos estudantes no ensino secundário, as provas feitas por universidades são muito mais seletivas, embora se baseiem nos programas oficiais do ensino secundário. As questões são normalmente de resposta aberta.

Universidade de Hokkaido, medicina e medicina dentária, 1991

4.1) Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=n+1}^{2n} \log k - n \log n \right\} = \int_1^2 \log x \, dx$

4.2) Determine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{1/n}$$

Fizeram este exame 1641 estudantes, mas apenas 636 foram admitidos (na segunda fase houve 838 candidatos, mas apenas 133 foram admitidos).

Universidade Médica de Shiga, 1991

1.1) Dados $a^2 \geq b$, onde a e b são números naturais, prove que a condição necessária e suficiente para que

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

seja um número natural é que exista um número natural n tal que

$$n^2 < a \leq 2n^2 \text{ e } b = 4n^2(a - n^2)$$

1.2) Determine todos os valores de números naturais b tais que

$$\sqrt{30 + \sqrt{b}} + \sqrt{30 - \sqrt{b}}$$

seja um número natural.

Fizeram este exame 531 estudantes, mas apenas 140 foram admitidos.

Este exame nacional UECE será reformulado a partir de 2021 para criar mais datas em que possa ser feito e para alargar o seu âmbito de avaliação de competências, passando a incluir questões de resposta aberta e dando mais espaço à resolução de problemas.

O CASO DA AUSTRÁLIA

A Austrália tem um sistema único no mundo com um índice nacional que permite ordenar os alunos à entrada da universidade o **ATAR** (Australian Tertiary Admission Rank). Como a Austrália é um estado federal, cada estado tem o seu próprio sistema educativo e os seus próprios exames; assim, para haver um sistema de acesso nacional, cada estudante é colocado numa posição relativa em relação aos outros estudantes do mesmo estado em função das exigências desse mesmo estado, podendo depois haver pontos de bónus conforme o curso a que o estudante se candidata.

Este sistema tem gerado muita controvérsia na Austrália por se considerar que não é suficientemente justo. Brian Schmidt, prémio Nobel da Física em 2011 e Vice-Chanceler da prestigiada Universidade Nacional Australiana ANU (pública) da capital australiana, Canberra, considera que o sistema de acesso ao

⁹ Japanese University Entrance Examination Problems in Mathematics, Ling-Erl Eileen T. Wu (ed), Mathematical Association of America, 1993.

ensino superior é “irracional” e só existe porque é fácil para as universidades. O sistema, acusa Brian Schmidt, favorece a uniformidade: “fico com advogados que foram às mesmas escolas e têm os mesmos amigos (...) também há bons advogados noutras lugares, em pequenas cidades onde não obtêm as notas máximas no ATAR”. Ele defende que a universidade pública deve admitir os 10% melhores alunos de cada escola, tal como é comum com as universidades públicas dos Estados Unidos. E efetivamente a ANU não é muito inclusiva, admitindo apenas 2% de estudantes provenientes de bairros economicamente desfavorecidos.

QUAL O MELHOR SISTEMA DE ACESSO?

Não há praticamente dois modelos de acesso iguais no mundo. Qual o melhor? Dos exames padronizados (*standardized*), exames de acesso, entrevistas, sorteio, escolha da melhor percentagem de cada tipo de candidaturas, entradas por recomendação, quotas para classes de estudantes, qual o melhor?

O ideal seria cada estudante entrar no curso da sua preferência e poder mudar de curso quando descobrisse que estava no curso errado. Mas esse ideal é impossível num sistema em que a grande maioria dos estudantes (todos?) pretende frequentar o ensino superior e, portanto, um sistema de *numerus clausus* é inevitável. Por vezes refere-se que o sistema Suíço não tem *numerus clausus* mas essa é apenas uma parte da verdade pois só os alunos que sejam admitidos aos 16 anos no ensino secundário designado por *Gymnasium* podem aceder à universidade (e depois de efetuar o exame nacional *Matura*); os outros são encaminhados para fazer cursos técnicos e só poderão entrar na universidade mais tarde para fazer um mestrado. Mesmo os que são admitidos depois do *Gymnasium* e do exame *Matura* acabam por ter de desistir no final do primeiro ano se não conseguirem um resultado satisfatório.

Num artigo do “*Times Higher Education*” em janeiro de 2019 a jornalista Ellie Bothwell interrogava-se qual seria o sistema mais justo. A jornalista constata que o sistema em vigor não é na realidade sequer cumprido porque, por exemplo, cerca de $\frac{3}{4}$ das melhores universidades americanas dá prioridade na admissão a familiares de antigos alunos (dados da *Century Foundation* de 2010). Também se constata que não há nenhum sistema imune a falhas e até no Japão a Faculdade Médica de Tóquio modificou secretamente durante anos as classificações dos exames de admissão para diminuir o número de mulheres a entrar na universidade.

O sistema inglês é dos mais complexos do mundo e tem sofrido alterações frequentes. Depende muito das classificações obtidas no exame final do ensino secundário (13º ano) conhecido como *A-level*. Mas o papel central é ocupado por entrevistas que têm causado muita controvérsia ao longo dos tempos.

Por exemplo, em 2017 um deputado inglês criticou¹⁰ a falta de representatividade racial nas admissões nomeadamente às universidades de Oxford e Cambridge.

Evan Mandery, professora na City University of New York, defende¹¹ que o sistema mais justo seria o de sortear as entradas de entre os que satisfizessem os requisitos mínimos de admissão. Defende ainda que as entrevistas deveriam ser abolidas pois não introduzem nenhum dado que não se possa obter de outro modo e acabam por ser desculpas para admitir alunos usando critérios que não seriam aceitáveis se explicitados.

PROPOSTAS DE MELHORIA

Em 2016 um relatório de um grupo de trabalho criado pelo Governo português¹² avança com uma série de propostas para “avaliar os mecanismos de acesso ao ensino superior” e “alargar o acesso ao ensino superior a novos e diversificados públicos”. No que diz respeito aos mecanismos de acesso propõe:

- “Normalização das classificações dos exames finais do ensino secundário, superando a variabilidade interanual que é normalmente provocada por alterações nos respetivos níveis de exigência. Este processo levaria à calibração das classificações, assegurando-se que, em cada ano, a média globalmente fixada fosse respeitada”;
- “Regulação das diferenciações excessivas das classificações internas do ensino secundário, reduzindo os desvios (positivos e negativos) introduzidos por desalinhamentos exagerados nas notas internas e garantindo um maior grau de equidade nas candidaturas ao Concurso Nacional de Acesso”.

O alargamento das vias de acesso ao ensino superior tem de ser uma prioridade se pensarmos que “o objetivo da Europa 2020 [está] orientado para garantir que, em 2020, 40% da população com idades de 30 a 34 anos tenha formação superior”, o que é extremamente difícil sem medidas suplementares.

Está ainda muito por fazer.

JAIME CARVALHO E SILVA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

¹⁰ Seven years have changed nothing at Oxbridge. In fact, diversity is even worse, David Lammy, The Guardian, 20 de outubro de 2017.

¹¹ University admissions: which system is the fairest?, Times Higher Education, 10 de janeiro de 2019.

¹² Despacho nº 6930/2016, de 12 de maio de 2016.

APM 2020 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP

e duas modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

A APM e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado **aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP** que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM.

Pode inscrever-se indiferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.º de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de associado da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF da Revista Educação e Matemática no nosso portal; todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas.

A revista Quadrante é publicada online (<https://quadrante.apm.pt>) e é de acesso livre.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem duas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Quotas anuais para 2020

Modalidades de associado individual	2020
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio (residente em Portugal ou no estrangeiro)	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

* Poderão inscrever-se nestas modalidades, estudantes em formação inicial (licenciatura ou mestrado profissionalizante)

Modalidades de associado institucional	Quota
Modalidade I (1 exemplar da EeM)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da EeM)	95,00 €

Assinatura da revista Educação e Matemática

		3 números + 1 número duplo temático
Associado individual	Portugal	
	Estrangeiro	
Não associado individual	Portugal	50,00€
	Estrangeiro	70,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€
	Estrangeiro	95,00€

Preço de capa da revista Educação e Matemática

Educação e Matemática		
Associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€
Não associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€

Editorial

- 01** E se agora tudo começasse a mudar...
A Direção da APM

Artigos

- 02** Diário matemático de uma epidemia em Portugal
José Paulo Viana
- 07** Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?
João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma, Joana Mata Pereira
- 18** E@D: Para lá do espelho
Cristina Cruchinho, Filipa Machado, Helena Gil Guerreiro
- 25** Dar sentido ao ensino das (e com as) frações
Isabel Rocha, Manuela Pires
- 33** Di-vi-so-res – como encontrá-los? Uma experiência exploratória no 1.º ciclo do ensino básico
Fátima Alexandrino, Gorete Fonseca
- 45** Os dilemas do acesso ao Ensino Superior
Jaime Carvalho e Silva

Secções

- 12** Espaço GTI
Polígonos e poliedros: trabalhar a relação 2D-3D, *Joana Conceição, Margarida Rodrigues*
- 16** Cadernos de apontamentos de Geometria
Estruturas e Geometria Dinâmica *Cristina Loureiro*
- 24** Pense Nisto
Quem quer comprar um livro com 100% de devolução? *José Luiz Pastore Mello*
- 32** Materiais para a aula de Matemática
Condições da Campanha 100% de volta, *José Luiz Pastore Mello*
- 37** Tecnologias na Educação Matemática *António Domingos*
Promover a aprendizagem das STEM através de uma aplicação de realidade aumentada, *Maria Cristina Costa, António Manso, Paulo Santos, Francisco Monteiro*
- 41** O problema deste número *José Paulo Viana*
Um “polígono” curvo
- 43** Pontos de vista, reações e ideias...
O que pensam os alunos sobre E@D, *Ana Cunha, Cristina Cruchinho, Heitor Miranda, Sofia Ribeiro*