

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Karen Uhlenbeck



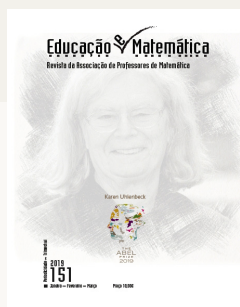
THE
ABEL
PRIZE
2019

Periodicidade ∞ Trimestral

2019
151

■ Janeiro ∞ Fevereiro ∞ Março

Preço 10,00€



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Catarina Delgado
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Filipa Machado
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	João Terroso
	Manuela Pires
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Março de 2019

Tiragem 1000 exemplares

Periodicidade

Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

A Academia Norueguesa de Ciências e Letras atribuiu o Prémio Abel de 2019 a Karen Uhlenbeck, professora da Universidade do Texas, em Austin, nos Estados Unidos.

The Abel Prize criado em homenagem ao matemático norueguês Niels Hendrik Abel é, desde 2003, concedido anualmente para realçar avanços importantes na área da Matemática. A professora Karen Uhlenbeck é a primeira mulher a ganhar este prémio.

Mário Baía

Neste número também colaboraram

Ana Paula Jahn, Ana Rita Branco, Cátia Almeida, Ema Mamede, Felicidade Mestre, Hélia Pinto, José Condeço, José Filipe, João Mouro, Juliana Lopes, Maria Caracitas, Maria Catarina Sousa, Marília Zorrinho, Martha Maçumoto, Nadia Ferreira, Nélia Amado, Neusa Branco, Nuno Santos, Paulo Afonso, Paulo Ferreira Correia, Rita Laranginha, Sandra Nobre, Sandra Schneider, Sílvia Zuzarte, Susana Carreira, Tiago Coelho, Vincenzo Bongiovanni

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, n.º 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.
- Pela relevância das cores nalguns artigos deste número, a sua versão digital disponibilizada aos sócios no site da APM será publicada a cores.

Autonomia e Flexibilidade Curricular no desenvolvimento das aprendizagens em matemática: perspetivas e desafios

A universalização de uma escolaridade alargada de 12 anos e o reconhecimento da importância de um currículo comum de 9 anos são duas das prioridades nacionais que lançam desafios que comprometem toda a comunidade educativa e, de um modo especial, a Escola. Na prossecução destes objetivos, o sistema educativo português tem procurado dinamizar a adoção de respostas educativas e a implementação de metodologias de ensino-aprendizagem diversificadas de modo a que todos os alunos, adquirindo as aprendizagens essenciais, desenvolvam as competências necessárias para uma cidadania integral para o presente e para um futuro que não conseguimos antecipar. O Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, enquanto referencial, e a definição de aprendizagens essenciais para a disciplina de matemática desafiam os professores que ensinam matemática a repensar e a concretizar práticas pedagógicas inclusivas. Neste sentido, o Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho, vem conceder às escolas e aos professores autonomia para, de modo flexível, darem respostas educativas adequadas ao contexto e às necessidades de todos e de cada aluno.

Para tal, há que tomar decisões organizacionais, curriculares e pedagógicas, procurando dar resposta a problemas identificados localmente. Neste sentido, podem ser constituídas equipas educativas, formadas por docentes do mesmo grupo de docência ou de diferentes grupos, dependendo da natureza das questões em causa. Como tal, cada escola, de acordo com o seu projeto educativo e tendo em consideração as características das turmas e dos alunos, estabelece prioridades na gestão do currículo. Deste modo, as escolas e os professores constituem-se como autores das soluções mais adequadas a contextos que são necessariamente diferentes, nomeadamente quanto aos recursos a mobilizar ou a criar. Como recursos a nível meso, ou seja, da escola, entenda-se: tempo, espaço, horários, materiais, equipamentos e dinâmicas de trabalho, entre outros. A nível micro, ou seja, do professor e seu património, decorrente das suas experiências profissionais, podemos considerar as redes profissionais e formativas, tarefas, materiais didáticos e instrumentos de avaliação.

Através de diferentes opções curriculares as escolas poderão integrar e enriquecer as aprendizagens dos alunos, tornando-se agentes do desenvolvimento curricular. Para tal, podem, por exemplo, constituir domínios de autonomia curricular, alternar períodos de funcionamento disciplinar com períodos de funcionamento multidisciplinar, redistribuir a carga horária das disciplinas das matrizes curriculares – base,

dentro de cada componente curricular, até 25% do total da carga horária, ou organizar o funcionamento das disciplinas de um modo trimestral ou semestral, ou outra organização, entre outras opções descritas no referido decreto-lei.

Os desafios colocados pelo atual enquadramento legal e a assunção, pelas escolas e pelos professores, da responsabilidade da gestão curricular têm implicações nas práticas pedagógicas dos profissionais, a abordar os conteúdos associando-os a situações e problemas presentes no quotidiano; prever a experimentação de técnicas, instrumentos e formas de trabalho diversificados; organizar e desenvolver atividades cooperativas de aprendizagem e promover atividades que permitam ao aluno fazer escolhas, confrontar pontos de vista e resolver problemas.

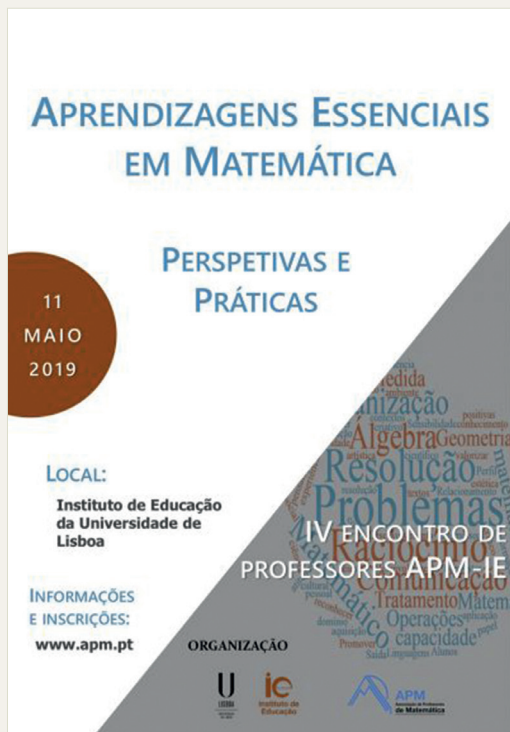
Também quanto aos professores de matemática, estes desafios implicam (re)pensar as suas práticas e estabelecer conexões entre disciplinas e entre as diferentes aprendizagens do espaço disciplinar. Implicam, ainda, uma prática centrada nos alunos, onde a diferenciação pedagógica assume um papel preponderante para a educação inclusiva. Tal pressupõe diversificar o tipo de tarefas e acompanhar as progressões de aprendizagens de todos e de cada aluno, desafiando-os ao propor tarefas ricas do ponto de vista matemático e desafiantes do ponto de vista cognitivo. De modo à explicitação do que é esperado de cada aluno, importa desenvolver práticas de avaliação integradas e coerentes com a prática letiva, onde se inclui a diversificação de instrumentos de avaliação de e para as aprendizagens, sendo a natureza formativa da avaliação fundamental.

Aos professores é pedida uma prática pedagógica mais desafiante e complexa, que importa desenvolver em dinâmicas colaborativas, dada a natureza dos desafios trazidos pelos documentos em vigor. Neste processo, importa nunca perder de vista as razões pedagógicas inerentes e que se consubstanciam na promoção de melhores aprendizagens, ou seja, que se expressam nas questões fundamentais: O que ensinar especificamente e de modo articulado com outras disciplinas e com o contexto local? Como ensinar para que os alunos aprendam melhor? Onde? Com quem? Quem envolver? Como avaliar? O que avaliar? Avaliar para quê?

Neste quadro as opções de cada organização e/ou professor(es) visam sempre a melhoria das aprendizagens de todos e de cada um dos alunos e esse deverá ser o grande propósito da Escola!

NADIA FERREIRA

DIREÇÃO-GERAL DA EDUCAÇÃO



O IV encontro de professores APM-IE vai realizar-se no dia 11 de maio de 2019 no **Instituto de Educação da Universidade de Lisboa**.

Tem como tema de reflexão e debate **Aprendizagens Essenciais em Matemática — perspectivas e práticas.**

Mais informações em:

<https://www.apm.pt/>

XXXV PROFMAT

O XXX SIEM e o XXXV ProfMat realizam-se este ano na cidade de **Castelo Branco** na **Escola Secundária Amato Lusitano**.

A Direção da APM, ouvidas as comissões do ProfMat e SIEM, o GTI e o Conselho Nacional, decidiu que, em 2019, o SIEM e o ProfMat se realizarão em **julho nos dias;**

10 e 11 (SIEM) e

11, 12 e 13 (ProfMat).

Mais informações em:

<https://www.apm.pt/>



Problemas de Fermi: uma oportunidade para a interdisciplinaridade na aula de matemática

NÉLIA AMADO

SUSANA CARREIRA

Os problemas de Fermi, embora pouco conhecidos em Educação Matemática, constituem uma excelente oportunidade para promover o desenvolvimento de diversas competências enunciadas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al. 2017).

Neste artigo, damos a conhecer a origem dos Problemas de Fermi, a sua importância no ensino e aprendizagem da matemática e, por fim, apresentamos um breve relato da resolução de alguns Problemas de Fermi por alunos do 2.º e 3.º ciclo do ensino básico, na disciplina de matemática.

OS PROBLEMAS DE FERMI

Quem foi Enrico Fermi?

Enrico Fermi (1901-1954) foi um dos grandes físicos do século XX. Nasceu e estudou em Itália, tendo iniciado a sua carreira como professor de matemática e física na Universidade de Roma. Apenas com 37 anos foi galardoado com o Prémio Nobel da Física. Como professor, ficou conhecido pelo tipo de problemas que apresentava aos seus alunos para os preparar para o trabalho experimental. Fermi propunha frequentemente problemas de estimativa para mostrar o poder do pensamento dedutivo e cultivar a ideia de que se podem simplificar processos a partir do raciocínio (Albarracín, 2017).

Em 1939, Fermi emigra para os Estados Unidos da América e os Problemas de Fermi, pelo seu potencial, tornam-se uma tradição em diversas faculdades americanas. Atualmente, existem nos EUA diversas competições de resolução de Problemas de Fermi, além de serem frequentemente utilizados em entrevistas de emprego para empresas na área das tecnologias.

EM QUE CONSISTEM OS PROBLEMAS DE FERMI?

Não é fácil encontrar uma definição para os problemas de Fermi; podemos dizer que são essencialmente problemas de cálculo para os quais não existe uma resposta única, mas antes uma solução aproximada e razoável. Arleböck (2009) considera que os Problemas de Fermi são problemas abertos, não padronizados,

que exigem que os alunos estabeleçam suposições sobre a situação problemática colocada e que estimem quantidades relevantes antes de se envolver em cálculos.

O exemplo mais conhecido de um Problema de Fermi está relacionado com a vida pessoal de Fermi quando o mesmo se mudou para Chicago. As várias histórias em torno deste problema referem que, uma certa noite, ao chegar a casa, a mulher de Fermi lhe pediu para encontrar um afinador de piano para afinar o seu instrumento musical. Fermi terá de imediato colocado a questão: *Quantos afinadores de piano haverá em Chicago?*

Para chegar a uma resposta é necessário estabelecer algumas conjecturas que exigem um conhecimento do contexto do problema. Uma solução típica consiste, por exemplo, em multiplicar uma série de estimativas, adequadas e realistas, que nos permitam encontrar uma resposta desejavelmente próxima do valor real. Existem várias resoluções deste problema atribuídas a Fermi que diferem entre si apenas nos valores estimados. A seguinte é uma dessas resoluções.

Consideremos:

- População de Chicago: 3 milhões de pessoas
- Existem 2 pessoas em cada casa
- 1 em cada 20 casas tem um piano
- 1 piano é afinado uma vez por ano
- São necessárias 2 horas para afinar um piano
- Cada afinador trabalha 8 horas por dia, 5 dias por semana e 50 semanas por ano.

Partindo destas suposições e estimativas, basta calcular o número de afinações a realizar por ano, ou seja,

$(3\,000\,000 \text{ pessoas} / 2 \text{ pessoas por casa}) \times (1 \text{ piano} / 20 \text{ casas})$
 $1 \text{ afinação por ano} = 75\,000 \text{ afinações por ano}$

Por outro lado,

$(50 \text{ semanas} \times 5 \text{ dias} \times 8 \text{ horas}) / (2 \text{ horas por piano}) = 1\,000$
horas disponíveis

A estimação final, será, assim: $75\ 000 / 1\ 000 = 75$ afinadores de piano.

Não se sabe ao certo se este valor encontrado por Fermi era realmente próximo do valor existente à data. Ao longo dos anos, vários investigadores têm procurado validar a estimativa apresentada por Fermi. Seguindo o processo anteriormente descrito e com os dados de 2009, foi obtida uma estimativa de 225 afinadores de piano em Chicago, sendo que os dados oficiais indicavam 290 profissionais registados. Conclui-se assim que estimativa encontrada por Fermi não devia estar muito longe da realidade.

CARACTERÍSTICAS DOS PROBLEMAS DE FERMI

Årlebäck (2011) é um dos investigadores que tem feito vários estudos em educação matemática relacionados com a introdução de problemas de Fermi. Considera, em particular, que os problemas de Fermi podem ser vistos e tratados como uma espécie particular de problemas de modelação, ainda que esta seja uma posição geradora de alguma controvérsia. Para alguns autores que investigam questões relativas ao processo de modelação matemática, faltam nestes problemas alguns elementos específicos da modelação, designadamente o facto de não se ver claramente qual é o modelo matemático em causa e que realidade ele descreve e também nem sempre os resultados atingidos poderem ser efetivamente confrontados com o real e, consequentemente, validados. Em todo o caso, Årlebäck enuncia um conjunto de características presentes nos problemas de Fermi, que os tornam interessantes e merecedores de atenção, na educação matemática:

- São acessíveis e podem ser abordados por todos os alunos, individualmente ou em um grupo;
- Podem ser resolvidos em diferentes níveis de escolaridade, com diferentes níveis de complexidade;
- Não exigem conhecimentos matemáticos especializados;
- Devem ser baseados em situações do mundo real que façam sentido para os alunos;
- Exigem a recolha e tratamento de informação relevante e o estabelecimento de relações entre condições e elementos da realidade;
- Como problemas abertos que são, não existe à partida uma estratégia ou um procedimento específico para os abordar, pelo que os alunos são desafiados a encontrar uma estratégia, desenvolvendo uma diversidade de competências ao trabalharem sobre o problema;
- A não existência de dados numéricos na formulação do problema, promove a necessidade de fazer estimativas razoáveis;

- São problemas que favorecem a discussão em torno de diferentes estratégias e soluções encontradas.

OS PROBLEMAS DE FERMI NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No documento o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al. 2017) é recomendado que, desde os primeiros anos, os alunos sejam desafiados com situações problemáticas do seu quotidiano ou presentes no meio sociocultural e geográfico, recorrendo para tal a materiais e recursos diversificados. É igualmente reconhecido como relevante o recurso a experiências de aprendizagem que lhes permitam procurar padrões (numéricos, figurais, etc.), formular conjecturas sobre o comportamento de fenómenos e as propriedades dos objetos, assim como argumentar sobre a sustentabilidade das suas conjecturas, estimar resultados, entre outros. O mesmo documento reconhece a necessidade de alterações das práticas pedagógicas e didáticas de forma a adequar a globalidade da ação educativa às finalidades do perfil de competências dos alunos (p. 31). Ao analisarmos as características dos problemas de Fermi e o documento Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, facilmente constatamos que a resolução deste tipo de problemas parece convergir para o desenvolvimento das competências desejadas. De facto, na resolução de um problema de Fermi é necessário mobilizar competências como:

- i. utilizar e dominar instrumentos diversificados para pesquisar, descrever, avaliar, validar e mobilizar informação, de forma crítica e autónoma, verificando diferentes fontes documentais e a sua credibilidade;
- ii. interpretar informação, planear e conduzir pesquisas;
- iii. pensar de modo abrangente e em profundidade, de forma lógica, observando, analisando informação, experiências ou ideias, argumentando com recurso a critérios implícitos ou explícitos, com vista à tomada de posição fundamentada;
- iv. estabelecer relações entre conhecimentos, emoções e comportamentos;
- v. compreender os equilíbrios e as fragilidades do mundo natural na adoção de comportamentos que respondam aos grandes desafios globais do ambiente; (Martins, 2017)

ALGUNS PROBLEMAS DE FERMI PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Há um número infindável de situações, curiosidades e interrogações que se podem converter em verdadeiros problemas de Fermi. Apresentamos aqui uma curta amostra de situações:

*Que quantidade de água bebe uma pessoa ao longo da sua vida?
Que quantidade de água consome uma família durante um ano?*

Quantas garrafas de plástico são descartadas por uma família, por mês?

Quantas pessoas poderiam ficar abrigadas no ginásio da tua escola em caso de catástrofe?

Quantas pessoas poderiam ser abrigadas em todas as salas de aula da escola?

Quantas pessoas poderiam ser abrigadas em toda a escola se fossem usadas tendas e pudessem aproveitar-se os espaços exteriores?

Quanto minutos passa um aluno da turma ao telemóvel durante um mês?

.....

São apenas alguns exemplos de problemas de Fermi que podem ser propostos a alunos de qualquer ano de escolaridade, cuja complexidade de resolução depende naturalmente de diversos fatores, como o nível de escolaridade, o tempo disponível para a resolução do problema, as áreas disciplinares envolvidas, a conjugação de trabalho fora da sala de aula e na sala de aula, etc.

Estes e outros problemas de Fermi foram trabalhados por professores do ensino básico no âmbito de uma oficina de formação. Todas as tarefas propostas na formação foram implementadas pelos professores participantes nas suas turmas e a resolução foi posteriormente discutida numa sessão de formação. Importa sublinhar que os Problemas de Fermi foram trabalhados nas últimas sessões realizadas, o que limitou o tempo que os professores puderam oferecer aos alunos das suas turmas para trabalharem nos respetivos problemas. A seleção de diversos problemas em torno do consumo da água foi essencialmente motivada pela seca severa que se registava em Portugal no período em que decorreu a ação. O tema era, pois, da maior atualidade e interesse para todos os cidadãos. Este tipo de problemas pode ser proposto, como já foi salientado, a alunos de qualquer nível de ensino e em qualquer momento do processo de ensino e aprendizagem. Um único problema pode envolver números e operações, mas também geometria e medida ou, ainda, organização e tratamento de dados. Por outro lado, a natureza dos próprios problemas envolve necessariamente conhecimentos das mais diversas áreas. Na resolução dos problemas que apresentamos em seguida é evidente a presença de vários temas matemáticos.

BREVES EXEMPLOS DE RESOLUÇÕES DE ALUNOS DO ENSINO BÁSICO

Apresentamos em seguida resoluções de alguns dos problemas de Fermi propostos pelos formandos da oficina de formação aos seus alunos.

Quantas garrafas de plástico são descartadas por uma família, por mês?

Este problema foi proposto por uma professora do 2.º ciclo, com o objetivo de promover a articulação entre as três disciplinas que ela própria leciona: matemática, ciências naturais e formação pessoal e social.

A primeira dificuldade que os alunos manifestaram foi com a interpretação da tarefa. De facto, esta é uma dificuldade que deve ser prevista quando os alunos se deparam com um problema de Fermi pela primeira vez. A ausência de dados numéricos neste tipo de problema gera uma certa surpresa e provoca dificuldade já que o aluno, de imediato, não consegue mobilizar algum tipo de conhecimento matemático estudado na aula para avançar na resolução. Esta dificuldade era esperada pela professora que começou por desafiar os vários grupos a discutirem o assunto e a formularem algumas conjecturas de modo a planificarem o processo de recolha e tratamento de informação. Na discussão inicial, os alunos começaram por apresentar algumas questões:

Mas quantas pessoas colocamos?

E as garrafas? São grandes ou pequenas?

E como sabemos quantas pessoas tem cada família?

Perante estas questões dos alunos, foi tomada a opção de iniciar uma recolha de dados nos respetivos contextos familiares. Cada aluno recolheu dados em sua casa com a ajuda dos pais. Na primeira fase, foi preciso saber que garrafas de plástico eram consumidas em casa, para fazer uma estimativa da quantidade de garrafas que cada agregado familiar descartava mensalmente. Rapidamente os alunos descobriram que o uso de garrafas de plástico ultrapassava largamente as garrafas de água ou de refrigerantes. Também se aperceberam imediatamente de que as garrafas tinham capacidades distintas, formas distintas e até pesos diferentes. A seguir, mostra-se o registo de um aluno relativamente às garrafas e recipientes de plástico que em sua casa eram utilizados por mês.

garrafas de água - 120 sumos - 3 Total - 144 / mês
garrafas - 8 azule - 1
shampoo - 2 detergentes - 3
amacorador - 3 gel de banho / mãos - 4

A partir desta recolha de dados, os alunos procederam à organização e tratamento da informação recolhida. Também foi necessário mobilizar alguns tópicos relacionados com os números e operações. No entanto, a discussão foi permeada por questões relacionadas com a água, os rios e oceanos, a poluição provocada pelos plásticos na natureza e a necessidade de preservar a água. No final, abriram-se as portas da sala de aula para mostrar à comunidade o trabalho dos alunos e sensibilizar alunos e professores para esta temática.

Quanto garrafas de água consome uma família por mês?

Para a resolução deste problema, os alunos de uma turma de 8.º ano começaram por registar o número de garrafas de água

consumidas diariamente por cada elemento do seu agregado familiar. Em seguida, procederam à organização e tratamento dos dados recolhidos, seguindo diferentes estratégias, uma das quais se ilustra a seguir.

Garrafas de plástico:				
1. Quantas garrafas de plástico são consumidas por uma família por mês?				
(Dia)	pai	mãe	irmão	irmão
	4	3	1	2
$\Rightarrow 10$				
(Mes) $10 \times 30 = 300$				
P: São consumidas numa família por mês 300 garrafas de plástico. Notação científica $= 3 \times 10^2$				

Após chegarem a uma estimativa do número de garrafas de água consumidas pelas respetivas famílias, pesquisaram dados sobre a população do Algarve para estimarem um valor para o número de garrafas consumidas nesta região, recorrendo à notação científica que tinha sido estudada recentemente, para apresentar os seus resultados.

3 Garrafas: 8.
População do Algarve (2012): 444390.
Mês: 31 dias.
$8 \times 444390 = 3,555,120$
$3,555,120 \times 31 = 110,208,720$
$110,208,720 = 1,10208720 \times 10^8$

Durante a análise dos dados os alunos tomaram consciência de que a água que consumiam não estava de acordo com o recomendado. Outros, ao perceberem realmente a quantidade de garrafas que diariamente descartavam, defenderam veementemente a sua reutilização.

A resolução deste problema, na aula de matemática, não desenvolveu apenas competências relacionadas com o saber científico, técnico e tecnológico. Aspetos relacionados com a saúde e o bem-estar ou com o pensamento crítico e a cidadania estiveram muito presentes.

Que quantidade de água consome uma pessoa ao longo da sua vida?

À semelhança dos problemas anteriores, também este problema permitiu abordar uma diversidade de temas matemáticos de uma forma contextualizada. Os alunos trabalharam, em simultâneo, números e operações, geometria, e organização e tratamento de dados. Mas a discussão que se gerou criou pontes para outras áreas disciplinares, em particular, para as ciências naturais e geografia.

Os alunos começaram por investigar a esperança média de vida e estabelecer o consumo diário de água recomendado, para calcularem a quantidade consumida por uma pessoa ao longo da sua vida. Este estudo permite estabelecer conexões importantes, por exemplo, com biologia, economia ou geografia.

	Mulheres	Homens
Esperança Média de vida	83 anos	77 anos
Consumo diário de água	1,5 l	1,5 l

Mulheres:

83 anos ≈ 30295 dias

1 dia $\approx 1,5$ l

$30295 \approx x$

$x \approx 45442,5$ litros

Homens:

77 anos ≈ 28105

1 dia $\approx 1,5$ l

$28105 \approx x$

$x \approx 42157,5$ litros



	Mulheres e Homens
Litros de água usados por mês	4,6 m3

1 mês $\approx 4,6$ m3 1 ano ≈ 12 meses

	Mulheres	Homens
Litros de água usada na higiene durante toda a vida	4581,6 m3	4250,4 m3

COMENTÁRIOS FINAIS

Partindo destas situações, e de acordo com as possibilidades existentes, o professor pode criar diversas oportunidades de desenvolvimento de competências fundamentais, não só no âmbito da matemática mas envolvendo outras disciplinas.

Simultaneamente, trabalhar em problemas de Fermi cria boas oportunidades para atividades interdisciplinares. É praticamente inevitável enveredar por campos exteriores à matemática perante um problema de Fermi. Por se tratar de um tipo de problemas que se referem a questões do mundo real e que implicam analisar, investigar e compreender aspetos desse mundo, conduzem rapidamente à necessidade de procurar informações, fazer interpretações e identificar fatores essenciais e determinantes para tratar a questão colocada, obter dados, considerar conceitos e processos de outras áreas de conhecimento, bem como assumir pressupostos e admitir determinadas condições como razoáveis.

Trata-se ainda de problemas que estão ao alcance de todos os alunos e que, de uma forma ou de outra, estão próximos de situações quotidianas e comuns na vida das pessoas e das sociedades. A questão do consumo de água, por exemplo, é cada vez mais um tema urgente a tratar na sala de aula, de matemática e não só. É, aliás, um tema que nos pode levar a uma grande diversidade de problemas e questões, todas elas de atualidade muito evidente. Veja-se, o recente artigo do jornal Público, de 24 de Agosto de 2018, intitulado “Temos de aprender a consumir menos água”, escrito por Catarina Albuquerque (<https://www.publico.pt/2018/08/24/sociedade/noticia/a-nossa-relacao-com-a-agua-vai-mudar-muito-1841846>). Mas outros assuntos podem estar igualmente na ordem do dia, em dado momento. Quando esta oficina de formação foi proposta, os professores trabalharam entusiasticamente sobre uma tarefa em que, por

hipótese, a sua escola, localizada em Portimão, seria usada pelos serviços de proteção civil, Cruz Vermelha e Bombeiros, para albergar sobreviventes de uma catástrofe. A discussão, as ideias, as estratégias usadas, a procura das plantas da escola, a análise da geometria dos espaços, etc., mostraram claramente a riqueza e as potencialidades matemáticas da tarefa. O grande desastre que foi o incêndio recente na serra de Monchique veio tragicamente tornar esta questão muito atual e muito real. Muitas pessoas retiradas das suas casas e sobreviventes deste incêndio foram acolhidas na Escola EB 2/3 de Monchique. Mas também foi usado o Portimão Arena como abrigo para muitos desalojados do incêndio de Monchique. Pela forma como a matemática ali parece despontar, é muito sugestiva a descrição feita por João Porfírio, no Jornal Observador de 9 de agosto de 2018:

“400 colchões. 400 jogos de cama. 400 toalhas de banho. 400 cadeiras pretas. Todos os colchões colocados à mesma distância uns dos outros, as cadeiras todas do mesmo lado. A simetria no interior do pavilhão da Portimão Arena era quase perfeita e contrastava com a desorganização e mesmo o caos aparente do combate às chamas que se travava a poucos quilómetros dali, entre Monchique e Silves.” (Retirado de <https://observador.pt/especiais/monchique-a-vida-no-pavilhao-que-foi-casa-para-144-pessoas-enquanto-a-serra-ardia/>).



Foto do Jornal Observador, de 9 de agosto de 2018, disponível em: <https://observador.pt/especiais/monchique-a-vida-no-pavilhao-que-foi-casa-para-144-pessoas-enquanto-a-serra-ardia/>

Este mês de agosto foi, por certo, um mês com notícias e acontecimentos que evocaram imediatamente alguns problemas de Fermi. Mas os problemas de Fermi estão aí para serem formulados e resolvidos em qualquer mês e em qualquer dia. Parece-nos importante que cheguem proveitosamente à aula de matemática e também a outras aulas, como base de projetos de interdisciplinaridade.

Referências:

Albaracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2). Doi: 10.4995/msel.2017.7707.

Ärlebäck, J. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331-364.

Ärlebäck, J. (2011). Exploring the solving process of groups solving realistic Fermi problem from the perspective of the anthropological theory of didactics. In M. Pytlak, E. Swoboda, & T. Roland (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the European society for research in mathematics education*, (pp. 1010-1019), Rzeszów: University of Rzeszów.

Martins, G. O. (Coordenador) (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação - DGE.

NÉLIA AMADO

FCT, UNIVERSIDADE DO ALGARVE

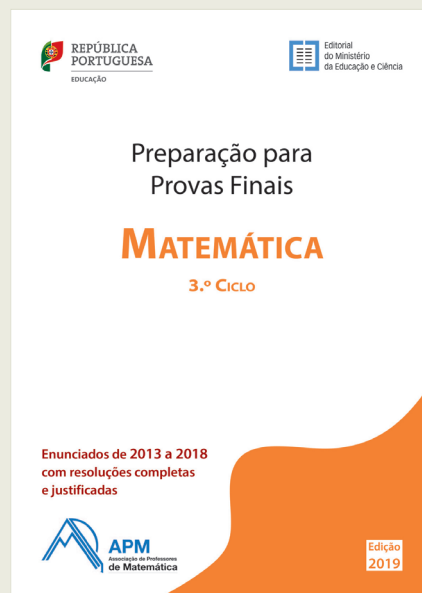
UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

SUSANA CARREIRA

FCT, UNIVERSIDADE DO ALGARVE

UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

APM



Preparação para Provas Finais de Matemática 3.º Ciclo

Enunciados 2013-2018 com resoluções completas

Já está disponível a versão atualizada desta publicação, com resoluções completas e justificadas, elaborada por equipas da Associação de Professores de Matemática.

À venda também na Loja da APM.

Venda ao público: **13,90€;**

Preço de sócio: **12,00€**

Aspetos geométricos da projeção cilíndrica na cartografia

ANA PAULA JAHN

VINCENZO BONGIOVANNI

Desde os primórdios da civilização, os mapas aparecem como uma forma de comunicação entre pessoas. Hoje eles estão presentes em toda parte: na Internet, no telemóvel, em GPS, jornais e livros didáticos, entre outros. Neste artigo, apresentaremos alguns aspectos geométricos da cartografia – ou a arte de fazer mapas – que, em geral, não são trabalhados nas aulas de geografia, nem de matemática.

A grande dificuldade apresentada na construção de um mapa é o facto de uma superfície esférica não poder ser representada em um plano sem que haja alguma deformação. Para a construção de um mapa é necessário estabelecer correspondências entre os pontos da superfície esférica que representa a Terra e pontos de uma superfície plana. Isto pode ser feito de diversas maneiras: são os diferentes sistemas de projeção. Cada sistema privilegia certos aspectos a serem mantidos ou conservados. Foi demonstrado pelo matemático Euler que nenhum sistema de projeção conserva a distância entre dois pontos quaisquer de uma superfície esférica (Ávila, 2008). Sabe-se também que nenhum sistema de projeção conserva simultaneamente ângulos e áreas. Neste texto, nos limitaremos a apresentar alguns aspectos geométricos de três tipos de projeções cilíndricas. Apresentaremos um exemplo da projeção cilíndrica clássica que distorce ângulos e áreas, da projeção cilíndrica de Mercator que conserva ângulos e da projeção cilíndrica de Lambert que conserva áreas.

PROJEÇÃO CILÍNDRICA CLÁSSICA

Consideremos um cilindro tangente a uma superfície esférica que representa o globo terrestre. Fixemos o olho de um observador no centro O da esfera. Ao visar um ponto P da superfície esférica, a semirreta intersecciona a superfície cilíndrica num ponto Q (ver figura 1). Após projetar todos os pontos da superfície esférica na superfície cilíndrica, essa superfície é planificada, isto é, *corta-se* a superfície cilíndrica ao longo de uma geratriz e, a seguir, ela é *desenrolada*. Nessas condições, observa-se que, paralelos – secções da superfície esférica por planos paralelos à linha do Equador – são transformados em circunferências na superfície cilíndrica e meridianos são transformados em geratrizes do cilindro.

Para construir o quadriculado que representa um sistema de projeção cilíndrica clássica, procedemos da seguinte maneira:

para cada ponto $P(\theta, \lambda)$, onde θ representa a latitude e λ a longitude, considera-se o ponto $Q(x, y)$. A figura 2 ilustra o procedimento para determinar as coordenadas x e y .

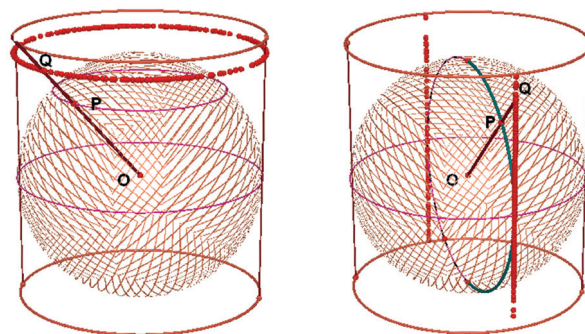


Figura 1. Projeção de pontos da superfície esférica na superfície cilíndrica

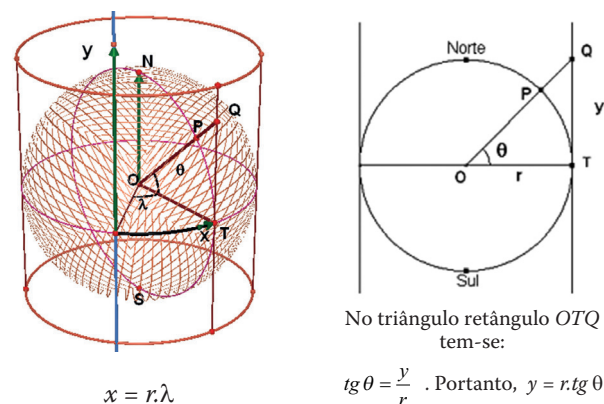


Figura 2. Determinação de coordenadas em um sistema de projeção cilíndrica clássica

No plano, definimos um referencial, de modo que o eixo Ox coincida com a linha do Equador e o eixo Oy coincida com o meridiano de Greenwich. No eixo x marcamos um segmento do comprimento do Equador que é 2, de modo que os pontos extremos do segmento sejam $(-\pi r, 0)$ e $(\pi r, 0)$. A abscissa de um ponto será dada por $x = r\lambda$ (fórmula do comprimento de um arco), com λ em radianos e a ordenada por $y = r.tg \theta$, onde θ é a latitude. Como o ângulo que cada paralelo faz com cada meridiano é reto, as retas que representam os paralelos são perpendiculares às retas que representam os meridianos.

Desse modo, as imagens dos meridianos e dos paralelos formam um quadriculado no plano (figura 3).

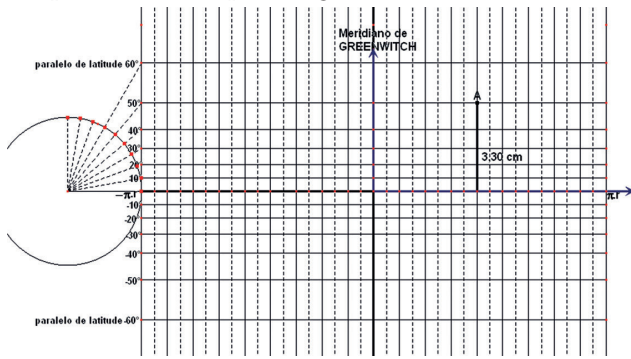


Figura 3. Construção de um ponto do mapa da projeção cilíndrica clássica

Por medição direta no mapa, teremos para o ponto A , que tem latitude 50° e longitude 80° , o valor de y aproximadamente igual a 3,3 cm.

Se utilizarmos a fórmula acima, $y = r \operatorname{tg} \theta$, com $r = 2,77$, teremos $y = 2,77 \operatorname{tg} 50^\circ \approx 3,30$ cm. A projeção cilíndrica clássica distorce distâncias, ângulos e áreas. No entanto, ela conserva as distâncias na linha do Equador.

PROJEÇÃO CILÍNDRICA DE MERCATOR

Em 1569, Gerhard Kremer, chamado de Gerhard Mercator, fez uma modificação na projeção cilíndrica clássica para que o formato dos continentes pudesse ser mantido, ou seja, para que os ângulos fossem conservados. De facto, essa projeção conserva ângulos, mas não áreas.

Seja D um ponto da esfera de centro O com coordenadas (θ, λ) onde θ representa a latitude e λ a longitude. Um arco AB está contido na linha do Equador e um arco CD está contido num paralelo de latitude θ de modo que A e C estejam no mesmo meridiano e B e D estejam em outro meridiano. Na figura 4, pode-se observar que $\cos \theta = \frac{r}{R}$, onde r é o raio do círculo que contém o arco CD e R é o raio da esfera. Conclui-se que $r = R \cos \theta$. O comprimento do arco AB é $R\lambda$ e o comprimento do arco CD é $r\lambda$. Aqui, indicaremos o comprimento de um arco AB por $\widehat{AB}$. Portanto, $\widehat{AB} = R\lambda$ e $\widehat{CD} = r\lambda$. Mas, $\widehat{CD} = r\lambda = \lambda \cdot R \cos \theta = \widehat{AB} \cos \theta$, ou seja, os arcos compreendidos entre os dois meridianos têm como comprimento a medida do arco AB vezes o cosseno da latitude. Quanto maior a latitude θ , menor o comprimento do arco CD .

A ideia de Mercator, apresentada no artigo do Ávila (2008), resumidamente, é a seguinte: para preservar os ângulos no quadriculado é necessário que a partir de um ponto qualquer do quadriculado, a variação sofrida no meridiano seja a mesma que a variação sofrida no paralelo. Mas no quadriculado, os paralelos têm comprimentos iguais (figura 5).

Portanto, os segmentos correspondentes aos arcos CD e AB serão $C'D'$ e $A'B'$ com $\overline{C'D'} = \overline{A'B'}$. Mas, o comprimento do

segmento $A'B'$ é igual ao comprimento do arco AB , ou seja, $\overline{A'B'} = \widehat{AB}$. Portanto, $\widehat{CD} = \widehat{AB} \cos \theta = \overline{A'B'} \cos \theta = \overline{C'D'} \cos \theta$.

Donde se conclui que $\overline{C'D'} = \frac{\widehat{CD}}{\cos \theta} = \widehat{CD} \sec \theta$. Isto significa que a variação num paralelo depende somente do valor da secante da latitude.

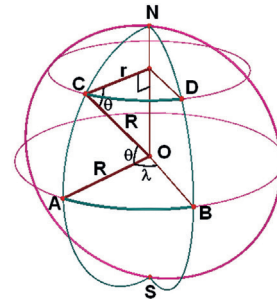


Figura 4. Arcos compreendidos entre dois meridianos

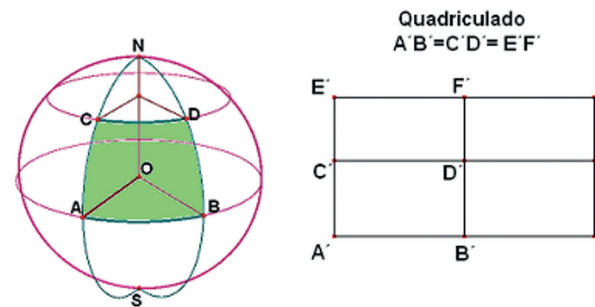


Figura 5. Passagem do quadrilátero esférico $ABDC$ para o quadriculado

Como proceder para ter a mesma variação num meridiano? Usando a linguagem do cálculo diferencial, devemos impor que $y' = R \cdot \sec \theta$, ou seja, y é o produto do raio pelo integral da secante de θ . Conclusão: a projeção cilíndrica de Mercator transforma o ponto de coordenadas (θ, λ) no ponto (x, y) de modo que $x = R\lambda$, com λ em radianos e $y = R \cdot \ln \left(\frac{1}{\cos \theta} + \operatorname{tg} \theta \right) = R \cdot \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$ onde R é o raio da esfera.

Portanto, para obter as retas horizontais do quadriculado, devemos aplicar a fórmula acima para cada latitude.

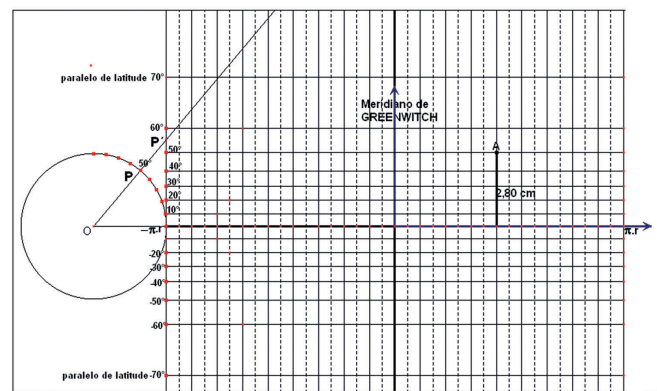


Figura 6. Construção de um ponto do mapa da projeção cilíndrica de Mercator

Comparando as ordenadas da projeção cilíndrica clássica com a projeção cilíndrica de Mercator, vemos que há um decréscimo nessa última. Observa-se no mapa acima (figura 6), que a semirreta que passa por um ponto da esfera de latitude 50° , intersesta a reta num ponto P' acima da ordenada no mapa de Mercator.

Sendo A um ponto da superfície esférica de latitude 50° e longitude 80° , para obter as suas coordenadas no mapa, devemos utilizar a fórmula acima, ou seja, sendo $R = 2,77$ o raio da esfera, a ordenada do ponto A será

$$y = R \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = 2,77 \cdot \ln \operatorname{tg} (45^\circ + 25^\circ) = 2,77 \cdot \ln \operatorname{tg} (70^\circ) \approx 2,8.$$

Podemos observar que na projeção cilíndrica clássica, a ordenada do ponto A é 3,3 cm enquanto na de Mercator é 2,8 cm (ambas as medidas aproximadas). É esse decréscimo que preserva os ângulos e, portanto, os formatos das figuras. Para altas latitudes, a projeção de Mercator apresenta distorção.

PROJEÇÃO DE LAMBERT

É uma projeção introduzida em 1772 por Lambert e que preserva áreas. É uma projeção pouco utilizada na construção de mapas e sua relevância deve-se ao facto de ter servido de modelo para a conceção de outras projeções. Ela baseia-se num resultado da obra de Arquimedes que mostra que a superfície esférica tem a mesma área que a superfície lateral de um cilindro que a circunscreve.

Para cada ponto P da superfície esférica de centro O , considere o plano que contém o eixo do cilindro e o ponto P . Seja T a interseção desse plano com a linha do Equador. Nesse plano, pelo ponto P traça-se uma paralela a semirreta OT . Essa reta intersesta a superfície cilíndrica no ponto Q . Esse é o procedimento geométrico para obter as retas horizontais do quadriculado.

A projeção cilíndrica de Lambert transforma o ponto P (θ, λ) onde θ representa a latitude e λ a longitude, no ponto Q (x, y). A figura 7 ilustra o procedimento para a determinação de x e y .

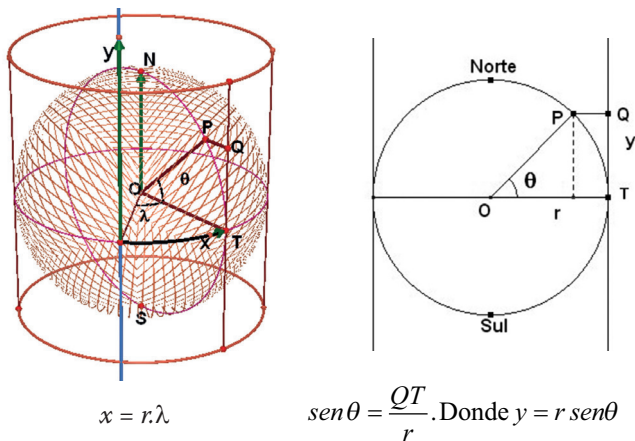


Figura 7. Determinação de coordenadas em um sistema de projeção cilíndrica de Lambert

No plano, definimos um referencial, de modo que o eixo Ox coincide com a linha do Equador e o eixo Oy coincide com o meridiano de Greenwich. Teremos $x = r \cdot \lambda$ e $y = r \cdot \operatorname{sen} \theta$, sendo r o raio da esfera e a longitude λ em radianos (figura 8).

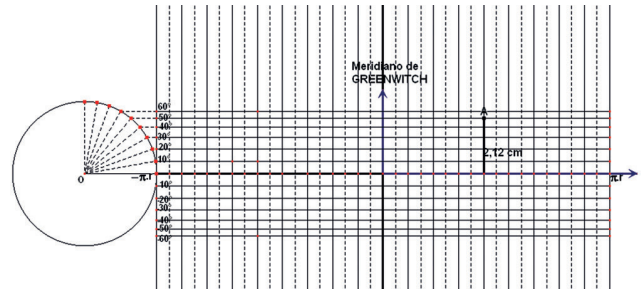


Figura 8. Construção de um ponto do mapa da projeção cilíndrica de Lambert

O ponto A tem latitude 50° e longitude 80° . Sendo o raio da circunferência abaixo, a ordenada do ponto A pode ser obtida pelo procedimento indicado acima ou pode ser calculada pela fórmula $y = r \cdot \operatorname{sen} \theta$. Nesse caso, para $\theta = 50^\circ$ teremos: $y = 2,77 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \approx 2,12$.

Arquimedes, no seu livro *A esfera e o cilindro I*, nas proposições 42 e 43, demonstra que a área da calota esférica é equivalente à de um círculo cujo raio é igual ao segmento determinado pelo polo e um ponto qualquer da circunferência da base.

Em linguagem atual, ele afirma que a área da calota é igual a $\pi \cdot x^2$ onde $x = PN$.

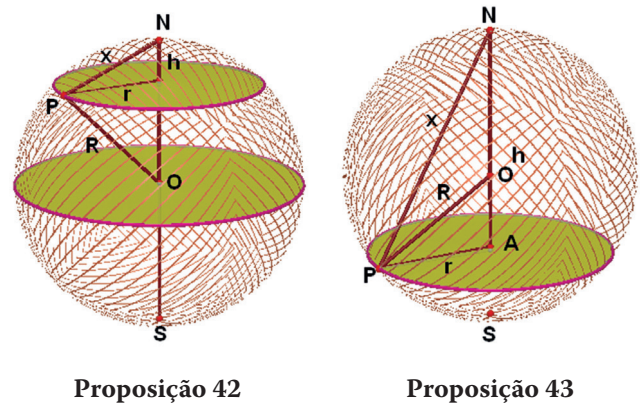


Figura 9. Proposições da obra de Arquimedes

É fácil mostrar que esse resultado é equivalente a $2\pi R h$, onde R é o raio da esfera e $h = NA$. De facto, na primeira ilustração da figura 9, temos: $x^2 = r^2 + h^2$ e $R^2 = r^2 + (R-h)^2$. Das igualdades resulta $x^2 = 2Rh$.

O resultado vale também para a segunda ilustração da figura 9. De facto, temos: $x^2 = r^2 + h^2$ e $R^2 = r^2 + (h-R)^2$. Das igualdades resulta $x^2 = 2Rh$.

A partir desse resultado, podemos deduzir que a área de uma zona esférica – superfície da esfera compreendida entre dois planos paralelos – é também igual a $2\pi Rh$.

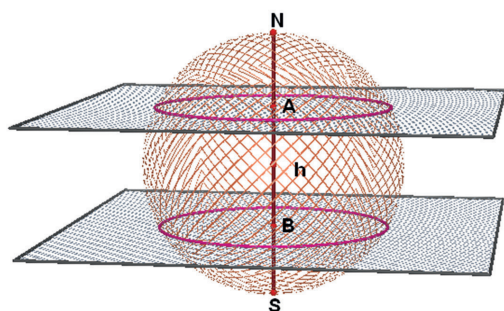


Figura 10. Área de uma zona esférica

Considere uma esfera de raio R inscrita em um cilindro. A área da superfície cilíndrica compreendida entre os dois planos paralelos é $2\pi Rh$ e a área da superfície esférica compreendida entre os dois planos paralelos é $2\pi Rh$. Portanto, a planificação da superfície cilíndrica conserva a área.

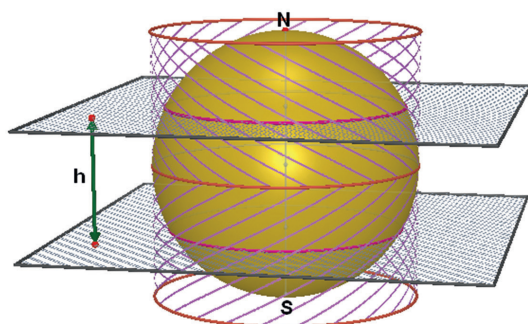


Figura 11. Superfície cilíndrica compreendida entre dois planos paralelos

Com o que foi exposto, pretendemos fornecer incentivos para que professores do Ensino Médio, no Brasil, ou do Secundário, em Portugal, e mesmo do Ensino Superior possam desenvolver propostas de trabalho interdisciplinar, em um contexto interessante e motivador: o da cartografia. Entendemos que esse tema, em torno da construção de sistemas de projeção, permite abordar diversos conceitos matemáticos no campo da geometria plana, espacial e esférica, da trigonometria, dentre outros, além de se relacionar com outros componentes curriculares, em especial com a geografia e a história. A título de ilustração, uma atividade interessante pode consistir em comparar mapas (atuais e antigos) elaborados a partir de diferentes sistemas de projeção, observando e analisando as propriedades que são ou não conservadas em cada caso e discutindo eventuais aspectos político-ideológicos que influenciaram a escolha de certos tipos de projeção para representar o globo terrestre ao longo dos tempos. É pertinente observar, por exemplo, as áreas da América

do Sul e da Groelândia na projeção de Mercator (figura 12) e atentar para os continentes que aparecem em destaque na projeção de Lambert (figura 13).

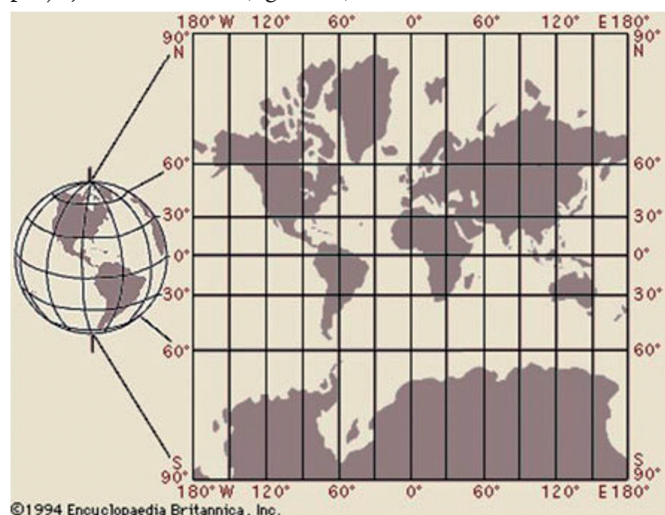


Figura 12. Projeção de Mercator

Fonte: <https://www.britannica.com/science/Mercator-projection> (último acesso: 12 set 2018)



Figura 13. Projeção de Lambert

Fonte: http://www.manifold.net/doc/mfd9/cylindrical_equal_area_projection.htm (último acesso: 12 set 2018)

Referência

Ávila, G. (2008). A Matemática e a Cartografia. *Revista do Professor de Matemática*, n.º 65, 4-11.

ANA PAULA JAHN

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, BRASIL

VINCENZO BONGIOVANNI

COLÉGIO UNIVERSITAS, SANTOS/SÃO PAULO, BRASIL

Adições Enigmáticas

PAULO AFONSO

JOSÉ FILIPE

NUNO SANTOS

ANA RITA BRANCO

Um dos educadores matemáticos mais desafiador ao raciocínio matemático no nosso país é o professor José Paulo Viana, que o digam as pessoas que têm tido o privilégio de ser impactadas com as suas propostas. Numa das suas mais recentes publicações no seio da APM, na Revista Educação e Matemática N.º 146, relativa ao trimestre janeiro, fevereiro e março de 2018, José Paulo Viana tece uma importante reflexão acerca da temática dos problemas, levantando um conjunto de oito questões, às quais deu resposta (Viana, 2018).

Uma das situações problemáticas abordadas pelo autor prendeu-se com uma adição enigmática, em que o leitor é desafiado a descobrir as parcelas da soma 2017, em que cada letra corresponde a um só algarismo e vice-versa:

$$\begin{array}{rcccc} & A & B & C & \\ & D & E & F & \\ + & G & H & I & \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 & \end{array}$$

Como auxílio à resolução deixou a sugestão de se ter em linha de conta o conhecimento matemático da prova dos nove para se descobrir qual seria o algarismo que não seria utilizado.

Esta situação poderia ser resolvida por tentativa e erro, podendo ou não demorar-se muito tempo no encontrar da respetiva solução. Contudo, a sugestão ou dica matemática por si apresentada (prova dos nove) é altamente útil no auxílio que poderá proporcionar na procura de uma solução, porventura, mais rápida e eficaz. De facto, as parcelas envolvem apenas nove dos dez dígitos que fazem parte do nosso sistema de numeração, pelo que há a necessidade de se descobrir qual o dígito que não é abrangido por estas parcelas.

A prova dos nove diz-nos que, no algoritmo da adição, ao adicionarmos os dígitos da soma, que neste caso é dez, dividindo por nove dá resto um. Logo a soma de todos os dígitos das parcelas, quando sujeita à mesma divisão, também tem de dar resto um. Sabemos que a soma dos dez dígitos é quarenta e cinco, pelo que se não se utilizar o dígito oito, a soma dos nove dígitos restantes será trinta e sete, sendo que esta soma dividida por nove dá, de facto, resto um. Assim sendo, fica descoberto

que o algarismo 8 não entra nesta adição enigmática.

Analisemos, agora, algumas possibilidades que existem de a soma ser 2017. Uma vez que o algarismo das dezenas é o 1, podemos concluir que o seu valor é o valor que resta na ordem das dezenas depois de ter sido transportada uma dezena desta ordem para a ordem seguinte - ordem das centenas. Isto implica que na ordem das centenas tenhamos de ter em conta este transporte. Para que a soma contemple 20 centenas e não podendo usar-se o dígito 8, admitimos a possibilidade de o 20 ser obtido, por exemplo, pela adição de 9 (A) + 7 (D) + 3 (G) + 1 (transporte). Ora na coluna das dezenas, onde sabemos que existe o 1, há três possibilidades de se obter esta soma: (a) 6 (B) + 4 (E) + 1 (H), (b) 5 (B) + 4 (E) + 2 (H) ou (c) 6 (B) + 5 (E) + 0 (H). Logo, existem, pelo menos, três possibilidades de se dar resposta a esta enigmática adição:

$$\begin{array}{rcccc} & A & B & C & & 9 & 6 & 5 & & 9 & 5 & 6 & & 9 & 6 & 4 \\ & D & E & F & & 7 & 4 & 2 & & 7 & 4 & 1 & & 7 & 5 & 2 \\ + & G & H & I & & + & 3 & 1 & 0 & + & 3 & 2 & 0 & + & 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 & & 2 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

Claro está que permutando os dígitos da coluna das unidades das parcelas, bem como os dígitos da coluna das dezenas das parcelas em cada um destes três casos, originará muitas mais possibilidades de solução deste desafio. A título de exemplo, apresentamos duas novas possibilidades:

$$\begin{array}{rcccc} & 9 & 6 & 5 & & 9 & 5 & 1 \\ & 7 & 1 & 0 & & 7 & 2 & 0 \\ + & 3 & 4 & 2 & + & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

Uma extensão deste desafio poderia ser descobrir qual a maior e a menor parcela. A maior parcela seria 975 e a menor seria 301. Vejamos possíveis exemplos:

$$\begin{array}{rcccc} & 9 & 7 & 5 & & 9 & 6 & 4 \\ & 6 & 3 & 2 & & 7 & 5 & 2 \\ + & 4 & 1 & 0 & + & 3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

Um estudo muito parecido a este, e que aconselhamos vivamente a sua leitura, é muito bem explorado por José Paulo Viana no seu livro intitulado “Uma Vida sem Problemas”, quando desafia os seus leitores com a seguinte situação: “Numa soma, cada letra representa um algarismo e todos os algarismos são diferentes. Nenhum número começa por 0. Existem várias soluções. Em qual delas o resultado da adição é menor? E qual é a maior soma possível” (Viana, 2012, p. 181).

$$\begin{array}{r} A \ B \ C \\ + \ D \ E \ F \\ \hline G \ H \ I \ J \end{array}$$

Voltando, contudo, à adição enigmática com que iniciámos esta reflexão, quais seriam as possíveis parcelas para que a soma pudesse ser o ano em que estamos (2018) ou 2019 ou 2020?

Fazendo-se um estudo semelhante à soma 2017 para a soma 2018, ao aplicar-se a prova dos nove ao algoritmo da adição, concluímos que a soma dos 9 dígitos usados nas parcelas deverá pertencer à classe de resto 2 quando dividida por 9. Ora, para que isto aconteça, não se poderá usar o dígito 7, pois a soma dos restantes nove dígitos dá 38, nove fora, 2. Eis uma possível solução para esta soma, não envolvendo o 7:

$$\begin{array}{r} 9 \ 6 \ 5 \\ 8 \ 4 \ 3 \\ + \ 2 \ 1 \ 0 \\ \hline 2 \ 0 \ 1 \ 8 \end{array}$$

Já para o caso de a soma ser 2019, a prova dos nove indica-nos um número da classe de resto 3, pelo que o algarismo que não se poderá usar é o 6. De facto, a soma dos restantes nove algarismos é 39. Ou seja, nove fora, 3. Vejamos uma possível solução, tendo em conta esta nova soma:

$$\begin{array}{r} 9 \ 7 \ 5 \\ 8 \ 3 \ 4 \\ + \ 2 \ 1 \ 0 \\ \hline 2 \ 0 \ 1 \ 9 \end{array}$$

Para a soma 2020 já será interessante propor uma solução baseada na observação das três soluções anteriores, que recordamos agora:

$$\begin{array}{r} 9 \ 6 \ 5 \\ 7 \ 4 \ 2 \\ + \ 3 \ 1 \ 0 \\ \hline 2 \ 0 \ 1 \ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \ 6 \ 5 \\ 8 \ 4 \ 3 \\ + \ 2 \ 1 \ 0 \\ \hline 2 \ 0 \ 1 \ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \ 7 \ 5 \\ 8 \ 3 \ 4 \\ + \ 3 \ 0 \ 1 \\ \hline 2 \ 0 \ 1 \ 9 \end{array}$$

Não se usando, agora, o 5, eis uma possível solução mantendo a coluna das centenas, face aos dois últimos exemplos, mantendo a coluna das dezenas face ao último exemplo e utilizando os valores 6, 4 e 0 para a coluna das unidades:

$$\begin{array}{r} 9 \ 7 \ 6 \\ 8 \ 3 \ 4 \\ + \ 2 \ 1 \ 0 \\ \hline 2 \ 0 \ 2 \ 0 \end{array}$$

É caso para dizer que Devlin (2002) tem imensa razão ao afirmar que a matemática é a ciência dos padrões!

Não poderíamos terminar esta reflexão sem elogiar o importante contributo que José Paulo Viana tem dado na atribuição de valor à matemática, enquanto área do conhecimento e enquanto ciência apaixonante e enigmática! Em sinal de agradecimento ao muito que tem feito pela divulgação desta ciência junto das comunidades docente e discente, propomos mais uma adição enigmática envolvendo o seu nome e o valor do seu trabalho: “Qual o valor de cada letra, de modo que a adição enigmática seguinte tenha solução, sabendo-se que a cada letra corresponde um algarismo diferente e vice-versa?”

$$\begin{array}{r} J \ O \ S \ É \\ + \ V \ I \ A \ N \ A \\ \hline V \ A \ L \ O \ R \end{array}$$

Apresentamos apenas uma de várias soluções possíveis para este desafio e desafiamos os leitores deste artigo a encontrar mais algumas soluções possíveis.

$$\begin{array}{r} 7 \ 0 \ 6 \ 4 \\ + \ 5 \ 1 \ 8 \ 3 \ 8 \\ \hline 5 \ 8 \ 9 \ 0 \ 2 \end{array}$$

Deixamos, pois, aqui expressa uma homenagem à capacidade desafiadora com que José Paulo Viana continua a encantar matematicamente os seus seguidores!

Referências:

- Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- Viana, J. (2018). Questões à volta dos problemas. *Educação e Matemática*. 146 (janeiro-março, pp. 30-32).
- Viana, J. (2012). *Uma Vida sem Problemas*. Lisboa: Clube do Autor.

PAULO AFONSO

CIPEC - CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM PATRIMÓNIO, EDUCAÇÃO E CULTURA, INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO

JOSÉ FILIPE

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS AFONSO DE PAIVA

NUNO SANTOS

INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO

ANA RITA BRANCO

SANTA CASA DA MISERICÓRDIA DE CASTELO BRANCO

Interdisciplinaridade na aprendizagem da matemática no PAFC: olhares e sentires dos diferentes intervenientes

SANDRA NOBRE

Neste artigo descrevo parte da minha experiência enquanto professora de matemática do 7.º ano no âmbito do Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular (PAFC), durante o ano letivo 2017/18. Para além da minha reflexão ao longo do texto, acrescento ainda o sentir dos alunos bem como dos seus encarregados de educação.

O PAFC NO AGRUPAMENTO DE ESCOLAS

O agrupamento de escolas onde leciono integra um TEIP, numa zona económica e socialmente desfavorecida, assinalada pelo absentismo e pelo insucesso escolar. No ano letivo 2017/18 o PAFC surge como uma oportunidade de, conjuntamente com outras medidas já implementadas, o agrupamento tomar decisões adicionais acerca da sua organização.

Para a operacionalização do projeto foi concebida uma nova disciplina – artes performativas e dois domínios de autonomia curricular (DAC) - DAC1 (matemática, ciências naturais e físico-química) e DAC2 (português, artes performativas e inglês). Para além destas opções, os tempos de algumas disciplinas eram lecionados de forma alternada, quinzenalmente. Os conselhos de turma das duas turmas do 7.º ano, onde foi implementado o PAFC, reuniam-se quinzenalmente para fazer trabalho de articulação, delinear os projetos a desenvolver, fazer balanços de outros já desenvolvidos e/ou em desenvolvimento.

A TURMA C DO 7.º ANO

Durante o ano letivo transato lecionei a disciplina de matemática numa das turmas onde foi implementado o PAFC. A turma, constituída por 18 alunos, tinha três alunos abrangidos pelo Decreto – Lei n.º 3/2008 (necessidades educativas especiais), dois alunos repetentes do 7.º ano e uma aluna vinda de um Percurso Curricular Alternativo e ao todo cinco alunos apresentavam mais de duas retenções. De um modo geral, no início do ano letivo, os alunos manifestavam bastantes dificuldades na aprendizagem da matemática e tinham fracas dinâmicas de trabalho, quer fosse individualmente ou em grupo.

Em colaboração com os outros professores do conselho de turma, foram delineados vários projetos na tentativa de incentivar os alunos para o estudo e para a aprendizagem nas várias disciplinas.

Relativamente ao DAC1 e à disciplina de matemática, apresento na tabela 1 os projetos realizados no âmbito do desenvolvimento das aprendizagens essenciais da disciplina em articulação com outras disciplinas, nomeadamente as ciências naturais e a físico-química. Os alunos trabalharam, na maior parte das vezes, em grupos de três ou quatro alunos (a composição dos grupos foi variando ao longo do ano).

Projetos desenvolvidos	Temas do 7.º ano de Matemática
Ser solidário	Números e Operações
À descoberta de proporções antropométricas	Álgebra / Geometria
Vulcões no planeta Terra	
Conhecer uma empresa local	
Nós e os outros	Organização e Tratamento de Dados

Tabela 1. Projetos desenvolvidos pela turma no âmbito de matemática, ciências naturais e físico-química

UM OLHAR SOBRE ALGUNS DOS PROJETOS DESENVOLVIDOS

Passo de seguida a exemplificar o trabalho desenvolvido, de forma sucinta, em três dos projetos desenvolvidos. Os primeiros dois projetos foram desenvolvidos no início do ano letivo e o terceiro quase no final.

Projeto “Ser solidário”

O primeiro projeto, de cariz solidário, levou os alunos a estudarem as características de alguns alimentos como o grão e o arroz e a sua importância na alimentação. Em grupos, os alunos foram desafiados a descobrir o número de bagos de arroz que um pacote tem, entre outras tarefas. Através de pesagens e do recurso a regras de três simples, os alunos conseguiram fazer uma estimativa quer do número de grãos, quer do número de bagos de arroz existentes num pacote de kg. Para as pesagens os alunos utilizaram balanças digitais, uma ferramenta digital nunca antes utilizada por qualquer aluno. Posteriormente foram estimulados a escrever esses números de forma mais simples, em notação científica – um conteúdo matemático fundamental para a disciplina de físico-química. Construíram

ainda cartazes de incentivo à comunidade para a contribuição com bens alimentares, conforme se pode observar na figura 1.



Figura 1. O trabalho dos alunos com o grão e um cartaz de um grupo de trabalho

Ao todo conseguiram angariar cerca de 100 kg de alimentos que foram entregues ao Banco Alimentar do Algarve que os fez chegar a várias instituições de solidariedade.

Projeto “À descoberta de proporções antropométricas”

Neste segundo projeto, os alunos em grupo, foram convidados a efetuarem medições aos seus corpos e tentaram descobrir relações entre os vários valores encontrados (figura 2 e figura 3).



Figura 2. Alunos a efetuarem medições

Os alunos registaram, em grupo, as medidas da sua altura, envergadura, largura de ombros, antebraço, comprimento do pé, entre outras. A partir desses dados tentaram fazer algumas inferências, acerca de eventuais relações entre os valores encontrados. Posteriormente, agregando as medições obtidas em todos os grupos, recorreram à folha de cálculo para mais facilmente conseguirem comparar todos os dados recolhidos.

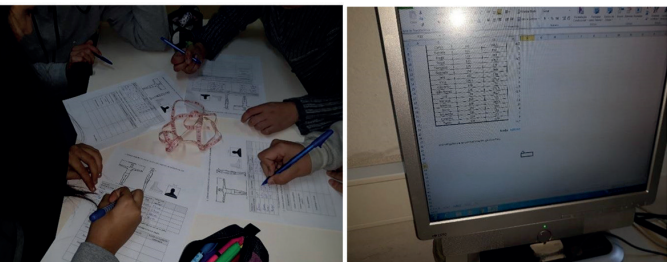


Figura 3. O registo dos dados e o trabalho dos alunos com a folha de cálculo

A partir da comparação das medições, os diferentes grupos de trabalho começaram a descobrir algumas relações (figura 4).

Nomes	Altura (cm)	Envergadura		Altura (cm)	Largura de Ombros		
Beatriz	162,5	162,3	1,00123	162,5	42	3,86905	
Carlos	148	148,5	0,99663	148	35	4,22857	
Daniela	163	158	1,03165	163	45,5	3,58242	
Diogo	172	169	1,01775	172	48,5	3,54639	
Filipe	170	176,5	0,96317	170	40	4,25	
Francisco	178	178	1	178	43	4,13953	
Gabriela	158	160	0,9875	158	38	4,15789	
Iara	162	164	0,9878	162	37	4,37838	
Irina	164,5	159,5	1,03135	164,5	42,5	3,87059	
João Brito	170	174	0,97701	170	43	3,95349	
João Neves	170	171,5	0,99125	170	42,5	4	
Luis	157	162,5	0,96615	157	40	3,925	
Mariana	160	161	0,99379	160	38	4,21053	
Melissa	146	143,5	1,01742	146	34	4,29412	
Nuno	154	144	1,06944	154	39	3,94872	
Sebastião	160	156	1,02564	160	40	4	
Carolina	150	150	1	150	39	3,84615	
Pedro	158	149	1,0604	158	36,5	4,32877	
			18,1182			72,5296	
			Média	1,00657		Média	4,02942

Figura 4. Exemplos de algumas relações descobertas por um grupo

Os diferentes grupos apresentaram as relações que descobriram entre as medições efetuadas na turma. Entre outras descobertas, neste trabalho, os alunos verificaram que a sua altura é muito próxima da envergadura, que a sua altura também é cerca de quatro vezes a largura dos ombros e que o antebraço mede aproximadamente o mesmo que o pé. Na conclusão, os alunos foram incentivados a escrever em linguagem algébrica as relações que descobriram, explicando o seu significado (figura 5). Por fim, foram depois confrontados com os resultados a propósito das proporções do Homem Vitruviano (desenhado por Leonardo da Vinci), tendo verificado que chegaram a resultados idênticos aos descritos.

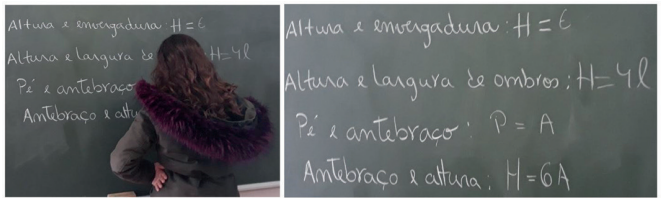


Figura 5. A escrita de relações em linguagem algébrica

Projeto “Conhecer uma empresa local”

Este projeto surgiu da identificação da necessidade que os alunos, de um modo geral, têm de conhecer melhor a realidade do seu meio, em particular no campo empresarial. Em sala de aula, esta ideia foi lançada aos alunos e, através de *brainstorming*, estes decidiram que gostavam de conhecer melhor uma empresa conserveira.

A definição de objetivos

Os alunos, em grande grupo, referiram algumas ideias acerca daquilo que gostariam de estudar, nomeadamente: a evolução do número de trabalhadores, os tipos de produtos confeccionados, formas de escoamento dos produtos, países de exportação, embalagens utilizadas, conservantes utilizados, entre outros aspetos.

Posteriormente, em pequenos grupos, definiram planos de trabalho com os aspetos que pretendiam investigar na empresa. Estes planos de trabalho foram preenchidos como documentos

partilhados na Drive, o que me permitiu dar-lhes *feedback* acerca dos objetivos do trabalho e, por outro lado, todos os grupos tomarem conhecimento dos trabalhos a desenvolver pelos seus colegas, para que não houvesse duplicação de trabalhos.

A recolha de informação

Após a definição dos objetivos de estudo foi a vez de sairmos da sala de aula e de visitarmos o museu de uma empresa conserveira de Olhão – A Conserveira do Sul. Nesta visita foi-nos apresentado a história de crescimento da empresa, houve a oportunidade de vermos, através de vídeo, o processo de trabalho da fábrica, desde a chegada do peixe à lota, o transporte, a passagem pela sala de produção, até ao embalamento para venda.

Os alunos munidos dos seus planos de trabalho estiveram muito atentos a todas as explicações, recolheram a informação através de apontamentos, tiraram fotografias, fizeram gravações áudio e fizeram ainda várias questões de modo a tentar recolher os dados necessários e outros aspetos que lhe suscitaram dúvidas e/ou curiosidade.

A análise dos dados

Em sala de aula, os alunos analisaram os dados recolhidos e construíram o produto final- um vídeo para disponibilizar num *Padlet*.

Exemplifico alguns procedimentos dos alunos na análise dos dados recolhidos:

- a medição de algumas das embalagens utilizadas para conservas e para patés e o cálculo de áreas de superfície bem como de volumes (figura 6).

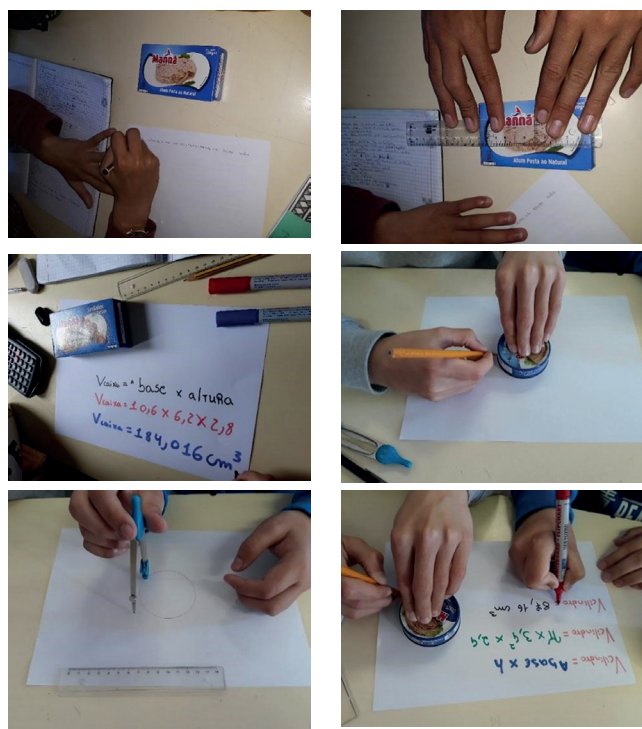


Figura 6. Medições e cálculo de áreas e de volumes das embalagens

- a construção de tabelas e representações gráficas na folha de cálculo, com a respetiva análise tendo em conta o contexto em estudo (figura 7).

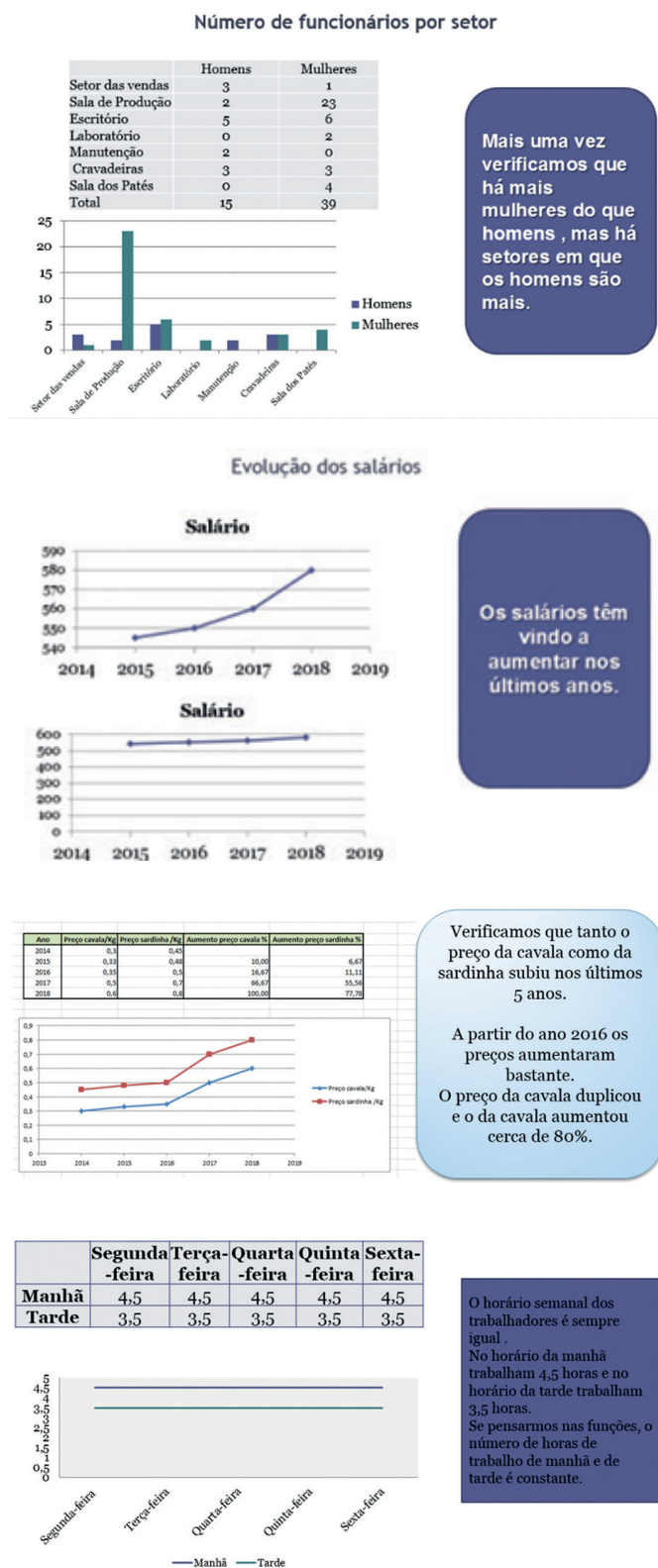


Figura 7. Exemplos de construção de tabelas e gráficos na folha de cálculo

Os dados recolhidos contemplaram muitos outros aspetos, designadamente: o tipo de peixe utilizado na confeção das conservas e patês, a não utilização de conservantes na confeção, os países de exportação, os materiais constituintes das embalagens, os hábitos de higiene e segurança dos trabalhadores, as diferentes línguas utilizadas na tradução dos rótulos das embalagens, a planta da fábrica para cálculo da área total bem como a área de cada um dos diferentes setores.

Para além da análise de tabelas e de gráficos construídos, os alunos ficaram a perceber outros aspetos relacionados com a empresa que inicialmente não tinham previsto, como o facto do número de trabalhadores ter vindo a diminuir nos últimos anos com o surgimento de nova maquinaria, ou a existência de um maior número de mulheres a trabalhar na sala de produção devido ao facto das mulheres possuírem mãos mais delicadas para trabalhar o peixe.

Um aspeto fundamental a destacar foi o facto do trabalho de grupo ter sido sempre marcado pela interdependência. Os elementos de cada grupo de trabalho tinham tarefas distintas – definidas nos planos de trabalho, sendo simultaneamente corresponsáveis pelo produto final. Na figura 8 é possível verificar que os alunos trabalhavam em ambientes distintos, uns nos computadores, outros nas mesas da sala, a realizar outras tarefas igualmente importantes.



Figura 8. Ambiente de trabalho em sala de aula

Os vídeos-produto final dos diferentes grupos de trabalho ficou disponível no Padlet https://padlet.com/Sandra_Nobre/7C_Conserveira

A divulgação do produto final

A divulgação dos trabalhos realizados foi feita no auditório da escola para os encarregados de educação e outros professores, bem como para alunos de outras turmas do 6.º ano que este ano já estão integrados na AFC.

O SENTIR DOS ALUNOS

Os alunos tiveram depois a oportunidade de expressar, por escrito, a sua opinião acerca do projeto desenvolvido em dois momentos, através de um questionário online e através de uma reflexão escrita. Destaco algumas das respostas recebidas através desse questionário *online*:



Figura 9. Apresentação dos trabalhos

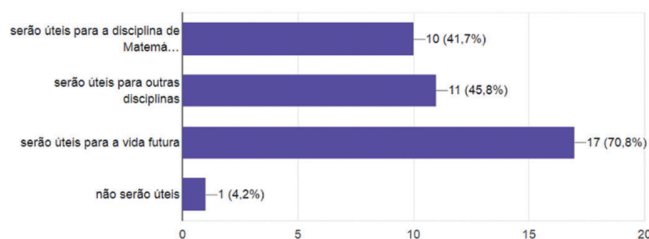


Gráfico 1. Respostas Q4

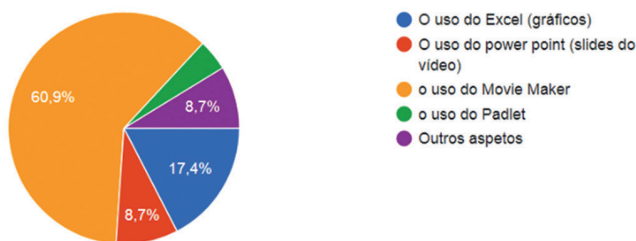


Gráfico 2. Respostas Q5

No gráfico 1 é possível observar as respostas à questão “As aprendizagens realizadas com este projeto...” e verifica-se que a maioria dos alunos responde “serão úteis para a vida futura”.

No gráfico 2 apresento as respostas à questão “A realização deste trabalho mostra que é possível aprender de forma diferente. O que mais te impressionou?”. Os alunos maioritariamente respondem que foi a utilização do Movie Maker.

Na última parte do questionário em resposta a “Partilha connosco algo que consideres importante” os alunos reportam terem aprendido mais sobre a sua cidade, terem aprendido matemática e outras disciplinas de forma diferente, terem trabalhado bastante com o computador, ter sido um trabalho “sério” que os fez “puxar pela cabeça” e este trabalho os levar a pensar nas suas profissões no futuro.

As reflexões escritas complementaram aquilo que os alunos já tinham expressado neste questionário, como apresento na figura 10. Estas reflexões espelham a liberdade que lhes foi dada na tomada de decisão relativamente ao estudo desenvolvido, ao facto de terem saído da sala de aula, de terem recorrido à tecnologia digital. Uma das alunas mostra mesmo mudança na conceção do que é a disciplina de matemática ao afirmar que “Matemática é muito mais que ficar sentados a fazer contas”.

1. Aprendamos matemática de diferentes formas. Mexemos no Movie Maker no Excel. Ficamos uma vez de estudo para fazer o trabalho em grupo;

Ficamos a conhecer mais sobre a cultura de China, ficamos a conhecer que numa empresa todos os funcionários dependem uns dos outros e ficamos a conhecer que matemática é muito mais que ficar sentados a fazer contas.

Tivemos de trabalhar e estar muito atentos para retirar a informação que nós necessitamos e atendemos mais coisas que nós nem imaginávamos.

1. trabalhar nos computadores a Matemática escolhemos o que queramos trabalhar fora trabalhar fora da sala de aula.

Figura 10. Excertos de algumas das reflexões escritas pelos alunos

Outro aspeto também solicitado na reflexão foi que pensassem na mudança de papel da professora neste tipo de aulas de projeto, em comparação com as aulas com um ensino mais direto.

Eu acho que foram as aulas mais divertidas. A professora diferente mudou muita coisa. ex: mexemos nos computadores. fo Tdabaíamos sozinhos fo muito divertido!

(6) Eu acho que foi muito importante, mas sei muitas intervenções. A professora deu-nos o espaço para fazer o trabalho e fazemos as nossas escolhas.

Figura 11. Excertos de algumas das reflexões escritas pelos alunos

De um modo geral, os alunos foram unânimes em afirmar que a professora teve uma postura mais passiva, com menos intervenções, tendo-lhes dado mais espaço para trabalharem sozinhos. Afirmam também que gostaram dessas aulas “as aulas mais divertidas”.

Analisando o desenvolvimento dos alunos ao longo do ano, verifico que gradualmente todos eles começaram a estar mais envolvidos nas aulas, a ter iniciativa, a participar e a questionar. Embora alguns dos alunos ainda manifestem algumas dificuldades, os alunos passaram a ter uma postura mais positiva face à disciplina e a reconhecer-lhe utilidade.

O SENTIR DOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Os encarregados de educação foram várias vezes convidados à escola, em particular para assistir à apresentação dos trabalhos dos seus educandos. Numa dessas visitas foram convidados a responder a um questionário. No gráfico 3 apresento as respostas à questão “Que aspetos considera especialmente positivos no PAFC?” e podemos verificar que os encarregados de educação valorizam a relação entre a escola e a família, as metodologias utilizadas e as novas disciplinas. No gráfico 4

apresento as respostas à questão “Relativamente ao ano letivo anterior, considera que o seu educando está...” sendo que a maioria considera que o seu educando está mais motivado. Numa questão aberta referem que “Ele gosta, fazem coisas diferentes e assim aprende mais matérias”, “Tem mais conhecimentos, novas disciplinas”, “Novas metodologias utilizadas”. De um modo geral, os encarregados de educação, dão um parecer positivo acerca da implementação do projeto de autonomia e flexibilidade curricular, reconhecendo-lhe também algumas potencialidades no que respeita às novas disciplinas.

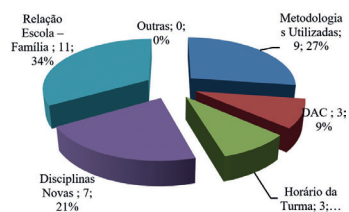


Gráfico 3. Respostas Q1

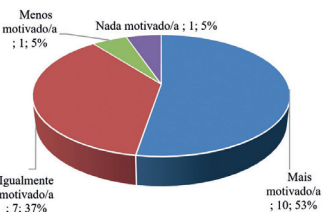


Gráfico 4. Respostas Q2

O SENTIR DA PROFESSORA – A CONCLUIR

As atuais orientações curriculares vêm incentivar os professores das diferentes áreas disciplinares a uma cooperação efetiva, associada a uma gestão curricular sincronizada- que muitas vezes ainda não é possível fazer com a frequência desejada. A seleção de tarefas/projetos que sirvam os propósitos de ensino e aprendizagem da matemática e em simultâneo os de outras áreas disciplinares é um ponto de partida fundamental para apoiar o processo de aquisição e de construção do conhecimento de todos os alunos.

No trabalho desenvolvido com esta turma, durante um ano letivo, foi possível verificar que esta seleção foi crucial. As propostas incentivaram um ensino experimental com regularidade, num contexto real, promovendo o envolvimento de todos os alunos. Em qualquer um dos projetos que apresentei é possível verificar que os alunos assumem o papel de investigadores, com uma função ativa na construção do seu conhecimento. Por outro lado, o trabalho colaborativo desenvolvido dentro dos grupos foi igualmente fundamental não só para o desenvolvimento de aprendizagens essenciais nas diferentes disciplinas, mas também para o desenvolvimento de competências sociais.

Nos dias de hoje é fundamental que os professores continuem a apostar em metodologias de trabalho inclusivas que promovam aprendizagens de carater interdisciplinar, que potenciem os nossos jovens a dar resposta aos desafios do mundo atual, a par do desenvolvimento das diferentes áreas de competência definidas no perfil dos alunos.

SANDRA NOBRE

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS PROFESSOR PAULA NOGUEIRA, OLHÃO

Números racionais nos primeiros anos - a abordagem pela partilha equitativa

O conceito de número racional está entre os conceitos mais difíceis que as crianças têm de aprender no ensino básico. Encontrar formas de as ajudar na construção deste conceito, é contribuir fortemente para o seu desenvolvimento de sentido de número. A investigação tem sugerido uma primeira abordagem ao estudo das frações através da exploração do significado de partilha equitativa (ver Fosnot & Dolk, 2002; Mamede & Nunes, 2008; Monteiro & Pinto, 2007; Streefland, 1993), na medida em que ajuda os alunos a compreender o significado do numerador, do denominador e sua relação, facilitando a construção do conceito de fração. Neste significado, o denominador da fração representa o número de recipientes e o numerador representa o número de itens inteiros a distribuir pelos recipientes. Contudo, a mesma investigação realça também a necessidade de uma exploração posterior de outros significados, nomeadamente parte-todo, operador, medida e razão tendo em vista a construção de um conceito de número racional completo.

Apesar de reconhecida como relevante na compreensão do conceito de fração, a partilha equitativa parece ainda não ser confortavelmente dominada por alunos do 1.º e 2.º ciclos, pelo que importa continuar a estudar os efeitos desta abordagem nos primeiros anos de escolaridade. Assim, neste artigo analisam-se as produções de alunos do 5.º, 4.º e 3.º anos de escolaridade, na resolução de três tarefas de partilha equitativa apresentadas pelas respetivas professoras, Ana, Rita e Maria, em aulas observadas pela primeira autora.

O CASO DO 5.º ANO DE ESCOLARIDADE

Ana implementou a sua primeira tarefa numa turma de 21 alunos que dividiu em seis grupos de trabalho. Estes alunos tinham frequentado o 1.º CEB com o Programa de Matemática em vigor. Para resolver a tarefa “O Rodrigo convidou três amigos para a sua festa de aniversário e encomendou três pizzas. Os quatro amigos dividiram igualmente as três pizzas entre si. Que parte de pizza comeu cada amigo? Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos” - os seis grupos recorreram à representação icónica para modelarem a situação. Porém, apenas dois grupos identificaram as quantidades envolvidas recorrendo às frações (figura 1).

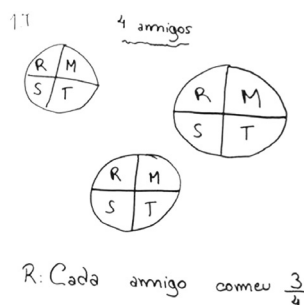


Figura 1. Produção com recurso à modelação icónica e fração

Assim, após terem dividido cada uma das três pizzas, que representaram em quatro partes iguais, atribuíram $\frac{1}{4}$ de cada pizza a cada um dos amigos. Posteriormente, concluíram que cada amigo comeu $\frac{3}{4}$ de pizza, conclusão que parece ter decorrido da adição intuitiva de $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Os outros quatro grupos, não conseguiram identificar as quantidades envolvidas quer com recurso às frações, quer com recurso aos numerais decimais (figura 2).

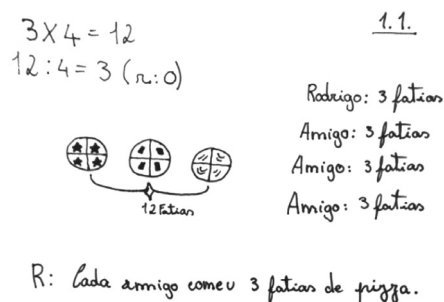


Figura 2. Produção com recurso à representação icónica e números inteiros

Estes alunos, apesar de terem dividido cada uma das pizzas em quatro partes iguais, apenas identificaram o número de “fatias” que cada amigo comeu, embora tenham deixado evidente, na representação icónica, que se estavam a referir a fatias de $\frac{1}{4}$ cada uma. Contudo, estes alunos evidenciaram problemas com a unidade de referência e por conseguinte, com o conceito de divisão, já que consideram doze fatias totais, olhando-as como partes individuais, sugerindo que perante uma unidade contínua, veem as suas partes constituintes como unidades discretas. Evidenciam ainda dificuldades na mudança conceptual na

passagem dos números inteiros para os números fracionários. Esta dificuldade foi já previamente identificada por Monteiro e Pinto (2007) em estudos com alunos da mesma faixa etária.

De acordo com Ana, a discussão desta tarefa em grande grupo promoveu a troca de estratégias e, por conseguinte, uma primeira oportunidade de levar os alunos a ultrapassarem as dificuldades apresentadas nas suas produções em pequenos grupos, nomeadamente as relativas à unidade de referência considerada. Refere que durante a discussão surgiu a exploração da adição de frações, de forma intuitiva, bem como a sua conexão com a multiplicação, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, sem que tivessem surgido conceções erróneas frequentemente identificadas na literatura, como por exemplo adicionar numeradores e denominadores da fração ou multiplicar o número inteiro pelo numerador e pelo denominador da fração.

Esta turma não parecia muito familiarizada com o conceito de fração, nem com a exploração deste tipo de tarefas. No entanto, segundo Ana, o contexto real da tarefa, significativo para os alunos, parece ter promovido a representação icónica da mesma e consequente resolução intuitiva no caso dos grupos que não apresentavam dificuldades com a unidade de referência, uma vez que conseguiram identificar as quantidades envolvidas por recurso à representação fracionária. Porém, mesmo nos casos em que apresentaram dificuldades com a unidade de referência, o referido contexto facilitou uma abordagem intuitiva à situação, tendo-se revelado facilitador do emergir de ideias fundamentais relativas às frações durante a discussão em grande grupo.

Dado que estes alunos já trabalharam as frações no 1.º ciclo, era expectável que tivessem abordado os objetivos preconizados para esse ciclo de ensino, nomeadamente a resolução de problemas de vários passos envolvendo números racionais, as aproximações de números racionais e operações com frações.

O CASO DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE

Rita implementou a sua primeira tarefa numa turma de 20 alunos que dividiu em nove grupos de trabalho. Estes alunos, à semelhança dos do 5.º ano, já tinham também abordado frações durante o 1.º ciclo, no programa em vigor. Para resolver a tarefa “No dia do seu aniversário a Joana levou para a escola um saco com chocolates para distribuir pelos colegas. A Joana começou por distribuir, igualmente, 3 chocolates aos primeiros 4 colegas que chegaram à sala. Que porção de chocolate comeu cada um? Justifica a tua resposta utilizando palavras, desenhos, esquemas ou cálculos.”, os nove grupos recorreram à representação icónica para modelarem a situação e identificaram as quantidades envolvidas recorrendo às frações, tendo surgido diferentes estratégias. Sete grupos representaram os três chocolates e dividiram cada um deles em quatro partes iguais. Posteriormente parecem ter retirado $\frac{1}{4}$ de cada chocolate para cada colega, adicionado $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ e concluído que cada colega comeu $\frac{3}{4}$ (figura 3).

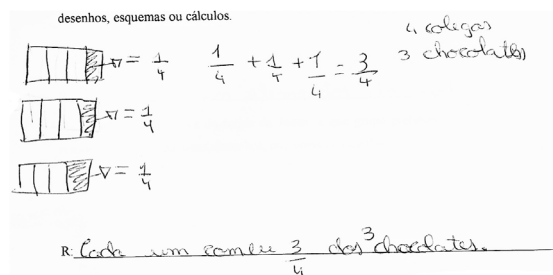


Figura 3. Produção com recurso à representação icónica e fração

Os outros dois grupos, apesar de terem recorrido também à representação icónica para modelarem a situação, usaram uma estratégia diferente dos grupos anteriores, já que dividiram dois chocolates em duas partes iguais e o terceiro chocolate em quatro partes iguais, tendo atribuído a cada colega $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ de chocolate e concluído que cada colega comeu $\frac{3}{4}$ (figura 4).

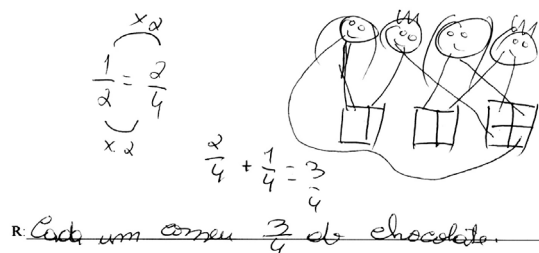


Figura 4. Produção com recurso à representação icónica e fração

Estes grupos deixaram evidente o conhecimento de que a adição de frações requer que estas tenham o mesmo denominador e, portanto, conhecimento da equivalência de frações, nomeadamente da regra formal. Também estes resultados foram apresentados e discutidos em grande grupo e levaram Rita a afirmar que o recurso à representação icónica da situação, promovido pelo contexto da tarefa, parece ter suportado o procedimento de partilha equitativa, bem como o raciocínio aditivo e multiplicativo, que levou à identificação das quantidades envolvidas. Segundo Rita, estes resultados revelam melhorias significativas relativamente aos resultados apresentados por estes mesmos alunos no teste de diagnóstico, onde nenhum aluno evidenciou entendimento da fração como partilha equitativa.

O CASO DO 3.º ANO DE ESCOLARIDADE

Maria implementou a sua primeira tarefa numa turma de 19 alunos que dividiu em nove grupos de trabalho. Estes alunos encontravam-se a estudar frações no âmbito do programa em vigor, tendo já abordado a adição e subtração das mesmas. Para resolver a tarefa “Quatro amigos foram a um restaurante e pediram três pizzas. Dividiram igualmente as três pizzas. Que parte de piza comeu cada amigo? (Descrevam o processo que utilizaram para responderem à questão. Podem fazê-lo utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos)”, os nove grupos recorreram à representação icónica da situação, tendo apresentado diferentes estratégias. Assim, quatro grupos

dividiram cada uma das pizzas em quatro partes iguais, tendo concluído que cada amigo comeu $\frac{3}{4}$ de piza (figura 5).

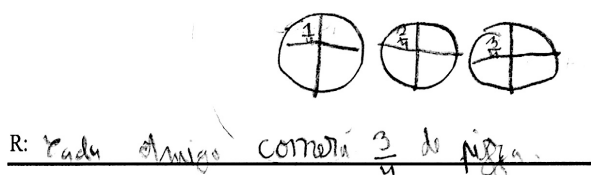


Figura 5. Produção com recurso à representação icónica

Estes alunos parecem ter adicionado $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ou multiplicado $3 \times \frac{1}{4}$ de forma intuitiva, chegando à sua resposta. Outros quatro grupos recorreram à representação icónica apenas de uma piza, tendo-a dividido em quatro partes iguais e multiplicado por 3 (figura 6).

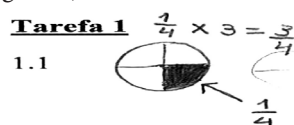


Figura 6. Produção com recurso á representação icónica e fração

Deste modo, parecem ter percebido que cada amigo comeria $\frac{1}{4}$ de cada piza, logo sendo 3 pizzas, cada amigo comeria $\frac{3}{4}$ de piza, tendo representado formalmente $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$. Porém, este produto parece ter surgido de forma intuitiva, já que de acordo com Maria, aquando da resolução desta tarefa, os alunos ainda não tinham explorado a multiplicação de um número inteiro por uma fração. Houve ainda um grupo que recorreu a duas estratégias diferentes, estando uma correta e outra incorreta. Quando recorreram à representação icónica, em que dividiram cada uma das pizzas em quatro partes iguais, registaram $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, pelo que parecem ter percebido que esta era a quantidade de piza que cada amigo comeu (figura 7). Contudo, numa outra resolução em que parecem ter percebido que cada amigo poderia comer $\frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{4}$ de piza, já evidenciaram dificuldades tendo cometido um erro muito comum na adição de frações, o de adicionarem numeradores e denominadores.

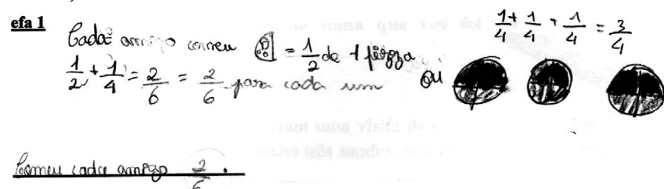


Figura 7. Duas estratégias e um erro comum

Basear o raciocínio na representação icónica da situação parece ter promovido a adição intuitiva das quantidades envolvidas. Corroborando as ideias de Fosnot e Dolk (2002), Monteiro e Pinto (2007) e Streefland (1993), a conexão entre as respostas informais dos alunos e os símbolos convencionais parece ter permitido dar significado às diferentes representações dos números. No entanto, este mesmo grupo apresentou dificuldades

quando optou por uma estratégia não suportada, de forma tão evidente, pela representação icónica. Assim, ao passarem de forma mais imediata para a formalização, acabaram por evidenciar o erro comum da adição de numeradores e denominadores, dificuldade que, de acordo com Monteiro e Pinto (2007), poderá advir de um ensino precoce e descontextualizado, com ênfase nos procedimentos. As autoras referem mesmo que “é mais fácil para uma criança de 9 ou 10 anos perceber, numa primeira fase, que se come metade de uma piza e depois um quarto de piza, come três quartos de piza, do que perceber que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ representa $\frac{3}{4}$, desligado do contexto” (p.16). Por conseguinte, é importante que na aula de matemática sejam discutidas estas situações.

NOTAS FINAIS

A partilha equitativa parece ter promovido a conexão entre as representações informais dos alunos, sobre as quantidades representadas por frações e a representação formal das mesmas, corroborando dados de investigações prévias (Mamede & Nunes, 2008; Streefland, 1993), que evidenciam a importância destas tarefas na construção do conceito de fração.

Contudo, a literatura tem sublinhado que o conceito de número racional só é adquirido quando o aluno domina todos os significados de fração (Behr, Harel Post & Lesh, 1992, Mamede & Nunes, 2008) e sua tradução nos diferentes modos de representação. Assim, importa integrar tarefas promotoras da compreensão dos números racionais não negativos nos diferentes significados, diversificando modos de representação.

Bibliografia

- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: MacMillan Publishing Company.
- Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Mamede, E., & Nunes, T. (2008), Building on Children's Informal knowledge in the Teaching of Fractions. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proc. 32nd Conf of the Int. Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp.345-352). Morélia, México: PME.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.
- Streefland, L. (1993). Fractions: a realistic approach. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Org.), *Rational numbers-An integration of research*. London: Lawrence Erlbaum.

HÉLIA PINTO

ESECS, CI&DEI, INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA

EMA MAMEDE

CIEC, UNIVERSIDADE DO MINHO

Flexibilidade e matemática na Escola Secundária Lima-de-Faria, Cantanhede

MARÍLIA ZORRINHO

MARIA CARACITAS

O Agrupamento de Escolas Lima-de-Faria (AELdF) é um agrupamento vertical constituído por alunos que frequentam desde a educação pré-escolar até ao ensino secundário. A Escola Secundária Lima-de-Faria é a escola sede e recebe alunos de outros dois agrupamentos do concelho e dos concelhos limítrofes. É um agrupamento com uma dimensão considerável onde, habitualmente, se desenvolve um amplo conjunto de projetos e de atividades (de 200 a 230 por ano), incluindo múltiplas palestras em parceria com Centros de Investigação e de Divulgação Científica como o Ciência Viva, a Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra e a APM. Um número significativo destas atividades realiza-se no âmbito da disciplina de matemática, seja no ensino básico ou no secundário.

No ano letivo 2017/2018, o Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular (PFAC) estava em fase de experimentação e, portanto, apenas foi aplicado a um conjunto de escolas piloto. O AELdF fez parte desse conjunto. A decisão de participar no projeto foi tomada pelo Diretor do Agrupamento e pelo Conselho Pedagógico, em julho de 2017. O projeto poderia ter sido aplicado a todos os anos de início de ciclo, mas ficou decidido que seriam envolvidas apenas turmas do 1.º, 5.º e 10.º anos de escolaridade. No caso da Escola Secundária Lima-de-Faria, onde lecionamos, o projeto apenas se aplicou às quatro turmas de Ciências e Tecnologias, deixando de fora as turmas de Ciências Socioeconómicas, Artes Visuais e Línguas e Humanidades.

Tomada esta decisão, o Diretor do agrupamento contactou pessoalmente alguns docentes (grupo no qual nos incluímos), no sentido de os convidar a participar no projeto, numa tentativa de formar conselhos de turma coesos, uma vez que o trabalho colaborativo, que sempre foi uma prática comum neste agrupamento, teria de ser bastante intensificado. Porém, a globalidade dos docentes apenas teve conhecimento do Projeto em setembro de 2017, numa reunião inaugural da qual fizeram parte todos os professores pertencentes aos conselhos de turma das turmas envolvidas. Foi a partir desta reunião que se começou a analisar com mais pormenor os documentos *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* e *Aprendizagens Essenciais*. Não foi a primeira vez que se realizaram reuniões de conselho de turma no início do ano letivo mas, desta vez, como se previam

algumas alterações significativas, os conselhos de turma foram feitos em conjunto, isto é, reuniram todos os professores das turmas do 5.º ano e todos os do 10.º ano (turmas de flexibilidade). Nessas reuniões foram reformulados, em conjunto, o modelo de registo dos critérios de avaliação de forma a acolher a articulação com o Perfil dos Alunos. Foram também exploradas possíveis articulações entre disciplinas (matemática/filosofia, português/filosofia/inglês, física e química A/biologia e geologia, biologia e geologia/biblioteca...). As decisões tomadas naqueles conselhos de turma foram posteriormente validadas pelos Diretores de Turma. Instauraram-se algumas práticas de trabalho colaborativo com recurso a ferramentas digitais, como a Drive e outras.

Algumas decisões tomadas e dinâmicas implementadas facilitaram o processo e a preparação para o alargamento que veio a ocorrer com o DL n.º 55/2018 de 6 de julho.

Do trabalho realizado e respetiva monitorização, decorreram algumas decisões sobre práticas posteriormente implementadas: um modelo para todo o AELdF dos critérios de avaliação que realça a articulação das disciplinas com o Perfil do Aluno, que evidencia a dimensão formativa da avaliação, assim como a diversificação dos critérios de avaliação. Criou-se também um modelo de planificação a médio prazo e outro de planificação de Domínios de Articulação Curricular (DAC) e ambos destacam as aprendizagens a serem efetuadas pelos alunos no cruzamento das Aprendizagens Essenciais com as atividades e o Perfil do Aluno. Para além disso, elaboraram-se listas de verificação, que funcionam como instrumentos de automonitorização, e efetuam a articulação entre os instrumentos de planificação referidos e o Projeto Educativo.

Foi, obviamente, um início de ano cheio de interrogações, mas uma coisa ficou clara: é preciso alterar práticas didático/pedagógicas por forma a adequar a ação educativa às finalidades do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

As aprendizagens essenciais, que nos deixaram muitas dúvidas sobretudo quanto ao grau de profundidade com que se deveriam abordar alguns assuntos, deixavam bem claro que “*incluem os temas matemáticos Funções e Geometria e assumem o de Lógica como tema transversal bem como a História e Modelação matemáticas*”. A Lógica é um tema motivador para os alunos e que não lhes levanta muitas dificuldades, portanto um bom tema

para o início do ano letivo. Por outro lado, apercebemo-nos, nos conselhos de turma iniciais, que esse tema, na disciplina de filosofia, também iria ser lecionado no 10.º ano de escolaridade. Foi a partir daqui que se construiu o primeiro DAC entre as disciplinas de matemática A e filosofia. A abordagem à lógica, nestas duas disciplinas, não é exatamente igual, por isso foi necessário proceder a alguns acertos, por exemplo ao nível da notação utilizada. O tema escolhido foi “Igualdade de Género” por ser um dos temas obrigatórios da área de Cidadania e Desenvolvimento.

Construiu-se um guião do trabalho que ficou disponível em http://apfilosofia.org/wp-content/uploads/2017/12/DAC10_guião1_mat_fil_FINAL-C%C3%B3pia.pdf e que foi entregue aos alunos logo no início do mês de outubro.

Por um lado, a aplicação do PAFC exigia-nos metodologias mais diversificadas com o aluno no centro da aprendizagem (onde nunca deixou de estar, ainda que muitas vezes de uma forma pouco evidente, dada a extensão dos programas oficiais); por outro lado, as aprendizagens essenciais vieram, de facto, “emagrecer” um pouco o programa. A conjugação destes dois fatores permitiu-nos, não só minimizar o número de aulas com uma forte componente expositiva, como, aumentar o número de trabalhos de grupo e de pesquisa.

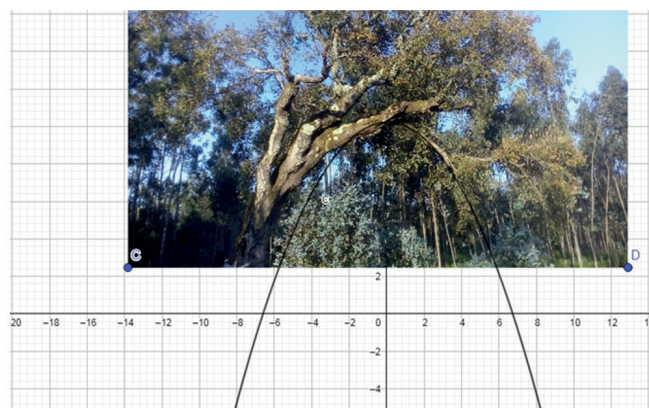
Para estudar as transformações simples do gráfico de uma função, construímos fichas que, partindo de exemplos, levavam os alunos a concluir sobre translações e simetrias. Vulgarmente, estas fichas eram realizadas em trabalho de pares e eram sempre seguidas de uma reflexão sobre as conclusões a que os alunos chegavam. Essa reflexão era particularmente importante porque, nas palavras dos alunos, servia para “cimentar ideias”. Provavelmente, estas fichas de descoberta foram aquelas de que os alunos mais gostaram de realizar; foi uma boa forma de construírem o saber, ou seja, realizarem aprendizagens significativas.

Das várias finalidades do programa de matemática A, destacam-se a resolução de problemas e a aplicação da matemática ao mundo real. A modelação matemática fundamenta-se na conjugação da resolução de problemas com referência na realidade envolvente. Poder-se-á dizer que a modelação matemática é o processo que nos permite interpretar um fenómeno da vida real por meio de linguagem matemática. O recurso à modelação permite que os alunos assumam um papel de relevo na sala de aula, uma vez que são agentes ativos na construção do conhecimento, potenciando aprendizagens matemáticas consistentes.

Por tudo isto, pareceu-nos importante a realização de uma atividade de modelação matemática com os alunos do décimo ano de escolaridade. Sendo assim, numa das últimas aulas do segundo período, foi pedido aos alunos que tirassem uma fotografia de algo que lhes parecesse uma parábola. Foi referido que a foto devia mostrar alguma coisa que tivesse significado para o aluno. A atividade em sala de aula estava dividida em

três partes. Numa primeira, os alunos deviam aplicar um referencial à foto e recolher coordenadas de pontos por forma a poderem escrever uma equação da parábola, mobilizando conhecimentos adquiridos na aula. A segunda fase, consistia em recolher as coordenadas de vários pontos da parábola para as colocar na máquina de calcular e obter uma regressão quadrática. Pretendíamos desenvolver “o saber tecnológico” e comparar a equação que cada aluno obteve com aquela que se obteve na calculadora gráfica. Na terceira parte, os alunos puderam utilizar os computadores para aceder ao programa Geogebra e sobrepor a foto à expressão da parábola. A atividade ficou completa quando os alunos entregaram um relatório com a descrição do trabalho que desenvolveram e onde lhes foi pedido que enumerassem os pontos fortes e os pontos fracos. Naturalmente, todo este processo foi explicado aos alunos através de um guião da atividade, onde também se definiam os critérios de avaliação.

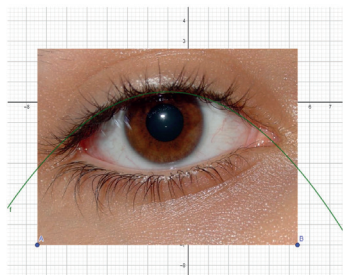
De uma forma geral os alunos foram criativos e viram parábolas: na natureza que observam da janela do seu quarto;



numas férias bem passadas;



no seu próprio corpo



O guião desta atividade está disponível em

<https://drive.google.com/file/d/1tljT79mTQhB5VLbh9GfpiyFEjK5FUyrk/view>

No ano letivo 2018-2019 o projeto passou a ter âmbito nacional e, portanto, foi alargado a todas as turmas do 10.º ano: quatro de Ciências e Tecnologias (CT), uma de Ciências Socioeconómicas, uma de Artes Visuais e duas de Línguas e Humanidades. Continuou nas turmas do 11.º ano de CT (desta vez apenas três). Seria de esperar que o projeto PFAC permitisse a continuidade quer da equipa pedagógica quer da própria constituição da turma. Acontece que alguns alunos do 10.º ano ficaram retidos (alguns por vontade própria, ou seja, repetição voluntária) o que diminuiria o número de alunos em cada turma de 11.º ano. Em nosso entender, esta circunstância facilitaria muito o trabalho a desenvolver, sobretudo quando se pretende privilegiar metodologias mais ativas. No entanto, prevaleceram outros critérios e não nos foi permitido manter as quatro turmas de CT, o que nos obriga a trabalhar, atualmente, com três turmas, com cerca de trinta alunos cada.

Com o trabalho mais dificultado, dado o elevado número de alunos em cada turma, continuamos a trabalhar na mesma linha de pensamento. Assim, logo na segunda aula deste ano, propusemos aos alunos um trabalho sobre Trigonometria em contexto real no qual eles poderiam aplicar os conhecimentos de Trigonometria adquiridos no terceiro ciclo do Ensino Básico. Sugerimos-lhes que se organizassem por localidades de residência, fornecemos-lhes um clinómetro e, através de um Guião, disponível em <https://drive.google.com/file/d/1fwUmzBuw656W0XVBech5idolddAy6bQz/view> pedimos que escolhessem um objeto de altura inacessível e que determinassem a sua altura.

Na sua maioria, os alunos escolheram monumentos, tendo o cuidado de referir a história e/ou importância que têm para as localidades em questão. Para além da aplicação da matemática em contexto real, os alunos tiveram oportunidade de enriquecer os seus conhecimentos noutras áreas e de aplicar as novas tecnologias, trabalhando colaborativamente no Google Drive.

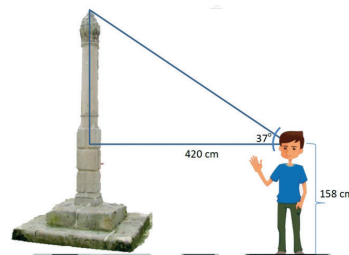


Também desta vez os alunos usaram a sua criatividade e trouxeram para a aula de matemática:

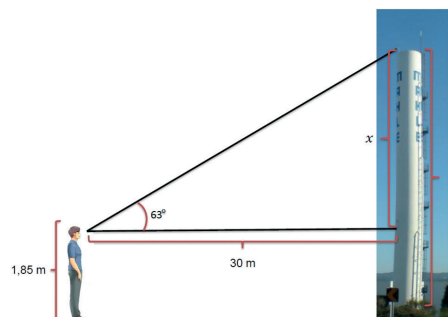
“o poder local”



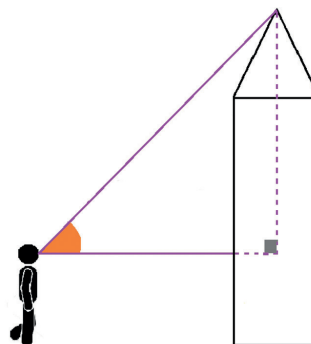
“a história mais antiga”



“o desenvolvimento empresarial”



acompanhando sempre o raciocínio com um esquema matemático



Este trabalho teve, mais tarde, uma segunda parte em que foi proposto aos alunos que, desta vez, considerassem outro objeto de altura inacessível e que se colocassem a uma distância dele também inacessível. Neste momento, os alunos já tinham mais conhecimentos sobre Trigonometria e usaram estratégias diversificadas: muitos continuaram a aplicar exclusivamente as razões trigonométricas de um ângulo agudo enquanto outros identificaram uma oportunidade para aplicar a lei dos senos. O guião deste trabalho está disponível em https://drive.google.com/file/d/1v8hY2Z4BbxMtxgd_SlvsO9MkShIVDai8/view

Transcrevemos algumas frases retiradas dos relatórios dos alunos e que nos parecem significativas:

“A atividade permitiu-me conhecer melhor o campo de aplicação da matemática, tendo aplicado o método de modelação matemática para observar o nosso mundo de maneira diferente...”

“...adquiri experiência a utilizar uma ferramenta que desconhecia (Geogebra), pude cimentar os conteúdos dados na aula de Matemática e conhecer um pouco melhor a História do município”

“Com este trabalho conclui que muitas situações do nosso dia-a-dia estão associadas à matemática, o que nos permite ter uma perspetiva diferente do mundo que nos rodeia”

“Reconhecemos que este trabalho foi importante, na medida em que pudemos perceber, mais uma vez, que a matemática pode ser aplicada no nosso quotidiano, ajudando-nos, por isso, a fazer algo que seria quase impossível de realizar se não usássemos a matemática.”

“Ao longo deste trabalho, enfrentámos diversas dificuldades..... Essas dificuldades obrigaram-nos a recorrer à imaginação e a pôr à prova a nossa capacidade de raciocínio.”

Estas conclusões, tiradas pelos próprios alunos, revelam que foi possível atingir algumas das competências referidas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, nomeadamente:

- Linguagem e textos, utilizando de modo proficiente linguagem e símbolos associados à linguagem materna e à matemática;
- Raciocínio e resolução de problemas, desenvolvendo processos conducentes à construção de produtos e de conhecimentos, usando recursos diversificados;
- Pensamento crítico e pensamento criativo, convocando diferentes conhecimentos de matriz científica e humanística, utilizando diferentes metodologias e ferramentas para pensarem criticamente;
- Relacionamento interpessoal, adequando comportamentos em contextos de cooperação, trabalhando em equipa, interagindo com tolerância, aceitando os diferentes pontos de vista;
- Saber científico, técnico e tecnológico, manuseando materiais e instrumentos diversificados, executando operações técnicas, segundo uma metodologia de trabalho adequada para atingir um objetivo.

Escusado será dizer que foram sentidas algumas dificuldades.

Os professores deparam-se com escassez de horas para trabalho colaborativo, com um elevado número de alunos por turma e o aumento significativo do volume de trabalho. Como não nos foi permitido alterar os horários nem diminuir o número de alunos por turma, fomos ultrapassando esses obstáculos com muito investimento pessoal, “roubando” tempo que deveria ser destinado à vida pessoal. Quanto aos alunos, também sentiram algumas dificuldades em se adaptarem a uma nova metodologia de trabalho, até porque, também para eles, há um aumento do volume de trabalho. A resistência à mudança é natural em quase todos os seres humanos até mesmo nos mais jovens, daí que os nossos alunos revelem alguma dificuldade em trabalhar em grupo e em aceitar a avaliação atribuída a esse tipo de trabalho. A desadequação do manual adotado às aprendizagens essenciais também foi uma dificuldade sentida por todos.

A existência de um exame nacional no final deste ciclo de estudo foi sempre uma preocupação para todos nós (professores e alunos) e também para os encarregados de educação. Como vai ser o exame nacional, foi a pergunta que se ouviu em todas as reuniões do início do ano letivo, entre os encarregados de educação e o diretor de cada turma. Sabemos que versará apenas os conteúdos das aprendizagens essenciais, mas seria positivo se, atempadamente, tivéssemos acesso a um modelo de exame.

Contudo com o PFAC também houve melhorias muito importantes: as aprendizagens essenciais levaram a uma menor pressão do tempo uma vez que reduziram os conteúdos a lecionar; a utilização de uma metodologia de trabalho em que o aluno assume um papel mais ativo criou um melhor ambiente de trabalho (um pouco mais descontraído) e os alunos mostraram-se mais motivados. Não temos dúvidas de que tudo isto conduz a melhores aprendizagens.

A sociedade está em constante e rápida mudança, por isso é importante que os alunos se preparem para lidar com a incerteza, que reconheçam que a escola apenas lhes dará o início da sua aprendizagem e que se sintam capazes de trabalhar autonomamente ou em colaboração, de forma a comunicar as suas ideias respeitando sempre as ideias dos outros. Temos a expectativa de estar a contribuir para que isso aconteça e essa é a melhor recompensa para um professor.

Como já foi referido, o AELdF sempre foi um agrupamento onde habitualmente se realiza um número significativo de atividades extracurriculares que visam o desenvolvimento integral dos alunos. Ainda assim, o PFAC veio dinamizar um pouco mais este agrupamento.

MARÍLIA ZORRINHO

ESCOLA SECUNDÁRIA LIMA-DE-FARIA, CANTANHEDE

MARIA CARACITAS

ESCOLA SECUNDÁRIA LIMA-DE-FARIA, CANTANHEDE

Comunicação Visual (II)

A temática da comunicação visual pode ser desafiadora sob vários pontos de vista. A nossa proposta é considerá-la como ponto de partida e não como complemento a outras formas de comunicação sejam elas escritas ou orais.

O que nos pode transmitir uma figura? E uma configuração formada por várias figuras organizadas?

A configuração proposta na nota da revista anterior (figura 1) foi organizada para transmitir vários desafios e proporcionar o interesse no estabelecimento de relações geométricas e também numéricas. O que cada figura transmitiria isoladamente seria pobre. A configuração apresentada criou um contexto visual bastante mais rico. Na 1.^a linha cada quadrado vai sendo decomposto em partes: o todo, ou 1 parte; 2 partes, 3 partes.

A 2.^a linha foi construída a partir da linha anterior. Que relação existe entre cada figura da 2.^a linha e a figura que lhe está acima?

Com este conjunto de figuras foi construído um contexto visual em que cada uma das figuras tem um papel. Podemos dizer que temos um agrupamento por forma consistente, na linha do que defende Arnheim (1998). Há uma ligação intrínseca entre as figuras. Esta ligação é dada pelas divisões do quadrado, obtidas a partir de pontos particulares, e pela textura que acentua a decomposição do quadrado em partes.

Podemos dizer que estamos perante um discurso visual e fazer uma analogia com um texto. O mesmo conjunto de palavras pode originar textos distintos conforme a ordem pela qual são organizadas. Também com estas figuras poderia ter sido construído outro contexto visual.

Qual é o sentido deste discurso visual? Uma coisa é o sentido atribuído por quem o organizou, outra o sentido que lhe vai atribuir quem o encara. Esta configuração foi organizada com o objetivo de estabelecer relações geométricas entre cada uma das partes de cada quadrado e o quadrado inicial. De certo

modo, estabelecer estas relações ajuda a atribuir um significado ao discurso apresentado. Se a obtenção destas relações for feita com recurso a relações geométricas fica também valorizado o discurso visual.

Para estabelecer as relações entre as partes e o todo de cada figura do conjunto recorreremos formalmente às transformações geométricas. No entanto, podemos tornar as justificações mais informais e visualmente mais acessíveis recorrendo a uma linguagem informal e a operações comuns como dobragem, corte e sobreposição das partes. Sejam as partes que estão marcadas ou outras auxiliares que se considerem úteis. Importa também registar que as relações que vão sendo estabelecidas podem ser usadas em figuras subsequentes.

De uma maneira geral as relações são fáceis de obter. No entanto, há duas figuras que nos impõem um raciocínio diferente (figura 2).

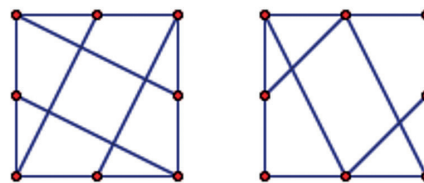


Figura 2

Para ambas as situações, a estratégia de raciocínio mais acessível é recompor a figura original, o quadrado, numa outra figura equivalente em que as relações sejam visualmente mais evidentes (figura 3).

No primeiro exemplo, a relação é obtida a partir da transformação do quadrado original numa cruz equivalente formada por 5 quadrados iguais, concluindo-se assim que o quadrado interior é $\frac{1}{5}$ do quadrado original. No segundo exemplo, a relação é obtida a partir da transformação do quadrado original num

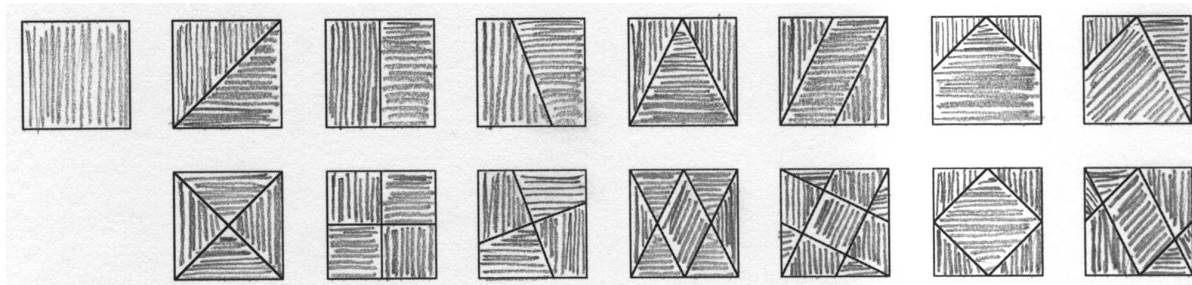


Figura 1

paralelogramo equivalente formado por 3 paralelogramos iguais, concluindo-se assim que o paralelogramo interior é $\frac{1}{3}$ do quadrado original. Em ambos os casos recorreremos a uma figura auxiliar equivalente passível de obter a partir da disseção do quadrado.

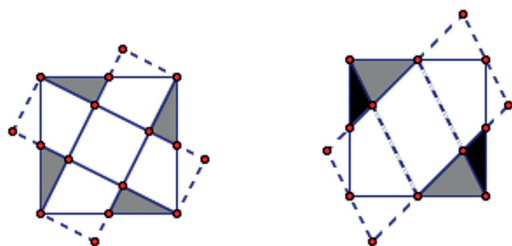


Figura 3

Se quisermos valorizar as relações geométricas, o discurso visual aqui exposto pode associar-se às transformações geométricas e às disseções.

Se quisermos valorizar as relações numéricas, é interessante registar que a configuração exposta é formada por decomposições do quadrado em partes que permitem estabelecer várias relações. Registamos algumas delas separando as frações que as representam em três grupos, com destaque para as frações redutíveis que têm especial significado em algumas das figuras (figura 4).

Para ambos os tipos de relações, para quem atribuiu significado à exploração desenvolvida, podem ser formulados novos problemas. No caso das relações numéricas, surge o interesse em descobrir como obter $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$, por exemplo. Ou descobrir outras decomposições que originem outras frações equivalentes.

$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}$
$\frac{5}{8}; \frac{3}{20}$
$\frac{2}{8}; \frac{4}{8}; \frac{6}{8}; \frac{2}{16}; \frac{4}{16}; \frac{5}{20}$

Figura 4

No caso das relações geométricas, surge o interesse em descobrir outras disseções interessantes análogas às que são apresentadas na figura 3.

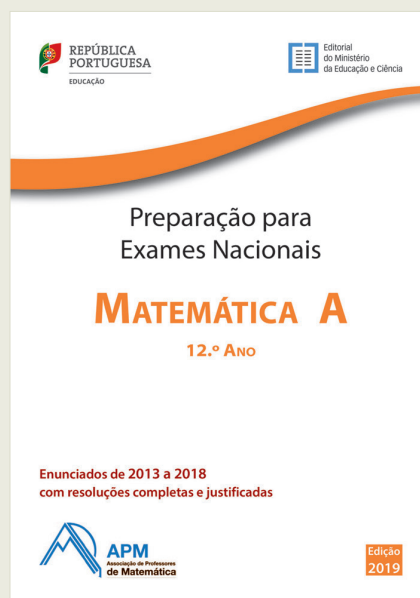
É claro que é aceitável que alguém não atribua significado ao discurso visual aqui exposto e discutido. Da mesma maneira que é preciso aprender a ler palavras e a atribuir-lhes significado, bem como aos textos com elas construídos, também é preciso aprender a ler imagens e a atribuir significado aos contextos visuais.

Os artistas e especialistas de comunicação visual são quem melhor cria e concebe contextos visuais atrativos e com significado. Muitos desses contextos visuais recorrem a séries de formas organizadas e são muito ricos do ponto de vista matemático, não exclusivamente geométrico. Estudar e desenvolver estes contextos visuais, procurando identificar as aprendizagens de literacia visual e as aprendizagens matemáticas envolvidas parece-me ser uma boa estratégia para a realização de aprendizagens interdisciplinares entre a Educação Visual e a Matemática.

Referências

Arnheim, R. (1998). *Arte e percepção visual*. Brasil: Pioneira.

APM



Preparação para Exames Nacionais de Matemática A, 12.º Ano

Enunciados 2013-2018 com resoluções completas

Já está disponível a versão atualizada desta publicação, com resoluções completas e justificadas, elaborada por equipas da Associação de Professores de Matemática.

À venda também na Loja da APM.

Venda ao público: 16,90€;

Preço de sócio: 15,00€

Sabonetes com peso, volume e representações gráficas

JOSÉ CONDEÇO
FELICIDADE MESTRE

Envolver os alunos no projeto de Domínio de Autonomia Curricular (DAC) é fácil, pois privilegia o trabalho prático ou experimental, o desenvolvimento das capacidades autónomas de pesquisa, de relação e de análise, numa interseção das aprendizagens efetuadas em diferentes disciplinas. Esta turma de 6.º ano, composta por trinta alunos, havia vivenciado o desenvolvimento do projeto no ano letivo anterior e a experiência foi bem-sucedida.

A escolha do tema a desenvolver nunca é pacífica dado que os nossos alunos têm ideias fascinantes. Após uma salutar acirrada discussão, em assembleia de turma, os alunos optaram por escolher o meio escolar como fonte de inspiração para o desenvolvimento do projeto de DAC. Vários problemas que os alunos gostariam de resolver foram apresentados. Entre estes, teve maior adesão o arranjar algum dinheiro para uma visita de estudo. De imediato fizeram a ponte com um outro projeto de melhoramento de uma casa de banho do espaço escolar, em que tinha surgido a hipótese de produzir sabonetes.

PESQUISA E ORGANIZAÇÃO DO PROJETO

Assim, todos empolgados, e em pequenos grupos, os alunos começaram por pesquisar e discutir como se produzem os sabonetes e como os poderiam valorizar numa fase pós-produção. Seguiu-se uma fase de apresentação do resultado das pesquisas e ideias de cada grupo e a identificação das necessidades em cada caso específico. Durante este momento, surgiu um comentário de uma aluna sobre o facto do pai ter por hábito realizar experiências em sala de aula e, inclusive fazer velas para eventos de beneficência ou como prenda para pessoas amigas, o que levantou a hipótese de os encarregados de educação ajudarem na produção dos sabonetes.

A conversa entre filha e pai suscitou, de imediato, o interesse do pai, pelo entusiasmo e empolgação com que a filha expôs a situação. Demonstrou o empenho em fazerem algo pela melhoria das condições escolares, ao nível da higiene. Na primeira abordagem com a professora de matemática, o encarregado de educação teve que estabelecer os parâmetros de trabalho: “A Maria falou-me da iniciativa, no âmbito do DAC, sobre a produção de sabão. Em que moldes é que pensou que eu pudesse ser útil?”. Teriam que ser definidos de entre os diferentes métodos de produção de sabonetes pesquisados pelos alunos,

quais os adequados para serem realizados em segurança e com os meios disponíveis na escola.

A escolha recaiu sobre a utilização de dois métodos. A produção principal de sabonetes, para venda, seria através do aquecimento de glicerina, adição de corantes e fragrâncias, e posterior enformação. Simultaneamente, com as devidas precauções de segurança, seriam produzidos sabonetes pela via química utilizando óleos alimentares usados e hidróxido de sódio. Depois deste consenso entre alunos, professores e encarregados de educação (sim, porque foram chamados reforços: uma avó e uma mãe), o projeto estava iniciado e a matemática ativada.

Os alunos efetuaram os primeiros cálculos relativos às despesas na compra de materiais indispensáveis à produção dos sabonetes, à decoração dos mesmos e à forma como os iriam embalar. Pesquisaram preços, compararam, decidiram e distribuíram tarefas. A professora ficou encarregue da aquisição da glicerina. Dado os preços de venda dos corantes e das essências, decidiram utilizar corantes e essências existentes, por exemplo, nos kits educacionais de ciências. O pai ficou responsável por fornecer todo o material necessário para a saponificação do óleo alimentar usado, por ter facilidade de acesso a material de laboratório. Com material mais específico trazido pelos alunos, os sabonetes foram decorados e embalados.

PRODUÇÃO DOS SABONETES

No dia combinado para o grande evento, os grupos de trabalho, um a um, participaram na produção dos dois tipos de sabonetes com a ajuda dos três membros da comunidade escolar. Estas duas vias de produção de sabonetes permitiram trabalhar, adicionalmente aos cálculos de custos, outros aspetos concretos da matemática (cálculo de volumes de formas irregulares, e aplicações práticas de diferentes representações gráficas), e dar uma introdução a um dos passos do método científico: a experimentação.

Começamos pela descrição da utilização dada ao óleo alimentar usado e à solução concentrada de hidróxido de sódio. Cada grupo, de quatro ou cinco alunos, escolheu um volume diferente de solução concentrada de hidróxido de sódio (entre 0,5 ml e 5,0 ml) para adicionar a 10,0 ml de óleo alimentar usado e filtrado. O tópico do cálculo de volumes já tinha sido abordado com

os alunos, não lhes tendo sido explicado onde aplicar e como aplicar. Durante a tarefa, é constatado que a maioria dos grupos calcula, também, a soma do volume da solução concentrada de hidróxido de sódio com o volume do óleo alimentar usado. Como um destes volumes foi diferente para todos os grupos, existia uma certa expectativa nos alunos sobre a consistência do sabonete de cada experiência e talvez uma tentativa de correlacionarem a soma do volume com o resultado final.

A produção de todos os sabonetes decorreu nas mesmas condições de temperatura e tempo de agitação. Após um período de repouso alargado (semanas, para que ocorressem as reações químicas necessárias à consolidação do sabonete e perda da propriedade corrosiva associada ao hidróxido de sódio), foi atribuído uma classificação de 1 a 5 aos diferentes sabonetes consoante a sua consistência e a sua eficácia. Por observação do gráfico que se obteve (figura 1), os alunos chegaram à conclusão de que o melhor sabonete era correspondente à adição de 3,5 ml de solução concentrada de hidróxido de sódio a 10,0 ml de óleo alimentar usado.

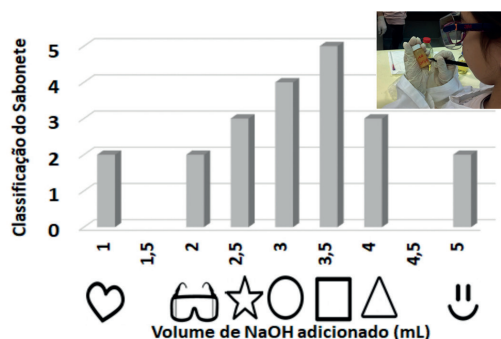


Figura 1. Representação gráfica elaborada com dados dos alunos: classificação do sabonete em função do volume de hidróxido de sódio em ml

Quando da construção do gráfico é observado um aspeto curioso nos símbolos escolhidos por cada um dos grupos de trabalho. Estes símbolos representam emoções, formas geométricas e mais espantoso: material de laboratório.

A modificação de estado físico da glicerina foi acompanhada com grande interesse pelos alunos, dada a possibilidade de escolherem cores e cheiros diferentes para os seus sabonetes personalizados. A passagem de estado físico é algo que já tinha observado antes, se bem que a reversibilidade do mesmo pode não ter sido observado por todos. Este método de produção de sabonetes permitiu mostrar o cálculo do volume de formas irregulares, sendo que os alunos observaram o que aconteceu, e depois foram, por eles próprios descobrir a solução. Dado que em tempos precedentes, estes já tinham debatido como calcular o volume de qualquer objeto, como por exemplo, o volume de um membro qualquer do corpo. Nessa altura, chegaram à conclusão de que se enchessem um recipiente com água, até um volume específico, e posteriormente mergulhassem uma perna, a diferença entre

o volume inicial e o volume final, seria o volume do membro, neste caso a perna. Este conhecimento, esquematizado na figura 2, facilitou o entendimento dos procedimentos e os conteúdos relativos à matemática, nomeadamente o cálculo do volume de formas irregulares.

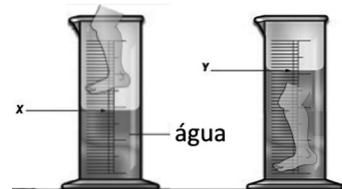


Figura 2. Esquema ilustrativo do debate sobre volume de formas irregulares, por exemplo, membro do corpo humano

MAIS MATEMÁTICA AINDA ...

Numa abordagem final, no dia da produção dos sabonetes, e em jeito de conversa em sala de aula, do porquê da utilização de sabonetes para se retirar a sujidade das mãos, os alunos descobriram mais um modo de representação gráfica. Neste texto não se abordará a parte química da explicação que também lhes foi fornecida.

Assim, ao serem confrontados com a pergunta “porque é que o sabonete limpa as nossas mãos e em que condições isso ocorre?”, foi constatado durante o diálogo de que necessitavam da presença de três elementos: sujidade, água e sabonete. Na presença de cada um dos elementos individuais, os alunos concluíram que não limpariam a sujidade. Juntando os elementos dois a dois, no caso em que só tinham água e sabonete (ou seja, nem sujidade teriam), os alunos admitiram que continuavam a ficar com as mãos limpas, tal como já estavam. Ao descreverem o que aconteceria quando combinavam a sujidade com água, diversos alunos foram capazes de identificar que muito provavelmente ainda ficariam com as mãos sujas. Já no caso da combinação do sabonete com a sujidade, houve quem se lembrasse do sabonete líquido. Porém, todos concordaram consensualmente que o resultado não seriam umas mãos limpas mas, sim provavelmente, mais escorregadias. À medida que se ia conversando sobre as combinações dois a dois, as respetivas áreas iam sendo assinaladas na representação gráfica (figura 3). Por fim, os alunos verificaram a importância da reunião dos três elementos: a água interage com o sabonete, que por sua vez interage com a sujidade e a prepara para ser retirada por ação da água.

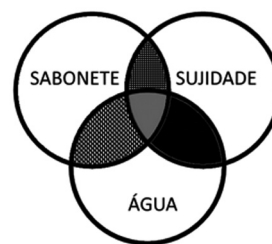


Figura 3. Diagrama de Venn utilizado para explicar que a higiene decorre na presença de sujidade, água e sabonete

O EMPREENDEDORISMO

Os alunos demonstraram curiosidade em relacionar a quantidade de glicerina em barra utilizada na enformação, com a quantidade de sabonetes que iriam obter, e com a quantidade de glicerina numa barra inteira. Começaram por tirar medidas à barra de glicerina para calcularem o volume da barra grande e, por estimativa, atribuíram uma fração que correspondia à quantidade de glicerina que cada grupo utilizou. De seguida, calcularam o custo correspondente à fração de glicerina utilizada por cada grupo. Após estes cálculos, era ainda necessário saber a quantidade de sabonetes que cada grupo tinha enformado, isto porque as formas não eram as mesmas em cada grupo e também porque havia formas de tamanhos diferentes.

Estavam criadas as condições que possibilitaram o passo seguinte – a desenformação – e os alunos mostravam-se confiantes e entusiasmados. A veia de empreendedor estava ao rubro, sendo que necessitavam agora de se certificar se a criação do suposto negócio seria rentável, uma vez que existiam despesas iniciais, nomeadamente a compra de barras de glicerina. Nesta altura juntaram-se todos os sabonetes produzidos pelos diferentes grupos. Tínhamos outros problemas para resolver. Era necessário confrontar estratégias. Os alunos fizeram o levantamento do que ainda faltava fazer, após a desenformação dos sabonetes. Era preciso embalar, pesar, decorar, cortar, medir, ... não necessariamente por esta ordem, pelo que os alunos rapidamente se reorganizaram, criando uma linha de montagem. A pesagem dos sabonetes embalados surgiu da ideia de um aluno, pois assim seria mais fácil atribuir um valor justo a cada embalagem, uma vez que iria haver embalagens de sabonetes com quantidades e pesos diferentes. Outra sugestão, que surgiu de uma aluna, foi a de fazerem cartões para juntarem às embalagens.

O produto estava finalizado e os alunos maravilhados com os seus desempenhos. Novamente reunidos, os alunos agruparam as embalagens pelo peso e foi necessário debater sobre o preço de venda dos sabonetes, uma vez que havia embalagens de tamanhos diferentes. A partir de uma embalagem mais pesada atribuíram um valor monetário e fizeram corresponder esse valor, de forma proporcional, às outras embalagens com pesos diferentes da embalagem inicial. Por fim foi efetuado o cálculo correspondente ao total da receita, no caso de venderem todos os sabonetes e tomaram decisões relativas aos pontos de venda (sala dos professores e corredores da escola para aquisição pelos professores e encarregados de educação) e à distribuição dos grupos nos horários acordados para o efeito. Os alunos iriam experimentar na realidade o sucesso ou não do seu empreendedorismo. No momento de escrita deste texto, podemos informar que os sabonetes produzidos estão todos vendidos, existindo encomendas por entregar.

Na figura 4 estão documentadas as diversas etapas decorrentes da execução do projeto.



Figura 4. Diversas etapas decorrentes da execução do projeto: planeamento pelos alunos; produção de sabonetes de glicerina; produção de sabonetes partindo de óleos alimentares usados; cálculos finais, desenformação, decoração e embalagem; e o resultado final dos dois tipos de sabonetes

Por fim, e em assembleia de turma, foi feita a análise dos resultados obtidos, onde se concluiu que o saldo da atividade foi bastante positivo e o projeto um sucesso. A utilização da matemática na produção de sabonetes tornou-se relevante e fundamental. O trabalho efetuado como turma e em grupos mais pequenos fortaleceu o desenvolvimento dos alunos a nível da liberdade de atuação, confiança, colaboração e, sobretudo, do comprometimento. Os alunos testaram e valorizaram a importância da disciplina de matemática aplicada a outras ciências e em atos de cidadania financeira relacionados com a vida real.

JOSÉ CONDEÇO

CERENA, DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA, INSTITUTO TÉCNICO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

FELICIDADE MESTRE

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DO BARREIRO

Resolução de equações do 2.º grau com o *Algebra Tiles*: uma experiência no 8.º ano de escolaridade

PAULO FERREIRA CORREIA

ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA COM O *ALGEBRA TILES*

Na opinião de Leitze e Kitt (2000) a álgebra é realmente possível para todos. Contudo, muitos estudantes tentam aprender álgebra recorrendo essencialmente à memorização e muitos professores usam métodos que incentivam esse comportamento.

Durante o processo de aprendizagem, os alunos enfrentam erros e dificuldades que devem ser observados atentamente pelo professor, com o propósito de encontrar procedimentos que os ajudem a ultrapassar as dificuldades com que se vão deparando e os erros que vão emergindo. “Pensar a escola na contemporaneidade é lidar com crianças inquietas, menos propensas a ouvir por muito tempo, mas ao mesmo tempo, mais aguçadas ao uso das tecnologias recentes ...» (Neta, 2012, citado em Neta & Silva, 2014, p. 73).

Numa intervenção de ensino com recurso ao *Algebra Tiles*, construído em cartolina, envolvendo uma turma do 8.º ano de escolaridade, Teixeira (2012) concluiu que de entre os materiais utilizados, na intervenção de ensino, o *Algebra Tiles* foi o material preferido por todos os alunos, considerando-o divertido e eficaz; com o passar do tempo os alunos abandonaram o material, para passarem a fazer apenas os esboços no papel; esta ferramenta motivou os alunos para a aprendizagem dos conteúdos; os esquemas apoiaram a aprendizagem dos casos notáveis da multiplicação de polinómios, com compreensão, ajudando ainda a desmontar o erro tão comum de considerar a igualdade $(a+b)^2 = a^2 + b^2$; a estratégia revelou muito potencial na simplificação da fatorização de polinómios do segundo grau com uma variável.

DESCRIÇÃO DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Reconhecendo o potencial educativo do GeoGebra, dos *applets* e dos dispositivos móveis no ensino e na aprendizagem da resolução de equações do 2.º grau, implementou-se uma intervenção de ensino apoiada neste *software* e no telemóvel. A sua implementação decorreu no primeiro período do ano letivo 2017/2018, em duas turmas do 8.º ano de escolaridade de uma escola secundária com 3.º ciclo do concelho de Barcelos.

Recorreu-se ao GeoGebra para construir um *applet* do *Algebra Tiles* (<https://ggbm.at/rtEKC7QH>). Depois de construído, foi disponibilizado aos alunos para ser utilizado no telemóvel. A versão livre de GeoGebra para telemóvel constituiu uma ferramenta essencial para a implementação da intervenção de ensino, ao estar acessível a todos os alunos, que puderam explorar o *applet*, por sua iniciativa, tanto dentro como fora da sala de aula.

Neste estudo, o *Algebra Tiles* apresenta-se como uma estratégia possível na resolução de equações do 2.º grau, alternativa ou complementar do procedimento de “resolução de equações de 2.º grau tirando partido da lei do anulamento do produto” (Programa e metas curriculares de matemática para o ensino básico, p. 23).

As tarefas foram realizadas num ambiente de sala de aula favorável à experimentação, à partilha de ideias e à liberdade de escolha da melhor estratégia de resolução dos exercícios propostos. Os alunos foram distribuídos por grupos de trabalho e podiam recorrer ao telemóvel, ao tablet ou computador portátil, para utilizarem o *applet* construído em GeoGebra, pelo professor de matemática, especificamente para a intervenção de ensino.

A intervenção decorreu em 12 aulas de 90 minutos, sendo que, aquando da correção dos exercícios no quadro, o *Algebra Tiles* era integrado num processo de resolução, sempre que estavam envolvidos binómios do primeiro grau e polinómios do 2.º grau numa variável: uma aula destinada à multiplicação de binómios, com o principal objetivo de os alunos se familiarizarem com o *applet*; duas aulas para os casos notáveis da multiplicação de polinómios; duas aulas para a fatorização de polinómios; quatro aulas para a resolução de equações do 2.º grau com uma incógnita; três aulas de consolidação das aprendizagens e resolução de problemas.

As tiras utilizadas no *Algebra Tiles* consistem em quadrados pequenos, quadrados grandes e retângulos de largura igual à medida do lado dos quadrados pequenos e comprimento igual à medida do lado dos quadrados grandes, construídos em duas cores; por exemplo, azul para representar o sinal positivo e vermelho para representar o negativo, conforme se apresenta na figura 1.



Figura 1. Tiras do Álgebra Tiles

A título de exemplo, a equação $x^2 + 4x + 4$ pode ser resolvida com o apoio da composição em *Algebra Tiles* que se pode ver no telemóvel do aluno, na figura 2.

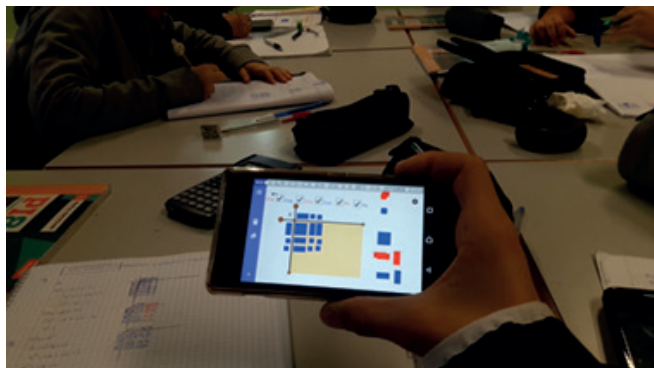


Figura 2. Fotografia de um momento de aula

Uma vez que o segundo membro da equação já é zero, o aluno começou por preencher o centro da tabela com as tiras algébricas coloridas, por forma a obter um retângulo, sendo que o retângulo de tiras justapostas terá que representar a expressão $x^2 + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1$, uma vez que o primeiro membro da equação é $x^2 + 4x + 4$. Motivo pelo qual o aluno considerou um quadrado azul grande (x^2) quatro retângulos azuis ($4x$) e quatro quadrados azuis pequenos (4).

Nas duas entradas da tabela, o aluno colocou as tiras algébricas referentes a cada um dos fatores correspondentes à fatorização do primeiro membro da equação, recorrendo a retângulos e a quadrados pequenos. Assim, na entrada vertical o aluno colocou um retângulo seguido de dois quadrados, na entrada horizontal um retângulo seguido de dois quadrados e preencheu o quadro atendendo às regras dos sinais da multiplicação. Desta forma, o aluno obteve a fatorização $(x+2)(x+2)$, mas poderia ter considerado apenas representações negativas (tiras vermelhas) obtendo a expressão equivalente $(-x-2)(-x-2)$. Obtida a fatorização, a equação $(x+2)(x+2)=0$ é equivalente à equação inicial e fica resolvida por aplicação da lei do anulamento do produto.

As equações consideradas nas aulas foram do tipo dos exemplos da página 86 do caderno de apoio, complementar ao documento Metas Curriculares de Matemática para o 3.º ciclo do Ensino Básico.

ANÁLISE DAS PRODUÇÕES DOS ALUNOS EM DUAS FICHAS DE AVALIAÇÃO

Nos exemplos trabalhados, no grupo turma, foram sempre explorados vários processos e, aquando da resolução dos exercícios propostos, os alunos eram totalmente livres para escolher o processo de resolução. No quadro eram sempre apresentados pelos alunos todos os métodos de resolução obtidos em trabalho de grupo.

Os alunos recorreram ao *Algebra Tiles* para fatorizar polinómios do 2.º grau com uma variável, desenvolver o quadrado do binómio, multiplicar binómios e verificar o resultado obtido por outro processo de resolução (ver figura 3).

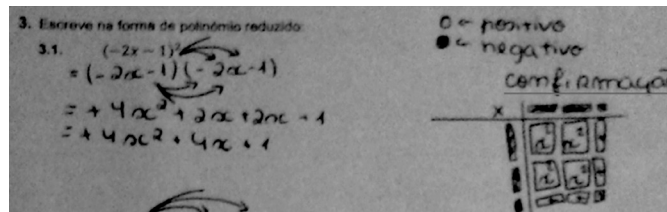


Figura 3. Confirmação da resolução com o *Algebra Tiles*

Na Tabela 1, relativamente a duas fichas de avaliação aplicadas aos alunos, apresenta-se uma análise da utilização do *Álgebra Tiles* na resolução dos exercícios das fichas de avaliação, passíveis da sua aplicação.

Tabela 1. Utilização do *Algebra Tiles* nas fichas de avaliação.

Identificação das fichas de avaliação	Conteúdos	Utilização do <i>Algebra Tiles</i> (%)
1.ª ficha de avaliação do 1.º período (332 respostas)	Escrita na forma de polinómio reduzido Fatorização de polinómios Resolução de equações	0,3 14,7 12,0
Total		27,0
1.ª ficha de avaliação do 2.º período (88 respostas)	Resolução de equações	18,2

Em relação à primeira ficha de avaliação foram analisadas três questões. Na primeira questão analisada pedia-se aos alunos para escreverem na forma de polinómio reduzido as expressões: $(x+1)(x+1)$; $(-2x-1)(2x+2)$; $(-2x+2)^2$; $(-2x-1)^2$.

Na segunda questão analisada pedia-se aos alunos para fatorizar os seguintes polinómios: $-3x^2-6x$; x^2+2x+1 ; $4x^2-4x+1$; $2x^2-6x$.

Na terceira questão pedia-se para resolver as seguintes equações: $2+x^2=6$; $-2x^2+6x=0$; $4x^2+4x+1=0$; $-6+(x-1)^2=-2$; $x^2-4x=0$.

Relativamente à segunda ficha de avaliação, foi analisada uma única questão, com duas alíneas, na qual se pedia aos alunos para resolverem as seguintes equações: $(-x-2)^2-36=0$; $(2x-8)^2=4$.

Analisadas as produções dos alunos, conclui-se que, a dada altura do ano letivo, os alunos já não tinham necessidade de completar

o quadro do *Algebra Tiles* para escrever uma fatorização correta do polinómio. Por exemplo, na resolução da figura 4 o aluno não coloca o símbolo “-” em quatro retângulos, mas escreve corretamente o termo. Por vezes os alunos desenhavam apenas alguns retângulos para ajudar a efetuar uma representação mental da situação.

Figura 4. Resolução apresentada por um aluno

Recorrendo apenas a processos tradicionais, a equação apresentada na figura 4 pode ser resolvida recorrendo aos casos notáveis da multiplicação de polinómios, nomeadamente a diferença de quadrados, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(2x-8)^2 &= 4 \Leftrightarrow \frac{(2x-8)^2}{4} = \frac{16}{4} = (2x-8)^2 = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x-8)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (2x-8-4)(2x-8+4) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x-8-4 = 0 \vee 2x-8+4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 12 \vee 2x = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 2. \end{aligned}$$

Em alternativa, o aluno poderia transformar a equação dada numa equação do tipo $x^2 = k$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(2x-8)^2 &= 4 \Leftrightarrow \frac{(2x-8)^2}{4} = \frac{16}{4} = (2x-8)^2 = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x-8)^2 = 16 \Leftrightarrow 2x-8 = 4 \vee 2x-8 = -4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = 12 \vee 2x = 4 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 2. \end{aligned}$$

Contudo, o aluno (ver figura 4) decidiu começar por desenvolver o quadrado do binómio, chegando à equação $x^2 - 8x + 16 = 4$. Em alternativa à escrita de uma fatorização do primeiro membro por aplicação do quadrado do binómio, recorre ao *Algebra Tiles* para obter a equação equivalente $(x-4)^2 = 4$.

Se o aluno subtraísse 4 a ambos os membros da equação obter a equação equivalente $x^2 - 8x + 12 = 0$. Ora, a fórmula resolvente só faz parte do programa de matemática para o 9.º ano de escolaridade. Nestas situações, ao perceberem que não podiam

aplicar nenhum dos casos notáveis, os alunos recorreram, naturalmente, ao *Algebra Tiles*, para obterem as duas soluções reais distintas (ver figura 5).

Figura 5. Resolução de uma equação do 2.º grau completa com duas soluções reais distintas

Na Tabela 2 efetua-se a distribuição das resoluções obtidas pelos alunos com recurso ao *Algebra Tiles* (ver figura 5): Incorretas (I), sempre que o aluno obteve zero pontos nessa questão; Corretas (C), sempre que o aluno obteve a totalidade dos pontos atribuídos a essa questão; Parcialmente Corretas do tipo 1 (PC1), sempre que o *Algebra Tiles* conduziu a uma fatorização correta e o aluno não obteve a pontuação total atribuída à questão; ou Parcialmente Correta do tipo 2 (PC2), sempre que o *Algebra Tiles* conduziu a uma fatorização incorreta e o aluno obteve cotação noutras etapas da resolução da questão.

Tabela 2. Distribuição das resoluções dos alunos com *Algebra Tiles*.

Identificação das fichas de avaliação	Conteúdos	Tipo de resolução (%)			
		C	PC1	PC2	I
1.ª ficha de avaliação do 1.º período (90 respostas)	Escrita na forma de polinómio reduzido	1,1	0	0	0
	Fatorização de polinómios	43,3	2,2	3,3	5,6
	Resolução de equações	32,2	5,6	5,6	1,1
	Total	77	8	9	6
1.ª ficha de avaliação do 2.º período (16 respostas)	Resolução de equações	56	25	19	0

Figura 6. Caracterização das resoluções dos alunos

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a intervenção de ensino tirou-se o máximo proveito do *software* e do telemóvel na motivação para a aprendizagem dos diferentes conteúdos envolvidos, nomeadamente: fatorização de polinómios do 2.º grau numa variável; lei do anulamento do produto; casos notáveis da multiplicação de polinómios; multiplicação de polinómios; e resolução de equações do 2.º grau. O recurso a estas ferramentas revelou-se uma excelente estratégia na promoção de uma atitude positiva em relação à matemática, dado o envolvimento da grande maioria dos alunos na realização das tarefas propostas.

A combinação da metodologia de trabalho de grupo, com os dispositivos móveis e o *applet* construído com o *software* GeoGebra revelou-se bastante eficaz na motivação dos alunos para a aprendizagem do tópico em estudo, promoveu a discussão e a partilha de ideias e favoreceu a consolidação das aprendizagens.

Terminada a intervenção de ensino, concluiu-se sobre a eficácia da estratégia como uma excelente alternativa aos processos tradicionais de resolução de equações do 2.º grau (completas e incompletas) com uma incógnita, ou mesmo na verificação da resolução efetuada recorrendo a outros processos de resolução. Também se revelou uma ótima estratégia de motivação ao nível do trabalho autónomo fora da sala de aula.

Na intervenção de ensino destacaram-se as discussões, nos grupos de trabalho, desencadeadas pelas diferentes fatorizações obtidas, com o *Algebra Tiles*, para o mesmo polinómio, por exemplo, $(x+2)(x+2)$, ou $(-x-2)(-x-2)$.

Os resultados deste estudo apontam na mesma direção dos obtidos por outros autores (e. g. Teixeira, 2012; Leitze e Kitt, 2000), especialmente na aprendizagem da fatorização de polinómios do segundo grau com uma variável, tópico em que os alunos costumam revelar dificuldades.

Referências

- Leitze, A. R. & Kitt, N. A. (2000). Using Homemade *Algebra Tiles* to Develop Algebra and Prealgebra Concepts. *Mathematics Teacher*, 93(6), 462-520.
- Ministério da Educação (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Autor.
- Ministério da Educação (2013). *Caderno de apoio 3.º ciclo*. Lisboa: Autor.
- Neta, L. B. & Silva, F. O. (2014). O que vem a ser um *software* “Educativo”? *Construção Psicopedagógica*, 22(23), 72-80.
- Teixeira, M. S. (2012). *A utilização de materiais manipuláveis em tecnologia no ensino e aprendizagem da fatorização de polinómios e resolução de equações do 2º grau no 8.º ano*. (Relatório de mestrado não publicado). Universidade do Minho, Braga.

PAULO FERREIRA CORREIA

ESCOLA SECUNDÁRIA DE BARCELOS

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Estudo de transformações geométricas de gráficos

A tarefa que a seguir se apresenta foi pensada para alunos do 10.º ano. Pretende-se que eles reconheçam e interpretem graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $a.f(x)$, $f(b.x)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, a , b , c e d números reais, a e b não nulos, bem como caracterizem as referidas funções.

Para a realização da tarefa os alunos terão de aceder a uma aplicação construída com o Geogebra. A função base tem como domínio e contradomínio um conjunto limitado, com o objetivo de permitir aos alunos observar quais as transformações geométricas que afetam estas características, entre outras, das funções. O facto dos extremos inferior e superior do contradomínio serem simétricos poderá dificultar a observação da relação entre o contradomínio de $f(x)$ e de $-f(x)$, contudo esta característica da função f permitirá ver até que ponto os alunos conseguem ir além do que observam, mostrando que percebem a transformação em causa. No enunciado da tarefa optou-se por só solicitar aos alunos a denominação de algumas transformações geométricas (translação e reflexão), por se entender que os nomes de outras não lhes serão familiares (contração e dilatação). Pretende-se que os seus nomes sejam introduzidos apenas aquando da discussão e síntese da tarefa com o grupo turma.

Apesar da aplicação ter sido construída no Geogebra Clássico, os alunos poderão aceder-lhe com os seus telemóveis através do browser. A opção de a aplicação não ter sido construída para a utilização da aplicação da calculadora gráfica do Geogebra prende-se com o facto de os alunos apresentarem alguma resistência na instalação de aplicações destinadas ao trabalho escolar. Porém, pode ser que com esta utilização estes vejam o potencial do Geogebra e instalem posteriormente algumas das suas aplicações por sua iniciativa.

SÍLVIA ZUZARTE

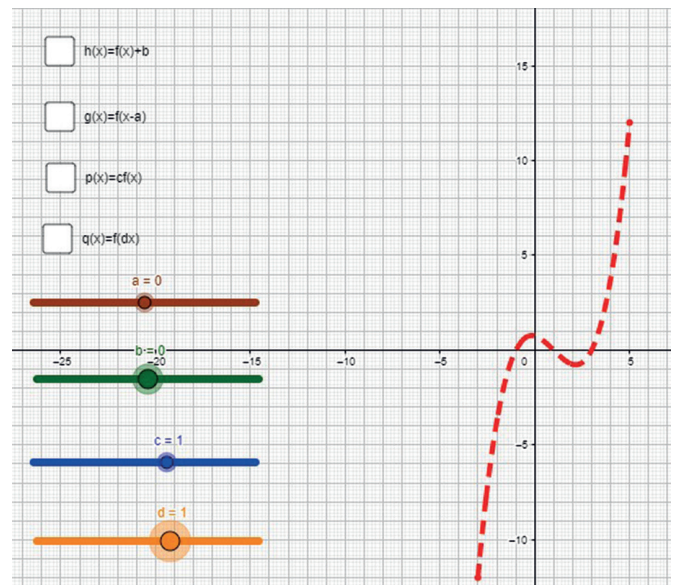
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CASQUILHOS

Estudo de transformações geométricas de gráficos

1. Acede ao link bit.ly/trgrafi. Observas a tracejado a representação gráfica de uma função f de domínio $[-3, 5]$. Estão também representados quatro seletores a , b , c e d que variam no intervalo $[-5, 5]$, mas que poderiam variar em $\mathbb{R}$ no caso de a e b , e em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no caso de c e d .

Indica o contradomínio e os zeros de f .

2. Seleciona a caixa $h(x)=f(x)+b$ e move o seletor b . Tornaste visível o gráfico de uma função h tal que $h(x)=f(x)+b$. Observa a influência do parâmetro b no gráfico da função h relativamente ao gráfico da função f . O que observas?
3. Consegues obter o gráfico da função h através do gráfico da função f usando uma transformação geométrica. Caracteriza essa transformação.
4. Para uma transformação deste tipo, indica quais das seguintes características da função f se mantinham iguais na função h : zeros, domínio, contradomínio, intervalos de monotonia, extremos absolutos e relativos.
5. Esconde o gráfico da função h , seleciona a caixa $g(x)=f(x-a)$ e move o seletor a . Tornaste visível o gráfico de uma função g tal que $g(x)=f(x-a)$. Observa a influência do parâmetro a no gráfico da função g relativamente ao gráfico da função f . O que observas?
6. Consegues obter o gráfico da função g através do gráfico da função f usando uma transformação geométrica. Caracteriza essa transformação.
7. Para uma transformação deste tipo, indica quais das seguintes características da função f se mantinham iguais na função g : zeros, domínio, contradomínio, intervalos de monotonia, extremos absolutos e relativos.
8. Esconde o gráfico da função g , seleciona a caixa $p(x)=cf(x)$ e move o seletor c . Tornaste visível o gráfico da função p tal que $p(x)=cf(x)$. Observa a influência do parâmetro c no gráfico da função p relativamente ao gráfico da função f . O que observas?
9. Faz $c=-1$. Consegues obter o gráfico da função p através do gráfico da função f usando uma transformação geométrica. Caracteriza essa transformação.



10. Para qualquer valor de c , indica quais das seguintes características da função f se mantinham iguais na função p : zeros, domínio, contradomínio, intervalos de monotonia, extremos absolutos e relativos.
11. Esconde o gráfico da função p , seleciona a caixa $q(x)=f(dx)$ e move o seletor d . Tornaste visível o gráfico da função q tal que $q(x)=f(dx)$. Move o seletor d e observa a influência do parâmetro d no gráfico da função q relativamente ao gráfico da função f . O que observas?
12. Faz $d=-1$. Consegues obter o gráfico da função q através do gráfico da função f usando uma transformação geométrica. Caracteriza essa transformação.
13. Para qualquer valor de d indica quais das seguintes características da função f se mantinham iguais na função p : zeros, domínio, contradomínio, intervalos de monotonia, extremos absolutos e relativos.
14. Elabora um relatório onde descrevas os principais aspetos do trabalho efetuado, bem como as descobertas realizadas.

Implementação de dinâmicas de Gamificação no Moodle

Quer por questões profissionais quer de investigação, tenho dinamizado várias formações (principalmente direcionadas para docentes), através do Moodle, sendo algumas presenciais e outras à distância.

Especialmente para a formação à distância, um dos principais obstáculos é a própria natureza da formação à distância: exige disciplina, rotina de trabalho e automotivação.

Nessa perspetiva, tenho vindo a adotar, através de alguns módulos *core* e outros adicionais, algumas funcionalidades com base na gamificação com o objetivo de motivar e verificar outro tipo de impactes nos alunos.

Os módulos utilizados e analisados foram *Badges*, *LevelUp!*, *Progress Bar* e *Ranking*.



Figura 1. Badges

BADGES

Foram atribuídos *badges* como forma de servir de reforço positivo, criar competitividade positiva e servir como evidência de objetivos atingidos. A implementação de badges vem como funcionalidade integrada no *core* das versões mais recentes do Moodle, sendo possível atribuir estas *medalhas* quer de forma manual quer, mais interessante, de forma automática definindo critérios de atribuição. Esses critérios podem ser diversos e combinados. Por exemplo, atribuir o *badge* dourado a todos os alunos com mais de 90% em determinado teste ou o *badge* de colaboração para o aluno de tenha mais participação no fórum de suporte ou ainda mostrando a combinação de vários critérios: atribuir o *badge* de conclusão da disciplina a todos os alunos/alunos que conclua com sucesso as várias tarefas exigidas ao longo do período.

Como referido anteriormente esta funcionalidade pode ter várias mais-valias, desde o reforço positivo, permitindo aos participantes sentirem de alguma forma que o seu esforço está a ser reconhecido, podendo inclusive reforçar determinados comportamentos que pretendemos valorizar (o exemplo referido acima da colaboração), até para o professor obter informação

acerca do desempenho dos vários participantes de uma forma visual e informal, mas bastante útil.

De referir ainda o efeito cumulativo que esta funcionalidade permite. Esta funcionalidade permite um *histórico*, ou seja, um professor que encontre pela primeira vez determinado aluno consegue automaticamente saber se tem um *histórico* de colaboração, de cumprimento de tarefas e prazos, etc.

Apesar deste tipo de dinâmica na realidade não implicar necessariamente tecnologia, pois poderíamos criar *badges* analógicos (autocolantes, ou outro sistema semelhante), na realidade, a possibilidade de automatismo torna o processo muito mais fiável e operacional.

É uma dinâmica que funciona bastante bem presencialmente, mas ainda melhor como suporte para educação à distância, onde o suporte, o reforço positivo, a motivação e o registo de evidências é mais difícil do que em regime presencial.

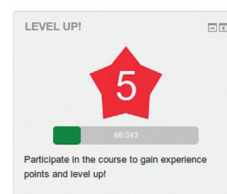


Figura 2. Level Up!

LEVEL UP

Foi criado um sistema de níveis hierárquicos. Às várias atividades ou ações foi atribuído um valor de pontos: a cada utilizador que conclui ou realiza a atividade é atribuído determinado valor. Ao acumular x pontos, esse utilizador sobe de nível. Esta evolução, além de servir como motivador, serve também como precedência para aceder a outros recursos e atividades, funcionando como instrumento de aferição de algum grau de conhecimento ou, pelo menos, de tempo de dedicação.

Ao contrário dos *badges* referidos acima, esta funcionalidade não integra a versão *core* do Moodle, e implica, por isso a instalação do respetivo *plugin*.

Funciona bastante bem de forma a verificar o nível de proficiência em determinados exercícios, e como forma motivadora para recompensar o tempo e a dedicação dos participantes, até aí muitas vezes sem registo de evidências.

Como exemplo, criou-se uma atividade de teste com perguntas aleatórias, garantindo que a repetição daria nova experiência e conhecimento. Para cada teste realizado com sucesso seriam atribuídos 10 pontos, sendo que o utilizador apenas poderia

avançar para o próximo módulo após passar para o nível 2, que implicaria acumular 50 pontos. Assim, se os pontos vierem apenas do teste, garantimos que o participante realizou com sucesso 5 testes. Mais uma vez todo o processo é automático, ou seja, o sistema está preparado para apenas *desbloquear* o módulo 2 para os participantes que estejam no nível 2

Por fim, funciona como fonte de competitividade, pois como podemos ver de seguida funciona em perfeita sinergia com a funcionalidade de *ranking*, ainda que apenas pelo sistema de níveis, sendo uma fonte de informação para o professor acerca da dedicação de cada um, e uma fonte de competição entre pares e em consequência uma fonte de motivação.

Pos	Fullname	Points
1	[Avatar]	10.0
2	[Avatar]	8.0
3	[Avatar]	6.0

Figura 3. Ranking

RANKING

Usando a mesma mecânica dos pontos atribuídos a cada atividade, foi criada uma tabela de *ranking* de forma a, publicamente, motivar os alunos com melhor desempenho. Para evitar alguns efeitos perversos das listas de ordenação, este bloco permite uma seriação semanal, mensal e global. Para os alunos funciona como motivador e gerador de competitividade e para os professores dá informação acerca do desempenho dos alunos de uma forma temporal e gráfica.

Como referido para a propósito do *level up*, esta dinâmica cria uma competição entre os participantes que funciona como motivadora, tentando eliminar os efeitos perversos dos sistemas de *ranking*. Além disso é uma referência para o professor, pois permite recolher de forma seriada a prestação e dedicação dos vários alunos. Funciona em sinergia com o *level up*, pois o sistema de pontos pode ser comum às duas funcionalidades.

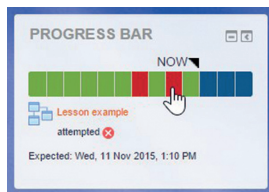


Figura 4. Progress Bar

PROGRESS BAR

Foi usado um bloco de progresso para os alunos, de forma a que cada aluno possa saber em termos das tarefas esperadas quais as que já realizou com sucesso. Especialmente para a perspetiva de formação à distância este bloco é um recurso bastante útil, pois permite a gestão pessoal de cada aluno em termos das tarefas a realizar. Para os professores, permite, de uma forma simples e gráfica, ter uma panorâmica geral do desempenho dos seus

alunos e ao mesmo tempo aferir o seu próprio desempenho e qualidade dos recursos criados.

CONCLUSÃO

Estas funcionalidades foram implementadas num curso de formação de professores, no qual foi pedido, que depois de testadas, as implementassem junto dos seus alunos.

Foi perguntado aos professores quais das funcionalidades a implementar consideravam com maior potencial.



Figura 5. Resultados potencial para uso em sala de aula

Metade dos professores consideraram que a funcionalidade *Progress bar* tem maior potencial de utilização.

Durante este piloto apresento algumas conclusões que retirei e que ficam como base para reflexão futura:

- O conceito de gamificação está bastante difuso, sendo que vários participantes formularam diferentes definições para o mesmo conceito;
- A eficácia e impacto das diferentes dinâmicas depende bastante do perfil dos intervenientes e do próprio contexto (professores, alunos, temáticas, etc.);
- A emergência e massificação dos dispositivos móveis veio permitir a implementação de forma generalizada deste tipo de dinâmicas.

As tecnologias, neste caso especificamente o Moodle, permitem automatizar e operacionalizar várias dinâmicas reconhecidas como valiosas.

O próprio conceito de gamificação e as condições logísticas foram enumerados como os principais obstáculos à utilização de dinâmicas de gamificação no Moodle.

A escolha e valorização dos professores de determinadas dinâmicas foi também um fator interessante de análise, em especial, porque, pela minha experiência pessoal, há uma tendência do lado dos alunos para a valorização das dinâmicas menos valorizadas pelos professores (*ranking* e *levelup* normalmente mais associados a competição).

O potencial da gamificação foi bastante bem-recebido pelos participantes, sendo que todos demonstraram grande interesse e reconhecimento do seu potencial educativo, mas claramente ainda existe um longo caminho a percorrer para a sua utilização efetiva e generalizada.

JOÃO Mouro

FCT, UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Construção do conceito de números primos por meio de jogos

MARTHA C. S. S. C. MAÇUMOTO
SANDRA G. SCHNEIDER

O conceito de número primo é base fundamental para outros conceitos matemáticos tais como: fração, simplificação, decomposição de números, radiciação. Dessa forma, entende-se que este é de extrema importância na matemática, o qual dá fundamento para alguns conceitos e estrutura para outros. Apesar de tamanha relevância, na maioria das vezes, o conceito de número primo não é aprendido de forma efetiva pelos alunos, gerando assim grandes problemas futuros em outros conteúdos, que o acompanharão por toda a vida escolar.

Neste artigo apresenta-se a uma experiência com uma turma de 6.º ano do ensino fundamental, de uma escola particular na cidade de Cruzeiro - SP, onde se pretende desenvolver uma estratégia de ensino a partir do lúdico, onde consiga estabelecer uma aprendizagem mais efetiva de números primos através de jogos de matemática.

A aplicação do jogo pretende responder ao seguinte problema de pesquisa: “Como construir o conceito de números primos por meio de jogos de conhecimento?” Para responder tal questão, temos como objetivo geral identificar os números primos. E para dar estrutura, traçamos como objetivos específicos reconhecer os números primos nos jogos; diferenciar os números primos dos não primos; compreender o conceito de número primo.

Cada vez mais tem-se comprovado que o uso de jogos é uma excelente metodologia de ensino e que tem trazido resultados muito positivos na área do ensino de matemática. Segundo Grando (1995), o jogo matemático é uma atividade completa, que possui começo, meio e fim.

Jesus (1999) afirma que “[...] durante a prática com os jogos, pode ser possível explorar a interação social, a cooperação, a diversão e a aquisição de conhecimentos específicos.” O autor ainda sustenta que o jogo pode ser usado com várias finalidades, mas que é importante ter objetivos bem definidos na sua proposta.

Para ocorrer a aprendizagem significativa, o prazer é elemento indispensável. Porém é necessário ter conhecimento que este entusiasmo não provém unicamente de jogos ou brinquedos, a ludicidade também depende da atitude dos alunos e do professor em relação a estes (Oliveira e Santos 2014). Quartieri e Rehfeldt (2004 citado por Oliveira e Santos 2014), ainda complementam que o uso do jogo só gera resultados significativos se vier

acompanhado de reflexões e indagações propostas pelo educador.

Para fazer uso de jogos como metodologia de ensino não é necessária uma receita de quando ou como aplicá-los. É possível fazer uso desta ferramenta para introduzir um conteúdo, para aplicação de um novo conceito, ou também para fixar e reforçar o assunto. Também não há apenas um tipo de jogo, há diversos, e com diferentes finalidades, por exemplo, o jogo de conhecimento, que será utilizado no presente trabalho.

O jogo de conhecimento na matemática faz referência a um ou a vários tópicos, propiciando um ensino mais rico, atrativo e criativo. Serve para adquirir ou aplicar de maneira lúdica os conceitos e/ou algoritmos de matemática, utilizando-se tanto para introduzir um conceito quanto para recordá-lo, passado algum tempo. Os jogos de conhecimento, portanto, são os mais aceitos em qualquer perspectiva pedagógica (Jesus, 1999).

É possível identificar que os jogos encontrados até o momento não desenvolvem o conceito de número primo, apenas o aplicam para reforço, ou o desenvolvem de maneira mais superficial com objetivos mais perceptíveis que dinâmicos. Desta forma, não foi encontrando, até o momento, um jogo que possua características competitivas para a exploração deste conceito conforme será trabalhado neste projeto.

OS JOGOS

Foram utilizados dois jogos empregando o conteúdo dos números primos como estratégia de construção e fixação da definição dos mesmos. Ambos os jogos, apresentados abaixo, de tabuleiro e dominó, foram desenvolvidos pelo autor desse projeto, não tendo sido encontrado na literatura, até o presente momento, nenhum jogo com a característica de desenvolver o conceito de modo ativo.

O primeiro momento foi a aplicação do Jogo dos Primos (figura 1), onde os 35 alunos se dividiram em grupos de 4 ou 3 para realizarem a atividade do jogo de tabuleiro, no período de uma aula (50 minutos). E seguiram as seguintes regras do jogo:

1. Ao retirar uma ficha, deve-se montar um produto de dois números que resulte no número encontrado.
2. Não pode usar o número 1 para o produto dos dois números.

3. Se o jogador conseguir efetuar o produto ele anda o número de casas do fator de maior valor.
Caso ele não consiga efetuar o produto ele não anda no tabuleiro.
4. Cada jogador deve registrar os produtos efetuados (ou não) em uma ficha individual.
5. Ganha quem chegar primeiro no fim das casas.

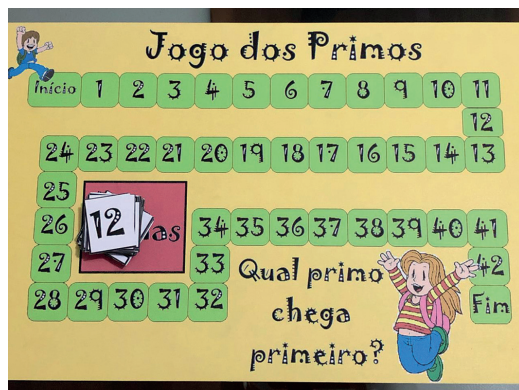


Figura 1. Jogo dos Primos

Nesta fase os alunos tiveram o primeiro contacto com os números primos sem mesmo saberem o conceito, tudo através dos jogos e das anotações dos produtos obtidos.

No segundo momento (período de uma aula de 50 minutos), ocorreu o debate sobre o jogo, onde os alunos exploraram as dificuldades que encontraram. O professor anotou no quadro as dificuldades encontradas, os resultados encontrados e promoveu uma discussão sobre os dados obtidos, instigando-os a perceber as características que só os primos têm. Após o debate foi apresentado o conceito formal de número primo, dando ênfase ao resultado da divisão que deve resultar em um número inteiro, e posteriormente a aplicação de exercícios.

A etapa seguinte será o acompanhamento do material didático obrigatório, fazendo a resolução de exercícios e problemas como forma de fixação do conceito de número primo. Antes de dar sequência ao conteúdo didático obrigatório para o 6.º ano, o conceito de número primo será avaliado por meio de outro jogo como pós teste, o Dominó dos Primos, no período de uma aula. A essência do jogo é a mesma do dominó tradicional, no entanto os números encontrados nas peças são 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21 e 35. Os números não foram escolhidos aleatoriamente, os quatro primeiros são números primos, e os restantes são alguns produtos entre eles, de forma que possam jogar obtendo resultados interessantes a partir das regras do jogo. Também as regras sofrem algumas alterações:

- Formam pares quando um número diferente divide o outro.
 - Formam pares somente quando são primos iguais.
 - Quem acabar com todas as peças do dominó ganha o jogo.
- O objetivo do jogo foi mostrar se o aluno aprendeu o conceito

de número primo e recordá-lo mais uma última vez de forma lúdica. Este jogo foi adaptado e produzido de forma que o aluno pense resolvendo divisões, operação inversa da encontrada no primeiro. Esta foi uma estratégia utilizada para que o aluno possa perceber o número primo de diferentes formas: em uma divisão e em um produto.

APLICAÇÃO DOS JOGOS

No primeiro jogo os alunos sentaram-se em grupos de 4 jogadores, e depois de conhecidas as regras do jogo começaram a jogar sem dificuldade. Notou-se a animação e entusiasmo de todos para jogar. Os grupos foram escolhidos pelos próprios alunos, o que favoreceu a interação, pois desta forma foram minimizados possíveis problemas de convivência. A atividade contou com a presença também de uma professora auxiliar, e de um estagiário, que ajudaram a manter a ordem na sala, intervindo como mediadores, quando necessário, para alcançar o objetivo do jogo.

Alguns grupos apresentaram mais facilidade e estratégia de jogo, em outros prevaleceu a cooperação entre os integrantes e ainda houve os que tiveram dificuldade em encontrar melhores estratégias no decorrer do jogo. Apesar disso, todos os grupos conseguiram finalizar o jogo atingindo o objetivo esperado.

A principal estratégia, que deveria ser rapidamente alcançada pelos grupos era encontrar os possíveis produtos de um mesmo valor e escolher aquele cujo menor fator fosse o de maior valor dentre eles.

Dos nove grupos, 3 tiveram bastante facilidade, pois nos momentos em que se deparavam com números altos tentavam encontrar um produto onde pudessem andar mais casas. Por exemplo $40 = 8 \times 5$, onde andavam 5 casas. Já um grupo não teve esta leitura, toda vez que encontrava um número par fazia o produto utilizando o 2, dessa forma andavam somente duas casas a cada jogada. O professor interveio neste grupo, mostrando que havia outras possibilidades de realizar a composição do produto que não tivesse o 2, e desta forma puderam melhorar o desempenho do jogo.

Em dois outros grupos, os jogadores foram bem individualistas, não auxiliando quando um dos jogadores não encontrava produtos com um dos fatores diferentes de 1. Em um deles o jogador deixou de andar no tabuleiro quando encontrou os números 30 e 63. É interessante observar tratar-se de um aluno com bom desempenho acadêmico. No outro, pelo facto do aluno demorar a jogar, o grupo apresentou-se desmotivado no meio do jogo.

Os outros três grupos apresentaram comportamento cooperativo e procederam de forma semelhante, um colega ajudando o outro, tanto na realização dos cálculos, quanto nas estratégias de jogo.

Após o jogo, a professora foi ao quadro e separou, a partir das anotações dos grupos, os números utilizados para andarem

no tabuleiro daqueles com os quais eles não andavam. Foram lançadas perguntas sobre as características entre os dois conjuntos, o que promoveu uma discussão com a participação dos alunos. Rapidamente já havia alunos dizendo que um dos conjuntos era formado somente por números primos, relacionando conhecimentos prévios com o nome do jogo, no entanto, eles não sabiam a definição de número primo. A partir daí, foram comparados os dois tipos de números: primos e compostos, e construída a definição formal de número primo.

Diante do exposto, acredita-se que a vinculação do jogo à definição correta de número primo, irá favorecer a apreensão do conceito para aplicação futura.

No pós-teste, a aplicação do jogo Dominó dos Primos (figura 2), os grupos foram formados novamente espontaneamente por afinidade, no entanto, como alguns alunos faltaram, foram formados 8 grupos de quatro alunos.

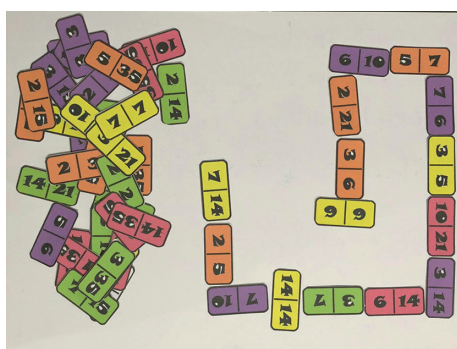


Figura 2. Jogo Dominó dos primos

O mais relevante foi perceber que durante a realização do jogo de dominó o conceito de número primo era empregado corretamente. No entanto, durante o pós-teste foram encontrados eventos isolados que representaram a dificuldade na utilização da sua definição, como por exemplo, formarem pares de números iguais que não eram primos, e unir 15 com 7, onde um não é divisor do outro.

Terminado o jogo, o professor foi ao quadro com os alunos, montando todas as alternativas de encaixe para as peças de dominó. Foi feita a discussão sobre o jogo, quais as dúvidas que surgiram e quais eram as divisões que poderiam ser feitas.

No fim foram comparados os dois tipos de jogos por meio de um novo debate, relembrado o conceito de número primo, e esclarecendo as últimas dúvidas. Foi possível concluir que com a utilização de jogos os alunos conseguiram entender este conceito, usando-o tanto na multiplicação quanto na divisão.

CONCLUSÃO

Com a abordagem do conceito de número primo por meio de jogos, foi possível observar que os alunos apresentaram características de cooperação, competitividade, cidadania e respeito. O trabalho em grupo é um ótimo momento para trabalhar diversos aspetos presentes na vida pessoal e escolar do aluno, trabalhar temas transversais, e dar espaço para a criticidade dos mesmos. Essas são atitudes que só podem ser vistas quando damos a chance para que elas aconteçam.

Em relação a importância do conceito de número primo nas diferentes áreas da matemática, observou-se que o aluno conseguiu identificá-lo em diversas situações, como em problemas contextualizados e exercícios encontrados no material apostilado, além dos jogos.

Deste modo, verificou-se durante todo seu percurso da aplicação desse projeto que o aluno conseguiu desenvolver habilidades de reconhecer um número primo e foi capaz de entender os conceitos nele envolvidos.

Referências

- Grando, R. C. (1995). *O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem*. (Dissertação de Mestrado em Metodologia de Ensino – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas).
- Jesus, M. A. S. (1999). *Jogos na educação matemática: análise de uma proposta para a 5.ª série do ensino fundamental*. (Dissertação de Mestrado em Psicologia da Educação Matemática - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas).
- Santos, E. A. K. & Oliveira, L. S. (2014). *Caça aos números primos: uma adaptação do crivo de Eratóstenes para o 6.º ano de ensino fundamental*. Acedido em <http://enalic2014.com.br/anais/anexos/8305.pdf> a 11 abr 2016

MARTHA C. S. S. C. MAÇUMOTO

ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA

SANDRA G. SCHNEIDER

ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA



Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática

Colaborar e refletir sobre as práticas, em dinâmicas de formação contínua de professores.

Levamos a formação até si!

Contacte-nos: ☎ Rua Dr. João Couto, nº 27-A - 1500-236 Lisboa

☎ 21 716 36 90 @ centroformacaoapm@gmail.com Oferta formativa em: <https://cfmformacaoapm.pt/>

O TERRENO DA LETÍCIA

A Letícia herdou um terreno com a forma de um trapézio.
Os lados paralelos do trapézio medem 66 e 90 metros.
Os outros dois lados têm 34 e 50 metros de comprimento.
Qual é a área do terreno?



(Respostas até 10 de junho, para zepaulo46@gmail.com)

RETAS E MAIS RETAS

O problema proposto no número 148 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O Hugo traçou várias retas numa folha de papel.

A reta r intersesta 18 retas.

A reta s intersesta 13.

No mínimo, quantas retas intersesta a reta t ?

E no máximo?

Recebemos 7 respostas: Carlos Dias, Graça Braga da Cruz (Ovar), José Carlos Frias (Lisboa), Letícia Martins (Guimarães), Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e família Ferreira (Celorico da Beira): Conceição, Armando, Inês, Afonso e José.

O problema levantou algumas dificuldades e nem todos conseguiram chegar às duas soluções. O Mário, apesar de ter acertado, começou com este comentário:

Não me é fácil descrever o processo que segui para procurar resolver este intrigante problema! Se é que chegou, sequer, a existir processo... Muita tentativa erro, muita (pseudo) solução ótima, logo rejeitada...

Para se avançar dá jeito referir algumas considerações.

Família Ferreira: “Duas retas no plano ou são estritamente paralelas ou intersestam-se (nem que seja fora da folha de papel). Se forem coincidentes são a mesma reta (não tem interesse)”.

Graça: “As retas r e s não podem ser paralelas porque, se o fossem, intersestavam o mesmo número de retas”.

Mário: “A reta r é intersectada mais cinco vezes do que a s . Isto implica que têm que existir forçosamente retas paralelas a s ”.

Como a reta r intersesta 18 retas e a s intersesta 13 “há mais 5 retas paralelas a s que a r ”.

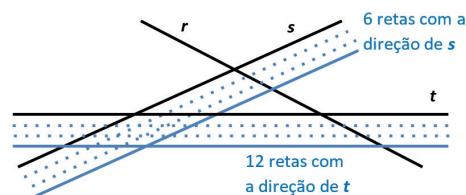
Número mínimo

Temos de maximizar o número de retas com a direção de t e minimizar o número de retas com as direções de r e de s .

Sendo 6 o número mínimo de retas com a direção de s e 1 o número mínimo de retas com a direção de r , então, t intersesta

7 retas. Para que s interseste 13 retas (e r 18) tem de haver 12 retas com a direção de t .

Podemos ver esta situação no esquema seguinte em que, para facilidade de visualização, se agruparam os conjuntos de retas paralelas.

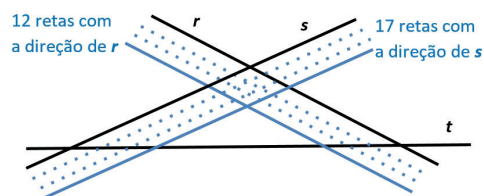


Número máximo

Temos de minimizar o número de retas com a direção de t e maximizar o número de retas com as direções de r e de s .

Desta forma, teremos uma única reta com a direção de t . Para que s interseste 13 retas tem de haver 12 retas com a direção de r e, assim sendo, haverá 17 com a direção de s .

A reta t vai intersestar $12+17=29$ retas.



Generalização

Podemos generalizar o problema, com a reta r a intersestar x retas e a s a intersestar y .

Sejam:

R o número de retas com a direção de r ,

S o número de retas com a direção de s ,

T o número de retas com a direção de t .

Para obter o mínimo, será $R=1$, $S=x-y+1$ e $T=y-1$, com a reta t a intersestar $x-y+2$ retas.

Para obter o máximo, será $R=y-1$, $S=x-1$ e $T=1$, com a reta t a intersestar $x+y-2$ retas.

Início para todos

CÁTIA ALMEIDA
TIAGO COELHO

De forma a iniciarmos a nossa prática profissional, fomos desafiados pela nossa orientadora a lecionar de forma conjunta uma aula. Como os nonos anos estavam próximos do término do estudo das probabilidades¹, decidimos aproveitar o início do capítulo seguinte – Geometria: Paralelismo e Perpendicularidade de retas e planos – para colocar em prática o que nos havia sido proposto: dá-se assim o início da nossa prática profissional e o início do estudo da geometria espacial para os alunos.

Para tal, começámos por fazer uma pequena pesquisa de tarefas exploratórias que pudessem ser suficientemente estimulantes para os alunos e que lhes permitissem, ao mesmo tempo que chegavam a novos conceitos, rever aprendizagens adquiridas em anos anteriores.

Além de rever conteúdos já lecionados em anos anteriores (retas paralelas e retas concorrentes), tal como foi já referido, pretendíamos também que identificassem a posição de uma reta relativamente a outra, que intuitivamente compreendessem o que é um plano e que, com isto, relacionassem a posição de uma reta com um plano e de um plano com outro.

De forma a auxiliar os alunos na resolução da tarefa², foi-lhes proposto, em aulas anteriores, que construíssem com qualquer tipo de material o sólido ilustrado na tarefa. Este mesmo sólido iria auxiliá-los ao longo de todo este capítulo, uma vez que nem todos os alunos tinham, desde logo, uma noção espacial bem desenvolvida. Assim, com recurso ao sólido construído (figura 1), conseguiriam mais facilmente materializar qualquer situação que lhes causasse dúvidas ao longo do capítulo de geometria.

REALIZAÇÃO

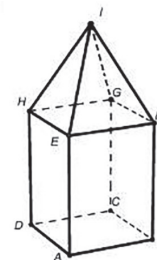
Tendo em conta que os alunos já estavam familiarizados com a dinâmica de trabalho em grupo, a tarefa em causa foi planeada para que os alunos a trabalhassem dessa mesma forma – grupos de três ou quatro elementos. Assim, na breve apresentação desta foi dito aos alunos que trabalhariam nos grupos habituais e que poderiam recorrer ao sólido construído. Informámo-los que posteriormente teriam de apresentar à turma algumas das suas respostas e ou conclusões.

¹ Primeira unidade lecionada, em virtude da alteração da ordem de conteúdos feita pelo grupo de professores de matemática do 9.º ano, desta escola.

² Professores das turmas piloto do 8.º ano – 3.º Ciclo de Escolaridade; Sólidos Geométricos: Propostas de sequências de tarefas para o 8.º ano – 3.º Ciclo, novembro 2010.

Tarefa 4 – Paralelismo e Perpendicularidade

1. Observa a seguinte figura constituída por um prisma e uma pirâmide quadrangulares regulares.



a. Indica pares de retas:

1. Complanares;
2. Não complanares;
3. Paralelas;
4. Concorrentes;
5. Perpendiculares;
6. Obíquas.

b. Tendo por base a figura indica uma reta e um plano de tal modo que:

1. A reta seja paralela ao plano;
2. A reta pertença ao plano;
3. A reta seja perpendicular ao plano;
4. A reta seja concorrente com o plano.

c. Indica um par de planos que sejam:

1. Paralelos;
2. Coincidentes;
3. Concorrentes;
4. Perpendiculares;
5. Obíquos.

De imediato os alunos se empenharam na resolução da tarefa, com recurso às suas construções. Fomos percorrendo os diferentes grupos auxiliando-os nas suas dúvidas e dificuldades e, quando se justificava lançávamos-lhes questões desafiadoras para lhes estimular o raciocínio.

A dúvida mais frequente colocada pelos alunos foi o que significava duas retas serem complanares e não complanares. Um dos alunos chega mesmo a dizer: “Oh professora isto começa logo bem. Retas complanares. Não sei o que isso é!” Já se tinha previsto, aquando da preparação da aula, que tal dúvida surgiria e, como tal, tinha-se previamente decidido que levaríamos os alunos a pensarem na construção da palavra, de forma a concluírem o que nos haviam questionado. Posteriormente, encaminhou-se, de forma intuitiva, os alunos para a noção de plano, fazendo-os auxiliarem-se na construção feita, sempre que

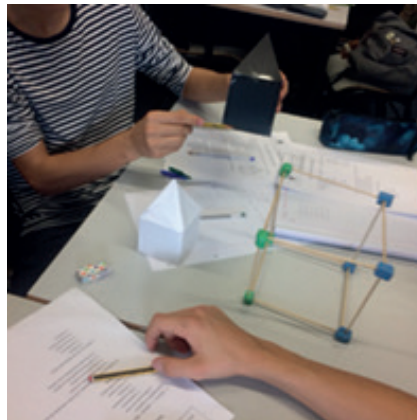


Figura 1. Alunos a manipularem os sólidos durante a resolução da tarefa

possível e/ou sempre que considerassem pertinente. Ultrapassada esta dificuldade os alunos trabalharam produtivamente até ao momento da discussão em grande grupo.

Após cerca de 60 minutos de trabalho de grupo, iniciou-se a discussão com toda a turma. Foi solicitado a um grupo que viesse junto ao quadro apresentar as suas propostas de resoluções. Para além da resposta do grupo, outros alunos apresentaram mais hipóteses que iam sendo validadas, ou não, pela turma. Neste momento da aula os alunos puderam manipular um sólido idêntico (existente na escola) ao do enunciado da tarefa, e ao que construíram, no entanto de tamanho maior para que a visualização fosse possível em qualquer parte da sala. Utilizou-se também como auxílio canas e cartolina, para que se conseguisse representar, respetivamente, retas e planos.

DISCUSSÃO

Destaca-se da fase de discussão o seguinte:

- Os alunos compreenderam que as retas que se apoiam nas arestas das faces da pirâmide são concorrentes com as arestas das faces laterais do paralelepípedo, por exemplo, DH e HI;
- Aquando da discussão de retas não complanares, um aluno sugere que as retas FB e FI são não complanares. No entanto, alguns discordam e, com recurso ao sólido maior, uma aluna representa, com as canas, as retas em questão para tentar facilitar qual seria a conclusão correta (figura 2) complanares ou não complanares. Contudo, mesmo assim, os alunos não conseguem chegar à resposta e, sem meias medidas, a aluna *deita* o sólido conseguindo colocar ambas as canas no tampo da mesa. Ao mesmo tempo que o faz a aluna diz “As retas são complanares porque estão ambas no plano da mesa, por exemplo!”;
- Na tentativa de conjecturar quando é que duas retas são complanares, conhecendo-se a posição relativa entre elas, um aluno afirma que “Duas retas complanares são sempre concorrentes”. No entanto, logo de imediato outro aluno afirma que as retas AD e BC são paralelas e que já se tinha

constatado que eram complanares aquando da discussão da primeira alínea da tarefa. Posto isto, a definição de retas complanares escrita anteriormente no quadro - duas retas são complanares quando pertencem ao mesmo plano - foi completada por sugestão dos alunos da seguinte forma: duas retas são complanares quando pertencem ao mesmo plano, e tal acontece quando elas são concorrentes ou são paralelas.



Figura 2. Representação das retas FB e FI por parte dos alunos

Muitos alunos pensavam que um plano se limitava às faces de um sólido, e, como tal, utilizavam a notação representativa da face de um sólido, para representar um plano. O seguinte diálogo é bastante ilustrativo da situação descrita neste ponto:

Professora: Serão necessários 4 pontos para representar um plano?

Aluno: Depende. Neste caso sim, porque temos um quadrado. Na pirâmide 3 chegam, porque é um triângulo.

Professora: Então se tiveres um pentágono são necessários...

Aluno: ... 5 porque um pentágono tem 5 lados.



Figura 3. Representação de retas complanares por parte dos alunos

O posterior diálogo ilustra a forma de como se encaminhou o aluno a concluir que três pontos são suficientes para definir um plano:

Professora: Quantos pontos tem um plano?

Aluno: Tem infinitos!

Professora: Então porque é que utilizas 4 pontos, e não 2 por exemplo?

Aluno: Porque 2 é uma reta.

Professora: E 3 não dá?

Aluno: Dar dá, mas com 4 fica mais completo.

Professora: Mas disseste-me que um plano tem infinitos pontos. Logo...

Depois de muito magicar, o aluno conclui que 3 pontos são suficientes para representar um plano.

- Contrariamente ao esperado por nós, quando questionados se as retas HG e AB seriam ou não complanares, estes facilmente concluíram que sim. Para melhor visualizarem o plano onde estavam contidas estas retas, os alunos recorriam a uma folha para ilustrarem tal situação.
- Na fase final da discussão, um dos elementos do grupo que foi solicitado para vir ao quadro apresentar algumas das suas respostas, representou um segmento de reta da seguinte forma: $\overset{\cdot}{A}B$, em vez de $[AB]$. Apercebemo-nos que a notação escrita no quadro se devia ao facto de terem presente a notação utilizada na representação de uma semirreta, onde se indica com um ponto a origem da semirreta. Assim, colocando os dois pontos, os alunos pretendiam indicar onde o segmento de reta tinha início e onde tinha fim.

REFLEXÃO FINAL

Primeiramente destacamos a boa gestão do tempo feita em ambas as turmas relativamente à distribuição deste pelas

diferentes fases da aula: introdução, realização e discussão da tarefa. Queremos também salientar a excelente forma como os alunos nos encararam, uma vez que por sermos alunos da Prática de Ensino Supervisionada (PES)³ e pelo facto de ser a nossa primeira aula poderiam ter uma postura diferente da habitual. Durante a fase de realização, todos os alunos estiveram empenhados, recorrendo regularmente aos sólidos que construíram. Na fase de discussão os alunos participaram também de uma forma entusiástica, e ficamos bastante surpresos com o facto de alunos, que por norma não são tão participativos, terem mostrado vontade de integrar a discussão da tarefa contribuindo com questões pertinentes para o seu desenvolvimento. Aquando da contribuição dos alunos com ideias para esta fase da aula, sugeríamos-lhes sempre que se deslocassem à frente da turma para expor a sua ideia com recurso ao sólido maior.

Algo que poderia ter corrido melhor, foi a decisão tomada de no 9.º B (primeira aula conjunta) apenas um grupo apresentar as suas respostas à primeira questão da tarefa. Com isto, o grupo permaneceu sempre junto ao quadro, mesmo quando os assuntos discutidos já não eram resultado de ideias que surgiram das respostas do grupo. No entanto, no 9.º C (segunda aula conjunta) melhoramos a gestão das apresentações, na medida em que um grupo apenas apresentou as suas respostas a duas das alíneas da primeira questão da tarefa, não permanecendo, assim, desnecessariamente junto ao quadro. De destacar também pela negativa, a pergunta “O que é um plano?” colocada por um de nós a um aluno. A intenção da pergunta era que o aluno dissesse por palavras suas o que entendia por plano, contudo a pergunta não foi feita da melhor forma, dada a complexidade que uma resposta a esta questão requer. Em contraste, a forma como um de nós devolveu uma pergunta a um aluno com a expressão “Diz-me tu!”. Com isto levamos o aluno a refletir sobre a sua questão e a obter a resposta à mesma.

Por fim, pensamos que foi uma primeira experiência bem-sucedida, permitindo-nos ter um primeiro contacto com a lecionação auxiliados um no outro e que certamente nos beneficiará, aquando das primeiras aulas dadas sozinhos. Apesar dos aspetos positivos que retiramos desta nossa experiência, temos perfeita noção de que temos muito a aprender na nossa prática profissional, uma vez que nos encontramos num processo de aprendizagem constante.

CÁTIA SOFIA DE SOUSA ALMEIDA

ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA

TIAGO JORGE CORREIA COELHO

ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA

³ Unidade Curricular do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo e Ensino Secundário, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Representar retângulos com um *robot*

RITA LARANGINHA

JULIANA LOPES

MARIA CATARINA SOUSA

NEUSA BRANCO

Os contextos de programação e robótica têm emergido em muitas salas de aula, sendo possível a sua articulação com áreas curriculares e transversais. Estes contextos são propícios à concretização de conceitos ligados à programação e ao pensamento computacional e promovem um trabalho que deve emergir de modo gradual em contexto escolar, adequando-se às competências das crianças e sendo apoiado em imagens, símbolos, blocos textuais e linguagem de programação (Pedro, Matos, Piedade & Dorotea, 2017). A utilização de robots permite tornar tangível os conceitos, favorecendo metodologias ativas que envolvem os alunos em dinâmicas colaborativas para o desenvolvimento de projetos e a resolução de problemas, com possível articulação entre áreas curriculares e transversais (Pedro et al., 2017). Além disso, estes são contextos que podem potenciar a criatividade dos alunos (Martins, Teixeira & Vargas, 2016; Pedro et al., 2017), bem como favorecer o pensamento crítico, levando-os a analisar e a dar sentido à informação.

Este artigo apresenta uma situação que articula a matemática e a programação e robótica, realizada por 43 alunos de duas turmas do 1.º ciclo do ensino básico, uma de 3.º ano e uma de 4.º ano, durante o estágio das três primeiras autoras do 2.º semestre do ano letivo 2017-18 do curso de mestrado em Ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo do ensino básico. Apresentamos alguns resultados desta experiência que evidenciam a forma como os alunos aderiram com entusiasmo aos desafios relativos à programação e associaram a programação e os movimentos do robot a características dos retângulos representados.

TAREFA E OBJETIVOS

A situação envolve um conjunto de desafios matemáticos que visam a programação de um robot. Nesta experiência foi utilizado o Robot DOC (figura 1).

Os alunos têm de movimentar o Robot num tabuleiro de papel para representar retângulos, de modo livre ou dado o número de movimentos em frente (passos) possíveis, como expressam

os desafios propostos, que eram apresentados em cartões:

- Quadrado com 4 passos
- Quadrado com 8 passos
- Quadrado com 12 passos
- Retângulo livre
- Retângulo com 6 passos
- Retângulo com 8 passos
- Retângulo com 10 passos
- Retângulo com 12 passos



Figura 1. Robot DOC, robot utilizado na experiência

Pretende-se que os alunos sejam capazes de evidenciar propriedades dos retângulos, reconhecer o quadrado como um caso particular do retângulo, reconhecer e representar segmentos de reta perpendiculares e paralelos, e identificar o perímetro de um retângulo. No que respeita à iniciação à programação e robótica, pretende-se que os alunos sejam capazes de programar o robot para a resolução de desafios simples, nomeadamente, devem programá-lo para se movimentar de forma simples num cenário específico, e utilizar o raciocínio lógico para prever os resultados e avaliar as soluções encontradas e proceder a correções e melhorias.

A unidade de comprimento, o passo, era inicialmente representada com fitas adesivas com 15 cm de comprimento que podiam colar no tabuleiro ou era definida pelo segmento de reta que unia dois pontos médios de quadrados com um lado adjacente. A cada par eram dados cartões com os desafios e um tabuleiro (figura 2) onde fazia o registo do retângulo representado com o robot, nomeadamente com as tiras adesivas (figura 3) ou com marcadores desenhando os lados do retângulo. Alguns alunos tiveram necessidade de, na fase inicial, fazer em primeiro lugar o registo do polígono no tabuleiro e depois a programação do robot para seguir esse registo.

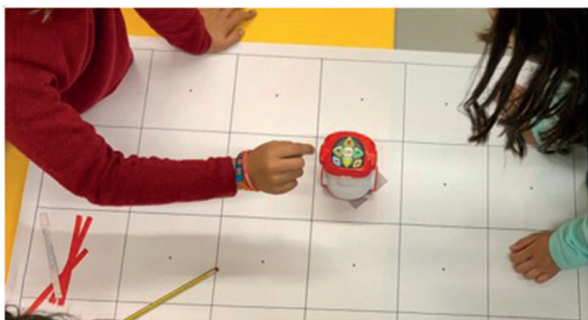


Figura 2. Tabuleiro para deslocação do Robot DOC

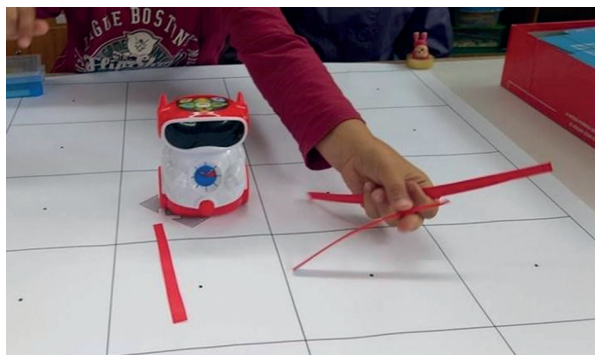


Figura 3. Utilização da unidade de comprimento (fita adesiva com 15 cm)

As evidências do trabalho dos alunos foram recolhidas por notas de campo e fotografias, com o intuito de evidenciar as propriedades dos retângulos reconhecidas pelos alunos na programação do robot para representar o seu retângulo e identificar contributos deste contexto para o surgimento dessas propriedades e o vocabulário matemático apropriado.

DESENHAR UM QUADRADO

Um quadrado livre. Neste desafio os alunos tinham de programar o robot para representar um quadrado, percorrendo o seu perímetro, sem serem dadas mais indicações. Assim, ficava ao critério dos alunos qual seria o comprimento do lado do quadrado. Para realizar este desafio tinham de considerar uma figura geométrica com os lados todos iguais e com quatro ângulos retos. Os alunos poderiam representar no tabuleiro o quadrado formado pelo robot usando as tiras autocolantes ou caneta, considerando como vértices os ponto médios assinalados. No final deste desafio os alunos foram questionados sobre o perímetro do quadrado produzido e quantos passos tinha dado o robot. Os alunos responderam, na maioria, sem hesitar, tendo-se identificado duas situações, uma em que o perímetro é de 4 u.c. (figura 4) e outra em que o perímetro é de 8 u.c. (figura 5). Um par de alunas respondeu a este desafio depois de ter já representado um retângulo no tabuleiro com caneta (figura 5). O episódio que se descreve evidencia a discussão das ideias matemáticas que podem emergir:

Aluna A: Tem de ter quatro lados.

Prof.: É preciso ter 4 lados como? Este [a laranja] também tem quatro lados, um dois, três, quatro.

Aluna A: Mas...

Prof.: Para ser um quadrado como é que tem de ser?

Aluna A: Quatro lados.

Prof.: Tem de ser com quatro lados também.

Aluna A: Mas...

Prof.: [Aluna B] Ajuda.

Aluna B: Com os lados todos iguais.

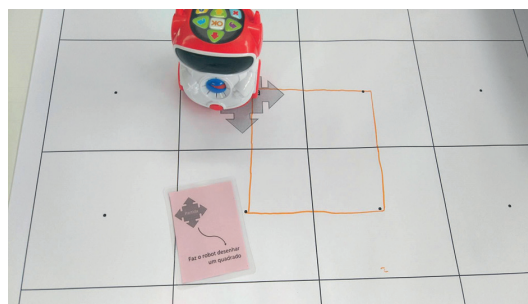


Figura 4. Quadrado com 4 u.c. de perímetro

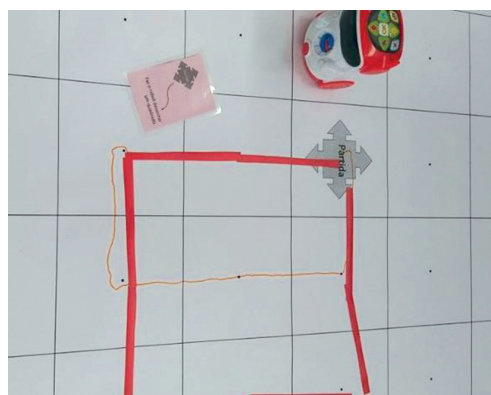


Figura 5. Quadrado com 8 u.c. de perímetro

Um quadrado dado o número de passos. Na maioria dos desafios o robot tem de ser programado para produzir um polígono com um número de passos dado. Os alunos identificaram que o número de passos indicado correspondia ao perímetro do quadrado e que para fazerem a programação do robot precisavam de saber o número de passos em cada lado. Para o determinarem alguns alunos tentavam alguns números, adicionando cada um dos números tantas vezes quantas o número de lados e outros verificaram que tinham de distribuir o valor do perímetro de igual modo por todos os quatro lados, relacionando a situação com a multiplicação ou a divisão por 4. A figura 6 mostra a construção de um par usando as fitas para depois programar o robot. Como faz em primeiro lugar o desenho no tabuleiro, tem facilidade em construir um quadrado com 8 u.c. de perímetro, verificando que cada lado tem 2 u.c. e conseguindo colocar o robot a partir de um lado e não de um vértice, como foi mais

habitual. É de realçar que a programação do robot nem sempre foi realizada de modo correto ou completo na primeira tentativa de um desafio. Alguns erros relacionaram-se com pequenas distrações, outros com o sentido da rotação e outros com o número de passos a dar numa direção. Verificaram que quando se desloca e há necessidade de rodar, o corpo descreve um arco, o que se reflete num ângulo de 90° formado pelas semirretas a que pertencem os lados do polígono sobre o qual o robot se desloca: “Ele [o robot] para virar não vai a direito, faz um arco, que é um ângulo de 90° ” (4.º ano).

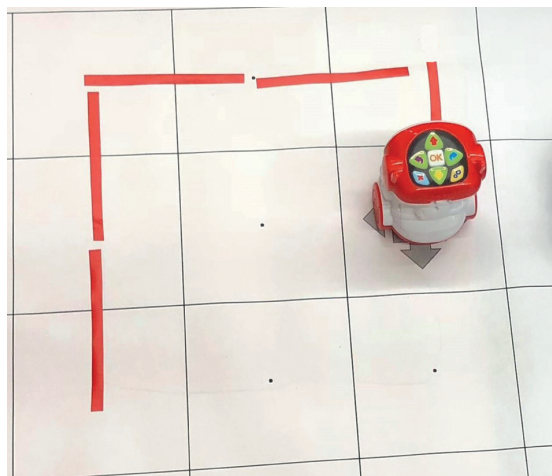


Figura 6. Construção do quadrado com 8 u.c. de perímetro

DESENHAR UM RETÂNGULO

Um retângulo dado o número de passos. Na programação de retângulos evidencia-se, além dos quatro ângulos retos, que o comprimento dos lados paralelos é igual. As figuras 7 e 8 apresentam, a representação dos retângulos que foram programados com oito passos e 12 passos respetivamente.

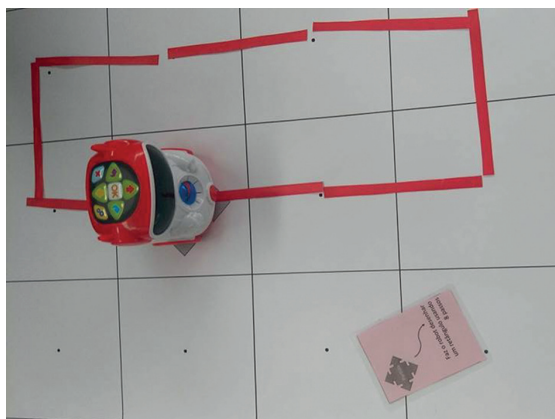


Figura 7. Retângulo com 8 u.c. de perímetro, 1 u.c. de largura e 3 u.c. de comprimento

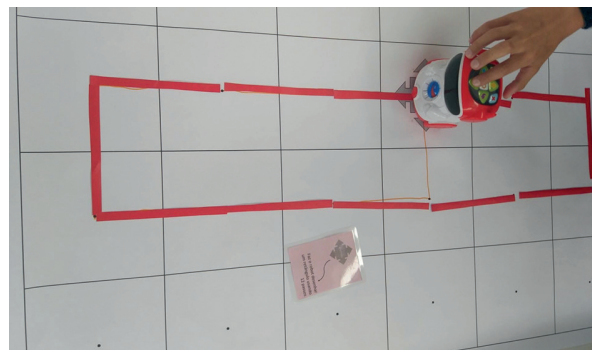


Figura 8. Retângulo com 12 u.c. de perímetro, 1 u.c. de largura e 5 u.c. de comprimento

Nestas duas situações específicas, os alunos verificaram que também era possível representar quadrados, um com 2 u.c. de lado e outro com 3 u.c. de lado por 8 e 12 serem múltiplos de 4. Concluem que o quadrado é um caso particular de um retângulo: “Um quadrado é um retângulo, mas tem os lados todos iguais” (4.º ano).

Um outro desafio envolve a construção de um retângulo com dez passos. Também nesta situação foi possível obter retângulos distintos, como exemplificam as figuras 9 e 10.

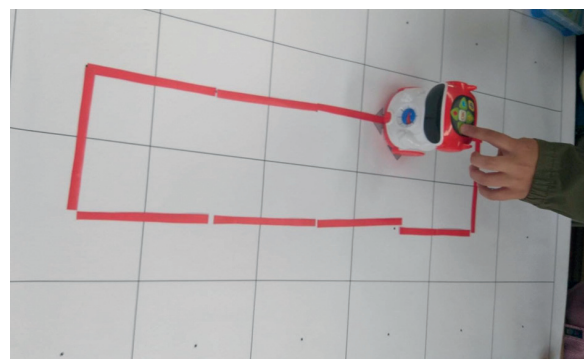


Figura 9. Retângulo com 10 u.c. de perímetro, 1 u.c. de largura e 4 u.c. de comprimento

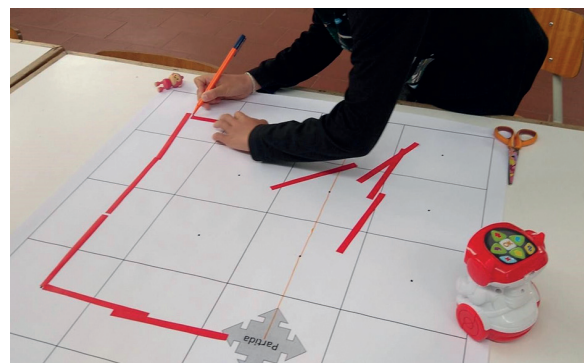


Figura 10. Retângulo com 10 u.c. de perímetro, 2 u.c. de largura e 3 u.c. de comprimento

DISCUSSÃO E NOVOS DESAFIOS

O contexto de programação e robótica associado aos desafios matemáticos permitiu que os alunos associassem os movimentos na programação do robot a ideias matemáticas da grandeza comprimento e de ângulo reto. Emergiram propriedades dos retângulos, reconhecendo o quadrado como caso particular do retângulo, e o perímetro dessas figuras, tornando tangíveis estes conceitos. Estas tarefas constituíram uma oportunidade para os alunos melhorarem o seu vocabulário matemático. O trabalho colaborativo foi também importante para a exploração de ideias e análise de novas situações, satisfazendo as mesmas condições. Dando sentido a este trabalho e validando a sua pertinência com os alunos nestes anos de escolaridade, as orientações curriculares para as Tecnologias de Informação e Comunicação no 1.º ciclo do ensino básico, apresentadas no início do ano letivo 2018-19, em particular no domínio Criar e Inovar, vêm evidenciar a articulação com a matemática como explicita a situação de aprendizagem “desenvolver atividades de orientação, lateralidade e noções espaciais, através de movimentação de objetos virtuais ou tangíveis, em cenários e em interação com o seu contexto de forma criativa e inovadora” (p. 8). O robot e a sua programação permitem concretizar uma ideia relativa à construção de uma figura, analisar a sua adequação e corrigi-la caso seja necessário, realizando uma nova tentativa e verificando de imediato o

resultado da correção efetuada, o que fomentou o raciocínio dos alunos, estimulou a persistência e o trabalho colaborativo, verificando-se uma grande motivação da sua parte “Não pensei que era divertido... a programação” (3.º ano).

Referências

- Martins, A., Teixeira, A., & Vargas, F. (2016). O desenvolvimento da criatividade através da robótica educacional. *Medições*, 4(1), 4-18.
- Pedro, A., Matos, J. F., Piedade, J., & Dorotea, N. (2017). *Probótica: Programação e robótica no ensino básico. Linhas orientadoras*. Lisboa: DGE- ME.
- ME (2018). *Orientações curriculares para as Tecnologias de Informação e Comunicação – 1.º ciclo do ensino básico*. Disponível em http://www.erte.dge.mec.pt/sites/default/files/oc_1_tic_-_vf_03out2018.pdf

RITA LARANGINHA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM

JULIANA LOPES

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM

MARIA CATARINA SOUSA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM

NEUSA BRANCO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM
E UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

ESTATUTO EDITORIAL DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

A Educação e Matemática é uma publicação periódica da Associação de Professores de Matemática (APM). A sua periodicidade atual é de cinco números anuais, sendo um deles temático e duplo. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática. Dirige-se aos professores de matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro. Os principais objetivos da Educação e Matemática são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas atuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A Educação e Matemática publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, resenhas de livros, resolução de problemas, notícias... A Educação e Matemática tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com carácter permanente. A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista. À semelhança das outras revistas informativas, a Educação e Matemática assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A DIRETORA DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

APM 2019 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

*A Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indistintamente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um nº de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados individuais têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito

também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista Quadrante.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados terão descontos na requisição de materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos na formação e em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Assinatura das revistas Educação e Matemática e Quadrante

		Educação e Matemática 3 números + 1 número duplo temático	Quadrante (2 números)
Associado individual	Portugal		15,00€
	Estrangeiro		30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas Educação e Matemática e Quadrante

	Educação e Matemática		Quadrante
	Temática		
Associado	Normal	10,00€	10,00€
		7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	

Modalidades de associado individual	Quota
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	Quota
Modalidade I (1 exemplar da EeM)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da EeM)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da EeM+Quadrante)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da EeM+Quadrante)	140,00 €

Editorial

- 01** **Autonomia e Flexibilidade Curricular no desenvolvimento das aprendizagens em matemática: perspetivas e desafios**
Nadia Ferreira

Artigos

- 03** **Problemas de Fermi: uma oportunidade para a interdisciplinaridade na aula de matemática**
Nélia Amado, Susana Carreira
- 08** **Aspetos geométricos da projeção cilíndrica na cartografia**
Ana Paula Jahn, Vincenzo Bongiovanni
- 14** **Interdisciplinaridade na aprendizagem da matemática no PAFC: olhares e sentires dos diferentes intervenientes**
Sandra Nobre
- 22** **Flexibilidade e matemática na Escola Secundária Lima-de-Faria, Cantanhede**
Marília Zorrinho, Maria Caracitas
- 28** **Sabonetes com peso, volume e representações gráficas**
José Condeço, Felicidade Mestre
- 31** **Resolução de equações do 2.º grau com o Algebra Tiles: uma experiência no 8.º ano de escolaridade**
Paulo Ferreira Correia
- 38** **Construção do conceito de números primos por meio de jogos**
Martha C. S. S. C. Maçumoto, Sandra G. Schneider
- 42** **Início para todos**
Cátia Almeida, Tiago Coelho
- 45** **Representar retângulos com um robot**
Rita Laranginha, Juliana Lopes, Maria Catarina Sousa, Neusa Branco

Secções

- 12** **Pontos de Vista, reações e ideias ...**
Adições Enigmáticas, Paulo Afonso, José Filipe, Nuno Santos, Ana Rita Branco
- 19** **Espaço GTI**
Números racionais nos primeiros anos - a abordagem pela partilha equitativa, Hélia Pinto, Ema Mamede
- 26** **Cadernos de apontamentos de Geometria** *Cristina Loureiro*
Comunicação Visual (II)
- 34** **Materiais para a aula de Matemática**
Estudo de transformações geométricas de gráficos, Sílvia Zuzarte
- 36** **Tecnologias na Educação Matemática** *António Domingos*
Implementação de dinâmicas de Gamificação no Moodle, João Mouro
- 41** **O Problema deste número** *José Paulo Viana*
O terreno da Letícia