

Educação e Matemática

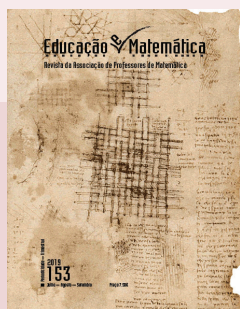
Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ Trimestral

2019
153

Julho ∞ Agosto ∞ Setembro

Preço 7.50€



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Filipa Machado
	Helena Gil
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	João Terroso
	Manuela Pires
	Silvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Setembro de 2019
Tiragem 1000 exemplares
Periodicidade Trimestral

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
 Registo no ICS n.º 124051
 ISSN 0871 – 7222
 Porte Pago

Sobre a capa

No ano das comemorações dos 500 anos da morte de Leonardo da Vinci, a *Educação e Matemática* apresenta, na capa da edição 153, um esboço de uma das suas geniais ideias (página 899v do *Codex Atlanticus**).

Neste esboço está documentado o princípio de uma estrutura que se mantém unida devido apenas ao peso dos seus elementos constituintes e à ação da gravidade. É com base nesta ideia de Leonardo da Vinci que o *Museu de Matemàtiques de Catalunya* (MMACA) desenvolveu um projeto educativo que é referenciado no artigo *Matemáticas na Raia* 2019.

*Uma versão digitalizada do *Codex Atlanticus* está disponível em <http://www.codex-atlanticus.it/>

Mário Baía

Saiu da Redação da Educação e Matemática

A Catarina Delgado deixou de fazer parte da Redação da Revista. Desde o início, a Catarina deu um contributo fundamental para o trabalho da equipa, quer na conceção dos números então publicados, quer na análise e reflexão sobre as questões que enfrentamos na construção de uma revista que pretendemos seja dos sócios e para os sócios. Agradecemos assim à Catarina todo o seu empenho e participação neste empreendimento.

Neste número também colaboraram

Adriana Richit, Albano Silva, Cláudia Campos, Corália Pimenta, Diogo Faria, Elsa Campos, Jaime Carvalho e Silva, Joana Gamboa, João Carlos Terroso, Joaquim Félix, Lúcia Carvalho, Lurdes Serrazina, Manuel Vara Pires, Margarida Rodrigues, Maria João Silva, Olívia Sousa, Orquídea Santos, Paulo Afonso, Petrina Avelar, Renata Carvalho, Rui Candeias, Teresinha Fumi Kawasaki, Teresa Moreira.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.
- Pela relevância das cores nalguns artigos deste número, a sua versão digital disponibilizada aos sócios no site da APM será publicada a cores.

A propósito das Recomendações — “nós” também temos que ser “eles”!

No ProfMat de Castelo Branco, numa das conferências plenárias, o Professor João Ruivo falava-nos da escola concentracionária que tem levado, gradualmente, à *erosão da profissionalidade docente* e ao *demissionismo* dos professores¹. Com efeito, numa Escola muitas vezes com uma organização estrutural pesada, assiste-se de forma cada vez mais acentuada, a um confronto latente entre “eles” e “nós”, onde nos “eles” cabem a superestrutura (da administração educativa à direção e gestão da escola, dos autores dos programas e dos documentos curriculares aos que se envolvem e discutem com eles), e em “nós” cabem todos aqueles que concretizam, anonimamente, nas salas de aula ou fora delas, todos os dias, o ato educativo de ensinar e fazer aprender. E isso conduz-nos, vezes demasiadas, a ciclos e períodos de desmotivação e desinvestimento.

Também na mesma altura do ProfMat, em 12 de julho passado, a Direção Geral de Educação tornou público o relatório *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*, elaborado pelo Grupo de Trabalho de Matemática (GTM), criado pelo Despacho n.º 12530/2018, de 28 de dezembro.

O GTM apresenta-nos um trabalho notável sobre a evolução do ensino e aprendizagem da Matemática, em Portugal, nos últimos trinta e cinco anos. Notável pela recolha e sistematização, pela análise comparativa, pela reflexão e proposição.

Os quatro conjuntos de recomendações, sobre o currículo de matemática, sobre as dinâmicas de desenvolvimento curricular, sobre a avaliação das aprendizagens e sobre a formação de educadores e professores, bem que se podem constituir como uma agenda de política educativa para os próximos tempos, tecnicamente fundada.

Há recomendações que apontam caminhos absolutamente necessários, como a urgência de um currículo de Matemática global que ponha fim ao labirinto dos documentos curriculares atualmente em vigor; um currículo para todos, mas com propósitos diversos; com conteúdos (conhecimentos e capacidades) relevantes e assente na compreensão matemática; com orientações metodológicas que assumam que a diferenciação pedagógica “deverá não só dirigir-se a alunos com dificuldades, como àqueles que estão em condições de aprofundarem as suas aprendizagens”². Outras gostaríamos de as classificar

como premonitórias, como a que aponta para um currículo de Matemática para a Educação Pré-Escolar ou a que sugere a criação de um “instituto de desenvolvimento curricular, que se responsabilize inteiramente pela regulação dos processos de mudança curricular”.

Também temos algumas que são quase do foro celestial, como a que sublinha a necessidade de reforçar a valorização da profissão docente, ou como a que preconiza um desenvolvimento curricular com condições nas escolas, entre outras a possibilidade efetiva de realização de trabalho colaborativo entre professores (tempo e horários).

Fratrante, mas em nome do alinhamento da avaliação externa com as aprendizagens previstas para o Currículo, é a proposta de que ela não se reduza à avaliação escrita, antes se diversifiquem os modos, os tempos, recursos e suportes da mesma (a exemplo, aliás, do que já acontece em algumas provas, nomeadamente nas línguas estrangeiras).

Certamente polémica para muitos é a recomendação de instituir “documentos curriculares locais” em linha com o Currículo nacional, mas que atentem aos contextos “sociais, económicos, ambientais e culturais, e também às necessidades individuais de aprendizagem”.

Já não sou dos crentes nas grandes inovações nem dos que alinham com punções identitárias das sucessivas equipas ministeriais. Mas sou dos que se entusiasma com as coisas bem feitas.

E este Relatório é, para mim, um documento bem feito. Convoca-nos a visitar o nosso trabalho coletivo ao longo dos anos. Desafia-nos a um encher de peito com ar novo. A um reganhar de alento.

Valerá a pena um novo investimento?

Tem que valer a pena!

É pois importante que nos noventa dias de consulta pública nos façamos ouvir e dêmos a nossa opinião – concordando, discordando, alvitando soluções ou apontando outros caminhos. Que o façamos individualmente ou em grupo, de forma institucional ou pessoal, mas que participemos. Essa será a melhor forma de nos implicarmos no que tivermos eventualmente de vir a fazer.

“Nós”, todos, também temos que ser “eles”!

JOAQUIM FÉLIX

ESCOLA SECUNDÁRIA GABRIEL PEREIRA, A.E. GABRIEL PEREIRA - ÉVORA

¹A apresentação de apoio à conferência pode ser obtida em <https://profmat2019.wixsite.com/apm2019/materiais-do-encontro> (consultado em 20/09/2019).

²As passagens entre aspas correspondem a excertos de recomendações do relatório, coordenado pelo Professor Jaime Carvalho e Silva, que pode ser consultado na página eletrónica da Direção Geral de Educação.



Está a chegar a **VI edição da Feira da Matemática**! A feira acontece nos dias 25 e 26 de outubro, o primeiro dedicado às escolas e, o segundo, para o público em geral.

Serão dois dias repletos de atividades científicas, culturais e educativas dirigidas a todos os públicos, desde exposições, jogos e desafios, demonstrações, palestras, Circo Matemático, etc.

Marque na sua agenda pois não irá querer perder!

Mais informações em <https://museus.ulisboa.pt/pt-pt/feira-da-matematica-2019>



XXII ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES | PRÉ. 1.º E 2.º CICLOS

XXII Encontro Nacional de Professores (Pré, 1.º e 2.º ciclos) realiza-se nos dias 8 e 9 de novembro de 2019 na Escola Superior de Educação de Lisboa. Este encontro destina-se a Educadores e Professores dos primeiros anos e contará com conferências, sessões práticas, um painel e simpósios de comunicações promotores de reflexão em torno da aprendizagem da Matemática.

Inscrições no encontro a partir de setembro de 2019.

Informações em www.apm.pt

A 30 de junho de 2019, o Ministério da Educação publicou a 1.^a versão do documento “Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática”, elaborado pelo Grupo de Trabalho de Matemática. A equipa é constituída por especialistas e professores reconhecidos pelos seus contributos para o ensino e aprendizagem da Matemática, equipa essa heterogénea, abrangendo todos os níveis de escolaridade obrigatória.

Como não poderia deixar de ser, a redação da *Educação e Matemática* decidiu contribuir para a discussão pública que está a acontecer em torno deste assunto. Para isso, convidou quatro associados da APM para que analisassem, refletissem e escrevessem a sua opinião sobre recomendações específicas. Eles são: Lígia Carvalho, que contribui com um olhar sobre as recomendações sobre o currículo de Matemática; Rui Candeias, com uma reflexão em torno das recomendações sobre as Dinâmicas de desenvolvimento curricular; Olívia Sousa, que analisa as recomendações sobre a Avaliação das aprendizagens; e Renata Carvalho, que discute as recomendações sobre a Formação de educadores e professores.

A redação da revista *Educação e Matemática* agradece a todos pela sua prontidão e empenho neste desafio, na certeza de que se reuniram interessantes contributos para a discussão deste documento.

O currículo de Matemática

Dada a instabilidade que se tem vivido nos últimos anos a nível de políticas educativas e orientações curriculares, em particular no que diz respeito à Matemática, o surgimento do relatório “Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática” poderá ser um impulso para a estabilidade desejada. Estas recomendações poderão funcionar como um fio condutor de futuras orientações curriculares, sendo, para isso, indispensável um consenso alargado nos domínios de decisão política e nos atores que as implementam. Nesse sentido, acredito que cabe a todos os envolvidos nos processos de ensino/aprendizagem e de decisão de políticas educativas o esforço de contribuir para a realização de uma versão que espelhe esse consenso. Espera-se também que este relatório não se dê por terminado, estando em constante atualização pela investigação em educação e pela própria experiência em Portugal e noutros países.

As treze primeiras recomendações, relativas ao currículo de Matemática e onde centrei a minha atenção, mostram uma grande preocupação com o acesso à Matemática por todos os alunos. Estas recomendações defendem a existência de um currículo de Matemática global e alinhado respeitando os princípios da universalidade, coerência interna, relevância, foco e nível cognitivo elevado, que proporcione experiências matemáticas de qualidade desde a Educação Pré-Escolar, que promova a utilização de diversos recursos para o ensino e a aprendizagem da Matemática e em que seja assumida a importância da avaliação formativa das aprendizagens. As recomendações sugerem também um currículo nacional de Matemática com nível de decisão local.

Surgiram-me algumas dúvidas e preocupações no que diz respeito a estas recomendações que encaminham para um nível de decisão local em que, de acordo com a recomendação 2, “o nível de decisão local corresponderá ao detalhamento

e complemento do currículo nacional de Matemática atendendo às especificidades dos seus contextos, podendo por isso designar-se por documentos curriculares locais em Matemática, por ciclos e por anos de escolaridade, a desenvolver por cada unidade orgânica (escola não agrupada/agrupamento/conjunto de agrupamento de escolas)” (p. 261). Concordando com a recomendação 12 que defende que “o currículo de Matemática deve ser elaborado por uma equipa com autores cujas formações sejam consistentes, ligadas ao ensino da Matemática, diversificadas e complementares, que incluam investigadores em educação matemática, matemáticos e educadores/professores que ensinam Matemática aos níveis a que dizem respeito os documentos curriculares” (p. 264), questiono se podemos assegurar a existência de tais equipas a nível local, para garantirmos as melhores condições de coautoria no desenvolvimento curricular a todos os professores e as melhores orientações curriculares a todos os alunos. Outras condições serão indispensáveis para a implementação de um novo currículo (ou vários currículos locais), como sugerido na recomendação 15: a possibilidade efetiva de realização de trabalho colaborativo entre professores (acrescentaria investigadores em educação matemática e matemáticos), a existência de um trabalho de coadjuvação em algumas aulas de Matemática e o desenvolvimento de programas de formação para professores. Outra preocupação relativamente à existência de documentos curriculares locais em Matemática prende-se com a consideração de medidas para facilitar a adaptação de alunos que tenham a necessidade de mudar de escola a meio de um ciclo. Acredito que o sucesso nacional da implementação de orientações curriculares locais exigirá uma atenção especial para que não existam desequilíbrios indesejáveis.

No ensino secundário, a recomendação 11, ao sugerir a existência de um núcleo comum de formação a ser frequentado por

todos os alunos e que define o que é essencial na formação matemática à saída da escolaridade obrigatória, e a existência de núcleos complementares de formação que respondam às diferentes necessidades de formação matemática específica tendo em conta o prosseguimento de estudos, permite uma maior flexibilidade e adaptabilidade às características dos alunos. Desta forma, valoriza-se a aprendizagem da Matemática e permite-se que todos os alunos possam beneficiar deste instrumento para melhor compreenderem o mundo, desenvolverem o raciocínio e tornarem-se cidadãos mais bem preparados. Continuará a

fazer sentido a Matemática no Ensino Profissional como existe agora? E as provas de avaliação externa? Em vez de uma prova existirão várias provas? No ensino secundário, os documentos curriculares locais complementarão os diferentes núcleos já previstos a nível nacional?

Muitas outras questões se levantarão, mas serão resultado de uma reflexão mais cuidada, maturada, contínua e partilhada.

LÍGIA CARVALHO

ESCOLA SECUNDÁRIA DA BOA NOVA, LEÇA DA PALMEIRA

Dinâmicas de desenvolvimento curricular

Em dezembro de 2018, por despacho da Secretaria de Estado da Educação, foi criado o Grupo de Trabalho da Matemática, com a missão de organizar recomendações sobre o ensino, a aprendizagem e a avaliação na disciplina de Matemática. No passado mês de junho o grupo apresentou o relatório com um conjunto de 24 recomendações. Neste espaço irei dedicar-me às recomendações que dizem respeito às dinâmicas de desenvolvimento curricular (14, 15 e 16).

As condições de trabalho nas escolas, nomeadamente no que diz respeito aos tempos de trabalho colaborativo com outros colegas para consulta e pesquisa de materiais, formação, preparação de aulas e reflexão sobre os resultados obtidos e as experiências de ensino parecem-me condições indispensáveis para o desenvolvimento de alterações curriculares sustentadas. Relembro aqui algumas condições reunidas para o processo de experimentação e implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico, de 2007, onde participei como professor experimentador numa turma do 1.º ano de escolaridade. É relevante lembrar que este Programa não surgiu de uma forma isolada, mas sim integrado num conjunto de medidas que pretendiam melhorar o ensino e as aprendizagens em matemática.

No que se refere aos primeiros anos de escolaridade, será importante começar por referir a existência do Programa de Formação Contínua em Matemática. A forma como este programa de formação foi concebido permitiu que um conjunto de docentes de um determinado agrupamento frequentasse o mesmo grupo de formação, criando dinâmicas de formação em contexto que levaram ao desenvolvimento da partilha e reflexão conjunta, coordenadas por formadores que orientavam as sessões e observavam algumas aulas.

De alguma forma, este tipo de trabalho teve continuidade no grupo de professores experimentadores que, com a formação e o

tempo de trabalho para planificação e reflexão sobre o trabalho realizado, criaram uma dinâmica de trabalho colaborativo. A formação do grupo de professores experimentadores levou essa experiência um pouco mais além, porque houve alguns momentos de trabalho conjunto com professores de diferentes ciclos.

Durante o tempo de experimentação do programa partilhei a turma com um par pedagógico o que levou a que se criasse um ambiente de colaboração e de constituição de equipa educativa que, em determinados contextos e características do corpo docente, me parece uma dinâmica muito interessante neste nível de ensino. Também no agrupamento onde estive como professor experimentador do programa foi possível criar uma certa dinâmica de trabalho colaborativo, com a criação de momentos mais ou menos formais de partilha de tarefas e reflexão com professores de outras turmas e de outros anos de escolaridade. No que diz respeito a dinâmicas de trabalho colaborativo entre diferentes ciclos, revelou-se algo mais difícil de concretizar, tendo existido apenas alguns momentos no âmbito do Plano da Matemática, onde foi possível trabalhar com colegas de outros ciclos do mesmo agrupamento de escolas.

Uma das recomendações menciona o desenvolvimento de recursos adequados para apoiar o desenvolvimento curricular. Um dos recursos mencionados refere-se a tarefas e relatos de experiências de sala de aula que sirvam de apoio às práticas dos professores. A este propósito lembro os materiais criados no âmbito da experimentação do Programa de 2007, que foram posteriormente disponibilizados numa plataforma de apoio à implementação do referido Programa. Entre esses recursos destaco as brochuras sobre diferentes temas incluídos no Programa, os textos de apoio, as sequências de tarefas para aplicação em sala de aula e uma lista de sites. As sequências de tarefas foram utilizadas em sala de aula. Posteriormente, houve

a produção de reflexões por parte dos professores que as tinham experimentado. Nessas reflexões, para além da exposição do que tinha sido feito, eram também apresentadas as dificuldades encontradas. Estes materiais foram disponibilizados para apoio à implementação do Programa.

Ainda no que diz respeito aos recursos, no âmbito do Plano da Matemática as escolas conseguiram adquirir algum material de apoio à planificação e desenvolvimento de aulas. Na mesma época surgiram nas escolas alguns equipamentos informáticos onde era possível explorar atividades interativas, como as atividades disponibilizadas no ClicMat. Entretanto passou uma década e alguns materiais degradaram-se e alguns equipamentos deixaram de funcionar. As recomendações mencionam a organização de laboratórios de matemática, seria importante voltar a equipar as escolas com um mínimo de material atualizado.

Nestas recomendações, os manuais são destacados como um recurso. Os manuais desde há muito têm um papel importante no desenvolvimento curricular e surgem nestas recomendações com

aspectos inovadores, lançando algumas ideias sobre a forma como o professor pode atuar como construtor e gestor do currículo, nomeadamente numa lógica de adaptar o currículo nacional ao contexto local.

Relativamente à periodicidade dos processos de mudança curricular, baseados em argumentos de natureza técnico-científica, dificilmente será possível estar em desacordo. No entanto, e no que se refere ao 1.º ciclo do ensino básico, as dinâmicas curriculares têm-se pautado por longos períodos de estabilidade, no que isto pode ter de positivo e de menos positivo, intercalados com períodos onde acontecem sucessivas alterações de programas e currículos, com justificações que parecem pouco fundamentadas. Seria importante, em linha com o que é preconizado nas recomendações, que se desenvolva um currículo que seja coerente para todos os ciclos de escolaridade.

RUI CANDEIAS

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS TERRAS DE LARUS

Avaliação das aprendizagens

Para além das quatro recomendações do domínio da avaliação das aprendizagens, não posso deixar de incluir a recomendação 8: Um currículo que assuma o valor da avaliação formativa das aprendizagens, integrada no domínio do currículo.

A necessidade de introduzir mudanças nas práticas avaliativas, nomeadamente, o apelo à utilização de instrumentos de avaliação, adequados e diversificados, para recolher informações sobre os desempenhos dos alunos, já está presente nos programas de matemática do ensino básico e secundário desde o início dos anos 90. Este apelo volta a ser renovado, em 2018, no Decreto-Lei n.º 55 e, em 2019, nas “Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática”.

Todos reconhecemos que as práticas não se mudam por decreto, não basta alertar para a necessidade de diversificar os instrumentos de avaliação que os professores utilizam para recolher dados sobre o desempenho dos seus alunos. É preciso dar (in)formação aos professores sobre o que fazer com o manancial de dados obtidos com esses instrumentos, bem como, exemplos de instrumentos e cuidados a ter na sua construção. A qualidade (validade e fiabilidade) da informação recolhida com cada instrumento vai depender de vários fatores, nomeadamente, da sua adequação ao objeto a avaliar, da correção da sua construção, da relevância e representatividade das aprendizagens a que se referem face ao domínio de aprendizagens previstas nos documentos curriculares. Em síntese, mudar práticas

de avaliação implica mudar práticas de gestão do currículo, articulando-as entre si.

Não é possível, nem tão pouco desejável, pretender avaliar tudo o que foi trabalhado ao longo de um percurso de aprendizagem, a avaliação das aprendizagens incide apenas sobre uma amostra dos conteúdos curriculares (Miller, Linn, & Gronlund, 2009).

As inferências feitas com base no desempenho dos alunos em itens de um instrumento de avaliação referem-se não apenas a esses itens específicos, mas ao universo de conhecimentos que eles representam. Se o universo estiver corretamente representado, o grau de mestria do aluno nesse universo poderá ser traduzido por uma medida do seu desempenho, por exemplo, pela percentagem de itens a que o aluno respondeu corretamente (Kifer, 2001).

Ser capaz de construir instrumentos de avaliação, adequados e diversificados, e de formular juízos de valor sobre as aprendizagens dos alunos, com base na interpretação dos resultados, requer uma formação sólida em avaliação a qual nem todos os cursos de formação de professores contemplam nos seus currículos. Como classificar o desempenho de um aluno com base na diversidade de informações recolhidas? Transformar todas as informações em classificações e calcular uma média, usar médias ponderadas, que pesos atribuir a cada classificação? Estas são algumas dúvidas que têm sido colocadas em ações de formação sobre construção de instrumentos de avaliação.

Enquanto estas dificuldades persistirem, será muito difícil desenvolver “Práticas de avaliação em prol do sucesso e não da retenção” (recomendação 17) e, desse modo, planejar e concretizar medidas de apoio eficazes para combater o insucesso dos alunos.

Com uma conceção de avaliação mais orientada para a classificação do que para a interpretação dos erros cometidos pelos alunos, será muito difícil elaborar medidas de apoio eficazes para ultrapassar as suas dificuldades de aprendizagem. Enquanto a avaliação se resumir ao cálculo de percentagens de respostas corretas, as medidas de apoio dificilmente irão além da repetição de rotinas, sem preocupação com o desenvolvimento de competências e capacidades de nível cognitivo superior.

Por outro lado, não será de todo absurdo pensar-se que alguns casos de insucesso poderão ter sido provocados por práticas de avaliação desajustadas, por exemplo, pelo uso de instrumentos de avaliação mal construídos ou pouco adequados ao que se pretende avaliar, pela mera identificação de erros (*feedback descritivo*) em vez da apresentação de orientações para os ultrapassar (*feed forward*).

A recomendação de uma avaliação externa comparável (recomendação 18) sugere que as provas de aferição devem ser não públicas, mantendo-se o carácter público dos exames, em nome da comparabilidade. Contudo, uma questão se impõe: será mais pertinente assegurar a comparabilidade entre resultados de provas de aferição, que revelam apenas informações por item, do que a comparabilidade entre as classificações obtidas pelos alunos nos exames, classificações que podem interferir no seu percurso académico?

As provas de aferição são instrumentos de avaliação criados para permitirem a identificação de fragilidades na aprendizagem dos alunos e fornecerem *feedback* a alunos, professores e à tutela, permitindo a regulação e a orientação do ensino e aprendizagem, e a monitorização do sistema educativo. Pelo contrário, os exames têm por finalidade a atribuição de classificações aos alunos, conduzindo à sua seriação em termos de percurso académico.

Um dos efeitos negativos apontados aos exames diz respeito à sua influência enquanto modeladores dos currículos: o desenvolvimento do currículo fica refém do que sai nos exames

e estes, por sua vez, ficam reféns do que saiu nos exames de anos anteriores, a bem da comparabilidade. Esta modelação do currículo só poderá ser evitada com exames não públicos.

Assim, não será mais pertinente assegurar a comparabilidade das classificações obtidas nos exames de uma mesma disciplina, em diferentes anos, do que a comparabilidade das potencialidades e fragilidades identificadas pelas provas de aferição?

Sobre a interpretação situada dos resultados das provas de aferição (recomendação 19), importa sublinhar que os resultados divulgados pelo IAVE são apenas estatísticas resultantes da classificação das respostas dos alunos aos itens das provas. A delegação no IAVE da interpretação dos resultados de cada escola levaria à descontextualização da avaliação afastando-a do processo de ensino e aprendizagem que ocorre em cada sala de aula. Só as escolas e os professores poderão interpretar os resultados dos seus próprios alunos, tendo em conta o trabalho que desenvolveram.

O alinhamento das provas de avaliação externas com o currículo (recomendação 20) é um requisito cujo incumprimento compromete a validade da avaliação, quer se trate de provas externas ou internas. A ampliação e diversificação de modos de avaliação, sugeridas nesta recomendação, parecem mais adequadas a avaliações internas do que a avaliações externas. A avaliação em suporte digital, ao permitir avaliar uma maior quantidade e diversidade de objetivos de aprendizagem, poderá certamente constituir uma aposta mais adequada num futuro próximo.

Pelo que atrás foi exposto, não posso deixar de manifestar a minha surpresa face às recomendações apresentadas que, pelo seu carácter demasiado genérico, não apontam caminhos claros sobre as práticas a mudar no domínio de avaliação das aprendizagens.

Referências

- Kifer, E. (2001). *Large-Scale Assessment: Dimensions, dilemmas and policy*. USA: Corwin Press.
- Miller, M. D., Linn, R. L., & Gronlund, N. E. (2009). *Measurement and Assessment in Teaching* (10th edition). New York: Pearson International Education.

OLÍVIA SOUSA

COLABORADORA DO IAVE

Formação de educadores e professores

No passado dia 12 de julho foi disponibilizado o relatório “Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática”, realizado pelo Grupo de Trabalho de Matemática (GTM). Este relatório refere um conjunto de 24

recomendações organizadas em quatro domínios: o currículo de Matemática; as dinâmicas de desenvolvimento curricular; a avaliação das aprendizagens; e a formação de professores. No que se refere à formação de professores, são apresentadas

quatro recomendações, duas mais centradas na formação inicial e duas na formação contínua, embora estas recomendações se cruzem em termos do seu propósito.

O GTM defende uma valorização da profissão docente através do investimento na formação inicial de professores. Efetivamente o ensino em Portugal irá, a muito curto prazo, deparar-se com a falta de profissionais, mas este investimento já deveria de ter sido pensado antes. Muito em breve, vamos assistir à saída de dezenas de profissionais com experiências muito interessantes e ricas no âmbito do ensino da Matemática, mas que não vão ter oportunidade de partilhar essas experiências com os que entram na profissão. Esta é sem dúvida uma perda irreparável para o sistema e um investimento que foi feito a longo prazo, pela tutela e pelos próprios professores, que não vai ser rentabilizado em benefício da qualidade das aprendizagens dos alunos.

A sensibilização da sociedade para a importância da profissão docente é de grande importância para cativar jovens docentes, mas o investimento na formação inicial é apenas o ponto de partida. Cabe também a cada um de nós, professores no terreno, valorizar o trabalho que desenvolvemos, ano após ano, com uma diversidade imensa de alunos e prepararmo-nos cada vez melhor para o exercício das nossas funções investindo no nosso desenvolvimento profissional. Ainda no âmbito da formação inicial, o GTM sugere que sejam criadas condições aos professores cooperantes para poderem acompanhar a iniciação à prática profissional dos futuros professores. Este é um aspeto que considero importante, mas poderíamos ser um pouco mais ambiciosos. Este trabalho de acompanhamento não se deve esgotar na formação inicial, mas deve ter continuidade. É desejável, do meu ponto de vista, que os professores recém-formados, sejam acompanhados nas escolas durante mais dois ou três anos por professores experientes. Esta seria uma forma de potenciar a transição de gerações e partilha de conhecimentos, de valorizar o investimento no desenvolvimento profissional que estes professores experientes fizeram ao longo de uma vida dedicada ao ensino e de garantir a qualidade do ensino. Acredito que, se existissem condições no terreno para que este trabalho fosse feito, muitos seriam os professores que se manteriam mais alguns anos no sistema.

No que se refere à formação contínua de professores, recomenda-se um investimento continuado e focado na promoção do sucesso das aprendizagens dos alunos em Matemática em contexto e com a colaboração de instituições de ensino superior. Atualmente a formação contínua de professores mais parece uma “manta de retalhos”, onde milhões de euros são gastos e cujo objetivo se centra muitas vezes na condição essencial para a progressão em carreira. É preciso repensar a formação contínua de professores assumindo-a como parte integrante e fundamental da profissão docente. É urgente a definição de uma estratégia nacional para

a formação contínua de professores de Matemática que faça a ponte entre a academia e a escola de modo a harmonizar a teoria e a prática e a preparar os professores para os desafios da educação. Considero a atualização de conhecimentos essencial em qualquer profissão, sendo completamente indispensável na profissão docente. Temos história amplamente valorizada em programas de formação contínua que foram abandonados, mas cujos benefícios foram reconhecidos e em planos de intervenção no âmbito da Matemática, como o Plano de Ação para a Matemática, que colocou centenas de professores a discutir o ensino da Matemática e a trabalhar colaborativamente dentro e fora da sala de aula. Eu vivi esse processo em conjunto com muitos outros colegas, mas agora quando contacto com escolas e retomo alguns destes assuntos, parece que estou noutro planeta. A questão que se coloca é, por que razão abandonamos nós histórias felizes para ingressar em histórias desastrosas que provocaram um retrocesso gigantesco no caminho que se estava a trilhar e que teve consequências positivas a nível nacional e internacional? O Programa de Formação Contínua em Matemática e o Plano de Ação para a Matemática são assuntos retomados pelo GTM e muito bem, pois são as boas práticas reconhecidas por formadores e professores que devemos continuar a semear.

A formação de professores e o seu desenvolvimento profissional, tal como já o afirmei, devem ser parte integrante da profissão. Neste sentido, não posso estar mais de acordo com a necessidade de valorizar os profissionais que realizam formação pós-graduada, não só na progressão em carreira, mas no papel que podem desempenhar dentro das escolas no âmbito da formação contínua de professores. Por que não se dedicam estes profissionais à formação contínua em contexto, algo que está mais do que provado que faz sentido e contribui para o desenvolvimento profissional e institucional? Do meu ponto de vista, a tutela tem um papel importante a desempenhar neste domínio. Por um lado, permitindo que existam condições para que esta formação seja realizada e por outro, dando condições para que os professores realizem investigação e formação pós-graduada de modo a que possamos ter cada vez mais profissionais capacitados para esta função. Este será certamente um bom investimento para o sistema educativo português e para o ensino da Matemática. É urgente refletir sobre o passado para construir o futuro e este conjunto de recomendações é um bom ponto de partida para se construir o futuro do ensino da Matemática em Portugal.

RENATA CARVALHO

DIRETORA DO CENTRO DE FORMAÇÃO APM



O Espaço Matemático em Língua Portuguesa (EMeLP) é uma organização internacional, filiada à *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), que reúne os países e comunidades de língua portuguesa, e tem como objetivos o intercâmbio de projetos, ações e iniciativas em ensino de matemática, matemática interdisciplinar, divulgação da matemática e manifestações culturais matemáticas.

A II Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa realiza-se de **25 a 29 novembro**, na **Universidade Eduardo Mondlane**, em **Maputo, Moçambique**.

O programa do encontro contempla conferências plenárias e conferências paralelas, mini-simpósios, e sessões de comunicações orais e de grupos de discussão temáticos onde serão discutidos trabalhos apresentados pelos participantes.

Mais informações disponíveis em EMeLP

<https://www.emelp.org/>

BENTO DE JESUS CARAÇA E O PROJETO COSMOS

O Professor **Bento de Jesus Caraça** (1901-1947) foi uma das mais importantes personalidades portuguesas do século XX.

A **Associação Bento de Jesus Caraça**, constituída em 2018, definiu por objetivo principal da sua atividade dar a conhecer a obra de Bento de Jesus Caraça em todas as suas facetas e promover a discussão em torno das suas ideias, nomeadamente entre as gerações que não conhecem o seu pensamento e obra, promovendo a cultura integral, através da divulgação das ciências, das humanidades e das artes nas suas diversas expressões, da edição de publicações que se coadunem com a prossecução dos seus fins e da organização de congressos, seminários, colóquios, conferências, debates e exposições.

A Associação realiza no **dia 19 de novembro** um colóquio dedicado ao Projeto Biblioteca Cosmos. A participação no colóquio está sujeita a inscrição com um custo de 15€ que se destina a pagar os custos da organização.

Na página

<http://www.associacaobentodejesuscaraca.pt>

encontra mais informações sobre o programa e as inscrições.



Os contributos de uma *Gallery Walk* para promover a comunicação matemática

JOANA GAMBOA

A comunicação matemática deve ser uma competência valorizada e trabalhada na sala de aula pois permite que as ideias se tornem objetos de reflexão, discussão e aperfeiçoamento. Os alunos têm muita dificuldade em aprender efetivamente o que ouvem na sala de aula a menos que “tenham oportunidade de interagir profundamente com as ideias expostas e de se apropriarem delas” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 60). Neste âmbito, a *Gallery Walk* surge como uma poderosa estratégia para despoletar discussões matemáticas significativas, que permite que os alunos se apropriem das ideias matemáticas dos colegas, analisando-as, comentando-as e discutindo-as. Neste texto expomos uma experiência realizada numa turma de 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico onde foi utilizada a *Gallery Walk* como estratégia promotora de comunicação matemática.

COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Nos últimos anos, e na tentativa de atender às exigências da sociedade atual, as orientações que provêm da Didática da Matemática no âmbito do trabalho em sala de aula apontam para uma valorização de propostas de tarefas como explorações, investigações e problemas, frequentemente resolvidas em pequenos grupos, bem como a sua discussão coletiva na turma (Ponte, Nunes & Quaresma, 2012). Esta abordagem de ensino rompe com a forma tradicionalista de como se conceptualiza o papel da comunicação na construção do conhecimento – como um veículo ao serviço da transmissão do conhecimento do professor para os alunos – passando a considerar a comunicação como um processo multifacetado, através do qual se estabelecem interações entre professor-aluno e aluno-aluno, partilhando e construindo significados para ideias matemáticas (Guerreiro et al., 2015).

Um ensino que valoriza a comunicação matemática em sala de aula para a aprendizagem, detém assim inúmeros benefícios: para a partilha de ideias, os alunos têm de organizar e clarificar o seu pensamento; de seguida têm de explicar e justificar as ideias que expõem; segue-se uma fase de questionamento, em que um dos intervenientes pede esclarecimentos aos restantes, havendo uma possível reformulação de pensamento; em simultaneidade, desenvolve-se uma discussão em torno de ideias matemáticas,

em que os diversos intervenientes interagem, expondo ideias e fazendo perguntas (Boavida et al., 2008; Ponte & Serrazina, 2000).

Assim, a comunicação é uma ferramenta que permite que os alunos desenvolvam cada vez maior compreensão, profunda e significativa, apropriando-se dos conceitos envolvidos e de novas estratégias de resolução, contribuindo e facilitando a construção de conhecimentos de longa duração (Boavida et al., 2008), o que se traduz em aprendizagens significativas (Guerreiro et al., 2015). Neste sentido, Boavida et al. (2008) falam de “comunicar para aprender” (p. 78).

O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES E DA ARGUMENTAÇÃO NA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

As representações matemáticas têm um papel relevante quer na organização, quer no registo, quer na comunicação das ideias matemáticas relativas ao procedimento de resolução do problema. Para além disto, ao representarem ideias matemáticas e compreenderem essas representações os alunos estão a pensar matematicamente.

Os tipos de representações utilizadas pelos alunos podem ser classificados de várias formas. Por exemplo, Lesh, Post e Behr (1987) estabelecem cinco categorias, uma classificação retomada pelo NCTM, em 2017 (figura 1).

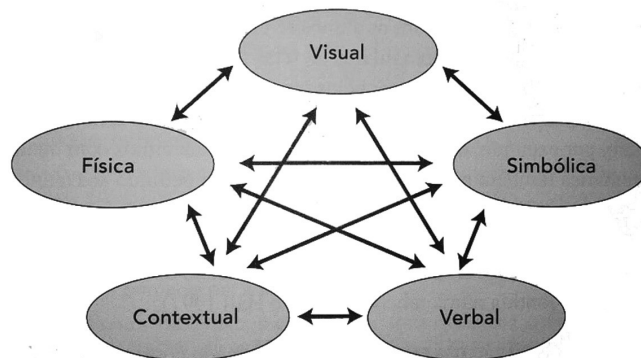


Figura 1. Classificação das representações matemáticas.

Retirado de NCTM (2017, p.25)

Segundo esta classificação as representações podem ser: (i) representações físicas, que dizem respeito à manipulação direta de objetos e à simulação de situações; (ii) representações visuais, associadas à organização visual, ou seja, ao uso de figuras, imagens, esquemas, diagramas e desenhos; (iii) representações simbólicas, relativas ao uso de linguagem simbólica, como numerais, variáveis, tabelas, “vocabulário matemático”; (iv) representações verbais, que dizem respeito ao uso de palavras e frases; (v) representações contextuais, associadas ao estabelecimento de relações entre ideias matemáticas e os contextos do quotidiano/reais (Boavida et al., 2008; NCTM, 2017). Todos estes tipos de representações podem ser usados quando se resolvem problemas. Todas elas se interligam entre si e todas elas são suscetíveis de serem entendidas e interiorizadas pelos alunos.

Também sendo parte integrante do processo de comunicação e discussão matemática, emerge a argumentação. Ao argumentar tentamos justificar uma ou várias conceções que acreditamos ser verdadeiras. É frequente observar-se que os alunos consideram que o papel de avaliar e justificar raciocínios não lhes compete, deixando-o inteiramente nas mãos dos professores (Boavida et al., 2008).

GALLERY WALK

A *Gallery Walk* (GW) surge como uma prática cujo principal objetivo é envolver os alunos na resolução de tarefas matemáticas através do trabalho colaborativo, que os ajuda a usar habilidades de pensamento de ordem superior, como avaliar, analisar e sintetizar (Elita, 2012). Esta é uma estratégia de aprendizagem ativa¹ que permite que os alunos, individualmente ou em grupo, tenham “a oportunidade de apresentar, através de pósteres dispostos em torno da sala de aula, ... a resolução de uma tarefa, numa perspetiva muito semelhante à dos artistas quando expõem os seus trabalhos numa galeria” (Barbosa & Vale, 2018, p. 3).

Numa GW é proposta uma tarefa (que pode ser de diversas naturezas), que os alunos devem resolver e, posteriormente, organizar a sua proposta de resolução num póster que será afixado na sala de aula. Os pósteres devem ser afixados de forma a que os alunos possam circular à vontade pela sala (ou qualquer outro espaço que se torne adequado à sua realização), evitando aglomerados e dispersão. Depois dos pósteres estarem expostos, todos os alunos têm oportunidade de analisar o seu conteúdo e formular questões, comentários e/ou sugestões que poderão ser redigidos em *post-its* e colocados em cada póster. Por fim, os pósteres regressam aos diferentes grupos, que devem

refletir sobre as questões/comentários recebidos. De seguida, é promovida uma discussão coletiva em torno destes, em que cada grupo pode esclarecer aspetos do seu trabalho (Barbosa & Vale, 2018).

Uma GW pode ter um tempo de realização curto, como cerca de 15 minutos, ou ser realizada ao longo de vários momentos da aula, dependendo do objetivo que o professor tem para aquela GW e da exigência de análise matemática do conteúdo dos pósteres (Vale, citado por Carvalho, 2017). Como tal, cabe ao professor adaptar a forma de realização da GW de acordo com o assunto, o tempo e as finalidades.

No momento da apresentação e discussão matemática, o grupo que está a apresentar o ser póster concebe um relatório oral sintetizando e respondendo aos comentários, perguntas e sugestões deixados pelos colegas nos *post-its*. Dado que todos os alunos tiveram oportunidade de analisar atentamente as diversas resoluções dos colegas (na GW), o momento da apresentação dos pósteres é muito mais rico, envolvendo toda a turma na discussão. Os alunos escutam e compreendem o pensamento dos colegas, refletindo sobre este, e assim concordam e/ou discordam, argumentando (Coelho, 2017). Desta forma, através do envolvimento que é proporcionado, os alunos desenvolvem o seu conhecimento (Carvalho, 2017).

EXPERIÊNCIA REALIZADA NO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

A experiência que descrevo neste artigo desenvolveu-se no âmbito do meu estágio no 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB), cuja intervenção decorreu ao longo de 7 semanas, numa turma do 4.º ano de escolaridade de uma escola pública de Lisboa. Durante o período de observação de duas semanas na turma, verificou-se que uma das fragilidades mais evidente da turma era a dificuldade de explicitar a forma como pensaram na resolução de determinada tarefa matemática, pelo que não tiravam partido do poder de explicação e justificação, de argumentação, de questionamento e de discussão. Neste período foi possível constatar que quando a professora cooperante solicitou a diferentes alunos para explicarem o seu raciocínio estes, automaticamente, ficavam retraídos e entendiam que a sua resolução e/ou solução estava incorreta.

O reconhecimento destas fragilidades e o meu interesse sobre a comunicação na sala de aula, levaram-me a delinear uma intervenção centrada na utilização da GW, associada à resolução da rotina semanal – “Problema da Semana” (PS). A intervenção decorreu ao longo de cinco sessões e foi proposto à turma a realização de um problema um dia por semana, em pequenos grupos (4 elementos), com duração entre 30 a 40 minutos. Posteriormente, a resolução desse problema era organizada num póster, a que era dado cerca de 30 minutos para a sua elaboração.

¹Entenda-se aprendizagem ativa como o método instrucional que envolve os alunos no processo de aprendizagem. Contrariamente às abordagens de aprendizagem tradicionais em que o aluno se limita a aceder passivamente à informação transmitida pelo professor, na aprendizagem ativa o foco está totalmente no aluno e na atividade que este desenvolve (Barbosa & Vale, 2018).

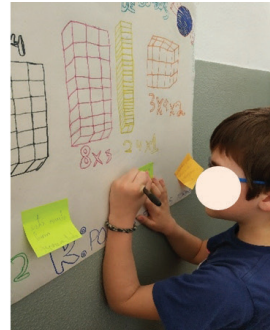


Figura 2. Realização das GW

Quando todos os grupos tivessem concluído o seu poster, todos eram afixados no corredor da escola em frente à porta da sala. Seguiu-se a GW (figura 2), reservando cerca de 15 minutos para analisar e formular perguntas e comentários ao trabalho dos colegas, utilizando para isso *post-its* que deveriam ser colocados nos pósteres. De seguida, cada grupo recebia de volta o seu póster e tinha cerca de 15 minutos para analisar o conteúdo dos *post-its* e delinear a apresentação. Por fim, cada grupo tinha cerca de 10 minutos para apresentar a sua resolução do problema atendendo às questões e comentários deixados nos *post-its* e os colegas tinham oportunidade de tecer novas perguntas e comentários ao que os colegas apresentavam oralmente.

Esta intervenção foi ainda foco de uma investigação sobre a minha prática, em que analisei, particularmente, as representações utilizadas pelos alunos (de acordo com o esquema da figura 1) e o discurso dos alunos durante as discussões coletivas.

Para a análise das apresentações e discussões coletivas, baseei-me no conjunto de ações que os alunos realizam quando se envolvem num discurso significativo na sala de aula de matemática, proposto pelo NCTM (2017):

- *Categoria I*: apresentam e explicam ideias, raciocínios e representações a colegas, no discurso com toda a turma;
- *Categoria II*: ouvem atentamente e criticam o raciocínio dos colegas, usando exemplos para apoiar argumentos ou contraexemplos para os refutar;
- *Categoria III*: procuram compreender as abordagens utilizadas pelos colegas, colocando questões para clarificação;
- *Categoria IV*: identificam, em abordagens diversas para a resolução de uma tarefa, em que medidas elas são análogas e em que medida são diferentes.

Numa fase inicial da rotina, na resolução dos problemas, os grupos mobilizaram maioritariamente representações visuais, seguindo-se as representações verbais, simbólicas e físicas. Existiram grupos que se destacaram devido às evidências do uso de uma forma de representação diferente para cada alínea da tarefa proposta e da preocupação na forma como estruturaram o póster bem como se o seu conteúdo estaria claro, uma vez que utilizaram cores com função interpretativa e formas de

organização mais sofisticadas.

Nas primeiras discussões coletivas os alunos acabaram por limitar-se a explicar os seus raciocínios e representações aos colegas, lendo todos os comentários colocados nos *post-its* e respondendo a estes. Estes comentários eram predominantemente positivos e detinham informação muito geral e pouco útil e significativa para os colegas. Com o passar das semanas houve uma diminuição do número de comentários generalistas e um aumento da quantidade de comentários com pedidos de esclarecimento específicos.

4.º PS – Degraus da escada (um exemplo significativo)

Degraus da escada

O Francisco anda em grandes correrias pelas escadas do prédio em que vive. A certa altura, encontrava-se no degrau mesmo do meio da escada.

Em seguida, subiu 5 degraus e, logo a seguir, desceu 12. Depois subiu mais 8 degraus, tomou fôlego e subiu mais 10 para chegar ao cimo da escada.

Quantos degraus tem a escada?

Figura 3. Enunciado de 4.º Problema da Semana (Retirado de EUREKA - Concurso de problemas 2006/2007)

Na figura 3 encontra-se o enunciado do 4.º PS. Escolhi este problema devido ao seu cariz desafiante e motivador, e uma vez que permitia a utilização de várias estratégias de resolução e/ou de vários tipos de representações e, como tal, podia requerer graus de sofisticação matemática diferentes. Para além disto, e derivado da possibilidade de múltiplas estratégias de resolução, acreditava no seu potencial para despoletar uma discussão matemática significativa.

Todos os grupos conseguiram resolver o problema, no entanto, este revelou-se mais desafiante que os anteriores o que levou a que os grupos necessitassem de mais tempo para a sua resolução e, em alguns casos, algum auxílio por parte de uma das professoras.

A estratégia de resolução do problema seguida pelos diferentes grupos foi idêntica, e fortemente apoiada na representação visual. No entanto, alguns grupos destacaram-se por evidenciarem um nível de sofisticação mais avançado (como descrito detalhadamente mais à frente neste artigo).

Todos os alunos envolveram-se significativamente na resolução do problema, contribuindo com ideias significativas e trabalhando em conjunto com os colegas. Certamente devido ao seu cariz desafiante, todos os alunos se mostraram motivados e foi possível observar alunos que habitualmente se dispersam do trabalho com facilidade e/ou se recusam a fazê-lo por não lhes interessar, a trabalhar empenhadamente desde o primeiro ao último minuto.

MAIS DETALHADAMENTE...

Neste PS surgiu frequentemente o uso da cor com função interpretativa, para além da função estética que já lhe era confiada nos problemas das semanas anteriores. Os alunos utilizaram setas de cores diferentes para representar as diferentes subidas e descidas enunciadas no problema ou pintavam de cores diferentes os degraus pisados quando o Francisco subiu ou desceu um determinado número de degraus. Esta utilização da cor com função interpretativa surgiu sempre com legenda associada.

O tipo de representação dominante foi a representação visual, associada ainda à representação contextual, através do uso de um desenho da escada. Ainda assim o grupo 4, em vez de utilizar um desenho convencional da escada (representação contextual), apoiou-se numa reta dividida em segmentos, em que cada segmento representava um degrau (figura 4). Embora o tipo de representação fosse também visual, esta representação é mais sofisticada porque distancia-se da representação associada ao contexto, próxima do real e mais intuitiva, para uma mais abstrata.

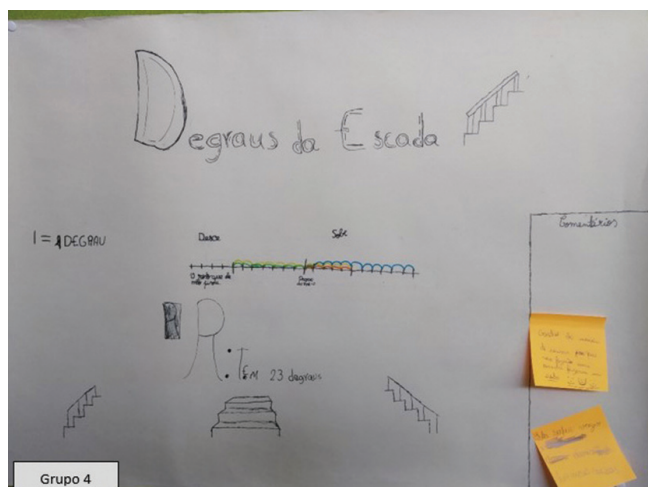


Figura 4. Póster elaborado pelo grupo 4 na resolução do 4.º PS

O grupo 3 apresentou no seu póster três tipos de representações: representações visual e contextual (desenho da escada), representações simbólicas (adição e subtração) e representações verbais (frase explicativa) (figura 5). Este grupo apresentou um nível de sofisticação mais avançado do que os seus colegas e evidenciou uma profunda compreensão matemática, por utilizar tipos de representações cada vez mais abstratas e interligadas. As diferentes representações mobilizadas pelo grupo foram-se distanciando do contexto do problema e todas elas evidenciavam o raciocínio seguido pelos alunos na resolução do problema, complementando-se. Para além disto, o raciocínio matemático associado à adição e subtração foi também avançado, uma vez que mobilizava números negativos com compreensão, um conteúdo que não é trabalhado com os alunos deste nível de escolaridade. Os resultados das operações têm significado para os alunos, mesmo quando obtêm números negativos, que são encarados como o número de degraus que se está acima (se for positivo) ou abaixo (se for negativo) do degrau de partida. O resultado final (11) é o valor decisivo para resolver o problema, o que torna desnecessário numerarem os degraus.

DURANTE A APRESENTAÇÃO DOS PÓSTERES...

O grupo 5 iniciou a sua apresentação explicando como procederam para resolver o problema: “Fizemos um degrau, que seria o ponto de partida, e depois fomos contando os degraus que ele subia ou descia” (*categoria I*). Acrescenta que utilizaram as cores para diferenciar as setas e legendaram-nas consoante os degraus que o Francisco subiu e desceu. Para o grupo, desta forma “fica menos confuso do que se fossem todas da mesma cor”. Refletem ainda que a legenda deveria estar na ordem correta e que isso a tornaria mais clara. Uma colega, que colocou o comentário no *post-it* relativo à legenda – “Não entendo, «terceiro lugar, e por fim» ...” – diz que o que escreveu foi em jeito de exemplo pois não entendeu o significado da

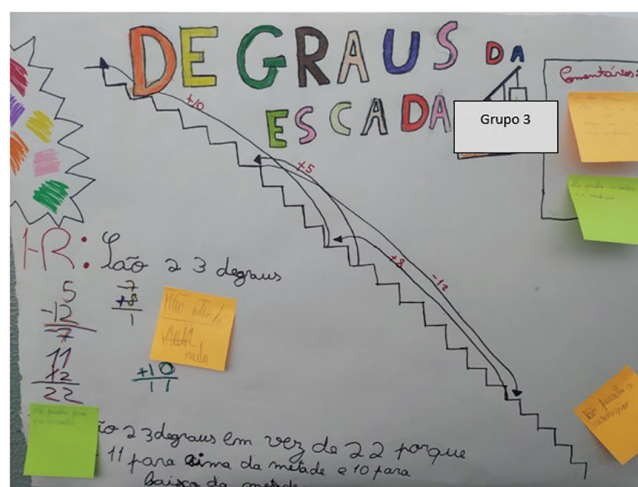


Figura 5. Póster elaborado pelo grupo 3 na resolução do 4.º PS

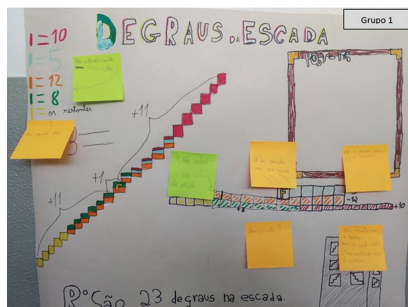


Figura 6. Póster elaborado pelo grupo 1 na resolução do 4.º PS

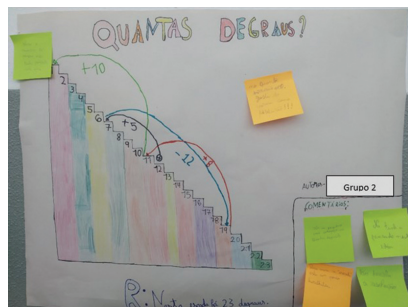


Figura 7. Póster elaborado pelo grupo 2 na resolução do 4.º PS

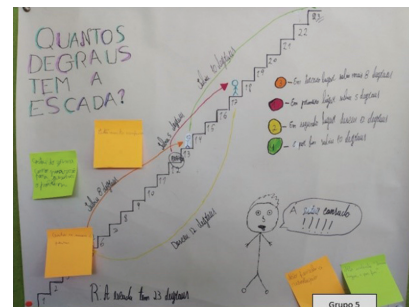


Figura 8. Póster elaborado pelo grupo 5 na resolução do 4.º PS

Exemplos de comentários registados nos *post-its*

Grupo 3: “Não percebi as contas e a resolução”; “As setas poderiam estar uma de cada cor, porque assim é um pouco confuso”

Grupo 4: “Gostei da maneira de pensar porque não fizeram uma escada fizeram uma reta”; “Está super vazio. Deviam pôr mais coisas.”

Grupo 5: “Gostei da forma como pensaram para resolver o problema”; “ Não entendo ‘terceiro lugar, e por fim’ ...”

legenda no global. Um elemento do grupo explica-lhe novamente para que serviu a legenda. Neste momento, a colega procurou compreender a representação utilizada pelos colegas, colocando questões de forma a que o grupo a clarificasse (*categoria III*). O grupo descreveu a sua abordagem (*categoria I*), refletindo sobre a mesma, e a colega ouviu a sua explicação atentamente, ficando a perceber.

O grupo 4 utilizou uma reta em vez do desenho da escada adotado pelos restantes grupos. Esta representação menos alusiva ao contexto tornou-se menos perceptível por todos os alunos da turma. No entanto, ao afastarem-se da representação associada ao contexto da tarefa, estão a mobilizar uma representação que poderá ser uma importante ferramenta noutras situações. O grupo começou por explicar a sua ideia e raciocínio (*categoria I*). Uma aluna interrompe dizendo “Podem explicar melhor, é que não percebi muito bem porque é que fizeram essas coisas assim [referindo-se aos segmentos que decompõem a reta]. Não percebi muito bem como é que em vez de fazerem uma escada fizeram uma reta” (*categoria III*). Um elemento do grupo responde “Cada traço é um degrau e aqui está os degraus que ele vai subindo [apontando com o dedo para as ligações laranja] (*categoria I*). A aluna remata com “Ah ok. Já percebi”. Um outro aluno coloca o dedo no ar e intervém dizendo “Há uma coisa que eu não percebi: porque é que está ali a dizer os degraus que ele não pisou? (*categoria III*)”. Um elemento do grupo esclarece “Estes foram os degraus que ele não chegou a pisar porque não desceu mais na escada, mas os degraus tinham de existir para de onde ele começou ser o meio” (*categoria I*). Nesta apresentação as intervenções dos colegas foram bastante pertinentes, com

questões que contribuíram para que o grupo clarificasse o seu raciocínio (*categorias I e III*).

Durante a apresentação do grupo 2, um colega e um elemento do grupo discutiram entre si se a numeração a contabilizar a quantidade de degraus da escada deveria começar em cima ou em baixo. Esse colega utilizou o exemplo que quando vamos a subir uma escada começamos a contar de baixo (*categoria II*). O elemento do grupo contra-argumentou dizendo que para o caso, ou seja, para saber o número total de degraus da escada, não importava se se começava a contar de cima ou de baixo, isso não alteraria o resultado (*categoria II*). Neste momento da apresentação, um aluno criticou o raciocínio dos colegas, usando um exemplo para apoiar o seu argumento, o grupo refutou, contra-argumentando, indo ao encontro do que é descrito na *categoria II*.

Todos os grupos, apresentaram e explicaram os raciocínios e representações aos colegas (*categoria I*). Nestas apresentações foi evidente que os alunos se envolveram de uma forma mais significativa do que nas restantes apresentações, colocando questões pertinentes (*categoria II*), defendendo as suas ideias e argumentando (*categoria III*). O facto de este já ser o 4.º PS que segue o mesmo procedimento pode ter conduzido a esta melhoria. Os alunos já tinham tido três experiências anteriormente e começavam a perceber aquilo que é esperado que analisem e comentem, emergindo um envolvimento mais profundo.

CONCLUSÕES

Nos problemas da semana iniciais os grupos ainda não tinham totalmente presente que a forma como organizavam o seu póster bem como elaboravam as suas representações deveria ser claro para qualquer pessoa que o consultasse. Assim, e aliado à falta de experiências prévias dos alunos em comentar o trabalho dos colegas, durante as GW, surgiram predominantemente comentários gerais, como “não percebi nada”, cujo conteúdo não conduzia à melhoria do trabalho, não destacava positivamente o conteúdo apresentado e não colocava questões a aspetos que suscitaram dúvidas. A predominância deste tipo de comentários

e, mais uma vez, a falta de experiência dos alunos, conduziam a discussões coletivas pouco ricas e dinâmicas, em que existiam poucas questões e momentos de argumentação e contra-argumentação, havendo maioritariamente uma explicação oral de raciocínios e representações. Com o passar das semanas os alunos começaram a perceber qual o seu papel neste tipo de trabalho e os resultados obtidos foram sendo cada vez melhores. Atendendo ao PS que lhes era dado, os alunos escolhiam qual a forma de representação a usar como ferramenta para a resolução desse problema. Para além disto, os alunos ponderavam ainda sobre quais as vantagens e a adequação da utilização de várias representações na resolução de um mesmo problema, surgindo várias vezes esta diversidade de representações num só póster. As representações utilizadas pelos diferentes grupos ao longo dos vários problemas da semana, evidenciam, em inúmeras ocasiões, a preocupação do grupo na forma como estruturavam o póster, bem como na clareza do seu conteúdo, uma vez que iriam expor o seu trabalho e este iria ser comentado pelos colegas na GW.

Assim, a GW potencia a utilização de representações matemáticas diversificadas e adequadas à tarefa uma vez que os alunos utilizam múltiplas formas de representação de forma a darem sentido ao seu raciocínio, sempre com a consciência de que este não deve ser claro só para si próprio como também para os outros, havendo um esforço maior para que a representação descreva e justifique o raciocínio e se torne alvo de compreensão para qualquer colega.

A partir da análise dos resultados foi ainda possível constatar que, durante as apresentações dos pósteres após a GW, surgem, múltiplas vezes, trocas intencionais de ideias, clarificação de ideias e argumentação sobre opções ou estratégias. Ou seja, desenrolam-se argumentações e discussões matemáticas, tendo como essência os comentários colocados nos pósteres durante a GW. É ainda evidente, após a análise de todas as discussões coletivas que, quando os comentários colocados nos *post-its* são menos pertinentes, as apresentações e discussões coletivas são também elas menos ricas.

Com o passar das semanas, os comentários colocados nos *post-its* foram sendo cada vez mais relevantes, sendo possível concluir que os alunos foram construindo, progressivamente, o entendimento sobre o que significa discutir o trabalho dos seus pares. Assim, foi possível verificar que a GW permitiu despoletar discussões, quer em pequeno quer em grande grupo, onde os alunos apresentaram e explicaram ideias, raciocínios e representações aos colegas, colocaram as suas observações, argumentando-as, e as suas questões para clarificação, sendo naturalmente desafiados a justificar as suas escolhas com toda a turma.

Deste modo, os resultados do estudo apontam para que a GW seja uma estratégia que favorece um discurso matemático

significativo. Os alunos, ao estarem aptos para “selecionar, usar e mover-se entre diferentes representações matemáticas” (Boavida et al, 2008, p. 74), são mais eficazes “quer na organização, quer no registo, quer ainda na comunicação de ideias matemáticas associadas aos processos de resolução” (Boavida et al, 2008, p. 72). Além de que, os alunos que “aprendem a articular e a justificar as suas próprias ideias matemáticas, que raciocinam através das suas próprias explicações e das de outros, acabam por desenvolver uma compreensão matemática profunda” (NCTM, 2017, p. 30).

Na turma em que se desenvolveu o estudo, em que não era prática solicitar que os alunos descrevessem os seus processos de pensamento e que explicassem e justificassem as suas ideias, sendo observável que os alunos consideravam que o papel de avaliar a justificar raciocínios não lhes competia a eles, mas sim ao professor, foi possível testemunhar, em tão pouco tempo, comunicações matemáticas em torno de ideias matemáticas significativas.

Referências

- Barbosa, A., & Vale, I. (2018). O contributo de uma *Gallery Walk* para promover a comunicação matemática, *Educação e Matemática*, 149-150, 2–8.
- Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- Carvalho, B. (2017). *Projetos de OTD numa turma do 6.º ano de escolaridade: uma experiência de Gallery Walk* (Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo). Consultada em <http://hdl.handle.net/20.500.11960/1987>
- Coelho, A. R. (2017). *A Gallery Walk no ensino e aprendizagem da Organização e Tratamento de Dados do 5.º ano do EB* (Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo). Consultada em <http://hdl.handle.net/20.500.11960/1999>
- Elita, S. (2012). *Three Part Lessons - What is Gallery Walk?*. *Teaching Rocks*. Consultado a 10 de junho de 2019, de <http://teachingrocks.ca/three-part-lesson-what-gallery-walk/>
- Guerreiro, A., Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, 23(44), 279–295.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2017). *Princípios para a Ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM). (Tradução portuguesa da edição original de 2014).
- Ponte, J. P., Nunes, C., & Quaresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes*, 49–74.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

JOANA GAMBOA

Ensino Secundário – Ensino Superior: (Des)Conexões

No ProfMat deste ano realizou-se uma sessão de trabalho dedicada à relação do ensino secundário e superior, cujo título transpusemos para este texto. Trata-se de um assunto muito importante a que, provavelmente muitos concordarão, não tem sido atribuída suficiente atenção. A Comissão organizadora do ProfMat, reconhecendo a necessidade de discussão e reflexão sobre o tema, propôs a realização de uma mesa redonda, a qual foi moderada por Paulo Afonso (Professor na Escola Superior de Educação de Castelo Branco) e em que participaram Jaime Carvalho e Silva (Professor no Departamento de Matemática da FCT – Universidade de Coimbra), Teresa Moreira (Professora na Escola Secundária de Camões em Lisboa) e Albano Silva (atual Presidente do Instituto Politécnico de Portalegre).

A mesa redonda recebeu grande interesse por parte dos professores que estavam no encontro e foi preenchida com intervenções que a Redação da *Educação e Matemática* considerou de grande relevância, pelo que decidiu publicar uma parte significativa do conteúdo daquela sessão. Todas as questões foram propostas pelo moderador. Dada a sua extensão, e de modo a não prejudicar a leitura e interpretação do conteúdo das intervenções, o texto desta sessão será publicado em dois números. Desta forma, começamos por dar voz a Jaime Carvalho e Silva e Teresa Moreira.

A Redação agradece a todos o esforço adicional de transformar as suas intervenções orais num registo escrito, o qual foi editado pela equipa da Revista e revisto pelos seus autores.

A Redação da *Educação e Matemática*

Que competências matemáticas se espera que os alunos atinjam no final da escolaridade obrigatória, designadamente no final do Ensino Secundário? Em que patamares se situam os aspetos da rotina, da mecanização e da exercitação memorística dos conteúdos matemáticos, face aos aspetos da compreensão e da Resolução de Problemas e da Modelação Matemática, com as respetivas conexões inter-conceitos e entre a Matemática e a Vida quotidiana? (Jaime Carvalho e Silva)

Um pouco por todo o mundo são discutidos os problemas da transição entre o ensino secundário e o ensino superior, especialmente em relação à disciplina de Matemática¹. Este é um problema antigo e já em 1998 mereceu uma excelente contribuição no Congresso Internacional de Matemática². As recomendações aí expostas exigem uma série de ações coordenadas que nem são unânimes nem têm sido implementadas de forma satisfatória em nenhum sistema educativo, pelo que a discussão continua. Não há um referencial nacional ou internacional sobre quais os conteúdos, competências e capacidades que um aluno que termina o Ensino Secundário deva possuir quando pretende prosseguir estudos no Ensino Superior³. E não é sequer claro



que deva haver tal referencial, tais são as diferenças existentes entre os diferentes sistemas educativos.

Em 1999, a União Matemática Italiana elaborou o que chamou *SYLLABUS DI MATEMATICA – Conoscenze e capacità per l'accesso all'Università*, que continha as sugestões da União Matemática Italiana sobre a preparação dos estudantes no acesso às Faculdades Científicas, mais precisamente a uma licenciatura com elevados conteúdos matemáticos. Selecionou 5 temas e dentro de cada tema separou o “saber” do “saber fazer”. O quinto tema é “Sucessões e Funções numéricas” e no “saber fazer” inclui “Saber interpretar o gráfico de uma função: reconhecer do desenho os intervalos onde a função cresce ou decresce e onde assume valores positivos ou negativos; individualizar os pontos de máximo ou de mínimo; reconhecer eventuais simetrias

¹Cito por exemplo, o estudo em curso da EMS-Sociedade Europeia de Matemática, intitulado “secondary-tertiary transition (STT)” que pode ser visto em <http://euro-math-soc.eu/sites/default/files/STT-survey-%2015-02-2019.pdf>

²Com um trabalho escrito por 4 autores de 4 países diferentes: Guzman (Espanha), Hodgson (Canadá), Robert (França), e Villani (Itália).

³Neste texto não me irei referir às áreas fora das Ciências e Tecnologias, mas muito haveria a dizer sobre as outras áreas onde uma formação mínima como a da atual disciplina de “Matemática Aplicada às Ciências Sociais” deveria ser considerada. Ver Carvalho e Silva, J. (2018).

(funções pares, funções ímpares e funções periódicas)". Mas não inclui o Cálculo Diferencial e Integral por considerar que ele é desenvolvido de maneira aprofundada e detalhada nas disciplinas básicas do Ensino Superior⁴.

Michèle Artigue (2004) chama a atenção para a dificuldade da transição para o ensino superior como um problema de *transição entre culturas*, tanto ao nível da *abordagem dos conteúdos* como ao nível do *tipo de trabalho com a Matemática*.

Os australianos Poladian e Nicholas (2013) enfatizam a importância da comunicação entre as universidades e os seus futuros alunos, no que diz respeito aos conteúdos e ao nível adequado que o aluno deve ter ao entrar no Ensino Superior. Para tentar responder a este problema, participei no projeto da Universidade de Coimbra intitulado ReM@t e que pretende "mostrar como o Ensino à Distância fornece uma ferramenta adequada para atender às dificuldades na Aprendizagem da Matemática na transição Secundário-Superior a públicos muito diversificados". Tal é feito através da disponibilização de um site que pode ser acedido aqui: <http://www.ucd.uc.pt/remat/>

Neste texto vou analisar sucintamente as propostas de Inês Gomes Chacon⁵ quanto ao que chama "atitudes matemáticas" que entende serem necessárias para a transição do "bachillerato"⁶ à Universidade.

1. Aquisição de uma atitude inicial adequada

Neste item refere a confiança, tranquilidade, motivação e disposição para aprender, curiosidade, gosto pelo desafio, crenças positivas em relação à Matemática e à sua aprendizagem. Se terminássemos neste primeiro item já teríamos uma tarefa enorme pela frente.

2. Aquisição de atitudes em relação à Matemática

Neste item refere a necessidade de uma atitude positiva em relação à Matemática e ao enfrentamento de tarefas complexas e que o estudante deve estar imbuído de hábitos e atitudes matemáticas. Isto vai ao encontro do que preconizava Sebastião e Silva (1914-1972): "Os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação. Intuição, experiência, lógica indutiva, lógica dedutiva - todos estes meios se alternam constantemente na investigação científica, numa cadeia sem fim em que é difícil destrinçar uns dos outros."⁷

3. Aprendizagem de processos e estratégias de pensamento para enfrentar um problema

Esta é uma proposta clássica, com excelentes contributos na literatura de George Polya, Miguel de Guzman e Alan

Schoenfeld. Sem uma boa experiência da heurística da resolução de problemas de Matemática não poderemos esperar que os estudantes tenham a autonomia necessária para enfrentar problemas não rotineiros.

4. Estruturação dos conhecimentos em redor dos temas específicos escolhidos

Este é um ponto que só pode parecer consensual se considerarmos os temas que nos últimos 50 anos têm sido incluídos nos programas oficiais em Portugal. Por exemplo, a nível internacional são levantadas muitas questões sobre o âmbito do estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino secundário. Se nuns países apenas se estuda a álgebra das Funções, noutros países o estudo inclui séries numéricas e de potências e equações diferenciais. Qual o peso que devem ter áreas como as Probabilidades e a Estatística, a Programação e outros temas de Matemática Discreta? Já para nem falar no estudo da Geometria numa época em que os aspetos dinâmicos dominam... Este tema não é claramente consensual.

Os temas matemáticos que convirá considerar para as diversas vias do ensino secundário ou superior deveriam merecer profunda reflexão. O matemático Keith Devlin escreveu mesmo que todos os métodos matemáticos que aprendeu nos seus estudos universitários se tornaram obsoletos durante a sua vida. Num mundo com mudanças tão aceleradas, a escolha dos temas matemáticos não pode ser feita de forma cega ou dependendo apenas da tradição.

Neste contexto, é interessante confrontar com as indicações presentes nos programas atuais do final do Ensino Secundário de Singapura. A chamada Matemática Pré-Universitária está dividida em quatro vias: H1 Matemática, H2 Matemática, H2 Matemática Avançada e H3 Matemática. A primeira é destinada aos estudantes que pretendem seguir na universidade cursos nas áreas de Gestão e Ciências Sociais. A segunda aos estudantes que pretendem seguir cursos de áreas tais como matemática, ciências, engenharia e cursos relacionados, onde uma boa base de matemática é requerida. A terceira para estudantes que se pretendem especializar em matemática, ciências, engenharia ou disciplinas com grande necessidade de aptidões (*skills*) matemáticas. A quarta para estudantes que pretendem seguir a carreira matemática.

A tabela apresentada neste artigo resume os temas incluídos em cada uma destas quatro disciplinas.

Em todos estes programas de Singapura aparecem Princípios Pedagógicos a serem contempladas no ensino e aprendizagem. São eles:

1. O ensino é para a aprendizagem; a aprendizagem é para a compreensão; a compreensão é para raciocinar e aplicar e, em última análise, resolver problemas.

⁴Unione Matematica Italiana, SYLLABUS DI MATEMATICA, 1999, p. 13.

⁵Contidas no seu artigo publicado em Educación Matemática, vol. 21, núm. 3, diciembre de 2009, p. 5-32.

⁶ Final do Ensino Secundário em Espanha.

⁷Sebastião e Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (2.º e 3.º vol). 1965-66, Lisboa: Min. Educação/OCDE

H1 Matemática	Funções e Gráficos	Funções exponenciais e logarítmicas; equações quadráticas e desigualdades; métodos gráficos e uso de calculadora
	Cálculo Diferencial e Integral	Derivadas, máximos e mínimos, primitivas elementares, integral definido e áreas
	Probabilidades e Estatística	Probabilidades e cálculo combinatório; distribuição normal e binomial; amostragem; Testes de hipóteses; correlação e regressão linear
H2 Matemática	Funções e Gráficos	Funções inversas e compostas; transformações de gráficos; equações e inequações; métodos gráficos e uso de calculadora
	Sucessões e séries	Progressões aritméticas e geométricas; soma dos termos e generalização
	Vetores	Vetores em 2 e 3 dimensões; produto escalar e vetorial; equações de retas e planos
	Introdução aos números complexos	Forma algébrica e fórmula trigonométrica; operações algébricas
	Cálculo Diferencial e Integral	Derivadas, máximos e mínimos, séries de MacLaurin; primitivas por partes e substituição, integral definido e áreas; equações diferenciais elementares
	Probabilidades e Estatística	Probabilidades e cálculo combinatório; Variáveis aleatórias discretas; distribuição normal; Amostragem; Testes de hipóteses; correlação e regressão linear
H2 Matemática Avançada (inclui H2 Matemática)	Álgebra e Cálculo	Indução Matemática; números complexos, lugares geométricos e fórmula de De Moivre; curvas em coordenadas polares e cónicas; áreas, volumes, comprimentos de curvas usando integrais definidos; equações diferenciais de 1.ª e 2.ª ordem
	Matemática Discreta, Matrizes e Métodos Numéricos	Relações de recorrência; matrizes e espaços vetoriais; determinantes até 3x3, independência linear, bases e dimensão, valores próprios e diagonalização; métodos numéricos para equações, cálculo de integrais e aproximação de soluções de equações diferenciais
	Probabilidades e Estatística	Distribuição de Poisson, Variáveis aleatórias contínuas, Testes de hipóteses e intervalos de confiança; testes não paramétricos
H3 Matemática (inclui H2 Matemática)	Comunicar ideias matemáticas usando linguagem matemática	Lógica e teoria de conjuntos
	Desenvolver e avaliar criticamente argumentos matemáticos usando os princípios do raciocínio matemático, incluindo métodos de demonstração	Demonstração pelo método de indução matemática, contraexemplos, princípio da gaiola de pombos, princípio da simetria
	Resolver problemas matemáticos usando heurísticas de resolução e problemas	Método analítico, resolver um problema similar, mais simples, separar em casos diferentes, reformular o problema

2. O ensino deve partir dos conhecimentos pré-requisitos dos tópicos; tomar consciência dos interesses e experiências dos estudantes; e empenhá-los numa aprendizagem ativa e refletiva.

3. O ensino deve ligar a aprendizagem ao mundo real, abraçar a tecnologia e enfatizar as competências do século XXI.

E efetivamente os documentos concretizam muitas destas ideias. Por exemplo, no que diz respeito à ligação ao mundo real, aparecem listas explícitas não exaustivas em todos os programas sobre os temas que podem ser tratados, tais como: crescimento populacional, matemática financeira, ótica, circuitos elétricos, motores de pesquisa, criptografia, música digital, investigação clínica ou pesquisas de mercado.

Todos estes programas estão alinhados com as *Competências para o Século XXI* oficialmente definidas. Pretende-se que os estudantes pensem criticamente e de maneira inventiva e comuniquem e expliquem os seus raciocínios eficazmente quando resolvem problemas e não se limitem a recordar fórmulas e procedimentos e a efetuar cálculos. Além disso, os textos oficiais enfatizam que a exposição dos estudantes às aplicações e modelação matemática melhora a sua compreensão e a sua

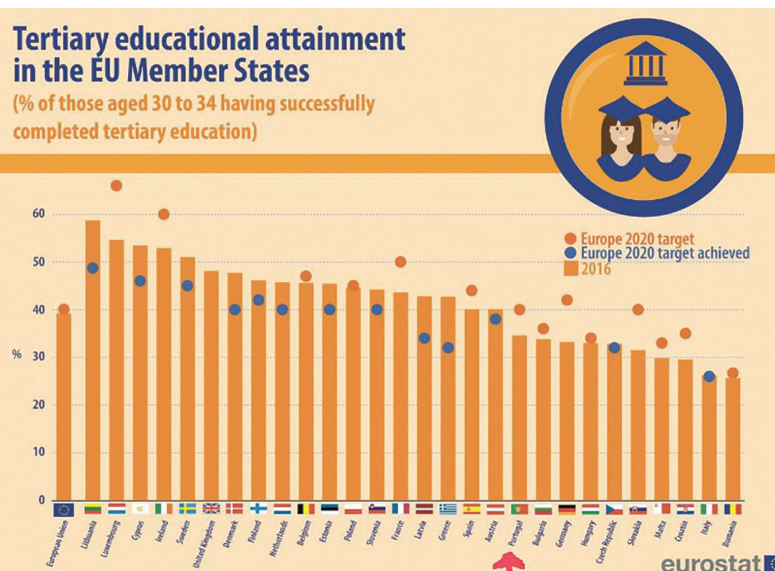
valorização da matemática. O Enquadramento Matemático (*Mathematics Framework*) indica que o foco central do Currículo é a Resolução de Problemas de Matemática, ou seja, usar a Matemática para resolver problemas.

Será esta a chave para uma boa preparação para o Ensino Superior? É pelo menos um modelo diferente do nosso que convém estudar com atenção.

Nota final: em Portugal há menos estudantes a completar o ensino secundário do que na média dos países europeus e há muito menos estudantes (com a idade entre 30 e 34 anos) a conseguir concluir o Ensino Superior.

Temos pois de investir muito na transição entre o secundário e o superior, mas igualmente tanto no ensino secundário como no próprio ensino superior.

Enquanto docente de Matemática do Ensino Secundário sente, efetivamente, que existe alguma falta de identidade deste ciclo de ensino face à eventual dependência relativamente ao Ensino Superior? Esta (des)conexão leva a que os alunos estejam mais preocupados em serem bem preparados para os exames nacionais de acesso ao Ensino



Superior e menos preocupados em aprenderem Matemática com significado, ou ambos os aspetos têm possibilidade de coexistir? (Teresa Moreira)

Não me parece que a “dependência” do secundário relativamente ao ensino superior tenha forçosamente que implicar a perda de identidade deste nível de ensino...

De facto, com o alargamento da escolaridade obrigatória para 12 anos de escolaridade, deixou de haver um espaço “temporal” entre o secundário e o superior mas, para mim, esta colagem perspectivava não só um maior nível de escolarização para todos, como também a possibilidade para a generalidade dos jovens não “esgotar” o seu percurso formativo no 12.º ano. No entanto, esse alargamento foi efetivado, em 2012, por Decreto Lei, sem qualquer avaliação das suas consequências, nem eventuais medidas de reformulação ou de adaptação essenciais para que não estivéssemos, passados 6 anos, a viver a situação atual que, esta mesa intitulou de “desconexão” entre os dois níveis de ensino.

Franco de Oliveira numa comunicação partilhada nas Jornadas do Departamento de Matemática da Universidade de Évora, a 3 de Julho de 2019, sobre o tema *Matemática e seu ensino, que futuro?*, referiu Keith Devlin, num livro publicado em 1997. Nesse livro, Devlin defende algumas teses sobre a matemática e o seu ensino no futuro. Como explica Franco de Oliveira, Devlin é um lógico, matemático e investigador no Instituto Avançado das Ciências e Tecnologias Humanas da Universidade de Stanford. Investiga o uso de diferentes meios para ensinar e comunicar a matemática para diversos públicos e fundou e chefia uma empresa de tecnologia educacional chamada BrainQuake, que projeta e constrói jogos de vídeo para aprendizagem da matemática.

A primeira tese defendida por Devlin intitula-se: Uma “nova era” na matemática e consequências para o ensino da matemática.

Até ao final do séc. XIX, e bem dentro do séc. XX, a matemática significava, para a maioria das pessoas, aplicar técnicas *standard* para resolver problemas bem definidos com respostas certas. Mas com o desenvolvimento da ciência e tecnologia nas últimas décadas, a necessidade de matemática começou a mudar. Com computadores omnipresentes que podem tornar toda a matemática processual mais rápida e precisa do que qualquer ser humano, ninguém que queira, ou queira manter, um bom emprego pode agora ignorar essa mudança da antiga “aplicação de procedimentos conhecidos” para nova ênfase na resolução criativa de problemas. Qual o significado disto para a educação matemática? Se, durante séculos, aprender matemática era aprender a dominar uma coleção de procedimentos *standard* para resolver problemas bem definidos que tivessem respostas certas, os livros de matemática, por sua vez, eram essencialmente livros de receitas. Atualmente, todas aquelas receitas de matemática foram codificadas em dispositivos, alguns dos quais transportamos nos nossos bolsos. De repente, numa única geração, o domínio das competências matemáticas processuais que prevaleceram durante três mil anos tornou-se irrelevante. Os alunos já não precisam de treinar para fazer cálculos longos: o que eles (nós) precisamos no mundo de hoje é uma compreensão mais profunda de como e porque funciona a aritmética indo-árabe. (Oliveira, 2019, p. 2)

À luz desta leitura e para responder à segunda parte da questão que o Paulo colocou com ênfase nos alunos, eu só consigo, como professora do secundário, lançar novas questões:

- O que é aprender com significado nos dias de hoje?
- Conseguirei eu, professora, potenciar os atuais programas e metas de Matemática A para uma aprendizagem com significado?
- Será que o ensino superior constitui uma continuidade deste tipo de aprendizagens?
- Não estarei eu, professora, em nome do desenvolvimento de outro tipo de aprendizagens a “condenar” o prosseguimento de estudos dos meus alunos uma vez que o acesso ao ensino superior depende quase exclusivamente do resultado obtido num exame nacional que assenta (dando cumprimento ao estabelecido nos Programas e Metas) fundamentalmente no domínio dos procedimentos – as tais “receitas” que Keith referia? Será que são os professores do secundário os verdadeiros “reféns” da atual política de acesso ao ensino superior?

Acresce ainda, legitimamente, as expetativas dos alunos, dos pais, da escola e da sociedade em geral. O nosso dilema hoje, parece-me que, é precisamente conciliar todas estas opções, sem prejuízo de qualquer aluno independentemente do seu percurso formativo.

Será que as alterações introduzidas pelos DL n.º 54 (inclusão) e n.º 55 (autonomia e flexibilidade) irão permitir eliminar ou

reduzir algumas das (des)conexões referidas? Está o Ensino Secundário e a Matemática, em particular, a dar resposta a que se pretende com estes dois documentos legais? (Teresa Moreira)

Vou começar por acrescentar aos dois documentos referidos, o Perfil do Aluno à saída da Escolaridade Obrigatória e citar novamente a tal comunicação de Franco de Oliveira relativamente a outra tese que Devlin apresentou sobre o ensino da Matemática:

- A aula de matemática de ontem não irá prepará-lo para os trabalhos de amanhã.
- Apesar de muitas estatísticas mostrarem que as competências CTEM (Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática) ainda têm grande procura e, certamente, um curso de matemática ainda ser bom para a colocação profissional, a competência que está hoje em grande demanda e continuará a crescer, é a capacidade de, perante um novo problema, possivelmente não bem definido, e provavelmente sem uma resposta única “certa”, progredir nele, em alguns casos (mas não todos!) “resolvê-lo” (o que quer que isto signifique). Os problemas de que precisamos hoje para a matemática surgem num contexto confuso do mundo real, e parte do progresso é descobrir exatamente o que é preciso nesse contexto. (p. 2)

A propósito de um dos cursos livres sobre *Pensamento matemático* da responsabilidade de Devlin, Franco de Oliveira comenta ainda:

A matemática escolar concentra-se geralmente em aprender procedimentos para resolver problemas estereotipados. Os matemáticos profissionais pensam em maneiras de resolver problemas reais, problemas que podem surgir do mundo quotidiano, da ciência ou da própria matemática. A chave para o sucesso na matemática escolar é aprender a “pensar dentro da caixa”. Em contraste, uma característica fundamental do pensamento matemático é “pensar fora da caixa” - uma competência valiosa no mundo atual. (p. 2)

Ora, o *Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória*, parece ser uma tentativa de mudança de rumo numa direção futurista e preparatória do futuro dos nossos alunos. No entanto, quer o DL 55, quer o DL 54, ficam muito aquém do necessário para ser possível a concretização desta intenção. No caso específico da Matemática A, é positiva e importante, no DL 55, a introdução das AE. No entanto, defini-las como baseadas nos atuais *Programas e Metas* e sem qualquer alteração ao nível da avaliação externa é inevitavelmente reduzir os professores e as escolas à opção pela continuidade dos modelos de ensino-aprendizagem já estabelecidos. Algumas das atuais opções a este nível constituem inclusivamente um retrocesso como têm sido as opções relativamente à utilização da tecnologia, que se refletem não só na existência de 2 cadernos no exame nacional, mas também no *reset* da informação pessoal do aluno

– do aluno mais carenciado ainda por cima... mas não se esgota na tecnologia, será que a valorização das questões de escolha múltipla (em nome da equidade...) permitem o desenvolver das tais outras competências?

O DL 54, ao colocar dentro da sala de aula e fazendo depender das medidas a adotar por cada professor a recuperação dos alunos com necessidades educativas especiais, não criando quaisquer condições para tal e mais uma vez não havendo qualquer reflexo das medidas de recuperação na avaliação externa é mais um indicador de que não há “vontade política” para a mudança. Lá terão, novamente, que ser os professores a “fazer o pino” e, façam-no ou não, serão os únicos responsáveis pelo insucesso dos alunos.

A eventual abolição dos exames no final do Ensino Secundário: que vantagens e desvantagens para a componente das aprendizagens dos estudantes e para a sua formação global? (Teresa Moreira)

Custa-me discutir a questão em termos de vantagens/desvantagens...

Quero acreditar que o que contribui para a formação dos alunos são mais as aprendizagens que desenvolve ao longo dos 12 anos de escolaridade do que as horas de preparação para o exame nacional... Apesar de haver um claro desequilíbrio no peso dado a cada uma das partes – 70% para 30%. Os exames nacionais do ensino secundário assumem-se como certificadores de um final de ciclo – objetivo pouco claro uma vez que dois dos quatro exames se realizam no 11.º ano... Assim sendo, não têm um reflexo direto nas aprendizagens dos alunos como tem a avaliação interna, seja formativa ou sumativa. Para que servem, então, os exames nacionais?

Eu, pessoalmente, considero que atualmente os exames nacionais existem por dois motivos: por um lado, o sistema educativo não confia nos professores e nas escolas e, por outro, esse mesmo sistema tem uma cada vez mais forte necessidade de seriar o desempenho dos alunos através de uma classificação de 0 a 20. Estamos atualmente a desenvolver nos alunos um espírito altamente competitivo, por um lugar ou por uma nota, que se reflete num sistema educativo que impõe a clara separação entre aqueles que podem chegar ao topo da escala (e entrar, por exemplo, em Medicina, Arquitetura ou em Engenharia no Instituto Superior Técnico...) e aqueles que, se se esforçarem muito, muito, poderão alguns deles, uma minoria, desejavelmente, talvez, prosseguir os seus estudos num politécnico... Afinal que Educação para a Cidadania temos nós?

Referências

Oliveira, A. J. F. (2019, julho). *Matemática e seu ensino, que futuro?* Comunicação apresentada nas Jornadas do Departamento de Matemática da Universidade de Évora.

Matemáticas na Raia 2019

CLÁUDIA CAMPOS
ORQUÍDEA SANTOS

Matemáticas na Raia é um concurso de resolução de problemas por turmas que se realiza na Galiza e na Região Norte de Portugal, organizado conjuntamente pela Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA) e a Associação de Professores de Matemática (APM) de Portugal. Este concurso tem caráter anual e participam turmas (completas ou com pelo menos 75% dos alunos da turma) do 9º ano da região norte de Portugal e da Galiza. A prova consiste em resolver numa hora e meia cinco problemas, no mesmo dia à mesma hora e com o mesmo enunciado na Galiza e em Portugal. Os vencedores, jovens dos dois lados da fronteira, desfrutam de um fim-de-semana lúdico, em Tui ou no Norte de Portugal, em que realizam atividades lúdico-festivas, onde os alunos portugueses e galegos confraternizam, realizam passeios turísticos, competições diversificadas e amistosas partilhando conhecimentos e experiências.

Este ano realizou-se a quinta edição do concurso Matemáticas na Raia e o prémio foi atribuído, no fim-de-semana de 25 e 26 de maio, à turma A do 9.º ano da Escola Básica de Arões - Santa Cristina, Agrupamento de Escolas de Fafe.

A FILOSOFIA DO CONCURSO

Os educadores cada vez mais procuram substituir o ensino tradicional assente na resolução de exercícios mecanizados por um ensino mais exploratório, mais prático e a participação no Concurso Matemáticas na Raia representa uma oportunidade para se aprender de forma diferente.

Numa sociedade em constante evolução pretende-se aproximar o ensino aos seus alunos e colocar o professor como orquestrador de saberes e já não tanto como transmissor ou o detentor do conhecimento. Stein, Engle, Smith e Hughes (citado por Baía, 2013) afirmam que o professor passou a ser engenheiro de ambientes de aprendizagem em que os alunos, através da resolução de problemas, constroem o seu próprio conhecimento.

A participação no concurso Matemáticas na Raia articula a resolução de problemas com o trabalho colaborativo do grupo e da turma. Na escola e dentro da sala de aula ainda se estimula, por vezes, os saberes individuais e existe competitividade entre alunos. O objetivo neste concurso é trabalhar de forma oposta, aceitando e aproveitando as diferenças dos intervenientes,

estimulando a qualidade e a criatividade de cada indivíduo dentro do grupo e promovendo atitudes mais favoráveis face à matemática.

Com este concurso, os alunos desenvolveram capacidades transversais tais como: liderança, cultura de liberdade, participação, reflexão, atitudes de responsabilização pessoal e social, valorização do debate como meio adequado à resolução de problemas, confrontação de ideias, apresentação de críticas, participação cívica e cooperação, que podem ser determinantes para a sua adaptabilidade e sucesso no ensino secundário, superior e/ou integração no mercado de trabalho.

Doyle (citado por Silva, 2012), afirma que as tarefas usadas na sala de aula são a base de toda a aprendizagem e aspetos como a seleção e a metodologia escolhida para a realização das tarefas, os ambientes de aprendizagem, a comunicação matemática na sala de aula e o modo como os alunos participam na aula de Matemática têm grandes implicações para a natureza do conhecimento que os alunos produzem.

Segundo Silva (2012), o insucesso na resolução de problemas por parte dos alunos decorre não só da falta de conhecimentos matemáticos, mas também do desconhecimento sobre como aplicar esses mesmos conhecimentos. Acrescenta que, o conhecimento de estratégias de resolução entre os vários elementos do grupo de trabalho constitui uma ajuda válida na organização do pensamento individual e, consequentemente, na procura da resolução e exploração dos problemas apresentados. Num contexto de matemática escolar, a resolução de problemas é um processo onde se combinam vários elementos, tais como: a organização de informação, o conhecimento de estratégias, as diferentes formas de representação, a tradução de linguagens, a aplicação de vários conhecimentos, a tomada de decisões e a interpretação da solução obtida. Segundo a autora, o ensino que envolve uma forte componente de resolução de problemas está a permitir formar alunos que analisem, dominem e controlem o seu conhecimento e adquiram algo novo.

Ao juntar-se a realização de problemas com a cooperação de todos os elementos da turma caminha-se no sentido de promover as *Soft Skills* tão procuradas pelos empregadores do século XXI: Resolução de Problemas Complexos; Pensamento Crítico; Criatividade; Gestão de Pessoas; Coordenação com Outros;

Inteligência Emocional; Tomada de Decisão; Orientação para Servir; Negociação e Flexibilidade Cognitiva.

Baía (2013) refere vários estudos realizados na área do ensino (Freeman; Johnson & Johnson; Slavin; Johnson et al.) que evidenciam que a aprendizagem cooperativa favorece consideravelmente a melhoria do rendimento escolar e o desenvolvimento de competências sociais dos alunos. O trabalho em grupo é visto como uma das estratégias de ensino que estimula a interação social, uma vez que promove a igualdade de oportunidades, a responsabilidade, a cooperação e autonomia em sincronia com os diferentes conteúdos programáticos (Aguado, citado por Baía, 2013).

Existem estudos que afirmam que o trabalho em grupo de estudantes promove competências essenciais. Por exemplo, Francisco (citado por Matias, 2015) concluiu que o trabalho cooperativo promove nos alunos uma melhor compreensão matemática e acredita que se os alunos trabalharem juntos, numa mesma ideia, aprendem mais. Segundo Colaço (citado por Damiani, 2008), os benefícios das atividades em grupo entre estudantes são essencialmente três: a socialização, o controlo de impulsos agressivos, a adaptação às normas estabelecidas e superação do egocentrismo; a aquisição de aptidões e habilidades e o aumento do nível de aspiração escolar.

No trabalho em grupo, os alunos avaliam a forma como argumentam e criam oportunidades de construir ideias mais sólidas baseadas nas ideias primárias dos seus colegas.

PARTICIPAÇÃO NO CONCURSO

No início do ano, aquando da elaboração do Plano Anual de Atividades, são escolhidas as atividades em que a comunidade escolar participará. No ano que agora finda, no Agrupamento de Escolas de Fafe, o grupo disciplinar de matemática escolheu participar, tal como já tinha feito em anos anteriores, no Concurso Matemáticas na Raia. Porquê? Na escolha deste concurso, além dos aspetos anteriormente referidos, foi decisivo o facto de toda a turma participar. Tem a característica de se focar na realização de problemas que envolve todos os elementos de uma turma e não somente aqueles que habilmente o conseguem realizar e que já são conhecidos no meio escolar por essa destreza.

No Agrupamento de Escolas de Fafe participaram as três turmas do 9.º ano. Antes do dia de realização da prova, a professora titular de cada turma ajudou a formar grupos de 4 ou 5 elementos. Os grupos foram constituídos da seguinte forma: a professora escolhia quatro ou cinco elementos líderes da turma que depois, alternadamente, escolheriam os seus companheiros. Formavam-se grupos homogêneos, escolhidos pelos colegas entre si.

No dia da prova, cada turma estava numa sala preparada para o efeito e o professor, responsável por vigiar a turma, distribuía os problemas de forma aleatória pelos diferentes grupos. A sala

de aula foi organizada de forma a que os grupos se sentassem em volta das mesas e pudessem ler e discutir o problema e as suas possíveis abordagens, mas também olharem-se. Todos os elementos davam as suas opiniões que eram validadas pelo líder do grupo. Em cada grupo experimentaram-se vários caminhos para a resolução dos diferentes problemas, havendo a necessidade acrescida de gerir o tempo. Após a resolução do problema, os primeiros grupos a terminarem a sua resolução trocavam de forma a validarem as respostas dadas pelo grupo vizinho. No final, um aluno lia e aprovava todas as resoluções e dois alunos, escolhidos para o efeito, faziam a compilação das resoluções nas folhas brancas de forma organizada.

Durante a atividade, os alunos mostraram-se envolvidos, empenhados e entusiasmados, até porque a vitória seria uma viagem de sonho que gostariam de ter e não tiveram. Assim, este concurso representava também a oportunidade de sair em visita de estudo, por dois dias, com todos os alunos da turma, visita essa que sempre aspiraram a ter no 9.º ano e que este ano não se concretizou. Enquanto aguardavam os resultados do concurso, questionavam constantemente o professor responsável se já sabia dos resultados expansivamente.

Quando finalmente chegou a notícia de que a turma A tinha ganho o concurso foi uma loucura. Todos ficaram eufóricos, começaram cedo a fantasiar e a pensar no que levar para a viagem. Houve nitidamente uma turma antes e depois de vencerem o concurso. As aulas de matemática ganharam outro encanto, outra energia, outra predisposição para as aprendizagens e outra vontade de reprimir as fraquezas.

Finalmente chegou o fim-de-semana tão aguardado. Os alunos demonstraram uma abertura para participarem nas atividades planeadas e gostaram de trabalhar e de conviver com os colegas Galegos.

Nestas jornadas, realizaram diferentes atividades como: jogos desportivos, Gincana Matemática que incluiu um peddy-paper pelo centro histórico de Tui; jogos de estratégias com equipas mistas (portugueses e espanhóis); passeio turístico na fronteira entre Tui e Valença; um grandioso espetáculo de magia e a descida do rio Minho em caiaque.

Os vinte e dois jovens portugueses e os dezassete espanhóis apreciaram o convívio, partilharam saberes e construíram laços de amizade, sem dúvida uma mais-valia na formação cultural, histórica e matemática destes alunos.

ATIVIDADES REALIZADAS

Do programa preparado pelos colegas do país vizinho, destacamos três atividades que nos chamaram a atenção: a construção das cúpulas de Leonardo, o Roteiro Matemático pela cidade de Tui e o Concurso de jogos matemáticos.

A CÚPULA DE LEONARDO

A construção da cúpula é uma atividade baseada na proposta educacional desenvolvida pelo Museu de Matemáticas da Catalunha (MMACA). Segundo Enric Brasó, responsável do museu, as construções cujos elementos de suporte são mantidos com encaixes são atribuídas a Leonardo da Vinci e os primeiros esquemas dessas estruturas estão representadas nas páginas 899 e 890 do seu Codex Atlanticus. Geometricamente, essas estruturas são padrões planos. O Museu propõe uma experiência didática com a utilização de um material, o Leonardome (figura 1), material que os nossos alunos puderam experimentar (consultar <http://www.leonardome.com/es/>).

Utilizando apenas peças de 50 cm em madeira, todas de igual formato, podem-se construir diferentes modelos de cúpulas gigantes, com cerca de 3 a 4 metros de diâmetro, que se mantêm graças aos encaixes das peças umas nas outras.



Figura 1

Podemos idealizar as peças como segmentos iguais com 4 pontos de união equidistante. Esses pontos são de dois tipos: aqueles localizados nas extremidades, que o autor chama de “S”, pois estão localizados no topo; e os centrais, que chama de “I”, por estarem sempre na parte inferior das articulações. Nesses padrões os vértices nunca coincidem (figura 2). A curvatura da estrutura é alcançada pela diferente altura dos encaixes. Se os encaixes fossem colocados no mesmo nível, a estrutura seria absolutamente plana. Para levantar as cúpulas, também é necessário que os pontos S e I tenham uma margem de alguns milímetros. Segundo o autor, os polígonos lado a lado não são absolutamente regulares. Para o posicionamento dos segmentos, S-I-I-S, as extremidades do segmento repousam nos dois pontos centrais de outro segmento, como se pode verificar na imagem (figura 2). A construção de cúpulas é apenas uma das coisas que se podem fazer com estas peças.

As cúpulas feitas com os 9 padrões da figura têm pouca curvatura, deste modo a sua realização é viável. No entanto, eles não são extensíveis indefinidamente, uma vez que são figuras planas. As peças chegam a um momento e não se encaixam e, quando o posicionamento é forçado, por um lado, são libertados por outro. Para obter uma cúpula sem essas limitações, é necessário recorrer a mosaicos da superfície esférica.

Las estructuras autosostenibles de Leonardo

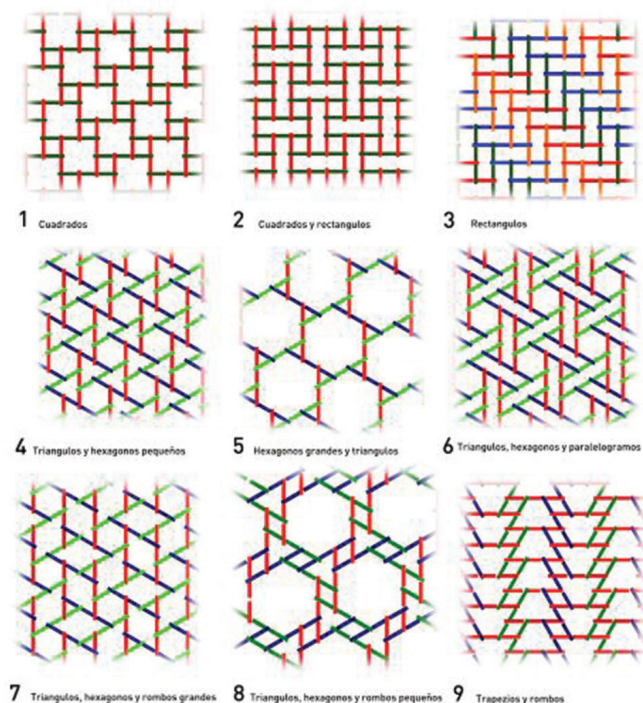


Figura 2

A construção desta estrutura representou um momento de trabalho cooperativo, de imaginação espacial e de construção de um padrão. Foi um bom exercício para praticar as habilidades espaciais e cooperativas e exigiu a coordenação de todos os participantes (figura 3).



Figura 3

ROTEIRO MATEMÁTICO

Os alunos, agrupados em equipes, foram percorrer o centro histórico de Tui e ao mesmo tempo realizar atividades matemáticas partilhando saberes e experiências. Das atividades propostas, os alunos demonstraram bastante entusiasmo particularmente em duas: “Contar por estimativa o número de pedras que formam a muralha” e “Medir a altura da arcada da catedral com recurso a um espelho”. O material que tinham disponível para realizar a atividade era papel, lápis, borracha e uma fita métrica pequena.

Na primeira atividade, contar o número de pedras que formam a muralha (figura 4), os grupos de alunos, na sua maioria, optaram por medir a sua passada para assim encontrarem o comprimento da muralha.



Figura 4

Um aluno media a sua passada, contava o número de passos de uma extremidade à outra da muralha e multiplicava o número de passos pelo comprimento da sua passada. Descobriam, dessa forma, o comprimento da muralha. Para a altura contaram por quantas filas era constituída a muralha, mediram uma pedra e multiplicaram o número de filas e a altura de uma pedra da muralha. Já tinham as medidas do comprimento e da altura da muralha, determinaram a área. Seguidamente, escolheram uma pedra modelo e determinaram a sua área. Depois de calcularem a área de uma pedra e a área do painel que representa a parede da muralha, dividiram e chegaram a um valor aproximado para o número de pedras que formam a muralha.

Houve um grupo que, para determinar a área da muralha, tentou utilizar a semelhança de triângulos, utilizando a medida do lápis (olhava pelo lápis e afastava-se da muralha até o seu lápis medir o comprimento da muralha) mas como havia inclinação do terreno, não prosseguiu com essa estratégia.

Na segunda atividade, medir a altura da arcada da catedral com recurso a um espelho (figura 5), os alunos não conheciam esse método e acharam muito divertido utilizarem a semelhança de triângulos para determinar alturas inacessíveis. O espelho estava

colocado no chão, um aluno do grupo tentava encontrar o vértice da arcada na imagem refletida no espelho os restantes alunos mediam a distância da arcada ao espelho e do espelho ao seu companheiro. Sabendo a altura do aluno escolhido, realizaram a proporção que lhes devolia o resultado da medida desejada. Alguns grupos não utilizaram a unidade de comprimento correta, misturando centímetros e metros nas diferentes proporções, pelo que obtiveram resultados estranhos, os quais os deixavam a pensar na fiabilidade do método e não na obtenção errada das medidas e das unidades utilizadas.

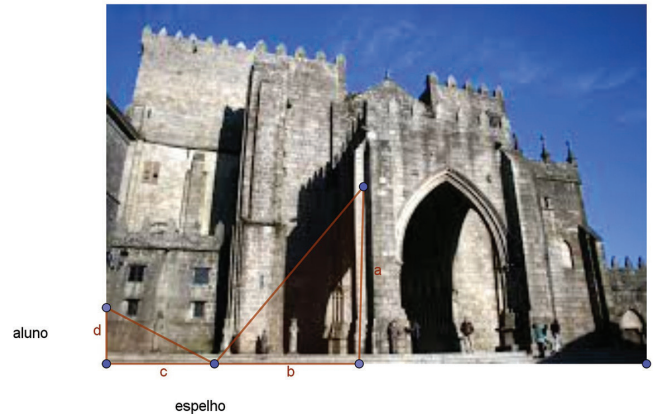


Figura 5

$$\frac{\text{altura da arcada}}{\text{altura do aluno}} = \frac{\text{distância da arcada ao espelho}}{\text{distância do espelho ao aluno}}$$



CONCURSO DE JOGOS MATEMÁTICOS

Depois de um belo passeio pelo rio Minho, a tarde de domingo foi passada no concurso de jogos matemáticos. Cada equipa teria de passar em 10 bancas onde lhes eram propostos desafios como a construção de pentaminós, o Cubo Soma, Cubos Rodantes (De Fernando Corbalán), Cubos diabólicos, entre outras. Os participantes obtinham pontos se realizassem corretamente a atividade. No final, ganharia a equipa que somasse mais pontos. Também nestas atividades os alunos demonstraram muita motivação e espírito competitivo, empenhando-se por realizá-las corretamente (figura 6).



Figura 6

Este concurso marca pela diferença. Ficam aqui alguns testemunhos da visita.

“Aquele fim-de-semana será inesquecível. O que mais me marcou foi sem dúvida o contacto entre duas culturas diferentes. Tive, também, oportunidade de aprender a fazer canoagem, nunca tinha feito mas adorei. Estou grata a todos que contribuíram para fazer deste fim-de-semana o melhor da minha vida, nunca irei esquecer tudo aquilo que vivi.”

Beatriz Lopes, nº3, 9ªA

“Gostei do convívio com alunos de outro país, alguns simpáticos outros envergonhados, gostei da canoagem. Matemática turística foi espetacular, andar nos monumentos a calcular a altura dos seus arcos e o melhor foi as equipas serem mistas (alunos portugueses e espanhóis).”

Miguel Teixeira, nº17, 9ªA

“Esta visita marcou sem dúvida a história da nossa turma. Nenhum ponto negativo me saltou à vista ao contrário dos positivos que foram milhares. Adorei a interação entre alunos de diferentes países e o ambiente em que estávamos. O que mais me marcou foi a oportunidade que me foi dada de fazer canoagem e de nadar em pleno rio, foi uma experiência que talvez nunca poderia ter feito. Este projeto foi ideal para nos chamar mais para o mundo matemático. Esta visita fez-me descobrir o quão divertido é a canoagem e descobrir também a cidade de Tui e a

linguagem galega. Tenho que dizer um grande obrigado a todos os envolventes (principalmente aos que nos acompanharam), a todos os alunos espanhóis que adorei conhecer e à minha turma, que fez esta viagem valer a pena.”

Beatriz Fernandes nº2, 9ªA

“Gostei muito da visita de estudo, o que mais gostei foi da canoagem foi uma coisa nova e divertida, acho que correu muito bem, o facto de juntar a matemática e os pontos turísticos da cidade. O local onde ficamos a dormir era muito acolhedor, confortável e a comida era boa. Foi muito engraçado com os espanhóis porque conhecemos gente nova.”

Ana Valentina Silva, nº6, 9ªA

Referências

- Damiani, M. F. (2008). Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. *Educar em Revista*, 31, 213?230. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=155014216012>
- Matias, A. F. (2015). *A Comunicação Matemática Escrita no 10.º Ano de Escolaridade em Contexto de Trabalho de Grupo*. (Dissertação de Mestrado). Universidade de Lisboa. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/22535>
- Silva, A. (2012). *Congresso Matemático: Uma experiência com alunos do 6.º ano do Ensino Básico*. (Relatório Final de Prática de Ensino Supervisionada). Instituto Politécnico de Viana do Castelo. Disponível em: <http://hdl.handle.net/20.500.11960/1594>
- Baía, I. M. S. (2013). *Percepção dos Professores de Matemática do Ensino Básico Acerca do Trabalho de Grupo na Sala de Aula*. (Dissertação de Mestrado). Instituto Politécnico de Bragança. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10198/15929>

CLÁUDIA CAMPOS

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE FAFE

ORQUÍDEA SANTOS

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE FAFE

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Translações e rotações de Fez

Esta tarefa consiste numa pequena investigação acerca da existência da propriedade comutativa entre isometrias planas.

Tendo em conta os atuais documentos curriculares em vigor, esta destina-se a alunos do oitavo ano de escolaridade. Tem como pressuposto que os alunos já tenham estudado a translação associada a um vetor.

Sugere-se que a tarefa seja realizada em pequenos ou grandes grupos, tendo em conta os níveis de dificuldade e abertura que esta possui.

Além do mais, a tarefa é um bom ponto de partida para uma colaboração interdisciplinar entre as disciplinas de História, Geografia e Matemática, tendo em conta o contexto em que se insere (história cultural e territorial árabe).

Para a realização desta tarefa, recomenda-se a utilização de material de medida e desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor).

JOÃO TERROSO

ESCOLA BÁSICA 2/3 DE CAMÕES

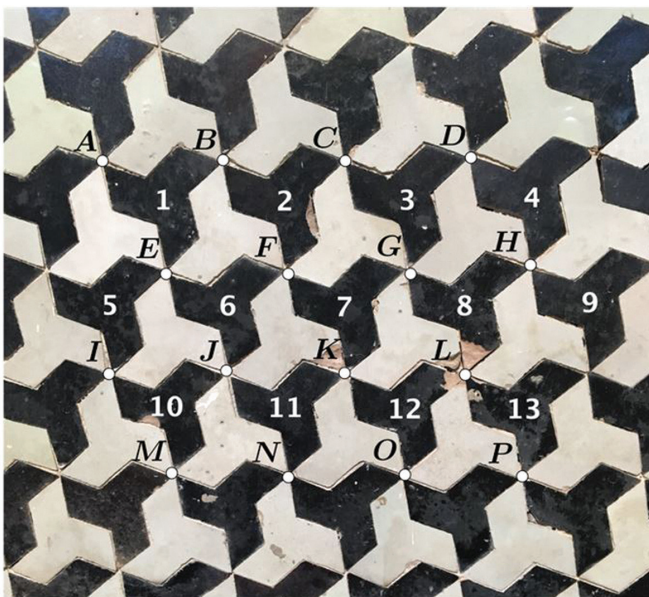
Translações e rotações de Fez

Fez é a segunda principal cidade do nordeste marroquino, muitas vezes denominada de capital cultural de Marrocos.

Um dos sítios de visita obrigatória de Fez é a sua Medina. Mantendo o traçado original, a Medina é constituída por milhares de ruas, conservando e preservando o ordenamento e organização do seu território original, datado do século XIII. Este bairro tipicamente muçulmano é Património Mundial da Unesco, desde 1981. Neste bairro, podemos ainda observar bonitas pavimentações muçulmanas, com características matemáticas particulares.



Observa a seguinte figura de uma pavimentação localizada numa das lojas de tecidos da cidade de Fez.



1. Identifica e caracteriza uma simetria de translação que poderemos observar nesta pavimentação, indicando o vetor associado.
2. Identifica e caracteriza uma simetria de rotação nesta pavimentação, indicando o centro, a amplitude e o sentido de rotação.
3. Considera a figura assinalada com 1.
 - 3.1. Qual o transformado da figura 1 pela rotação de centro E e amplitude de 120° no sentido negativo?
 - 3.2. Qual o transformado da figura que obtiveste em 3.1. pela translação associada ao vetor $\overline{FG}$?
4. Considera novamente a figura 1.
 - 4.1. Qual o transformado da figura 1 pela translação associada ao vetor $\overline{FG}$?
 - 4.2. Qual o transformado da figura que consideraste em 4.1. pela rotação de centro E e amplitude 120° no sentido negativo?
5. Repara que as isometrias realizadas em 3. e 4. são as mesmas, mas a sua ordem foi trocada. Será que a ordem pela qual as realizamos torna diferente o resultado final? Ou seja, será que a translação e a rotação usufruem da propriedade comutativa entre isometrias? Experimenta com outros casos para testares a tua conclusão.
6. Usando a pavimentação anterior, investiga se existe a propriedade comutativa entre duas translações. Faz o mesmo exercício para duas rotações.

Escreve uma pequena composição com as tuas conclusões.

Olhares sobre o ProfMat de Castelo Branco

Sempre chegamos ao sítio aonde nos esperam.

José Saramago (2008)



Este ano o nosso Encontro deslocou-se para o interior do país e, pela primeira vez, para Castelo Branco. Bem nos recordou a *Comissão* do ProfMat 2019 tratar-se de uma terra com nome lindo, tal como tantas “outras coisas”. Como não ficar encantado com “as suas colchas de linho em fio de seda bordadas”? Mas, mais importante, que dizer das suas gentes que tão bem nos acolheram na sua (nossa) casa? Com certeza que cada um e todos os participantes recordarão, com grande carinho e gratidão, a disponibilidade, o cuidado e a atenção dos colegas da Organização e de toda a comunidade da Escola Secundária Amato Lusitano.

No presente ano deixámos a época mais amena da Páscoa, como vinha sendo habitual, e experimentámos o período de julho, já em pleno verão. E, para surpresa de alguns, Castelo Branco revelou-se como uma terra com calor, muito calor! Mas o que poderia parecer uma condição adversa não limitou o entusiasmo e o empenho dos cerca de trezentos educadores e professores de Matemática, antes pelo contrário. É muito justo registar o elevado grau de participação em todas as sessões do programa, do primeiro ao último dia, notando-se um grande envolvimento de todos no desenvolvimento dos trabalhos. O bom e estimulante ambiente que se sentiu no Encontro e nos (re)encontros, também nos “intervalos para café” e no jantar, excelentemente geridos pela Organização, trouxe-nos à memória tempos passados no ProfMat, embora o número de participantes já não seja tão elevado como sucedia há uns anos atrás. Realçamos, também, o relevante número de colegas (mais) jovens, muitos presentes pela primeira vez, e de colegas que decidiram voltar e retomar a sua participação no ProfMat.

O Encontro manteve a boa prática do dia comum com o SIEM, Seminário de Investigação em Educação Matemática, potenciando um espaço de debate mais organizado entre o trabalho produzido por professores e o trabalho produzido por investigadores. O programa foi muito diversificado e centrado em quatro grandes temas atuais e presentes no dia-a-dia das escolas: *Flexibilidade curricular e aprendizagens essenciais*, *Raciocínio matemático*, *Tecnologia no ensino da matemática*, e *O professor e a aula de matemática*. Da iniciativa

da Comissão Organizadora e da Comissão do Programa, estes temas foram concretizados através de seis sessões plenárias (quatro conferências e dois painéis), dezanove conferências com discussão, quatro mesas redondas, duas oficinas de investigação sobre a prática e nove exposições, que permitiram aprofundar os temas em discussão sob diferentes perspetivas de análise. Importante para o enriquecimento desta discussão foram as sessões propostas pelos participantes que contribuíram com cinco sessões especiais, dezasseis comunicações orais e dezasseis sessões práticas, apresentando e refletindo sobre projetos e estudos em curso ou sobre práticas, estratégias e materiais desenvolvidos com os alunos.

Embora o Encontro tivesse sido enquadrado pelos quatro temas centrais, houve, naturalmente, possibilidade de apresentar e debater outros temas relevantes, como sejam a formação de professores, conhecimento e desenvolvimento profissional, a articulação entre ciclos de ensino, o ensino profissional, aspetos históricos relacionados com a Matemática, conexões de diferente natureza e práticas interdisciplinares, aspetos relacionados com o ensino e a aprendizagem de tópicos matemáticos, a resolução de problemas, formas de trabalho e estratégias de ensino, aspetos afetivos da aprendizagem e criatividade, recursos para a sala de aula ou a avaliação das aprendizagens.

São estes alguns dos nossos olhares sobre o ProfMat de Castelo Branco. Pensamos que, como esta experiência em julho foi tão bem sucedida, pode estar encontrada a melhor altura para a sua realização.

Deixamos um abraço grande, muito grande, à Comissão Organizadora, à Comissão do Programa, à comunidade da Escola Secundária Amato Lusitano e a todos os participantes no ProfMat 2019. Que boas memórias nos deixa Castelo Branco! Até Santarém. Em julho?

LURDES SERRAZINA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA

MANUEL VARA PIRES

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA

Impressões sobre o Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM)



Neste ano, 2019, tive a oportunidade de participar do XXX Seminário de Investigação em Educação Matemática – SIEM, que é um dos principais eventos de Educação Matemática de Portugal e cuja edição foi realizada na cidade de Castelo Branco, região central do país. Para além do agradável calor típico do verão de Portugal, logo à primeira vista encantei-me com as belezas da cidade, cuja arquitetura moderna mescla-se com construções que marcaram outros períodos históricos, elevando-se entre exuberantes árvores. O encanto não foi menor ao chegar à Escola Secundária Amato Lusitano, sede do evento, que nos impressiona pela sua estrutura e dimensões. E vale dizer que minha participação foi especial também, por ter sido convidada a realizar uma Conferência Plenária, em parceria com Marisa Quaresma, intitulada “O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática em Portugal e no Brasil”. Por isso, ao chegar à receção do evento senti-me privilegiada e, ao mesmo tempo, desafiada com a grande responsabilidade que havia assumido. Embora em anos anteriores eu tenha participado em eventos no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, o SIEM permitiu-me ter uma ideia mais precisa da dimensão da comunidade de educadores matemáticos de Portugal. E logo à chegada surpreendi-me com as animadas conversas e discussões em pequenos grupos, que se formavam e se ampliavam nos espaços de convivência social do evento. Ao percorrer os corredores da Escola Amato Lusitano, na intenção de ambientar-me com os espaços e a dinâmica do evento, examinei rapidamente os temas abordados em cada sala, contemplando as diversas modalidades de atividade do evento. Além disso, ao participar nos simpósios de comunicações, painéis plenários, mesas redondas e sessões práticas, assisti a abordagens interessantes e aprofundadas sobre diferentes temas relativos ao ensino da matemática, que me surpreenderam por envolverem todos de uma forma dialogada e reflexiva. E estes exercícios permitiram-me construir uma ideia bastante precisa do evento, sua natureza e finalidades, sua importância para as áreas relacionadas ao ensino da matemática, sobre o público que congrega e sobre as principais questões de investigação e intervenção no âmbito da educação matemática portuguesa.

No contexto destas vivências, o SIEM deu-me a oportunidade de constituir uma ideia muito consistente e precisa sobre as questões que têm tomado a atenção dos pesquisadores, gestores do ensino, especialistas e professores em Portugal, assim como as ações promovidas no sentido de reestruturar os processos de ensino em nível nacional. E tais questões, evidenciadas a partir dos temas focados nas conferências plenárias, simpósios de comunicações científicas, oficinas e até mesmo nas bancas de exposição de materiais instrucionais (disponíveis nos espaços de convivência social do evento), prendem-se a cinco grandes categorias, nomeadamente:

- a. Questões relacionadas ao currículo de matemática.
- b. Questões relativas aos processos de ensino e aprendizagem da matemática.
- c. Inovações educativas, com uma predominância de trabalhos relacionados ao uso de tecnologias e outros recursos no ensino da matemática.
- d. Formação de professores que ensinam matemática.
- e. Aspectos transversais ao ensino da matemática.

E estes aspetos, por seu lado, informam-nos que há um movimento global em torno destas temáticas e questões, uma vez que elas aparecem também nos debates e investigações nas Américas, ao longo da Europa, em países asiáticos e em outros sítios ao redor do mundo. E este movimento, por fim, revela que há uma tentativa, a nível global, de reorganizar a escola e o ensino (não apenas da matemática) e, sobretudo, alcançar níveis de qualidade estabelecidos pelas orientações internacionais.

Outra ideia que o SIEM me sugere é que o evento se constitui num contexto de partilha e reflexão, que coloca no mesmo espaço e no mesmo nível, isto é, em nível de igualdade, professores, gestores da educação e especialistas em educação matemática a perspetivar o futuro para o ensino de matemática. Para além disso, representou, a mim, a dimensão da presença feminina no campo científico e profissional da educação matemática, uma vez que historicamente o ensino da matemática tem se constituído em campo de disputas e lutas ocupado, predominantemente, pela figura masculina. Considero, portanto, este aspeto representativo da força e das conquistas das educadoras matemáticas portuguesas.

E mais, participar do SIEM/ProfMat na condição de conferencista foi, indiscutivelmente, uma experiência extraordinária. Primeiramente, porque tive a oportunidade de dar a conhecer, a esta respeitada comunidade de pesquisadores, um pouco do trabalho desenvolvido no Brasil sobre a temática dos estudos de aula e sobre o desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática, particularmente no contexto de abrangência da Universidade Federal da Fronteira Sul, instituição da qual faço parte do corpo docente. Além disso, esta atividade constituiu-se uma oportunidade de estabelecer um diálogo entre experiências sobre os estudos de aula desenvolvidas em contextos distintos, cuja estrutura nuclear subjacente preserva os elementos do modelo originalmente praticado no Japão, e a partir das quais aspetos comuns foram evidenciados e novas questões de investigação foram colocadas.

Por fim, participar do SIEM, olhando o evento como uma participante estrangeira e nele principiante, levou-me a observar um nível elevado de proximidade e parceria entre os participantes, que é para mim um aspeto a ser valorizado nas comunidades científicas e profissionais. Parece haver, de facto, uma comunidade forte e coesa em relação aos desafios que permeiam o ensino da matemática em Portugal. Portanto, o SIEM é um evento interessante e rico para diferentes públicos profissionais relacionados com o ensino da matemática que, com toda a certeza, nos oferece muitas e importantes aprendizagens. Obrigada à Comissão Organizadora do evento e a todos os participantes por esta grande oportunidade!

ADRIANA RICHIT

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL – UFFS, BRASIL

EIEM 2019



O Encontro de Investigação em Educação Matemática promovido anualmente pela Sociedade Portuguesa de Investigação (SPIEM) realiza-se, este ano, nos dias 16 e 17 de novembro, na pitoresca vila de Alte, entre o barrocal e a serra algarvia, perto de Loulé, onde encontraremos condições excelentes para a concentração e reflexão que um encontro científico exige, bem como para a confraternização social que o complementa.

O EIEM 2019 dedica-se ao tema “Conexões matemáticas”, um tema cada vez mais relevante no atual cenário de questionamento STEM—STEAM, com reflexos no enquadramento curricular que em Portugal, e não só, ainda se tateia relativamente à Matemática e às outras áreas disciplinares.

Mais informações em <http://eiem2019.spiem.pt/>

Dois projetos de utilização de sensores pelas crianças para resolver problemas de poluição sonora na escola

MARIA JOÃO SILVA

MARGARIDA RODRIGUES

O Projeto Eco-Sensors4Health - Eco-sensores na promoção da saúde: Apoiar as crianças na criação de escolas eco-saudáveis¹ visa melhorar a saúde ambiental das escolas. Para alcançar



este objetivo, o projeto Eco-Sensors4Health apoia a participação das crianças na exploração, com recurso a sensores, e melhoria dos fatores ambientais que podem afetar a saúde da comunidade escolar (Projeto Eco-Sensors4Health, 2019).

Os dois projetos de saúde ambiental na escola, apresentados neste artigo, foram desenvolvidos por

duas docentes do 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB), no contexto da sua participação numa Oficina de Formação de Docentes do Projeto Eco-Sensors4Health, na qual as autoras deste artigo foram formadoras. As duas formandas/docentes centraram os projetos para as suas duas turmas na poluição sonora, dada a dificuldade “em atingir um bom ambiente sonoro dentro da sala de aula e em alguns espaços da escola” (Gordino, 2018, p. 3).

Na realidade, a poluição sonora é um dos principais fatores de risco na saúde ambiental das escolas do 1.º CEB em Portugal (Amann, 2015; Madureira et al., 2015), afetando negativamente a concentração e comunicação, a memória de longo prazo e o desempenho em testes (Stansfeld & Clark, 2015), podendo ainda perturbar o sono e causar transtornos cognitivos e deficiências auditivas (Amann, 2015).

Seguindo as linhas de orientação do projeto Eco-Sensors4Health, nos dois referidos projetos de poluição sonora, as crianças usam sensores, para aquisição de dados, na sua pesquisa para intervenção no problema de saúde ambiental em estudo, pelo que necessariamente exploram integradamente conteúdos curriculares de Estudo do Meio e de Matemática, desenvolvendo a sua cidadania digital e em saúde.

APRESENTAÇÃO DOS DOIS PROJETOS DE UTILIZAÇÃO DE SENSORES PELAS CRIANÇAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE POLUIÇÃO SONORA

Nesta secção, apresenta-se o trabalho colaborativo (dois projetos de poluição sonora) desenvolvido por Selma Oliveira e Eduarda Gordino, formandas da Oficina *Criar escolas eco-saudáveis, através do uso de sensores pelas crianças*, dinamizada de maio a junho de 2018 (Gordino, 2018, p. 3). Os projetos foram desenvolvidos em duas turmas (respetivamente de 1.º e 4.º anos) de uma escola pública, com um contexto socioeconómico médio-baixo e contemplaram as fases de problematização, recolha e análise dos dados, conclusões, sugestões e implementação de medidas de intervenção.

A primeira atividade centrou-se num questionamento dos fenómenos som e audição (“O que são sons?”, no 1.º ano; “O que é necessário para ouvir os sons? Porque é que ouvimos?”, no 4.º ano) e incluíram uma atividade de audição ao ar livre no recreio (1.º ano) com distinção de sons agradáveis e sons desagradáveis (1.º e 4.º anos). Os alunos do 1.º ano concluíram “que quando o som é muito forte ou durante muito tempo, se torna desagradável” (Oliveira, 2018, p. 5) e os alunos do 4.º ano concluíram que essa perceção é variável de pessoa para pessoa, dependendo do seu “estado de espírito, se é de dia ou de noite e de muitos outros fatores” (Gordino, 2018, p. 5).

Após a observação, os alunos levantaram diversas questões: “Quais os sons mais desagradáveis e de que forma podem afetar-nos?” (1.º ano); “Que valores vamos obter se medirmos

¹LISBOA-01-0145-FEDER-023235 - cofinanciado pelo FEDER, PORTUGAL 2020, e Orçamento de Estado Português, FCT

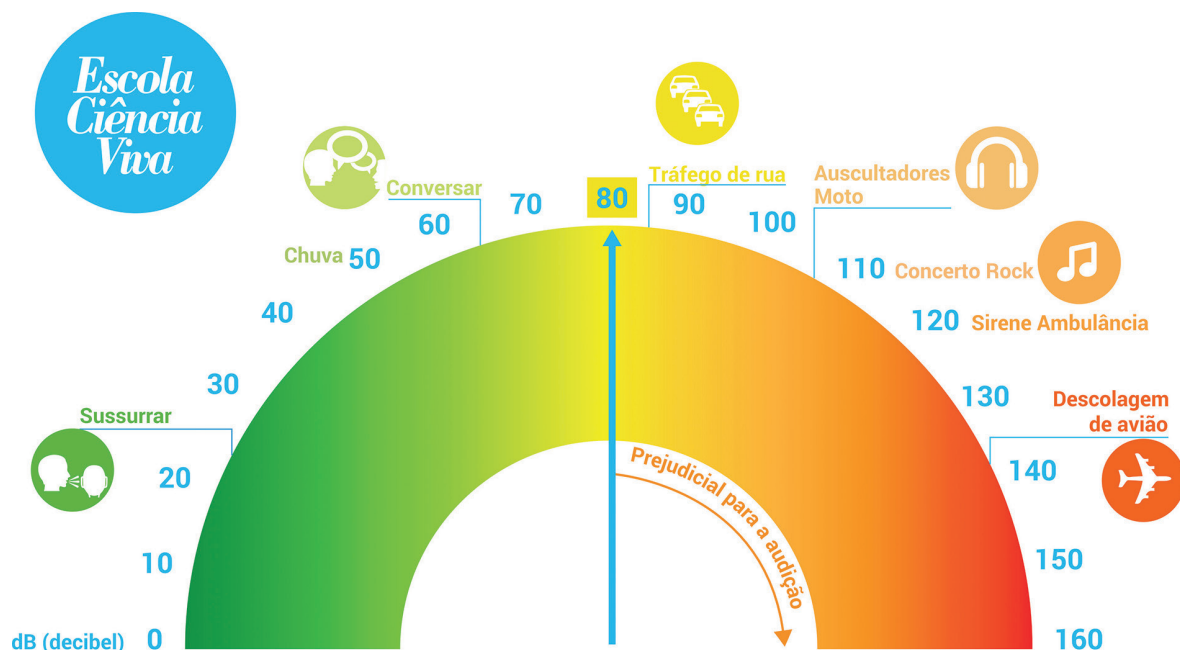


Figura 1. Escala do som

Fonte: Projeto Eco-Sensors4Health (2019, p. 11)

o som em vários espaços da escola?” “Será que a nossa escola tem um ambiente de som saudável?” e “Há poluição sonora?” (4.º ano). Na turma de 1.º ano, as crianças enunciaram e registaram, em papel cenário, as consequências de um nível sonoro elevado: “dores de cabeça, dores de ouvidos, surdez e prejudica a concentração” (Oliveira, 2018, p. 5).

Ambas as turmas foram informadas da possibilidade de medição do nível sonoro, tendo um aluno do 4.º ano identificado o decibel (dB) como unidade de medida. Os alunos contactaram com a escala do som construída pela Escola Ciência Viva (figura 1) onde se encontram identificadas diferentes situações e o valor de nível sonoro correspondente. Foi tomado como referência, para classificar as situações como seguras ou de risco para a saúde, o valor de 80 dB. A escala apresenta uma gradação de cor desde o verde (à esquerda no diagrama), que passa progressivamente a amarelo (atingindo esta cor nos 80dB), até laranja e vermelho (à direita no diagrama), para facilitar a mensagem visual da gradação de sons seguros até aos sons prejudiciais para a saúde. A formulação das questões conduziu os alunos à formulação de hipóteses. Os alunos de 1.º ano consideraram existir maior ruído no refeitório e corredores em intervalos de chuva e com base na escala do som, fizeram, justificando, previsões coletivas dos valores máximos de nível sonoro nesses locais e na sala de aula. Os alunos de 4.º ano também fizeram previsões individuais do nível sonoro na sala de aula e no refeitório, incluindo ainda o recreio.

Registadas as hipóteses/previsões, os alunos organizaram-se em grupos e, para verificar essas hipóteses/previsões, efetuaram

medições do nível sonoro, durante 1 a 2 minutos, nos diferentes locais selecionados, usando *tablets* com a aplicação *Sparkvue* instalada. No caso da turma de 1.º ano, o recreio foi excluído “porque alguém defendeu que lá é o único sítio onde realmente poderiam fazer barulho, logo não seria alvo de medições” (Oliveira, 2018, p. 5). Enquanto os alunos de 1.º ano registaram apenas os níveis sonoros máximos, os alunos de 4.º ano registaram a média e os valores mínimo e máximo.

Recolhidos os dados, os alunos fizeram a respetiva análise, interpretando as representações visualizadas nos *tablets* (gráficos resultantes das medições e valores mínimo e máximo de nível sonoro), para darem resposta às questões colocadas e confrontarem as previsões com os valores medidos. A figura 2 apresenta os valores de nível sonoro previstos e medidos pela turma de 1.º ano, arredondados à unidade pela professora para que os alunos lidassem com números naturais.

Verifica-se que os valores máximos medidos nos três locais (figura 2) são classificáveis como prejudiciais para a saúde, contrariamente ao estimado pelos alunos que tinham considerado apenas o refeitório com um valor de risco (100 dB). Ao comparar os valores estimados e medidos, um dos alunos comenta: “O valor real é menos que o que pensávamos, mas mesmo assim é muito alto e está na parte amarela” (Oliveira, 2018, p. 6).

Quais as nossas atividades
⊕ ruidosas?

ATIVIDADE	valor máximo estimado	valor máximo real
REFEITÓRIO	100 (não conseguimos ouvir durante muito tempo-larm)	84
INTERVALOS DE CHUVA	80 (porque é menos que o refeitório) - Luis -	85
ATIVIDADES NA SALA	70 (+ que a conversa e menos que os intervalos de chuva)	82

Figura 2. Tabela com valores de nível sonoro estimados e medidos pela turma de 1.º ano

Fonte: Oliveira (2018, p. 6)

No que se refere ao enquadramento curricular em Estudo do Meio desta atividade, realça-se a sua contribuição para os seguintes objetivos do Programa (Ministério da Educação, 2004): Conhecer e aplicar normas de vigilância da sua saúde; Realizar experiências com o som. No que respeita ao enquadramento curricular em Matemática, esta atividade contribuiu para a consecução dos objetivos: “ler e representar qualquer número natural até 100, identificando o valor posicional dos algarismos que o compõem; comparar números naturais” (Oliveira, 2018, p. 3). A comparação da ordem de grandeza numérica assumiu, pois, nesta atividade, uma forte significância associada à interpretação feita pelos alunos da escala do som. Trata-se de um exemplo de integração curricular em que as aprendizagens matemáticas se fazem em simultâneo com as realizadas noutras áreas, nomeadamente Estudo do Meio.

Na turma de 4.º ano, os alunos confrontaram individualmente as suas previsões com os valores medidos. Registraram em cartazes (figura 3) os valores das médias, mínimos e máximos, fornecidos pela aplicação *Sparkvue*, calculando, posteriormente, a amplitude dos dados para cada local.

RESULTADOS		
Sala de Aula	Refeitório	RECREIO 2
mín 43,9 _{dec}	mín 70,3 _{dec}	mín 59,6 _{dec}
máx 86,7 _{dec}	máx 89,9 _{dec}	máx 91,5 _{dec}
média 69,7 _{dec}	média 78 _{dec}	média 76 _{dec}

Figura 3. Cartazes com o registo da média e dos valores de nível sonoro extremos, medidos pela turma de 4.º ano

Fonte: Gordino (2018, p. 13)

Os alunos interpretaram os gráficos de linhas visualizados com a aplicação *Sparkvue* e projetados depois no quadro interativo, a partir dos *tablets*. Localizaram nos gráficos os valores extremos, estabelecendo relações entre a representação gráfica e a numérica. Deste modo, o valor calculado da amplitude foi ampliado no seu significado, pela análise do gráfico. Verificou-se integração curricular, uma vez que os conteúdos de Organização

e Tratamento de Dados são trabalhados de forma emergente, ao analisar-se dados recolhidos, no âmbito da identificação de um problema de saúde ambiental na escola. Embora o conteúdo da média apenas seja abordado curricularmente no 5.º ano, o seu significado foi compreendido pelos alunos, tendo, por exemplo, contribuído, para tal, a observação de uma maior concentração de dados próximos ao valor da média, no caso do gráfico alusivo à sala de aula (figura 4).

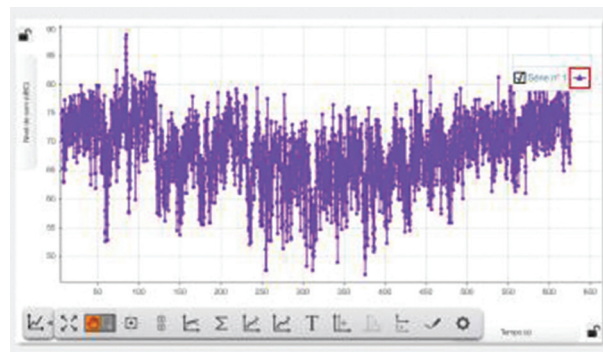


Figura 4. Gráfico de linhas referente ao nível sonoro medido na sala de aula pela turma de 4.º ano

Fonte: Gordino (2018, p. 13)

Com base na análise dos dados, os alunos de 4.º ano estabeleceram coletivamente conclusões (figura 5), usando a análise de dados para identificação de problemas de poluição sonora.

CONCLUSÕES:

Concluimos que ao longo das medições há valores muito altos e intensos. Com estes valores não há um ambiente muito saudável, há poluição sonora. De acordo com a escala do som até parece que a nossa escola está no meio do trânsito e isto faz mal à nossa saúde.

Todos - 4.º B

Figura 5. Conclusões registadas na turma de 4.º ano

Fonte: Gordino (2018, p. 13)

Pretendia-se que, no final, os alunos “apresentassem soluções para este problema, tornando-se parte integrante da solução” (Gordino, 2018, p. 3), conforme o “objetivo de formação cívica (Oferta Complementar do Agrupamento): Participar na vida cívica de forma crítica e responsável, dialogando e refletindo sobre questões relativas à atuação individual e coletiva nos diferentes espaços” (Gordino, 2018, p. 3).

Os alunos do 1.º ano propuseram e implementaram soluções; por exemplo: i) criar um sinal para os alunos falarem baixo nos corredores, sendo que foram criados cartazes nas aulas de expressão plástica para sensibilização da escola; ii) pôr mesas nos corredores com plasticina, material de desenho, *puzzles* e legos nos intervalos de chuva, sendo que esta medida foi pedida à coordenadora da escola, por carta coletiva escrita pela turma. Também a turma de 4.º ano propôs várias soluções, pondo-as depois em prática, por exemplo: i) fazer o Jogo do Sussurro no refeitório (“Se alguém falar mais alto terá de fazer bolha de silêncio durante 30 segundos” (Gordino, 2018, p. 7), envolvendo no jogo os alunos do 1.º ano; ii) fazer equipas de trabalho para ajudar os meninos do Pré-escolar a aprenderem a fazer silêncio no refeitório.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo apresentou dois projetos integrados de poluição sonora no 1.º CEB, realizados no contexto de uma Oficina de Formação de Docentes do Projeto Eco-Sensors4Health. As crianças envolvidas (1.º e 4.º ano de escolaridade) foram apoiadas na realização de uma pesquisa sobre o ruído na sua escola, tendo, no final, sugerido e implementado soluções para os problemas caracterizados. Desta forma, as crianças desenvolveram aprendizagens autênticas (Lombardi, 2007), usando sensores na resolução colaborativa e situada de problemas complexos, desenvolvendo integradamente as suas competências em diversas áreas curriculares.

A realização dos dois projetos foi importante para o desenvolvimento profissional de ambas as formandas/docentes do 1.º CEB, conforme reportado nas suas reflexões:

A aplicação de tarefas de carácter investigativo fez-me voltar a ganhar interesse por sair da minha zona de conforto e colocar de novo, nas mãos dos alunos, a responsabilidade pela sua aprendizagem que, no caso, teve resultados bastante positivos, uma vez que a turma alvo também cresceu em termos de responsabilidade com o projeto desenvolvido (Oliveira, 2018, p. 8).

Era importante que fossem as próprias crianças a sentirem esta necessidade de ação e por isso o trabalho que desenvolvemos foi sempre para que, (...) as crianças assumissem o “poder” e a capacidade de ação / intervenção. Não só as nossas turmas foram envolvidas como toda a escola acabou por se deixar contagiar pela “febre” das medições (Gordino, 2018, pp. 8-9).

Estes projetos são exemplo de colaboração entre docentes, que é fator facilitador da flexibilidade curricular: “É através da gestão flexível do currículo e do trabalho conjunto dos professores e educadores sobre o currículo que é possível explorar temas diferenciados, trazendo a realidade para o centro das aprendizagens visadas” (Martins et al., 2017, p. 13).

Abordar a educação matemática nos dias de hoje implica uma visão holística, relacional e integrada da realidade (Beane, 2000; Morin, 2001). Os projetos desenvolvidos pelas duas turmas

exemplificam como a matemática pode ser trabalhada com outras áreas curriculares, nomeadamente o Estudo do Meio, a Educação Artística, a Cidadania e Desenvolvimento, e as Tecnologias da Informação e Comunicação:

Percebo claramente que este momento (...) irá sem dúvida servir para que os meus futuros alunos beneficiem desta experiência. Quer usando as tecnologias de educação, quer desenvolvendo-se como cidadãos numa perspectiva de educação ambiental, (...) capacitando-os de confiança para perceberem que eles podem ser um factor de ação e mudança na nossa sociedade, no nosso ambiente, no nosso mundo (Gordino, 2018, pp. 8-9).

Esta forma de trabalho contribuiu, ainda, para desenvolver nos alunos a criatividade, a comunicação, o pensamento crítico e a colaboração, competências-chave do século vigente consignadas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Martins et al., 2017).

Referências

- Amann, G. V. (Org.) (2015). *Programa de Saúde Escolar*. Lisboa: DGS.
- Beane, J. A. (2000). O que é um currículo coerente? In J. A. Pacheco (Org.), *Políticas de integração curricular* (pp. 39-58). Porto: Porto Editora.
- Gordino, M. E. (2018). *Relatório Final da Oficina: Criar escolas eco-saudáveis, através do uso de sensores pelas crianças*. Manuscrito não publicado.
- Lombardi, M. M. (2007). Authentic learning for the 21st century: An overview. *Educause learning initiative*, 1(2007), 1–12.
- Madureira, J., Paciência, I., Ramos, E., Barros, H., Pereira, C., Teixeira, J. P., & Fernandes, E. O. (2015). Children's health and indoor air quality in primary schools and homes in Portugal: Study design. *Journal of Toxicology and Environmental Health*, 78, 915–930.
- Martins, G. (Coord.), Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., ... Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação (DGE).
- Ministério da Educação (2004). *Organização Curricular e Programas: Ensino Básico – 1.º Ciclo* (4.ª edição revista). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.
- Morin, E. (2001). L'enseignement des connaissances. In Fundação Calouste Gulbenkian (Ed.), *Novo conhecimento, nova aprendizagem* (pp. 25-33). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Oliveira, S. (2018). *Relatório Final da Oficina: Criar escolas eco-saudáveis, através do uso de sensores pelas crianças*. Manuscrito não publicado.
- Projeto Eco-Sensors4Health (2019). *Eco-Sensors4Health Toolkit: Guia Eco-sensores para a saúde*. Lisboa, Viseu: Instituto Politécnico de Lisboa, Instituto Politécnico de Viseu, Ciência Viva – ANCCT, Município de Viseu.
- Stansfeld, S., & Clark, C. (2015). Health Effects of Noise Exposure in Children. *Current Environmental Health Reports*, 2, 171–178.

MARIA JOÃO SILVA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO IP DE LISBOA

MARGARIDA RODRIGUES

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO IP DE LISBOA

TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

António Domingos

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Um olhar sobre a flexibilidade e autonomia curricular

ELSA CAMPOS

No ano letivo de 2017/2018, o Agrupamento de escolas de Padrão da Légua (Matosinhos) abraçou o projeto-piloto da experiência pedagógica da flexibilidade e autonomia curricular (Despacho n.º 5908/2017, de 5 julho), redesenhando para tal o seu modelo de organização curricular, com a introdução de novas metodologias de ensino.

O agrupamento optou por iniciar este projeto em duas turmas do 1.º ano, oito turmas do 5.º ano e duas turmas do 7.º ano. Como docente de matemática, lecionei às duas turmas de 7.º ano envolvidas no Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular (PAFC), tendo tido o privilégio de integrar uma equipa pedagógica com professores motivados, onde a dinâmica de apoio e estímulo entre os pares foi uma constante ao longo do ano letivo. A cooperação profissional permitiu mobilizar diferentes metodologias em sala de aula, tendo os alunos sido envolvidos no desenvolvimento das diversas atividades que o projeto concitou.

Numa dinâmica de trabalho colaborativo, planificaram-se as atividades, produziram-se materiais e elaboraram-se instrumentos de avaliação e monitorização. Ao longo do ano letivo, alternaram-se períodos de funcionamento disciplinar com períodos de funcionamento multidisciplinar, onde as equipas pedagógicas promoveram a interdisciplinaridade. Nos períodos de funcionamento multidisciplinar, as atividades foram orientadas por mais do que um professor, de diferentes áreas, em simultâneo.

Nas duas turmas de 7.º ano a que me refiro foram constituídos domínios de autonomia curricular e momentos globais de articulação pedagógica que permitiram desenvolver as competências essenciais elencadas no perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória.

O domínio de autonomia curricular (DAC), constituído pelas disciplinas de matemática, de ciências naturais e de físico e química, permitiu não só desenvolver as aprendizagens essenciais previstas para cada disciplina de forma articulada, como contribuiu acima de tudo para a promoção de um ensino de sucesso, na medida em que os alunos foram confrontados com a mobilização do conhecimento em situações concretas, desenvolvendo assim competências de nível superior.

O problema do ensino-aprendizagem da matemática, que me toca muito em particular, está enraizado nos padrões da sociedade. Ora, a flexibilidade curricular abre a sala de aula ao exterior e, no caso concreto desta disciplina, permite uma “descolagem” dos exercícios mecânicos e rotineiros que fomentam a desmotivação. A integração de áreas disciplinares diferentes no mesmo espaço proporcionou uma visão articulada e não compartimentada do conhecimento, o que permite desenvolver no aluno, entre outras, as capacidades de argumentar, questionar e comunicar. Com a flexibilidade curricular concretiza-se a frase célebre de Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) de que “Não há nenhum ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenómenos do mundo real” (Stein, 2008, p. 29).

A flexibilidade curricular permite “reinventar” a sala de aula, exigindo mais esforço quer dos professores quer dos alunos. No DAC, constituído pelas disciplinas de ciências naturais, física e química e matemática, recorremos à gamificação como ferramenta para desenvolver competências do século XXI. Com a introdução do jogo foi despertado o interesse pelas tarefas propostas, desenvolveu-se a criatividade e aumentou-se a participação dos alunos, permitindo-lhe ser um agente ativo no processo de aprendizagem, tomando decisões com vista à resolução dos problemas e consequente superação do desafio. Estimulou-se a sua persistência e resiliência, preparando-os para os desafios do século XXI.

Numa das atividades propostas, no âmbito do DAC, foi construído um “Labirinto das Ciências”, que permitiu aos alunos perceber em contexto real para que serve a matemática. Os professores apresentaram os problemas de forma contextualizada e sustentada em factos, partindo das notícias dos sismos ocorridos em janeiro de 2019, em Portugal. Em grupo, os alunos realizaram atividades exploratórias que lhes permitiu desenvolver e consolidar conhecimentos estruturantes para a resolução de problemas (figuras 1 e 2).

Problema: Num sismo de grande magnitude com origem na Falha Açores-Gibraltar, após a libertação de energia no foco sísmico, será que os habitantes do Porto, teriam tempo de se precaver em relação ao sismo?

DESAFIO... descobre o caminho no labirinto, respondendo ao problema.

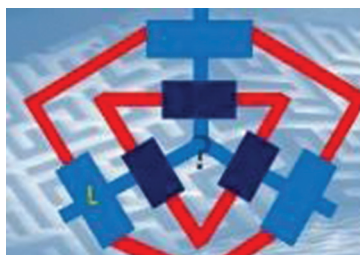


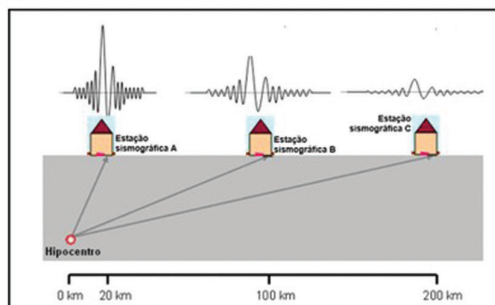
Figura 1. Excerto do guião fornecido aos alunos

PROBLEMA:

Num sismo de grande magnitude com origem na Falha Açores-Gibraltar, após a libertação de energia no foco sísmico, será que os habitantes do Porto, teriam tempo de se precaver em relação ao sismo?

Quando ocorre um sismo, os registos obtidos pelos sismógrafos, indicam que o tempo de chegada das primeiras ondas sísmicas não é simultâneo em estações localizadas a diferentes distâncias do epicentro. Na tabela apresenta-se, para diferentes estações sismográficas, o tempo após o sismo em que os sismógrafos registam as primeiras ondas sísmicas.

Estação sismográfica	Distância ao epicentro (km)	Tempo de registo das primeiras ondas sísmicas (segundos)
A	100	16,4 s
B	500	82,0 s (1 min. 32 s)
C	800	131,1 s (2 min. 11,2 s)
D	1000	163,9 s (2 min. 43,9 s)
E	1500	245,9 s (4 min. 5,9 s)
F	2000	327,9 s (5 min. 27,9 s)
G	3000	491,8 s (8 min. 11,1 s)
H	4000	655,7 s (10 min. 55,7 s)



(...)

Escreve a expressão analítica que relaciona o “tempo de chegada das ondas sísmicas à estação sismográfica” em função da “distância epicentral”.



DESAFIO... descobre o caminho no labirinto, respondendo ao problema.

(Nota: O Porto está à distância aproximada de 500 Km da Falha Açores-Gibraltar)

Figura 2. Excerto do guião fornecido aos alunos

Os alunos, recorrendo à função de proporcionalidade direta, resolveram problemas complexos em ciência, referentes à sismologia e à densidade. Através das pistas que foram recolhendo no jogo, eles puderam responder, entre outras, às seguintes questões:

- «Será que se ocorresse um sismo muito forte na falha Açores-Gibraltar, teríamos tempo de fugir?»
- «Como construir um aparelho para registar eventos sísmicos?»
- «Será que a medalha olímpica de Inês Henriques era verdadeira e tinha mesmo 1,36% de ouro?»

No final da tarefa, cada grupo elaborou uma apresentação onde

formalizou a solução do problema, bem como os contributos de cada uma das ciências na sua resolução. As conclusões obtidas permitiram comunicar em ciência e promoveram o desenvolvimento de áreas de competências do perfil do aluno.

As atividades e os jogos construídos pelas professoras de ciências naturais, matemática e física e química permitiram articular os conhecimentos, as capacidades e as atitudes dessas disciplinas. No caso concreto do “Labirinto das Ciências”, referido anteriormente, foram considerados os seguintes:

Matemática:

- Desenvolver a capacidade de abstração e de generalização, de

compreensão e de construção de argumentos matemáticos e raciocínios lógicos.

- Expressar oralmente e por escrito ideias matemáticas, com precisão e rigor, e justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia).
- Representar as coordenadas de um ponto num referencial cartesiano.
- Representar e interpretar graficamente uma função.
- Desenvolver persistência, autonomia e à-vontade em lidar com situações que envolvam a Matemática no seu percurso escolar e na vida em sociedade.
- Desenvolver interesse pela Matemática e valorizar o seu papel no desenvolvimento das outras ciências e domínios da atividade humana e social.

Físico-Química:

- Compreender o conceito de massa volúmica e efetuar cálculos com base na sua definição.
- Constatar, recorrendo a valores tabelados, que o grau de pureza de uma substância pode ser aferido através dos pontos de fusão e de ebulição ou da massa volúmica.

Ciências Naturais:

- Explicar a ocorrência de sismos enquanto fenómeno de libertação de energia, resultante das propriedades físicas do material, no interior da Terra.
- Interpretar, através de uma atividade prática, sismogramas e cartas de isossistas nacionais, valorizando o seu papel na identificação do risco sísmico de uma região.
- Relacionar a distribuição dos sismos com os limites de placas tectónicas.

As atividades desenvolvidas com recurso à *gamificação* contribuíram para uma melhor assimilação de conceitos, na medida em que os alunos ao aliarem o trabalho (*opus*) ao divertimento (*ludus*) acabaram por interiorizar o conhecimento de forma espontânea, adquirindo concomitantemente as capacidades de um bom jogador, designadamente a persistência, a ousadia, a atenção aos detalhes e a criatividade na superação de obstáculos, competências indubitavelmente importantes para o seu sucesso académico.

Uma outra vantagem deste tipo de atividades é a avaliação em tempo real do desempenho do aluno. Não só o professor pode fazer essa avaliação, mas também o próprio aluno, visto que facilmente identifica as suas fragilidades e aciona estratégias para melhorar o seu desempenho e atingir os objetivos.

Além dos domínios de autonomia curricular, em conselho de turma planearam-se momentos globais de articulação pedagógica, um em cada período letivo, envolvendo todas as disciplinas, de modo a potenciar objetivos interdisciplinares.

No 3.º período, a atividade desenvolvida teve como objetivo interdisciplinar a “Valorização do Mosteiro de Leça do Balio e do Rio Leça como património português”.

A atividade foi iniciada com um *Peddy-paper*, realizado na área circundante do Mosteiro de Leça do Balio e do Parque das Varas, tendo incluído atividades exploratórias no âmbito das doze disciplinas constantes da matriz curricular do 7.º ano. Cada uma integrou uma estação e todas foram percorridas pelos alunos com base em pistas que suscitavam a observação de elementos arquitetónicos do Mosteiro de Leça do Balio ou da bacia hidrográfica do rio Leça.

Ao nível da matemática, os alunos foram confrontados com a necessidade de determinar a altura da torre do Mosteiro de Leça do Balio, recorrendo às medições necessárias para aplicarem a semelhança de triângulos (figuras 3, 4 e 5).

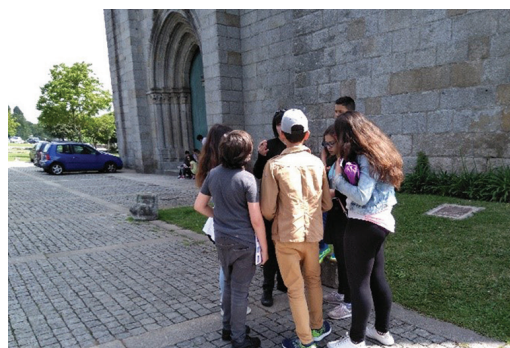


Figura 3

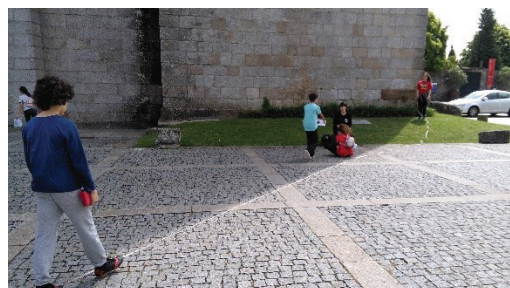


Figura 4



Figura 5

(Figuras 3, 4 e 5. Atividades no Mosteiro de Leça do Balio)

Nos dias seguintes ao Peddy-paper, os alunos organizaram, em grupo, a informação recolhida e construíram documentos de apoio à comunicação do trabalho final. Para cada disciplina foram identificados conhecimentos, capacidades e atitudes a desenvolver/articular. Na disciplina de matemática, foram privilegiadas as aprendizagens do tema Geometria e medida, a saber:

- Utilizar os critérios de congruência e de semelhança de triângulos na sua construção e na resolução de problemas, em contextos matemáticos e não matemáticos;
- Conceber e aplicar estratégias na resolução de problemas, usando ideias e geométricas, em contextos matemáticos e não matemáticos e avaliando a plausibilidade dos resultados;
- Desenvolver interesse pela matemática e valorizar o seu papel no desenvolvimento das outras ciências e áreas da atividade humana e social.

Neste tipo de atividades cruzam-se competências de português, matemática, história, cidadania, educação física e de todas as outras disciplinas que constituem a matriz curricular. Dir-se-ia que elas metaforizam novas formas de aprender, sugerindo que a sala de aula não tem paredes, nem impõe limites para a criatividade.

Depois de um ano profícuo, é com agrado que verifico que os inúmeros pontos fortes deste projeto são a alavanca para a mudança de práticas de sala de aula e contribuem efetivamente para a formação integral do aluno. Pela minha experiência, posso referir, entre outras, as seguintes potencialidades da flexibilidade curricular:

- Proporciona ao aluno experiências de aprendizagem desafiadoras e contextualizadas que mobilizam contributos de diferentes áreas do saber e favorecem a transferência de conhecimentos;
- Promove nos alunos a capacidade de relacionar conteúdos aumentando a sua cultura geral;
- Permite trabalhar as Aprendizagens Essenciais de forma integrada;
- Promove uma maior motivação nos alunos;
- Desenvolve de competências sociais;
- Promove interdisciplinaridade;
- Desenvolve a criatividade;
- Favorece a diferenciação pedagógica;
- Contribui para uma consolidação efetiva das aprendizagens.
- Utiliza pedagogias diferenciadas promotoras de aprendizagens significativas;
- Promove as aprendizagens essenciais que possibilitam ao aluno ser um verdadeiro cidadão.

No entanto, não podemos negar a existência de alguns constrangimentos a esta nova forma de organizar a escola e o ensino, em particular os que decorrem da dificuldade em gerir os horários, ou a própria insuficiência de tempo para refletir, para pensar e para (re)construir.

Com a publicação do Decreto-Lei n.º 55/2018 surge a necessidade de envolver mais turmas e, consequentemente, mais alunos e professores no processo de flexibilização curricular. Os constrangimentos agudizaram-se este ano letivo, porquanto o Agrupamento de Escolas do Padrão da Légua aumentou significativamente o número de turmas envolvidas. A flexibilidade curricular abrange agora um total de quarenta e quatro turmas (sete de 1.º ano, duas de 2.º ano, oito de 5.º ano, oito de 6.º ano, oito de 7.º ano, duas de 8.º ano, sete de 10.º ano e duas do 10.º ano do ensino profissional).

A resiliência dos professores tem contribuído para a superação dos obstáculos e apesar das dificuldades sentidas ao longo do percurso é evidente a aposta em abordagens pedagógicas diferentes que favorecem a diferenciação pedagógica e potenciam a consolidação do saber científico, técnico e tecnológico.

Este ano letivo (2018/2019), numa turma de 10.º ano, partimos do tema da educação ambiental e, em conselho de turma, procedemos à articulação curricular. Definiu-se o problema em estudo («De que forma a ação antrópica contribui para os problemas ambientais?»), formaram-se grupos de trabalho e lançou-se o desafio aos alunos através de um guião. O desenvolvimento deste tema poderá ser objeto de um próximo artigo.

A autonomia e flexibilidade curricular é, em suma, uma oportunidade de trabalho multidisciplinar e uma oportunidade de integração de saberes disciplinares, que potencia o sucesso ao promover aprendizagens significativas para/com os alunos e, porque não dizê-lo, com os professores, direta e inevitavelmente implicados nesta nova dinâmica de ensino.

Referências

Stein, J. (2008). *Como a matemática explica o mundo*. Editora: Campus

ELSA CAMPOS

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE PADRÃO DA LÉGUA

A Hélice de Boerdijk-Coxeter ou Tetrahelix



Figura 1

O objetivo deste texto é mostrar como o recurso a materiais distintos para construir o mesmo objeto geométrico permite valorizar ou destacar propriedades distintas da estrutura do objeto. Para isso foi escolhido um objeto muito pouco conhecido, a *hélice de Boerdijk-Coxeter*. Esta hélice é o poliedro que serviu de inspiração para a construção da estrutura da *Art Tower Mito*, no Japão, tendo sido esta construção explorada no artigo *Estruturas inesperadas* apresentado na revista n.º 152. A fotografia da figura 1 mostra uma hélice construída com recurso a triângulos equiláteros de *polydron*, neste caso peças compactas. Este poliedro é descrito como um empilhamento linear de tetraedros regulares. Cada tetraedro está relacionado com o seguinte através de uma rotação formando-se assim uma espiral helicoidal [1] [2]. Este poliedro é também conhecido como *tetrahelix*, designação que decorre da sua ligação ao tetraedro. É importante notar que as faces dos tetraedros que constituem o complexo formam três bandas entrelaçadas, como evidencia a fotografia da figura 2. Para evidenciar este efeito foi importante usar peças de apenas 3 cores e manter a mesma cor para todos os elementos de cada uma das bandas. A maneira mais fácil de construir uma *hélice de Boerdijk-Coxeter* é recorrer a esta última propriedade, respeitando a utilização de peças de 3 cores para evidenciar as 3 bandas que formam a hélice. Vale a pena experimentar, começando por construir separadamente as três bandas de triângulos, ligando-as depois passo a passo. Embora na fotografia seja mostrada uma parte da hélice, esta construção pode ser continuada indefinidamente.

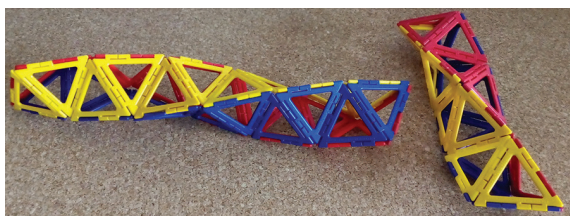


Figura 2

Os matemáticos que estudaram este objeto geométrico afirmam que, nesta sequência infinita de tetraedros empilhados, não é possível encontrar um par de tetraedros com a mesma orientação porque o passo helicoidal por célula não é uma fração racional do círculo [1]. Uma propriedade difícil de entender, mas que ajuda a explicar o aspeto estranho da hélice em que não se

consegue vislumbrar uma repetição de orientação dos tetraedros que a formam e, por isso, não se identifica nenhum corte da composição que dê origem a uma parte repetível, como pode ajudar a ver a construção da figura 3.

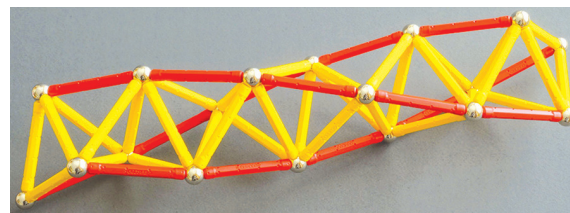


Figura 3

Penso que cada uma destas três fotografias e as características que foram sendo associadas a cada uma delas ajudam a compreender o interesse de analisar representações diferentes que evidenciam propriedades distintas da estrutura de um objeto geométrico. O recurso a um objeto geométrico pouco conhecido pode ajudar a valorizar este interesse em estudar, para o mesmo objeto, a associação entre estruturas distintas e as propriedades que são evidenciadas por cada uma delas. Essa discussão foi feita para a esfera no artigo *Esferas e aproximações de esferas — definição e definições* no n.º 148 da *Educação e Matemática*, com exemplos de construções feitas por crianças. Fica assim o desafio de estudar estruturas distintas para outros objetos geométricos mais conhecidos e construí-las com os alunos. Registo ainda a ideia de que objetos como esta hélice, de natureza espiral e que podem ser continuados indefinidamente, são muito desafiantes do ponto de vista das relações matemáticas que permitem estabelecer.

Deixo também um outro desafio que decorre da minha atração pela *tetrahelix* e que me levou a encontrar algumas outras estruturas constituídas por tetraedros mas distintas da *tetrahelix* [3] e outros objetos construídos a partir de triângulos equiláteros [4]. Nestas duas referências indicadas é possível encontrar informação matemática muito interessante sobre estes objetos geométricos.

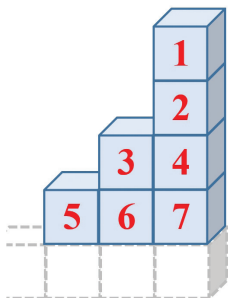
Nota — Agradeço ao Pedro Almeida que teve a ideia de construir a *tetrahelix* representada na fotografia 2 e que é também o autor da fotografia.

Referências

- [1] Ulasevich, Z., & Ulasevich, V. (2016). Isometries in teaching descriptive geometry and engineering graphics. *The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics*, 29, 23–20.
- [2] <https://www.revolvy.com/page/Boerdijk%E2%80%93Coxeter-helix>
- [3] <http://bit-player.org/2013/tetrahedra-with-a-twist>
- [4] <http://images.math.cnrs.fr/Peut-on-faire-un-anneau-de-tetraedres.html?lang=fr>

O Problema do ProfMat 2019

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2019, em Castelo Branco, consistiu na resolução de “Uma Torre Numerada”, inspirado num problema mais simples de Michel Criton:



Vamos construir uma torre formada por cubos empilhados.

O número de cubos em cada nível, a partir do terceiro a contar de cima, é igual ao total de cubos existentes nos dois andares imediatamente acima.

Os andares estão alinhados à direita e os cubos foram numerados sequencialmente a partir do topo e da esquerda para a direita, tal como se vê na figura com os quatro primeiros andares da torre.

Qual é o cubo mais alto da coluna a que pertence o cubo com o número 777?

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Recebemos 21 respostas (16 individuais e 5 em grupo). Destas, seis foram eliminadas por terem incorreções, quer por deficiente interpretação do enunciado, quer por pequenos erros de cálculo.

As estratégias seguidas tiveram todas um ponto em comum: a procura de padrões que permitissem chegar à solução. Isto foi mesmo explicitado no final de uma resposta: “Adoramos este problema porque encontramos muitas regularidades interessantes nesta disposição” (Adelina Precatado e seu grupo).

Demos a palavra ao José Carlos Pereira.

Os dezasseis primeiros números da sucessão f de Fibonacci, em que f_n é o termo de ordem n , são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 e 987.

Devido à forma como a pilha é construída, conclui-se que:

- 1) O primeiro número da linha n é f_{n+1} .
- 2) O último número da linha n é $f_{n+2}-1$.

Assim, podemos fazer uma tabela.

Linha	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Primeiro nº	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
Último nº	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	232	376	609	986

Portanto, 777 está na linha 14, porque $610 < 777 < 986$.

Como $986 - 777 = 209$ e como o último número da linha 13 é 609, o número da linha 13 que está por cima do 777 é $609 - 209 = 400$.

O último número da linha 12 é 376. Mas, $376 - 209 = 167$ e $167 < 233$ (233 é o primeiro número da linha 12), pelo que 400 é o único número da coluna de 777 que lhe está acima.

Portanto, o número mais alto da coluna de 777 é o 400.

Premiados e Prémios

1º - José Carlos Pereira

(Unidade TI-Nspire CX II-T, oferta Texas Instruments)

2º ex aequo

- Adelina Precatado e seu grupo
- Cátia Ferreira
- Conceição & Armando Ferreira
- Fausto Silva
- José Filipe
- Leticia Martins

(Livros “Problemas... Sem Problema”, J. P. Viana, ed. APM)

O primeiro prémio será enviado ao vencedor. Os restantes devem ser levantados até 31 de Dezembro de 2019. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt ou 217163690).

Concorrentes – Carla Dias, Carlos Costa Fernandes, Cátia Ferreira, Célia Correia de Matos, Célia Martins, Céline Gonçalves, Fausto Silva, Isabel Viana, Joana Dias, José Carlos Pereira, José Filipe, Leticia Martins, Luís Bernardino, Regina Veríssimo, Rita Caneco, Rogério Berrincha, e os grupos: Adelina Precatado, Anabela Teixeira, Rute Cipriano, Pilar Mansos & Teresa Moreira; Andreia Serra & Cíntia Almeida; Conceição & Armando Ferreira; Daniel Castanho & Sandra Neves; Sandra Bolinhas & Carlos Dias.

Um triângulo e três circunferências

Consideremos a família de triângulos PQR que têm 20 centímetros de perímetro.

Traçam-se três circunferências:

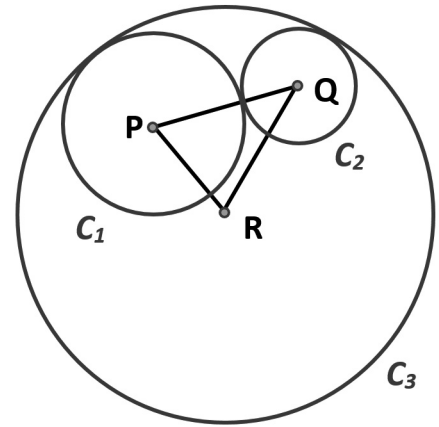
- C_1 com centro em P,
- C_2 com centro em Q,
- C_3 com centro em R,

de tal modo que:

- C_1 e C_2 sejam tangentes exteriormente entre si,
- C_1 e C_2 sejam tangentes interiormente a C_3 .

Entre que valores pode variar o raio de C_3 ?

(Respostas até 31 de dezembro, para zepaulo46@gmail.com)



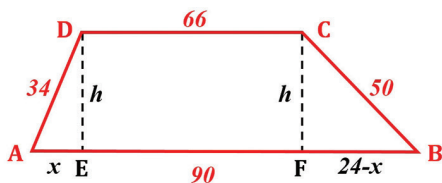
O TERRENO DA LETÍCIA

O problema proposto no número 151 da *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A Letícia herdou um terreno com a forma de um trapézio. Os lados paralelos do trapézio medem 66 e 90 metros. Os outros dois lados têm 34 e 50 metros de comprimento. Qual é a área do terreno?

Recebemos 15 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Débora Alves, Francisco Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helder Martins (Lisboa), Ilca Cruz, Isabel Torres (Lisboa), José Carlos Frias (Lisboa), Letícia Martins (Guimarães), Luís Bernardino, Mário Roque (Guimarães), Regina Veríssimo (Paião) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

A abordagem inicial ao problema foi praticamente igual em quase todas as resoluções. Veja-se, por exemplo, a da Regina. Comecei por fazer um esquema do trapézio, com os dados do enunciado.



[Considerando os triângulos retângulos da figura obtemos] o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 34^2 \\ (24-x)^2 + h^2 = 50^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ h = 30 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -16 \\ h = -30 \end{cases}$$

Mas, para a altura positiva $h=30$, o valor de x é negativo... Muitos comentários foram feitos para ultrapassar esta impossibilidade.

Graça: A primeira dificuldade que me surgiu foi que, obviamente, utilizei uma figura como a do enunciado e o problema era impossível. Conclusão: a configuração do trapézio não é a "clássica".

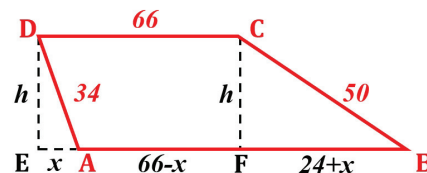
Isabel: Ah? Mas, $x=-16$ não é possível! Não me apercebi e ficou para mais tarde. (...) Voltei ao Geogebra e desenhei o terreno. Surpresa!!!

Regina: Para melhor compreender o valor negativo obtido para x , comecei por construir [no Geogebra] o trapézio com os dados do enunciado. Fui movendo o ponto C até obter a base menor igual a 66.

Alberto: Aparentemente o problema é de fácil resolução. (...) Resolvendo o sistema concluímos que $x = -16$, o que é manifestamente impossível. Portanto o terreno nunca poderá ter a forma indicada na imagem. Analisando estes resultados, o valor negativo de x é fortemente indicativo de que o triângulo ADE terá de ser simétrico do representado na figura.

Letícia: O valor obtido é negativo. Isso significa que se assumiu uma forma errada do terreno.

Realmente, o trapézio terá de ter outro aspeto.



A partir dos triângulos retângulos DEA e CFB, temos este sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 34^2 \\ (24+x)^2 + h^2 = 50^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ h = 30 \end{cases}$$

Agora, já tudo faz sentido.

A altura do trapézio é 30 metros. Então:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{90 + 66}{2} \times 30 = 2340 \text{ m}^2$$

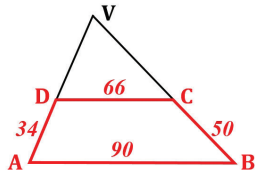
A área do terreno da Letícia é de 2340 m².

O José Carlos começou por não especificar os dados numéricos do problema:

Resolvi um sistema de 3 equações para um caso geral (em vez de usar as medidas 66, 90, 34 e 50), obtendo uma fórmula para a altura do trapézio (e duas outras para as medidas de comprimento das bases dos triângulos). Depois de concretizar [com os dados do problema], para minha surpresa, encontrei um valor “muito grande” (40) para uma das “bases” e um valor negativo (-16) para a outra.

Finalmente, o Mário adotou uma estratégia bem diferente.

Sendo [ABCD] o paralelogramo da Letícia, se prolongarmos os seus lados laterais, obtemos um triângulo [VBA] semelhante a [VCD].



Recorrendo a essa semelhança podemos determinar os comprimentos de [VD] e de [VC].

Como $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{90}{66} = \frac{15}{11}$ então:

$$\frac{\overline{VD}}{\overline{VD} + 34} = \frac{15}{11} \Leftrightarrow \overline{VD} = 93,5 \text{ e } \frac{\overline{VC}}{\overline{VC} + 50} = \frac{15}{11} \Leftrightarrow \overline{VC} = 137,5$$

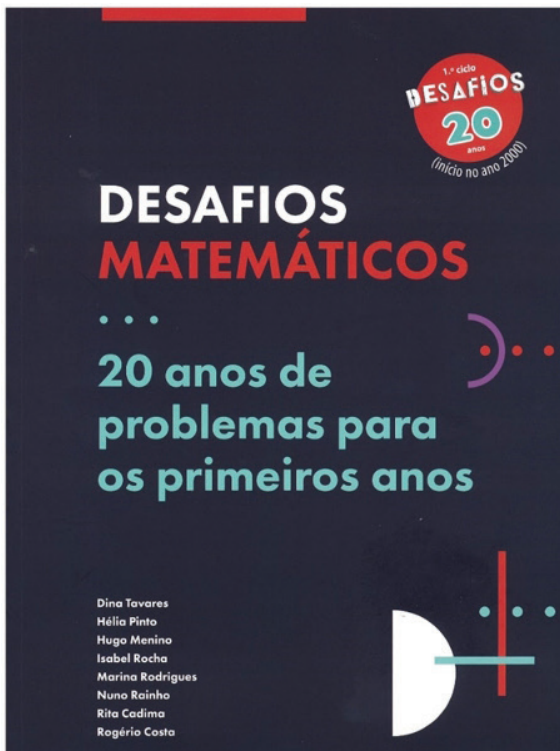
Ficamos assim a conhecer as medidas dos lados do triângulo [VBA] e também a sua área. Aplicando, por exemplo, a fórmula de Heron (o semiperímetro deste triângulo é igual a 202,5), teremos:

$$A_{AVD} = \sqrt{202,5 \times (202,5 - 90) \times (202,5 - 187,5) \times (202,5 - 127,5)} = 5062,5$$

Podemos utilizar o mesmo processo para determinar a área do triângulo [VCD], mas sabemos que, devido à já referida semelhança entre triângulos, esta será dada por $\left(\frac{11}{15}\right)^2 \times 5062,5 = 2722,5$.

Assim, a área do paralelogramo [ABCD] é igual a $5062,5 - 2722,5 = 2340 \text{ m}^2$.

PUBLICAÇÕES



O livro “**Desafios Matemáticos. 20 anos de problemas para os primeiros anos**” constitui um testemunho do concurso Desafios 2000, uma competição que nasceu no Ano Mundial da Matemática, numa organização conjunta do Politécnico de Leiria e do núcleo da APM daquela cidade, e que ganhou tradição junto das escolas, professores e alunos do 1.º ciclo, tendo sido alargado mais recentemente ao 2.º ciclo.

Este livro é composto por sete capítulos. Os dois capítulos iniciais focam-se na importância de três capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio e comunicação – e na relevância das competições no ensino e aprendizagem da matemática. Os restantes cinco são dedicados aos temas Números e Operações, Geometria e Medida, Organização e Tratamento de Dados, Álgebra e Conexões matemáticas. Nestes capítulos, além da compilação de problemas, existe uma introdução sobre as ideias centrais da resolução de problemas em cada tema.

Número de páginas: 120

Autores: Vários

Editores: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Politécnico de Leiria

Preço de sócio: 12 €

O PROBLEMA DESTES NÚMEROS
José Paulo Viana

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

A discalculia e as dificuldades na aprendizagem da Matemática: identificação e intervenção

CORÁLIA PIMENTA

Certamente já ouviu falar de dislexia, mas será que já ouviu falar de discalculia?

O termo discalculia e as dificuldades que dela decorrem parecem não ser do conhecimento geral. Contudo, segundo a *British Dyslexia Association* a sua prevalência é muito semelhante à da dislexia, afetando entre 3% a 6% da população. Ainda que não haja uma definição consensual para a discalculia, estudos realizados no campo da neuropsicologia indiciam que se trata de uma condição decorrente do desenvolvimento neurológico que afeta o normal funcionamento das competências aritméticas. Surge, por vezes, associada à dislexia, sendo apelidada de *dislexia da matemática* ou *dislexia dos números*. De facto, existem algumas semelhanças entre a discalculia e a dislexia, não só as que dizem respeito à prevalência, como também as que estão associadas à etiologia, à definição, à atitude dos alunos e à intervenção específica que pode ser ministrada (Chinn & Ashcroft, 2007). Porém, a discalculia retrata situações mais complexas do que aquelas que estão associadas à inversão, omissão ou substituição de números e símbolos. Alunos discalcúlicos registam maior dificuldade na compreensão e no acesso rápido a conceitos numéricos, por apresentarem limitações na construção do sentido do número e na aquisição de conceitos matemáticos básicos (Butterworth, 2005).

O termo discalculia foi introduzido por Kosc (1974), a propósito da identificação de dificuldades associadas à aprendizagem da aritmética. Este utilizou a expressão *discalculia do desenvolvimento* (DD) para distinguir o termo discalculia de outras manifestações semelhantes, mas motivadas por lesões cerebrais, também designadas por *discalculia adquirida* ou *acalculia*.

Investigações mais recentes (De Smedt, Noël, Gilmore, & Ansari, 2013) sugerem uma distinção entre DD primária, associada ao comprometimento do desenvolvimento de mecanismos cerebrais para o processamento de informação numérica, e DD secundária, referente a fatores externos que condicionam a aprendizagem da matemática, tais como a instrução educacional desadequada, perturbações de atenção, comportamentais, entre outras de domínio cognitivo geral.

DISCALCULIA: DEFINIÇÃO E DIAGNÓSTICO

Alguns investigadores consideram que o desconhecimento que ainda existe em relação à discalculia se deve ao facto de

tanto a definição como o diagnóstico permanecerem ambíguos (Mazzocco & Myers, 2003). Talvez por esse motivo, a publicação da DSM-5 (*diagnostic and statistical manual of mental disorders*, 2013) fosse aguardada com alguma ansiedade: a possibilidade de alargar o diagnóstico a alunos com esse perfil proporcionaria uma intervenção atempada e adequada. A discalculia será, de acordo com esta avaliação psicológica, retratada à semelhança de outras dificuldades de aprendizagem. Será, dessa forma, definida como uma perturbação de aprendizagem específica com défice na matemática, caracterizada por uma significativa dificuldade no conceito de número, na memorização de factos aritméticos, na fluência e precisão do cálculo e na precisão do raciocínio matemático (Portal Dislexia Português, 2019). Realça-se, no entanto, que este diagnóstico só poderá ser adotado caso as referidas dificuldades persistam por mais de seis meses, depois de se proporcionar o apoio especializado de que o aluno necessita, e na ausência de deficiência intelectual, acuidade visual ou auditiva não corrigida, desordem mental (depressão, ansiedade...), desordem neurológica, adversidade psicossocial, proficiência na língua de instrução académica e de instrução educacional inadequada. Constatou-se, desta forma, não existir uma caracterização evidente da discalculia, não sendo apresentados critérios específicos que ajudem a identificar se um aluno é, ou não, discalcúlico. Por esse motivo, continuará a ser necessário recorrer aos resultados da investigação para identificar essas dificuldades e fazer o diagnóstico.

Segundo Butterworth (2005), os alunos com discalculia têm dificuldade em adquirir competências matemáticas e em compreender conceitos numéricos simples. Podem não ter uma compreensão numérica intuitiva e ter problemas na aprendizagem de factos e procedimentos numéricos. Podem evidenciar sucesso na aprendizagem de determinado conteúdo, mas ele resultar de um elevado domínio procedimental, continuando, por isso, a existir dificuldades conceptuais. Por isso, aquele investigador sugere que, se determinado aluno for empenhado e registar resultados satisfatórios na globalidade das disciplinas, mas apresentar um ritmo de trabalho lento, dificuldades inesperadas na aprendizagem de conteúdos matemáticos e, eventualmente, níveis de ansiedade superiores ao que seria de esperar para a sua faixa etária, seja considerada a possibilidade de ele apresentar uma perturbação de aprendizagem específica, compatível com a discalculia.

Face ao restrito acesso a testes de diagnóstico aferidos para a população portuguesa, o diagnóstico também deverá contemplar uma anamnese que transmita a recolha de informação pertinente sobre a história clínica e familiar do aluno, o seu percurso escolar (domínios comportamental, cognitivo, atencional, de memória e de socialização) e elementos relacionados com a gestação, parto, desenvolvimento psicomotor, visão, audição, linguagem, hábitos de sono, entre outros.

Alguns investigadores consideram que é possível aplicar instrumentos que permitam diferenciar situações de discalculia de outras dificuldades decorrentes de uma reduzida numeracia. Butterworth (2003), por exemplo, considera que o tempo que determinado aluno necessita para enumerar um conjunto de objetos ou estabelecer uma comparação numérica (*dyscalculia screener*) permite fazer o reconhecimento de tais situações. Outros investigadores optam por testar a acuidade numérica, solicitando a escolha do conjunto com maior número de objetos (figura 1).

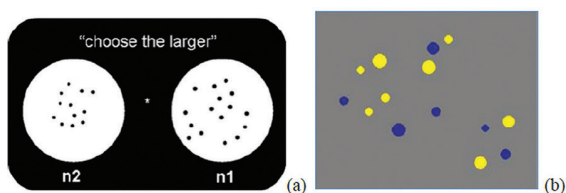


Figura 1. *Clouds of dots task*. (a) método utilizado por Piazza, Facoetti, Trussardi, Berteletti, Conte, Lucangeli e Zorzi (2010). (b) método utilizado por Halberda, Mazocco e Feigenson (2008), à solicitação de qual seria o maior número de círculos, amarelos ou azuis.

Butterworth considera que, dependendo da faixa etária, na enumeração de objetos (figura 2) a representação espacial permite estabelecer uma associação imediata a um número de círculos inferior ou igual a quatro. A rapidez, a precisão e a confiança com que é dada a resposta (*subitizing*) ajudam a identificar situações de discalculia, no sentido em que o aluno procurará realizar a contagem ou adivinhar o número de círculos, indicando um número aleatório. Haverá, no entanto, maior precisão, rapidez e confiança quando aumentar a distância entre os círculos (*distance effect*).

Quantos círculos se podem contar?

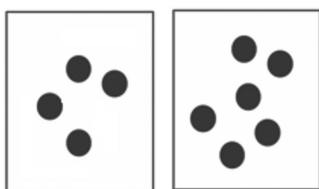


Figura 2. Enumeração de objetos

Por sua vez, os testes de ordenação numérica (figura 3) também facilitam o diagnóstico da discalculia, pois requerem a habilidade dos alunos para reconhecer e compreender numerosidades, ou seja, o entendimento dos números e os seus significados.

Onde se encontra o maior número de objetos?
Qual é o maior número?

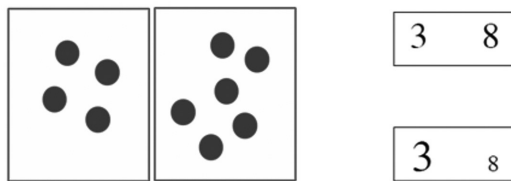


Figura 3. Ordenação numérica

Segundo Butterworth (2003), quando se questiona qual é o conjunto que apresenta maior número de círculos, os alunos discalculícos podem não ser imediatos nesse reconhecimento e até evidenciarem necessidade de efetuar a contagem. Por sua vez, quando se solicita a identificação do maior de dois números, a dimensão (tamanho) do numeral que apresenta maior valor numérico ser inferior interfere com o julgamento do aluno discalculíco. Esta dificuldade é denominada por *efeito incongruência ou interferência* (*incongruity effect or interference*). Concluindo, a discalculia é uma perturbação que se mantém ao longo da vida, apesar de as suas manifestações se alterarem de acordo com a idade e maturidade do indivíduo, afetando o desempenho educacional e a realização das atividades diárias. Por isso, quanto mais precoce for o diagnóstico e, por conseguinte, a intervenção, maior possibilidade terá o aluno discalculíco de se apropriar de um conjunto de estratégias que lhe permitam acompanhar o ritmo e o desempenho de outros colegas da mesma faixa etária.

DISCALCULIA: A RELAÇÃO ENTRE AS ESTRUTURAS COGNITIVA E NEUROLÓGICA

Fatores como a prematuridade e o reduzido crescimento intrauterino e a influência genética (hereditariedade), ou mesmo a exposição ao álcool e a drogas durante a gravidez, têm sido documentados como possíveis causas para o diagnóstico da discalculia.

Os resultados das investigações realizadas no campo da neurociência (Howard-Jones, Varma, Ansari, Butterworth, De Smedt, Goswami, & Thomas, 2016) têm revelado a existência de uma forte relação entre as funções e estruturas do cérebro e as habilidades cognitivas associadas ao processamento numérico e à aquisição de conceitos matemáticos. A reduzida ativação cerebral observada durante a realização destas atividades poderá ter explicação nas alterações funcionais que ocorrem na região intraparietal e na região inferior frontal do córtex cerebral. Os investigadores acreditam que através de uma intervenção atempada e adequada é possível estimular estas áreas com menor ativação, conceito conhecido por neuroplasticidade. A discalculia é, assim, considerada uma anomalia funcional (ativação cerebral reduzida) e estrutural (as áreas cerebrais responsáveis pelo cálculo apresentam uma estrutura diferente), adquirida antes do nascimento e que persiste ao longo da vida.

CARACTERÍSTICAS DO ALUNO DISCALCÚLICO: DA INVESTIGAÇÃO À SALA DE AULA

A discalculia pode ser identificada quando a criança frequenta o pré-escolar ou os primeiros anos do ensino básico, uma vez que interfere com a aquisição de habilidades básicas da matemática, tal como aprender a contar. Quando a intervenção não é proporcionada nestes momentos, é natural que as dificuldades se acentuem e que se torne difícil acompanhar a aprendizagem de conteúdos de matemática de maior complexidade. No mesmo sentido, essas dificuldades também se perpetuam na vida diária e na idade adulta, evidenciando-se na realização de atividades que exijam a compreensão e a manipulação de informação numérica, a interpretação de tabelas e gráficos, a gestão do tempo e dinheiro e a realização de cálculos numéricos simples. Dada a necessidade de contribuir para a identificação da discalculia em contexto escolar, segue-se um conjunto de dificuldades que têm vindo a ser reportadas e sustentadas pela investigação desenvolvida nesta área. Atente-se, no entanto, ao facto de tais dificuldades não serem obrigatoriamente sentidas da mesma forma por alunos distintos, mesmo que esses sejam da mesma faixa etária, bem como de poderem estar associadas a graus de severidade diferentes. De um modo global, os alunos discalcúlicos apresentam níveis de ansiedade alterados, associados ao facto de tomarem consciência de que as tarefas que lhes são propostas geram maior dificuldade a si do que aos seus colegas, que são mais demorados na sua realização e que nem sempre o empenho impresso se traduz no sucesso esperado. Geralmente, não demonstram qualquer interesse por jogos ou desafios, mostram insegurança no cálculo e no desenvolvimento do raciocínio matemático, assumindo uma postura de desistência perante a primeira dificuldade. Registam, igualmente, dificuldades em recordar factos numéricos (como, por exemplo, memorizar a tabuada ou conservar a imagem de um número durante a realização de uma operação numérica) e em resolver problemas (atrapalham-se quando existem instruções múltiplas e registam problemas no reconhecimento das operações envolvidas). O cálculo é, geralmente, imaturo (contam pelos dedos, não conseguindo seleccionar outras estratégias), lento e impreciso. Registam-se, seguidamente, exemplos de algumas dificuldades específicas:

- enumerar um conjunto reduzido de objetos, sem os manipular ou contar, bem como adotar estratégias que minimizem o tempo e esforço necessário para o fazer;
- efetuar contagens (memorizar a sequência ordenada dos números e dar continuidade à mesma, ainda que essa não se inicie no número um) sem omitir números, sobretudo se se tratar de uma contagem regressiva;
- associar um número à quantidade de objetos apresentados, compreendendo o significado da contagem (por exemplo, podem ser solicitados cinco objetos e serem devolvidos um número indiferenciado dos mesmos);

- relacionar o número com o símbolo, designação ou decomposição (por exemplo, compreender que “7” por ser representado pela expressão “sete”, ou mesmo, pela expressão);
- reconhecer padrões numéricos simples;
- efetuar a leitura de informação com muitos algarismos;
- realizar cálculos numéricos básicos, recorrendo também ao cálculo mental;
- seleccionar e representar informação presente em enunciados de problemas, tabelas e gráficos;
- estabelecer comparações ou ordenar números;
- adquirir os conceitos de quantidade, medida, tempo, espaço e os que se relacionam com o sistema monetário;
- efetuar a leitura e escrita de números e sinais (os alunos discalcúlicos podem inverter, substituir, adicionar ou omitir números – figura 4);
- reconhecer as representações espaciais visuais de números, tais como compreender que a posição de número ou sinal pode interferir com o resultado);
- compreender, memorizar e utilizar procedimentos, regras e fórmulas;
- simplificar expressões, frações e resolver equações.

Outras dificuldades, para além das supramencionadas, poderão ser analisadas com o devido pormenor nas referências bibliográficas que acompanham este artigo, bem como serem diagnosticadas por técnicos especializados e identificadas por docentes no seguimento do trabalho que estes desenvolvem com os seus alunos em contexto escolar.

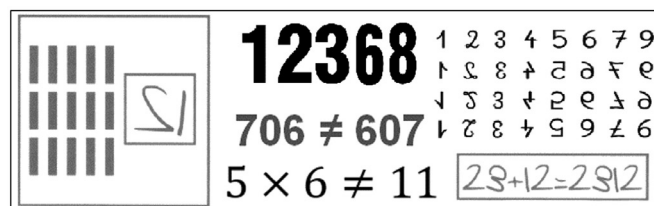


Figura 4. Dificuldades de leitura e escrita de números e símbolos

DISCALCULIA: O IMPACTO POSITIVO DA IDENTIFICAÇÃO E DA INTERVENÇÃO EM CONTEXTO ESCOLAR

Estando a discalculia relacionada com uma dificuldade no domínio do sentido numérico, a intervenção educacional fará toda a diferença quando se procuram melhorar os mecanismos de construção do conceito de número e suas relações. Intervenções bem-sucedidas parecem estar relacionadas com a adoção de metodologias apelativas e estratégias compatíveis com a especificidade do aluno, centradas nas dificuldades identificadas, que promovem sobretudo a aquisição de competências básicas e que sejam ministradas nos primeiros anos do ensino básico, em articulação com o trabalho desenvolvido por todos os agentes envolvidos no processo. De acordo com esta perspetiva, ainda que seja realizado um trabalho individualizado de reforço e antecipação das aprendizagens, é essencial que também se

utilizem estratégias eficazes e se ministre o apoio necessário durante o trabalho realizado na sala de aula, com o grupo-turma. Estar-se-á, dessa forma, a proporcionar um melhor nível de compreensão, envolvimento e participação do aluno, respeitando-se a sua individualidade.

A intervenção digital (prática orientada através da utilização de jogos, vídeos, plataformas digitais, entre outras), para além de ser apelativa, ajustável às diferentes faixas etárias e de fácil domínio por parte dos alunos, parece também assumir um espaço privilegiado para o treino de competências básicas da matemática, exercitar a memória, a concentração e desenvolver a capacidade de esforço.

De qualquer forma, interessa reter que o professor de Matemática poderá assumir um papel de extrema relevância na identificação destas situações e na adoção de metodologias e estratégias que contribuam para o desenvolvimento dos alunos. Registrar as dificuldades observadas em contexto sala de aula, solicitar o diagnóstico da situação e envolver-se na aplicação de um programa de intervenção fará, certamente, toda a diferença. Segue-se, um conjunto de estratégias que poderão, de alguma forma, constar nesse programa de intervenção e auxiliar o docente de Matemática:

- incentivar o aluno a expor as suas dificuldades, mesmo que de modo mais reservado;
- reduzir o número de conceitos abstratos e o recurso a conceitos memorizados, ou à memorização, quando se introduz um conteúdo;
- ensinar mnemónicas e permitir a utilização de pistas visuais;
- apresentar, na medida do possível, exemplos contextualizados;
- utilizar, sempre que ajustável, material manipulável e recursos audiovisuais, sobretudo interativos;
- explorar com o aluno o conteúdo matemático presente em enunciados, tabelas, gráficos e esquemas, incentivando a seleção, a representação e a organização dos dados recolhidos, bem como dos conhecimentos e dos raciocínios desenvolvidos;
- reforçar, periodicamente, as noções matemáticas trabalhadas;
- incentivar o treino sistemático, dado que esse é fundamental para se conseguirem automatizar e compreender processos;
- permitir a utilização de calculadora e formulários;
- redigir questões de uma forma clara e objetiva, quer nas tarefas formativas propostas como na fichas de avaliação;
- reduzir o número de instruções múltiplas, distribuindo o questionamento por diferentes alíneas;
- ajustar a tarefa ao perfil do aluno, optando, sempre que necessário, por reduzir o número de questões, alterar a forma (note que nem sempre as questões de escolha múltipla são uma boa opção para o aluno discalculico) ou atribuir tolerância de tempo para a sua realização;
- permitir a despenalização dos erros cometidos por omissões, substituições, adições e inversões de números e símbolos.

CONCLUSÕES

Depois de toda a informação transmitida, é importante reforçar que a discalculia deveria receber a mesma atenção que outros problemas de aprendizagem têm recebido, designadamente no que se refere à intervenção. De facto, sabe-se que o aluno discalculico pode atingir um bom desempenho matemático se for auxiliado e sujeito a um ensino adequado à sua situação – que é um dever de todos nós. Porém, para que tal aconteça é necessário que a comunidade promova e permita que docentes e técnicos especializados (por exemplo, psicólogos educacionais) assumam um papel mais interventivo, respetivamente na identificação e no diagnóstico de tais situações, facilitando, assim, a materialização de um ensino adequado aos alunos discalculicos.

Referências

- Butterworth, B. (2003). *Dyscalculia screener: Highlighting children with specific learning difficulties in mathematics*. London: NFER-Nelson.
- Butterworth, B. (2005). Developmental dyscalculia. In J. I. D. Campbell (Ed.). *Handbook of mathematical cognition*. Hove: Psychology Press.
- Chinn, S., & Ashcroft, R. (2007). *Mathematics for Dyslexics, including Dyscalculia* (3rd edition). London: Wiley Blackwell.
- De Smedt, B., Noël, M., Gilmore, C., & Ansari, D. (2013). The relationship between symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing and the typical and atypical development of mathematics: a review of evidence from brain and behavior. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 48–55.
- Halberda, J., Mazocco, M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, 455, 665–668.
- Howard-Jones, P. A., Varma, S., Ansari, D., Butterworth, B., De Smedt, B., Goswami, U., & Thomas, M. S. C. (2016). The principles and practices of educational neuroscience: Comment on Bowers. *Psychological Review*, 123, 620–627.
- Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, 7, 164–177.
- Mazocco, M. M., & Myers, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia* 53, 218–253.
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116(1), 33–41.
- Pimenta, C., & Saraiva, M.J. (2013). As dificuldades de aprendizagem das expressões algébricas por uma aluna discalculica. *Quadrante*, XXII(1), 29–52.
- Pimenta, C. M. S. (2011). *A aprendizagem das funções por alunos discalculicos*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade da Beira Interior.

CORÁLIA PIMENTA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS NUNO DE SANTA MARIA, TOMAR

O ensino e a aprendizagem da proporcionalidade direta no 9.º ano: Contributo de uma unidade didática em ambiente de sala de aula invertida

O conceito de proporcionalidade é inerente a vários acontecimentos do mundo real e um dos conteúdos centrais do programa de matemática fundamental. No Brasil, como em outros países, o ensino e aprendizagem da proporcionalidade direta está centrado no uso da regra de três e na proficiência da sua aplicação em detrimento do desenvolvimento do raciocínio proporcional (Avelar, 2018). Essa prática é reforçada pelos manuais escolares, que apresentam a regra de três como estratégia central ou única, com consequências sobre a qualidade da aprendizagem matemática. Na nossa opinião, quando os estudantes se refugiam no uso de regras, enquanto estratégia rápida e infalível, tendem a desvalorizar aspetos fundamentais da aprendizagem da matemática, como por exemplo, a verificação da plausibilidade dos valores obtidos. Além disso, o uso da regra de três permeia com o erro que os estudantes parecem não ser capazes de identificar.

Este artigo apresenta um episódio do desenvolvimento de uma unidade didática, em ambiente de sala de aula invertida, que procura desenvolver o raciocínio proporcional nos estudantes. Como ser capaz de distinguir as relações de proporcionalidade direta daquelas que o não são é um dos aspetos do raciocínio proporcional, pelo que esta unidade didática é constituída por problemas em que há proporcionalidade direta e outros em que esta relação não está presente. Constatámos que, no 9.º ano de escolaridade, alguns estudantes usam a regra de três sem questionar a sua aplicabilidade, pelo que daremos destaque à análise do erro que resulta do uso inadequado dessa regra. Na nossa opinião, a unidade didática que visa o desenvolvimento do raciocínio proporcional deve levar os estudantes a explorar com compreensão a relação de proporcionalidade direta e deve ser um momento privilegiado para os esclarecer sobre a fragilidade do uso da regra de três que, enraizada na cultura escolar, condiciona a sua capacidade de raciocínio.

ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROPORCIONALIDADE DIRETA COM ÊNFASE NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

O ensino e aprendizagem da proporcionalidade direta, segundo Miranda (2016), Behr, Harel, Post, e Lesh (1992), Lamon (2007),

Karplus, Steven, e Stage (1983), deve procurar desenvolver o raciocínio proporcional nos estudantes em vez de estar arreigado à memorização de regras. Estes autores também referem a importância do uso com compreensão de estratégias multiplicativas, em substituição das estratégias aditivas usadas pelos estudantes dos anos iniciais na resolução de tarefas sobre proporcionalidade direta. Isto é, destacam a compreensão da estrutura multiplicativa (Vergnaud, citado por Miranda, 2016) inerente à relação de proporcionalidade direta, como um marco no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Por seu lado, Silvestre (2012) sistematizou alguns dos mais importantes estudos sobre proporcionalidade e defendeu que o raciocínio proporcional envolve três aspetos:

- (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não as têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade para resolver vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões) (p. 281).

Neste estudo, a construção da unidade de ensino mobilizou as propostas de cunho exploratório de Silvestre (2012) e de Ponte, Silvestre, Garcia, e Costa (2010), para o ensino e aprendizagem da proporcionalidade direta. Segundo os autores, o ensino e aprendizagem da proporcionalidade direta deve ter foco na exploração de regularidades, em particular nas relações das grandezas (covariância e invariância) que envolvem a relação de proporcionalidade direta na resolução de problemas de valor omissivo e de comparação e no uso de diferentes representações.

UNIDADE DIDÁTICA EM AMBIENTE DE SALA DE AULA INVERTIDA

O ambiente de sala de aula invertida (SAII) é uma abordagem que pode usar vídeo-aulas para melhorar a qualidade da aprendizagem da matemática. Como referem Brame (2013), Valente (2014), Bergmann e Sams (2016), Rios (2017) e Avelar (2018), esta abordagem procura respeitar o ritmo de

aprendizagem individual, propicia a interação entre os estudantes e o professor, altera o modo como os pais se relacionam com a escola e, sobretudo, ultrapassa a fronteira física da sala de aula.

*O Flipped Learning Network*¹, ao promover práticas inovadoras, esclarece que o ambiente SAI vai além de práticas pedagógicas de inversão de espaços físicos e tarefas e definiu quatro princípios orientadores para o seu desenvolvimento: (i) ambiente flexível; ii) cultura de aprendizagem; iii) conteúdo intencional e, iv) educador com habilitação profissional.

No que respeita à inversão na organização das atividades escolares, parte da apresentação dos conteúdos, de forma mais ou menos criativa, ocorre fora da sala e dos horários das aulas, através de materiais didáticos, por exemplo vídeos disponibilizados pelo professor. Por sua vez, o tradicional trabalho para casa passa a ser trabalhado em sala de aula. Desta forma, as aulas serão momentos de interação efetiva entre estudantes e professor, isto é, o debate, a investigação, a pesquisa podem ser delineadas de acordo com os conteúdos previamente apresentados nos vídeos.

A produção dos vídeos, segundo Bergmann e Sams (2016), tem quatro etapas: planeamento da aula, sem esquecer a apresentação dos seus objetivos; gravação do vídeo que deve incluir as palavras do professor; edição do vídeo para o transformar num recurso claro, conciso e curto (qualidades que o tornam apetecível aos estudantes) e; divulgação do vídeo em plataformas *online*.

A SAI pode apresentar alguns constrangimentos, contudo, consideramos que estes são facilmente superados, tendo em consideração a motivação revelada pela maioria dos estudantes envolvidos neste ambiente de trabalho.

PERCURSO METODOLÓGICO

Esta pesquisa, de cunho qualitativo, é uma investigação sobre a prática da primeira autora e procurou compreender o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes do 9.º ano, através de uma abordagem exploratória e no ambiente de Sala de Aula Invertida. A planificação inicial da unidade didática previa a apresentação de “elementos” para discussão por parte dos estudantes, identificados durante a visualização da vídeo-aula. A planificação inicial foi alterada quando, durante as primeiras aulas, a professora considerou que alguns dos diálogos dos estudantes sobre as suas dúvidas, erros e processos de resolução apresentavam potencial didático. Na opinião da professora, considerando a sua experiência anterior, a inclusão da participação dos estudantes nas vídeos-aulas como personagens que retratam acontecimentos reais contribuiu para aumentar

o seu interesse e empenho na resolução das tarefas propostas. Neste artigo, é apresentado o episódio referente ao uso da “regra de três”, que uma aluna “vinda de outra escola” apresenta na aula como sendo infalível, pelo que a professora considerou oportuno esclarecer os estudantes sobre o uso inadequado da “regra de três”, levando-os a refletir sobre a importância de resolver problemas com compreensão.

Os intervenientes são a professora e os vinte e dois estudantes de 9.º ano, onze meninas e onze meninos, com idades entre 14 e 15 anos. Na coleta de dados, foram usados registos em áudio e vídeo, o diário de campo da professora e os registos escritos dos estudantes. Para preservar a identidade dos estudantes, os nomes dos intervenientes são fictícios.

EPISÓDIO SUGA: O INESPERADO...

Durante a resolução de uma tarefa em sala de aula, a aluna Suga insistia na ideia da existência de um método mais simples para ensinar o conteúdo Proporcionalidade Direta, questionando a resolução dos colegas que usavam as estratégias escalar (fator escalar) ou funcional (constante de proporcionalidade).

Numa das aulas, quando os estudantes resolviam tarefas com foco no reconhecimento da existência de proporcionalidade direta entre variáveis, a professora apercebeu-se de uma maior agitação num grupo e foi solicitada a sua presença para esclarecer o grupo sobre a opinião da aluna Suga: “não precisa de olhar nada sobre regularidades, nunca ouvi falar disso! Basta colocar os números um abaixo do outro, dois a dois e multiplicar cruzado que funciona sempre, isso é regra de três!”

A professora alertou o grupo, em particular a aluna Suga, sobre o objetivo da tarefa proposta, mas esta aluna parecia não o compreender e insistia que o seu “método era infalível” e com um sorriso no rosto dizia que a “regra de três é vida, professora!”. A professora percebeu que os estudantes estavam sensíveis ao método de Suga, esquecendo o objetivo da tarefa, pois teriam menos trabalho.

O primeiro problema diz respeito a uma empresa que pretende asfaltar dois troços de uma estrada, um com 20 km e outro com 34 km:

Professora: Então, nós temos 20 mais 34 Km pra asfaltar no Piauí, aí vamos à primeira questão: uma empresa de engenharia que ganhou a licitação dessa obra disse que é capaz de asfaltar 42 Km em 14 dias, quantos dias essa empresa vai gastar pra asfaltar os trechos citados?

Suga: Qual é a pergunta?

Spinardi: Eu não entendi a pergunta direito não.

Professora: Essa empresa asfalta 42 Km em 14 dias.

¹Flipped Learning Network (FLN), uma comunidade online, sem fins lucrativos, com mais de 20 mil educadores, de todo mundo, interessados em aprender sobre SAI. <https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/>

Suga: Quantos Km ela vai asfaltar? Regra de três! Spinardi faz aí o 34 vezes 14.

Spinardi: Espera!

Professora: Suga, descubra a regularidade, faça, por exemplo, pela redução à unidade.

Suga: Não, regularidade é chato!

Jimin: Dá para dividir o 42 e o 14 por 7; em dois dias asfaltam 6 km. Agora não é só multiplicar por 9 dos dois lados? 6×9 dá 54 então vai ser 18 dias. O que você pensou, Suga?

Suga: Regra de três.

Jimin: Professora, o jeito da Suga é mais prático.

Jimin usou uma estratégia de escalar para resolver o problema e revelou interesse em conhecer o método de Suga, talvez pela forma como ela o caracterizava. Naquele instante, a professora pensou ser necessário intervir porque o seu objetivo era desenvolver o raciocínio proporcional dos estudantes, e o seu propósito parecia estar a ser condicionado por uma regra de cálculo. Assim, a professora pediu a Suga para explicar a “regra de três”, tendo ela referido que em todos os problemas aparecerem três números, que devem ser colocados um ao lado do outro, dois a dois. O terceiro número é escrito em baixo do primeiro, faltando um número, que será designado por “x”. Concluiu a sua explicação com “é só multiplicar cruzado que dá certo e se descobre valor do x”.

No seguimento dessa explicação, a professora pediu ao grupo de estudantes a resolução de dois problemas.

Professora: Um carro percorre um trajeto com velocidade média de 70 km/h em 35 minutos. Quanto tempo gastará pra percorrer esse mesmo trajeto se estiver com uma velocidade de 80 km/h?

Suga: Coloca o 70 e 35 e depois o 80 e o x e, multiplica cruzado. 70 está para 35 assim como 80 está para x, igual a 40. Viu, deu certo!

(...)

Spinardi: Professora, se a velocidade foi maior, ele não teria que gastar menos tempo para percorrer esse trajeto?

Todos os alunos concordaram com a opinião de Spinardi. Mas, sem qualquer comentário, a professora colocou outro problema:

Professora: Uma pessoa comprou 9 m^2 de cerâmica para reformar o seu quarto que é em forma de um quadrado que tem 3 metros de comprimento de lado. Quantos metros de cerâmica serão necessários para reformar uma sala em formato quadrado cujo comprimento do lado é de 6 metros?

(...)

Suga: Mesma coisa professora, coloca o 9 e o 3 em cima e depois o x e o 6 em baixo. Assim, 9 está para x assim como 3 está para 6 e multiplica cruzado. Dá 18 m^2 ; viu, deu certo. Regra de três é vida, professora!

Jimin: Professora, se a sala é quadrada, não teria que calcular lado $\times$ lado? $6 \text{ m} \times 6 \text{ m}$ dá 36 m^2 . Quem está certo?

Os restantes elementos do grupo concordaram com a explicação do Jimin e a professora explicou que a “regra de três” não pode ser usada na resolução de todos os problemas estereotipados que “apresentam três valores e pedem um quarto valor”, tendo usado os dois problemas como exemplos.

Este episódio de sala de aula que envolveu um grupo de estudantes foi gravado e reproduzido em vídeo, tendo recebido a designação “A regra de três e o raciocínio proporcional”. Os áudios gravados para o vídeo são dos próprios estudantes.

Na aula seguinte, após o visionamento da vídeo-aula em casa, realizou-se uma discussão em grande grupo que finalizou com a redação de um comentário, pelos estudantes, sobre o que tinham aprendido com a vídeo-aula:

Resposta 1: Entendi que nem sempre a gente tem que usar a regra de três e que nem sempre vai funcionar, por isso a gente tem que pensar.

Resposta 2: Aprendi que a regra de três só funciona se as grandezas forem proporcionais. Se não houver regularidade, não há proporcionalidade.

Resposta 3:

Aprendi com o vídeo algo que não sabia e não estava acostumada a fazer; observar em quais situações usamos a regra de três, pois quando aprendi, apenas aplicávamos a regra sem fazer nenhuma objeção, passando exercícios que apenas se encaixavam nesse método.

Para utilizar a regra de três, precisamos observar se as grandezas que estão sendo trabalhadas são proporcionais, se relacionam com regularidade. Caso contrário, a regra não poderá ser aplicada. Além disso, consegui entender de onde vem a regra de três; seus fundamentos e sua origem. E que também, muitos professores acabam ensinando de forma “errada” como esse método deve ser usado.

Figura 1. Registro escrito de Suga

Os três estudantes revelam ter compreendido que existe a regra de três, mas que esta só é aplicável quando as grandezas são diretamente proporcionais.

Este episódio, que não estava previsto na unidade didática, revela a importância de levar os estudantes a resolver problemas com compreensão, experienciando situações em que o uso de regras culturalmente aceites, são ineficazes. Assim, os estudantes percebem que as regras não devem ser usadas indiscriminadamente com base num pressuposto simplista, como o tipo de problema. O episódio SAI permitiu alargar a

discussão do grupo à sala de aula, na qual a professora explicou a “regra de três” através da exploração das relações multiplicativas inerentes à relação de proporcionalidade direta. Posteriormente, “regra de três é vida!” tornou-se motivo de alguns risos teatrais e boas lembranças escolares.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação em sala de aula é uma tarefa complexa e única, pois nela participam vários atores que de forma planeada, mas também incerta, interferem no ensino e aprendizagem. A unidade didática com vista ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, levando os estudantes a saber distinguir relações de proporcionalidade direta de outras que o não são e a resolver problemas com compreensão, usando estratégias escalares (fator escalar) e funcionais (constante de proporcionalidade), foi alterada para contemplar episódios reais de sala de aula nos quais os estudantes apresentam tarefas, resoluções e dúvidas.

Neste artigo, apresentámos um episódio que revela como o uso de uma regra sem compreensão e a convicção da sua eficácia por parte de uma estudante pode condicionar a aprendizagem para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Apesar da cultura da sala de aula estar centrada na aprendizagem com compreensão, é provável que os restantes estudantes tivessem optado pelo uso da “regra de três” apresentada por uma estudante recém ingressada na turma, optando pelo “ser mais prático” em vez da resolução dos problemas com compreensão. De facto, sem a intervenção da professora, o uso de uma regra, culturalmente aceite como infalível, poderia ter afastado o grupo de estudantes dos objetivos da unidade didática. Suga revelou conhecer o procedimento de cálculo da “regra de três”, que usa sem questionar a sua aplicabilidade, pois não aprecia os acontecimentos descritos nos problemas. A construção da vídeo-aula e o seu visionamento levou os estudantes a aprofundar aspetos do seu raciocínio proporcional, pois mostraram perceber que a “regra de três” só pode ser usada quando reconhecem a existência da relação de proporcionalidade direta.

Na nossa opinião, o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes é fundamental nas aprendizagens de vários conteúdos matemáticos e de outras ciências, pelo que a aprendizagem do conteúdo proporcionalidade direta não pode ser reduzida ao uso da “regra de três”, criando a ilusão de que todos os acontecimentos envolvem uma relação de proporcionalidade direta e a de facilidade e eficácia. Uma unidade didática que visa o desenvolvimento do raciocínio proporcional deve levar os estudantes a explorar as regularidades multiplicativas da relação de proporcionalidade direta.

Referências

- Avelar, P. (2018). *Sala de Aula Invertida na Educação Matemática: Uma Experiência com Alunos do 9.º ano no ensino de proporcionalidade*. Dissertação de Mestrado. Promestre. Faculdade de Educação. Universidade Federal de Minas Gerais Universidade Federal de Minas Gerais.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York: MacMillan.
- Bergmann, J., & Sams, A. (2016). *A Sala de Aula Invertida: Uma metodologia ativa de aprendizagem*. Lisboa: Editora Portuguesa de Livros Técnicos e Científicos.
- Brame, C (2013) *Flipping the classroom*. *Vanderbilt University Center of Teaching*. Disponível em <https://cft.vanderbilt.edu/guides-subpages/flipping-the-classroom/> acesso em junho 2017.
- Karplus, R., Steven, P., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh e M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 45-90). Orlando: Academic Press.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age.
- Miranda, J. A. (2016). *Desenvolvimento do raciocínio proporcional: uma sequência didática para o sexto ano do ensino*. Dissertação de Mestrado Profissional, Universidade Federal de Uberlândia.
- Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C., & Costa, S. (2010). *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades*. Projeto IMLNA Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra.
- Silvestre, A. I. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: Trajetórias de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.
- Valente, J. (2014). *Aprendizagem Ativa no Ensino Superior: a proposta da sala de aula invertida*. Departamento de Multimeios, NIED e GGTE - Unicamp & Ced-PucSP. São Paulo.
- Rios, M. (2017). *Sala de aula invertida: uma abordagem pedagógica no ensino superior no Brasil*. Dissertação de Mestrado em Tecnologias, Comunicação e Educação, Universidade Federal de Uberlândia.

PETRINA AVELAR

ESCOLA MUNICIPAL MINERVINA AUGUSTA, BELO HORIZONTE

DIOGO FARIA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, BELO HORIZONTE

TERESINHA FUMI KAWASAKI

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, BELO HORIZONTE

Editorial

- 01** **A propósito das Recomendações — “nós” também temos que ser “eles”!**
Joaquim Félix

Artigos

- 09** **Os contributos de uma *Gallery Walk* para promover a comunicação matemática**
Joana Gamboa
- 15** **Ensino Secundário – Ensino Superior: (Des)Conexões**
Paulo Afonso, Jaime Carvalho e Silva, Teresa Moreira, Albano Silva
- 20** **Matemáticas na Raia 2019**
Cláudia Campos, Orquídea Santos
- 26** **Olhares sobre o ProfMat2019**
Lurdes Serrazina, Manuel Vara Pires
- 27** **Impressões sobre o Seminário de Investigação em Educação Matemática**
Adriana Richit
- 33** **Um olhar sobre a flexibilidade e autonomia curricular**
Elsa Campos
- 41** **A discalculia e as dificuldades na aprendizagem da Matemática: identificação e intervenção**
Corália Pimenta

Secções

- 03** **Pontos de vista, reações e ideias...**
O currículo de matemática, *Lígia Carvalho*
Dinâmicas de desenvolvimento curricular, *Rui Candeias*
Avaliação das aprendizagens, *Olívia Sousa*
Formação de educadores e professores, *Renata Carvalho*
- 25** **Materiais para a aula de Matemática**
Translações e rotações de Fez, *João Terroso*
- 29** **Tecnologias na Educação Matemática** *António Domingos*
Dois projetos de utilização de sensores pelas crianças para resolver problemas de poluição sonora na escola, *Maria João Silva, Margarida Rodrigues*
- 37** **Caderno de apontamentos de Geometria** *Cristina Loureiro*
A Hélice de Boerdijk-Coxeter ou Tetrahelix
- 38** **O Problema do ProfMat** *José Paulo Viana*
O Problema do ProfMat2019
- 39** **O Problema deste número** *José Paulo Viana*
Um triângulo e três circunferências
- 45** **Espaço GTI**
O ensino e a aprendizagem da proporcionalidade direta no 9.º ano: Contributo de uma unidade didática em ambiente de sala de aula invertida, *Petrina Avelar, Diogo Faria, Teresinha Fumi Kawasaki*