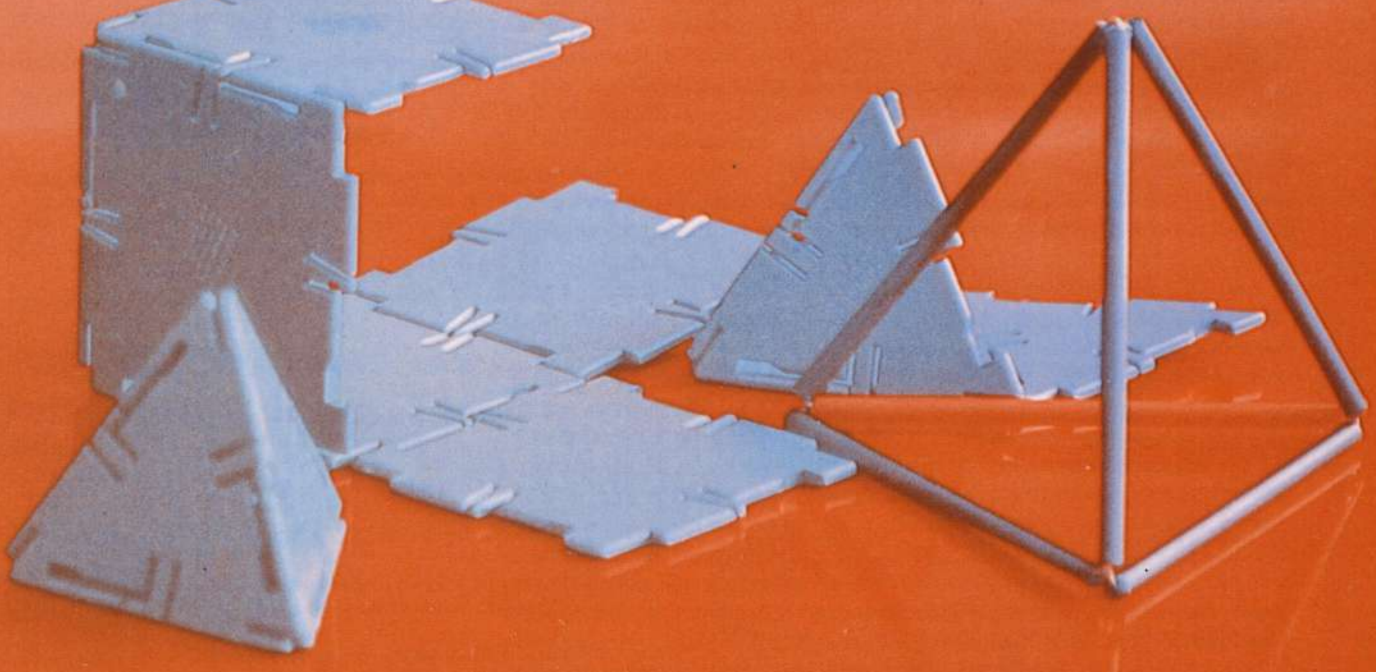
Educação e Matemática

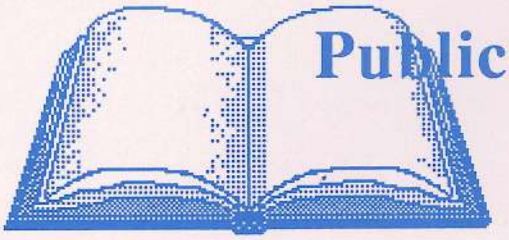
N.º 13

1.º Trimestre 1990



400$00

Revista da Associação de Professores de Matemática



Publicações APM

MAIS JOGOS, MAIS ENIGMAS, MAIS PROBLEMAS
Autores: Odete Bernardes, Paula Teixeira, Pedro Esteves e José Paulo Viana

Para quem gosta de jogos, enigmas ou problemas, continuação do volume «Jogos, Enigmas e Problemas».
☐ 1.ª Edição, Setembro 1989: 64 pp.; preço: 290$00 (sócios 200$00)

CALCULADORAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA
Autores: Albano Silva, Cristina Loureiro, Graciosa Veloso

A calculadora como ferramenta com grandes potencialidades educativas. Actividades com calculadoras para vários níveis de ensino, do 5.º ao 12.º ano.
☐ 1.ª Edição, Setembro 1989; 151 pp.; preço 570$00 (sócios 400$00)

- *Dia-a-dia com a Matemática — Agenda do professor 1989/90* — Ana Vieira Lopes, António Bernardes, José Manuel Varandas
☐ 1.ª Edição, Agosto 1989: 140 pp.; *preço: 360$00 (sócios 300$00)*

- *Agenda para a Acção* — recomendações para o ensino da Matemática nos anos 80
☐ 4.ª Edição, Fevereiro 1988: 58 pp.; *preço: 250$00 (sócios 180$00)*

- *O Computador na Aula de Matemática* — Eduardo Veloso
☐ 2.ª Edição, Agosto 1988: 73 pp.; *preço: 400$00 (sócios 280$00)*

- *Jogos, Enigmas e Problemas* — Odete Bernardes e Paula Teixeira
☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 48 pp.; *preço: 250$00 (sócios 180$00)*

- *A Matemática na Vida das Abelhas* — Ana Luísa Teles, Ana Vieira, Aniss Ali e Fátima Antunes
☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 80 pp.; *preço: 400$00 (sócios 280$00)*

- *PROFMAT N.º 3*
☐ 1.ª Edição, Setembro 1987: 188 pp.; *preço 660$00 (sócios 460$00)*

CRONOLOGIA RECENTE DO ENSINO DA MATEMÁTICA
Autor: José Manuel Matos

Um itinerário aliciante, dos anos quarenta aos anos oitenta. Reedição melhorada e aumentada.
☐ 3.ª Edição, Setembro 1989: 87 pp.; preço 520$00 (sócios (360$00)

QUOD NOVIS
Autoras: Georgina Tomé e Susana Carreira

Uma experiência de abordagem do programa do 11.º ano, a partir de um conjunto de problemas propostos, utilizando a folha de cálculo.
☐ 1.ª Edição, Outubro 1989: 395 pp.; preço: 1370$00 (sócios 960$00)

- *PROFMAT N.º 4*
☐ 1.ª Edição, Janeiro de 1989: 269 pp.; *preço: 820$00 (sócios: 580$00)*

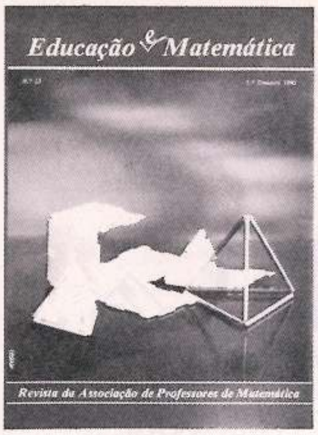
- *Cadernos de Educação e Matemática - n.º 1 / A Natureza da Matemática*
☐ 1.ª Edição, Setemboro 1988: 75 pp.; *preço 570$00 (sócios 400$00)*

- *O Geoplano na Sala de Aula* — Lurdes Serrazina e José Manuel Matos
☐ 2.ª Edição, Abril 1989: 276 pp.; *preço 820$00 (sócios 580$00)*

- *Viagem de Ida e Volta* — Paulo Abrantes
☐ 1.ª Edição, Agosto 1988: 63 pp.; *preço: 400$00 (sócios 280$00)*

- **Educação e Matemática**, disponíveis exemplares dos números 2, 3, 4, 7 e seguintes. *Preço de cada número: 200$00 (1 a 6), 250$00 (n.º 7 a 12); 400$00 (13 e seguintes).*
N.os 1, 5 e 6 disponíveis em fotocópia a 200$00 cada um.

Todos estes materiais podem ser pedidos pelo correio, utilizando a ficha da página 40.



Editorial

Os materiais e o ensino da Matemática

Diferentes teorias psico-pedagógicas asseguram-nos que as crianças e os jovens, e mesmo muitos adultos, precisam de modelos concretos para compreender conceitos matemáticos. Investigações têm constatado que os estudantes que utilizam materiais manipulativos na construção de conceitos têm melhores resultados que os que o não fizeram, pois os alunos são indivíduos activos que constroem, modificam e integram ideias ao interaccionar com o mundo físico, os materiais e os seus colegas, donde a aprendizagem da Matemática deve ser um processo activo. A aprendizagem baseia-se na experiência e a construção de conceitos matemáticos é um processo longo que requer envolvimento activo do aluno e que vai progredindo do concreto para o abstracto.

Também em Portugal se assiste a um interesse cada vez maior pela utilização de materiais. Os projectos de novos programas fazem-lhes referência. Desenvolver actividades com materiais como o geoplano ou o tangram começa a fazer parte das preocupações de muitos professores.

Mas, a utilização de muitos materiais por si só não garante uma aprendizagem significativa. Qualquer material ou qualquer instrumento deve ser usado cuidadosamente se queremos ter bons resultados, sendo o papel do professor de crucial importância, é a ele que compete decidir como, quando e porquê determinado material deve ser utilizado. Mais importante que os materiais com que está a trabalhar, a experiência que o aluno está a realizar deve ser significativa para ele. Quando dizemos que a Matemática se aprende fazendo, o que está em causa é não só a actividade física, mas mais particularmente a actividade mental que reflecte a actividade matemática, isto é, aprender Matemática fazendo-a significa não só manipular objectos mas também pensar acerca da manipulação e reflectir nos processos e nos produtos.

Entre nós existe pouca tradição de utilização de materiais em Matemática. Muitos de nós, professores de Matemática, tivemos poucas oportunidades de manipular materiais ao longo da escolaridade, pensamos, por isso, ser fundamental promover a discussão sobre a utilização de materiais e trabalhar activamente com eles, desenvolvendo actividades que podem depois ser adaptadas no trabalho com os nossos alunos. Um professor só conseguirá pensar sobre as relações que se podem estabelecer, por exemplo, com a utilização de um geoplano, se trabalhar activamente com ele, colocando elásticos, resolvendo problemas e discutindo-os com os seus colegas.

No sentido de propiciar essa experiência aos professores, a APM tem promovido várias sessões de trabalho com materiais e dedica este número da revista a esse tema.

Maria de Lurdes Serrazina

FICHA TÉCNICA

Título da publicação:
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 13, 1.º trimestre de 1990

Directora: Leonor Moreira

Redacção:
António Bernardes
Eduardo Veloso
Henrique M. Guimarães
José M. Varandas
José P. Viana
Paulo Abrantes
Pedro Esteves

Capa:
Concebida e fotografia executada por José Paulo Viana

Entidade Proprietária:
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade: Trimestral

Tiragem: 2000 exemplares

Fotocomposição:
Execução e oferta da Texto Editora, Lda.

Montagem e impressão:
Costa e Valério

N.º de Registo: 112807

Correspondência:
Revista *Educação e Matemática*
a/c de Leonor Moreira
R. Prof. Francisco Gentil, 38-6.º Esq.
1600 LISBOA

— A aprendizagem do número — Que exercícios? Que materiais?

Helena d'Orey Marchand, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação
Universidade de Lisboa

Introdução

A problemática dos materiais manipulativos na aprendizagem da matemática pressupõe uma reflexão mais lata sobre os pressupostos epistemológicos de teorias explicativas do desenvolvimento do número e do cálculo e sobre as teorias da aprendizagem delas decorrentes. No presente artigo não teremos a pretenção de o fazer exaustivamente. Com efeito, de momento, apenas será analisada, de forma mais fundamentada, a concepção Piagetiana do número e algumas propostas de estimulação desta noção dentro do quadro da epistemologia construtivista. A escolha desta posição deve-se ao facto de que independentemente de algumas críticas de estudiosos desta problemática que têm conduzido investigações, quer dentro de um quadro conceptual Piagetiano (Brainerd, 1973, 1974; Siegel, 1974; Williams, 1976, entre outros) quer afastando-se dele (Gelman e Gallistel, 1978; Klahar e Wallace, 1973 entre outros)[(1)] todos eles, tal como Piaget, atribuem um papel de relevo: a) à actividade do sujeito na construção das noções numéricas, b) à ordenação e à cardinação na construção desta noção e c) à correspondência termo a termo na génese da noção do número. Escolhemo-la, ainda, por, do ponto de vista de uma intervenção, ter dado origem a uma série de estudos, referentes à aprendizagem do número elementar e do cálculo, muito interessantes, alguns deles facilmente aplicáveis na sala de aula. Dado que um corpo substancial de investigações neste domínio tem incidido fundamentalmente sobre a criança da pré-primária e da primária, e dado que nós próprias conduzimos uma investigação com crianças, em insucesso escolar grave, que se encontravam nos dois primeiros anos da primeira fase, a temática que nos propomos analisar referir-se-á à construção do número e do cálculo em crianças destes dois níveis de escolaridade.

Sobre a natureza do número

A noção de número natural é muito complexa tendo vários autores, partindo de hipóteses diferentes, proposto diversas teorias explicativas da sua construção.

Algumas questões, que os investigadores que se debruçam sobre a natureza e a génese desta noção se colocam, foram sintetizadas por Piaget no livro «Introdução à Epistemologia Genética» no capítulo referente a «O pensamento matemático» (Piaget, 1949). Depois de afirmar que a significação epistemológica do número deu lugar às mais diversas e contraditórias hipóteses este autor interroga: a) se a proposição $1+1=2$ é uma verdade, uma convenção ou um enunciado tautológico; b) se tal relação é fruto de experiências e de quais; c) se é construída *a priori* ou objecto de uma intuição imediata e de que tipo e, por fim, d) se o número é uma noção primeira ou uma síntese de operações simplesmente lógicas (Piaget, 1949).

Algumas das questões que Piaget coloca haviam sido objecto de análise por parte de estudiosos desta matéria tendo dado origem a duas posições epistemológicas antagónicas:

1) A posição intuicionista (Brouwer), que negando a componente lógica no número, apela para a intuição como mecanismo explicativo da sua origem. Tal intuição seria fruto da intuição temporal que os sujeitos têm da sua existência.
2) A posição logicista (Russel), que ao defender que lógica e matemática são disciplinas de natureza idêntica, reduz o número a conceitos simplesmente lógicos.

A resposta que Piaget dá às questões levantadas colocam-no numa posição que supera o reducionismo implícito nas duas posições citadas. Para este autor estruturalista, o número seria solidário de uma estrutura de conjunto que se elabora graças à síntese, num sistema único, de duas estruturas mais simples, a saber: a inclusão de classes e a seriação ou relações de ordem.

A perspectiva de Piaget quanto à natureza do número

Os estudos efectuados por Piaget e seus colaboradores quanto à génese do número, assim como os estudos efectuados quanto à génese de outras noções tiveram por objectivo dar resposta à grande questão colocada por este autor, de ordem essencialmente epistemológica, sobre a natureza e a formação do conhecimento.

A resposta que encontra, baseando-se nos resultados dos estudos empíricos efectuados em diversos domínios do conhecimento, é de natureza construtivista.

A hipótese fundamental do construtivismo Piagetiano é que nenhum conhecimento humano, excepto as formas hereditárias muito elementares, existe préformado no sujeito. O conhecimento é produto duma relação de interdependência entre o sujeito que conhece e o objecto a ser conhecido. O objecto é, nesta perspectiva, um estado limite de que o sujeito se tenta apropriar, por aproximações sucessivas, sem dele nunca atingir um conhecimento completo. A objectividade é o produto de uma construção e de sucessivas descentrações do sujeito que conhece. Esta construção faz-se em duas grandes direcções, que têm entre si um conjunto de conhecimentos intermédios:

1 — A construção das formas do conhecimento (as estruturas lógico-matemáticas), por abstracção reflexiva[2].

2 — A construção do conhecimento das propriedades dos objectos e das relações espacio-temporais e causais, por abstracção empírica[3].

A distinção efectuada por Piaget entre conhecimento físico e conhecimento lógico-matemático é não só epistemologicamente fecunda como tem grande valor heurístico.

O conhecimento físico é o conhecimento dos objectos da realidade externa. Por exemplo, a cor é uma propriedade física dos objectos que pode ser conhecida pela observação (objecto vermelho, objecto azul, etc.).

No entanto se nos apresentarem dois objectos, um azul e o outro amarelo, a diferença que notamos na cor é um conhecimento lógico-matemático. A diferença de cor, embora pressupondo a observação da cor de cada objecto de per si, é já uma relação, criada mentalmente pelo sujeito, que relaciona os dois objectos.

O conhecimento lógico-matemático é construído pelo sujeito através de sucessivas coordenações de relações (a fonte do conhecimento lógico-matemático é interna). As crianças progridem na construção do conhecimento lógico-matemático através da coordenação das relações mais simples que efectuaram entre os objectos. «Por exemplo ao coordenar as relações de igual, diferente e mais, a criança torna-se apta a deduzir que há mais contas no mundo do que contas vermelhas e que há mais animais do que vacas. Da mesma forma, é coordenando a relação entre «dois» e «dois» que ela deduz que $2+2=4$ e que $2\times2=4$» diz a este respeito Kamii (1984, p.15).

Segundo esta autora, a posição de Piaget quanto à natureza lógico-matemática do número está em flagrante contraste com a concepção de matemática da maior parte dos manuais. Dá como exemplo um texto de Duncan e Al. (1972) em que é afirmado que o número «é uma propriedade dos conjuntos, da mesma maneira que ideias como cor, tamanho e forma se referem a propriedades dos objectos» (p. 30, citado por Kamii, 1984, p. 16). Nesta perspectiva o número seria aprendido da mesma maneira que a cor, tamanho, forma, etc., isto é, através da abstracção simples ou empírica. Para Piaget, e as investigações efectuadas na escola de Genéve no âmbito da aprendizagem de noções lógicas comprovam-no, o número é aprendido através da abstracção reflexiva. Se para a aprendizagem de pequenos números (até 5, por exemplo) a distinção entre estes dois tipos de abstracção[4] pode não ser muito evidente para o professor, quando se trata de aprendizagem de números maiores, como por exemplo, mil, um milhão. etc., ela torna-se absolutamente necessária.

Será possível aprender estes grandes números, que conduzem ao infinito, através da abstracção empírica, a partir da contagem de objectos, ou de conjuntos?

Para a Escola de Genéve só as relações que a criança, progressivamente, constrói, por abstracção reflexiva, explicam a compreensão que passa a ter, por exemplo, de números como 5.000.010, mesmo que nunca os tenha visto ou contado num conjunto.

Como se pode ver, a concepção de número de Piaget é contrária à concepção que defende que os conceitos numéricos podem ser ensinados por transmissão social. Embora não discordando que se pode ensinar a criança a dar uma resposta correcta para a soma de $2+2$, por exemplo, este autor põe em questão que seja possível ensinar-lhes as relações subjacentes a esta adição.[5]

A génese do número

O número, para Piaget e Szeminska (1941), é, tal como foi dito, uma síntese, num sistema único, de duas estruturas mais simples: a seriação ou relações de ordem e a inclusão hierárquica de classes. É pela coordenação da acção de reunir e de ordenar mentalmente os objectos que o número se constitui.

Ordenar os objectos é uma acção fundamental para a construção do número. É esta operação, de que a criança muito jovem não tem necessidade lógica, que nos dá a certeza, por exemplo, que contámos todos os objectos e de que ao contar não repetimos, nem saltamos nenhum. No entanto, de per si, esta operação não permite quantificar os objectos. Para quantificar os objectos a criança tem que colocá-los numa relação de inclusão hierárquica, isto é, tem que incluir mentalmente o um no dois, o dois no três e assim sucessivamente. Quando damos à criança seis objectos ela só consegue quantificar o conjunto numericamente se coordenar a acção de os pôr em ordem, com a acção de os incluir hierarquicamente.

A construção das noções de seriação e de quantificação de inclusão de classes faz-se no interior do período operatório concreto, por volta dos 7-9 anos de idade. É nessa altura que a criança se torna capaz de seriar do mais pequeno para o maior, 8 ou 10 pauzinhos de dimensões diferentes, compreendendo que cada elemento é, simultaneamente, o maior de todos os que o precedem e o menor de todos os que se lhe seguem. É nesta altura que a criança é capaz de compreender que a classe incluinte B (por ex. as flores) é mais numerosa do que a subclasse incluída A (por ex. as rosas). Quer a operação de seriação, quer a operação de inclusão de classes pressupõem a mobilidade do pensamento da criança, que se torna progressivamente reversível. A reversibilidade capacita-a a realizar mentalmente acções ou operações simultaneamente opostas (por exemplo dividir o todo em várias partes e, mentalmente, reuni-las no todo, conservando a identidade quantitativa invariante).

Piaget e Szeminska (1941) estudaram a génese da conservação do número elementar analisando o comportamento das crianças quando confrontadas a realizar a prova de conservação da equivalência de 2 conjuntos, com transformação figural de um deles por deslocamento dos seus elementos.

A prova de conservação do número elementar consiste em pedir à criança, num primeiro momento, para colocar o mesmo número de objectos que os dispostos pelo experimentador.

A 0 0 0 0 0 0 0
B 0 0 0 0 0 0 0

Em seguida, o experimentador afasta os objectos de uma das séries e pergunta à criança, pedindo-lhe uma justificação, se há tantas, o mesmo número, a mesma quantidade de objectos nas duas séries.

A 0 0 0 0 0 0 0
B 0 0 0 0 0 0 0

As respostas encontradas por Piaget e Szeminska (1941) e, ulteriormente, por Gréco (1962), permitiram identificar 4 níveis de desenvolvimento:

1 — Num primeiro nível, a criança constrói uma série com o mesmo comprimento do que a série modelo, mas sem correspondência termo a termo.

Ex. 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

2 — Num segundo nível (por volta dos 4-5 anos), a criança consegue uma correspondência óptica exacta, mas quando se afastam um pouco os elementos de uma das séries, pensa que a série mais comprida tem um número superior.

3 — Num terceiro nível, na mesma situação, a criança pensa que o número se conserva mas que a quantidade aumenta (conservação da quotidade mas não da quantidade).

Ex. Quando o experimentador pede à criança para contar os objectos de uma série e para adivinhar o número de objectos da outra série esta diz, por exemplo, que há 7. No entanto se o experimentador, em seguida, lhe pergunta se há tantos, ou se alguém tem mais objectos, neste estádio, a criança responde «há 7 para ti e 7 para mim, mas tu (referindo-se à série do experimentador em que os elementos estão afastados) tens mais.»

4 — Num quarto nível (por volta dos 6-7 anos), a criança conserva a quotidade e a quantidade.(6)

A aprendizagem do número

Da teoria de Piaget não se podem tirar implicações imediatas quanto à aprendizagem do número. Tal como dissemos, os estudos deste autor tiveram por objectivo essencial contribuir para a clarificação da problemática da construção do conhecimento. As investigações efectuadas pela Escola de Genéve foram raramente conduzidas num contexto de sala de aula, e as que o foram não tiveram como objectivo imediato a extracção de implicações didácticas. Os investigadores desta Escola defendem, no entanto, que, sem subestimar a importância do ensinar a ler, escrever e contar os números, os professores deveriam insistir no desenvolvimento da estrutura mental do número. Se as crianças não a construírem, aprenderão a contar, ler e escrever números memorizando, sem os compreender.

Na década de 50 e, ulteriormente na década de 70, surgiu um corpo de investigações com o objectivo de analisar, entre outros aspectos, o problema da aprendizagem das estruturas lógico-matemáticas.

As questões que os investigadores do Centro de Epistemologia Genética, nos trabalhos efectuados nos anos 50 (ver Piaget, 1959), se colocaram eram essencialmente as seguintes: é possível a aprendizagem das estruturas lógicas utilizando como reforço externo a constatação dos factos? Por outras palavras, será possível uma aprendizagem do conhecimento que seja independente da lógica do sujeito? Ou pelo contrário toda e qualquer aprendizagem pressupõe uma tal lógica?

Os resultados de várias investigações mostraram que é impossível aprender as formas lógicas através de constatações de natureza empírica, isto é, através da constatação dos factos. Nesta altura começa-se a falar em exercícios operatórios e na noção de conflito, atribuindo-se à equilibração um papel primordial na génese do conhecimento.

Nos anos 70, Inhelder, Sinclair e Bovet (1974) retomam a problemática da aprendizagem das noções lógicas, num contexto mais psicológico do que epistemológico. Elaboram uma série de situações de aprendizagem de várias noções. Essas situações colocaram as crianças em situação de confronto cognitivo, que, segundo a teoria Piagetiana, é gerador de progressos cognitivos. «Procurámos evitar que a situação experimental suscite em si própria respostas correctas, o que iria contra o princípio da necessidade de uma actividade construtiva por parte da criança» (*op. cit.*, p. 46). Os exercícios criados por estas autoras, utilizando materiais muito simples (frutos de plástico, fósforos, etc.) conseguiram, em determinadas crianças, mobilizar os seus esquemas mentais, tendo algumas delas adquirido as estruturas lógico-matemáticas próprias do período operatório concreto.

Num trabalho efectuado em Portugal (Marchand, 1983, 1986) junto de crianças, da Escola Primária, provenientes de meios sócio-culturais muito desfavorecidos, em insucesso escolar grave (2 a 3 anos de repetência), verificámos um atraso na ordem dos 2-3 anos, quanto à aquisição das estruturas lógico-matemáticas subjacentes à noção do número elementar. Com o objectivo de acelerar o seu ritmo de desenvolvimento constituímos uma série de exercícios de aprendizagem do número elementar, agrupados em 3 sessões, de aproximadamente 30 minutos cada. Estas sessões foram efectuadas individualmente (embora seja possível efectuar estes exercícios na sala de aula, em pequenos grupos de 2 ou 3 crianças). No presente artigo serão apenas descritos dois exercícios utilizados nesse trabalho.

Exercício 1

Objectivo — Este exercício[7] teve por objectivo a estimulação dos esquemas de correspondência termo a termo e dos esquemas de numeração (quotidade) em colecções equivalentes.

Material — Árvores, casas, pequenos animais em plástico, fichas vermelhas, azuis, amarelas, etc.

O experimentador e a criança dispõem iterativamente («um para mim», «um para ti») os elementos em disposições espaciais diferentes.

Ex.

```
                 0 0
0000000         0 0 0
                 0 0
```

De seguida o experimentador coloca uma questão respeitante à igualdade numérica dos dois conjuntos «Há tantas, a mesma quantidade de casas e de árvores? Como é que sabes?» Se a criança manifesta dificuldades ou dá respostas em função da configuração espacial o experimentador insiste sobre o modo de composição: «Lembras-te como fizemos?» e ajuda-a a recapitular, se tal se tornar necessário. Depois coloca uma questão quanto à correspondência entre os elementos das duas colecções: «Se se quiser colocar uma árvore junto de cada casa, há árvores suficientes, ou muitas árvores ou só algumas?»

Em seguida a criança é convidada a antecipar o número de elementos da outra colecção, sem os contar: «Conta as tuas árvores. Podes adivinhar quantas casas tenho?» Após estas questões procede-se a uma verificação efectuando-se uma relação espacial (uma árvore junto de cada casa).

Uma grande variedade de exercícios pode ser efectuada segundo este esquema, com materiais diferentes e variados, quer com quantidades discretas equivalentes numericamente, quer não equivalentes.[8]

Exercício 2

Objectivo — Este exercício teve por objectivo estimular os esquemas de adição e de subtracção de elementos.

O experimentador pede à criança para adicionar o mesmo número e elementos (por ex. 6) a duas colecções equivalentes, sem efectuar a correspondência biunívoca — separando-os numa das colecções e juntando-os na outra.

Ex:

```
000000000000000
000000000 0 0 0 0 0 0
```

Em seguida coloca-lhe uma questão referente à igualdade numérica e à identidade quantitativa das 2 colecções. Se a criança manifesta dificuldades em função da configuração espacial, o experimentador insiste sobre o modo de composição e ajuda-a a recapitular o modo de construção das duas séries. Por fim procede a uma verificação por correspondência termo a termo.

Ou ainda, o experimentador pede à criança para retirar o mesmo número de elementos (por ex: 3) de 2 colecções numericamente equivalentes, de modo a destruir a correspondência óptica.

Ex:

~~0~~ 0 0 0 ~~0~~ ~~0~~ 0 0 0

0 0 ~~0~~ 0 0 0 0 ~~0~~ ~~0~~

Em seguida coloca as mesmas questões e procede da mesma maneira que para o exercício precedente.

Após várias sessões em que utilizámos este tipo de exercícios a totalidade das crianças que não possuía a noção de número elementar, adquiriu-a.

Numa perspectiva um pouco diferente mas que consideramos não só muito interessante como, também, facilmente operacionalizável na sala de aula, Kamii (1984) propõe alguns princípios de ensino do número. Partindo do pressuposto que o número não é directamente ensinável e que o termo «ensinar» se refere a um ensino indirecto, no sentido em que o meio ambiente pode proporcionar muitas coisas que, indirectamente, facilitam o desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático, esta autora propõe (*op. cit.*, p. 42) que o professor estimule a criança:

1 — A criar todos os tipos de relações entre objectos, acontecimentos, acções.

2 — A quantificar objectos — encorajando-as: a) a pensar sobre o número e quantidades de objectos, quando estes têm, para ela, significado; b) a quantificar logicamente os objectos e a comparar conjuntos; c) a fazer conjuntos com objectos móveis.

3 — A interagir socialmente com os colegas e com os professores: a) encorajando-a a trocar ideias com os seus colegas; b) intervindo de acordo com o que a criança está a pensar.

Para esta autora a observação do comportamento da criança pelo professor é primordial. Só esta lhe permitirá intervir de modo adequado e de acordo com o nível de dificuldade que esta manifesta.

Propõe, para a prossecução destes objectivos, que os professores (e mais genericamente os educadores) utilizem situações do dia-a-dia, tais como: pôr a mesa para as refeições; distribuir materiais na sala de aula; distribuir alimentos pelos colegas (todas estas actividades proporcionam a estimulação da correspondência termo a termo, a contagem, a comparação de conjuntos, as interacções sociais, a criação de relações entre objectos). Propõe, ainda, a utilização de jogos em grupo (jogos com alvos, corridas e jogos de pegar, jogos de tabuleiro e, sobretudo, jogos de baralho). Para Kamii, estes jogos não só constituem um contexto excelente para a activação do pensamento em geral, como também solicitam de forma mais directa a comparação de quantidades.

Em termos de conclusão

Dentro de um quadro Piagetiano o professor deve estimular a criação de todos os tipos de relação entre objectos e acontecimentos. Ao fazê-lo está a proporcionar, à criança, momentos de abstracção reflexiva que, tal como foi dito, constitui a dimensão mais original e fundamental da teoria do número equacionada por este autor.

Notas

(1) Para uma revisão desta problemática ver Morgado, 1989.

(2) A abstracção reflexiva obtém as suas informações da coordenação das relações que o sujeito efectua sobre o objecto.

(3) A abstracção empírica obtém as suas informações dos objectos.

(4) É importante salientar que embora distinga abstracção reflexiva de abstracção empírica Piaget defende que uma não pode existir sem a outra. Com efeito, segundo este autor a própria leitura dos observáveis pressupõe um sistema de referências lógico-matemático. Por exemplo para que a criança compreenda que um carro é vermelho necessita de possuir um sistema classificatório para distinguir vermelho das outras cores. Precisa, ainda, de possuir um esquema classificatório para diferenciar o carro dos outros objectos que conhece. Esta perspectiva opõe-se à interpretação do desenvolvimento como simples leitura do exterior e, deste modo, às teorias de aprendizagem que dela derivam — a teoria associacionista ou de condicionamento.

(5) Esta concepção não deixa de ter implicações, como teremos ocasião de ver, ao nível dos exercícios de aprendizagem.

(6) É, no entanto, importante salientar que a construção do número se processa gradualmente. A criança começa por conservar 7 elementos, depois de 8 a 15 elementos, depois de 15 a 30. E assim sucessivamente.

(7) Este exercício segue de perto a metodologia utilizada por Inhelder, Sinclair e Bovet, 1974.

(8) Para mais detalhes ver Marchand, 1983.

Referências bibliográficas

Brainerd, C. (1973), Mathematical and behavioral foundations of number. *Journal of General Psychology*, 88, pp. 221-282.

Duncan, E.R.; Capps, L.R.; Dolciani, M.P.; Quast, W.G., Zweng, M.J. (1972) *Modern School Mathematics: Structure and Use.* Teacher's Annotated Ed. Rev. ed. Boston: Houghton Mifflin.

Gelman, R.; Gallistel, C. (1978), *The child's understanding of number.* Cambridge, Harvard University Press.

Greco, P. (1962) Quantité et Quotité. *Études d'Epistémologie Génétique*, vol. XIII, pp.1-70.

Inhelder, B., Sinclair, H., Bovet, M. (1974), *Apprentissage et Structures de la Connaissance.* Paris, PUF.

Klahr, D.; Wallace, J. (1973), The role of quantification operators in the development of conservation quantity. *Cognitive Psychology*, 4, pp. 340-360.

Kamii, C. (1984), *A criança e o número.* Campinas, Papirus.

Marchand, H. (1983), *Apprentissage operatoire chez des enfants provenant de milieux socio-culturels défavorisés.* Tese de Doutoramento (no prelo).

Marchand, H., (1986) Apprentissage opératoire dans un milieu socio-culturel sous-privilégié, *Archives de Psychologie*, 54, 3-26.

Morgado, L. (1988), *Aprendizagem operatória da conservação das quantidades numéricas*, Coimbra, Instituto Nacional de Investigação Científica, Psicologia 7.

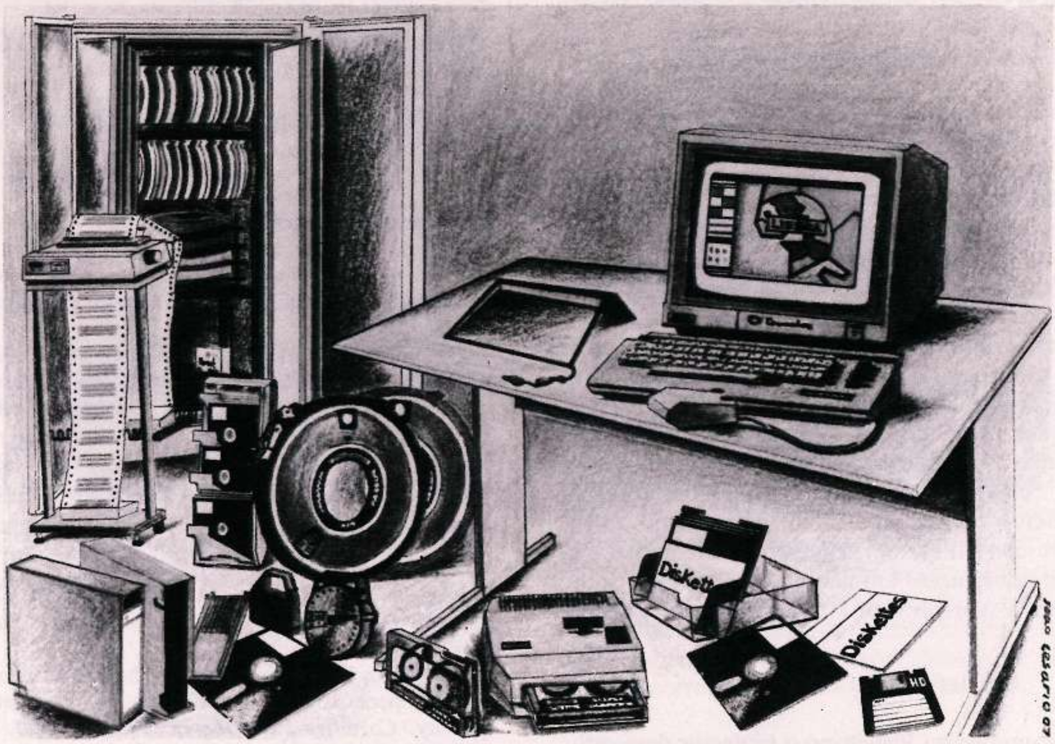
Piaget, J. (1949), *Introduction à l'Épistémologie Génétique I. La pensée mathématique.* Paris, PUF.

Piaget, J. (1959) Apprentissage et Connaissance. *Études d'Épistémologie Génétique*, vol.VII e X, Paris, PUF.

Piaget, J.; Szeminska, A. (1967), *La genèse du nombre chez l'enfant.* Paris, Delachaux et Niestlé.

Siegel, L. (1974) Development of number concepts: ordering and correspondance operations and the role of length cues. *Development Psychology*, 10, pp. 907-912.

Williams, R. (1976), An ordination before cardination response to Piaget's model for the assessment of number concept development. *The Journal of General Psychology*, 94, pp. 301-302.



Construção de materiais manipulativos

Lina Fonseca, Pedro Palhares, Teresa Pimentel, E. S. E. de Viana do Castelo

Este artigo pretende relatar uma experiência realizada em dois anos cujos resultados excederam as nossas expectativas.

A experiência realizou-se no âmbito da cadeira de Processos e Técnicas de ensino/aprendizagem de Matemática para todos os alunos do 2.º ano da ESEVC do curso de professores do ensino básico (1.º ciclo). Ora, segundo Piaget, no período pré-operacional ou operacional concreto, o pensamento lógico organiza-se através da acção, que não pode realizar-se senão aplicando-se a objectos. Paralelamente, as novas tendências para o ensino da Matemática fazem apelo à utilização de materiais manipulativos no ensino dos conceitos básicos. Assim, é importante que um futuro professor do ensino básico, para além de dominar as técnicas de utilização do mais diverso tipo de material existente, ganhe experiência na construção de novos materiais. Deste modo, definimos como uma das vertentes fundamentais desta cadeira o aprofundamento de técnicas de ensino com materiais adequados, a par do desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas.

Decidimos pedir, como trabalho de grupo, a construção de material manipulativo. Este trabalho seria importante para os alunos do ponto de vista da sua formação, e ao mesmo tempo suficientemente representativo para que na avaliação tivesse o mesmo peso que um teste. Este último facto permitiu ainda que os alunos se sentissem motivados para darem o melhor de si próprios.

Na mesma altura em que propusemos o trabalho (no princípio do ano, quatro meses antes da data de entrega), apresentámos também os seguintes critérios de avaliação:

1. Estética (correcção de linguagem e perfeição global);
2. Valor pedagógico;
3. Funcionalidade (correcção das regras e ideia geral).

Todos os alunos apresentaram um projecto prévio para melhorar a qualidade dos trabalhos e evitar a sua repetição.

Surgiram por fim em 1988/89 alguns trabalhos bastante bons, um dos quais será descrito adiante.

Para, de alguma forma, recompensar e motivar os alunos foi organizada uma mini-exposição na escola e uma deslocação à Feira de Ideias e Materiais no Porto, organizada pela APM. Mais tarde, esses mesmos trabalhos foram apresentados na Feira de Ideias e Materiais no ProfMat em Viana do Castelo.

Decidimos no ano de 1989/90 implementar de novo a experiência. Para isso, e no sentido de impedir que surgissem trabalhos demasiado parecidos com os do ano anterior, foi proposto que os alunos se cingissem a três temas: Ecologia, CEE e Descobrimentos Portugueses. Assim, além de terem um papel didáctico na Matemática, deveriam ter um papel didáctico em relação a um dos temas mencionados promovendo deste modo a interdisciplinaridade.

Ainda que tivessem surgido mais jogos de percurso do que gostaríamos, aquela proposta resultou em pleno; de facto, neste segundo ano, os alunos esmeraram-se no aspecto estético. Alguns dos trabalhos são, deste ponto de vista, praticamente perfeitos.

Organizámos então uma exposição que foi visitada por

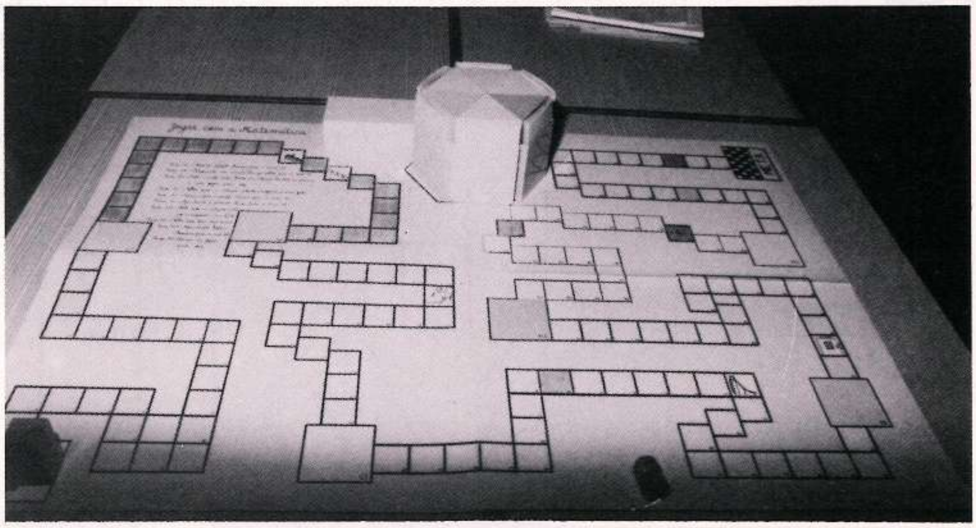


Foto 1

alunos da E.S.E., professores do distrito, alunos do ensino preparatório e professores responsáveis pela animação pedagógica das escolas. No último dia a exposição foi inclusivamente visitada pelo Ministro da Educação, Eng. Roberto Carneiro, que expressou o seu agrado pelo empenho dos alunos na elaboração dos materiais.

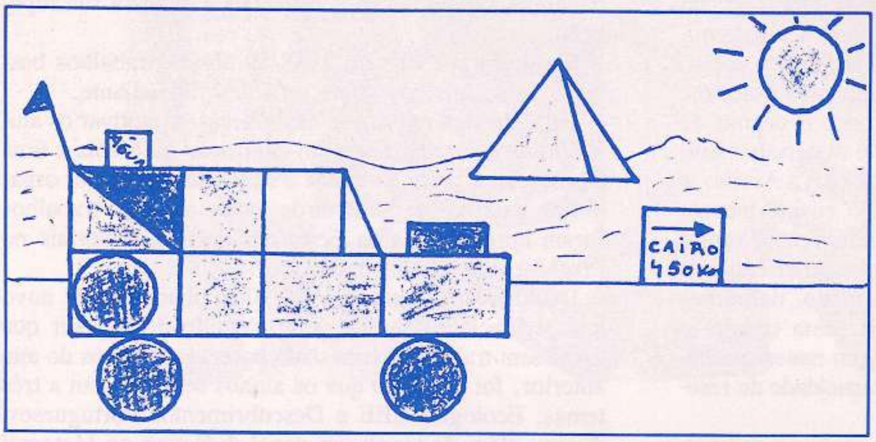
Descrição de alguns trabalhos

A) JOGAR COM A MATEMÁTICA (88/89)

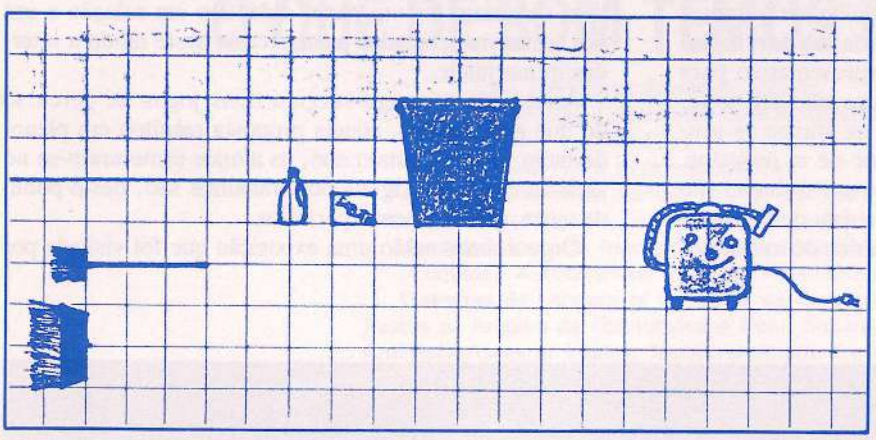
Luís Lagoa, M.ª João Fornelos, Paula Silva

Este trabalho é basicamente uma ficha de avaliação para o 2.º ano da 1.ª fase. Consiste num jogo de percurso com paragem obrigatória em 6 estações que correspondem aos 6 temas tratados neste ano de escolaridade. Em cada paragem, a criança terá de responder a uma pergunta que lhe permitirá avançar se responder acertadamente. Os peões são sólidos geométricos em madeira. (Fotografia 1)

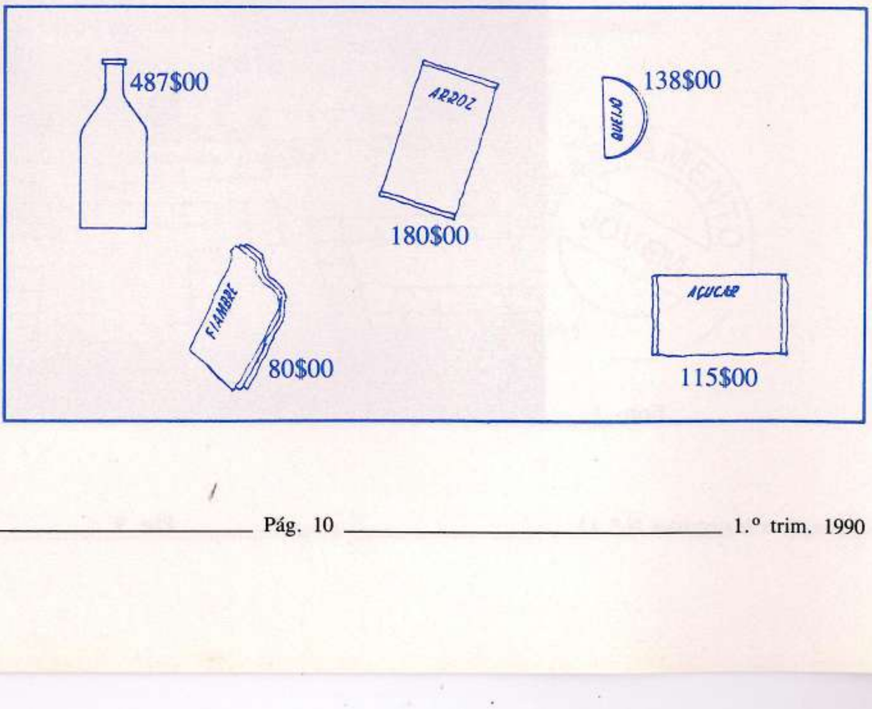
Algumas das perguntas:



Diz quantos círculos e quadrados encontras na figura.
R.: ....



O cabo da vassoura grande tem o triplo do comprimento do da vassoura pequena. Desenha-o.



A Susana foi ao supermercado e gastou 705$00.

O que é que ela comprou?
R.: ....

Este trabalho propunha uma forma interessante de avaliação, com perguntas bem elaboradas. Além disso, apresentava-se muito cuidado do ponto de vista estético.

B) À DESCOBERTA DA CEE (1989/90)

Ana Paula Castro, Ana Paula Ferreira, Cândida Gama, M.ª João Moreira

Este trabalho é um jogo destinado à 2.ª fase em que cada jogador procura reunir vários elementos de cada país (mapa, capital, bandeira e um monumento representativo). Aquele que completar o maior número de países será o vencedor. Para obter um destes elementos o jogador terá de responder correctamente a uma questão ou situação problemática.

Algumas das questões:

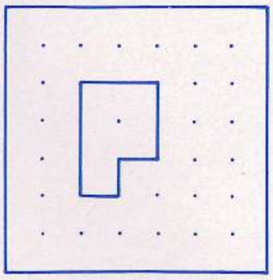
Foto 2

PERGUNTA: Divide um bolo redondo em oito partes iguais, partindo-o apenas três vezes.

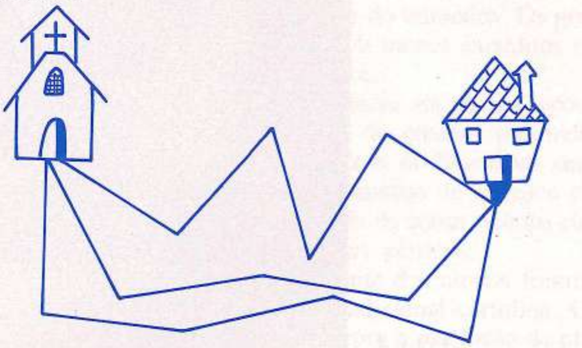
PERGUNTA: Queres adivinhar o número em que o Rui está a pensar?

— é maior que 30.
— é menor que 50.
— o algarismo das unidades é 3.
— o algarismo das dezenas é diferente do das unidades.

PERGUNTA: Constrói no geoplano, uma figura com a área igual à da figura abaixo representada e perímetro maior.



PERGUNTA: Usando o clips indica qual o caminho mais curto até à casa.



As questões apresentadas estão bem formuladas, reflectindo preocupação em fugir à rotina e procurando desenvolver competências tais como estimação, resolução de problemas, etc.

C) A TOCA

Ana Florentino, Francisco Cruz, Graciete Vieira, Luís Viana, Paula Cachadinha

Foto 3

Este trabalho é um labirinto tridimensional em que três jogadores procuram levar cada um o seu coelhinho (cubos a que foram arredondadas as arestas) até à toca, passando sucessivamente através de 4 patamares. Para isso, vão introduzindo nas aberturas laterais de cada patamar o número de cubos necessário para empurrar o coelho até ao furo que o fará cair na plataforma de baixo.

Ideia original, visando desenvolver as relações espaciais.

D) JOGOS LÓGICOS

Amélia Martins, Carla Santos, Céu Viana, Helena Jorge

Este trabalho consiste em material manipulativo inspirado nos blocos lógicos destinado ao 1.º ano (estrelas de 2 tamanhos, 2 espessuras e 3 cores, bandeiras e mapa) e associado ao tema da CEE. (Foto 4).

Foram elaboradas 3 fichas de trabalho, das quais apresentamos algumas perguntas:

«1. Reconhecer o interior, o exterior e a fronteira.

1.1. Colocar a bandeira portuguesa no interior de Portugal.

1.2. Colocar no exterior de Portugal uma outra bandeira.

1.3. Colocar na fronteira de Portugal com o país vizinho as bandeiras correspondentes.

2. Identificar esquerda e direita; acima e abaixo; (...) antes e depois:

2.1. Colocar a bandeira correspondente no território localizado:

— à esquerda de Portugal;
— à direita de Portugal.

2.2. Colocar uma estrela pequena:

— em cima de uma outra de tamanho grande;
— debaixo de outra de tamanho grande.

2.3. Imagina que vais fazer uma viagem, por terra, até à Holanda. Coloca a bandeira correspondente ao país em que passarias:

— antes de França;
— depois de França.»

Nota: Existe uma gravação em vídeo dos trabalhos que pode ser reproduzida a quem estiver interessado em conhecê-los mais pormenorizadamente.

Agradecemos ao Domingos Fernandes, professor coordenador da Unidade de Matemática da ESE de Viana do Castelo, toda a colaboração na elaboração deste artigo.

Foto 4

Geometria do espaço e materiais no 7.º ano

Leonor Cunha Leal, Esc. Secundária D. Pedro V
Eduardo Veloso, Departamento de Educação da FCUL

Introdução

A experiência de utilização de materiais manipulativos em Geometria que vamos descrever está enquadrada num projecto de renovação curricular da disciplina de Matemática nos 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade — MAT_{789} — com a duração de quatro anos e que teve início no ano lectivo de 1988/89. Neste ano a experiência foi desenvolvida em duas turmas do 7.º ano e na planificação global, decidimos atribuir 11 semanas do ano lectivo a actividades em Geometria.

De acordo com propostas para o ensino da Geometria Elementar que têm sido avançadas desde há muito, em particular por educadores matemáticos holandeses (Freudenthal, Albada), foi resolvido tratar a Geometria do 7.º ano tomando como *ambiente principal de aprendizagem o espaço* e, depois, *descendo* ao plano e *subindo* de novo ao espaço, sempre que isso se tornasse natural ou conveniente para resolver as questões que fossem sendo postas aos alunos.

A utilização de materiais manipulativos é uma prática corrente e natural no ensino da Geometria e os próprios materiais escolhidos não têm também nada de revolucionário, sendo apenas uma das escolhas possíveis. Julgamos que o interesse desta experiência está sobretudo na opção pedagógica que referimos e nas consequências que ela provocou no modo de utilização dos materiais.

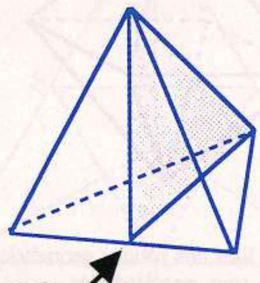
Alguns materiais e sua utilização

No primeiro dia de aulas de Geometria, foram dados a cada grupo de alunos um cubo, um tetraedro e uma pirâmide de base trapezoidal.

Em vez de utilizar poliedros opacos, utilizámos pequenos tubos de plástico (arestas) ligados através de cantos (vértices) também em plástico, formando desta forma as estruturas dos sólidos — a que um dos alunos chamava «esqueletos de sólidos». Além de tornar fácil o seu manuseamento, esta opção possibilitava a medição da diagonal do cubo ou da altura da pirâmide, por exemplo. «Medir» significa aqui precisamente isso, os alunos teriam que arranjar um processo expedito de fazer essas medições — muitos recorreram a um fio de cordel, pois utilizar a régua directamente tornava-se difícil. Outra vantagem era a de poderem introduzir dentro de tais estruturas outras construídas por eles (por exemplo, pirâmides dentro de um cubo), tendo assim uma confirmação aproximada das suas anteriores opções e medidas.

Apresentamos a seguir dois exemplos retirados das fichas de trabalho:

A) Repara bem na figura seguinte, em que aparece a sombreado um triângulo dentro do tetraedro:



Tenta desenhar em cartolina um triângulo que se encaixe no tetraedro da maneira indicada na figura. De quantas maneiras diferentes podes encaixar o triângulo no tetraedro?

B) Queremos encher o cubo com 6 pirâmides todas iguais. Pensa bem como hás-de fazer. Depois faz todas as medições necessárias para a construção das pirâmides. Chama depois a professora e pede as palhas necessárias para fazer duas dessas pirâmides.

Constrói as pirâmides e depois verifica que seis dessas pirâmides encheriam o cubo.

Sugestão: as bases das pirâmides vão ser as faces do cubo.

Comentários:

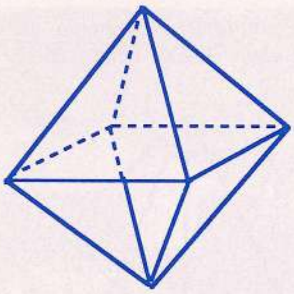
No exemplo A), o que se pedia aos alunos era no fundo a construção de um triângulo isósceles, em que o lado «diferente» era a aresta do tetraedro e o lado «igual» era a altura da face do tetraedro. Os grupos utilizaram processos, mais ou menos expeditos e rigorosos, para medir esta altura.

No exemplo B), foram dados aos alunos, após um trabalho prévio de pesquisa de quantas pirâmides iriam caber dentro do cubo e quais as dimensões necessárias para a sua construção, palhinhas de refresco com uma certa consistência mas fáceis de cortar e limpa-cachimbos para ligar as palhinhas nos vértices.

Outra actividade frequente dos alunos foram as planificações, utilizando a tradicional cartolina. Contudo, o ponto de partida foi sempre a resolução de problemas ou a exploração de situações problemáticas em que as planificações se revelassem como um processo conveniente de trabalho. Dois exemplos tirados das fichas de trabalho dos alunos:

A)

a) Estuda o octaedro que te for fornecido em cartolina:

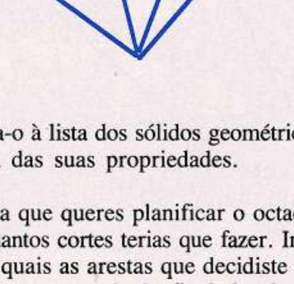


Acrescenta-o à lista dos sólidos geométricos e preenche a tabela das suas propriedades.

b) Imagina que queres planificar o octaedro. Vê se descobres quantos cortes terias que fazer. Indica a lápis no octaedro quais as arestas que decidiste cortar e faz um esboço com o resultado final da planificação.

B) Uma mosca que não sabe voar vive sobre um cubo. Para se deslocar, apenas pode andar sobre as faces do cubo.

a) Se marcarmos um ponto A sobre uma das faces do cubo (a da frente) e um ponto B sobre outra face (de lado), qual será, de todos os caminhos possíveis entre os dois pontos, o mais curto?



Faz um esquema no teu caderno indicando como descobririas o caminho mais curto. (Sugestão: lembra-te que já sabes planificar o cubo).

b) Estuda agora o caso em que dois pontos estão sobre duas faces opostas do cubo. Faz também um esquema no teu caderno.

Comentários:

No exemplo A), foi tido em conta que os octaedros fornecidos aos alunos e construídos pelo professor não revelassem quais as arestas que foram coladas. Dessa forma, diferentes grupos de alunos chegaram naturalmente a diferentes soluções, que foram depois discutidas com toda a classe.

Quanto ao exemplo B), a planificação do cubo é praticamente exigida pela resolução do problema. Mas este problema obriga, sobretudo a alínea b), a perceber que existem várias planificações possíveis e que em alguns casos não é indiferente qual a que escolhemos.

Considerações finais

Ao reflectirmos sobre a nossa experiência com estas duas turmas do 7.º ano, somos levados a fazer duas constatações:

- os alunos aceitaram muito bem o conjunto de actividades de Geometria que lhes propusemos e demonstraram interesse e mesmo prazer na realização dessas actividades;
- como é natural, depois de um período prolongado de trabalho num certo ambiente e com certo tipo de objectos — neste caso, os sólidos geométricos — os alunos revelavam uma familiaridade e uma apreciável capacidade de resolver problemas envolvendo esses objectos, e ao mesmo tempo começavam a libertar-se da necessidade de manipular os sólidos para pensar sobre eles; ou seja, parecia estarmos também a atingir um dos nossos objectivos, os alunos tinham desenvolvido as suas capacidades de visualização no espaço.

Para ilustrar estas últimas afirmações, utilizaremos como exemplos respostas de alunos a questões que lhes foram postas numa ficha de avaliação de Geometria. Esta ficha pretendia avaliar os diferentes tipos de actividades que os alunos tinham realizado em Geometria, e assim, ao mesmo tempo que eram propostos variados problemas, também eram pedidas algumas construções em cartolina a propósito de outros problemas. Apresentaremos como exemplo duas questões dessa ficha.

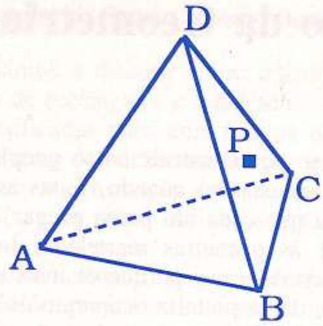
A)

a) Quantos cubos com uma aresta de 5 cm se poderiam encaixar dentro de um cubo com uma aresta de 10 cm, de maneira a enchê-lo completamente?
Faz um pequeno desenho explicando a tua resposta.

b) E se a aresta dos cubos mais pequenos medisse 1/4 da aresta do cubo maior, quantos cubos pequenos se poderiam encaixar no maior? Explica a tua resposta.
Repara na figura seguinte, que representa um tetraedro regular cuja aresta mede 5 cm.

B)

O ponto P é o centro do triângulo BCD.



Responde agora às seguintes perguntas:

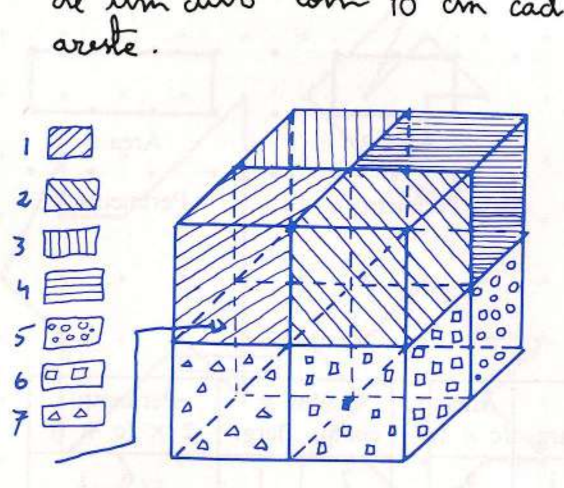
a) Uma aranha desloca-se sobre o tetraedro. Se a aranha está no ponto A e quer apanhar uma mosca que está no ponto P, qual é o caminho mais curto? Explica a tua resposta. Quantas soluções existem para a aranha?

b) Desenha uma planificação deste tetraedro (5 cm de aresta) numa folha de desenho e traça o tal caminho mais curto. Mede com uma régua a distância em milímetros a que está a aranha da mosca.

Comentários:

Quanto ao problema A), grande número de alunos não só responderam acertadamente às questões a) e b) como nas suas justificações fizeram esboços interessantes em perspectiva, utilizando métodos sequenciais de numeração e processos claros e sistemáticos para responder à alínea b). Apenas um exemplo que dispensa mais comentários:

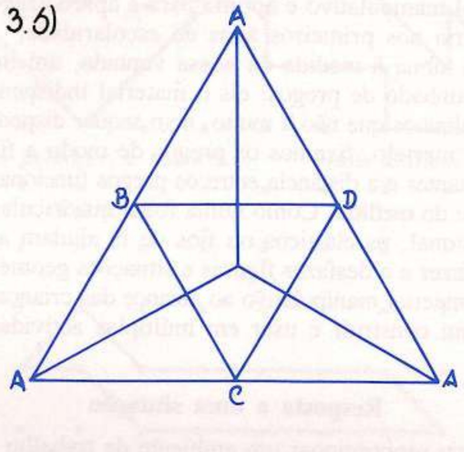
a) Poderiam-se encaixar 8 cubos com 5 cm cada aresta dentro de um cubo com 10 cm cada aresta.



PS: O cubo nº 8 encontra-se tapado por os outros, daí ao facto de não se ver.

Quanto à questão B), alguns alunos foram capazes de escolher a planificação que facilitava mais a sua resposta, enquanto outros, embora não escolhendo a melhor planificação, conseguiram mesmo assim, mediante uma correcta identificação dos pontos da planificação que correspondem ao mesmo ponto no sólido, chegar ao resultado correcto. Seguem-se exemplos de um e de outro caso:

3.a)



Eu tracei os 3 caminhos possíveis que a aranha podia fazer, traçando desta maneira. Há 3 pontos que estão marcados pela letra A, porque são todos o mesmo vértice. Traçando assim, os caminhos já não estão sujeitos a ficarem separados, quando se faz a planificação e as arestas ficam separadas. Desta maneira, já se pode medir ao certo os caminhos traçados.

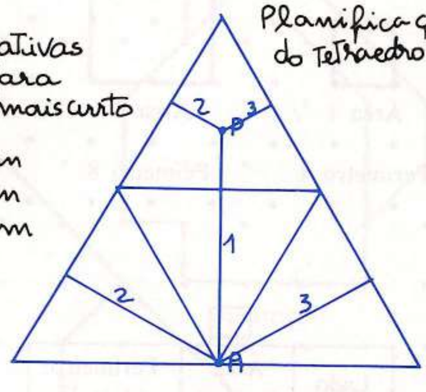
Os três caminhos medem 58 milímetros.

3 b)

3 alternativas possíveis para caminho mais curto

1-5,85cm
2-5,85cm
3-5,85cm

Planificação do tetraedro



Estes foram os materiais e a utilização que lhes foi dada em Geometria, no 7.º ano. Os mesmos alunos, no início deste ano lectivo, agora já no 8.º ano, utilizaram espelhos e desenhos do Escher no estudo das transformações geométricas. Mas isso fica para outra vez...

Um lugar para o geoplano no ensino da Geometria

Cristina Ponte

Foi há 5 anos que o experimentei. Estava então na Escola Primária das Galinheiras e leccionava o 4.º ano. Hoje, ligada ao Projecto MINERVA e à utilização de meios informáticos no ensino, continuo a pensar que este material manipulativo é optimo para a aprendizagem da geometria nos primeiros anos de escolaridade.

Uma tábua à medida da nossa vontade, um martelo e um punhado de pregos: eis o material indispensável. Convenhamos que não é muito, nem sequer dispendioso. Com o martelo, fixamos os pregos de modo a ficarem equidistantes e a distância entre os pregos funciona como unidade de medida. Como numa folha quadriculada tridimensional, os elásticos ou fios de lã ajudam a defenir, a fazer e a desfazer figuras e situações geométricas. É um material manipulativo ao alcance das crianças, que o podem construir e usar em múltiplas actividades.

Resposta a uma situação

Queria proporcionar um ambiente de trabalho activo e variado para o estudo da geometria. Aceitei entusiasmada a sugestão de uma professora de outro nível de ensino, a Ana Leitão, e decidi-me a explorar com os alunos aquela tábua com pregos semelhante às camas dos faquires.

Apresentei-lhes a ideia. O argumento decisivo para levantarem fundos da Cooperativa de Sala para a compra de material foi o de que teriam de martelar... Um grupo foi saber preços, fizeram-se cálculos ao custo do material, optou-se por construir cinco geoplanos.

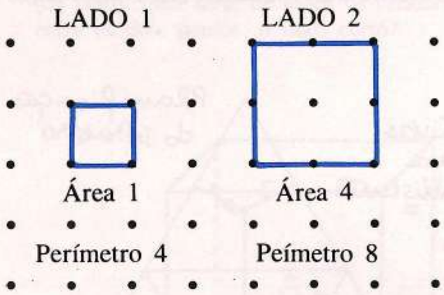
Foi grande o entusiasmo quando, feitas as estimativas, se verificou que cada um podia pregar à volta de 26 pregos...mas às primeiras marteladas logo houve desistências. Nada de grave porque os mais entusiastas pelas actividades de carpintaria ocuparam os seus lugares e durante duas manhãs os martelos não pararam do outro lado da porta. É claro que nem sempre os pregos ficaram direitinhos, como convém.

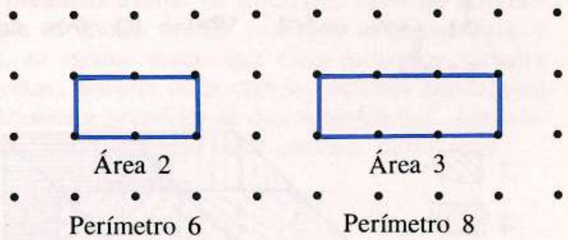
Também contámos com a ajuda de alguns pais habilidosos e com vontade de colaborar. Foi assim que nasceu o nosso sexto geoplano.

A construção do geoplano serviu para gerar variadas situações problemáticas: Qual o preço de 23 tábuas, para cada aluno ficar com um geoplano? E quantos pregos são precisos para elas? Quanto custaram os pregos que pusemos nas tábuas? Quantos pregos comprámos a mais?

«Nós fizemos cinco geoplanos. Quando ficaram prontos, fizemos várias figuras com uns elásticos às cores. Primeiro fizemos figuras com três pregos dentro delas e fizemos figuras com quatro lados. Depois fomos fazer projectos com figuras livres. O meu grupo fez uma casa e o grupo do Francisco fez um robot. A seguir, a Cristina perguntou que figuras geométricas tinhamos usado. O meu grupo usou o rectângulo, o quadrado e o triângulo.» (Carla)

A exploração orientada — construção de quadrados e rectângulos — serviu de base a uma sistematização das noções de área e perímetro, registada no quadro.





Lado	Área (c × l)	Perímetro (4 × l)
1	1	4
2	4	8
3	9	12

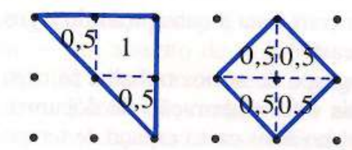
Lado ≠ comp.	larg.	Área (c × l)
4	1	4
4	2	8
5	4	20

Lados ≠ comp.	larg.	Perímetro 2 × (c + l)
2	1	6
3	2	10
4	3	14

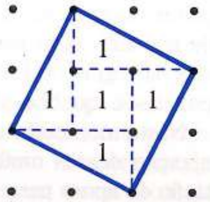
Explorando as figuras geométricas conhecidas

Continuámos a discutir sobre o lados, as áreas, os perímetros de rectângulos e quadrados. Apareciam soluções diversificadas para uma mesma questão — construir uma figura de perímetro 18, por exemplo. Grande polémica deu a construção de um quadrado de área 5: seria possível ou não? Afinal sempre era possível, descobriu-se mais tarde!

O triângulo rectângulo surgiu numa pesquisa do Luís. Pela divisão do quadrado de lado 1 em dois triângulos, chegou-se à conclusão que cada triângulo resultante tinha de área 0,5. Pela decomposição do rectângulo de área 2, identificou-se o triângulo de área 1. E por aí fora...



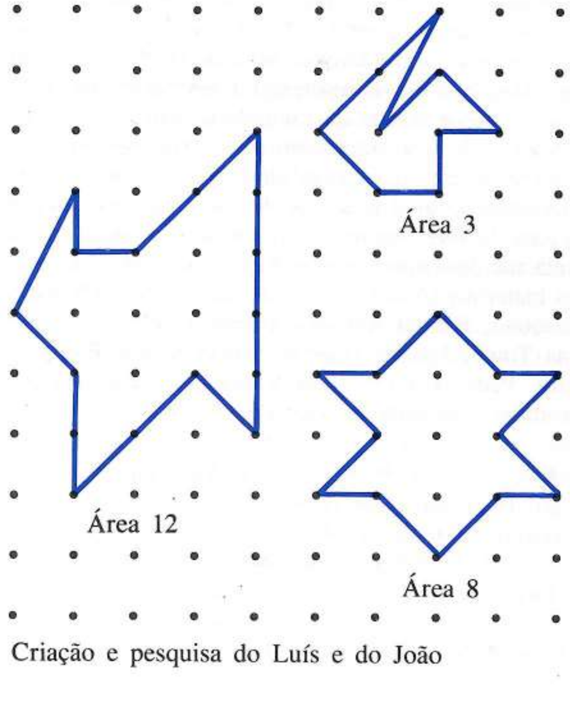
1 triângulo e 1 quadrado de área 2



1 quadrado de área 5

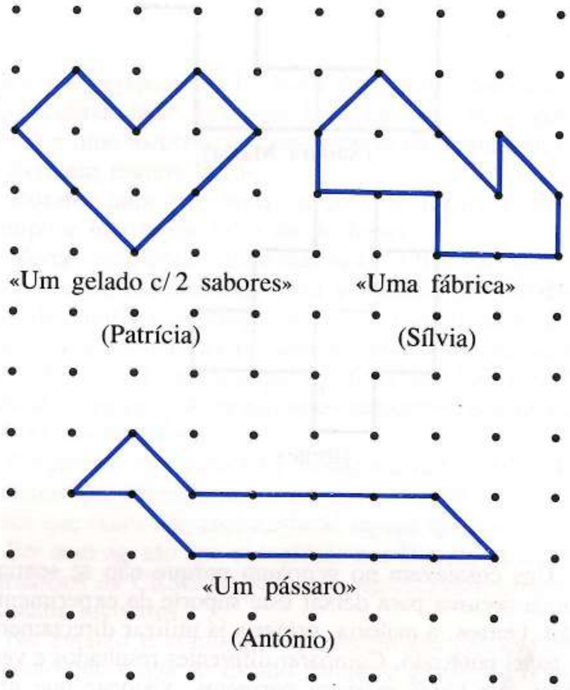
Criação e estudo de figuras «espantosas»

Estavam dados os primeiros passos para o estudo das áreas. Os alunos lançaram-se na pesquisa das áreas de figuras por eles criadas.

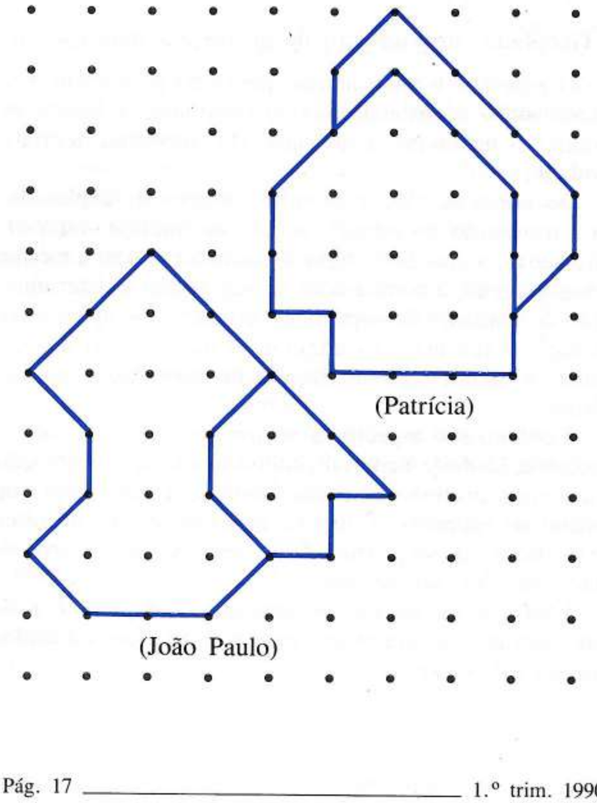


Criação e pesquisa do Luís e do João

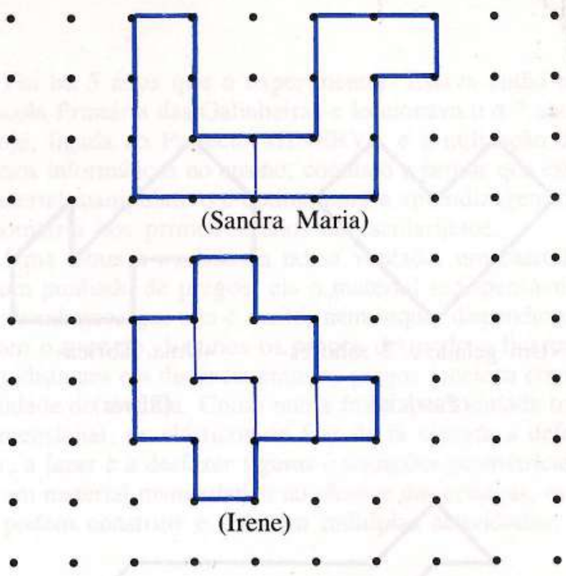
Como realizações colectivas, surgiram «tarefas»:
— Construir uma figura de área 6. Identificá-la.



— Construir uma «figura espantosa» de área 15. Construir uma figura que encaixe exteriormente de área 5.



— Construir uma figura de área 9 que contenha uma figura de área 4.



(Sandra Maria)

(Irene)

Uns ensaiavam no geoplano porque não se sentiam ainda seguros para deixar este suporte de experimentação. Outros, a maioria, preferia já utilizar directamente o papel ponteado. Comparar diferentes resultados e verificar que todos estavam correctos, visionar que uma figura de perímetro 8 tanto pode ser o rectângulo de 3 por 1 como o quadrado de lado 2, analisar soluções elaboradíssimas e outras mais imediatas, trocar experiências, atribuir significados a figuras... foi uma prática de observação, criatividade, comunicação, mas também de realização face ao certo — *«O meu está certo mas o teu também»*...

Geoplano, instrumento de geometria mas não só

O geoplano é um material que interliga o gosto pela descoberta, a manipulação de materiais, a leitura de situações incomuns, a resolução de problemas, a criatividade.

Do ponto de vista curricular, podem ser exploradas a estruturação do espaço (noções de interior, exterior, fronteira), a criação de figuras geométricas com a mesma configuração, a comparação de superfícies e determinação de unidades de superfície, a simetria simples e em relação a um eixo, os ângulos, o trabalho em quadrícula, a identificação e traçado de superfícies equivalentes.

Também são aspectos a referir, as dinâmicas que a construção deste material proporcionou, a contribuição de outros professores e das famílias, a valorização de materiais «pobres», o carácter experimentalista do fazer e desfazer até ao produto final, sem marcas de erro — tal como no computador...

Lado a lado com outros recursos, o geoplano constitui, sem dúvida, um instrumento para os alunos o explorarem e o viverem.

CENTRO DE RECURSOS APM

Encontra-se em fase de arranque o centro de recursos da APM. Pretende-se com esse projecto recolher ideias e materiais que possam posteriormente ser utilizados no ensino e aprendizagem da Matemática.

Numa primeira fase privilegiámos os materiais manipulativos, mas estamos desde já a dedicar alguma atenção às fichas de trabalho, a artigos de publicações nacionais e estrangeiras, a software educacional e a material de vídeo da área da educação matemática.

Tal como se impunha, as primeiras actividades realizadas no âmbito deste projecto destinaram-se à produção de materiais. Assim, realizaram-se já duas sessões de trabalho com professores em duas escolas secundárias da região de Lisboa com vista à construção de jogos, puzzles e quebra-cabeças(*).

Neste momento, um grupo de sócios trabalha na organização desses materiais e na elaboração de documentação de apoio para que, no mais curto espaço de tempo, seja divulgada uma lista de todo o material existente e este esteja em condições de ser imediatamente utilizado por qualquer sócio.

Nesta perspectiva, estamos a tentar dar forma a uma ideia que nasceu no Profmat de Viana; trata-se duma «mala» (que alguém baptizou de maleta pedagógica), que circulará pelas escolas, sob o compromisso de ser enriquecida, por quem a utilizar, com uma novidade e com um pequeno relatório dos aspectos mais interessantes observados na sua utilização.

A organização de um verdadeiro centro de recursos, capaz de responder às necessidades dos professores de matemática, só será no entanto possível se houver a colaboração de todos os sócios. Assim, pedimos a quem possuir materiais com interesse, nomeadamente aos núcleos regionais, que nos contactem no sentido de encontrarmos a melhor forma de estabelecer um intercâmbio.

Apesar de neste momento o material disponível ser ainda relativamente escasso, ele foi já utilizado em várias actividades com alunos e professores de várias regiões do país. Se tiver interesse em utilizá-lo desde já, poderá contactar directamente algum dos elementos do grupo dos materiais (Ana Paula Natal, Ana Vieira, Conceição Mesquita, Fátima Antunes, Fernanda Milheiro, Georgina Tomé, Helena Hilário, Mirita Sousa, Paula Teixeira, Pedro Esteves, Rita Vieira, José Paulo Viana), ou através da seguinte morada:

Associação de Professores de Matemática
a/c Henrique Guimarães
(Grupo dos Materiais)
Av. 24 de Julho - 134 - 4º
1300 Lisboa.

(*) Ver APM/Informação n.º 3

Manuais escolares no Ensino Primário (*)

J. David Vieira, Universidade de Aveiro

O manual escolar é de há muito um auxiliar privilegiado e mesmo indispensável no processo de ensino//aprendizagem em todos os níveis de ensino não superior (mesmo neste nível não esqueçamos o papel da tão conhecida «sebenta»). Nos últimos anos, o desenvolvimento da investigacão na área das Ciências da Educação favoreceu o aparecimento no mercado de muitos e diversificados instrumentos pedagógicos e materiais didácticos, mas o manual escolar manteve e mantém inalterada a sua posição de relevo.

Com os manuais escolares gastam-se, a nível mundial, cerca de 85% dos recursos financeiros destinados aos materiais pedagógicos [1; pag. 270]; «Livro Escolar — um assunto de milhões» titula na capa a revista LER [5] e eu atrever-me-ia a ser mais objectivo e a dizer **Livro Escolar — negócio de milhões**. E talvez esteja aqui uma das razões das dificuldades em atacar frontalmente o problema. A isto junte-se a inexistência de uma política de manuais escolares e o facto do ME, através dos seus organismos especializados, não ter assumido em devido tempo as suas responsabilidades neste capítulo.

O ensino primário, por razões conjunturais, é mais vulnerável que qualquer outro grau de ensino a este tipo de problema.

No ensino primário «os milhões são maiores», os compradores são certos e por conseguinte o importante é que o produto esteja pronto no início do ano escolar. E a **qualidade**? Do ponto de vista gráfico a qualidade é de um modo geral boa - é preciso vender, a operação «marketing» funciona. A qualidade científica, essa, não tem sido preocupação de grande parte dos autores. Pior, atendendo aos manuais que consultei nos últimos dez anos, sou levado a crer que vários autores não conheciam minimamente matérias sobre as quais escreveram. Significa isto que nos últimos anos só apareceram manuais cientificamente maus no mercado? De modo nenhum. Dos que conheço — e estou muito longe de conhecer tudo o que é produzido — alguns não apresentam erros científicos.

Então, o problema parece de solução simples — basta que os professores escolham os livros mais viáveis do ponto de vista científico.

Ora é aqui que tem residido o drama — escolher como? Com que instrumentos de avaliação? Com que conhecimentos? A introdução de novas matérias no programa, neste caso, a teoria dos conjuntos como teoria-base para a definição do conceito de número, foi feita sem preparação dos professores. A grande maioria desconhecia tal matéria e tinha apenas para orientação os manuais dos alunos, alguns com erros grosseiros. Confusão entre conjunto e sua representação, entre as relações de pertença e de inclusão, entre igualdade e equicardinalidade, utilização indevida dos sinais operatórios e uma incorrecção generalizada da linguagem era visível em muitos livros.

Durante anos não houve acções de formação neste campo e não havia livro do professor.

Nestas condições, como distinguir o trigo do joio? É óbvio que a escolha não podia ser ditada por parâmetros de natureza científica. Anos a fio foram adoptados em muitas escolas livros sem o mínimo de qualidade científica. É por tudo isto que eu afirmo que houve negligência e demissão de organismos responsáveis pelo sector do ensino primário.

Felizmente algo parece ter mudado neste capítulo. Nos manuais que ultimamente tenho consultado deixei de ver erros que eram vulgares ainda há alguns (poucos) anos.

Foi com agrado que vi incluído nos Documentos Preparatórios da CRSE [1] todo um capítulo dedicado aos manuais escolares.

No entanto e como já foi referido em [3] foi com espanto que li que ao Estado competia garantir a qualidade pedagógica e técnica dos manuais escolares (págs. 275, 276, 278). E a garantia de qualidade científica a quem compete? A inclusão desta componente na pág. 281 e posteriormente no projecto de diploma (pág. 287) não diminui grandemente a gravidade da omissão. Será interessante lembrar o que já constava no ponto 1 da Recomendação n.º 15 da Conferência Internacional da Instrução Pública sobre «Elaboração, utilização e escolha de livros escolares» reunida em Genebra em Julho de 1938 (mil novecentos e trinta e oito):

«Os manuais escolares devem responder a três categorias de exigências; pedagógicas (**fundo científico** e métodos); técnicas (...) e económicas (...);»
e no ponto 3 da mesma Recomendação chama a atenção especial das autoridades oficiais para os livros a usar nas classes primárias, com relevo particular para os que se destinem às crianças mais jovens.

A razão apontada nesta altura era o risco de degradação da qualidade devido à concorrência de editores e autores.

E aqui não posso deixar de me lembrar do «assunto (leia-se, negócio) de milhões».

No ponto 5 volta a insistir-se na mesma ideia — a importância do **fundo científico** e do método pedagógico na apreciação dos manuais.

O cuidado especial a ter com os manuais para o ensino primário pode ver-se na Recomendação n.º 48 aos Ministérios da Instrução Pública feita em Julho de 1959 pela Conferência Internacional da Instrução Pública, sobre a «Elaboração, escolha e utilização dos manuais do ensino primário». Transcrevo alguns pontos dessa

Recomendação:

«Elaboração dos manuais

2) Sobretudo nos países em que a redacção dos manuais compete à iniciativa privada, convém ter a garantia de que as obras utilizadas nas aulas são de um valor **científico**, pedagógico, e estético incontestável.

3) Atendendo às exigências no que se refere tanto ao conteúdo do livro escolar como ao seu valor didáctico, é cada vez mais desejável que, quando da elaboração dos manuais, se estabeleça uma colaboração entre os peritos em matéria de investigação pedagógica, os especialistas das disciplinas tratadas e os professores encarregados de as ensinar.

Questões de ordem didáctica

38) Deve encorajar-se a corrente que está a nascer em vários países a favor da generalização dos manuais didácticos ou livros dos professores,...»

É com tristeza que se constata que 30 anos depois esta Recomendação ainda não passou por aqui. Apesar do tempo decorrido, parte substancial das Recomendações referidas ainda mantém perfeita actualidade.

Problemas como os resultantes da introdução da Teoria dos Conjuntos no ensino primário (e que se verificaram também noutras áreas) sendo graves, poderiam não atingir as proporções que atingiram se tivesse havido a preocupação de desencadear atempadamente acções sérias de reciclagem e/ou formação dos professores e de promover a elaboração de adequados manuais do professor.

Já em 2 de Outubro de 1980, em relatório enviado à Directora Geral do Ensino Básico [6], o Grupo de Trabalho de Aveiro da SPM chamava a atenção para a gravidade da situação e pedia a intervenção das entidades responsáveis para que a formação (contínua) dos professores pudesse ser uma realidade a curto prazo. E acrescentava-se, terminando assim o relatório, «... a fim de que, em fins do século XX, em Portugal, não se continue a ensinar crianças a multiplicar ratos por ratos ou cães por ossos» (referência a uma ficha de um livro adoptado nessa altura em algumas escolas).

De então para cá, embora lentamente, alguma coisa mudou e penso que para melhor. Estou esperançado em que o desejo formulado no relatório acima referido virá a ser satisfeito, mas a realidade é que grande parte dos professores do ensino primário ainda continua desarmada perante a avalanche de manuais que todos os anos chega às bancas das livrarias e mais ainda perante a eventualidade de modificações programáticas.

O processo de escolha de manuais para o ensino primário, proposto pela CRSE, não tem em conta a realidade e é previsível que, a ser adoptado, esteja votado ao fracasso.

A formação de professores, inicial e contínua, como temos vindo a referir há anos e que é um tema muito caro ao actual Ministro da Educação é pedra de toque de toda esta problemática. Entretanto, é urgente intervir no que respeita à qualidade dos manuais, e em qualidade englobamos os aspectos científico, pedagógico, técnico, gráfico e económico e essa intervenção, seja qual for, não pode ficar-se em simples «desaconselhamentos», é preciso evitar que manuais com erros grosseiros possam vir a ser adoptados por escolas — uma que fosse, já seria grave.

Tal medida moralizaria, a curto prazo, a produção não permitindo a sobrevivência dos manuais efectivamente maus.

Todos estão descontentes com os livros escolares — professores, pais, alunos e editores, lê-se no cap. IV dos Doc. Preparatórios II.

Se assim é, passe-se, pois, à acção para que o problema dos livros escolares, com especial incidência no ensino básico elementar — negócio de milhões — não continue a ser uma vergonha nacional.

Referências

[1] «Documentos Preparatórios-II», CRSE, 1988

[2] «Os Livros Escolares», Costa Carvalho, 1972

[3] «Contra a insustentável falta de rigor científico na escolha dos manuais escolares proposta pela CRSE», J. David Vieira e Arsélio Martins, Boletim da SPM, n.º 12, Março 1989

[4] «Matemática no Ensino Primário», Arsélio Martins, J. David Vieira, Boletim da SPM, n.º 13 — Janeiro 1989

[5] «Livro Escolar — um assunto de milhões» — LER, n.º 4, 1988

[6] «Formação Contínua (?) de professores — Algumas experiências» — (vários) — Actas do Colóquio «O ensino da Matemática nos anos 80», SPM, 1982.

(*) Em concreto só me referirei a estes manuais por ser os que conheço razoavelmente bem.

Que papel para os manuais de Matemática?

Uma sondagem junto dos autores

Este número de **Educação e Matemática**, *ao dedicar especial atenção à utilização de materiais no ensino e aprendizagem da Matemática, não poderia, naturalmente, deixar de fora os chamados manuais ou livros de texto da referida disciplina. Assim, no que diz respeito ao Ensino Preparatório e Unificado (sobre o Ensino Primário veja o artigo de David Vieira também publicado neste número), enviámos uma carta a diversos autores de manuais para esses níveis de ensino onde se solicitava uma resposta às três seguintes questões:* **(1) O que privilegia nos livros que elabora; (2) Qual pensa ser a função principal que o manual deverá ter; (3) Poderá o manual ser substituído pelos livros de exercícios ou por fichas de trabalho?**

Recebemos sete respostas correspondentes a autores cujos nomes a seguir indicamos apresentando, entre parêntesis, os anos a que se destinam os livros de sua autoria: Ana Luísa Correia, Célia Moreira Eusébio e Teresa Olga Albuquerque (7.º, 8.º e 9.º); Leonor Moreira (1.º - 6.º); Ivete Caldas e Teresa Fonseca (5.º e 6.º); Marcelina Armelim, Maria Manuela Mota e Matilde Varandas (5.º e 6.º); Cristina Loureiro, Isabel Moura, Maria José Delgado e Maria José Oliveira (5.º e 6.º); Paulo Abrantes e Raúl Carvalho (7.º - 12.º); Maria Augusta Neves (5.º - 12.º). Aqui fica o nosso agradecimento pela colaboração a que se prestaram.

Os textos que recebemos como resposta às questões que colocámos não são uniformes: uns mais longos outros mais curtos, uns mais sintéticos outros mais detalhados, uns mais descritivos outros mais explicativos, uns seguindo de perto as questões propostas outros «esquecendo» essas questões. Apresentamos seguidamente o trabalho que realizámos com esses textos e que, acreditamos, dá um quadro das principais perspectivas dos autores relativas ao papel do manual de Matemática no ensino e aprendizagem desta disciplina. Para identificação das citações utilizámos as iniciais do primeiro autor de cada um dos grupos.

Uma unanimidade

Será talvez interessante começar por uma unanimidade. Trata-se, como já esperávamos, do **não** como resposta à terceira das questões que nós propusemos: *Poderá o manual ser substituído pelos livros de exercícios ou por fichas de trabalho?* Na verdade todos os autores que se manifestaram, a este respeito, fizeram-no negativamente, não aceitando, directa ou indirectamente, que o livro de exercícios possa *substituir* o manual de Matemática. «[Estudar Matemática não é] *sinónimo de fazer muitos exercícios*» (ALC), «*sendo mínimo o tempo efectivo de aprendizagem na escola (...) há que propor aos alunos outras actividades (que não exercícios) que eles possam desenvolver autonomamente fora da aula*» (LM), «*o uso de fichas ou de manuais contendo apenas exercícios não é suficiente para a construção do saber matemático*» (MAN), «*um ensino exclusivamente baseado em fichas de trabalho ou livros de exercícios torna-se demasido dirigido*» (MA), «*a simples resolução de exercícios não desenvolve a cultura matemática*» (PA), são afirmações de alguns autores que justificam, ou subentendem, essa não aceitação. Talvez, agora, interesse deslocar a nossa análise para o entendimento que os autores fazem do papel dos exercícios na aprendizagem da Matemática, entendimento esse que é fundamento da posição assumida.

Em quase todos os casos (só num não aconteceu) os autores referiram-se explicitamente ao papel dos exercícios. Por exemplo, para os últimos dos autores que acabámos de citar, resolver apenas exercícios «*não desenvolve a* cultura *matemática*» (PA). Também a afirmação «*sou contra os exercícios no que eles representam de rotina e adestramento*», exprime, por sua vez, a perspectiva de uma autora que, a este respeito, acrescenta ainda: «*prefiro que os alunos estejam sempre a fazer a mesma coisa utilizando estratégias e técnicas diferentes do que estejam a fazer coisas diferentes, utilizando as mesmas técnicas e as mesmas estratégias*» (LM). Ainda segundo a mesma autora, uma utilização exclusiva de exercícios não permitiria o desenvolvimento, nos alunos, de componentes importantes na comunicação em Matemática — «*saber ler e interpretar as ideias de outrem*» — nem proporcionaria momentos em que os alunos possam «*reflectir e clarificar*» as suas próprias ideias.

Uma outra autora afirma que a «*Matemática não é uma arte de fazer exercícios*» (MAN) mas uma ciência que faz uso do raciocínio lógico-dedutivo e na qual a compreensão e reflexão dos alunos é muito importante. Considera, por isso, que a resolução mecânica de exercícios «*em série*» é negativa pois o sucesso a que conduz é «*aparente*» e desenvolve nos alunos atitudes incorrectas na sua relação com a Matemática. Em sua opinião, na aprendizagem da Matemática, o aluno deve «*partir da teoria*» e, depois de ter «*assimilado os conceitos*», resolver exercícios e problemas «*de forma crítica*»: «*a resolução de exercícios, que de uma forma diversa abordam os conceitos a estudar, é muito importante, pois só através da aplicação dos conhecimentos* *na prática o aluno adquire certeza e assimila perfeitamente o conteúdo matemático»*. A mesma autora considera que tal como certos desportistas ou artistas treinam intensamente procurando a automatização, o mesmo deve fazer o estudante em Matemática resolvendo *«exercícios e problemas (com reflexão e raciocínio) até estar seguro da matéria»* para poder depois abordar assuntos de complexidade superior.

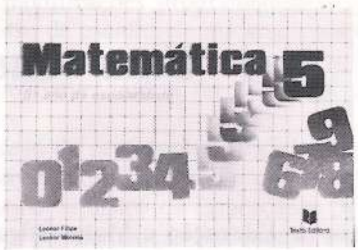
Para outros autores, embora considerando que estudar Matemática não é sinónimo de fazer muitos exercícios, *«os exercícios são necessários como teste para o estudo realizado e como meio de aprofundar os conhecimentos levantando novas questões»* (ALC). Um livro de texto, para estes autores, deve conter, em cada capítulo, exercícios de vários graus de dificuldade para que o aluno possa *«fazer o ponto da sua situação numa determinada unidade»*. Ainda a propósito de exercícios, os mesmos autores fizeram questão de declarar: *«não existem* [exercícios] *demasido difíceis se os conhecimentos adquiridos bastam para os resolver»*.

Em outros casos, ainda, aceita-se que os exercícios têm *«utilidade»* (CL) ou que *«têm um papel importante na aprendizagem»* (MA), não sendo, no entanto, especificadas a utilidade ou importância referidas. Os primeiros dos autores agora citados, no entanto, enquadram a utilização de *«alguns»* exercícios de rotina num conjunto de actividades de outro tipo que, claramente, entendem dever ser privilegiadas: *«investigação e pesquisa, descoberta de relações, resolução de problemas, construções»*.

O manual de Matemática: que instrumento de trabalho?

Analisando as respostas dos autores às duas outras questões que lhes colocáramos, podemos dizer que as suas posições, no que respeita à *função principal* do manual de matemática, se matizam entre dois pólos: por um lado, o manual visto como **local de consulta** onde o aluno pode encontrar organizadamente a informação teórica matemática, e por outro, o manual encarado como **fonte de actividades** a realizar pelo aluno para que ele construa os seus conhecimentos matemáticos. De uma maneira ainda mais extrema poderíamos dizer: de um lado, o livro que *define*, de outro, o livro que *propõe*.

Posto isto, detalhemos as diversas posições a propósito da função principal do manual de Matemática que, embora as não possamos colocar em qualquer dos pólos extremos referidos, evidenciam diferenças que consideramos importantes. Vários autores referiram-se ao manual como um *instrumento*: nuns casos, encarado como um recurso dos alunos para *«aprendizagem e/ou consolidação»* (ALC) dos seus conhecimentos matemáticos, para outros, como um auxílio para o aluno *«construir e descobrir Matemática»* (CL) ou, em outros casos ainda, para *«desenvolver a sua compreensão do que é a Matemática, qual é a sua natureza e que papel desempenha na sociedade»* (PA). Referindo-se ou não explicitamente ao carácter instrumental do manual de matemática, a quase totalidade dos autores atribuíram-lhe, directa ou indirectamente, uma função de **elemento de consulta** ainda que com ênfases e significados diferentes como seguidamente procuramos dar conta.



Da consulta...

Contrapondo-o com a situação de aula (onde, em sua opinião, os resultados devem surgir *«naturalmente»* a partir de actividades e segundo uma ordem não *«rigorosamente pré-estabelecida»*) um grupo de autores, considera que, no manual, *«a naturalidade com que os resultados aparecem deve ser fruto de uma sequência claramente pré-estabelecida que ajuda o aluno a fazer a análise e a síntese dos conhecimentos que adquiriu através da aula e/ou do livro»* (ALC). Assim, na elaboração dos manuais, estes autores privilegiam aspectos de estrutura e organização. Ao nível dos 7.º, 8.º e 9.º anos, como referem, privilegiam *«a divisão em muitos capítulos e subcapítulos»* para que a consulta do manual escolar, tarefa que consideram difícil, possa ser menos *«árdua»* para os alunos. *«Se um livro deve motivar os alunos para os conceitos»*, acrescentam ainda, *«deve, no entanto, ser* **suficientemente** (sublinhado dos autores) *arrumado para que seja fácil consultá-lo (...) um bom índice é meio caminho andado para encontrar o que se pretende»*. Subjacente a esta posição está a proposta de desenvolver a *«capacidade de usar bibliografia matemática»*, fazendo-se mesmo um apelo a que os professores usem algum tempo das suas aulas a analisar a estrutura dos manuais, a que levem os seus alunos a ler e a consultar vários manuais e os ajudem a *«serem capazes de tirar as suas próprias dúvidas»*.

Num outro caso, assume-se que os livros de Matemática são elementos *«fundamentais e insubstituíveis»* para se aprender Matemática, considerando-se que o manual escolar *«acompanha a velocidade de compreensão do leitor, está sempre junto dele, este pode relê-lo, permitindo-lhe a reflexão cuidada, essencial à construção do conhecimento matemático»* (MAN). Por esta razão, a autora considera *«determinante que o aluno aprenda a ler, escrever e falar sobre Matemática»* o que lhe permitirá uma independência face ao professor o que, a não se verificar, considera ser comprometedor do sucesso do aluno na disciplina. Assim, na elaboração dos

seus manuais, privilegia a forma de apresentação, desenvolvimento e aplicação dos conteúdos matemáticos. A apresentação dos conteúdos, diz-nos a autora, deve «*partir dos conhecimentos dos alunos o que permite uma visão global da matemática e facilita a assimilação dos assuntos que se pretendem transmitir*»; o seu desenvolvimento deve ser lógico, prevendo-se, em cada momento, as dificuldades dos alunos; e, por fim, considera «*determinantes*» os exemplos que são utilizados para a aplicação dos conhecimentos. Ainda a este respeito a autora afirma que «*através da forma como é exposta a matéria, o manual escolar deve desenvolver a atitude de descoberta, de aprofundamento e de não aceitação do que não é compreendido*».

Um outro grupo de autores considera que, para o nível etário a que se dirigem (5.º e 6.º anos), a função principal do manual «*é criar nos alunos hábitos de consulta, de pesquisa e de interpretação*» em contextos diversos («*situações problemáticas*», utilização de «*figuras, gráficos ou esquemas*») (MA). Para elaboração de um manual consideram importante partir das «*vivências*» dos alunos para o tornar «*dinâmico e motivante*» e consideram que deverá existir um equilíbrio «*no peso relativo atribuído ao desenvolvimento de capacidades e à aplicação de técnicas de cálculo*».

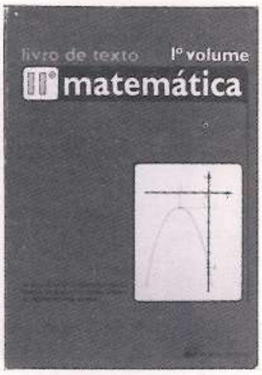
...à proposta de actividades.

A preocupação, com as actividades que um manual de Matemática propõe, com a sua natureza, diversidade e organização, por parte de alguns dos autores que responderam às nossas questões, introduz uma perspectiva diferente para a função principal do manual: o manual enquanto fonte de actividades sobrepõe-se, nuns casos mais enfaticamente do que em outros, ao manual enquanto elemento de consulta. Um grupo de autores, por exemplo, que inclui nas intenções com que elabora os seus manuais, «*a solicitação aos alunos para intervirem na construção do seu próprio saber, promovendo o hábito de consulta como base da aprendizagem*», considera que «*O manual deve ser um apoio essencial para o aluno na consulta, descoberta e consolidação dos conhecimentos*» (IC). Estes autores, o que manifestaram, evidenciam uma preocupação com a diversificação de actividades e com a utilização de materiais também diversificados (textos literários, recortes de jornais, biografias de matemáticos, máquinas de calcular).

Um outro grupo de autores diz-nos, por sua vez, que «*O livro é um suporte teórico, um elemento de estudo e de consulta*», acrescentando que «*os conceitos e métodos matemáticos devem surgir a partir de situações problemáticas que lhes dêem sentido*» (PA). Recordando o sentido corrente da palavra *manual* (local onde se pode encontrar o significado de um termo, a definição de um conceito, uma regra ou a utilização de um método), os mesmos autores, embora reconhecendo as dificuldades que isso acarreta, consideram que este facto «*não pode servir de pretexto para que se enganem os alunos apresentando-se uma Matemática fria, sem discussão nem problemas, totalmente pré-construída e* **pronta a usar!**» (sublinhado dos autores).

Outra autora, colocando-se explicitamente numa perspectiva que assume a aprendizagem como um processo que se deve centrar no aluno, atribui ao manual escolar a função de propor actividades que favoreçam e promovam uma atitude de investigação em Matemática, que «*possibilitem que os alunos, mais do que aprender coisas sobre a Matemática,* **façam Matemática**» (sublinhado da autora) (LM). Neste sentido, evidencia uma preocupação com a natureza e organização das actividades que propõe, subordinando-as a três etapas: confronto do aluno com situações «*ligadas à sua experiência concreta*» que o solicitam a utilizar «*intuitivamente*» conceitos novos; «*tomada de consciência*», por parte do aluno, desses conceitos; e, sua «*aplicação a outras situações*».

Por fim, um grupo de autores refere explicitamente que nos manuais que elabora procura dar «*especial ênfase*» às actividades, assumindo que para os alunos dos níveis de escolaridade a que se dirigem (5.º e 6.º) elas devem constituir o «*fulcro da aprendizagem*» e que com base nelas «*poderão ir construindo conceitos matemáticos*» (CL). Para estes autores, mais do adquirir técnicas de cálculo e dominar a linguagem, na aprendizagem da Matemática é fundamental «*a capacidade de decidir como e quando essas técnicas devem ser utilizadas, bem como a capacidade de resolver problemas e situações problemáticas*». A par disto, os mesmos autores consideram que os aspectos teóricos não devem ser explorados de forma «*muito estruturada e dirigida*» de tal modo que ao aluno se reserve apenas o papel de «*seguir e compreender o raciocínio do professor ou do autor do livro*». Daqui que considerem que a teoria tem um «*lugar secun-*



dário» nos livros que elaboram, passando a ser *«elemento de consulta»* do aluno quando este o necessita. Em termos da função principal do manual escolar, estes autores afirmam que o livro de texto deve ser mais um instrumento para *«ajudar o aluno a construir e a descobrir Matemática»*.

Dissemo-lo já que nem sempre os autores seguiram à risca as perguntas que lhes fizéramos e que as respostas nem sempre foram directas. De algum modo contávamos com isto o que, num caso e noutro, só veio enriquecer as contribuições recebidas. De facto, nas suas respostas à questão sobre a função principal do manual de Matemática, e mesmo a propósito de outras questões, emergiram outras funções a ele também atribuídas que completam as perspectivas dos autores e podem alargar a reflexão e o debate a este respeito. É isso que a seguir vamos abordar.

A diversidade das funções emergentes

Comecemos, antes, por destacar o modo como alguns autores se referiram à linguagem utilizada nos manuais. Nuns casos, assume-se claramente a necessidade e possibilidade de compatibilizar a acessibilidade dessa linguagem com o rigor matemático, ainda que não exactamente da mesma forma: *«a linguagem deve ser acessível e matematicamente rigorosa»* (ALC); *«o livro [...] deve utilizar uma linguagem que ele* [o aluno] *possa compreender mas, ao mesmo tempo,* **falar matematicamente**» (sublinhado dos autores) (PA). Considera-se no entanto, neste último caso, que a *«utilização prematura e/ou desnecessária e/ou exagerada de simbologia»* não contribui para o desenvolvimento de uma *«cultura matemática»* e que, por essa razão, a utilização adequada da língua materna assume grande importância. De um modo mais indirecto, um outro grupo de autores, ao afirmar a importância do recurso às *«vivências»* dos alunos, salienta, por sua vez, que isso não *«deve prejudicar o seu* [do manual] *rigor científico»* (MA). Num outro caso, privilegia-se uma *«linguagem simples»* sem que isso signifique a sua *«infantilização»* (LM).

Entre as funções atribuídas ao manual, e que ainda não referimos, identificámos algumas que interessa salientar. Há as que se consideram mais ou menos naturais como desenvolvimento das capacidades e hábitos de consulta e de leitura, bem como de interpretação de textos matemáticos. Para além destas, o manual é também visto como um meio de favorecer *«a análise e a síntese dos conhecimentos»* (ALC), como uma *«oportunidade de reflectir e clarificar as nossas próprias ideias»* (LM), como um instrumento para desenvolver nos alunos *«a compreensão do que é a Matemática»* (PA) e o seu *«interesse»* por esta disciplina e *«consciencialização para a utilidade e universalidade da Matemática»* (IC). Diga-se, a propósito, que alguns autores defenderam a utilização da história da matemática nos seus manuais, quer através de *«pequenos episódios»* (LM) apresentados em actividades paralelas, quer através de *«notas históricas»* (PA) que entendem devem ter destaque num livro de matemática.

Importa por fim salientar que houve ainda autores que encararam o manual escolar como tendo uma função destinada aos professores do ponto de vista da sua formação. Num caso, assume-se a intenção e possibilidade de *«ir ao encontro das práticas dos professors e simultaneamente contribuir para as melhorar»* (CL) através de propostas inovadoras. Uma outra autora considera que são os manuais que *«enformam teorias sobre a aprendizagem da Matemática* (...) *concretizam os programas à luz dessas teorias* (...) [e] *sugerem actividades a desenvolver pelos alunos»* (LM) enquadradas pelas perspectivas teóricas dos autores. É deste modo que, tendo em conta as deficiências actuais em Portugal no que diz respeito aos programas de Matemática, à formação contínua de professores e à investigação em educação matemática, a autora justifica *«a função subsidiária, mas não menos importante, relativamente à formação de professores»* que, em sua opinião, o manual do aluno também tem.

Considerações finais: bases para um debate

Se às perspectivas extremas, por nós propostas, relativas à função principal para o manual de Matemática — **local de consulta** *versus* **fonte de actividades** — não podemos, com segurança, fazer corresponder nenhuma das posições assumidas pelos diversos autores, a *bipolarização* introduzida, mesmo se eventualmente exagerada e redutora, não deixa de nos estimular a colocar algumas questões: será possível, num manual de Matemática, conciliar as duas perspectivas extremas? Independentemente das consequências de cada uma delas nas estratégias de aprendizagem que se propõem ao aluno, essas perspectivas apontam ambas para a autonomia, ou auto-suficiência do manual face à aula, enquanto contributo para a aprendizagem do aluno; como compatibilizar, em qualquer dos casos, as duas realidades **manual e aula**? Que problemas esta questão levanta para o aluno, para o professor e para o manual em termos da sua organização e conteúdo?

Se a função principal do manual não é hoje unânime, há no entanto funções que lhe são atribuídas unanimemente, salientando-se, entre estas, a sua função mais natural como elemento de consulta capaz de favorecer hábitos de leitura e interpretação de textos matemáticos. Se, no entanto, se aceitar que o livro deixou de estar só como instrumento de trabalho — na aula e fora da aula — para a aprendizagem da Matemática, que consequências em termos da concepção de manuais poderá ter (terá já!?) este facto? Como articular os diferentes materiais de trabalho à disposição do aluno e do professor?

Para terminar, reconhece-se — foi até explícito em alguns autores — que o manual escolar é uma expressão das concepções pedagógicas do seu autor e, com ou sem intencionalidade, veículo dessas mesmas concepções. Este facto, inclusivamente, empresta ao manual do aluno uma função na formação de professores como também foi reconhecido. Assim, podemos dizer que cada manual terá o seu discurso pedagógico, certamente diferente em muitos casos. Que confronto estabelecer entre os diversos discursos? Que papel nisso poderão ter os professores?

O manual de matemática é, e pensamos que vai ser ainda durante bastante tempo, um instrumento que, por um lado, será em muitos casos o principal (senão único) material à disposição do aluno para o trabalho em Matemática e, por outro, um guia que muitos professores privilegiarão para a orientação das suas aulas. Daqui decorre a sua grande importância; por isso assumimos ser importante a reflexão e o debate dos vários aspectos com ele relacionados, muitos dos quais foram aqui abordados.

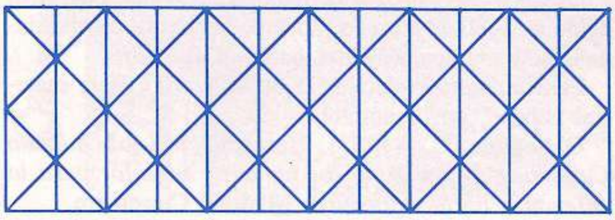
Henrique M. Guimarães
Pedro Esteves

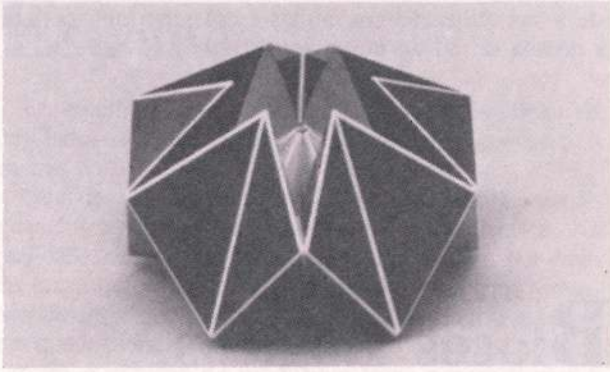
A NOSSA SEPARATA

Inclui este número de Educação e Matemática uma separata que reproduz, por cortesia de *Tarquin Publications*, um dos caleidociclos fantásticos de Escher sobre cuja obra se debruça, também o artigo da nossa colega Cristina Loureiro.

Mas o que é, afinal, um caleidociclo? Um caleidociclo é um sólido deformável constituído por uma cadeia fechada de tetraedros idênticos. O anel, assim obtido, pode girar em torno de si próprio e, se as faces tiverem sido decoradas com alguma imaginação, obtêm-se alguns segundos de sonho.

Apesar da fama dos caleidociclos se dever muito à prodigiosa imaginação de Escher, a sua invenção, ou melhor, a invenção do *Iso Axis* (modelo patenteado), ocorreu em 1958 como solução dum dado problema e deve-se ao desenhador Wallace Walker, então estudante em Cranbrook no Michigan. A duas dimensões, o *Iso Axis* consiste uma grelha de 60 triângulos rectângulos isósceles. Olhando-se para esta planificação, não se consegue imaginar a forma surpreendente que daí se obtém.





Aquela grelha pode ser encurtada, aumentada, estirada (todos os ângulos do triângulo terão, então, uma amplitude inferior a 90°), deformada... A imaginação que trabalhe!

Sobre os caleidociclos, várias questões se podem colocar, nomeadamente:

1. Qual o número mínimo de tetraedros necessários para construir uma cadeia fechada?
2. Teoricamente, o orifício central do anel pode reduzir-se a um ponto. Como construir os tetraedros para que tal aconteça?

E agora, mãos à obra!

Leonor Moreira

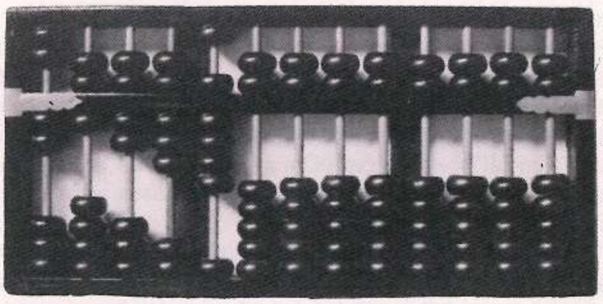
Ábaco

A designação **ábaco** engloba, em princípio, qualquer instrumento de cálculo. Conhecidos desde a Antiguidade, pelos Egípcios, Chineses e Etruscos, consistiam em estacas fixas verticalmente no solo ou numa base de madeira onde se podiam enfiar folhas, conchas, pedras, pedaços de osso ou de metal que representavam números cujo valor dependia da estaca onde eram colocados.

Os ábacos de arame terão tido origem no Oriente, supondo-se que foram os Mongóis os responsáveis pela sua introdução na Europa. Nos ábacos chinês (*suan-pan*, séc. XII) e japonês (*saroban*, séc. XV), os cálculos podem ser efectuados na base dez.

Os arames representam, da direita para a esquerda, as unidades, as dezenas, as centenas, etc. As contas situadas por cima da barra horizontal valem 5 (unidades, dezenas, centenas,...), as de baixo valem 1.

O ábaco russo (*stchióti*) é considerado o instrumento de cálculo mais utilizado na Europa até ao fim do século XIX. Vulgarizou-se, também, em Portugal, registando-se a sua utilização em muitas escolas portuguesas até à década de 30 do nosso século.



Blocos Lógicos

Para favorecer o desenvolvimento do pensamento lógico, Zoltan Dienes criou um material didáctico estruturado inspirado nos blocos de William Hull.

Este material é constituído por diferentes peças que apresentam características fáceis de aprender, o que permite efectuar discriminações válidas, a partir dos três ou quatro anos. As peças diferem relativamente a quatro propriedades: cor, forma, tamanho e espessura. Quanto à cor, há peças vermelhas, azuis e amarelas. No que se refere à forma, há peças circulares, quadradas, triangulares, rectangulares (e, às vezes, também hexagonais). Umas peças são finas, outras grossas. Há dois tamanhos: grande e pequeno.

Para um estudo detalhado deste material pode consultar os livros: *Lógica y juegos lógicos* de Z. Dienes e *Cómo utilizar los Bloques Lógicos* de S. Kothe, ambos da Editorial Teide (Barcelona).

Cuisenaire (barras)

Conhecidas, também, por números coloridos, a sua criação deve-se ao belga George Cuisenaire. A divulgação mundial da obra de Cuisenaire deve-se, no entanto, a Caleb Cattegno.

O material é constituído por um conjunto de barras cujo comprimento varia de 1 a 10 centímetros, sendo a sua secção um quadrado com 1 cm^2 de área. As barras com diferentes comprimentos têm diferentes cores, havendo, portanto, dez cores diferentes: branco, vermelho, verde claro, cor de rosa, amarelo, verde escuro, preto, castanho, azul e cor de laranja.

Manipulando este material, e solicitada a explicitar as suas acções, a criança vai associando a cada cor um comprimento e toma consciência das relações *é maior, é menor, é igual, é o dobro, é metade,...* ao mesmo tempo que inicia a estruturação da adição e subtracção.

Os casos mais simples de multiplicação e divisão, bem como a noção de fracção, podem, também, ser abordados, pela manipulação das barras Cuisenaire.

Para um estudo detalhado da utilização deste material veja-se, por exemplo:

Gattegno, C. (1963). *Introduccion al método Cuisenaire-Cattegno de los numeros en color para la ensenanza de la aritmética*. Madrid: Cuisenaire.

Dado

O **dado** cúbico tão comum nos nossos dias já era usado pelos romanos mas não terá sido o primeiro a surgir nas civilizações ocidentais. Nas escavações arqueológicas de Ur (no sul do actual Iraque) foram encontrados tetraedros (poliedro regular de 4 faces) que se admite terem servido como dados no 3.º milénio a.C.

Na história recente, foi um problema de dados que levou Pascal e Fermat a fundarem a teoria das probabilidades (segunda metade do séc. XVII).

De um modo geral os dados constituem um excelente material para o ensino de diferentes ocorrências combinatórias e para o estudo prático de distribuições de frequências.

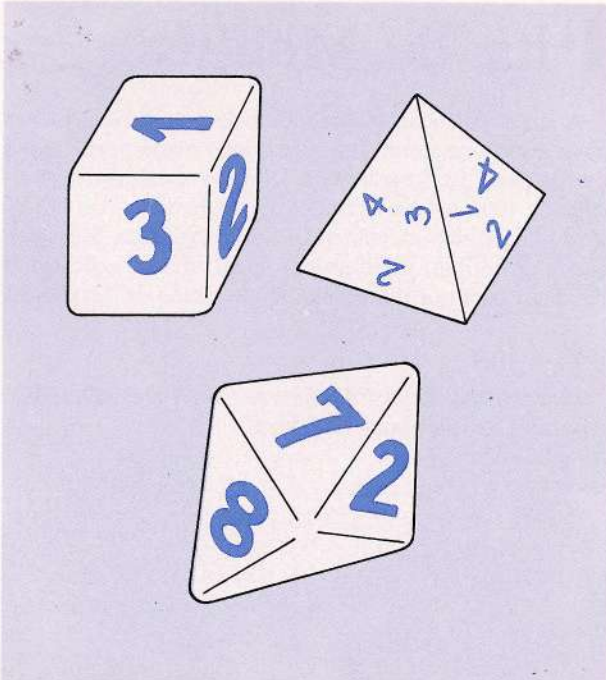
O princípio de numeração do dado cúbico, a «soma sete» dos números inscritos em faces opostas, é a base da resolução de muitos quebra-cabeças que o têm como interveniente.

Bibliografia:

Les jeux de réflexion, n.º 124 de *Science et Vie (hors série)*, Excelsior Publications, Paris 1978

Moscow Puzzles, Boris Kordomsky, Penguin Books, Harmondsworth 1975

Jeux et Stratégie, vários números, Excelsior Publications, Paris.



Espelhos

Os espelhos são conhecidos como objectos cheios de utilidade na vida corrente. E como materiais para o ensino da Matemática? Para que servem?

Quando os ingleses querem falar da transformação geométrica simetria, empregam a palavra **reflection**. Na realidade, as imagens que obtemos dos objectos por meio de um espelho plano «coincidem» com os transformados desses objectos por meio de uma simetria espacial em que o plano de simetria contém o espelho. Se colocarmos o espelho de modo que fique perpendicular a um plano, a intersecção do plano do espelho com esse plano define o eixo de uma simetria axial. Por esta razão, os espelhos são um óptimo material para o estudo intuitivo das simetrias no Ensino Básico. Utilizando um par de espelhos, torna-se ainda mais fácil conjectural qual é o produto de duas simetrias quando os eixos são concorrentes ou quando são paralelos.

Foi ainda um inglês, Lewis Carroll, que imortalizou um espelho, o espelho que Alice — a mesma do País das Maravilhas — atravessa para o lado de lá, no início de outra série das suas aventuras.

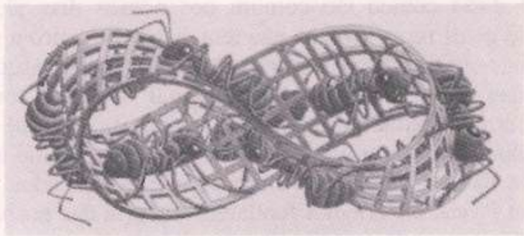
Bibliografia:

Robertson, Jack M.: Geometric Constructions Using Hinged Mirrors. *The Matematics Teacher*. Maio 1986

Carroll, Lewis. *Through the looking glass, and What Alice found There*. Macmillan, 1971.

Fita de Möbius

A sua construção surpreende pela simplicidade. Para obter esta forma com um único lado basta pegar numa tira de papel, dar meia volta (180°) a uma das extremidades e unir as duas pontas. Descoberta no séc. XIX pelo matemático alemão Augustus Ferdinand Möbius a banda de Möbius pode proporcionar investigações interessantes para quem quer entrar no mundo da Topologia.



Bibliografia:

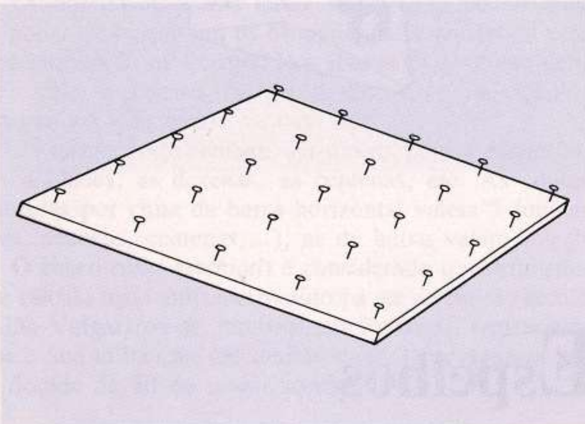
Mottershead, L. (1978). *Sources of Mathematical Discovery*. Oxford: Basil Backwell.

Geoplano

O **geoplano** mais divulgado consiste numa base de madeira onde está disposta uma malha quadrangular de pregos. Manipulando elásticos de diversas cores é possível construir nele figuras geométricas, explorar situações que conduzem à definição de conceitos (como os de polígono, ângulo, comprimento, área, etc.) e resolver problemas. Os resultados são registados sobre papel onde se imprimiu previamente um ponteado que representa a malha do geoplano utilizado.

Além do chamado geoplano quadrangular são também vulgares os geoplanos triangular e circular.

A generalização do geoplano ao espaço, o **geoespaço**, é materializada por uma caixa vazia em que algumas faces estão ausentes e as outras possuem perfurações para os dispositivos de fixação dos elásticos.



Bibliografia:

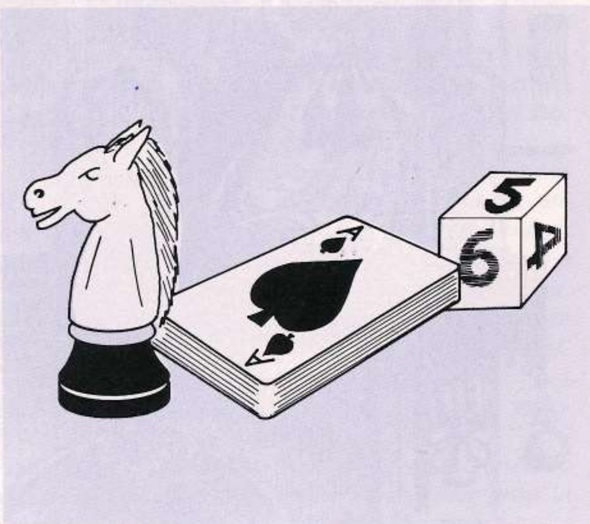
O geoplano na sala de aula, Lurdes Serrazina e José Manuel Matos, APM, Lisboa 1988.

Jogos

Desde sempre o jogo, formal ou informal, fez parte da vida do Homem. O mais antigo que se conhece foi encontrado na sepultura de um rei babilónico, morto cerca de 2600 anos antes de Cristo. Lá estão o tabuleiro, as peças e os dados. Infelizmente, não incluíram as regras, pelo que não podemos saber como se jogava.

Os jogos, para além da componente competitiva tão de agrado de muita gente, funcionam como modelos de situações reais ou imaginárias. Há-os dos mais variados tipos, desde os de simples azar (totoloto) até aos da mais sofisticada estratégia (xadrez). Muitos deles podem ser estudados do ponto de vista matemático, e outros têm regras que «obrigam» os jogadores a fazer raciocínios do tipo lógico-matemático.

A Matemática tem mesmo um ramo, a Teoria dos Jogos, que estuda situações em que se opõem dois jogadores com objectivos antagónicos e em que o resultado da acção de um deles depende do comportamento do outro.

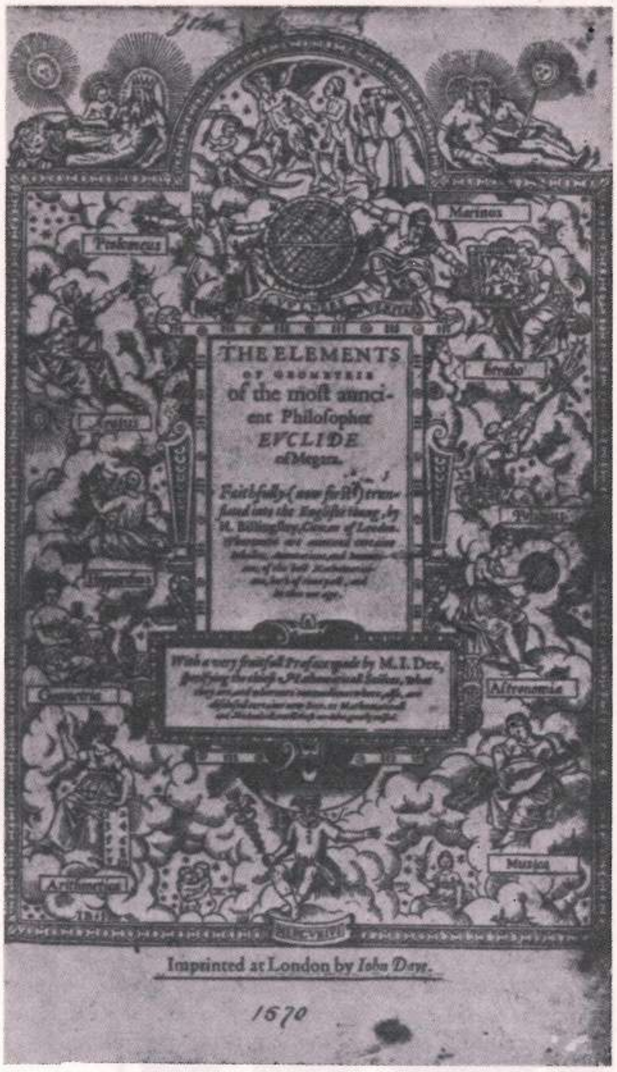


Bibliografia:

Guick, E. *Jogos Lógicos*. Editora Mir, Moscovo, 1989.

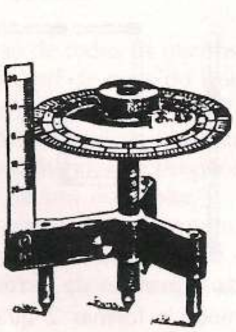
Livro

O livro adoptado (o livro único, num passado não muito distante), o livro de exercícios,... são expressões que fazem parte, desde há muito, do processo de ensino--aprendizagem da Matemática. E, no entanto, estamos muito longe de um consenso sobre o papel dos livros nesse processo. Desde os *Elementos* de Euclides, o best--seller de todos os tempos entre os livros de Matemática, que terá sido tomado durante séculos como um manual escolar quando não era essa a sua vocação, a utilização didáctica do(s) livro(s) de Matemática permanece uma questão em aberto que é preciso discutir. Muitos alunos habituaram-se (foram habituados) a usar apenas as páginas finais dos capítulos, aquelas onde aparecem os exercícios, mas toda a gente reconhece que a leitura e o estudo pessoal são actividades a incentivar...



Modelo

Quando certos elementos e relações entre eles são seleccionados numa dada situação e traduzidos em termos matemáticos temos um *modelo matemático* dessa situação. Os objectos e relações do *modelo* (que desejavelmente representam os originais) podem então ser estudados por processos matemáticos e as conclusões a que se chega dentro do modelo poderão ser úteis para analisar a situação original ou para comunicar uma ideia sobre ela. Um modelo não representa uma situação de uma maneira única; não só a correspondência entre elementos do modelo e da situação não é biunívoca (a supressão de pormenores é quase sempre essencial) como o próprio modelo pode ser melhorado ou mesmo substituído por outro que se revele mais adequado. A construção, a escolha, a crítica e o aperfeiçoamento de modelos são, desde sempre, actividades essenciais quando se aplica a Matemática a algum domínio e, hoje, cada vez mais vozes defendem que essas actividades deveriam ter igualmente um lugar na aprendizagem da Matemática.



Nónio

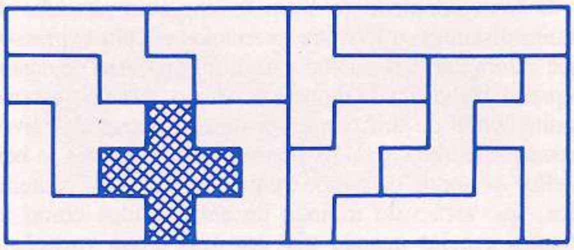
De Noniu, forma latinizada de Nunes. Na verdade, foi no livro De Crepusculis (1512) que Pedro Nunes, procurando explicar uma passagem do Almagesto onde Ptolomeu se refere a um instrumento utilizado em astronomia, descreveu a sua invenção que conhecemos pelo nome de Nónio. O jesuíta Cristovão Clávio e o Matemático francês Vernier (nome pelo qual os franceses conhecem o nónio) aperfeiçoaram a invenção de Pedro Nunes até à forma com que hoje é conhecida. Trata-se, como se sabe, de uma escala circular ou rectilínea que, deslocando-se ao longo de uma outra, principal, permite medir comprimentos de fracções da menor divisão da escala principal. A craveira, o palmer (parafuso micrométrico), o catetómetro (que mede diferenças de nível) e o esferómetro (mede o raio de curvatura de surperfícies esféricas) são alguns instrumentos que utilizam o nónio nas suas medições.

Poliminós

Estas figuras, obtidas a partir da união de quadrados, formam conjuntos particulares de acordo com o número de unidades envolvidas. Assim, existem 1 monominó, 1 dominó, 2 triminós, 5 tetraminós, 12 pentaminós, 35 hexaminós,... Para além do aspecto lúdico, estas formas proporcionam um vasto campo para o desenvolvimento de actividades matemáticas. Problemas sobre áreas, perímetros, pavimentações, transformações geométricas,... são alguns exemplos de situações matemáticas a ser exploradas com o auxílio dos poliminós.

Bibliografia:

Callejo, M. L. e Lebrón, M. T. (1986). *Material Didactico — Geometria*. Madrid: Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas.



Quebra-cabeças

Há-os por todo o lado, utilizam os materiais disponíveis (fósforos, moedas, palavras, números), obrigam a fazer pesquisa, a procurar soluções não óbvias, a pensar. Dão prazer (e, às vezes, desespero) a quem os tenta resolver.

Bibliografia:

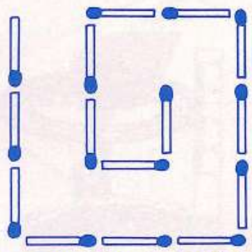
Tovar, P. (1978). *O Livro de Ouro de Quebra-Cabeças*. Rio de Janeiro: Ed. Tecnoprint.

Régua

A geometria dos gregos era baseada em construções geométricas feitas com compasso e régua, e esta não necessitava de ser graduada, pois não tinha por fim medir distâncias. Embora a régua pareça um instrumento insubstituível em certas construções, tal não é verdade: o holandês G. Mhor demonstrou em 1672 que *todas as construções geométricas que podem ser feitas com um compasso e uma régua não graduada também podem ser feitas apenas com um compasso!* O prestígio da régua ficou, por assim dizer, abalado... E os matemáticos interrogaram-se: não seria também a régua capaz de fazer todas as construções? O suíço Jacob Steiner, em 1833, deu a resposta: *todas as construções geométricas que podem ser feitas com um compasso e uma régua não graduada podem ser feitas apenas com uma régua não graduada, se previamente estiver desenhada no plano uma circunferência qualquer!* Isto é, a régua é quase equivalente ao compasso, basta usar primeiro o compasso uma vez... De referir ainda uma geometria extremamente interessante, em que apenas entra a régua: a **geometria projectiva**, cuja origem remonta aos pintores do Renascimento italiano e à sua descoberta da perspectiva.

Bibliografia:

Kostovskii, A. *Geometrical Constructions with Compasses only*. Little Mathematics Library. Mir. Publishers, Moscovo, 1986.



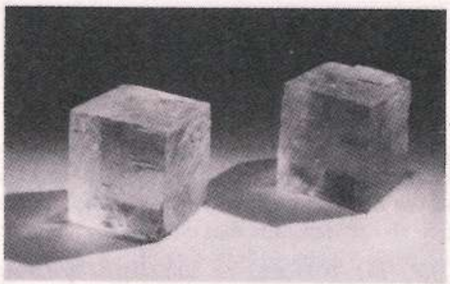
Muda a posição de 3 fósforos de modo a formar 2 quadrados.

Sólidos

Material privilegiado na representação de figuras espaciais. Os modelos tridimensionais desempenham um papel fundamental na interpretação do espaço, dos objectos que nele habitam e das relações entre eles. Cubos e policubos, poliedros, deltaedros, sólidos de revolução,... são exemplos de famílias de sólidos com características particulares. Os mais famosos são sem dúvida os sólidos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Bibliografia:

Alsina, C. et al. (1988). *Materiales para construir la Geometria.* Madrid: Editoral Sintesis.



(La) Villete

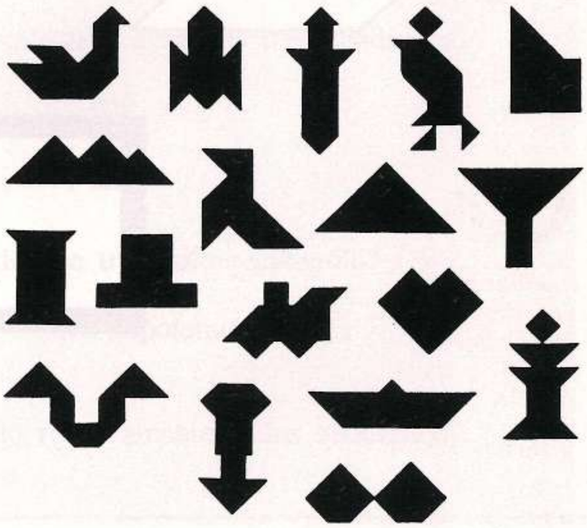
Nome de uma localidade a leste de Paris e muito próxima desta cidade, onde se ergue um complexo em que coexistem espaços de natureza diversificada dedicados aos diferentes aspectos da *aventura humana*. Existem assim, por exemplo, **Le Zénith**, grande sala de espectáculos de variedades com capacidade para cerca de 6400 pessoas; **La Grande Halle**, espaço polivalente para manifestações diversas — festivais, encontros, exposições, etc. — que pode acolher cerca de 15000; uma grande sala de espectáculos de forma exterior esférica, **La Géode**, que possui um écran hemisférico de 1000 m^2; **La Cité des Sciences et de l'Industrie** onde através de exposições permanentes e temporárias, salas de espectáculos, centros de documentação, debates e ateliers *crianças e adultos, investigadores ou curiosos, estudantes ou professores, industriais ou criadores, podem apreender concretamente o mundo científico e técnico de hoje*. Em Portugal, há poucos anos, a exposição **Horizontes Matemáticos**, proveniente de La Villete, visitou várias localidades e esteve no Profmat de Bragança.

Tangram

É o mais famoso de todos os quebra-cabeças. De origem desconhecida, crê-se ter sido inventado há alguns séculos na China.

É constituído por sete peças (um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos rectângulos) obtidos a partir de uma partição de um quadrado.

Para além do prazer de tentar construir as centenas de figuras possíveis, presta-se a uma série de actividades em torno de áreas, perímetros, semelhanças, homotetias...



Materiais para a aula de Matemática

«Demasiadas vezes são utilizados métodos expositivos, acreditando-se na eficácia da transmissão do saber, em vez de se compreender que o conhecimento matemático não se transmite mas ele é essencialmente construído pelos alunos.» [Serrazina, L. & Matos J. M., 1988]

Normalmente o principal objectivo do teorema de Pitágoras é a sua aplicação a situações concretas. É um dos poucos teoremas que agradam aos alunos. No entanto, a sua introdução é por vezes um obstáculo à sua aprendizagem. Não há bela sem senão!...

Geometricamente, o teorema de Pitágoras estabelece que a soma das áreas de dois quadrados cujos lados são os catetos de um triângulo rectângulo é igual à área do quadrado cuja medida do lado é a medida do comprimento da hipotenusa do referido triângulo.

Este facto pode ser descoberto pelos alunos se lhes propusermos uma sequência de actividades adequadas (ver ficha de trabalho anexa).

Manipulando algumas peças de um puzzle de acordo com as indicações da ficha de apoio, a criança é levada a concluir que a área do quadrado maior é afinal igual à soma das áreas dos dois quadrados menores. E, atendendo à posição relativa destes quadrados face ao triângulo central, sem grande dificuldade ela descobre a relação algébrica hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto^2.

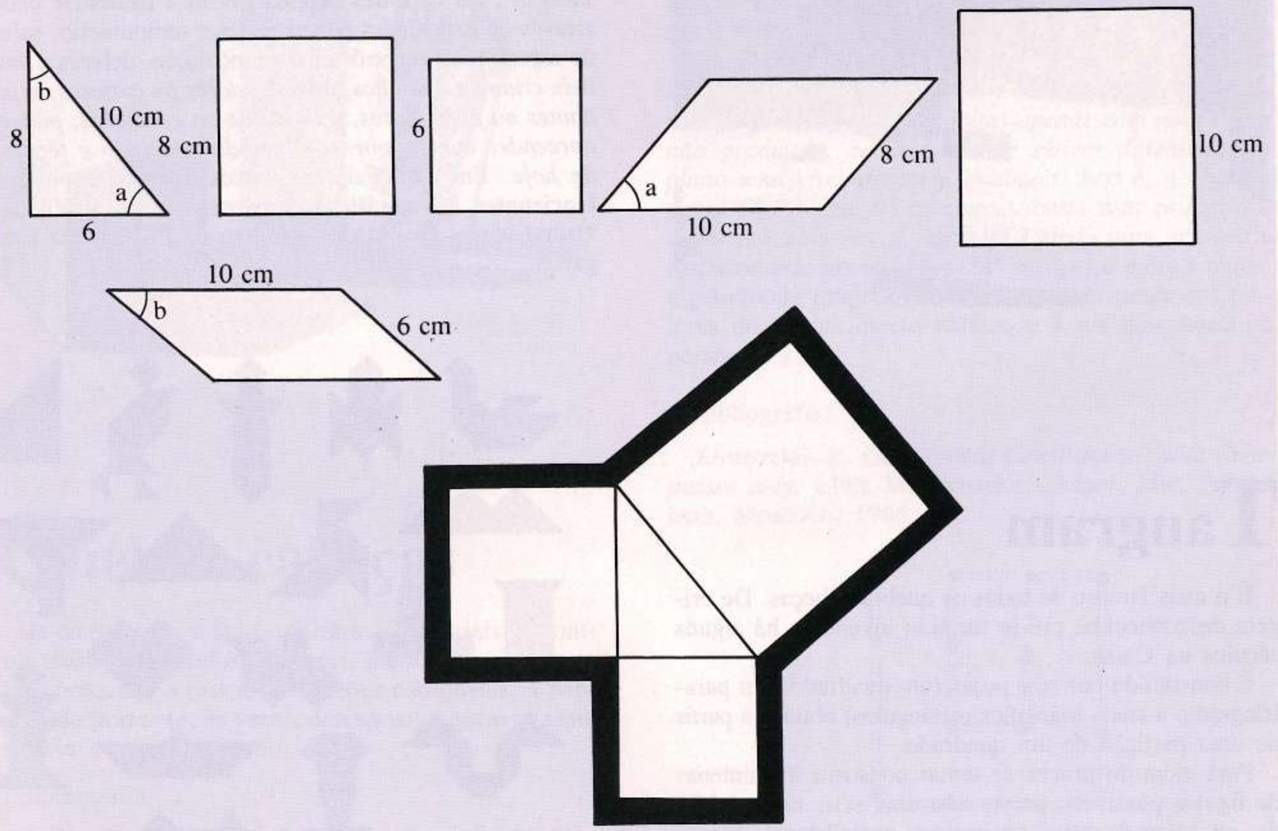
É claro que, não se pretende com esta actividade demonstrar a veracidade do teorema de Pitágoras, a sua demonstração (tal como nós a consideramos) virá posteriormente, se se considerar útil.

Material Necessário: Placas de vinil de várias cores cortadas como indica a figura abaixo. Uma arca (preta) em vinil ou madeira.

Ana Paula Natal

Bibliografia:

Gary, D. Hall ( ): A Pythagoreau puzzle. Arithmetic Teacher, N.C.T.M.



PITÁGORAS COM CERCA

Todo o trabalho desta ficha deve ser feito dentro da cerca preta e as relações e/ou conclusões a que chegares devem ser registadas no caderno.

1 — Utilizando apenas os três quadrados e o triângulo pavimenta o interior da cerca.
Desenha no caderno a cerca com o interior pavimentado desta forma. (Para ser mais fácil, coloca as peças sobre o caderno e contorna-as).

2 — Utilizando agora apenas os dois quadrados maiores, o triângulo e o paralelogramo pequeno volta a pavimentar o interior da cerca.
Encontra uma relação entre as áreas das figuras que utilizaste.

3 — Volta a pavimentar o interior da cerca mas agora utilizando o quadrado maior e o quadrado menor, o triângulo e o paralelogramo grande.
Encontra mais uma relação entre as áreas de algumas figuras do puzzle.
Que podes dizer sobre a área dos dois quadrados menores relativamente à dos paralelogramos?

4 — Pavimenta agora, por último, o interior da cerca com os dois quadrados menores, os dois paralelogramos e o triângulo.
Que observas?

VAMOS ENTÃO TIRAR CONCLUSÕES:

Área do quadrado menor = Área ....

Área do quadrado com tamanho médio = Área ....

Área do quadrado menor + Área do quadrado médio = Área ....

5 — Volta a pavimentar o interior da cerca como se indica na pergunta 1.

Medindo os lados de cada figura geométrica, calcula a área dos três quadrados.

$$A = (...)^2\ cm^2 = ...\ cm^2$$
$$A = (...)^2\ cm^2 = ...\ cm^2$$
$$A = (...)^2\ cm^2 = ...\ cm^2$$

Quais são as medidas do comprimento dos lados do triângulo rectângulo?

cateto menor =.... cateto maior = ... hipotenusa = ...

Como estão relacionados estes 3 números?
(Talvez ajude reparares na posição do triângulo relativamente à dos quadrados)

Construa você mesmo

Muitos dos jogos e actividades que apenas necessitam de papel e lápis são mais agradáveis e motivadores se se dispuser de material manipulável. Torna-se, além disso, possível voltar atrás ou experimentar novas estratégias sem ser preciso estar constantemente a apagar e a desenhar.

Por outro lado, encontramos por vezes jogos que não existem à venda, que gostávamos de ter e que não são muito difíceis de construir.

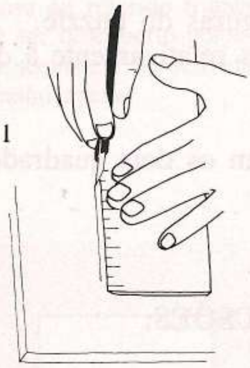
Por estes motivos resolvemos, de há algum tempo para cá, começar a construir os nossos jogos e materiais.

O primeiro problema que se nos colocou foi encontrar o material mais adequado às nossas possibilidades «técnicas». Depois de experimentarmos o papel, a cartolina, a madeira e vários tipos de plásticos descobrimos as placas de vinil que nos resolveram a maior parte dos problemas. São fáceis de cortar, existem em várias cores, é fácil escrever sobre elas, são de preço acessível e são, depois de trabalhadas, esteticamente agradáveis.

Estas placas, de 30x30 cm são normalmente utilizadas para a pavimentação de cozinhas e encontram-se à venda nas casas de materiais de construção e também na Pollux (em Lisboa) na secção de revestimentos.

Este material pode ser cortado da seguinte forma: com um x-acto faz-se um corte firme e não muito profundo (fig. 1); dobra-se a placa pelo corte (fig. 2) e, com ela dobrada, completa-se o corte com a ajuda do x-acto (fig. 3).

Figura 1



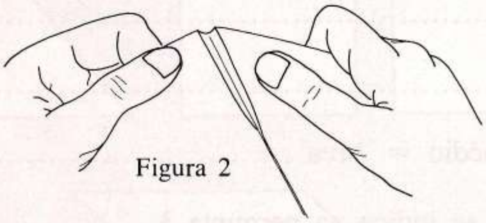


Figura 2

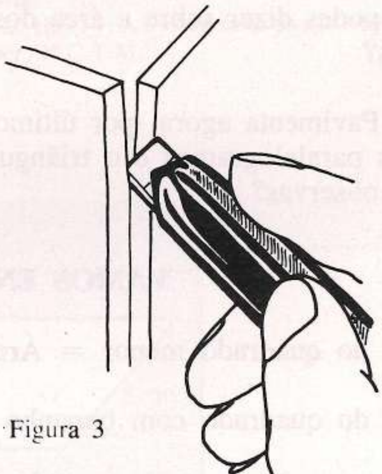


Figura 3

Propomo-vos a construção, com este material, de dois jogos de estratégia e de um quebra-cabeças numérico.

NUMERAÇÃO

As regras e objectivos deste jogo são apresentadas na secção «VAMOS JOGAR» deste número da revista.

Material Necessário: placas de vinil, papel autocolante transparente, caneta para escrever em acetato, régua, esquadro e x-acto.

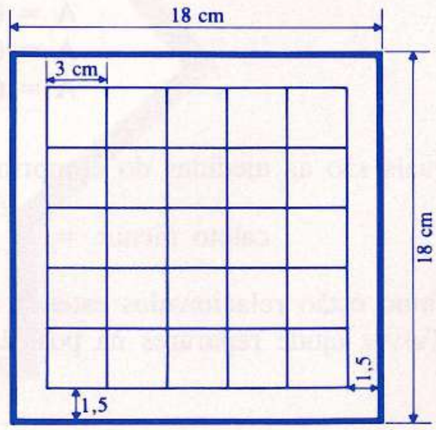
Modo de Construção:

Tabuleiro — Cortar, numa placa de vinil, um tabuleiro quadrado de 18 cm de lado.

— Desenhar neste tabuleiro, com a caneta, 25 quadrados com 3 cm de lado, deixando uma margem de 1,5 cm em cada lado do tabuleiro.

— Escrever o nome do jogo «NUMERAÇÃO» numa das margens utilizando a caneta ou letras decalcáveis.

— Plastificar o tabuleiro com o papel autocolante.



Fichas — Noutra placa de vinil, de cor diferente da do tabuleiro, cortar um quadrado de 10 cm de lado.
— Desenhar nesse quadrado, a lápis, 25 quadrados com 2 cm de lado.
— Numerar os quadrados de 1 a 25 utilizando a caneta ou números decalcáveis.
— Plastificar este conjunto.
— Cortar os 25 quadrados fazendo, primeiro um corte em todas as linhas (horizontais e verticais), dobrar o conjunto segundo todas as linhas e só depois completar os cortes com ajuda do x-acto.

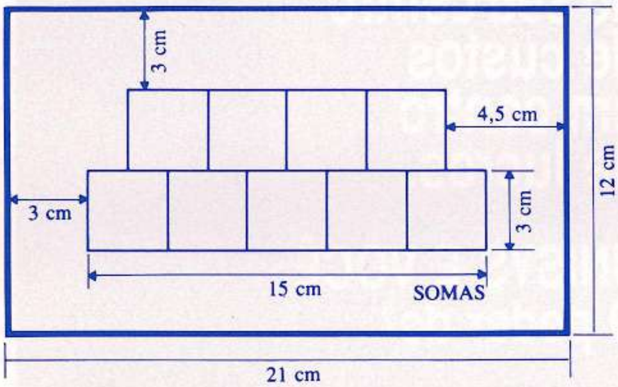
SOMAS

Objectivo:
Colocar os números de 1 a 9 de modo que cada número da fila superior seja a soma dos dois números da fila de baixo em que se apoia.

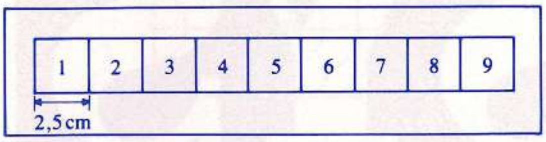
Material Necessário: placa de vinil, caneta para escrever em acetato, papel autocolante transparente, x-acto, régua e esquadro.

Modo de Construção:

Tabuleiro — Cortar na placa de vinil um rectângulo 12x21 cm.
— Desenhar no rectângulo, com a caneta, os quadrados de 3 cm de lado de acordo com o esquema.



— Escrever «SOMAS» no tabuleiro.
— Plastificar o tabuleiro.
Peças — Desenhar num bocado de vinil 9 quadrados de 2,5 cm de lado.
— Numerar os quadrados de 1 a 9.



— Plastificar o bocado de vinil.
— Cortar os nove quadrados.

JOGO TOPOLÓGICO DE BLACK

Este jogo foi apresentado no número 12 da revista, na secção «VAMOS JOGAR».

Material Necessário: duas placas de vinil, de cores diferentes, x-acto, régua, esquadro, caneta para escrever em acetato, lápis, papel autocolante transparente, cola de contacto, compasso para caneta ou escantilhão de circunferências.

Modo de Construção:

Tabuleiro — Cortar numa das placas um tabuleiro de 15 cm de lado.
— Desenhar neste tabuleiro 16 quadrados de 3 cm de lado, deixando uma margem de 1,5 cm de cada lado.

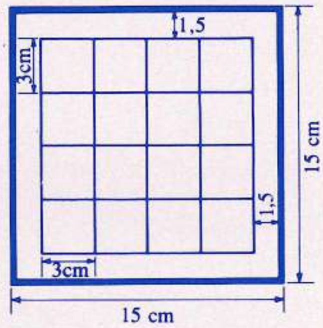


Figura 1

— Plastificar apenas a parte do tabuleiro onde estão desenhados os quadrados.
Peças — Desenhar a lápis, na outra placa e nas duas faces, 16 quadrados de 2,9 cm de lado.

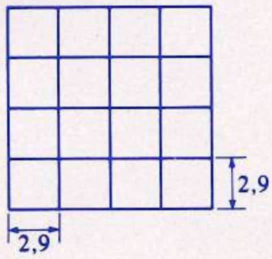


Figura 2

— Dividir a tinta, numa das faces, cada quadrado em quatro partes iguais.

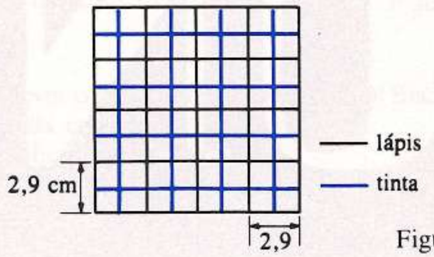
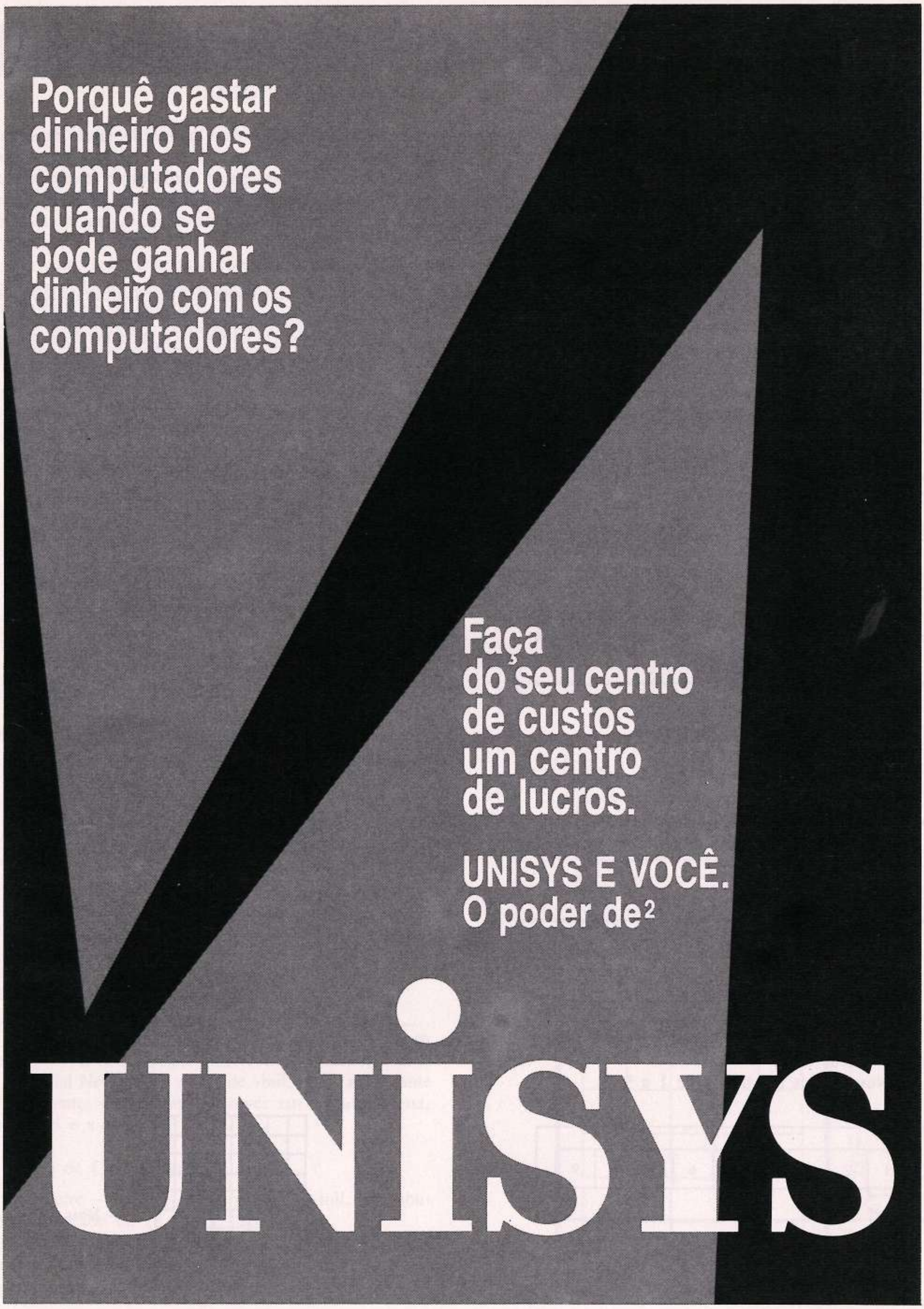


Figura 3


Porquê gastar dinheiro nos computadores quando se pode ganhar dinheiro com os computadores?
Faça do seu centro de custos um centro de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

NUMERAÇÃO (David Parlett)

Número de jogadores: 2

Material necessário: Tabuleiro 5x5
25 peças numeradas de 1 a 25

REGRAS:

— Cada jogador, na sua vez, coloca um número numa casa vazia. Os números são colocados na sua ordem natural. O jogador A põe o «1» onde quiser depois o jogador B põe o «2», o jogador A põe o «3», etc, de acordo com o seguinte: após a 1.ª jogada, um número deve ser colocado numa casa que pertença à mesma linha horizontal ou vertical do número anterior e sem que haja, entre a última casa ocupada e a nova, uma casa já preenchida.

— Perde a partida o jogador que já não conseguir colocar um número de acordo com as regras. O adversário ganha um número de pontos igual ao último número colocado.

— Em vez de colocar um número, um jogador pode declarar «abandono» se verificar que tem o jogo perdido. Neste caso o adversário ganha os pontos correspondentes ao último número colocado.

— O jogo consta de várias partidas, jogando em primeiro lugar o jogador que perdeu a partida anterior.

— Vence quem primeiro obtiver um total previamente fixado (por exemplo 50), ou ganhar um certo número de partidas.

Exemplo:

	1		14	
			15	
8	2	4	16	3
9			13	10
7	6	5	12	11

Ganha o jogador «negro» marcando 16 pontos.

VARIANTE:

Em cada nova partida, em vez de se começar de novo a partir do «1», o jogador que perdeu a partida anterior começa a nova com o número que se segue ao último colocado. Quando se chega ao «25» o jogador seguinte coloca o «1».

Nota: Este jogo foi retirado de «50 jeux avec du papier et des crayons», F. Pingaud et J. F. Germe. Ed. Rocher, Mónaco, 1984. Pode ser jogado usando simplesmente papel quadriculado e lápis. No entanto é mais agradável e sugestivo jogá-lo com tabuleiro e peças próprias, que tu mesmo podes construir. Noutra página desta revista encontrarás algumas sugestões e indicações para o fazeres.

Rita Vieira, Paula Teixeira, José Paulo Viana

Construa você mesmo (conclusão)

— Desenhar a tinta, na outra face, circunferências e semi-circunferências de raio igual a metade da medida do lado do quadrado, e com os centros nos pontos assinalados com (x).

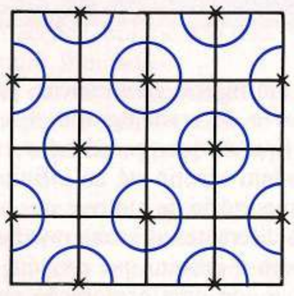


Figura 4

— Plastificar este conjunto nas duas faces.

— Cortar os 16 quadrados desenhados a lápis.

Cercadura — Cortar no resto da placa utilizada para o tabuleiro um quadrado de 15 cm de lado.

— Construir, nesse quadrado, uma cercadura com 1,5 cm de largura.

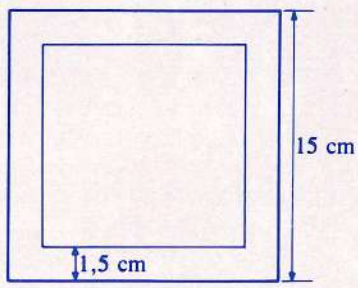


Figura 5

— Escrever o nome «Jogo topológico de Black» num dos lados da cercadura.

— Plastificar a cercadura.

— Colar a cercadura no tabuleiro.

Rita Vieira, Paula Teixeira, José Paulo Viana

Aproximações ao Infinito com Escher

São múltiplos os caminhos de construção de conhecimentos matemáticos. E se muitos estão ainda por explorar, certamente haverá outros que ainda são desconhecidos.

Não duvido que é a crença nessa diversidade de abordagens que estimula muitos de nós, que nos desperta o desejo de desvendar esses caminhos desconhecidos ou inexplorados, procurando modos diferentes de fazer e construir Matemática com os nossos alunos.

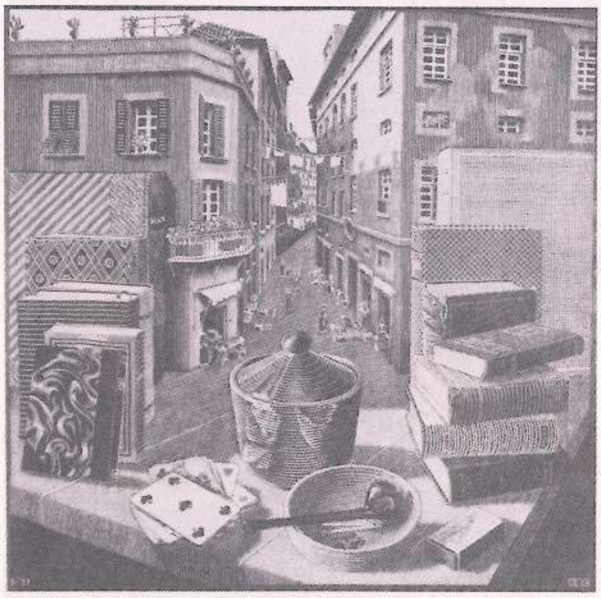
Embora possa parecer espantoso acreditar em tal coisa na época em que vivemos, mais espantoso é descobrirmos que esses caminhos se nos abrem por mãos inesperadas.

«Quando abro os meus sentidos aos mistérios que nos rodeiam e analiso as minhas percepções, aproximo-me do domínio da Matemática. E apesar de ser ignorante e estar afastado das práticas científicas, sinto-me muitas vezes mais próximo dos matemáticos que dos meus companheiros.»

M.C. Escher

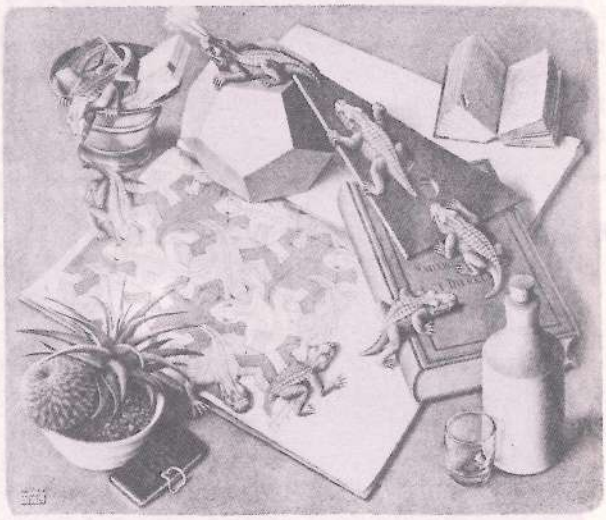
Escher e a sua Arte

Escher, que se definiu a si próprio como artista gráfico, nasceu na Holanda em 1898. Dedicou-se, durante toda a sua vida, à gravura, constituindo uma vastíssima obra onde a fantasia, o bizarro e o irónico ocupam um lugar muito especial, e desenvolvendo uma verdadeira paixão pelo próprio ofício de fazedor de gravuras. Esta sua obra pode ser dividida em dois tempos: antes e depois de 1937.



Na primeira fase, a representação da realidade visível, das paisagens italianas, de cidades e aldeias deste país onde viveu, ocupam um lugar preponderante; é uma fase em que num realismo ávido se revela já um modo muito pessoal e particular de ver as coisas. Descobre-se já nesta fase uma predilecção constante por uma concepção em que se encontram simultaneamente diferentes experiências espaciais, muitas vezes opostas.

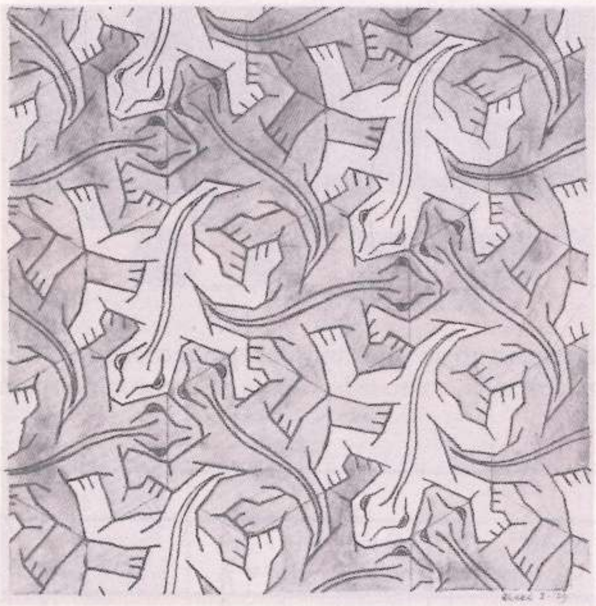
Depois de 1937, nota-se uma mudança na sua obra, paralela à que se deu na sua vida; em vez de observações da realidade visível, são as suas ideias e os seus próprios pensamentos que constituem o tema dos seus desenhos e gravuras. Inspirado na geometria pura dos Mouros e da Cristalografia, Escher procura algo de realmente novo. O que verdadeiramente lhe interessa não é a cadeia de figuras abstractas, mas a de figuras conhecidas. Assim, por um encadeamento estreito de animais, plantas ou seres humanos, ele tenta dar vida aos motivos abstractos.



Baseando-se em figuras geométricas, provenientes de azulejos mouros e de cristalografia, Escher cria uma quantidade de figuras que, encadeadas em séries geométricas, se podem repetir até ao infinito. Ele estabelece assim um reportório de motivos que animam de mil e uma maneiras diferentes as suas gravuras. É uma ligação do finito com o infinito que provém de uma associação de formas, de uma exploração de semelhanças e regularidades verdadeiramente espantosa e de efeito artístico inacreditável e belíssimo. Escher criou assim preenchimentos do plano e construções do espaço verdadeiramente inéditos.

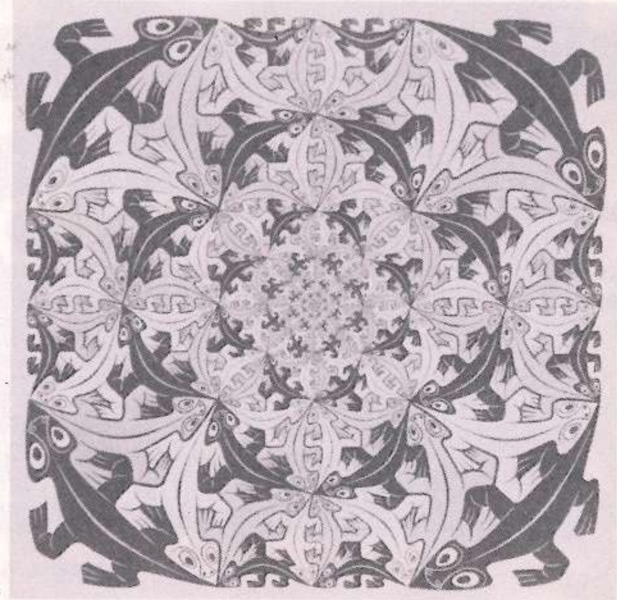
Escher e o Infinito

São estas suas criações inacreditáveis, senão impossíveis ou absurdas — uma superfície serve ao mesmo tempo de chão, parede e tecto ou pode ser simultaneamente interior, fronteira ou exterior — que nos atraem a um mundo fantástico. Mundo esse que nasce de um desejo que o próprio artista confessa, é o desejo de «aproximar pela imaginação, o infinito, o mais perto possível e da maneira mais pura. Profundo, profundo infinito! Tranquilidade...».

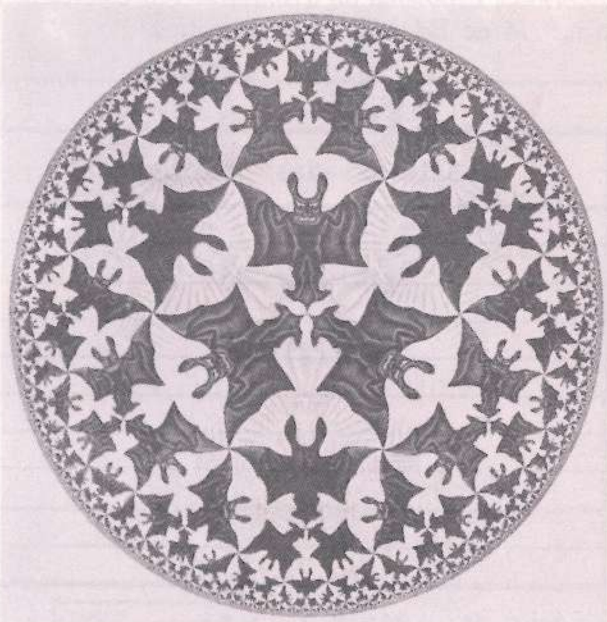


«Não é ainda o infinito, mas de qualquer modo um fragmento de infinito, uma parte do «universo dos répteis». Se o plano que os representa fosse infinitamente grande, poder-se-ia representar um número ilimitado de répteis. Mas trata-se de um mero jogo intelectual, nós temos consciência de viver numa realidade material a três dimensões e é absolutamente impossível imaginar um plano que se possa estender indefinidamente em todas as direcções. Por outro lado, podemos dobrar o papel em que estão representados os répteis, de modo que os animais continuem a completar-se indefinidamente enquanto o cilindro roda em torno do seu eixo. Deste modo obteremos o infinito numa direcção, mas não ainda em todas as direcções, porque não podemos fabricar um cilindro de altura ilimitada».

«Todavia há outras possibilidades para tornar compreensível a noção de infinito, sem no entanto ser obrigado a dobrar a superfície plana. *Cada vez mais pequeno* é um primeiro ensaio. As figuras diminuem continuamente para metade em direcção ao centro onde, finalmente, os limites do infinitamente numeroso e do infinitamente pequeno se encontram num só ponto. Esta representação não passa, aliás, de um fragmento porque podemos acrescentá-la juntando-lhe figuras cada vez maiores. A única maneira de evitar este obstáculo e de poder reduzir a noção de infinito a um limite lógico é trabalhando em sentido inverso».



Limites circulares ilustram este método. «As maiores figuras de animais encontram-se no centro e o limite do infinitamente pequeno e do infinitamente numeroso encontram-se na fronteira do círculo».



«Nenhum componente destas séries de figuras atingirá a linha fronteira do círculo. Fora dele, contudo, é o nada. Mas o mundo circular não pode existir sem este nada que o cerca. Não somente porque «o interior» supõe «um exterior», mas também porque no nada se encontram os pontos centrais imateriais submetidos às leis geométricas dos arcos que formam o esqueleto da construção».

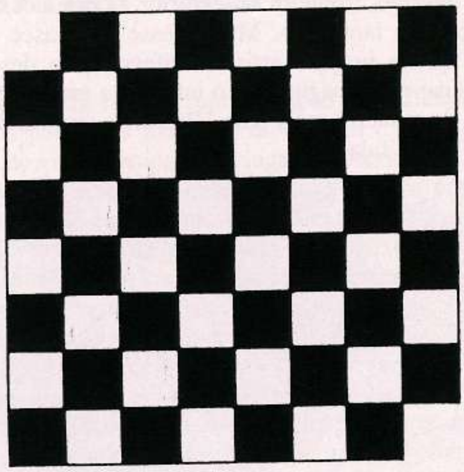
Cristina Loureiro

L'œuvre de M.C. Escher de J.L. Locher e L'aproche de l'infini de M.C. Escher foram os artigos base deste texto. Estes artigos, bem como as ilustrações apresentadas fazem parte da publicação «Le monde de M. C. Escher» sob a direcção de J. L. Locher, da editora Chêre de Paris. Esta publicação constitui uma mostra admirável e bastante completa da obra deste artista.

O PROBLEMA DO TRIMESTRE

Um tabuleiro de xadrez tem 8 × 8 = 64 casas. Cortando duas casas em cantos opostos ficam 62.

Se possuirmos 31 pedras de dominó, tal que cada uma cubra exactamente duas das casas do tabuleiro, poderemos com elas tapar o que sobrou do tabuleiro de xadrez?



Nota da Redacção: Por falta de espaço, não publicamos neste número as contribuições que recebemos sobre anteriores *Problema do Trimestre*. Por este facto pedimos desculpa, marcando, desde já, «encontro» para o n.º 14 de *Educação e Matemática.*

Títulos das Publicações	Núm. de Exempl.	Preço Unitário(*)	Custo

Sócio da APM ☐ N.º ☐ Não Sócio ☐ (Assinalar com uma cruz)	Subtotal Portes do Correio 15 % + Total
Nome Morada Código Postal Data do Pedido Assinatura	Para uso da APM Recebido em Respondido em Assinatura

(*) As publicações têm preços unitários diferentes para sócios e não sócios da APM

ÍNDICE