

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ Trimestral

2020

155

■ Janeiro ∞ Fevereiro ∞ Março

Preço 7.50€





EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Ana Isabel Silvestre
	Cristina Cruchinho
	Cristina Moraes
	Elvira Santos
	Filipa Machado
	Helena Gil Guerreiro
	Irene Segurado
	João Terroso
	Manuela Pires
	Sílvia Zuzarte
	Teresa Olga Duarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Março de 2020

Tiragem 1000 exemplares

Periodicidade Trimestral

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

Sobre a capa

O isolamento social e o encerramento dos estabelecimentos de ensino marcam todo o período de edição da revista Educação e Matemática (n.º 155).

Enquanto se escreviam e reviam artigos e se dava corpo às páginas da *EeM*, milhares, milhões de alunos e professores viam o seu espaço de trabalho, natural e privilegiado, encerrado. Condiicionados pelo fator tempo, ultrapassaram questões de foro pessoal, social e emocional e mudaram de um dia para o outro, como num sopro de magia, da sua sala de aula tradicional (natural) para salas virtuais, com uso de novas ferramentas, novos desafios e aventuras, numa transição quase que natural/sem conflito, aprendendo e ensinando num novo contexto, superando obstáculos de diversa ordem e natureza, reinventando e reconstruindo estratégias pedagógicas e tarefas de aprendizagem adequadas a uma nova e excepcional situação.

Uma construção histórica de um processo educativo, que se espera limitado no tempo, nestas condições, mas do qual todos podemos tirar consequências e construir um futuro capaz de ultrapassar, a nível educativo, novas e eventuais adversidades.

Mário Baía

Saiu da Redação da *Educação e Matemática*

A equipa da redação quer apresentar um sincero agradecimento à Isabel Rocha pelo fantástico empenho e pelo sempre fiel compromisso para com a revista nestes anos de trabalho conjunto. Profissional, prestativa e sempre com um sorriso nos lábios, a Isabel foi nossa redatora e, durante algum tempo, nossa diretora. Achámos que as palavras de Antoine de Saint-Exupéry se enquadram bem neste “Até já!” para a nossa querida Isabel “Aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós”.

Neste número também colaboraram

Albano Silva, Ana Margarida S.M. Simões Dias O.S., António M. Fernandes, Catarina Ferreira, Cesário Silva, Cristina Loureiro, Cristina Moraes, Elisabete Gonçalves dos Santos, Floriano Viseu, Helena Gil Guerreiro, Helena Rocha, Isabel Oitavem, João Terroso, José Luiz Pastore Mello, Leonardo Barichello, Lina Brunheira, Manuela Simões, Paulo Afonso, Sónia Palha.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.
- Pela relevância das cores nalguns artigos deste número, a sua versão digital disponibilizada aos sócios no site da APM será publicada a cores.

E de repente tudo mudou...

E, de repente, no dia 16 de março foram suspensas as atividades letivas e não letivas nas escolas... Alguns alunos terão levado os seus materiais para casa, mas todo o material comum ficou lá, nas salas de aula. O quadro, onde conseguimos rapidamente registar algo para partilhar com os outros, ficou na escola. Os materiais didáticos e pedagógicos a que prontamente recorremos para representar, mostrar, demonstrar e explicar ideias... esses também ficaram na escola. E o espaço onde podemos estar juntos, aprender, conversar, rir? Também ficou na escola? Será possível recriá-lo?

A 16 de março, inevitavelmente, a perspetiva do que é a escola transformou-se bruscamente nas nossas mentes, ampliando-se. Noutros momentos, melhor ou pior, com mais ou menos condições, as alterações que fomos vivenciando na escola fizeram-se anunciar, dando-nos algum tempo para processar sobre o que iria mudar. Mas nada nos preparou para uma escola com salas de aula vazias, sem o contacto social próximo com os nossos alunos, sem definição do que fazer, como fazer e até quando o fazer. Enquanto seguíamos com atenção a situação vivida no nosso país e no mundo nós, professores, olhámos em redor, e com o que tínhamos ao nosso alcance procurámos rapidamente respostas para o “E agora?” que se impôs.

A forma como procurámos responder a esta questão está certamente dependente da realidade em que nos encontramos, pois a resposta que cada um de nós pode dar é moldada por vários fatores, em particular pelos recursos que temos à nossa disposição (professores e alunos).

Para muitos de nós deu-se início a uma verdadeira incursão pelo mais ou menos desconhecido mundo da tecnologia... Pelo mundo das plataformas que já soubemos usar em tempos, mas fomos esquecendo. Pelo mundo de recursos digitais, explorados em tempo recorde... Se, inicialmente, foi uma procura ávida das ferramentas que existem, foi-se tornando progressivamente mais focada e situada na forma como nós próprios, professores, entendemos o que é ensinar e aprender. Se a aprendizagem ocorre e prospera com os outros, então não nos podemos limitar a um trabalho à distância e a sós. Estamos isolados, mas não necessariamente sozinhos. Esta procura é altamente facilitada por um trabalho com colegas professores. É possível que, agora mais do que antes, os professores comuniquem regularmente, partilhando ideias, discutindo que propostas parecem ter corrido melhor, o que pode ser melhorado, tudo isto em conjunto. Descobrimos e continuamos a descobrir ferramentas que, eventualmente, já estamos a experimentar ou a usar regularmente com os nossos alunos.

Mas será este um cenário comum a todos nós? E os alunos a quem não conseguimos chegar? E aqueles que não possuem um computador para trabalhar, seja porque não existe ou, existindo, é imprescindível para os pais que se encontram em teletrabalho? E os alunos que não possuem acesso à Internet? Como garantir então condições mínimas de acessibilidade a todos os alunos? Que resposta poderá ser dada pelo próprio Ministério de Educação? E aqueles alunos que, estando na posse de meios tecnológicos, têm grande dificuldade em orientar-se no mundo digital ou mesmo na compreensão das próprias tarefas?

Ao afastarmo-nos da escola, enquanto espaço físico, somos obrigados a ver o que há muito sabemos existir: disparidades sociais existentes entre os alunos, que se refletem num acesso à educação claramente desigual.

Para além de questões relacionadas com o *como* aprender, surgem também incertezas sobre o *que* aprender. Em altura de pensar numa escola à distância, que aprendizagens devemos promover? Deveremos dar continuidade à aprendizagem de conteúdos, tal como se estivessemos presencialmente na escola? Ou deveremos antes pensar em desenvolver outras competências, que agora parecem ganhar maior importância, como a autonomia ou a capacidade de pesquisar, mobilizar e olhar de forma crítica para a informação? Certamente, as escolas e agrupamentos deverão assumir um papel de destaque na definição de como e o que trabalhar com os alunos.

E como poderemos avaliar este trabalho à distância? De que forma podemos entender a avaliação nesta nova visão de escola? Como podemos avaliar para aprender mais e melhor e como avaliar o que se aprende? Poderemos usar os mesmos instrumentos? Se há muito a questão da avaliação tem vindo a ganhar maior e merecido destaque, neste momento excecional que vivemos, encontrará certamente lugar e oportunidade para ser discutido entre nós.

As dúvidas imperam... Mas há algumas certezas. Nós, professores, com a energia e a capacidade criativa que sempre nos caracterizou, tudo faremos para responder a este enorme desafio. E a certeza também de que, quando regressarmos à nossa sala de aula, voltaremos com uma visão de *escola* que se estende muito além de um quadro, de manuais, das salas de aula... Voltaremos diferentes. Nós e os alunos.

CRISTINA MORAIS
EXTERNATO DA LUZ

JOÃO TERROSO
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS LUÍS DE CAMÕES

HELENA ROCHA
CICS.NOVA, FCT-UNL

Como o Google caça seus talentos

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

Seja para o bem ou para o mal, o Google é uma empresa de estratégias inteligentes. Na escolha do seu nome de batismo já foi assim. O buscador, que se apresentou no final dos anos 90 como BackRub, não demorou a mudar o nome para Google. Pergunto-me se a empresa pagou os devidos direitos a Milton Sirota, a criança de nove anos que, em 1938, inventou essa palavra. Quando o matemático Edward Kasner pediu ao seu sobrinho que inventasse um nome para um número muito grande, mais especificamente, 1 seguido de 100 zeros, o pequeno Milton se convenceu de que o número merecia um nome porque era grande, mas não o infinito, que já tinha seu próprio nome. A sugestão que deu ao tio tinha a sonoridade de “gugol”. Aos ouvidos da língua inglesa, Google. E foi o próprio guri que logo na sequência inventou o nome googleplex para um número muito maior: 1 seguido de 1 google de zeros.

Vejamos uma simulação feita na ponta do lápis. Eu consigo escrever dois zeros em 1 segundo, o que me faz crer que conseguiria escrever 1 google numa folha de papel em pouco menos de 1 minuto. Já 1 googleplex levaria algo da ordem de 10^{92} anos, isso se a tendinite não afetasse meu ritmo de escrita, claro. Quer tentar adivinhar agora qual é o nome do complexo de edifícios da sede do Google na Califórnia? Se pensou em Googleplex, acertou!

Um google não é pouca coisa. Há estimativas razoáveis de que o número de grãos de areia da praia de Copacabana seja na ordem de 10^{17} , ou seja, 1 seguido de 17 zeros. Mil vezes isso é a estimativa do maior número alguma vez visto no mundo das finanças, correspondente ao total de dinheiro em circulação na Alemanha hiperinflacionária do pós-guerra: cerca de 10^{20} marcos, o que nem faz cócegas a 1 google. Com o arsenal teórico de Einstein em mãos, os físicos estimam que o universo tenha 10^{79} electrões, um número ainda muito menor que 1 google. Facto é que a escolha de Google para dar nome ao motor de pesquisa dos superlativos foi certa.

Mas, a astúcia do Google que contarei é de outra ordem, essa bem mais mundana. Quer saber como o Google caça seus talentos para trabalhar no complexo Googleplex? Então, não largue a leitura deste artigo.

Estamos em agosto de 2004, no campus da Universidade de Harvard. Diga-se de passagem, universidade que já teve quatro medalhistas Fields, que equivale ao prêmio Nobel da matemática,

ANALISTA DE SOFTWARE

GRUPO INDUSTRIAL de grande porte busca profissional altamente qualificado com vivência comprovada na área de processamento de dados não inferior a cinco anos. Acreditamos que o profissional que ocupará o cargo deva possuir ainda conhecimentos básicos em desenvolvimento de sistemas ON-LINE, conhecimentos de banco de dados, experiência em equipamento IBM e total capacidade para coordenar equipe de profissionais especializados. Com toda a segurança que nossa situação frente ao mercado inspira, temos certeza em poder proporcionar remuneração à altura das melhores faixas do mercado, benefícios de grande empresa e condições para o satisfatório e crescente desenvolvimento do profissional.

Aguardamos dos interessados o envio de “CURRICULUM VITAE” o mais rapidamente possível para a nossa Caixa Postal n.º 60597 - SP, com o código ANALISTA.

vinculados à instituição por ocasião de suas premiações. Um estranho *outdoor* chamava a atenção daqueles que circulavam pelo campus da universidade naquela primavera.



É difícil estimar a percentagem de pessoas que entenderam o cartaz, mas acredito que todos os que entenderam ficaram muito curiosos. Parte deles provavelmente gastou algumas horas de vida na caça ao tesouro desconhecido ali anunciado. Vamos entender isso melhor.

O número e , por vezes chamado de número de Euler, talvez seja o segundo número irracional mais famoso da história da matemática, só perdendo para o seu primo de irracionalidade¹ e transcendência², o número π . Problemas de crescimento ou decrescimento exponencial teriam vida curta na ausência de e .

¹ Números irracionais são aqueles cuja representação decimal é infinita e não periódica. São exemplos de irracionais os números $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$, $\pi = 3,1415926\dots$, $e = 2,7182818\dots$

² Números transcendentais são aqueles que não são solução de equação algébrica com coeficientes inteiros. Todo número transcendente é irracional, mas nem todo número irracional é transcendente. Por exemplo, π é irracional e transcendente, mas $\sqrt{2}$ é irracional e não transcendente porque conseguimos exibir uma equação algébrica de coeficientes inteiros que tem $\sqrt{2}$ como solução. A saber, essa equação pode ser $x^2 - 2 = 0$.

Não é exagero dizer que sem ele não existiria a matemática financeira, nem a datação de ossos e artefatos antigos pelo método do carbono 14, tão pouco a modelação de inúmeros fenómenos sociais. Não bastasse as suas incontáveis aplicações, o uso do número e como base dos logaritmos mostra-se tecnicamente muito mais apropriado do que outras bases como, por exemplo, o sempre amistoso número 10. Mas quem é afinal de contas o número e ?

Imagine que você vai a uma instituição bancária aplicar o simbólico valor de 1,00 € com uma irreal taxa de 100% de juros, em regime de capitalização anual. No final do ano, irá resgatar 2,00 €. Digamos que a mesma taxa de juros vai ser dividida ao meio, mas agora com capitalização semestral e ainda com o resgate ao final de um ano. Sem perda de tempo com contas, acredite que resgatará 2,25 €. E se a taxa de juros fosse dividida em quatro, com capitalização quadrimestral e resgate do dinheiro ao final de 1 ano? O seu resgate seria de 2,44 €. Pois se você sonha em ficar milionário ao final de 1 ano com uma taxa de juros capitalizada segundo a segundo ou, melhor ainda, uma taxa contínua com o tempo, esqueça esse sonho porque o seu resgate não passará de e Euros, o que, aproximadamente, equivale a 2,718 €. Em linguagem matemática, estamos fazendo a conta da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para valores cada vez maiores de n . Usando valores de n cada vez maiores – os matemáticos diriam, fazendo n tender para o infinito – o resultado da conta irá convergir para o número irracional que denotamos por e . Relembrando: se um número é irracional, a sua representação decimal possui infinitas casas decimais não periódicas. Ao consultar o valor de e numa calculadora científica de dez dígitos, não se iluda por suspeitar que o número indicado no visor (2,718281828) seja uma dízima periódica, porque é mera ilusão de ótica. Observe o número e com 20 casas decimais que possivelmente você intuirá o que estou querendo dizer: 2,7182818284590452353. Finalmente estamos prontos para entender o estranho *outdoor* em Harvard. A propaganda sugere haver algo a ser descoberto digitando-se o primeiro número primo de dez dígitos da expansão das casas decimais de e , seguido de “.com”. Infelizmente, apenas entender o problema não garante a sua solução. Recordando-se de que um número primo é aquele que só é divisível por 1 e por ele mesmo, uma simples inspeção nas dez primeiras casas decimais de e mostra que o número formado não é a chave do problema porque 7182818284 não é um número primo, já que é divisível por 2. A próxima sequência de dez dígitos na expansão decimal de e também não formará um número primo porque 1828182845 é divisível por 5. A situação começa a complicar com o próximo número da sequência, que é 8281828459. Seria ele um número primo? Fatorizar um número desse tamanho á mão não é boa ideia, irá dar muito trabalho. Irei poupar esforços ao leitor antecipando que esse número não é primo, possuindo três divisores além de 1 e de si mesmo, que são: 383, 4129 e 5237. Você deve ter percebido o real tamanho da encrenca que temos

pela frente, não? Aliás, devemos a esse tipo de “sarilho” toda a segurança da transmissão dos nossos dados pela internet. Se fosse fácil saber se um número é primo ou não, a engenharia e segurança de todos os modernos sistemas de criptografia de dados estariam comprometidas.

Para encontrar o tesouro escondido no *outdoor* em Harvard ainda temos que: 1) fazer um programa de computador para gerar muitas casas decimais do número e ; 2) fazer outro programa de computador, que nos ajude a encontrar o primeiro número primo de 10 dígitos na expansão decimal de e . A turminha que bolou o *outdoor* certamente não quis propor o desafio com o número π , porque o passo 1 seria significativamente mais simples, dadas as inúmeras tabelas com muitas casas decimais de π que habitam na internet. A brincadeira com o e é bem mais divertida e não requer mais do que conhecimentos básicos de programação mas, convenhamos, quem se habilitaria a gastar o seu tempo por um simples e misterioso *outdoor*, não é?

Quem sustentou conhecimentos e levou a sério o problema, encontrou o número 7427466391 como chave do desafio. Caprichosamente, o algarismo 7, que está mais à esquerda do número, encontra-se na 99.^a casa decimal da expansão de e .

Quer saber o que havia em www.7427466391.com, não é? Simples assim: um novo desafio!

O *link* apresentava o seguinte padrão ao visitante do ambiente:

f(1)=7182818284
f(2)=8182845904
f(3)=8747135266
f(4)=7427466391
f(5)=_____

A situação complicou um pouco, porque agora não basta saber programar computadores. Antes de qualquer coisa, o navegador tem que decifrar o padrão numérico da sequência, para só depois pensar em estratégias que mostrem o 5.^o termo. Alguns factos ajudam na busca. Note-se que f(1) é o primeiro número de dez algarismos da expansão decimal de e . Veja-se que a soma dos algarismos de f(1) é igual a 49, assim como também são iguais a 49 as somas dos algarismos em cada um dos outros três números da sequência fornecida. Por fim, veja-se que f(1) é o primeiro número de 10 dígitos da expansão de e e que f(2) é o segundo. Há indícios de que devemos buscar pistas nos números de 10 algarismos da expansão de e . De facto, fazendo essa busca, percebe-se que f(3) e f(4) também são números de dez algarismos da expansão decimal de e . Em f(3) temos o número que começa na 23.^a casa decimal de e , e f(4) o número que começa na 99.^a casa decimal de e , que foi o número usado como chave da primeira etapa do desafio. Nada numa mão, nada na outra e... Já sabemos o que queremos encontrar. Estamos á procura do próximo número de dez algarismos, seja ele primo ou não, na expansão decimal de e que tenha a soma dos seus dez algarismos igual a 49. O computador ajuda rapidamente a

encontrar o que buscamos: o número é 5966290435, localizado da 127.^a à 136.^a casa decimal da expansão de e .

Digitando a nova chave numérica em f(5), o astuto caçador de tesouros deparava-se com o endereço <http://www.google.com/labjobs/indwx.html> que, quando acessado, mostrava uma mensagem do Google com felicitações pela solução do desafio e um convite para que o navegante enviasse o seu currículo à empresa para um futuro contrato. Dizia, ainda, que o Google considerava que os solucionadores do problema eram pessoas com habilidades suficientes para pertencer aos quadros da empresa.

O exemplo do Google mostra a complexidade da disputa de vagas em setores de ponta da tecnologia da informação (TI).

Já vai longe o tempo em que programadores procuravam e encontravam os melhores empregos nos classificados de domingo do jornal. A diferença entre o romântico anúncio de vaga em TI nos classificados de um jornal em 1984 e a ousada estratégia caça-talento do Google 20 anos depois mostra, de forma dramática, o enorme desafio que temos que enfrentar na formação escolar das futuras gerações.

Referências

- KASNER, E., NEWMAN, J. (1968). *Matemática e Imaginação*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.
- PAENZA, A. (2008). *Matemática... ¿Estás ahí? – Episódio 2*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores.

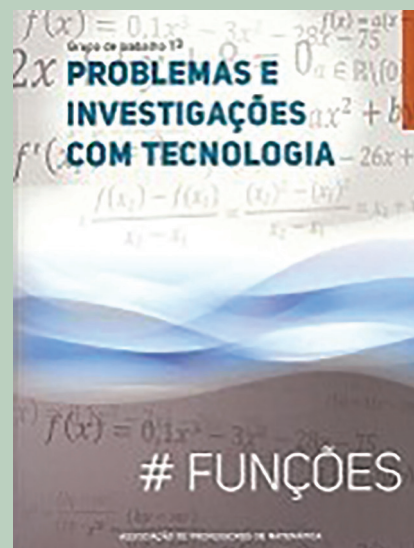
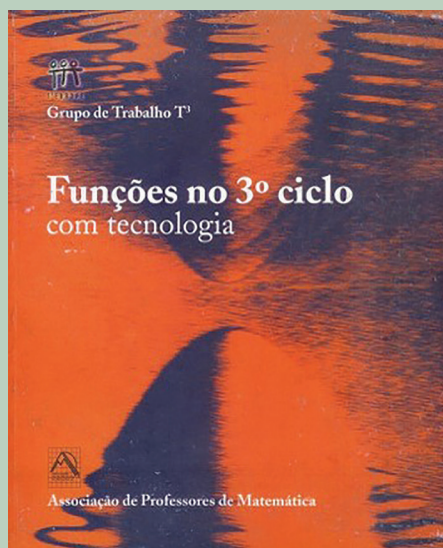
JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

COLÉGIO SANTA CRUZ, SÃO PAULO/BRASIL

PUBLICAÇÕES APM

Propostas de tarefas e atividades para desenvolver com a calculadora.

Publicações do Grupo de Trabalho T3 da APM, adaptáveis a calculadoras de qualquer marca.



RESOLVA PROBLEMAS



Avaliação semestral ou como “reduzir” de três períodos para quatro os momentos de avaliação

CESÁRIO SILVA

Quando falamos em avaliação semestral, a primeira ideia que nos pode ocorrer é que passamos a fazer em dois momentos (semestres) o que fazíamos, tradicionalmente, em três (períodos).

Na realidade, falar de avaliação semestral e organização do ano letivo em semestres é muito mais do que a mera distribuição administrativa e burocrática do respetivo calendário escolar.

Para além de uma divisão do ano letivo de uma forma mais equilibrada é, sobretudo, o pretexto para repensar todo o ato pedagógico que envolve o ensino, as aprendizagens e os processos e instrumentos de recolha de informação que nos permitam colocar a avaliação ao efetivo serviço das e para as aprendizagens.

A participação do agrupamento no Projeto-Piloto de Inovação Pedagógica (P-PIP), que decorreu entre 2016 a 2019, permitiu que uma das medidas implementadas fosse a da avaliação semestral. Importa registar que o nosso projeto nunca visou a semestralização do currículo, na perspetiva de podermos ter a disciplina A, com o dobro da carga horária semanal, à atribuída para o ano letivo, concentrada apenas num semestre e que, no outro semestre, funcionaria a disciplina B em idênticas condições. Esta é uma das questões que, por vezes, é confundida com a semestralização da avaliação, tendo contornos e análise distinta da que aqui é apresentada.

Assumimos sempre, quando falávamos em avaliação semestral, que estávamos a reduzir a avaliação sumativa de três momentos de avaliação (períodos) para dois (semestres). No entanto, a meio de cada um dos semestres, foram introduzidos os Conselhos de Turma de Avaliação Intercalar, passando a existir na prática não três, mas sim quatro momentos de avaliação, facto pelo qual dizemos muitas vezes que *reduzimos* de três para quatro o número de informações fornecidas às famílias sobre as aprendizagens dos seus educandos.

Desta forma, a abordagem às questões da avaliação foi uma das primeiras alterações introduzidas neste “novo” modelo de funcionamento, passando a ser necessário olhar para a avaliação numa perspetiva muito mais formativa do que sumativa. O enfoque passou a estar colocado nas estratégias de ensino, nos níveis de aprendizagem e desempenho dos alunos e na possibilidade de redesenhar o processo de ensino-aprendizagem sustentado, e, sempre que necessário, na implementação de

medidas de efetiva promoção do sucesso, numa ação conjugada entre os recursos disponíveis no agrupamento, a participação e responsabilização dos alunos e o envolvimento das famílias.

Os Conselhos de Turma de Avaliação Intercalar que, de acordo com o nosso calendário se realizam no primeiro semestre, na primeira semana de novembro, permitem identificar e partilhar, na perspetiva do trabalho docente cada vez mais colaborativo, as metodologias com impactos positivos no contexto de cada uma das turmas, a articulação interdisciplinar e proceder à identificação de alunos relativamente aos quais é necessário aplicar um trabalho de maior proximidade e/ou de reforço das aprendizagens.

No balanço que temos vindo a efetuar, esta é uma das vantagens da organização semestral mais realçada na medida em que, para além da identificação precoce de alunos que necessitem de uma intervenção, a própria implementação das medidas adotadas permite recuperar a tempo parte das dificuldades identificadas, com impacto positivo na avaliação do final do primeiro semestre e, consequentemente, na motivação dos alunos.

No entanto, o processo de semestralização e a aposta numa avaliação de natureza formativa tem exigido de todos nós docentes, um esforço de adaptação, sobretudo, na aplicação de novas formas e instrumentos de recolha de informação relativamente aos quais tem sido necessário clarificar conceitos, atribuir consistência aos instrumentos e intencionalidade exigindo, nalguns aspetos, uma clara rotura com práticas avaliativas ao serviço de processos de classificação e seriação que contribuem muito pouco para a qualidade das aprendizagens dos alunos. Neste domínio, é de realçar a importância da formação docente no âmbito das didáticas específicas, das modalidades de avaliação e ainda do trabalho colaborativo, como estratégia fundamental para promover uma maior interdisciplinaridade e responder aos desafios do Perfil dos Alunos.

Se para os docentes todo este processo de mudança requer tempo e adaptação, também para os alunos as “novas” formas de aprender, mais centradas nos próprios, com o recurso a uma avaliação cada vez mais contínua e sistemática, obriga à realização de aprendizagens mais profundas e contextualizadas, por oposição a aprendizagens de natureza mais superficial e

memorizadas que, ao longo dos anos, serviram um modelo de avaliação centrado, quase exclusivamente, na recolha de informação através de testes de avaliação.

Apraz-nos ainda registar que a maioria dos pais e encarregados de educação reconhecem que este modelo, apesar de mais exigente para os alunos, os prepara melhor, porque aposta na sua autonomia e os responsabiliza mais. Por outro lado, o feedback fornecido nas duas avaliações de natureza descritiva e formativa, a meio dos semestres, novembro e abril, com propostas e sugestões que possibilitem a melhoria das aprendizagens, contribuem também para um maior envolvimento e empenho por parte dos alunos.

Para as direções dos agrupamentos/escolas há também um caminho de aprendizagem a fazer com esta nova organização do ano letivo, nomeadamente, na definição do calendário com as pausas letivas mais equilibradas de forma a proporcionar um tempo de descanso aos alunos e aos docentes, bem como com modalidades de monitorização dos níveis de desempenho dos alunos e acompanhamento das medidas de promoção do sucesso, que devem ser estabelecidas em função de indicadores que se constituam como preditores validados, na definição dessa intervenção.

CESÁRIO SILVA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS MARINHA GRANDE POENTE

A propósito da organização semestral do calendário escolar

CATARINA FERREIRA

HELENA GIL GUERREIRO

A experiência pedagógica de implementação do projeto de autonomia e flexibilidade curricular, no ano escolar de 2017-2018, levou a que o nosso agrupamento, em cooperação com os outros agrupamentos da rede pública do concelho de Odivelas, traçasse o projeto “Repensar o ano letivo como forma de melhorar a aprendizagem dos alunos”. Este projeto surgiu do interesse em promover melhores aprendizagens, com um foco no desenvolvimento de competências, como perspectivado pelo Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. O seu propósito é orientar o processo educativo no sentido de a avaliação ser tomada como parte integrante do ensino e, sobretudo, da aprendizagem, ganhando especial destaque a sua dimensão formativa. O projeto foi autorizado pelo Ministério de Educação e teve início no ano letivo 2018-2019, já enquadrado por um novo referencial jurídico orientado pelos Decretos-Lei n.º 54 e 55/2018.

A operacionalização deste projeto traduziu-se numa organização do calendário em dois semestres, cada um com um momento de avaliação intercalar, diminuindo os momentos de classificação, mas reforçando a monitorização das aprendizagens, em articulação com os encarregados de educação, procurando contribuir para diminuir o impacto da avaliação sumativa ao longo do processo de ensino e aprendizagem. Esta organização traz benefícios, mas também alguns constrangimentos, que aqui pretendemos trazer e discutir.

Este projeto vinculou-nos no agrupamento a compromissos de mudança nos procedimentos com a avaliação, que constituem verdadeiros desafios. Entre esses compromissos estava a diversificação de instrumentos de avaliação, em consonância

com as Aprendizagens Essenciais e o Perfil dos Alunos. O recurso a uma maior variedade de instrumentos de recolha de informação foi ganhando espaço no cenário pedagógico. Listas de verificação de conteúdos são um exemplo de um desses instrumentos adotado por alguns professores. Elaboradas por ano de escolaridade, permitem obter informação privilegiada e sistemática acerca da aprendizagem dos alunos, no sentido de promover a autorregulação das aprendizagens e ajustar as estratégias de ensino, bem como informar os encarregados de educação.

Um outro compromisso envolveu a reestruturação dos processos de regulação do ensino e da aprendizagem, que passou pela reformulação dos critérios de avaliação, desviando o foco dos instrumentos de avaliação para os domínios e identificando indicadores que garantam que todos os alunos adquirem conhecimentos de conteúdos, mas também de capacidades e atitudes em cada disciplina.

Este projeto permitiu assim associar a organização semestral a uma predisposição para a mudança, que já se fazia sentir no nosso agrupamento. A existência de pausas mais frequentes e de apenas dois momentos de avaliação sumativa são identificados como potenciadores do reforço da avaliação formativa. Se por um lado, alivia a pressão sobre um 3.º período, muitas vezes demasiado curto, por outro, proporciona maior disponibilidade para implementar propostas pedagógicas que vão ao encontro da flexibilidade curricular decretada no quadro legislativo em vigor. A organização dos docentes das turmas do 2.º e 3.º ciclos, em equipas educativas, é disso exemplo, pois permite atender, o mais precocemente possível, às necessidades de cada um dos alunos,

PONTOS DE VISTA, REAÇÕES E IDEIAS ...

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

num contexto de aprendizagem de Diferenciação Pedagógica. No entanto, surgem também constrangimentos que identificamos e que importa discutir em conjunto. Uma avaliação sustentada por uma dimensão essencialmente formativa é contínua e sistemática, o que implica dar um feedback ao aluno, regular e incisivo, sobre o trabalho que vai fazendo, no sentido de que possa identificar onde pode melhorar e o que precisa fazer para que isso aconteça, a partir de uma tomada de consciência do que tem de aprender e dos objetivos da sua aprendizagem. Colocar em prática esta ação requer tempo e formação com base na partilha de práticas e na cooperação entre professores. Reconhecer a importância do feedback, também por parte dos encarregados de educação, implica a construção de um novo entendimento do propósito da avaliação, da avaliação como algo que integra o currículo e que apoia os alunos na sua aprendizagem, o que implica ir além da dimensão normativa e classificativa da avaliação, o ir além da valorização exclusiva dos testes.

Mas ser contínua levanta ainda dúvidas sobre como classificar nos momentos de avaliação sumativa, dúvidas que se amplificam numa organização semestral, pois embora haja mais informação sobre a aprendizagem dos alunos numa perspetiva de avaliação formativa, não é evidente que informação mobilizar nos momentos de classificação. Relativamente aos testes, embora tenham deixado de ser os únicos protagonistas no cenário pedagógico, continuam a prevalecer e a provocar momentos de grande sobrecarga, em determinadas semanas. Uma situação que se agrava, sobretudo, nos anos em que existe uma avaliação sumativa externa.

No que respeita especificamente à Matemática, a redefinição de critérios de avaliação no nosso agrupamento envolveu, sobretudo, garantir o distanciamento dos temas e conteúdos e assegurar o desenvolvimento das capacidades de comunicação e raciocínio matemáticos, a par da resolução de problemas,

concentrando a atenção, no aprender e saber fazer, procurando romper a estreita e redutora relação que critérios de conteúdos e instrumentos de avaliação tradicionalmente mantêm entre si. Para apoiar esta mudança surgiu um Plano de Turma, com suporte numa nova plataforma digital, cujo uso foi generalizado a todos os agrupamentos do concelho. Esta permite associar cada critério de avaliação a diferentes instrumentos, num cruzamento de listas de verificação, tabelas de registo, portefólios, relatórios, testes, entre outros, fazendo convergir essa informação por domínio de aprendizagem em Matemática. Uma plataforma que constitui uma oportunidade, mas também um desafio, na medida em que traz consigo uma resistência, que ainda nos enleia.

Através de um trabalho de aprendizagem que se apoia na diversificação de instrumentos de avaliação e de contextos, persegue-se agora um maior conhecimento das aprendizagens e dos esforços desenvolvidos pelos alunos, bem como dos seus progressos, tendo como suporte uma organização do calendário escolar que nos proporciona um sentimento de menor pressão. Um caminho que nos conduz na prossecução de uma transposição eficaz desta visão menos atomizada do que importa realmente aprender e de uma classificação transparente, com o devido distanciamento do manancial de informação sobre a aprendizagem que a avaliação de natureza formativa gera.

A organização semestral do calendário escolar parece dar espaço e tempo às aprendizagens e a uma mudança de paradigma em termos de avaliação. Uma mudança que, sabemos, não acontece por si mesma, mas que começa a fazer-se. Um caminho que ninguém pode fazer pelo outro, mas apraz-nos saber que, tal como até aqui, não caminhamos sozinhos.

CATARINA FERREIRA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS BRAAMCAMP FREIRE

HELENA GIL GUERREIRO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS BRAAMCAMP FREIRE

PUBLICAÇÕES APM



PONTOS DE VISTA, REAÇÕES E IDEIAS ...

JANEIRO :: FEVEREIRO :: MARÇO

#155

Valorizar o raciocínio espacial no ensino e na aprendizagem da geometria (e não só)

LINA BRUNHEIRA

Imagine a seguinte situação, talvez até já a tenha vivido. Quer comprar uma secretária simples, com gavetas, e decide que lhe bastará um modelo barato, vendido empacotado e ainda por montar. Afinal, o que poderá correr mal? Chega a casa e põe mãos ao trabalho. Até lhe apetece ignorar as instruções de montagem, mas sabe que é provável que esta seja uma má opção. Decide então analisá-las. Tem uma sequência de etapas que começa com a identificação das diferentes partes do móvel, peças auxiliares, como parafusos e porcas e, ainda, as ferramentas a usar. Neste momento, tem de fazer corresponder cada peça à sua representação, o que pode não ser assim tão óbvio – afinal o esquema de montagem é uma representação no plano de um objeto 3D, uma relação que acarreta alguma ambiguidade. Na próxima etapa, esta interpretação do esquema inclui ainda compreender em que posição tem de colocar as peças. Será que o fundo da gaveta tem posição própria ou pode ser voltado? E a frente da gaveta? Geometricamente falando, têm simetria de reflexão ou de rotação? Avança para a ligação das peças. Agora as instruções têm uns “balões” que parecem ser ampliações de um detalhe, para perceber melhor como deve colocar os parafusos e rodá-los. Não é que tenha feito um curso em *bricolage*, mas sabe que para tratar os objetos tridimensionais através da sua representação no plano cada área usa as suas próprias convenções, e esta é bastante intuitiva.

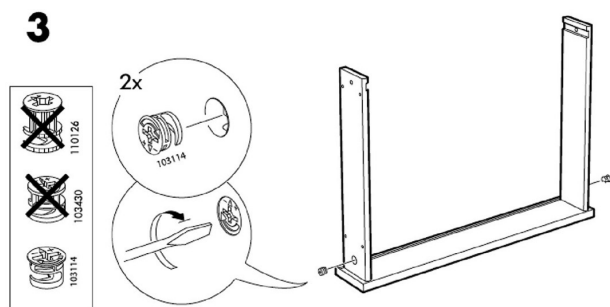


Figura 1. Detalhe das instruções de montagem de uma secretária IKEA®

O seu trabalho vai avançando e monta a secretária com sucesso. Parece firme e não sobram peças. Olhando retrospectivamente para este processo, que capacidades mobilizou? Possivelmente, foi necessário interpretar, perceber, localizar, mover, construir, ações que permitiram compreender e transformar. Estas são,

na verdade, algumas das componentes do raciocínio espacial que aprofundaremos adiante.

RACIOCÍNIO ESPACIAL, DE QUE FALAMOS?

O conceito de raciocínio espacial não é novo, mas é certamente um conceito que está a merecer uma nova atenção. Na tentativa de procurar uma definição, encontramos várias ligações à visualização e algumas das dificuldades que já identificávamos neste conceito, como o uso de vários termos ou expressões (entre os quais “raciocínio visual”, “pensamento espacial”, “imagens mentais”, “espaciais”, “visuais”, etc.) que pretendem significar algo parecido e que têm em comum a atividade de imaginar objetos estáticos ou dinâmicos e atuar sobre eles (por exemplo, rodar, aumentar, etc.) (Gutiérrez 1996; Sinclair et al., 2016), gerando uma “confusão” que reflete a coexistência de diferentes áreas de investigação que se dedicam ao estudo da visualização, entre elas a educação matemática e a psicologia e, neste último caso, com diferenças entre as abordagens dos psicólogos de educação e os cognitivistas.

Apesar de alguns autores encararem a visualização explicitamente como uma forma de raciocínio (Gutiérrez, 1996) ou de “fazer matemática” (Presmeg, 2006), tirando partido de processos de construção e transformação de imagens visuais e mentais, bem como de representações de natureza espacial, atualmente existe alguma literatura que distingue raciocínio espacial de visualização.

No âmbito da investigação em educação matemática, o estudo da visualização não é recente mas, como referi, o cruzamento de várias áreas nem sempre tem contribuído para a sua clarificação ou valorização. Já o conceito de raciocínio espacial é muito mais recente e, de certa forma, ainda pouco explorado. Talvez o primeiro aspeto que merece ser assinalado a seu respeito é que o conceito de raciocínio espacial apresenta-se enfatizando, na sua própria denominação, que se trata de uma forma de raciocínio. É essa a perspetiva do grupo de investigação *Spatial Reasoning Study Group*¹ (SRSg) (Davis, Okamoto & Whiteley, 2015), que sublinha que o raciocínio espacial é mais do que a

¹ O SRSg é um grupo multidisciplinar de investigadores norte-americanos na área da Educação Matemática, Matemática e Psicologia que participam num projeto de investigação sediado na Universidade de Calgary, no Canadá, dedicado ao raciocínio espacial.

perceção espacial (muitas vezes enganadora e motivo frequente de desvalorização da visualização) e que é importante manter um foco na ideia de raciocínio.

Os objetivos deste grupo de trabalho incluem avançar na compreensão da caracterização do raciocínio espacial. Trata-se de uma tarefa complexa pois, no seu entender, o raciocínio espacial não pode ser entendido apenas reduzindo-o aos seus componentes e estes não devem ser considerados isoladamente. Não obstante, o grupo elenca um conjunto de categorias, cada uma envolvendo várias componentes, que evidenciam qualidades críticas do raciocínio espacial. Estas categorias (*interpretar*; (*des*)*construir*; *alterar*; *mover*; *localizar*; *percecionar*) são apresentadas num diagrama (aqui simplificado na figura 2) que as associa preferencialmente à atividade de *compreender* (que consideram ter uma natureza mais “mental”) ou de *transformar* (tendencialmente mais “física”), apesar de não estabelecer uma fronteira que as separe claramente.



Figura 2. Componentes do raciocínio espacial. Adaptado de Davis et al. (2015, p. 141)

Sem pretender analisar todas as componentes e subcomponentes, cabem aqui alguns comentários. Em primeiro lugar, assinalar que *visualizar* é uma subcomponente de *percecionar*, o que nos recorda que o raciocínio espacial não depende apenas do sentido da visão (e, assim, não será adequado torná-lo sinónimo de raciocínio visual) e que há outras formas de nos apropriarmos do espaço. De facto, além do próprio tato, também aqui reconhecido, há mobilização do raciocínio espacial que não depende de nenhum sentido, como podemos perceber nalgumas situações que envolvem orientação. Em segundo lugar, o *interpretar* é algo que sabemos estar presente na resolução de qualquer tarefa, mas que aqui surge como algo mais específico, envolvendo ideias espaciais (por exemplo, como é que interpretamos um paralelogramo oblíquângulo se for uma representação de uma figura no espaço 2D ou 3D?). Em terceiro, estas categorias não são estanques, pois é evidente que existem pontos de contacto nalguns casos (por exemplo, o *dobrar*, da categoria *alterar*, pode estar ligado ao *identificar a simetria*, da categoria *interpretar*). Finalmente, está implícita a ideia de que as ações envolvidas em cada componente não são estritamente mentais, tal como defende Gutiérrez (1996) quando fala de visualização.

A MOBILIZAÇÃO DO RACIOCÍNIO ESPACIAL – UM EXEMPLO PARA REFLETIR

O exemplo que apresento, e que tem por base a tarefa publicada na secção Materiais para a Aula de Matemática deste número da revista, parte do contexto da formação inicial de educadores de infância e professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, mais precisamente de uma Licenciatura em Educação Básica (LEB). Trata-se de um problema proposto na unidade curricular de Geometria, que integra o 2.º ano do plano de estudos. Apesar de se referir a objetos tridimensionais, este é essencialmente um problema do plano. Note-se que também aqui se aplica a noção de raciocínio espacial, já que “espacial” não é sinónimo de espaço 3D, incluindo também outros espaços, particularmente 2D. Este problema foi resolvido em grupos com o máximo de cinco elementos. Tomemos por referência uma das turmas em que surgiram 7 resoluções diferentes, correspondentes aos 7 grupos existentes. À exceção de uma resolução incompreensível, as 6 estratégias seguidas podem ser organizadas da seguinte forma:

Tabela 1. Tipos de resoluções do problema “Frascos de perfumes”

Fundamento da resolução	Operações realizadas	Correção
Com base nas relações espaciais fornecidas	Recorre à decomposição da figura e à simetria (1)	Resolução exata
	Recorre à decomposição e recomposição (1)	Resolução por aproximação
Com base em relações percecionadas	Observação (1)	Resolução sem sucesso
Com base em relações métricas	Obtenção das medidas	Resolução por aproximação com sucesso (2)
	Recurso à fórmula de volume do tronco do cone (3)	Resolução sem sucesso (1)

A primeira resolução que apresento (figura 3) diz respeito ao grupo cuja estratégia assenta, essencialmente, na perceção. Sobre o frasco do meio, argumentam que o “volume da parte de baixo é maior do que o volume da parte de cima” referindo-se aos dois troncos de cone que compõem o frasco. Efetivamente, essa afirmação é verdadeira porque os dois trapézios que os representam têm as mesmas bases, logo o que tem maior altura tem maior área. Contudo, o grupo não sustenta a sua afirmação em qualquer argumento a não ser a observação, tal como referem. Além disso, o líquido não ocupa todo o tronco “de baixo” e acaba por ocupar até menos de metade da capacidade do frasco, ao contrário do que o grupo sugere quando afirma que “o líquido está a mais de metade da figura”. Desta forma, apesar de ser o frasco 2 que não está a meio, a resolução do grupo está incorreta.

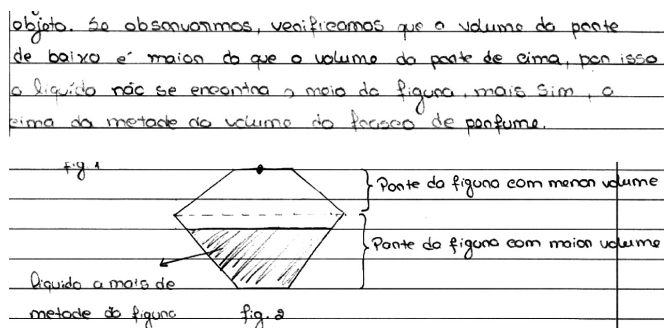
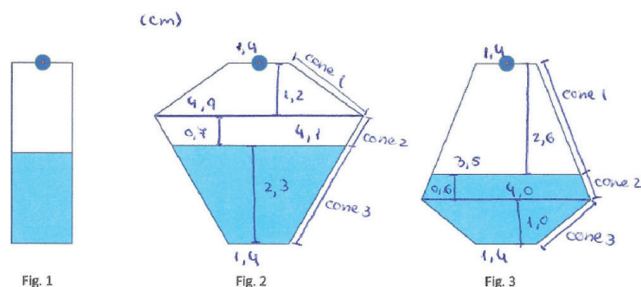


Figura 3. Excerto da resolução do problema “Frascos de perfume” com base na percepção

Ainda sobre a resolução apresentada anteriormente, e tendo em consideração a caracterização do SRS (2015), podemos afirmar que as ações que o grupo realiza se enquadram nas categorias *(des)construir* e *percecionar*, pois fazem uma decomposição da segunda figura da tarefa (frasco do meio) para, através da visualização, chegarem à resposta. Contudo, a visualização não se apoia em propriedades da figura, pelo que o grupo não é bem-sucedido.

A próxima resolução (figura 4) é de um dos grupos que efetuou medições das representações dos frascos 2 e 3 e utilizou-as para calcular o volume dos três troncos de cones representados em cada uma (um tópico não tratado na unidade curricular). Todos os cálculos estão corretos e o grupo conclui que, no frasco 2, o volume do tronco 3 é inferior à soma dos volumes dos troncos 1 e 2, logo o frasco não “está a meio”.



Assim, olhando para as figuras 2 e 3 vemos que estas podem ser divididas em secções de cones. O volume de uma secção de um cone é dado por: $V = \frac{\pi h}{3} \times (R^2 + Rr + r^2)$, em que h é a altura da secção, R é o raio da base maior e r é o raio da base menor da mesma secção. Calculando os volumes temos:

Figura 4. Excerto da resolução do problema “Frascos de perfume” usando relações métricas

Sobre esta resolução, saliento dois aspetos. Por um lado, o grupo utiliza valores que não são fornecidos no problema e são obtidos por medição, o que não é um procedimento habitualmente aceitável. Neste caso, as representações dos frascos não são meramente ilustrativas e a sua forma e dimensão contém dados. Por esse motivo, a obtenção de medições conduz-nos potencialmente a uma resposta correta (como aconteceu), muito embora seja sempre uma resposta por aproximação. Por outro

lado, salienta-se que os dois grupos que usaram esta estratégia não identificaram que uma estratégia análoga poderia ser usada de forma mais simples, calculando as áreas dos trapézios. De facto, este é um problema do espaço 3D que se reduz a um problema do espaço 2D, já que se supõe que o frasco corresponde ao sólido obtido quando a figura apresentada efetua uma rotação completa sobre o seu eixo de simetria.

Desta forma, tendo em conta as componentes de raciocínio espacial propostas pelo SRS (2015), identificamos particularmente a mobilização da componente *(des)construir*, através da decomposição em figuras para o cálculo dos volumes e da componente *interpretar*, ao relacionar as medidas das figuras 2D com os parâmetros do cálculo do volume de figuras 3D.

Na terceira resolução que apresento (figura 5), o grupo recorreu à decomposição e recomposição de figuras. Começaram por simplificar o problema, reduzindo a análise da representação do frasco 2 à análise dos dois triângulos “laterais”, já que o retângulo central do frasco é equivalente ao frasco 1, para o qual já haviam argumentado que se encontra a meio. De seguida, colocaram um triângulo congruente a C na parte vazia do frasco e decompuseram-no nos triângulos A e B que cabem, como mostra a figura, dentro dessa parte, sobrando algum espaço. Concluem assim que este frasco não se encontra a meio mas, mais uma vez, trata-se de uma resolução por aproximação.

Para ver qual dos frascos não se encontrava a meio, primeiramente o grupo decidiu repartir cada uma das figuras (figura 2 e 3) como se encontra a figura 1, ou seja, um retângulo ao alto. De seguida, dividiu-se as figuras em formas geométricas, na parte onde se encontrava o líquido e depois na outra parte, colocámos essas mesmas figuras para ver se preenchia o espaço.

Assim, na figura 2 é possível visualizar que o frasco de perfume não se encontra a meio, uma vez que, após a colocação das formas geométricas este não se encontrava totalmente preenchido.

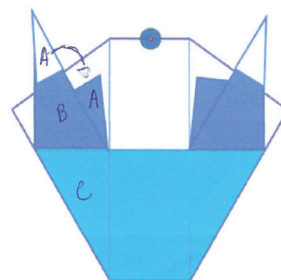


Figura 5. Excerto² da resolução do problema “Frascos de perfume” usando composição e recomposição de figuras

Desta forma, podemos considerar que esta resolução envolve raciocínio espacial relativo à categoria *(des)construir* porque assenta sobretudo na decomposição e recomposição de figuras, bem como *interpretar* quando efetuam a comparação.

Finalmente, apresentamos a única resolução exata apresentada nesta turma. O grupo faz um relato do processo vivido, incluindo as tentativas infrutíferas (figura 6). A estratégia que acabou por

² Na imagem, as letras foram introduzidas pela autora para melhor compreensão da resolução

ser seguida surge de uma experiência em que traçam segmentos ainda sem conhecer o seu proveito:

Dividimos, deste modo, o hexágono irregular em várias partes, que são, por sua vez, polígonos: Retângulos, triângulos e trapézios. No entanto, não chegámos a nenhuma conclusão e, por isso, decidimos continuar a explorar a figura, traçando segmentos de reta.

Se o frasco é composto, ainda, por uma área que corresponde aos triângulos a amarelo e como essa parte do frasco se encontra vazia, então, o frasco tem mais espaço vazio do que cheio.

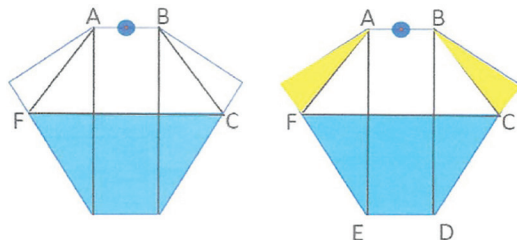


Figura 6. Excerto da resolução do problema “Frascos de perfume” recorrendo à decomposição e simetria

A resolução do grupo assenta assim na simetria do hexágono encontrado que, embora não expressem, está garantida pela igualdade da base e topo do frasco e pelo facto de o líquido estar a metade da altura. Neste caso, o raciocínio espacial é mais complexo que nos restantes: envolve *alterar*, quando incluem novos elementos na figura (os segmentos FA e CB); *percecionar*, quando visualizam o novo hexágono que surge na figura e a sua simetria; *(des)construir*, quando decompõem o frasco nas partes branca, azul e amarela³; e *interpretar*, quando comparam as áreas da parte com líquido e sem líquido, chegando assim à conclusão que o frasco tem menos de metade do perfume. Trata-se de uma resolução eficiente e eficaz, aparentemente simples, mas que envolve várias componentes do raciocínio espacial e que constitui um exemplo de como este tipo de raciocínio pode ser profícuo.

RACIOCÍNIO ESPACIAL, SÓ EM GEOMETRIA?

Todos os exemplos apresentados até aqui são do campo da geometria. No entanto, podemos questionar: Não há raciocínio espacial noutros campos da matemática? E fora da matemática? Como referem Goldenberg, Cuoco e Mark (1998), o raciocínio espacial constitui, para muitos alunos, um ponto de acesso, uma primeira oportunidade de participar na atividade matemática. Mais ainda, Whiteley et al. (2015) referem estudos que revelam uma correlação positiva entre a capacidade de raciocinar espacialmente e o desempenho em matemática, mesmo no campo dos números e, de uma maneira mais geral, nas disciplinas STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*).

De facto, são vários os conceitos de outros campos da matemática cuja compreensão pode ser aprofundada quando suportada em relações espaciais: a relação parte-todo e unidade de referência no campo dos números racionais (figura 7), a média aritmética

(figura 8) na estatística, ou os casos notáveis da multiplicação na álgebra, (figura 9) são apenas alguns exemplos.

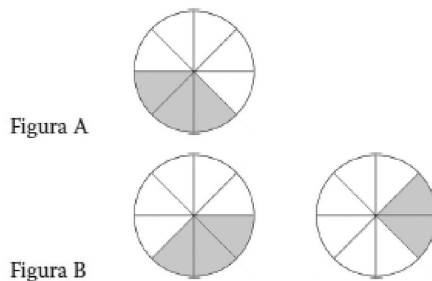


Figura 7. Figuras de suporte para a discussão da unidade de referência. Retirado de Veloso, G. (2017)

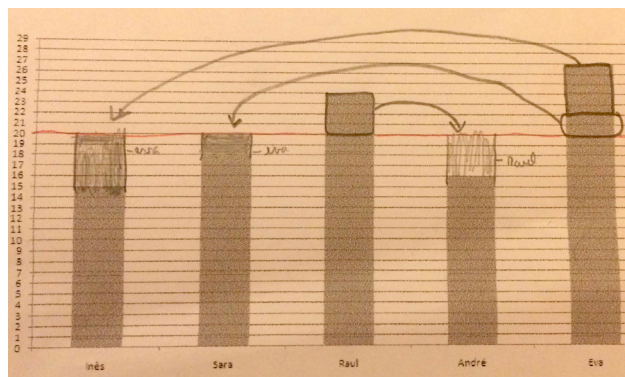


Figura 8. Representação gráfica da média como distribuição equitativa dos dados. Retirado de Gregório, M. (2014)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \hline b & a \\ \hline \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline a^2 & \\ \hline \hline & \\ \hline \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & ab \\ \hline \hline ab & \\ \hline \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \hline & b^2 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 9. Representação geométrica do quadrado de um binómio

Além da matemática, são também inúmeros os exemplos de outras áreas científicas que requerem a mobilização do raciocínio espacial, de áreas artísticas com predominância para as artes visuais, e no nosso quotidiano, como vimos no início deste artigo.

CONCLUINDO...

São muitas as razões para valorizar o raciocínio espacial na matemática e noutros domínios. Os exemplos que apresentei ilustram, particularmente no caso da geometria, como o raciocínio espacial pode desempenhar um papel relevante. O SRSG (2015) vai mais longe, afirmando que é necessário “especializar o currículo”, na medida em que o desenvolvimento do raciocínio espacial potencia a compreensão de muitos conceitos e procedimentos e promove a resolução de problemas. De facto, cada vez mais estamos imersos em ambientes em que a informação está compactada na forma visual, sendo dirigida tanto a adultos como a crianças. Valorizar o raciocínio espacial significa, por um lado, tirar proveito desses ambientes e, por

³ Na versão impressa do artigo, correspondem às partes branca, cinzenta escura e cinzenta clara, respetivamente.

outro, preparar as crianças, jovens e adultos para funcionarem num mundo com muitos cenários, que incluem as representações mais convencionais, mas também o mundo virtual, com tudo o que já oferece e ainda nos há de oferecer.

Referências

- Davis, B., Okamoto, Y. & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In B. Davis & Spatial Reasoning Study Group. *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 139-150). New York, NY: Routledge.
- Frances, K. & Whiteley, W. (2015). Interactions between three dimensions and two dimensions? In B. Davis & Spatial Reasoning Study Group. *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 121-136). New York, NY: Routledge.
- Goldenberg, E. P., Cuoco, A., & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 3-44). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Gregório, M. (2014). Média: O procedimento e a compreensão. *Educação e Matemática*, 123, 31-35.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 1, 3-19.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.
- Silva, J. C. et al. (2019). *Recomendações para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática. 1º relatório*. Consultado em https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf
- Silva, I. L., Marques, L., Mata, L. & Rosa, M. (2016). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. ME/DGE. Consultado em http://www.dge.mec.pt/ocepe/sites/default/files/Orientacoes_Curriculares.pdf
- Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics education*, 48(5), 691-719.
- Veloso, G. (2017). O modelo retangular na compreensão de algoritmos operatórios com números racionais representados em fração. *Educação e Matemática*, 143, 5-9.
- Whiteley, W., Sinclair, N. & Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? In B. Davis & Spatial Reasoning Study Group. *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 3-14). New York, NY: Routledge.

LINA BRUNHEIRA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

FRASCOS DE PERFUME

As embalagens dos produtos de consumo corrente não são ingénuas. O *design*, os tamanhos e as dimensões, o nome e texto associado são aspetos fundamentais. E basta comparar embalagens antigas com embalagens recentes para ver como o *marketing* das embalagens evoluiu.

Algumas embalagens são mesmo pensadas para enganar o consumidor. Durante muito anos, usei um perfume cujo frasco era bastante enganador. Quando o líquido estava a meio da altura, já a quantidade de perfume no frasco estava a muito menos de meio. Foi esta situação que inspirou a criação deste problema a que chamei *Frascos de perfume*. Os frascos parecidos com os da figura 2 são muito usados na indústria de perfumes, pois criam a ilusão de que o perfume está a durar muito mais tempo do que realmente acontece.

Esta proposta de tarefa para a aula de matemática tem vários objetivos. Um, obviamente, é a resolução do problema. É um problema de comparação de volumes, que aponta para a observação das formas e análise das relações entre as medidas dos objetos envolvidos. Além disso, proporciona várias estratégias de resolução.

Este problema foi proposto aos alunos de Geometria da Licenciatura em Educação Básica da ESE de Lisboa. A discussão de resoluções apresentadas por esses alunos é desenvolvida pela Lina Brunheira num artigo publicado nesta revista.

Do ponto de vista da aprendizagem, este é um problema desafiante para construir um modelo dinâmico que permita simular o volume total do frasco e a variação da quantidade de líquido em função da variação das dimensões e da altura do líquido. Também é interessante fazer experiências com frascos reais. E com crianças mais pequenas as representações dinâmicas podem ser usadas para fazer discussões interessantes.

Mas há ainda um outro objetivo de natureza totalmente diferente. É o objetivo de desenvolvimento da nossa capacidade de observar o que nos rodeia e de problematizar muitas situações que vivemos no dia a dia. Afinal de contas quantas embalagens são concebidas para nos criar ilusões? Ainda uso este perfume, e até já pensei em pedir um patrocínio à empresa que o produz para realizar um projeto sobre embalagens.

CRISTINA LOUREIRO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

Frascos de perfume

Os frascos representados nas figuras têm algum perfume, mas apenas um deles não está meio cheio.

Os frascos das figuras 1 e 2 têm o líquido exatamente a meio da altura. O frasco da figura 3 tem o líquido abaixo do meio da altura. O frasco 1 é cilíndrico e os outros dois são compostos por troncos de cone. Todos os frascos estão representados por uma vista de frente, todos têm a mesma altura e bases de igual largura.

Um dos frascos não está a meio. Qual é?

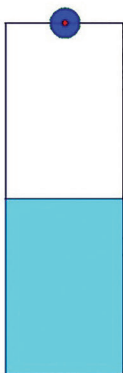


Figura 1

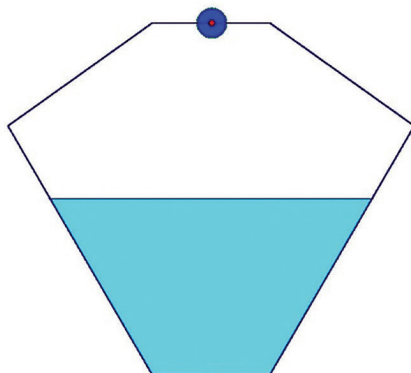


Figura 2

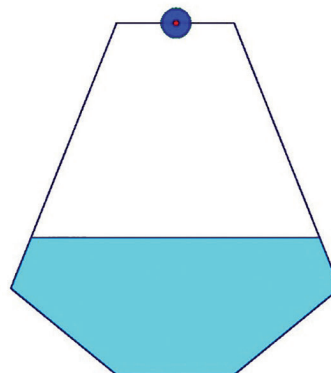


Figura 3

Uma aula visual sobre soma de frações

LEONARDO BARICHELLO

Todos os leitores deste texto já devem ter testemunhado um estudante somando numeradores e denominadores ao responder uma questão que pede a soma de duas frações. Esse erro é tão comum que ganhou o nome de *whole number bias* em inglês e é fácil encontrar artigos científicos inteiros que giram em torno dele.

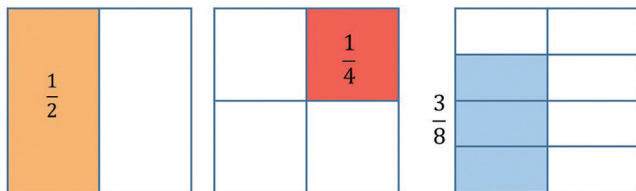
No mar de tentativas de explicar a reincidência desse erro, uma tentativa recente que me parece muito bem fundamentada sugere que como os estudantes não conseguem associar um significado ao objeto fração representado simbolicamente, acabam caindo na armadilha de atribuir significado às partes que compõe esse símbolo: os números inteiros no numerador e denominador. Ao fazer isso, os estudantes param de ver a fração como um objeto e passam a ver dois números inteiros.

O mesmo raciocínio se aplica à soma de duas frações: ao invés de ver uma soma (ou duas frações), os estudantes veem quatro números inteiros e um sinal de soma, afinal, eles só conseguem atribuir significado a esses objetos isoladamente.

A proposta de aula que apresento aqui é uma tentativa de evitar esse processo com duas ações. Primeiro, apresentar soma de frações através de uma representação visual (não simbólica) na expectativa que ela traga significado à operação. Segundo, postergar a necessidade de operar aritmeticamente com numeradores e denominadores ao somar duas ou mais frações.

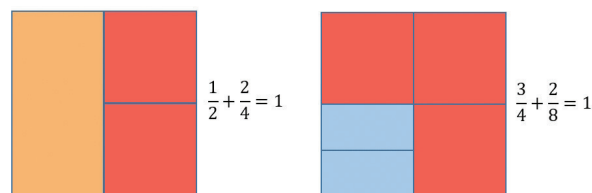
INTRODUÇÃO: UMA ANIMAÇÃO

A animação, que pode ser vista em <http://youtube/QAOvNDbyhjQ>, é o elemento central dessa aula. A escolha de uma animação ao invés de uma exposição do professor tem a intenção de reforçar a visualidade dos objetos. A animação começa apresentando frações unitárias no modelo de área retangular.



Em seguida, a animação introduz soma de frações a partir da ideia de “juntar partes” sobre o todo. Um detalhe fundamental aqui é que todas as somas apresentadas resultam em 1.

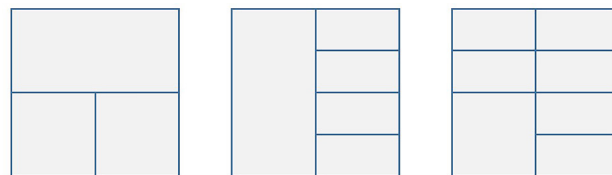
A apresentação da soma em forma simbólica é de fundamental importância, pois é ela que de fato faz a conexão entre a representação visual e a soma simbólica de frações.



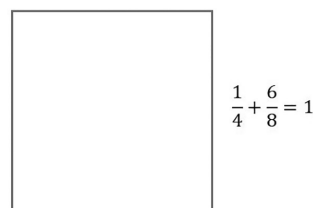
Note que como as somas todas resultam em 1, os estudantes não precisam realizar nenhuma operação aritmética explícita com numeradores e denominadores, reduzindo o risco de que incorram no *whole number bias*.

PRIMEIRAS QUESTÕES

Após o vídeo, sugiro dois tipos de questões. A primeira pergunta seria “Qual é a soma representada em cada um dos diagramas?”



Novos itens podem ser gerados facilmente. O professor pode incluir composições com 3 frações e introduzir uma nova fração, como $\frac{1}{16}$. A segunda pergunta pede que os estudantes representem em diagramas somas com resultado igual a 1 dadas simbolicamente.



As duas questões estão ainda bastante próximas do que foi mostrado na animação. A sugestão para a próxima questão é pedir que os estudantes criem outras duas somas iguais a 1. Sugiro pedir que façam isso em uma folha em branco com apenas um quadrado desenhado para que usem como esqueleto para a resposta, pois o uso de folhas quadriculadas ou com divisões

pré-desenhadas sabidamente influenciam os estudantes a usar abordagens que tendem ao *whole number bias*.

Na questão anterior, é possível expandir o modelo explorando algumas variações. Por exemplo, pode-se pedir aos alunos que obtenham uma ou mais somas que resultem em 2 ou em $\frac{1}{2}$ e represente-as simbólica e visualmente.

O passo final pode ser dado com questões como as mostradas abaixo. Note que elas podem expandir o modelo para situações em que o resultado não é igual a 1.

$\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$ é igual a 1?

$\frac{1}{2} + \frac{5}{8}$ é maior do que 1?

Quando propus essa questão, dei apenas um espaço em branco abaixo de cada item e isso foi suficiente para sugerir aos estudantes que resolvessem as questões usando diagramas. É possível estender a questão perguntando a eles por quanto a soma é maior ou menor do que 1 ou pedindo que escrevam uma justificativa para a resposta dada.

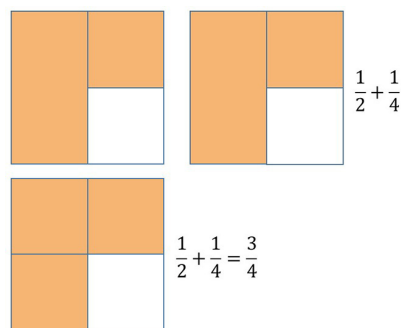
A MINHA EXPERIÊNCIA

Esta aula fez parte da coleta de dados da minha pesquisa de doutorado (Barichello, 2019) e as questões apresentadas acima foram suficientes para ocupar uma aula com uma hora de duração.

O objetivo da minha tese não foi avaliar quantitativamente o impacto de aulas seguindo essa abordagem ou compará-las com outras abordagens, mas um dado chamou muito a atenção: em um grupo de estudantes de baixo desempenho, após três aulas seguindo essa abordagem, nenhum deles cometeu o erro de somar numerador e denominador em uma avaliação diagnóstica aplicada três meses depois, enquanto que em uma outra turma com perfil muito parecido cerca de 90% dos estudantes que tentaram resolver a soma de frações pedida cometeu o tal erro.

Essa é apenas uma das aulas que propus dentro da perspectiva de uma abordagem essencialmente visual para esse tópico. Depois dessa aula, pode-se realizar uma atividade semelhante com outros denominadores: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$. É possível seguir ainda mais adiante na direção de somas que não resultam em 1, como mostrado no vídeo youtu.be/bfCLOxiNOxQ.

O pacote completo com os 12 planos de aula que desenvolvi no meu doutorado, e aprimorei após aplicações, oficinas e palestras, estão disponíveis em www.mais.mat.br/planos-de-aula-fracoes.html. Sinta-se à vontade para baixar e usar!



COMENTÁRIO FINAL

Um dos preceitos fundamentais dessa abordagem é que o significado de certos conteúdos pode ser ancorado em representações visuais de modo que elas ofereçam mais do que apenas um modo de representar certos objetos, mas também emprestem as transformações, operações e estrutura lógica de um contexto mais concreto (figuras planas) para um mais abstrato (frações). Esse preceito encontra respaldo em trabalhos como os desenvolvidos por Núñez et al. (1999) e Lakoff e Núñez (2000).

Dentro dessa ideia, pesquisas sugerem que o melhor é focar em um único modelo e introduzir outros modelos posteriormente de modo que eles também possam se apoiar nos significados oferecidos pelo primeiro.

Uma das conclusões da minha tese é que essa abordagem cria um contexto favorável para estudantes de baixo desempenho, pois reduz a dependência de conteúdos matemáticos anteriores e ainda promove habilidades visuais que parecem ser fundamentais para a aprendizagem de Matemática como um todo (Verdine et al., 2014).

Referências

- Barichello, L. (2019). *An investigation into how low achieving secondary students learn fractions through visual representations* (tese de doutorado). University of Nottingham, Nottingham.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics come from: How the embodied mind brings Mathematics into being*. Basic books.
- Núñez, R. E., Edwards, L., and Matos, J. (1999). Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1), 45–65.
- Verdine, B. N., Golinkoff, R., Hirsh-Pasek, K., & Newcombe, N. (2014). Finding the missing piece: Blocks, puzzles, and shapes fuel school readiness. *Trends in Neuroscience and Education*, 3(1), 7–13.

LEONARDO BARICHELO

UNICAMP - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, BRASIL

Reinvenção do ensino a distância: a inovação ao ritmo de cada professor

HELENA ROCHA

ISABEL OITAVEM

FLORIANO VISEU

SÓNIA PALHA

A suspensão das aulas presenciais na sequência da pandemia que estamos a atravessar trouxe para primeiro plano o ensino a distância. Neste artigo partilhamos algumas ideias e conceptualizações relativas a este tipo de ensino, abordamos aquilo que alguns autores que se têm dedicado à temática apontam como importantes desafios e oportunidades que se lhe encontram associados e, por fim, partilhamos algumas possíveis opções e recursos que pensamos poderem ser úteis para todos os professores que estão a viver a sua primeira experiência de ensino a distância.

ENSINO A DISTÂNCIA

O ensino a distância remonta a tempos longínquos, ao ensino que, no século XIX, se processava por correspondência através dos serviços postais (Garrison, 1985). A morosidade desta modalidade foi melhorada através do recurso a tecnologias de comunicação via telefone ou teleconferência (áudio/vídeo), o que permitiu, segundo Garrison (1985), o uso mais personalizado na educação a distância. Os nascidos em meados do século passado lembrar-se-ão da telescola e do propedêutico, cujas aulas eram processadas via televisão. Com o surgimento dos computadores, surgiu o ensino assistido por computador, o que teve repercussões na perspetiva convencional de encarar o ensino como processo que resultava da interação comunicacional entre o professor e o aluno, e que deu lugar à interação entre aluno e *software*. Percebeu-se das vantagens de ser “o aluno a decidir quando e onde aceder aos conteúdos e situações de ensino” (Gomes, 2003, p. 140). A ligação à escala mundial de redes de computadores ligados entre si fez emergir formas de comunicação, como, por exemplo, através do correio eletrónico, de fóruns, de blogues, que se tornaram eficazes, rápidas, podendo processar-se de forma síncrona e/ou assíncrona. A comunicação individual professor/aluno ou aluno/aluno e a comunicação em grupo, ao valorizar a interação social na construção do conhecimento (Vygotsky, 2001), veio desafiar o papel desempenhado pelos alunos e professores nos sistemas de ensino a distância (Gomes, 2003).

Mas, o que se entende por ensino a distância (EaD)? Trata-se de uma modalidade de educação em que o aluno, por circunstâncias

várias, estuda e se forma sem frequentar fisicamente uma sala de aula. Segundo Moore e Kearsley (2007), é a aprendizagem planificada que se adquire normalmente num lugar diferente do local de ensino, “exigindo técnicas especiais de criação do curso e de instrução, comunicação por meio de várias tecnologias e disposições organizacionais e administrativas especiais” (p. 2). Apesar da separação física entre o professor e o aluno, a tecnologia serve de mediação à interação e à troca de conhecimentos (Nicolaio & Miguel, 2010). Estes autores advogam que a modalidade de EaD democratiza o ensino, ao alcançar um número elevado de pessoas localizadas em lugares remotos, ao possibilitar a formação académica para quem não dispõe de tempo e até mesmo de condições financeiras para realizar cursos presenciais.

Existem vários modelos de EaD, que diferem na tecnologia e na forma como é usada. Em alguns modelos, os docentes e a instituição possuem algum controle, enquanto noutros são os alunos que determinam esse controle ao definir o seu ritmo de estudo e de aprendizagem. Com o advento das tecnologias de informação e comunicação (TIC), o EaD surge conciliado a modalidades de *e-learning* ou de *b-learning* (*blended learning*).

O *e-learning* representa um ambiente de aprendizagem no qual a distribuição dos conteúdos, a interação e o apoio na aprendizagem são suportados pela Internet (Machado, 2001). Os alunos estudam no local que mais lhes convém e ao seu próprio ritmo e podem conciliar os estudos com a vertente profissional (Moran, 2005). A proliferação na literatura de referências a esta modalidade de ensino e de aprendizagem levam Lencastre e Coutinho (2015) a considerar que o *e-learning* é uma forma de aprendizagem a distância, mas a aprendizagem a distância não é *e-learning*. A associação entre os dois termos é usual, mas o *e-learning* realiza o que não é possível com a aprendizagem a distância, por exemplo: (1) o aumento da interação professor-aluno; (2) a comunicação bilateral; (3) a comunicação síncrona e assíncrona; (4) a inclusão de estratégias colaborativas; (5) a aprendizagem mediada por materiais e estratégias que incentivam os alunos a processar informação autonomamente; (6) a recolha sistemática de dados; e (7) a atualização de informações relevantes em tempo real.

Para estes autores, o *e-learning* possui vários significados. Alguns com mais ênfase na capacidade de obter informações através da Internet ou para aprender através de recursos multimídia, intrinsecamente associados à Internet e à Web. Outros em que o *e-learning* é visto numa dimensão de aprendizagem pedagógica através da comunicação, colaboração e cooperação num espaço virtual.

Quanto ao *b-learning* (*blended learning*), Lencastre e Coutinho (2015) consideram que, inicialmente, também foi usado como o elo entre a sala de aula e a aprendizagem a distância mediada por um computador. Mais recentemente, devido à crescente disseminação da Internet, o conceito de *b-learning* resulta da introdução das TIC na escola. Nesse contexto online, o conceito *b-learning* tem duas formas distintas de interpretação que não são mutuamente exclusivas: (1) a informação é distribuída e só se torna acessível através de meios de comunicação tecnológicos como complemento às formas de comunicação presencial; (2) a informação é dispersa e os participantes estão distribuídos espacialmente. Na perspectiva destes autores, embora o conceito de *b-learning*, historicamente, se adequasse melhor ao segundo modelo, as aulas presenciais foram-se transformando no modelo de aprendizagem desenvolvido com as TIC. Com base nesta perspectiva, o professor não interfere nas diferentes tarefas que propõe durante a sessão presencial, permitindo ao aluno autossuficiência em determinadas atividades, e recomenda outras tarefas usando as TIC, além dos momentos dedicados à participação em sala de aula.

Outra forma de encarar a modalidade *b-learning* passa pelos conceitos síncronos e/ou assíncronos. A aprendizagem síncrona ocorre para todos os alunos ao mesmo tempo, que frequentam as mesmas aulas, como se estivessem numa sala de aula presencial, mas na realidade eles estão numa sala de aula virtual, acessível através da Internet. As formas de comunicação síncrona podem basear-se no uso de texto, como mensagens instantâneas, ou no uso de áudio e vídeo. A aprendizagem assíncrona acontece em horários diferentes para cada aluno, de acordo com o seu tempo e a sua necessidade. Exemplos de atividades assíncronas são os fóruns e o e-mail. Quando ambas as abordagens, síncronas e assíncronas, são usadas temos uma abordagem *b-learning*, que pode acontecer em qualquer lugar e a qualquer momento. Pode ser alcançado através do computador, do smartphone, do Tablet ou qualquer outro dispositivo eletrónico. A interação é a peça que unifica todos esses conceitos de educação e pode ser alcançada de várias maneiras: aluno-professor, conteúdo-aluno, aluno-aluno, máquina-aluno.

ENSINO A DISTÂNCIA – DESAFIOS E OPORTUNIDADES

Uma revisão da literatura sobre ensino a distância de matemática (Silverman & Hoyos, 2018) fornece uma visão mais detalhada sobre as oportunidades e desafios específicos desse tipo de ensino. Algumas das oportunidades oferecidas aos alunos incluem encontrar materiais para um conteúdo específico, ocasiões de interação com os materiais e com colegas e/ou

professor (Silverman & Hoyos, 2018), assim como oportunidades para receber apoio matemático diferenciado. Em relação a esse último aspeto, Landenfeld et al. (2018) desenvolveram um ambiente de aprendizagem on-line - o *viaMINT* - para fornecer suporte matemático diferenciado aos estudantes de ciências e engenharia. Os alunos começam por fazer um teste online para avaliar o seu nível inicial de conhecimento. E com base nos resultados do teste, são recomendados conteúdos de aprendizagem on-line (vídeos e vários exercícios). As soluções são avaliadas eletronicamente e, se necessário, uma explicação detalhada é fornecida em vídeo. Os resultados de um estudo envolvendo 878 participantes usando o *viaMINT* mostraram que este contribuiu positivamente para o desenvolvimento do desempenho e da confiança dos alunos relativamente aos conteúdos matemáticos.

O envolvimento ativo dos alunos na resolução de tarefas que requeiram reflexão e colaboração digital é um dos desafios da educação *on-line*. Hoyos et al. (2018) sugerem que, para lidar com essas dificuldades, mais atenção deve ser dada à atividade do indivíduo (professor ou aluno), sendo necessários apoios específicos para realizar mudanças epistemológicas. Esses suportes podem ser incluídos no dispositivo computacional, no ambiente de aprendizagem ou de outra forma fornecidos por intervenção tutorial. Um exemplo é a metodologia DIST-M (*Digital Interactive Storytelling in Mathematics*) desenvolvida por Albano e Dello-Iacono (2018). O DIST-M é inserido numa plataforma de aprendizagem (*Moodle*) e consiste em *scripts* de colaboração, destinados a regular e estruturar papéis e interação num ambiente colaborativo. Os alunos são personagens de uma história e interagem enfrentando problemas, cuja solução é necessária para avançar. O *design*, por um lado, pode motivar os alunos e, por outro lado, pode trazer benefícios da integração entre o pensamento narrativo e o pensamento lógico-científico. Os autores testaram este *design* num estudo piloto envolvendo onze alunos do 10.º ano, tendo identificado melhorias no nível de argumentação dos alunos, sugerindo que o *script* apoia o desenvolvimento de raciocínios em torno de conceitos matemáticos.

A educação *on-line* também cria novas oportunidades para a prática profissional dos professores de matemática. Os professores passam a ter acesso a grande variedade de recursos, podendo adaptá-los ou mesmo criar novos recursos que se adequem às suas necessidades individuais (Silverman & Hoyos, 2018). É todo um conjunto de novas oportunidades, que tenderá a requerer novas práticas. Vescio, Ross e Adams (2008) dão atenção às normas instrucionais. As normas usuais nas escolas não serão necessariamente as que mais se adequam a contextos alternativos. Ainda assim, existirá uma tendência dos professores para efetuar uma transferência entre contextos alternativos, e isso será simultaneamente um desafio e uma oportunidade para reflexão e para promover o desenvolvimento profissional do professor.

Um dos desafios mais significativos associados ao ensino a distância é, segundo Hoyos et al. (2018), a promoção de processos de reflexão durante a resolução de tarefas matemáticas complexas. Os autores investigaram este desafio trabalhando com alunos do ensino básico e secundário em *b-learning*. O ambiente híbrido que conceberam tornou possível promover o nivelamento de alunos mais desfavorecidos e contribuiu para um uso mais efetivo e significativo de ferramentas tecnológicas por parte dos alunos e dos professores.

A NOSSA REALIDADE

De um momento para o outro vimo-nos todos de modo imprevisto e sem tempo para grande preparação na necessidade de conceber alguma forma de proporcionar aos nossos alunos a continuação das suas aprendizagens, mas agora num contexto exclusivo de ensino não presencial. Independentemente do nível de ensino, isto significa um grande desafio para todos, professores e alunos.

As experiências de que temos conhecimento, caracterizam-se pela diversidade. Alguns professores procuram de algum modo recriar à distância as aulas que costumavam dar, outros optam por abordagens diferentes. Alguns valorizam momentos em que todos estão presentes simultaneamente, outros, optam por formas que se podem enquadrar numa disponibilização de material para que cada aluno possa trabalhar quando assim o entender. Sabemos que estas opções se prendem com um vasto conjunto de razões, onde merece lugar de destaque o equipamento e as condições de acesso à internet de professores e alunos, mas onde o conhecimento do professor sobre as opções disponíveis também é um elemento importante a ter em conta. Olhemos então para algumas das opções que sabemos estarem a ser implementadas e também para a forma como alguns professores sentem a experiência que estão a viver e as opções que estão a fazer.

A EXPERIÊNCIA

O vídeo

Alguns professores optaram por proceder a gravações em vídeo, em que procuram apresentar conceitos e antecipar dúvidas ou dificuldades. Algo que podemos considerar como próximo de uma reprodução de uma aula usual, mas em que não há qualquer intervenção dos alunos. Trata-se, portanto, de uma opção por ensino a distância de forma assíncrona e onde é adotada uma perspetiva expositiva do ensino. Procuram depois partilhar este recurso de formas diversificadas. São comuns referências ao moodle ou a outra plataforma com características similares existente na instituição.

Relativamente às opções assumidas, elas incluem quase sempre uma forma de procurar reproduzir o quadro da sala de aula. Alguns professores recorrem mesmo a quadros de giz ou quadros brancos dos seus filhos, filmando-os para que os alunos ao ver o vídeo possam acompanhar simultaneamente a explicação e o registo escrito. Outros professores optam por colocar a câmara

de modo a permitir a visualização do que vão escrevendo numa simples folha de papel. Opções mais tecnológicas recorrem a *tablets* ou computadores com ecrãs tácteis e a uma caneta digital, para assim conseguirem incluir a visualização da escrita matemática.

A videoconferência

Outros professores procuram socorrer-se de *softwares* de videoconferência, para desta forma conseguir algo que se aproxime das aulas que usualmente dão. Neste caso estamos numa situação de ensino a distância síncrona, em que todos participam no processo de ensino e aprendizagem ao mesmo tempo. É assim possível a existência de interações entre o professor e os alunos, bem como entre estes últimos.

Entre os *softwares* para videoconferência disponíveis em acesso livre, podemos referir a *Big Blue Button*, que permite a partilha de som e imagem entre um grupo de até 150 participantes, possibilitando a partilha entre todos do ecrã do computador (tanto pode ser partilhado o ecrã do professor como o ecrã de um aluno). A realização de *quizzes* é outra das potencialidades, no entanto ao contrário do que sucede noutros casos este *software* não permite a partilha de ficheiros. É contudo possível uma articulação com o moodle, que permite a disponibilização de ficheiros. Esta opção para videoconferência caracteriza-se ainda por não requer instalação prévia. Mais informações podem ser obtidas em <https://docs.bigbluebutton.org/support/faq.html>.

Outra opção é o *Teams meetings* da *Microsoft*. Este é igualmente um *software* de livre acesso (por agora), permitindo 250 participantes em simultâneo. Tal como no caso anterior é possível a partilha do ecrã de qualquer dos participantes mas, ao contrário do que aí sucedia, neste caso não é possível a realização de *quizzes*, sendo contudo possível a partilha de ficheiros e o trabalho em torno destes. Ao contrário do que sucede no caso anterior este é um *software* que requer instalação por parte de todos os participantes. Mais informações podem ser obtidas em <https://products.office.com/pt-pt/microsoft-teams/free?market=pt>.

Mais uma alternativa disponível é o *Videocast*. Neste caso o número de participantes é ilimitado, mas a interação é mais limitada, sendo apenas possível ao professor a partilha de vídeos ou a partilha de ecrã para permitir por exemplo a visualização de um *PowerPoint*. Os alunos apenas podem participar através de um chat. Neste caso a instalação é apenas necessária para o professor. Mais informações podem ser obtidas em <https://videocast.fccn.pt/home>.

E por último sugerimos o Zoom. Um *software* para videoconferência que permite a interação simultânea entre 50 participantes. A principal limitação desta opção é que na versão gratuita apenas são permitidas sessões com a duração máxima de 40 minutos. Ainda assim, é possível a interação entre todos os participantes, sendo possível a todos partilhar o ecrã e ficheiros, bem como realizar *quizzes*. À semelhança do que sucede com o *Teams meetings*, também neste caso é necessária a instalação

por parte de todos os participantes. Mais informações podem ser obtidas em <https://videoconf-colibri.zoom.us/>

As plataformas

Ao nível do ensino não superior existe um conjunto de plataformas que podem ser exploradas pelos professores. É o caso da plataforma Khan Academy (<https://pt-pt.khanacademy.org/>), uma plataforma que já foi inclusivamente alvo de atenção em artigos publicados aqui, na *Educação e Matemática* 146 e na *Educação e Matemática* 152; e da aplicação Milage Aprender+ (https://milage.ualg.pt/?page_id=1176), que também já foi abordada num artigo publicado na *Educação e Matemática* 148; bem como das plataformas digitais concebidas pelas editoras, que nas presentes circunstâncias decidiram oferecer gratuitamente a todos os seus recursos. Neste tipo de plataformas que se encontram organizadas por ano de escolaridade é oferecido aos alunos a oportunidade de resolver exercícios, sendo oferecidas ajudas e explicações sobre os conceitos envolvidos quando necessário.

Outras plataformas existem, em que toda a estruturação e seleção de material são deixadas ao professor. A plataforma oferece o ambiente e as ferramentas para o professor organizar e estruturar o processo de ensino. Um desses exemplos é o Google Classroom. Esta é uma plataforma gratuita que permite a criação de turmas ou salas. Estas são constituídas por três grandes áreas. Stream é uma área onde surgem os trabalhos propostos pelo professor e onde todos podem colocar comentários (se o professor assim o permitir) – uma espécie de mural. Trabalhos da turma é a área onde o professor atribui os trabalhos à turma ou a alunos específicos, sendo possível estabelecer prazos e disponibilizar ficheiros. É também nesta área que os alunos submetem os trabalhos, sendo posteriormente possível ao professor dar feedback ou até mesmo classificar. Pessoas é a área onde podemos ver todos os participantes e convidar novos elementos (através de email ou do código da turma que é gerado automaticamente pelo Classroom). Mais informação pode ser encontrada em https://edu.google.com/products/classroom/?modal_active=none (em inglês).

O moodle e os fóruns de discussão

O moodle é uma plataforma familiar tanto a escolas como a universidades. Muitas instituições educativas usam-na para partilhar informação, permitir a submissão de trabalhos e até para realizar *quizzes* ou testes. Neste momento os professores que se estão a apoiar nela parecem estar a privilegiar precisamente a partilha de ficheiros com fichas de trabalho e a posterior submissão da sua resolução. Mas existem igualmente casos de professores que a estão a utilizar para partilhar recursos mais diversificados, como por exemplo vídeos, e posteriormente a apoiar-se em fóruns para permitir uma partilha e discussão entre todos.

O email e o WhatsApp

Em alguns casos os professores estão a optar por partilhar ficheiros com os alunos. Embora não tenha necessariamente

que ser sempre assim, tanto quanto nos constou essa partilha está a ser essencialmente de fichas para fazer (quando são enviados ficheiros) ou da indicação de páginas a ler do manual e de exercícios, também deste, a resolver. No caso dos grupos do *WhatsApp* parece existir alguma intenção de criar um grupo e incentivar a partilha entre todos.

AS DIFICULDADES E AS ADAPTAÇÕES NECESSÁRIAS

O uso da linguagem matemática

A Matemática é uma disciplina muito particular, entre outras razões, por dispor de uma linguagem própria e muito específica (Martinho & Rocha, 2018). Tal como referimos na revisão da literatura, esta circunstância é uma fonte de obstáculos quando queremos fazer uma transição para um ambiente tecnológico e coloca problemas aos professores de Matemática que não são de desprezar.

A interação com os alunos e o feedback

A grande alteração que todos sentimos na passagem para um ambiente de ensino a distância quando comparado com o ensino presencial a que estávamos habituados prende-se com a interação que é possível estabelecer com os alunos. Vários dos professores com que temos contactado queixam-se precisamente da dificuldade de falar para uma câmara, sem conseguir saber como as suas palavras estão a ser recebidas e compreendidas. Aqueles que optam pela videoconferência sentem a dificuldade de ver apenas parte dos alunos em simultâneo, e os que usam outros meios de contacto, lamentam não ver ou ouvir de todo os alunos e não conseguirem saber como estes estão a acolher as propostas de trabalho que lhes fazem. Encontrar uma forma de envolver ativamente os alunos, recebendo deles e dando-lhes feedback, é aliás um dos grandes desafios do ensino a distância, como alguns dos autores que referimos atrás mencionam.

A gestão curricular

Uma das funções que o professor está habituado a assumir é a gestão curricular. Esta é, no entanto, uma gestão que se alicerça fortemente no conhecimento profissional do professor, e esse é um conhecimento que foi sendo desenvolvido pelo professor para uma outra realidade. Neste momento, tal como realça Rocha (2019), o professor está perante uma circunstância completamente diferente, o que significa que precisará de desenvolver o seu conhecimento profissional relativamente à forma como as novas abordagens alteram o processo de ensino e aprendizagem, bem como relativamente ao impacto que poderão ter na própria Matemática ao virem proporcionar novas representações e novas formas de aceder ao conhecimento. Após as primeiras aulas vários professores aperceberam-se precisamente da existência de algumas mudanças na gestão curricular que antes faziam. A preocupação que mais tem sido expressa neste âmbito até ao momento prende-se essencialmente com o ritmo do processo de ensino. Vários professores têm assim reconhecido que o ritmo é mais lento e manifestado a sua preocupação quanto a isso. Procuram naturalmente forma

de contornar o que identificam como uma dificuldade, mas o seu conhecimento profissional para ensinar nas presentes circunstâncias está ainda a começar a desenvolver-se, pelo que não é fácil encontrar rapidamente respostas.

Os recursos tecnológicos de professores e alunos

Uma das principais e, em certo sentido incontornáveis, limitações prende-se com os recursos tecnológicos. Por um lado, os recursos tecnológicos que os professores têm disponíveis e aqueles a que os alunos de cada turma têm acesso. Por outro lado, a capacidade técnica para conseguir tirar partido desses recursos. São muitos os professores que nunca tinham antes feito uma videoconferência, concebido uma sala no moodle, ou tantas outras das opções que têm sido implementadas nestes últimos dias, mas que, ainda assim, decidiram arriscar e experimentar algo novo. É importante neste caso que a escola, os pais e o próprio professor tenham consciência que falhar de vez em quando faz parte deste processo de experimentação. E é igualmente importante dar espaço à reflexão, para potenciar a inovação, para dar espaço a todas as novas formas de ser professor que agora experimentamos.

DO PRESENTE PARA O FUTURO...

Deste nosso balanço sobre o que temos tido ocasião de viver e assistir até ao momento (escrevemos este texto numa altura em que as aulas presenciais foram suspensas apenas há uma semana) há alguns aspetos a que gostaríamos de dar destaque. Um desses aspetos prende-se com os níveis de ensino. Efetivamente, não nos parece que a vivência seja a mesma em todos. Do nosso ponto de vista, ao nível das escolas as opções assumidas têm sido mais no sentido de manter os alunos ocupados e proporcionar-lhes alguma normalidade no que é uma situação que para todos nós foge completamente ao que consideramos normal. Não nos parecendo que nestes níveis de ensino o foco seja, para já, a abordagem de conhecimentos novos. Nas universidades, pelo contrário, a intenção tem sido lecionar novos conteúdos. Isto pode de algum modo ser explicado pela diferença de calendários escolares. As universidades estão numa fase relativamente inicial do seu 2.º semestre. As escolas estão em grande parte no final do 2.º período, que corresponde ao final de uma etapa, e prestes a iniciar a interrupção da Páscoa. Esta circunstância pode tirar relevância à abordagem de novos conteúdos.

Um outro aspeto tem a ver com o ambiente de entajuda e apoio que se tem estabelecido entre todos, com disponibilidade para partilhar ideias, ajudar quem possa não dominar certos conhecimentos técnicos, criação de fóruns para partilha não só de ideias como de experiências e onde seja possível pedir ajuda para o que não se sabe ao certo como fazer ou alterar. Este é um aspeto muito importante desta fase tão difícil que atravessamos: a união e entajuda. O compreender que é tempo de esquecer diferenças e divergências, para que todos juntos possamos conseguir o melhor para todos. E uma coisa é inegável, esta experiência vai mostrar o quanto os professores

estão empenhados na promoção da aprendizagem matemática dos seus alunos e o quanto conseguem ser inovadores.

Referências

- Albano, G., & Iacono, U. D. (2018). Scripting collaboration for competence-based mathematics learning: A case study on argumentation. In J. Silverman & V. Hoyos (Eds.), *Distance learning, e-learning and blended learning in Mathematics Education* (pp. 115-131). Springer.
- Garrison, D. R. (1985) Three generations of technological innovations in distance education. *Distance Education*, 6(2), 235-241.
- Gomes, M. J. (2003). Gerações de inovação tecnológica no ensino a distância. *Revista Portuguesa de Educação*, 16(1), 137-156.
- Hoyos, V., Navarro, M. E., Raggi, V. J., & Rodriguez, G. (2018). Challenges and opportunities in distance and hybrid environments for technology-mediated Mathematics teaching and learning. In J. Silverman & V. Hoyos (Eds.), *Distance learning, e-learning and blended learning in Mathematics Education* (pp. 29-45). Springer.
- Landenfeld, K., Göbbels, M., Hintze, A., & Priebe, J. (2018). A Customized Learning Environment and Individual Learning in Mathematical Preparation Courses. In J. Silverman & V. Hoyos (Eds.), *Distance learning, e-learning and blended learning in Mathematics Education* (pp. 93-111). Springer.
- Lencastre, J. A., & Coutinho, C. (2015). *Blended learning*. In M. Khosrow-Pour (Org.), *Encyclopedia of Information Science and Technology*, Third Edition, Volume II (pp. 1360-1368). IGI Global.
- Machado, J. (2001). *E-learning em Portugal: como a formação online pode mudar a sua vida*. FCA- Editora de Informática.
- Martinho, H. & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em geometria. *Educação e Matemática*, 149-150, 34-38.
- Moore, M., & Kearsley, G. (2007). *Educação a distância: uma visão integrada*. Thompson Learning.
- Moran, J. (2005). A pedagogia e a didática da educação on-line. In R. Silva, & A. Silva (Orgs.), *Educação, aprendizagem e tecnologia – Um paradigma para professores do século XXI* (pp. 67-94). Edições Sílabo.
- Nicolaio, K., & Miguel, L. (2010). A democratização do ensino por meio da educação a distância. *Revista Intersaberes*, 5(9), 68-91.
- Rocha, H. (2019). Interdisciplinary tasks: pre-service teachers' choice and approach. In L. Leite, E. Oldham, L. Carvalho, A. Afonso, F. Viseu, L. Dourado, M. Martinho (Eds.), *Proceedings of ATEE Winter Conference 'Science and mathematics education in the 21st century'* (pp. 86-97). ATEE and CIED: ATEE.
- Silverman, J., & Hoyos, V. (Eds.). (2018). *Distance learning, E-learning and blended learning in mathematics education: International trends in research and development*. Springer.
- Vescio, V., Ross, D., & Adams, A. (2008). A review of research on the impact of professional learning communities on teaching practice and student learning. *Teaching and Teacher Education*, 24(1), 80-91.
- Vygotsky, L. S. (2001). *Psicologia pedagógica*. Martins Fontes.

HELENA ROCHA

CICS.NOVA, FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

ISABEL OITAVEM

CMA, FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

FLORIANO VISEU

DEILDS, UNIVERSIDADE DO MINHO

SÓNIA PALHA

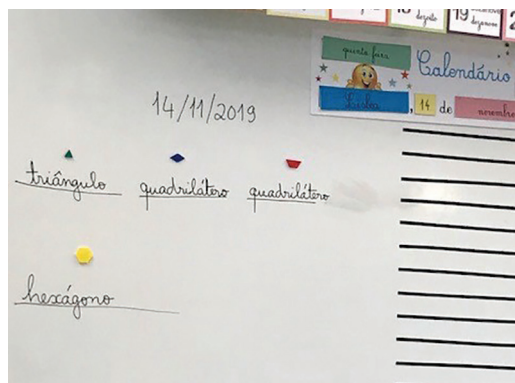
AMSTERDAM UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Relacionar, classificar e estruturar

Este texto tem como objetivo apontar um conjunto de ideias ligadas a estas três ações fundamentais na matemática. A motivação para o escrever decorre de um episódio recente passado numa sala de aula.

UM EPISÓDIO

Quantas vezes os professores falam em classificação mas estão a pensar apenas na identificação de características das figuras e na atribuição de nomes? O episódio é simples, porém muito significativo. Tudo se passa numa aula de 2.º ano de escolaridade em que os alunos irão realizar uma tarefa com o objetivo de trabalhar a composição de figuras planas. A professora recorda e regista no quadro a “classificação” das figuras que vão usar. Embora referindo a classificação, o seu discurso reforça especialmente o nome de cada uma das quatro figuras que os alunos vão usar.



Para os alunos são apenas nomes, sem qualquer significado. Porém, reparando com atenção no que ficou escrito no quadro (triângulo, quadrilátero, quadrilátero, hexágono), podemos notar que os quatro nomes registados correspondem a três relações entre figuras de natureza distinta. Subjacente a estas designações, os triângulos estão a ser encarados como o conjunto das figuras com três ângulos, os quadriláteros como o conjunto das figuras com quatro lados e os hexágonos são vistos como um subconjunto do conjunto dos polígonos, o dos polígonos com seis lados.

RELACIONAR PARA CLASSIFICAR

Na geometria a presença de referências sobre relacionar e classificar é permanente. Estas duas palavras são tão comuns que, muitas vezes, já nem pensamos no seu sentido, nem em muito do que é inerente aos processos de relacionar e classificar. Embora esta reflexão esteja naturalmente focada na geometria e seja orientada para objetos geométricos,

penso que poderia ser toda reescrita para outra área, com as devidas adaptações à natureza dos entes matemáticos envolvidos, os objetos de estudo.

Quando manipulamos, encaramos, analisamos ou organizamos objetos há três tipos de situações fundamentais para estabelecer relações:

- entre os elementos constituintes de um único objeto
- entre objetos distintos
- entre conjuntos de objetos

No primeiro caso, encaramos e atendemos à estrutura do objeto. No segundo caso atendemos a aspetos de ligação entre os objetos selecionados, identificando posições, semelhanças e diferenças. Os objetos podem ter sido selecionados por já formarem um conjunto ou então podemos concluir que o que os liga nos conduz a organizá-los num conjunto. Outra possibilidade é atendermos a ligações entre os objetos e fazermos separações, formando categorias ou classes. Como consequência criamos uma estrutura dentro do conjunto, estruturamos o conjunto. No terceiro caso comparamos estruturas de conjuntos e estruturamos a um outro nível. Estabelecemos ligações entre os conjuntos.

A apresentação destes três níveis, sem exemplos, parece estranha e um pouco árida. Quando encaramos uma figura, o retângulo por exemplo, estabelecemos relações entre os seus elementos constituintes (lados, ângulos, diagonais). Com base nestas ligações passamos a encarar o retângulo como uma estrutura geométrica.

Ao analisar e comparar muitos retângulos, destacamos este conjunto de quadriláteros de outros conjuntos de quadriláteros e passamos a encará-los com uma estrutura de classe, a classe dos retângulos. Nesta classe temos que incluir naturalmente os quadrados porque estes têm uma estrutura análoga à dos retângulos, embora mais rica. Ao estabelecer esta relação de inclusão da classe dos quadrados na classe dos retângulos estamos já a estabelecer ligações entre as duas classes. Criamos por isso uma nova ordem de estrutura. Continuamos a estruturar, mas ao nível da estruturação lógico-formal.

Estas ideias não são novas. No entanto, continuamos a encontrar estudantes futuros professores ou educadores, e também muitos professores, para quem os raciocínios que estão subjacentes a estes tipos de estruturação parecem novos e totalmente estranhos. Muitas vezes até, estas considerações provocam desconfiança por parte dos professores.

Na geometria há uma estreita relação entre o estabelecimento de relações entre os elementos constituintes dos objetos, as relações entre os objetos e as relações entre os conjuntos de objetos. Todos estes tipos de relações contribuem para a classificação dos objetos geométricos. E classificamos os objetos geométricos porque isso nos ajuda a encará-los de forma organizada e podemos, assim, compreender melhor as definições, bem como a organização lógico formal da geometria. Muitos autores afirmam que os processos de classificação são uma das componentes básicas do raciocínio matemático.

No que respeita a classificações em geometria também é importante evidenciar três níveis de classificação, de complexidade crescente, e que interessa destacar:

Nível 1 — A classificação corresponde à classificação direta dos objetos e em que estes valem por si. Podemos considerá-la como a classificação simples de objetos.

Nível 2 — Os objetos já representam classes. Podemos considerá-lo como um nível de classificação de classes de objetos. Os objetos que representam as classes são protótipos que exemplificam as propriedades dos objetos de cada uma das classes.

Nível 3 — Para além de os objetos representarem classes, a classificação ocorre segundo aspetos de invariância dos objetos no que respeita às transformações geométricas. Aliás, é essa invariância que caracteriza a classe. Neste caso continuamos a ter uma classificação de classes de objetos. Os exemplos mais comuns do terceiro nível são as classificações dos frisos e padrões geométricos.

A consciência destes três níveis de classificação é importante para perspetivar atividades de classificação na aprendizagem e ter em conta a complexidade do raciocínio matemático ao classificar. A atividade matemática de classificar deve percorrer toda a aprendizagem da matemática. Muitas vezes considera-se que basta fazer classificações nos primeiros anos para que se aprenda a classificar.

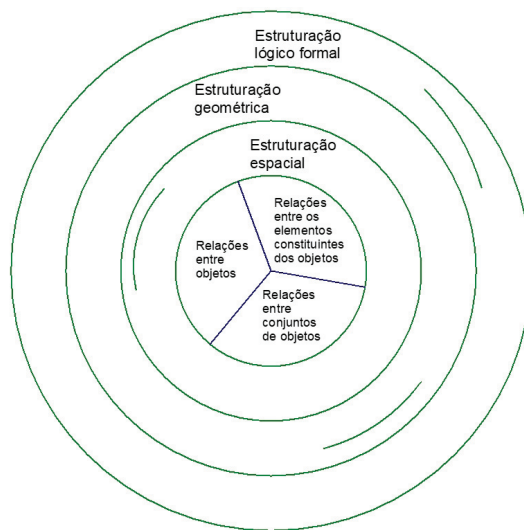
... E ESTRUTURAR

Tenho um apreço especial pela ideia, defendida por vários especialistas de ensino da geometria, que afirmam que “toda a geometria é, em essência, uma maneira de estruturar o espaço e de estudar as consequências dessa estruturação” (Battista et al., 1998, p. 531).

O reflexo desta orientação no ensino da geometria é o de uma construção consistente, progressivamente mais complexa, mas em que a estruturação está sempre presente. Para as crianças e jovens as estruturas podem estar ocultas, mas para os professores e educadores é desejável que elas sejam conhecidas.

Nem sempre é fácil organizar todas estas ideias. E também aqui os três níveis de estruturação de Battista nos ajudam (Battista, 2008). Organizei por isso um esquema que associa as três ideias atrás referidas sobre relações com os três níveis de Battista: estruturação espacial, estruturação geométrica e estruturação lógico-formal. Neste esquema, os três tipos de relações e os três níveis convivem.

Do estabelecimento de relações, de que decorrem classificações progressivamente mais complexas, resulta a estruturação da geometria em três componentes interligadas e também de construção espiral.



O objetivo deste esquema é associar numa única imagem as ideias sobre relações e estruturação apresentadas. Espero que seja encarado como um esquema que ilustra a convivência das ideias expressas e o dinamismo das ligações que existem entre elas. Desde as primeiras idades, quando se realizam as primeiras vivências de estruturação espacial, que se inicia a espiral de construção da estruturação geométrica e da estruturação lógico formal. Nem sempre tive estas ideias tão claras como passei a ter depois de analisar e pensar sobre experiências que acompanhei, no âmbito da realização de atividades de geometria e de artes visuais, com crianças pequenas e da responsabilidade das suas educadoras de infância.

Referências

- Battista, M. (2008). Development of the shape makers geometry world. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 - Cases and Perspectives*, (pp. 131-156). NCTM & IAP.
- Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Van Auker Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.

Ensino Secundário – Ensino Superior: (Des)Conexões

No ProfMat deste ano realizou-se uma sessão de trabalho dedicada à relação do ensino secundário e superior, cujo título transpusemos para este texto. Trata-se de um assunto muito importante a que, provavelmente muitos concordarão, não tem sido atribuída suficiente atenção. A Comissão organizadora do ProfMat, reconhecendo a necessidade de discussão e reflexão sobre o tema, propôs a realização de uma mesa redonda, a qual foi moderada por Paulo Afonso (Professor na Escola Superior de Educação de Castelo Branco) e em que participaram Jaime Carvalho e Silva (Professor no Departamento de Matemática da FCT – Universidade de Coimbra), Teresa Moreira (Professora na Escola Secundária de Camões em Lisboa) e Albano Silva (atual Presidente do Instituto Politécnico de Portalegre).

A mesa redonda recebeu grande interesse por parte dos professores que estavam no encontro e foi preenchida com intervenções que a Redação da Educação e Matemática considerou de grande relevância, pelo que decidiu publicar uma parte significativa do conteúdo daquela sessão. Todas as questões foram propostas pelo moderador. Dada a sua extensão, e de modo a não prejudicar a leitura e interpretação do conteúdo das intervenções, o texto desta sessão é publicado em dois números. Nesta revista surge a intervenção de Albano Silva, sendo que as intervenções de Jaime Carvalho e Silva e Teresa Moreira podem ser consultadas na revista 153.

A Redação agradece a todos o esforço adicional de transformar as suas intervenções orais num registo escrito, o qual foi editado pela equipa da Revista e revisto pelos seus autores.

A Redação da *Educação e Matemática*

Uma reflexão sobre a necessidade de mais Ensino Superior e sobre os estudantes que habitualmente não conseguem aceder a este nível de ensino

O Ensino Superior está disseminado por todo o país. É verdade, é uma vitória importante da democracia. Sofre, porém, dos problemas de centralismo como noutras tantas áreas de atividade. Lisboa e Porto têm, em conjunto, mais que 50% dos estudantes do Ensino Superior, ao contrário de outros países da Europa em que a soma de estudantes das suas duas maiores cidades ronda (e na maior parte dos casos não ultrapassa) os 30%. Mas é o país que temos! Que construímos conjuntamente! A história económica dos anos 30, 40 e 50 do século passado ajuda a explicar muito desta realidade que não fomos ainda capazes de combater em 45 anos de democracia.

Daqui poder-se-ia tirar a conclusão que o país ganhava financeiramente em acabar com instituições de ensino superior (IES) do interior por não terem forte atratividade. Não preciso de vos convencer que sem IES espalhadas nacionalmente teríamos uma sociedade mais elitista, portanto menos coesa social e regionalmente, ainda mais centralizada.

Considero que o caminho passa por reforçar cada vez mais as IES espalhadas pelo País, até porque economicamente não dão prejuízo, não acumulam passivos, e são fundamentais para o desenvolvimento e sustentabilidade das regiões onde estão inseridas. São âncoras do desenvolvimento regional, pela qualificação que proporcionam, pela proximidade ao tecido empresarial e social, pela atenção às estratégias municipais, pelo conhecimento que constroem, valorizam e partilham.

Por outro lado, há Ensino Superior a menos! Em termos gerais, dos jovens em idade de frequentar o Ensino Superior só 1/3 o faz. Ou seja, 2/3 desses jovens não frequentam o Ensino Superior!



Temos que nos preocupar com a melhoria da qualidade da oferta formativa, do ensino, do abandono escolar, do sucesso escolar do terço que frequenta o Ensino Superior. Mas temos também que pensar como atrair e captar os restantes 2/3. Este é o grande desafio comum que temos pela frente.

O Relatório sobre o acesso ao Ensino Superior (2019), realizado pelo Grupo de Trabalho (GT) nomeado pelo Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior (MCTES) e constituído pelos Professores João Guerreiro (CNAES – Comissão Nacional de Acesso ao Ensino Superior), João Queiroz (DGES - Direção Geral do Ensino Superior) e Pedro Teixeira (CIPES Centro de Investigação de Políticas do Ensino Superior) que está disponível no sítio da DGES¹ desde 25 de junho passado, traz-nos alguns indicadores e reflexões interessantes. Um parêntesis apenas para vos dizer que este relatório resultou diretamente da necessidade de avaliar a política de vagas seguida pelo MCTES no ano anterior.

¹<https://www.dges.gov.pt/pt/noticia/relatorio-sobre-o-acesso-ao-ensino-superior>

Passo a citar um excerto daquele relatório (pág.6):

“O ensino superior tem garantido uma razoável integração dos jovens que fazem o seu percurso frequentando a modalidade científico-humanística do ensino secundário. Contudo o ensino superior não tem conseguido atrair outros segmentos da população, designadamente os jovens que completam as variantes profissionais do ensino secundário. (...) ausentes da frequência das IES estão também os cidadãos com idades mais avançadas e que poderiam beneficiar de novos conhecimentos e de novas competências que lhes permitissem melhorar, reorientar ou reconverter as suas atividades profissionais. (...) O caráter efêmero de muitas componentes do conhecimento, aliado à volatilidade de um número elevado de profissões, deveria conduzir as IES a ampliarem a sua oferta formativa, abrindo-a para os designados estudantes não-tradicionais.”

O quadro 1 da página 7 do referido relatório (figura 1) dá-nos uma noção atual das habilitações dos cidadãos portugueses e a evolução realizada nos últimos 10 anos, comparada com a mesma realidade de outros países e organizações internacionais:

NÍVEIS DE ESCOLARIDADE DA POPULAÇÃO DO GRUPO ETÁRIO 25-34 ANOS (%)

PAÍSES	Ensino Básico ou menos		Ensino Secundário		Ensino Superior	
	2007	2017	2007	2017	2007	2017
1	2	3	4	5	6	7
Alemanha	15	13	62	56	23	31
Dinamarca	19	17	44	37	36	47
Finlândia	10	10	51	49	39	41
Espanha	35	34	25	24	40	43
França	17	14	41	42	41	44
Grécia	24	14	47	43	28	42
Itália	32	25	49	48	19	27
Portugal	56	30	23	36	21	34
OCDE	20	15	47	41	34	44
UE 22	18	14	50	44	32	42

Fonte: OCDE (2018) - Education at a Glance 2018: OECD indicators, OECD Publishing, Paris

Figura 1

Como podemos observar na figura 1, em 2017, no grupo etário dos 25-34 anos, 34% concluíram um diploma do Ensino Superior. Porém, se alargarmos o grupo etário até aos 64 anos (25-64 anos), a percentagem baixa para 24%.

Ao invés, em 2017, 30% dos portugueses do grupo etário dos 25-34 anos têm como habilitação o Ensino Básico ou menos, percentagem que aumenta para 48% quando alargamos o grupo etário até aos 64 anos (25-64 anos).

Apesar da situação ainda ser preocupante quando comparada com outros países, importa perceber e realçar a evolução nos últimos 10 anos (2007-2017) e a melhoria das qualificações dos adultos mais jovens. Trata-se de uma evolução que não é desprezível. Avançámos muito, apesar da crise económica e social que atravessámos em parte significativa daqueles 10 anos. Temos que continuar a trabalhar para melhorar as qualificações dos cidadãos portugueses e o número de diplomados do ensino superior. Se reforçarmos a entrada no Ensino Superior dos jovens com percursos alternativos, para além da tradicional modalidade científico-humanística, podemos passar dos 34% para os 40%

em 2020, e chegar aos 60% de jovens adultos com um diploma de ensino superior em 2030.

Estas metas nacionais são possíveis de alcançar. Porém, em minha opinião deveremos ter em conta alguns aspetos, a saber:

- Valorizar o ensino profissional e fomentar o seu crescimento, para que perca o estigma de ser apenas um percurso alternativo para os estudantes que não conseguem fazer o tradicional percurso de ensino secundário científico-humanístico; sem esquecer que quem acredita tem mais possibilidade de conseguir alcançar os seus objetivos e que alunos valorizados aprendem a caminhar para o sucesso;
- Encaminhar, no final do secundário, grande parte destes alunos para o Ensino Superior, seja para cursos superiores curtos (técnico-profissionais), seja para licenciaturas;
- Encontrar formas de acessos alternativos aos tradicionais exames do ensino secundário para que os alunos que terminam o ensino secundário profissional e que pretendem aceder a licenciaturas não tenham que realizar exames sobre matérias que não frequentaram, que não fizeram parte do seu currículo ao longo do ensino secundário de natureza profissional;
- Aumentar o diálogo entre professores do ensino secundário e professores do ensino superior, por forma a articular mudanças emergentes a fazer em ambos os graus de ensino que tendam a atrair e construir com sucesso o percurso destes alunos que optam pelo ensino profissional;
- Mudar a atitude do Ensino Superior em relação a estes alunos que chegam provenientes da via profissional do Ensino Secundário. A mudança choca frequentemente com a pouca flexibilidade das estruturas internas das IES e com a rigidez do seu corpo docente.

O atual sistema de acesso dos alunos ao Ensino Superior parece socialmente inatacável. Há 20 anos que ganha “músculo” claramente vocacionado para os estudantes da via científico-humanística, tendo os estudantes provenientes de outras vias de se adaptar! A dupla certificação dos cursos alternativos, previsto na lei, é por enquanto uma falácia!

Interessa também perceber qual a proveniência dos alunos do Ensino Superior. 70% provém do regime geral (fundamentalmente do concurso nacional de acesso); 1,6% do regime especial (missões diplomáticas, bolseiros PALOP, desportistas de alta competição, Forças Armadas, ...); e 28,2% dos concursos especiais (Maiores de 23 anos, Cursos de Especialização Tecnológica (CET), Cursos Técnicos Superiores Profissionais (CTeSP), Estudantes Internacionais, Titulares de Cursos Superiores, Mudanças de Curso, entre outros com menor significado estatístico).

Vamos, agora, conhecer melhor quem está no Ensino Superior ao fim de um ano de completar o Ensino Secundário no ano letivo de 2016/17 e comparar com anos anteriores (tratam-se de dados retirados do já referido *Relatório sobre o acesso ao Ensino Superior*, pág.17).

Podemos observar na figura 2 que, após um ano de completarem o Ensino Secundário, 79% dos estudantes provenientes da via

científico-humanística frequentam o Ensino Superior, enquanto 82% dos estudantes provenientes da via profissional não estudam! A OCDE aconselha o Governo português a rever o sistema de acesso ao Ensino Superior para garantir a sua adaptação ao fluxo de estudantes que têm origem nas modalidades profissionais do ensino secundário num quadro simplificado e de exigência. Conforme já referimos, não podemos aceitar como natural que a opção para entrar no ensino superior para estes alunos passe pelo percurso de exames nacionais sobre matérias que não fizeram parte dos seus currículos. Em limite, é desumano!

ESTUDANTES DIPLOMADOS MATRICULADOS NO ENSINO SUPERIOR
APÓS COLOCAÇÃO ATRAVÉS DO CONCURSO NACIONAL DE ACESSO

ANOS LETIVOS	ESTUDANTES DIPLOMADOS (Nº)			SITUAÇÃO DOS DIPLOMADOS APÓS 1 ANO (%)								
	CH	P	AE	Estuda num grau superior			Estuda num CET ou TeSP			Não estuda		
				CH	P	AE	CH	P	AE	CH	P	AE
2010/11	37 097	22 436	519	81	11	61	0	6	1	19	83	38
2012/13	37 714	20 581	601	78	4	42	1	10	1	21	87	57
2014/15	41 714	23 051	685	79	5	55	1	10	0	20	85	45
2016/17	45 574	23 744	645	79	6	56	1	12	0	20	82	43

CH – Científico-humanístico; P – Profissional; AE – Artístico especializado
Fonte: DGEEC (2019) – Transição entre o ensino secundário e o ensino superior, Lisboa, DGEEC

Figura 2

Voltando a citar o Relatório sobre o acesso ao Ensino Superior:

Neste momento pode concluir-se, de uma forma irónica, mas refletindo um sistema desajustado, que um estudante que conclua o Ensino Secundário através da via profissional em Portugal pode ingressar livremente no Ensino Superior francês ou belga (a exigência incide apenas na posse de um diploma de conclusão do Ensino Secundário) mas tem o ingresso no Ensino Superior português bloqueado por não ter realizado os exames da via científico-humanística” (pág.17).

O GT põe a hipótese da realização de exames sobre as matérias que fazem parte dos seus currículos, mas reconhece a dificuldade de concretizar. O Conselho Nacional de Educação (CNE) refere sobre a solução para esta situação “*enquanto não for possível efetuar uma alteração profunda do sistema de acesso ao ensino superior (...), a forma mais adequada de introdução do acesso destes estudantes é por via dos concursos especiais*”; ou seja, formas de acesso da responsabilidade das IES como já acontece com os Maiores de 23 anos ou os alunos provenientes dos CTeSP. Parece ser uma solução válida, devendo para isso serem abertas vagas especiais para estes alunos provenientes da via profissional do Ensino Secundário, nomeadamente para cursos específicos que fossem continuidade lógica dos estudos entretanto realizados. Outra hipótese, em paralelo, poderia passar por aumentar as vagas para aceder às licenciaturas dos alunos provenientes dos CTeSP, no pressuposto que parte significativa dos alunos da via profissional do ensino secundário entram no Ensino Superior por via daqueles cursos técnicos superiores profissionais. De facto, as vias de acesso ao ensino superior para estes alunos terão que ser múltiplas e não deverão impossibilitar à partida o acesso à oferta formativa oferecida por qualquer um dos subsistemas do ensino superior.

Para já deveremos fixar-nos que temos aproximadamente 400 000 alunos em todo o Ensino Secundário (dados de 2016/17), sendo que 207 000 (52%) frequentam a via tradicional científico-humanística e que 115 000 (29%) frequentam a via profissional, e que os restantes 20% frequentam cursos vocacionais, cursos de formação de adultos (cursos EFA) e de reconhecimento, validação e certificação de competências (RVCC), entre outros. Para percebermos a evolução realizada nos últimos anos, comparemos os dados anteriores de estudantes que frequentavam o ensino secundário com os dados de 2000/01 em que os estudantes da via profissional representavam apenas 9% contra 71% da via científico-humanística.

A tendência é para que o número de estudantes do ensino secundário a frequentar o ensino profissional aumente e atinja, dentro de poucos anos, aproximadamente metade dos estudantes do ensino secundário.

Apresentação breve dos novos Cursos Técnicos Superiores Profissionais (CTeSP)

Estes cursos existem desde 2015/16. São cursos curtos de 2 anos (*short cycle*). É uma formação de ensino superior politécnico para formar técnicos com forte ligação à prática profissional, à investigação aplicada, e com uma forte componente de estágio em contexto de trabalho.

Conduz à atribuição do diploma de técnico superior profissional e o seu plano de formação contempla: a) formação geral e científica; b) formação técnica; e c) formação em contexto de trabalho.

Não atribui grau de ensino superior, mas permite acesso ao grau de licenciado através da entrada em licenciaturas, preferencialmente da mesma área, com creditação até 50/60 ECTS (*European Credit Transfer System*), que corresponde praticamente a um ano da licenciatura.

A experiência de formação, apesar de ainda ser recente, mostra-nos que os alunos nestes cursos ganham maturidade, desenvolvem competências transversais e, se bem enquadrados, desenvolvem competências profissionais para aceder ao mercado de trabalho ou à licenciatura. Na licenciatura, têm desempenhos fantásticos fundamentalmente quando se trata do saber em relação direta com a futura profissão e com projetos de investigação aplicada.

Eu sinto uma enorme identificação destes cursos, e da sua ligação com as licenciaturas da mesma fileira formativa, com a natureza politécnica do ensino superior.

Não acho que seja, por isso, ensino de segunda, e parece-me mesmo que pode ser uma formação e um percurso muito nobre e que pode criar excelentes profissionais e profissionais felizes para um país novo.

Um exemplo apenas. Temos na nossa instituição uma aluna que veio do Ensino Secundário profissional da área do Design, fez um CET (curso de certa forma antecessor do CTeSP) na mesma área, entrou numa licenciatura em Design e tem atualmente enorme

êxito profissional na área e frequenta com imenso sucesso um mestrado na área do Design.

Como referi anteriormente, tenho consciência da necessidade de caminhos vários para que os alunos dos cursos profissionais do Ensino Secundário acedam às licenciaturas do Ensino Superior, mas os CTesP são, por certo, um bom caminho. O que necessitamos é de enquadramento legal para abrir mais vagas especiais e locais independentes percentualmente das vagas do Concurso Nacional de Acesso. Aliás, a mesma falta de enquadramento legal se coloca para os alunos adultos que pretendem entrar no Ensino Superior através do concurso de Maiores de 23 anos.

Um sentimento pessoal sobre os Exames Nacionais no final do Ensino Secundário

Os exames nacionais do ensino secundário, com papel determinante para aceder ao Ensino Superior, estão muito enraizados na sociedade e têm uma forte aceitação social. Aliás, é um assunto complexo e culturalmente fraturante.

Mas reconheço que são péssimos para a formação integral do aluno, pois o exame passa a ser o conteúdo fundamental à medida que o Ensino Secundário se aproxima do fim, impossibilitando um processo de ensino e aprendizagem baseado na formação e na avaliação contínua, na inovação pedagógica e na formação de competências transversais e humanistas. Potenciam o pior do ensino tradicional e exacerbam a competição entre os alunos. Como disse, sinto que não se pode mudar a avaliação final do Ensino Secundário e o acesso ao Ensino Superior de forma radical, mas há muito mais educação para além dos exames. E apesar de enraizado social e culturalmente não foi sempre assim! É preciso coragem para abrir a discussão com vontade de alterar a situação.

Geralmente, quem não concorda com a forma como os exames nacionais se processam é acusado de estar a propor situações facilitistas. Esta não é a discussão produtiva. Penso que o Ensino Superior tem aqui também uma voz importante.

O Ensino Superior tem que saber enquadrar os seus novos estudantes, encontrando tempos e recursos para trabalhar e apoiar os alunos em áreas críticas, com horas de apoio tutorial, ao longo do curso, principalmente no seu início, onde o perigo de desistência e abandono é mais forte. Precisamos também de apoiar a atividade académica e cultural dos alunos e motivar novos alunos a integrarem-se nessas atividades, espaços de verdadeira solidariedade e inclusão de estudantes, à prova de isolamento e abandono do Ensino Superior.

Não podemos deixar adormecer a discussão sobre este assunto. Temos que ir preparando caminhos e reflexão, e apoiar estudos científicos que consigam inquietar os mais seguros do sistema que temos. Os exames atrapalham mais que facilitam e têm tanta força que se confundem com o próprio sistema que não permite que mais alunos acedam ao Ensino Superior como o país tanto necessita e que contribui para que os alunos desistam antes de lá chegar. Em limite, transparece a ideia que o sistema desconfia dos seus professores e da formação prestada ao longo de 3 anos de Ensino Secundário e que desconfia que as instituições de ensino superior não sejam capazes de ensinar nas áreas críticas que os alunos têm mais dificuldade e das quais necessitam para a prossecução dos seus estudos.

Não queria terminar sem me congratular por pertencer a esta Associação de Professores de Matemática (APM) há 35 anos. Foi sempre um local de reflexão sobre a educação matemática, mas também um local fraterno de afetos, cumplicidades e comprometimentos. Voltar, nem que seja só anualmente, a esta família APM, sinto como uma forma de dar vida à humanidade que está dentro de cada um de nós, e que nos permite sermos melhores profissionais no nosso dia a dia! Obrigado à APM, à sua direção e à Comissão Organizadora do Encontro pela organização de um ProfMat de grande qualidade que retoma níveis de adesão e de entusiasmo muito interessantes dos professores de Matemática.

ALBANO SILVA
INSTITUTO POLITÉCNICO DE PORTALEGRE

ESTATUTO EDITORIAL DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

A Educação e Matemática é uma publicação periódica da Associação de Professores de Matemática (APM). A sua periodicidade atual é de quatro números anuais, sendo um deles temático. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática. Dirige-se aos professores de matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro. Os principais objetivos da Educação e Matemática são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas atuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A Educação e Matemática publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, resenhas de livros, resolução de problemas, notícias... A Educação e Matemática tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com caráter permanente. A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista. À semelhança das outras revistas informativas, a Educação e Matemática assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

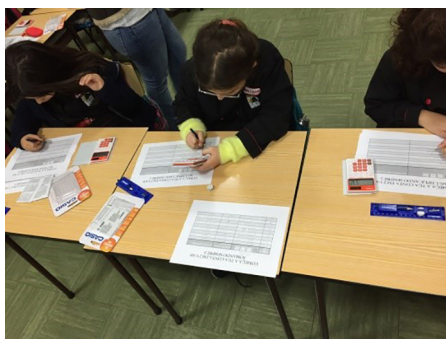
A Diretora da Educação e Matemática

Calculadora de quatro operações no primeiro ciclo, porque não?

A calculadora gráfica é um instrumento de cálculo tecnológico que assume um papel importante e muito presente no ensino da Matemática em Portugal. O seu uso é obrigatório no programa do ensino secundário e está presente nas aulas de matemática desde o 10.º ano.

Esta é uma realidade nas escolas: calculadora científica a partir do 2.º ciclo, calculadora gráfica no ensino secundário, mas será que só estes níveis de ensino podem usufruir da utilização da calculadora como instrumento na dinamização de uma aula de matemática? Será que uma calculadora básica, de quatro operações, não poderia ser usada, pontualmente, no 1.º ciclo, como ferramenta na resolução de problemas e exploração de situações? Será que não conseguiríamos colocar os alunos a pensar no significado das operações, no porquê daquele resultado e na “magia” dos números?

Na passada sexta-feira, dia 7 de fevereiro de 2020, estive com alunos do 3.º ano, do 1.º ciclo. Iniciei a aula com algumas curiosidades sobre os instrumentos de cálculo ao longo dos anos. Levei o ábaco e mostrei como podemos fazer contas. Falámos de como o cérebro é a melhor calculadora que temos e que todos nós começamos a contar pelos dedos, pelo que a “primeira calculadora” foi os dedos. Passamos à parte em que ia usar uma calculadora básica - SL-300NC. Os vinte e quatro alunos mostram-se excitados por irem usar uma calculadora na aula de matemática! O que vamos fazer com ela? Para que serve esta tecla? Aqueles dedinhos começaram imediatamente a serpentear o teclado, a usá-la para fazer somas e subtrações, multiplicações e divisões. Foram cinco minutos que os deixei usar a calculadora livremente, a novidade era grande!



Apresentei tarefas que tinham como intuito descobrir mais sobre as operações de soma e multiplicação e a “magia” o teclado da calculadora. O objetivo não era deixar de lado a tabuada ou substituir o cálculo mental por uma calculadora.

O objetivo foi mostrar a relação dos números quando somamos e multiplicamos e que podemos brincar com os números.

Na primeira tarefa que apresentei, os alunos tinham de somar sucessivamente o número dois. Estavam a meio da tabela, imediatamente um dedo foi colocado no ar: “não era mais fácil se multiplicássemos?”. Sim, claro que sim! A multiplicação ajuda-nos quando temos de fazer somas sucessivas, a multiplicação é o mesmo que somar várias vezes esse mesmo número, a multiplicação ajuda a “não perder” um número no “comboio” que é a conta. Foram estas as conclusões a que a turma chegou.

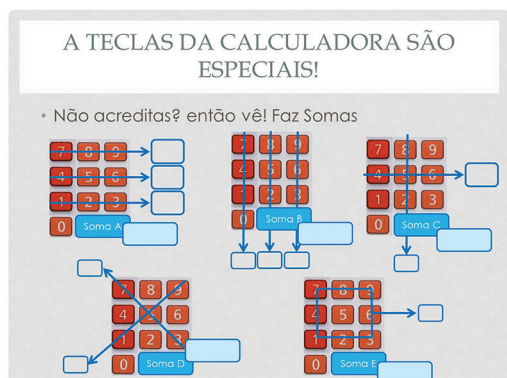
COMEÇA A TUA CONTA EM 2 VAIS SOMANDO SEMPRE 2:			
Soma 2		Quantas vezes somei o 2?	As tuas conclusões
4	2+2	2	2x2
6	2+2+2	3	2x3
8	2+2+2+2	4	2x4
10	2+2+2+2+2	5	2x5
12	2+2+2+2+2+2	6	2x6
14	2+2+2+2+2+2+2	7	2x7
16	2+2+2+2+2+2+2+2	8	2x8
18	2+2+2+2+2+2+2+2+2	9	2x9
20	2+2+2+2+2+2+2+2+2+2	10	2x10

E se multiplicarmos? O que estamos a fazer? Nesta tarefa, as reações foram de espanto, pois alguns alunos continuaram a carregar na tecla de multiplicar e rapidamente o número cresceu e cresceu tanto que já não cabia no visor da calculadora. Alguns repetiram a soma e verificaram que demorava muito mais tempo até o ecrã ficar cheio de números, muitos pararam a meio! E então o que significa multiplicar por dois? “É o dobro do resultado anterior”. Sim, é o dobro do resultado anterior! “Quando multiplicamos por dois o número cresce muito”, foram algumas respostas dos alunos!

COMEÇA A TUA CONTA EM 2 VAIS MULTIPLICANDO SEMPRE 2:		
Multiplica por 2		Descobre o que acontece
4	2 x 2	2 x 2
8	2 x 2 x 2	2 x 4
16	2 x 2 x 2 x 2	2 x 8
32	2 x 2 x 2 x 2 x 2	2 x 16
64	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	2 x 32
128	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	2 x 64
256	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	2 x 128
512	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	2 x 256
1024	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2	2 x 512

Estas duas tarefas tinham como principal objetivo colocá-los a pensar nas operações, o que elas significam e como poderia chegar ao mesmo resultado usando uma outra estratégia de cálculo. Pedir aos alunos que fizessem estas operações manualmente seria uma tarefa extenuante, metódica, repetitiva onde os alunos executavam as operações e não pensavam nelas. Perceber o conceito era o objetivo.

De seguida passou-se para a “magia do teclado da calculadora”. Depois de fazer estas somas, os alunos teriam de responder a algumas questões:



Pergunta 1: Há alguma soma igual? Sim? Qual? Se não fizesses uma das somas conseguirias chegar ao resultado?

Rapidamente respondem que a soma A e B são iguais, assim como a soma C e D, mas porquê?

Na soma A e B, verificam que há uma linha e coluna com a mesma soma: 15, mas que relação há entre as outras linhas e colunas? Aqui têm de pensar nas operações. Para dar o mesmo resultado, o que somamos de um lado terá de ser subtraído no outro. Concluíram que começando no 6 e para chegar ao 12, tiveram de somar 6, ao 24 subtraíam 6 e o resultado seria 18. Ao somar numa parcela e subtrair na outra, chegamos ao mesmo resultado, sem ter de realizar a soma. Para a soma C e D o pensamento é similar.

Pergunta 2: O resultado da soma E, pode ser obtido a partir de outras somas?

Antes de fazer esta pergunta, um dos alunos, quando estava a fazer a tarefa, já tinha respondido. “não preciso de fazer

esta conta, pois na soma A e B usei todas as teclas menos a tecla 5, logo se a soma de A e B é 45, se tirar 5 vou obter 40. A soma E é 40.”

Pergunta 3: Além das conclusões a que chegaste na pergunta 1, há mais alguma relação entre as somas em linha e coluna, da soma A e B?

Nesta questão os alunos verificaram que na primeira as somas cresciam de 9 em 9, na segunda era de 3 em 3, mas é só isso? Que valores são aqueles? “É uma tabuada”, mas qual? “não pode ser a do dois porque na do dois não há números ímpares”. Então qual será? “É a do 3!” Sim, é a do 3. Começamos a papaguear a tabuada e sempre que se encontrava um resultado gritavam de uma forma entusiasmada “Está ali”



Nesta aula, não se pretendeu colocar a calculadora a substituir o cálculo mental. O cálculo mental é e continua a ser fundamental, mas podemos criar tarefas para o 1.º ciclo onde podem explorar as operações, explorar situações e problemas e levá-los a pensar e não unicamente mecanizar. Há jogos matemáticos que se podem fazer recorrendo a uma calculadora de quatro operações.

A aula de matemática foi muito diferente do habitual.

A professora destes alunos pediu-lhes para fazerem uma composição sobre a “aula com calculadoras”. Os textos foram-me enviados. Todos os alunos mostraram que gostaram de usar a calculadora, de terem tido uma aula de matemática diferente. As composições espelham bem esta afirmação – transcrição literal dos textos (sem correção ortográfica): “No início achei que ia ser um bocadinho chato, mas acabou por ser muito divertida e acho que foi uma aula maravilhosa! Foi giro e original, foi uma das melhores aulas que já tive”, “Eu aprendi que a Matemática até é divertida e como usar a calculadora”, “O que eu mais gostei foi as fichas de operações para fazermos com a calculadora”, “A aula foi fantástica, porque experimentámos coisas novas e aprendi muito! Também brincamos muito com as contas que fizemos”, “Obrigada pela sua aula, já mais a esquecerei!!!”

ANA MARGARIDA S.M. SIMÕES DIAS O.S.

CASIO SCHOOL COORDINATOR

O voo dos condores — 1 bando, 2 bandos e os seguintes ...

ELISABETE GONÇALVES DOS SANTOS
CRISTINA LOUREIRO

Quantas vezes perdemos oportunidades de aceder às ideias dos alunos e de desenvolver essas ideias? Esta é uma das preocupações apontada por Mason (2010) quando afirma que muitas vezes os professores perdem oportunidades de responder matematicamente e de maneira sensível a ideias dos alunos porque procuram aplicar sequências didáticas previamente organizadas e estruturadas.

É com este apontamento prévio que apresentamos este texto em que procuramos dar conta de uma breve experiência, realizada a partir de uma atividade isolada que originou depois uma sequência didática orientada pela avaliação que foi sendo feita das resoluções dos alunos. A sequência didática foi aplicada e trabalhada no âmbito de uma ação de formação contínua. Neste texto apresentamos e discutimos as tarefas propostas, as resoluções dos alunos e os contributos desta experiência para o desenvolvimento profissional da professora envolvida. O texto é da responsabilidade da professora que experimentou as tarefas e de uma das formadoras da ação. Decidimos, por isso, intercalar o uso da primeira pessoa do plural e do singular, o que deriva dos diferentes papéis que assumimos. Apresentamos assim um diálogo que de certa forma traduz a relação que procurámos estabelecer entre as sessões de formação e as experiências realizadas pelas professoras participantes na formação.

Este texto surge também na continuidade do artigo “Avaliar para as aprendizagens — um caminho que se faz avaliando” publicado na revista *Educação e Matemática*, n.º 147.

A PRIMEIRA TAREFA

No decorrer da Ação de Formação “Avaliar para diferenciar no ensino do Português e da Matemática”, em trabalho de grupo, propusemo-nos colocar problemas aos alunos partindo da exploração da história “A Princesa Baixinha”, de Beatrice Masini. De entre os problemas propostos, inspirados no contexto da história, a organização dos bandos dos condores tornou-se numa atividade bastante entusiasmante para a turma do segundo ano.

O problema foi pensado por quatro professoras da mesma escola para os quatro anos de escolaridade. A nossa intenção era experimentar uma situação suficientemente aberta que pudesse ser usada em qualquer ano de escolaridade do 1.º ciclo

e, simultaneamente, que permitisse aos alunos mostrarem como pensavam. Nunca tínhamos experimentado uma situação tão aberta.

A situação problema inicial apresentada aos alunos propunha-lhes: “Como se organizariam os condores para formarem um triângulo? Quantos condores estariam no desenho e quantas filas seriam?”

Antes de colocar o problema aos meus alunos, prevendo alguma dificuldade na sua resolução, preparei algum material (bolas e tampas), que poderia servir de apoio ao registo escrito. No entanto, essa utilização não se veio a verificar.

Os alunos leram o texto do problema e não foi dada nenhuma explicação. A maioria dos alunos iniciou a resolução do problema sem fazer qualquer questão. O Simão perguntou “Quantos condores são?”. Respondi que teria de experimentar com números diferentes de condores.

Após algum tempo, em que alguns alunos falaram entre si, observei algumas resoluções em que os alunos associam um triângulo a um número sem qualquer espécie de ligação (figura 1).

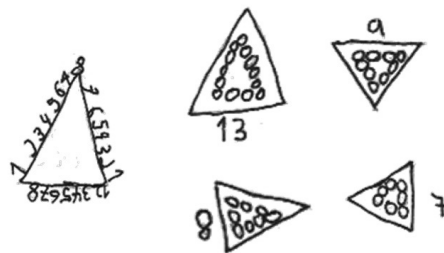


Figura 1

A maioria dos alunos apresentou resoluções semelhantes aos exemplos anteriores, desenhando o triângulo e incluindo no seu interior ou na fronteira a representação dos condores. Num dos casos, o aluno representou 36 condores de maneiras diferentes variando a forma do triângulo.

O Gabriel, para além da forma triangular, registou linhas, formando outro triângulo interior e continuou a representação dos bandos até aos 36 condores (figura 2).

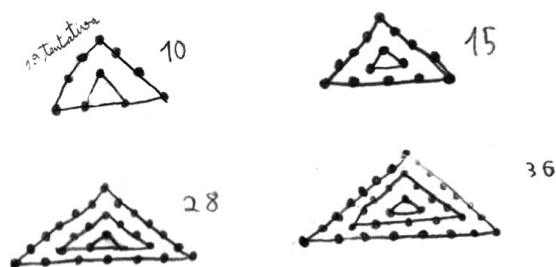


Figura 2

O David apresentou uma representação diferente das anteriores, pressupondo já uma organização na disposição dos condores em triângulo, incluindo o seu interior (figura 3).

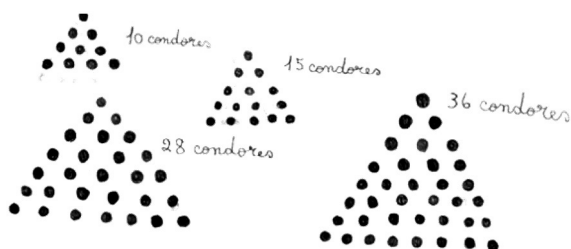


Figura 3

Com o entusiasmo, criou-se uma disputa entre os alunos que procuravam criar o maior bando de condores.

As resoluções foram analisadas numa sessão de formação e foi planeado dinamizar um momento de partilha, introduzindo algumas sugestões matemáticas a partir das configurações que pressupunham a disposição representativa dos números triangulares. Um dos objetivos era iniciar o trabalho sobre sequências numéricas e utilizar tabelas para o estabelecimento de relações numéricas e para a identificação de regularidades.

PARTILHA DAS RESOLUÇÕES

Uma tarefa pode ser aberta nas respostas e soluções que admite ou ser aberta no modo de resolução, ou em ambas as dimensões. Neste caso a tarefa inicial era aberta tanto nas soluções como na resolução. Estávamos assim perante uma situação complexa do ponto de vista da organização da partilha dos trabalhos dos alunos. Tinham o mesmo valor todas as resoluções? O que devia ser valorizado? Deviam ser todas apresentadas? Ou devia haver uma seleção? Como organizar as apresentações? Qual a intervenção do professor nessas apresentações?

Este momento de partilha foi assim preparado com base na decisão de que não seriam apresentadas todas as resoluções e que seria destacada a resolução do David porque tinha subjacente os números triangulares.

O entusiasmo dos alunos com esta tarefa era o motor desta continuidade em que se pretendia que cada um continuasse a trabalhar a partir dos bandos que tinha desenhado na primeira parte da tarefa. Iniciou-se este momento coletivo com a

apresentação à turma da resolução do Gabriel. Ele explicou que fez daquela maneira, *porque se lembrou do voo dos pássaros e que colocou o chefe dos condores no meio para manter a ordem no grupo.*

O David registou no quadro a sua resolução. Na representação feita por ele foram acrescentadas linhas aos bandos apresentados (figura 4). Após o acrescento deste elemento visual os alunos retomaram a tarefa passando a ter em conta esse aspeto que veio ajudar cada um a melhorar as suas representações.

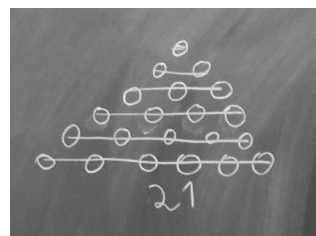


Figura 4

O Duarte tinha feito uma resolução (figura 5), mas depois de visualizar a resolução do David, apresentou outra maneira a que chamamos segunda resolução (figura 6).

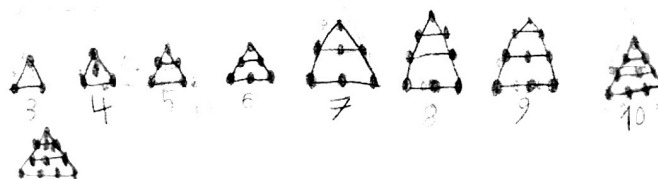


Figura 5

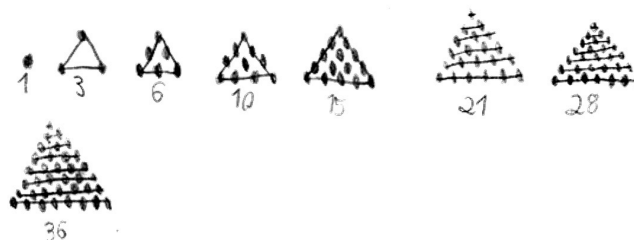


Figura 6

Tal como o Duarte, outros alunos apresentaram as suas resoluções para organizar os bandos dos condores e evoluíram realizando uma nova resolução inspirada na resolução do David. Na conclusão desta atividade, foi sugerido aos alunos a elaboração de uma tabela com os dados dos números de condores, pois pretendia-se explorar mais a utilização da tabela como organizador gráfico que potencia a análise da informação que a compõe e o estabelecimento de relações entre vários elementos que a constituem (figura 7).

A tabela foi feita coletivamente, discutindo-se os nomes dos elementos da tabela e os dados a incluir. Os alunos acharam curiosa a progressão do número de condores por bando ser +1, +2, +3, +4, ... e este aspeto influenciou as representações futuras.

figura	nº de condores	a mais?
1	1	+1
2	3	+2
3	6	+3
4	10	+4
5	15	+5
6	21	+6
7	28	+7
8	36	+8
9	45	+9
10	55	+10

Figura 7

A CONTINUIDADE DA PRIMEIRA TAREFA

Como esta experiência foi sendo partilhada nas sessões de formação, em conjunto foram também construídas novas tarefas que poderiam dar continuidade ao trabalho iniciado.

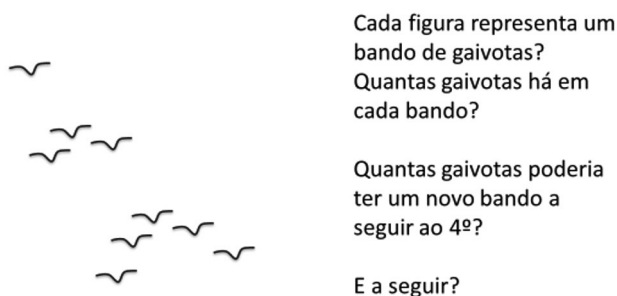


Figura 8

Dado o entusiasmo dos alunos com o bando dos condores, propôs-se um outro tipo de bando: o bando das gaivotas, com a representação na figura 8. Discutiu-se a relação entre as figuras da imagem dada até ao terceiro bando, destacando o número de gaivotas em cada bando e a diferença de bando para bando. Os alunos referiram que a representação do voo das gaivotas era um V ao contrário. Questionaram o tipo de registo que iriam fazer, se podia ser com bolinhas ou em V, o que foi deixado à sua escolha. As resoluções dos alunos foram obtidas associando sequências numéricas à sequência de figuras (figura 9).

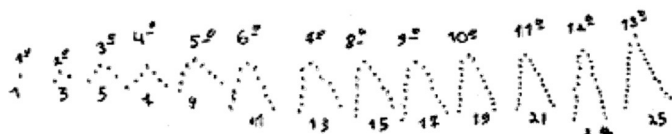


Figura 9

O Rui apresentou a sua proposta do bando das gaivotas e também realizou um organizador gráfico, neste caso uma tabela, com os elementos dos seus bandos, o número de gaivotas e a diferença entre o número de gaivotas de cada bando (figura 10).

Bando	nº de gaivotas	diferença no nº de gaivotas
1	3	
2	5	+2
3	7	+2
4	9	+2
5	11	+2
6	13	+2
7	15	+2
8	17	+2

Figura 10

MAIS UMA TAREFA

O entusiasmo dos alunos, a diversidade de soluções obtidas por eles e a consequente diversidade de relações numéricas subjacentes criaram condições favoráveis ao desenvolvimento da sequência didática. De evidenciar que os alunos passaram a criar os seus bandos estabelecendo relações entre eles. Este aspeto foi reforçado na proposta que foi feita. A proposta foi: "Inventa o teu bando. Cada novo bando deve estar relacionado com o anterior".

Os alunos registaram os seus bandos de diversas maneiras, que apresentaram coletivamente ao grupo-turma. Alguns conseguiram explicar o seguimento de um bando para outro, outros focaram-se na organização visual do seu bando. A Rita explicou que acrescentou mais 3 mochos em cada fila (figura 11), o Gabriel explicou que formou quadrados e retângulos e aumentou o número de aves dos lados das figuras (figura 12) e o David formou quadrados e retângulos e acrescentou mais 1 ou 2 nos lados das figuras (figura 13). Outros alunos repetiram organizações que já tinham sido apresentadas, sendo que a mais comum foi a dos números ímpares em V.

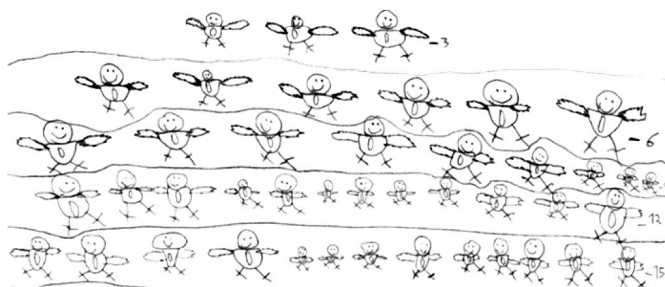


Figura 11

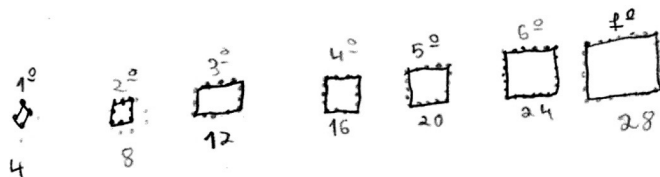


Figura 12

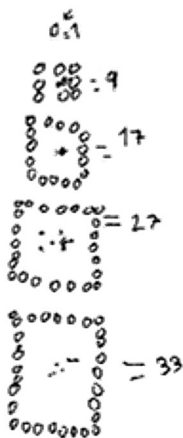


Figura 13

É interessante notar que a sequência da Rita segue uma regularidade numérica mas o desenho da disposição dos pássaros não ilustra a relação numérica. No caso do Gabriel, a sequência numérica também é clara, porém, embora o aluno a tenha associado a quadrados e retângulos, estas figuras não ilustram as disposições retangulares favoráveis à representação dos múltiplos de 4. O David teve a preocupação de associar o número de pássaros a cada uma das disposições, mas não é perceptível a regra de formação da sequência numérica. Estes três casos apontam claramente para o interesse de trabalhar com estes alunos a ligação entre uma sequência de representações visuais e uma sequência numérica.

OS MODELOS MATEMÁTICOS

Quase todas as situações de bandos criadas pelos alunos têm inerente um modelo algébrico de generalização acessível e que apresentamos na tabela da figura 14.

Situação	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	...	n	Observações
Bandos de condores, situação inicial Fig. 7	1	3	6	10	15	...	$n(n+1)/2$	Números triangulares
Bandos de gaivotas Fig. 10	1	3	5	7	9	...	$2n-1$ ou $2n+1$	Números ímpares
Bandos de mochos Fig. 11	3	6	9	12	15	...	$3n$	Múltiplos de 3
"Bandos do Gabriel" Fig. 12	4	8	12	16	20	...	$4n$	Múltiplos de 4
"Bandos do David" Fig. 13	1	9	17	27	33	...	?	Sequência não generalizável

Figura 14

Consideramos que a sequência da figura 13 não é generalizável com a informação de que dispomos. Um diálogo com o aluno ajudaria a compreender se havia alguma regularidade entre os vários elementos da composição e se esta poderia ser generalizável. Em alguns dos outros casos, os próprios alunos formularam uma relação que poderia conduzir à obtenção de uma expressão geral. É o caso dos bandos de mochos em que a própria aluna, a Rita, explicou que acrescentou sempre mais 3. Nesta experiência, a generalização não era um objetivo de aprendizagem e, por isso, não foi planeada uma estratégia para construir a expressão geradora de cada grupo de bandos a partir das ideias dos alunos. Seguramente que seria indispensável o recurso à visualização do modelo representativo dos bandos do mesmo tipo de pássaros. Em alguns casos seria mesmo necessário alterar a representação elaborada pelo aluno para uma representação mais favorável e realmente demonstrativa da expressão geral. O exemplo mais flagrante é o dos bandos de mochos em que seria desejável uma representação retangular. Fica em aberto o desenvolvimento desta sequência de atividades para chegar à generalização. Contudo, queremos evidenciar o facto de cada grupo de bandos criado por um aluno constituir uma sequência numérica que poderá ser associada a uma fórmula geradora. Constituem situações mais ricas e acessíveis porque têm significado para o aluno que a criou, imaginou e é capaz de descrever estabelecendo relações ou explicando a sua lei de formação. O caso da situação que não é generalizável pode ser usado como contraexemplo de uma sequência numérica para a qual não existe uma expressão geral associada.

REFLEXÃO

No desenvolvimento desta atividade ficou patente a motivação e o entusiasmo dos alunos na procura de estratégias para responderem ao problema. Dialogaram entre si, a pares, em pequeno grupo ou no coletivo. Sentiram-se desafiados pelas propostas e demonstraram flexibilidade no encontro de respostas, integrando as informações e descobertas dos colegas. Enquanto docente titular de turma surpreendeu-me a facilidade com que procuraram resoluções e fizeram as propostas dos seus bandos, integrando as noções adquiridas, das formas geométricas e da progressão regular entre cada bando, em simultâneo com aspetos criativos, que também estão presentes nas tarefas de Matemática. Uma sequência didática construída deste modo nunca está terminada, como ficou evidenciado com as oportunidades de generalização. Naturalmente que haveria novas tarefas a propor para o desenvolvimento do trabalho realizado e, por isso, podemos afirmar que uma sequência não se fecha e vai sempre abrindo novas possibilidades. No entanto, demos por finalizada agora esta breve experiência. Sintetizamos a experiência no quadro da figura 15.

1.ª tarefa	Criação de condições para aceder às ideias dos alunos sobre representações visuais de números. Valorização das resoluções de todos os alunos.
Momento de partilha da 1.ª tarefa	Destaque de algumas resoluções. Introdução de elementos gráficos nas representações triangulares. Valorização dos elementos gráficos no destaque visual de relações entre os elementos de uma representação.
Desenvolvimento da 1.ª tarefa	Utilização da tabela como organizador gráfico que potencia a análise da informação que a compõe e o estabelecimento de relações entre vários elementos que a constituem.
2.ª tarefa	Utilização de tabelas na representação de relações numéricas construídas a partir de representações visuais. Valorização das ideias dos alunos.
3.ª tarefa	Relações numéricas em sequências numéricas. Comunicação das relações recorrendo a representações visuais e à comunicação verbal.

Figura 15

Para fechar a apresentação desta experiência fazemos algumas reflexões que contemplam os aspetos que foram mais significativos.

Na perspetiva do ensino exploratório, foi muito importante a primeira tarefa ter sido muito aberta. Esta abertura permitiu que todos os alunos se envolvessem na atividade e que o professor recolhesse informação para decidir como continuar.

A manutenção da abertura das tarefas deu a possibilidade aos alunos de criarem as suas próprias soluções e assim ficarem mais sensíveis à diversidade de soluções e à importância de descreverem a sua solução.

A resolução de novas tarefas em continuidade permitiu melhorar os esquemas de resolução, acrescentando elementos gráficos orientadores aos triângulos representativos, as linhas, e introduzir a tabela como organizador gráfico útil para o estabelecimento de relações numéricas.

Nesta experiência ficou evidente a capacidade exploratória dos alunos, na sua descoberta para solucionar o problema. Valorizou-se mais a criatividade e partilha de ideias entre os alunos, ficando a faltar a generalização, que permitiria a aplicação das resoluções em outras situações.

Na perspetiva da avaliação, foi evidente que os próprios alunos melhoraram as suas resoluções ou representações tendo em conta as resoluções partilhadas. Também ficou claro que a ação avaliativa do professor foi orientada para o grupo turma, considerando cada aluno como um elemento importante no grupo e que tem contributos a dar para a aprendizagem dos seus colegas. O professor selecionou as resoluções para discussão a partir dos contributos que essa solução poderia dar aos colegas. Ao destacar resoluções mais ricas e matematicamente mais poderosas, o professor não precisou de dar *feedback* a cada aluno separadamente. Foram os próprios alunos que valorizaram esses

aspetos destacados e que se apropriaram deles para melhorarem as suas resoluções nas tarefas de continuidade.

Como professora, em diversos momentos questiono a aprendizagem que os alunos fazem das noções matemáticas, pretendendo que eles apresentem progressos no raciocínio e maior rapidez de cálculo. Mas, para que tudo isso aconteça é fundamental a sua motivação e envolvimento nos problemas. Assim, o professor tem mais facilidade de avaliar as capacidades dos alunos e de apreciar a evolução do seu desempenho.

Na apresentação inicial do problema dos “bandos” aos alunos, nunca imaginei que viria a ser tão estimulante e com o alcance que veio a ter. Inicialmente parecia-me “demasiado aberto”, com várias possibilidades de resposta, considerando até que poderia “confundir” os alunos. Pelo contrário, rapidamente conseguiram atribuir alguma organização e encontrar uma sequência lógica nas propostas de bandos.

Com o desenvolvimento das tarefas mencionadas, fiquei com um maior reconhecimento das potencialidades de situações problemáticas “abertas”, que desencadeiam a autonomia dos alunos, a interajuda e aumentam o seu interesse pelas questões matemáticas. Pareceu-me fundamental a oportunidade que os alunos tiveram de exercitar as suas capacidades.

Como formadora esta experiência foi muito significativa. De certa forma houve um isomorfismo entre a ação do formador e a ação das professoras em formação. Num primeiro momento foi preciso incentivar as professoras a arriscar uma proposta muito aberta, situação totalmente nova para elas, e acreditar que seria possível ter resultados que dessem pistas para continuar. Num segundo momento, bastou evidenciar o valor matemático das resoluções de alguns alunos e planear em conjunto algumas possibilidades de continuidade. O entusiasmo dos alunos é sempre contagiante para os professores.

Esta sequência didática foi sendo construída com a professora partir da análise das resoluções dos alunos. E embora a sequência já tenha alguma consistência consideramos que não está terminada e há aspetos ainda por desenvolver. Nunca pensámos que este voo nos levasse tão longe e nos proporcionasse tantas ideias e vistas tão ricas.

Referências

Mason, J. (2010). Attention and intention in learning about teaching through teaching. R. Leikin & R. Zazkis (Eds.) *Learning through teaching mathematics* (pp. 23–47). Springer.

Elisabete Gonçalves dos Santos

E.B.1 Luz/Carnide – Agrupamento de Escolas Vergílio Ferreira

Cristina Loureiro

ESE do IP de Lisboa

Vale a pena ensinar Matemática?

ANTÓNIO M. FERNANDES

VALE A PENA ENSINAR MATEMÁTICA?

Olhando o Universo em redor, perscrutando não apenas o espaço mas também o tempo que alberga a história do conhecimento humano, facilmente se reconhece que ele se compõe, de igual forma, de matéria concreta e relações matemáticas. No mínimo é desta forma que se nos apresenta e o nosso conhecimento acerca dele é possível.

Perante tão avassaladora evidência, a questão *vale a pena ensinar Matemática?* parece vazia de importância: um mero adereço retórico. No entanto, fundamentar a necessidade do ensino da Matemática neste carácter utilitário, implica a aceitação de que a Educação é mais um *treino para o uso* e menos um *catalisador* de processos de crescimento e criação de capacidade cognitiva¹.

Assim, procurando razões justificativas do ensino da Matemática, procurarei acima de tudo *razões intrínsecas* i.e., residentes na natureza da Matemática, na sua essência, e na essência da sua actividade². Uma tal tarefa pressupõe, ou pelo menos parece pressupor, uma *definição* do termo *Matemática*³. A busca de uma tal definição, ou a mera indagação da possibilidade de uma tal definição, é uma oportunidade para descrever, ainda que brevemente, o âmago da actividade Matemática ilustrando aspectos fundamentais do pensamento matemático, uma oportunidade cujo valor me impede que a enjeite.

PROCURANDO UMA DEFINIÇÃO DO TERMO MATEMÁTICA

No século 3 a.C. o termo *Matemática* podia confundir-se com o conteúdo dos *Elementos* de Euclides. Tal como surge nos *Elementos* ela é em larga medida uma versão da realidade observável. Os termos primitivos correspondem a abstrações que emanam da realidade concreta. Próclo⁴,⁴ no seu comentário ao primeiro livro dos *Elementos*, refere que as entidades matemáticas ocupam uma posição intermédia entre as coisas simples e indivisíveis (as formas platónicas) e aquelas que possuem partes e são complexas na sua composição, os objectos físicos. Noutros termos, as entidades matemáticas são

mais complexas que as ideias simples, mas mais precisas que as coisas físicas⁵⁶.

Os *Elementos* possuem a estrutura prescrita por Aristóteles nos *Analíticos Posteriores* para o que viria a ser designado de *modelo clássico da ciência*. Este modelo envolvia uma distinção entre os métodos analítico e sintético, o método axiomático, e a lógica enquanto ciência. Muito genericamente, uma ciência é conforme a este modelo se consiste num sistema de termos e proposições. Neste sistema, os *termos básicos* são definidos e todos os outros se definem a partir destes. Além disso, consideram-se algumas *proposições fundamentais* (axiomas) envolvendo esses termos, proposições estas cuja veracidade deve ser *imediatamente reconhecível*. Todas as outras *verdades* devem ser demonstradas a partir destas.

Apesar de abstratos, os objectos da geometria euclidiana mantêm uma relação íntima com a realidade física observável: o requisito para a escolha dos axiomas i.e., a sua veracidade imediatamente reconhecível, não pode ser cumprido senão por recurso a uma *intuição empírica*. O apelo a este tipo de intuição ocorre até de uma forma subconsciente, ao ponto dela se ver integrada nas próprias demonstrações que, desta forma, possuem uma natureza híbrida, logico-intuitiva.

A primeira proposição dos *Elementos* estabelece a possibilidade de, dado um segmento AB, construir um triângulo equilátero de lado AB. Esta proposição não se pode estabelecer através de uma demonstração que use como hipóteses os axiomas de Euclides. A *demonstração* que consta nos *Elementos* tem como suporte a figura 1. A existência das duas circunferências é garantida pelo terceiro postulado. No entanto, a existência do ponto C, que supostamente resulta da intersecção das duas circunferências, não se pode estabelecer a partir dos axiomas. Este não é um caso isolado, a axiomática euclidiana é insuficiente para estabelecer (em termos estritamente lógicos) todo o corpo proposicional contido nos *Elementos*⁷. Existe nesta prova o apelo a uma evidência empírica que reside ultimamente na *realidade física*.

¹E de outros tipos que por me interessarem menos nesta exposição, ignorarei.

²Quero dar razão a Oswald Veblen: «A Matemática é uma das emanções fundamentais do espírito humano—algo que deve ser valorizado em si mesmo, e por si mesmo, como a arte ou a poesia.»

³Encontramo-nos essencialmente nas mesmas circunstâncias que Platão, no Ménon. Depois de se questionar se a virtude se pode ensinar, refere: «Estou tão longe de saber se a virtude pode ser ensinada se nem sequer sei o que a virtude é.»

⁴Próclo de Atenas (412 d.C.–485 d.C.)

⁵Ao contrário dos objectos físicos, as entidades matemáticas são, bem como as suas propriedades, eternas e não sujeitas a acções causais, por outro lado não são como as entidades inteligíveis correspondentes às formas platónicas, pois podem compor-se e decompor-se e representar-se através do raciocínio discursivo. (As formas, embora acessíveis à mente são independentes dela, e não são racionalmente analisáveis.)

⁶É ainda Próclo que atribui a Platão a esperança de que as entidades matemáticas nos pudessem aproximar da compreensão destas ideias puras.

⁷Emparticular faltam os denominados axiomas de continuidade que Hilbert haveria de considerar nos seus Fundamentos da Geometria

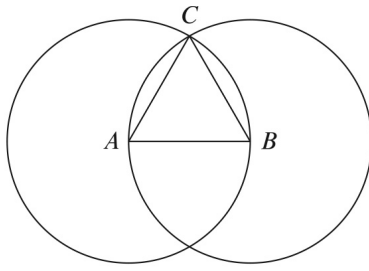


Figura 1. Elementos, Livro I, Proposição 1

As coisas iriam mudar, mas não antes do início do século 19. É claro que o curso da matemática não se resumiu, entretanto, a construções de régua e compasso e.g., os sistemas numéricos evoluíram dos números naturais à consideração dos números complexos, um caminho aberto pelo desenvolvimento da álgebra. Descartes e Fermat, estabelecendo as bases da geometria analítica abriram caminho ao desenvolvimento do cálculo, o palco onde actuam noções fundamentais como a de derivada ou de integral. Tudo isto é em certo sentido acomodável no contexto euclidiano. Mas, como referimos as coisas iriam mudar. Chegados ao século 19, a natureza da Matemática bem como o seu papel estavam prestes a ser revistos numa concepção radicalmente diferente.

Um dos axiomas dos *Elementos*, o famoso *quinto postulado*, que é equivalente ao facto de por um ponto exterior a uma recta passar uma única paralela⁸ foi, desde o momento inicial, motivo de controvérsia. Muitos matemáticos achavam que ele não cumpria, ao contrário dos restantes axiomas, o requisito de possuir um carácter de verdade imediatamente reconhecível. Tentou-se assim demonstrá-lo a partir dos outros axiomas.

A partir de certa altura, especialmente depois de Girolamo Saccheri (1667–1733) ter publicado (Milão, 1733) o seu *Euclides ab omni naevo vindicatus*, tentou-se estabelecer o quinto postulado, por redução ao absurdo, admitindo a sua negação. É precisamente este o contexto de investigação de Nikolai Lobachevsky (1792–1856). Trabalhando com a hipótese de por um ponto exterior a uma recta poder passar mais que uma paralela, Lobachevsky conclui em 1829 que uma geometria onde este princípio é válido tem a mesma consistência da geometria euclidiana. Ele chegou a esta conclusão não porque tivesse um modelo geométrico do novo axioma, mas antecipando numa forma ainda embrionária, é certo, uma ferramenta moderna de verificação de consistência—a interpretação. Com efeito, depois de ter estabelecido as fórmulas da trigonometria hiperbólica (o nome dado à nova geometria), ele verificou que elas se obtinham das fórmulas correspondentes para a geometria euclidiana através de uma simples manipulação algébrica. Daqui ele concluiu que se uma contradição se pudesse derivar

⁸ Este enunciado corresponde ao denominado axioma de Playfair que foi enunciado nesta forma pelo matemático escocês John Playfair (1748–1819).

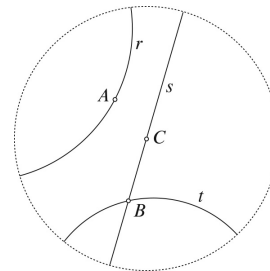


Figura 2. O disco de Poincaré

na nova geometria então a transformação algébrica permitia transformar essa demonstração na demonstração de uma contradição na geometria euclidiana, i.e. do ponto de vista lógico a nova geometria não possui um estatuto inferior ao da geometria euclidiana.

A figura 2 exhibe um modelo da geometria hiperbólica—o *disco de Poincaré* (que constitui uma interpretação da geometria hiperbólica no plano euclidiano). O modelo em causa corresponde ao interior do círculo de centro em (0,0) e raio unitário. Neste modelo, por *ponto* entende-se um ponto no interior desse círculo e por *recta* entende-se ou um diâmetro, ou então a intersecção de uma circunferência que é ortogonal à circunferência unitária (as tangentes nos pontos de intersecção são ortogonais) com o círculo (na figura, r,s,t são *rectas*). Estes pontos e rectas constituem um modelo da geometria hiperbólica onde é claro que por um ponto exterior a uma recta passa mais que uma recta que não intersecta a recta original (no caso da figura pelo ponto B podem ver-se duas rectas, s,t, que não intersectam a recta r), em clara contradição com o axioma de Playfair e, consequentemente, com o postulado 5.

Temos então duas geometrias logicamente coerentes mas, incompatíveis entre si i.e., a intuição fundamental de espaço (se existe) não pode ser descrita por ambas. E, no entanto, ambas podem ser consideradas frutos legítimos da actividade matemática e a Matemática deixa de poder ser uma mera emanção do universo concreto. A partir deste momento a Matemática passa a ser, como dizia o filósofo australiano David Malet Armstrong, «acerca de todos os mundos possíveis».

O impacto do modelo de Poincaré não se esgota no seu *valor matemático*. Dado que as rectas (caminhos mais curtos entre dois pontos) podem agora ser arcos de circunferência é claro que os *habitantes* deste universo não medem distâncias de uma forma euclidiana. A distância ds entre pontos (x,y) e (x+dx, y+dy) é, no contexto euclidiano, medida através do teorema de Pitágoras, i.e. satisfaz a relação $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Para pontos no universo de Poincaré, os habitantes medem uma distância entre aqueles pontos, ds, que satisfaz a fórmula $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$, uma variação da distância euclidiana. Mas não uma variação trivial, de facto possui uma característica interessante: à mesma translação (euclidiana) (dx,dy) de um ponto (x,y) corresponde uma distância muito maior (tendendo para infinito) no disco de Poincaré, à

medida que (x,y) se situa perto do bordo do círculo. Dito de outra forma, se um habitante deste universo se desloca em relação aos seus limites ele vai, do ponto de vista do plano euclidiano (onde este universo está embebido) ficando sucessivamente mais pequeno (embora ele não tenha consciência disso, pois do seu próprio ponto de vista tem sempre o mesmo tamanho). Desta forma, nunca lhe é permitido alcançar essa fronteira.

Para Poincaré, esta circunstância mostra como é impossível podermos saber se dados dois modelos da realidade, um deles é mais adequado a essa realidade ou não—os habitantes do universo de Poincaré julgam legitimamente que a geometria que descreve o seu universo é hiperbólica e que ele é infinito. No entanto, o seu mundo insere-se num mais vasto universo euclidiano e é claramente finito⁹. Esta sequência de eventos mostra que no passado não houve a possibilidade de obter uma definição categórica do termo *Matemática* (nenhuma tentativa de definição resistiria a uma tão radical alteração conceptual). Muito provavelmente, também não teremos essa possibilidade no futuro. Sendo acerca de todos os mundos possíveis, a Matemática é acerca de muitas e variadas coisas, muitas vezes realidades mutuamente inconciliáveis. O estado actual das coisas mostra que todos estes *universos conceptuais* se podem descrever na denominada *teoria de conjuntos*. Mas, por mais tentadora que pareça a possibilidade de uma teoria de conjuntos reivindicar para si o papel dos *Elementos* de Euclides, o fenómeno da *incompletude* (de Gödel) mostra como uma tal possibilidade é irrealista.

A teoria de conjuntos é uma teoria axiomática e, depois de Gödel, sabemos que as teorias axiomáticas (as significativas, pelo menos) são necessariamente incompletas i.e., existem certas proposições, ϕ , tais que nem elas nem as suas negações, $\neg\phi$, são demonstráveis. Em particular, isto aplica-se à teoria de conjuntos, onde um dos casos mais notáveis é o *axioma da escolha*: se A é uma família de conjuntos não vazios, existe uma função f cujo domínio é A , e $f(X) \in X$, para qualquer $X \in A$. Ora, quando uma teoria T não demonstra nem uma proposição, ϕ , nem a sua negação então, $T+\phi$ e $T+\neg\phi$ são duas teorias mais fortes que T e ambas logicamente coerentes. Se tivéssemos identificado a Matemática com a teoria de conjuntos, estaríamos agora confrontados com a necessidade de considerar *duas Matemáticas globalmente inconciliáveis*. A iteração deste fenómeno introduz uma infinita variabilidade e com ela a impossibilidade de definir *Matemática* fixando uma teoria fundamental.

O QUE FAZER NA AUSÊNCIA DE UMA DEFINIÇÃO

Podemos pensar que a diversidade que mencionámos acima é algo que não interessa reter e que, apesar de tudo, em toda aquela diversidade estrutural existe um caminho essencial que deve ser destacado. Uma tal atitude constituiria uma limitação pouco interessante do âmbito da própria Matemática. Por outro

lado, mesmo quando nos interessa uma estrutura em particular (os números naturais, por exemplo) é possível considerá-los fora do seu *ambiente natural*, num mundo imaginário, e apelar a princípios que são falsos na estrutura dos números naturais, para demonstrar factos verdadeiros acerca desses mesmos números. Ou seja, estas *estruturas ideais*, digamos assim, têm um papel relevante mesmo quando nos preocupamos apenas com certas estruturas particulares (algumas abordagens recentes exploram precisamente a ideia de que para acedermos à natureza dos conjuntos, por exemplo, devemos ter em conta aquilo que, não um mas todos os universos de conjuntos permitem observar)¹⁰. Chegamos assim a este ponto com a ideia de que não estamos em condições de poder obter uma definição útil do termo *Matemática*. Como vamos então tentar responder à questão original, cuja resposta parece precisamente depender da existência de uma tal definição? A verdade é que mesmo não sendo possível uma caracterização definitiva, é ainda assim possível isolar aspectos essenciais da Matemática e do exercício da sua actividade, que nos ajudam a responder-lhe nos termos em que nos propusemos fazê-lo. Entre esses aspectos consideram-se frequentemente a *criatividade*, a *intuição*, a *abstracção*, a *imaginação*, a par do *rigor lógico* e do *pensamento formal*. Estes são inquestionavelmente aspectos essenciais associados à Matemática e à respectiva actividade. Mas não são razões *per se* para ensinar Matemática. Pelo menos não todas elas, senão vejamos: criatividade e intuição manifestam-se em todas as áreas da actividade intelectual e é altamente controverso que a Matemática constitua um palco privilegiado para as exercitar. Além disso, são aspectos cujos mecanismos são suficientemente mal compreendidos para nos impedir de saber se se podem ou não ensinar. A Matemática oferece seguramente um palco, como outros, para a sua actuação, mas é apenas isto.

A abstracção e a imaginação possuem seguramente um papel essencial e (argumentarei) um papel distintivo em Matemática. Deixarei mais considerações sobre estes aspectos para a derradeira secção.

RIGOR LÓGICO E FORMALISMO

O formalismo matemático¹¹ resulta de um entrelaçamento essencial de dois aspectos: *demonstração formal* e *linguagem formal*. Por demonstração formal entenda-se um sistema de regras que se combinam em argumentos que testemunham a correcta transmissão da verdade. De facto, não podemos depender de demonstrações informais, contaminadas por intuições de naturezas várias, ou assistidas por diagramas, ao estilo das demonstrações dos *Elementos*. Consideremos o lado esquerdo da figura 3 onde uma sucessão de curvas aproxima sucessivamente a circunferência. Se, os perímetros dessas curvas convergem para um dado valor, não será estranha a conclusão

⁹ O termo *ininito* é aqui empregue no sentido da área.

¹⁰ No denominado programa do hiper-universo.

¹¹ Não me refiro ao formalismo enquanto losoa da matemática.

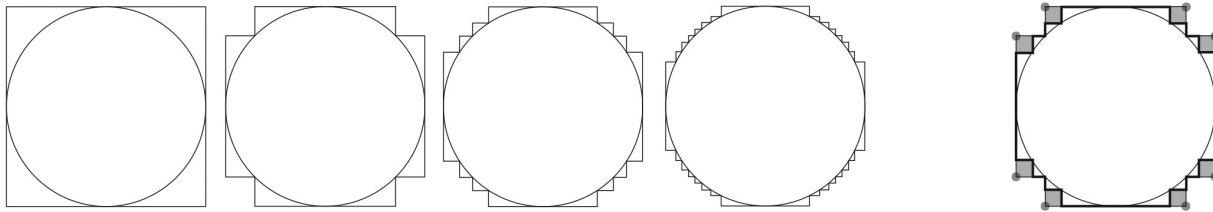


Figura 3. Aproximando a circunferência

de que esse valor coincide com o perímetro da circunferência. Considerando agora o lado direito da figura 3, podemos ver como se passa de uma curva na sucessão descrita, para a seguinte: a partir dos vértices que não estão em contacto com a circunferência desenhamos quadrados como indicado. A nova curva percorre esses quadrados usando as duas arestas que não foram usadas na curva anterior. A conclusão é inevitável, a construção das sucessivas curvas não altera o respectivo perímetro e assim *o quadrado inicial e a circunferência têm o mesmo perímetro*, uma evidente falsidade.

Por outro lado, a Matemática é acerca de domínios infinitos e, por exemplo, para estabelecer uma propriedade universal dos números naturais, não se pode fazer uma verificação exaustiva. A alternativa é demonstrar¹². O propósito essencial da demonstração é então garantir a correcta transmissão da verdade e, por falar em verdade, é altura de referir o papel da linguagem formal. A verdade, no sentido filosófico do termo, é um valor civilizacional e a sua preservação é uma tarefa cuja importância foi desde sempre reconhecida. No entanto, quando Pôncio Pilatos perguntou a Jesus «o que é a verdade?» ele podia não estar a ser meramente retórico.

No século 4 a.C., Eubulides de Mileto colocou a famosa questão: «será que digo a verdade quando digo que minto?», aludindo ao famoso *paradoxo do mentiroso*, mais conhecido através do enunciado da proposição *eu sou falsa*. Será a frase *eu sou falsa* uma sentença verdadeira ou falsa? Breves momentos de reflexão mostrarão que é verdadeira se e só se é falsa, um evidente paradoxo!

A *verdade* não é pois uma noção simples e esse facto foi observado muito cedo. Três das epístolas pastorais que integram o Novo Testamento são atribuídas a S. Paulo. Uma delas—a epístola a Tito—descreve que Epiménides (século 6 a.C.) terá afirmado que «os cretenses são mentirosos, mentindo em todas as as ocasiões». Uma vez que o próprio Epiménides era cretense, esta afirmação ficou conhecida como *Paradoxo de Epiménides*. Convém observar que não está em causa nenhum problema

do tipo identificado no caso do paradoxo do mentiroso. A frase não pode ser verdadeira (a sua verdade implicaria a sua falsidade) e então tem que ser falsa. O facto de ser falsa já não levanta nenhum problema, pois a sua negação corresponde a afirmar que *algum cretense em alguma ocasião disse a verdade* e como esse cretense não tem que ser Epiménides, e assim não se obtém nenhuma situação paradoxal (do tipo do paradoxo do mentiroso). Mas, como muito bem notou Alonzo Church, em 1946, a situação é paradoxal por uma outra razão: um facto puramente empírico como é o de saber se alguma vez algum cretense disse ou dirá a verdade em alguma ocasião, poder ser decidido pela lógica apenas e ser independente da vontade dos próprios cretenses.

Permitam-me um último exemplo (desta vez com maior conteúdo matemático) ilustrativo das possíveis dificuldades associadas à noção de verdade: o *paradoxo de Berry*. Consideremos a expressão: *n é definível através de uma frase envolvendo menos de 200 letras*¹³, que abreviamos por $D(n)$. Mesmo considerando que os espaços são letras, o número de expressões com menos de 200 letras é certamente finito. Como os naturais são infinitos, o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} : \neg D(n)\}$ dos naturais que não satisfazem $D(n)$ é infinito, logo não vazio. Uma propriedade característica dos números naturais é que qualquer conjunto de naturais que não seja vazio possui um elemento mínimo¹⁴. Podemos assim considerar $n_0 = \min X$, o mínimo elemento de X . Tem-se então que n_0 é o menor número natural que não é definível com menos de 200 letras. No entanto, a expressão *n é o menor natural que não é definível através de uma expressão envolvendo menos de 200 letras*, define n_0 com menos de 200 letras (absurdo!).

O problema foi identificado residindo no facto de numa linguagem natural co-habitarem diferentes níveis linguísticos (desde logo a linguagem e a metalinguagem). Para evitar este tipo de dificuldade, a linguagem da matemática é uma linguagem formal (isto não significa que os matemáticos comuniquem formalmente, significa apenas que aquilo que é o objecto comunicado deve ser *formalizável*).

Como consequência, a *verdade* em matemática é objectiva, já que em última análise a sua verificação se reduz à verificação de relações básicas, do tipo $x \in A$ ou $x \notin A$.

¹² Nocas da lógica proposicional, por exemplo, podemos encontrar as tautologias de duas formas, ou através de tabelas de verdade (o que todos fazem) ou fazendo demonstrações (o que poucos sabem ser possível). O sucesso das tabelas de verdade resulta de ser um procedimento mecânico, enquanto que uma demonstração é sempre um acto criativo e muito mais difícil de obter. Mas este expediente deixa de estar disponível quando abandonamos a lógica proposicional e a nossa lógica é acerca de indivíduos em certas estruturas. Aí só nos resta demonstrar.

¹³ Dizemos que um natural n_0 é definível através de uma propriedade $P(n)$ se s_0 é o único natural que satisfaz $P(n)$, i.e. $\{n \in \mathbb{N} : P(n)\} = \{n_0\}$.

¹⁴ Um facto que justica o bem conhecido princípio de indução.

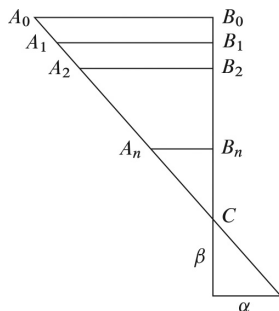


Figura 4. Evidência para a existência de infinitesimais

AINDA ACERCA DO RIGOR

É errado pensar que os avanços matemáticos se processaram constantemente alicerçados em rigor absoluto. A análise histórica revela com estrondo que os grandes saltos conceptuais e os períodos de grande criatividade corresponderam a períodos de alguma liberdade criativa. Foi assim com a teoria de conjuntos de Cantor e foi também desta forma com os progressos no cálculo com origem em Leibniz e Newton, envolvendo a noção de infinitesimal.

O que são então os *infinitesimais*? Eles são um novo tipo de números que co-existem com os números ordinários. Que tais números existam, resulta de uma característica da Matemática onde é comum a adopção de uma *ontologia elástica*.

Se considerarmos a figura 4, constatamos que

$$\frac{A_0B_0}{B_0C} = \frac{A_1B_1}{B_1C} = \dots = \frac{A_nB_n}{B_nC} = \dots = \frac{0}{0} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ou seja, a figura sugere que este tipo de comportamento pode ser representado por um novo tipo de números, que podem ser nulos do ponto de vista dos números ordinários, mas ainda assim mantendo uma razão entre si. Estes novos números são os *infinitesimais* e (na notação de Leibniz) denotam-se por dx , dy , dz , etc. Tem-se assim que se x é um número ordinário, então $x + dz = x$. Por outro lado, dado $\alpha \neq 0$ é suposto existirem infinitesimais dx e dy tais que $dx/dy = \alpha$.

Muito antes da noção de limite estar disponível, o cálculo foi desenvolvido num ambiente de suspeição relativamente à coerência destas entidades. Os grandes matemáticos que as utilizaram obtendo resultados fundamentais não se abalaram com tais objecções. Até mesmo Cauchy a quem se atribui a correcta definição de noções como a de limite, no seu famoso *Cours d'Analyse*, ao mesmo tempo que introduz as noções fundamentais ao desenvolvimento *rigoroso* do cálculo, mantém explicações baseadas nos infinitesimais não abdicando, pelo menos, do valor heurístico desta noção.

Mas, o expoente máximo de liberdade criativa na utilização de infinitesimais, reside muito provavelmente na forma como Euler estabelece o desenvolvimento em série da função exponencial (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748). Modernamente essa série é obtida a partir do teorema de Taylor e é:

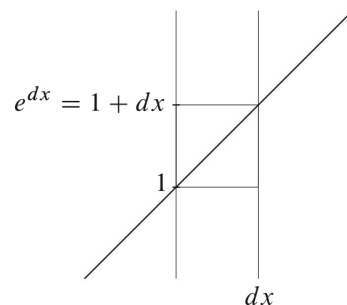


Figura 5. A função e^x numa vizinhança infinitesimal de $x=0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

Mas Euler conseguiu estabelecer esta mesma fórmula usando como única informação o facto de a exponencial tomar o valor 1 em $x = 0$ e ter derivada 1 em $x = 0$. De acordo com a concepção da época, numa vizinhança infinitesimal de qualquer ponto, qualquer curva coincide com a sua tangente (não apenas no ponto, mas em todos os pontos dessa vizinhança). Ou seja, localmente qualquer curva é uma recta (a sua tangente). Assim sendo, a figura 5 representa a função exponencial numa vizinhança infinitesimal de $x = 0$ (observe-se que a tangente tem declive unitário).

De acordo com a figura, $e^{dx} = 1 + dx$. Mas, evidentemente, o objectivo é determinar e^x para um qualquer número (ordinário) x . O segmento determinado por x pode dividir-se num qualquer número n de partes iguais. Mas, para reduzir a questão ao caso infinitesimal, Euler admite que o mesmo é possível considerando N infinito, i.e. dividindo o segmento de comprimento x num número infinito de partes. Cada uma dessas partes tem então comprimento infinitesimal $dx = x/N$. Tem-se então

$$e^x = e^{dx} = (e^{dx})^N = (1 + dx)^N = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N.$$

Quem já imaginou naturais infinitos, pode agora admitir aplicar a fórmula do binómio de Newton a este caso, obtendo:

$$1 + x + \frac{N(N-1)x^2}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)x^3}{N^3} + \dots \quad (2)$$

considerando que os coeficientes binomiais se calculam como no caso finito i.e.,

$$\binom{N}{p} = \frac{N!}{(N-p)!p!} = \frac{N(N-1)\dots(N-p+1)}{p!}.$$

Simplificando (2), obtém-se:

$$1 + x + \frac{(N-1)}{N} \frac{x^2}{2!} + \frac{(N-1)(N-2)}{N} \frac{x^3}{3!} + \dots$$

O cálculo destes coeficientes simplifica-se, pois para cada natural k finito tem-se:

$$\frac{N-k}{N} = 1 - \frac{k}{N} = 1 + dz = 1. \text{ conduzindo à fórmula (1).}$$

Este é seguramente um dos expoentes máximos desta liberdade criativa que esteve patente na utilização dos infinitesimais e que acabaria por determinar um salto conceptual da máxima importância. E o que dizer de Cantor, capaz de deixar de lado um princípio aristotélico que antes dele ninguém ousou contestar—*o todo é maior que a parte*. Dessa ousadia resultaria que, finalmente, uma noção que se considerava intratável—a noção de infinito—se tornou uma noção matemática firme. O rigor demonstrativo, formal, é uma característica matemática (e a produção de uma demonstração é um acto criativo), mas neste aspecto não se esgota seguramente a criatividade matemática e esse caminho *paralelo* ao rigor não lhe é antagónico. Pelo contrário, é uma peça fundamental do crescimento da própria disciplina.

É ENTÃO? VALE A PENA ENSINAR MATEMÁTICA?

Em 1547, Alessandro Piccolomini publicou o seu *Commentarium de certitudinem mathematicarum disciplinarum*, onde defendia a tese segundo a qual as demonstrações matemáticas não eram *potissimae*, a forma mais perfeita de demonstração. Acrescentava que o absoluto grau de certeza das proposições matemáticas não provinha das suas demonstrações, mas da objectividade das suas noções¹⁵.

Claro que não me ocorre mencionar este facto para entrar tardiamente nesta polémica, mas sim porque Piccolomini introduz uma distinção muito particular entre a Ciência e a Matemática, uma distinção que do meu ponto de vista aponta as razões intrínsecas que procuramos e justificam o ensino da Matemática. Não querendo entrar em aspectos técnicos desnecessários, vale a pena explicar melhor o que estava em causa. Numa relação causal (que necessariamente ocorre entre entidades no universo físico) nem todos os aspectos que caracterizam a complexidade dos objectos envolvidos condicionam a relação. As demonstrações *potissimae* possuíam então o duplo papel de estabelecer quais os aspectos envolvidos na relação e, de estabelecer que, de facto, esses aspectos implicavam necessariamente a relação.

No caso da Matemática, o acesso à natureza dos objectos é imediata e a primeira característica das demonstrações *potissimae* é dispensável. Este aspecto decorre precisamente do carácter abstrato dos objectos matemáticos e das estruturas matemáticas. A abstracção é uma característica fundamental da Matemática que, através dela, acede às estruturas na sua forma mais geral, mais simples e mais objectiva. Desta forma, o *universo matemático* é o mais rico, pois é nele que existem, de forma individualizada, os componentes fundamentais das concepções mais sofisticadas e das ideias mais complexas. Observe-se que a existência destas componentes, embora governada por uma

ontologia muito flexível (talvez a mais flexível de todas) é, ainda assim, governada por uma restrição essencial—a coerência lógica.

Lidando com entidades abstractas, a actividade matemática é indissociável da imaginação. Bertrand Russell referia que essa actividade depende essencialmente da capacidade de imaginar as *estruturas representativas* e observar as leis que nelas são válidas. O que está em causa é uma forma muito poderosa de imaginação, que toma como ponto de partida realidades que existem num sentido muito diferente do concreto e observável. Por outro lado, não se trata de imaginar simplesmente objectos mas, em muitos casos, imaginar esses mesmos objectos organizados de múltiplas formas.

O universo Matemático é o lugar onde a criatividade e imaginação *racionalmente coerentes* podem ser potenciadas de forma maximal. Ideias e concepções sofisticadas podem ser testadas neste ambiente, não só no que respeita à sua coerência, mas também no que respeita às suas consequências. É o lugar onde uma variedade infinita de *universos* se pode materializar e as suas propriedades podem ser observadas e exploradas.

Santo Agostinho (354–430) possuía uma interpretação curiosa dos *milagres*. Defendia precisamente que «os milagres não se opõem à Natureza, tão somente se opõem à forma como entendemos a Natureza.» Uma vez que ele estava evidentemente convencido da autenticidade de certos milagres, admitia implicitamente que a nossa percepção da realidade pode ser permanentemente desafiada.

Mesmo não aderindo à tese da existência de milagres, é possível notar interessantes pontos de contacto entre esta concepção e a observação de Poincaré segundo a qual, mesmo relativamente a um modelo bem sucedido na descrição da realidade, não podemos saber quão *próximo* esse modelo está da estrutura da própria realidade. O impacto de tudo isto é que a nossa capacidade de descrever a realidade não pode depender apenas de aspectos de natureza observacional e que o conhecimento de modelos *ideais* tem um papel decisivo e incontornável. Ora, o desenvolvimento desses modelos só pode ser feito no universo matemático, daí a importância e o papel ímpar da Matemática. Só neste contexto, as ideias por mais complexas que sejam podem ser testadas ao extremo, do ponto de vista da sua coerência.

Por exemplo, o que pensar da possibilidade de, dada uma esfera a decompor em três partes e, usando apenas rotações e translações, reorganizar esses pontos em duas esferas com o mesmo volume da esfera inicial (uma versão abstracta do *milagre da multiplicação dos pães*). Ou da possibilidade da criação *ex nihilo*. Até ao século 20, tais possibilidades seriam inconcebíveis a não ser enquanto experiências transcendentais. Mas a matemática mais recente, mostra que a primeira situação é concebível e logicamente coerente (é um resultado matemático

¹⁵Esta publicação acabaria por estar na génese de uma controvérsia que duraria quase dois séculos e se espalharia por toda a Europa, contando inclusivamente com a participação dos Conimbricenses.

que usa como hipótese o axioma da escolha e é conhecido por *paradoxo de Banach-Tarski*)¹⁶.

É também a matemática que permite constatar que a criação a partir do nada é um fenómeno compatível, em certas circunstâncias, com a leis da física newtoniana.

Estes, entre muitos outros possíveis exemplos, revelam que a Matemática corresponde a uma muito poderosa forma de

visão, a única possibilidade de vislumbrar uma diversidade de universos coerentes que, de outra forma nos seriam inacessíveis.

Vale a pena ensinar Matemática?—Chegados a este ponto a resposta é obviamente afirmativa. Não ensinar Matemática corresponde a incrementar um tipo de *cegueira* que nos diminui na nossa tarefa de compreender o universo (este ou outros, ou *todos*) e isso seria contra os desígnios da Humanidade.

¹⁶ A designação não deve iludir-nos: não é um paradoxo no sentido lógico do termo, mas é uma situação que contraria a intuição física.

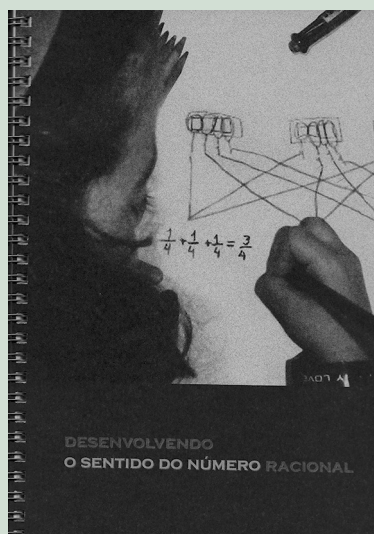
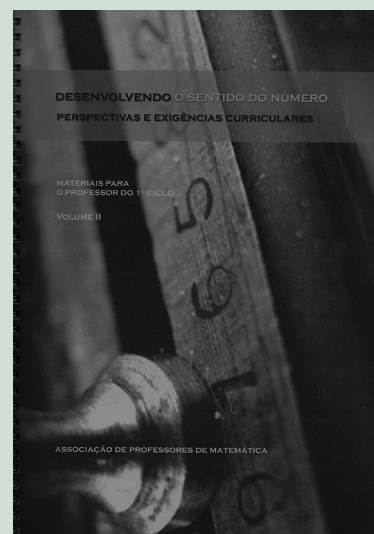
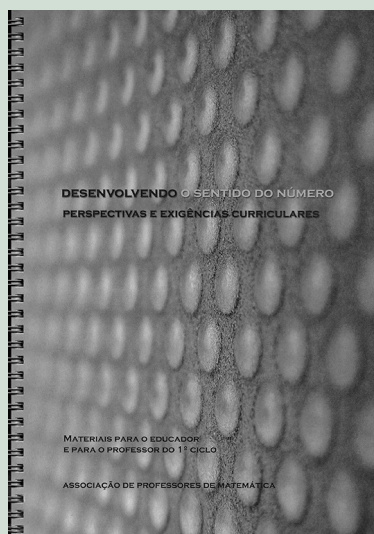
ANTÓNIO M. FERNANDES
IST-UNIVERSIDADE DE LISBOA

PUBLICAÇÕES APM



A Associação de Professores de Matemática traduziu (2017) esta publicação do NCTM (2014), tornando-o acessível em língua portuguesa a toda a comunidade lusófona, disponibilizando assim um importante contributo e apoio para quantos se têm dedicado ao ensino da Matemática e à investigação no âmbito da didática da Matemática, do currículo e da avaliação. Professores e investigadores, dirigentes educativos e decisores políticos podem aqui encontrar uma importante referência para a sua ação política e educativa.

Tarefas para a aprendizagem dos números no 1.º CEB



Quem será o campeão

Na Matemática existe um conceito muito importante que é a transitividade. É válido em várias situações.

Por exemplo, na desigualdade de números reais. Se $a < b$ e $b < c$, então conclui-se que $a < c$.

Na vida real nem sempre isto acontece. Vejamos no futebol. Se o clube A ganhou ao clube B e se B ganhou ao clube C, não se pode concluir que, necessariamente, o clube A irá ganhar ao clube C. Se a transitividade existisse no futebol, existiam muitos jogos que não eram necessários pois já se sabia, de antemão, quem os ganharia.

Na tabela estão representados os resultados das duas primeiras jornadas da Divisão de Honra, Série 1, Sub 8, temporada 2018-19, da A.F. Porto. Note-se que esta série é disputada por 9 clubes.

Com estes resultados, se existisse transitividade no futebol, já seria possível garantir que uma das equipas é melhor que todas as outras? Se sim, qual é essa equipa?

Jornada 1				
Leça do Balio	2	-	4	AD New Team
FC Infesta	2	-	3	Padroense FC
SC Salgueiros	2	-	0	SC Coimbrões
Panther Force	3	-	0	CF Serzedo

Jornada 2				
AD New Team	2	-	4	FC Infesta
Padroense FC	0	-	4	SC Salgueiros
SC Coimbrões	0	-	0	Panther Force
CF Serzedo	10	-	1	EF Benfica

(Problema proposto por Helder Pinto)

Respostas até 10 de junho, para zepaulo46@gmail.com

UM TRIÂNGULO E TRÊS CIRCUNFERÊNCIAS

O problema proposto no número 153 da *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Consideremos a família de triângulos PQR que têm 20 centímetros de perímetro.

Traçam-se três circunferências:

C_1 com centro em P; C_2 com centro em Q; C_3 com centro em R, de tal modo que:

- C_1 e C_2 sejam tangentes exteriormente entre si,
- C_1 e C_2 sejam tangentes interiormente a C_3 .

Entre que valores pode variar o raio de C_3 ?

Recebemos 8 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Ana Maria Loureiro, Carlos Dias (Silveira), José Frias (Lisboa), Letícia Martins (Guimarães), Mário Roque (Guimarães), Regina Veríssimo (Paião) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha). Todos estes leitores seguiram o mesmo método, que aqui apresentamos na sua versão mais simples.

Sejam:

r o raio da circunferência exterior com centro em R.

x o raio da circunferência interior com centro em P.

y o raio da circunferência interior com centro em Q.

Podemos escrever:

$$\overline{PQ} = x + y \quad \overline{RQ} = r - y \quad \overline{RP} = r - x$$

Mas, sabemos que $\overline{PQ} + \overline{RQ} + \overline{RP} = 20$

Substituindo os três valores anteriores nesta equação, vem:

$$(x + y) + (r - y) + (r - x) = 20$$

$$x + y + r - y + r - x = 20$$

$$2r = 20 \Leftrightarrow r = 10$$

Conclusão, o raio da circunferência C_3 só pode tomar um único valor: 10 cm.

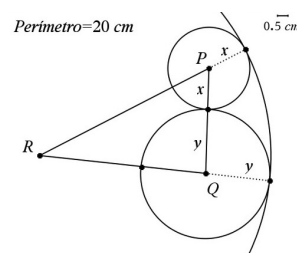
O reduzido número de respostas que tivemos a este problema talvez se explique pelo facto de, ao contrário do que sugeria o enunciado, afinal o valor de C_3 não poder variar.

Como diz Pedrosa Santos: *O modo como é redigida a pergunta está, de alguma maneira, "armadilhado". (...) isto obriga o respondedor a superar a natureza da pergunta, na tentativa inicial e natural de encontrar mais de um valor até se convencer de que não há variação de valores.*

José Frias acrescenta: *Li e reli o enunciado... construí um sketch num programa de geometria dinâmica e estou "confortável" com o resultado: É sempre de 10 cm.*

Finalmente, Mário Roque: *Não consegui encontrar valores onde o raio de C_3 possa variar, mas sim um valor fixo para o mesmo. Alguma coisa me terá escapado mas... Procurei ainda duas situações diferentes: 1) Com o ponto R sobre uma das circunferências. 2) Com o ponto R no interior de uma das circunferências.*

Nota final: Para cada triângulo de perímetro 20, só existe uma posição do ponto de tangência entre as circunferências interiores que permite a construção da circunferência exterior. Alberto Canelas enviou alguns exemplos concretos, com valores inteiros para as medidas dos lados do triângulo.



Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS): Uma breve história de uma boa ideia!

MANUELA SIMÕES

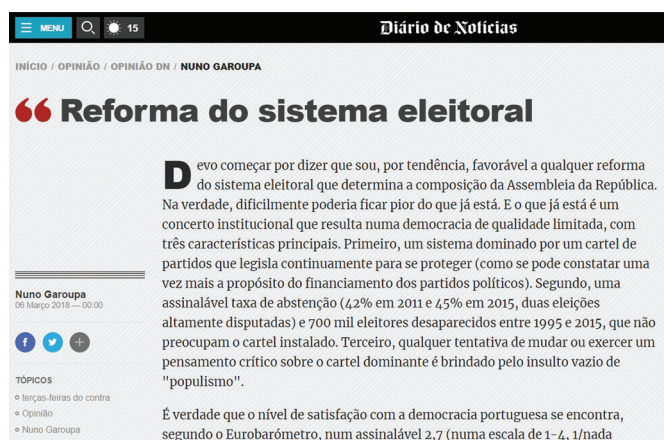
A disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) tem um histórico ainda muito recente. Começou a ser pensada/delineada no início deste século, tendo entrado em vigor na sala de aula no ano letivo de 2004/2005. Do seu Programa, logo se destacaram as suas finalidades e a frescura dos conteúdos:

São finalidades da disciplina:

- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa.
- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
- (...)
- Desenvolver a capacidade de interpretar textos escritos em linguagem matemática, a capacidade de comunicar e o espírito crítico.
- Contribuir para formar uma atitude positiva face à ciência e particularmente para com a Matemática.
- (...)
- Desenvolver capacidades de intervenção social pela compreensão e discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa (Ministério da Educação, 2001, p. 3 e 4)

Desde o início deixei-me cativar quer pelas finalidades e objetivos, quer pelas potencialidades que revia nos conteúdos: temas muito atuais que permitem levar as notícias do dia a dia para a sala de aula e, a partir daí, construir e explorar os conceitos a abordar. Obrigá, assim, alunos e professores a serem também eles mais atentos à realidade e conhecedores críticos de alguns dos temas mais atuais da sociedade. Ao mesmo tempo, permite a proposta de reflexões que os alunos podem levar para a família e discutir com pais e avós - sistemas eleitorais e suas hipotéticas reformas; efeitos da abstenção; o papel dos referendos; diferença entre democracias diretas ou representativas; ou consulta de tradições familiares que poderão tornar-se interessantes para a discussão em sala de aula de métodos de partilha equilibrada.

Estes são exemplos entre muitos e muitos outros e com base apenas em assuntos da atualidade mais recente.

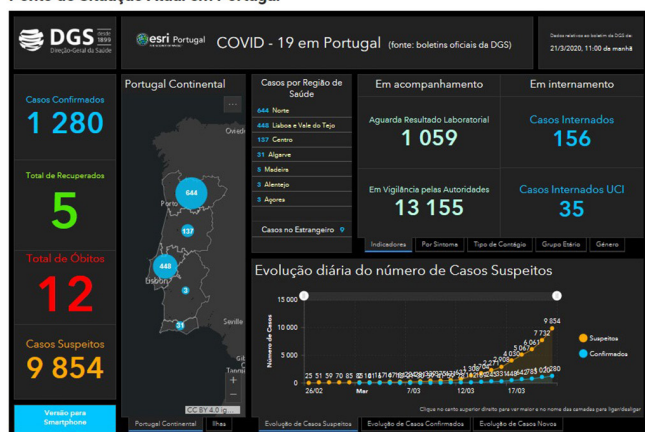


Fonte: <https://www.dn.pt/opiniao/opiniao-dn/nuno-garoupa/> (14/03/2020)

Escrevo num tempo em que devido ao Covid-19 estou em isolamento domiciliário. As escolas fecharam, mas antes tive a oportunidade de explicar aos alunos as características do crescimento deste tipo de fenómenos. Algo que os alunos de MACS estudam mais profundamente do que os restantes. Não tivessem as escolas fechado e seria uma excelente oportunidade para estes alunos apresentarem à comunidade escolar algum do seu saber e contribuir assim para um melhor esclarecimento coletivo, explicando aos seus colegas que tipo de comportamento se espera do fenómeno, a dificuldade de definirmos modelos que façam projecções que não se sabem se serão adequadas pela falta de dados suficientes, a importância de evitar um pico de crescimento demasiado abrupto.

A disciplina contribui para uma literacia financeira e estatística muito importante anos atrás quando, no início da década de 2010, Portugal e o Mundo passou por uma enorme crise financeira e os alunos puderam ganhar consciência da facilidade do sobre-endividamento e, mais uma vez, partilhar com os seus pais algumas ideias úteis a todos.

Ponto de Situação Atual em Portugal



Fonte: <https://covid19.min-saude.pt/ponto-de-situacao-atual-em-portugal/> (22/03/2020)

Todos os anos se vive o fenómeno dos fogos florestais que dizimam a floresta portuguesa. O desastre de Pedrogão Grande é um infeliz exemplo da falta de planos de ação coordenados, que exigem ferramentas e pensamento matemático.

Portugal é o quarto País do Mundo com maior desflorestação segundo a GFW

A Global Forest Watch (GFW), um sistema interativo de monitorização da floresta, do World Resources Institute, revela os dados preocupantes, colocando Portugal no quarto lugar entre os países com a maior taxa desflorestação. Entre 2001 e 2014, Portugal perdeu 566.671 hectares de floresta e, entre 2001 e 2012, ganhou 286.549 hectares, o que revela menos 280.122 hectares de área florestal.

No topo dos países com maior perda percentual de coberto arbóreo (a) está a Mauritânia (99,8%), seguida do Burkina Faso (99,3%), da Namíbia (31,0%) e de Portugal (24,6%). A situação é muito preocupante para o nosso país dado que os outros três países que apresentam pior desempenho do que Portugal, têm vastas áreas desérticas e ou estão na orla de desertos.

No nosso país, as alterações do uso do solo florestal estão associadas principalmente a incêndios florestais recorrentes, quando os povoamentos não se conseguem restabelecer, mas também às conversões para zonas urbanas, turísticas e industriais, novas infraestruturas como autoestradas e barragens, assim como projetos agrícolas, como o olival intensivo.

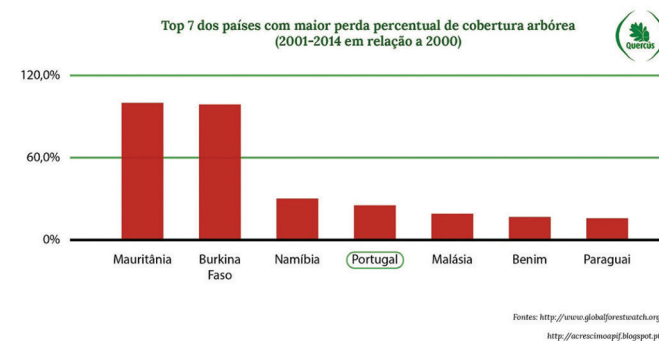
Devemos ter presente que as formas de alteração do PDM's à medida dos interessados, assim como do regime da Reserva Ecológica Nacional, contribuem para a falta de ordenamento do território, ao serem mais permissivas nas atividades que não deviam ser implementadas em espaços florestais. Convém não

Fonte: <http://www.agrotec.pt/noticias/a-desflorestacao-em-portugal/> (14/03/2020)

Oportunidades de trazer a realidade atual para a aula de MACS sempre existiram desde que leciono a disciplina. Claro que se o professor quer partir de notícias do dia em bruto, ele terá porventura de preparar os seus próprios materiais para os alunos explorarem em sala de aula, tanto mais que na maioria das escolas o número de professores a lecionar a disciplina em cada ano é muito reduzido (a maior parte das vezes apenas um professor). Mas não deixa de ser uma forma, para mim maravilhosamente real de trabalhar, a partir da qual os alunos reconhecem a presença e a importância da Matemática em muitas das grandes, e não raras vezes muito difíceis, decisões de instituições e sociedades.

Para o acompanhamento de todos estes fenómenos, temos um acesso crescente a ferramentas que permitem a pesquisa, armazenamento e partilha de informação até pelos próprios

alunos. Isto torna-os criadores de informação e cumpre de forma efetiva muitas das dimensões designadas no Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória.



Fonte: <http://www.agrotec.pt/noticias/a-desflorestacao-em-portugal/> (14/03/2020)

Pouco a pouco, de alguma forma sinto que, no terreno, algumas destas finalidades têm vindo a ser esquecidas, e que a preocupação fundamental muitas vezes se centra mais na técnica e mecanização de procedimentos do que na discussão das ideias e assuntos subjacentes.

É um facto que, de início, não estava prevista a realização de um exame nacional à disciplina. E isto condiciona, como todos sabemos, o trabalho realizado junto dos alunos. Estando bem consciente disso, da pressão que atualmente é exercida junto dos professores de Matemática quanto à necessidade de boas classificações em exame, será uma perda demasiado grande esquecermo-nos dos objetivos e pelo menos procurarmos não esquecer que é possível ainda assim conciliar metodologias ativas, metodologias que integrem as mais diversas formas de trabalhar com os alunos (*b-learning*, *inverted classroom*, *gallery walks*, entre outras), com uma preparação sólida e sistematizada para exame, como confirma a minha experiência ao longo de todos estes anos de aplicação do programa. Deste modo, corremos o risco de tornarmos a disciplina desinteressante para muitos alunos, precisamente por falharmos naquilo para que o programa alerta:

"Este programa encontrará certamente dificuldades pelo facto de se dirigir a um sector de estudantes que não tem sido suficientemente conquistado para a Matemática. Os temas propostos e as metodologias preconizadas pretendem responder a este problema. (...) A satisfação dos professores, ao conseguir que estes estudantes se apercebam como a Matemática é uma ferramenta importante para a sua vida, ajudará certamente essa evolução." (Ministério da Educação, 2001, p. 4)

Passámos na última década por muitas mudanças, demasiadas até, relativamente ao ensino da Matemática. Em minha opinião, foram dados muitos passos atrás e deixado que alguma confusão, numa perspetiva otimista, se instalasse nas escolas, ao permitir que os professores se vissem sozinhos, forçados a aplicar e obrigatoriamente a ajustar programas incumpríveis (ou

quase), que manifestamente são um retrocesso relativamente aos anteriores. Perderam-se pelo caminho culturas de partilha e estruturas de apoio que foram sendo criadas desde 1997, como foi o caso do Programa de Acompanhamento do Programa Ajustado do Ensino Secundário, do qual fiz parte juntamente com cerca de uma centena de colegas que assumiu de forma entusiasta o compromisso de apoiar as escolas na procura de novos modos de trabalho, no recurso a novas tecnologias, nomeadamente na integração de forma eficaz e inteligente da calculadora gráfica, de *softwares* vários no trabalho diário em sala de aula. A este programa seguiu-se o Plano para a Matemática que alargou a experiência ao terceiro ciclo. Foram anos e anos em que, pouco a pouco, a abertura dos professores à inovação pedagógica foi aumentando, fruto dos bons resultados que se iam obtendo no terreno, nomeadamente no que se referia ao envolvimento dos alunos e na confiança e apoio que os professores sentiam. Anos de programas intensivos de formação contínua, sobretudo no primeiro e segundo ciclo, onde foram construídos materiais de excelente qualidade. A própria DGE criou plataformas onde era possível partilhar e aceder a recursos, exemplos de boas práticas disponibilizadas por professores no terreno e por autores dos diferentes programas.

Quase por milagre, a disciplina de MACS tem vindo a escapar, entretanto, a todo este turbilhão. Apesar de aqui e acolá surgirem tentativas de indução de um formalismo crescente e nada adequado, nem desejado, na disciplina. Felizmente parece ter prevalecido o bom senso e nada mudou relativamente ao programa da disciplina.

A disciplina de MACS encontrou um papel muito importante no currículo dos alunos. Possibilitou que muitos alunos, que provavelmente teriam uma relação de distanciamento,

insegurança e até de algum desprezo pela Matemática, ganhassem consciência de que a Matemática está presente e ajuda a muitas decisões e ao planeamento e monitorização de todo o tipo de atividades na vida das sociedades. Os temas são de tal modo aliciantes quando discutidos com o envolvimento dos alunos, que mesmo os demais alunos de Matemática e os restantes, lamentam não ter espaço nas suas aulas de Matemática para a abordagem de alguns assuntos.

Nesta época de trabalho por vezes demasiado centrado nos exames, não deixemos cair uma Boa Ideia, nem desvirtuamos o seu encanto e o potencial do seu papel na experiência escolar dos alunos.

Referências

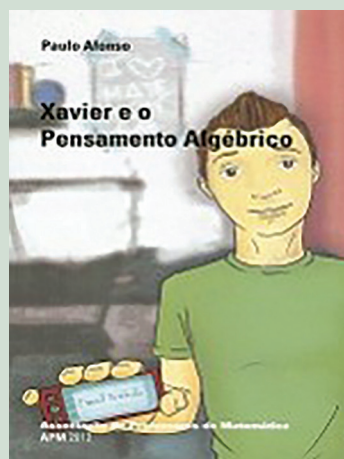
- Direção Geral de Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o Perfil dos Alunos. 10.º ano, Ensino Secundário, Matemática A*. Lisboa: M.E./D.G.E.
- Direção Geral de Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o Perfil dos Alunos. 11.º ano, Ensino Secundário, Matemática A*. Lisboa: M.E./D.G.E.
- Direção Geral de Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o Perfil dos Alunos. 10.º ano, Ensino Secundário, Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: M.E./D.G.E.
- Direção Geral de Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o Perfil dos Alunos. 11.º ano, Ensino Secundário, Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: M.E./D.G.E.
- Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: M.E.C.
- Ministério da Educação e Ciência (2015). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A. Ensino Secundário*. Lisboa: M.E.C.
- Ministério da Educação (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: M.E.

MANUELA SIMÕES

ESCOLA SECUNDÁRIA DR.º JOAQUIM GOMES FERREIRA ALVES, VILA NOVA DE GAIA

PUBLICAÇÕES APM

Obras de divulgação matemática, desafios, problemas e curiosidades da autoria de Paulo Afonso



Uma viagem pelo mundo dos números – Relato de uma experiência na Formação Inicial de Professores

PAULO AFONSO

Evidenciar a Matemática como sendo uma ciência em que alguns conceitos se podem conectar com a vida real, com outras áreas do currículo ou com outros conceitos da própria Matemática é um dos desígnios do atual programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), bem como do programa anterior (ME, 2007) e também é defendido por alguns educadores matemáticos, como sejam, a título de exemplo, Ortega (2005), Afonso (2008), Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) ou Afonso (2009). A sua ênfase atravessa vários níveis de escolaridade, que vão desde o Pré-Escolar e do 1.º Ciclo do Ensino Básico (Melo, 2013), passando pelo 2.º Ciclo do Ensino Básico (Ventura, 2014), pelo 3.º Ciclo do Ensino Básico (Ferreira, 2012) até ao Ensino Secundário (Silva, 2010). No Ensino Superior, a experiência tem-nos permitido constatar o agrado de futuros professores de Matemática, quando confrontados com tarefas de investigação que lhes permitam “viajar” em torno de múltiplos conceitos matemáticos que se conectam uns aos outros de forma surpreendente.

Foi com base no pressuposto de que os futuros professores de Matemática devem ser envolvidos em atividades de investigação, evidenciando a Matemática como Ciência das Conexões, que desafiámos uma turma finalista de um Curso de Licenciatura em Educação Básica a investigar o número 222, na vertente em que os conceitos matemáticos se podem conectar a outros conceitos da própria Matemática (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). A metodologia de abordagem proposta foi que os 20 estudantes trabalhassem em pares e assim que surgisse alguma “boa” ideia a partilhassem oralmente com os colegas e, ainda, dessem resposta a questões ou desafios que o docente lhes fosse colocando.

Desde logo, houve alguém que associou o 222 à terça parte do Número do Diabo – 666. Tendo em conta esta intervenção, o docente solicitou aos estudantes o uso de telemóveis para pesquisarem na Internet o que aí poderiam encontrar relacionado com o Número do Diabo. De um dos *sites* foi lida a seguinte passagem:

A explicação mais conhecida está no Apocalipse, o último livro da Bíblia, [...] Encontra-se no capítulo 13, versículo 18 a seguinte passagem: “Aqui há sabedoria. Aquele que

tem entendimento, calcule o número da besta; porque é o número de um homem, e o seu número é seiscentos e sessenta e seis” (<https://super.abril.com.br/blog/oraculo/por-que-666-e-o-numero-do-diabo/>).

De seguida, uma estudante sugeriu averiguar quais os números inteiros que eram possíveis obter-se utilizando-se os três dígitos que compunham o número 222. Face a esta sugestão, outra estudante perguntou se era permitido o uso de parêntesis, de potências e da raiz quadrada, tendo recebido, por parte do docente, um sim como resposta. Por cada intervenção, o docente escreveu no quadro da sala de aula os números inteiros obtidos. Eis as sugestões avançadas pelos estudantes:

$$\begin{aligned} &0 - \sqrt{2+2} - 2; \quad 1 - \frac{\sqrt{2+2}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{2^2}}{2}; \quad 2 - \frac{2^2}{2} \text{ ou } 2+2-2 \text{ ou } 2^2-2; \\ &3 - \frac{2}{2}+2; \quad 4 - \sqrt{(2 \times 2)^2}; \quad 6 - 2+2+2; \quad 8 - 2 \times 2 \times 2; \quad 11 - \frac{22}{2}; \\ &16 - (2+2)^2 \text{ ou } (2^2)^2 \text{ ou } 2^{2^2}; \quad 20 - 22-2; \quad 484 - 22^2; \quad 4194304 - 2^{22} \end{aligned}$$

Após a identificação destes doze números inteiros, o docente perguntou se já tinham conseguido obter o maior número inteiro que seria possível obter face à tarefa proposta. Todos responderam afirmativamente e o docente aproveitou para lhes recordar o conceito de fatorial de um número. Logo de seguida, um estudante sugeriu o fatorial de $2+2+2$, ou seja $6!$, cujo valor é 720. De imediato, outra estudante referiu que tinha usado a calculadora para calcular o fatorial de 222, mas era um número tão elevado que os dígitos não cabiam no mostrador da máquina. Tendo em conta este comentário, o docente ligou o projetor de vídeo da sala de aula e pesquisou na Internet algum *site* onde se pudessem observar todos os dígitos do 222! No *site* com o endereço <https://pt.numberempire.com/factorialcalculator.php> constataram a grandeza do número obtido. Assim sendo, vários estudantes concluíram que estava descoberto o maior número possível, utilizando-se os três dígitos que compunham o número 222. Perante esta observação, outra estudante contrariou-os, sugerindo, em sua substituição, o 2^{22} , ou seja 4194304! Após a restante turma ter concordado com esta última observação, ainda foram sugeridos os seguintes números, sendo que os maiores foram confirmados no *site* suprarreferido:

$$12 - \frac{(2+2)!}{2}; 22 - (2+2)! - 2; 26 - (2+2)! + 2; 48 - (2+2)! \times 2;$$

$$576 - [(2+2)!]^2; 40320 - (2 \times 2 \times 2)!; 562000363888803840000 - \frac{22!}{2};$$

$$112400072777607679998 - 22! - 2; 112400072777607680002 - 22! + 2;$$

$$224800145555215360000 - 22! \times 2$$

Terminada esta exploração, houve um grupo que sugeriu fatorizar-se o número 222 para se identificarem os seus divisores. O registo efetuado no quadro da sala de aula foi a seguinte: $222 = 2 \times 3 \times 37$, acrescentando-se o respetivo conjunto dos divisores do 222:

$$D_{222} = \{1, 2, 3, 6, 37, 74, 111, 222\}.$$

Um dos estudantes referiu de seguida que: “*Um dos fatores da fatorização é o 3, pelo que o número é divisível por 3*”. Outra estudante referiu que isso era verdade, justificando que a soma dos três dígitos do número 222 era um múltiplo de 3.

Aproveitando estas duas últimas intervenções, o docente recordou o conceito de quadrado mágico de ordem três e solicitou que encontrassem os nove números inteiros consecutivos que permitissem a construção de uma figura mágica deste tipo, com a soma mágica 222. Os estudantes recordaram as relações algébricas que existem numa figura deste tipo, se se conhecer a soma mágica (S), pelo que os nove números inteiros consecutivos utilizados foram os seguintes:

$$\{71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78\}$$

			71	78	73
			76	74	72
			75	70	77

De facto, os estudantes confirmaram que a soma dos números envolvidos em cada linha, em cada coluna e em ambas as diagonais era sempre 222.

A estudante que inicialmente se tinha referido ao Número do Diabo voltou a referir-se a ele, dizendo que a soma das três “somadas horizontais” ou das três “somadas verticais” era sempre 666. Assim, concluiu que a soma destes nove números consecutivos coincidia com o Número do Diabo: $70 + 71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 = 666$.

Passados alguns momentos de silêncio, uma estudante referiu que com estes nove números consecutivos também se poderia salientar que o valor da média aritmética entre eles era a terça parte do 222, isto é, o 74, que era o valor central do quadrado mágico acabado de construir. Essa estudante escreveu no quadro

da sala de aula os cálculos que lhe permitiram chegar a essa conclusão:

$$X = \frac{70+71+72+73+74+75+76+77+78}{9} = 74$$

Uma vez mais, a estudante que havia referido ao Número do Diabo acrescentou que esse valor 74 era também a nona parte do Número do Diabo, porque $666 : 74 = 9$.

O docente elogiou bastante o trabalho que estava a ser produzido e lembrou que qualquer número natural era uma potência de base dois ou uma soma de potências de base dois. Assim, desafiou a turma a verificar se o 222 era ou não uma potência de base dois e, no caso de não ser, a encontrar o conjunto de potências de base dois cuja soma fosse 222. Rapidamente vários estudantes referiram que $222 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7$.

A propósito das potências de base dois, uma estudante referiu que os dígitos do 222 permitiam a seguinte igualdade numérica: $2^2 + 2^2 = 2^3$, porque $4 + 4 = 8$ e acrescentou que a soma de dois números quadrados originava um número cúbico.

Aproveitando esta dica dos números figurados, o docente desafiou-os a analisarem se o 222 era ou não um número figurado, designadamente número quadrado, oblongo ou triangular. Rapidamente a turma concluiu que o 222 não pertencia a nenhuma dessas tipologias de números. Para justificarem tal conclusão, o docente dividiu o quadro da sala de aula em três partes e solicitou a três estudantes que, em simultâneo, efetuassem os cálculos respetivos. Eis os cálculos de cada um deles:

$$\text{Números quadrados: } U_n = n^2$$

$$n^2 = 222 \Leftrightarrow n = \pm \sqrt{222} \Leftrightarrow n = 14,9$$

$$\text{Números oblongos: } U_n = n^2 + n$$

$$n^2 + n = 222 \Leftrightarrow n^2 + n - 222 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-222)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 14,41$$

$$\text{Números triangulares: } U_n = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\frac{n^2 + n}{2} = 222 \Leftrightarrow n^2 + n = 444 \Leftrightarrow n^2 + n - 444 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-444)}}{2} \Leftrightarrow n = 20,6$$

Assim sendo, o docente dividiu a turma em três grandes grupos e desafiou cada um deles a investigar se o 222 era a soma de alguns números quadrados ou a soma de alguns números oblongos ou a soma de alguns números triangulares. O grupo que tinha a tarefa de investigar os números quadrados apresentou no quadro da sala de aula as suas quinze soluções, após terem escrito todos os números quadrados inferiores ao 222:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196$$

$222 = 196 + 25 + 1$	$222 = 196 + 16 + 9 + 1$
$222 = 169 + 49 + 4$	$222 = 169 + 36 + 16 + 1$
$222 = 144 + 64 + 9 + 4 + 1$	$222 = 144 + 49 + 25 + 4$
$222 = 144 + 49 + 16 + 9 + 4$	$222 = 144 + 36 + 25 + 16 + 1$
$222 = 121 + 100 + 1$	$222 = 121 + 81 + 16 + 4$
$222 = 121 + 64 + 36 + 1$	$222 = 121 + 49 + 36 + 16$
$222 = 100 + 81 + 36 + 4 + 1$	$222 = 81 + 25 + 16$
$222 = 100 + 64 + 49 + 9$	

Por sua vez, o grupo que investigou os números oblongos apresentou no quadro da sala de aula as suas doze soluções, após ter registado todos os números oblongos inferiores a 222:

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210

$222 = 210 + 12$	$222 = 132 + 90$
$222 = 132 + 72 + 12 + 6$	$222 = 132 + 56 + 20 + 12 + 2$
$222 = 132 + 42 + 30 + 12 + 6$	$222 = 110 + 90 + 20 + 2$
$222 = 110 + 72 + 20 + 12 + 6 + 2$	$222 = 110 + 56 + 42 + 12 + 2$
$222 = 110 + 56 + 30 + 20 + 6$	$222 = 110 + 42 + 30 + 20 + 12 + 6 + 2$
$222 = 90 + 72 + 42 + 12 + 6$	$222 = 90 + 56 + 42 + 20 + 12 + 2$

No que diz respeito aos números triangulares, eis as trinta e três soluções apresentadas pelos respetivos estudantes, após terem escrito no quadro da sala de aula todos os números triangulares inferiores a 222:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210

$222 = 190 + 28 + 3 + 1$	$222 = 190 + 21 + 10 + 1$
$222 = 190 + 15 + 10 + 6 + 1$	$222 = 171 + 45 + 6$
$222 = 171 + 36 + 15$	$222 = 153 + 66 + 3$
$222 = 153 + 55 + 10 + 3 + 1$	$222 = 153 + 45 + 21 + 3$
$222 = 153 + 45 + 15 + 6 + 3$	$222 = 153 + 28 + 21 + 10 + 6 + 3 + 1$
$222 = 136 + 66 + 10 + 6 + 3 + 1$	$222 = 156 + 55 + 28 + 3$
$222 = 156 + 55 + 21 + 10$	$222 = 136 + 55 + 15 + 10 + 6$
$222 = 136 + 45 + 28 + 10 + 3$	$222 = 136 + 45 + 21 + 10 + 6 + 3 + 1$
$222 = 136 + 36 + 28 + 21 + 1$	$222 = 136 + 36 + 28 + 15 + 6 + 1$
$222 = 136 + 36 + 21 + 15 + 10 + 3 + 1$	$222 = 120 + 91 + 10 + 1$
$222 = 120 + 78 + 21 + 3$	$222 = 120 + 78 + 15 + 6 + 3$
$222 = 120 + 66 + 36$	$222 = 66 + 21 + 15$
$222 = 120 + 55 + 36 + 21$	$222 = 120 + 55 + 28 + 10 + 6 + 3$
$222 = 120 + 55 + 21 + 15 + 10 + 1$	$222 = 105 + 91 + 15 + 10 + 1$
$222 = 105 + 78 + 36 + 3$	$222 = 105 + 66 + 45 + 6$
$222 = 105 + 55 + 45 + 10 + 6 + 1$	$222 = 105 + 45 + 36 + 21 + 15$
$222 = 91 + 78 + 36 + 10 + 6 + 1$	

O docente voltou a elogiar bastante o trabalho desenvolvido por cada grupo e desafiou-os a encontrar em casa os restantes casos que lhes faltou descobrir.

Ao terminar a aula, o docente pediu a um estudante para dizer oralmente um número inteiro positivo, formado por três dígitos diferentes. Obteve como resposta o número 356. De seguida

pediu à turma todos os números que eram possíveis obter-se com a alteração posicional de cada um dos seus três dígitos. Como resposta foram registados no quadro os seguintes números:

356, 365, 536, 563, 653, 635

O docente lembrou-lhes o conceito de permutação, referindo que os três dígitos permitiam, de facto, seis permutações, associando-as ao fatorial do número 3, isto é: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (registo que efetuou no quadro da sala de aula).

De seguida, pediu a todos os estudantes para encontrarem a soma destes seis números, tendo obtido como resposta o número 3108. Na continuação, solicitou à turma que adicionasse os três dígitos do número referido inicialmente, tendo obtido, como resposta, o valor 14. Por fim, pediu que encontrassem o quociente entre o 3108 e o 14. Gerou-se um ruído, revelador de uma enorme surpresa, pois o quociente obtido voltou a ser o número 222. Curiosos, os estudantes desejaram perceber o porquê de isto ter acontecido, o que fez com que o docente explicasse no quadro da sala de aula a teoria dos números que fundamentava esta relação aritmética. Assim, tendo em conta o número 356 atribuiu ao dígito 3 a letra “a”, ao dígito 5 a letra “b” e ao dígito 6 a letra “c” e fez a decomposição deste número por ordens, isto é:

$$356 = 300 + 50 + 6 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 6 = 100a + 10b + c$$

Procedeu de igual forma para os restantes cinco números:

$$365 = 100a + 10c + b$$

$$536 = 100b + 10a + c$$

$$563 = 100b + 10c + a$$

$$653 = 100c + 10b + a$$

$$635 = 100c + 10a + b$$

Logo, acrescentou que $356 + 365 + 536 + 563 + 653 + 635 = (100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10b + a) + (100c + 10a + b) = (100a + 100a + 10a + a + a + 10a) + (10b + b + 100b + 100b + 10b + b) + (c + 10c + c + 10c + 100c + 100c) = 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c)$.

Perante esta explanação, terminou a aula com o seguinte registo no quadro:

$$\frac{222(a + b + c)}{(a + b + c)} = 222$$

Alguns estudantes entrevistaram com expressões do tipo: “*Espetáculo!*”, “*Fantástico!*”, “*E tudo à volta do 222, quem diria?*”

Em jeito de síntese, poder-se-á concluir que esta aula permitiu evidenciar a elevada componente motivacional que esta visão da Matemática, em que vários conceitos se conectam com outros, suscita aos estudantes da formação inicial de professores. Contactaram com os conceitos de: (a) parte de, (b) numeral, (c) fatorial do número, (d) múltiplos de um número e critérios de divisibilidade, (e) quadrados mágicos de ordem 3, (f) média

aritmética de um conjunto de dados, (g) potências de base 2, (h) números figurados (quadrados, oblongos, triangulares e cúbicos), (i) permutações e (j) álgebra. Por outro lado, permitiu exemplificar um conceito formativo de largo espectro, em que a Matemática não surge como algo acabado, antes permite que os estudantes assumam o papel de investigadores matemáticos, de modo a que sejam eles próprios a estabelecer conexões entre os conceitos matemáticos explorados. Em última análise, permitiu contactar com um contexto de aprendizagem em que é possível existir sempre um fio condutor ou elemento integrador entre os vários conceitos abordados que, neste caso, foi o número 222.

Referências

- Afonso, P. (2009). Múltiplas conexões matemáticas envolvendo o 120. *Educação e Matemática*, 183, 28-31.
- Afonso, P. (2008). *O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas*. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco.
- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., e Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Direção Geral de Inovação e de

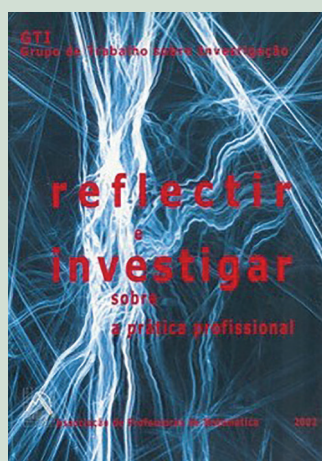
- Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação.
- Ferreira, C. (2012). *Conexões Matemáticas em Álgebra. Um estudo com alunos do 7.º ano de escolaridade*. Lisboa: Mestrado em Educação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Melo, T. (2013). *Conexões Matemáticas: potencialidades e contributos na Educação Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Ponta Delgada: Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico da Universidade dos Açores.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: GRAÓ.
- Silva, J. (2010). Conexões Matemáticas no Ensino Secundário. *Educação e Matemática*, 110, 7-12.
- Ventura, H. (2014). *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Tese de Doutoramento da Universidade de Lisboa.

PAULO AFONSO

CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM PATRIMÓNIO, EDUCAÇÃO E CULTURA (CIPEC),
INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO

PUBLICAÇÕES APM

Publicações do Grupo de Trabalho de Investigação da APM, disponíveis na Loja da APM ou na Loja online www.apm.pt



APM 2020 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP

e duas modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

A APM e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado **aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP** que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM.

Pode inscrever-se indiferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.º de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de associado da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF da Revista Educação e Matemática no nosso portal; todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas.

A revista Quadrante é publicada online (<https://quadrante.apm.pt>) e é de acesso livre.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem duas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Quotas anuais para 2020

Modalidades de associado individual	2020
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento* (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio (residente em Portugal ou no estrangeiro)	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

* Poderão inscrever-se nestas modalidades, estudantes em formação inicial (licenciatura ou mestrado profissionalizante)

Modalidades de associado institucional	Quota
Modalidade I (1 exemplar da EeM)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da EeM)	95,00 €

Assinatura da revista Educação e Matemática

		3 números + 1 número duplo temático
Associado individual	Portugal	
	Estrangeiro	
Não associado individual	Portugal	50,00€
	Estrangeiro	70,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€
	Estrangeiro	95,00€

Preço de capa da revista Educação e Matemática

		Educação e Matemática
Associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€
Não associado	Temática	10,00€
	Normal	7,50€

índice

Editorial

- 01** **E de repente tudo mudou...**
Cristina Moraes, João Terroso, Helena Rocha

Artigos

- 02** **Como o Google caça seus talentos**
José Luiz Pastore Mello
- 16** **Reinvenção do ensino a distância: a inovação ao ritmo de cada professor**
Helena Rocha, Isabel Oitavem, Floriano Viseu, Sónia Palha
- 23** **Ensino Secundário – Ensino Superior: (Des)Conexões**
Albano Silva
- 29** **O voo dos condores — 1 bando, 2 bandos e os seguintes...**
Elisabete Gonçalves dos Santos, Cristina Loureiro
- 34** **Vale a pena ensinar Matemática?**
António M. Fernandes
- 42** **Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS): Uma breve história de uma boa ideia!**
Manuela Simões
- 45** **Uma viagem pelo mundo dos números – Relato de uma experiência na Formação Inicial de Professores**
Paulo Afonso

Secções

- 05** **Pontos de vista, reações e ideias...**
Avaliação semestral ou como “reduzir” de três períodos para quatro os momentos de avaliação,
Cesário Silva
A propósito da organização semestral do calendário escolar, *Catarina Ferreira, Helena Gil Guerreiro*
- 08** **Espaço GTI**
Valorizar o raciocínio espacial no ensino e na aprendizagem da geometria (e não só), *Lina Brunheira*
- 13** **Materiais para a aula de Matemática**
Fracos de perfume, *Cristina Loureiro*
- 14** **Pontos de vista, reações e ideias...**
Uma aula visual sobre soma de frações, *Leonardo Barichello*
- 21** **Cadernos de apontamentos de Geometria** *Cristina Loureiro*
Relacionar, classificar e estruturar
- 27** **Tecnologias na Educação Matemática** *António Domingos*
Calculadora de quatro operações no primeiro ciclo, porque não?, *Ana Margarida S.M. Simões Dias O.S.*
- 41** **O problema deste número** *José Paulo Viana*
Quem será o campeão