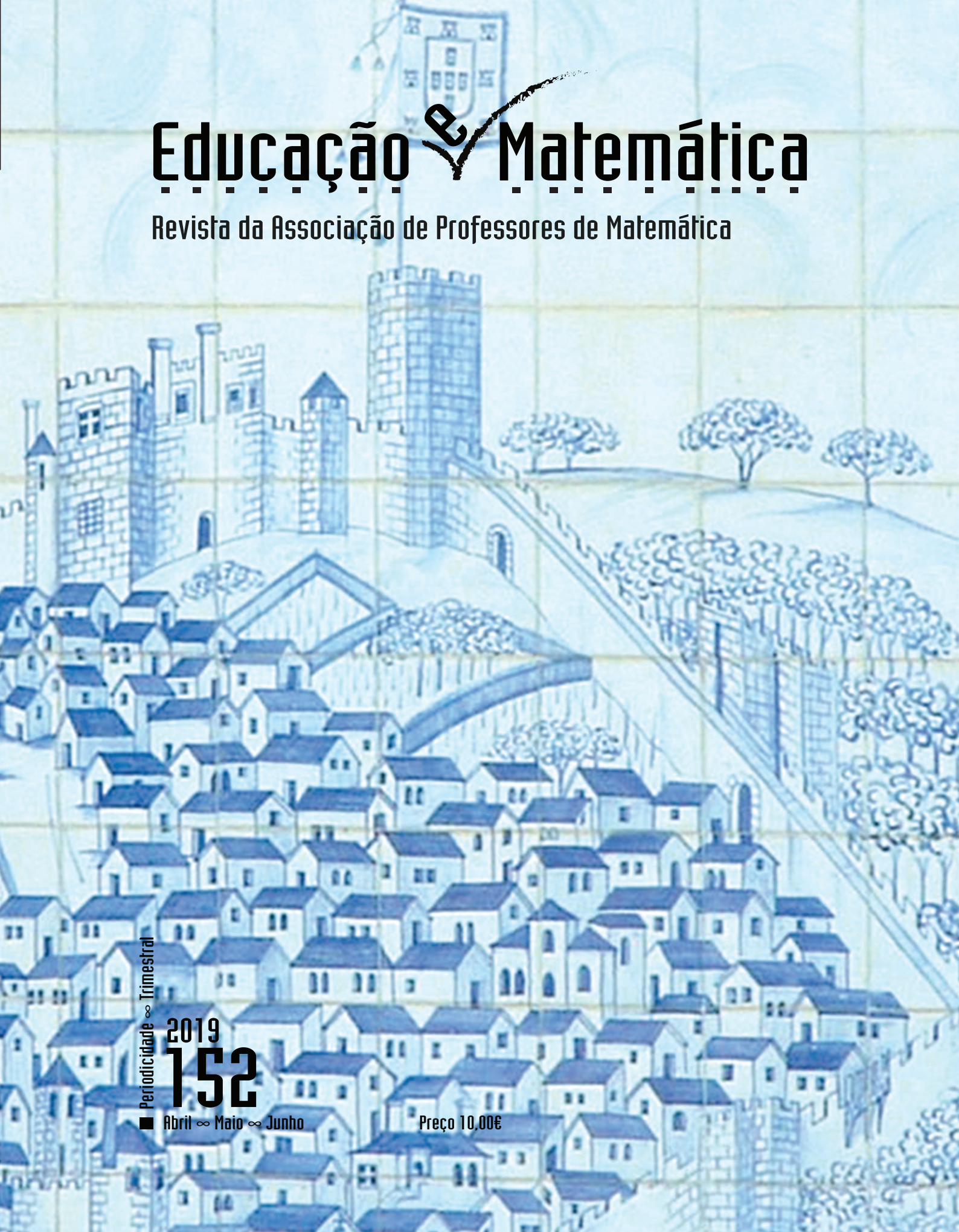




Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

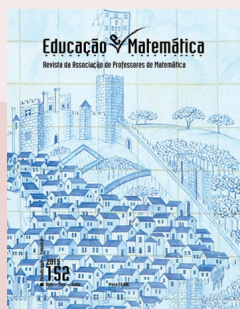
Periodicidade ∞ Trimestral

2019

152

■ Abril ∞ Maio ∞ Junho

Preço 10,00€



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Catarina Delgado
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Filipa Machado
	Helena Gil
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	João Terroso
	Manuela Pires
	Silvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Junho de 2019

Tiragem 1200 exemplares

Periodicidade

Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

Uma visita, por alguns locais virtuais, à cidade onde decorrerá o ProfMat 2019 permite conhecer factos históricos de Castelo Branco, desde a sua fundação até à atualidade.

A capa desta edição da Educação e Matemática retrata uma vista antiga do castelo e da cerca da cidade de Castelo Branco, que é possível observar num painel de azulejos existente no jardim do Paço da mesma cidade.

(Fonte: https://www.cm-castelobranco.pt/media/1582/jardim_do_paco_pormenor_azulejo_4.jpg)

Mário Baía

Neste número também colaboraram

Ana Isabel Silvestre, Ana Margarida Baioa, Ana Sofia Rézio, Associação Atractor, Beatriz Gouveia, David Costa, Direção da APM, Fernando Egídio Reis, Fernando Emídio, Helena Coutinho, Helena Martinho, João Correia de Freitas, João Mouro, José Luiz Pastore Mello, Lucília Teles, Margarida Font Amado, Margarida Raposo, M. Eugénia Jesus, M. Isabel Rocha, Patrick Götz, Susana Carreira, Vítor Godinho Lopes.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.
- Pela relevância das cores nalguns artigos deste número, a sua versão digital disponibilizada aos sócios no site da APM será publicada a cores.

Colchas de linho em fio de seda bordadas

Esta revista chegará aos participantes do ProfMat, sócios e não sócios da APM, em Castelo Branco; virá ao *nosso encontro* no nosso Encontro, *esse*, onde *professores de Matemática se encontram e reencontram, para apresentar e discutir, analisar e refletir, partilhar e compartilhar, ideias e experiências, questões e inquietações, constrangimentos e desafios. Encontro-lugar e tempo de encontro, de reflexão e de debate, onde (nos) queremos mostrar, afirmar, criticar, propor, que é uma das principais realizações da APM — Associação de Professores de Matemática.*

É por isso que neste momento, mesmo não sendo associado da APM, ou sobretudo se o não for, pomos nas suas mãos o que somos, o que queremos partilhar com os professores de Matemática e o que gostaríamos que ajudasse a construir.

A APM nasceu da vontade de um grupo alargado de professores de Matemática que em meados dos anos 80 do século XX, acompanhando o movimento internacional de renovação do ensino da Matemática, entendeu que o associativismo (uma das conquistas do 25 de abril em Portugal e pela qual alguns deles tinham sido perseguidos antes desse dia) daria consistência e sentido aos esforços individuais que cada um desenvolvia em prol da melhoria do ensino da Matemática no nosso país e forneceria a plataforma para convocar muitos mais.

A APM foi sonhada no primeiro ProfMat, em Lisboa no ano de 1985, e nasceu no segundo, em Portalegre, no ano seguinte, ano esse que também veria aprovada a Lei de Bases do Sistema Educativo nacional. Cresceu, fiel aos seus princípios fundacionais, procurando, em cada momento, dar resposta aos desafios que o devir histórico sempre coloca e provoca nas instituições e nas pessoas: o discernimento que busca, na fidelidade criativa e empenhada, um compromisso que atualize a ideia primeira, mantendo-a relevante no momento presente.

Ao longo destes mais de 30 anos, a APM tem sido *cuidada* pelos seus associados, pelos seus órgãos sociais e pelas suas instâncias associativas que lhe têm dado vida e vitalidade para intervir e propor, para denunciar e construir, para trabalhar com e para os professores de Matemática em prol de um ensino que suscite gosto e aprendizagens significativas por parte dos nossos alunos. Porque, em última análise, são eles os nossos principais destinatários; eles, os alunos, que ano após ano, nos colocam o

desafio sempre novo de melhorar, porque é para cada um deles que somos o que somos.

Como dizíamos no Editorial da Educação e Matemática n.º 131 que saiu no ProfMat de Évora em 2015: “nós, professores, continuamos investidos de um poder do qual não podemos abdicar, de uma autonomia que devemos defender, exercendo-a. Na sala de aula, olhos nos olhos com os nossos alunos, com maus ou bons programas, com avaliações que tendem a perverter a intencionalidade educativa do nosso trabalho, com o melhor recurso educativo que é o nosso saber, o nosso gostar e o nosso acreditar nesta tarefa, nós somos os pilares da educação”.

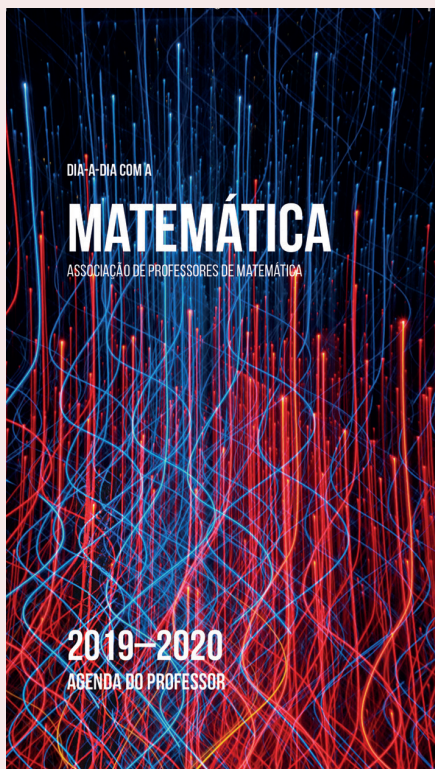
E é por isso e para isso que continuamos a trabalhar, para sermos cada vez mais lugar de pertença e de partilha para os professores de Matemática. Nos nossos Núcleos Regionais, nos Grupos de Trabalho, nas duas revistas que mantemos ininterruptamente desde as suas fundações, nos encontros — nacionais, temáticos, locais — que organizamos, nas colaborações institucionais e entre associações que assumimos, na formação que o Centro de Formação da APM prepara e propõe por todo o país, na intervenção no debate público sobre políticas educativas e sobre o ensino da Matemática, na nossa Sede (Centro de Recursos, Biblioteca e Loja) que queremos ao serviço dos professores e pais e também de alunos do ensino superior que se preparam para ser professores, nas nossas tarefas do dia a dia. E é por isso e para isso também que precisamos de todos os associados e de mais associados.

Hoje em Castelo Branco, nesta cidade de colchas bordadas a seda, a que o cartaz do ProfMat — e do SIEM — presta homenagem, reafirmamos esta vontade e este compromisso: tecer a APM, esta colcha do linho que vem da terra, esta colcha que nos dá suporte e abrigo, a nós professores e em nós, aos nossos alunos, para que possa sempre ser embelezada pelos fios de seda que a hão de bordar, que a estão a bordar.

Juntos somos mais que a soma de nós. Por isso, na APM, continuamos a *dizer de viva voz que não estamos sós!*

(as frases em itálico são retiradas do texto de apresentação do ProfMat 2019)

A DIREÇÃO DA APM



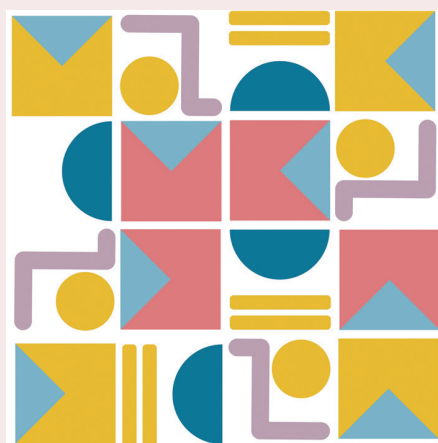
Agenda do Professor 2019/2020 Dia a dia com a Matemática

A agenda do próximo ano letivo já está disponível.

O grupo que a elaborou — Adelina Precatado, José Paulo Viana, Rute Cipriano, Teresa Moreira — respondeu ao desafio de o fazer em torno do tema tecnologias no ensino da matemática.

E decidiu partir para a organização da agenda fazendo uma leitura das revistas Educação e Matemática... veja o que descobriram.

XXII ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES | PRÉ. 1.º E 2.º CICLOS



XXII Encontro Nacional de Professores | Pré. 1.º e 2.º ciclos

MATEMÁTICA NOS PRIMEIROS ANOS

8/9 NOV

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA



O XXII Encontro Nacional de Professores (Pré, 1.º e 2.º ciclos) realiza-se nos dias 8 e 9 de novembro de 2019 na Escola Superior de Educação de Lisboa. Este encontro destina-se a Educadores e Professores dos primeiros anos e contará com conferências, sessões práticas, um painel e simpósios

de comunicações promotores de reflexão em torno da aprendizagem da Matemática.

Submissão de propostas de comunicações e/ou sessões práticas até dia 22 de julho de 2019.

Inscrições no encontro a partir de setembro de 2019.

Informações em www.apm.pt

Desenvolver o raciocínio funcional no 6.º ano de escolaridade: contributos de uma experiência de ensino

O raciocínio funcional, um dos aspetos centrais do pensamento algébrico, envolve a capacidade para “explorar e generalizar padrões que descrevem relações funcionais” (Blanton & Kaput, 2005). Apesar dos contributos de vários estudos, subsistem aspetos relacionados com a gestão das tarefas e o raciocínio dos alunos, nomeadamente sobre a natureza e progressividade das estratégias, que interessa conhecer com mais pormenor. Importa, portanto, continuar a aprofundar o conhecimento sobre o modo como “uma abordagem algebrizada da aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da álgebra nos anos posteriores” (Canavarro, 2007, p. 91), em particular, na aprendizagem de funções.

No 6.º ano de escolaridade, o trabalho no âmbito dos conteúdos Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta, do domínio Álgebra, é o contexto privilegiado para o desenvolvimento do raciocínio funcional, no ano de escolaridade que antecede o ensino formal de funções. No entanto, as metas de aprendizagem dão indicações diminutas para o ensino-aprendizagem, pelo que compete ao professor a construção de unidades de ensino em que “a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos” (ME, 2013, p.1). Nesse sentido, os documentos curriculares orientadores, como o NCTM (2007), entre outros, constituem um acervo documental especializado que pode ser mobilizado para melhorar a gestão do currículo.

Neste artigo são analisadas as estratégias dos alunos na resolução de tarefas que envolvem padrões de crescimento, no quadro de uma unidade de ensino sobre Sequências e Regularidades. A análise das estratégias revela a importância da visualização no desenvolvimento dos seus próprios processos de generalização. Além disso, a tabela parece ser uma representação facilitadora da exploração na generalização de relações funcionais.

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS PRIMEIROS ANOS DE ESCOLARIDADE

No âmbito da aprendizagem da álgebra, o NCTM (2007) sugere que o currículo deve possibilitar aos alunos: (i) a compreensão de regularidades, relações e funções; (ii) a representação e análise de

situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; (iii) a utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (iv) a análise da variação, em diversas situações.

O pensamento algébrico, segundo Kaput (2008), está arraigado na numeracia e na proficiência de cálculo, no raciocínio geométrico e nas capacidades associadas à medida, isto é, a conceitos ensinados nos anos de escolaridade correspondentes ao ensino básico português. Não se trata de ensinar álgebra “elementar” no sentido da manipulação simbólica, mas sim no desenvolvimento de uma forma de pensar. A seu tempo, o pensamento algébrico suporta a capacidade de resolução de problemas, em contextos puramente matemáticos. Blanton (2008) enuncia a aritmética generalizada e o raciocínio funcional, como as vertentes que, em conjunto, sustentam uma compreensão mais abrangente do pensamento algébrico. Para a autora, o pensamento funcional vai além da aritmética generalizada, pois exige ao aluno a capacidade de identificação e análise da relação entre duas ou mais variáveis. Nesse sentido, o desenvolvimento do raciocínio funcional oferece “a oportunidade de trabalhar com um conjunto rico de ferramentas e representações – tabelas, gráficos, máquinas de funções, quadros de input/output, etc.” (Mestre & Oliveira, 2011, p. 204). O desenvolvimento do raciocínio funcional deve começar nos primeiros anos de escolaridade e os alunos devem trabalhar de forma gradual com diferentes situações que impliquem a explicitação de regras gerais. Segundo Friel e Mackworth (2009), as “tabelas funcionais” são ferramentas que suportam o desenvolvimento do raciocínio funcional. Apesar destas indicações, escasseiam na literatura episódios que revelem a descrição da agenda didática das tarefas no âmbito de unidades de ensino e do uso de representações, como as “tabelas funcionais”.

No que respeita às tarefas, Stacey (1989) diferencia-as em dois tipos de questões, as de generalização próxima e as de generalização distante. As questões de generalização próxima podem ser resolvidas passo-a-passo: (i) por contagem ou desenho; (ii) pelo método da diferença; e (iii) pelo método do objeto inteiro. As questões de generalização distante são aquelas que não podem ser resolvidas a partir de uma abordagem passo-

a-passo, o aluno tem de usar uma regra geral. Segundo Vale (2012), conseguimos identificar um padrão naquilo que vemos ou imaginamos que pode acontecer, sendo que num padrão de crescimento o termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Para desenvolver o pensamento algébrico, as tarefas que envolvem padrões têm uma importância significativa, pois os alunos pensam predominantemente de modo visual e são um bom contexto na aprendizagem de conceitos, propriedades e resolução de problemas em matemática (Vale *et al.*, 2009).

EXPERIÊNCIA DE ENSINO

O desenvolvimento de unidades de ensino é uma forma de criar recursos úteis ao professor para introduzir novas formas de trabalho na sua prática letiva. Uma unidade de ensino tem por base uma teoria sobre o modo como os alunos aprendem, ou seja, uma conjectura de ensino-aprendizagem, sendo constituída por um conjunto de tarefas organizadas de modo coerente e apelando ao uso de diversos recursos didáticos. Esta conjectura de ensino-aprendizagem, baseada no currículo e no conhecimento matemático a ensinar, tem uma natureza eminentemente teórica e é refinada ao longo do tempo, através de investigação empírica.

Neste estudo, foi criada uma unidade de ensino, que procura desenvolver a capacidade de raciocínio funcional nos alunos, no âmbito da aprendizagem dos conteúdos Sequências e Regularidades. A unidade de ensino, em particular, a sua conjectura de ensino-aprendizagem, é suportada pela literatura sobre o pensamento algébrico e procura contribuir para uma transição gradual para a álgebra, enquanto manipulação simbólica, com compreensão. De fato, procura ser uma unidade de ensino que ajude os alunos na transição entre as estratégias informais ou as por recorrência e a descrição de uma relação funcional. A unidade de ensino, desenvolvida ao longo de 6 aulas, é constituída por 7 tarefas diversificadas, nomeadamente explorações e problemas, que envolvem a utilização de material manipulável e/ou a representação pictórica. A tarefa 1 da unidade de ensino, que pede aos alunos a construção de alguns termos de várias sequências, com cubos de encaixe coloridos, dados os primeiros dois ou três termos. Na resolução dessa tarefa são representados, no papel quadriculado, os termos construídos com os cubos. Na resolução da tarefa 2 da unidade de ensino, essas representações são o suporte visual na determinação da expressão geradora. Na resolução da tarefa 3 foi explorada, em grupo, um padrão do tipo $n+a$.

As tarefas que envolvem padrões de crescimento são limitadas no que respeita à exploração de relação funcional (são usados apenas números positivos; a relação não é contínua), contudo este contexto restrito e simplificado, facilita o estabelecimento de relações entre variáveis.

O estudo segue uma abordagem metodológica de design research, pois o objetivo é analisar a aprendizagem no seu contexto, estudando de modo sistemático formas particulares de aprendizagem e estratégias de resolução dos alunos. O estudo foi desenvolvido numa escola básica do 2.º e 3.º ciclos de escolaridade da periferia da cidade de Lisboa. Os dados apresentados neste artigo dizem respeito ao segundo ciclo de experimentação, durante o ano letivo 2017/18, numa turma do 6.º ano com vinte e quatro alunos – dez raparigas e catorze rapazes. Como forma de preservar a identidade dos alunos, os nomes usados neste artigo são fictícios. A recolha documental (registos dos alunos) e a observação participante (diário de bordo; gravação áudio) foram as principais técnicas de recolha de dados.

“VER” UMA EXPRESSÃO GERADORA DE UM PADRÃO – MOMENTOS DE UMA AULA

Nesta seção são apresentadas as respostas dos alunos a quatro questões da tarefa 4, que apresenta um padrão de crescimento do tipo $an+b$. As respostas são acompanhadas de alguns momentos da aula, no sentido de clarificar o seu próprio desenvolvimento, assim como o modo como os alunos pensam durante a resolução da tarefa. Finalmente será feita uma breve análise das respostas dos alunos tendo em consideração aspetos do pensamento algébrico, em particular, o raciocínio funcional.

Na aula, antes da distribuição da folha com a tarefa, a professora comunicou aos alunos que tinham vinte minutos para a resolver individualmente e que o tempo restante seria destinado à sua discussão, em grande grupo. Também informou que a resolução individual seria entregue no final da aula e que os registos/síntese da discussão deveriam ser registados no caderno diário. Os alunos começaram a resolver a tarefa e a professora dedicou algum tempo a acompanhar dois alunos com dificuldades de aprendizagem.

A primeira questão da tarefa pede o desenho dos quarto e quinto termos da sequência e todos os alunos respondem corretamente. Alguns alunos, como Lucas, mobilizam a sua experiência anterior antevendo a resolução das questões mais complexas.

Lucas: Professora, posso pintar como fizemos nas outras aulas?

Professora: Podes, mas... Espera um pouco que já vou aí. Podes começar como quiseres, mas repara que a primeira questão pede apenas para desenhares as duas figuras seguintes.

Lucas: Sim, eu já fiz! Eu vejo assim (com a mão faz um gesto que descreve uma linha horizontal). Eu acho que tem uma fila [de círculos] em cima e uma fila [de círculos] em baixo. De uma figura para outra é mais um círculo em baixo e mais um em cima, dois. (...) Vou pintar os de cima e os de baixo com cores diferentes (figura 1), para fazer isto aqui da expressão.



Figura 1. Registro de Lucas, questão 1.1

Todos os alunos responderam corretamente à questão 1.2, pois dezasseis é o número de círculos do sétimo termo da sequência e enunciaram uma lei de formação para a sequência, na resposta à questão 1.3. Destas, a mais frequente é a que indica que o número de círculos de um termo decorre do número de círculos do termo anterior (figura 2).

1.3 Indica uma lei de formação para a sequência.

A lei de formação para a sequência é ir acrescentando mais dois círculos ao termo anterior.

1.3 Indica uma lei de formação para a sequência.

Na figura um quadro círculos a seguinte figura tem mais dois círculos, então a seguinte vai se acrescentando dois ao termo seguinte.

Figura 2. Registos de Lúcia e de Paulo, questão 1.3

Durante a discussão da tarefa, Lucas revelou ter escrito a sua lei de formação depois de “descobrir” a sua expressão geradora (figura 3). Questionado sobre o motivo da alteração da ordem das respostas às questões, diz que a expressão geradora é “o mais importante, porque estamos a aprender agora (...) não sei explicar bem, mas é o que dá para saber de toda a sequência”.

Duplicar o nº do termo e acrescentar 2.

Figura 3. Registro de Lucas, questão 1.3

A revelação de Lucas mostra que o aluno não segue a ordem das questões e vai tomando decisões de acordo com a sua experiência e com o que considera ser relevante e robusto, do ponto de vista matemático.

Dezanove dos vinte e quatro alunos da turma escreveram uma expressão geradora adequada da sequência. Destes, cerca de metade apresentou os termos da sequência pintados, como mostra a figura 1 e uma tabela semelhante à de Lucas (figura 4).

Nº termo	Nº verde	Nº vermelho	Nº total
1	2	2	$2+2=4$
2	3	3	$3+3=6$
3	4	4	$4+4=8$
...			
N	$N+1$	$N+1$	$N+N+2=2N+2$

expressão geradora $= 2N+2$

Figura 4. Registro de Lucas, questão 1.3

Talvez, por se tratar de uma situação simples, Lucas indicou apenas o número de círculos, de cada cor, para cada termo. Aparentemente não está a explorar qualquer relação entre o número de círculos e o número do termo, mas na última linha mostra que está a considerar essa relação funcional entre o número da figura e o número de círculos de cada cor.

Nove alunos pintaram os termos da sequência como Rui (figura 5), revelando um olhar mais estruturado, talvez considerem intuitivamente o número do termo.

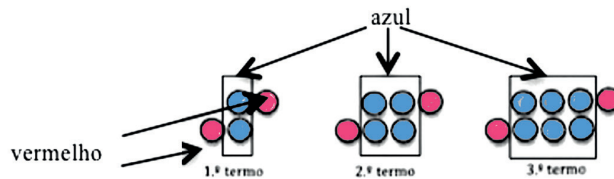


Figura 5. Registro de Rui

Durante a discussão da tarefa, dois destes alunos referiram:

Miriam: Eu vi um “S”, aumenta no meio com mais dois, dois, dois... [Círculos] aos pares tem de ser o dobro, par é dois. Ficam os outros, um e um. (...) Oh! Já me lembro, quando estava a ver os do meio, era um, um, depois, dois, dois e três, três e quatro, quatro... Oh! Era o número dos termos.

Rui: Eu vi que tinha uma parte central e que era igual em cima e em baixo, então era sempre duas vezes. (...) Ficavam sempre dois nas pontas, pintei de vermelho. (...) Quando fui ver o que se passa aqui, na tabela (figura 6), é que vi que era duas vezes o número do termo.

Nº do termo	Nº de círculos azuis	Nº de círculos vermelhos	Nº total de círculos
1	$2 = 2 \times 1$	2	$2 \times 1 + 2$
2	$4 = 2 \times 2$	2	$2 \times 2 + 2$
3	$6 = 2 \times 3$	2	$2 \times 3 + 2$
4	$8 = 2 \times 4$	2	$2 \times 4 + 2$
5	$10 = 2 \times 5$	2	$2 \times 5 + 2$
n	$2 \times n$	2	$2 \times n + 2$

Figura 6. Registro de Rui, questão 1.4

Os registos dos alunos e as explicações orais mostram que pintaram os termos da sequência de acordo com o padrão que visualizam. Para determinar a expressão geradora, mobilizam o padrão e a informação numérica é colocada na tabela de acordo com o jogo de cores. Na exploração numérica, estão presentes aspetos identificados previamente, como referem Miriam e Rui, sobre o dobro de círculos azuis. As expressões geradoras foram escritas pelos alunos, sem qualquer indicação da professora, e na discussão coletiva foram comparadas e redigidas na forma de $2n+2$ (síntese no caderno diário).

Os cinco alunos, que não escreveram corretamente a expressão geradora, indicaram $2n$ e $3n$ na sua resposta. Durante a discussão

da tarefa, a expressão $2n$ foi associada ao acréscimo de dois círculos entre os termos e a expressão $3n$ foi indicada após a verificação que $2n$ não é a expressão geradora da sequência. Estes alunos revelaram alguma relutância em pintar o modo como visualizam o padrão, talvez por pensarem ser um processo moroso, preferindo usar uma estratégia por tentativa e erro.

Concluindo, a análise dos registos escritos e das intervenções orais na aula mostram que os alunos reconhecem a estrutura do padrão da sequência e revelam ter capacidade de generalização próxima. De facto, todos responderam corretamente quer às questões 1.1 e 1.2 que dizem respeito a termos iniciais da sequência, quer à questão 1.3 enunciando, na sua maioria, uma lei de formação na qual emerge o método da diferença. No entanto, os registos escritos de alguns alunos mostram respostas pouco claras, como a de Paulo, porque não leem as frases que redigem. Esta situação compromete a qualidade da resposta, pelo que será alvo de análise tendo em vista o refinamento da unidade de ensino, antes do terceiro ciclo de experimentação.

A maioria dos alunos revela também capacidade de generalização distante, pois na resposta à questão 1.4, determina uma regra geral. Em alguns registos efetuados nas tabelas são evidentes os aspetos do pensamento relacional descrito por Jacobs et al. (2007), no que respeita ao uso do sinal igual como indicador de construção de relações gerais explícitas. É de salientar que a determinação da expressão geradora (regra geral) se apresenta, no percurso de aprendizagem dos alunos nesta unidade de ensino, como um processo diferenciado: (i) decorre do modo como cada aluno visualiza o padrão; (ii) do conhecimento matemático que mobilizam intuitivamente; e (iii) da capacidade em estabelecer relações numéricas entre o número do termo e o número de círculos, isto é, como descrevem relações funcionais. Além disso, os alunos relevam usar os símbolos numéricos e não numéricos com sentido, quando efetuam a adição das expressões parciais associadas à cor para determinar uma expressão geradora da sequência.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As tarefas com padrões de crescimento são um contexto privilegiado para desenvolver o pensamento algébrico nos alunos. Sempre que este tipo de tarefas é revisitado ao longo da escolaridade, os seus objetivos devem mobilizar o conhecimento prévio dos alunos e desenvolver estratégias cada vez mais sofisticadas, isto é, estabelecer a passagem gradual e com compreensão entre o concreto/pictórico e o abstrato. Neste sentido, tendo em consideração a experiência prévia dos alunos no 1.º ciclo, o trabalho com padrões de crescimento no 6.º ano de escolaridade deve ter foco no raciocínio funcional, mobilizando a visualização, na determinação com compreensão de uma lei de formação e de uma expressão geradora.

A maioria dos alunos revelou ser capaz de escrever uma lei de formação e uma expressão geradora da sequência com padrão, do tipo $an+b$. Os alunos revelaram uma forte tendência para usar o método da diferença para enunciar a lei de formação, provavelmente como resultado da sua experiência no 1.º ciclo. Contudo, para determinar a expressão geradora exploram regularidades, tendo em consideração o modo como cada aluno visualiza o padrão, isto é, como pintaram as figuras da sequência. A tabela e a forma como foi explorada revelam, do ponto de vista numérico, como olham os alunos para o padrão no processo de exploração da relação funcional.

Referências

- Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom*. Portsmouth, NA: Heinemann.
- Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.
- Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81-118.
- Friel, S. N. & Markworth, K. A. (2009). A framework for analysing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(1), 24–33.
- Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Jacobs, V. R., Franke, N. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 258-288.
- ME (2013). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME.
- Mestre, C. & Oliveira, H. (2011). O pensamento algébrico e a capacidade de generalização de Alunos do 3.º ano de escolaridade do ensino básico. In C. Guimarães & P. Reis (Org.) *Professores e Infâncias: estudos e experiências* (pp. 201-223). São Paulo: Junqueira & Marin Editores.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trad). Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).
- Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.
- Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática: propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESEVC.
- Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos. *Interações*, 20, 181-207.

ANA ISABEL SILVESTRE

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CASQUILHOS, BARREIRO

Estruturas inesperadas



Figura 1

A Art Tower Mito, da autoria do premiado arquiteto japonês Arata Isozaki é uma obra inesperada que prende a nossa atenção e desafia a imaginação (figura 1). Datada de 1990, foi construída no Japão e o seu autor foi este ano premiado com o Prémio Pritzker. Seguramente a recente atribuição deste prémio trouxe fotografias das suas obras aos jornais portugueses e foi, por isso, que agora contactei com estas imagens. Quando vi esta fotografia fiquei fascinada e várias ideias me ocorreram.

Que poliedro estranho. De certo modo parece que pode ser prolongado indefinidamente. Será que é mesmo um poliedro? Como se poderá construir? Quais são as suas principais características?

Como será interessante confrontar as crianças com esta obra e ouvi-las falar sobre este tão peculiar edifício. Que perguntas farão? Que comentários? E como seria desafiador construir com elas um objeto inspirado nesta construção.

O que terá levado este arquiteto a construir tão intrigante edifício que parece desafiar as leis da gravidade? Qual é a sua função? Será que se pode subir ao cimo desta torre?

O primeiro conjunto de questões levou-me a descobrir várias informações interessantes sobre o edifício e a sua construção [1]. A torre, com 100 metros de altura, é uma espiral composta a

partir de painéis em forma de triângulos equiláteros que formam tetraedros. Cada painel tem 9,6 metros de lado (figura 2). Os painéis são de titânium, um metal mais leve comparativamente a outros metais.

Por ser uma espiral confirma-se a ideia de que a torre poderia ser prolongada indefinidamente. Fica o desafio de procurar saber mais sobre espirais, objetos geométricos praticamente ignorados na matemática escolar.

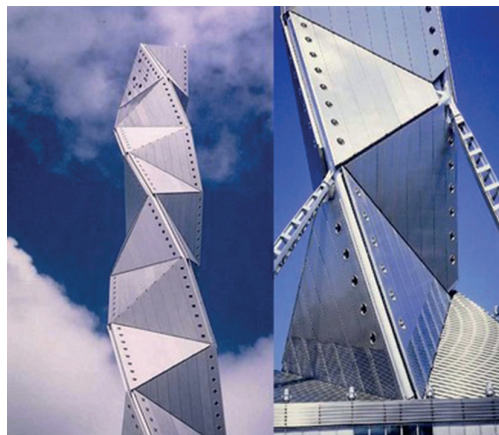


Figura 2

As fotografias e o processo de construção de que nos começamos a aperceber dão a ideia de que as faces são mesmo triângulos equiláteros. Uma pesquisa mais aturada permitiu obter mais informação sobre o modelo geométrico da Art Tower e sobre a sua construção virtual [2]. O modelo é obtido pelo uso habilidoso da reflexão no espaço, definida pelo plano de uma das faces do tetraedro previamente construído e, seguida de uma rotação.

Este poliedro pode ser construído com recurso a polydrons. A construção é intrigante e desafiadora (figura 3).

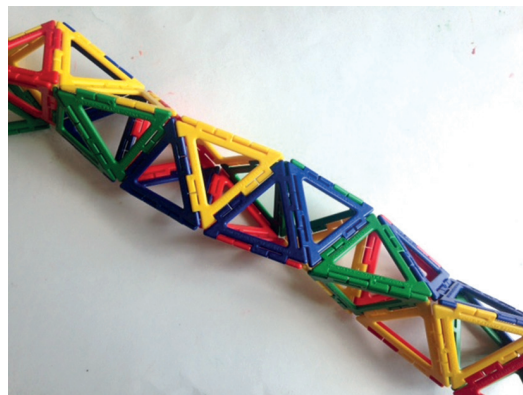


Figura 3

Há outros edifícios construídos a partir de modelos geométricos também inusitados, não tão desconcertantes como este, porém acessíveis no nosso território próximo. Sobre estes edifícios poderão ser realizados interessantes trabalhos em situação escolar. Refiro-me à Casa da Música no Porto e, ao edifício sede do porto de Lisboa.

O segundo conjunto de questões sobre as crianças fez-me revisitar alguns relatos do trabalho de uma educadora, a Maria, com o seu grupo de crianças:

Fizemos uma visita a uma escultura urbana de Charters de Almeida que foi fotografada pelas crianças e a partir da qual fizemos a nossa escultura coletiva de paralelepípedos, utilizando duas cores primárias e a secundária resultante da sua mistura (amarelo, vermelho e laranja). Acabámos com uma escultura de nome “Fogo”. (figuras 4 e 5)

Tenho a certeza de que a Maria um dia destes *viajará* com as suas crianças à Art Tower Mito. O seu interesse por esta forma de envolvimento das crianças está bem patente neste excerto das suas reflexões e relatos de experiências sobre matemática e artes visuais:

As abordagens feitas a partir de obras de arte para fazer incursões em conceitos matemáticos ou, o caminho inverso, partir de conceitos matemáticos descobrir artistas que os utilizam nas suas obras e, por sua vez utilizar, explorar e reinventar produções de expressão plástica das crianças, tanto individuais como coletivas, geram uma construção de aprendizagens e saberes, tanto matemáticos como de literacia estética e artística que a maioria das crianças passa a utilizar no seu dia a dia.



Figura 4

A Art Tower inspira-se num poliedro original, a hélice de Boerdijk–Coxeter, que tem interessantes propriedades geométricas [4]. Imagino que tenham sido algumas dessas propriedades que atraíram Arata Isozaki. Quanto à função do edifício fiquei a saber que a Art Tower Mito é um complexo

de artes que foi construído no âmbito das comemorações do centenário do município de Mito [3]. É constituído por uma sala de concertos, um teatro, uma galeria de arte contemporânea e uma torre de referência que se pode ser visitada. Termino com o desafio de construírem uma réplica da Art Tower Mito.



Figura 5

Referências

- [1] www.kikukawa.com/en/product/art-tower-mito/
- [2] Ulasevich, Z. & Ulasevich, V. (2016). Isometries in teaching descriptive geometry and engineering graphics. The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics, Volume 29, 23-20.
- [3] <https://www.arttowermito.or.jp>
- [4] <http://images.math.cnrs.fr/Peut-on-faire-un-anneau-de-tetraedres.html?lang=fr>

Modelação matemática experimental para um ensino integrado de STEM

ANA MARGARIDA BAIOA

SUSANA CARREIRA

Em vários países, tem vindo a tornar-se cada vez mais presente uma perspetiva de ensino que se afirma pela ênfase na integração e conexão entre saberes, métodos e conceitos de diversas disciplinas. Essa integração e conexão está presente em inúmeras recomendações e orientações nacionais e internacionais, tais como: o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*, o *Projeto de Flexibilidade e Autonomia Curricular* e os suportes teóricos dos estudos do PISA, dando realce ao desenvolvimento da capacidade de interpretação, compreensão, análise e tratamento matemático de situações que envolvem problemas da vida quotidiana e fenómenos do mundo real.

Assim, temos reconhecida a importância da capacidade de mobilização de conhecimento matemático e extra-matemático para a resolução de problemas que se revestem de enorme complexidade e exigência, no mundo em que vivemos, desde a área da saúde, passando pela engenharia, até ao ambiente. Para todos estes grandes problemas torna-se claro que é indispensável a integração de conhecimentos científicos de múltiplas áreas e também que a participação de modeladores matemáticos constitui uma mais-valia.

Uma perspetiva de ensino integrado que abraça o ensino interdisciplinar de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática é hoje conhecida por Educação em STEM (acrónimo de Science, Technology, Engineering, and Mathematics).

Um ensino integrado de STEM (realçado pela designação iSTEM) permite e promove o uso de materiais e equipamentos, incentiva o trabalho prático (“mãos na massa”), a aprendizagem cooperativa, a discussão e pesquisa, o questionamento e a elaboração de conjecturas, a produção de justificações, a elaboração de relatórios, a atividade de resolução de problemas, incluindo o recurso a tecnologias. O papel do professor é essencialmente o de facilitador da aprendizagem, incentivando conexões entre as disciplinas por forma a ajudar os alunos a construir conhecimento de forma consistente e significativa. A possibilidade de ver as atividades experimentais com base em objetos reais como um tipo particular de atividades de modelação

matemática baseia-se nos seguintes pressupostos: (1) os alunos têm a oportunidade de “aprender fazendo” (enquanto criam, manipulam e experimentam, simulam, conjecturam e validam); (2) trabalhar com materiais concretos é uma forma de analisar matematicamente as propriedades dos objetos e dos fenómenos, permitindo abordagens mais realistas.

A modelação oferece oportunidades para os alunos desenvolverem a sua própria matemática enquanto trabalham sobre um problema. Quer dizer, os problemas exigem que os alunos se apropriem da situação, de forma a matematizá-la da maneira mais significativa e razoável para eles. Trata-se, pois, de um processo cíclico de interpretação de informações, escolha de dados relevantes, identificação de procedimentos que podem levar a novas informações, criando múltiplas representações matemáticas (Lesh & Doerr, 2003).

O processo de modelação matemática é tipicamente descrito com base na execução de um ciclo que engloba várias fases, sendo que a progressão ao longo do ciclo pode variar consoante a atividade desenvolvida pelos alunos na resolução do problema (figura 1).

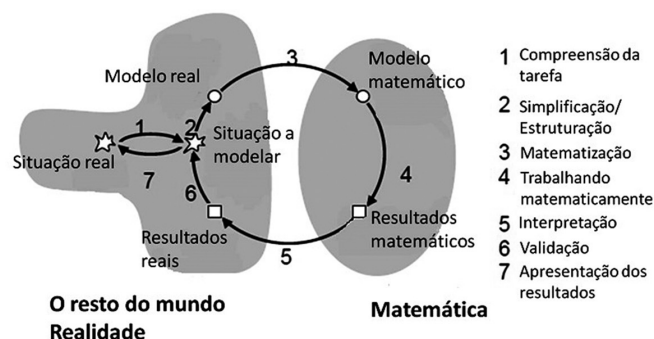


Figura 1. Ciclo de modelação matemática (Blum & Leiß, 2007)

É de notar que, em particular num contexto STEM, o processo de modelação matemática parece estar muito próximo do chamado processo de *design* de engenharia, como pode ser evidenciado no seguinte esquema (figura 2).

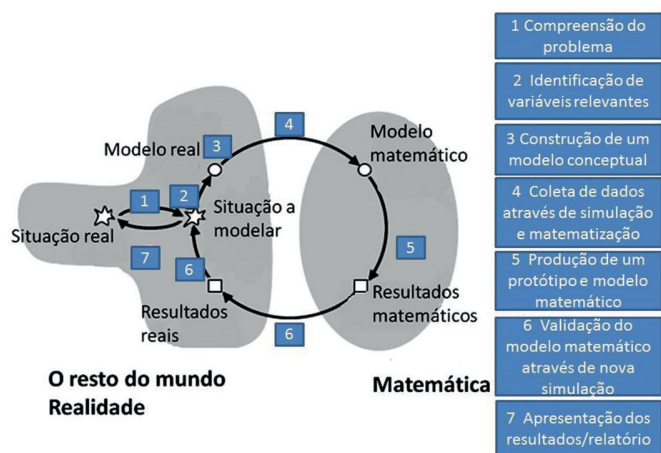


Figura 2. Ciclo de modelação matemática em tarefas com recurso a simulações e construção de protótipos

Podemos hoje afirmar com bastante segurança que a modelação matemática tem uma importância irrefutável na aprendizagem da Matemática de todos os alunos e em todos os níveis de ensino. É, para além do mais, uma forte possibilidade a considerar se pretendemos promover uma educação integrada e um ensino menos fragmentado, mais centrado no aluno e na capacidade de resolução de problemas, favorecendo, por exemplo, a aquisição de várias das competências elencadas no *Perfil dos Alunos*.

UMA TAREFA DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA EXPERIMENTAL EM CONTEXTO STEM

Em seguida, apresentamos um exemplo para a aula de Matemática baseado numa tarefa de modelação matemática que envolve trabalho experimental e o desenvolvimento de um protótipo do mundo real com a utilização de simulações.

A tarefa é inspirada nos sistemas de reconhecimento baseados em características extraídas da palma da mão (geometria ou informação palmar).

As características das mãos são das mais antigas ferramentas biométricas para autenticação e identificação automática de pessoas, estando disponíveis desde os finais da década de 1970 e sendo atualmente consideradas como um tipo de padrão codificado para situações de baixa segurança. Estes dispositivos, usados maioritariamente para controlo de acesso, têm aplicações diversas, por exemplo, nas áreas da defesa e da segurança. A figura 3 ilustra um sistema de segurança de reconhecimento biométrico utilizado em muitas empresas e lugares com acesso restrito de pessoal.

Na tarefa “Biometria da mão” os alunos são desafiados a criar uma base de dados biométricos para o desenvolvimento de um sistema de reconhecimento através da biometria/geometria da mão – utilizando para o efeito modelos físicos (conjunto de imagens digitalizadas das suas próprias mãos) – e a fazer a simulação do reconhecimento de uma mão não identificada, isto

é, a aceitação ou rejeição de um dado indivíduo por comparação com os dados compilados na base.



Figura 3. Sistema de segurança com reconhecimento biométrico da mão

A tarefa foi construída, e aplicada em duas turmas do 9.º ano, no âmbito de uma investigação de doutoramento em curso no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Neste estudo, todas as tarefas de modelação (no total de cinco) foram realizadas em aulas de Matemática regulares, tendo como características comuns a criação de um ambiente experimental que pressupõe a utilização de materiais relacionados com o problema proposto e a produção de um relatório escrito por cada grupo sobre o trabalho efetuado e as conclusões obtidas (Carreira & Baioa, 2018). Além disso, foi igualmente decidido que cada uma das tarefas colocaria um problema em que era pedida uma resposta a um pedido ou encomenda apresentado por uma pessoa ou grupo de pessoas (por exemplo, um cliente).

Os alunos organizaram-se em grupos de trabalho de 3 a 5 elementos e receberam conjuntos iguais de materiais para o desenvolvimento de simulações.

Cada grupo tinha, assim, à sua disposição as imagens em papel das suas próprias mãos (uma fotocópia de cada mão) e o objetivo era o de responder à necessidade de criar um sistema de reconhecimento que validasse os dados biométricos dos elementos do grupo e rejeitasse os de uma pessoa que não pertencesse ao grupo. Para o teste e validação do respetivo protótipo, a cada grupo foi entregue uma fotocópia de uma mão “desconhecida”.

No desenvolvimento do trabalho, cada grupo deu um nome à sua base de dados biométricos e um número de registo a cada elemento do grupo (figura 4) numa ficha individual de registos biométricos.

BASE DE DADOS (título) A minha mão versão 2.1.0

Nº Registo (código) 0309

Identificação Indivíduo _____

Figura 4. Cabeçalho da ficha biométrica de um elemento de um grupo

Os alunos recolheram dados da imagem em tamanho real da sua própria mão (figura 5), medindo com uma régua diversos comprimentos, e registaram os valores obtidos num esquema de uma mão representado em papel (figura 6), relacionando deste modo, de forma intuitiva, dados numéricos e conceitos básicos da anatomia da mão.



Figura 5. Recolha de dados biométricos

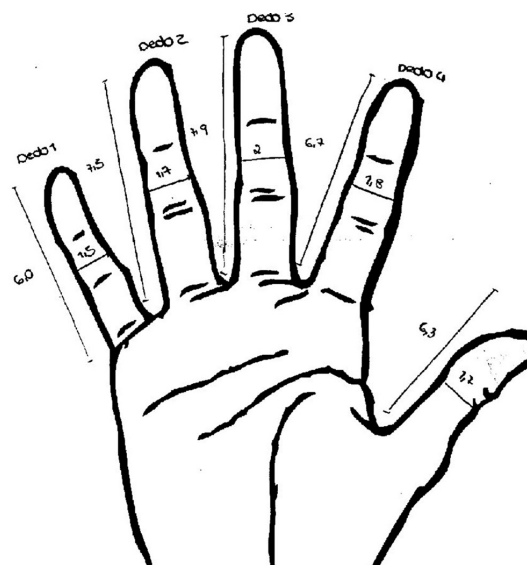


Figura 6. Definição dos dados a recolher

Em seguida, os alunos organizaram os dados obtidos numa tabela, tendo em vista a procura de um modelo matemático para a autenticação de dados desconhecidos. Estas duas ações realizaram-se praticamente em simultâneo. Os vários conceitos envolvidos, tais como, diferenciação dos dedos, comprimento e largura do dedo em vários segmentos, distinção das falanges, medidas de comprimento e sua relação com a configuração da mão, começaram a surgir de forma livre, sem uma regularidade aparente. Os dados numéricos foram depois facilmente obtidos e compilados (figuras 7 e 8).

A fase de construção de um modelo matemático que permitisse comparar dados externos com o padrão de identificação constituiu a parte mais morosa da atividade e aquela em que os alunos revelaram mais dificuldades.



Figura 7. Registo de dados de cada indivíduo

N.º	NOME	Dedo 1		Dedo 2		Dedo 3		Dedo 4		Dedo 5	
		L	C	L	C	L	C	L	C	L	C
0009	Aluno	1,5	6,4	1,7	7,7	1,9	8,2	1,9	7,1	2	6,5
0009	Aluno	1,5	6,0	1,7	7,5	2	8,9	1,8	6,7	1,7	6,3
2575	Aluno	1,5	6,2	1,8	7,6	2	8,2	1,2	7,2	1,9	6,5

Figura 8. Tabela com os dados biométricos de um grupo

Primeiro, foi alvo de bastante discussão a escolha de um método com o qual se poderiam comparar os dados; depois foi igualmente exigente a generalização de uma regra que tivesse por base a forma de construção da base de dados, não emergindo imediatamente hipóteses de soluções. Os alunos debateram-se com o problema de definir matematicamente a aproximação ou afastamento entre dados numéricos. A professora teve, assim, um papel facilitador mais ativo, nesta fase, dando pistas por meio de exemplos mais simples, para que os alunos conseguissem avançar na obtenção de um modelo matemático ajustado aos critérios biométricos que haviam formulado (figura 9). Muitas das dificuldades giraram em torno da ideia de fiabilidade de um processo para comparação entre dados obtidos experimentalmente e dados desconhecidos (de uma mão indeterminada).



Figura 9. Alunos comparando as suas mãos em torno da questão da variabilidade

O facto de os alunos estarem a simular um processo de captura de dados biométricos, usando reproduções fotográficas das suas próprias mãos, e de se aperceberem de muitos detalhes e variações dessa parte do corpo humano, levou-os a refletir longamente sobre o modo de integrar esse conhecimento num sistema de reconhecimento realizado por uma máquina que tem como objetivo aceitar ou rejeitar dados biométricos.

Um exemplo de um modelo matemático que foi considerado e posteriormente formalizado, na discussão coletiva, é o seguinte: se designarmos por j o número de indivíduos da base de dados e i o número de medidas retiradas da palma da mão, a aceitação da mão desconhecida significa que existe um j para o qual qualquer das medidas captadas da mão desconhecida, M_i , satisfaz a condição $M_{ij} - \delta < M_i < M_{ij} + \delta$, onde M_{ij} é a medida i do indivíduo j da base de dados e δ representa o erro estipulado como aceitável.

Para a validação do protótipo que foi concebido por cada grupo, isto é, o sistema de autenticação dos dados de uma mão desconhecida, foi distribuída outra imagem (fotocópia) de uma mão não identificada, tirada aleatoriamente do conjunto de imagens de toda a turma. Usando essa imagem, os alunos recolheram os dados necessários, de acordo com o seu modelo de captura de dados biométricos, para depois verificarem se a mão “lida” ou “padronizada” pelo sistema de reconhecimento pertencia ao seu grupo ou não. Para essa decisão de aceitação/rejeição, usaram o modelo matemático de comparação entre os novos valores capturados e os valores constantes do cadastro do grupo (figura 10).

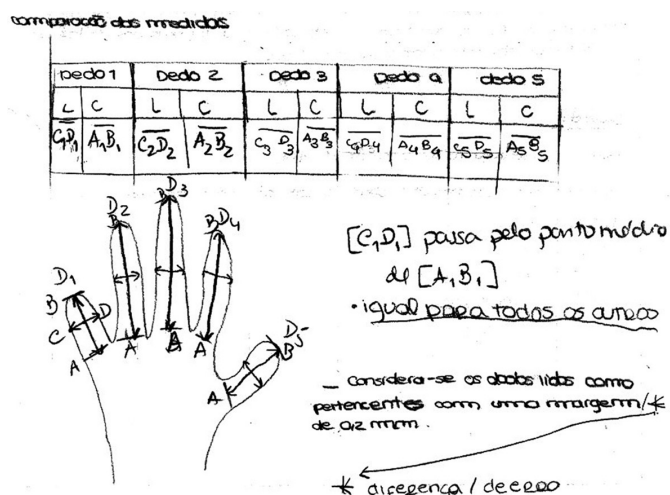


Figura 10. Exemplo de modelo matemático para reconhecimento através da geometria da mão

Cada grupo elaborou um relatório onde descreveu os passos realizados e apresentou os dados recolhidos, o modelo matemático considerado para a comparação de dados e a forma de autenticação dos mesmos. Em muitos casos, os alunos

combinaram a linguagem matemática e a linguagem corrente, nas suas formas de descrição e apresentação do seu modelo de autenticação dos dados desconhecidos.

A qualidade das capacidades desenvolvidas pelos alunos, no âmbito da intervenção didática proposta, pode constituir motivo de reflexão acerca de aspetos de gestão curricular, nomeadamente no que respeita ao tipo de tarefas apresentadas aos alunos e à vantagem em criar e usar materiais, designadamente que envolvam experimentar, interpretar e analisar. Por um lado, a experimentação e o uso de materiais potenciam a procura de soluções reais para problemas reais e, por outro lado, há que sublinhar o facto de que se poderão implementar este tipo de propostas em qualquer altura do ano escolar, pois não está em jogo apenas um conteúdo mas sim um conjunto de saberes que são mobilizados pelos alunos. A construção do modelo matemático para descrever o sistema pretendido permite gerar uma importante discussão e exploração da situação experimental, que envolve a ativação e desenvolvimento de conceitos matemáticos relevantes, como por exemplo, distâncias e intervalos numéricos, pontos médios de intervalos, desvio e desvio absoluto, conjunção de condições, etc.

O exemplo da tarefa “Biometria da mão” e as evidências do trabalho que os alunos podem desenvolver a partir da tarefa, tirando partido de materiais simples e usuais, na sala de aula, permitem mostrar algumas das características fundamentais da modelação matemática experimental e as suas potencialidades para a aprendizagem.

Referências

- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling - Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.
- Carreira, S., & Baioa, A. M. (2018). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the student's sense of credibility. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 50(1-2), 201-215.
- Lesh, R., & Doerr, H. (Eds). (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ANA MARGARIDA BAIOA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS D. MANUEL I – TAVIRA, UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

SUSANA CARREIRA

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, UNIVERSIDADE DO ALGARVE, UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

IV Encontro APM-IE “Aprendizagens Essenciais em Matemática - perspectivas e práticas”

LUCÍLIA TELES

O IV Encontro de Professores APM-IE realizou-se no passado dia 11 de maio no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Este ano apresentou como tema de reflexão e debate “Aprendizagens Essenciais em Matemática - perspectivas e práticas”, convidando professores de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário, mestrandos e doutorandos da área do ensino desta disciplina, a juntarem-se num dia que se pretendia, sobretudo, de partilha.

À semelhança do que se tem verificado em anos anteriores, o Encontro voltou a despertar muito interesse por parte dos professores, tendo-se registado uma grande procura.

Este ano estiveram presentes 201 participantes, que se inscreveram num dos quatro grupos de discussão definidos: 1.º, 2.º e 3.º Ciclos de Ensino Básico e Ensino Secundário.



O programa do Encontro iniciou com a sessão plenária *Aprendizagens essenciais em Matemática: de que falamos?*, proferida pelo professor Henrique Guimarães, que motivou a reflexão dos participantes sobre o tema e serviu de mote ao trabalho que se seguiu nos grupos de discussão, divididos por ciclo de ensino.

Em cada grupo de discussão dois professores que, no presente ano letivo trabalharam com base nas aprendizagens essenciais, apresentaram as suas experiências. A partilha e a discussão/debate que se seguiu centrou-se nas mudanças que as aprendizagens essenciais em Matemática produziram em termos de dinâmica e organização do trabalho dos professores, como foi feita a gestão curricular e que reflexos percecionam os professores nos alunos, ao nível das suas atitudes e aprendizagens matemáticas. A diversidade de experiências partilhadas enriqueceu o debate que, em qualquer um dos grupos de discussão, foi bastante participado. Os diversos testemunhos destacam o trabalho entre professores e, em alguns casos, uma certa estabilidade das

equipas pedagógicas; a necessidade de cruzar as aprendizagens essenciais e o programa ainda em vigor e a redefinição de critérios de avaliação; uma maior diversidade de tarefas, de recursos e necessariamente de instrumentos de avaliação, envolvendo mais os alunos numa avaliação mais formativa; maior motivação e envolvimento dos alunos no seu processo de aprendizagem, onde se demarca o desenvolvimento de capacidades transversais, que se tem refletido numa melhoria das próprias aprendizagens. Estes foram os aspetos-chave resumidos no painel de síntese dos grupos de discussão que reabriu os trabalhos no período da tarde. A visão trazida pelos professores, relativa ao trabalho que estão a desenvolver nas escolas, foi complementada com um olhar sobre as aprendizagens essenciais em matemática a partir de outras perspetivas, num painel plenário, que contou com a participação das professoras Joana Brocardo (ESE Setúbal), Leonor Santos (IE) e Conceição Gonçalves (Técnica Superior do ME).



Os participantes foram convidados a olhar para as aprendizagens essenciais “cruzando-as” com outros documentos orientadores como o Perfil dos Alunos à saída da escolaridade obrigatória (Joana Brocardo), estudos/trabalhos internacionais como o PISA (Conceição Gonçalves) ou outros realizados no âmbito da Educação, e da Educação Matemática em particular, na OCDE (Leonor Santos).

Encontro “Aprendizagens Essenciais em Matemática - perspectivas e práticas”, proporcionou um dia marcado pela partilha de experiências, de reflexão e de debate sobre a prática dos professores, por professores e entre professores, onde a participação ativa e interessada dos participantes justifica a aposta neste tipo de iniciativas.

LUCÍLIA TELES
DIREÇÃO DA APM

Raciocinar tem mais que se lhe diga!

MARIA EUGÉNIA JESUS
HELENA COUTINHO

Este artigo condensa o essencial de alguns dos muitos desafios e respetivas partilhas que os alunos realizaram ao longo do ano letivo 2015/2016, numa turma do 4.º ano numa escola de Faro. Tem por base uma comunicação apresentada no encontro de professores de matemática que se realizou nos dias 1 e 2 de julho de 2016, em S. Brás de Alportel, na Escola Secundária José Belchior Viegas - ALGARMAT 2016.

Entendemos recolher evidências da forma como o grupo/turma trabalhava a organização e explicitação do pensamento e raciocínios matemáticos.

Segue-se um relato circunstanciado de algumas evidências de reflexão – nomeadamente, as consideradas mais significativas neste processo.

Serviu-nos de suporte teórico a obra de Smole e Diniz (2001) - Ler, Escrever e Resolver Problemas - Habilidades Básicas para Aprender Matemática. Estas autoras defendem que a resolução de problemas deve colocar o aluno perante a tomada de decisões para alcançar um objetivo traçado por ele mesmo ou que lhe foi proposto, mas com o qual ele interage, se desafia e envolve. Para cada desafio apresentamos um suporte teórico, uma tarefa, o raciocínio dos alunos, e a discussão e por fim as nossas reflexões. O ambiente de aprendizagem na sala de aula permitiu que individualmente, a pares ou em pequenos grupos todos pudessem participar, opinar, comunicar e trocar informações e experiências (embora não tivéssemos transcrito todas essas interações para este artigo).

Os alunos, mediados por nós, desenvolveram conhecimentos matemáticos. E para que a aprendizagem da matemática se tornasse significativa, refletimos juntos sobre os registos de tarefas, desafios, problemas, atividades e exercícios. Tentámos potenciar a concretização de ideias matemáticas através da comunicação dos pensamentos, das experiências, das estratégias, do dizer como se fez, pois partilhar o pensamento e explicar o raciocínio ajuda a que os conteúdos sejam apropriados, tendo em conta que:

“...raciocinar remete para calcular, mas também para usar a razão ao julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir. Assim, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo. Também raciocinamos ao apresentar razões que justificam ideias

ou posicionamentos, ao argumentarmos para nos convencermos, ou para convencer outros, da plausibilidade de conjecturas que enunciamos e da razoabilidade de afirmações que fazemos ou ao procurarmos explicar a coerência entre o que se aceita como válido e as suas consequências.” (Boavida & Menezes, 2012, p.289)

Os materiais utilizados tiveram fontes diferenciadas: manuais em vigor, de acordo com o programa e metas; sites e blogues (recurso à Internet); grupo de trabalho de formação cooperada do Movimento da Escola Moderna (MEM), e construídos na turma.

As citações que antecedem as tarefas constituem o suporte teórico que anteriormente referimos.

Tarefa 1 – Os botões

“Introduzir os recursos de comunicação nas aulas de matemática (...) pode concretizar a aprendizagem numa perspetiva mais significativa para o aluno e favorecer o acompanhamento desse processo por parte do professor.

Analisar o papel da oralidade, das representações pictóricas e da escrita como recursos de ensino permite vislumbrar uma nova dimensão para a prática escolar em sintonia com as pesquisas sobre a aquisição do conhecimento e da aprendizagem.” (Smole & Diniz, 2001, p.15)

O Hugo perdeu o seu botão e o seu amigo Rui está a tentar ajudar a encontrá-lo.

Podes ajudar o Rui a encontrar o botão do Hugo? Aqui estão algumas pistas:

- O botão não é preto.
- O botão não é pequeno.
- O botão não é quadrado.
- O botão não deve ter 2 buracos.
- O botão não é fino.

Qual é o botão do Hugo?

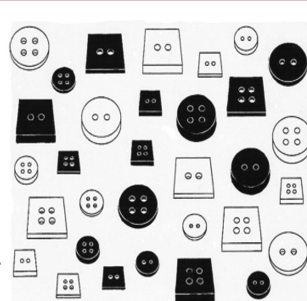


Figura 1. Enunciado da tarefa 1

Fonte: <https://casconha2quartoano.files.wordpress.com/2011/01/problemas-da-semana.doc>

Trabalho realizado individualmente em sala de aula. Os alunos apresentaram os seguintes raciocínios justificando a escolha do botão/resposta:

- “É o botão grosso, grande, com 4 buracos, é grande” (João);
- “Tínhamos que saber qual era o botão do Hugo - não era

preto portanto risquei os botões pretos; depois tinha de riscar os quadrados; a seguir risquei os botões pequenos e por fim os brancos” (Diogo);

- “Pois, não é preto, o botão não é pequeno nem quadrado” (Matilde);
- “O botão do Hugo é um branco, com quatro buracos e gordo” (Anne);
- “Eu acho que é o 13.º botão” (David)
- “É o botão rodeado” (Vaz);
- “É o branco, porque não é fino, não tem dois buracos e não é preto” (Rodrigo);
- “Eu fiz assim, contei os botões e soube qual era o do Hugo” (Bernardo).

Consideramos que a dificuldade que os alunos encontraram em responder à questão formulada não se prendeu com dificuldades na leitura e compreensão, nem com falta de rotinas de um trabalho pedagógico específico de matemática mas sim com a dificuldade em “descrever” o botão utilizando as quatro características que o identificam.

Tarefa 2 – As horas de trabalho

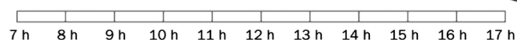
“Em qualquer área do conhecimento a leitura deve possibilitar a compreensão de diferentes linguagens de modo a que os alunos adquiram uma certa autonomia no processo de aprender (...)

A leitura reflexiva exige que o leitor se posicione diante de novas informações procurando a partir da leitura, novas compreensões.”

(Smole & Diniz, 2001, p. 69)

Lê e responde.

A Fabiana organizou o dia dela da seguinte maneira: saiu de casa às 7h00 da manhã; chegou ao trabalho às 8h00; teve uma hora de almoço; saiu do trabalho às 16h00 e chegou a casa às 17h00.



- Quanto tempo passou desde que ela saiu de casa até à hora em que voltou?
- Que fração desse período representa o tempo que ela teve para o almoço?
- Que fração desse período representa o tempo que ela gastou no trajeto para ir trabalhar e para voltar para casa?
- Que fração desse período representa o tempo em que ela esteve no trabalho?

Figura 2. Enunciado da tarefa 2

Fonte Alfa - Matemática 4 - 4.º Ano, Eva Lima, Nuno Barrigão, Nuno Pedroso, Vítor da Rocha – Porto Editora - manual adotado (versão on line – Escola Virtual)

Trabalho realizado individualmente tendo suscitado as seguintes intervenções:

- “Passaram 10 horas, fiz assim: onde estão registadas as horas escrevi 1h, 2h, 3h até chegar às 17h e deu-me 10 horas” (Catarina);
- “Eu também acho desde que saiu de casa até que voltou, passaram 10 horas. (E continua) porque saiu às 7h, mais uma hora a chegar ao trabalho, teve lá 8h, com uma hora de almoço, (conclui) depois demorou uma hora a chegar a casa” (Anne);

- “Sim, passaram 10 horas, eu vi na linha, das 7 às 17h” (Rosa) - Respondendo à questão da alínea b);
- “Tempo de almoço: $\frac{1}{8}$ o que quer dizer 1h de almoço e o 8, quando chegou ao trabalho” (Rodrigo);
- “O tempo almoço é $\frac{1}{10}$ (justifica) pois 1 é a hora do almoço e 10 é o tempo que esteve fora de casa (alínea a)” (Diogo);
- “Mas...na alínea a, pergunta quanto tempo passou desde que ela saiu de casa, e até à hora em que voltou e não pergunta as horas que trabalhou por isso não é $\frac{1}{8}$ mas $\frac{1}{10}$ foram as 10h que esteve fora” (Ana Carolina);
- Outros Argumentos (alínea c):
 - “ $\frac{2}{17}$ saiu às 16h e chegou às 17h a casa... se juntar as 4 e as 7 ficam duas horas” (Andreia);
 - “ $\frac{2}{10}$ porque ela demorou uma hora de manhã e uma hora à tarde” (Janaína);
 - “ $\frac{2}{10}$ significa $1 + 1$ que são 2 num total de 10” (Vaz);
- Argumentos (alínea d):
 - Fração $\frac{7}{10}$ representa o n.º de horas que trabalhou” (Eva);
 - “O 7 representa... e o 10 representa ... o 7 representa as horas de trabalho e 10 as horas que esteve fora (10 -1h de transporte, -1h de almoço, -1 de transporte)” (Dinis).

A forma como a tarefa está apresentada (embora com a ajuda de uma linha de tempo) e a falta de compreensão, pelos alunos, de algum dos conceitos envolvidos revelou, do nosso ponto de vista, dificuldade na passagem da linguagem matemática para a circunstância do problema (quotidiano). Isto é, não fazem parte do quotidiano, e há significados diferentes na matemática e fora dela.

Tarefa 3 – Os círculos

“Os recursos da comunicação são também valiosos para interferir nas dificuldades encontradas ou para permitir que o aluno avance mais, propondo-se outras perguntas ou mudando a forma de abordagem. Quando assumimos que a resolução de problemas/tarefas /... está intimamente relacionada à aprendizagem de conteúdos, o recurso à comunicação é essencial, pois é o aluno, falando, escrevendo ou desenhando, que mostra ou fornece indícios das habilidades e atitudes que está a desenvolver, que conceitos domina e que dificuldades apresenta.” (Smole & Diniz, 2001, p. 95)

O Ivo recortou um círculo vermelho com 56 cm de diâmetro e a Maria recortou dois círculos, um azul com 14,5 cm de raio e outro verde do mesmo tamanho.

Calcula o raio e o diâmetro de cada círculo e completa a tabela

	Círculo vermelho	Círculo azul	Círculo verde
Raio			
Diâmetro			

Os dois círculos da Maria cabem, um ao lado do outro, dentro do círculo do Ivo? Justifica a tua resposta.

Figura 3. Enunciado da tarefa 3

Fonte: Alfa - Matemática 4 - 4.º Ano, Eva Lima, Nuno Barrigão, Nuno Pedroso, Vítor da Rocha – Porto Editora - manual adotado (versão on line – Escola Virtual)

Esta tarefa foi realizada a pares, e apresentam-se alguns argumentos explicitados em grande grupo.

Alguns consideraram que não cabiam:

- “Não cabe porque 56cm é menor que 58cm que é a soma dos dois círculos da Maria” (João e Eva);
- “Não. Era preciso mais 2 cm porque $29 + 29 = 58$ e o círculo do Ivo só tem 56” (Vaz e David);
- “Não porque 58, era preciso mais 18cm” (Joana e Matilde);
- “O círculo do Ivo é mais pequeno 2cm do que o da Maria” (Diogo e Catarina);
- “Não cabe, pois $29 + 29 = 58$ e o do Ivo é 56” (Maria Inês e Carolina);
- “Precisávamos de mais 1 cm. Não cabem porque o do Ivo é maior” (Daniel e Rodrigo).

Outros alunos responderam:

- “ $14,5 + 14,5$ dá 29 e $29 + 29$ dá 58 e o do Ivo tem 56”. (Rosa e Cadina);
- “Vai ficar um cm de um círculo e um cm de outro círculo de fora (28 é menor que 29cm)” (Ana e Sílvia);

Outros acham que cabia:

- “Cabia porque 56cm é maior que 14,5cm” (Janaína e Ricardo).

Como a apresentação da tarefa não foi oral, não se garantiram os meios para que todos os alunos iniciassem a sua resolução sem dúvidas quanto ao significado das palavras que nela aparecem. Creamos terem os alunos, revelado alguma dificuldade nos conceitos envolvidos. Resolveram através do cálculo, não recorrendo a competências relacionadas com o conteúdo da geometria (relação raio/diâmetro).

No fim foi necessário fazer a verificação do resultado, tendo-se usado o desenho dos três círculos recorrendo ao quadro interativo.

Tarefa 4 – O monstro das três cabeças

“Cada momento na resolução de problemas deve ser de investigação, descoberta, prazer e aprendizagem. A cada proposta de resolução, os alunos devem ser encorajados a refletir e analisar detalhadamente o texto, estabelecendo relações entre os dados numéricos e os outros elementos que o constituem e também com a resposta obtida, percebendo se esta é ou não coerente com a pergunta e com o próprio texto.” (Smole & Dinis, 2001, p. 120)



Isto é o monstro das três cabeças. Cada vez que tem dores numa das suas cabeças, tem de tomar 4 comprimidos. Hoje sentiu dores nas três cabeças. Mas o frasco já estava no fim e faltaram comprimidos para uma cabeça. Quantos comprimidos havia no frasco?

Figura 4. Tarefa partilhada pelo grupo de formação cooperativa online

O trabalho foi realizado a pares. Registos da intervenção dos alunos durante a apresentação em grande grupo:

- “Cada monstro tem que tomar 4 comprimidos e por isso $4 \times 3 = 12$, depois $12 - 4 = 8$ tirámos 4 porque é o número de comprimidos de uma cabeça” (Vaz e Rodrigo);
- “Havia um comprimido no frasco. Não. Faltava um comprimido no frasco e o frasco tinha 11” (David e Matilde);
- “Havia 12 e cada cabeça tomava três, é o que diz o texto” (Janaína e Pisco);
- “Fizemos 4 comprimidos dá para uma cabeça, 8 dá para 2 cabeças e 12 daria para 3 cabeças. Uma não tomou” (Rosa e Joana);
- “Faltava um comprimido para a cabeça do meio. No frasco podia haver 11 faltava um. Ou faltavam dois e o frasco podia ter 10 ou três e o frasco podia ter 9. Não tem que ser 8.” (Andreia e Catarina);
- “Se uma toma 4, a outra toma 8 e a outra 12, então subtraímos 4 e deu 8, uma não tomou” (Ana Carolina e Maria João);
- “Multiplicámos 3 por 4 e deu-nos doze (o que era preciso para as três cabeças tomarem os seus comprimidos) e depois subtraímos 4 porque uma não tomou e deu-nos 8. Por isso o frasco poderia ter 8 comprimidos” (Eva e João);
- “ 4×3 é igual a 12 mais 4 16, podia haver dezasseis - João - mas assim havia para todas e ainda sobravam 4!” (Anne e Mimo); “Somámos 4 mais 4 deu-nos oito, poderia estar qualquer número que não fosse múltiplo de 4, conforme as dores de cabeça” (Daniel e Maria Inês).

Nesta tarefa houve a descoberta de estratégias diferentes e válidas para chegar à resposta. Ficou claro para os alunos, que podem surgir diferentes soluções, que precisam ser comparadas entre si e justificadas em relação à tarefa que as diádes tinham para resolver.

Tarefa 5 – Bolas!!!!

“O desenho serve de recurso de interpretação do problema e como registo da estratégia de solução.” (Smole & Diniz, 2001, p. 127)

Tens 5 bolas vermelhas, cinco bolas amarelas e cinco bolas azuis.

Como é que podes colocá-las dentro desta moldura triangular (figura 5), sem que duas bolas da mesma cor fiquem encostadas uma à outra.

(fonte: casconha2quartoano.files.wordpress.com/2011/01/problemas-da-semana.doc)

O trabalho foi realizado a pares. Argumentos apresentados pelos alunos:

- “Nós pensámos assim: pintámos 5 bolas azuis, 5 vermelhas e 5 bolas amarelas” (Mimo e Cadina);
- “Na primeira bolinha pintei os azuis, nas duas segundas de vermelho, nas terceiras de azul” (Matilde e Ana Carolina).

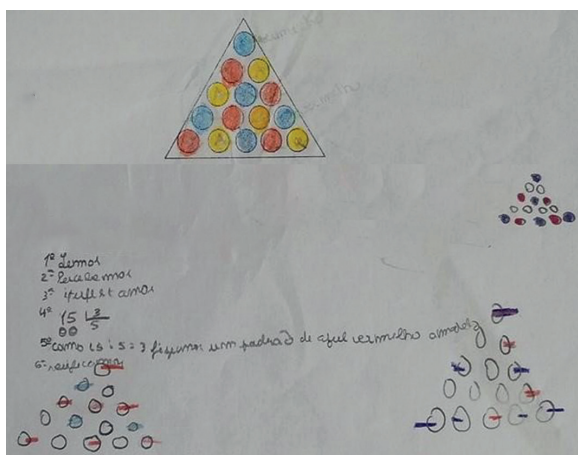


Figura 5. Resolução dos alunos – estratégias

Dificuldade na interpretação/compreensão do enunciado tendo sido fundamental o processo de socialização da aprendizagem, na discussão apresentada. As discussões permitiram analisar várias alternativas, o que se foi tornando essencial para o desenvolvimento das ideias matemáticas, e desenvolvimento da percepção de que as tarefas matemáticas podem não ser tarefas solitárias.

Tarefa 6 – Fotos, fotos e mais fotos

“A oralidade utilizada como recurso na resolução de problemas pode ampliar a compreensão do problema e ser veículo de acesso a outros tipos de raciocínio. Falar e ouvir nas aulas de matemática permite uma maior procura de experiências entre as crianças. Amplia o vocabulário matemático e linguístico do grupo e faz com que ideias e procedimentos sejam compartilhados.” (Smole & Diniz, 2001, p. 126)

Proposta

Se as três amigas quisessem tirar uma foto por cada combinação possível (trocando de lugares), quantas fotografias teriam de tirar? (Podem utilizar as tampinhas coloridas, desenhos, tabelas, esquemas, etc.)

Extensão à proposta

E se às três amigas se tivesse juntado o David, quantas fotografias diferentes podiam eles tirar?



Figura 6. Suporte às propostas - obtidas a partir da atividade “Land art” realizada pela turma

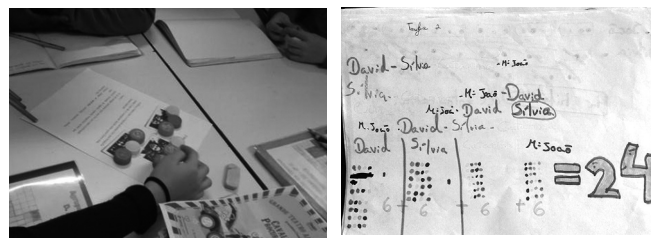


Figura 7. Resolução dos alunos – estratégias

Os alunos recorreram à manipulação de materiais e à elaboração de esquemas para a resolução (figura 7).

A discussão foi feita após a projeção de fotografias tiradas aos registos das estratégias e da respetiva explicação oral.

Esta tarefa, em concreto, permitiu que o processo de discussão ajudasse a que os alunos atribuíssem sentido e significado ao fazer matemático na escola ampliando as capacidades reflexivas deste grupo/turma. A investigação, o diálogo e a reflexão sobre as aprendizagens valorizaram a análise da possibilidade de errar e a construção do conhecimento.

REFLEXÕES FINAIS

A aprendizagem e o ensino da matemática na escola envolve, necessariamente, criar/transformar a sala de aula num espaço “problematizador”. Os alunos devem ser colocados perante desafios onde podem encontrar regularidades, formular, testar, justificar ou refutar hipóteses e ser convidados a refletir e a defender as suas ideias por meio de argumentações e discussões com os seus pares. As rotinas de discussão descentram o fazer matemático do mero domínio de técnicas e exercícios típicos. A partir das atividades propostas, destacaram-se: a leitura e escrita matemática, os procedimentos e metodologias de trabalho bem como as interações.

Raciocinar em matemática, segundo Yakel e Hanna (2003), é uma atividade que o aluno exerce quando resolve problemas matemáticos e é chamado a explicar e a justificar a sua resolução. Os alunos têm a necessidade de explicar para clarificar melhor o seu raciocínio, para validarem as suas ideias tanto para si como para o grupo. Estes, relacionam matematicamente ou não os conhecimentos que já possuem, recorrem a estratégias já aprendidas para que revelem aos outros a forma como raciocinaram.

Independentemente das tarefas propostas, as crianças fazem as suas representações por vezes mais relacionadas com o seu quotidiano e ambiente social do que com aquilo que a escola e a matemática lhes propõe. Como refere Canavarro e Pinto (2012) “as representações idiossincráticas construídas pelos alunos no contexto de tarefas problemáticas podem ajudá-los tanto na compreensão como na própria resolução, constituindo, também, uma forma de registo do método de resolução que

pode ainda possibilitar um meio de o descrever a outras pessoas” (p. 54). Também os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) indicam que os alunos devem «criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas» (p. 160).

Referências

- Boavida, A., & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: contornos e desafios. In A. P. Canavaro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática — Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287–295). Portalegre: SPIEM.
- Canavaro, A.P., & Pinto, M.E. (2012). O raciocínio Matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Revista Quadrante*, vol. XXI (2), 51-79.
- Menezes, L. Ferreira, F., Martinho, M.H., & Guerreiro, A. (2014). Práticas profissionais dos professores de Matemática. In João Pedro Ponte (Org.), *Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática*, (pp. 135-165). Lisboa: Universidade de Lisboa.

- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programas e Metas Curriculares - Matemática - Ensino Básico*. Lisboa: DGE-MEC.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Smole, K. S., & Diniz, M. L. (2001). *Ler escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.
- Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: NCTM.

MARIA EUGÉNIA JESUS - Professora - AGRUPAMENTO DE ESCOLAS D. AFONSO III

HELENA COUTINHO - Aluna de mestrado - ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO, UNIVERSIDADE DO ALGARVE

CONVITE PARA COLABORAÇÃO NA REVISTA N.º 154-155

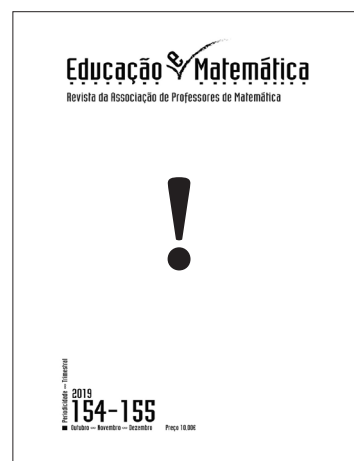
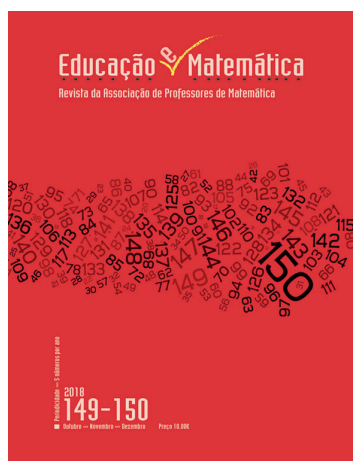
Este ano, o tema escolhido para o número temático da revista Educação e Matemática, do trimestre outubro/dezembro, último do ano 2019, foi a **Interdisciplinaridade**.

Assim, neste número temático da EeM serão discutidos e refletidos diferentes aspetos do desenvolvimento do trabalho interdisciplinar envolvendo a matemática, no currículo e na escola, dando também uma perspetiva do que se está a fazer neste domínio em Portugal e noutros países. Um dos objetivos principais é a clarificação de como fazer a integração do ensino e aprendizagem da matemática com outras áreas do saber. Pensamos que será pertinente a partilha de experiências

de articulação interdisciplinar da Matemática com outras disciplinas/áreas que compõem o currículo da Educação Pré-Escolar, Ensino Básico e Secundário e formação de professores. Aqui fica o convite para a partilha de experiências ou reflexões sobre este tema. Esperamos o vosso contributo, que pode ter a forma de um artigo sobre um projeto realizado, relato de uma experiência, ponto de vista, etc.

Os textos deverão ser enviados até **15 de setembro de 2019**. Em “Como publicar”, no site da APM, encontram-se as normas práticas a ter em conta.

A REDAÇÃO DA EeM



Formar para o mercado de trabalho

Um dos papéis fundamentais da escola é formar as novas gerações com capacidades e habilidades que lhes permitam participar de forma útil e com mais valia na sociedade e no mercado de trabalho. Contudo, no momento atual, há desajustes entre a procura e a oferta, ou seja, as áreas de formação procuradas pelos alunos e disponibilizadas pelas escolas nem sempre são aquelas onde há maior empregabilidade. E, na minha opinião, este desencontro poderá ainda tornar-se maior, na medida em que vivemos um momento de grande aceleração e substituição de muitos postos de trabalho por máquinas/robôs.

Recentemente, li no Expresso uma peça da Cátia Mateus acerca do elevado desemprego em determinados setores, a par da existência de vagas por preencher noutras áreas específicas. Dizia que *“há 344 mil desempregados e milhares de vagas por preencher. As dificuldades de contratação são transversais a profissionais qualificados e pouco qualificados. Mas os especialistas em recrutamento alertam para a maior fragilidade de algumas profissões tradicionais, que nos últimos anos têm vindo a registar um forte aumento nas intenções de contratação, mas onde escasseiam candidatos. Costureiras, carpinteiros, serralheiros, soldadores ou até alfaiates estão entre os perfis mais difíceis de encontrar. Os salários continuam a ser o grande entrave à contratação”*.

Esta realidade, relatada pelo artigo que cito, faz-nos questionar sobre se as profissões do futuro estarão, ou não, maioritariamente ligadas à tecnologia, à engenharia e automação, como tantas vezes pensamos. Esta problemática tem dado origem a diferentes considerações e opiniões. Culturalmente, os portugueses preferem ter filhos “doutores e engenheiros” em detrimento da opção por outras profissões, como as referidas no artigo, embora, atualmente, estas sejam, provavelmente, melhor remuneradas do que algumas das primeiras. Mas este argumento pode ser contornado se olharmos para ele à luz do empreendedorismo: é certo que o trabalho dependente paga muito menos do que, potencialmente, um trabalho por conta própria. Mesmo isto - o empreendedorismo - será uma competência que os nossos jovens terão de aprender, uma vez que o emprego estável cada vez existe menos.

Para a análise da questão, as estratégias genéricas de Michael Porter constituem um contributo pertinente. É certo que, no futuro, as competências tecnológicas serão muito importantes,

mas, para sobreviver num mundo tecnológico, no qual grande parte do trabalho será substituído por robôs e por tecnologia, temos duas possibilidades:

- i. Por um lado, podemos diferenciar-nos, desenvolvendo as competências que os robôs não têm, que são as competências que nos tornam humanos e nas quais as máquinas não conseguem competir connosco;
- ii. Por outro, podemos dedicar-nos a mercados de nicho, nos quais a implementação de robôs e tecnologia para executar as tarefas não é, para já, rentável, dado tratar-se de um tipo de trabalho não “standardizável”.

É nesta última categoria que se encaixam as costureiras, carpinteiros, serralheiros, soldadores, alfaiates, entre outros profissionais, por quem a procura no mercado laboral, como vimos, é crescente e superior à oferta disponível.

Se, por um lado, temos de preparar as nossas crianças – os profissionais que vão entrar no mercado de trabalho em breve – com as competências necessárias na área da tecnologia para que possam singrar no futuro - porque competências nunca são em demasia -, por outro, a verdade é que hoje também registamos uma falta de pessoas qualificadas em profissões não tecnológicas, grupo de profissionais que, a meu ver, sobreviverá no futuro, já que não é financeiramente rentável a sua substituição por um robô tão complexo.

A mudança está a acontecer. Importa que a escola possa refletir sobre esta realidade para que possa repensar práticas e modelos pedagógicos. É certo que não conseguimos definir aquilo que serão as profissões dos nossos filhos, mas poderemos prepará-los melhor para os novos contextos de incerteza, onde a flexibilidade, a capacidade de adaptação e a criatividade serão sempre fundamentais. Cabe-nos a todos contribuir para que as nossas crianças tenham acesso às melhores ferramentas para o desenvolvimento de competências relacionais, sociais e emocionais. Os nossos filhos serão muitas coisas, gestores de conhecimento e de informação, e tenho a certeza que os melhor sucedidos serão os que tiverem mais habilidades sociais.

PATRICK GÖTZ

FUNDADOR E CEO DA TECKIES

Percursos possíveis em Educação

FERNANDO EMÍDIO

O Agrupamento de Escolas Marinha Grande Poente (AEMGP), constituído em abril de 2013, integra dez estabelecimentos de educação e ensino: dois jardins de infância, seis escolas básicas do 1.º ciclo (cinco das quais incluem educação pré-escolar), uma escola básica com 1.º, 2.º e 3.º ciclos e uma escola secundária com 3.º ciclo e ensino secundário (científico-humanístico e profissional). A diversidade de públicos que frequenta hoje a escola, conjugada com o aumento da escolaridade obrigatória para os 18 anos, implica que as escolas saibam encontrar no seu seio as estratégias que possibilitem a efetiva resolução dos problemas de saída precoce do sistema, insucesso e abandono escolares. Neste contexto, a diversidade de modalidades de formação apresenta-se como uma efetiva estratégia de certificação e qualificação da heterogeneidade de públicos jovens e de adultos que procuram no AEMGP respostas educativas adequadas ao seu perfil de aluno. Apostamos numa oferta educativa e formativa diversificada, valorizando os ciclos iniciais de escolaridade, onde acreditamos que *um bom começo vale por toda a vida* e o desenvolvimento de um percurso educativo, assente num projeto transversal único a todos os ciclos, possibilitará uma intervenção mais precoce e com maior proximidade aos alunos, num agrupamento onde a integração e a inclusão são preocupações permanentes de todos. Assim, além do ensino obrigatório, a oferta formativa do AEMGP inclui turmas de Educação e Formação de Adultos (EFA) no âmbito do Centro Qualifica que se encontra em funcionamento na escola sede, assim como Português para Falantes de Outras Línguas (PFOL), perfazendo um total de cerca de 2800 alunos e 250 docentes.

Desde dezembro de 2012 que o AEMGP se constituiu Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP), beneficiando assim de um Gabinete de Apoio ao Aluno e à Família (GAAF), onde se encontram a tempo inteiro uma mediadora e uma técnica de serviço social. O contexto socioeconómico dos alunos e respetivas famílias é diverso, prevalecendo no entanto alguma carência, que se pode confirmar pelo número de alunos abrangidos pela Ação Social Escolar (ASE), que perfaz um total de 776.

Consideramos que foi a oportunidade criada pela adesão ao projeto TEIP que nos deu o impulso de mudança e nos

permitiu encontrar o sentido que hoje pretendemos delinear com o novo projeto. Assim, o AEMGP foi convidado a integrar o PPIP (Projeto-Piloto de Inovação Pedagógica) juntamente com mais cinco agrupamentos de várias regiões do país, no ano letivo de 2016/2017. O PPIP foi criado através do Despacho n.º 3721/2017, do Gabinete do Secretário de Estado da Educação, em regime de experiência pedagógica, durante três anos escolares, orientados para a adoção de medidas que, promovendo a qualidade das aprendizagens, permitam uma efetiva eliminação do abandono e do insucesso escolar em todos os níveis de ensino. Após uma reflexão conjunta e alargada dos vários órgãos internos do agrupamento relativamente aos problemas que se nos apresentam, com os contributos do nosso perito externo no âmbito do TEIP e da comunidade educativa, foram elencados os principais obstáculos ao sucesso educativo dos nossos alunos. Relativamente à Escola Básica da Fonte Santa, onde se resolveu intervir ao nível da educação pré-escolar e do 1.º ciclo, constatou-se o seguinte:

- funcionamento de duas turmas, no 1.º ciclo, com dois anos de escolaridade cada uma, nem sempre organizadas da forma mais funcional;
- este regime de organização tinha, portanto, implicações na «gestão da sala de aula» enquanto espaço de interações e de aprendizagens, por ser mais indutora de estratégias centradas no professor e menos na adoção de pedagogias ativas baseadas na colaboração, no trabalho por projetos ou em desafios integradores e promotores do desenvolvimento de competências;
- necessidade de reforço da articulação entre a educação pré-escolar e o 1.º ciclo, como um fator de minimização das dificuldades de transição entre níveis de educação e ensino e promoção do sucesso educativo;
- necessidade de um reforço da diversificação pedagógico-didática para fazer face à natural diversidade de ritmos e estilos de aprendizagem;
- necessidade de criar uma identidade própria para a Escola Básica da Fonte Santa, capaz de responder à procura por parte dos pais e encarregados de educação, através de modelos de ensino e de aprendizagem onde as crianças e

os alunos têm voz ativa na programação das atividades e na respetiva avaliação;

- necessidade de educação para uma cidadania autónoma, crítica e participativa, assente na valorização das atitudes, valores, afetos, questões ecológicas e ambientais e que promova o desenvolvimento integral das crianças.

No que diz respeito ao 2.º ciclo, os principais problemas identificados foram:

- a passagem de um regime de monodocência no 1.º ciclo para um regime disciplinar no 2.º ciclo, com implicações nas aprendizagens dos alunos;
- este regime de organização é mais indutor de estratégias centradas no professor e menos na adoção de pedagogias ativas baseadas na colaboração, no trabalho por projetos ou em desafios integradores e promotores do desenvolvimento de competências;
- a partir deste ciclo de ensino, o foco do trabalho docente é normalmente centrado no ensino e na transmissão de conhecimentos, sem ter em conta muitas vezes o perfil de aprendizagens dos alunos e, conseqüentemente, a necessidade de diversificação pedagógico-didática para fazer face à sua natural diversidade;
- a *quebra* de uma vinculação forte com os professores por força da disciplinarização tem implicações nos alunos a nível da sua motivação ou disposição para aprender, sobretudo daqueles que se situam nos extremos: os que têm capacidade para desenvolver mais as suas competências e aqueles que, por força das suas fragilidades e dificuldades necessitam de outras (e mais adequadas) estratégias pedagógicas;
- finalmente, pensamos que a predominância de uma avaliação pontual, sustentada numa cultura de testes e em classificações quantitativas, sem um adequado *feedback* que permita aos alunos a oportunidade para melhorar as suas aprendizagens, tem-se revelado como outro obstáculo à promoção da qualidade das aprendizagens.

Tendo em conta este diagnóstico, foram priorizadas medidas de intervenção nos eixos organizacional e pedagógico. As medidas organizacionais passaram pela reorganização dos tempos e espaços de aprendizagem, de modo a constituir tempos de aprendizagem interdisciplinares, flexíveis e indutores de metodologias ativas; pela constituição de grupos de aprendizagem heterogêneos e autónomos; pela reorganização curricular de forma a permitir o desenvolvimento da articulação entre a educação pré-escolar e o 1.º ciclo ao nível de projetos e atividades de âmbito curricular; pela criação da Oficina de Projetos (OP) para o 2.º e 3.º ciclos (5.º, 6.º e 7.º anos), baseada numa dinâmica interdisciplinar e que possibilite uma perspetiva

integradora, contextualizada e transversal dos currícula; pela introdução no horário dos alunos da OP no período da tarde, o que contribuiu para uma melhoria dos ambientes de aprendizagem; pela redução do número de docentes das equipas pedagógicas dos 2.º e 3.º ciclos; pelo funcionamento das OP em pares pedagógicos.

Esta reorganização está aliás dependente da visão pedagógica que pretendemos implementar e que se baseia no aprofundamento da inclusão, na introdução de metodologias ativas de aprendizagem, no *aprender a fazer* e, portanto, no desenvolvimento de competências nos alunos. Nesse sentido, tem sido fomentada uma cultura de maior participação e envolvimento dos alunos e dos pais na concretização de projetos cooperativos de aprendizagem, estruturados pelas equipas pedagógicas, alargados também à participação dos pais. O trabalho cooperativo em pequenos grupos e ainda o trabalho autónomo com acompanhamento individual constituem espaços de aprendizagem e consolidação de aprendizagens. A procura, por parte dos pais e encarregados de educação de alunos do 1.º ciclo, de modelos pedagógicos alternativos, colocando o foco no bem-estar das crianças, no desenvolvimento de capacidades ao nível da autorregulação da aprendizagem, do comportamento e das emoções é também um dos aspetos fulcrais do projeto, tanto mais que o AEMGP tem uma prática já implementada em todas as turmas do 1.º ciclo, que é o programa Mind Up (desenvolvimento de competências socioemocionais baseado em práticas de *mindfulness*). A inclusão de aprendizagens em contexto, potenciadas pela proximidade ao Pinhal de Leiria introduz também aspetos no âmbito de uma melhor cidadania e de uma educação ambiental reforçada, ancorada no ensino experimental das ciências e na valorização das tecnologias como ferramentas de apoio ao processo de ensino-aprendizagem.

De entre a vasta gama de modalidades de avaliação formativa de alunos, este projeto adota a avaliação para as aprendizagens (*assessment for learning*) como dimensão estruturante. Esta opção implica centrar a avaliação no processo de aprendizagem dos alunos; assumir como objetivo a melhoria das aprendizagens; reconhecer a sua finalidade formadora (desenvolvimento de capacidades de autorreflexão e autorregulação da aprendizagem); estar integrada nas situações de aprendizagem e não em momentos pontuais que muitas vezes certificam saberes, mas não permitem a melhoria das aprendizagens a partir do *feedback*; ser baseada em diversos instrumentos e técnicas, de modo a poder avaliar diferentes competências em situações o mais reais possível. Os encarregados de educação (EE) são informados sobre as aprendizagens desenvolvidas pelos seus educandos mensalmente através de uma apreciação escrita descritiva e qualitativa realizada pela equipa pedagógica e

pelo aluno (num processo que se pretende seja partilhado e de corresponsabilização dos pais e EE) e semestralmente, quando recebem uma avaliação sumativa. A avaliação das Oficinas de Projeto dos 2.º e 3.º ciclos tem impacto na avaliação de todas as outras disciplinas.

A participação nos dois projetos anteriormente referidos (TEIP e PPIP) levou a que o agrupamento fosse convidado a participar na implementação do projeto INCLUD-ED – *Escolas como Comunidades de Aprendizagem*. Este projeto, da autoria de investigadores da Universidade de Barcelona, baseia-se num conjunto de Ações Educativas de Sucesso para promover a transformação social e educacional. O modelo educativo está alinhado com teorias científicas internacionais que destacam dois fatores-chave para a aprendizagem na sociedade atual: interação e participação da comunidade. A nível teórico, este projeto baseia-se, entre outros, nos princípios da aprendizagem dialógica, na aprendizagem em contexto e na aprendizagem significativa. Pretende-se envolver todos aqueles que, direta ou indiretamente, têm influência na aprendizagem e no desenvolvimento dos alunos, incluindo todo o pessoal docente e não docente da escola, associações ou organizações locais, assim como familiares, amigos, vizinhos e voluntários. Esta é uma proposta de transformação da sociedade, em que as escolas e a comunidade educativa se unem para melhorar as condições de vida de todos. Os objetivos últimos deste projeto são superar o fracasso académico e fortalecer o sentido de comunidade e da verdadeira convivência.

São seis as Ações Educativas de Sucesso: Grupos Interativos; Tertúlias Literárias Dialógicas; Participação Educativa da Comunidade; Formação de Familiares; Formação Dialógica de Professores; Modelo Dialógico de Prevenção e Resolução de Conflitos. É na primeira que me vou focar a partir daqui, para tentar descrever a experiência na implementação desta estratégia no âmbito da matemática, no 1.º ciclo. Os Grupos Interativos são uma forma de organização da sala de aula, em grupos pequenos (4 a 5 alunos) e heterogéneos em termos de conhecimento, das competências, do género, da cultura, do idioma,... Há uma redistribuição dos recursos humanos disponíveis, uma vez que cada grupo tem um voluntário responsável, que pode ser um adulto da escola ou da comunidade. Estes voluntários têm como principal função dinamizar as relações entre os diversos alunos do grupo que se ajudam e aprendem, dialogicamente. A aula é dividida em vários períodos curtos, de 15 a 20 minutos, em que cada grupo deve resolver uma determinada tarefa. Essas tarefas são rotativas ao longo da sessão, de modo que cada grupo tenha passado por 4 tarefas, cada uma delas dinamizada por um adulto diferente. Trabalhar desta forma torna possível acelerar a aprendizagem e multiplicar interações com colegas

e com diferentes adultos. O papel do professor é organizar a turma em grupos, preparar as atividades, estabelecer critérios de avaliação, orientar os voluntários, apoiar as necessidades individuais dos alunos, controlar o tempo de cada atividade, supervisionar todos os grupos e fazer um balanço geral da aula.

No âmbito do PPIP, ao nível do 1.º ciclo, temos utilizado os grupos interativos na dinamização de atividades/tarefas de matemática, para consolidação de conhecimentos e competências. Estes grupos têm funcionado sobretudo com os alunos de 3.º e 4.º anos, por terem conteúdos programáticos idênticos na matemática, o que favorece a consolidação e revisão de conhecimentos por parte dos alunos de 4.º ano e o desenvolvimento pelos alunos do 3.º ano. Permite-lhes manter a atenção na tarefa, por ser de curta duração, e uma maior motivação e nível de participação, pela reduzida dimensão dos grupos. Esta tem sido uma experiência muito enriquecedora, na medida em que verificamos que os alunos se sentem mais valorizados, têm mais facilidade em participar e demonstram muito interesse e entusiasmo pela participação de voluntários da comunidade nesta dinâmica.

Na articulação com outras áreas do saber, temos desenvolvido algumas atividades entre a educação pré-escolar e o 1.º ciclo em trabalho de projeto, partindo sobretudo das ciências experimentais para envolver depois a matemática. Com estes dois níveis de educação e ensino esta articulação torna-se mais simples, por via da monodocência e da natural interdisciplinaridade dos currículos. Também temos utilizado tempos de estudo autónomo, momentos em que os alunos decidem, com base num plano de trabalho individual proveniente de um autodiagnóstico, quais os conteúdos que necessitam ser revistos e/ou aprofundados. Para finalizar, temos muitos momentos de trabalho conjunto, a pares e em pequeno grupo, com alunos de diferentes anos de escolaridade em que partilham conhecimentos, capacidades e competências, estratégia que ajuda na consolidação e aprofundamento.

Em jeito de conclusão, podemos afirmar que o caminho que temos trilhado é seguramente um dos caminhos possíveis na resposta que a escola pode dar às solicitações da sociedade atual, atribuindo significado às aprendizagens e tornando os alunos atores fundamentais do seu percurso formativo. A constituição de uma comunidade de aprendizagem, envolvendo um leque mais vasto de recursos físicos e humanos é também outra das nossas prioridades. Refletindo sempre sobre o que é mais adequado e reformulando sempre o que é necessário.

FERNANDO EMÍDIO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS MARINHA GRANDE POENTE

A matemática sob (sobre) pressão

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

O currículo tradicional de matemática tem sofrido diversas críticas no tocante à reduzida importância que costuma dar às conexões entre a matemática e contextos aplicados do mundo real (UNESCO, 2016). É fato não faltarem exemplos de contextos reais da física, da engenharia e das ciências sociais que fazem uso intenso de ferramentas matemáticas, cabendo à comunidade de educadores avaliarem a adequação e pertinência da penetração de tais problemas no currículo de matemática da escola básica. Uma estratégia que nos parece interessante para a incorporação de problemas aplicados nas aulas de matemática é a da busca de situações reais que permitam o trabalho simultâneo de tópicos do currículo canônico da matemática com ideias gerais exploradas nas ciências. Um tópico importante do currículo de matemática da escola básica que permite inúmeras aproximações com as ciências é o do estudo das grandezas e medidas. A proposta deste artigo é de apresentar dois exemplos de aproximação entre o estudo de grandezas e medidas com o estudo do conceito físico de pressão. No primeiro exemplo estimaremos o peso de um carro usando a pressão dos seus pneus e no segundo projetaremos um apagador de lousa mais eficiente explorando a relação entre grandezas envolvida na fórmula de pressão.

ESTIMANDO O PESO DE UM CARRO

A pressão P é a relação entre uma determinada força F e sua área A de distribuição, expressa pela fórmula matemática $P = \frac{F}{A}$. Muita “limonada” pode ser tirada desse “limão” em aulas de matemática da escola básica, como veremos a seguir.

Pensei nisso pela primeira vez quando li uma matéria no jornal a respeito do impacto negativo dos veículos pesados sobre a manta asfáltica que recobre ruas e estradas. Nela dizia que o excesso de peso dos caminhões poderia reduzir em até 50% da vida útil do asfalto das estradas ao provocar ondulações na pista que, posteriormente, se transformam em buracos. Naquela ocasião fiquei curioso em saber qual era o peso do meu carro. O caminho mais curto para isso, e muito sem graça, seria consultar o manual do veículo. Foi então que me lembrei do matemático alemão Karl Weirstrass (1815-1897) quando dizia que matemático que não é poeta não é um verdadeiro matemático. Para tentar estimar o peso do carro com “poesia” me ocorreu um experimento simples envolvendo o conceito de

pressão. Por “experimento simples” entenda-se o uso apenas de papel, régua e um medidor da pressão dos pneus do carro (foto 1), além de fita adesiva.



Foto 1. Material utilizado

A ideia básica consiste em utilizar a área de contato dos pneus do carro com o chão e a pressão de cada pneu para estimar a força exercida pelo veículo sobre o chão. Essa força está diretamente relacionada com a massa total do carro. Vamos ao trabalho!

Inicialmente “cerque” um dos quatro pneus do carro por folhas de papel de tal forma que seja possível estimar a área do pneu em contato com o chão, como mostram as fotos 2 e 3.



Foto 2. Pneu traseiro esquerdo (início)

Foto 3. Pneu traseiro esquerdo (final)

Em seguida, desloque o veículo para frente, sem mover as folhas de papel, que devem ser fixadas ao chão com fita adesiva. Com esse procedimento podemos estimar a área da região do pneu que estava em contato direto com o chão e que corresponde, aproximadamente, a área de um “buraco retangular” demarcado pelas quatro folhas de papel sobre o chão que cercaram o pneu. Quanto maior for a massa do veículo sobre a roda do carro, maior será a área do “buraco retangular” demarcado. Na foto 4 estão indicadas as medidas referentes ao “buraco retangular” demarcado pelo pneu traseiro esquerdo do meu carro sob o chão.

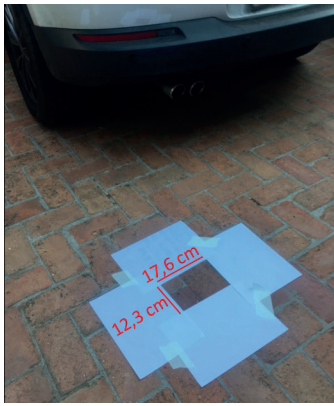


Foto 4. Área de contato do pneu com o chão = $216,48 \text{ cm}^2 \cong 216,5 \text{ cm}^2$

Chegou a hora de usar o medidor de pressão do pneu que, no nosso caso, estava regulado na unidade PSI, que é a abreviação de “pound force per square inch” (libras força por polegada quadrada). A pressão do pneu analisado inicialmente era de 29 PSI, como mostra a foto 5.



Foto 5. Pressão de 29 PSI.

Uma vez que estamos mais familiarizados com o uso do Sistema Internacional de Unidades, converteremos a pressão do pneu para quilogramas-força (kgf) por centímetro quadrado (cm^2). Uma libra equivale à 0,45592 kgf e, portanto, 29 PSI correspondem, aproximadamente, à 13,222 kgf por polegada quadrada. Como uma polegada quadrada equivale a 6,4516 centímetros quadrados, a pressão do pneu, em kgf/cm^2 , será dada por $13,222 \div 6,4516$, ou seja, aproximadamente $2,05 \text{ kgf}/\text{cm}^2$.

Agora vamos usar a fórmula matemática da pressão para descobrir a força exercida pelo pneu sobre o chão. Vale observar que estamos utilizando a força F em quilograma-força (kgf), o que significa dizer que o resultado obtido já será a massa, em kg, sobre o pneu traseiro esquerdo do carro. Vamos às contas:

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow 2,05 = \frac{F}{216,5} \rightarrow F \cong 443,83 \text{ kgf}, \text{ ou seja, temos massa aproximada de } 443,83 \text{ kg sobre esse pneu.}$$

Agora temos que repetir a coleta de dados e os cálculos para os outros três pneus do carro. No caso do veículo analisado, os dados foram:

Pneu	Pressão (PSI)	Pressão (kgf/cm^2)	Área (cm^2)	Força (kgf)	Massa (kg)
frente-esquerda	30	2,12	182,8	387,54	387,54
frente-direita	31	2,19	220,4	482,68	482,68
traseiro-esquerda	29	2,05	216,5	443,83	443,83
traseiro-direita	30	2,12	186,2	394,74	394,74
Total					1708,79

De acordo com o manual do veículo, seu peso bruto é igual a 1622 kg. Levando-se em consideração que o veículo analisado estava com metade da capacidade de 64 litros do seu tanque com gasolina, e que a gasolina tem densidade aproximada de $0,75 \text{ g}/\text{cm}^3$ ($0,75 \text{ kg}/\text{L}$), o “peso” estimado de combustível no veículo é de $32 \times 0,75 = 24 \text{ kg}$. Segue, portanto, que o peso real do carro é de, aproximadamente, $1622 + 24 = 1646 \text{ kg}$. Comparando esse valor com o peso estimado do carro de 1708,79 kg, nosso erro, por superestimativa, foi de aproximadamente 3,8%, o que sugere que o método utilizado fornece valores com boa precisão.

PROJETANDO UM APAGADOR DE LOUSA MAIS EFICIENTE

Eu sou daqueles professores que se lamentam pela gradativa substituição das lousas de giz pelas lousas brancas. Minha ninite alérgica adora a lousa branca, mas minha paixão pela geometria e desenho geométrico são absolutamente saudosos da lousa de giz. Quem utiliza com frequência lousa branca já deve ter notado que o trabalho de apagá-la se torna mais fácil quando inclinamos ligeiramente o apagador, como mostram as fotos 6 e 7.

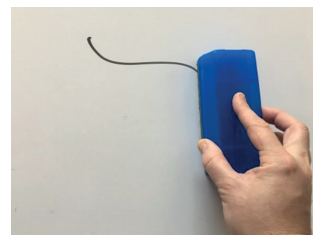


Foto 6. Apagador na posição usual

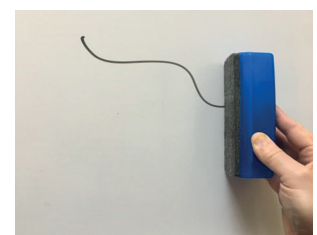


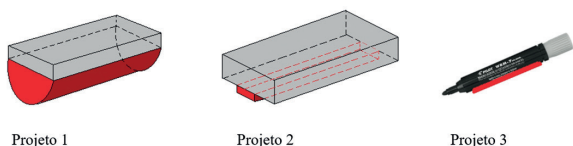
Foto 7. Apagador inclinado (mais eficaz)

Tal fato pode ser justificado com a ajuda da mesma fórmula de pressão que usamos para estimar o peso do carro. Ao inclinar o apagador estamos reduzindo sua área de contato com a lousa. Se a força exercida sobre o apagador não for alterada, o apagador exercerá uma pressão maior sobre a lousa, o que facilita o trabalho de apagá-la.

Isso posto, está lançado o desafio para os alunos: elaborar e testar um projeto de apagador de lousa branca mais eficiente do que os apagadores convencionais. Tarefas que promovem o raciocínio e a resolução de problemas com o uso de diferentes

abordagens e estratégias têm sido apontadas como caminho promissor na busca de melhor apropriação dos processos que levam à aprendizagem (NCTM, 2014). Nossa compreensão é a de que esse desafio tem bom potencial de promover o raciocínio e a diversidade de estratégias dos alunos.

A figura a seguir mostra três projetos de apagadores elaborados por alunos. Observe que, em todos os projetos, a ideia que comanda a inovação é a de reduzir a área de contato do feltro, que está fixado no apagador, com a lousa branca.



Como queremos uma área de contato menor do feltro com a lousa, os alunos autores do projeto 3 propuseram a fixação de uma tira de feltro diretamente no cilindro do corpo da caneta usada na lousa branca. A ideia, apesar de criativa, aumentou consideravelmente a sujeira nas mãos do usuário que a manipulava. O projeto 1, apesar de eficiente ao apagar a lousa, não se mostrou satisfatório do ponto de vista ergonômico. O projeto 2, que foi o mais eficiente dos três, também contou com a elaboração cuidadosa de um método experimental de verificação da sua eficiência, como será apresentado a seguir. Inicialmente, começaremos com a lista de materiais usados para o teste do projeto 2 de apagador: pequena lousa branca, apagador de lousa branca, balança, fita de velcro, martelo (além de fita adesiva).



Foto 8. Materiais utilizados

Na montagem do experimento, o martelo deve ser fixado com fita adesiva no dorso do apagador, como mostram as fotos 9 e 10.



Foto 9. Montagem do apagador/martelo



Foto 10. Conjunto apagador/martelo finalizado

As situações que serão testadas incluem o apagador original (foto 11) e o apagador modificado com a fixação de uma tira tripla de velcro (foto 12). Deve-se observar que o feltro do apagador original é feito de material semelhante ao feltro da fita de velcro utilizado no apagador modificado.



Foto 11. Apagador original



Foto 12. Apagador modificado

Próximo passo: fazer a pesagem dos dois conjuntos completos e tomar as medidas de comprimento e largura dos retângulos correspondentes às áreas de contato dos apagadores com a lousa. Essas medidas serão utilizadas posteriormente em alguns cálculos (fotos 13 e 14).

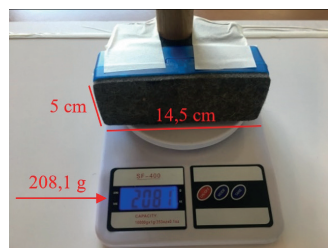


Foto 13. Medidas do apagador oficial

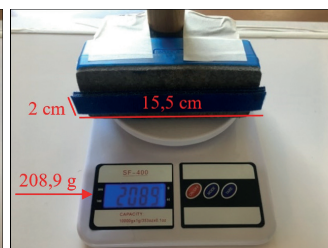


Foto 14. Medidas do apagador modificado

Estamos prontos para iniciar os testes com os dois tipos de apagador. Para tanto, colocamos a pequena lousa branca sobre uma mesa, escrevemos a palavra teste duas vezes e, em seguida, arrastamos o apagador original e o apagador modificado sobre cada uma das palavras escritas na lousa, como mostram as fotos 15, 16, 17 e 18.

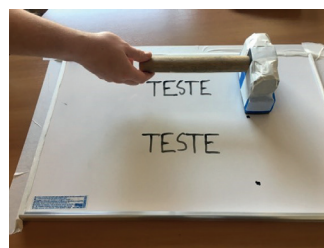


Foto 15. Teste com o apagador original

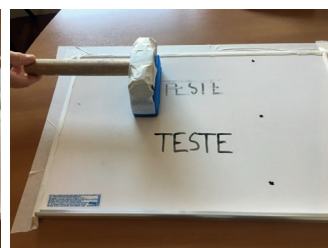


Foto 16. Teste com o apagador original



Foto 17. Teste com o apagador original

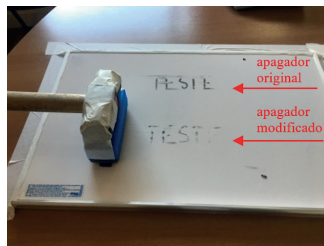


Foto 18. Teste com o apagador modificado

Como podemos observar na foto 18, o apagador modificado obteve resultados mais satisfatórios do que o original ao apagar a lousa. Os conjuntos apagador/martelo possuem praticamente a mesma massa, o que implica dizer que ambos exercem aproximadamente a mesma força sobre a superfície da lousa. Como a área de contato do apagador original com a lousa ($5 \times 14,5 = 72,5 \text{ cm}^2$) é maior do que a do apagador modificado ($2 \times 15,5 = 31 \text{ cm}^2$), a melhora na eficácia do apagador modificado em relação ao original se deve ao aumento da pressão sobre a superfície da lousa. Vamos calcular qual foi esse aumento.

Apagador original	Apagador modificado
$P_{\text{original}} = \frac{208,1}{72,5} \cong 2,87 \text{ kgf/cm}^2$	$P_{\text{modificado}} = \frac{208,9}{31} \cong 6,74 \text{ kgf/cm}^2$

Aumento da pressão de, aproximadamente, 134,8% ↑

CONCLUSÃO

Sem grandes modificações estruturais no atual currículo de matemática da escola básica é possível inserir diversas situações aplicadas do mundo real em que os alunos possam exercitar sua capacidade de resolver problemas, além de projetar e testar experimentos. Espero que esse dois estudos matemáticos da pressão contribuam com ideias para novas aulas aplicadas em contextos reais.

Referências

- UNESCO (2016). *Os desafios do ensino de matemática na educação básica*. Brasília: UNESCO / Editora Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). (disponível gratuitamente em francês em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776f.pdf>)
- NCTM (2014). *Princípios para a Ação – Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) / Associação de Professores de Matemática.

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

COLÉGIO SANTA CRUZ, SÃO PAULO, BRASIL

ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ETEM 2019



O Encontro de Investigação em Educação Matemática promovido anualmente pela Sociedade Portuguesa de Investigação (SPIEM) realiza-se, este ano, nos dias 16 e 17 de novembro, na pitoresca vila de Alte, entre o barrocal e a serra algarvia, perto de Loulé, onde encontraremos condições excelentes para a concentração e reflexão que um encontro científico exige, bem como para a confraternização social que o complementa.

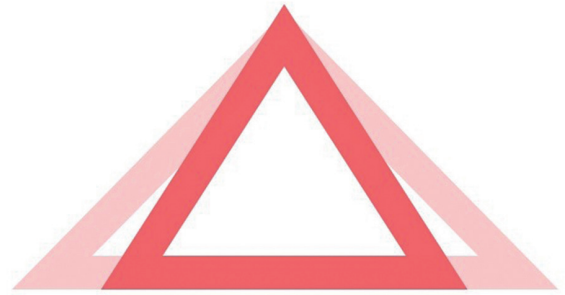
O ETEM 2019 dedica-se ao tema “Conexões matemáticas”, um tema cada vez mais relevante no atual cenário de questionamento STEM—STEAM, com reflexos no enquadramento curricular que em Portugal, e não só, ainda se tateia relativamente à Matemática e às outras áreas disciplinares.

As inscrições e as propostas de comunicações realizam-se no site do encontro, com acesso via <http://spiem.pt/>, até meados de setembro. Não perca esta oportunidade!

O terceiro lado

Um triângulo obtusângulo tem um lado que mede 10 centímetros e outro que mede 26 centímetros.

Entre que valores pode variar o comprimento do terceiro lado?



(Respostas até 13 de setembro, para zepaulo46@gmail.com)

FÉRIAS NA SILDÁVIA

O problema proposto no número 149/150 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A Sildávia tem um sistema monetário um pouco estranho. Há moedas de três tipos, que valem um, cinco e doze sildares.

Nas férias, o Vítor e o Mário foram até lá. No último dia, foram a uma loja comprar uma T-shirt com a bandeira do país.

O Vítor pagou a sua com dez moedas, umas de “12” e outras de “1”. Já o Mário usou as suas últimas onze moedas, sendo umas de “5” e as restantes de “1” para comprar a dele.

Qual é o preço de uma T-shirt?

Recebemos 13 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Duarte Silva (Torres Novas), Graça Braga da Cruz (Ovar), Guilherme Salvador, Leticia Martins (Guimarães), Luis Barros, Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Vítor Fernandes (Guimarães), Xuyong Dong (Guimarães) e do 11.º A da Escola Básica e Secundária Artur Gonçalves (Torres Novas).

Alguns dos nossos leitores resolveram o problema por tentativa e erro, mas a maioria começou por estabelecer condições. Demos a palavra ao 11.º A de Torres Novas.

Sejam:

$t = \text{preço de uma t-shirt}$

$x = n^\circ \text{ de moedas de um sildar usadas pelo Mário}$

$y = n^\circ \text{ de moedas de um sildar usadas pelo Vítor}$

Então

$t = 5 \times (11 - x) + x \text{ ou } t = 55 - 4x$

$t = 12 \times (10 - y) + y \text{ ou } t = 120 - 11y$

Assim,

$55 - 4x = 120 - 11y$

A partir daqui, os processos divergiram.

Estes alunos, mais o Guilherme, e a Alice, foram atribuindo valores a uma variável (por exemplo fazendo $x=1, 2, 3, \dots$) e vendo em que caso se obtinha um número inteiro para a outra variável.

O Mário e o Alberto usaram um processo semelhante mas mais rápido, começando por resolver a última equação em ordem a uma das variáveis. Por exemplo, fazendo:

$$y = \frac{65 - x}{11}$$

e verificando, para os vários valores de x , quando é que o numerador seria múltiplo de 11.

Finalmente, o Duarte e o Pedrosa fizeram as tabelas das progressões aritméticas $t=55-4x$ e $t=120-11y$, correspondentes aos possíveis preços da t-shirt, e procuraram o único valor que aparecia repetido.

O Vítor optou por uma resolução gráfica mas fez um comentário curioso sobre o que acontece frequentemente quando não conseguimos avançar num problema:

Passei cerca de 2 horas à volta do problema durante a tarde, a tentar resolvê-lo de uma maneira impossível, para acordar a meio da noite e me dar uma luz e o resolver em 3 minutos. Ele há cada coisa!

Em conclusão, e como escreveu o Carlos:

O Vítor pagou a T-shirt com 3 moedas de doze e 7 moedas de um.

O Mário pagou a T-shirt com 8 moedas de cinco e 3 moedas de um.

A T-shirt custou 43 sildares.

Uma caixa enigmática

ANA SOFIA RODRIGUES RÉZIO

BEATRIZ GOUVEIA

MARGARIDA RAPOSO

Este conto, como outro já apresentado na Revista Educação e Matemática, em edição anterior (EM133), surgiram no âmbito da participação no concurso *Um Conto que Contas*, aberto a alunos do ensino básico e secundário. Os alunos eram desafiados a escrever um conto que incluísse conteúdos matemáticos que estivessem a aprender no ano de escolaridade em que se encontravam ou que já tivessem aprendido em anos anteriores. Pelo facto de os alunos interessados em participar terem revelado muita motivação e envolvimento e, por tal ter também causado impacto nos seus colegas quando ficaram a conhecer os contos, como professora considerarei que podia dar-lhes continuidade, tentando difundir esse mesmo envolvimento a mais alunos, na aprendizagem da matemática. Essa continuidade consistiu na elaboração, para este e outros contos, de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, procurando promover o interesse pelo pensamento matemático e resolução de problemas bem como o estímulo à criatividade. Considero tratar-se de um bom exemplo de trabalho colaborativo entre alunos e professor em prol de uma diferente metodologia da didática da matemática.

Segue-se um conto escrito por duas alunas. A respetiva proposta de trabalho para os alunos, elaborada pela professora, será apresentada na seção “**Materiais para a aula de Matemática**”.

Era uma vez uma menina chamada Sofia que adorava aventuras, principalmente quando podia partilhá-las com os seus melhores amigos: Maria, Marta, Catarina, Artur e Bernardo.

Certo dia, os avós de Sofia convidaram-na para ir passar um mês nas montanhas pois tinham saudades da sua aldeia no Natal. Sofia aceitou de imediato e perguntou-lhes se os seus cinco amigos também podiam ir.

– Claro, mas quantos dias é que estarão connosco? – perguntaram os avós.

– O mês todo, 31 dias, pode ser, avó? - inquiriu Sofia.

– Claro! Responderam os avós.

Fizeram as malas e no dia 1 de dezembro, bem cedo, partiram para a montanha. Eram apenas 6 horas da manhã, mas o grupo estava animado. Como estava a nevar, a paisagem estava muito bela, ficaram encantados! Naquele momento, registavam-se apenas três graus negativos e, por isso, resolveram entrar em casa dos avós e beber um chocolate quente preparado pela avó da Sofia.

Enquanto saboreavam a bebida quentinha, conversavam. O entusiasmo era muito, nunca tinham estado na montanha com temperaturas tão baixas. Decidiram elaborar um gráfico com as temperaturas mínimas e máximas de cada dia das suas férias.

– O nosso gráfico vai ficar muito engraçado, com valores positivos e negativos – disse Catarina.

– É verdade! E vamos ficar com o registo do dia mais frio e do mais quente – respondeu Artur.

– Também pode acontecer estar zero graus! – nem positivo nem negativo – disse Marta.

No dia seguinte, quando acordaram, estava apenas um grau positivo e Bernardo sugeriu que fossem fazer bonecos de neve.

– Boa ideia! – exclamou Marta.

Os avós aprovaram e sugeriram que o fizessem nas traseiras da casa, onde havia um bom espaço para o efeito, bem como para fazerem outras brincadeiras na neve. Comeram, agasalharam-se e foram. Algum tempo depois, Catarina caiu e sentiu algo muito forte debaixo de si.

– Pelo cérebro de Albert Einstein, olhem o que encontrei! É uma caixinha de madeira.

– Abre! Abre! Abre! -gritaram os outros ao mesmo tempo.

Quando abriram a caixinha encontraram uma folhinha que dizia:

“Adivinhem as pistas que vos vamos dar e no fim uma surpresa maravilhosa irão encontrar!”

Ficaram intrigados, mas decidiram aceitar o desafio. A primeira pista estava na caixa e dizia:

“Se contas sabem fazer, isto vai ser fácil de responder: $2-5$; $12-3$; $-5-6$ e $12+20$, depois de tudo calcularem, não se esqueçam de os somarem e dividirem pela raiz quadrada de 9. Saberão então em que porta hão de bater.”

– Então, $2-5$ é -3 , $12-3$ dá 9, $-5-6$ dá -11 e $12+20$ é 32 se somarmos tudo vai dar 27 – disse Maria que adorava matemática, em especial, esta matéria dos números racionais.

- E a raiz de nove é três, logo $27:3 = 9$. Então, temos de ir bater à porta número 9 – disse Artur.
- Sim, é a porta da senhora Carla. – explicou Sofia, que adorava ir à pastelaria da senhora Carla, que se chamava “Porta 9”, comer biscoitos – O que acham de irmos já?
- Vamos! Aproveitamos e bebemos qualquer coisa quente. – respondeu Maria.
- E comemos um biscoito – acrescentou Sofia.

Quando lá chegaram, foram recebidos com um sorriso, pela D. Carla, que lhes indicou uma mesa junto à janela, de onde podiam apreciar a bela paisagem para o ponto mais alto da montanha, a 1993 metros de altitude.

- A que distância estaremos daquele ponto? – perguntou Artur, apontando para o topo da montanha.
- Em linha reta? – questionou Bernardo.
- Olhem! – interrompeu a Sofia. – Está aqui um bilhete, será para nós?
- Lê! – decidiu Maria.

“Não escrevo em grego, mas com a ajuda do Crivo de Eratóstenes, saberão a que porta bater, neste crivo sou o segundo número a sobreviver.”

- Fácil! – gritou Bernardo – Eratóstenes foi um matemático que criou uma tabela de números naturais, eliminou todos os números que não são primos e no fim só ficaram os números primos. Assim, o segundo número deste Crivo é o 3.
- O n.º 3? De que rua? – perguntou Marta.
- Julgo que essa resposta é fácil, porque o primo do meu avô mora no número 3, lá em baixo no largo – explicou Sofia.
- Então tem lógica. Temos de bater na porta do teu primo que mora no n.º 3 – disse Maria – vamos comer o nosso biscoito e a seguir corremos para lá.
- A Catarina começou a fazer as contas... 0,50€ de cada biscoito e 0,80€ de cada chocolate quente, dá uma despesa de 1,30€ por pessoa, vezes 6 pessoas dá € 7,80€. Pagaram, colocaram os gorros, os cachecóis e apertaram os casacos. Preparados para o frio, saíram à descoberta do n.º 3.
- Vamos pela rua da esquerda ou da direita? – perguntou Catarina.
- São duas ruas paralelas que terminam no largo, assim, a distância a percorrer será a mesma – disse o Bernardo, começando a andar pela rua da direita.

Quando chegaram ao destino, o primo do avô de Sofia estava à porta a conversar. Parou para cumprimentar o grupo e disse-lhes:

- Entrem, junto ao sofá há um recado para vós. Estejam à vontade!

Entraram e sentaram-se no sofá da sala. Artur viu logo um papel que estava em cima de um conjunto de revistas, na mesa

do centro da sala. Leu:

“Desvendem este enigma matemático e saberão o código da caixa que está debaixo destas revistas. Qual o comprimento de um lado de um quadrado, sabendo que a área desse quadrado é 25 centímetros quadrados.”

- Se a área do quadrado é 25 só temos de fazer a raiz quadrada de 25 para descobrir o código – disse Artur.
- A raiz quadrada de 25 é 5, logo o código deve ser esse! – exclamou Marta, enquanto o resto do grupo tirava as revistas para ver a surpresa desta grande aventura que estavam a viver.
- Uau! Que caixa tão grande! – disse Sofia, curiosa – O que acham de colocarmos a caixa debaixo da árvore de Natal e só a abrimos no dia de Natal? Aguentam a vossa curiosidade até lá?

Hesitantes, todos concordaram com a proposta de Sofia. Passaram os dias seguintes muito divertidos, fazendo brincadeiras na neve e alguns jogos que os avós de Sofia tinham em casa. Artur, Bernardo, Marta e Maria adoravam jogar ao Monopólio, Artur estava horas a fazer cálculos para saber qual o melhor investimento. Já a Catarina preferia o Sudoku, enquanto Sofia jogava Xadrez com o avô ou com a avó. Mas, de dia para dia, a curiosidade do grupo, sobre o conteúdo da caixa, crescia de forma exponencial.

No dia de Natal, depois de trocarem e abrirem as prendas que tinham uns para os outros, chegou o tão esperado momento de abrir a caixa mistério. Sofia sugeriu:

- Vamos colocar o código e abri-la.

Abriram a caixa e encontraram jogos de matemática. Ficaram todos muito entusiasmados com os desafios que aquela caixa continha. Passaram o resto da noite e o dia seguinte a jogar, ultrapassando cada desafio que surgia, cada vez mais empolgados. Alguns jogos eram complicados, tornando-se ainda mais desafiantes. Depois de tanta brincadeira, quando iam guardar os jogos de novo na caixa, repararam que lá dentro se encontrava outro papel, mais um enigma. Dizia o seguinte:

“Se para o próximo enigma querem seguir, até este número terão de subir: raiz quadrada de nove, somado com raiz quadrada de oitenta e um, e depois dividido pela raiz quadrada de trinta e seis.”

- A raiz quadrada de nove é 3, a raiz quadrada de oitenta e um é 9 e a raiz quadrada de trinta e seis é 6 – disse Maria – logo, se $(3+9)$ é 12 e $(12:6)$ é 2, então, o número da porta é o 2! – concluiu.
 - A casa do teu avô é o número 2, não é Sofia? – perguntou Bernardo.
 - Nesse caso, já cá estamos! – disse Maria, a rir.
- Riram todos. Nesse momento, o avô anunciou:
- Trouxeram-vos esta carta, meninos!

Ficaram intrigados...pegaram na carta e leram-na todos ao mesmo tempo. Começava assim:

“ Se me querem conhecer, este enigma terão de resolver. Usem este código, em português, sem letras estrangeiras (1-a 2-b 3-c ...). Saberão o local onde me podem encontrar: 5/18/ 3/17/ 9/19/14/17/ 9/14“.

Artur escreveu rapidamente o alfabeto português e numerou-o de seguida. Depois começou: E-S-C-R-I-T-O-R-I-O, escritório! É essa a palavra, mas... significa que a pessoa que nos preparou todos estes enigmas está no escritório?!— interrompeu a Marta - confusa. Todos juntos correram para o escritório e encontraram o avô de Sofia sentado na cadeira, era ele o autor dos mistérios!

- Foi o avô que nos preparou estes enigmas? – perguntou Sofia.
- Sim, fui. Espero que se tenham divertido a resolvê-los e que tenham gostado da minha aldeia. – Sorriu o avô.
- Nós gostámos bastante, mas ... por que preparou estes enigmas todos? – questionou Catarina.
- Para não estarem em casa, sem fazer nada ou a ver televisão, apenas. Assim, divertiram-se de forma diferente neste mês de férias aqui nas montanhas, penso eu. – respondeu o avô.
- Divertimo-nos muito! – responderam em uníssono.
- Então, agora, dividam os jogos da caixa mistério por todos vós pois foi essa a prenda de natal que preparei com a minha mulher para vos oferecer. Esperamos que continuem a divertirem-se com os jogos que lá colocámos e que aprendam também, de forma divertida.

– Obrigado! – respondeu o grupo, animado.

– Eu até já gosto mais de matemática. Descobri que ela está presente em todos os momentos da nossa vida e até nos jogos!
– disse Marta – merecendo a concordância dos amigos.

No último dia, decidiram analisar o gráfico que construíram ao longo das férias, com as temperaturas diárias do mês de dezembro.

– Se repararem só há dois registos com temperatura igual a zero graus, ou seja, nem estava negativo nem positivo – disse Maria.

– O dia mais frio foi o dia 25 de dezembro, com seis graus negativos, – reparou Bernardo – e o dia mais quente foi o dia 12 de dezembro, com dez graus positivos – continuou.

Chegou o dia de regressarem a casa. Fizeram as malas, despediram-se do primo do avô, da senhora Carla e seguiram viagem. Durante o caminho foram recordando as aventuras que viveram e os desafios matemáticos que ultrapassaram, bem como as pessoas da aldeia com quem simpatizaram.

Sem dúvida, estas foram umas férias inesquecíveis para Sofia e para os seus melhores amigos!

ANA SOFIA RODRIGUES RÉZIO (PROFESSORA)

BEATRIZ GOUVEIA (ALUNA)

MARGARIDA RAPOSO (ALUNA)

EB2/3 D. PEDRO IV

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS MIGUEL TORGA

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Ler, interpretar e escrever contos com informação matemática

Neste número e, nesta seção, apresentamos um conjunto de tarefas, na sua maioria de aplicação de conhecimentos, que abordam temas/conteúdos diversificados tais como: organização e interpretação de dados; divisibilidade; expressões numéricas; áreas e volumes e ainda uma abordagem à encriptação. Esta proposta foi elaborada pela prof. Ana Sofia Rézio para os seus alunos do 7.º ano de escolaridade, mas para a resolução dos

problemas propostos, os alunos tinham de, previamente, ler um conto escrito por dois dos seus colegas. Estes alunos foram desafiados, pela professora, a escrever um conto que incluísse conteúdos matemáticos que estivessem a aprender no ano de escolaridade em que se encontravam ou que já tivessem aprendido em anos anteriores. Esse conto está publicado neste número nas pp.28-30.

A Redação da EeM

Uma caixa enigmática

Será que já foste desafiado a escrever um conto no âmbito da disciplina de matemática?....

Pois bem, o conto que aqui te mostramos foi escrito por duas alunas do 7ºano de escolaridade, a Margarida e a Beatriz. Através dele percebemos que a matemática não só está presente no nosso quotidiano como pode ser bem divertida e criativa. Esta é uma proposta original para aplicares os teus conhecimentos matemáticos, depois de leres o fantástico conto “uma caixa enigmática”.

Eis o nosso desafio, esperemos que aprecies e quem sabe venhas a escrever o teu próprio conto!

1. “Enquanto saboreavam a bebida quentinha, conversavam. O entusiasmo era muito, nunca tinham estado na montanha com temperaturas tão baixas. Decidiram elaborar um gráfico com as temperaturas mínimas e máximas de cada dia das suas férias.”

Durante duas das semanas das suas férias escolares do Natal, Maria, Marta, Catarina, Artur e Bernardo registaram as temperaturas que se encontram organizadas na tabela abaixo indicada.

Dia	Temperatura Mínima	Temperatura Máxima
16	2°C	12°C
17	4°C	11°C
18	3°C	10°C
19	1°C	11°C
20	0°C	9°C
21	2°C	6°C
22	-1°C	5°C
23	5°C	8°C
24	6°C	7°C
25	3°C	5°C
26	-2°C	4°C
27	-1°C	3°C
28	2°C	4°C
29	4°C	5°C
30	4°C	7°C
31	6°C	9°C

- 1.1. Elabora dois gráficos de pontos, onde possas registar as temperaturas mínima e máxima, em cada dia.

Sugestões: considera o dia (os valores da variável independente) e a temperatura (os valores da variável dependente); assinala a azul o gráfico das temperaturas mínimas e a vermelho o gráfico das temperaturas máximas.

- 1.2. Depois de construídos os dois gráficos, na alínea 1.1. responde às seguintes questões:

- 1.2.1. Qual o dia em que a temperatura mínima foi a mais baixa?

- 1.2.2. Qual o dia em que a temperatura máxima foi a mais alta?

- 1.2.3. Qual o dia com maior amplitude térmica, isto é, em que a diferença entre a temperatura máxima e a mínima foi a maior observada?

Elabora um novo gráfico em que o dia represente os valores da variável independente e a amplitude térmica os valores da variável dependente.

2. “- Lê! – decidi Maria.

“Não escrevo em grego, mas com a ajuda do Crivo de Eratóstenes, saberão a que porta bater, neste crivo sou o segundo número a sobreviver.”

– Fácil! - Gritou Bernardo – Eratóstenes foi um matemático que criou uma tabela de números naturais, eliminou todos os números que não são primos e no fim só ficaram os números primos. Assim, o segundo número deste Crivo é o 3.

– O número 3? De que rua? – Perguntou Marta.”

- 2.1. Constrói uma tabela com números até 50 e aplica o Crivo de Eratóstenes.

- 2.2. Que números primos obtiveste entre 1 e 50?

- 2.3. Explica porque funciona o Crivo de Eratóstenes, como método para obtenção de números primos.

- 2.4. Investiga o que se entende por “Critérios de Divisibilidade”, qual a sua utilidade e que relação tem com este Crivo. Dá três exemplos.

3. “- Catarina começou a fazer as contas... 0,50€ de cada biscoito e 0,80€ de cada chocolate quente, dá uma despesa de 1,30€ por pessoa, vezes 6 pessoas dá € 7,80€. Pagaram, colocaram os gorros, os cachecóis e apertaram os casacos. Preparados para o frio, saíram à descoberta do n.º 3.”

3.1. Escreve uma única expressão numérica que traduz a despesa realizada pelo grupo de amigos, que resultou em 7,80€ (Atenção à necessidade de utilização de parêntesis). Em seguida efetua os cálculos e comprova o valor indicado.

3.2. Se os amigos tivessem pago a sua despesa com uma nota de 10€, e repartissem igualmente o troco por todos, quanto iria receber de troco cada um?

3.3. Teria sido possível, o preço de cada biscoito e de cada chocolate quente serem diferentes, mas a quantia a pagar manter-se nos 7,8€? Explica como e porquê.

4. “Entraram e sentaram-se no sofá da sala. Artur viu logo um papel que estava em cima de um conjunto de revistas, na mesa do centro da sala. Leu:

“Desvendem este enigma matemático e saberão o código da caixa que está debaixo destas revistas. Qual o comprimento do lado de um quadrado, sabendo que a área desse quadrado é 25 centímetros quadrados?”

- Se a área do quadrado é 25 só temos de fazer a raiz quadrada de 25 para descobrir o código – disse o Artur.
- A raiz quadrada de 25 é 5, logo o código deve ser esse! – Exclamou a Marta, enquanto o resto do grupo tirava as revistas para ver a surpresa desta grande aventura que estavam a viver.”

Responde às questões que se seguem, não esquecendo de indicar todas as etapas da resolução.

4.1. Imagina que esse quadrado é uma face de um cubo. Qual seria a área total do cubo, em metros quadrados? E o valor de cada aresta, em metros?

4.2. Desenha um cubo e supõe que o seu volume é 512 metros cúbicos. Qual a medida da aresta desse cubo e da área de cada face, em metros e metros quadrados respetivamente?

5. “(...) repararam que lá dentro se encontrava outro papel, mais um enigma...Dizia o seguinte:

“Se para o próximo enigma quiserem seguir, até este número terão de subir: raiz quadrada de nove, somado

com raiz quadrada de oitenta e um, e depois dividido pela raiz quadrada de trinta e seis.”

- A raiz quadrada de nove é 3, a raiz quadrada de oitenta e um é 9 e a raiz quadrada de trinta e seis é 6 – disse Maria – logo, se $(3+9)$ é 12 e $(12:6)$ é 2, então, o número da porta é o 2! – Concluiu.”

5.1. Escreve uma única expressão numérica que traduza o enigma encontrado (Atenção à necessidade de utilização de parêntesis). Em seguida efetua os cálculos e comprova que o número da porta era o 2.

5.2. Cria um outro enigma que também envolva raízes quadradas e cúbicas. Escreve a sua tradução numérica e decifra-o.

5.3. Imagina que um determinado enigma se traduzia pela expressão numérica seguinte $\sqrt{\frac{2500}{36}} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{10^2}$. Qual a resposta correta a esse enigma?

6. “Ficaram intrigados...pegaram na carta e leram-na todos ao mesmo tempo. Começava assim:

“Se me querem conhecer, este enigma terão de resolver. Usem este código, em português, sem letras estrangeiras (1-a 2-b 3-c ...). Saberão o local onde me podem encontrar: 5/18/ 3/17/ 9/19/14/17/ 9/14”.

Artur escreveu rapidamente o alfabeto português e numerou-o de seguida. Depois começou: E-S-C-R-I-T-O-R-I-O, escritório! É essa a palavra, mas... significa que a pessoa que nos preparou todos estes enigmas está no escritório?! – Interrompeu Marta - confusa. Todos juntos correram ao escritório e encontraram o avô de Sofia sentado na cadeira, era ele o autor dos mistérios! Este enigma está relacionado com o conceito de “criptação”, criação de códigos.

6.1. Procura o significado da palavra “criptação”.

6.2. Cria a tua própria chave de criptação e escreve o teu enigma!

Em seguida, decifra-o e explica detalhadamente o teu procedimento com palavras/esquemas.

Criatividade, sons e matemática

MARGARIDA FONT AMADO

M. ISABEL ROCHA

Associa-se normalmente a ideia de criatividade às artes (um músico é criativo, um poeta é criativo, um pintor ...), deixando-se de fora desse universo ciências como a matemática, a que se associa o rigor e os números. Como se estes excluíssem aquela...

Partindo desta constatação, refletimos sobre o modo como a música e a poesia precisam de e usam os números — e neste caso, notámos a coincidência do 5, do 7 e do 12 — e como o pensamento matemático é por natureza criativo.

ESCOLA PITAGÓRICA

Como sabemos, os Pitagóricos estudavam geometria, aritmética, astronomia e música.

Pitágoras, assim como Orfeu, compunha e tocava lira desde muito jovem. E a música, para ele, tinha várias finalidades, inclusive pedagógicas: a purificação da mente, a cura de doenças, o domínio da raiva e da agressividade do homem, dentre outras coisas. Com o auxílio da música, criava um ambiente de harmonia e tranquilidade para passar os seus ensinamentos aos discípulos. A música é constituída basicamente de uma sucessão de sons e silêncio organizada ao longo do tempo, sendo os três elementos principais de uma composição musical a melodia, a harmonia e o ritmo.

Pitágoras, ao que tudo indica, estava interessado em entender aquilo que hoje se denomina harmonia. Por outras palavras, pode-se dizer que os seus estudos consistiam em descobrir que combinações de sons eram agradáveis aos ouvidos.

SONS E MATEMÁTICA

Uma corda (esticada em linha reta entre dois suportes físicos) pode vibrar de muitas maneiras diferentes, dependendo da maneira como é puxada. O tom do som é determinado pela frequência da vibração — o ritmo ao qual a corda se desloca de um lado para o outro — e assim a mesma corda pode vibrar com frequências diferentes. E Pitágoras, com as suas experiências no monocórdio, mostrou que o tom depende da posição dos nós — os tais pontos ao longo da corda que se mantêm fixos — e que os tons dos sons obtidos se traduziam em relações numéricas simples. Daí a designação em matemática de média harmónica.

O som produzido pela corda solta/inteira era o mesmo que o produzido pressionando a meio da corda (figura 1), mas mais

agudo, conhecido como oitava de um som (na escala atual esta é a oitava nota).

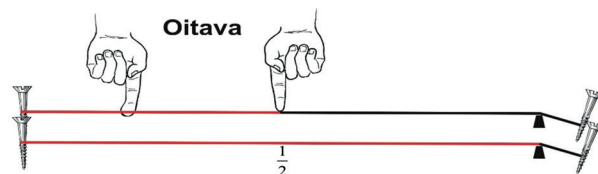


Figura 1. O Monocórdio

Se colocarmos o dedo a um terço da corda estamos a criar dois nós (o outro posicionado a dois terços da corda) e isto produzirá uma nota ainda mais alta (nota em intervalo de quinta na razão de 3 para 2) (figura 2). Note-se que Pitágoras verificou que a frequência da nota tem uma relação de proporcionalidade inversa com o comprimento da corda associado a essa nota (razão de 2 para 3).

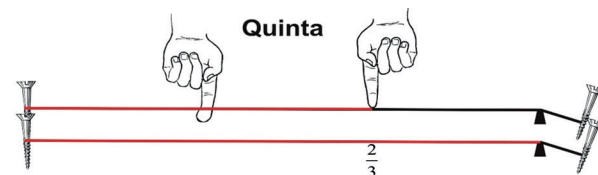


Figura 2

Também se pode obter uma nota em intervalo de quarta (na razão de 4 para 3, considerando 4 nós).

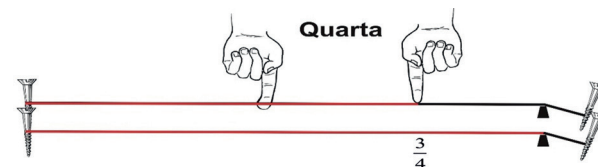


Figura 3

O monocórdio, ao ser tocado na modalidade 'corda solta', isto é, presa apenas pelas extremidades, produzia um som, uma nota musical que serviria de referência para que se pudesse determinar as outras. As notas encontradas foram determinadas a partir de proporções numéricas bem definidas¹:

¹ Pereira, M.C. (2013). Matemática e Música-De Pitágoras aos dias de hoje. Em: <http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/matematica-e-musica-de-pitagoras-aos-dias-de-hoje>

1. A Tónica (primeira nota de uma escala), de razão 1:1
→ comprimento da corda c
2. A Oitava, de razão 1:2 → comprimento $c/2$
3. A Quinta, de razão 2:3 → comprimento $2c/3$
4. A Quarta, de razão 3:4 → comprimento $3c/4$

Estava encontrada a primeira escala musical formada por quatro sons descobertos por Pitágoras, que hoje representam a 1.^a, a 8.^a, a 5.^a e a 4.^a notas na escala atual (dó₁, ré₁, mi₁, fá₁, sol₁, lá₁, si₁, dó₂)².

Talvez tenha sido a primeira noção de acorde, que, por definição, é a reprodução de um grupo de notas ao mesmo tempo.

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right] \quad \text{Ao comparar estas frações} \quad \left[\frac{12}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12} \right]$$

verificamos que:

$$9 \text{ é a média aritmética entre 6 e 12: } \frac{6+12}{2} = 9$$

$$8 \text{ é a média harmónica entre 6 e 12: } \frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = \frac{2}{\frac{2}{12} + \frac{1}{12}} = 2 \times \frac{12}{3} = 2 \times 4 = 8$$

$$6, 8, 9 \text{ e } 12 \text{ formam uma proporção: } \frac{6}{8} = \frac{9}{12} \quad (6 \times 12 = 8 \times 9)$$

Este princípio é o mesmo que ocorre em qualquer instrumento de corda. As variações de frequência sonora a partir das proporções das cordas possibilitaram o surgimento de uma escala diatónica pitagórica de sete sons harmónicos, utilizando a chamada consonância pitagórica.

ESCALAS MUSICAIS DE 5 E 7 NOTAS

Partindo da experiência de Pitágoras, a maneira bastante utilizada por músicos em todo o mundo foi criar uma escala que se baseia na sucessão de quintas, denominado Ciclo das Quintas, ou seja, é formada multiplicando a frequência do som anterior pela razão 3:2. Tomando o comprimento da corda como a unidade, que corresponde ao som do DÓ, o som seguinte corresponde ao comprimento de corda de $2/3$ da corda inicial, nota que foi designada por SOL (figura 4).

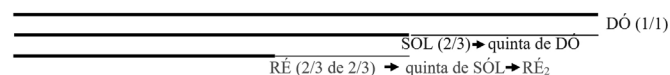


Figura 4

Ora a quinta da nota SOL corresponde a um comprimento da corda de $4/9$ ($2/3$ de $2/3$) da corda inicial, logo esta nota está na 2.^a oitava ($\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$), daí a designação de RÉ₂, tem de se transpor para a nota equivalente nos limites da 1.^a oitava (figura 5), o que se consegue multiplicando por dois.

²No tempo de Pitágoras, as notas musicais não tinham estes nomes, nem eram utilizadas as designações oitava, quinta, etc. Estas surgem em função da escala atual.

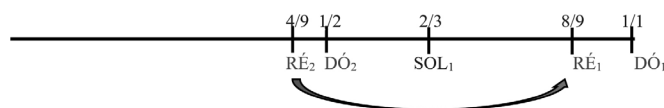


Figura 5

Continuando o ciclo das quintas, obtemos a nota LÁ₁ (figura 6) que é a quinta de RÉ₁ = $\frac{2}{3} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$

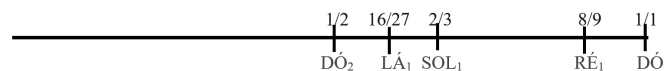


Figura 6

Continuando: Quinta de LÁ₁ = $\frac{2}{3} \times \frac{16}{27} = \frac{32}{81} \rightarrow \text{MI}_2$

Esta nota está na 2.^a oitava pois $\frac{32}{81} < \frac{1}{2}$, a nota equivalente na 1.^a oitava (figura 7) corresponde ao comprimento de corda $2 \times \frac{32}{81} = \frac{64}{81} \rightarrow \text{MI}_1$

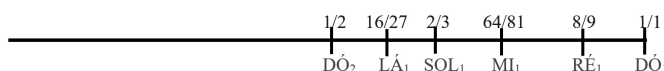


Figura 7

E ainda o ciclo das quintas leva-nos à nota SI: $\frac{2}{3} \times \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$ número muito próximo de $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} = \frac{128}{256}$)

Devido à sua proximidade da nota DÓ₂, não soavam muito bem tocadas juntas, pelo que foi inicialmente desprezada, obtendo-se a escala de 5 sons, designada por escala pentatónica:

DÓ, RÉ, MI, SOL, LÁ

Tendo em conta a relação de proporcionalidade inversa entre a frequência da nota e o comprimento da corda associada, obtém-se a tabela de frequências das cinco notas da escala (tabela 1).

Tabela 1. Notas e suas frequências numa escala pentatónica

nota	DÓ	RÉ	MI	SOL	LÁ	DÓ ₂
frequência	f	$\frac{9}{8}f$	$\frac{81}{64}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{27}{16}f$	$2f$

Se gosta de música dos anos 60, pode recordar os *Temptations*, em “My girl” como exemplo de utilização de uma escala pentatónica em: <https://youtu.be/uCcNcHx2DpY>

Observando a harpa pentatónica (figura 8), verifica-se que tem dois grandes espaços: um entre as cordas 3 e 4 e outro entre as cordas 5 e 6.

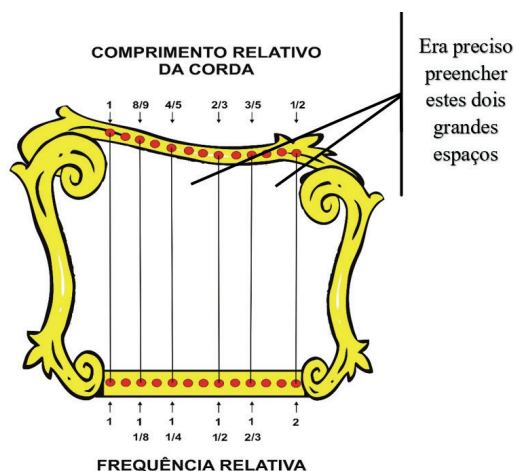


Figura 8. Harpa pentatônica

A nota FÁ da escala de Pitágoras (a quarta, correspondendo a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda) fica entre as cordas 3 e 4. Para preencher a lacuna entre as cordas 5 e 6 escolhe-se a de menor comprimento (corresponde à nota SI) porque dá uma frequência $1\frac{7}{8}$ da frequência da corda mais longa.

Obtém-se a escala diatônica pitagórica de sete sons (escala heptatônica) (figura9):

DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ, SI

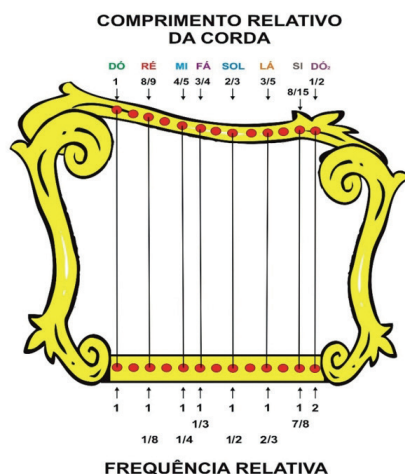


Figura 9. Escala heptatônica

O NÚMERO 7 NA POESIA...

Chegados às 7 notas da escala heptatônica, é altura de pensar um pouco sobre a poesia. Não a poesia no sentido daquilo que, por ser belo ou ideal, desperta emoções, mas a poesia como matéria sonora, isto é, uma sucessão de sons, uma determinada organização rítmica das palavras, dispostas em versos. A poesia que é também musicalidade, ritmo, métrica, quer dizer, medida. E quem diz medida, diz contagem e números.

Quem acentua muito bem a importância da medida na poesia é o grande poeta simbolista francês, Paul Verlaine (figura 10), que, na sua *Arte Poética*, define a poesia como música acima de tudo, e aconselha mesmo a utilização do verso ímpar (que no seu caso é o de 9 sílabas), “mais vago e solúvel no ar/ sem nada nele que pese ou que pouce”... O poema começa assim:

*De la musique avant toute chose,
Et pour cela préfère l'Impair
Plus vague et plus soluble dans
l'air,
Sans rien en lui qui pèse ou qui
pose.*

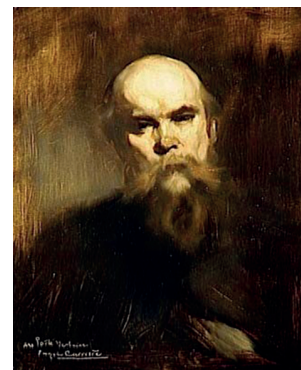


Figura 10. E. Carrière, Retrato de Verlaine

A medida que na poesia portuguesa é, por assim dizer, a mais “natural” é o verso de 7 sílabas, a redondilha maior. É este o verso que encontramos predominantemente em quadras populares, é esta a “música” (para a qual também contribui a posição das sílabas acentuadas ao longo de cada verso, não aleatória) que mais espontaneamente surge em português. Encontramo-la nas quadras populares como, por exemplo, esta, de um lenço de namorados (figura 11), uma tradição minhota:



Figura 11

*A/qui/ tens/ meu/ cu/ra/ção
E a chabe pró abrir
Num tenho mais que te dar
Nem tu mais que me pedir.*

Também o primeiro poema que conhecemos de Fernando Pessoa, feito ainda menino e intitulado *À minha mamã*, tem a mesma medida:

*Eis/-me a/qui/ em/ Por/tu/gal
Nas terras onde eu nasci
Por muito que goste dela
Ainda gosto mais de ti.*

Mais tarde, o grande Pessoa (figura 12) continua a medir as 7 sílabas (sempre contadas só até à última sílaba tônica) e, na edição das suas obras pela Editora Ática, um dos volumes chama-se precisamente *Quadras ao Gosto Popular*. Aí podemos ler, por exemplo:

*Cantigas de portugueses
São como barcos no mar
Vão de uma alma para outra
Com risco de naufragar.*



Figura 12. Almada Negreiros, Retrato de Fernando Pessoa, 1964

Na verdade, a utilização da redondilha maior vem de trás. No *Cancioneiro Geral* (figura 13), primeira coletânea impressa de poesia portuguesa, dos séculos XV e XVI, publicado por Garcia de Resende em 1516, são muitos os poemas com esta medida.



Figura 13. Cancioneiro Geral de Garcia de Resende, 1516

Um dos mais conhecidos é a *Cantiga Partindo-se*, em que o poeta, João Roiz de Castelo Branco, exprimindo embora de forma criativa um pungente sentimento de tristeza, não deixa de contar rigorosamente as 7 sílabas:

*Senhora, partem tão tristes
meus olhos por vós, meu bem,
que nunca tão tristes vistes
outros nenhuns por minguaém.*

*Tão tristes, tão saudosos,
tão doentes da partida,
tão cansados, tão chorosos,
da morte mais desejosos
cem mil vezes que da vida.
Partem tão tristes os tristes,
tão fora d' esperar bem,
que nunca tão tristes vistes
outros nenhuns por ninguém.*

Pode ouvir esta Cantiga interpretada por Amália Rodrigues, com música de Alain Oulman, em <https://youtu.be/oNIGjsUBO4>

... E O NÚMERO 5 ...

Mas tal como nas escalas pitagóricas aparecem os números 5 e 7, também a redondilha maior de 7 sílabas aparece acompanhada da redondilha menor, de 5. Encontramos muitos exemplos no *Cancioneiro Geral* e também no grande Camões, como, por exemplo, esta *Cantiga*:

a este mote alheio
Verdes são os campos
de cor do limão
assí são os olhos
do meu coração.

Volts
Campo, que te estendes
com verdura bela;
ovelhas que nela
vosso pasto tendes,
d'ervas vos mantendes
que traz o verão,
e eu das lembranças
do meu coração.

Gado, que pasceis
co contentamento,
vosso mantimento
não no entendeis:
isso que comeis
não são ervas, não:
são graças dos olhos
do meu coração.

Assim, se o poeta é criativo na escolha do interlocutor (o campo e as ovelhas) e nas imagens que nos oferece (as ervas tornam-se a recordação, que lhe dá vida, da amada ausente, e até deixam de ser ervas, mas emanação dos olhos verdes dela), ele não perde o sentido do rigor da medida exata dos seus versos.

Pode ouvir esta Cantiga musicada e cantada por José Afonso em <https://youtu.be/WgZTWZligHE>

... E FINALMENTE O NÚMERO 12

Mas nem todos os poetas gostam da mesma medida. Para Cesário Verde, não há nada como o difícil alexandrino bem medido. No poema *Contrariedades*, em que exprime um angustiado mal-estar, queixando-se de estar “cruel, frenético, exigente”, de amar “insensatamente os ácidos, os gumes e os ângulos agudos”, mantém, no entanto, o foco na contagem exata das 12 sílabas dos 3 primeiros versos de cada uma das 17 quadras, sendo que o 4.º verso mede apenas 6 sílabas, rigorosamente metade dos anteriores. Ele próprio se refere a essa operação, na qual se *apura*, no final de uma das estrofes:

*E a/pu/ro/-me em/ lançar/, o/ri/gi/nais/ e e/xa/tos,
Os/ meus/ a/le/xan/dri/nos...*

ESCALA TEMPERADA (ESCALA CROMÁTICA)

Também na música nos aparece o número 12. O sistema de escala ocidental, que se designa por “temperamento igual”, foi desenvolvida na Europa na segunda metade do séc. XVIII e ainda hoje é usada, para quase toda a música *jazz*, *folk*, *rock* e clássica, embora os matemáticos se tenham começado a debruçar sobre a questão da divisão da oitava em intervalos iguais no início do séc. XVII. Galileu e Chu Tsai-Yu, com um ano de diferença (desconhecendo o trabalho de cada um, não tinham as redes *linkedin* ou *research gate* para partilhar ...) desenvolveram a escala temperada, mas ignorados durante um século³.

Já referimos que soam bem juntas duas notas separadas por uma oitava. No entanto e, por um lado, a oitava foi considerada um intervalo musical muito grande porque uma voz de canto não treinada só consegue abranger um par de oitavas³. Por outro lado, os ocidentais já tinham constatado que as notas DÓ₂ e SI eram muito próximas uma da outra e entre DÓ e RÉ, por exemplo, precisaria existir uma nota intermédia, pois a distância entre DÓ e RÉ (um tom) era maior que a distância entre SI e DÓ₂ (um meio tom). Decidiram criar uma escala mais abrangente. Nessa escala, todas as notas deveriam ter a mesma distância umas das outras. E essa distância deveria ser aproximadamente o intervalo que havia entre DÓ₂ e SI (um meio tom).

Daí a necessidade sentida de dividir a oitava em intervalos mais pequenos que também permitisse começar uma melodia em qualquer nota.

Por meio da análise das frequências, verificou-se que o quociente entre a frequência da nota DÓ₂ e a frequência da nota SI era

$$\text{aproximadamente } 1,0595383 \left(\frac{f_{DÓ_2}}{f_{SI}} = \frac{261,6 \text{ Hz}}{246,9 \text{ Hz}} = 1,0595383 \right)$$

Era este o valor do intervalo musical desejado entre cada par de notas.

Seriam precisas mais 5 notas, o que perfaz 12. Mas porquê mais 5? Porquê 12?

Se considerarmos a frequência da nota DÓ, a nossa unidade de partida (1), teremos de ir multiplicando sucessivamente por 1,0595383, até obtermos a frequência da nota DÓ₂ (uma oitava acima), ou seja, 2.

$$1 \times 1,0595383 \times 1,0595383 \times 1,0595383 \times 1,0595383 \times \dots = 2$$

Estamos perante uma progressão geométrica de razão 1,0595383, ou seja, procuramos o número n tal que $1 \times 1,0595383^n = 2$

DÓ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,0595	1,1225	1,1893	1,2601	1,3351	1,4145	1,4987	1,5879	1,6824	1,7825	1,8885	2,001

$$1,0595383^{12} \approx 2 \quad \text{donde } 1,0595383 \approx \sqrt[12]{2}$$

³ Powell. J. (2012). *Como funciona a Música*. Lisboa: Editorial Bizâncio

Chega-se assim à conclusão que a escala temperada terá de ter 12 notas.

As cinco notas inseridas são, no sentido ascendente, designadas por sustenido (#) e no sentido descendente por bemol (b) (figura 14). Por exemplo Fá sustenido, representa-se por Fá# e Si bemol por Sib.

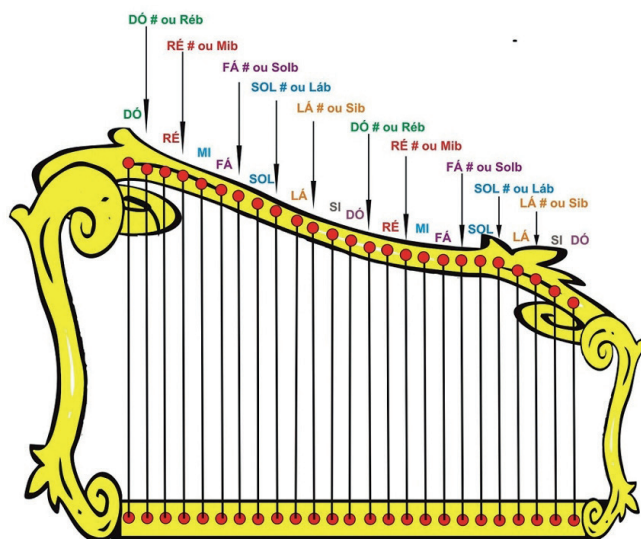


Figura 14. Harpa de duas oitavas com todas as notas designadas

Bach, um génio da música barroca e um entusiasta do novo temperamento, foi, por assim dizer, o grande difusor da nova escala. A partir de sua morte, o Ocidente rendeu-se ao novo sistema de afinação.

A sua célebre obra *Cravo Bem temperado*, um conjunto de 48 prelúdios e fugas que exploram todas as tonalidades possíveis, é um bom exemplo do uso desta escala, bem como a *Tocata e Fuga em ré menor* que se pode ouvir em https://youtu.be/ipzR9bhei_o

Referências

- Pereira, M.C. (2013). *Matemática e Música-De Pitágoras aos dias de hoje*. Em: <http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/matematica-e-musica-de-pitagoras-aos-dias-de- hoje>
- Powell. J. (2012). *Como funciona a Música*. Lisboa: Editorial Bizâncio

MARGARIDA FONT AMADO

ESCOLA SECUNDÁRIA ENG. ACÁCIO CALAZANS DUARTE, MARINHA GRANDE

M. ISABEL ROCHA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS SOCIAIS, INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA

Agradecemos a colaboração do colega José Nobre da E.S. Calazans Duarte, na conceção das imagens dos monocórdios e das harpas.

Conferência de Inverno 2019

Educação em Matemática e em Ciências no Século XXI

HELENA MARTINHO

A *Association for Teacher Education in Europe* (ATEE) é uma organização europeia com o objetivo de melhorar a qualidade da formação de professores na Europa e apoiar o desenvolvimento profissional de professores e de formadores de professores, a todos os níveis. Os seus membros são indivíduos e instituições envolvidos em investigação e prática na formação de professores, no ensino superior ou em outros níveis e contextos.

A ATEE organiza todos os anos três conferências: a *Winter Conference*, a *Spring Conference* e a *Annual Conference*. A primeira é habitualmente organizada por uma ou mais das Comunidades de Investigação e Desenvolvimento (Research and Development Communities - RDC) da própria associação. Este ano a conferência foi organizada pela RDC em Educação em Ciências e em Matemática, que é uma das mais antigas e ativas, e decorreu na Universidade do Minho, de 15 a 17 de abril.

A *Spring Conference* é sempre organizada num dos Países Bálticos e é um fórum regional anual de partilha de conhecimentos para profissionais e investigadores na formação de professores. Este ano terá lugar na Letónia, em Riga, nos dias 7 e 8 de junho, sob o tema: *Inovação, Tecnologias e Pesquisa em Educação* (<http://www.ateespringconference.lu.lv/>). A *Annual Conference* é o principal evento da Associação. Com duração de três dias é um ponto de encontro de professores e investigadores de todo o mundo. Ao longo do encontro têm lugar sessões de trabalho ativas organizadas pelas RDC num ambiente amigável, informal e animado. O evento também abriga a Assembleia Geral da ATEE. Este ano a *Annual Conference* decorrerá em Bath, no Reino Unido, nos dias 14, 15 e 16 de Agosto na *Bath Spa University*. O tema será *Formação de Professores num Contexto Global em Mudança* (<https://atee2019.org/>).

TEMA DA CONFERÊNCIA

A Educação em Matemática e a Educação em Ciências são áreas que, desde há alguns anos, captam o interesse dos decisores políticos em praticamente todo o mundo. É uma área relevante não só para o progresso e o desenvolvimento científico e tecnológico das sociedades modernas, e progressivamente

digitais, mas também para a educação para a cidadania e para a sustentabilidade do planeta. Professores de matemática e de ciências, formadores de professores e investigadores podem contribuir significativamente para esse desenvolvimento e para a sensibilização e, se necessário, para a mudança de comportamentos e atitudes como cidadãos responsáveis.



Elizabeth Oldham e Laurinda Leite (coordenadoras da Winter Conference)

Temos um longo caminho a percorrer para atingir bons níveis de literacia. As Ciências de uma forma geral e a Matemática em particular, ainda são olhadas com receio pelos estudantes. Continuamos a ter um número insuficiente de jovens a optar por carreiras científicas e tecnológicas. Assim, o objetivo desta Conferência foi, essencialmente, promover abordagens voltadas para o futuro, que combinem o envolvimento na aprendizagem com a eficácia no desenvolvimento de conhecimentos e capacidades, com vista a fomentar maneiras de superar os desafios que a área enfrenta.

Assim, ATEE Winter Conference de 2019 centrou-se na Educação em Ciências e em Matemática no século XXI. Procurou promover discussões multifacetadas sobre diversos temas, nomeadamente, abordagens inovadoras para o ensino das ciências/matemática; a tecnologia no ensino das ciências/matemática; educação em

ciências/matemática e a agenda STEM; educação em ciências/matemática em escolas multiculturais e inclusivas; formação de professores de ciências/matemática num mundo em mudança; e, ainda, avaliação das aprendizagens no século XXI em educação em ciências/matemática.

ORGANIZAÇÃO DA CONFERÊNCIA

A Winter Conference contou, para perspetivar este amplo leque temático, com duas conferências plenárias, centradas nas duas áreas principais: Educação Matemática e Educação em Ciências. A primeira, intitulada 'Mathematics crossing borders: Integrating mathematics with other disciplines in teacher education', foi proferida por Merrilyn Goos da Irlanda, da University of Limerick. Merrilyn, com base na sua experiência na formação de professores e como professora e investigadora em Educação Matemática, apresentou e exemplificou vários modelos de integração da Matemática com outras disciplinas e considerou ainda as implicações dessa integração para a prática profissional do ensino da Matemática e da formação de professores. A segunda conferência, intitulada 'The challenges of teaching science in the 21st century: The benefits of context-based interdisciplinary approaches' foi proferida por Ilka Parchmann, do Leibniz Institute for Science and Mathematics Education, Alemanha. Ilka chamou a atenção para a importância do trabalho interdisciplinar, a necessidade de juntar esforços em várias áreas de conhecimento, referindo que os cientistas desde há muito tempo formam grupos de investigação envolvendo especialistas de diferentes áreas. Estranhamente, a escola não reflete esse modelo de cooperação e as várias disciplinas de ciências são trabalhadas de forma independente sem que sejam procuradas e exploradas conexões possíveis. Ilka defendeu que a escola poderia optar por uma aprendizagem baseada em contexto, e por modelos e seleções de tópicos em que a cooperação entre diferentes disciplinas pudesse ser trabalhada de forma integrada.



A conferência procurou criar uma oportunidade para se identificarem caminhos a seguir em relação aos desafios que a educação em Ciências e em Matemática enfrentam na Europa

e em Portugal. Para isso houve lugar a um painel intitulado 'The challenges of 21st century science and mathematics education: Ways forward', que contou com a presença de João Pedro Ponte e Maria Alessandra Mariotti no âmbito da Educação Matemática, e António Cachapuz no das Ciências. Também tiveram lugar duas apresentações plenárias da parte da Comissão Europeia (Vladimir Garkov) e da Ciência Viva (Diana Freire) sob o tema: 'European and Portuguese policies for science and mathematics education.'



A Winter Conference contou com cerca de 120 participantes de 24 nacionalidades distintas. Mais de setenta comunicações orais e pósteres foram apresentados em sessões paralelas. Estas comunicações e pósteres foram sujeitos a uma avaliação duplamente cega que, depois de revistas e melhoradas foram novamente apreciadas para aprovação. As comunicações foram apresentadas em diferentes grupos de discussão, enquadrados nos diferentes temas referidos acima.



Logo no início da conferência os participantes tiveram oportunidade de visitar I3B's - *Instituto de Investigação em Biomateriais, Biodegradáveis e Biomiméticos*, um importante centro de investigação acolhido pela Universidade do Minho. Este Instituto tem como objetivo promover o progresso científico e tecnológico na área dos biomateriais, da engenharia de tecidos humanos, da medicina regenerativa e de precisão, dos polímeros

e compósitos para aplicação biomédica, dos biocerâmicos, da nanomedicina, bionanotecnologia, e das células estaminais. Dedica-se também à formação científica avançada nas suas áreas de atividade e à divulgação da investigação científica junto da sociedade civil.



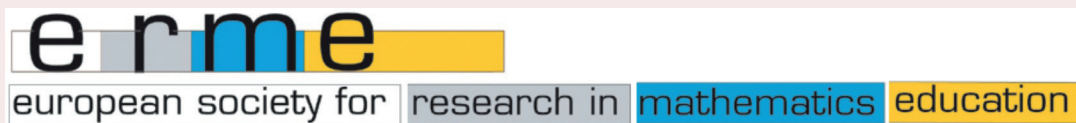
Finalmente, importa destacar que a Conferência constituiu uma excelente oportunidade para os membros do RDC em Educação em Ciências e em Matemática realizarem reuniões para fomentar o progresso de projetos comuns em curso, bem como desenvolverem ideias de novos projetos, fortalecendo e ampliando a Comunidade. Os participantes que participaram pela primeira vez numa conferência da ATEE foram encorajados a integrarem este RDC para partilharem experiências e desenvolverem investigação conjunta.

Normalmente, a Conferência ATEE é uma oportunidade para os participantes entrarem em contato com a cultura do país anfitrião. A ATEE Winter Conference também não foi, a este nível, uma exceção porque se realizou em Braga em período de Semana Santa, por cujas festividades a cidade é famosa. O programa envolveu, de resto, uma visita a um museu e diversos momentos musicais.

HELENA MARTINHO

UNIVERSIDADE DO MINHO

CONFERÊNCIAS TEMÁTICAS DA SOCIEDADE EUROPEIA PARA A INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



7.ª conferência temática – Linguagem na sala de aula

Esta é a terceira conferência dedicada a esta temática e realizar-se-á em Montpellier (França) de 18 a 21 de fevereiro de 2020. Entre as temáticas a abordar encontram-se a linguagem em contextos multiculturais, a linguagem para a criação de significado e a linguagem na interação.

8.ª conferência temática – Matemática universitária

Esta conferência, designada por INDRUN - International Network for Didactic Research in University Mathematics, realizar-se-á em Bizerte (Tunisia) de 27 a 29 de março de 2020. Trata-se da terceira conferência a focar-se no ensino da Matemática a nível universitário e o prazo para submissão de comunicações ou posters termina a 6 de outubro de 2019.

9.ª conferência temática – Sistemas aritméticos e numéricos

Este encontro focar-se-á na flexibilidade, sentido e domínio

do pensamento aritmético do ensino primário ao secundário. A sua realização está prevista para Leeds (Reino Unido) de 11 a 14 de maio de 2020.

10.ª conferência temática – Educação Matemática na era digital

Designada por MEDA - Mathematics Education in the Digital Age, esta conferência decorrerá em Linz (Áustria) em setembro de 2020. Sendo a segunda conferência dedicada à temática, centrar-se-á, tendo por base a era digital, na formação de professores de matemática e no desenvolvimento profissional, no desenvolvimento do currículo de matemática e no design de tarefas, e na avaliação em educação matemática.

Mais informações sobre estas conferências disponíveis em <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/index.php?slab=erme-topic-conferences>

A Khan Academy em Portugal, o ensino e aprendizagem da Matemática e a formação de professores - um contributo da EDUCOM

A KHAN ACADEMY

Em 2004 Salman Khan, um analista de fundos de investimento especulativos (“hedge funds”), originário dos EUA e formado pelo MIT, produziu alguns vídeos tutoriais explicando a resolução de problemas Matemáticos, publicando esses pequenos vídeos no Youtube como forma de ajudar a sua prima Nadia com as dificuldades que a mesma sentia. Senhor de uma invulgar paixão e capacidade comunicativa, o sucesso obtido levou-o a prosseguir neste apoio voluntarista, sendo que os vídeos acabaram por chegar a muito mais. A resposta foi tão positiva que o levou a pensar numa presença mais estruturada on-line. Seis anos depois, cria a Khan Academy, uma organização sem fins lucrativos nos Estados Unidos da América, com o objetivo de assegurar uma educação de qualidade para qualquer aluno em qualquer parte do planeta (Khan, 2012), e que é responsável pela disponibilização de uma plataforma on-line de mesmo nome (<http://www.khanacademy.org/>).

Adotando um modelo digital de “mastery learning” (aprendizagem para a mestria), a principal característica desta plataforma on-line é a de disponibilizar tutoriais vídeo, testar os respetivos conhecimentos recorrendo a exercícios automaticamente corrigidos, possuir uma forte componente de gestão de tarefas on-line, permitir a análise sofisticada dos dados de uso (“analytics”) e ainda a ser disponibilizada em ambiente “gamificado” – ou seja, procurando a motivação recorrendo a elementos característicos de jogos de computador, como pontuações, recompensas, personagens (“avatares”)...

Fruto de investimento por parte da Fundação Altice Portugal (Fundação Portugal Telecom, até 2019), não só foram adaptados ou produzidos os vídeos com conteúdos de Matemática ajustados aos currículos nacionais, como foi desenvolvida uma versão em Português europeu desta plataforma (<http://pt-pt.khanacademy.org/>) – cf. “Khan Academy em Portugal” na Educação e Matemática 146, pp. 41-42).

A EDUCOM

A EDUCOM (<http://www.educom.pt/>) é uma associação constituída em finais de 1995 por professores com especial interesse no uso educativo de redes eletrónicas de computadores, a trabalhar nas universidades e nas escolas no âmbito do projeto

MINERVA – o projeto português pioneiro na introdução das TIC nas escolas do ensino não superior – a partir de um grupo ad-hoc mobilizando vários colegas de diferentes polos do projeto e dedicados à “telemática educativa” (sendo “telemática” um termo resultante da fusão de “telecomunicações” e “informática”, ou seja, de outro modo, relativo ao uso de redes eletrónicas, ainda antes da Internet). Este grupo liderou várias iniciativas, tanto no domínio do desenvolvimento de plataformas on-line (data dessa altura o primeiro sítio educativo on-line, o “BBS MINERVA”) como no de formação de formadores e no de projetos do uso da telemática no ensino e aprendizagem. Em 1994 foi decidido dar a este grupo a forma de associação: a EDUCOM manteve assim e para além do final do projeto MINERVA, o espólio de conhecimento e práticas em torno do uso educativo das redes, mantendo o “BBS MINERVA” com o apoio da FCTUNL e algum financiamento do Ministério da Educação, contando principalmente com o empenho voluntário dos muitos professores e do seu entusiasmo em torno das potencialidades destas tecnologias. Este movimento de cidadania permitiu assim não deixar morrer o investimento realizado, sustentando-o até que a mudança de legislatura veio a criar em 1996 o Programa Nónio Século XXI (1996-circa 2002), o Programa Ciência Viva (1996 até à atualidade) e, em 1997, o Programa Internet na Escola (1997-2002), tendo todos eles vindo a reconhecer e apoiar o trabalho desenvolvido pela EDUCOM, designadamente com a criação de um Centro de Competência Nónio na associação, com o financiamento Ciência Viva para a manutenção do BBS MINERVA e sua evolução para site WWW e, até, pela participação indireta na Unidade de Apoio à Rede Telemática Educativa (uARTE)/Programa Internet na Escola.

Atualmente a EDUCOM desenvolve a sua ação em torno de 4 pilares fundamentais: o Centro de Competência TIC, o Centro de Formação, a Revista EFT e os Serviços on-line.

O CCTIC EDUCOM

O Centro de Competência TIC (CCTIC) é, como o nome indica, uma estrutura especializada no uso educativo das TIC credenciada pelo Ministério da Educação (ERTE, DGE) com quem articula o estudo, desenvolvimento e avaliação do

uso educativo dos computadores e redes em educação. Está estrategicamente sediado no Algarve, mas tem abrangência nacional. Acompanha vários dos projetos da ERTE – por exemplo “eTwinning”, “Apps for Good”, “Teachers Try Science” e outros. É também a estrutura responsável para, em articulação com o Centro de Formação EDUCOM, organizar o evento anual de boas práticas TIC@Portugal, um evento que desenvolve de forma geograficamente distribuída, recorrendo a tecnologia de videoconferência, sendo centralizado em duas salas distintas da associação – Monte de Caparica (sede) e Algarve (núcleo) – contando também com importante participação voluntária e interessada de muitos outros CCTIC pertencentes a outras instituições que idênticamente colaboram com a ERTE-DGE-ME.

O CENTRO DE FORMAÇÃO EDUCOM

O Centro de Formação, acreditado junto do Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua de Professores, tem a seu cargo a organização e creditação das várias modalidades de formação com vista à sua creditação tendo em vista o desenvolvimento e progressão profissional dos docentes que participam nos projetos e atividades do CCTIC e outras. Utiliza para o desenvolvimento da sua ação uma plataforma MOODLE (<http://moodle.educom.pt/>).

REVISTA CIENTÍFICA EDUCAÇÃO, FORMAÇÃO E TECNOLOGIAS – EFT

A EFT (<http://eft.educom.pt>) é uma revista científica que visa a divulgação de trabalhos de investigação e de reflexão relacionados com a utilização e integração das Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação e na Formação, autónoma em relação aos órgãos sociais e com um corpo diretivo próprio. A EFT possui arbitragem interpares (“peer-review”), tem periodicidade semestral e publicou até agora 15 números, todos eles disponíveis em acesso aberto on-line. A revista está presente na EBSCO, o principal fornecedor de acesso a bases de dados de revistas científicas mundiais, sistema que é também usado na Biblioteca de Conhecimento On-line B-ON.

SERVIÇOS ON-LINE

Finalmente, a EDUCOM preocupa-se em disponibilizar para exploração, formação, desenvolvimento e apoio dos seus associados, um conjunto de serviços on-line, (Webmail, MOODLE, ELGG, MAHARA, Wordpress, Wiki, Web, OpenSim, BigBlueButton,...).

Estes quatro pilares – CCTIC, Centro de Formação, Revista Científica e Serviços On-line – estabelecem uma arquitetura de desenvolvimento do trabalho associativo que é evidentemente poderosa e que tem sido posta ao serviço dos vários projetos que a EDUCOM desenvolve ou apoia, designadamente os que lhe surgem da colaboração com a ERTE-DGE-ME, como é o caso particular da formação de professores para a Khan Academy.

ESTRATÉGIAS DA EDUCOM PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES EM PROJETO

O objetivo geral recorrentemente presente na formação de professores da EDUCOM é assegurar que os alunos usam significativamente os teclados. A estratégia passa sempre que possível por uma formação no contexto da ação dos docentes com os alunos, capaz de gerar evidências para a reflexão sobre o, e a avaliação do, que foi realizado e dos objetivos atingidos, informando as ações seguintes em ciclos sucessivos de aproximação aos melhores resultados (Costa & Viseu, 2008; Horta, 2012; Horta, Freitas & Chagas, 2013; Freitas, Horta, Gonçalves, 2015).

Assim, as orientações para a formação contínua de professores da responsabilidade da associação, com necessários ajustamentos às especificidades de cada iniciativa/projeto, são:

“A Formação EDUCOM:

- a. deve ser desenvolvida em contexto letivo (...); desta forma procurar-se-á contrariar a carência de saberes por parte dos alunos no uso académico das TIC;
- b. deve ser desenvolvida em articulação direta com a realização de atividades práticas pelos alunos, que devem devolver as evidências que permitirão o trabalho de reflexão e reformulação dessas mesmas atividades no sentido de tornar as mesmas mais eficazes e eficientes;
- c. será preferencialmente numa de duas modalidades: ou sessões curtas de divulgação/demonstração de novas tecnologias (...); ou sessões de ciclo longo, tipicamente ao longo do ano letivo, com a aplicação obrigatória em sala de aula (cf. acima) com atividades práticas com alunos, análise dos resultados e reelaboração em sessão da formação das estratégias e atividades recorrendo às TIC;
- d. será sempre enriquecida recorrendo às TIC, nomeadamente reforçada recorrendo a mediação de sistemas de comunicação e de gestão de formação online (...), mas sempre de forma pró-ativa e não apenas de repositório passivo;
- e. deverá, sempre que possível, possuir subjacente a metodologia de projeto de trabalho individual ou em grupo, facilitador da sua implementação e posterior análise crítica;
- f. recorrerá sempre que possível a um modelo de avaliação de defesa de portefólio digital, (...) de forma a aferir o nível de consecução dos mesmos.” (Freitas, Horta, Gonçalves, 2015).

A APROXIMAÇÃO DA FUNDAÇÃO ALTICE PORTUGAL AO ME E À EDUCOM

Desde que a Fundação Altice Portugal se decidiu pela introdução da Khan Academy em Portugal que uma das suas preocupações

foi a adequada preparação de professores. Foram disponibilizados materiais de apoio aos docentes e realizadas múltiplas sessões de divulgação e motivação em escolas e em eventos um pouco por todo o país.

Quando a referida fundação contactou a Direção-geral da Educação (DGE) do Ministério da Educação (ME) envolvendo a Equipa de Recursos e Tecnologias Educativas (ERTE), e esta, por sua vez, propôs ao CCTIC EDUCOM o acompanhamento desta iniciativa, foi para nós muito claro que a intervenção principal a fazer para procurar aumentar o impacto da plataforma junto de professores e alunos seria através da formação de professores, numa lógica integrada, de proximidade, enriquecida.

UM PROGRAMA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Resultante da colaboração entre a Fundação Altice Portugal e a EDUCOM e com a participação da ERTE-DGE-ME, foi desenhado um projeto-piloto abarcando escolas da região Oeste, durante os anos letivos de 2016/2017 e de 2017/2018. Este projeto abarcou 5 agrupamentos, num total de 30 professores e 700 alunos distribuídos por turmas do 1.º ano ao 9.º ano da escolaridade.

A formação foi desenvolvida segundo o modelo da EDUCOM (cf. acima), na modalidade de oficinas de formação, de 25h de trabalho em sala e 25h de trabalho autónomo com os respetivos alunos, com apoio on-line.

O programa de formação foi, como tal, centrado nas práticas com os alunos, em turmas dos professores participantes, sensibilizando para o as oportunidades da integração curricular, que neste caso da KA são particularmente evidentes, e capacitando especialmente os professores envolvidos para o usufruto das funcionalidades da plataforma no que respeita à criação estruturada de atividades e à obtenção de dados detalhados (“analytics”) sobre a utilização concreta efetuada pelos alunos envolvidos.

A par e na sequência do projeto-piloto, foram desenvolvidas várias ações de curta duração (ACD) e oficinas de formação, que permitiram um alargamento no número de escolas, alunos e professores com utilização regular dos recursos digitais da KA, com apoio e acompanhamento da EDUCOM e da Fundação Altice Portugal.

PRIMEIRAS IMPRESSÕES E PRIMEIRAS REAÇÕES

É provável que já tenha visto a “TED talk” de Sal Khan sobre a Khan Academy (TED, 2011). Se não viu, pensamos que valerá a pena ver. Fica-se com um misto de surpresa, expectativa, dúvida... Apesar de um sistema centrado em torno da explicação e resolução de exercícios, que decerto não abrange toda a riqueza de uma verdadeira educação matemática, a sua disponibilidade on-line, adaptável, acessível gratuitamente a qualquer um que esteja interessado e possua uma ligação à Internet com um mínimo de qualidade, sugere que se olhe com atenção crítica

para esta proposta. Esta sensação persistiu até começarmos a ir às escolas no âmbito do projeto-piloto: mesmo para colegas que não são da área disciplinar, a frase “Afinal já gosto de Matemática” exclamada por um jovem do 2.º ciclo para um seu colega, depois de saírem da sala onde ambos tinham estado envolvidos em atividades da KA, não pode passar por indiferente. Esta frase do jovem “aluno KA” parece ilustrar uma mudança de atitude que interessa explicitar: talvez que esta mudança de humor seja tão superficial como primárias são as suas contrárias – “não tenho jeito para Matemática”, “não gosto de Matemática”. Contudo e sendo certo que a motivação é um elemento relevante para a aprendizagem, esta aparente mudança de atitude apresenta, no mínimo, um sinal que importa esclarecer e aprofundar.... Foi nesse misto de participação crítica e curiosa que a EDUCOM embarcou nesta aventura da formação Khan Academy.

De uma maneira geral e desde logo as reações dos docentes foram positivas, entre o moderado e o entusiasmado. Colegas formandos houve que faziam saber a quem os queria ouvir nas primeiras sessões de balanço que “já não passo sem a Khan!”. Donde e apesar de um sistema com alguma complexidade, parecia verificar-se o que tantas outras vezes observámos: que apesar de complexidade e mais trabalho inicial, os professores estão disponíveis para esse esforço quando têm a perceção de que há vantagens relevantes concretas no uso das TIC, neste caso não só no uso deste tipo de plataforma, mas também dos conteúdos formativos da mesma. Mais um contributo a aconselhar o nosso envolvimento.

O entusiasmo chegou também a envolver os Formadores, que demonstraram especial dedicação e empenho nas suas tarefas. Se dúvidas houvera, esta trilogia de interesses alunos/docentes-formandos/formadores convenceu-nos.

A literatura relativa à Khan Academy releva que ainda é muito cedo para se tirarem conclusões definitivas, com alguns estudos relatando aspetos menos conseguidos e outros revelando aspetos positivos, referidos com alguma cautela mas de forma tendencialmente recorrente relativamente à aprendizagem dos alunos, com alguns resultados de correlação positiva entre o uso da KA e os resultados escolares. Já a componente de “gamificação” parece perder impacto junto dos alunos à medida que a idade aumenta.

No que respeita à gestão das aulas, a KA abre caminho a explorações do tipo “Flipped Classroom”, em que o aluno se prepara previamente à aula e depois trabalha na sala de aula as questões de maior complexidade. Aliás muitas das primeiras reações positivas que Sal Khan, recebeu provinham de professores que lhe referiam usar os vídeos como TPC para de seguida poderem trabalhar com eles na aula.

O próprio Sal Khan afirma que a KA “não é um substituto para a sala de aula física, libertando as aulas para atividades de nível mais elevado, para o diálogo, para as simulações, para

o desenvolvimento de projetos”. Na lógica de uma educação de qualidade para todos e do combate ao fosso digital, sugere mesmo que a KA “pode ser o explicador que a (...) família não pôde pagar” (ACM SIGCHI 2016).

PRIMEIROS RESULTADOS

Conforme já apresentado por Susana Colaço em número anterior da revista EM 146, realizaram-se quatro oficinas de formação, duas em cada ano letivo, cujos resultados foram analisados pela equipa do projeto, tendo essencialmente como base os resultados da formação realizada e visitas às escolas participantes, resultados esses publicados em relatório ainda interno e que dão conta das diversas metodologias de utilização da KA postas em prática pelos formandos em contexto escolar: “em aula curricular ou de apoio (trabalho individual, pequeno ou grande grupo); na biblioteca da escola, como trabalho de casa ou como forma de trabalho autónomo, entre outras. (...)”. Os formandos passaram a incluir a KA nas planificações das suas atividades letivas, elaboraram documentos de preparação e apoio dessas mesmas atividades, bem como introduziram a KA nos critérios e elementos de avaliação dos alunos.” Os resultados a nível de competências trabalhadas pela KA são considerados assinaláveis. Parece nalguns casos haver uma relação positiva entre os resultados escolares a Matemática e a utilização da Khan Academy, tendo esse aspeto particular sido referido por docentes envolvidos neste piloto.

Foi também contratualizada a monitoração deste projeto com a Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento (UIED) da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. A monitoração foi fundamentada em três dimensões: teoria da atividade, conhecimento profissional dos professores e aprendizagem dos alunos (Domingos et al., 2017). Os resultados são ainda preliminares, tendo-se verificado a apropriação da plataforma on-line por parte dos professores, com o desenvolvimento de planos de aula recorrendo à mesma de forma variável consoante o currículo lecionado, ao mesmo tempo que os alunos foram introduzidos ao uso da mesma plataforma com a supervisão dos seus professores. Foi possível constatar a satisfação geral dos professores envolvidos por fazerem parte deste piloto.

Numa nota menos positiva, ambos os resultados obtidos pela equipa do projeto e pela equipa de monitoração referem que, no geral, se verificou a inadequação de equipamentos disponíveis como fator limitante ao sucesso do projeto, levando a que alunos e professores muitas vezes tenham optado por fazer o acesso a partir de suas casas, o que resulta numa orquestração menos conseguida dos recursos em aula (Domingos et al., 2017).

PRÓXIMOS DESENVOLVIMENTOS

Tendo em conta a forma como decorreu o projeto-piloto e os resultados obtidos, a parceria entre a Fundação Altice

Portugal, a EDUCOM e a DGE-ME, decidiu avançar com a disseminação desta experiência por mais escolas e regiões do país, candidatando-se a financiamento do Programa Operacional do Capital Humano (POCH), no âmbito do Portugal 2020, na vertente Títulos de Impacto Social, com vista ao desenvolvimento da formação e demais atividades nas regiões Norte e Centro, a iniciar já neste próximo ano letivo de 2019/2020 e prosseguindo em 2020/2021. Entretanto decorrem sessões de formação como forma de afinar a operacionalização desta nova fase da Khan Academy em Portugal.

Esperamos que seja agora possível, com o envolvimento cada vez mais abrangente dos potenciais interessados, levar a ainda maior número de alunos e professores as potencialidades desta plataforma de apoio à educação matemática.

Referências

- ACM SIGCHI. (17.05.2016). *Closing Keynote: Salman Khan - Education Reimagined* [video]. Obtido de <https://youtu.be/dNwvhPsFrnU>
- Costa, F. A. & Viseu, S. (2008). Formação - Acção - Reflexão: um modelo de preparação de professores para a integração curricular das TIC. In F. Costa, H. Peralta & S. Viseu (Eds.). *As TIC na Educação em Portugal: Conceções e Práticas* (pp.216-237). Porto: Porto Editora.
- Freitas, J., Horta, M. J. & Gonçalves, I. (2015) Da Formação de Professores em TIC ao Uso das TIC pelos Alunos: contributos para um Modelo de Formação [DVD]. In Gomes, M. J. et al. (orgs.), *Atas da IX Conferência Internacional de TIC na Educação. Challenges 2015* (pp. 437-448). Universidade do Minho, CCTIC/Instituto de Educação.
- Horta, M. J. (2012). *A formação de professores como percurso para o uso das TIC em atividades práticas pelos alunos na sala de aula*. Tese de doutoramento, Educação, Universidade de Lisboa, Instituto de Educação.
- Horta, M. J., Freitas, J. & Chagas, I. (2013) A implementação de atividades práticas com as TIC na sala de aula - uma abordagem pela formação de professores [DVD], in Gomes, M. J. et al (orgs.). *Atas da VIII Conferência Internacional de TIC na Educação. Challenges 2013* (pp. 437-448). Universidade do Minho, CCTIC/Instituto de Educação.
- Khan, S. (2012). *The one world schoolhouse: Education reimagined*. Brand: Twelve.
- TED (03.2011). *Sal Khan – TED 2011: Let's use video to reinvent education*. Obtido de; https://www.ted.com/talks/salman_khan_let_s_use_video_to_reinvent_education

JOÃO CORREIA DE FREITAS *, **, +++, **FERNANDO EGÍDIO REIS ***, **VÍTOR GODINHO LOPES ***, **DAVID COSTA ***, **JOÃO Mouro ***, **

* EDUCOM

** FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, UNL

*** CONTACTO: JCF@EDUCOM.PT

Indução

ASSOCIAÇÃO ATRACTOR

PREÂMBULO

O tema da indução matemática tem um grande valor formativo, que transcende a utilidade de que se reveste em numerosas situações concretas. Ao longo do tempo, os programas têm variado e o primeiro contacto com o tema já se deu por vezes ao nível do ensino secundário e outras vezes apenas ao nível do ensino universitário. Há que procurar que os alunos compreendam as ideias subjacentes, evitando uma espécie de *aprendizagem mecanizada*. Quem alguma vez tenha tido uma experiência de ensino relacionada com o tema, num ou noutro dos níveis, ter-se-á muito provavelmente confrontado com situações de alunos que *sabem* que quando há que resolver um problema de indução, é dada uma fórmula em que entra a letra n , e a regra para resolver um tal problema é: primeiro substitui-se n por 1 e depois por $n+1$, etc., mas que não têm a menor noção do raciocínio envolvido.

No texto que se segue, descreve-se uma forma de apresentação do raciocínio de *indução* (às vezes designada por *indução finita*, por razões adiante indicadas). Na primeira secção apresenta-se um *jogo das lâmpadas*, cuja resolução o leitor deverá procurar descobrir usando uma versão interactiva do jogo, criada pelo Atractor [1]. Com suficiente prática, o leitor vai adquirindo consciência do que há que fazer para alcançar o objectivo de tal jogo e, em particular, terá relacionado a resolução do jogo para uma fila de lâmpadas com a resolução do mesmo jogo para filas mais curtas. Terá aplicado num caso particular, eventualmente sem o saber, uma forma de raciocínio de indução, sem que na situação surja para prova qualquer fórmula dependente de um n .

Ressalvas:

1. Um texto publicado na revista Educação e Matemática terá como leitores potenciais, professores de matemática que saberão perfeitamente o que é o raciocínio de indução matemática. O nível de detalhe e minúcia do capítulo seguinte não teve esse tipo de leitores em vista. Para eles, o texto poderá ser útil apenas como sugestão de experiências a fazer com os seus alunos ao apresentar-lhes a noção de

indução, evidentemente com as adaptações adequadas ao nível etário.

2. Esta apresentação não foi testada em ambiente de aula e isso constitui de momento uma limitação. O método foi testado com sucesso junto de crianças frequentando o 7.º ano do ensino básico, mas não em ambiente de aula e todos sabemos que não é a mesma coisa. O Atractor tenciona testar o método com crianças ainda mais novas e acolherá com interesse relatos de experiências que venham a ser feitas em ambiente de aula.

JOGO DAS LÂMPADAS

Regras do jogo

Neste jogo há uma fila de lâmpadas, cada uma das quais pode estar acesa ou apagada. Por exemplo, a fila de sete lâmpadas representada na figura  tem quatro acesas e três apagadas. Se o leitor clicar em qualquer das lâmpadas, acesas ou apagadas, o efeito desses cliques pode ser nulo (o clique não muda nada) ou não, neste caso mudando apenas o estado da lâmpada em que clicou: acende-a se estava apagada e apaga-a se estava acesa.

A primeira coisa a fazer é descobrir a regra: quando é que um clique muda o estado da lâmpada clicada e quando é que a deixa no mesmo? O leitor é fortemente encorajado a ver em [1] alguns exemplos interactivos e fazer tentativas, observando o efeito dos cliques e tentando *descobrir por si* a regra geral.



Figura 1

Essas experiências ajudá-lo-ão a familiarizar-se com o jogo das lâmpadas e isso é importante para a fase seguinte. Adie a leitura do que se segue até ter descoberto essas regras. Não querendo seguir o conselho, poderá buscar no apêndice alguma ajuda. Conhecidas as regras, eis dois factos que convém ter presentes:

1. Para uma lâmpada diferente da primeira, mudar (ou não) de



Figura 2



Figura 3

estado por um clique só depende do estado das lâmpadas que estão à sua esquerda.

Sendo assim, como nas cinco filas representadas na figura 2 as lâmpadas nas três primeiras posições estão em idêntico estado (apagada, acesa, apagada), um clique numa lâmpada qualquer até à ordem 4 de uma das filas muda o estado da lâmpada se e só se também mudar em qualquer das outras filas. E o mesmo podemos afirmar para as filas da figura 3:

2. Uma consequência de 1. é que se uma lâmpada mudou de estado por um clique, um novo clique nela, imediatamente a seguir, fá-la-á voltar ao estado anterior, pois o que estava à sua esquerda não sofreu alteração. Por exemplo, se o leitor já aprendeu as regras, sabe que um clique na quarta lâmpada da primeira fila da figura 3, muda o estado dessa lâmpada, passando a fila a ficar igual à segunda fila dessa figura. E um novo clique na quarta lâmpada desta fila fá-la ganhar o aspecto inicial da primeira fila. Como a terceira e a quarta fila coincidem (entre si e com as duas primeiras) até à terceira posição, um clique na quarta lâmpada também muda necessariamente o estado da lâmpada em ambos os casos (envia a terceira fila na quarta ou a quarta na terceira).

OBJECTIVO DO JOGO

Partindo de uma fila só com duas lâmpadas, ambas apagadas, use cliques que conduzam a que essa fila fique só com a última lâmpada acesa (verá que é muito simples). Em seguida, usando cliques adequados a partir da posição a que chegou, volte à posição inicial, em que as duas lâmpadas estavam apagadas. Observe que, para o fazer, usou exactamente os mesmos (três) cliques (e na mesma ordem) que tinha usado na fase inicial para ter só a segunda lâmpada acesa. A figura 4 representa as diversas fases para obter: primeiro, uma fila só com a última lâmpada acesa, depois para regressar à situação de partida; nessa

figura, as circunferências escuras indicam a lâmpada a clicar para passar ao estado seguinte.

Faça algo semelhante para uma fila com três lâmpadas apagadas: como conseguir que só a terceira fique acesa? Nesta fase do texto, já saberá por certo que, pelas regras do jogo, para conseguir acender a terceira lâmpada, à esquerda dela só a segunda deve estar acesa. Mas a essa situação já sabe como chegar: ter só a segunda lâmpada acesa foi o jogo muito simples proposto no início! Clicando em seguida na terceira lâmpada, ela acende e depois há só que apagar a segunda lâmpada. Mas isso foi também o que fez quando, no jogo anterior, voltou à fila com as duas lâmpadas apagadas. A figura 5 representa as fases descritas. Num jogo análogo (acender só a última lâmpada) para filas com 4 ou 5 lâmpadas apagadas, a situação é semelhante à encontrada nos dois casos já vistos.

(A) Numa fila de lâmpadas, se todas à esquerda da última estiverem apagadas, para mudar o estado da última lâmpada terá obrigatoriamente de conseguir ter acesa apenas a imediatamente anterior, depois mudar o estado da última e em seguida apagar a imediatamente anterior.

(A) descreve um caminho para jogar o jogo, qualquer que seja a fila de lâmpadas, usando um caminho semelhante para uma fila mais curta! Isto garante que há sempre um tal caminho, porque, se existissem filas para as quais não houvesse um tal caminho, bastaria escolher a mais curta de entre elas. Por ela ser a mais curta nessas condições, para a fila obtida dela tirando a última lâmpada, haveria, para essa ainda mais curta, um caminho e, aplicando o processo descrito em (A), concluiríamos que também existiria um caminho para aquela de que partíramos como sendo a mais curta sem um tal caminho.

Depois de ter jogado os jogos e lido o texto precedente, o leitor poderá ser tentado a explicar o jogo a um amigo e a afirmar: eu sou capaz de jogar um jogo destes com qualquer número

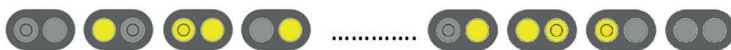


Figura 4



Figura 5



Figura 6

de lâmpadas, ou um pouco mais modestamente, concretizar, afirmando por exemplo que é capaz de jogar o jogo de lâmpadas com 37 lâmpadas.

Sem querermos menosprezar a capacidade do leitor, veremos adiante por que razão esta afirmação está errada e isso não contradiz nada do que está anteriormente escrito.

QUANTAS JOGADAS?

O exemplo usado para descrever uma iniciação ao raciocínio de indução foi propositadamente escolhido por forma a não envolver explicitamente nenhuma afirmação quantitativa. E não há, pois, nenhuma fórmula concreta a ser demonstrada. Tomando como ponto de partida esse exemplo, vamos agora encarar a questão da contagem do número mínimo de jogadas que serão/seriam necessárias para concretizar o jogo das lâmpadas.

Designemos por $f(n)$ o número mínimo de jogadas para concluir o jogo com uma fila de n lâmpadas todas inicialmente apagadas. Claro que $f(1)=1$ e do que vimos atrás resulta que $f(2)=3$ e $f(3)=7$. Vimos como, conhecendo um caminho para o jogo com uma fila de n lâmpadas, também conhecemos para uma fila com mais uma lâmpada: antes de acendermos essa última lâmpada de ordem $n+1$, temos de ter acesa apenas a anterior de ordem n (com $f(n)$ cliques), depois acendemos com um clique a de ordem $n+1$ e finalmente, outra vez com os mesmos $f(n)$ cliques (pela mesma ordem), apagamos a de ordem n . Ao todo usámos $f(n)+1+f(n)$ cliques e não podíamos ter usado menos, portanto concluímos que $f(n+1)=2f(n)+1$. É fácil calcular a partir desta igualdade os primeiros valores do número de cliques necessários:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Repare o leitor que todos os números obtidos precedem imediatamente potências de 2. Será que, para qualquer n , $f(n)=2^n-1$? A igualdade é válida para $n=1$: $f(1)=1=2^1-1$; se houvesse algum número para o qual ela não fosse válida, haveria um primeiro número, necessariamente diferente de 1 para o qual seria errada. Chamando p ao seu antecessor, teríamos

$f(p) = 2^p - 1$ e $f(p+1) \neq 2^{p+1} - 1$. Mas já vimos que $f(p+1) = 2f(p)+1 = 2(2^p-1)+1 = 2^{p+1}-1$, contrariamente ao que supuséramos (que era *haver um primeiro número $p+1$ para o qual a igualdade não se verificava*). Portanto, está provado que aquela fórmula é válida para qualquer n .

Fazendo as contas para o caso da hipotética afirmação do leitor, referida no final da última secção, chegamos à conclusão que seriam precisos $2^{37}-1=137\,438\,953\,471$ movimentos para jogar o jogo com uma fila de 37 lâmpadas. Um leitor com uma velocidade¹ de cliques da ordem de 7 por segundo, se pudesse estar permanentemente a jogar, noite e dia, num ano bissexto teria feito $7.60.60.24.366 = 221\,356\,800$ cliques. Ora, mesmo nessas condições completamente irrealistas, demoraria cerca de 621 anos² para completar o jogo...

O leitor poderá retorquir que então o raciocínio de indução falha na hipotética afirmação sobre a sua capacidade de jogar o jogo das 37 lâmpadas. A resposta é: o raciocínio em si não está a falhar, o que acontece é que não se verifica uma das condições da indução para a afirmação de que é *capaz de jogar*... Não é verdade que, *se o jogador é capaz de jogar para n lâmpadas, então também é para $n+1$* ³.

OUTRAS FORMAS DE INDUÇÃO⁴

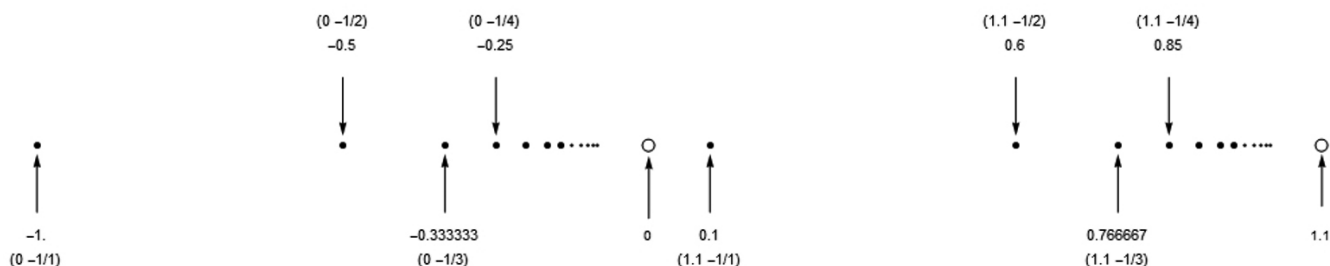
Propriedades do conjunto N (dos números naturais) que foram implícita ou explicitamente usadas atrás:

Toda a parte não-vazia de N tem primeiro elemento (traduz-se esta propriedade dizendo que o conjunto N é bem ordenado).

$i1 - N$ é a única parte de N satisfazendo as condições:

- tem o primeiro elemento de N ;
- se tem um número, também tem o seguinte.

(Se houvesse em N uma parte $A \neq N$ com estas propriedades, considerando o primeiro elemento b no complementar de A em N , o seu antecessor $b-1$ estaria em A e, portanto, também estaria o sucessor de $b-1$ que é b). Para uma afirmação P_n dependente de n , chamando A ao conjunto dos n para os quais P_n é satisfeita, concluir que se A satisfaz aquelas duas condições então coincide com N equivale a afirmar que, se P_1 é verdadeira e se P_n implica P_{n+1} então P_n é verdadeira para todo o n .



Consideremos agora as duas sucessões $(-1/n)_n$ e $(1.1-1/n)_n$, que são crescentes e convergentes, designemos por A e B os respectivos contradomínios e por M a sua reunião.

Note-se que M é bem ordenado. Será que a indução, sob a forma atrás usada em N , funciona em M ? A resposta é não. É verdade que: i) o primeiro número de M , que é -1 , é negativo; e ii) se um número de M é negativo, o seguinte também é. Mas nem todos os números de M são negativos. E o primeiro número não negativo de M , que é 0.1 , não tem antecessor em M , isto é, 0.1 não é o sucessor de nenhum número de M e, portanto, não podemos aplicar o argumento anterior. Há uma parte não-vazia de M diferente de M , que satisfaz as duas condições. Conclusão: a indução, sob a forma atrás enunciada para N , não funciona para conjuntos só bem ordenados. Fortalecendo a condição $i1 - b)$ para $i2 - b)$ podemos afirmar o seguinte:

Num conjunto P bem ordenado qualquer, P é a única parte D de P satisfazendo

i2.a. - D tem o primeiro elemento de P ;

i2.b. - se D tem todos os elementos menores do que um m de P , também tem esse elemento m .

Se D não coincidissem com P , tomávamos o primeiro elemento m de P que não estivesse em D (existiria, por P ser bem ordenado e D ser não vazio devido a $i2-a$); os elementos menores do que m pertenceriam a D , e $i2-b$ implicaria que m também pertenceria a D , o que contrariaria a forma como m foi escolhido.

Voltando ao contraexemplo M indicado atrás, notemos que M já não serve como contraexemplo⁵ para o princípio da indução $i2$: só M satisfaz as duas condições $i2$.

Deixa-se ao leitor a verificação de que o conjunto dos números negativos de M não satisfaz $i2 - b)$.

APÊNDICE

As regras do jogo das lâmpadas

Se não quer descobri-las sem ajuda, comece por observar as imagens seguintes. Por cima daquelas cujo clique muda o estado, está uma seta.

Poderá observar que a primeira lâmpada tem sempre uma seta: o estado da primeira muda sempre por um clique. Pode não haver

mais nenhuma que mude o estado ao ser clicada (quando é que isso acontece?); ou pode haver (no máximo) uma segunda, que, ao ser clicada, muda de estado. Nesta última hipótese, qual é essa segunda lâmpada que muda de estado? Sabendo que uma lâmpada diferente da primeira *mudar de estado* só depende do estado das lâmpadas que estão à sua esquerda, tente novamente descobrir a regra. E volte a jogar com os jogos facultados em [1]. Em último caso, veja a resposta na seguinte frase:

Será a lâmpada seguinte à primeira acesa.

Notas

¹Um programa adequado poderá realizar jogadas a grande velocidade; mas, para um jogador humano, supor 7 cliques por segundo traduz já um certo optimismo.

² Supostos todos bissextos para simplificar as contas...

³ Para evitarmos evocar aspectos menos agradáveis, digamos que o leitor poderá ter descoberto que talvez tenha melhores formas de passar o tempo do que jogar um jogo como este durante vários dias ou meses seguidos.

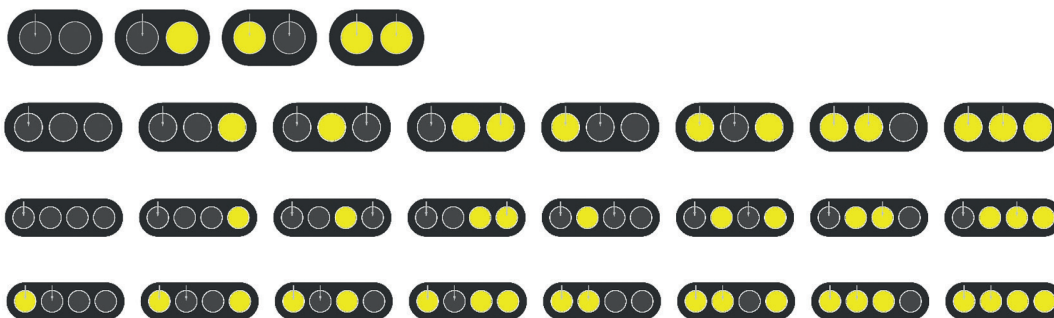
⁴ A leitura desta secção não é essencial à plena compreensão do resto do artigo.

⁵ A construção do contraexemplo M para $i1$ usava um elemento (diferente do primeiro) sem antecessor, e num conjunto bem ordenado não vazio um tal elemento existe se e só se houver um conjunto infinito majorado. Mas um conjunto infinito bem ordenado sem partes infinitas majoradas é, do ponto de vista da relação de ordem, perfeitamente equivalente a N . Em N verificam-se $i1$ e $i2$ e essa situação é por vezes designada por *princípio da indução finita* precisamente por a hipótese de indução se referir sempre a um conjunto finito de valores.

Referências

[1] <https://www.atractor.pt/mat/jogodaslampadas>

ASSOCIAÇÃO ATRACTOR



APM 2019 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

*A Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indiferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um nº de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados individuais têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito

também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista Quadrante.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados terão descontos na requisição de materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos na formação e em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Assinatura das revistas Educação e Matemática e Quadrante

		Educação e Matemática 3 números + 1 número duplo temático	Quadrante (2 números)
Associado individual	Portugal		15,00€
	Estrangeiro		30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas Educação e Matemática e Quadrante

	Educação e Matemática		Quadrante
	Temática		
Associado	Temática	10,00€	10,00€
	Normal	7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	

Modalidades de associado individual	Quota
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	Quota
Modalidade I (1 exemplar da EeM)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da EeM)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da EeM+Quadrante)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da EeM+Quadrante)	140,00 €

índice

Editorial

- 01** Colchas de linho em fio de seda bordadas
Direção da APM

Artigos

- 09** Modelação matemática experimental para um ensino integrado de STEM
Ana Margarida Baíoa, Susana Carreira
- 13** IV Encontro APM-IE “Aprendizagens Essenciais em Matemática - perspectivas e práticas”
Lucília Teles
- 14** Raciocinar tem mais que se lhe diga!
Maria Eugénia Jesus, Helena Coutinho
- 20** Percursos possíveis em Educação
Fernando Emídio
- 23** A matemática sob (sobre) pressão
José Luiz Pastore Mello
- 28** Uma caixa enigmática
Ana Sofia Rézio, Beatriz Gouveia, Margarida Raposo
- 33** Criatividade, sons e Matemática
Margarida Font Amado, M. Isabel Rocha
- 38** Conferência de Inverno 2019 Educação em Matemática e em Ciências no Século XXI
Helena Martinho
- 45** Indução
Associação Atractor

Secções

- 03** Espaço GTI
Desenvolver o raciocínio funcional no 6.º ano de escolaridade: contributos de uma experiência de ensino, *Ana Isabel Silvestre*
- 07** Cadernos de apontamentos de Geometria *Cristina Loureiro*
Estruturas inesperadas
- 19** Pontos de vista, reações e ideias ...
Formar para o mercado de trabalho, *Patrick Götz*
- 27** O Problema deste número *José Paulo Viana*
O terceiro lado
- 30** Materiais para a aula de Matemática
Ler, interpretar e escrever contos com informação matemática, *Ana Sofia Rézio*
- 41** Tecnologias na Educação Matemática *António Domingos*
A Khan Academy em Portugal, o ensino e aprendizagem da Matemática e a formação de professores - um contributo da EDUCOM, *João Correia de Freitas, Fernando Egídio Reis, Vítor Godinho Lopes, David Costa, João Mouro*