

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



■ Periodicidade ∞ 5 números por ano

2018
149-150

■ Outubro ∞ Novembro ∞ Dezembro

Preço 10,00€



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Catarina Delgado
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Filipa Machado
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	João Terroso
	Manuela Pires
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Dezembro de 2018

Tiragem 1000 exemplares

Periodicidade

Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

Na capa deste número uma *nuvem de números* para assinalar a 150ª edição da *Educação e Matemática*

Mário Baía

Neste número também colaboraram

Ana Barbosa, Anabela Cruz-Santos, António Domingos, António Guerreiro, Belmira Mota, Célia Mestre, Cristiana Leite, Cristina Martins, Elisabete Costa, Emanuel Martinho, Fernanda Ferreira, Filipa Machado, Helena Rocha, Hélia Jacinto, Isabel Vale, Jaime Carvalho e Silva, Joana Dias, Joana Tinoco, João Carlos Terroso, Lina Brunheira, Luís Menezes, Lurdes Serrazina, Manuel Vara Pires, Margarida Rodrigues, Maria Helena Martinho, Maria João Nunes, Nélia Amado, Rosa Antónia Ferreira, Sílvia Semana, Susana Carreira, Teresa Olga Duarte.

Sobre o número temático

A Revista *Educação e Matemática* assinala as 150 edições com um número temático dedicado à comunicação matemática. Este número começou a ser preparado há mais de um ano, primeiro com a escolha do tema e da sua editora – a Rosa Antónia Tomás Ferreira – que entusiasticamente aceitou o nosso convite. Logo numa primeira reunião, ainda no Norte, a Rosa avançou com muitas ideias sobre tópicos a tratar e trabalhos que a revista poderia divulgar, delineando um plano muito próximo do que veio a ser o produto final. A partir daí, foram endereçados convites de Trás-os-Montes ao Algarve, do pré-escolar ao ensino secundário, incluindo ainda a formação inicial e considerando vários temas matemáticos. Recebidos os contributos de todos os autores, foi necessário rever, sugerir, alterar e tomar decisões de edição, um trabalho em que a Rosa se envolveu empenhadamente. Desta forma, a diversidade e a qualidade que esperamos que o leitor reconheça no número temático tem muito a dever à nossa editora que se dedicou de alma e coração à sua construção. Pela sua orientação, apoio e energia, a Redação da *Educação e Matemática* apresenta aqui o seu enorme agradecimento.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, n.º 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.
- Pela relevância das cores nalguns artigos deste número, a sua versão digital disponibilizada aos sócios no site da APM será publicada a cores.

Comunicação matemática no processo de ensino-aprendizagem: práticas e desafios

O último número da *Educação e Matemática* de 2018 é dedicado ao tema da comunicação matemática, globalmente vista como a comunicação de ideias matemáticas e que se apoia em processos matemáticos e em representações diversificadas.

É inegável o interesse que a comunidade de investigação em educação matemática tem manifestado na temática da comunicação matemática. Muitos têm sido os estudos desenvolvidos, a nível nacional e internacional, sobre a importância do desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática desde cedo na vida escolar dos alunos, e enfatizando as suas várias vertentes.

Este interesse tem sido refletido pelas orientações curriculares no nosso país, as quais, num passado recente, valorizaram o desenvolvimento da capacidade de os alunos interpretar e comunicarem ideias e processos matemáticos, e realçaram o papel das interações entre os alunos e entre estes e o professor. Em particular, o programa de matemática do ensino básico de 2007 reafirmou o importante “estatuto” de capacidade transversal, a par da capacidade de resolução de problemas e de raciocínio matemático. Mas, além disso, realçou a comunicação matemática como uma orientação metodológica, destacando a relevância do trabalho entre pares e das discussões coletivas.

Mais recentemente, contudo, os programas, seja do ensino básico, seja do ensino secundário, em Portugal parecem ter-se “esquecido” do papel determinante que a comunicação matemática tem na qualidade do processo de ensino-aprendizagem, isto é, na qualidade do que se ensina e do que se aprende, em matemática. Com a publicação do *Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória*, em 2017, e das *Aprendizagens Essenciais*, em 2018, o valor da comunicação (matemática) é retomado e “renasce” a necessidade de uma prática de ensino novamente atenta a estas questões. Se é importante preocuparmo-nos com o que ensinamos aos nossos alunos quando adotamos uma certa forma de comunicar (e comunicar não é só falar ou escrever – os gestos ou até objetos podem ser importantes veículos de comunicação de ideias), também é crucial pensarmos nos tipos de comunicação que apoiam o desenvolvimento de certos conceitos ou processos matemáticos, além de nos devermos reter sobre os meios que usamos para comunicar com os alunos e promover a sua capacidade de comunicação matemática.

Neste número da revista, estão reunidos vários artigos que abrangem todos os níveis de escolaridade, do pré-escolar ao ensino superior (nomeadamente a formação de professores), e que pretendem refletir o carácter multifacetado da

comunicação matemática, seja como capacidade transversal à aprendizagem, sempre numa perspetiva de uma aprendizagem com compreensão, de conceitos e processos matemáticos, seja como orientação do trabalho em sala de aula e fora dela, com os alunos. Ações comunicativas como explicar procedimentos e raciocínios, argumentar ideias e justificar processos ou opções tomadas encontram eco em alguns textos aqui reunidos.

Vários são também os textos que se debruçam sobre a relação estreita entre a comunicação matemática, o ensino-aprendizagem exploratório e a avaliação reguladora das aprendizagens. Em particular, a capacidade de comunicação matemática dos alunos potencia e é potenciada pelos momentos típicos de ambientes de ensino-aprendizagem exploratório, sobretudo o trabalho autónomo dos alunos sobre tarefas desafiantes, usualmente em pequenos grupos, e as discussões coletivas, nos quais as vertentes escrita e oral são determinantes. Da mesma forma, a capacidade de comunicação matemática promove e é promovida pelas oportunidades de avaliação reguladora das aprendizagens proporcionadas aos alunos. Destacam-se ainda os desafios colocados ao professor quando intencionalmente desenvolve ações comunicativas – nomeadamente o *feedback* escrito e o questionamento oral no contexto de discussões coletivas – com vista a regular as aprendizagens dos alunos e a promover essa mesma capacidade nos próprios alunos.

A necessidade de o professor refletir sobre as suas práticas de ensino é um denominador comum aos textos reunidos neste número da *Educação e Matemática*. Que a leitura destes textos nos suscite a todos uma reflexão profunda sobre diversos aspetos relacionados com a temática da comunicação matemática: Que valor damos à comunicação matemática no nosso trabalho diário com os alunos? Que cultura de comunicação (matemática) construímos nas nossas aulas (dentro ou fora da sala)? Que evidências temos de proporcionar aos nossos alunos oportunidades para comunicarem as suas aprendizagens (de diversas formas) e de avançarem nessas mesmas aprendizagens através da comunicação?... Que a leitura destes textos nos inspire também a conferir à comunicação matemática a transversalidade que merece, em todo o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Boas leituras e melhores reflexões!

ROSA ANTÓNIA TOMÁS FERREIRA

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO, CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

O contributo da uma *Gallery Walk* para promover a comunicação matemática

ISABEL VALE

ANA BARBOSA

Para se promover um ensino eficaz os professores devem orquestrar discussões produtivas de modo a envolver os alunos em aprendizagens significativas, dando-lhes oportunidades de comunicar, raciocinar, ser criativos, pensar criticamente, resolver problemas, tomar decisões e dar sentido às ideias matemáticas (NCTM, 2014). Por outro lado, hoje em dia temos alunos com hábitos muito sedentários, passando longos períodos de tempo na sala de aula sentados. Neste âmbito, a *gallery walk* (Fosnot & Dolk, 2002) surge como uma estratégia a contemplar nas práticas de sala de aula que permite aos alunos partilhar ideias e receber *feedback* do seu trabalho, possibilitando também que se movimentem pela sala. Neste texto partilhamos algumas experiências realizadas com futuros professores e alunos do ensino básico onde foi utilizada a *gallery walk* como uma estratégia de ensino e aprendizagem promotora da comunicação matemática.

COMUNICAR NÃO É SÓ FALAR OU ESCREVER

Estudos sobre as relações entre as competências linguísticas e matemáticas apontam efeitos significativos na aprendizagem da matemática quando a capacidade de falar ou compreender a língua nativa é limitada. Assim, para que não haja má interpretação na mensagem que se pretende passar, as práticas comunicativas em matemática requerem, antes do envolvimento no processo de comunicação, a necessidade de se pensar sobre o que vai ser dito ou escrito e como o fazer.

Na aula de matemática, a comunicação pode ser veiculada de diferentes formas, entre elas verbal, visual, gestual, icónica, com objetos ou escrita (figura 1).

A abrangência desta diversidade é relevante porque os estilos de aprendizagem dos alunos (e.g., Krutetskii, 1976) são, por norma, diferentes: uns aprendem melhor se a informação for verbal (com palavras, escritas ou faladas) enquanto outros preferem que a informação seja mais visual (gráficos, diagramas, desenhos, gestos, materiais). No entanto, tem sido prática nas aulas de matemática que todos os alunos sejam expostos ao mesmo conteúdo matemático, ao mesmo tempo e da mesma maneira. O recurso a uma única forma de comunicação pode suscitar dificuldades na compreensão das ideias matemáticas, não só pela diferença de estilos de aprendizagem dos alunos, mas também pela sua preferência no que refere à comunicação, pelo que é necessário diversificar as formas de comunicar, contemplando também as não-verbais. Importa, assim, refletir sobre a(s) forma(s) de comunicar que o professor privilegia já que pode(m) condicionar o modo como a mensagem chega aos alunos.

ESTRATÉGIAS DE APRENDIZAGEM ATIVAS NA AULA DE MATEMÁTICA

Organizações como o NCTM (2014) têm vindo a promover, desde há muito tempo, metodologias que requerem o envolvimento intelectual na construção de novo conhecimento, destacando a importância de tarefas de resolução de problemas e da atividade emergente do questionamento. No entanto, para além das estratégias de natureza intelectual são também importantes, no âmbito da aprendizagem ativa, as que decorrem de atividades sociais e físicas.

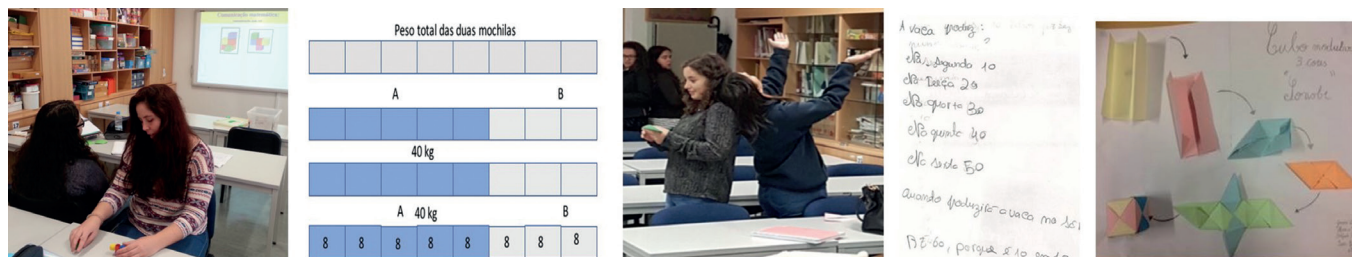


Figura 1. Diferentes formas de comunicação



Figura 2. Estratégias ativas de aprendizagem

A aprendizagem ativa (figura 2) é geralmente definida como um método instrucional que envolve os alunos no processo de aprendizagem (Prince, 2004). Requer que desenvolvam atividades significativas e pensem sobre o que estão a fazer. O foco está totalmente no aluno e na atividade que desenvolve, por contraponto com a abordagem mais tradicional em que se limita a aceder passivamente à informação transmitida pelo professor. São exemplos de estratégias desta natureza, entre outras, as tarefas de resolução de problemas, que vão para além da aplicação de procedimentos rotineiros, nas quais os alunos devem explicitar e justificar o seu raciocínio. Considerando que o envolvimento intelectual poderá não ser suficiente, numa outra vertente destaca-se o papel do discurso e da comunicação matemática. Aqui está em causa o envolvimento dos alunos numa aprendizagem ativa mediada socialmente, sendo inegável a consideração das interações sociais como uma das boas práticas a salientar na aula de Matemática (NCTM, 2014). Este tipo de colaboração é facilitador da partilha e desenvolvimento de significados matemáticos, cabendo ao professor fomentar um sentido de comunidade de modo a que os alunos se sintam seguros e confiantes para assumir riscos e expressar as suas ideias, quer entre pares quer com o professor (Barbosa & Vale, 2018).

Há ainda um outro fator a acrescentar a esta discussão, o movimento. Os alunos, principalmente os mais jovens, têm necessidade de estar fisicamente ativos na sala de aula. Isto explica-se não só por, nas abordagens mais tradicionais, terem longos períodos de inatividade e de atenção, mas também por razões fisiológicas. Esta necessidade de movimento poderá ser resolvida com o recurso a estratégias ativas, por oposição a estar sentado numa cadeira a ouvir o professor ou a resolver uma ficha de trabalho. Neste âmbito enquadra-se a utilização de materiais manipuláveis, a construção de modelos ou a realização de projetos mais práticos, entre outros.

De acordo com Hannaford (2005), pensar e aprender “não estão apenas na cabeça”, pelo contrário, o corpo desempenha um papel determinante em todo o processo intelectual, desde os primeiros até aos últimos anos das nossas vidas. A inteligência, que é considerada, normalmente, como uma capacidade puramente analítica que se mede e avalia em termos de QI,

depende mais do corpo do que nós geralmente fazemos ideia. Os alunos que se movimentam durante as aulas podem aprender, independentemente da atividade realizada, de forma mais eficaz do que aqueles que estão em salas de aula tipicamente sedentárias. Para além do movimento, da manipulação e da experimentação, devem poder falar sobre o que estão a aprender, escrever sobre isso, relacionando as novas aprendizagens com experiências prévias, aplicando-as no dia a dia.

Percebe-se assim a importância das três vertentes supramencionadas, podendo assumir-se que a aprendizagem emerge das experiências e das interações entre as dimensões intelectual, social e física (e.g., Nesin, 2012) (figura 3).



Figura 3. Vertentes da aprendizagem ativa

A GALLERY WALK COMO ESTRATÉGIA ATIVA PROMOTORA DE COMUNICAÇÃO

Com base nas ideias discutidas, propomos a *Gallery Walk* (GW) como uma estratégia de ensino e aprendizagem que permite aos alunos, individualmente ou em grupo, ter a oportunidade de apresentar, através de posters dispostos em torno da sala de aula, nas paredes, nas mesas, ou fora da sala, dependendo da dimensão da sala (figura 4), a resolução de uma tarefa, numa perspectiva muito semelhante à dos artistas quando expõem os seus trabalhos numa galeria (Vale & Barbosa, 2017, adaptado de Fosnot & Dolk, 2002).



Figura 4. Formas de *Gallery Walk*

Globalmente, numa *GW*, é proposta uma tarefa, que pode ser de natureza diferente (tendo como ponto de partida, por exemplo, um problema, uma fotografia, um texto, uma definição, um projeto), que os alunos devem resolver, colaborativamente, em pequenos grupos. Cada grupo tem a responsabilidade de organizar o seu trabalho num poster que será posteriormente afixado na sala de aula. Depois dos posters estarem expostos, são observados por todos os alunos que devem analisar atentamente o seu conteúdo. Este período de observação dos posters deve conduzir à formulação de questões e/ou comentários que serão redigidos nos cadernos dos alunos ou então em *post-its* e colocados em cada poster (figura 5).

Posteriormente, os posters são recolhidos pelos respetivos grupos de modo a refletirem sobre as questões/comentários efetuados. Para terminar, é promovida uma discussão coletiva, durante a qual cada grupo tem a oportunidade de exhibir novamente o seu poster e esclarecer aspetos do seu trabalho. A *GW* pode ser realizada durante alguns minutos, pode ocupar todo o tempo de uma aula ou ser realizada ao longo de várias aulas, dependendo do objetivo do professor e da natureza da tarefa.

Como se pode constatar, a *GW* leva os alunos a sair das suas cadeiras e a envolver-se de forma ativa com as ideias matemáticas dos colegas. Proporciona ainda a oportunidade de contactar com diferentes ideias e/ou resoluções de toda a turma, promovendo as discussões, fornecendo/recebendo *feedback* escrito ou oral, consolidando a aprendizagem. Desta forma, esta estratégia favorece a discussão, o pensamento crítico, a comunicação, a aprendizagem colaborativa e o trabalho de grupo, capacidades fundamentais que os alunos devem desenvolver e pode ser

especialmente atraente para os que são mais cinestésicos. É também uma forma de os alunos receberem *feedback* sobre o seu trabalho sem receio de represálias (Vale & Barbosa, 2017). Trata-se assim de uma estratégia que se enquadra no âmbito da aprendizagem ativa já que promove o envolvimento intelectual, social e físico por parte dos alunos. Em particular, promove, de uma forma plena, o discurso matemático, refletido no modo como os alunos representam, pensam, falam, questionam, concordam/discordam na resolução das diferentes tarefas propostas.

EXEMPLOS

Neste texto apresentamos exemplos de sala de aula que ilustram o recurso à *GW* e o potencial desta estratégia na promoção da comunicação e consequentemente na consolidação de conhecimentos. Os exemplos selecionados incluem experiências com estudantes da formação inicial de professores, a partir das quais se descrevem todas as fases associadas à *GW*, e também experiências realizadas com alunos dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.

EXPERIÊNCIA REALIZADA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

No âmbito de uma unidade curricular de Didática da Matemática, num curso de formação inicial de professores do ensino básico, foi implementada uma *GW* como estratégia de ensino e aprendizagem na resolução de problemas que abordavam diferentes conteúdos (e.g., geometria, frações), com a finalidade de contrariar a visão da matemática como um assunto que deve



Figura 5. Formas de efetuar os comentários

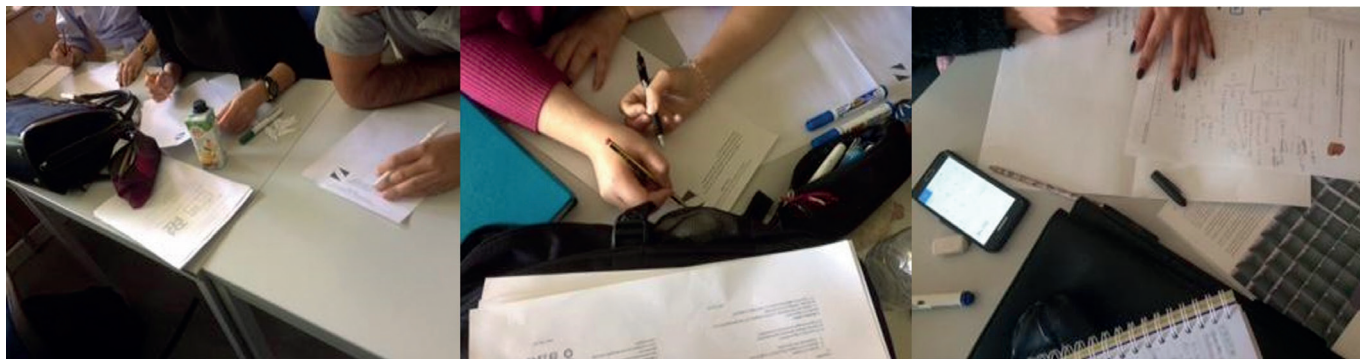


Figura 6. Resolução das tarefas

ser ensinado recorrendo a métodos mais tradicionais, tornando assim a aula mais ativa. De modo a envolver os alunos na discussão das resoluções, as tarefas propostas na *GW* são as mesmas para todos.

A *GW* utilizada consistiu nos seguintes passos: 1) *Resolução de tarefas* — os alunos resolveram os problemas propostos em grupos de 2/3 elementos; 2) *Construção de posters* — discutiram entre si como a melhor forma de apresentar as suas propostas de resolução no poster; 3) *Apresentação e Observação dos posters* — os posters de cada grupo foram afixados nas paredes da sala de aula, posteriormente cada aluno percorreu a sala, observando as diferentes resoluções; 4) *Elaboração de comentários* — no percurso feito pela *galeria*, os estudantes escreveram os seus comentários pessoais, dúvidas, perguntas, ..., em *post-its* que iam afixando nos diversos posters. Salienta-se que, nos passos 3 e 4, enquanto os alunos discutiam as resoluções dos colegas, o professor circulava pela sala de aula, avaliando as observações e discussões dos estudantes, procurando também clarificar questões pontuais; 5) *Discussão em grupo* — cada grupo recolheu o seu próprio poster, para analisar o conteúdo dos comentários nos *post-its*, fazendo um pequeno relatório; 6) *Discussão coletiva* — com todos os posters afixados novamente na parede, os grupos apresentaram oralmente as suas resoluções e responderam aos comentários feitos. Importa salientar que este passo é um importante contributo para o professor destacar

algumas das ideias a incluir na discussão e esclarecer dúvidas e/ou erros, fazendo também a síntese final dos conhecimentos fundamentais que emergiram da experiência realizada.

Passando a uma análise global de cada um dos momentos, numa primeira fase, os alunos resolveram as tarefas em pequenos grupos, de 2/3 elementos. Começaram por pensar em cada um dos problemas, discutindo possíveis estratégias para chegar à solução (figura 6). O facto de terem trabalhado colaborativamente facilitou a troca de ideias e a tomada de decisões, em particular acerca da(s) estratégia(s) mais eficaz(es).

Depois de perceberem qual seria o melhor caminho para chegar à solução, começaram a planear a estrutura do poster que iriam dispor na sala. Em grupo, decidiram que estratégia apresentar, quais as representações mais adequadas, como redigir o texto, entre outros aspetos. Houve alguma preocupação com o conteúdo do poster e se este estaria claro para quem o consultasse, percebendo a relevância da comunicação escrita em matemática, em particular das diferentes representações a que recorreram (figura 7).

Depois de construídos, os posters foram dispostos em redor da sala de aula, à semelhança do que sucede numa galeria de arte. Cada estudante foi percorrendo livremente o espaço, observando atentamente o conteúdo dos vários posters. Individualmente e de forma autónoma realizaram os comentários que consideraram pertinentes e colocaram também questões, face a aspetos que



Figura 7. Construção dos posters



Figura 8. Apresentação/Observação dos posters e Elaboração dos comentários

lhes suscitaram dúvidas. Este *feedback* foi redigido em *post-its* anônimos que foram sendo associados aos posters apresentados (figura 8).

A este passo seguiu-se a análise das questões e comentários associados a cada poster. Os grupos recolheram o seu poster, com os respetivos *post-its*, e leram o *feedback* dado pelos colegas. Discutiram entre si a pertinência dos comentários, o que podiam melhorar no seu trabalho, como explicitar o seu raciocínio de modo mais claro e, em alguns casos, detetaram erros que tinham passado despercebidos inicialmente. O *feedback* dado pelos pares foi um contributo positivo para promover a reflexão sobre o trabalho realizado (figura 9).

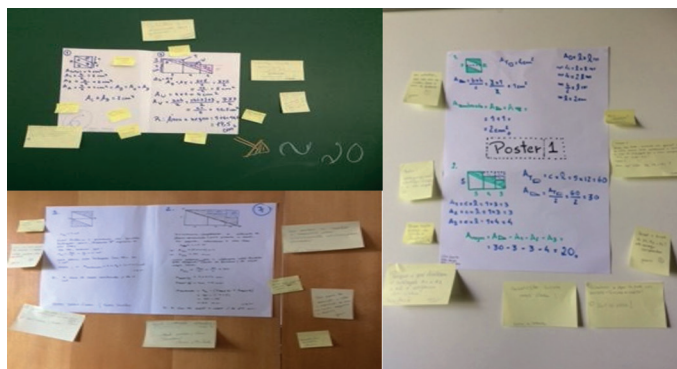


Figura 9. Análise dos comentários

Por fim, depois de cada grupo analisar os comentários e questões colocadas e decidir se pretendiam esclarecer melhor algum aspeto do poster, iniciou-se a discussão coletiva. Os posters foram afixados numa zona central da sala de aula, neste caso o quadro, para que ficassem todos visíveis no mesmo espaço. Cada grupo teve oportunidade de retomar o seu trabalho, explicando o impacto do *feedback* dos colegas, bem como aspetos que tinham ficado menos claros e corrigir alguns erros. Esta discussão foi mediada pelo professor que, para além do que já se referiu, teve ainda o cuidado de focar a diversidade de estratégias utilizadas (figura 10). Apesar de, nesta fase, o papel do professor ter sido mais interventivo, nas fases anteriores houve a preocupação em monitorizar todo o trabalho e o envolvimento dos estudantes e apoiar sempre que solicitado.

Analisando, particularmente, a resolução das tarefas propostas, pode dizer-se que não houve grandes dificuldades por parte dos estudantes. Na fase da discussão coletiva associada à GW surgiu a oportunidade de analisar mais detalhadamente cada uma das resoluções apresentadas pelos diferentes grupos e responder às dúvidas colocadas. Foi possível partilhar entre todos diferentes abordagens na resolução do mesmo problema, bem como o recurso a diferentes representações.

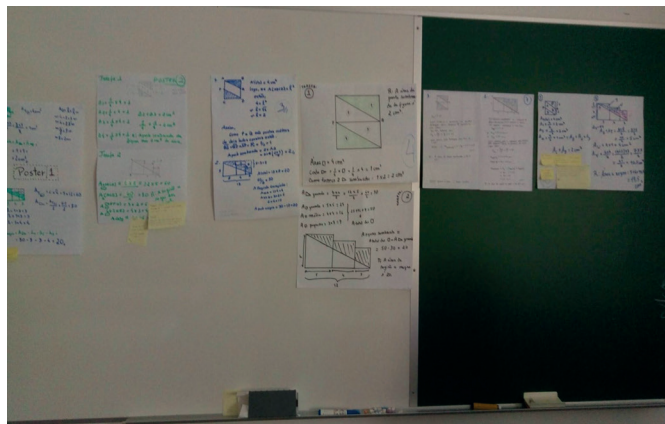


Figura 10. Discussão coletiva

Uma das resoluções (figura 11) suscitou uma discussão rica, que eventualmente não teria tido o mesmo impacto se não fosse utilizada a GW. O resultado correto era 20 e, nesta situação, os alunos em causa obtiveram 19,5. Apesar da manipulação numérica e dos cálculos estarem corretos, o resultado apresentado não correspondia à solução esperada. Os alunos sabiam que isto não podia acontecer, mas não conseguiam entender o porquê, ou seja, não identificaram o que estaria errado. Esta situação foi interessante porque suscitou a oportunidade de discutir os perigos dos raciocínios baseados em desenhos (raciocínio este sobre um desenho que não estava correto, como se observa na segunda resolução da figura 11), motivando a análise da justificação matemática que comprovava a impossibilidade da resolução apresentada.

A figura mostra três quadrados adjacentes cujas dimensões dos lados são respetivamente 5, 4 e 3 cm, como indicado na figura. Descobre a área da região sombreada. Apresenta mais do que uma resolução.

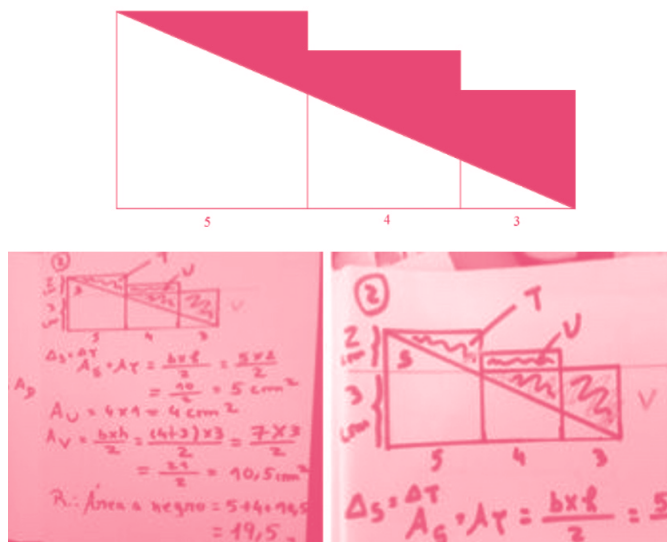


Figura 11. Exemplo de uma resolução incorreta

EXPERIÊNCIAS REALIZADAS NO ENSINO BÁSICO

Globalmente, os estudantes que vivenciaram a experiência previamente descrita destacaram a GW como uma estratégia diferente das habitualmente utilizadas nas aulas de matemática. Salientaram positivamente a oportunidade de trabalharem de forma colaborativa, de receberem *feedback*, de poderem apresentar (poster), rever e discutir o seu trabalho de uma forma diferente, mas o facto de se poderem movimentar livremente pela sala de aula, ao seu ritmo, num ambiente “não ameaçador” foi o que mais enalteciram. O impacto positivo desta experiência levou a que alguns destes estudantes tomassem a iniciativa de utilizar uma GW com alunos do ensino básico que integravam as suas turmas de prática pedagógica, sendo alguns desses exemplos os que apresentamos neste texto. Alguns deles utilizaram esta estratégia para outras áreas disciplinares, como o Português.

Na figura 12 estão ilustradas algumas das fases de implementação de uma GW num 3.º ano de escolaridade. O ponto de partida foi um problema de processo. Os alunos iniciaram a sua resolução em pequenos grupos e, só depois de acordarem qual seria a mais eficaz, realizaram a organização do poster. Percebeu-se que privilegiaram esquemas/desenhos, em alguns casos tabelas, mas globalmente optaram por pouco texto e frases curtas, talvez por falta de experiências prévias a este nível no que

refere à matemática. Como a sala de aula não tinha as condições necessárias, afixaram os posters numa sala de apoio ao estudo, tendo também aqui analisado o seu conteúdo, colocando os *post-its* nos casos em que consideraram necessário. De regresso à sala, foram analisados os comentários no seio de cada grupo. Depois de realizadas as alterações que acharam pertinentes, os posters foram afixados no quadro, tendo-se discutido as estratégias usadas, a sua eficácia, a sua correção e até mesmo a pertinência dos comentários. Como os alunos evidenciaram algumas dificuldades na redação dos comentários, que foram curtos e com informação pouco útil (“Está bem”, “Parabéns”, “Boa estratégia”, “Gostei muito”), a professora estagiária sentiu necessidade de destacar a importância do *feedback*, dando orientações sobre o tipo de comentários que seriam mais pertinentes. No entanto, alguns conseguiram ir mais além escrevendo comentários como “Não percebo a vossa estratégia, mas chegaram à resposta certa”, facto que pode indiciar a necessidade de melhor explicitar o raciocínio.



Figura 12. Uma experiência de GW no 3.º ano de escolaridade

O exemplo que se segue foi realizado com uma turma do 5.º ano de escolaridade (figura 13). A GW foi usada no âmbito da proposta de realização de projetos estatísticos, no domínio da OTD. Devido à dimensão do trabalho, optou-se por realizar as diferentes fases da GW ao longo das aulas. Partiu-se de uma questão que fosse do interesse dos alunos e que deveriam posteriormente estudar e concretizar sob a forma de um projeto estatístico. Após a escolha dos temas, da construção de questionários, da recolha dos dados, da organização e apresentação dos mesmos, da sua interpretação e da formulação de conclusões, cada grupo iniciou a construção do poster que iria apresentar na *galeria*. Aqui incluíram o tema, a questão que estudaram, o público-alvo, tabelas e gráficos, bem como as conclusões a que chegaram. Os posters foram posteriormente afixados num espaço da escola, fora da sala de aula, e cada aluno observou o trabalho dos colegas, levando *post-its* para deixar comentários (figura 13). Surgiram comentários de natureza diversa, uns conducentes à melhoria do trabalho (“Podia estar melhor organizado”, “Podiam incluir mais opções no questionário”, “Podiam explicar o significado dos símbolos usados”, “Teria construído um gráfico de barras”),

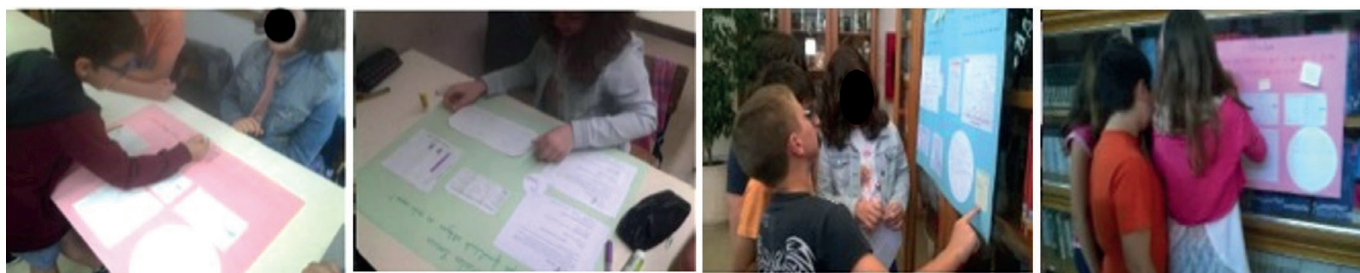


Figura 13. Uma experiência de GW no 5.º ano de escolaridade

outros a destacar positivamente o conteúdo apresentado (“O tema é interessante porque as redes sociais são perigosas e assim sabemos como navegar nelas”, “Conseguimos compreender facilmente, está bem explicado”). Na discussão final os alunos envolveram-se de forma significativa, defendendo as suas ideias e argumentando de modo a convencer os outros.

CONCLUSÕES

Diferentes indivíduos podem ter estilos de aprendizagem diferentes (e.g., Krutetskii, 1976) e podem ter preferências diferentes em relação ao modo como comunicam e representam as suas ideias, o que justifica a necessidade de o professor usar estratégias e recursos diversificados. A *gallery walk*, enquanto estratégia de ensino e aprendizagem, envolveu os alunos nas resoluções dos seus pares, quando colocaram os comentários nos *post-its* (“sem medos de represálias”), e nas discussões uns com os outros, permitindo que aumentassem o seu repertório de estratégias de resolução de forma mais eficaz do que nas discussões tradicionais. Todos os alunos valorizaram esta estratégia como um modo de eles próprios se envolverem mais nas tarefas, e de lhes permitir comentar o trabalho dos seus pares sem se exporem, facto maioritariamente valorizado pelos alunos mais fracos e mais introvertidos. Este aspeto deve-se muito ao ambiente afetivo fomentado na sala de aula que é um fator que pode influenciar de forma significativa o desempenho dos alunos. As suas expectativas, motivações iniciais e até mesmo as atitudes perante a matemática refletem o seu grau de envolvimento, aspetos que não se podem dissociar do tipo de trabalho promovido pelo professor.

Ao privilegiar-se uma estratégia ativa, como a *GW*, permitiu despoletar uma discussão, quer em pequeno quer em grande grupo, onde os alunos explicaram e justificaram as suas ideias e estratégias, colocaram as suas observações, e foram confrontados e desafiados a explicitar as suas opções com os colegas. Deste modo, emergiram diferentes tipos de envolvimento por parte destes alunos, nomeadamente de natureza intelectual (na

resolução das tarefas), social (nas interações em pequeno e grande grupo) e físico (no movimento livre pela sala de aula e manipulação dos materiais).

Referências

- Barbosa, A. & Vale, I. (2018). As dobragens como uma estratégia de aprendizagem ativa. Em D. Alves, H. Pinto, I. Dias, M. Abreu & R. Muñoz (Orgs.) *Atas da VII Conferência Internacional Investigação Práticas e Contextos em Educação* (pp. 83-91). Leiria, Escola Superior de Educação e Ciências Sociais Instituto Politécnico de Leiria.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Hannaford, C. (2005). *Smart Moves: Why learning is not all in your head* (2nd Ed.). Salt Lake City: Great River Books.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.
- National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.
- Nesin, G. (2012). *Active Learning. This we believe in action: Implementing successful middle level schools* (pp. 17–27). Westerville, OH: Association for Middle Level Education.
- Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Education*, 93, 223-231.
- Vale, I. & Barbosa, A. (2017). A resolução de problemas geométricos numa atividade de *gallery walk*. Em H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A.P. Canavarro, e J. P. Ponte (Eds), *Investigação em Educação Matemática- geometria* (pp.131- 132). Lisboa: IE- UL.

ISABEL VALE

INSTITUTO POLITÉCNICO DE VIANA DO CASTELO, ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

ANA BARBOSA

INSTITUTO POLITÉCNICO DE VIANA DO CASTELO, ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

A comunicação oral na promoção da autorregulação da aprendizagem dos alunos em Matemática

SÍLVIA SEMANA

A autorregulação da aprendizagem envolve motivação e comprometimento do aluno para dirigir e melhorar a sua aprendizagem. Através de processos de regulação, o aluno monitoriza e avalia o seu progresso em direção a objetivos, recorrendo a *feedback* interno para decidir quando persistir numa certa abordagem ou ajustar as suas estratégias de aprendizagem. Um investimento intencional do professor na promoção destes processos tende a resultar numa melhoria da capacidade de autorregulação dos alunos e, conseqüentemente, da aprendizagem (Brown & Harris, 2013; Zimmerman, 2011). Com o intuito de levar esta intencionalidade à prática, uma intervenção de ensino foi concebida no seio de um grupo colaborativo constituído por cinco professores de matemática do 3.º ciclo do ensino básico e eu enquanto investigadora. A professora Joana, um dos membros do grupo, implementou a intervenção ao longo de dois anos letivos, numa turma inicialmente do 8.º ano de escolaridade. Neste artigo, o foco é colocado numa das vertentes para a qual a intervenção esteve orientada: a promoção de uma comunicação oral intencional em discussões matemáticas coletivas.

AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM E COMUNICAÇÃO ORAL NA AULA DE MATEMÁTICA

A autorregulação da aprendizagem inclui a definição de objetivos; a monitorização do progresso face aos objetivos; a interpretação do *feedback* derivado dessa monitorização; e a confirmação ou o ajustamento da ação dirigida aos objetivos, com eventual redefinição dos mesmos (Allal, 2010). A autorregulação é uma forma de regulação privilegiada (Nunziatti, 1990; Santos, 2008), já que é conduzida pelo próprio aluno, embora o grau de autonomia em relação ao professor, pares ou outros agentes educativos possa variar (Brown & Harris, 2013). Apesar da autorregulação ser uma capacidade naturalmente presente no aluno, ela deve ser desenvolvida (Nunziatti, 1990) através de um processo de aprendizagem suportado pelo professor.

A comunicação oral na sala de aula, enquanto dimensão essencial do ensino e aprendizagem, pode favorecer a autorregulação dos alunos, em particular se for participada pelos vários intervenientes; considerar o erro como natural; privilegiar e

respeitar diferentes modos de pensar; e reconhecer a turma como campo legítimo de validação ou correção (Santos, 2008). Discussões matemáticas coletivas em que os alunos apresentam e discutem várias abordagens a uma tarefa trabalhada em pequenos grupos constituem um contexto privilegiado para este tipo de comunicação (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). O professor é responsável por incentivar os alunos a pensar publicamente e a construir e avaliar as suas ideias e as dos colegas, mas também por assegurar uma comunicação com qualidade matemática (Stein et al., 2008), com especial atenção a normas sociais e sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996).

A INTERVENÇÃO DE ENSINO

A intervenção de ensino assentou num quadro de ensino exploratório e num modelo cíclico com trabalho numa tarefa em pequenos grupos; discussão coletiva; e autoavaliação escrita pelos alunos. Além disso contemplou uma prática do professor dirigida: à promoção de uma comunicação oral intencional em discussões coletivas, com o desempenho esperado dos alunos traduzido por critérios de avaliação; à apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos, através de processos de negociação; e à escrita de autoavaliações pelos alunos, com a proposta de tarefas escritas de autoavaliação e do fornecimento de orientações e *feedback*.

COMUNICAÇÃO ORAL — A PRÁTICA DE JOANA E A AUTORREGULAÇÃO PELOS ALUNOS

Previamente à intervenção de ensino, Joana reconhecia valor à comunicação na sala de aula para regular o ensino e aprendizagem, mas com reflexos limitados na sua prática. Segundo a própria, as interações professora-aluno(s) eram dominantes e a reação ao erro, o ouvir os alunos e a gestão do tempo eram fontes de tensões e dificuldades.

Com a intervenção, Joana passou a promover consistentemente o estabelecimento e o cumprimento de normas de participação e interação: (i) *contribuir para o discurso na sala de aula*; (ii) *ouvir e atribuir sentido às contribuições dos colegas*; (iii) *alunos como audiência privilegiada da comunicação*; (iv) *participação equitativa dos alunos*. Em particular, Joana tendeu a remeter

questões para a turma: “E agora não sou eu que vou responder à vossa dúvida. São vocês.” e encorajou os alunos a dirigirem as suas contribuições aos pares: “[Vocês] não estão a falar para mim, estão a falar para a turma e, em particular, para o grupo que escreveu aqueles resultados...”. Para promover a interação entre pares, Joana proporcionou espaços para os alunos interagirem entre si, doseando as suas intervenções orais, como resultado de uma regulação intencional das suas ações:

[Tento] passar assim um bocadinho mais discreta e eles não precisarem de mim (...) e conseguirem estar só entre eles na discussão e entenderem-se e com... sem eu ter que interferir muito. (Entrevista a Joana)

Consequentemente, o desempenho dos alunos tornou-se mais concordante com as normas negociadas, com um crescendo de oportunidades de regulação pelos alunos. Os alunos procuraram apropriar-se das contribuições dos pares e apoiaram-nos na identificação e correção do erro; refletiram sobre as próprias resoluções, em comparação com as dos colegas; e construíram, coletivamente, resoluções mais eficazes/eficientes. Considere-se como exemplo um episódio em que um grupo de alunos é interpelado por colegas, que procuram atribuir sentido ao termo geral apresentado para uma sequência pictórica (figura 1), e regulam autonomamente a sua compreensão, para poderem, eventualmente, validar a resolução em causa. Os membros do grupo vão respondendo às questões colocadas na construção de um entendimento coletivo face à resolução apresentada:

Bruna: Oh Telma, então se fosse para o cem, ia ser cinco vezes cem, menos um vezes quatro?

Telma: Não Bruna! A ordem é cem, cem menos um, que dá noventa e nove. Tens cinco pontos iniciais, depois noventa e nove, na linha entre este e este (aponta para o quadro) (...) Depois vezes quatro, porque tens mais três linhas para pôr, percebes? (...)

Ivan: Oh Telma, eu agora não estou a perceber. Onde é que foram buscar o cem?

Telma: É o número da figura menos um, é cem menos um... (Ivan solicita nova clarificação e Telma conclui a explicação do raciocínio) (...)

Eduardo: Porque é que vocês não foram acrescentar os pontos em cima, em cada ponta? Por exemplo, ali, acrescentava três em cima e um em baixo...

Telma: Porque olhámos para a quarta figura e vimos que (...) aqueles pontos da ponta eram os iniciais (...) a figura tinha que ter esses pontos. Depois ao fazermos aquela operação víamos os pontos que tínhamos que ter no meio.

Eduardo: Já percebi!

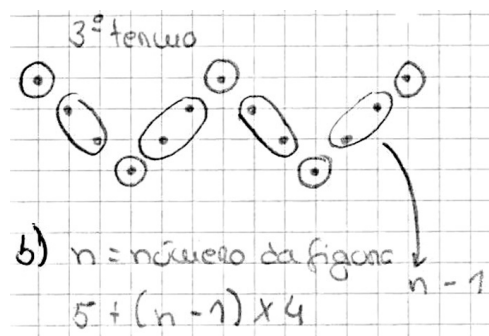


Figura 1. Produção do grupo do Filipe, “4.º termo de uma sequência”]

Durante este episódio, Joana permitiu que os alunos estruturassem a discussão em detrimento de uma eventual focalização da sua parte, marcando, numa fase inicial da intervenção de ensino, a diferença entre normas anteriores e as novas normas então em vigor. Com o avançar da intervenção, sem perder o objetivo inicial de vista, Joana tendeu a desempenhar um papel mais determinante na sustentação e regulação das interações, tendo em conta aspetos de gestão curricular e os objetivos matemáticos visados. Para isso contribuiu o modo como regulou o foco matemático das discussões. Joana privilegiou a partilha, o confronto e a apreciação dos processos matemáticos adotados pelos alunos, e encarregou os alunos de validar, refutar e decidir sobre a adequação/eficiência das resoluções/respostas apresentadas. Considere-se um episódio em que se discute o número de casos possíveis para determinar a probabilidade de, escolhendo três vértices de um cubo, eles definirem uma face. Sandro está no quadro a apresentar a sua resolução. O aluno já havia identificado, por exaustão, o número de possibilidades fixando o vértice A e está a registar as possibilidades (sem repetição) para o vértice B. Nesse registo, Sandro comete um erro e Joana aguarda que a turma se pronuncie. Daniel acaba por identificar o erro do colega (fala 1). Sandro é encaminhado por colegas para a correção do erro (fala 2) e é incentivado pela professora a continuar a resolução (fala 3). Andreia e Maria dão indicação de outra possibilidade que não deve ser contemplada (falas 5 e 6). Desta vez, Joana remete a validação da contribuição das alunas para Sandro, aparentemente, para que ele se aproprie da situação e das contribuições e possa, autonomamente, avançar na resolução (fala 7). As oportunidades concedidas revelam-se bem-sucedidas, com Sandro a usar o *feedback* recebido para reorientar a sua ação inicial que havia conduzido ao erro e a monitorizar eficazmente a nova ação, continuando corretamente a resolução e avançando com uma conjectura matemática, ao mesmo tempo que identifica obstáculos que se lhe colocaram na resolução inicial (falas 8 a 11):

1 Daniel: Oh Sandro (...) o A já não conta.

2 Eduardo: Pois (...) Porque agora tu vais pôr BAC, por exemplo, não é? (...) E já está ali ABC. E depois vais pôr BAD e já está ali ABD (Pausa) Podes apagar o A.

(Sandro apaga registro)

3 Professora: Portanto, ali, em vez de começar com o A, já só vais começar com...?

4 Eduardo: O C.

(Sandro recomeça registos no quadro)

5 Andreia: (...) também não vai pôr BCA.

6 Andreia e Maria: Porque já está ABC.

7 Professora: (...) Agora, é que ele vai ver (...) Oh Sandro, agora para terceiro vértice, então? (...)

8 Sandro: B, C, D.

(...)

9 Professora: E a seguir?

(...)

10 Sandro: BCE.

(Sandro conclui os registos para os vértices B e C. Discute-se as possibilidades fixando outros vértices, até que Sandro avança com uma conclusão)

11 Sandro: Está sempre a reduzir l (...) Eu não tinha percebido isto.

Desta vez, Joana interveio de forma mais estruturante, mas de forma a desencadear processos de regulação pelos alunos, os próprios ou os pares. As tensões e dificuldades que Joana havia sentido inicialmente na regulação da sua própria participação, para que não restringisse a participação dos alunos e simultaneamente promovesse a discussão de matemática significativa e oportunidades para a autorregulação pelos alunos, foram assim ultrapassadas.

Mais geralmente, a prática de Joana na regulação do foco matemático caracterizou-se por um valorizar crescente dos processos matemáticos, em especial da justificação; um explorar do erro, através da discussão de soluções incompletas ou incorretas; e um promover da reflexão sobre a eficácia/eficiência das estratégias usadas, na promoção da negociação de normas sociomatemáticas. Considere-se um episódio em que Joana solicita a uma aluna que justifique a afirmação “duas cordas compreendidas entre cordas paralelas são congruentes”. Face a uma justificação não totalmente satisfatória, Joana avança com um questionamento de focalização, que ajuda a aluna a melhorar a sua justificação, em direção a uma justificação matemática considerada adequada:

Professora: Porque vocês tinham que justificar porque é que elas eram geometricamente iguais. Como é que justificas?

Andreia: Nós, como pensámos que elas eram simétricas, elas... e como a Maria também disse, se se dobrasse, elas coincidiam... e nós medimos as cordas e tinha exatamente o mesmo valor.

Professora: Se dobrasse o quê?

(...)

Andreia: A circunferência a meio, pelo eixo de simetria, o eixo de simetria é que divide...

Professora: Que é?

Andreia: Que é a mediatriz.

Professora: Ah, agora acho que já percebi um bocadinho melhor.

Os alunos evoluíram no sentido de apresentarem explicações e justificações, mesmo sem Joana o solicitar, na passagem de uma regulação externa para uma regulação interna pelos próprios alunos.

CONCLUSÕES

No âmbito da intervenção de ensino, Joana promoveu a negociação de normas sociais e sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996), que regularam a participação dos alunos em direção a um melhor desempenho nas discussões coletivas. Ao regular o foco matemático das discussões, Joana promoveu a partilha, apropriação coletiva e apreciação crítica dos processos de raciocínio e respostas dos alunos, e privilegiou a justificação e a reflexão sobre a adequação e eficiência das resoluções, valorizando a autoridade matemática dos alunos e o erro como fonte aprendizagem (Santos, 2008). Esta conjuntura resultou em oportunidades de regulação da aprendizagem pelos alunos, própria ou pelos pares. A partir das estratégias e justificações apresentadas, os alunos confirmaram ou reorientaram a sua própria ação (Allal, 2010), elaborando, corrigindo ou aperfeiçoando a sua resolução; ou suportaram os pares em processos análogos, por exemplo na identificação e correção do erro.

Joana desenvolveu uma regulação consciente da sua prática, que contribuiu para atenuar tensões e dificuldades iniciais e culminou com a promoção de discussões alimentadas por apresentações dos alunos e interações entre pares, mas sem negligenciar o papel do professor para assegurar o foco em matemática significativa e com rigor científico adequado (Stein et al., 2008) e rentabilizar oportunidades para a regulação pelos alunos.

Face às mais-valias identificadas, esta intervenção pode ser usada pelo professor interessado em promover a autorregulação da aprendizagem dos alunos. Importa, contudo, notar que o desenvolvimento da autorregulação é um processo complexo, que requer um investimento sistemático do professor. As estratégias e ações aqui sugeridas devem ser ajustadas em função das características, condições disponíveis e intenções específicas à sala de aula em causa. A colaboração entre professores na conceção e concretização de uma intervenção desta natureza é encorajada e pode ajudar a ultrapassar eventuais obstáculos.

Referências

- Allal, L. (2010). Assessment and the regulation of learning. In: Penelope Peterson, Eva Baker, Barry McGaw, (Eds.), *International Encyclopedia of Education* (Volume 3, pp. 348-352). Oxford: Elsevier.
- Brown, G. T. L., & Harris, L. R. (2013). Student self-assessment. In J. H. McMillan (Ed.). *The SAGE handbook of research on classroom assessment* (pp. 367-393). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formative. *Cahiers Pédagogiques*, 280, 47-62.
- Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 10(4), 313-340.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- Zimmerman, B. J. (2011). Motivational sources and outcomes of self-regulated learning and performance. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (Eds.), *Handbook of self-regulation of learning and performance* (pp. 49-64). New York: Routledge.

SÍLVIA SEMANA

INTERNATIONAL SCHOOL OF PARIS

ENCONTROS



2.º ENCONTRO Interdisciplinaridade: Projetos e desafios

O desafio da interdisciplinaridade convida-nos a olhar para as aprendizagens dos nossos alunos de uma forma mais integrada — como a própria vida e o modo como dela nos tornamos protagonistas — dando passos no sentido de ultrapassar currículos demasiado espalhados, prescritivos, receituários de soluções desajustadas à construção do saber e do saber fazer. Convida-nos também a olhar para a nossa prática e para a nossa “disciplina” de uma forma menos autossuficiente, isolada, sequencial, mais humilde e mais relacional. Por isso mais exigente para professores e alunos.

Na sequência do 1.º encontro Interdisciplinaridade: Projetos e desafios, realizado a 3 de março de 2018 e organizado pela APEM, a APEVT, a APM e a APP, em colaboração com o IE-UL, estas mesmas entidades propõem-se dar continuidade a essa iniciativa e realizar o 2.º encontro sobre a mesma temática da interdisciplinaridade, dirigido aos professores do 1.º ciclo e do 2.º ciclo do ensino básico nas áreas de Língua Portuguesa, Matemática, Música, Educação Visual e Educação Tecnológica.

ProfMat e SIEM: alteração de datas

Em 2019 o SIEM e o ProfMat vão realizar-se nos dias 10 e 11 de julho (SIEM) e 11, 12 e 13 de julho (ProfMat) em Castelo Branco. Marque na agenda e prepare a sua participação!

Comunicação matemática e aprendizagens essenciais

LURDES SERRAZINA

As aprendizagens essenciais surgem após ter sido publicado em 2017, pelo Ministério da Educação, o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (ME, 2017). Nesse perfil, pretende-se que o jovem, à saída da escolaridade obrigatória, seja um cidadão:

- munido de múltiplas literacias que lhe permitam analisar e questionar criticamente a realidade, avaliar e selecionar a informação, formular hipóteses e tomar decisões fundamentadas no seu dia a dia;
- livre, autónomo, responsável e consciente de si próprio e do mundo que o rodeia;
- capaz de lidar com a mudança e com a incerteza num mundo em rápida transformação (p.15).

No mesmo documento, são definidas áreas de competências a adquirir pelos alunos como Linguagens e Textos, Informação e Comunicação, Raciocínio e Resolução de Problemas, Pensamento crítico e criativo e Saber Científico e Tecnológico. Posteriormente, foram definidas as *Aprendizagens Essenciais* (AE), constituindo documentos de orientação curricular base na planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem, visando promover o desenvolvimento das áreas de competências inscritas naquele Perfil.

As AE são entendidas como

- (...) a tríade de elementos — conhecimentos, capacidades e atitudes — ao longo da progressão curricular, explicitando:
- a. o que os alunos devem saber (os conteúdos de conhecimento disciplinar estruturado, indispensáveis, articulados concetualmente, relevantes e significativos);
 - b. os processos cognitivos que devem ativar para adquirir esse conhecimento (operações/ações necessárias para aprender);
 - c. o saber fazer a ele associado (mostrar que aprendeu), numa dada disciplina — na sua especificidade e na articulação horizontal entre os conhecimentos de várias disciplinas —, num dado ano de escolaridade.

Tudo isto integrado no ciclo respetivo e olhado na sua continuidade e articulação vertical, ao longo da escolaridade obrigatória (DGE, 2018).

Este artigo começa por analisar a importância e o papel da comunicação no ensino e aprendizagem da Matemática. Apresenta depois um olhar sobre a presença daquela capacidade nas AE e como nelas é encarado o seu desenvolvimento.

A COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Desde há muito que os documentos curriculares nacionais e internacionais preconizam que, entre as capacidades a desenvolver pelos alunos, encontra-se a comunicação matemática, entendida como um conteúdo de aprendizagem, mas também como uma orientação metodológica. Entende-se comunicação matemática nas vertentes oral e escrita como um domínio progressivo da linguagem simbólica da matemática. Neste sentido, como referem Ponte et al. (2007), os alunos devem ser capazes de expressar as suas ideias, mas também interpretar e compreenderem as ideias que lhes são apresentadas e de participarem de modo “construtivo em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos” (p. 8).

A comunicação matemática constitui-se como uma componente essencial da aula de ensino exploratório, onde os alunos resolvem problemas ou outras tarefas matemáticas, de modo autónomo, individualmente, em pequenos grupos ou a pares e, posteriormente, partilham no momento de discussão coletiva dos resultados. A comunicação oral é fundamental na interação entre os alunos e com o professor, em especial na fase de discussão coletiva. A comunicação escrita é trabalhada quando se promove a realização de registos escritos relativos à realização de uma dada tarefa ou à elaboração de pequenos textos sobre determinados assuntos matemáticos. Assim, a existência de momentos na aula onde é promovida a comunicação oral ou escrita é um aspeto fundamental a ter em conta quando se planifica a aula de Matemática. A investigação mostra que as tarefas e a comunicação que se estabelece na aula constituem aspetos fundamentais das práticas matemáticas vividas.

Os Princípios para a Ação (NCTM, 2017) definem um conjunto de oito práticas de ensino da Matemática, consideradas fundamentais para o desenvolvimento da proficiência matemática (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) pelos alunos. De entre essas práticas destaco neste artigo, por estarem mais diretamente

relacionadas com a comunicação, as seguintes: Favorecer um discurso matemático significativo, Colocar questões pertinentes e Usar e relacionar representações matemáticas.

Favorecer um discurso matemático significativo: considerando que “um ensino eficaz da matemática favorece o discurso entre alunos, de modo a construírem uma compreensão compartilhada das ideias matemáticas” (NCTM, 2017, p. 29). Segundo aquele documento “o discurso matemático inclui a troca intencional de ideias através da discussão na sala de aula, assim como outras formas de comunicação verbal, visual e escrita” (p. 29). Nele se afirma que os alunos que aprendem a articular e a justificar as suas ideias matemáticas, raciocinam com base nas suas ideias e nas dos outros e desenvolvem uma compreensão profunda fundamental para o seu sucesso futuro em Matemática.

Um momento privilegiado para essa troca de ideias na sala de aula e, conseqüentemente, o desenvolvimento da comunicação matemática, são as discussões coletivas das tarefas que foram desenvolvidas autonomamente. Para que estas sejam mais do que uma sucessão de apresentações de resoluções, Smith e Stein (2011) referem cinco práticas para uma utilização efetiva das respostas dos alunos na discussão com toda a turma:

1. Prever as respostas dos alunos;
2. Verificar o trabalho e o comprometimento dos alunos na tarefa;
3. Selecionar os alunos que vão apresentar os seus trabalhos;
4. Ordenar as respostas dos alunos de modo a que sejam discutidos em sequência;
5. Relacionar entre si as diferentes respostas dos alunos e relacioná-las com ideias chave da matemática (p. 30).

Paralelamente, todos os alunos devem ter oportunidades para falarem, questionarem, responderem entre si e como membros da comunidade turma.

Colocar questões pertinentes: vai também contribuir para o desenvolvimento da comunicação matemática, quando as questões são colocadas na sala de aula pelos colegas ou pelo professor. Estas podem ser destinadas a avaliar e a promover o raciocínio dos alunos ou a dar sentido às ideias e relações por eles estabelecidas. Cabe ao professor promover um ambiente de sala de aula propício a que os alunos coloquem as suas próprias questões. É colocando questões que levem os alunos a raciocinar sobre as suas ações que a aprendizagem pode acontecer. No entanto, o tipo de questões colocadas e o modelo de questionamento utilizado são críticos no que se refere à promoção da aprendizagem. O NCTM (2017) apresenta uma sistematização do tipo de questões utilizadas no ensino da matemática, agrupando-as em quatro tipos: (i) Recolher informação (Qual a fórmula da área do retângulo?); (ii) Explorar o pensamento (Consegues explicar de outra forma como chegaste a esse resultado?); (iii) Tornar a matemática visível (De que forma

é que consegues relacionar essa lista com a multiplicação?), e (iv) Encorajar a reflexão e a justificação (Como é que sabes que a soma de dois números ímpares é um número par?).

Para além do tipo de perguntas, também o padrão de questionamento é relevante. Por exemplo, o padrão tradicional “Iniciar-Responder-Avaliar” (IRA) em que o professor faz a pergunta, o aluno responde e o professor avalia a resposta, tudo isto feito, muitas vezes, de modo muito rápido não dando oportunidade ao aluno para pensar, apelando apenas à sua memória imediata, não dá ao professor oportunidade para perceber o que o aluno sabe e se a matemática faz sentido para ele. Estão definidos na literatura outros padrões de questionamento como o do “funil” e do “foco” (por exemplo, Love & Mason, 1995). No primeiro caso, o professor tem à partida um percurso definido e faz uma série de perguntas que levem o aluno a seguir esse caminho. No padrão do foco, o professor tem em conta o que o aluno pensa, permitindo-lhe que exprima o seu pensamento e reflita sobre o seu raciocínio e o dos colegas. Neste caso, a intenção do professor é focar o aluno nos aspetos críticos do problema, colocando questões que permitam devolver-lhe a situação, ficando este com a responsabilidade de a resolver. Deste modo, ao colocar questões na sala de aula aos seus alunos, os professores usam uma diversidade de questões, nomeadamente para recolher informação, perceber a forma como os alunos estão a raciocinar, pedindo-lhes que o explicitem e o justifiquem. Nesta perspetiva, o professor questiona partindo daquilo que o aluno sabe, de modo que este evolua no seu modo de raciocinar, aumentando a sua compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, fazendo sentido das ideias matemáticas em presença.

Usar e relacionar representações matemáticas: no processo de comunicação têm um papel essencial as representações das ideias matemáticas subjacentes, daí a importância que as representações em Matemática têm no envolvimento dos alunos no discurso matemático. Para além da representação através da linguagem oral e escrita, que tem alguma relevância sobretudo nos primeiros anos, e da representação simbólica, fundamental em Matemática, uma das representações importantes no apoio ao discurso matemático são as representações visuais, pois os desenhos feitos pelos alunos ou os diagramas podem ser mostrados, analisados, discutidos ou criticados, podendo os colegas e professor ter acesso ao modo de pensar (NCTM, 2017). Podem ter um papel de destaque para alunos com dificuldade em expressar-se verbalmente, por exemplo por serem de uma diferente língua materna.

AS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS

O documento das Aprendizagens Essenciais em Matemática começa por apresentar as finalidades do ensino da Matemática para a escolaridade básica, a saber:

- a. Promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos;
- b. Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de reconhecer e valorizar o papel cultural e social desta ciência.

O documento enumera os diferentes aspetos incluídos em cada uma das finalidades e, no que se refere à comunicação matemática, está explícito que a primeira finalidade inclui que os alunos “adquiram o vocabulário e linguagem próprios da matemática e desenvolvam a capacidade de comunicar em Matemática, por forma a serem capazes de descrever, explicar e justificar, oralmente e por escrito as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões que obtêm” (p. 2-3)¹.

Estas finalidades, segundo o documento, enquadram, fundamentam e dão um sentido global às AE, para cada tema matemático em cada um dos três ciclos do ensino básico, sendo entendidas como “os conteúdos de conhecimento disciplinar estruturado, indispensáveis, articulados conceptualmente, relevantes e significativos, bem como de capacidades e atitudes a desenvolver obrigatoriamente por todos os alunos em cada área disciplinar ou disciplina” (p. 3).

Afirma-se também no documento que, para cada tema matemático, as AE constituem “um todo integrado e articulado de conteúdos, objetivos e práticas de aprendizagem interrelacionados e indissociáveis. Os objetivos concretizam as aprendizagens essenciais relativas a cada conteúdo, incidindo sobre conhecimentos, capacidades e atitudes a adquirir e a desenvolver, e as práticas estabelecem condições que apoiam e favorecem a consecução desses objetivos.” (p. 3).

O desenvolvimento da comunicação matemática constitui uma aprendizagem essencial desde logo, sendo parte integrante de uma das finalidades, mas também ao nível dos conteúdos, dos objetivos essenciais e das práticas essenciais, como se ilustra em seguida.

Para além da comunicação matemática ser um conteúdo a desenvolver em todo o ensino básico e, por isso, estar listada como um conteúdo, em todos os anos de escolaridade, e nos respetivos temas matemáticos, estão também definidos os objetivos e as práticas essenciais correspondentes. Tratando-se de uma capacidade transversal, a redação dos diferentes itens é, por vezes, coincidente, o que remete para o seu desenvolvimento com base nos conteúdos matemáticos considerados essenciais trabalhar em cada um dos anos. Assim, o professor ao elaborar

a sua planificação deve prever a existência de momentos em que os alunos explicitam os seus raciocínios, reagem ao dos colegas, criando um ambiente propício ao desenvolvimento da comunicação.

Assim, para os Números e operações, o objetivo essencial relativo à comunicação matemática comum aos dois primeiros anos de escolaridade é “Expressar, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões” (p. 8). A prática essencial correspondente é “Comunicar, oralmente e por escrito, para descrever e explicar procedimentos, raciocínios e conclusões” (p. 8). A partir do 3.º ano de escolaridade, quando se espera que os alunos já tenham adquirido linguagem própria da matemática, o objetivo essencial passa a ser: “Expressar, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia)” (p. 9). Para os 3.º e 4.º anos o “explicar raciocínios, procedimentos e conclusões”, pressupõe a utilização do vocabulário e linguagem próprios da Matemática. A prática essencial correspondente está explicitada de acordo: “Comunicar utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões” (p. 10). A partir do 5.º ano, o objetivo essencial no que se refere à comunicação é repetido para todos e para cada um dos anos de escolaridade, e é o seguinte: “Expressar, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, com precisão e rigor, para justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia)” (p. 9). A correspondente prática para os 5.º e 6.º anos é: “Comunicar utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, justificar raciocínios, procedimentos e conclusões” (p. 9). No 3.º ciclo, a prática essencial acrescenta “explicar”: “Comunicar utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar raciocínios, procedimentos e conclusões”.

Como referido anteriormente, todos os temas matemáticos incluem a comunicação matemática como conteúdo, sendo a redação do respetivo objetivo por vezes adaptada ao correspondente conteúdo matemático, em especial na Estatística. Por exemplo, a prática essencial em Estatística está enunciada para o 8.º ano do seguinte modo: “Comunicar, oralmente e por escrito, para descrever e explicar representações dos dados e as interpretações realizadas, raciocínios, procedimentos e conclusões, discutindo argumentos e criticando argumentos dos outros” (p. 14). Para o 1.º ano essa prática é enunciada como “Comunicar, oralmente e por escrito, para descrever e explicar representações dos dados e as interpretações realizadas (p. 11).

¹ Em https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_1a_ff_18julho_rev.pdf (consultado em 25 de setembro de 2018)

CONCLUINDO

Desde há muito, documentos curriculares nacionais e internacionais têm vindo a considerar a comunicação matemática como uma capacidade fundamental e transversal a desenvolver pelos alunos ao longo de toda a escolaridade. Em consonância com isso, o documento das Aprendizagens Essenciais dá-lhe o correspondente realce, incluindo-a, como conteúdo essencial em todos os anos do ensino básico e para os diferentes temas matemáticos. Para além disso a comunicação matemática está implícita em muitos outros objetivos essenciais.

Referências

DGE (2018). *Aprendizagens essenciais*. Em https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_1a_ff_18julho_rev.pdf (consultado em 25 de setembro de 2018)

Love, E., & Mason, J. (1995). Telling and asking. Em P. Murphy, M. Selinger, J. Bourne, & M. Briggs (Eds.), *Subject Learning in the Primary Curriculum* (pp. 252-2679). Londres: Routledge.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Research Council.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação*. Lisboa: APM. Tradução do documento do NCTM publicado em 2014.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Graça-Martins, M. E., & Oliveira, P. M. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

LURDES SERRAZINA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

MATERIAIS PARA A AULA

Quanto dura um minuto?

Este número temático, dedicado à comunicação matemática, está recheado de propostas interessantes para trabalhar conteúdos matemáticos diversos, em diferentes níveis de escolaridade, e promovendo de forma intencional o desenvolvimento desta capacidade nos alunos. No entanto, deixamos uma proposta de uma tarefa que não decorre diretamente de nenhum artigo, mas que se propicia a trabalhar em ambientes em que a discussão coletiva desempenha um papel preponderante na consecução de diversos objetivos de aprendizagem.

Assim, a proposta é apresentada em duas versões. A primeira pode ser aplicada numa turma desde o 7º ao 10º ano, podendo gerar discussões muito interessantes em qualquer um destes anos. Nesta versão, a primeira questão pode ser mantida ou retirada, com a devida adaptação. A sua existência tem como objetivo familiarizar os alunos com a situação, servindo de introdução. No entanto, a tarefa pode iniciar-se logo com a estimativa do minuto realizada pelos alunos da turma com que se está a trabalhar.

Para além da discussão das questões propostas na tarefa, que permitem a abordagem de vários conceitos e procedimentos, outras questões podem surgir: Que estratégias foram utilizadas pelos alunos para estimar o minuto? Haverá alguma relação entre o sexo dos alunos e a capacidade de estimar? Houve diferenças significativas entre as três estimativas de cada aluno? ...

A segunda versão da tarefa destina-se a um contexto de formação inicial de professores. Desta forma, todas as questões contidas na sua formulação, bem como as questões sugeridas anteriormente para potenciar uma discussão coletiva são pertinentes. Mas deve haver ainda uma intenção de discutir a relevância das investigações estatísticas no ensino da matemática, desde o 1.º ciclo. Uma vez que é dada liberdade para a escolha das representações gráficas e medidas estatísticas, surgem naturalmente propostas distintas cuja adequação, interesse e correção importam discutir. Por este motivo, esta tarefa pode ser desenvolvida num contexto de uma *Gallery Walk*, cujas ideias orientadoras são apresentadas neste número da EeM, num interessante artigo de Isabel Vale e Ana Barbosa. Assim, à experiência de realização de uma investigação estatística, junta-se a vivência de uma metodologia de trabalho que será, muito provavelmente, desconhecida dos formandos e que os poderá incentivar à sua mobilização nas suas futuras práticas profissionais.

TERESA OIGA DUARTE

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA ALFREDO DA SILVA, BARREIRO

LINA BRUNHEIRA

ESE DE LISBOA

Quanto dura um minuto?

Em vários momentos do nosso quotidiano temos necessidade de fazer estimativas. Estimar as dimensões de uma divisão da casa, estimar a distância entre dois locais, estimar o peso de um determinado objeto ou estimar o tempo decorrido entre dois quaisquer instantes. Será que és um bom estimador? Vamos testar a tua capacidade de estimar o tempo. Será que funcionas como um relógio?

Comecemos por analisar o que aconteceu com um grupo de alunos de uma turma:

A cada aluno de uma turma foi pedido que estimasse um minuto. Cada um tinha o cronómetro do telemóvel que pôs a funcionar. Sem nunca olhar para o cronómetro estimou um minuto. Quando achou que tinha passado um minuto, parou o cronómetro e registou o tempo que tinha passado. Os valores obtidos, nessa turma, foram os seguintes:

1 min 31 s	1 min 07 s	55 s	1 min 03 s	57 s	1 min 15 s
1 min 46 s	51 s	1 min 01 s	1 min 10 s	49 s	1 min 03 s
1 min 13 s	1 min 01 s	54 s	1 min 08 s	59 s	56 s
1 min 01 s	59 s	2 min	1 min 23 s	48 s	

1. Calcula a média, a moda e a mediana deste conjunto de valores. Que conclusões podes tirar?
2. Realiza agora tu esta estimativa procedendo do modo descrito acima. Repete a experiência três vezes.
3. Com a ajuda do professor, junta os teus dados aos dos outros colegas da turma, construindo uma tabela onde fiquem registados todas as estimativas realizadas.
4. Calcula média, a moda e a mediana dos resultados da tua turma. Compara com os anteriores.
5. Constrói um diagrama de caule e folhas para representar os dados. O que concluis?
6. Organiza os dados em classes de igual amplitude e constrói um histograma de frequências relativas.
7. Constrói, agora, o diagrama de caule e folhas com os dados organizados. Compara este com o diagrama anterior.
8. Elabora um pequeno relatório com as conclusões que tiraste.

Quanto dura um minuto?

Em vários momentos do nosso quotidiano temos necessidade de fazer estimativas. Estimar as dimensões de uma divisão da casa, estimar a distância entre dois locais, estimar o peso de um determinado objeto ou estimar o tempo decorrido entre dois quaisquer instantes. Será que és um bom estimador? Vamos testar a tua capacidade de estimar o tempo. Será que funcionas como um relógio?

Parte I

1. Prepara a recolha de dados: Precisas de um cronómetro ou relógio com segundos e de um colega. Fecha os olhos para te concentrares... O teu colega vai medir o tempo que tu pensas que é um minuto. Indica o início e o fim para a contagem deste tempo. O teu colega regista num papel o número de segundos que passaram.
2. Troca com o teu colega: agora és tu a registar o tempo do minuto do teu colega. Regista também no papel.
3. Junta os vossos dados ao dos restantes colegas da turma.
4. Encontra uma forma que te pareça adequada para representar os dados obtidos.
5. O que podes concluir a partir dos dados obtidos? Justifica a tua resposta da forma mais completa possível, usando medidas e gráficos.
6. Prepara um poster com a apresentação do estudo feito anteriormente de modo a apresentares à turma as vossas conclusões. Usa no máximo duas formas de representação dos dados que te pareçam adequadas, contemplando uma representação que possa ser usada nos 1.º e ou 2.º ciclos.

Parte II

1. Recolhe os comentários deixados pelos colegas durante a exposição e analisa-os no grupo.
2. Apresenta o poster à turma e responde aos comentários.
3. Identifica as principais ideias no artigo de Ana Henriques e Hélia Oliveira¹ e discute em que medida algumas dessas ideias estão presentes no trabalho desenvolvido a partir desta tarefa.

¹ Henriques, A. & Oliveira, H. (2012). *Investigações estatísticas: um caminho a seguir? Educação e Matemática*, 120, 3-8.

Comunicando por gestos e palavras no ditado de construções

MARIA JOÃO NUNES

MARGARIDA RODRIGUES

Quando pensamos em comunicação matemática, a maior parte das vezes pensamos nas ações do docente que promovam a explicação e a justificação, pelos alunos, das ideias matemáticas. Pensamos também na negociação de significados a ter em consideração para reduzir a distância entre o significado dos conceitos matemáticos assumido pelo docente e os múltiplos significados atribuídos pelos alunos a esses conceitos. Não é, contudo, esse o foco do presente artigo. Iremos incidir na forma como crianças de cinco anos comunicam entre si para descrever posições e relações espaciais de construções com cubos de madeira. Assim, a comunicação será equacionada do ponto de vista cognitivo uma vez que as crianças desenvolvem a sua compreensão e pensamento matemático através de usos variados da linguagem (Kotsopoulos, Cordy, & Langemeyer, 2015; Orton, 2004).

Para vários autores (César, Torres, Caçador, & Candeia, 1999; Colaço, 2004), a construção compartilhada do conhecimento é favorecida pela interação, quando há realização conjunta de tarefas. Para Sfard (2008), a aprendizagem constitui um processo de participação, construído a partir da interação entre o que é individual e o que é coletivo, isto é, da individualização do coletivo e de pôr em comum o individual. A função mediadora da linguagem é expressa quando as crianças reorganizam o seu raciocínio e partilham a construção do conhecimento. A linguagem acompanha a ação, serve para a planear e orientar. Segundo Vygotsky (1995), a linguagem assume um papel central no desenvolvimento do pensamento da criança, sendo que existe um movimento contínuo de vaivém entre o pensamento e o discurso.

Focando especificamente o discurso comunicativo em tarefas de geometria, em particular, em tarefas que apelem à descrição de construções tridimensionais, há que atender à linguagem espacial que pode ser expressa pelas crianças de diversos modos (palavras, desenhos, gestos). A expressão por palavras implica o domínio de vocabulário topológico como “em cima”, “em baixo”, “debaixo”, “ao lado”, “entre”, “à frente”, “atrás”. De acordo com Clements e Sarama (2009), as crianças aprendem primeiro, por volta dos 2 anos, as expressões espaciais “dentro”, “por cima”,

“em cima”, “em baixo”, “debaixo”. A seguir, por volta dos 3 anos, as crianças aprendem as expressões espaciais “ao lado”, “entre”, relativas à proximidade. Só depois, por volta dos 4 anos, é que começam a utilizar o vocabulário espacial que foca as relações espaciais, considerando quadros de referência, tal como “à frente”, “atrás”. Os autores referem que os termos “esquerda” e “direita” são aprendidos mais tarde, por volta dos 5 anos, não sendo, geralmente, bem compreendidos até aos 6 ou 8 anos de idade. A linguagem espacial pode também ser expressa por gestos, ou em situações que as crianças não consigam utilizar o vocabulário espacial para indicar as posições espaciais pretendidas, ou em associação com o uso desse vocabulário. Kotsopoulos, Cordy e Langemeyer (2015) referem estudos que evidenciam a existência de uma correlação positiva e significativa entre os gestos das crianças representativos de transformações espaciais e as suas capacidades espaciais e que mostram que os gestos associados ao discurso espacial são benéficos à aprendizagem, influenciando o desenvolvimento matemático.

De acordo com as Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar - OCEPE (Silva, Marques, Mata & Rosa, 2016), a construção do raciocínio espacial “fundamenta-se na vivência do espaço e do tempo, tendo como ponto de partida as atividades espontâneas e lúdicas das crianças” (p. 79). Este tipo de raciocínio é definido por Battista (2007) como a capacidade de visualizar, examinar e refletir sobre objetos espaciais, relações, imagens e transformações. Refere-se à capacidade de reconhecer e manipular mentalmente as propriedades espaciais dos objetos e as relações espaciais entre eles (Mulligan, 2015). Para promover o desenvolvimento do raciocínio espacial, é fundamental que as crianças tenham oportunidades de manipular objetos, analisando as suas características e propriedades, descrevendo posições e relações espaciais (NCTM, 2007), assim como de realizar composições e decomposições de formas tri e bidimensionais (Clements & Sarama, 2009) que potenciam o desenvolvimento da estruturação espacial, através da identificação e do estabelecimento de relações entre os componentes dos objetos construídos (Battista, 2008).

A TAREFA DITADO DE UMA CONSTRUÇÃO COM CUBOS DE MADEIRA

A tarefa agora apresentada foi especialmente pensada para promover o desenvolvimento, nas crianças, da sua capacidade de descrever e interpretar posições e relações espaciais. Os dados relativos à implementação desta tarefa, em 2016, foram retirados da dissertação de mestrado da primeira autora (Nunes, 2016) que era educadora titular das crianças do estudo, numa sala de Jardim de Infância da rede pública da periferia da cidade de Lisboa, e focam-se em nove crianças de 5 anos. A realização da tarefa permitiu observar a interação entre as crianças, procurando-se compreender as suas estratégias ao ditarem a sua construção ao colega.

Na apresentação da tarefa, a educadora pediu a uma das crianças que retirasse 5 cubos da caixa e fizesse uma construção com eles, sem que a outra criança visse, após o que deveria “ditar” a sua construção ao colega, de modo a que, apenas com as suas indicações, ele a conseguisse reproduzir. Depois invertiam-se os papéis e a criança que tinha “ditado” iria fazer a construção. Foi-lhes dito que não deviam tocar nas peças do colega, apenas dar indicações. As crianças estavam sentadas a pares, lado a lado, para garantir o mesmo ponto de vista (e a mesma lateralidade) das construções, com a tampa (opaca) da caixa dos cubos a servir de divisória.

Quando começaram a fazer os “ditados”, foi notória a diferença de abordagem que cada criança manifestou. Assim, enquanto umas levavam a sério o facto de não poderem ver a construção que o colega tinha feito, outras não perdiam uma oportunidade para espreitar.

Várias crianças, após concluírem a construção que o colega lhes tinha ditado, atribuíam-lhe significado, evidenciando o carácter lúdico da tarefa. A figura 1 apresenta duas dessas construções, respetivamente um robot e uma nave espacial.

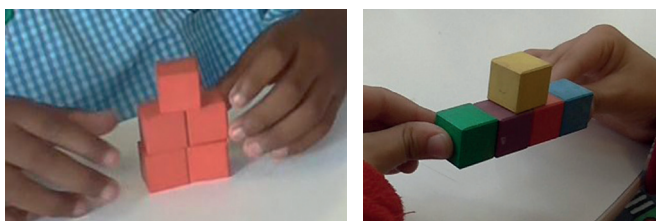


Figura 1. Construções com significado

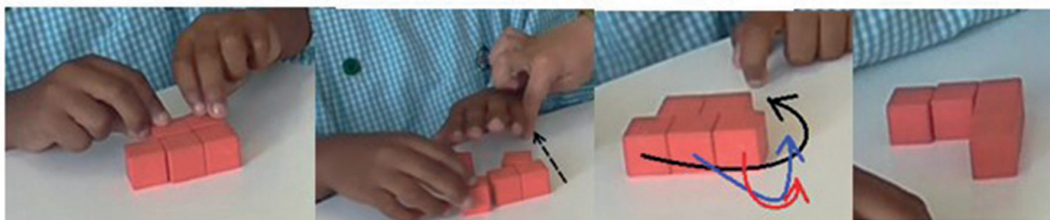


Figura 3. Sequência de correção da construção

Registamos os seguintes desempenhos por parte das crianças que estavam a construir:

- Dizem “O quê?”, “Não estou a perceber nada!” – especialmente as crianças que ainda não dominam os conceitos associados à lateralidade;
- Pedem esclarecimentos (“em cima de qual?”, “ao lado de qual?”) – com mais frequência as crianças que dominam o vocabulário associado à lateralidade, mesmo não fazendo uso dele;
- Tentam espreitar – quando a educadora não está a olhar;
- Mexem nas peças, sem nenhuma indicação do colega, como que a pensarem com as mãos.

As crianças que estavam a “ditar”, para corrigirem as construções dos colegas, realizavam:

- Gestos de apontar para o local onde as peças deviam ficar;
- Rotações com a mão;
- Reformulação das indicações, utilizando noções topológicas básicas como “em baixo”, “no meio”, “ao lado”, “em cima”;
- Gestos representativos de linhas orientadoras imaginárias;
- Explicitação do nível ou níveis da construção, quando solicitado pela educadora, utilizando a expressão “na mesa” (como a da figura 2A) ou em altura (como a da figura 2B);
- Reprodução da sua construção à vista do colega – quando a educadora não estava a olhar.

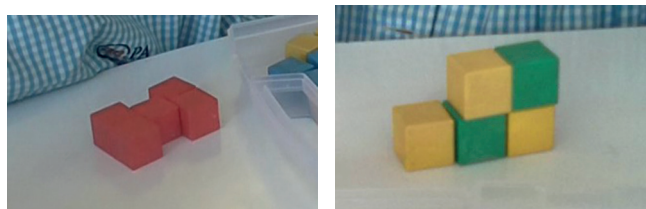


Figura 2A e 2B. Construção “na mesa” e em altura

A estratégia de utilização de gestos traçando imaginariamente linhas orientadoras revelou-se muito importante, tendo permitido concluir com sucesso algumas construções, como podemos verificar pela figura 3. A linha tracejada representa a orientação fornecida e as linhas curvas representam as

movimentações feitas pelo “construtor” (na sua sequência, da maior à menor).

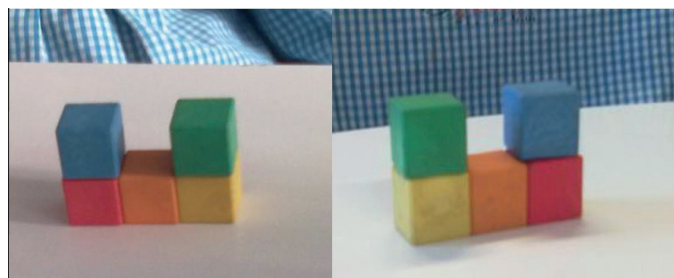
O ditado inicial foi:

- Três linhas e duas... em baixo. Quer dizer, ao lado — corrige, estendendo o braço direito para a direita e repete — Três linhas e duas peças ao lado.

Verificando que o colega não coloca os cubos na posição pretendida, a criança que estava a “ditar” diz um enérgico “Não!” e faz um gesto com o dedo indicador representando uma linha vertical, com a orientação de cima para baixo, acrescentando:

- Para aqui, as três linhas — e desenha novamente uma linha vertical com o seu dedo, como se procura ilustrar com a seta tracejada para indicar que os três cubos alinhados deveriam dispor-se ao longo da linha imaginária traçada.

Na concretização da tarefa, foram identificados alguns obstáculos. Por exemplo, a utilização de termos pouco precisos, como a referência a “três linhas”, quando deveria ser referido “três cubos em linha”. Outro obstáculo relaciona-se com o facto de o emissor e o recetor da mensagem não varrerem o espaço no mesmo sentido (uns da esquerda para a direita e outros da direita para a esquerda) — em 16 construções, apenas duas foram simultaneamente “ditadas” e construídas da esquerda para a direita, fazendo com que tantas construções ficassem em espelho (figura 4). A referência “em cima” podia ser entendida como uma orientação no plano ou no espaço: se emissor e recetor não usam a mesma orientação, por vezes tornava-se difícil, ou mesmo impossível, realizar a construção! Por fim, aceitar as regras do jogo (não mexer nas peças do colega e/ou não espreitar para a construção de quem “dita”) foi uma dificuldade para várias crianças.



Figuras 4A e 4B. Construção inicial e construção final

A estratégia de apontar (tanto para os cubos a utilizar como para o local onde os colocar) foi recorrentemente utilizada para reorientar os colegas na construção.

Perante a construção realizada e que se ilustra na figura 4A, a criança “A” dita, começando pelo cubo vermelho, situado à direita:

- Agora tens que fazer um vermelho em baixo, no meio o laranja. E o amarelo ao lado do laranja, o verde em cima do amarelo e o azul em cima do vermelho.

A criança B vai colocando as peças uma a uma, seguindo a orientação da esquerda para a direita, numa construção totalmente na mesa (figura 5), mas quando ouve a referência à peça azul, fica sem perceber e pergunta:

- O azul em cima do vermelho? Como é que é em cima?

“A” levanta o braço, mas como “B” não compreende, “A” aponta para o cubo azul e para a face superior do cubo vermelho, colocando “B” a peça no sítio correto. A seguir “A” continua:

- Agora tens que virar os cubos assim e tens que pôr este amarelo ao lado (enquanto faz um movimento de rotação de 90° para a direita com a mão). “B” pergunta:

- Ao lado de qual?

- Ao lado do laranja e depois esse em cima.

Depois de rodar a construção, “B” coloca o amarelo na posição que a colega esperava e o verde em cima do azul, o que faz com que “A” diga:

- Não, o verde em cima do amarelo.

Quando a construção está concluída, a educadora retira a caixa que estava a servir de barreira à visão de “B”, que diz:

- Ah, eu pensava que estava assim... (deita as peças em cima da mesa) deitadas.

“A” deu indicações topológicas adequadas, usando o vocabulário “em baixo”, “no meio” “ao lado” e “em cima” com referência às cores distintas dos cubos. A expressão “em cima” revelou-se ambígua pois “B” entendeu essa instrução colocando os cubos todos no mesmo nível e não no nível superior, tal como ele evidencia. “A” não deu qualquer indicação da relação de lateralidade entre as peças – direita/esquerda o que contribuiu para que a construção final (figura 4B) fosse um espelho da inicial (figura 4A).



Figura 5. Três fases da construção da criança “B”

Ambas as crianças revelam dominar as relações topológicas básicas apesar de o processo de descodificação das instruções não ter sido imediato.

Com mais ou menos facilidade, com uma estratégia ou outra, todas as crianças concluíram a tarefa, repetindo-a sempre que era possível.

A CONCLUIR

As crianças evidenciaram uma multiplicidade de processos na forma como desempenharam a tarefa, servindo-se de todas as suas competências para a concluir. As crianças que dominavam melhor os conceitos associados à lateralidade revelaram-se capazes de questionar o colega quando não o entendiam com perguntas como “Ao lado de qual?”, ajudando-o assim a clarificar as suas instruções, e usando o vocabulário topológico com propriedade. Já as crianças que ainda não dominavam este vocabulário, quando não entendiam as instruções dos colegas diziam apenas “Não estou a perceber nada!” ou “O quê?”, o que não conduzia o interlocutor a reformular a explicação. No entanto, procuravam clarificar a linguagem para se fazerem entender pelos colegas, organizando e consolidando o seu pensamento matemático. O papel primordial da linguagem (Vygotsky, 1995) no desenvolvimento das aprendizagens matemáticas encontra-se aqui evidenciado, quer do ponto de vista de quem “dita”, quer do ponto de vista de quem constrói, requerendo uma clarificação e uma interpretação de mensagens de índole geométrica, que careciam de contínuo refinamento. O vocabulário relativo à lateralidade não foi mobilizado, apesar das crianças apontarem para o lado direito ou esquerdo, conforme queriam que os colegas colocassem o cubo. Aparentemente, as crianças identificam as diferentes posições, apenas a “etiqueta” que as descrevem ainda não está tão presente. Os gestos foram, neste caso, usados para apontar posições estáticas, na ausência de utilização de vocabulário relativo à lateralidade. Tal como referido por Clements e Sarama (2009), este tipo de vocabulário é adquirido e compreendido mais tardiamente.

Após a educadora solicitar, as crianças explicitavam se a construção era apenas de um nível ou em altura, frequentemente acompanhando a linguagem falada com gestos. A linguagem gestual foi usada, nesta situação, complementarmente e em associação à linguagem falada.

Outro aspeto a salientar foi a criação de relações de ajuda e cooperação, com todas as crianças a empenharem-se na tarefa, não desistindo nem deixando o colega desistir, muito graças aos esforços comunicativos encetados. Esta tarefa tem sido replicada em anos letivos seguintes, com grupos de crianças distintos, ressaltando sempre o carácter lúdico da tarefa e o envolvimento

das crianças e contribuindo para desenvolverem a sua capacidade de comunicar matematicamente

Referências

- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). NCTM.
- Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers' geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (Vol. 2, pp. 131-56). Charlotte: Information Age.
- César, M., Torres, M., Caçador, F., & Candeias, N. (1999). E se eu aprender contigo? A interação entre pares e a apreensão de conhecimentos matemáticos. In M. V. Pires, C. M. Morais, J. P. da Ponte, M. H. Fernandes, A. M. Leitão, & M. L. Serrazina (Eds.), *Caminhos para a investigação em educação matemática em Portugal* (pp. 73-89). Lisboa: SPCE - Secção de Educação Matemática e APM.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.
- Colaço, V. (2004). Processos interacionais e a construção de conhecimento e subjetividade de crianças. *Psicologia reflexão e crítica*, 17(3), 333-340. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/prc/v17n3/a06v17n3>
- Kotsopoulos, D., Cordy, M., & Langemeyer, M. (2015). Children's understanding of large scale mapping tasks: An analysis of talk, drawings, and gesture. *ZDM Mathematics Education*, 47, 451-463.
- Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: Connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, 47, 511-517.
- National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Nunes, M. (2016). *A resolução de problemas geométricos por crianças de 5 anos*. (Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa), disponível em <http://hdl.handle.net/10400.21/6830>
- Orton, A. (2004). *Learning mathematics: Issues, theory and classroom practice* (3ª Ed). London: Continuum.
- Silva, I. L. (coord), Marques, L., Mata, L., & Rosa, M. (2016). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: Ministério da educação/Direção-geral da Educação.
- Vygotsky, L. (1995). *Pensamento e linguagem* (5ª Ed.). São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda. (Trabalho original em inglês publicado em 1961)

MARIA JOÃO NUNES

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE PAÇO DE ARCOS

MARGARIDA RODRIGUES

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA, UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

A importância das discussões coletivas para o desenvolvimento do pensamento algébrico

CÉLIA MESTRE

Um ambiente de sala de aula onde os alunos tenham oportunidade de apresentar e defender as suas ideias, reagir e comentar as contribuições dos colegas e procurar chegar a consensos sobre o significado de ideias matemáticas importantes contribuirá, certamente, para a aprendizagem matemática dos alunos e da sua cidadania. Para constituir e manter uma comunidade com estas características, o professor deve fazer emergir as ideias dos alunos e também criar as condições necessárias para que este tipo de interações ocorra (Boavida, 2005). Se os tipos de comunicação nos quais os alunos se envolvem podem ser limitados pela sua compreensão matemática, de forma recíproca, a compreensão matemática também pode tornar-se mais sofisticada à medida que evolui a capacidade de comunicação. Neste sentido, Cobb et al. (1997) focam-se na relação entre o discurso de sala de aula e o desenvolvimento matemático dos alunos que nele participam, denominando como *discurso reflexivo* aquele em que “a atividade matemática é objetivada e se torna um tópico explícito de conversação” (p. 269), considerando que, nessas condições, os alunos podem realizar aprendizagens matemáticas.

Em salas de aula onde existe esta prática de ensino, os professores falam menos e os alunos mais do que o que seria esperado numa sala de aula num contexto de ensino mais tradicional, pois os professores organizam o tempo da aula de forma a que aos alunos sejam dadas mais oportunidades de comunicação, tanto em pequeno grupo como durante a discussão coletiva com toda a turma (Baxter & Williams, 2010).

Considerando a importância da comunicação para a aprendizagem matemática, este artigo foca-se em momentos da discussão coletiva de uma tarefa em aula. A tarefa que se apresenta insere-se num estudo mais amplo de implementação de uma experiência de ensino (Mestre, 2014), desenvolvida ao longo de um ano letivo. O principal objetivo da experiência de ensino era desenvolver o pensamento algébrico dos alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade, centrando-se na capacidade de generalização e sua representação.

A definição de pensamento algébrico assumida na experiência de ensino é apresentada por Blanton e Kaput (2005) como o

“processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade” (p. 413). Assumindo o carácter central da generalização, ela é entendida como um processo dinâmico, socialmente situado, que se desenvolve através de ações colaborativas (Ellis, 2011). De acordo com esta autora, a generalização é uma atividade desenvolvida pelas pessoas dentro de um contexto sociomatemático específico, surgindo como uma representação coletiva que tem raiz na comunidade, através de experiências mediadas pela interação, linguagem e outras ferramentas próprias. Acrescenta ainda que a ação de generalização decorre em ciclos de interação onde uma generalização inicial pode revestir-se de novas formas, passando pela interação e reflexão coletivas, sendo a versão de generalização final não o produto de um só aluno, mas resultante do desenvolvimento ocorrido na interação do grupo.

Por outro lado, na experiência de ensino também se considerou que a generalização pode ser expressa de diversas formas, desde a linguagem natural a formas gradualmente mais simbólicas (Blanton, 2008). Neste sentido, os alunos desenvolveram simultaneamente o seu sentido de símbolo, progredindo gradual e naturalmente desde a utilização de símbolos próprios para expressar a generalidade à introdução com sentido da notação algébrica.

Na experiência de ensino foram desenvolvidas quarenta e duas tarefas, organizadas numa lógica de integração curricular com os temas e conteúdos do currículo do 4.º ano de escolaridade. A tarefa que se apresenta a seguir – *Cubos com autocolantes* (figura 1) – foi a penúltima tarefa explorada na experiência de ensino e realizou-se no final do ano letivo. Tinha como objetivo a exploração de relações funcionais, tendo como contexto uma sequência pictórica crescente e pretendia-se que os alunos indicassem termos próximos e mais distantes da sequência e identificassem uma regra geral. Nesta fase da experiência de ensino os alunos já revelavam bastantes facilidades na apreensão

e expressão da generalização em linguagem natural e linguagem simbólica, atribuindo significado aos símbolos que usavam.

Tarefa “ Cubos com autocolantes”

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1.1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa nas construções seguintes e explica como pensaste.

- Três cubos.
- Quatro cubos.
- Dez cubos.
- Cinquenta e dois cubos

1.2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 1. Tarefa *Cubos com autocolantes*

A tarefa foi apresentada a partir da leitura do enunciado e da modelação da situação, reconstruindo-se com os alunos a primeira construção da sequência, usando cubos e colando os autocolantes nas faces respetivas. Em seguida, os alunos trabalharam autonomamente, em pares ou trios, e tinham à sua disposição construções com dois e três cubos, com os autocolantes colados. Após o momento de trabalho autónomo, seguiu-se a discussão coletiva, com a apresentação e discussão das resoluções de diferentes pares ou trios. Neste artigo apresentam-se dois momentos da discussão coletiva que evidenciam diferentes aspetos da exploração da relação funcional. Os diálogos que constituíram esses momentos da discussão coletiva já tinham sido apresentados anteriormente num artigo desta publicação (Mestre, 2015), focado no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. No entanto, aqui a análise foca-se na forma como os momentos de discussão coletiva promoveram o desenvolvimento da capacidade de comunicação dos alunos e, vice-versa; ou seja, como a capacidade de comunicação dos alunos permitiu momentos de discussão coletiva poderosos e promotores de aprendizagens matemáticas.

O primeiro momento que se apresenta diz respeito à apresentação do par Carolina e Daniel (figura 2). Na sua resolução é interessante verificar que apresentam a escrita simbólica da regra utilizando cores para atribuir diferentes significados ao mesmo símbolo. Inicialmente, estes alunos escrevem corretamente a regra $(4 \times n) + 2 = t$. Depois, apresentam o que parecem ser os procedimentos anteriores que conduzem à escrita dessa regra, revelando incorreções formais. No entanto, utilizam duas cores (vermelho

e azul), às quais parecem atribuir uma significação particular. Inicialmente escrevem $4 \times n = n$, representando o primeiro n a azul e o segundo a vermelho, indicando, assim, tratar-se de números diferentes. Depois, escrevem $n+2=t$, escrevendo esse n a vermelho, ou seja, sendo este número equivalente à soma da operação anterior. Desta forma, o modo como utilizam diferentes cores para os n 's permite perceber que querem representar números diferentes. Naturalmente que o procedimento que apresentam não é correto, mas é interessante verificar como atribuem à cor esta significação simbólica.

O par apresenta ainda uma tabela com duas colunas, onde relacionam o número de cubos com o número de autocolantes e apresentam diversos exemplos. Usando setas, o par explicita as relações encontradas, tanto recursivamente, ao fazer uma leitura linha a linha, como de modo funcional, ao estabelecer a relação direta entre o número de cubos e o número de autocolantes: “n.º de cubos $\times 4 + 2$ ”. É interessante verificar que é pela leitura funcional que os alunos determinam o número de autocolantes para cada um dos exemplos apresentados.

P: Sim conseguimos a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos, é multiplicando 4 por qualquer número de cubos e somando mais 2.

(4 x m) + 2 = t Exp:

4 x m = m
m + 2 = t

Já 6 cubos
(4 x 6) + 2 = 26

n.º de cubos	total de autocolantes
9	(9 x 4) + 2 = 38
10	(10 x 4) + 2 = 42
11	(11 x 4) + 2 = 46
12	(12 x 4) + 2 = 50
13	(13 x 4) + 2 = 54

Trabalho: Carolina Daniel

Sim, conseguimos a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos, é multiplicando 4 por qualquer número de cubos e somando mais 2.

Figura 2. Resolução do par Carolina e Daniel

Quando o par apresenta a tabela à turma, começa por focar-se na leitura de cada coluna, identificando as relações encontradas entre os termos consecutivos da sequência. Quando refere que, na coluna do número de autocolantes, a relação é “de quatro” e depois que “está sempre a fazer dois”, isso suscita interpeleções

por parte de alguns colegas. Assim, em conjunto, estes alunos clarificam o significado da multiplicação por quatro e da adição do valor constante que acontece entre os termos consecutivos da sequência.

Carolina – Nós pensámos (...) E vimos a relação. Então fizemos duas colunas: uma com o número de cubos e outra com o total de autocolantes. O número de cubos é 9,10,11,12,13 e a relação é de um. No total de autocolantes a relação é de quatro. Aqui era de quatro, mas aqui estava sempre a fazer dois, também era de quatro.

Fábio – Essa parte não percebi... era de dois e depois era de quatro?

Carolina – Sim, aqui era de quatro e aqui está sempre a ser dois...

Gonçalo – Não, simplesmente porque ali é vezes quatro...

Carolina – Sim, porque aqui está sempre dois, por isso é de quatro... se fizeres assim, sem o dois, assim 9 vezes 4 é 36, e depois 10 vezes 4 dá 40, 42...

Gonçalo – Não, mas isso é só a tabuada do 4. 9 vezes 4 era 36...

Rita – Vezes 4 é 36, juntando mais 2, como em todos junta mais 2, por isso é que dá mais 4.

Gonçalo – Se tirares o mais 2 é a tabuada do 4.

Tendo em conta a importância da tarefa para a compreensão com significado das regularidades encontradas, a professora procura que os alunos justifiquem essas regularidades usando o contexto concreto da tarefa. Desta forma, conduz a discussão coletiva no sentido de os alunos identificarem explicitamente o significado concreto das relações matemáticas encontradas. Procura assim, insistentemente, que os alunos se liguem ao contexto da tarefa para traduzir as ideias matemáticas em exploração. Embora pareça evidente que os alunos que estão envolvidos na discussão já tenham compreendido essas ideias, esta insistência da professora permite que todos os alunos acompanhem a discussão, especialmente aqueles que ainda possam estar com dificuldades em compreender o modo mais abstrato de como as ideias estão a ser discutidas.

P – Porque é que é sempre mais 4?

Fábio – Porque se faz sempre vezes 4...

P – Mas porquê?

Carolina – Porque 9 vezes 4 dá 36, depois com o 2, 38; 10 vezes 4, 40, junta-se o 2, 42, é o 2 que está a fazer isto...

(...)

P – Mas porquê?

Rita – Porque foi assim, eles fizeram 9 vezes 4, é 36 e o 36 faz parte da tabuada do 4, mas eles puseram mais 2, se eles no próximo metessem mais 3 já não seria mais 4... porque é sempre o mesmo número.

P – Mas eles fizeram e fizeram corretamente... A minha pergunta é porque é que neste problema, nesta situação....

Rita – Porque há 4 lados nos cubos.

(...)

João V. – Porque tem 4 lados.

João V. – Sim, 4 faces.

P – Mas o cubo tem 4 faces?

Vários alunos – Não, tem 6...

João V. – Mas é menos uma que fica tapada e depois é menos a outra do outro lado que também fica tapada.

O segundo momento acontece com a apresentação dos alunos Rita, Diogo e Beatriz (figura 3). Este grupo apresenta a escrita da regra em linguagem simbólica alfanumérica e em linguagem natural. Apresenta uma legenda onde discrimina o significado atribuído a cada variável na escrita simbólica da regra. Na representação em linguagem natural descreve o procedimento que efetua para calcular o número de autocolantes de uma qualquer construção de cubos, considerando o número de autocolantes da “face que está em cima”.

ma = nº de autocolantes
mta = nº total de autocolantes

$ma \times 4 + 2 = mta$

Porque, sabendo o número de autocolantes da face que está em cima faz-se $\times 4$ ($\times 4$ por ser o número de faces que há num cubo) $+ 2$ (o $+ 2$ vem do número da base com autocolantes que se veem).

Porque sabendo o número de autocolantes da face que está em cima faz-se $\times 4$ ($\times 4$ por ser o número de faces que há num cubo) $+ 2$ (o $+ 2$ vem do número da base com autocolantes que se veem).

Figura 3. Resolução do grupo Rita, Diogo e Beatriz

Na sua explicação à turma, este grupo mostra que considerou “o número de autocolantes da face que está em cima” como variável independente. Como os restantes grupos tinham considerado, até ao momento, o número de cubos como variável independente, o facto deste grupo considerar o número de autocolantes como essa variável suscitou discussão na turma, com alguns alunos a pronunciarem-se contra essa opção.

João V. – Número de autocolantes vezes 4... número de autocolantes?! Assim já sabem o número de autocolantes. Tem de ser o número de cubos, é o número de cubos!

Rita – Mas não é o número de autocolantes, é o número que está em cima.

Gonçalo – Então, só há um.

Rita – Não, pode haver 2 cubos. Seria 2 vezes 4.

João V. – É muito complicado porque o *na* era o número de autocolantes... isso quer dizer que já sabes o número de autocolantes...

Gonçalo – É a mesma coisa saber o número de autocolantes e fazer vezes 4.

João V. – Mas assim já têm de saber o número de autocolantes.

Rita – Não, não sabemos nada. Por exemplo, temos este cubo, por exemplo, temos um autocolante em cima e faço vezes 4, mas eu não sei o número total de autocolantes e depois é mais 2.

Carolina – Mas porque não pões o número de cubos? É mais fácil.

Perante a reação da turma, a professora propõe, então, que se comparem duas representações diferentes, uma resolução apresentada em momento anterior na discussão por outro grupo e a do grupo que agora apresentava (figura 4).

Embora a escrita da regra seja semelhante em ambos os grupos, o primeiro considera o número de cubos como a variável independente e o segundo considera ser o número de autocolantes essa variável.

Gonçalo – No nosso está a dizer que é um número qualquer de cubos e o dela é um número qualquer de autocolantes... Mas vai dar ao mesmo... Saber o número qualquer de autocolantes ou o número qualquer de cubos é a mesma coisa...

P – É?

Gonçalo – Então é assim: aqui há 3 cubos e os *smiles* de cima... então estes são os *smiles* de cima e são 3 cubos e 3 *smiles*. Tínhamos falado que os *smiles* é 3 vezes 4, viste os *smiles* de cima, mas se souberes os 3 cubos também vai ser 3 vezes 4.

P – Mas o número de autocolantes dessa construção é igual ao número de cubos?

Gonçalo – Não, professora, mas só que a Rita estava a dizer

que só contava os de cima, que era os de cima vezes 4, então os de cima são 3 e há 3 cubos, então os 3 autocolantes de cima é a mesma coisa que os 3 cubos.

(...)

João V. – É a mesma coisa.

P – É a mesma coisa... mas...

João V. – Só que explicado de maneiras diferentes...

P – É a mesma coisa, mas acho que temos de ter um cuidadinho aí...

(...)

P – Agora eu acho que... há um cuidado quando nós usamos ali um número qualquer de autocolantes, acho que temos de ter um cuidado especial ali...

Gonçalo – Ali ela falou que era o de cima, mas se for o da frente também são 3 autocolantes e 3 cubos.

João V. – Tanto faz.

P – Ok, e se for o número total de autocolantes?... Não é também o número de autocolantes?

Vários alunos – É.

P – Então, o que falta dizer ali? Número de autocolantes...

João V. – E cubos.

Fábio – Não, número de autocolantes de cima.

P – De cima, de uma face.

Os dois momentos apresentados mostram como foram objeto da discussão da turma diferentes e importantes aspetos relativos ao pensamento algébrico, mais especificamente no que respeita à compreensão e representação de relações funcionais e da construção do sentido de símbolo. O ambiente de sala aula descrito pode ser caracterizado como aquilo que Boavida (2005) denomina *cultura de argumentação* e que descreve do seguinte modo:

A apresentação, por parte dos alunos, de argumentos em defesa das suas ideias, a análise crítica das contribuições dos colegas, a discussão da legitimidade matemática de cadeias de raciocínio, a expressão

Handwritten mathematical expressions comparing two group resolutions:

Left side:

$$(L \times N) + 2 = T$$

Legend:

$n = n^\circ$ qualquer de cubos
 $T =$ total de autocolantes

Right side:

$ma = m =$ de autocolantes
 $mta = m^\circ$ total de autocolantes

Boxed formula:

$$ma \times 4 + 2 = m.Ta$$

Figura 4. Comparação entre as resoluções dos grupos

de desacordos e sua resolução, a fundamentação de posições com argumentos de caráter matemático, a avaliação de se é, ou não, apropriado usar um determinado raciocínio na resolução de um problema, a formulação de conjecturas e a avaliação da plausibilidade e/ou validade destas conjecturas. (p. 22)

De facto, nesta altura da experiência de ensino, os alunos já se encontravam imersos nessa cultura na sala de aula onde as discussões coletivas se assumiam como produtivas para a construção do conhecimento matemático. Neste sentido, é importante realçar dois aspetos que permitiram a construção de uma cultura de sala de aula direcionada para a aprendizagem matemática. Por um lado, a qualidade e adequação das tarefas e, por outro, o papel do professor na condução dessa cultura de sala de aula. No primeiro aspeto, é importante salientar que a tarefa matemática apresentada se revelou valiosa e adequada, constituindo uma oportunidade rica de aprendizagem para a exploração das relações funcionais. Apresentando um desafio adequado à generalidade dos alunos, a tarefa mobilizou as aprendizagens já construídas e permitiu, ainda, progredir no percurso de desenvolvimento do pensamento algébrico. Relativamente ao segundo aspeto, a orquestração da discussão coletiva por parte da professora permitiu que os alunos fossem os maiores protagonistas desse momento, conduzindo-os a ações como a explicação, clarificação e justificação de ideias matemáticas, confronto e comparação entre diferentes estratégias e representações; levando-os intencionalmente à exploração de aspetos fundamentais para a compreensão das relações funcionais e da construção do sentido de símbolo. Desta forma, o questionamento da professora, podendo parecer pouco dirigido ou saliente, revela uma clara intencionalidade de conduzir os alunos na exploração desses aspetos, conduzindo-os à negociação

de significados e à construção do conhecimento matemático na turma, assumida aqui como uma verdadeira comunidade de aprendizagem.

Referências

- Baxter, J. A., & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education*, 13, 7-26.
- Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking, Transforming Practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Blanton, M., & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: olhares sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.) *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 13-43). Setúbal: IPS.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 258-277.
- Ellis, A. B. (2011). Generalizing – Promoting actions: how classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 308-345.
- Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino* (tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Mestre, C. (2015). O desenvolvimento do pensamento algébrico num contexto de ensino exploratório: um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade. *Educação e Matemática*, 134, 12-16.

CÉLIA MESTRE

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ROMEU CORREIA, ALMADA



Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática

Colaborar e refletir sobre as práticas, em dinâmicas de formação contínua de professores.

Levamos a formação até si!

Contacte-nos: ☎ Rua Dr. João Couto, nº 27-A - 1500-236 Lisboa

☎ 21 716 36 90 @ centroformacaoapm@gmail.com Oferta formativa em: <https://cfomacao.apm.pt/>

Contributos para a análise da comunicação (matemática) escrita dos alunos

MANUEL VARA PIRES

ELISABETE COSTA

CRISTIANA LEITE

Neste texto, apresentamos aspetos do trabalho desenvolvido na prática de ensino supervisionada das segunda e terceira autoras, orientados pelo primeiro autor, no âmbito do Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º ciclo do Ensino Básico. Em ambos os casos, assumiu-se a comunicação escrita dos alunos como tema integrador das experiências de ensino e aprendizagem concretizadas no estágio profissional. Por isso, ao longo da prática letiva nas diferentes áreas disciplinares e ciclos de ensino, foi dada uma atenção especial às produções escritas feitas pelos alunos na resolução das tarefas, que proporcionou a elaboração de um instrumento de análise de modo a permitir uma análise mais organizada e sistematizada desses registos escritos.

O texto pretende contribuir para um maior aperfeiçoamento dos processos de análise da comunicação escrita dos alunos, centrando-se na área da matemática e retomando ideias já expressas em outros contextos (Costa & Pires, 2016; Leite & Pires, 2017; Pires, Leite & Costa, 2017). Começamos com algumas considerações sobre comunicação, realçando o seu formato escrito; seguimos com a apresentação do instrumento usado na análise da comunicação escrita, concretizada em quatro dimensões: clareza, fundamentação, lógica e profundidade; e terminamos com a apresentação e análise de registos escritos de quatro alunos do 5.º ano de escolaridade na resolução de uma tarefa matemática relacionada com a área de figuras poligonais.

A COMUNICAÇÃO ESCRITA

O desenvolvimento de uma boa competência comunicativa constitui, para o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2017), uma das “práticas produtivas” que pode potenciar aprendizagens matemáticas mais sólidas e significativas. Por isso, todos os alunos devem ter oportunidades de desenvolver a sua competência comunicativa, vista por Monteiro, Viana, Moreira e Bastos (2013) como a “capacidade que cada um possui para falar, escrever e saber selecionar as formas linguísticas mais adequadas às diferentes situações com que nos deparamos”, potenciando a “interação com os outros, com precisão, clareza, coerência, eficácia e adequação” (pp. 112-113).

Na sala de aula, as diferentes formas de comunicação que se vão estabelecendo são caracterizadas, em grande medida, pelo

uso das linguagens oral e escrita e os processos comunicativos desenvolvem-se através das formas como o professor e os alunos estruturam e partilham o seu conhecimento (Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes, & Martinho, 2015). A linguagem oral e a linguagem escrita, e respetivos registos, sendo duas realidades diferentes, assumem um papel fundamental no desenvolvimento e na capacidade de comunicação.

Nas orientações curriculares para a área do português (Ministério da Educação, 2009), a escrita é entendida como “o resultado, dotado de significado e conforme à gramática da língua, de um processo de fixação linguística que provoca o conhecimento do sistema de representação gráfica adotado”, bem como “processos cognitivos e translinguísticos complexos (planeamento, textualização, revisão, correção e reformulação do texto)” (p. 16). A linguagem escrita compreende, então, a produção escrita em concreto, englobando a competência gráfica, ortográfica e compositiva, assim como o conhecimento explícito da língua. A articulação entre estas duas dimensões é fundamental para os registos escritos dos alunos, demonstrando conhecimento e eficiente utilização do vocabulário, assim como a utilização e articulação dos termos, palavras e frases, de forma a dar coesão e coerência aos registos escritos produzidos.

Desta forma, os registos escritos que os alunos produzem podem desempenhar uma função muito significativa nas suas aprendizagens, ajudando-os a estruturar melhor o que pensam e a refletir sobre o trabalho realizado na aula. Para Ponte et al. (2007), “a linguagem escrita (...) é uma forma de comunicação que tem um papel complementar fundamental no ensino-aprendizagem” (p. 45), apoiada num conjunto de representações facilitadoras dos processos de comunicação (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008).

Por outro lado, a comunicação escrita pode ser analisada segundo diferentes perspetivas dadas as múltiplas dimensões que a caracterizam, como a coerência, a lógica ou a clareza (Castanheira, 2014). Por exemplo, esta última dimensão, a clareza, está relacionada com a utilização de vocabulário (também matemático) apropriado e outras formas de representação adequadas à situação. Nos seus registos escritos, os alunos

podem, então, recorrer a diferentes representações (materiais manipuláveis, tabelas, figuras, desenhos, diagramas, vocabulário, linguagem simbólica, etc.), cada uma com características próprias.

Apoiando-nos em Bruner, podemos concretizar as ideias, recorrendo a diferentes formas: representações ativas, representações icónicas e representações simbólicas, que poderão ser utilizadas conjuntamente ou combinadas, nos vários momentos de comunicação escrita. As representações ativas estão associadas à ação e apelam à manipulação ou experiência direta e apropriada sobre os objetos, propiciando, como referem Boavida et al. (2008), “oportunidades para criar modelos ilustrativos, contribuindo para a construção de conceitos” (p. 71). As representações icónicas “baseiam-se na organização [e memória] visual, no uso de figuras, imagens, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles” (p. 71), distanciando-se do concreto e do físico. As representações simbólicas, consistindo numa forma mais elaborada de captar e representar as ideias, “correspondem, não apenas aos símbolos que representam ideias matemáticas, mas a todas as linguagens que envolvem um conjunto de regras fundamentais quer para o trabalho com a matemática, quer para a sua compreensão” (p. 71).

O INSTRUMENTO DE ANÁLISE DA COMUNICAÇÃO ESCRITA

O instrumento de análise utilizado incide em quatro dimensões que podem ser associadas à comunicação escrita: (i) a *clareza*, relacionada com o uso do vocabulário e formas de representação

seguidas pelo aluno quando expressa as suas ideias; (ii) a *fundamentação*, relacionada com a maneira como o aluno defende ou justifica os seus raciocínios ou resoluções; (iii) a *lógica*, relacionada com a coerência e a ligação entre as ideias expressas ou processos desenvolvidos; e (iv) a *profundidade*, relacionada com o domínio revelado pelo aluno quando se refere aos tópicos matemáticos envolvidos na situação.

Para apreciar a qualidade da comunicação escrita revelada pelos alunos em cada uma destas dimensões, foram considerados três níveis de desempenho: baixo, médio e elevado. Registe-se que este instrumento de análise não foi trabalhado diretamente pelos alunos, embora fosse tido em conta na prática letiva nos aspetos relacionados com a comunicação na sala de aula. No Quadro 1, estão sistematizadas as categorias e respetivos níveis de desempenho que suportam a análise da comunicação escrita.

ANÁLISE DOS REGISTOS ESCRITOS DOS ALUNOS

Os registos, que a seguir se analisam, foram escritos na aula de Matemática por alunos de duas turmas do 5.º ano de escolaridade — turma da Elisabete e turma da Cristiana. Estes registos escritos correspondem, numa primeira situação, a resoluções individuais feitas por quatro alunos e, numa segunda situação, a comentários coletivos produzidos por dois grupos de alunos.

Situação 1

Na turma da Elisabete, foi proposta a resolução individual da tarefa “Quem tem razão?”¹ (figura 1), em que os alunos tinham de justificar raciocínios e comentar afirmações feitas por duas crianças.

¹Encontra esta tarefa na secção dos materiais que segue este artigo

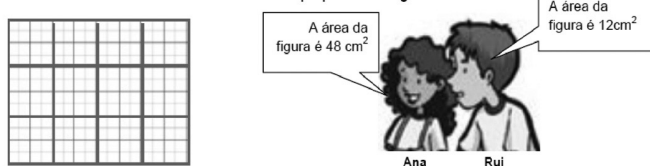
Quadro 1. Categorias e níveis de desempenho utilizados na análise da comunicação escrita

Clareza		
O aluno expressa, por escrito, as suas ideias, recorrendo a vocabulário correto e a representações adequadas.		
Nível baixo: o aluno apresenta ideias imprecisas, utiliza vocabulário incorreto ou incompreensível e recorre a representações inadequadas.	Nível médio: o aluno apresenta ideias precisas, mas utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível e recorre a representações pouco adequadas.	Nível elevado: o aluno apresenta ideias precisas, utiliza vocabulário preciso e correto e recorre a representações adequadas
Fundamentação		
O aluno justifica, de forma escrita, os seus processos ou ideias, apresentando argumentos plausíveis.		
Nível baixo: o aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa.	Nível médio: o aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias.	Nível elevado: o aluno justifica adequadamente os seus processos ou ideias.
Lógica		
O aluno manifesta raciocínio e coerência nos registos escritos, apresentando conexões entre as ideias registadas.		
Nível baixo: o aluno revela pouco raciocínio e coerência nos registos escritos, não mostrando conexão entre as ideias.	Nível médio: o aluno revela algum raciocínio e coerência nos registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias.	Nível elevado: o aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexão entre as ideias.
Profundidade		
O aluno revela, de forma escrita, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto a trabalhar.		
Nível baixo: o aluno revela, frequentemente, não dominar aspetos importantes sobre o assunto.	Nível médio: o aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto	Nível elevado: o aluno revela, frequentemente, dominar os aspetos mais complexos sobre o assunto.

Na figura 2, são reproduzidos os registros escritos das respostas apresentadas por quatro alunos: João, Sara, Rosa e Nuno.

Tarefa 2. Quem tem razão?

Considera os comentários da Ana e do Rui a propósito da Figura 2.



Quem tem razão? O que pensas dos comentários da Ana e do Rui?

Figura 1. Enunciado da tarefa “Quem tem razão?”

Resolução do João

*quem tem razão são os dois
Penso que*

“Quem tem razão são os dois. Penso que...”

Resolução da Sara

*os dois não têm razão porque não diz a unidade de medida
dos quadrados*

“Os dois não têm razão, porque não diz a [medida dos quadrados - riscado] unidade de medida”

Resolução da Rosa

Porque podemos considerar cada quadrado como 1 unit e também podemos considerar 1 quadrado como 1 unit

$\square \rightarrow 1 \text{ unit}^2$
 $\square \rightarrow 1 \text{ unit}^2$

Resolução do Nuno

*o Rui considera $\square \rightarrow 1 \text{ cm}^2$ por isso ele
contou todos os $\square$ e deu 12 cm^2
A Ana considera $\square \rightarrow 1 \text{ cm}^2$ por isso ele
contou todos os $\square$ e deu 48 cm^2 .*

Figura 2. Resoluções apresentadas por quatro alunos

Na categoria *clareza*, as diferenças entre a resposta do João (nível baixo), a resposta da Sara (nível médio), e as respostas da Rosa e do Nuno (nível elevado) são bem visíveis. O João apela apenas à representação simbólica e apresenta as suas ideias de uma forma muito imprecisa, não chegando a completar a sua resposta. A Sara, revelando uma melhor compreensão da situação, consegue expressar ideias mais precisas e compreensíveis, embora revele alguma dificuldade em selecionar o vocabulário mais adequado à situação. Já a Rosa e o Nuno apresentam os seus raciocínios de uma forma muito clara, usando um vocabulário bastante correto e compreensível e conjugando bem a representação icónica com a representação simbólica.

Na categoria *fundamentação*, é possível distinguir as respostas do João e da Sara (nível baixo) das respostas da Rosa (nível médio) e do Nuno (nível elevado). O João e a Sara reconhecem que as duas afirmações podem estar, ou não, corretas, mas não conseguem apresentar nem justificar as ideias, apesar da Sara remeter para a ausência da indicação da unidade de medida, revelando nítidas dificuldades na apresentação de argumentos. A Rosa e o Nuno apresentam justificações adequadas para as respostas dadas, remetendo para a dependência da definição da unidade de medida considerada (ou a área do quadrado de menores dimensões ou a área do quadrado como os lados mais carregados). O Nuno acaba por apresentar uma fundamentação mais completa, concluindo com a indicação da área em cada um dos casos.

Na categoria *lógica*, também se verifica um afastamento entre as respostas do João e da Sara (nível baixo) e as respostas da Rosa e do Nuno (nível médio). O João, pela quase ausência de resposta, não revela raciocínio nos seus registos escritos nem ligação entre as ideias. A resposta da Sara acompanha a do João nesta categoria, pois, embora remeta para a noção de unidade de medida, não explicita quaisquer conexões concetuais que pretenda estabelecer. A Rosa e o Nuno manifestam alguma coerência nas suas respostas e estabelecem alguma conexão entre as ideias que expressam, nomeadamente, a implicação que a unidade de medida tem na determinação do resultado final.

Na categoria *profundidade*, contrariamente ao João (nível baixo) devido à brevidade da resposta, os restantes alunos (nível médio) revelam algum domínio de aspetos mais complexos relacionados com o conceito de área. A Sara dá a ideia de compreender a importância da unidade de medida para a determinação da área de uma figura. A Rosa e o Nuno relacionam conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos, nomeadamente, as noções de medida e de unidade de medida, embora não o façam de uma forma explícita. Em particular, o Nuno indica e aplica o processo de cálculo da área que seguiu (contagem de unidades).

Situação 2

Na turma da Cristiana, foi proposto o desenvolvimento de um projeto estatístico, em que cada um dos grupos de alunos recolheu, organizou, interpretou e apresentou os resultados que foram sendo registados num diário de bordo. Para a discussão final do projeto, cada grupo comentou por escrito os diários dos restantes grupos.

Na figura 3, registam-se comentários que os grupos 4 e 6 escreveram nos outros cinco diários de bordo (os comentários seguem a ordem numérica dos grupos).

Na categoria *clareza*, os comentários do grupo 4 (nível médio) e do grupo 6 (nível elevado), recorrendo apenas a representações simbólicas, revelam ideias bastante precisas e compreensíveis

sobre o trabalho dos restantes grupos. Nota-se, ainda, que o grupo 4 revela algumas dificuldades na escrita de palavras. Já o grupo 6 utiliza um vocabulário mais adequado e correto e regista ideias mais focadas no projeto estatístico.

Na categoria *fundamentação*, também são visíveis diferenças nas respostas dos dois grupos. Os comentários do grupo 4 (nível baixo) apresentam diversas ideias, mas apenas justificam ou fundamentam as apreciações feitas em duas situações, uma relacionada com a criatividade de um grupo e a outra relativa à apresentação de um diário de bordo. O grupo 6 (nível médio) também não avança com muitas justificações para os seus comentários, mas é notória uma maior preocupação em fazê-lo, chegando a adiantar sugestões.

Na categoria *lógica*, as respostas dos dois grupos (nível médio) são bastante similares, revelando raciocínio e coerência nos seus registos escritos e estabelecendo alguma ligação entre as ideias expressas. O grupo 4 centra os comentários escritos nas apresentações dos diários de bordo e na correção dos cálculos. O grupo 6, também comentando as apresentações, é mais diversificado, focando-se nos gráficos e nos raciocínios e justificações apresentados.

Também na categoria *profundidade*, os comentários registados pelos dois grupos (nível médio) demonstram, por vezes, domínio de aspetos importantes da organização e tratamento de dados. O grupo 4 integra, nas suas respostas, referência a formas de representação da informação, à moda e à correção dos “cálculos”, embora não os explicita. O grupo 6 também faz comentários sobre estes aspetos, mas dando-lhe uma maior amplitude e

realçando a elaboração de gráficos e os cuidados a ter na sua construção.

A CONCLUIR

Globalmente, através da análise dos registos escritos, podemos afirmar que, nas respostas individuais, o João e a Sara são os alunos que manifestam mais dificuldades e que a Rosa e o Nuno revelam bons desempenhos na sua comunicação escrita. Nas respostas coletivas, os desempenhos são mais próximos (provavelmente resultantes das dinâmicas de negociação entre os elementos dos grupos), conseguindo o grupo 6 uma maior consistência nos seus comentários.

A resposta do João recolhe a atribuição do nível baixo em todas as categorias e a Sara revela os desempenhos mais baixos em *fundamentação* e em *lógica*. Também o grupo 4 demonstra maiores dificuldades em *fundamentação*. Em termos gerais, são estas duas dimensões as que envolvem maior complexidade para os alunos. De certa maneira, esta constatação não é surpreendente, dado que justificar raciocínios e processos seguidos e estabelecer conexões entre as ideias registadas exige aos alunos uma boa compreensão da situação em estudo, necessitando de disponibilizar conhecimentos mais seguros, sólidos e consistentes.

A dimensão *clareza* é aquela em que os alunos se sentem mais à vontade nos registos escritos. Mesmo a atribuição do nível baixo à resposta do João foi muito devida ao seu registo impreciso e incompleto. Os restantes alunos e os dois grupos, embora com níveis diferentes, expressam-se de uma forma bastante precisa e correta.

Comentários do grupo 4

Grupo 4 - Cálculos bem feitos, foram originais ao fazerem o desenho do caule e folhas, faltou a resposta da pergunta 6.

Grupo 4 - Apresentação cuidada, organizado e cálculos certos.

Grupo 4 - Apresentação razoável, não disseram porque é que a moda é 1 e não fizeram a pergunta 6.

Grupo 4 - Apresentação descuidada, nota-se mal a parte feita a lápis e o resto está razoável.

Grupo 4 - Organizado, respostas completas e uma boa apresentação.

Grupo 4 - Cálculos bem feitos, foram originais ao fazerem o desenho do caule e folhas, faltou a resposta da pergunta 6.

Grupo 4 - Apresentação cuidada, organizado e cálculos certos.

Grupo 4 - Apresentação razoável, não disseram porque é que a moda é 1 e não fizeram a pergunta 6.

Grupo 4 - Apresentação descuidada, nota-se mal a parte feita a lápis e o resto está razoável.

Grupo 4 - Organizado, respostas completas e uma boa apresentação.

Comentários do grupo 6

Grupo 6 - Boa apresentação mas há alguns números que não se percebem.

Grupo 6 - Apresentação cuidada mas podiam ter feito as linhas com régua. O nome “Leite” está com letra minúscula. O gráfico de barras tem título e o de barras duplas está bem e as justificações boas.

Grupo 6 - Apresentação razoável, tem falta de títulos e não disseram porque é que a moda é 1.

Grupo 6 - Apresentação mais ou menos com bons raciocínios, justificaram o valor da moda, não fizeram a pergunta 6.

Grupo 6 - Apresentação mais ou menos mas tem muitos riscos. Deviam ter carregado mais no lápis.

Grupo 6 - Boa apresentação mas há alguns números que não se percebem.

Grupo 6 - Apresentação cuidada mas podiam ter feito as linhas com régua. O nome “Leite” está com letra minúscula. O gráfico de barras tem título e o de barras duplas está bem e as justificações boas.

Grupo 6 - Apresentação razoável, tem falta de títulos e não disseram porque é que a moda é 1.

Grupo 6 - Apresentação mais ou menos com bons raciocínios, justificaram o valor da moda, não fizeram a pergunta 6.

Grupo 6 - Apresentação mais ou menos mas tem muitos riscos. Deviam ter carregado mais no lápis.

Figura 3. Comentários apresentados por dois grupos

Esta análise reforça a ideia que é muito importante ajudar os alunos a desenvolver a sua capacidade de comunicação (matemática) escrita (Guerreiro et al., 2015; NCTM, 2017; Ponte et al., 2007). Torna-se indispensável trabalhar as diferentes dimensões da comunicação escrita na sala de aula, solicitando frequentemente aos alunos justificações escritas dos processos seguidos, abordando os temas matemáticos com profundidade e apelando a raciocínios claros, corretos e coerentes (Boavida et al., 2008; Castanheira, 2014). Desta forma, estamos certos, é dada, aos alunos, uma oportunidade de construir aprendizagens mais consistentes e com mais sentido.

Referências

- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.
- Castanheira, G. (2014). *Um modelo de ensino para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática em alunos do 5.º ano do ensino básico*. Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Viseu, Viseu, Portugal.
- Costa, E., & Pires, M. V. (2016). Comunicar por escrito em matemática: Um estudo com alunos do 5.º ano. In M. H. Martinho, R. Tomás Ferreira, I. Vale & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de investigação em educação matemática* (pp. 405-419). Porto: Associação de Professores de Matemática. <http://hdl.handle.net/10198/13963>
- Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, 23(4), 279-295.
- Leite, C., & Pires, M. V. (2017). Comentários escritos produzidos pelos alunos na aula de matemática: Um estudo no ensino básico. In L. Menezes, A. Ribeiro, H. Gomes, A. P. Martins, F. Tavares & H. Pinto (Eds.), *Atas do XXVIII Seminário de investigação em educação matemática* (pp. 217-230). Viseu: Associação de Professores de Matemática. <http://hdl.handle.net/10198/15031>
- Ministério da Educação (2009). *Programa de português do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Monteiro, C., Viana, F., Moreira, E., & Bastos, A. (2013). Avaliação da competência comunicativa oral no ensino básico: Um estudo exploratório. *Revista Portuguesa de Educação*, 26(2), 111-138.
- National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Pires, M. V., Leite, C., & Costa, E. (2017). Comunicação escrita na aula de matemática: Práticas de alunos do ensino básico. In *Libro de actas do VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática – Comunicaciones 1101-1200* (pp. 323-332). Madrid, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. <http://hdl.handle.net/10198/16626>

MANUEL VARA PIRES

CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO BÁSICA (CIEB), INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA, PORTUGAL

ELISABETE COSTA

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA, PORTUGAL

CRISTIANA LEITE

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA, PORTUGAL

MATERIAIS PARA A AULA

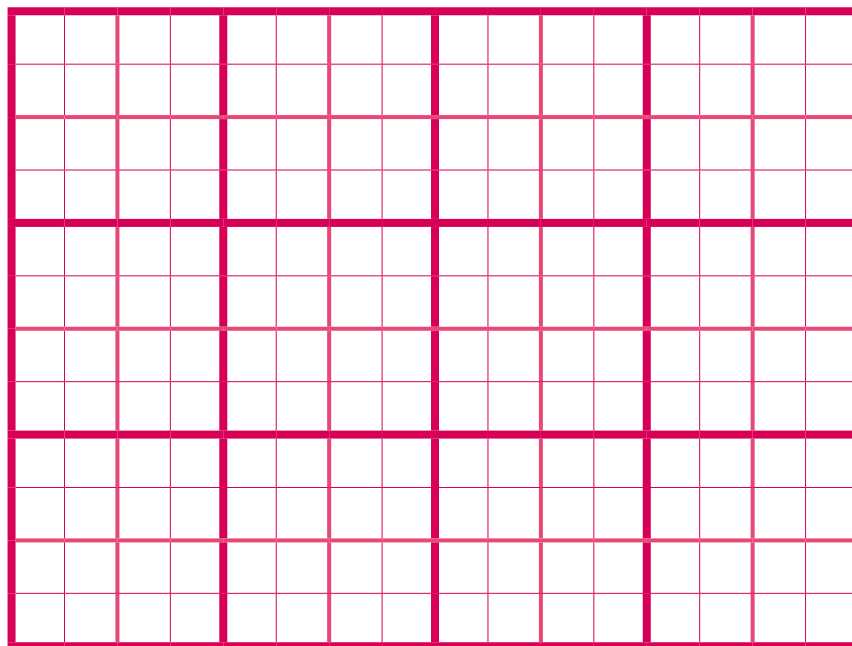
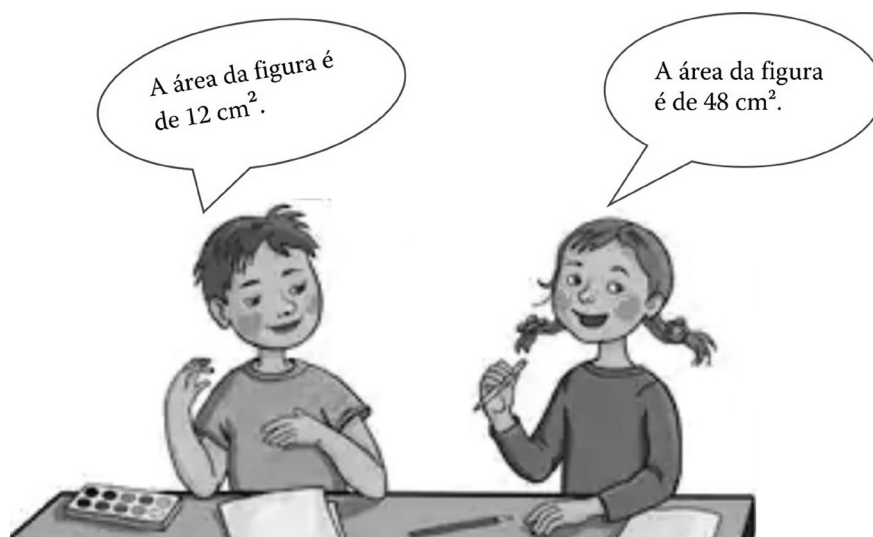
QUEM TEM RAZÃO?

Neste número temático sobre comunicação matemática, apresentamos nesta secção a primeira tarefa do artigo de Manuel Vara Pires, Elisabete Costa e Cristiana Leite. Trata-se de uma tarefa proposta para o 5.º ano, mas que se adequa também a ser realizada no fim do 1.º ciclo ou sempre que se considere vantajoso discutir ou rever o conceito de área e de unidade de medida de área. Naquele artigo, encontra exemplos de respostas de alunos daquele nível de escolaridade, que os autores analisam e comparam do ponto de vista da comunicação escrita. De facto, trata-se de uma proposta muito interessante para trabalhar esta capacidade, que valorizamos ainda pelas suas potencialidades no desenvolvimento da compreensão de conceitos que, frequentemente, os alunos confundem: o significado de área de uma figura, as possíveis formas de determinação da sua medida e a sua relação com as unidades de medida.

A REDAÇÃO DA EeM

Quem tem razão?

Considera os comentários da Ana e do Rui a propósito da figura:



Quem tem razão? O que pensas dos comentários da Ana e do Rui?

A escrita matemática e a intuição em Geometria

MARIA HELENA MARTINHO

HELENA ROCHA

Apesar da escrita ter, usualmente, uma forte expressão no ensino da Matemática, os alunos não estão habituados a explicitar raciocínios por escrito e a utilizar linguagem matemática apropriada. E apesar dos contextos de avaliação sumativa estarem muito dependentes da versão escrita, a competência de comunicação escrita poucas vezes é trabalhada de forma explícita. Contudo, a escrita matemática tem algumas particularidades importantes. Por exemplo, ajuda os alunos a dar sentido à Matemática e a melhorar o próprio discurso; além disso, as produções dos alunos disponibilizam informações ao professor, contribuindo para a planificação e concretização da sua prática profissional.

Este artigo apoia-se numa experiência realizada num contexto de resolução de problemas de Geometria, e no âmbito da formação de futuros educadores e professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, para caracterizar a escrita matemática dos alunos e identificar contributos desta para a compreensão, por parte do professor, dos seus conhecimentos. Em particular, foi possível identificar as intuições dos alunos em Geometria que suportam, ou por vezes deturpam a construção do conhecimento geométrico.

COMUNICAÇÃO ESCRITA

A produção de textos pelos alunos e a sua posterior discussão, constituem um meio importante no desenvolvimento da capacidade de comunicação (NCTM, 1994; Pimm, 1996). A escrita é um meio de comunicação, mas também de aprendizagem e descoberta (Sabrio, Sabrio, & Tintera, 1993). Ajuda a dar sentido à Matemática e a melhorar o próprio discurso. Enquanto escrevem os alunos estão ativos, a pensar e a aprender sobre matemática (Burns, 2008), desenvolvem o seu pensamento bem como o uso da linguagem matemática, como seja, o uso de termos, diagramas, gráficos, esquemas, analogias e símbolos (NCTM, 1994). Para construir um texto, os alunos precisam de examinar as suas ideias e refletir sobre o que já sabem, tomando consciência das suas dificuldades. Assim, os alunos escrevem para aprender e aprendem ao escrever matemática. Note-se, contudo, que a escrita matemática não

abrange apenas a ação de escrever uma resposta a uma tarefa, trata-se de explicitar os raciocínios que levaram à resposta.

O processo de escrita requer uma maior atenção e reflexão, quando comparado com a expressão oral. Contudo, esta prática reflexiva requer uma intervenção explícita do professor, incentivando também a reflexão sobre o que foi escrito e promovendo o desenvolvimento progressivo das próprias compreensões (Pugalee, 2004). O processo de explicar ideias aos outros, com o objetivo de ser entendido, promove a evolução das próprias compreensões. A comunicação ajuda assim a formalizar as ideias (Pimm, 1996). Em geral, o ato de escrita, forçando a explicitação de conjecturas e conclusões, constitui uma oportunidade para clarificar, organizar e consolidar o pensamento do aluno, e desenvolver o conhecimento matemático, a capacidade de resolver problemas, o poder de abstração bem como a capacidade de raciocínio e a confiança em si próprio, alcançando uma compreensão mais profunda de conceitos e princípios matemáticos (NCTM, 1994).

Ao longo da escolaridade, os alunos revelam, habitualmente, dificuldades na escrita matemática. Segundo Carvalho (2011), em muitos casos deteta-se resistência à escrita matemática e necessidade de ajuda dos professores. O insucesso na explicitação de raciocínios não resulta da falta de conhecimento matemático, mas sobretudo da incapacidade de o verbalizar: dificuldades na conversão do pensamento em palavras, em saber como escrever, e na forma de apresentar a frase e encadear as ideias.

A escrita matemática é diferente da escrita noutras áreas de conhecimento, exigindo capacidades distintas que podem ser desenvolvidas nas aulas de matemática (Adu-Gyamfi, Bossé, & Faulconer, 2010). As diferentes representações matemáticas (como a numérica, simbólica, gráfica e verbal), requerem uma utilização frequente para que os alunos as dominem. A linguagem matemática formal e rigorosa não precisa de ser imposta, pode surgir com naturalidade e tornar-se comum pela necessidade do seu uso. Os alunos que escrevem matemática com alguma frequência vão naturalmente progredindo na sua formalização, reconhecendo nela uma maior universalização e mesmo facilidade para comunicar (NCTM, 1994). Os alunos

podem começar por escrever recorrendo às suas próprias palavras, enquanto não se sentem familiarizados com os símbolos. Naturalmente, os símbolos vão deixando de constituir um obstáculo à compreensão do texto e começam a ser mais frequentes na própria escrita.

INTUIÇÃO EM GEOMETRIA

Alguns alunos tendem a tirar conclusões precipitadas com base na intuição, o que ocorre quando transportam para novas situações um contexto que, apesar de lhe ser alheio, lhes aparece como logicamente coerente. Em Geometria, as intuições têm um papel importante, contribuindo para o desenvolvimento do sentido espacial, contudo nem sempre conduzem a raciocínios corretos.

Stavy e Tirosh (2000) apresentam algumas classes de regras intuitivas, nomeadamente, “mais A – mais B” e “mesmo A – mesmo B”. Vejamos alguns exemplos. Consideremos um retângulo e um outro retângulo idêntico mas a que foi retirado um pequeno quadrado junto a um dos vértices. Alguns alunos consideram que sendo a área da primeira figura maior também o perímetro o será, estão a recorrer à regra “mais A – mais B”. Pensemos agora no comprimento de duas linhas diferentes que unem dois pontos à mesma distância, neste caso alguns alunos consideram que sendo a distância a mesma, o comprimento das linhas também o será, está a ser ativada a regra “mesmo A – mesmo B”. Imaginemos dois cilindros construídos com uma folha de papel A4 ora na horizontal ora na vertical. Neste caso alguns alunos tendem a considerar que, se a folha (área da superfície lateral) é a mesma, então o volume dos cilindros também o será (regra “mesmo A – mesmo B”).

UM PROBLEMA DE GEOMETRIA E ALGUMAS RESOLUÇÕES

O problema da figura 1 foi apresentado a alunos de uma turma da Licenciatura em Educação Básica.

Analisamos de seguida as resoluções de dois grupos de alunos à luz de quatro critérios desenvolvidos com base em Santos e Semana (2014):

1. Compreensão do problema:
 - explicitação do que se pretende
 - implícita e identificável através da resposta apresentada
2. Apresentação das diferentes abordagens ensaiadas
 - explicitação das etapas realizadas durante a resolução do problema
 - fundamentação das opções assumidas (de acordo com o ponto seguinte) que levaram a considerar e a abandonar essa etapa
3. Fundamentação da resposta apresentada
 - a. o nível de fundamentação apresentado
 - correção
 - clareza
 - completude da justificação
 - b. o tipo de fundamentação apresentada
 - justificação vaga ou pouco clara
 - apresentação exclusiva de uma regra, procedimento ou definição
 - descrição de carácter procedimental (explicação do que é feito sem justificação da razão porque tal é válido)
 - recurso a uma abordagem empírica ou experimental para tentar verificar a veracidade
 - justificação de carácter relacional (explicitação da razão porque aquilo que é feito é válido)
3. Representações utilizadas
 - linguagem verbal (linguagem natural podendo integrar terminologia matemática)
 - representações icónicas (um esquema ou desenho)
 - representações simbólicas (símbolos algébricos)

Um dilema por resolver...

O Sr. António tem dois terrenos ([ABCD] e [EFGH]) cujas formas estão representadas na figura.

Uma vez que a época de cultivo da batata está a chegar, o Sr. António foi confrontado com um problema: Em qual dos terrenos conseguirá plantar o maior número de batatas possível?

Ajuda o Sr. António a resolver esta situação sabendo que ambos têm a mesma largura. Imagina agora que o Sr. António quer vedar os terrenos com rede. Para qual deles precisa de mais rede?

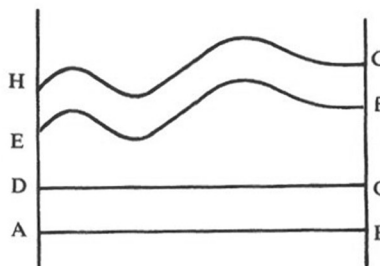


Figura 1. Enunciado do problema (adaptado de Fischbein, 1999)

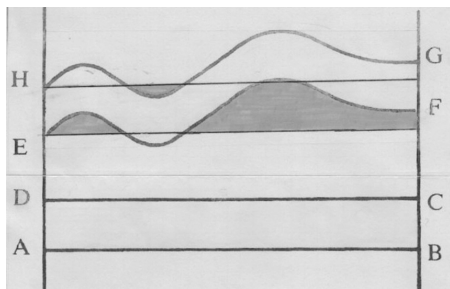


Figura 2. Representação icônica (grupo A)

Inicialmente, o mesmo raciocínio foi traçado duas paralelas nos extremidades do terreno [EFGH], no entanto não chegaram a nenhuma conclusão. Não obstante, surgiu - nos a ideia de traçar duas paralelas, mas em posições diferentes, uma com início em H e outra com início em E. Esta ideia surgiu pois ao observarmos o outro terreno [ABCD] percebemos que o terreno tinha início no ponto D e no ponto A que por sua vez era equivalente a H e E.

Depois de traçadas as paralelas, demonstramos que aquilo que faltava dentro dos paralelos que traçamos era o que estava em excesso fora deles. (Como mostramos acima no desenho.).

Figura 3. Representação verbal (grupo A)

Grupo A

Estes alunos não apresentam explicitamente na sua resposta algo que indique terem compreendido o que lhes é pedido. Começam por dar a resposta ao problema, apresentando depois alguns elementos relativamente a uma abordagem anterior que não foi bem sucedida. Não fundamentam por que pensaram em traçar retas paralelas sobre a figura, mas já explicitam o que os levou a pensar em traçar retas a passar por pontos específicos e não coincidentes com os limites do terreno. As razões que apontam sugerem pois que adotaram uma abordagem de carácter experimental e que é nela que se apoiam para fundamentar a sua resposta. Socorrendo-se das representações icônicas (figura 2) e verbais (figura 3), articulam-nas para explicitar o que pensaram e por que pensaram.

Relativamente à segunda questão referem que foi a professora que os levou a reavaliar a resposta. Corrigem então a resposta inicial, segundo a qual os dois terrenos têm o mesmo perímetro, mas não fundamentam em que se basearam para chegar a uma conclusão, nem inicialmente nem posteriormente (figura 4).

A análise desta resolução evidencia assim alguma preocupação

em explicitar raciocínios, procurando apresentar o percurso realizado e o que determinou as opções assumidas, e disponibilidade para refletir sobre o trabalho efetuado. É ainda interessante notar que a resposta errada surge precisamente na parte do problema em que não é explicitada justificação para as opções assumidas. Contudo, podemos estar perante o uso da regra intuitiva “mesmo A – mesmo B”. Os alunos concluem que a área é a mesma e deduzem que o perímetro também é o mesmo.

Grupo B

À semelhança do que sucedeu no grupo A, também este grupo não apresenta explicitamente algo que indique ter compreendido o que é pedido, mas a resposta dada sugere que assim sucedeu. Começam por referir duas opiniões contrárias entre os membros do grupo: áreas iguais e áreas diferentes. Na figura 5 é possível encontrar uma tentativa de explicitação dessas opiniões.

A primeira opinião apresentada revela que estão a associar intuitivamente os comprimentos. Sendo a linha curva HG maior do que o segmento DC, então as respetivas áreas são também diferentes. Ao imaginarem que podem “esticar” o terreno,

Após uma intervenção do docente, questionamos - nos à área do mesmo terreno com ênfase sobre o perímetro de ambos os terrenos [ABCD] e [EFGH]. De modo analisarmos que o terreno [EFGH] tem um maior número de lados, logo o perímetro é maior do que [ABCD], pois a sua forma é irregular / embaçada.

Figura 4. Correção à resposta inicial à pergunta 2 (grupo A)

Inicialmente o mesmo grupo dividiu-se segundo duas opiniões, sendo a primeira que o terreno [EFGH] teria maior área do que o terreno [ABCD], pois se imaginasse o terreno de uma forma esticado teria maior que o outro. Contrariamente, a segunda ideia baseava-se em que os dois terrenos teriam a mesma área, pois sobrepondo os dois terrenos teriam exatamente a mesma área.

Figura 5. Opiniões divergentes (grupo B)

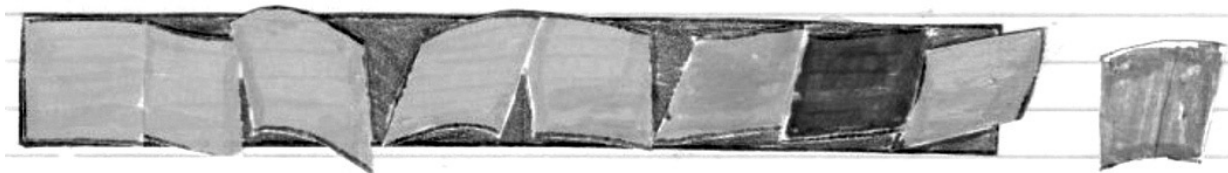


Figura 6. Representação icônica da primeira tentativa (grupo B)

estão a supor que ele tem apenas uma dimensão, aplicando a regra intuitiva “mais A – mais B” e assumindo que a um maior comprimento corresponde uma maior área.

Estes alunos, contrariamente aos do grupo A, procuram apresentar o processo de resolução, apresentando três tentativas diferentes de abordagem e descrevendo explicitamente a divisão existente no grupo quanto à resposta. Na primeira tentativa, optam por uma fundamentação de carácter experimental, recortando e sobrepondo o primeiro terreno sobre o terreno retangular, para comparar as áreas. Apesar da forma descuidada como ilustram esta tentativa (figura 6), os alunos concluem que, uma vez que sobra um pedaço, a área desse terreno será maior. Não justificam por que descartaram esta resposta e passam a apresentar uma nova tentativa. Neste caso recorrem a um elástico para medir o que designam por contorno dos terrenos, concluindo que o do terreno retangular é menor (figura 7). É a intervenção da professora que, segundo afirmam, os leva a abandonar esta tentativa e passar à terceira.

Por sugestão da professora traçam duas retas paralelas sobre a representação do primeiro terreno e concluem que as áreas são iguais. Fundamentam a sua conclusão dizendo que o terreno “ficou dividido em duas partes iguais”, uma afirmação vaga, que não é fácil de perceber e que deixa dúvidas quanto à compreensão dos alunos relativamente à resposta que apresentam (figura 8). Relativamente à questão 2 não dão nenhuma resposta explícita, parecendo que a referência ao perímetro na segunda tentativa é encarada pelos alunos como suficiente para responder. A análise da resposta dos alunos evidencia a intenção de dar a

conhecer todo o processo vivido pelo grupo, sendo marcantes as dificuldades sentidas e o impacto da intuição sobre uma das abordagens seguidas. Apesar dessa intenção, os alunos não apresentam efetivamente justificações para as decisões tomadas, nem para as respostas apresentadas. Toda a fundamentação apresentada é de carácter experimental, algo que é transversal a todas as abordagens que efetuam.

CONCLUSÃO

A análise da escrita matemática desenvolvida por estes alunos permite identificar algumas das suas características. Um dos aspetos, comum a todos os alunos (e não apenas aos grupos cujas resoluções aqui apresentamos), prende-se com a explicitação na sua escrita do objetivo da questão colocada, algo que não fazem; no entanto, nos diferentes casos, foi possível inferir através da resposta dada que compreenderam o problema.

Habitualmente, os alunos não apresentam o processo de resolução seguido: preocupam-se, essencialmente, em dar a resposta ao problema. Mesmo os alunos que apresentam algo relativamente ao percurso por que passaram, tendem a fazê-lo no final da sua resolução.

A qualidade da fundamentação das respostas é variável em termos de correção, clareza ou completude. A intuição assume um papel importante e parece impedir o desenvolvimento de respostas fundamentadas e, por vezes, leva mesmo a respostas incorretas. Tendencialmente, uma maior fundamentação da resposta corresponde a respostas corretas. Paralelamente, a fundamentação das respostas parece consistir num ponto de

2ª tentativa
Usamos um elástico e contornámos o terreno [ABCD] comparando de seguida os terrenos [EFGH].
Constatamos que o terreno (EFGH) necessitava de mais elásticos para ser contornado.
Todavia com a ajuda da docente, concluímos que este processo era viável para definir um perímetro.

3ª tentativa
Por fim, por sugestão da docente traçamos duas paralelas ao terreno [ABCD], e verificamos que o terreno [EFGH] ficou dividido em duas partes iguais, visto ser geometricamente iguais.

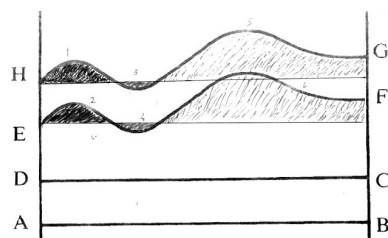


Figura 7. Segunda tentativa de resolução (grupo B)

Figura 8. Terceira tentativa de resolução (grupo B)

partida para a reflexão dos alunos. A fundamentação apresentada pode ser determinante para a compreensão pelo professor do conhecimento do aluno; no entanto, muitas vezes é vaga ou de carácter empírico ou experimental, fornecendo pouca informação ao professor.

O recurso à escrita matemática permitiu ao professor aceder à forma de pensar dos alunos tal como refere Pugalee (2004). Foi assim possível identificar alguns raciocínios intuitivos, nomeadamente o recurso à regra “maior A – maior B” (quando os alunos assumem que um maior comprimento se traduz numa maior área) e à regra “mesmo A – mesmo B” (quando concluem que a superfícies de igual área corresponde igual perímetro). Torna-se deste modo possível ao professor atuar de forma diferenciada e planificar a sua prática de forma mais adequada à realidade em que se encontra.

Dada a importância que a escrita matemática assume na construção do universo matemático dos alunos, revela-se fundamental cuidar do seu desenvolvimento, em qualquer nível de escolaridade, para que eles sejam capazes de aperfeiçoar o seu discurso oral e escrito, tornando-o progressivamente mais claro e completo.

Referências

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Faulconer, J. (2010). Assessing understanding through reading and writing in mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 11(5), 1-22.

Burns, M. (2008). *Writing in math class: A resource for grades 2-8*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Carvalho, J. A. B. (2011). Escrever para aprender: Contributo para a caracterização do contexto português. *Interacções*, 19, 219-237.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. In D. Tirosh (Ed.), *Forms of mathematical knowledge: Learning and teaching with understanding*, (pp. 11-50). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM-IIIE.

Pimm, D. (1996). Diverse communications. In P. Elliott & M. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics K-12 and beyond. Yearbook* (pp. 11-19). Reston, VA: NCTM.

Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written description of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 27-47.

Sabrio, D., Sabrio, S., & Tintera, G. (1993). Writing to learn and learning to write mathematics: An experiment. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 3(4), 419-429.

Santos, L., & Semana, S. (2014). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment practices. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 65-87.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics*. New York: Teachers College Press.

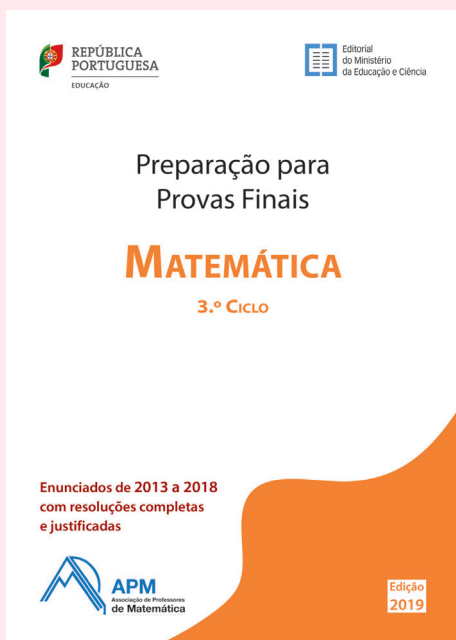
MARIA HELENA MARTINHO

CIED, CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DO MINHO

HELENA ROCHA

UIED, FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

PUBLICAÇÕES APM



Preparação para Provas Finais de Matemática 3.º Ciclo

Enunciados 2013-2018 com resoluções completas

Já está disponível a versão atualizada desta publicação, com resoluções completas e justificadas, elaborada por equipas da Associação de Professores de Matemática.

À venda também na Loja da APM.

Venda ao público: 13,90€;
preço de sócio: 12,00€

Comunicando aprendizagens em análise combinatória

BELMIRA MOTA

ROSA ANTÓNIA TOMÁS FERREIRA

Desde há várias décadas que diversos documentos orientadores dos currículos, a nível nacional e internacional, sublinham a importância do desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática na aprendizagem desta disciplina. Os alunos devem ser capazes de comunicar o seu pensamento matemático de modo claro e coerente; analisar e avaliar o pensamento e as estratégias de outras pessoas; e usar a linguagem matemática para expressarem as suas ideias de modo adequado (NCTM, 2000). Para isso, os professores devem criar-lhes “oportunidades frequentes para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de matemática (e fora delas) pois assim estarão a organizar, consolidar e ampliar o seu conhecimento matemático” (ME, 2001, p. 11).

Mais recentemente, o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (ME, 2017) alerta para o desenvolvimento da capacidade de comunicar ideias e raciocínios, na interpretação de informação e resolução de situações problemáticas, entre outras, e as *Aprendizagens Essenciais de Matemática A*, para o 12.º ano, sublinham também que “os estudantes devem ter oportunidade de descobrir, raciocinar, provar e comunicar matemática” (ME, 2018, p. 3). Neste sentido, estes dois documentos orientadores do currículo revitalizam a importância da comunicação matemática nas aprendizagens e percurso escolar dos alunos.

Neste texto, partilhamos alguns resultados de uma experiência de ensino realizada com alunos do 12.º ano de escolaridade, destacando como os alunos comunicaram as suas aprendizagens em Análise Combinatória, através da formulação de problemas e recorrendo às tecnologias digitais. Começamos por tecer algumas considerações sobre o ensino-aprendizagem da Análise Combinatória; de seguida, descrevemos, de forma breve, o ambiente exploratório de ensino-aprendizagem que foi desenvolvido com os alunos na unidade de Análise Combinatória e analisamos algumas das suas produções a um desafio que lhes foi colocado com o objetivo de, através de produções multimédia, comunicarem as suas aprendizagens neste tema algum tempo depois da sua leção.

A APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Vários autores defendem a necessidade de estudar os processos de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória (AC), dado ser um tema que a maioria dos alunos considera difícil de aprender e os professores de ensinar (e.g., Lockwood, 2013). Além disso, ao estar diretamente relacionada com vários ramos da Matemática e com outras disciplinas, a AC providencia ferramentas extremamente úteis para lidar com problemas do quotidiano e da vida profissional (Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

O estudo da AC, no contexto do programa de Matemática A do 12.º ano de escolaridade, surgia associado ao tema do cálculo de probabilidades do programa em vigor aquando da realização da experiência reportada neste artigo. Este programa sublinhava que “As técnicas de contagem (...) constituem uma aprendizagem significativa por si só” (ME, 2002, p. 1) e incentivava a sua utilização na construção de conexões com as outras ciências.

A aprendizagem da Análise Combinatória não exige um elevado número de pré-requisitos e, apesar das documentadas dificuldades existentes nesse processo, é comum surgirem alunos que, manifestando dificuldades em outras áreas da Matemática, aprendem este tema sem experienciarem como obstáculos a falta de conhecimentos anteriores. Por outro lado, existem alunos com um excelente aproveitamento na disciplina de Matemática que não se sentem tão à vontade no tema da AC, manifestando inseguranças que tipicamente não experienciam na aprendizagem de outros temas. É comum ouvir frases como: “E neste? São arranjos ou combinações?”; “Soma-se ou multiplica-se?”

O trabalho dos alunos em AC pode ter um papel fundamental no desenvolvimento das suas capacidades de ordem superior, tais como a resolução e formulação de problemas e a comunicação matemática. Em sala de aula, os alunos são tipicamente confrontados com situações novas e de carácter problemático, sendo obrigados a relacionar dados para encontrar as respostas aos desafios propostos e não se podendo limitar ao uso do

raciocínio por analogia ou à mecanização de procedimentos. Além disso, o trabalho dos alunos em AC potencia a partilha e o confronto de abordagens usadas para resolver as tarefas, estimulando assim a comunicação matemática entre os diferentes agentes no processo de ensino-aprendizagem. Em particular, o facto da AC estar associada a situações do quotidiano pode estar na origem da presença deste tema em conversas informais dos alunos, quer no seio familiar, quer junto dos amigos. Neste sentido, a aprendizagem da AC aproxima-os da Matemática e pode motivá-los para o seu estudo.

Assim, dado o aparente paradoxo que surge quando algo tão simples como contar (um processo em que os alunos se envolvem muito antes de iniciarem o seu percurso escolar) se pode tornar tão complexo à medida que os alunos progridem na sua escolaridade, é importante conhecer e entender as suas principais dificuldades na aprendizagem da AC, bem como as razões inerentes à sua existência. Neste sentido, conduzimos uma experiência de ensino, com uma turma de 31 alunos do 12.º ano de Matemática A, procurando ajudar os alunos a desenvolver uma aprendizagem com significado dos principais conceitos da AC e a dar sentido às operações combinatórias.

AS AULAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A experiência de ensino realizada decorreu ao longo de 12 aulas de 90 minutos cada. As duas primeiras aulas foram dedicadas ao princípio fundamental da contagem, enfatizando a importância de distinguir situações de natureza multiplicativa das de natureza aditiva. Relativamente às operações combinatórias (arranjos e combinações), as tarefas desenhadas pretenderam conduzir os alunos à dedução das respetivas fórmulas.

De facto, as tarefas propostas aos alunos constituem a base sobre a qual eles desenvolvem a sua atividade matemática e, portanto, são um fator determinante, embora não isolado, da qualidade das aprendizagens dos alunos (Ponte, 2005). Na experiência de ensino realizada, privilegiámos as tarefas contextualizadas, isto é, tarefas inseridas num contexto que seja concebível na mente do aluno (Shannon, 2007). Uma das potencialidades destas tarefas é, precisamente, devido à familiaridade dos contextos para os alunos a que se destinam, promoverem a comunicação matemática, estimulando-os a explicar as suas ideias e a argumentar as suas formas de pensar.

Os alunos trabalharam num ambiente de ensino-aprendizagem exploratório (Oliveira, Canavarro, & Menezes, 2013), caracterizado por quatro fases: 1) a *introdução* da tarefa pela professora; 2) a *realização* da tarefa pelos alunos, de forma autónoma e em pequenos grupos de três ou quatro elementos; 3) a *discussão coletiva* dos resultados obtidos, orquestrada pela professora e com a participação de grupos selecionados para o efeito,

refletindo o número de abordagens que emergiram durante o seu trabalho na tarefa; e 4) a *sistematização das aprendizagens* pela professora com a colaboração dos alunos.

Ao longo das aulas, os alunos foram incentivados a dialogar de forma construtiva (entre eles, no seio do seu grupo de trabalho e, posteriormente, com a turma), e a apresentar as suas dúvidas e expor os raciocínios usados na resolução das tarefas propostas, oralmente e por escrito. Foram, ainda, estimulados a partilhar todas as estratégias utilizadas: as que conduziram ao sucesso na resolução das tarefas, assim como as que se vieram a verificar incorretas.

DESAFIO: CRIAR SITUAÇÕES QUE ENVOLVAM A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Com o rápido desenvolvimento tecnológico, novas formas de comunicar matemática, e de promover essa comunicação, podem ser equacionadas. Os conceitos matemáticos podem expressar-se através da dramatização de situações ou do recurso a ferramentas digitais, por exemplo. Ao processo de comunicar matemática através da simbiose entre a arte e as tecnologias digitais dá-se o nome de Desempenho Matemático Digital (Silva, 2015), que pode, assim, ser concretizado através de vídeos, teatros, atuações musicais, etc. Foi precisamente isto que foi proposto aos alunos, aliado à atividade de formulação de problemas.

A par da resolução de problemas, a formulação de problemas é uma atividade de importância inquestionável, pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução. (Boavida et al., 2008, p. 27)

Entre outros aspetos, a formulação de problemas exige clareza e precisão na expressão de ideias, ajudando, assim, a desenvolver a comunicação matemática também. Existem várias estratégias de formulação de problemas. A estratégia “E se em vez de?” relaciona-se com a modificação de um ou mais aspetos de problemas existentes; a estratégia “Aceitando os dados” prende-se com a criação de problemas a partir de uma situação escolhida ou igualmente criada. Um aspeto importante a ter na atividade de formulação de problemas é que os alunos devem ser capazes de resolver os problemas que criam, usando uma ou outra estratégia de formulação.

Ao longo do segundo período, os sete grupos de alunos foram desafiados a realizar uma produção multimédia, apresentando situações distintas onde fosse aplicada a AC. O objetivo deste desafio era percebermos que aprendizagens tinham realizado e como as conseguiam comunicar. A adesão a este desafio era facultativa e os alunos não seriam penalizados se optassem por não o realizar.

No entanto, apesar destes alunos frequentarem um ano que requer um esforço suplementar, dado serem submetidos a exames nacionais e já estarem preocupados com o acesso ao ensino superior, todos os grupos (que denominamos por A, B, C, D, E, F, G) aderiram ao desafio. Na verdade, embora não lhes tivesse sido pedido para formular problemas de AC, os alunos apresentaram situações distintas, todas elas inseridas em contextos que lhes eram familiares, tal como descrito no quadro da figura 1, e formularam problemas, com base nessas situações, recorrendo à estratégia “Aceitando os dados” de modo intuitivo.

Grupo	Situações
A	O grupo centrou a sua história em quatro amigos estão em casa e decidem ver um filme. Vão surgindo situações em que é necessário aplicar operações combinatórias, começando pelo número de maneiras diferentes com que se podem sentar no sofá.
B	O grupo encontra-se na escola e vai-se deparando com situações em que é necessário contabilizar todas as hipóteses possíveis, como por exemplo, comprar uma caneta, uma borracha e um lápis.
C	O grupo centrou a sua história numa personagem fictícia, o Gonçalo e nas suas aventuras, agora que é um caloiro da faculdade.
D	O grupo encontra-se na escola e vai-se deparando com situações em que é necessário contabilizar todas as hipóteses possíveis, como por exemplo, ordenar os três primeiros classificados do campeonato de futebol organizado na escola.
E	O grupo descreveu uma ida ao <i>shopping</i> de quatro amigas criando diversas situações onde aplicam as diferentes operações combinatórias.
F	O grupo recorre a exemplos distintos, tais como as eleições presidenciais ou a pirâmide dos alimentos.
G	O grupo descreveu um dia na escola e, a partir daí, criou várias questões cuja resolução envolve a aplicação das operações combinatórias.

Figura 1. Situações das produções multimédia realizadas pelos diferentes grupos

Os quatro primeiros grupos gravaram situações em que os próprios alunos interagiam entre si na ilustração das situações combinatórias, dramatizando-as. Os três últimos grupos elaboraram uma produção multimédia com sucessivas imagens onde apresentaram vários problemas combinatórios e respetivas resoluções.

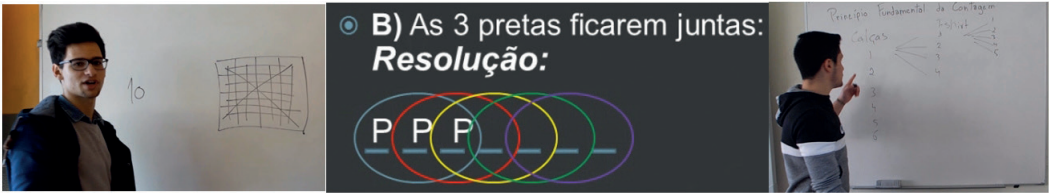


Figura 2. Exemplos de diagramas e esquemas elaborados pelos alunos e incluídos nas suas produções multimédia

Ao longo da experiência de ensino realizada, os esquemas e diagramas revelaram-se fundamentais, tanto para a compreensão das situações problemáticas apresentadas aos alunos, como para a resolução dessas situações, como ainda para a comunicação das estratégias desenvolvidas a terceiros. Estes aspetos refletiram-se nas produções multimédia dos alunos, como ilustrado na figura 2.

Baseados nas situações escolhidas, todos os grupos criaram problemas combinatórios, mais ou menos complexos, mas todos contextualizados (no sentido anteriormente exposto). A figura 3 apresenta as operações combinatórias a que os alunos recorreram para resolver os problemas por eles criados. As permutações foram utilizadas por todos os grupos, ao que se seguiram os arranjos sem repetição e as combinações e, por último, os arranjos com repetição.

Permutações	Arranjos sem repetição	Arranjos com repetição	Combinações
A, B, C, D, E, F, G	A, B, C, D, F	B, C, D, E	A, B, C, D, E, G

Figura 3. Operações combinatórias usadas pelos sete grupos de alunos

No caso das permutações, alguns grupos criaram problemas muito simples, cuja resposta era $n!$ (sendo n um número natural). Outros grupos apresentaram situações mais complexas de permutações. A figura 4 contém dois exemplos ilustrativos.

Todos os grupos que apresentaram situações envolvendo combinações sentiram a necessidade de explicar a razão de recorrer a esta operação combinatória e não a arranjos sem repetição. A isto não é certamente alheia a ênfase que foi dada nas aulas à distinção entre estas duas operações combinatórias durante o primeiro período, altura em que o tema da AC foi trabalhado com os alunos. Na figura 5, essa necessidade está explícita nas dramatizações feitas pelos alunos de dois grupos que aqui servem de exemplo.

As situações que implicavam a utilização de arranjos sem repetição foram diversas. Porém, todos os grupos explicaram o facto de, nessas situações em concreto, estarem perante uma sequência e, portanto, o mesmo conjunto ser contabilizado tantas vezes quantas o número de sequências que é possível constituir com os elementos que lhe pertencem. Na figura 6, apresentamos

A Marta decidiu ir a um rodízio de Pizzas.
Tinha 15 pizzas à disposição. As pizzas vão chegando, uma de cada vez, numa ordem aleatória. De quantas ordens diferentes podem as pizzas chegar à mesa?

1ª vez - 15 hipóteses
2ª vez - 14 hipóteses (já comeu uma das variedades de pizza)
3ª vez - 13 hipóteses
(...)
14ª vez - 2 hipóteses (já comeu 13 pizzas)
15ª vez - 1 hipótese (já comeu todas as restantes)
 $15 \times 14 \times 13 (\dots) \times 2 \times 1 = 15!$

Ao chegarem à escola os quatro amigos constatarem que de facto hoje era um dia em que estavam especialmente bonitos e bem parecidos e bora lá, tirar uma foto!!!

Contudo, quando se trata de tirar fotos... Todo o mundo aparece!!!

Assim, ficamos 7: Três raparigas e quatro rapazes. Mas é certo e sabido que a Taninha e o Miguel têm de ficar juntos. Posto isto, qual é o número de fotografias possíveis para que o casal fique junto e, cada uma das extremidades fique ocupada por uma rapariga?

-Tendo o casal de ficar junto, eles vão funcionar como um, podendo apenas permutar entre eles.

-A primeira extremidade tem duas hipóteses de meninas, o que implica que a última extremidade só tenha uma. Assim, existem 2! maneiras de as duas meninas se colocarem para a foto.

-Os 3 meninos e o casal (que funciona como um), vão ter 4! formas diferentes de se posicionarem.

-Ora, assim, por cada 2! fatorial maneiras das meninas se colocarem, há 4! maneiras diferentes dos meninos e o casal se posicionar sendo que há ainda, por cada uma destas, 2! maneiras que corresponde à permuta dentro do casal, ou seja, há:

$2! \times 4! \times 2! = 96$ fotografias diferentes.

Figura 4. Exemplos ilustrativos da utilização das permutações

Quatro amigos sentados no sofá.

Vieira: Alguém tem fome ou sou só eu?

Adão: Querer comer alguma coisa?

Zé: Não me importava... Se pudesses trazer...

Adão: Não. Alguém tem de vir comigo buscar.

Restantes: Ei!!! Não me apetecia nada.

João: Bem. Há 6 hipóteses possíveis.

Vieira: Porquê 6?

João: 4C_2

Restantes: ?

João: Sim. 4C_2 .

Adão: E porque é que não é arranjos?

João: A diferença das combinações com os arranjos é que: eu e tu e tu e eu é a mesma coisa.

Adão: Zé, então vens tu comigo.

Zé: E porque é que tenho de ser eu? Ele é que entende de matemática!!!

Foi sorteada uma viagem a três alunos da turma do Gonçalo. Eles queriam saber de quantas maneiras diferentes poderiam fazer para levarem os alunos à viagem. Sabendo que a turma do Gonçalo tem 36 alunos podiam utilizar os arranjos para chegar ao número pretendido: ${}^{36}A_3$. Mas aqui a ordem importa. Portanto, não podíamos fazer isto.

Figura 5. Exemplos ilustrativos da utilização das combinações

Quatro amigos sentados no sofá.

Zé: E se por acaso dois de nós fossem buscar um pacote de batatas fritas e coca-cola?

João: Ai já era diferente. Porque, por exemplo, eu e tu, se fosse eu buscar a coca-cola e tu as batatas fritas, era diferente de eu ir buscar as batatas fritas e tu a coca-cola. Nesse caso, daria 4A_2 que é 12.

Temos aqui cinco cadeiras

Se estes três amigos trocarem de cadeiras

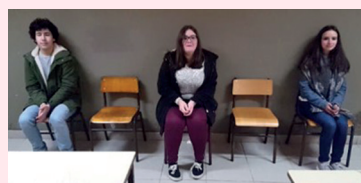
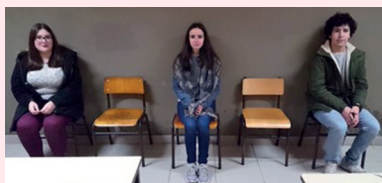


arranjos sem repetição

formam uma sequência diferente



e se trocarem entre si, também formam uma sequência diferente.



Assim é possível formar 5A_3 sequências diferentes, ou seja, 60 sequências diferentes.

Figura 6. Exemplos ilustrativos da utilização dos arranjos sem repetição

Quando chegou do passeio, o Gonçalo tinha algumas recordações para arrumar. Entre elas tinha alguns bonecos, umas medalhas e alguns troféus. A sua mãe, como já sabia que ele era muito desorganizado nas arrumações, deu-lhe quatro caixas para arrumar tudo.

Sabendo que tinha oito bonecos todos diferentes, quatro medalhas e dois troféus, de quantas maneiras diferentes é que o Gonçalo pode arrumar tudo nas quatro caixas, sabendo que algumas podem ficar vazias?

Ao todo, ele tem 14 recordações e tem quatro caixas para meter cada uma delas. A primeira recordação tem 4 hipóteses, a segunda recordação tem mais 4 hipóteses, assim sucessivamente até à décima quarta recordação, ou seja, o Gonçalo, para arrumar todas as suas recordações tem 4^{14} maneiras diferentes.

Era uma vez, quatro amigas, a Paula, a Maria, a Marisa e a Jéssica. Certo dia, resolveram ir ao shopping. Sabendo que estas pretendem comprar roupa e que as suas lojas de eleição são: Bershka, Stradivarius, Zara, Pull&Bear, Tiffosi, Mango e New Yorker, de quantas maneiras as amigas se pode distribuir pelas lojas?

Resolução:

Existem 7 lojas distintas sob as quais as 4 amigas se podem distribuir. Cada uma das amigas tem 7 hipóteses para a primeira loja e assim sucessivamente. Assim, existem $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$ maneiras de elas se distribuírem pelas lojas.

● R: $7^4 = 2401$ maneiras.

Figura 7. Exemplos ilustrativos da utilização dos arranjos com repetição

dois exemplos em que os alunos explicitam a diferença entre combinações e arranjos sem repetição.

Os arranjos com repetição foram a operação combinatória menos utilizada. Este facto não nos surpreendeu pois foi também esta a operação combinatória que mais dificuldades colocou aos alunos durante as aulas de AC. Era-lhes particularmente difícil identificar situações de arranjos com repetição e, mesmo quando as identificavam corretamente, cometiam, com frequência, erros na aplicação da respetiva fórmula. Porém, surgiram problemas interessantes e em contextos distintos, como ilustrado na figura 7.

- 4) A Maria esqueceu-se do número de telemóvel da mãe. Sabendo que o número começa por 91, e acaba em 23 e tem exatamente dois 5, um 0, um 8 e um 6, qual é a probabilidade de ela acertar no número?



Resolução:

Sabendo que o número da mãe da Maria começa por 91 e termina em 23, restam apenas 5 dígitos do número para completar com os restantes algarismos. Como o número de telemóvel possuía exatamente dois 5, dos cinco dígitos ainda disponíveis existem $5C2$ maneiras diferentes de colocar os 5 no número de telemóvel. Os restantes 3 algarismos (8, 6 e 0), têm 3 lugares disponíveis no número e cada um deles pode permutar entre si, ou seja, $3!$. Portanto, o número de casos possíveis é $5C2 \times 3! = 60$. Visto que a Maria quer acertar à primeira, o número de casos favoráveis é 1.

Figura 8. Exemplo do cálculo da probabilidade de um acontecimento recorrendo à AC

O grau de complexidade dos problemas apresentados nas produções multimédia dos alunos variou entre uma aplicação direta das operações combinatórias (todos os grupos), o cálculo de probabilidades (grupos E e F) e a aplicação de múltiplas operações combinatórias (grupos C e F). Todos os problemas apresentados até agora ilustram situações cuja resolução consiste na aplicação direta duma operação combinatória. No problema apresentado na figura 8, os alunos determinaram a probabilidade de um acontecimento recorrendo à AC no cálculo do número de casos possíveis. A resolução do problema apresentado na figura 9 envolveu a aplicação de mais do que uma operação combinatória.

Era um dia como outro qualquer. Mas, o impensável aconteceu. A professora teve que levar o carro ao mecânico e faltou à aula. Os alunos, para festejar, decidiram ir para o BC.

30 alunos chegaram ao BC, que tem 5 mesas, 20 cadeiras e um bilhar. 20 alunos vão-se sentar nas cadeiras e dos restantes, 2 ficarão a jogar a bilhar e os outros 8 ficarão em pé. De quantas maneiras diferentes pode ficar composto o BC?



Inicialmente, há 30 pessoas para colocar em 20 cadeiras (interessa a ordem pela qual as colocamos)

Depois de colocar as 20 pessoas, ficam 10 pessoas, das quais temos que escolher 2 para jogar bilhar

$$30_{A20} \times 10_{C2} \times 1$$

Pelo princípio fundamental da contagem, multiplica-se

Ficam 8 pessoas para colocar em pé, ou seja, apenas 1 hipótese

Figura 9. Exemplo de um problema combinatório onde são utilizadas duas operações combinatórias

EM JEITO DE REMATE...

O desafio que foi colocado aos alunos deu-lhes uma oportunidade para revisar e aprofundar conceitos anteriormente aprendidos, comunicando de modo espontâneo, mas também divertido, a forma como percebem a AC nas suas vidas. De facto, as produções multimédia demonstram uma abordagem divertida e criativa à Matemática, em geral, e à AC, em particular. Os alunos foram capazes de formular problemas diversificados (mais ou menos complexos) e em contextos diversos, mas que lhes eram familiares. Conseguiram associar corretamente as várias operações combinatórias às situações criadas, demonstrando que são capazes de as distinguir. Mostraram também reconhecer

essas situações como presentes no seu dia a dia, percebendo as operações combinatórias como úteis para resolver problemas do quotidiano.

Ficou evidente nas produções dos alunos a sua intenção em comunicar de modo claro as resoluções dos problemas criados aos eventuais espectadores das produções multimédia elaboradas. De facto, os alunos preocuparam-se em explicar a utilização de cada operação combinatória em cada situação apresentada, dando-lhe significado no contexto escolhido, e até mesmo em explicar algumas operações aritméticas envolvidas, na procura de um sentido para o que estavam a comunicar.

É recompensador constatar que, apesar de terem passado alguns meses após a leção do tema da AC, os alunos mostraram valorizar a explicação das abordagens utilizadas na resolução dos diferentes problemas, através da utilização de esquemas e diagramas, tal como foram incentivados a fazer ao longo das aulas. Além disso, clarificaram sempre o porquê da utilização de um arranjo sem repetição ou de uma combinação, evidenciando que reconhecem a diferença entre as duas operações, assim como as situações associadas a cada uma delas.

Quando este desafio foi colocado aos alunos, não lhes foram impostas quaisquer regras, exceto que as suas produções deveriam conter situações onde seriam aplicadas as operações combinatórias e o princípio fundamental da contagem. A experiência foi positiva; porém, numa próxima oportunidade para repetir este desafio, pensamos ser importante definir um intervalo de tempo para a duração das produções dos alunos, pois houve bastante disparidade neste aspeto (as produções variaram entre os 2:37 e os 18:51 minutos). Quantidade não é qualidade, mas seria importante haver um pouco mais de uniformidade. Seria, talvez, uma mais valia sugerir a introdução de situações em que participassem não só os alunos, mas também familiares ou amigos, dado que este tipo de desafios se proporciona para divulgar, junto da comunidade escolar, aquilo que os alunos aprenderam nas aulas de Matemática, bem como para mostrar, a essa mesma comunidade, o papel e valor da Matemática na vida de todos os dias. Mais regras ou restrições poderiam, na nossa opinião, limitar a criatividade e diversidade dos trabalhos dos alunos.

Consideramos que esta experiência foi bastante enriquecedora, tanto para os alunos como para a professora. Aos alunos deu a oportunidade de comunicar o que tinham aprendido sobre um tema que tinham trabalhado nas aulas há algum tempo; à professora possibilitou-lhe conhecer melhor o modo como os alunos entendem e conceptualizam a AC. Além disso, foi interessante verificar que os alunos adquiriram não só a competência de resolver problemas de AC, mas também a de os construir de modo contextualizado e, muitas vezes, com um

bom nível de complexidade, transferindo para a atividade de formulação de problemas as habilidades adquiridas na atividade de resolução de problemas, à qual se deu particular atenção durante as aulas de AC. Em suma, esta experiência com alunos do 12.º ano desafiou-os a comunicar ideias e aprendizagens, mas também os levou a alargar essas aprendizagens, pelo que, na nossa opinião, dá azo a que oportunidades de aprendizagem semelhantes devam ser proporcionadas, sem o (compreensível) receio de fazer *coisas diferentes*, de desafiar as capacidades dos alunos num ano de pressões externas e de muitas decisões.

Referências

- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.
- Eizenberg, M. M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 6(1), 15-36.
- Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 251-265.
- Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A – 10.º ano*. Lisboa: ME-DES.
- Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A – 12.º ano*. Lisboa: ME-DES.
- Ministério da Educação (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: ME-DES.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática A*. Lisboa: ME-DES.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 12(2), 29-53.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Shannon, A. (2007). Task context and assessment. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing Mathematical Proficiency* (pp. 177-192). New York, NY: Cambridge University Press.
- Silva, R. S. R. (2015). The Pedagogic role of the arts and digital media in the practice of the Ontario Mathematics Curriculum. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(53), 1043-1065.

BELMIRA MOTA

COLÉGIO EFANOR – MATOSINHOS, FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO

ROSA ANTÓNIA TOMÁS FERREIRA¹

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO – CMUP

¹ Este trabalho teve o apoio parcial do CMUP, através do projeto UID/MAT/00144/2013, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal), com fundos nacionais (MEC) e estruturais europeus (FEDER), ao abrigo do acordo de cooperação PT2020.

Comunicação matemática, uma das 7 competências matemáticas fundamentais no PISA

JAIME CARVALHO E SILVA

Em que medida os jovens adultos estão preparados para encarar os desafios do futuro? Serão eles capazes de analisar, raciocinar e *comunicar* as suas ideias de forma eficaz? Será que têm a capacidade de continuar a aprender ao longo da sua vida?

É com estas frases que se inicia o documento de apresentação do estudo internacional PISA da OCDE no longínquo ano de 2000 (OECD, 2000). Nessa altura o estudo PISA estava a começar a ser implementado e poucos lhe prestavam atenção. Mas hoje a orientação do estudo mantém-se praticamente a mesma, a de tentar entender se os sistemas educativos são realmente eficazes usando análises comparativas internacionais para aprofundar a nossa capacidade de intervenção no sistema educativo. O estudo é hoje muito discutido nacional e internacionalmente, mas não é claro qual o impacto que tem em cada um dos países envolvidos.

A literacia matemática do estudo PISA foi definida como sendo a capacidade de identificar, de compreender e se envolver em matemática e de realizar julgamentos bem fundamentados acerca do papel que a matemática desempenha na vida privada de cada indivíduo, na sua vida ocupacional e social, com colegas e familiares e na sua vida como cidadão construtivo, preocupado e reflexivo (OECD, 2002; Ramalho, 2002). Nesta definição, o termo “envolver em matemática” inclui a *comunicação*, a tomada de posição em direção a, em relação a, a avaliação, e mesmo a expressão de opiniões sobre a matemática (OECD, 2002).

A operacionalização desta definição em termos do questionário que é aplicado em cada vez mais países, passou pela identificação de três dimensões da literacia matemática: processos (competências), conteúdos e contextos. Assim, as tarefas do PISA foram desenhadas para incluir um conjunto de processos matemáticos pertinentes para todos os níveis educacionais. Um dos 8 processos (competências) aí identificados e que nos interessa agora discutir é o da *Comunicação matemática*, que inclui:

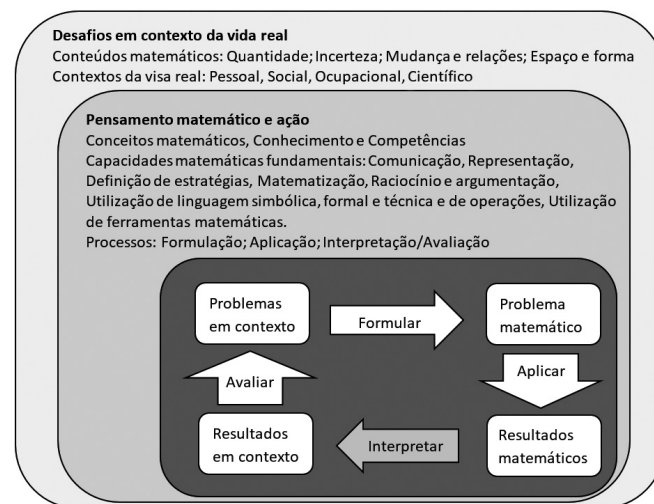
– a expressão de um indivíduo numa variedade de modos, em assuntos com conteúdo matemático, sob forma oral e escrita; e

– a compreensão de afirmações escritas ou orais de outros indivíduos acerca desses assuntos.

Além disso, a *comunicação matemática* aparece explicitamente mencionada noutro dos processos, a *Modelação*, pois esta inclui a comunicação acerca do modelo e dos seus resultados (incluindo as limitações destes resultados).

Mais tarde os 8 processos foram reduzidos a apenas 7 pois o último, *Uso de auxiliares e de instrumentos*, acabou por ficar prejudicado pela dificuldade em o implementar de forma comparável em todos os países participantes, sendo, pois, uma das limitações óbvias do estudo PISA.

No diagrama da figura 1 (PROJAVI, 2013) podemos observar o lugar central atribuído à competência de comunicação (matemática):



Fonte: OCDE, 2012

Figura 1. Quadro conceitual para avaliação da Literacia Matemática

As tarefas do PISA não avaliam estas competências de uma forma individual, antes põem em prática simultaneamente muitas dessas capacidades (OECD, 2002). Por isso, para a descrição de níveis de competência matemática, o PISA organizou os processos em três classes, de acordo com o tipo de capacidade de pensamento; a partir de 2003 passou a usar seis níveis de

proficiência (Ramalho, 2004). As pontuações nas escalas de literacia matemática foram então agrupadas em seis níveis de proficiência que representam conjuntos de tarefas de dificuldade crescente, em que o nível 1 é o mais baixo, e o nível 6 o mais elevado. No nível mais elevado espera-se que os alunos sejam capazes de “formular e *comunicar* com exatidão as suas ações e reflexões no que respeita às suas descobertas, interpretações, argumentos, bem como a adequação dos mesmos às situações originais”. No nível 5 espera-se que os alunos consigam “refletir sobre as suas ações e formular e *comunicar* as suas interpretações e raciocínios”. No nível 4 espera-se que os alunos sejam “capazes de construir e de *comunicar* explicações e argumentos, com base nos seus argumentos, interpretações e ações”. No nível 3 espera-se que os alunos consigam “desenvolver *comunicações* curtas, que relatem os seus resultados, interpretações e raciocínios”. Nos níveis mais baixos, 1 e 2, não se espera que os alunos manifestem competências identificáveis de comunicação.

Deve notar-se que esta competência também aparece na literacia de Leitura e na literacia em Ciências, mas aqui não desenvolveremos tal aspeto.

ALGUNS EXEMPLOS DO PISA

É interessante observar como a competência de comunicação se reflete nos itens que são conhecidos no estudo PISA (muitos dos itens não são divulgados publicamente para facilitar a comparação entre diferentes anos).

O item apresentado na figura 2 evidencia competências de comunicação (OECD, 2004; Ramalho, 2004):

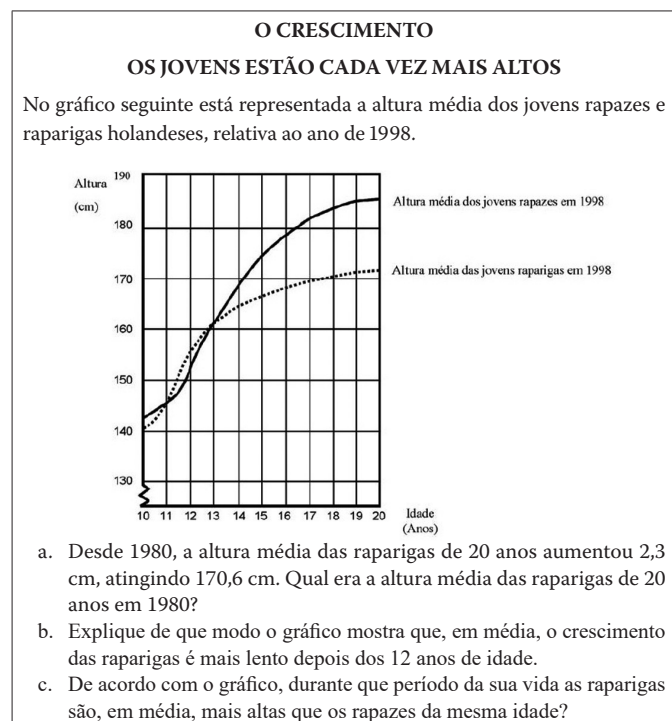


Figura 2

A alínea a) é bastante simples, mas o aluno pode ficar confundido com o facto de o gráfico não ser necessário para obter uma resposta a esta alínea. O objetivo de tal aspeto é claro: o aluno tem de saber extrair a informação relevante de todos os dados que lhe são fornecidos, ignorando a informação não relevante para a resposta. A alínea b) já é consideravelmente mais complexa. Os estudantes, para obter a cotação total, precisam não só de mostrar o seu raciocínio de forma convincente, mas também de mostrar à vontade com representações gráficas, obtendo conclusões e *comunicando* as suas descobertas.

Um outro item usado no PISA 2003 (figura 3) apela também à capacidade de comunicação.

TAXA DE CÂMBIO

Mei-Ling, de Singapura, está a preparar uma estadia de 3 meses na África do Sul, integrada num programa de intercâmbio de estudantes. Ela precisa de trocar dólares de Singapura (SGD) por rands sul-africanos (ZAR).

- Mei-Ling soube que a taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o rand sul-africano era de:

$$\text{SGD} = 4,2 \text{ ZAR}.$$
Mei-Ling trocou 3000 dólares de Singapura por rands sul-africanos a esta taxa de câmbio. Que quantia recebeu Mei-Ling em rands sul-africanos?
- Quando Mei-Ling regressou a Singapura, três meses depois, tinha ainda 3900 ZAR. Ela trocou-os por dólares de Singapura, reparando que a taxa de câmbio tinha mudado para:

$$1 \text{ SGD} = 4,0 \text{ ZAR}.$$
Quantos dólares de Singapura recebeu Mei-Ling?
- Durante esses três meses, a taxa de câmbio mudou e passou de 4,2 para 4,0 ZAR por um SGD.
Para Mei-Ling foi vantajoso reconverter os seus rands sul-africanos em dólares de Singapura, quando a taxa de câmbio era de 4,0 ZAR, em vez de 4,2 ZAR? Dê uma explicação que justifique a sua resposta.

Figura 3

As duas primeiras questões implicam a interpretação de um contexto simples, embora implique alguma matematização de um contexto da “vida real”. A terceira questão é mais complexa e além de um raciocínio não imediato exige ainda competências de comunicação de modo a que o raciocínio efetuado seja explicado de forma convincente.

Um exemplo bastante difícil, mas muito interessante e claramente relacionado com as competências necessárias a um cidadão do mundo de hoje, envolve o uso de gráficos (figura 4).

Este é um problema de grau máximo de dificuldade no estudo PISA e é baseado num gráfico verídico usado num contexto semelhante ao do problema apresentado. Para resolver satisfatoriamente este problema é necessário que o estudante use e comunique devidamente a sua argumentação que se baseia na interpretação crítica de dados, estabelecendo comparações com valores que precisam de ser devidamente extraídos do

gráfico, fazendo uma comparação numérica tanto em termos absolutos como em termos relativos.

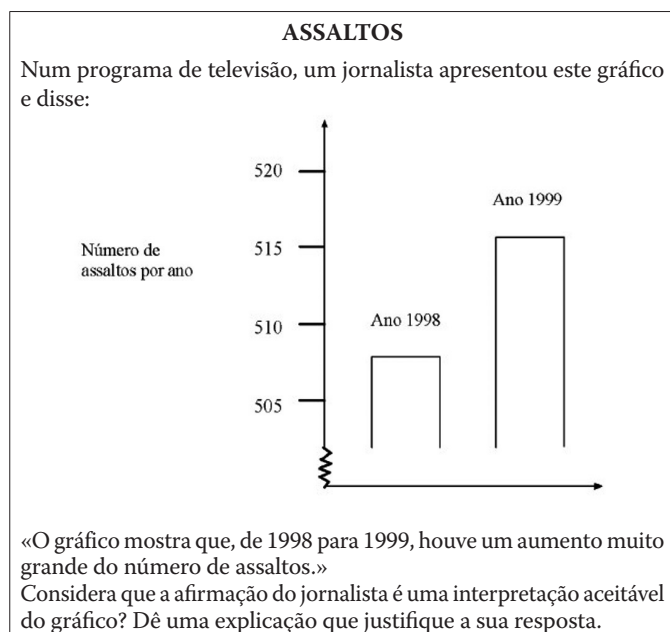


Figura 4

Um dos itens de literacia matemática onde é mais evidente a necessidade da competência de *comunicação* é apresentado na figura 5.

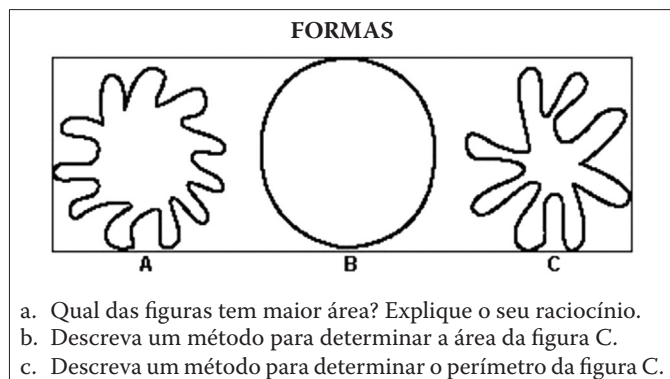


Figura 5

Em todas as questões a competência de comunicação é claramente indispensável. Na questão a), uma resposta admissível envolve afirmar que “a figura B tem a maior área pois as outras cabem dentro dela”. Isto exige raciocínio geométrico não imediato nem rotineiro e a sua comunicação explícita e clara. A segunda envolve encontrar um método aceitável (por exemplo sobrepondo uma quadrícula ou inscrevendo triângulos ou enchendo com água uma versão tridimensional) e depois explicá-lo com um mínimo de clareza. A questão c) é ainda mais difícil, mas admite métodos engenhosos mais simples como usar um fio colocado por cima do desenho.

Qualquer das questões enunciadas parece ser bastante rica e claramente admite outras variantes e generalizações.

COMUNICAÇÃO E MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Já antes referimos sobre a relação forte que existe entre as competências de comunicação e de modelação. Esse mesmo aspeto é realçado no relatório conjunto da SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) e do COMAP (Consortium for Mathematics and Its Applications) onde se salienta que não só os estudantes encontram na modelação um espaço privilegiado para exercitar as suas competências de comunicação, como a própria modelação não pode dispensar a comunicação, pois dentro das próprias equipas que trabalham a modelação matemática os seus elementos devem saber comunicar bem para poder ter sucesso (Garfunkel & Montgomery, 2016). As tarefas de modelação matemática, usando dados concretos, recorrem frequentemente a diagramas, tabelas de dados e relatórios escritos, por vezes em linguagem bastante técnica, e isto obriga os estudantes a combinar estas diferentes representações nos seus raciocínios e a exprimir-se usando diferentes tipos de visualizações, modelos matemáticos de índole mais abstrata e textos mais ou menos longos, também com alguma linguagem mais técnica:

Os problemas de Modelação colocam uma prioridade alta na comunicação dentro das equipas assim como das equipas com os que estão fora do grupo. (Garfunkel & Montgomery, 2016)

Para evidenciar esta relação forte vamos citar um exemplo (figura 6) que foi usado na competição internacional de Modelação Matemática IM2C (*International Mathematical Modeling Challenge*) em 2018. Esta é uma versão reduzida do problema (IM2C, 2018) pois o enunciado é mais longo ao levantar algumas hipóteses de abordagem, discutir algumas dificuldades e requerer uma apresentação dos resultados bastante específica.

O MELHOR HOSPITAL

Suponha que há 4 ou 5 hospitais razoavelmente acessíveis a partir da sua residência. Quer escolher o “melhor” hospital para os seus tratamentos de rotina ou não urgentes. Como é que poderia medir e escolher o “melhor” destes hospitais locais? E se a sua situação for tal que estaria disposto a viajar muitos quilómetros e admitira escolher entre 50 hospitais? Que variáveis usaria e como poderia medir cada uma delas?

O número de mortes evitáveis ocorridas em cada hospital poderia ser uma variável, mas como definir “morte evitável”? Outras variáveis poderiam ser a experiência dos médicos, a atenção recebida de médicos, enfermeiros e outros técnicos, etc.

Pretende-se que encontre um modelo matemático que use a mortalidade e outros fatores para medir a qualidade de um hospital, que use esses fatores com dados de hospitais concretos para decidir qual o melhor hospital e que elabore um relatório de 2 páginas que possa ser entendido sem competências matemáticas ou informáticas.

Figura 6

Algumas das respostas que foram premiadas podem ser encontradas em: <http://immchallenge.org/Contests/2018/Results.html>

UMA BREVE PERSPETIVA NACIONAL E INTERNACIONAL

A generalidade dos sistemas educativos contempla de forma cuidada e detalhada a capacidade de comunicação matemática. Por exemplo, em Singapura a comunicação (matemática) é considerada um dos processos essenciais na resolução de problemas de Matemática, que está no centro do enquadramento curricular oficial:

“Os processos matemáticos dizem respeito ao raciocínio, *comunicação* e conexões, aplicações e modelação, assim como as capacidades de pensamento e heurística. Estes processos são parte integrante da aquisição e aplicação do conhecimento matemático. O desenvolvimento dos processos matemáticos dos estudantes deve permear todos os níveis da aprendizagem matemática, e ser feito através de uma variedade de problemas, incluindo problemas não rotineiros, problemas de resposta aberta e problemas do mundo real.” (ME-NIE, 2012)

A competência de comunicação (em geral e, implicitamente, também matemática) aparece referenciada noutros contextos bastante diversos. Aparece por exemplo no recentemente publicado *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Oliveira Martins et al., 2017), como não podia deixar de ser. Com efeito aí é referido que

“Pretende-se que o jovem, à saída da escolaridade obrigatória, seja um cidadão (...) capaz de pensar crítica e autonomamente, criativo, com competência de trabalho colaborativo e com capacidade de *comunicação*”

e ainda que

“As competências associadas a Informação e *Comunicação* implicam que os alunos sejam capazes de (...) colaborar em *diferentes contextos comunicativos*, de forma adequada e segura, utilizando diferentes tipos de ferramentas (analógicas e digitais), com base nas regras de conduta próprias de cada ambiente.”

Mas não aparece só no contexto dos Ensinos Básico e Secundário. Aparece também no Ensino Superior. Citaremos apenas a reforma de Bolonha, que modificou por completo o panorama do Ensino Universitário português. No Decreto-Lei nº 74/2006 de 24 de março do Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, estabelece-se que o grau de licenciado deve ser conferido aos que demonstrem

“Competências que lhes permitam *comunicar* informação, ideias, problemas e soluções, tanto a públicos constituídos por especialistas como por não especialistas”

Note-se a preocupação do legislador (o Ministro era Mariano Gago) em incluir a comunicação não só aos seus pares como ao público em geral. Não é difícil constatar que ainda estamos longe de atingir este objetivo.

CONCLUSÃO

Não é por acaso que a comunicação matemática é uma das 7 competências matemáticas fundamentais no estudo PISA. Outros estudos internacionais corroboram este lugar importante e o currículo dos países com melhores resultados nesse estudo dá-lhe uma grande atenção. Os detalhes aqui expostos são suficientes para concluir que um bom currículo escolar de matemática em Portugal, sobretudo no Ensino Básico e no Ensino Secundário, deve contemplar de forma profunda e decidida a competência de comunicação matemática.

Referências

- Garfunkel, S. & Montgomery, M., ed. (2016). *GAIMME: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education*, COMAP and SIAM, Philadelphia, 2016. <https://siam.org/Publications/Reports/Detail/Guidelines-for-Assessment-and-Instruction-in-Mathematical-Modeling-Education>
- IM2C (2018). International Mathematical Modeling Challenge – Contest results and winning paper, *Consortium*, 115, 25-50.
- Libertini, J. (2018). Using modeling to reinforce non-mathematical skills, part I – Communication, *Consortium*, 115, 1-3.
- ME-NIE: Ministry of Education and National Institute of Education, Singapore (2012), *Mathematics Education in Singapore*. Produced as part of Singapore's National Presentation at the 12th International Congress on Mathematical Education at Seoul, Republic of Korea (8 to 15 July 2012).
- OECD (2000). *Measuring Student Knowledge and Skills: The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy*, PISA, OECD Publishing, Paris.
- OECD (2001). *Knowledge and Skills for Life: First Results from PISA 2000*, PISA, OECD Publishing, Paris.
- OECD (2002). *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment: Reading, Mathematical and Scientific Literacy*, PISA, OECD Publishing, Paris.
- OECD (2004). *Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003*, PISA, OECD Publishing, Paris.
- Oliveira Martins, G. et al (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, Ministério da Educação/Direção Geral da Educação (DGE), Lisboa.
- PROJAVI (s/d), *Matemática - Itens Libertos 2000 / 2003/ 2006*, PISA – Programme for International Student Assessment.
- PROJAVI (2013), *PISA 2012, Portugal - Primeiros Resultados*. ProjAVI Grupo de Projeto para a Avaliação Internacional de Alunos, Ministério da Educação e Ciência.
- Ramalho, G. (Coord.) (2001). *Resultados do Estudo Internacional PISA 2000: Primeiro Relatório Nacional*. Lisboa: GAVE do Ministério da Educação.
- Ramalho, G. (Coord.) (2002). *PISA 2000 - Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses*. Lisboa: GAVE do Ministério da Educação.
- Ramalho, G. (Coord.) (2004). *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003: Primeiro Relatório Nacional*. Lisboa: GAVE do Ministério da Educação.

JAIME CARVALHO E SILVA

CMUC/DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Avaliação e comunicação: *da e para a* aprendizagem

ANTÓNIO GUERREIRO

CRISTINA MARTINS

Repare que na sala de aula todos vestíamos uma bata idêntica. Sabe como se fecha a bata de um aluno?

Herr Singer olhou para ele, perplexo.

– Nas costas, Herr Singer. Fecha-se nas costas.

– Mas que estupidez! Uma criança não pode girar sobre si mesma

...

– É propositado! As batas da escola laica foram concebidas para que os alunos fossem obrigados a treinar-se, cada um precisando de outro para abotoar a bata (p. 104).

In Uma janela para o infinito, Denis Guedj (2008)

REFLEXÃO INTRODUTÓRIA

O processo de avaliação dos alunos surge como uma marca incontornável no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, assumindo um papel determinante, inclusive no seu progresso escolar. Será este obsessivo enfoque positivo e valorativo para a concretização do ensino e da aprendizagem? Não será mais relevante entender a avaliação como uma componente perfeitamente ajustada e fundamentada no seu papel regulador da aprendizagem?

A comunicação na sala de aula é uma componente presente no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, pela sua natureza intrínseca de interação entre os alunos e entre estes e o professor. Mas será considerado o seu contributo na valoração das interações e na construção do conhecimento matemático socialmente partilhado? Ou será que a comunicação na sala de aula é considerada automática e pacífica, com exceção da existência de ruído, disciplinar ou não disciplinar, não abraçando um papel significativo na construção do conhecimento dos alunos e do professor?

Quer aceitando ou recusando uma ou outra das perspetivas refletidas, é inevitável considerar a existência da avaliação e da comunicação no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, pelo seu papel central na valorização das

dinâmicas de sala de aula, e no “estabelecimento de um diálogo autêntico e [de] uma avaliação dos alunos” (Ball, 1971, p. 105). É imprescindível considerar os contributos da avaliação e da comunicação na aprendizagem significativa da matemática, tendo em vista a promoção, como ambicionamos, do sucesso escolar de todos os alunos, numa escola de qualidade, engendradora no desenvolvimento futuro da sociedade.

INTENCIONALIDADE PROFISSIONAL

Analisar e investigar o ensino e a aprendizagem são pressupostos da atividade de investigação em educação matemática e, também, de uma prática docente, a qual deve ser assumida pelos professores enquanto profissionais de educação. Reconhecer padrões nas práticas de ensino em sala de aula suscita um enriquecimento do conhecimento profissional e provoca mudanças com vista a uma maior eficiência no ensino e na aprendizagem da matemática.

Adotamos esta perspetiva na concretização de um estudo de natureza interpretativa sobre as relações entre a avaliação e a comunicação, num contexto colaborativo, tendo em vista proporcionar significativas aprendizagens matemáticas dos alunos. Além de nós (autores deste artigo), os participantes são quatro professores do 2.º ciclo do ensino básico (dois do distrito de Bragança e dois do distrito de Faro). Até ao momento, o estudo contemplou um olhar sobre as principais ideias a propósito da avaliação e da comunicação, sobre as perceções dos professores, decorrente da realização de uma entrevista a cada um dos docentes, e sobre as práticas profissionais dos professores, com suporte na observação de uma aula de matemática a cada um dos docentes.

Os dados revelam uma relação estreita entre a avaliação e a comunicação através da discussão, do diálogo, do questionamento, dos registos escritos, da interação e da partilha de ideias. As práticas letivas de comunicação surgem condicionadas pelo discurso do professor, alicerçado nas

principais ideias e conteúdos matemáticos, entendidos como relevantes para as práticas de avaliação *da* aprendizagem, em valorização do conhecimento matemático adquirido pelos alunos e em subvalorização do seu pensamento e das suas estratégias matemáticas. Os professores consideram relevantes as distintas estratégias matemáticas dos alunos, mas as aulas não parecem traduzir essa valorização em termos de diferenciação das resoluções na perspectiva da matemática. No mesmo sentido, o estudo referido por Gutiérrez Fallas e Santos (2015), no ensino secundário, aponta para uma focalização do discurso oral da professora nos conceitos e propriedades da matemática, não existindo uma significativa participação dos alunos na discussão em sala de aula.

A predominância do discurso oral na sala de aula com suporte nos registos escritos, valorizados pelo seu papel de correção da linguagem oral e formalização da linguagem matemática, é relativizada pela relevância destes no contexto dos instrumentos de avaliação *da* aprendizagem: uma comunicação predominantemente oral e uma avaliação preponderantemente escrita. A dificuldade dos registos, durante a oralidade, é uma das causas apontadas pelos professores para a prevalência da avaliação escrita. Esta dificuldade pode ser minimizada por registos informais, como refere Santos (2016): “[se] se tratar de uma interação na sala de aula durante a discussão da resolução de uma tarefa ou do confronto de estratégias de resolução, o registo informal é o adequado a esta situação pedagógica” (p. 645).

Os momentos de participação dos alunos na sala de aula são concretizados no contexto de uma relação entre o professor e o aluno, distinta de uma participação coletiva e argumentativa, numa lógica de explicação e menos de diálogo entre construtores do conhecimento matemático. No estudo referido, no ensino secundário (Gutiérrez Fallas & Santos, 2015), de igual modo, as interações da professora com os alunos foram predominantemente baseadas no questionar e no explicar, sem expressão no responder ao questionamento dos alunos, incidindo as respostas em correções ou justificações.

Pretendemos ainda dar continuidade ao estudo que já realizámos, através do trabalho de colaboração entre nós e os professores do 2.º ciclo do ensino básico, tendo em vista a identificação de relações entre a avaliação e a comunicação e a construção e experimentação em sala de aula de tarefas matemáticas que relacionem propositadamente e conscientemente a avaliação e a comunicação *da* e *para a* aprendizagem, assumindo uma intencionalidade educativa e perspetivando novas práticas profissionais dos professores de matemática.

DA E PARA A APRENDIZAGEM

Assumimos a avaliação na sua dupla função de avaliar *a* aprendizagem e avaliar *para a* aprendizagem, adotando uma

dinâmica interativa entre aquilo que o aluno já aprendeu e aquilo que se perspetiva (o professor e o próprio aluno) para as novas aprendizagens. Consideramos que o ato de avaliar é intrínseco a qualquer processo de ensino e de aprendizagem, não o encarando como uma avaliação desgarrada do ato de valorar, fundada numa visão tradicional da aprendizagem da matemática “como uma coleção de erros e acertos” (Ulleberg & Solen, 2018, p. 16), mas como um real contributo para a aquisição e desenvolvimento, por parte dos alunos, de diferentes competências, integrando aptidões, conhecimentos e atitudes.

Importa reforçar que “a avaliação *para as* e *das* aprendizagens é um processo de natureza eminentemente pedagógica cujo fundamental propósito é melhorar o que e como se ensina e o que e como se aprende” (Fernandes, 2015, p. 13, *itálico* nosso). Como refere Santos (2002), aludindo à evolução do conceito e processo de avaliação, da visão de avaliação como medida passou-se à sua consideração como um ato de comunicação e interação entre pessoas e objetos. Assim, a uma função social da avaliação veio juntar-se uma função pedagógica, devendo desempenhar um papel relevante na melhoria da qualidade da aprendizagem.

Baseando-se na investigação realizada nos últimos anos, Fernandes (2014) refere que existe uma inequívoca relação entre as práticas de ensino e de avaliação e as aprendizagens dos alunos, salientando que “sabe-se que todos os alunos aprendem mais e, sobretudo, melhor quando a avaliação formativa faz parte integrante da organização e desenvolvimento do ensino” (p. 102). A diversificação de ações de recolha, análise e registo da informação é fundamental e constitui a base para a avaliação *da* e *para a* aprendizagem (Fernandes, 2015). É importante que as avaliações formativa e sumativa sejam rigorosas e resultem de processos de interação entre os alunos e o professor. Saliente-se que na avaliação *para a* aprendizagem, os alunos são frequentemente chamados a participar, nomeadamente através da autoavaliação, os professores distribuem regularmente *feedback* a todos os alunos e o seu poder de avaliar é partilhado com outros intervenientes (e.g., outros professores, pais, alunos).

Nesta perspetiva, como refere Santos (2016), aludindo a Harlen e James (1997), a avaliação *da* aprendizagem tem por propósito “descrever e dar conta do que o aluno aprendeu e é capaz de fazer num certo momento (Harlen & James, 1997), a fim de hierarquizar, selecionar, orientar e certificar” (p. 640), enquanto que na avaliação *para a* aprendizagem, “o objetivo é fornecer evidência fundamentada e sustentada de forma a agir para apoiar o aluno na sua aprendizagem” (p. 640). Deste modo, “a mesma informação, recolhida do mesmo modo, chamar-se-á formativa [para a aprendizagem] se for usada para apoiar a aprendizagem e o ensino, ou sumativa [da aprendizagem] se não for utilizada

deste modo, mas apenas para registrar e reportar (Harlen, 2005, p. 208)” (Santos, 2016, p. 639-640).

Aludindo à comunicação na sala de aula, idealizamos de forma similar uma comunicação *da* aprendizagem e uma comunicação *para a* aprendizagem. A comunicação *da* aprendizagem decorre da narração, da transmissão, do descoberto, do conhecido dos alunos e do professor, enquanto que a comunicação *para a* aprendizagem aposta na aquisição de novas ideias, na interação e na negociação de conhecimentos matemáticos.

Uma comunicação *da* aprendizagem centra-se no discurso oral e escrito dos alunos, envolvendo como interlocutor o professor, sem valorizar a discussão e os diálogos em confronto entre os alunos. A linguagem oral e escrita é um meio de transmissão do conhecimento matemático, é um meio de expressão do aluno e das suas ideias construídas individualmente (Radford & Barwell, 2016). As salas de aula em que predominam o monólogo do professor e a ausência de participação ativa dos alunos na discussão coletiva, em que o ensino da matemática é encarado como uma transmissão de conteúdos numa linguagem simbólica, podem propiciar um entendimento da matemática como algo carente de interesse, indesejável e até insuportável, originando um elevado insucesso na aprendizagem dos alunos (Jiménez, 2011).

Como referem Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes e Martinho (2015) existe uma clara associação entre as ações comunicativas e as intenções avaliativas: “um domínio de perguntas de verificação relaciona-se com uma tendência clara do professor em ouvir os alunos de forma avaliativa e em responder-lhes de maneira mais ou menos direta e validando, ou não, as suas ideias” (p. 286). Os mesmos autores questionam-se sobre se “estaremos verdadeiramente a levar os alunos a construir conhecimento matemático quando os conduzimos apenas através da transposição do conhecimento matemático já construído?” (p. 292), isto é, estaremos a abrir portas *para a* aprendizagem quando nos limitamos a uma comunicação alicerçada no conhecido, uma comunicação *da* aprendizagem? Acreditamos que é fundamental inserir nas nossas aulas uma comunicação *para a* aprendizagem.

A comunicação *para a* aprendizagem não se restringe ao discurso dos alunos, mas aposta em evidenciar o seu pensamento através de uma comunicação reflexiva (Brendefur & Frykholm, 2000), com o propósito de partilhar ideias e aprofundar o entendimento matemático dos alunos (Ulleberg & Solen, 2018). Para o cumprimento destas intenções, os alunos precisam de “oportunidades para desenvolver pensamentos e ideias matemáticas em colaboração com os outros, e, juntamente com outros, explicitar justificações e argumentos” (Ulleberg & Solen, 2018, p. 18), integrando “tópicos disciplinares nas justificações e fundamentações que produzem” (Pires, 2017, p. 94).

O discurso promovido na sala de aula não se refere a um ato de transmissão do significado exato da matemática, do professor para alunos, mas ao invés, envolve uma comunicação ativa, que permita aos alunos “construir novos significados e entendimentos da matemática, por si mesmos” (Chapman, 2009, p. 297), em que o professor e os alunos produzem conhecimento e aprendem juntos (Radford & Barwell, 2016). Nesta ótica, “a verdadeira magia acontece quando todos aprendem juntos e somos simultaneamente professor e aluno” (Judkins, 2016, p. 298), num contexto em que se pode gerar conversas inseguras e desafiadoras, a propósito de novas ideias e estratégias matemáticas, numa atmosfera de sala de aula solidária e inclusiva (Ulleberg & Solen, 2018). Só desta forma podemos “perceber que ideias matemáticas têm os alunos, como estão a pensar e que eventuais erros e dificuldades estão a sentir” (Guerreiro, Ferreira Tomás, Menezes & Martinho, 2015, p. 287).

Fazendo um paralelismo entre a avaliação e a comunicação, e muito embora considerando a real necessidade destes processos serem entendidos nas suas múltiplas vertentes, para nós, existe um encadeamento inerente de uma perspetiva de comunicação mais transmissiva com uma visão da avaliação como medida, uma avaliação com funções de certificação, uma avaliação *da* aprendizagem. Simultaneamente, uma comunicação mais centrada na interação na sala de aula é sem dúvida mais consentânea com uma avaliação reguladora, formativa, uma avaliação *para a* aprendizagem. Nesta ótica, é fundamental a valorização de “ambientes favoráveis ao desenvolvimento das capacidades comunicativas” (Pires, 2017, p. 90) e avaliativas dos alunos.

DESAFIOS AOS PROFESSORES

Os professores podem investigar o seu ensino e analisar as suas práticas em sala de aula através de um olhar crítico sobre as suas intenções de avaliação e de comunicação.

Será que estou sempre a avaliar o conhecimento individual dos alunos num sentido retrospectivo, isto é, uma constante avaliação *da* sua aprendizagem?

Será que promovo uma avaliação coletiva, entre os alunos, daquilo que se conhece com vista à necessidade de aprender mais para a resolução de uma dada tarefa matemática, isto é, diligencio com vista à avaliação *para a* aprendizagem?

Nas palavras de Santos (2016), estou a “avaliar para ajudar a aprender [ou estou a] avaliar para sintetizar a aprendizagem [?]” (p. 640).

Será que restrinjo a comunicação dos alunos ao seu contributo individual das suas soluções, ideias e estratégias matemáticas, isto é, limito os alunos à comunicação *da* aprendizagem?

Será que desafio os alunos a explorar, argumentar e justificar coletivamente as suas ideias e estratégias matemática, numa perspetiva de confronto de posições, isto é, incito os alunos a uma comunicação *para a* aprendizagem?

Em cada sala de aula existe uma multiplicidade de práticas de ensino, de avaliação e de comunicação. O questionamento profissional urge se as nossas práticas se reduzem a um ensino redutor, a uma avaliação estandardizada e a uma comunicação de sentido único entre o professor e o aluno ou em que o aluno só participa para completar o discurso do professor (Brendefur & Frykholm, 2000). É nesta perspetiva que desafiamos os professores a analisarem as suas práticas de avaliação e de comunicação, com o intento de um repensar e transformar das mesmas, caracterizando a sua avaliação dos alunos *da e para a* aprendizagem e a sua comunicação em sala de aula *da e para a* aprendizagem. Como os alunos, nos avanços e recuos na construção do próprio conhecimento matemático, os professores podem ensaiar novas práticas de avaliação e de comunicação, aceitando igualmente avanços e recuos no seu conhecimento profissional, numa certeza de que o questionamento e a investigação sobre as próprias práticas são alicerces da melhoria da profissão docente.

Esta estrutura de comunicação *da e para a* aprendizagem não se restringe ao processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Como refere Backer (2017), os produtos discursivos (significados, conteúdos e símbolos) podem ser distintos, mas os processos discursivos (discurso oral e escrito e padrões de interação) são iguais [nas diferentes áreas de ensino], dominadas pela recitação, numa relação pergunta (do professor) – resposta (do aluno) – avaliação (do professor), numa reprodução cultural e ideológica do ensino tradicional. É preciso arriscar e apostar numa avaliação e numa comunicação baseadas na integração cultural e na capacidade de dialogar, aceitando a possibilidade de modificar os alunos, mas também de ser modificado pelos alunos.

A PROPÓSITO DE UMA EPÍGRAFE

A alusão aos cento e cinquenta anos da escola laica (da república francesa), no dizer de Daniel Pennac (2009) — “no fim dos anos de 1870, a República sentou esta criança nas carteiras da escola laica, gratuita e obrigatória para que fossem satisfeitas as suas necessidades fundamentais: ler, escrever, contar, raciocinar, constituir-se como cidadão consciente da sua identidade individual e nacional” (p. 234) —, na epígrafe inicial e no abotoar da bata como ato coletivo e de colaboração entre os alunos na sala de aula, tenta desafiar cada um de nós a refletir sobre o caminho caminhado e o caminho a caminhar.

Referências

- Backer, D. (2017). The politics of recitation: Ideology, interpellation and hegemony. *Harvard Educational Review*, 87(3), 357-379.
- Ball, R. (1971). *Pedagogia da comunicação*. Mem Martins: Publicações Europa-América.
- Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.
- Chapman, O. (2009). Discourse to empower “self” in the learning of mathematics. *Proceedings of PME 33*, 2, 297–304.
- Fernandes (2014). Práticas de ensino e de avaliação de docentes de quatro universidades portuguesas. In Fernandes, D.; Borralho, A.; Barreira, C.; Monteiro, A.; Catani, D.; Cunha, E.; Alves, P. (Org.). *Avaliação, ensino e aprendizagens em Portugal e no Brasil: Realidades e perspetivas*. (v. I, pp. 97-135). Lisboa: Educa.
- Fernandes, D. (2015) Prefácio. In Neves, A. C. & Ferreira, A. L. (2015). *Avaliar é preciso? Guia prático de avaliação para professores e formadores*. Lisboa: Guerra & Paz.
- Guedj, D. (2008). *Uma janela para o infinito*. Lisboa: Editorial Bizâncio.
- Guerreiro, A., Ferreira, R. T., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: Perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, 23(44), 279-295.
- Gutiérrez Fallas, L., & Santos, L. (2015). O questionamento oral na sala de aula de Matemática. Um elemento propiciador de avaliação formativa? *Educação & Matemática*, 134, 35-40.
- Jiménez, E. A. (2011). La comunicación en la clase de matemáticas. *Atas XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-12). Universidade Federal de Pernambuco: Recife, Brasil.
- Judkins, R. (2016). *A arte do pensamento criativo*. Lisboa: Círculo de Leitores.
- Pennac, D. (2009). *Mágoas da escola*. Porto: Porto editora.
- Pires, V. (2017). Práticas de comunicação em sala de aula nos ciclos iniciais de ensino básico. *Revista de Estudos e Investigación en Psicología y Educación*, Vol.Extr.(9), 90-95.
- Radford, L., & Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. *Second Handbook of PME* (pp. 275-313). Rotterdam: Sense.
- Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como? In *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77-84). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Santos, L. (2016). A articulação entre a avaliação somativa e a formativa, na prática pedagógica: uma impossibilidade ou um desafio? *Ensaio*, 24(92), 637-669.
- Ulleberg, I., & Solen, I. (2018). Which questions should be asked in classroom talk in mathematics? Presentation and discussion of a questioning model. *Acta Didactica Norge*. 12(1), 1-21.

ANTÓNIO GUERREIRO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO, UNIVERSIDADE DO ALGARVE

CRISTINA MARTINS

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA

Humor no ensino da Matemática: oportunidades para a aprendizagem

LUÍS MENEZES

FERNANDA FERREIRA

Todos os que se interessam pelo ensino da Matemática, sejam eles professores, educadores matemáticos ou decisores educativos, procuram encontrar os métodos mais eficazes para promover uma aprendizagem que seja significativa para os alunos e que responda aos desafios que a sociedade atual vai continuamente colocando. A investigação realizada em Didática da Matemática e as práticas dos professores têm apontado, com insistência, para algumas ideias promissoras para alcançar este desiderato. Primeira ideia, o envolvimento dos alunos em atividades matematicamente significativas é fundamental para o desenvolvimento das ideias matemáticas, englobando neste desenvolvimento os conceitos matemáticos e a competência para os usar. Segunda ideia, esta atividade dos alunos tem uma relação estreita com as tarefas que o professor apresenta aos alunos, ou seja, tarefas desafiantes criam oportunidades para os alunos se desenvolverem matematicamente porque colocam os alunos perante desequilíbrios cognitivos (tipicamente, situações para as quais as rotinas e as ideias conhecidas se mostram insuficientes para a sua compreensão e resolução). Terceira ideia, o resultado da atividade dos alunos (na maioria das vezes realizada em pequenos grupos) precisa de ser comunicado aos outros (primeiro no pequeno grupo e depois a toda a turma), recorrendo a diversas formas de representação, com o objetivo de serem explicados e justificados. Nesta visão do ensino, a realização de tarefas matemáticas e a discussão dos seus resultados não são fins em si mesmos, são os meios que permitem aos alunos, através de processos de abstração, desenvolverem o seu conhecimento matemático, ao mesmo tempo que aprendem a resolver problemas matemáticos e a raciocinar e comunicar matematicamente.

As tarefas matemáticas construídas a partir de situações humorísticas, como tiras de banda desenhada e *cartoons*, têm boas condições para corresponder a esta visão do ensino que se apresentou, já que: (i) as situações humorísticas envolvendo a Matemática, tal como as apresentamos a seguir, baseiam-se em incongruências matemáticas engraçadas de alguma maneira, que os alunos têm de resolver, ou seja, estas situações colocam os alunos perante desequilíbrios cognitivos que assumem

uma natureza problemática, a que têm de dar resposta; (ii) na resolução das tarefas, os alunos são chamados a usar os seus conhecimentos matemáticos prévios para interpretar a situação humorística que lhes é colocada e, eventualmente, rir com ela — os alunos são depois desafiados a desenvolver o seu conhecimento matemático através da colocação de questões que aprofundam a compreensão da situação humorística apresentada.

O humor e o ensino são dois domínios que parecem não combinar bem, já que o humor é habitualmente visto como algo “pouco sério”, enquanto o ensino se caracteriza por ser “sério”, pouco compatível com o rir. Este antagonismo (aparente) pode explicar o facto de, habitualmente, os manuais escolares de Matemática, nomeadamente os portugueses, não incluírem situações humorísticas (Menezes et al., 2017a). Já os professores de Matemática, tanto portugueses como espanhóis, dizem apreciar e utilizar o humor no ensino da Matemática, apresentando exemplos dessa prática (Flores, Menezes, Ribeiro, & Viseu, 2017). Estes exemplos estão, sobretudo, associados ao discurso oral dos professores nas aulas, tendo como intuito motivar os alunos para a aprendizagem ou facilitar a memorização de terminologia matemática. O recurso ao humor, escrito ou gráfico, por parte dos professores de Matemática tem ainda pouca expressão. É neste nicho que esta proposta se insere, ou seja, mostrar que é possível utilizar o humor no ensino da Matemática, com seriedade, tendo por base propostas escritas, na forma de tarefas matemáticas construídas a partir de humor gráfico. Pretendemos também mostrar que o recurso ao humor gráfico pode ir muito para além da mera motivação dos alunos, tornando-se, ele próprio, em objeto do pensamento matemático dos alunos.

Nas secções seguintes, apresentamos o enquadramento deste trabalho no âmbito do projeto HUMAT – *Humor in Mathematics Teaching*, no qual foram desenhadas tarefas matemáticas de base humorística (Menezes et al., 2017b), e também o relato e análise de uma aula do 4.º ano em que se recorre a uma destas tarefas: “Quando 2.º não é grande coisa...”

ALGUMAS NOTAS SOBRE O HUMOR

O humor é um ato cognitivo com a intenção de comunicar aos outros uma situação engraçada ou bem-disposta, podendo ser acompanhado pelo ato fisiológico de rir (Banas, Dunbar, Rodriguez, & Liu, 2011). O humor pode produzir-se de muitas maneiras, havendo várias teorias que explicam o seu funcionamento (Adão, 2008). Destas teorias, destacamos duas por serem as que explicam grande parte das situações humorísticas: teoria da superioridade e teoria da incongruência. A primeira explica o humor pela ridicularização de comportamentos ou ações das pessoas, assumindo quem o promove uma certa posição de superioridade em relação aos outros. Esta forma de fazer humor é muito frequente no humor político, mas também em anedotas (por exemplo, de brasileiros sobre portugueses, de nortenhos sobre alentejanos). Como é sabido, esta forma de fazer humor coloca, por vezes, problemas ao não ser bem aceite pelos visados (é o caso, por exemplo, do humor negro e do humor sobre motivos religiosos). A teoria da incongruência explica o funcionamento do humor pela apresentação sucessiva de duas situações que, aparentemente, são incongruentes e absurdas para os destinatários e que suscitam neles uma sensação de desconcerto e de surpresa, ou seja, trata-se de uma espécie de “rasteira” que se passa à mente (Adão, 2008). A resolução da incongruência (problema), que corresponde ao encontrar da racionalidade nas situações apresentadas inicialmente, faz com que o ato humorístico seja bem-sucedido e isso possa vir a desencadear, se apreciado pelos destinatários, o riso ou o sorriso.

HUMOR COM VALOR EDUCATIVO

Para muitos, o humor e o trabalho parecem não combinar bem, pois ao primeiro associam contextos de lazer e situações que não se levam a sério e ao segundo exatamente o contrário. Talvez por isso, o humor com fins educativos tem uma presença bastante limitada no ensino, nomeadamente no da Matemática (Banas et al., 2011; Martin, 2007). Alguns estudos realizados nos últimos anos mostram que o uso do humor, quando acontece, surge inserido no discurso oral dos professores e está muito associado a uma característica pessoal de alguns desses professores que o utilizam para criar bom ambiente nas suas aulas e, dessa maneira, facilitarem a aprendizagem (Banas et al, 2011; Flores, 2003; Flores & Moreno, 2011; Flores, Menezes, Ribeiro, & Viseu, 2017).

No projeto HUMAT defendemos duas ideias fortes sobre a utilização do humor no ensino da Matemática. A primeira é a de que a utilização do humor para ensinar Matemática é para todos os professores e não só para aqueles que têm um sentido de humor especial. A segunda ideia é a de que o humor mais adequado para a sala de aula deve basear-se em situações de incongruência, associadas a tarefas matemáticas, que levem os alunos a pensar matematicamente para rir. Assentes nestas duas ideias, no projeto HUMAT concebemos um conjunto de tarefas matemáticas que tem como ponto de partida humor gráfico,

de autores conhecidos, na forma de *cartoons* e tiras de banda desenhada, que versam situações matemáticas. Estas tarefas estão reunidas no livro *Humor no ensino da Matemática: tarefas para a sala de aula* (disponível online), sendo antecedidas por considerações gerais sobre a utilização educativa do humor para ensinar e sucedidas de considerações específicas sobre o seu uso em sala de aula de Matemática, com orientações de exploração para cada uma delas.

O enunciado de cada uma das tarefas começa com dois pedidos: “Descreve a situação apresentada” e “Consideras a situação engraçada?”. Estes pedidos têm como objetivo levar os alunos a pensar matematicamente para apreciarem o humor da situação apresentada, conjugando cognição e emoção. As figuras 1, 2 e 3 reproduzem os enunciados de três dessas tarefas desenhadas para alunos do 1.º ciclo: “Regularidade irregular”, “Certo ou errado?” e “Quando o 2.º não é grande coisa...”



1. Descreve a situação apresentada na imagem. Consideras a situação engraçada?
2. Por que razão terá o aluno respondido “seis”?
3. Encontra regularidades em adições de números naturais e justifica-as.

Figura 1. Tarefa “Regularidade irregular”



1. Descreve a situação apresentada na imagem. Consideras a situação engraçada?
2. Haverá alguma “verdade” na situação apresentada? Porquê?
3. Como se poderia corrigir o resultado da operação sem apagar qualquer um dos números?

Figura 2. Tarefa “Certo ou errado”



1. Descreve a situação apresentada na tira. Consideras a situação engraçada?
2. Admitindo que neste dia a numeração iniciou em 0, quantas pessoas podem já ter sido atendidas?
3. Se esta numeração continuar na forma como é sugerida na imagem, quantas pessoas ainda devem ser atendidas até chegar ao 1? E ao 2?

Figura 3. Tarefa “Quando o 2.º não é grande coisa...”

Na tarefa “Regularidade irregular”, baseada numa imagem da autoria de Juan Carlos Partidas, o leitor é surpreendido pela inesperada resposta do aluno. A questão 1 procura perceber se os alunos consideraram a situação engraçada, face a uma possível matreirice do aluno na sua resposta. A questão 2 procura levar os alunos a encontrar alguma racionalidade na resposta dada e a questão 3 corresponde a uma extensão da tarefa.

Na tarefa “Certo ou errado?”, baseada numa ilustração de Randy Glasbergen, o leitor é confrontado com um resultado inesperado do produto de três por dois. Esta surpresa é sucedida da fala enigmática da professora quando refere que se trata do “tipo errado de verdade”. A primeira questão procura averiguar se os alunos compreenderam a situação apresentada e se a consideram engraçada. A questão seguinte leva os alunos a encontrar o racional da situação. A última questão procura que os alunos encontrem uma forma de tornar o resultado correto, mantendo os três 2.

Na tarefa “Quando o 2.º não é grande coisa...”, baseada numa tira humorística de Ryan Kramer, o leitor é surpreendido, tal como o protagonista da história, com um número improvável que representa o último cliente a ser atendido (0,001271). Tal como nas outras tarefas, esta inicia-se com um pedido de descrição da situação e, depois, com a pergunta: “Consideras a situação engraçada?”. As questões seguintes procuram averiguar se os alunos são capazes de utilizar numerais decimais com um

número de ordens decimais para além do que aprenderam e se são capazes de utilizar esses números num contexto em que não é pressuposto o seu uso.

Em qualquer uma destas tarefas, os alunos são levados a comunicar oralmente e por escrito, evidenciando o seu pensamento e resolvendo problemas.

O HUMOR NA SALA DE AULA

Estas tarefas foram aplicadas por uma professora do 1.º ciclo do ensino básico (segunda autora deste texto) numa turma de 4.º ano de escolaridade. Por uma questão de dimensão deste texto, relatamos somente a aplicação da tarefa “Quando o 2.º não é grande coisa...”

As tarefas foram apresentadas à professora no contexto de uma ação de formação sobre Didática da Matemática em que o primeiro autor deste texto foi um dos formadores. Na fase de preparação das aulas, para além do que foi discutido no grupo de professores da ação de formação, na tarefa “Quando o 2.º não é grande coisa...” a professora e o formador discutiram adicionalmente esta proposta para a sala de aula. Desta discussão resultaram duas alterações ao enunciado da tarefa (por sugestão da professora) e uma alteração ao modo de apresentação da tira (por sugestão do formador). No enunciado da tarefa alterou-se o número indicado na quarta vinheta de 0,001271 para 0,1271 (a professora entendeu que o novo número cumpria a mesma função humorística que o anterior, mas ganhava em termos de ser mais familiar para os alunos, que já tinham falado de décimas de milésimas). A professora sugeriu ainda a inclusão de uma 4.ª questão com o objetivo de levar os alunos a refletir sobre a tarefa matemática explicando o sentido do título: “Explica o significado do título “Quando o 2.º não é grande coisa...”. Na apresentação da tarefa aos alunos, optou-se por apresentar cada uma das vinhetas da tira individualmente e convidar os alunos a descreverem a situação observada. Dessa forma, esperava-se uma melhor compreensão da situação e uma melhor apreciação do humor aquando da apresentação da quarta vinheta (pelo efeito surpresa).

As tarefas obedeceram ao seguinte modo de implementação: (i) Apresentação da tarefa; (ii) Resolução da tarefa (em pares); e (iii) Apresentação e discussão coletiva dos resultados.

TRABALHANDO A TAREFA “QUANDO O 2.º NÃO É GRANDE COISA...”

Tal como planeado, a tira que serve de base a esta tarefa matemática foi apresentada no quadro interativo vinheta a vinheta, sendo isso comparado à apresentação de um filme. Este facto criou nos alunos grande expectativa, levando-os em cada vinheta a tentarem compreender o que se passava e a conjecturar sobre o que viria a seguir:

Professora (P): Vamos ver a tarefa. Vamos apresentar *slide* a *slide*. Estão todos a ver? Conseguem ler os balões?

Alunos (A): Sim.

P: Afonso, então lê lá.

Afonso: “Estou aqui para tirar uma nova carta de condução”.

A maior parte dos alunos coloca o braço no ar. A professora chama alguns alunos que logo procuram uma razão para a solicitação da personagem:

P: David.

David: Se calhar, ele perdeu a carta de condução.

Tomás: Se calhar, chumbou no exame ou, se calhar, levou uma multa e perdeu os pontos todos da carta.

Guilherme: Ele, se calhar, queria uma nova carta para o caso de perder a que tinha.

Inês: Podia ter deixado caducar a carta.

Os alunos e a professora riem com as razões aventadas pelos alunos para o pedido de uma nova carta. A professora, depois de ouvir mais alguns alunos, apresenta a segunda vinheta criando *suspense* nos alunos:

P: Olhem bem para a imagem, olhem para a expressão do senhor, como está a senhora...

David: Se calhar, ele ia fazer o exame e o carro que ia ter era o 2.

P: Diz lá, Samuel.

Samuel: Se calhar, era a senha para esperar.

P: Portanto, o senhor foi tirar uma nova carta de condução. A senhora deu-lhe o número 2. Como é que ficou o senhor? Vejam a imagem.

Inês: Ficou feliz.

David: Ficou relaxado.

P: Rosário.

Rosário: Está feliz porque acha que o número 2 vai ser logo a seguir.

Camila: Ele está contente porque é o número 2, mas, se calhar, o 1 vai demorar muito tempo.

A professora decide focar os alunos na ideia de que se trata de uma senha para espera numa fila e procura que os alunos estabeleçam conexões com o seu quotidiano. Os alunos correspondem:

P: Vocês costumam tirar senhas em algum lado?

Alunos: Sim.

P: Onde?

Matilde: Na charcutaria.

Guilherme: No talho.

(...)

Matilde: O número 1 é melhor que o número 5. O 1 é logo atendido e o 5 tem que esperar pelo 1, 2, 3 e 4, e eles podem demorar muito tempo.

P: Olhem, se eu tirar uma senha em algum sítio e sair o 90, isso é mau?

Alunos: Depende...

Afonso: Depende do número onde vai.

Alguns alunos, ainda com a segunda vinheta projetada, ligam a conversa ao título da tarefa:

Guilherme: Como o título é “Quando o 2.º não é grande coisa”, se calhar, começaram no último até ao primeiro.

(...)

P: Ora, vocês já falaram no título da tarefa e também já deram conta da cara da senhora. Parece que ela sabe qualquer coisa que ele não sabe. (...) Então vamos ver o que acontece na quarta imagem. Vejam com atenção o que vai acontecer ao senhor. Em que número estarão as senhas?

Os alunos ficam surpreendidos e soltam expressões de espanto: “Aaaaaaaah!”, “Eeeeeeee!”, “Xiiiiiiii”. A maioria dos alunos ri-se. Os alunos comentam a situação.

Camila: Ena, aquilo ainda nem passou o 1!

Guilherme: Se calhar, aquilo está a andar para atrás e ainda vai demorar muito a chegar ao 2.

P: Se calhar, para que cada grupo possa ter a sua explicação, vamos agora trabalhar dois a dois e não vamos, para já, partilhar todos. Depois, faremos isso mais à frente.

Neste momento da aula, não fica claro se todos os alunos compreenderam o caricato da situação, face ao número que representa a pessoa que está a ser atendida. Para não antecipar a descrição da situação e as questões seguintes da tarefa, a professora decide avançar com o trabalho de pares. Distribui o enunciado da tarefa a cada par de alunos, tendo deixado linhas para a resposta a cada uma das questões. A professora pede aos alunos para lerem o enunciado da tarefa. Após a leitura de cada questão em voz alta, pede aos alunos para dizerem, por outras palavras, o que é pedido. Os alunos começam a trabalhar a pares, com o acompanhamento da professora.

Alguns pares não localizam bem o número da última vinheta (0,1271). A professora dialoga com os alunos:

P: Acham que o senhor que foi tirar a carta de condução está contente do princípio até ao fim?

Alunos (par): Na quarta imagem, ele não ficou tão feliz porque viu que o número é abaixo de zero.

P: O número da quarta imagem é abaixo de zero?

Alunos (par): Sim.

P: Então vamos lá ver... vamos imaginar que tapamos os últimos três algarismos do número [a professora tapa com a mão]. Que número fica?

Alunos (par): Uma décima (0,1).

P: Esse número é abaixo de zero?

Alunos (par): Não.

P: Então?

Alunos (par): Pois, mas ele pensava que era só 1, 2, 3, 4...

P: E era?

Alunos (par): Não.

P: Então, expliquem lá isso.

Alunos (par): Ele viu que ia no número 0,1271 e ele pensava que era 1, 2, 3, 4...

P: Então reparem, para ir deste número (0,1271) até ao que ele tem (2), ainda falta muito ou pouco?

Alunos (par): Ainda falta muito [risos]. Por isso, ficou triste porque ainda faltava muito pra chegar ao número dele.

Ainda com o mesmo par de alunos, a professora procura verificar se os alunos consideraram a situação engraçada:

P: Acham esta situação engraçada?

Alunos (par): Sim, porque ele pensava que tinha um bom número e, afinal, a máquina ainda só ia no 0,1271 e ficou triste.

P: Vocês acham que isto acontece na realidade?

Alunos (par): Não, na realidade é 1, 2, 3...

P: Sabem que esta situação foi desenhada por um cartoonista famoso para fazer rir as pessoas. Acham que ele conseguiu fazer rir?

Alunos (par): Sim.

Num outro par, a professora procura levar os alunos a pensar com números mais familiares, reduzindo também o número de ordens decimais do número da vinheta:

P: Então como é que isso vai?

Alunos (par): Vai bem. Nós achamos que, com certeza, a máquina deve estar avariada. Ela devia estar a dar 1, 2, 3 e está a marcar 0,1271.

P: OK, mas admitindo que a máquina está assim e que nós apagaríamos todos os algarismos e só deixávamos 0,1, ainda faltaria muito para o 2?

Alunos (par): Sim, mas muito menos porque seria 0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 - 0,5...

P: Pois...

Alunos(par): Por isso, ele ficou desapontado no fim.

A professora questiona o par sobre o caricato da situação:

P: E isto acontece na vida real?

Alunos (par): Não, é estranho.

P: Se calhar, é por isso que é engraçado.

Alunos (par): Pois.

P: Parece quase uma partida que fizeram ao senhor.

Alunos (par): Nós achámos hilariante.

P: Ena!!

Alunos (par): Como se escreve? E-A-L...?

P: Não. H - I - L - A - RIANTE. Isto é uma palavra difícil. O que quer dizer?

Alunos (par): É uma coisa engraçada.

Para alguns pares de alunos, a leitura do número é difícil e a professora intervém:

P: Então em que número vai?

Alunos (par): Mil duzentos...

P: Mil!?

Alunos (par): 0,1271.

P: Sim. Mas imaginemos que em vez deste número, a máquina marcava 0,1, o que já seria esquisito. Quantos números faltariam para o 2?

[Silêncio]

P: Digam os números.

Alunos (par): 0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 - 0,5 - 0,6 - 0,7 - 0,8 - 0,9 - 1,0.

P: Quantos números já passaram?

Alunos (par): 10.

P: Quantos faltam para o 2?

Alunos (par): Outros 10.

P: E isto não vai de décima em décima. Vai demorar mais ou muitíssimo mais?

Alunos (par): Muitíssimo mais.

Os alunos avançam para a questão 2: "Quantas pessoas podem já ter sido atendidas?"

P: Quantas pessoas foram atendidas?

Alunos (par): Foram atendidas 1271.

P: Como é que me explicam isso?

Alunos (par): Porque a primeira pessoa é 0,0001.

P: E a segunda?

Alunos (par): 0,0002.

P: E para chegar ao 1, ainda falta muito?

Alunos (par): Sim, oito mil e tal pessoas.

Na resolução, os alunos seguiram esta estratégia estabelecendo uma correspondência entre a sequência dos números naturais e a sequência que enunciaram oralmente (figura 4):

2. Admitindo que neste dia a numeração iniciou em 0 (zero), quantas pessoas podem já ter sido atendidas?

1 = 0,0001
2 = 0,0002
3 = 0,0003
4 = 0,0004
5 = 0,0005
6 = 0,0006
7 = 0,0007
8 = 0,0008
9 = 0,0009...

R: já foram atendidas 1271 pessoas.

Figura 4. Resposta à questão 2

Na resposta à questão 3, a maioria dos pares de alunos recorre ao algoritmo da subtração. Na figura 5, este par de alunos decide colocar uma cruz em “0”:

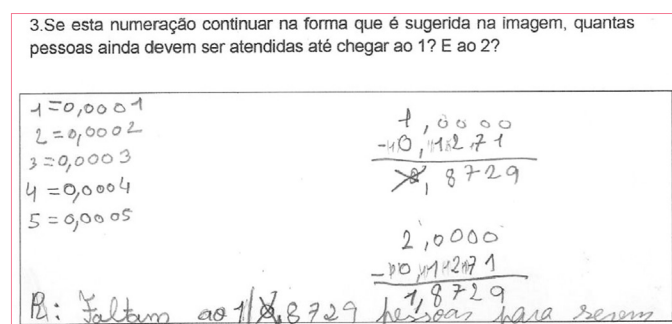


Figura 5. Resposta à questão 3

Contudo, outros alunos manifestam dificuldades em utilizar o resultado para dar resposta à questão:

P: Expliquem lá a vossa estratégia.

Alunos (par): Nós fizemos uma subtração. Para chegar ao 1, ainda faltam 0,8729 e para chegar ao 2 ainda faltam 1,8729.

P: Então, ouçam lá, se alguém olhar para o número que está a ser atendido e disser que faltam seis pessoas e meia, acham isso normal?

Alunos (par): Não.

P: Portanto, a resposta a “quantas pessoas faltam?”, tem que ser um número...

Alunos (par): Inteiro.

P: Portanto, é uma ou duas ou vinte pessoas [pausa] então esse “zero vírgula”.

[A professora faz uma pausa e afasta-se do par de alunos].

Na resposta à questão 1, os alunos revelam compreensão da situação apresentada, notando que a consideram engraçada.

A generalidade dos alunos atribui sentido ao título da tarefa, reconhecendo que o tipo de “contagem” usado na tira fez com que a senha número 2 não fosse, como expectável pelo protagonista, o segundo a ser atendido (figura 6):

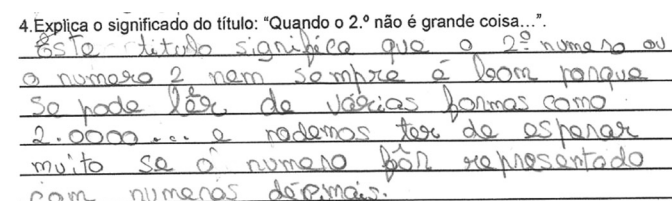


Figura 6. Resposta à questão 4

Após o trabalho a pares, a professora organiza um momento de apresentação e discussão dos resultados obtidos pelos pares. Começa pela primeira questão da tarefa:

P: Então, vamos ouvir as vossas respostas. Atenção, quando um menino está a falar, todos têm que ouvir para ver se pensaram como nós ou se pensaram diferente.

Alunos (par): Nós achámos a situação engraçada porque o senhor recebeu a senha número 2 e ficou bastante satisfeito porque pensava que só faltava um número para o 2, mas ainda faltavam 18 729 pessoas.

Filipe: Ele pensava que estava no 1, e ele era logo a seguir, mas só estava nas 1271 décimas de milésimas e ainda faltavam muitos, muitos, muitos números até ao 2. Nós achamos esta situação engraçada e também muito surpreendente pois, aparentemente, o número dele era fantástico, só que nem sequer estava em números inteiros, mas em dízimas [a turma bate palmas a esta intervenção do colega].

Lara: Nós consideramos a situação engraçada e divertida porque o seu número 2 pode ler-se 2,0000.

P: Os que estão com o braço no ar querem comentar ou têm alguma coisa diferente a acrescentar?

Tomás: Sim.

P: Mas é só texto ou são as ideias?

Tomás: Eu tenho diferente, acho que a máquina está avariada.

P: Então, lê lá.

Os alunos apresentam as suas respostas à questão 2 (“Admitindo que neste dia a numeração iniciou em 0, quantas pessoas podem já ter sido atendidas?”):

Lara: Como isto anda de décima de milésima em décima de milésima... são 1271 décimas de milésimas, ou seja, 1271 pessoas.

P: O que é que a turma pensa desta explicação? Concordam, não concordam...?

A (coro): Concordamos.

P: Na prática, aquilo que tu dizes é que podemos ir a este número [0,1271] e cortar as unidades e a vírgula.

Lara: Sim.

P: Muito bem.

Os alunos são convidados a apresentar as suas respostas à questão 3, aquela que tinha colocado mais dificuldades devido aos números utilizados para contar das pessoas:

P: Lucas, lê a 3.ª questão.

Lucas: “Se esta numeração continuar na forma que é sugerida na imagem, quantas pessoas ainda devem ser atendidas até chegar ao 1? E ao 2?”

P: Então, como é que o teu grupo fez?

Lucas: Posso ir ao quadro?

P: Sim.

Lucas: Como esse número [escreve no quadro 0,1271] posso escrever o 1 em décimas de milésimas [escreve no quadro

1,0000]. Depois, para ver até onde ia [pausa] quantas pessoas faltavam para o 1, íamos subtrair [escreve no quadro “1,0000 - 0,1271”] (...) são 8729 pessoas. Para o dois...

P: Espera, espera. Deixa-me perguntar uma coisa, porque eu dei conta durante o acompanhamento que alguns meninos disseram que faltavam 0,8729 pessoas. Faz sentido este tipo de resposta?

Alunos (coro): Não.

P: Porquê?

Lucas (aluno do quadro): Porque as pessoas são inteiras.

Camila: Nós fizemos isso sem vírgulas [escreve no quadro “10000-1271”].

P: O que vos parece?

[silêncio]

P: Como tinham sido atendidas 1271 para 10000, correspondente ao 1, [pausa] e não 1000, como alguns meninos colocaram.

Para o dar resposta a “quantas pessoas ainda devem ser atendidas até chegar ao 2?”, o raciocínio seguido foi o mesmo que o anterior.

NOTAS FINAIS

Os resultados da aplicação destas tarefas matemáticas baseadas em humor gráfico, a alunos do 4.º ano, revelam que estas propostas são bem acolhidas pelos alunos, criando-lhes oportunidades para resolverem problemas, raciocinarem e comunicarem matematicamente, oralmente e por escrito. A proposta deste tipo de tarefas aos alunos faz com que o humor no ensino da Matemática seja muito mais do que um elemento motivacional, para ser uma possibilidade de gerar atividade matemática produtiva para a aprendizagem.

As situações humorísticas, como se esperava, surpreenderam os alunos e cativaram a sua atenção, ou seja, conciliaram aspetos de natureza emocional (que os levaram a rir amiúde) com aspetos de natureza cognitiva (necessários à compreensão da situação e das questões adicionais que se colocaram em cada uma das tarefas). Nem sempre as tarefas matemáticas dos manuais escolares primam por surpreender os alunos, já que muitas delas são meros exercícios de repetição, iguais a dezenas de outros. Para além disso, algumas tarefas matemáticas têm contextos tão artificiais e caricatos que podem fazer rir (sem que isso tenha constituído uma intenção dos seus autores). Este aspeto, repetido, pode fazer com que os alunos percam a sua capacidade de se deixar surpreender, quando isso é um propósito dos autores das tarefas, como nestas de carácter humorístico.

Referências

- Adão, T. (2008). *O lado sério do humor: uma perspectiva sociolinguística do discurso humorístico*. Penafiel: Editorial Novembro.
- Banas, J. A., Dunbar, N., Rodriguez, D., & Liu, S. J. (2011). A review of humor in educational settings Four decades of research. *Communication Education*, 60(1), 115–144.

Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de Matemáticas*. Granada: Arial.

Flores, P., & Moreno, A. J. (2011). *Matemáticamente competentes para reír*. Barcelona: Graó.

Flores, P., Menezes, L., Ribeiro, A., & Viseu, F. (2017). Empleo del humor de profesores españoles y portugueses en La enseñanza de las matemáticas. In *Libro de Atas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 112–120). Madrid.

Martin, R. (2007). *The psychology of humor: An integrative approach*. London: Elsevier Academic Press.

Menezes, L., Ribeiro, A., Gomes, H., Martins, A. P., Oliveira, A. M., Delplancq, V., Matos, I. A., Balula, J. P., Viseu, F., & Flores, P. (2017a). O humor em manuais escolares de Matemática. In L. Menezes, A. Ribeiro, H. Gomes, A. P. Martins, F. Tavares, & H. Pinto (Eds.), *Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 315–329). Viseu: APM.

Menezes, L., Gomes, H., Ribeiro, A., Martins, A. P., Flores, P., Viseu, F., Oliveira, A., Matos, I. A., Balula, J. P., & Delplancq, V. (2017b). *Humor no ensino da Matemática: Tarefas para a sala de aula*. Viseu: ESE-IPV (disponível em <http://hdl.handle.net/10400.19/4863>)

LUÍS MENEZES

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE VISEU

FERNANDA FERREIRA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS VISEU NORTE



Comunicação Visual

“Praticamente tudo o que os nossos olhos veem é comunicação visual”. Esta afirmação de Bruno Munari, reconhecido *designer* italiano, aponta-nos a natureza deste tipo de comunicação, que tem a sua origem nas Artes Visuais.

Bruno Munari afirma que:

conhecer a comunicação visual é como aprender uma língua composta só por imagens, mas imagens que têm o mesmo significado para as pessoas de todas as nações e, por isso, de todas as línguas. A linguagem visual é uma linguagem talvez mais limitada do que a falada, porém, é mais direta. (p. 81)

Destacamos, assim, o carácter universal da linguagem das imagens. Todos conhecemos o papel da linguagem visual, que está presente em inúmeras situações à nossa volta. Isto significa que todos estamos habituados a enviar e receber mensagens através da linguagem visual, embora desconhecendo muitos dos seus códigos e não tendo aprendido muitos aspetos da chamada literacia visual.

Uma ideia que nos interessa destacar é que a mensagem visual pode ser decomposta em informação e suporte. Considera-se o suporte visual como “o conjunto dos elementos que tornam visível a mensagem”, isto é, “todas aquelas partes que devem ser consideradas e aprofundadas para se poderem utilizar com a máxima coerência em relação à informação” (p. 93).

Interessa-nos, portanto, destacar cinco tipos de suporte considerados pelos especialistas das Artes Visuais: Textura, Forma, Estrutura, Módulo e Movimento. A estes há ainda a acrescentar a Cor. Todos estes tipos de suporte têm uma forte ligação à matemática e, por isso, o especialista de comunicação visual recorre a muitas componentes da linguagem matemática e a muitos objetos matemáticos. Não se espera que um professor ou educador seja um especialista de comunicação visual; porém, o conhecimento de muitos aspetos da comunicação visual e o

interesse por esta área podem contribuir para desenvolver a comunicação matemática.

Para despertar ou alimentar o interesse pela comunicação visual fazemos uma pequena experiência ligando dois suportes, textura e forma. Este último é bastante familiar na matemática, mas sobre o primeiro e a ligação dos dois talvez já não possamos dizer o mesmo.

TEXTURA E FORMA

Uma superfície pode ter uma textura ou adquiri-la. Texturizar uma superfície é sensibilizá-la. Podemos, por isso, sentir a textura ou criar a textura. Os *designers* consideram duas grandes famílias de texturas: as orgânicas e as geométricas. As primeiras mais ligadas à natureza e as segundas mais construídas. Um dos desafios dos designers é construir texturas orgânicas recorrendo a processos, muitas vezes, de natureza geométrica.

Para pensar sobre este assunto, o melhor é fazer uma experiência de texturização a partir de uma forma geométrica fundamental, o quadrado. Apresento-vos, por isso, um conjunto de quadrados, divididos em partes, mas sem qualquer tipo de textura (figura 1). Naturalmente que a divisão destes quadrados em partes foi intencional e recorre a aspetos da gramática da forma, usando linhas para marcar o quadrado. Não são linhas quaisquer e foram sendo dispostas de maneira a ficar estabelecido um conjunto organizado de imagens que nos interpela e nos comunica alguma coisa. A cada quadrado foi acrescentada informação pelo facto de terem sido traçadas algumas linhas. Além disso, as figuras são todas distintas e o facto de estarem associadas permite estabelecer ligações entre elas. Propositadamente, há intenção de comunicar alguma coisa de um modo muito livre e aberto, sem recorrer a qualquer tipo de comunicação verbal. Experimentemos agora texturizar as figuras do conjunto obtendo assim um novo conjunto (figura 2). A cada figura foi acrescentada

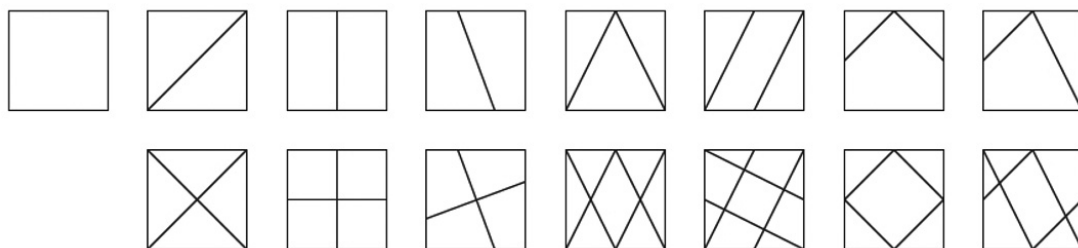


Figura 1

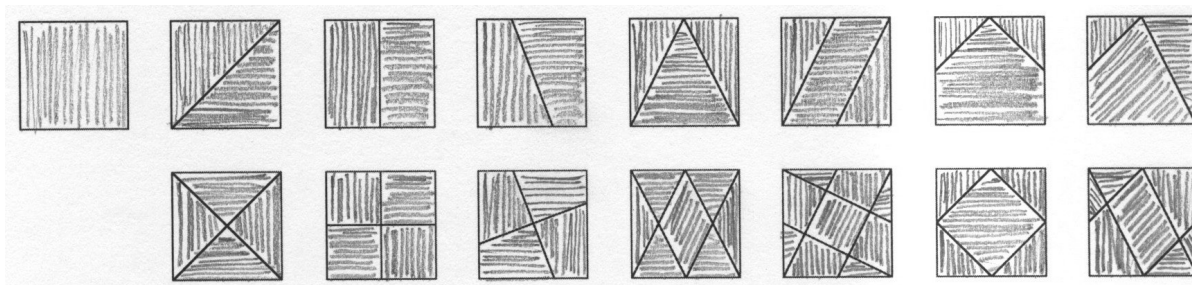


Figura 2

informação visual. Mantém-se a ausência de comunicação verbal. O que ganhamos com a aplicação da textura? O que perdemos? Em que medida a mensagem se enriquece e nos interpela, nos convida a responder estabelecendo, assim, um diálogo meramente visual ou com uma forte componente de comunicação visual?

A aplicação de texturas tem, principalmente, uma função visual. No nosso exemplo, a aplicação da textura teve um propósito de comunicação matemática. E embora ele não tenha sido desenvolvido, ficou bem patente que as várias divisões do quadrado em partes apontam vários tipos de relações que podem ser estudadas geometricamente. Fica o desafio de obter geometricamente, e para cada figura do conjunto, a relação entre todas partes de cada quadrado e o quadrado inicial. Naturalmente que a última figura é a mais intrigante. As relações presentes e a simplicidade dos raciocínios geométricos para as obter são inesperadas.

Os artistas aplicam texturas com objetivos de comunicação de natureza distinta. Para ilustrar intenções estéticas, destaco uma composição de Sol LeWitt (figura 3). Neste caso, mantém-se a forma de partida, o quadrado, também decomposto em partes e mantém-se também o mesmo tipo de tipo textura, isto é, traços paralelos a grafite. Também LeWitt nos intriga e desafia a descobrir o sentido desta sua composição, aparentemente, só estética. Será mesmo só estética?

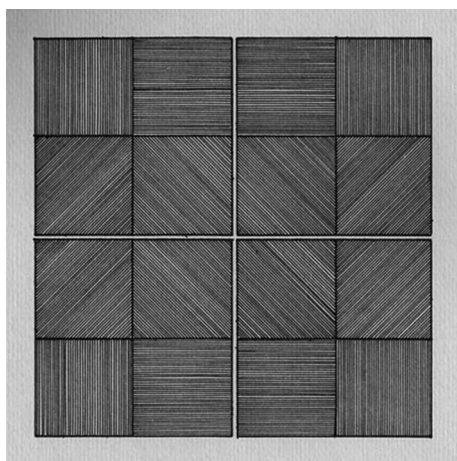


Figura 3

Uma outra composição de LeWitt (figura 4), possivelmente um estudo para uma obra, pode ser associada à comunicação visual que aqui apresentamos. Neste caso, a composição é sem textura e com uma intenção de estudo matemático. No texto que está na imagem pode ler-se: “linhas retas em quatro direções e todas as suas combinações possíveis”.

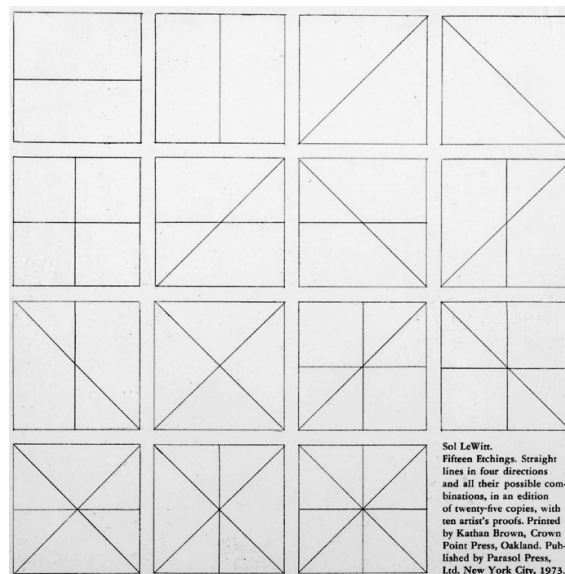


Figura 4

A propósito de Sol LeWitt, sugiro a leitura do artigo de Eliana Pinho, publicado na revista há algum tempo e indicado nas referências. Algumas imagens da obra de Sol LeWitt podem ser obtidas em <https://www.solle Wittprints.org/introduction>.

O objetivo desta nota foi mostrar como a comunicação puramente visual nos pode interpelar e desafiar do ponto de vista matemático. Todas as imagens apresentadas são passíveis de desenvolvimento que o espaço desta nota não permitiu. Fica, assim, a promessa de desenvolvê-las matematicamente na perspectiva da comunicação visual.

Referências

- Munari, B. (1968). *Design e comunicação visual*. Edições 70.
- Pinho, E. (2013). Sol LeWitt – arte contemporânea e matemática. *Educação e Matemática*, 125, 11-22.

O *feedback* escrito como elemento regulador na resolução de problemas

JOÃO CARLOS TERROSO

JOANA DIAS

FILIPA MACHADO

Com o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, ao longo dos tempos, surgiram novas formas de avaliação, alternativas ao típico processo avaliativo baseado no julgamento numérico. Sem deixar a sua função certificadora – uma avaliação com o intuito de reportar, informar e seleccionar (avaliação sumativa), a avaliação pretende também regular o ensino e apoiar a aprendizagem dos alunos, assumindo um carácter mais formativo e regulador.

O *feedback* – que entendemos como um processo comunicativo às produções ou intervenções orais dos alunos, sob a forma de um comentário escrito ou oral, com vista à sua melhoria – é uma forma de operacionalizar a avaliação reguladora. Deste modo, a comunicação é uma importante dimensão da avaliação reguladora em contexto de sala de aula (Santos & Pinto, 2018). Por um lado, os alunos têm de comunicar, expressar o seu raciocínio; por outro lado, o professor precisa comunicar o que compreendeu desse raciocínio e estimular a melhoria das produções dos alunos. O *feedback* vai, pois, ao encontro de várias orientações constantes de documentos curriculares de referência (ME, 2017; NCTM, 1999) e permite o acesso à informação sobre o processo avaliativo a todos os intervenientes – alunos e professor – garantindo, assim, a transparência desse mesmo processo e promovendo a comunicação entre alunos e professor.

Neste texto, centramo-nos no *feedback* escrito porque foi aquele a que demos mais atenção nas nossas práticas letivas. Um dos maiores desafios que enfrentámos ao darmos *feedback* escrito às produções dos alunos diz respeito ao carácter personalizado que este processo acarreta. “É importante conhecer os alunos e dar um *feedback* adequado ao perfil académico de cada um” (Santos & Dias, 2006, p. 15). De facto, perante produções semelhantes, em particular, perante dificuldades semelhantes de alunos diferentes, o mesmo *feedback* nem sempre tem o mesmo efeito. Mais ainda, em face a dificuldades semelhantes de um mesmo aluno, o mesmo *feedback* também pode não ter o mesmo efeito (e.g., Vale, 2010). No entanto, e apesar deste carácter relativo do *feedback* escrito, existem algumas características que lhe conferem qualidade e maior potencialidade no seu (desejado)

efeito regulador. A escrita avaliativa (outra denominação para *feedback* escrito) deve:

- ser clara, para que autonomamente possa ser compreendida pelo aluno;
- apontar pistas de ação futura, de forma que a partir dela o aluno saiba como prosseguir;
- incentivar o aluno a reanalisar a sua resposta;
- não incluir a correção do erro, no sentido de dar ao próprio a possibilidade de ser ele mesmo a identificar o erro e a alterá-lo de forma a permitir que aconteça uma aprendizagem mais duradoura ao longo do tempo;
- identificar o que já está bem feito, no sentido de não só dar autoconfiança como igualmente permitir que aquele saber seja conscientemente reconhecido (Santos, 2003, p. 19).

A qualidade do *feedback* é determinante para garantir um bom funcionamento de um processo de comunicação, isto é, onde alunos e professores se entendam mutuamente. Mas o *feedback* nem sempre leva à regulação pedagógica (Santos & Dias, 2006). Corresponderá a um processo de regulação da aprendizagem apenas quando o *feedback* é usado pelo aluno para melhorar a sua aprendizagem (Wiliam, 1999).

Várias investigações evidenciam que os professores, ao utilizarem o *feedback* escrito regularmente, melhoram as aprendizagens dos alunos (Black & Wiliam, 1998) e as suas capacidades de identificação e autocorreção dos erros (Santos, 2008). Mas, para promover a autorregulação das aprendizagens dos alunos é necessário que haja uma mudança do estatuto do erro, no contexto da sala de aula. O erro deve deixar de ser algo a esconder de modo a evitar sanções para ser algo inerente a todo o processo de aprendizagem (Hadji, 1994; Pinto & Santos, 2006). Só assim este poderá dar informações importantes para apoiar de forma adequada um processo de avaliação reguladora das aprendizagens.

No entanto, fornecer *feedback* adequado não é tarefa fácil para o professor. Além do seu carácter relativo, o tempo investido na sua elaboração é significativo pelo que é necessário escolher muito bem as tarefas sobre as quais se vai fornecer *feedback*. Por um lado, devem ser escolhidas tarefas que levam os alunos a explicar

a forma como pensaram, pois só assim o professor poderá dispor de informação suficiente para poder dar *feedback* adequado. Os problemas (que potenciam várias abordagens e representações e exigem a explicação do processo de resolução) e as tarefas de natureza mais aberta, como explorações e investigações, que exigem a formulação de conjecturas e a descrição e justificação dos raciocínios através de relatórios, por exemplo, prestam-se a serem trabalhadas em duas fases, beneficiando os alunos do *feedback* escrito fornecido pelo professor. Os testes escritos em duas fases são exemplo de outras oportunidades para o professor exercer o *feedback* escrito com forte intenção reguladora das aprendizagens dos alunos e para os alunos comunicarem gradualmente melhor a forma como pensam matematicamente (Pinto & Santos, 2006; Santos et al., 2010; Semana & Santos, 2010).

Por outro lado, as tarefas a comentar não devem ser sujeitas a qualquer tipo de classificação, pois dará ao aluno uma ideia de conclusão, não suscitando a necessidade de melhorar (William, 1999). Na verdade, a atitude e o comportamento do professor são fundamentais para mostrar aos alunos a natureza e objetivos que se pretendem alcançar na segunda fase do processo de trabalho recorrendo ao *feedback* escrito. A segunda fase constitui uma oportunidade para os alunos poderem refletir sobre o trabalho que fizeram e o possam aperfeiçoar, e é preciso que eles compreendam isso muito bem (Santos, 2005).

A prática continuada de *feedback* escrito não só ajuda os alunos a compreender e interpretar os comentários ao seu trabalho, como ajuda o professor a melhorar a qualidade e adequabilidade do *feedback* fornecido. Tal converge, progressivamente, numa melhoria das produções dos alunos e das capacidades de comunicação escrita do professor (Dias & Santos, 2008; Santos & Pinto, 2018).

Neste texto, partilhamos uma experiência que realizámos em torno do *feedback* escrito, analisando em que medida este teve um efeito positivo na melhoria das produções dos alunos a partir de uma tarefa de natureza problemática que lhes propusemos.

A EXPERIÊNCIA REALIZADA

Escolhemos a tarefa apresentada na figura 1, selecionada de um manual escolar do 8.º ano de escolaridade. Esta tarefa envolve conhecimentos associados ao Teorema de Pitágoras, apelando à capacidade de visualização geométrica dos alunos e à capacidade transversal de comunicação matemática.

É possível colocar numa caixa de ferramentas, com 36 cm de comprimento, 27 cm de largura e 10 cm de altura, um pedaço de cano metálico de 42 cm de comprimento? Explica a tua resposta.

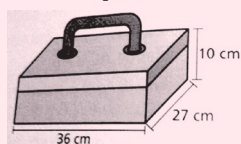


Figura 1. Tarefa selecionada para a experiência realizada

Propusemos esta tarefa a um conjunto de alunos do 8.º ano de escolaridade de um centro de explicações da Póvoa de Varzim e de um centro de estudos de Matosinhos. Do total de dez alunos, selecionámos apenas quatro alunos (três da Póvoa de Varzim e um de Matosinhos) uma vez que, na nossa opinião, as suas resoluções representavam a diversidade de respostas obtidas. Todos os alunos já tinham estudado o tema Teorema de Pitágoras, embora não nos parecesse que tivessem abordado este resultado no espaço. Por este motivo, e por aquilo que observámos do trabalho dos alunos, esta tarefa apresentou-se aos alunos como uma situação problemática – uma questão fechada em que o processo para encontrar a resposta não se encontra imediatamente disponível aos alunos, exigindo que raciocinem sobre os dados para encontrar uma solução.

O *feedback* escrito foi fornecido pelo professor que orientava o trabalho de cada um destes alunos logo após a resolução da tarefa. E os alunos tiveram a oportunidade de reformular as suas produções, com base no *feedback* fornecido, imediatamente após receberem os comentários do respetivo professor.

ANÁLISE DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS

No que se segue, apresentamos as resoluções dos quatro alunos selecionados (Daniel, Manuel, Damião e José – pseudónimos) e analisamos as suas respostas iniciais, assim como o *feedback* que lhes foi dado e as respostas finais por eles realizadas com base nesse *feedback*.

Daniel

A primeira resolução do Daniel (figura 2) sugere que o aluno procurou calcular o volume da caixa para tentar perceber se o cano caberia (ou não) dentro dela.

$$\frac{97.2}{10} - 42 = 97.2 - 42 = 55.2$$

R: O tubo cabia perfeitamente na diagonal.

$$\frac{972}{10} - 42 = 97.2 - 42 = 55.2$$

Figura 2. Resposta do Daniel na primeira fase da tarefa

Na sua tentativa, o aluno enganou-se no próprio cálculo do volume, obtendo um valor errado (97,2), dividindo-o por 10 e subtraindo-lhe o valor da medida do comprimento do cano. Entendemos que a resposta evidencia um processo de resolução pouco claro e inadequado, não se percebendo o que o levou a fazer os cálculos que apresentou, nem como os valores usados encaixavam na situação apresentada. No entanto, aparentemente, o aluno percebeu que o tubo deveria estar na diagonal da caixa, mas não existem evidências do que o levou a referir isso.

Numa tentativa de ajudar o Daniel a perceber que a sua estratégia não estava correta e de o incentivar a mudar de abordagem,

demos-lhe o *feedback* que consta na figura 3. As palavras entre parênteses dizem respeito ao que o Daniel escreveu após receber o *feedback*.

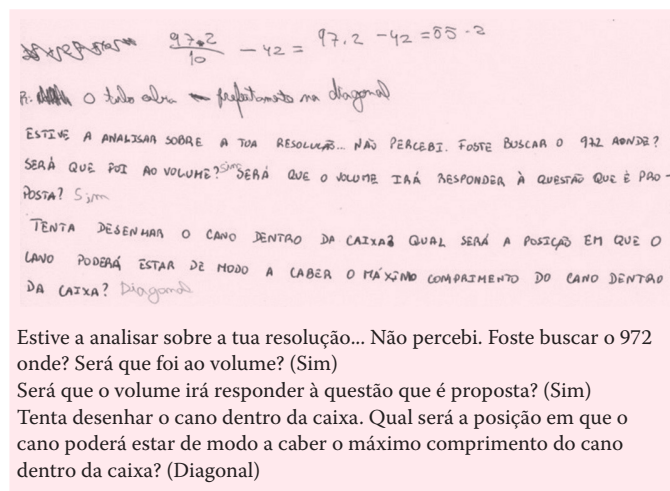


Figura 3. *Feedback* fornecido e respetivas respostas do Daniel na segunda fase da tarefa

Numa segunda oportunidade de resolução, o Daniel respondeu de forma afirmativa às duas questões presentes no *feedback* do professor e respondeu corretamente à última questão formulada. No entanto, desistiu de tentar determinar se o cano caberia dentro da caixa. Assim, da análise que fizemos, verificámos que o *feedback* dado ao Daniel não surtiu um efeito positivo em pleno. Verificámos que o aluno identificou que o objetivo do problema passava por descobrir a medida do comprimento da diagonal espacial da caixa, mas não procedeu à sua determinação, desistindo de completar a questão. Pensamos que tal poderá ter acontecido devido ao facto de o professor ter baseado o seu *feedback* num conjunto de questões de resposta fechada (sim ou não), em vez de ter baseado o *feedback* em questões, comentários ou pistas que incentivassem o Daniel e reanalisar o que já tinha feito (bem) e a debruçar-se sobre o que lhe faltava fazer para completar o seu raciocínio.

Manuel

O Manuel apresentou a seguinte resposta como primeira resolução do problema (figura 4):

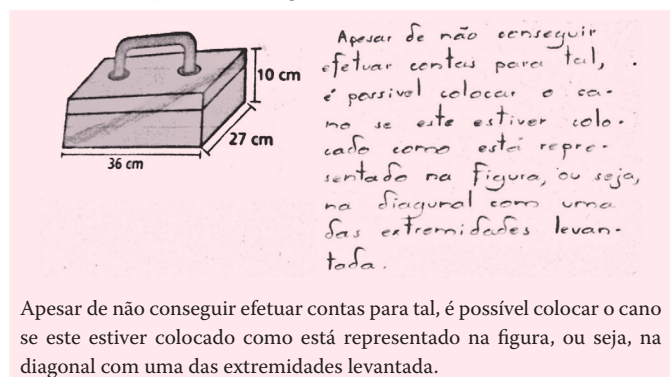


Figura 4. Resposta do Manuel na primeira fase da tarefa

Pudemos verificar que o Manuel percebeu que, ao descobrir a diagonal espacial, poderia chegar a uma conclusão e resolver o problema. No entanto, Manuel afirmou que não possuía informação suficiente para determinar a medida do comprimento da diagonal espacial da caixa.

Perante esta resposta, o docente reforçou positivamente o Manuel e procurou, no *feedback* fornecido, que o aluno se focasse nas medidas que eram apresentadas no enunciado da tarefa: *Será que não consegues chegar à medida dessa diagonal? Tenta explorar mais o teu esquema. Utiliza as medidas que vês na figura, tenta utilizar a figura e os conhecimentos que tens para chegares à resposta. Estás num ótimo caminho.*

Após a leitura do *feedback*, Manuel apresentou a seguinte resolução ao problema proposto (figura 5):

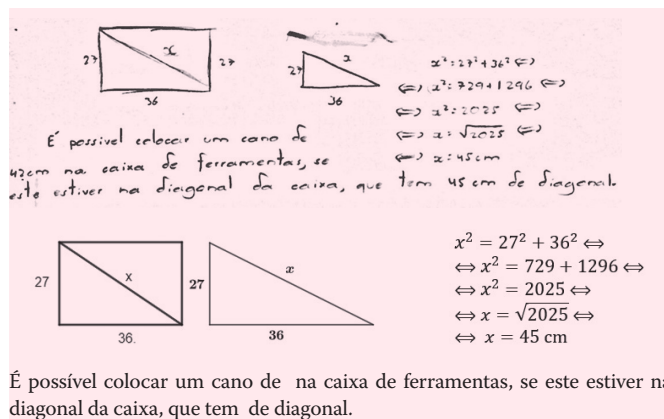


Figura 5. Resposta do Manuel na segunda fase da tarefa

Pudemos observar que o Manuel não só reformulou a sua conjectura, passando a utilizar a diagonal facial, como entendeu perfeitamente o *feedback* escrito que lhe foi fornecido. Nesta segunda fase, respondeu corretamente ao problema proposto e utilizou uma abordagem geral, bastante eficiente. Assim, o *feedback* fornecido surtiu um efeito positivo no aluno, tendo contribuído para uma significativa melhoria da sua resposta.

Damião

Durante a resolução do problema, Damião confessou que havia uma ideia que não percebia e o professor solicitou-lhe o registo da sua dúvida num *post-it*. A dúvida relacionava-se com o formato do cano: o aluno pensava que o cano seria representado pela pega da caixa existente na figura que acompanhava o enunciado do problema. Achámos curioso que, por vezes, as próprias figuras que acompanham os enunciados dos problemas que são apresentados aos alunos os podem confundir e que, portanto, o professor deverá ter algum cuidado na seleção dessas figuras. O Damião foi bem sucedido na sua primeira resposta, apresentando o seguinte raciocínio:

$$D^2 = l^2 + c^2 + h^2$$

$$D^2 = 36^2 + 27^2 + 10^2$$

$$D^2 = 1296 + 729 + 100$$

$$D^2 = 2125$$

$$D = \sqrt{2125}$$

$$\sqrt{2125} \approx 46$$

R: Sim, é possível colocar.

Depois de analisada a resposta, verificámos que o aluno apresentou uma resolução eficaz e correta. Para além de um reforço positivo, o professor incluiu no *feedback* escrito a possibilidade de tornar a resposta com um cálculo mais simples, tentando fazer com que o aluno, em vez de calcular a diagonal espacial, passasse a calcular a diagonal facial da face de medidas 36 e 27 cm. Tal bastaria para chegar à resposta do problema.

O *feedback* dado foi o seguinte: Foi uma ótima resolução! Parabéns! A diagonal espacial resolveu o teu problema. Será que é a única posição que garanta que o cano cabe dentro da caixa?

Na figura 6, apresentamos a segunda produção do Damião, com base no *feedback* fornecido.

$d^2 = 36^2 + 27^2$
 $d^2 = 1296 + 729$
 $d^2 = 2025$
 $d = \sqrt{2025}$
 $d = 45$
 $42 < 45$

R: Não, para além de o cabo caber numa diagonal espacial, cabe também numa diagonal facial.

Figura 6. Resposta do Damião na segunda fase da tarefa

O aluno correspondeu de forma bastante positiva ao *feedback* dado. Para além de dar uma resposta eficaz e eficiente, tenta ser mais esclarecedor no seu raciocínio e justifica os passos que dá. Este aluno apresenta-se como um caso de sucesso na resolução do problema proposto.

José

A resposta que foi entregue pelo José à tarefa foi a seguinte (figura 7).

De facto, o José encontrou duas formas de colocar o cano dentro da caixa, uma envolvendo a diagonal facial da base da caixa e outra com a diagonal espacial da caixa. Desta forma, o aluno mostrou ser eficaz a resolver o problema. Assim, o *feedback* dado estimulou-o a procurar uma forma de chegar diretamente à diagonal espacial, sem calcular a diagonal da base.

$a = ?$
 $A^2 = 36^2 + 27^2$
 $\Rightarrow A^2 = 1296 + 729$
 $\Rightarrow A^2 = 2025$
 $\Rightarrow A = \sqrt{2025}$
 $\Rightarrow A = 45 \text{ cm}$

R: Na diagonal A da caixa, o cano metálico de 42 cm, cabe na caixa.

$b = ?$
 $B^2 = 45^2 + 10^2$
 $\Rightarrow B^2 = 2025 + 100$
 $\Rightarrow B^2 = 2125$
 $\Rightarrow B = \sqrt{2125}$
 $\Rightarrow B = 46 \text{ cm}$

R: Na diagonal B da caixa, o cano metálico de 42 cm, cabe na caixa.

Figura 7. Resposta do José na primeira fase da tarefa.

O *feedback* dado ao aluno foi o seguinte: Muito bem! De facto, o cano metálico cabe na caixa. Será que em vez de fazeres dois passos para chegar à diagonal b conseguias fazer os cálculos num só passo?

No entanto, o *feedback* dado não foi compreendido pelo aluno, tendo o mesmo apresentado a seguinte resposta na segunda fase (figura 8):

$A_{\Delta} = \frac{b \times a}{2}$
 $A_{\Delta} = \frac{48 \times 40}{2}$
 $A_{\Delta} = 960$

Figura 8. Resposta do José na segunda fase da tarefa.

Podemos observar que o José escreve a fórmula da área de um triângulo e que apresenta um valor (48,6) cuja origem não é indicada. Assim sendo, percebemos que o *feedback* dado não foi interpretado de forma correta pelo aluno e até o levou a dar um passo no sentido oposto da resposta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O *feedback* escrito deve ter em consideração o recetor da mensagem para que de facto possa funcionar como um elemento comunicativo com a firme intenção de ajudar os alunos a melhorar as suas produções e as suas aprendizagens. Isto é, o professor deve adaptar a linguagem, o vocabulário e o conteúdo do que comunica a todo e a cada aluno a quem se destina o *feedback*. Na experiência que realizámos, o *feedback* dado aos alunos Daniel e José não surtiu o efeito desejado ou apenas o surtiu parcialmente, uma vez que, perante a mensagem do

professor, estes alunos não conseguiram ter sucesso nas respostas dadas. Porque é que isso terá acontecido? O *feedback* dado ao José foi curto, embora nos pareça ter sido claro e direto; no entanto, o aluno poderá não se ter sentido desafiado a procurar um caminho mais curto para a solução que já tinha encontrado – provavelmente poderíamos ter desafiado o aluno a resolver uma situação um pouco mais complexa ou então a inventar um problema semelhante. Já o *feedback* dado ao Daniel foi um pouco longo e incluiu muitas questões, que poderão ter confundido o aluno, fazendo-o centrar a sua atenção na resposta a essas questões em particular e não conseguindo ver e compreender a mensagem no seu todo, na sua globalidade.

Por outro lado, temos os casos do Manuel e do Damião, em que o *feedback* surtiu o efeito desejado. Em ambos os casos, o *feedback* incentivou os alunos a refletir sobre as respostas já obtidas e a completá-las, melhorá-las, comunicando melhor as ideias e os seus raciocínios. Talvez tenha sido este enfoque do *feedback* na reflexão sobre o trabalho já realizado que tenha contribuído para que cumprisse o seu papel de elemento regulador. Nos casos destes alunos, o *feedback* permitiu ao professor chamar a atenção dos alunos para aspetos que não são captados por eles inicialmente, mas que, numa segunda fase, numa segunda oportunidade, lhes permitem enriquecer as suas respostas.

Verificámos ainda que os alunos envolvidos nesta experiência que realizámos solicitavam a ajuda dos professores para poderem elaborar a resposta ao *feedback*. Por diversas vezes foi necessário remetê-los para a mensagem escrita, coisa que estes tinham relutância em fazer, talvez por não estarem habituados a lidar com situações semelhantes em contexto de sala de aula. Estas reações dos alunos podem ser um indicador da dificuldade que eles revelam em entender o papel do *feedback*: a ideia não é que eles respondam a uma nova questão (vendo o *feedback* como uma nova tarefa ou uma extensão da tarefa anterior), mas sim que usem a informação contida no *feedback* para refletir sobre o que já fizeram e melhorar o que já conseguiram fazer (vendo o *feedback* no seu papel regulador).

O *feedback* escrito é um meio que contribui de forma eficaz para a consciencialização por parte dos alunos dos erros cometidos e também para a busca de formas para os ultrapassar, para além de ajudar a melhorar o seu desempenho, independentemente do que já conseguiram alcançar com a resposta dada. Através de questões, pistas e incentivos à reflexão do aluno, o professor consegue ter uma visão mais aprofundada dos avanços e recuos que os alunos realizam nas tarefas, permitindo recolher evidências para futuras ações educativas do professor. No entanto, tal como Semana e Santos (2010) nos alertam, não basta conhecermos as recomendações da investigação em Educação Matemática acerca das características de um bom *feedback* para que esteja *garantido* que os alunos irão melhorar as suas produções. Dar *feedback* é muito complexo e exige uma constante reflexão do professor acerca do efeito que este tem

na aprendizagem de cada aluno. Sem dúvida, a prática regular de *feedback* ajudará a melhorar o próprio *feedback* dado pelo professor e melhorará também a comunicação de raciocínios por parte do aluno.

Referências

- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice*, 5(1), 7–73.
- Conceição, A. & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando* 8. Porto: Areal Editores
- Dias, S., & Santos, L. (2008). Por que razão é importante identificar e analisar os erros e dificuldades dos alunos? O *feedback* regulador. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 133-143). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Hadji, C. (1994). *A avaliação, regras do jogo: Das intenções aos instrumentos*. Lisboa: Porto Editora.
- Ministério da Educação (ME) (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: ME-DES.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1999). *Normas para a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Santos, L. (2003). Avaliar competências: Uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, 74, 16-21.
- Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.), *Educação e matemática: Caminhos e encruzilhadas. Atas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 169-187). Lisboa: APM.
- Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da SPCE.
- Santos, L., & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do *feedback*. In: *ProfMat2006*. Lisboa: APM.
- Santos, L., & Pinto, J. (2018). Ensino de conteúdos escolares: A avaliação como fator estruturante. In F. Veiga (Coord.), *O ensino como fator de envolvimento numa escola para todos* (pp. 503-539). Lisboa: Climepsi Editores.
- Semana, S., & Santos, L. (2010). O *feedback* em relatórios escritos na aula de matemática. In J. M. Matos, A. Domingos, C. Carvalho & P. Teixeira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática: Comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 180-192). Lisboa: SPIEM.
- William, D. (1999). Formative Assessment in Mathematics. *Equals: Mathematics and Special Educational Needs*, 5(3), 8-11.
- Vale, L. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: Um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

JOÃO CARLOS TERROSO

COLÉGIO GUADALUPE, SEIXAL

JOANA DIAS

ESCOLA BÁSICA DE VALE DE MILHAÇOS, SEIXAL

FILIPA MACHADO

ESCOLA SECUNDÁRIA EMÍDIO NAVARRO, ALMADA

GeoGebra no Ensino Aprendizagem da Trigonometria e Funções Trigonométricas

O ensino e aprendizagem da matemática pode ser potenciado pela utilização da tecnologia em contexto da aula, ajudando à compreensão dos conceitos através da manipulação das suas diferentes representações. Neste artigo procura-se mostrar como os conceitos trigonométricos são apreendidos pelos alunos do 11.º ano de escolaridade quando utilizam o *software GeoGebra* como ferramenta de trabalho. Em particular, pretende-se perceber o papel do *GeoGebra* na conversão entre as diferentes representações de objetos matemáticos e na comunicação matemática.

Para essa análise, utilizaram-se os conteúdos programáticos do domínio Trigonometria e Funções Trigonométricas que são apresentados aos alunos do Ensino Secundário no início do 11.º ano.

INTRODUÇÃO

Uma das principais características de um *software* de Geometria Dinâmica é a possibilidade de movimentar os objetos no ecrã do computador (folha gráfica) sem alterar as propriedades da construção inicial, o que permite, investigar, descobrir, confirmar resultados e fazer simulações, permitindo, inclusive, levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática.

Ferramentas computacionais como o Cabri Géomètre, Geometer's Sketchpad, ou o GeoGebra permitem a construção e manipulação de objetos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objetos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes. Possibilitam ainda um contexto que promove a discussão professor-aluno e aluno-aluno, acerca dos objetos e propriedades observadas, favorecendo a comunicação entre pares e professor-aluno.

O *GeoGebra* é um *software* de Matemática dinâmica que combina a facilidade de utilização de um *software* de geometria dinâmica com alguns recursos de um sistema CAS (*Computer Algebra System*) que permite manipulação simbólica de expressões e uma folha de cálculo. Entre outras funcionalidades, o *GeoGebra* permite trabalhar em simultâneo com janelas/folhas diferentes (figura 1): gráfica; algébrica e numérica; CAS; folha de cálculo; e permite visualizar, em simultâneo, diferentes representações de um mesmo objeto matemático.

Assim, diferentes representações de um mesmo objeto matemático estão relacionadas dinamicamente de tal forma

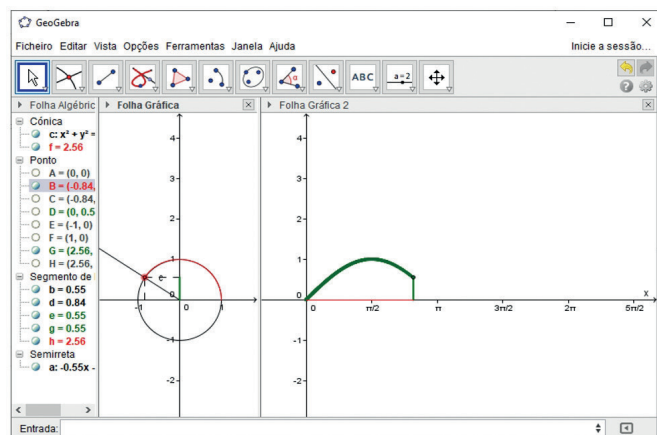


Figura 1. Janela GeoGebra com folha algébrica e duas folhas gráficas 2D

que cada representação se adapta automaticamente a mudanças efetuadas em qualquer das outras representações, independentemente da representação utilizada inicialmente para “definir/construir” o objeto.

A capacidade de efetuar conversões entre diferentes representações de um mesmo objeto é, segundo Duval (1993), condição absolutamente necessária para a formação de conceitos matemáticos. Por exemplo, o NCTM afirma que “o poder gráfico das ferramentas tecnológicas possibilita o acesso a modelos visuais que são muito poderosos, mas que muitos alunos são incapazes ou não estão dispostos a realizar de modo independente” (NCTM, 2007, p. 27).

Segundo Costa (1997) um dos obstáculos no estudo das funções trigonométricas, refere-se ao estatuto dos objetos trigonométricos. Costa assinala a dificuldade de compreensão do estatuto dos objetos trigonométricos, uma vez que estes surgem inicialmente no quadro geométrico e numérico associados ao triângulo retângulo, mais especificamente, na resolução de problemas envolvendo triângulos retângulos, sem características funcionais. Para se passar ao estudo das funções trigonométricas é necessário estender as definições de seno, cosseno e tangente ao ângulo generalizado, relacionar estas definições com o sistema de coordenadas cartesianas e estabelecer a correspondência entre a abscissa, x , de cada ponto da reta real, com o respetivo seno e cosseno do ângulo de amplitude, medida em radianos, igual a x .

CONTEXTO EDUCATIVO

Nos próximos pontos, apresentam-se excertos de diálogos que ocorreram durante entrevistas realizadas a dois alunos da turma envolvida na investigação, a Laura e o Pedro (nomes fictícios para preservar a identidade dos mesmos), onde se procura, analisando as resoluções por eles apresentadas relativas a uma tarefa (figura 2), compreender se o ambiente de trabalho possibilitado pela mediação do GeoGebra, favorece as aprendizagens e a comunicação.

Com esta tarefa, de carácter eminentemente prático, pretendia-se ajudar os alunos a atingir os seguintes objetivos: identificar as transformações geométricas que permitem obter o gráfico

cartesiano de uma função real de variável real da família $f(x) = a \sin(bx + c) + d$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $c, d \in \mathbb{R}$, como imagem geométrica do gráfico cartesiano da função seno; identificar, por análise do seu gráfico cartesiano e/ou expressão analítica, o contradomínio e o período fundamental de funções desta família; determinar uma expressão analítica de uma função trigonométrica que verifique determinadas propriedades ou da qual se conhece parte da sua representação gráfica. Pretendia-se ainda, com mediação do GeoGebra, favorecer a comunicação.

A tarefa foi apresentada aos alunos em suporte de papel e, para a resolver, os alunos dispunham de um computador equipado com o software GeoGebra.

Tarefa 1

- Na caixa de entrada da folha gráfica introduz cada uma das funções reais de variável real definidas pelas expressões apresentadas na tabela seguinte. Depois, na folha algébrica do GeoGebra, desativa todas as funções exceto a função f .

Nota: deves configurar a folha gráfica de forma que, no eixo Ox , a “unidade de escala” seja π e a distância entre marcas $\frac{\pi}{2}$.

$f(x) = \sin x$	$g(x) = 2 + \sin x$	$h(x) = -1 + \sin x$	$i(x) = 3 \sin x$
$j(x) = 4 \sin x$	$k(x) = -3 \sin x$	$l(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$m(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$n(x) = \sin(x + \pi)$	$o(x) = \sin(2x)$	$p(x) = \sin(3x)$	$q(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

- Na folha algébrica do GeoGebra ativa uma função de cada vez e completa a tabela seguinte:

Função	Domínio	Contradomínio	Período fundamental
f			
g			
h			
i			
j			
k			
l			
m			
n			
o			
p			
q			

- Num pequeno texto identifica as transformações geométricas que permitem obter os gráficos de cada uma das funções referidas em cada alínea como imagem do gráfico da função f e quais as alterações que se verificam em relação ao contradomínio e período fundamental.
- Determina uma expressão para a função cujo gráfico pode ser obtido como imagem do gráfico da função definida pela expressão $f(x) = \sin(x)$ e verifica as seguintes propriedades:
 - tem contradomínio $[1, 3]$ e período $\frac{\pi}{2}$.
 - tem contradomínio $[-1, 3]$, período π .
- Escreve uma expressão que defina a função real de variável real representada em referencial ortogonal xOy na figura seguinte.

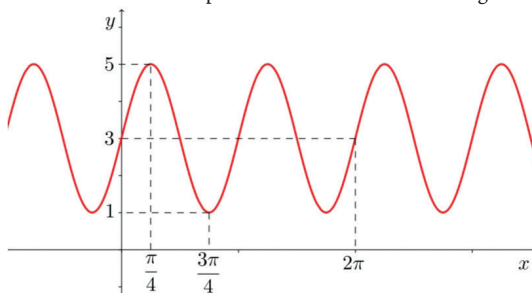


Figura 2.

Os diálogos professor/aluno ocorrem após os alunos terem resolvido as tarefas e têm por objetivo ajudar os alunos a comunicar os resultados, a consolidar os conceitos envolvidos e corrigir eventuais erros e, simultaneamente, ajudar o professor a perceber a forma como os alunos aprenderam os conceitos matemáticos envolvidos na tarefa.

No diálogo seguinte, entre a Laura e o professor, pode observar-se como a presença do GeoGebra pode favorecer a comunicação, ajudando a aluna a reconhecer o erro cometido na identificação do período fundamental da função r.v.r. definida por $p(x) = \sin(3x)$ e a corrigi-lo.

[...]

Professor: Na função p indica o período fundamental como sendo igual a $\frac{\pi}{2}$...

L.: Sim.

Professor: Pode explicar-me como obteve esse valor?

[A Laura ativa as representações gráficas do seno e da função (figura 3) observa-as e, aparentemente, fica confusa].

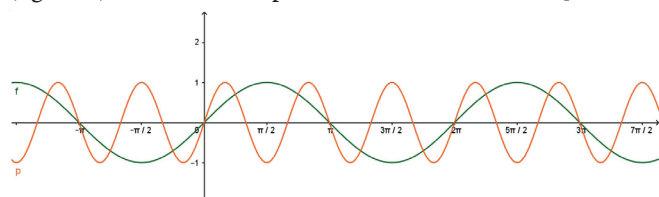


Figura 3. Representações gráficas das funções definidas por $f(x) = \sin x$ e $p(x) = \sin(3x)$

Professor: Pode indicar-me onde posso observar, no gráfico, o período fundamental de p ?

L.: Começa aqui [aponta para a origem do referencial] e termina aqui [aponta o ponto de coordenadas $(\frac{2\pi}{3}, 0)$, cujas coordenadas não estão identificadas no referencial].

[o semblante da Laura mostra que percebe o erro mas tem dificuldade em avançar].

Apercebendo-se da dificuldade da aluna o professor lança nova questão:

Professor: Quantas vezes cabe o período fundamental no intervalo $[0, 2\pi[$?

L.: Penso que três vezes. Sim, é isso, aqui, aqui e aqui [apontando, na folha gráfica, para os pontos de abcissas $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e 2π].

Professor: Então, o período fundamental de p é?

L.: 2π dividido por 3.

Comparando, por sugestão do professor, os gráficos da função p e da função seno a Laura consegue identificar o erro cometido e, em diálogo com o professor, mediado pelo GeoGebra, reconhecer a relação entre os períodos fundamentais das duas funções, o que lhe permite obter o valor pedido.

No diálogo seguinte, entre o Pedro e o professor, pode observar-se a importância do GeoGebra quer no que se refere às conversões entre as representações algébrica e gráfica, favorecendo o desenvolvimento dos invariantes operatórios relativos a cada transformação e/ou à composição das mesmas, quer no que refere à argumentação do aluno.

P.: ... O contradomínio é fácil, sabemos que o seno está entre -1 e 1, por isso é só ver as transformações, que com os gráficos, é mais fácil, olhamos para um e outro e vê-se logo.

Professor: E para o período fundamental como fez?

P.: Comparei com a função seno.

Professor: Como assim?

P.: Quando só há translações, o gráfico só se desloca para cima, ou para baixo, para a esquerda ou direita, por isso o período fica na mesma. O período também não se altera quando se multiplica o seno por um número.

Professor: Porquê?

P.: Porque nesse caso o gráfico tem uma dilatação vertical, mas na horizontal fica tudo na mesma.

Professor: O que quer dizer com fica tudo na mesma?

[O Pedro ativa as funções i , j e h e argumenta (figura 4)]

P.: Quando olhamos para o gráfico destas funções vemos que o período fundamental começa aqui [apontando, na folha gráfica,

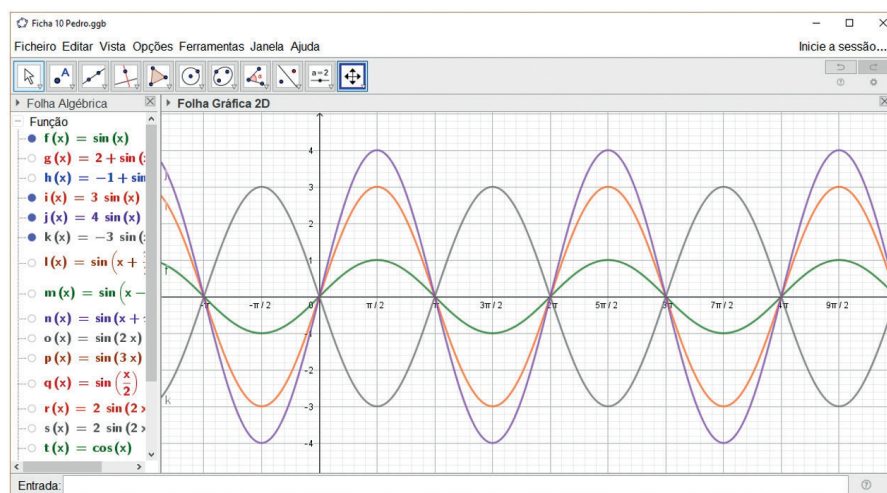


Figura 4. Folha gráfica apresentada pelo Pedro com as funções f , i , j e h .

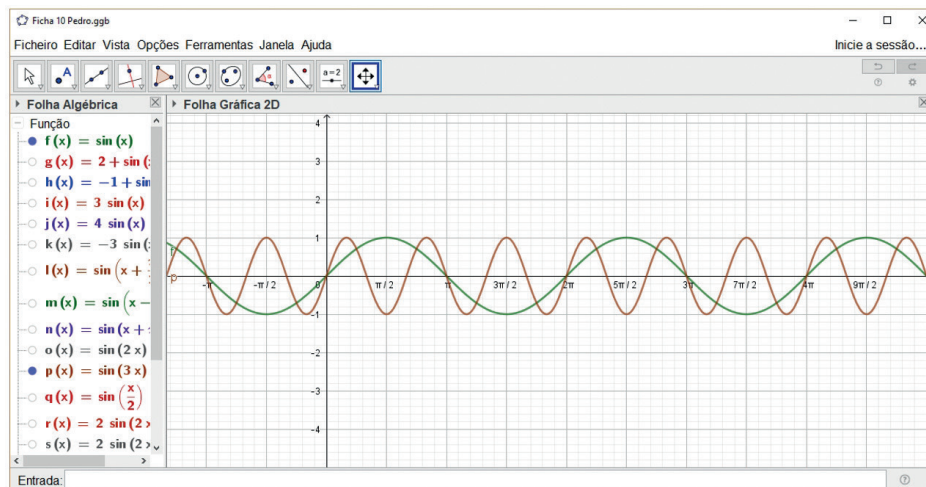


Figura 5. Folha gráfica com as funções f (função seno) e p (definida por $p(x) = \sin(3x)$) ativas.

para o ponto de coordenadas $(0, 0)$ e acaba aqui [apontando para o ponto de coordenadas $(2\pi, 0)$].

P.: Estas aqui é que foram mais difíceis [referindo-se às funções o , p e q]. No contradomínio não, mas no período fundamental fiquei um bocado baralhado...

Professor: Então, como resolveu o problema?

P.: Comparando os gráficos com o do seno.

[...]

P: Mas o pior foi na função p [ativa o gráfico da função]. Aqui onde acaba a volta [aponta para o ponto de coordenadas $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ (figura 5)] não aparece nenhum número. Fica mais difícil assim. Mas depois, comparando, os gráficos, vê-se que o período da função seno é três vezes maior que o da função p . Depois lembrei-me que isto tem a ver com as dilatações e contrações horizontais e, como neste caso o coeficiente é $\frac{1}{3}$, fica $\frac{2\pi}{3}$.

No seu discurso, o Pedro recorre frequentemente às representações gráficas obtidas no GeoGebra, para sustentar as suas asserções. A comparação dos gráficos cartesianos das diferentes funções com o gráfico da função seno permitem que o Pedro identifique as transformações geométricas associadas a cada um dos parâmetros bem como as propriedades que se mantêm invariantes. A possibilidade de recorrer ao GeoGebra ajuda o Pedro a clarificar os conceitos matemáticos envolvidos na resolução da tarefa e na organização da sua argumentação, favorecendo assim a comunicação e a aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os diálogos apresentados reforçam a ideia de que ambientes de Geometria Dinâmica mediados por *softwares* como o GeoGebra, porque permitem uma forte ligação entre as diferentes representações de um mesmo objeto matemático, melhorando assim a capacidade de conversão entre as mesmas, favorecem as aprendizagens e promovem a argumentação e a comunicação matemática, ajudando a detetar e ultrapassar erros.

Assim, porque a apropriação do GeoGebra é feita à medida que os alunos o vão integrando na sua atividade, a sua utilização permite o acesso à visualização de conceitos/objetos matemáticos, o que favorece os diálogos dos alunos com o professor, permitindo ao professor entender melhor o pensamento do aluno mediado pelo GeoGebra e ao aluno uma melhor regulação das suas aprendizagens.

Parece-nos por isso que a utilização do GeoGebra, ou outros softwares de Matemática Dinâmica, deve ser incentivada quer dentro quer fora da sala de aula, promovendo o trabalho autónomo dos alunos e tornando-os agentes da sua própria aprendizagem.

Referências

- Costa, N. (1997). *Funções Seno e Cosseno: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental" e do computador*. Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Acedido em <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11139>
- Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A Matemática no início do superior*. Tese de Doutoramento. Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia-Universidade Nova de Lisboa.
- Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 5. IREM – ULP, Strasbourg.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

EMANUEL MARTINHO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS D. MARIA II – CACÉM

ANTÓNIO DOMINGOS

FCT-UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

A comunicação em matemática e os desafios da Língua Gestual Portuguesa

JOANA TINOCO

MARIA HELENA MARTINHO

ANABELA CRUZ-SANTOS

A aprendizagem da matemática é um processo dinâmico no qual cada aluno vai progressivamente construindo o seu próprio conhecimento matemático, e fá-lo a partir de experiências pessoais, bem como do retorno que recebe dos seus pares, de professores e de outros adultos. Esta construção é amplamente favorecida se o aluno estiver sujeito a experiências que lhe possibilitem a construção social do conhecimento, através do discurso, da atividade e da interação (NCTM, 2017).

Mas como é que se processará a comunicação na aula de Matemática quando professor e alunos não são fluentes numa língua comum? Esta foi uma das questões com que nos deparámos quando decidimos realizar uma investigação numa turma constituída por alunos com deficiência auditiva (DA), onde a professora era fluente em Língua Portuguesa (LP), na sua vertente oral e escrita, e a língua dominante nos alunos era a Língua Gestual Portuguesa (LGP).

Vivemos numa sociedade que defende a escola inclusiva, onde as características de cada um, apesar de poderem ser culturalmente diferentes, são vistas como um complemento do outro e não como ameaças ou perigos que põem em risco a nossa própria integridade. Assim, a escola inclusiva deve ser um local onde a todos e cada um dos alunos é favorecida a aquisição de um nível de educação e formação facilitadoras da sua plena inclusão social.

Para tal, é necessária a criação de condições para que a vida na comunidade escolar seja entendida, não só como o partilhar do mesmo espaço físico, mas também como um local onde a comunicação seja satisfatória entre todos, permitindo a interação entre os vários elementos que a constituem e onde haja um processo de aprendizagem global e conduzido na língua natural de cada um (Cabral, 2005), que, no caso dos alunos portugueses com deficiência auditiva, é a Língua Gestual Portuguesa. Cabe aos profissionais que trabalham com estes alunos poderem pensar o currículo e adaptar as suas práticas às necessidades, características e interesses de cada um deles (Freire & César, 2007), valorizando a educação bilingue e bicultural (Gonçalves, 2005), dentro e fora da escola.

Apesar de haver evidências de que a aprendizagem matemática que alunos com DA realizam segue processos semelhantes à

dos seus pares ouvintes, não se verificando correlação entre o nível de surdez e o desempenho em Matemática (Nunes, Evans, Barros, & Burman, 2011), quando se efetua a comparação entre a idade escolar e a idade cronológica verifica-se um desfasamento, em Matemática, entre os alunos com DA e os seus pares de desenvolvimento típico de 2 a 3,5 anos (Baptista, 2008). Por norma, os alunos com DA possuem níveis de escolaridade mais baixos, percursos escolares descontinuados e marcados pelo abandono precoce da escola, o que faz com que sejam cada vez menos representativos à medida que se avança no grau de escolaridade (Nunes, 2012).

Para estes alunos, há uma questão que fará sempre a diferença: nem sempre o professor de Matemática e os alunos possuem a mesma língua materna, ou são fluentes numa língua comum. Esta questão não pode ser respondida, de forma simplista, pela presença de um intérprete de LGP nas aulas de Matemática destes alunos, pois, por um lado, a mera existência não é por si só sinónimo de que a mensagem esteja a passar entre os vários intervenientes de forma eficaz. Por outro lado, a LG[P] ainda não é suficientemente adequada à representação de ideias matemáticas com a clareza ou profundidade necessárias (Rowley, 2001). Na verdade, muitos gestos terminológicos não estão ainda estabilizados ou padronizados, e muito do vocabulário específico da disciplina de Matemática ainda não está integrado no léxico da LGP (Carvalho, 2013), como é o caso de paralelogramo, isósceles, escaleno e teorema (Nunes, 2012), algarismo, décima, centésima e milésima, decimal, dezena, centena e milhar, fração, menor e maior, múltiplo, número primo, operação, percentagem, potência, problema, quatrocentos, sequência, trezentos e vinte e cinco, valor aproximado e valor exato (Almendra, 2014), entre muitos outros.

Perante esta constatação, procurámos dar resposta à questão: *Que desafios linguísticos ocorrem na aula de Matemática com alunos com deficiência auditiva?* Para tal, procedemos à observação de aulas de Matemática, durante um período letivo, de janeiro a março, de uma turma do 6.º ano de escolaridade, constituída por quatro alunos com deficiência auditiva, de uma escola de referência para o ensino bilingue da Região Norte de

Portugal. Estas aulas contavam com a presença da professora de Matemática e ainda de uma intérprete de LGP. Iremos analisar neste artigo alguns episódios que ocorreram com uma aluna, a Carla.

CASO CARLA

Carla nasceu numa cidade do Norte de Portugal, tinha onze anos e uma surdez severa a profunda, diagnosticada aos vinte e seis meses (pré-linguista). Usava próteses bilaterais e apesar de fazer leitura da fala, não o fazia de forma eficiente, dependendo muito da tradução simultânea realizada pela intérprete de LGP. Carla frequentou turmas bilingues desde o pré-escolar, exceto no primeiro e segundo anos, em que esteve inserida numa turma regular.

Carla era uma das alunas da turma com maior perda auditiva, o que não a impedia de interagir ativamente ao longo das aulas observadas. Sempre que sentia necessidade, solicitava a presença da professora e, se esta estivesse ocupada, recorria à intérprete de LGP ou a colegas. Trata-se de uma aluna muito expansiva e ávida de conhecimento. Apesar de comunicar em LGP, Carla usava preferencialmente a LP oral para comunicar. Procurava superar a sua forte limitação auditiva recorrendo à LGP, à leitura labial da língua portuguesa falada e à língua portuguesa escrita, sendo nesta componente que demonstrava maiores dificuldades ao nível da compreensão.

Carla revelou alguma limitação ao nível do vocabulário, quer utilizado no dia-a-dia, quer vocabulário matemático. Essa dificuldade ficou evidente na leitura de enunciados escritos em que desconhecia termos do dia-a-dia. Alguns exemplos: “Indica os termos... O que é indica?”, “o que quer dizer... produção de maçãs?”, “Tinha [o preço] marcado. Marcado?” ou “Camisola cujo preço... cujo???”.

Um exemplo ilustrativo é dado pela sua reação ao enunciado que inclui o extrato seguinte:

Para realizar esta experiência, vais usar um recipiente graduado. Começa por escolher alguns objetos de formas e dimensões diferentes para serem mergulhados em água. De seguida deita água no recipiente graduado até à marca de vinte decilitros. Mergulha, um por um, todos os objetos que escolheste no recipiente, de modo que fiquem completamente debaixo de água (...). (Oliveira et al., 2011, p. 8)

Perante este enunciado, Carla sentiu-se perdida com a expressão *um por um* por não lhe atribuir qualquer significado. O episódio vem retratado de seguida e revela como a pouca fluência em língua portuguesa pode prejudicar a compreensão de um enunciado.

Carla (para outra colega): Isto é muitos... é para escolher um.

Professora: Lê bem, lê bem.

Carla: Mas aqui *um por um*.

Professora: Sabes o que quer dizer *um por um*? (...) Mergulhou todos...

Carla: Mas não diz *cada um*... diz *por um*... não percebo

Professora: *Um por um* é um de cada vez.

Carla: Mas aqui não diz *cada um*!

Professora: *Um por um*. É igual.

Carla: Mas eu não sei.

Professora: Mas a gente está, mas a gente está a dizer...

Intérprete (para a professora): É um conceito que ela...

Intérprete (em LGP e oralmente): É igual.

Professora: É igual.

Carla: E porque não está *cada um*?

Repare-se que a aluna possui um leque muito restrito de vocabulário e parece sentir-se confortável com termos seus conhecidos e desconfortável com os que não o são. Neste caso, como não se sentia familiarizada com a expressão *um por um*, foi com estranheza e relutância que o aceitou como sinónimo de *cada um*, mesmo após o esclarecimento, por parte da professora e da intérprete de LGP.

No que respeita a vocabulário matemático, Carla procurava associar os termos que desconhecia a outras palavras cuja fonética se aproximava. Por exemplo, desconhecia o significado da palavra proporcionalidade, mas tentou dar-lhe sentido dizendo “proporção e nacionalidade”, recorrendo a palavras que conhecia. Similarmente, quando a professora referiu a unidade fundamental para medir volumes, Carla associou fundamental a fundo e volume a nível sonoro.

Esta limitação em termos de vocabulário, provocada pela pouca fluência em LP, associada à limitação auditiva, justificava a frequente solicitação de apoio. Em seguida transcreve-se outro episódio ilustrativo de uma situação ocorrida em sala de aula, onde a aluna demonstra conhecer o gesto representativo da unidade de medida decilitro, mas não a sua correspondência em LP, recorrendo por esse motivo à intérprete.

Professora: Vejam lá a pergunta, se faz favor. Releiam.

Carla: Dois dois vírgula cinco.

(A aluna refere-se a 22,5 e faz o gesto de *decilitro* para a intérprete, que traduz).

Intérprete: Decilitros.

Carla: Decilitros de sumo.

Professora: De quê?

Carla: Sumo. De sumo.

Professora: Leiam.

Intérprete: Ela disse decilitros.

Professora: Quem é que disse decilitros?

Intérprete: A Carla.

Professora: Mas ela está-me a dizer sumo, sumo, sumo.

Intérprete: Mas antes disse decilitros.

Note-se que Carla conhecia o gesto para representar a unidade de medida decilitro, mas desconhecia a sua correspondente em

LP, pelo que recorreu à ajuda da intérprete de LGP para que posteriormente pudesse dar à professora uma resposta correta. Neste caso, a professora não ouviu a resposta dada pela aluna, ou julgou que esta estaria a ter uma conversa paralela com a intérprete de LGP. Percebendo, a intérprete de LGP interveio reforçando a resposta dada. Repare-se, também, na forma como a aluna efetuou a leitura do valor numérico, utilizando a tradução linear da utilizada em LGP, ou seja, algarismo a algarismo: dois dois vírgula cinco, diferente da forma usual de leitura numérica em língua portuguesa.

A relação entre a LGP e a LP não é linear, uma vez que ambas possuem estrutura própria, o que pode gerar alguma confusão. Carla tinha um domínio maior da LGP do que da LP, como tal, ela desenvolvia todos os seus raciocínios utilizando por base a LGP. Quando era chamada a verbalizar, a aluna fazia a tradução direta de LGP para LP, o que resultava em construções fráscas desestruturadas ou em leituras de números de forma não convencional. Com os episódios que se seguem pretendemos realçar algumas situações que evidenciam o conflito entre a LGP e a LP e onde a tentativa de tradução direta acabou por induzir em erro.

Carla: Oito ... é metade ... oito é metade...

Professora: Oito é metade de quatro? Metade é mais ou menos do que o número inicial?

Carla: Mais.

Professora: E o dobro?

Carla: Oito vezes dois.

Professora: O dobro de quatro quanto é que é?

(...)

Professora: Então se é o dobro, não pode ser metade, ou pode?

Carla: Oito vezes dois.

Professora: Não é oito. É quatro. Ó Carla, tu disseste-me que oito era metade de quatro. Não foi isso que tu disseste?

Carla: E quatro metade dois.

Professora: E quatro é metade de dois? Não! Dois é metade de quatro. Quatro é metade de oito. É exatamente o contrário. Tu tens, só tens é que trocar. Não é oito que é metade. Quatro é que é metade de oito.

Repare-se que em LGP se faz a sequência de gestos oito – metade – quatro, que significa, se fizermos metade de oito dá quatro. Carla, fazendo a tradução direta do seu pensamento em LGP para LP utilizou esta mesma sequência quando tentou explicar à professora que a metade de oito era quatro. Esta não percebeu que a aluna estaria a fazer a tradução direta e sinalizou, erradamente, um erro, deixando a aluna muito confusa.

A construção fráscica diferente da usual também provocou alguns constrangimentos a esta aluna, nomeadamente na comunicação com a professora. No episódio que a seguir partilhamos, onde é pedido que os alunos encontrem o vigésimo termo da sequência

$5+7n$, conhecendo alguns termos da sequência mas sem que fosse conhecido o termo geral, apesar da aluna oralizar, a professora não entende o que ela quer dizer, pois é dito de uma forma diferente da convencionada. Estas situações ocorriam com frequência e deixavam quer a professora quer a aluna visivelmente incomodadas.

Carla: Já sei! Cem mais sete. É cinco vez vinte igual cem mais sete. Cento e sete.

Professora: Porquê 107? Quantas vezes é que eu acrescente...

Carla: Porque o sete e mais e mais e então cinco vez vinte mais sete.

Professora: Não sou capaz de perceber o que estás a dizer...

Repare-se que a aluna tenta indicar como procedeu justificando o seu raciocínio, mas fá-lo utilizando uma linguagem de tal modo diferente da convencional que a professora acaba por confessar que não consegue perceber o que esta lhe estava a tentar dizer, apesar de reconhecer que a resposta final estava correta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Verificámos que foram muitos os desafios linguísticos enfrentados pela aluna ao longo das aulas observadas. Um dos desafios foi a fluência e domínio proficiente em LP, oral e escrita, que afeta a interpretação dos enunciados das tarefas e, consequentemente, a sua resolução. Foi notório que a aluna, após a leitura do enunciado, precisava da professora e da intérprete, pois várias foram as palavras ou expressões por si desconhecidas e que fazem parte do léxico comum, como por exemplo, produção (de maçãs), (preço) marcado, um por um, entre outras. Outro desafio prendia-se com palavras com a mesma grafia em LP mas com diferentes significados de acordo com o contexto, por exemplo, volume (sonoro ou como espaço ocupado).

Foi possível evidenciar as dificuldades causadas, em sala de aula, pelo facto de muitos gestos terminológicos não estarem ainda estabelecidos. Para colmatar estas dificuldades, a intérprete recorria à soletração para LGP, na qual cada letra representa um gesto, ou à criação de gestos combinados com os alunos, e que apenas eram válidos no contexto daquele grupo turma.

O facto das duas línguas, LGP e LP, terem uma estrutura própria e bastante distinta, cuja tradução não é linear, conduziu a situações de má interpretação e compreensão por parte da professora do discurso da aluna. Este mesmo problema colocou-se na leitura de números representados com vários algarismos. De facto, quando se transpõe, traduzindo literalmente de LGP para LP, a leitura não é a convencional pois não respeita o valor posicional de cada algarismo.

Ficou evidente o desconforto vivido pela professora de Matemática desta aluna devido ao desconhecimento das barreiras linguísticas causadas pelas diferentes estruturas que compõem as duas línguas, tendo chegado a pedir à professora

de educação especial que lhe arranjasse um livro “que me ajude a decodificar alguns dos comportamentos dos miúdos... porque é que eles não compreendem isto, o que é que eu tenho de fazer para...”

A presença de um intérprete de LGP ou a simples tradução dos conteúdos de LP para LGP não é suficiente para que os alunos com DA obtenham níveis de sucesso comparáveis aos seus pares de desenvolvimento típico, estando a escola e os professores de matemática sujeitos a desafios que devem conhecer para poder superar e conduzir os seus alunos ao sucesso educativo em contextos inclusivos.

Referências

- Almendra, I. M. S. (2014). *Análise e identificação dos termos matemáticos utilizados no 1.º e 2.º ciclo do Ensino Básico e sua correspondência na Língua Gestual Portuguesa*. (Tese de Mestrado não publicada). Instituto de Educação. Universidade do Minho: Braga.
- Baptista, J. A. (2008). *Os surdos na escola: A exclusão pela Inclusão*. Vila Nova de Gaia: Fundação Manuel Leão.
- Cabral, E. J. F. (2005). Dar ouvidos aos surdos, velhos olhares e novas formas de os escutar. In O. Coelho (Coord.), *Perscrutar e Escutar a Surdez* (pp. 37–58). Santa Maria da Feira: Edições Afrontamento.
- Carvalho, P. V. (2013). Ensino sistemático de vocabulário escolar a alunos surdos. In O. Coelho & M. Klein (Coord.), *Cartografias da Surdez. Comunidades, Línguas, Práticas e Pedagogia* (pp. 177–188). Porto: Livraria de Psicologia e Educação.
- Freire, S., & César, M. (2007). Processo de inclusão de alunos surdos

no ensino regular: um estudo de caso. In D. Rodrigues (Ed.), *Investigação em Educação Inclusiva* (Vol. 2, pp. 211–232) Lisboa: Fórum de Estudos de Educação Inclusiva, Faculdade de Motricidade Humana.

Gonçalves, V. T. (2005). A escola inclusiva e a oportunidade do virar da página na educação dos surdos. In O. Coelho (Coord.), *Perscrutar e Escutar a Surdez* (pp. 98–105). Santa Maria da Feira: Edições Afrontamento.

NCTM (2017). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*. Lisboa: APM.

Nunes, L. S. T. C. (2012). *Os alunos surdos e a Matemática: um projeto de intervenção em Geometria*. (Tese de Mestrado não publicada). Escola Superior de Educação de Lisboa: Lisboa.

Nunes, T., Evans, D., Barros, R., & Burman, D. (2011) *Promovendo o sucesso das crianças surdas em matemática: uma intervenção precoce*. Comunicação oral apresentada no XIII CIAEM-IACME, Recife: Brasil.

Rowley, H. (2001). *Teaching strategies in mathematics: differences in sign language use*. (Tese de Mestrado não publicada). National Technical Institute of the Deaf. Rochester Institute of Technology.

JOANA TINOCO

CIED – UNIVERSIDADE DO MINHO

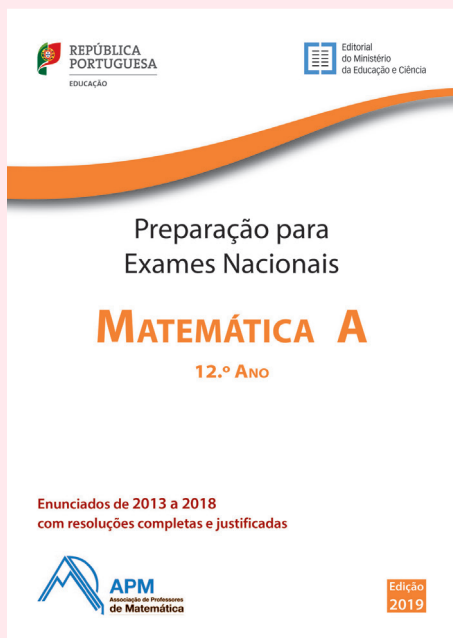
MARIA HELENA MARTINHO

CIED – UNIVERSIDADE DO MINHO

ANABELA CRUZ-SANTOS

CIED – UNIVERSIDADE DO MINHO

PUBLICAÇÕES APM



Preparação para Exames Nacionais de Matemática A, 12.º Ano

Enunciados 2013-2018 com resoluções completas

Já está disponível a versão atualizada desta publicação, com resoluções completas e justificadas, elaborada por equipas da Associação de Professores de Matemática.

À venda também na Loja da APM.

Venda ao público: **16,90€**;
preço de sócio: **15,00€**

Férias na Sildávia

A Sildávia tem um sistema monetário um pouco estranho. Há moedas de três tipos, que valem um, cinco e doze sildares.

Nas férias, o Vítor e o Mário foram até lá. No último dia, foram a uma loja comprar uma T-shirt com a bandeira do país.

O Vítor pagou a sua com dez moedas, umas de “12” e outras de “1”.

Já o Mário usou as suas últimas onze moedas, sendo umas de “5” e as restantes de “1” para comprar a dele.

Qual é o preço de uma T-shirt?



(Respostas até 31 de março, para zepaulo46@gmail.com)

DATA DE NASCIMENTO

O problema proposto no número 147 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Estava no café quando chegou a Manuela, acompanhada de um amigo que se apresentou: “Sou o Luís.”

Quando começámos a falar de matemática e de problemas, disse-me ele:

– Vê lá esta curiosidade. Em 2021, no dia em que fizer anos, a minha idade vai ser um divisor do ano em que nasci. E mais, se multiplicarmos os números correspondentes a esse dia, a esse mês e à idade que terei nessa altura, o resultado é precisamente o ano em que nasci.

Fiz uns cálculos.

– Só com estas indicações, não é possível descobrir quando nasceste.

– Ah! – Acrescentou ele. – Mas se soubesses a minha idade, saberias logo a resposta.

Qual é a data do teu nascimento do Luís?

Recebemos 12 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Eugénia Graça Martins (Lisboa), Fausto Barros da Silva (Coimbra), Graça Braga da Cruz (Ovar), Guilherme Salvador, Leticia Martins (Guimarães), Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Susana Dias (Torres Novas) e Vítor Fernandes (Guimarães).

As estratégias seguidas pelos nossos leitores foram muito parecidas. A principal diferença surge logo no início, na procura dos possíveis anos de nascimento, em que algumas resoluções utilizaram o computador ou a máquina de calcular. Mas tal não era preciso. Demos a palavra ao Mário:

A primeira constatação é a seguinte: se a idade do Luís, no dia em que fizer anos em 2021, é um divisor do ano em que nasceu... será também necessariamente um divisor de 2021.

De facto, sendo i a idade do Luís no dia em que fizer anos em 2021, então $2021 - i = ni$ para algum natural n . Ou seja:

$$2021 = (n+1)i.$$

Como $2021 = 43 \times 47$, podemos então concluir que, no dia em que fizer anos em 2021, o Luís fará 43 ou 47 anos. No primeiro caso terá nascido em 1978; no segundo em 1974.

A partir daqui, as diversas resoluções são muito parecidas.

Analisemos cada um dos casos:

A) Caso faça 43 anos, como $1978:43 = 46$, então 46 terá que ser decomposto como o produto de dois números naturais, d e m , com $1 \leq d \leq 31$ e $1 \leq m \leq 12$.

Como $46 = 23 \times 2$, então teremos neste caso uma única hipótese para o dia e para o mês do nascimento do Luís: 23 de fevereiro!

B) Caso faça 47 anos, como $1974:47 = 42$ e como $42 = 2 \times 3 \times 7$, teremos quatro hipóteses para a sua decomposição num produto de tipo $d \times m$: 21×2 , 14×3 , 7×6 e 6×7 .

Assim, a última informação do Luís implica que... o primeiro caso seja o escolhido. A sua data de nascimento será então 23 de fevereiro de 1978.

Pedrosa Santos acrescenta o seguinte comentário:

Como o Luís nasceu em fevereiro de 1978, tem hoje 40 anos. Já não se pode candidatar à Medalha Fields!

Nota final: a Leticia e o Mário levantam uma questão relativa ao enunciado do problema e à unicidade da solução.

A resolução anterior tem por base algo que poderá ser pacificamente considerado: a nossa resposta final não pode depender do dia em que o encontro do Zé Paulo com o Luís teve lugar.

Penso que, se tal não for considerado, o segundo caso poderá também fornecer uma resposta única. Suponhamos que o Luís nasceu de facto no ano da revolução dos cravos. Se o encontro no café se deu este ano, antes de 21 de Fevereiro, saber a idade do Luís nessa data (43 anos), conduziria à data de nascimento de 21 de Fevereiro. De modo idêntico, se o encontro teve lugar de 21 de Fevereiro a 13 de Março, a idade do Luís nessa data (44 anos) levaria também aquela data de nascimento! Estes casos não contrariam a última informação do Luís, apesar de não nos deixarem saber a resposta sem que ele dissesse, de facto, a sua idade.

Para garantir que só pode existir uma solução, a Leticia sugere que a última informação dada pelo Luís deveria ser:

“Mas se soubesses o ano em que nasci, saberias logo a resposta.”

“Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!”

Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias

HÉLIA JACINTO

SUSANA CARREIRA

NÉLIA AMADO

Os rápidos avanços tecnológicos e a crescente facilidade no acesso às mais sofisticadas ferramentas digitais têm vindo a alterar a forma como interagimos com o mundo. Essa rápida difusão e o uso constante de tecnologias digitais estão a impelir o estudo da sua influência na própria natureza do conhecimento matemático. Em particular, esta imersão no mundo tecnológico está a potenciar alterações ao nível das “capacidades matemáticas que são necessárias ao sucesso para além da escola” (Lesh, 2000, p. 177), sendo necessário ter em conta que estas ferramentas

... introduzem novas situações de resolução de problemas nas quais a matemática é útil; introduzem novas normas e procedimentos para construção, argumentação e justificação; e expandem radicalmente o tipo de capacidades e compreensões matemáticas que contribuem para o sucesso nessas situações (Lesh, 2000, p. 178).

Apesar de a resolução de problemas ter recebido muita atenção da parte de investigadores e educadores na última parte do século XX, tem vindo a estar presente nos documentos curriculares de forma volátil. Em 2007, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* trouxe grande vitalidade à resolução de problemas, que passou a ser encarada como um objetivo geral do ensino da Matemática, como uma capacidade transversal e como uma metodologia de trabalho. Após um período em que esta importante capacidade foi reduzida à “seleção e aplicação de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados” (MEC, 2013, p. 5), surgem dois novos documentos orientadores que espelham uma perspetiva ampla e integradora.

As recomendações constantes do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (ME, 2017) e das *Aprendizagens Essenciais para o Ensino Básico e Secundário* (ME, 2018) estão em sintonia no que toca à aptidão para “encontrar respostas para uma nova situação, mobilizando o raciocínio com vista à tomada de decisão e à eventual formulação de novas questões” (ME, 2017, p. 14) destacando-se, de entre as competências associadas, o desenvolvimento de “processos conducentes à

construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados” (ME, 2017, p. 14). As *Aprendizagens Essenciais* referentes ao Ensino Básico abordam a resolução de problemas como um *conteúdo de aprendizagem* segundo o qual os alunos devem “resolver problemas (...) em contextos matemáticos e não matemáticos, concebendo e aplicando estratégias de resolução, incluindo a utilização de tecnologia, e avaliando a plausibilidade dos resultados” (ME, 2018, p. 7).

Neste artigo pretendemos discutir o papel da tecnologia na resolução de problemas de matemática e na comunicação das soluções produzidas por jovens participantes numa competição extraescolar de matemática. As resoluções de problemas que apresentaremos foram recolhidas através do projeto de investigação Problem@Web, com foco nos Campeonatos de Resolução de Problemas SUB12 e SUB14, dinamizados pelo Departamento de Matemática da Universidade do Algarve. O SUB14 destinava-se a alunos do 7.º e do 8.º ano, a frequentar escolas das regiões do Algarve e Alentejo. Quinzenalmente era publicado um novo problema no *website*¹ do campeonato e os participantes dispunham de duas semanas para submeter a sua resolução por *e-mail* ou através da página. As regras permitiam a utilização de quaisquer ferramentas tecnológicas para resolver os problemas mas, para serem consideradas corretas, as respostas tinham que incluir uma descrição detalhada e clara do processo de resolução seguido.

RESOLVER UM PROBLEMA E EXPLICAR A SOLUÇÃO: DUAS FACES DA MESMA ATIVIDADE

Os problemas propostos no campeonato SUB14 podem ser considerados *problemas não-rotineiros* na medida em que não se resolvem através da aplicação de regras ou processos comuns ou prontos a utilizar pelos alunos. Estes problemas requerem abordagens em que existe liberdade para construir, testar e

¹<http://www.fcetec.ualg.pt/matematica/5estrelas/subs/sub14.html>

modificar as estratégias planeadas. Esta atividade é encarada como o *desenvolvimento de formas produtivas de pensar sobre situações desafiadoras* (Lesh & Zawojewski, 2007), em que o aluno tem que adotar uma perspetiva matemática para encontrar a solução.

Na verdade, os participantes no SUB14 desenvolviam estratégias de resolução, muitas vezes, desprovidas de técnicas matemáticas formais, mas muito marcadas pela sua experiência pessoal, aspetos que vão ao encontro da ideia de que o conhecimento matemático é uma construção essencialmente humana e que a experiência pessoal do indivíduo tem um papel crucial na atividade de conhecer e interpretar a realidade de um ponto de vista matemático. Este envolvimento é consistente com o que Freudenthal (1973) designou por *processos de matematização*, ou seja, reflexões sobre a realidade que levam à sua compreensão e alteração através da (re)construção e da (re)organização de conteúdos ou métodos matemáticos. É este processo de *interpretação* dos dados e dos objetivos do problema que espoleta a necessidade de desenvolver um modelo conceptual da situação, ou seja, em vez de selecionar uma estratégia poderosa, os alunos têm que operar sobre a sua própria interpretação, têm que selecionar, aplicar ou criar procedimentos de forma cíclica ou iterativa, desenvolvendo assim a sua *abordagem*.

De facto, o cerne desta atividade reside na abordagem desenvolvida para obter a solução, e não apenas na própria solução pelo que envolve a produção de interpretações que se constroem e se desvendam a partir do pensamento matemático desenvolvido. Contudo, essa abordagem só fica completamente a descoberto mediante uma explicação pormenorizada dos processos seguidos, pelo que encontrar a solução de um problema comporta, igualmente, a necessidade de criar uma explicação para essa solução, ou seja, resolver um problema incorpora tanto a resposta solicitada como o reportar do processo seguido na sua obtenção.

As próprias regras de participação no SUB14 determinam o envio de uma justificação convincente que explique a solução, ou seja, implicam que cada concorrente pondere, intencional e conscientemente, o modo como exprime o seu raciocínio e como faz uso dos seus conhecimentos matemáticos durante o processo de encontrar a solução.

Um dos estudos desenvolvidos no âmbito do projeto Problem@ Web mostrou precisamente que esta resolução de problemas compreende um processo síncrono de matematização e expressão do pensamento matemático (Carreira, Jones, Amado, Jacinto, & Nobre, 2016), o que quer dizer que a procura de uma resposta para o problema abre caminho para criar uma explicação dessa mesma solução. Consideramos, pois, que *resolver-e-exprimir problemas de matemática* resume a atividade em que os jovens participantes se envolvem.

Vejamos alguns exemplos. A resolução submetida por Cláudia ao problema “Até encher o tanque” (figura 1) é ilustrativa: a jovem começou por apresentar a solução final e, no texto subsequente, explicou o seu raciocínio (figura 2). O modelo conceptual implícito na sua abordagem indica que Cláudia procurou *matematizar* as duas condições do problema, referentes ao caudal de cada torneira, reconstruindo a sua interpretação dos dados e conferindo-lhe um aspeto algébrico. Cláudia deduziu o tempo necessário para que cada uma das torneiras encha meio tanque e, a partir daí, resolvendo uma equação de 1.º grau, concluiu sobre o tempo necessário para que as duas torneiras em simultâneo encham o remanescente do tanque.

O Sr. Bonifácio tem um tanque na sua horta que precisa de encher regularmente, podendo usar duas torneiras com caudais diferentes.

Uma das torneiras enche um tanque em 6 horas e outra torneira enche o mesmo tanque em 3 horas. Logo pela manhã, o Sr. Bonifácio viu o tanque vazio e abriu a primeira torneira (que deita menos). Quando o tanque estava a meio da sua capacidade decidiu abrir também a segunda torneira (que deita mais) para ser mais rápido. Quanto tempo demorou o tanque a encher, desde que ele abriu a primeira torneira?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.



Figura 1. Enunciado do problema “Até encher o tanque”

Resposta:

O tanque demorou a encher 4 horas, desde que se abriu a primeira torneira, senão vejamos:

Quando de manhã o Senhor Bonifácio abriu a torneira que deita menos, esta demorou 3 horas até o tanque atingir metade da sua capacidade ($V/2$), pois esta torneira demora 6 horas a encher o tanque. (1) $V/2=3h$

Após ter atingido metade da capacidade do tanque o Senhor Bonifácio abriu também a segunda torneira que deita mais, designadamente o dobro do caudal da primeira, para encher a outra metade do tanque ($V/2$). Deste modo, temos que (2) $V/2=t+2t$.

Substituindo (1) em (2), temos quanto tempo demoram as duas torneiras a encherem a segunda metade do tanque:

$$3=3t \Leftrightarrow t=1h$$

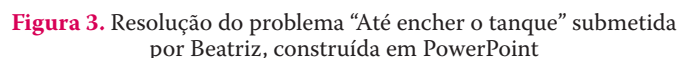
Acrescentando as 3h que levou a encher a primeira metade do tanque, temos que desde que se abriu a primeira torneira o tanque demorou 4 horas a encher.

Figura 2. Resolução do problema “Até encher o tanque” submetida por Cláudia

Também a resolução enviada por Beatriz (figura 3) mostra a sua preocupação em expressar com clareza o processo seguido e o pensamento matemático que daí foi resultando. A jovem optou por reproduzir uma simulação do enchimento do tanque, primeiro considerando as condições de enchimento com a torneira 1 e, em seguida, com as torneiras 1 e 2. Aos dois esquemas e correspondentes legendas, Beatriz acrescentou uma descrição textual do seu raciocínio em que justificou a sua solução², explicando de que forma os esquemas lhe foram úteis. Nesta solução sobressai o esquema elaborado para ilustrar o processo de enchimento do tanque e que, por si só, suporta

²A solução contém uma imprecisão ao associar as duas partes a vermelhos (dois y), que representam as quantidades de água vertida pela torneira 1, com 2x, as quantidades vertidas pela torneira 2. Se assim fosse, o caudal seria o mesmo, pelo que as partes a vermelho deviam estar legendadas com um único y.

Resolução e Resposta...



A resolução de Beatriz destaca-se ainda por outro motivo — o uso de imagens de torneiras e de gotas de água de diferentes tamanhos, cores, chavetas e legendas — que não são uma mera representação pictórica pois têm um significado e uma intencionalidade matemática. A sua solução sugere que a reconstrução das condições do enunciado através do esquema foi revelando as relações implícitas entre os caudais das duas torneiras e o tempo necessário até encher o tanque. O esquema e os seus elementos pictóricos suportam uma intensificação da expressividade de Beatriz mas também dão corpo ao seu modelo conceptual, ou seja, a aluna mostra intencionalidade em produzir uma *solução que se explique a si própria*. A fase de procura da solução e a fase de explanação são facetas da resolução de problemas que estão intimamente relacionadas.

Esta relação entre o ato de resolver e o ato de exprimir torna-se mais robusta, e também mais notória, quando as tecnologias digitais estimulam o desenvolvimento de uma abordagem ao problema e suportam a expressão de pensamento matemático, não só na solução de Beatriz como noutras analisadas no âmbito do projeto Problem@Web (Carreira et al., 2016; Jacinto, 2017).

As descrições, explicações e construções não são apenas processos que os alunos utilizam ao longo do percurso de “obtenção da solução” e não são apenas pós-escritos que os alunos apresentam depois de terem obtido a “solução”. De facto, SÃO as componentes mais importantes das respostas que se pretendem.

Durante o seu período de vigência, o SUB14 recebeu — e aceitou — resoluções convencionais, isto é, mais comuns no contexto da resolução de problemas com papel e lápis, na sala de aula. Mas, à medida que as tecnologias foram invadindo a sociedade e as escolas, notou-se também um número crescente de concorrentes que passaram a fazer usos expeditos de uma diversidade de ferramentas, umas mais matemáticas (e.g., GeoGebra, Excel), outras menos (e.g., PowerPoint, Word, Paint).

O problema “E lá se encontraram” (figura 4) envolve a ideia de covariação e pode considerar-se um problema de movimento, tendo originado dois modelos conceptuais bastante distintos: a maior parte dos participantes desenvolveu a sua solução considerando a viagem em desenvolvimento, enquanto um pequeno conjunto de soluções foram obtidas considerando a viagem já finalizada.

O Alexandre e o Bernardo vivem a uma distância de 22 km um do outro e querem encontrar-se, mas só têm uma forma de fazer o caminho... a pé! Nas férias decidem que irão ao encontro um do outro logo de manhã.

O Alexandre parte da sua casa às 8 horas da manhã e vai caminhando a uma velocidade de 4 km por hora. O Bernardo sai de casa uma hora mais tarde e caminha a uma velocidade de 5 km por hora.

Nenhum dos dois amigos levou relógio, mas é possível saber a que horas se encontraram. Que horas eram?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.



Figura 4. Enunciado do problema “E lá se encontraram”

Resposta:

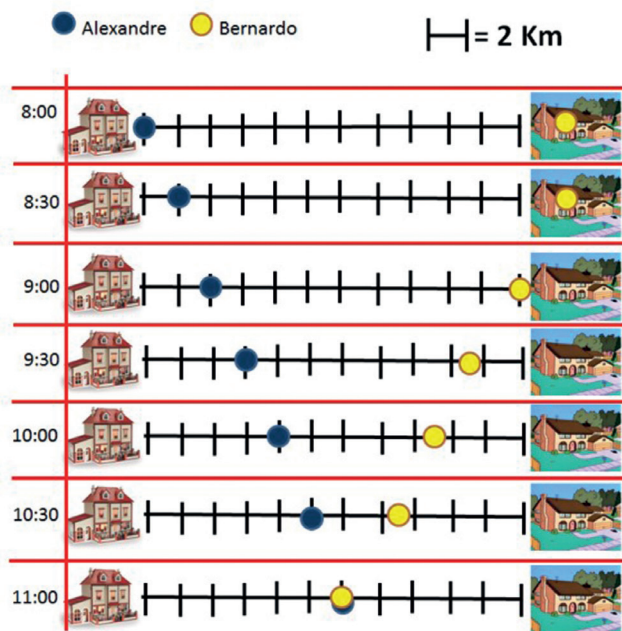
tempo que o Alexandre leva a fazer o percurso= t
tempo que o Bernardo leva a fazer o percurso= $t-1$
percurso feito pelo Alexandre= $4t$
percurso feito pelo Bernardo= $5(t-1)$
a soma destes percursos=22km
 $4t+5(t-1)=22$
 $4t+5t-5=22$
 $9t=27$
 $t=3$
R: Quando o Alexandre andou 3h e o Bernardo 2h encontraram-se, isto é às 11h

Figura 5. Resolução do problema “E lá se encontraram” submetida por Bruno

78

equação e resolveu-a para encontrar o tempo decorrido até os dois amigos se encontrarem.

A resolução submetida por Lucas (figura 6), em PowerPoint, é exemplo de uma solução pictórica: a distância entre as casas dos dois amigos é representada por um segmento de reta dividido em intervalos de 2km, a posição relativa entre eles e entre cada um e a sua casa é representada pelos círculos claros e escuros. A variação do tempo encontra-se registada na margem esquerda, mostrando que cada variação da posição dos círculos corresponde a cada um dos instantes sucessivos, de meia em meia hora. A solução é encontrada quando os dois círculos se sobrepõem e que Lucas reforça na sua resposta final “Encontrar-se-ão às 11h”.



R: Encontrar-se-ão às 11 h

Figura 6. Resolução do problema “E lá se encontraram” submetida por Lucas

Novamente se salienta o uso de imagens, da cor, de legendas para construir um esquema que ilustra a situação a ser modelada. Torna-se bastante evidente que as representações digitais são meios efetivos de lidar com a ideia de uma viagem em desenvolvimento desde o momento inicial até ao momento do encontro, isto é, suportam um modelo conceptual de covariação entre a distância percorrida e o tempo, e ainda entre o deslocamento de cada um e o tempo decorrido (mais detalhes em Carreira et al., 2016).

Hoje em dia, a ideia de que *expressar o que se pensa é parte integrante da resolução de problemas de matemática* ganha novos contornos pois expressar pensamento matemático requer considerar as ferramentas (digitais) adequadas. É nesse

sentido que parece apropriado considerar que estes jovens, que comunicam matematicamente com recurso a ferramentas digitais, são fluentes num certo tipo de discurso matemático no qual a escrita continua a estar presente, embora não seja o único elemento nem necessariamente o mais evidente.

Num registo de *discurso expositivo*, um indivíduo “oferece-se para ‘contar uma história’ sobre como resolveu o problema” (Stahl, 2009 p. 49), ou seja, procede a uma narração que contém a sequência dos elementos essenciais da abordagem que conduziu à solução. Este tipo de discurso, de natureza matemática, “tem as suas próprias características, tais como fornecer garantias matemáticas das afirmações, determinar valores, abordar questões de lógica formal, etc.” (p. 59). Mas tem também uma natureza tecnológica porque é produzido por meio de ferramentas digitais. Este discurso expositivo que é, simultaneamente, matemático e digital, possui assim outros atributos: o uso de diagramas, tabelas, imagens, legendas, símbolos, a simulação de movimento, o uso da cor para salientar aspetos específicos, o uso de ficheiros criados a partir de programas, ou ainda combinações entre eles, para nomear apenas algumas das possibilidades de utilização que os jovens identificam nestas tecnologias. Tal como referem Pantziara, Gagatsis e Elia (2009, p. 43):

... a utilização de texto ou imagens serve para exprimir qualquer informação relacionada com o problema, pelo que nalguns casos podem até nem ser necessários para a solução do problema mas foram imprescindíveis para o desenvolvimento e a implementação de uma abordagem para obter a solução, no sentido em que têm o poder de “gerar conhecimento”.

Estas componentes são consideradas fundamentais para compreender a atividade de resolver-e-exprimir problemas com tecnologias no sentido em que não suportam apenas o relato da sequência de processos seguidos, mas sobretudo contribuem para a conceptualização da estrutura matemática do problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de problemas de matemática com tecnologias deve ser encarada como um processo síncrono de matematização e de expressão do pensamento matemático, no seio do qual ocorre o desenvolvimento de modelos conceptuais das situações problemáticas num processo que é mediado por ferramentas digitais. Estas estruturas assentam em ideias e relações matemáticas, e facilitam a construção e o desenvolvimento de uma abordagem para encontrar a solução pretendida.

Argumentámos em torno da ideia de que resolver um problema e exprimir o raciocínio desenvolvido são aspetos fundamentais de uma mesma atividade, e que o processo de

resolver-e-exprimir se torna mais robusto e visível quando a comunicação de pensamento matemático é mediada por ferramentas tecnológicas. Tal como é atualmente reconhecido nos documentos orientadores da prática letiva, o papel das tecnologias não é negligenciável, tendo-se visto como originam representações matemáticas digitais essenciais à resolução dos problemas.

Nos mesmos documentos encara-se a capacidade de comunicar matematicamente como o ser-se capaz de “exprimir, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, com precisão e rigor, para explicar e justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia)” (ME, 2018, p. 14). Todavia, facilmente se constata que nem todos os alunos se encontram num mesmo nível de matematização, pelo que a tecnologia pode ser um importante veículo que permite a todos os alunos experimentar sucesso com a resolução de problemas. As ferramentas tecnológicas abrem novas vias de comunicação, novas possibilidades representacionais, permitindo que alunos com diferentes desempenhos tenham voz. É pois, importante, legitimar essas outras formas de expressividade do pensamento matemático. Usar tecnologias para resolver-e-exprimir problemas pode espoletar o desenvolvimento de diferentes soluções que permitam uma matematização progressiva da situação dada, percorrendo soluções informais e estabelecendo pontes com outras mais formais e abstratas ou que usem uma linguagem simbólica.

Salientamos, por fim, que ser-se bem-sucedido na resolução de problemas de matemática envolve “coordenar experiências anteriores, conhecimento, representações familiares e padrões de inferência, e intuição, num esforço para gerar novas representações e padrões de inferência” (Lester & Kehle, 2003, p. 510). Assim, a mobilização “coordenada” de experiências, conhecimentos matemáticos, representações, é o motor que gera a criação de uma abordagem que permite superar o desconhecimento de estratégias ou representações de utilidade imediata para a obtenção da solução.

A “modernização”, a “inovação”, a “transformação” dos espaços escolares e das aprendizagens passa, necessariamente, por uma consciencialização e reconhecimento explícito de que estes jovens trazem conhecimentos, saberes e modos de agir aprendidos a partir de experiências de aprendizagem informais ou exteriores à sala de aula, de que o SUB14 é exemplo. Um dos maiores desafios que o professor de matemática do século XXI enfrenta é, pois, conseguir tirar partido desses conhecimentos nas suas aulas.

Referências

- Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web Project*. New York, NY: Springer.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Jacinto, H. (2017). *A atividade de resolução de problemas de Matemática com tecnologias e a fluência tecno-matemática de jovens do século XXI*. Tese de Doutoramento. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Lesh, R. (2000). Beyond constructivism: Identifying mathematical abilities that are most needed for success beyond school in an age of information. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3), 177-195.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism – Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing and NCTM.
- Lester, F., & Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism – Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 501-517). Mahwah, NJ: Erlbaum Associates.
- Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 39-60.
- Ministério da Educação (2017). *Perfil dos alunos à saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: DGE.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais. Matemática, 7.º ano*. Lisboa: DGE.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: MEC.
- Stahl, G. (2009). *Studying Virtual Math Teams*. New York, NY: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0228-3>.

HÉLIA JACINTO

ESCOLA SECUNDÁRIA POETA JOAQUIM SERRA, MONTIJO, E UIDEF,
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

SUSANA CARREIRA

FCT, UNIVERSIDADE DO ALGARVE E UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO,
UNIVERSIDADE DE LISBOA

NÉLIA AMADO

FCT, UNIVERSIDADE DO ALGARVE E UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO,
UNIVERSIDADE DE LISBOA

APM 2018 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

*A Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indistintamente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um nº de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados individuais têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito

também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista Quadrante.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados terão descontos na requisição de materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos na formação e em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Modalidades de associado individual	Quota
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	Quota
Modalidade I (1 exemplar da E&M)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da E&M)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da E&M+Quadrante)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da E&M+Quadrante)	140,00 €

Assinatura das revistas Educação & Matemática e Quadrante

		Educação & Matemática 3 números + 1 número duplo temático	Quadrante (2 números)
Associado individual	Portugal		15,00€
	Estrangeiro		30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas Educação & Matemática e Quadrante

	Educação & Matemática		Quadrante
	Temática		
Associado	Temática	10,00€	10,00€
	Normal	7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	

Editorial

- 01 **Comunicação matemática no processo de ensino-aprendizagem: práticas e desafios**
Rosa Antónia Tomás Ferreira

Artigos

- 02 **O contributo de uma *Gallery Walk* para promover a comunicação matemática**
Isabel Vale, Ana Barbosa
- 09 **A Comunicação oral na promoção da autorregulação da aprendizagem dos alunos em Matemática**
Sílvia Semana
- 13 **Comunicação matemática e aprendizagens essenciais**
Lurdes Serrazina
- 19 **Comunicando por gestos e palavras no ditado das construções**
Maria João Nunes, Margarida Rodrigues
- 23 **A importância das discussões coletivas para o desenvolvimento do pensamento algébrico**
Célia Mestre
- 28 **Contributos para a análise da comunicação (matemática) escrita dos alunos**
Manuel Vara Pires, Elisabete Costa, Cristiana Leite
- 34 **A escrita matemática e a intuição em Geometria**
Maria Helena Martinho, Helena Rocha
- 39 **Comunicando aprendizagens em análise combinatória**
Belmira Mota, Rosa Antónia Tomás Ferreira
- 45 **Comunicação Matemática, uma das 7 competências matemáticas fundamentais no PISA**
Jaime Carvalho e Silva
- 53 **Humor no ensino da Matemática: oportunidades para a aprendizagem**
Luís Menezes, Fernanda Ferreira
- 62 **O feedback escrito como elemento regulador na resolução de problemas**
João Carlos Terroso, Joana Dias, Filipa Machado
- 71 **A comunicação matemática e os desafios da Língua Gestual Portuguesa**
Joana Tinoco, Maria Helena Martinho, Anabela Cruz-Santos
- 76 **“Não de esqueças de explicar o teu processo de resolução!”**
Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias
Hélia Jacinto, Susana Carreira, Nélia Amado

Secções

- 17 **Materiais para a aula de Matemática**
Quanto dura um minuto?, Teresa Olga Duarte, Lina Brunheira
- 33 **Materiais para a aula de Matemática**
Quem tem razão?, Manuel Vara Pires, Elisabete Costa, Cristiana Leite
- 49 **Espaço GTI**
Avaliação e comunicação: da e para a aprendizagem, António Guerreiro, Cristina Martins
- 60 **Cadernos de apontamentos de Geometria** *Cristina Loureiro*
Comunicação Visual
- 67 **Tecnologias na Educação Matemática** *António Domingos*
*GeoGebra no Ensino Aprendizagem da Trigonometria e Funções Trigonométricas, Emanuel Mar-
tinho, António Domingos*
- 75 **O Problema deste número** *José Paulo Viana*
Férias na Sildávia

