

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2018
148

Julho ∞ Agosto ∞ Setembro

Preço 10,00€

SOUTHERN

OCEAN



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Catarina Delgado
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Filipa Machado
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	João Terroso
	Manuela Pires
	Silvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Setembro de 2018

Tiragem 1000 exemplares

Periodicidade

Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

A capa desta edição da EM vem a propósito do texto de Paulo Correia no editorial da revista. *Fotografias/Imagens* distintas e conflituantes sobre educação, ensino e aprendizagem coabitam na sociedade desde há algumas décadas. Para muitos autores, uma destas *imagens* relaciona-se com o nível da desatualização da escola, incapaz de acompanhar as vertiginosas mudanças na sociedade, com particular relevância na evolução do conhecimento em todas as áreas do saber e, sobretudo, nas ciências e na tecnologia.

Para outros, independentemente do debate atual, mas relacionado com a cada vez maior desatualização da escola, face ao desenvolvimento tecnológico, num futuro próximo, duas questões irão emergir e ganhar uma dimensão preocupante sobre o papel da escola na sociedade - O que ensinar? e como ensinar?

Mário Baía

Neste número também colaboraram

Adelaide Cosme, Ana la Féria, Ana Paula Alves, Cristina Martins, David Pires Dias, Dina Tavares, Eduardo Veloso, Eunice Oliveira, Fátima Regina Jorge, Fátima Paixão António Pais, Fernando Sebastião, Gabriela Dinis, Helena Martins, Henrique Leitão, Hugo Menino, Inês Guimarães, Isabel Rocha, João Vitor Teodoro, José Luiz Pastore Mello, José Marcos Lopes, Manuela Pires, Mauro Figueiredo, Nélia Amado, Paulo Correia, Raquel Azevedo, Rita Teixeira, Rui Lemos, Sandra Cristina Mendes da Costa, Sílvia Zuzarte, Sónia Barbosa, Susana Carreira, Susana Dionísio

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, n.º 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

A insuficiência das mudanças abundantes

A propósito das mudanças na Educação podemos encontrar dois tipos de argumentos que têm sido veiculados com alguma insistência... por um lado argumenta-se que a escola é essencialmente a mesma desde o século passado, ou seja, que são necessárias mudanças profundas, e por outro lado não faltam referências a mudanças excessivas nos currículos, ou seja, sobre a necessidade de estabilidade para melhorar.

Sendo verdade que os argumentos a favor da necessidade de evolução referem-se sobretudo aos equipamentos e a questões organizativas (dos espaços e dos tempos) e que a defesa da estabilidade incide essencialmente nos documentos curriculares e procedimentos de avaliação, será importante compreender que estes elementos não devem ser entendidos de forma independente. Não se pode definir o currículo sem um enquadramento do tempo disponível (para o trabalho dos alunos e para o trabalho dos professores); não se pode prescrever práticas de ensino sem assegurar as condições organizativas e tecnológicas que essas práticas implicam e não se pode advogar a centralidade do currículo em todas as suas dimensões enquanto se continua a (sobre)valorizar a avaliação externa, desvalorizando o estreitamento do currículo que lhe é consensualmente imputada.

Mas já existem mudanças... os processos de avaliação externa já incluem as provas de aferição que visam a avaliação de um leque mais alargado de competências sem que a seriação dos alunos seja desejável, ou sequer possível. Ainda assim, este é um processo que precisa de melhoramentos e evoluções... é necessário (continuar) a melhorar o processo de recolha de dados e produção de informação e também de encontrar formas de valorizar e utilizar a informação produzida.

A necessidade de repensar e discutir a pertinência e o papel dos exames também começa a ganhar força e pode ser a base de uma mudança mais alargada. Um bom balanço entre a seriação (necessária) e a certificação (desejável) não está conseguido e ninguém parece ter uma solução milagrosa... temos de continuar a tentar que a próxima mudança nos coloque numa situação melhor.

Existem também sinais claros que apontam para a necessidade de construir um currículo diferente. Foi já definido o Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória e a organização escolar já valoriza explicitamente a Autonomia e Flexibilidade

Curricular, mas a disciplina da matemática precisa de programas que sejam compatíveis com este novo paradigma.

Precisamos de mais tempo para explorar adequadamente a matemática, precisamos de explorar outros tipos de matemática e precisamos de explorar outras competências nas aulas de matemática.

Os programas em vigor prescrevem demasiados conteúdos sem acautelar condições para o aprofundamento e apropriação dos conhecimentos que se pretendem desenvolver. A matemática escolar é essencialmente a mesma do século passado ignorando as evoluções da própria disciplina e do contexto social em que se insere, como a necessidade crescente de competências relacionadas com a programação e o conhecimento de algoritmos digitais, a necessidade crescente de valorizar a literacia estatística ou os ganhos que podem advir de um conhecimento matemático assente e interdependente das novas ferramentas digitais.

As aulas de matemática continuam organizadas essencialmente para o desenvolvimento das competências tradicionais como a memorização, repetição ou tarefas centradas em procedimentos rotineiros, embora já seja claro que outras valências como a criatividade, a capacidade de comunicação, de liderança, de trabalhar em grupo, sejam as características com valorização acentuada e crescente no atual contexto social.

A definição de aprendizagens essenciais, num quadro de manutenção dos atuais programas de matemática para o ensino básico, de matemática A e de matemática B não permitem a evolução esperada. Pretende-se que contribuam para criar condições de gestão do currículo numa lógica de curto prazo, mas não são o melhor instrumento para dar resposta aos desafios que a sociedade coloca à escola. O que é verdadeiramente essencial é produzir um currículo com objetivos, conteúdos, competências, recursos, estratégias, avaliação ou outros elementos, com estas ou outras formulações, mas enquadrados na realidade atual... a do século XXI. O sucesso desta alteração depende ainda de valorizar o papel do professor, através da formação, mas também com mecanismos de valorização profissional e social que não estão acautelados. A parte fácil são os alunos... eles são genuinamente do século XXI.

PAULO CORREIA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE ALCÁCER DO SAL

À descoberta da Matemática nos caminhos do linho

HELENA MARTINS

FÁTIMA REGINA JORGE

FÁTIMA PAIXÃO ANTÓNIO PAIS

SUSANA DIONÍSIO

Na formação inicial de professores/educadores de infância, a formação em didática é um tempo privilegiado para o desenvolvimento de competências de integração dos domínios teórico e prático com vista à progressiva apropriação do sentido da identidade docente que a Prática de Ensino Supervisionada (PES) acentuará. Neste sentido, a integração colaborativa dos profissionais das instituições cooperantes com os das instituições de ensino superior, na própria didática, em atividades que envolvam crianças, aponta para um maior potencial formativo dos futuros educadores.

Por outro lado, o meio local proporciona boas oportunidades educativas, cabendo à escola a exploração de contextos não formais numa perspetiva interdisciplinar, no sentido de promover aprendizagens de conteúdos curriculares ou de enriquecimento do currículo, valorizando, ao mesmo tempo, a cultura regional e o sentimento de pertença a uma comunidade (Paixão, 2006). Na Educação Pré-Escolar, o desenvolvimento de noções matemáticas pressupõe a ligação aos interesses das crianças e às suas vivências quotidianas, para que possam criar representações com significado e em articulação com outras áreas de conteúdo, de forma contextualizada e motivadora (DEB, 2016).

O bordado de Castelo Branco, marca da identidade cultural da região e da cidade de Castelo Branco, utiliza o linho como suporte. A seda natural, tingida em diversas tonalidades, enche de cor os diversos motivos vegetais e animais das peças bordadas, com simbologia associada à vida e aos sentimentos humanos. Tem, nas colchas, a sua expressão máxima. A cidade exhibe, também, no espaço público, os elementos decorativos do seu bordado tradicional. Podem observar-se em fachadas de prédios de habitação, passeios e calçadas, não sendo, pois, alheios às referências sociais e culturais das crianças.

No âmbito das unidades curriculares de didática da matemática e ciências naturais e de didática do português e estudo do meio social do 1.º ano do mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, desenvolveu-se um projeto, tendo

“O Linho - da semente ao tecido” como temática central dirigida a crianças de 4 e 5 anos. As futuras educadoras planificaram, implementaram e avaliaram uma sequência de atividades, estruturadas em pré-visita, visita e pós-visita, na interação entre contexto formal (Jardim de Infância) e não formal (Horto de Amato Lusitano).

DESCRIÇÃO DO PROJETO

O tema surgiu enquadrado no projeto educativo de uma das instituições cooperantes da instituição de formação e privilegiou a articulação entre contextos formais (salas de atividades) e não formais (Horto de Amato Lusitano). A intervenção educativa focou-se no bordado de Castelo Branco e seus elementos constitutivos, nomeadamente, o linho como base do bordado, componentes figurativos, corantes naturais e simetrias, entre outros. Foram envolvidos três Jardins de Infância de uma Instituição Educativa (IPSS) da cidade, sete educadoras de infância e cerca de 140 crianças de 4 e 5 anos.

Estabeleceram-se como objetivos principais:

- Proporcionar experiências de aprendizagem significativas;
- Articular as diversas áreas de conteúdo da Educação Pré-Escolar;
- Promover o conhecimento do património cultural e artístico;
- Promover a autoestima e a autonomia;
- Fomentar a curiosidade científica;
- Desenvolver competências para a vida em sociedade.

Na primeira fase as estudantes, futuras educadoras, planificaram um conjunto de atividades, distintas para os grupos de 4 e 5 anos, que apresentaram às Educadoras Cooperantes, no sentido de se coordenarem estratégias de implementação.

Os Guiões apresentados foram estruturados em três etapas:

- Pré-visita ao Horto de Amato Lusitano (Atividades realizadas em sala de Jardim de Infância, para preparar a visita);
- Visita ao Horto de Amato Lusitano;

- Pós-visita ao Horto de Amato Lusitano (Atividades realizadas em sala de Jardim de Infância, explorando a visita).

Nas figuras 1 e 2 esquematiza-se a sequência de atividades desenvolvidas com as crianças das salas dos 4 e dos 5 anos.



Figura 1. Atividades desenvolvidas com as crianças de 4 anos



Figura 2. Atividades desenvolvidas com as crianças de 5 anos

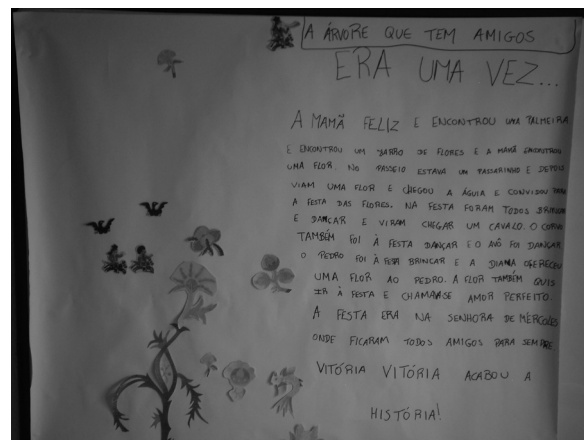
DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

O projeto implicou uma visita de estudo ao Horto de Amato Lusitano, situado no espaço envolvente da ESE/IPCB e que rende homenagem à vida, ao trabalho e ao espírito científico do célebre médico e humanista, nascido em Castelo Branco, em 1511. Constituído por três zonas contíguas, mas distintas pelo tipo de cultura (arbóreas e arbustivas, hortícolas), nele se encontram muitas das plantas utilizadas por Amato nas suas curas médicas, sendo a planta do linho uma delas, e também algumas das quais se extraíam pigmentos para obter corantes usados para tingir o linho.

Descrevem-se, a título de exemplo, algumas das atividades de pré-visita, visita e pós-visita ao horto.

O conjunto de atividades de preparação e motivação para a visita incluiu, entre outras, a construção coletiva de uma história, tendo

como ponto de partida imagens com elementos do bordado de Castelo Branco. Cada criança retirava aleatoriamente uma imagem de uma caixa, que colava num painel e dizia uma frase que dava continuidade ao texto que, assim, se ia construindo. No final da atividade, a história foi lida para o grupo de crianças e é de realçar que o texto evidenciou a referência a locais e conhecimentos relacionados com as vivências das crianças (figura 3).



A ÁRVORE QUE TEM AMIGOS

Era uma vez... a mamã feliz, e encontrou uma palmeira, e encontrou um jarro de flores e a mamã encontrou uma flor. No passeio estava um passarinho e depois viam uma flor. Chegou a água e convidou para a festa das flores. Na festa foram todos brincar e dançar e viram chegar um cavalo. O corvo também foi à festa e o avô foi dançar. O Pedro foi à festa brincar e a Diana ofereceu uma flor ao Pedro. A flor também quis ir à festa e chamava-se amor-perfeito. A festa era na Senhora de Mércoles, onde ficaram todos amigos para sempre.

Vitória, vitória, acabou a história!

Figura 3. História construída com as crianças de 5 anos

Durante a visita ao horto, para além de semear linhaça e realizar jogos tradicionais, o grupo de 4 anos construiu vários padrões de repetição (figura 4), com imagens do bordado de Castelo Branco em quadrados de cartão, colocando-as no chão de forma sequencial, após a identificação do respetivo motivo de repetição.



Figura 4. Padrões de repetição

Após a visita, no jardim de infância, as crianças de 5 anos construíram, em pequenos grupos, um conjunto de seis puzzles (sob forma de tangram), constituindo, no seu conjunto as diversas fases do linho (da semente ao tecido) que depois ordenaram (figura 5).



Figura 5. Fases do Linho

Como atividade final, todos os grupos de crianças realizaram estampagens com corantes naturais, extraídos de plantas existentes no Horto Amato Lusitano. Utilizaram moldes dos motivos do bordado de Castelo Branco para fazer o tingimento, individualmente, em quadrados de pano, que resultaram num painel por sala, com padrões das estampagens realizadas (figuras 6 e 7).



Figuras 6 e 7. Estampagem com corantes naturais e Painel

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A avaliação das futuras educadoras permite concluir que a planificação e implementação de um conjunto diversificado de atividades e estratégias, integrando diversas áreas de conteúdo da Educação Pré-Escolar, foi uma oportunidade de desenvolvimento de competências didáticas e pedagógicas. Salientam aspetos relacionados com a articulação teoria-prática, a perceção de ser capaz de fazer mais do que imaginavam ou sentiam e a capacidade de superação de imprevistos na ação didática. As reflexões referem também a motivação sentida, fruto da oportunidade de contacto direto com as crianças e a colaboração ativa das educadoras envolvidas.

As dificuldades que surgiram foram superadas, nomeadamente no que se refere à gestão do tempo, à insegurança e ao confronto entre o que foi idealizado (a planificação enquanto hipótese de prática) e o que, efetivamente, aconteceu, com a colaboração quer das educadoras de infância quer dos docentes da didática.

Para as crianças envolvidas, as experiências proporcionadas foram motivadoras, enriqueceram as aprendizagens e estimularam o conhecimento de técnicas e saberes ancestrais. A saída do jardim de infância e o contacto com o meio local estimularam a sua curiosidade. As atividades promoveram a construção articulada do saber, abordando as diferentes áreas de forma integrada.

Na avaliação das educadoras cooperantes as propostas didáticas concebidas e desenvolvidas foram consideradas muito interessantes pelo seu valor educativo, tanto na aprendizagem da matemática como na perspectiva de aprendizagens transversais.

Referências bibliográficas

- DEB (2016). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Departamento de Educação Básica.
- Paixão, M. F. (2006). (Coord.). *Educação em Ciência Cultura e Cidadania. Encontros em Castelo Branco*. Coimbra: Alma Azul.

HELENA MARTINS

SANTA CASA DA MISERICÓRDIA DE CASTELO BRANCO

FÁTIMA REGINA JORGE, FÁTIMA PAIXÃO, ANTÓNIO PAIS

CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM PATRIMÓNIO, EDUCAÇÃO E CULTURA,
INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO

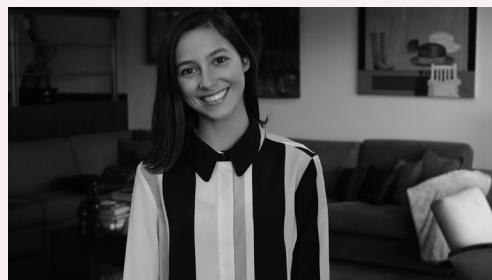
SUSANA DIONÍSIO

SANTA CASA DA MISERICÓRDIA DE CASTELO BRANCO

Entrevista à MathGurl

Entrevista (escrita) para a revista *Educação e Matemática*

A Inês Guimarães é uma jovem 20 anos que vive em Guimarães e estuda matemática na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Esta jovem tem, desde 2015, um canal no youtube de divulgação da matemática, o MathGurl, onde tenta mostrar a matemática de forma divertida. É uma hábil comunicadora e aceitou a dar uma entrevista escrita à redação da Educação e Matemática. Agradecemos a sua pronta disponibilidade e é essa entrevista que aqui vos deixamos.



EM: Já sabemos que gostas de matemática, mas quando é que despertou esse gosto pela matemática?

Inês: Eu acho que sempre gostei de matemática, embora só me tenha começado a dedicar mais à área a partir do 3.º ciclo. Quando andava na primária, lembro-me que me entretinha a calcular potências sucessivas de 2 (do género, $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $4 \times 2 = 8$, $8 \times 2 = 16$, ...) até chegar aos milhões, sei lá bem porquê. Recordo-me também que a minha mãe tinha uns cartõezinhos com desafios matemáticos que eu gostava de resolver, apesar de muitas vezes não conseguir ou chegar a uma resposta errada. Depois, no 7.º ano, apanhei um professor de matemática bastante exigente que puxava muito pelos bons alunos e a partir daí comecei a empenhar-me mais na área. No ano seguinte, conheci um rapaz da minha escola que tinha ganhado uma medalha nas Olimpíadas de Matemática e comecei a treinar para essa competição, sendo acompanhada e motivada por um outro professor. Foi aí que comecei a gostar verdadeiramente da área e, desde então, passou a ser um dos principais focos da minha vida.

EM: Como surgiu a ideia de criares um canal no youtube para falar de matemática?

Inês: Foram vários os motivos que me levaram a criar um canal. Em primeiro lugar, eu sempre gostei de comunicar e explicar coisas aos meus colegas. Nos meus 10.º e 11.º anos dei palestras na escola e adorei a sensação. Por outro lado, nessa altura andava um bocado desanimada com as Olimpíadas, dado que não estava a conseguir chegar muito longe e não tinha muito jeito para resolver o tipo de desafios que elas propunham,

sinceramente. Mas como gostava tanto de matemática e sempre senti a necessidade de fazer coisas para além da escola, decidi então fazer matemática de uma forma diferente, direcionada para as pessoas, com o objetivo de lhes passar algumas ideias e conhecimentos que tinha adquirido ao longo do tempo. Portanto, no início do meu 12.º ano, decidi criar um canal no YouTube para comunicar temas que achasse interessantes e tentar mostrar que, afinal, a matemática pode ser encarada de uma forma leve e divertida.

EM: Como escolhes os assuntos que abordas nos teus vídeos?

Inês: Acima de tudo, eu tento sempre falar de coisas de que gosto e que me fascinam, apesar de já ter saído várias vezes da minha *zona de conforto* quanto a certos tópicos de matemática. A ideia inicial era chegar aos jovens da minha idade e, portanto, não tinha interesse em falar de coisas demasiado técnicas ou avançadas, queria que fossem, sobretudo, curiosidades fáceis de acompanhar pelo público em geral. E ainda é assim, embora às vezes me apeteça fazer vídeos um pouco mais específicos e detalhados... e faço. Quero que as pessoas gostem dos conteúdos e do formato, mas, acima de tudo, quero que eu goste. O humor também tem de estar sempre presente e é uma característica bastante acentuada no canal.

EM: Quais são as principais fontes a que recorres para o conteúdo matemático dos teus vídeos?

Inês: Muitos dos temas que já abordei foram tópicos que li em livros de divulgação científica e me fascinaram quando eu

era mais nova. Às vezes também falo de algo relacionado com algum conteúdo que esteja a aprender na faculdade (mas de forma muito mais simplificada, claro). Para além disso, às vezes aceito sugestões que os meus seguidores, amigos ou até mesmo professores me vão dando. Finalmente, como eu costumo dizer, sou profissional a *violar* o Google. Sem dúvida, a Internet ajuda-me imenso na elaboração dos guiões.

EM: Tens um vídeo que te tenha dado especial prazer realizar? E um favorito?

Inês: Eu acho que me diverti a realizar a maior parte dos vídeos, não há nenhum em particular de que me esteja a recordar... E, muito sinceramente, também gosto da maior parte deles, acho que não há nenhum que seja o meu favorito. É mais fácil para mim dizer aqueles de que não gosto... que são sobretudo os que fiz no início da *carreira*, quando ainda não tinha experiência nenhuma (e falava de temas sem saber muito deles...).

EM: Tendo em conta os outros youtubers e o tipo de conteúdo dos teus vídeos, achas que estás a atingir bons níveis de audiência?

Inês: Sim, acho que sim. A minha audiência é maioritariamente do Brasil (e eu não me queixo disso, gosto muito deles!), mas claro que queria ter mais gente de Portugal a ver, sobretudo as camadas jovens. Isso é algo que ainda não consegui atingir e gostava que acontecesse... É óbvio que há youtubers que têm muitas mais visualizações e seguidores do que eu, mas tratando-se de um canal de matemática, acho que não está nada mau, apesar de ambicionar sempre mais.

EM: Tens ideia se há professores a usar os teus vídeos com os alunos?

Inês: Sim! Muitos professores (sobretudo do Brasil) já me enviaram mensagens para a minha página do Facebook a dizer que mostravam o meu trabalho nas aulas e sei que há vários que acompanham o meu canal. Também já recebi mensagens de alunos (de Portugal) a dizer que me tinham conhecido porque o professor de matemática deles tinha mostrado algum vídeo meu. Isso deixa-me mesmo muito, muito contente!

EM: Como aluna, que conselhos darias a um professor de matemática para tornar as suas aulas de matemática mais aliciantes e cativar os alunos para a matemática?

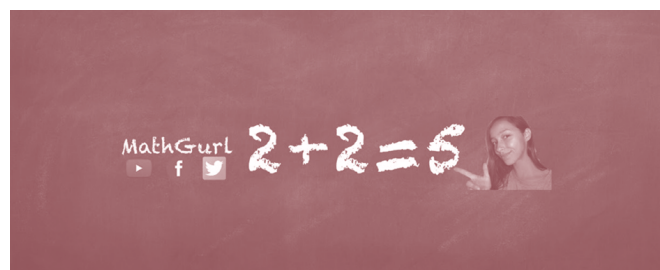
Inês: Acima de tudo, falar de uma forma descontraída, de igual para igual, utilizando uma linguagem que seja compatível com os alunos, para garantir que estão todos *na mesma página*. Às vezes é fácil ficarmos enrolados no rigor dos conceitos e acabamos por não passar uma ideia intuitiva dos resultados, algo que considero

uma falha grave. Também é preciso explicar porque é que alguém haveria de querer saber das coisas que os professores estão a ensinar e com isto não me refiro à treta de mostrar sempre situações reais em que os conteúdos se apliquem, até porque isso raramente acontece. O que eu quero dizer é que, de alguma maneira, deve tentar-se fazer com que os alunos percebam que há ideias que por si só valem a pena e a matemática é, no fundo, o ginásio da mente. É um conjunto de desafios estimulantes que nos devem inquietar até serem solucionados, são enigmas, mistérios e nós somos os detetives. Sei que falar é fácil e colocar isto em prática é difícil, provavelmente utópico e inalcançável, mas são estas as minhas convicções. Queria só dizer que admiro imenso o trabalho dos professores e tenho noção de que não é nada fácil motivar os alunos e conectar com eles.

EM: Tens alguma situação engraçada que tenha ocorrido com algum dos teus seguidores e achas interessante contar?

Inês: Infelizmente, não tenho assim nenhum episódio verdadeiramente louco e entusiasmante que tenha acontecido... Mas posso dizer que já recebi alguns e-mails bastante bizarros e atrevidos. Também acho piada quando estou a sair da casa de banho da faculdade ou assim e vejo pessoas a cochichar algo como “olha, é aquela rapariga que faz vídeos para o youtube”, apesar de isso ser pouco frequente. Também não é comum virem pessoas ter comigo a pedir fotos ou autógrafos, mas já aconteceu. Para além disso, ouvi relatos de colegas a dizer que estavam a passar na zona dos gabinetes dos professores e ouviram o som da introdução dos meus vídeos a dar... Nada me deixa mais contente do que isso!

INÊS GUIMARÃES



Geoplano ordenado e o estudo das frações

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

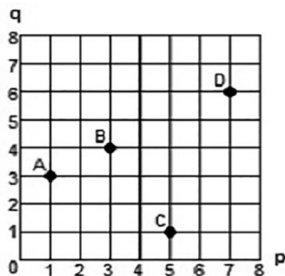
INTRODUÇÃO

A utilização do geoplano como ferramenta didática para o ensino de tópicos da geometria é bem conhecida, contudo, essa abordagem não esgota as possibilidades de uso desse dispositivo didático.

Propõe-se neste artigo a apresentação do uso do geoplano como recurso visual para o estudo dos números racionais e algumas de suas propriedades. A atividade requer um geoplano, que pode ser construído com madeira, cortiça ou placas de isopor. Os pontos da malha podem ser marcados com pregos ou alfinetes.

NÚMEROS RACIONAIS NO GEOPLANO

Números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma de fração $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros, e $q \neq 0$. Vamos associar a cada número racional um par ordenado de inteiros (p, q) , o que permitirá a visualização desse número em um geoplano ordenado (geoplano com marcações numéricas). Sem perda de generalidade, simplificaremos nossa análise estudando apenas as frações com numeradores e denominadores positivos em um geoplano 8×8 , sinalizando que o estudo torna-se mais interessante em geoplanos maiores (20×20 , por exemplo). Vejamos alguns exemplos daquilo que estamos propondo:

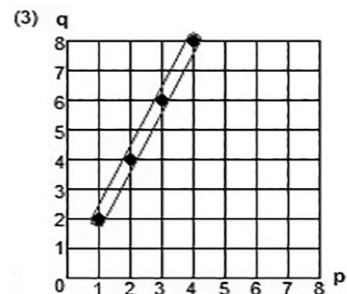
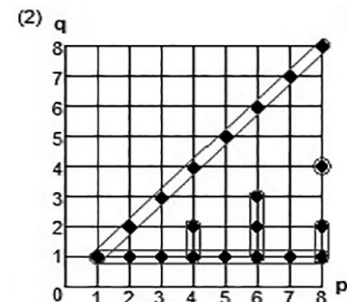
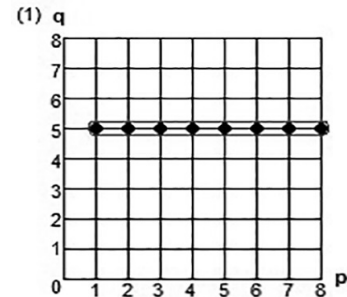


Os pontos A, B, C, e D representam, respectivamente, os números racionais $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{1}$ e $\frac{7}{6}$.

Utilizando elástico, linha ou barbante, podemos começar a praticar o uso do geoplano ordenado fazendo as seguintes marcações:

- (1) todas as frações com denominador 5;
- (2) todos os números naturais;
- (3) todas as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Respostas:

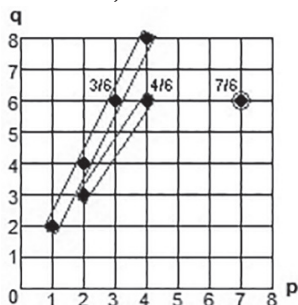


Com esse exercício, o dispositivo permite observar que:

- frações com mesmo denominador necessariamente estão alinhadas horizontalmente;
- frações impróprias (e frações aparentes) estão localizadas na diagonal que passa pela origem, ou à direita dela;
- frações equivalentes necessariamente estão alinhadas com a origem e entre si.

Vejamos agora como proceder para fazer adição de frações utilizando o geoplano ordenado. Por exemplo, para fazer $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, os passos são:

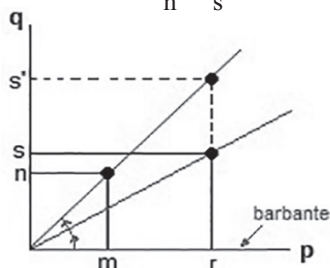
- marcamos o conjunto de frações equivalentes a $\frac{1}{2}$;
- marcamos o conjunto de frações equivalentes a $\frac{2}{3}$;
- procuramos frações nos conjuntos marcados que estejam alinhadas horizontalmente e, nessa mesma linha de alinhamento, encontramos o resultado da soma adicionando os numeradores das frações.



ORDENAÇÃO DOS RACIONAIS NO GEOPLANO

Uma outra tarefa simples que pode ser feita com o uso do geoplano é a ordenação dos elementos de um subconjunto de números racionais.

Para ordenar dois racionais distintos representados por (m,n) e (r,s) , inicialmente amarramos na origem do geoplano um barbante, que deve estar alinhado com o eixo p. Rotacionando o barbante esticado em sentido anti-horário, o primeiro par ordenado intersecado representa o maior racional. Vejamos uma justificativa para o caso indicado na figura abaixo, onde queremos ordenar as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$:



No geoplano, dois pontos que representam frações de mesmo numerador sempre estão alinhados verticalmente. Nesse caso, a maior das frações representadas será a de menor denominador, ou seja, será aquela representada pelo ponto mais próximo do eixo p.

Observando a fração $\frac{r}{s}$, representada no geoplano, notamos que existe uma fração $\frac{r}{s'}$, com $s' > s$, tal que $(0,0)$, (m,n) e (r,s') sejam colineares. Uma vez que pontos colineares a $(0,0)$ representam frações equivalente, comparar (m,n) com (r,s) é equivalente a comparar (r,s') com (r,s) . Como (r,s) está mais próximo do eixo p do que (r,s') , segue que $\frac{r}{s} > \frac{m}{n}$.

UMA FLORESTA DE RACIONAIS

Imaginemos agora uma situação onde o geoplano representa uma floresta, sendo cada ponto uma árvore muito fina. Se estivéssemos localizados na origem, e olhando para a floresta, que árvores seriam visíveis?

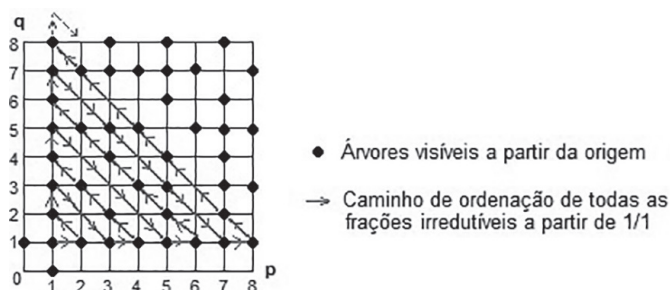
Uma árvore correspondente à fração $\frac{3}{6}$ não seria visível por ter à sua frente as árvores correspondentes a $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Nessa linha de visão, a única árvore visível seria aquela correspondente à fração $\frac{1}{2}$. Explorando essa ideia para outras frações, pode-se dizer que um ponto (p,q) do geoplano é visível da origem se e somente se p e q são números primos entre si, o que implica dizer que as árvores visíveis são aquelas representadas por frações irredutíveis $\frac{p}{q}$.

Se considerarmos uma fração redutível qualquer, como por exemplo $\frac{4}{8}$, encontramos a fração irredutível correspondente ligando os pontos $(4,8)$ e $(0,0)$, e verificando que $(1,2)$ representa a árvore visível que encobre $(4,8)$.

RACIONAIS, UM CONJUNTO ENUMERÁVEL

Sabemos que o conjunto dos racionais é enumerável, o que significa dizer que podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos racionais e dos números naturais (lembramos mais uma vez que, por efeito de simplificação, estamos trabalhando apenas com os racionais positivos).

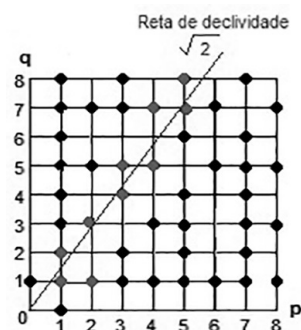
Uma vez que a representação no geoplano das árvores visíveis a partir da origem indica todas as frações irredutíveis que compõem o conjunto dos racionais, podemos utilizá-la para colocar esses números em fila, o que possibilitará estabelecer a bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$:



de alcance infinito, poderíamos fazer a seguinte pergunta: - será que para qualquer direção que aponte a linha de visão do observador ele sempre irá enxergar uma árvore?

A resposta a essa pergunta é “não” porque existem números que não podem ser escritos como quociente de inteiros, os números irracionais. Por exemplo, se a linha de visão do observador for uma reta com declividade $\sqrt{2}$, ela nunca intersestará uma árvore. Observando atentamente essa linha, as árvores visíveis da floresta e o inverso das frações que essas árvores representam $\left(\frac{q}{p}\right)$, verificaremos que a linha de declividade $\sqrt{2}$ está cercada de aproximações racionais de $\sqrt{2}$. Algumas dessas aproximações cometem erros por excesso, como $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}$ etc, e outras por falta, como $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}$ etc. Todas as frações $\frac{q}{p}$ que cometem erros por excesso estão localizadas acima da reta de declividade $\sqrt{2}$, e as que cometem erros por falta estão abaixo dessa reta. Lembrando que $\sqrt{2} \approx 1,41\dots$, observe que as melhores aproximações são aquelas dadas por pontos mais próximos o possível da reta de declividade $\sqrt{2}$. No nosso geoplano 8x8, as melhores aproximações são $\frac{7}{5}=1,4$ e $\frac{3}{2}=1,5$. Em geoplanos maiores podemos obter aproximações ainda melhores, como por

exemplo $\frac{17}{12}$, que comete erro (por excesso) apenas na terceira casa decimal de $\sqrt{2}$.



Bibliografia

Gardner, M. (1984). The Lattice of Integers. In M. Gardner(Ed), *Martin Gardner's 6th Book of Mathematical Diversions from Scientific American* (pp 208-219). Chicago, IL.: University of Chicago Press.

Niven, I. (1984). *Números racionais e irracionais*. Rio de Janeiro: SBM.

Watkins, A. E. & Watkins, W.(1980). *Fractions on the geoboard. Mathematics Teacher*, 73(2), pp. 133-139. NCTM.

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

COLÉGIO SANTA CRUZ (SÃO PAULO, BRASIL)

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Número racional como quociente

As tarefas que envolvem o processo de partilha (divisão em partes iguais) são a base para a compreensão do número racional como um quociente. Mas é preciso ter em atenção que essa compreensão vai para além da ação física e da representação pictórica da divisão em partes iguais.

Nos contextos dos problemas que propomos, o símbolo $\frac{a}{b}$ tem múltiplos significados:

- Uma divisão ($a \div b$); No problema 1, são 3 pizzas a dividir por 7 pessoas;
- O número racional que é o resultado dessa divisão ($\frac{a}{b}$ de uma pizza); no problema 1, $\frac{3}{7}$ de uma pizza
- Uma razão (se temos **a** pizzas para **b** pessoas; ou se tivermos diferentes grupos de pessoas e de pizzas e queremos que as partilhas sejam iguais). No problema 1, cada pessoa fica com $\frac{1}{7}$ de pizza e o número de pizzas partilhado é irrelevante, podem ser 3 ou 300..

Este último contexto (diferentes grupos de pessoas e pizzas e queremos que as partilhas sejam iguais) pode potenciar a

representação em diagrama de árvore na organização das mesas e das pizzas.

Com o último problema proposto podemos potenciar a aprendizagem da adição e subtração de frações.

Após a resolução dos problemas, os alunos têm um conjunto de questões de reflexão, que poderá dar origem a uma discussão plenária em que se podem colocar questões adicionais para verificar a aprendizagem.

Nota: Mais uma vez, esta proposta inspira-se nas sugestões de Susan Lamon de abordagem aos sentidos do número racional, de que já resultou a proposta apresentada na revista 146, só que temos mais um elemento rendido à autora referida.

ADELAIDE COSME

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS POENTE DOMINGOS SEQUEIRA, LEIRIA

ISABEL ROCHA

MANUELA PIRES

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS POENTE MARINHA GRANDE POENTE

Número racional como quociente¹

Resolve os seguintes problemas:

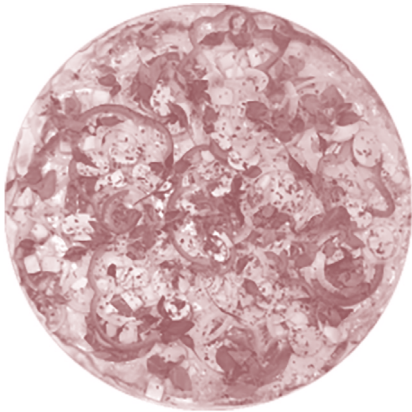
1. Sete pessoas vão partilhar 3 pizzas de cogumelos idênticas. Que quantidade cabe a cada pessoa?
 - a. Faz um desenho que represente a situação.
 - b. Nomeia essa quantidade de piza.
 - c. Essa quantidade que parte representa do total de pizzas partilhado?
2. Um grupo de 12 pessoas partilha várias pizzas. Cada uma tem no seu prato, $\frac{1}{6}$ de piza de queijo + $\frac{1}{6}$ de piza quatro estações + $\frac{1}{12}$ de piza vegetariana. Quantas pizzas de cada tipo foram pedidas?
3. 24 amigos foram a um restaurante e encomendaram 18 pizzas de queijo. O restaurante tem 1 mesa para 12 pessoas, 1 mesa de 6 pessoas, 1 mesa para 4 e 1 mesa para 2. Como vai o empregado distribuir as pizzas? E que quantidade de piza cada um come?
4. Quem come mais piza, 4 pessoas que partilham 3 pizzas ou 7 pessoas que partilham 5?
5. Uma família de 6 pessoas partilha 3 pizzas de queijo e 4 vegetarianas e todos querem comer das duas. Que quantidade cada pessoa come?



REFLEXÃO

Com base nos problemas resolvidos, responde às questões que se seguem:

1. Será que o numerador de uma fração (como quociente) representa:
 - a. O número total de partilhas?
 - b. O número de itens em cada partilha?
 - c. O número de itens a partilhar?
 - d. O número de objetos numa unidade?
2. Será que o denominador de uma fração (como quociente) representa:
 - a. O número total de partilhas?
 - b. O número total de itens em cada partilha?
 - c. O número de itens a partilhar?
 - d. O número de objetos numa unidade?
3. O símbolo $\frac{3}{4}$ pode representar a) uma operação, b) um número e c) uma razão. Usa exemplos para explicar estes significados.



¹ Lamon, S. J. (2006). Teaching fractions and ratios for understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Para esta secção escolhemos, por indicação de Eduardo Veloso, o texto de Henrique Leitão sobre a vida e obra de Pedro Nunes, publicado originalmente em *Loxodromie et Projection de Mercator*, tradução de José Lima, revista pelo autor. Escreve Raymond D'Hollander sobre a inclusão do texto no seu livro:

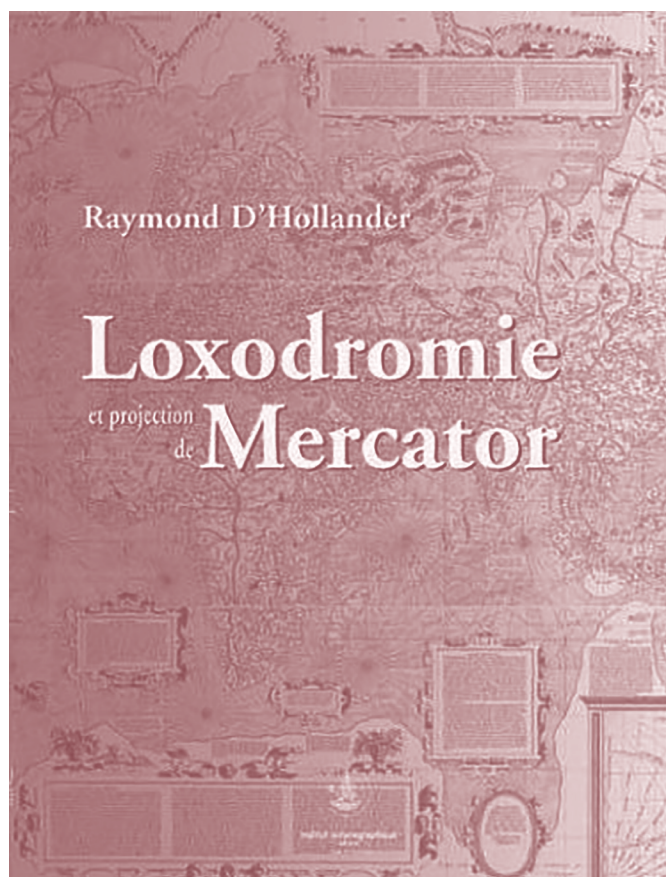
“Henrique Leitão é professor de Física e investigador na Universidade de Lisboa, comissário científico da exposição científica sobre Pedro Nunes organizada na Biblioteca Nacional de Lisboa em maio de 2002, no 500.º aniversário do nascimento de Pedro Nunes, coordenador da comissão científica encarregada da publicação das obras completas de Pedro Nunes pela Academia das Ciências de Lisboa. Ninguém estaria mais qualificado que Henrique Leitão, eminente especialista de Nunes, para escrever a secção que se segue. Agradecemos a sua preciosa colaboração (D'HOLLANDER, 2005, p. 19).”

A redação da revista *Educação e Matemática* agradece a Henrique Leitão a gentileza de ter permitido a publicação deste seu texto, enriquecendo assim conteúdo desta revista.

Pedro Nunes (1502-1574). Sua vida e obra,

HENRIQUE LEITÃO

Pedro Nunes nasceu em Alcácer do Sal, uma pequena povoação a sul de Lisboa, que nos inícios do século XVI tinha uma certa importância em Portugal. Quase nada se sabe das suas origens nem dos seus primeiros anos de vida. Os raros testemunhos biográficos que chegaram até nós referem que, ainda jovem, foi para a Universidade de Salamanca, em Espanha, onde estudou medicina. Casou em 1523 e voltou para Lisboa em 1527 ou 1528. Em 16 de Novembro de 1529, foi nomeado cosmógrafo, facto que constitui o primeiro reconhecimento da sua competência noutras matérias científicas para além da medicina. Ao mesmo tempo, desde dezembro de 1529 até finais de Janeiro de 1532, deu aulas de Filosofia Moral, Lógica e Metafísica na Universidade (*Estudos Gerais*), em Lisboa, tendo concluído o doutoramento em medicina em 1532. No início da década de 1530, começou também a dar aulas particulares de matemática aos jovens príncipes, irmãos do rei D. João III. Este cargo de tutor dos príncipes é de realçar, pois revela a sua proximidade da vida da Corte e a proteção do rei, um aspeto que virá a mostrar-se importante durante toda a carreira científica de Pedro Nunes. Em 1537, Pedro Nunes publicou em Lisboa a sua primeira obra. Trata-se de uma compilação de textos diversos: traduções de textos clássicos — do *Tractatus de Sphaera* de Sacrobosco, do Livro I da *Geographia* de Ptolomeu e dos primeiros capítulos das *Theoricae novae planetarum* de Georg Peurbach. A redação em língua vernacular destes textos demonstra um interesse por estas questões por parte de pessoas que não possuíam formação académica, provavelmente os príncipes e outros jovens nobres da Corte, mas talvez também pilotos e outros ligados à vida do mar. Além destas traduções, apresenta nesta mesma obra dois textos originais sobre questões de navegação: um *Tratado sobre certas dúvidas da navegação* e um *Tratado em defensam da carta de marear*. São dois trabalhos da maior importância. É



nestes textos que faz a distinção entre a navegação ao longo de um círculo máximo e a navegação seguindo um rumo constante (posteriormente designadas, no século XVII, como navegações ortodrómica e loxodrómica). O autor explica que os arcos de círculo máximo, que correspondem à distância mais curta entre dois pontos da esfera, são distintos das linhas de rumo constante. Apresenta pela primeira vez o conceito de loxodromia como correspondendo à curva descrita por um navio navegando

segundo um rumo constante e desenha estas novas curvas em projeção polar. Propõe aos pilotos a maneira mais adequada de navegar, ou seja, ao longo de arcos da curva de rumo constante, introduzindo as correções necessárias para se aproximar de um círculo máximo. Discute e apresenta também considerações muito pertinentes sobre a problema da geometria das cartas náuticas. Mais tarde retomará todas estas ideias, de modo mais pormenorizado e bastante mais técnico, no seu livro publicado em 1566, em Basileia.

Num certo sentido, a terceira década do século XVI foi a mais produtiva na carreira científica de Pedro Nunes, correspondendo aos anos em que se desenhavam os traços mais significativos da sua obra científica. Além do livro que publicou em 1537, preparou outras obras que não chegou a publicar, mas que tiveram difusão sob forma manuscrita: tratados sobre o astrolábio, sobre a trigonometria esférica, os textos com os títulos *De ortu et occasu signorum*, *De planisphaerio geometrico*, *De globo delineando ad navigandi artem*, assim como uma tradução do *De architectura* de Vitruvius. Foi igualmente durante esses anos que pensou pela primeira vez em escrever a uma crítica do matemático parisiense Oronce Finé (1494-1555) — o que virá a fazer alguns anos mais tarde — e que começou a trabalhar no seu livro de álgebra, que só publicará trinta anos depois. Foi nessa época que preparou uma obra sobre os crepúsculos, *De crepusculis liber unus*, publicada em 1542, livro que foi frequentemente considerado pelos historiadores como a sua obra mais criativa. Tomando como base o texto então atribuído a Ibn-al Haytham, *Liber de crepusculis* (que desde 1967 se sabe ser da autoria de Ibn Muḥad), que circulava durante a Idade Média na tradução de Gerardo de Cremona, Pedro Nunes redigiu uma obra muito importante tanto do ponto de vista da complexidade técnica como do rigor matemático. O livro analisa de modo rigoroso a duração dos crepúsculos em função da latitude e da declinação do Sol, e determina o dia do menor crepúsculo. É também nesta obra que propõe o seu sistema de divisão das escalas de graduação dos limbos de instrumentos, conhecidos em vários países pelo nome de Nónio (nonius), que posteriormente será aperfeiçoado por Jacob Curtius e Cristovão Clavius¹. Com a publicação de *De crepusculis* Pedro Nunes alcança finalmente uma notoriedade internacional e a consagração no seu país. Dois anos mais tarde, em 1544, é nomeado professor de matemática na Universidade de Coimbra. É possível que este reconhecimento tenha levado Pedro Nunes a decidir-se finalmente a escrever *De erratis Orontii Finaei*, uma obra crítica muito dura contra o matemático Oronce Finé do Collège Royal de Paris que anunciava ter resolvido os famosos problemas da quadratura do círculo, da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo. Trata-se do único livro de polémica na obra de Pedro Nunes, mas Finé não respondeu às objeções do matemático português.

A carreira de Pedro Nunes na Universidade de Coimbra foi frequentemente interrompida pelas suas ocupações em Lisboa, pois em 1547 foi nomeado Cosmógrafo-mor do Rei, o que o obrigava a ausentar-se muitas vezes da universidade para trabalhar na capital com cartógrafos, pilotos e construtores de instrumentos. É possível apurar que se encarregou de diversas funções administrativas na universidade, mas no que diz respeito às aulas é manifesto que surgiram dificuldades e ausências frequentes, de tal modo que não há ninguém no século XVI que se possa verdadeiramente designar como discípulo de Pedro Nunes. Na verdade, até à sua jubilação da universidade, em 1562, parece ter-se concentrado sobretudo nas suas funções de cosmógrafo. De qualquer modo, relativamente aos anos na Universidade de Coimbra, há que referir a influência que a sua obra exerceu junto do jovem jesuíta alemão Cristovão Clavius que estudou no Colégio dos Jesuítas nessa cidade durante os anos 1555-1560. Clavius nunca foi aluno de Pedro Nunes, mas tece-lhe grandes elogios em todos os seus trabalhos. A admiração de Clavius pelas obras de Pedro Nunes veio a determinar o facto de o matemático português se tornar um dos autores mais influentes entre os jesuítas sobre questões matemáticas no final do século XVI e início do século XVII².

Se bem que uma parte considerável das ocupações de Pedro Nunes em Lisboa estivesse ligada à sua função de cosmógrafo-mor, as suas relações com os pilotos e navegadores parecem ter sido difíceis. Nas suas obras critica frequentemente a insuficiente cultura científica desses homens e estes, por seu turno, censuram-lhe os excessos teóricos e a inutilidade de muitas das suas ideias na prática quotidiana da vida a bordo. De facto, o cosmógrafo não tinha qualquer experiência da vida no mar, pois não tinha nunca embarcado e a sua abordagem dos problemas de navegação era sempre abstrata e teórica.

A partir da década de 1550, Pedro Nunes goza de uma grande reputação internacional. Em França, Élie Vinet incluiu nas numerosas edições da sua *Sphaera emendata* um texto do matemático português sobre a largura dos “climas”. Jean Nicot, o embaixador francês em Lisboa, enviou para o seu país o *Tratado da Sphaera* do “grande matemático” Pedro Nunes, sugerindo que fosse traduzido e impresso “para proveito dos capitães franceses que de tal se mostrem capazes”, e sabe-se que Pedro Nunes se correspondia com alguns matemáticos franceses, como por exemplo Jacques Peletier. Correspondia-se igualmente com John Dee, na Inglaterra, que tinha uma grande admiração pelo seu trabalho. Mas será sobretudo depois da sua morte, nos últimos anos do século XVI, que a influência científica de Nunes se tornará maior, junto dos cientistas espanhóis (como Simon de Tovar, García de Céspedes, Juan Cedillo Diaz), ingleses (Edward Wright e Robert Hues, por exemplo) e dos Países Baixos (como Simon Stevin e Willebrord Snell).

É praticamente certo que Gerard Mercator (1512-1594) seguia com atenção o trabalho de Pedro Nunes. A própria cronologia dos acontecimentos parece mostrar uma espécie de influência, pois Pedro Nunes publica as suas primeiras ideias sobre a loxodromia em 1537 e Mercator desenha as loxodromias no seu globo em 1541; seguidamente o português desenvolve em pormenor a teoria matemática da curva loxodrómica em 1566 e Mercator apresenta o seu célebre mapa em 1569. Na verdade, pode até conjecturar-se que John Dee tenha servido de intermediário entre os dois. Em 1558, Dee escrevia a Mercator informando-o que tinha escolhido Pedro Nunes, “a única relíquia e ornamento das artes matemáticas entre nós”, como executor testamentário em caso de morte³. Além disso, sabe-se que, na sua biblioteca pessoal, Mercator tinha as obras de Pedro Nunes⁴. Foi só depois da sua jubilação na universidade que Pedro Nunes retomou as suas publicações matemáticas. Em 1566 é publicado em Basileia, pelo famoso editor Heinrich Petri, a *Petri Nonii Salaciensis Opera*, uma recolha dos seus trabalhos que, de certo modo, representa o seu mais importante legado científico. Nesses textos, o autor retoma as suas ideias sobre a navegação teórica e a curva loxodrómica, desenvolvendo-as bastante mais do que nos primeiros trabalhos publicados em 1537. O livro é também interessante devido a outros textos, pois inclui uma versão comentada muito erudita das *Theoricæ novæ planetarum* de Peurbach e um texto sobre os problemas mecânicos na tradição do pseudo aristotélico *Mechanica Problemata*. No ano que se seguiu ao aparecimento das *Opera*, Pedro Nunes publica o *Libro de algebra en arithmetica y geometrica* (Antuérpia, 1567), uma obra que preparava havia trinta anos e que será objeto de elogios de eminentes algebristas, como Guillaume Gosselin e Adrianus Romanus. Nos anos seguintes (1571 e 1573), apenas publicará reedições das suas obras. Curiosamente, a segunda edição das *Opera*, feita sob a sua supervisão, em Coimbra, foi publicada alterando o título asséptico de *Opera* para um título bem mais programático: *De arte atque ratione navigandi* (Sobre a arte e a ciência de navegar), o que confirma que a navegação tinha sido uma das preocupações fundamentais do autor — em especial, a transformação da navegação de uma arte prática numa disciplina rigorosa e matematizada. Depois da sua morte, os editores de Basileia farão uma outra edição das *Opera* (1592). Em 1578, no final da sua vida, Pedro Nunes foi consultado por Roma para se pronunciar sobre o projeto de reforma gregoriana do calendário. Nessa altura, estava já muito idoso e doente, e veio a morrer em agosto de 1578, antes de ter a possibilidade de responder. A reação de Roma testemunha bem a notoriedade de Pedro Nunes: informados de que o matemático português tinha morrido antes de poder pronunciar-se sobre este importante projeto, os diplomatas de Roma solicitam uma verificação pormenorizada dos papéis pessoais do cosmógrafo português⁵.

Notas

1 É interessante registar a opinião de Clavius sobre este livro de Pedro Nunes: “Pedro Nunes, lusitano, matemático célebre da nossa época, há 64 anos publicou um erudito e elegante livro sobre os crepúsculos, no qual demonstra de maneira muito perspicaz coisas muito importantes e interessantes, que pareceriam totalmente paradoxais se não estivessem apoiadas nas mais firmes demonstrações», trad. de: Christophori Clavii, *Digressio geometrica de crepusculis*, integrada no *In sphaeram loannis de Sacro Bosco commentarius (Operum Mathematicarum)*, Mainz, 1611, III, p. 256. Sabe-se também que o dinamarquês Tycho Brahe construiu instrumentos equipados com o nónio, mas que não chegaram até nós. Não existe senão um exemplar de um instrumento contemporâneo do nónio, construído pelo inglês James Kynuyn.

2 Como recentemente escreveu um especialista em ciência dos jesuítas: «Tra i matematici del medio Cinquecento Pedro Nunez fu uno dei più influente sulla scuola di Clavio». Ugo Baldini, «Legem impone subactis», *Studi su Filosofia e Scienza dei Gesuiti in Italia, 1540-1632*, (Roma : Bulzoni, 1992), p. 243. A influência da obra de Nunes sobre os matemáticos jesuítas franceses foi registada por Antonella Romano, *La contre-Réforme mathématique, Constitution et diffusion d'une culture mathématique jésuite à la Renaissance*, (Roma : École Française de Rome, 1999).

3 “Por isso, se a minha obra não puder ser publicada enquanto eu for vivo, leguei essa tarefa a um homem eruditíssimo e gravíssimo – que é para nós o único depósito, a honra e a coluna das artes Matemáticas – em verdade o sr. Pedro Nunes, de Alcácer do Sal; e, há pouco pedi-lhe com instancia que, se quando eu morrer, lhe fosse entregue este meu trabalho, benigna e humanamente o adopte como seu, assim se digne de finalmente o acabar, limar e rever com cuidado, para utilidade pública dos sábios, como se fosse absolutamente trabalho seu”, trad. de: Wayne Shumaker (ed.), *John Dee on Astronomy, Propædeumata Aphoristica (1558 and 1568)* (Berkeley e Los Angeles : University of California Press, 1978), pp. 114-115.

4 A biblioteca de Mercator perdeu-se e não se conhece nenhum exemplar do catálogo publicado em 1604 com o título *Librorum bibliothecae clarissimi doctissimi viri piaie memoriae Gerardi Mercator (...)* (Lugduni Batavorum, Ex officina Thomae Basson, 1604). Mas um manuscrito desse catálogo sobreviveu e foi recentemente publicado: Anne Cherton e Marcel Watelet (eds.), «Catalogus», in Marcel Watelet (ed.), *Mercator Cosmographe*, (Fonds Mercator do Banco Paribas, 1994), pp. 403-413.

5 Todo este episódio é narrado por Léon Bourdon em “Avis des astronomes portugais sur le projet gregorien de reforme du calendrier”, *Revista Filosófica*, 7 (1953) 5-46.

HENRIQUE LEITÃO

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

TRADUÇÃO: JOSÉ LIMA

O Binômio discriminante de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros

No início deste século, o governo brasileiro instituiu a necessidade do cumprimento de horas de prática como componente curricular para os cursos de formação inicial de professores. Em 2005, para exemplificar como poderiam funcionar tais práticas, escrevi um texto sobre uma caracterização do discriminante de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros e, no ano de 2017, durante uma discussão sobre prática como componente curricular, utilizei mais uma vez ideias que apresentei naquela ocasião. Um dos estudantes que participava das discussões sugeriu, com a concordância de outros que ali estavam, que eu publicasse tais resultados para torná-los acessíveis a mais pessoas. Atendendo à sugestão, resolvi expor os resultados numa revista que pudesse inclusive transpor as fronteiras brasileiras aproveitando assim para apresentar algumas diferenças terminológicas deste assunto.

Dada uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros, isto é, $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$ (1)

utilizando a fórmula resolvente, que no Brasil denomina-se comumente fórmula de Bhaskara¹, pode-se concluir que as soluções da equação são da forma $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

É notória a importância do que em Portugal se denomina binômio discriminante, e no Brasil apenas discriminante, Δ , na resolução de tais equações. No entanto, em diversos casos utilizamos ou calculamos o discriminante e não refletimos se qualquer número inteiro pode ser o resultado do discriminante de uma equação do tipo (1). Você leitor já se perguntou, por exemplo, se o número 7 pode ser o valor do discriminante de uma equação como a que estamos tratando (com coeficientes inteiros)? E o 5?

Vamos responder a essas perguntas provando um resultado que caracteriza o valor do discriminante das equações de segundo grau com coeficientes inteiros, demonstrando que um número inteiro é o discriminante Δ de uma equação do tipo (1) se, e somente se, Δ é um múltiplo de quatro ou um número cuja divisão por quatro tem resto um.

Para essa prova utilizaremos o Algoritmo da Divisão² cujo enunciado segue abaixo e cuja demonstração pode ser encontrada em livros de Introdução a Teoria dos Números ou livros de Álgebra Elementar³.

1 Não se sabe ao certo por que e quando a denominação fórmula de Bhaskara começou a ser utilizada no Brasil e apesar de muitos considerarem tal denominação errônea (afinal tal método de resolução era conhecido antes mesmo do nascimento de Bhaskara) essa expressão é rotineiramente utilizada inclusive em livros didáticos.

2 Que também é denominado Algoritmo da Divisão de Euclides ou Algoritmo de Euclides.

3 Como, por exemplo, [MC] e [AG]

Teorema 1 (Algoritmo da Divisão) *Sejam a e b inteiros, com $b \neq 0$. Existem inteiros q e r únicos e tais que $a = bq + r$, onde $0 \leq r < |b|$.*

O algoritmo da divisão diz-nos que qualquer inteiro é da forma $2q$, ou $2q + 1$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Do mesmo modo, qualquer inteiro é da forma $3q$, $3q + 1$, ou $3q + 2$ para algum $q \in \mathbb{Z}$ ou da forma $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ ou $4q + 3$ e assim sucessivamente, conforme a nossa necessidade.

De posse de tais factos, estamos prontos para enunciar e demonstrar a caracterização descrita anteriormente.

Proposição 2 *Um número inteiro Δ é discriminante de uma equação do segundo grau do tipo (1) se, e somente se, Δ é da forma $4k$ ou $4k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$*

Demonstração: Pelo Algoritmo da Divisão sabemos que o inteiro b da equação (1) ou é par, ou é ímpar, isto é, $b = 2q$ ou $b = 2q + 1$, para algum $q \in \mathbb{Z}$, portanto

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4q^2 - 4ac = 4(q^2 - ac) \text{ ou}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4q^2 + 4q + 1 - 4ac = 4(q^2 + q - ac) + 1, \text{ ou seja, } \Delta = 4k \text{ ou } \Delta = 4k + 1, \text{ com } k = (q^2 - ac) \text{ ou } k = (q^2 + q - ac) \text{ e portanto } k \in \mathbb{Z}.$$

Reciprocamente se $\Delta = 4k$, onde $k \in \mathbb{Z}$, basta tomarmos, por exemplo, os coeficientes $a = 1$, $b = 0$ e $c = (-k)$ na equação (1) e teremos $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-k) = 4k$.

Já se $\Delta = 4k + 1$ com $k \in \mathbb{Z}$, podemos atribuir a a , b e c , respectivamente, os valores 1, 1 e $(-k)$ e assim

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-k) = 4k + 1.$$

A propósito, acabamos de responder também às perguntas a respeito do 7 e do 5 feitas anteriormente. Podemos afirmar a partir da proposição anterior que 7 não pode ser o valor do discriminante de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros, pois não pode ser escrito da forma $4k$ ou $4k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$, já que é da forma $4k + 3$, com $k = 1$. E por outro lado, como 5 é da forma $4k + 1$, com $k = 1$, então existe uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros cujo binômio discriminante assume esse valor!

Referências

- [AG] Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides - SBM, Rio de Janeiro, 1999.
[MC] Millies, F. C. P., Coelho, S. P. *Números: Uma Introdução à Matemática*. EDUSP, São Paulo, 2000.

DAVID PIRES DIAS
IME-USP

Linha de rumo de Pedro Nunes

EDUARDO VELOSO

Este é o terceiro e último artigo de uma série que dedicámos a um dos resultados mais importantes do matemático português Pedro Nunes, a *linha de rumo*, designada actualmente por *loxodrómia*. Está completamente fora do âmbito dos textos publicados nesta revista a apresentação da linha de rumo a partir das investigações do próprio Pedro Nunes e da sua transcrição matemática em termos modernos. No entanto, no sentido de combater um ensino de matemática que ignora a história da matemática, nomeadamente em Portugal, seria desadequado não incluir a *linha de rumo* na série de artigos sobre curvas notáveis que temos vindo a publicar na *EM*. É possível, como espero demonstrar neste artigo, apresentá-la de modo acessível e mesmo praticável pelos alunos de matemática, desde que tenham oportunidade de utilizar computadores e um programa de geometria dinâmica. Julgo mesmo que este assunto poderia dar origem a diversos tipos de projectos desenvolvidos por grupos de alunos.

Como cosmógrafo-mor, Pedro Nunes foi defrontado por dúvidas levantadas pelos navegadores portugueses relativas aos longos percursos no Oceano Atlântico, os quais exigiam métodos de navegação diferentes dos adoptados na navegação no Mediterrâneo ou ao longo da costa de Portugal. Daqui resultaram investigações e resultados, que Pedro Nunes tratou em diversos tratados que publicou. A situação de que vamos partir pretende explicar, com um exemplo acessível mas não necessariamente histórico, o tipo de questões que levou Pedro Nunes à descoberta da linha de rumo.¹

Imaginemos uma nau navegando no Atlântico e que pretende dirigir-se de um ponto *A* para um ponto *B*.

O percurso mais curto para navegar de *A* para *B* é seguir o arco do círculo máximo que contém os dois pontos, que na figura 1 está indicado por uma linha a preto. Os navegadores estavam convictos, da sua experiência anterior em navegações de curta distância, que se mantivessem, com auxílio da agulha de marear, o ângulo que o trajecto *AB* faz com o meridiano que passa por *A*, esse rumo levaria a nau até ao ponto *B*. Mas verificaram na prática que não, e levantaram esta questão ao cosmógrafo-mor. Pedro Nunes mostra, no seu tratado *Sobre a arte e a ciência de navegar*, que a curva descrita pela nau, se mantivesse esse rumo, iria afastá-la do arco *AB*. Explica que a nau descreveria uma curva – a *linha de rumo* – que, no nosso modo actual de nos exprimirmos, seria uma espécie de espiral sobre a esfera

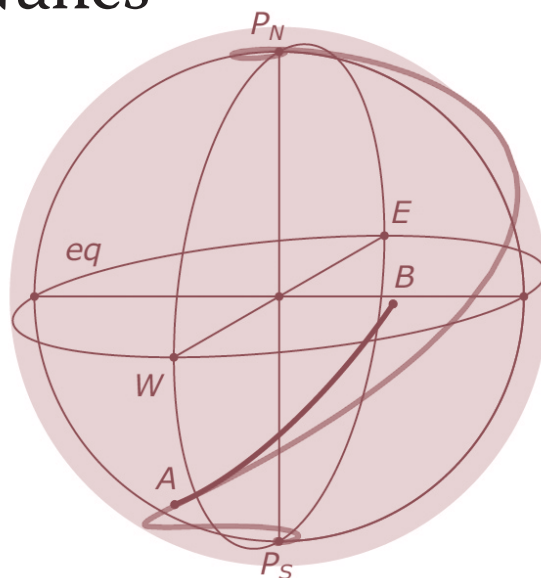


Figura 1

terrestre, que se estenderia na direcção dos pólos. Inicialmente Pedro Nunes julgava que a linha de rumo atingiria os pólos, mas posteriormente concluiu que se aproximaria deles sem nunca os atingir (assintoticamente, diríamos nós ...). É a curva a cor da figura 1.

A recomendação feita aos pilotos pelo cosmógrafo-mor é que adoptem o trajecto mais curto entre *A* e *B* (o arco a negro de círculo máximo), mas que para isso terão que fazer sucessivas alterações ao rumo seguido, contrariamente ao que esperariam. Neste artigo, iremos mostrar como, utilizando um programa de geometria dinâmica — que no nosso caso será o *Geometer's Sketchpad* — é possível estudar e visualizar, de modo relativamente simples, esta descoberta de Pedro Nunes. Aconselhamos o leitor a ler, antes de continuar, os artigos anteriores² e o texto de Henrique Leitão sobre a *vida e obra* de Pedro Nunes (neste número da revista).

Como as figuras que apoiam o texto são necessariamente simplificadas e não podem mostrar todas as construções necessárias, são acompanhadas por vídeos explicativos e outros apoios existentes *online*. O que iremos tentar neste artigo é mostrar, dados dois pontos *A* e *B* sobre a esfera, como podemos construir e comparar, *de modo elementar e próprio de um ensino de matemática para todos*:

- O arco de círculo máximo *AB*.
- Uma *linha de rumo* que passe por *A* e que coincida, no início do trajecto *AB*, com este arco.

CONSTRUÇÃO DO ARCO DE CÍRCULO MÁXIMO AB

A figura 2 representa as *vistas* e a *perspectiva cavaleira* da esfera terrestre. Eis a sequência de construções a efectuar:

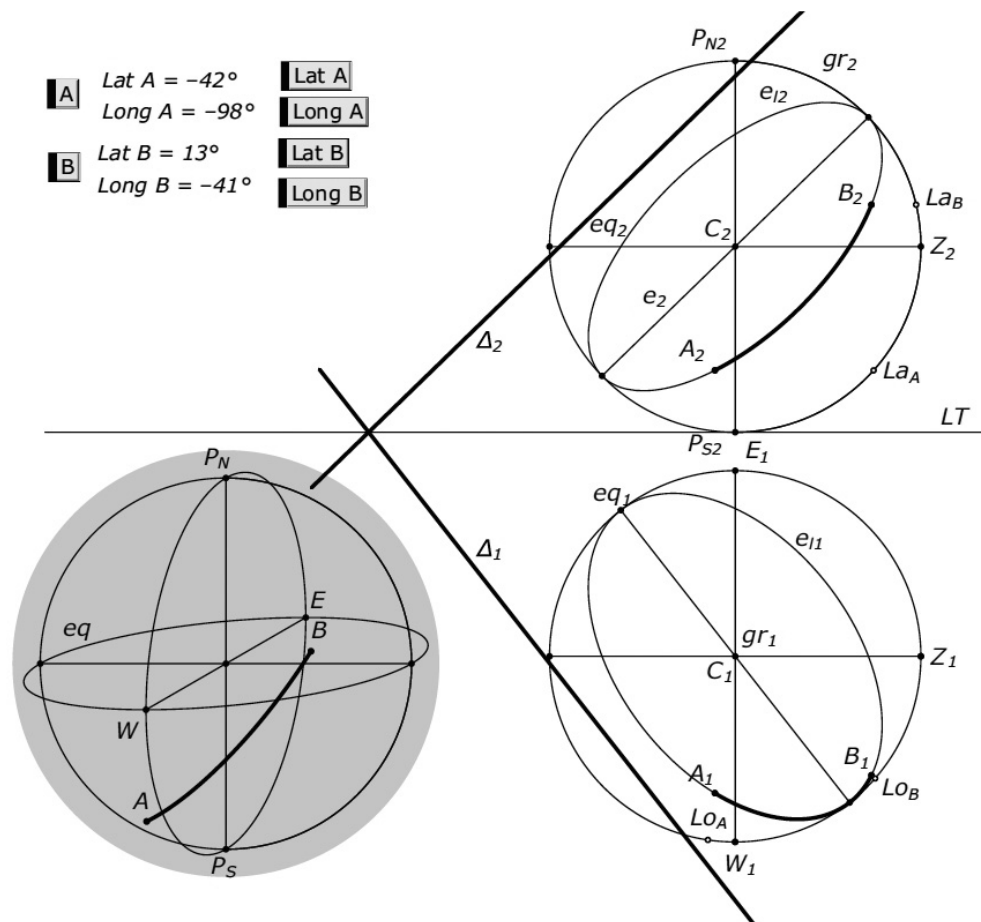


Figura 2

I. Posição de um ponto a partir das suas coordenadas

Pretendemos assinalar, sobre as vistas e sobre a perspectiva, dois pontos A e B, conhecidas as suas coordenadas geográficas.

Para isso:

- nas preferências do *Sketchpad*, escolhemos “directed degrees” e “units”;
- colocamos um ponto La_A e um ponto Lo_A respectivamente sobre a vista de frente do meridiano de Greenwich (gr_2) e sobre a vista de cima do equador (eq_1);
- medimos os ângulos $Z_2C_2La_A$ e $Z_1C_1Lo_A$ que designamos como *Lat A* e *Long A*; Z é a intersecção de gr com eq ;
- arrastamos os pontos La_A e Lo_A até obtermos os valores desejados;
- criamos um outro ponto B, da mesma forma.

II. Construção do arco de círculo máximo entre A e B

Ila. Determinar os traços do plano Δ (Δ_1 e Δ_2) contendo os pontos A, B e C (construção habitual da geometria descritiva);

Iib. O plano Δ intersecta a esfera no círculo máximo c_m . As vistas deste círculo são duas elipses c_{m1} e c_{m2} cujos eixos maiores são os dois segmentos e_1 e e_2 paralelos respectivamente aos traços Δ_1 e Δ_2 .

Iic. Construindo o arco Lo_ALo_B , é possível (ver [online](#)) construir os arcos A_1B_1 e A_2B_2 nas vistas e depois AB (*persp. cav.*) com a ajuda do comando *Construct Locus*.

CONSTRUÇÃO DE UMA LINHA DE RUMO³

A linha de raciocínio que fundamenta esta construção assenta nos seguintes pontos:

- a projecção estereográfica (que designaremos por St) — projecta cada ponto da superfície da esfera (excepto P_N) num ponto do plano π_1 tangente à esfera em P_S ;
- cada meridiano é transformado por St numa semi-recta de π_1 com origem em P_S ;
- tanto St como a sua inversa St^{-1} são transformações conformes (conservam os ângulos);
- se considerarmos, no plano π_1 , uma espiral equiangular Es de centro (ou pólo) em P_S , essa curva fará o mesmo ângulo α com todas as semi-rectas com origem em P_S ;
- a imagem da espiral Es por meio de St^{-1} será uma curva sobre a superfície da esfera e, tendo em atenção os dois últimos pontos, fará o mesmo ângulo α com todos os meridianos;
- será então uma linha de rumo Lo .

Iremos então prolongar a sequência anterior de construções. Para detalhes nas construções, ver [online](#).

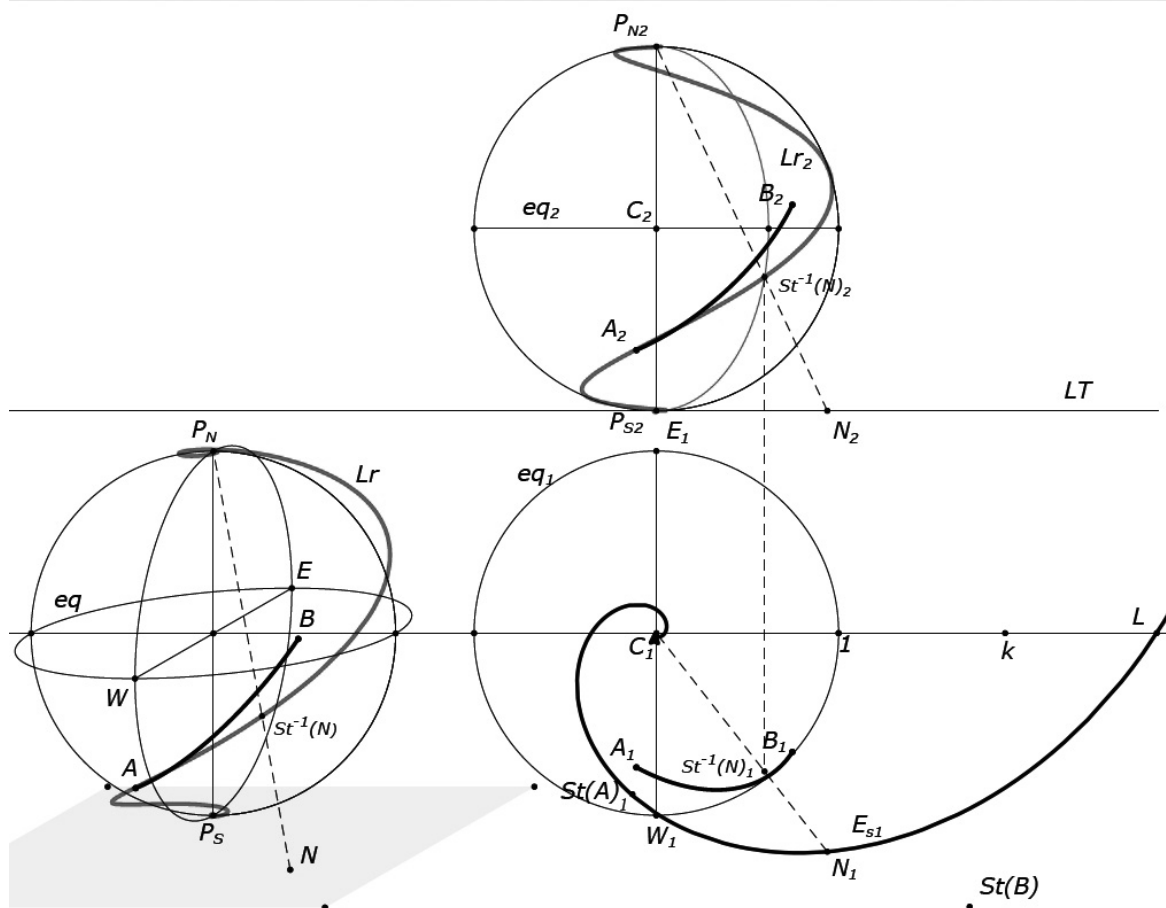


Figura 3

IIIa. Construção de uma espiral equiangular no plano horizontal:

- nas preferências do *Sketchpad*, escolhemos “radians” e “tenths”;
- constrói-se um eixo das abcissas e nesse eixo os pontos t , k , L , e $L.k^t$;
- rotação (ângulo t radianos) do ponto $L.k^t$, obtendo $L.k^{t'}$;
- seleccionando t e $L.k^{t'}$ e clicando em *Construct:Locus* obtém-se a vista de cima da espiral equiangular, Es_i ; a vista de frente confunde-se com a *Linha Terra*.

IIIb. Construção da imagem de Es sobre a esfera — a linha de rumo Lr —, por meio de St^{-1} :

- constrói-se um ponto genérico N sobre Es e depois a sua imagem $St^{-1}(N)$ sobre a esfera, nas vistas e na perspectiva;
- constrói-se (*Construct:Locus*) o lugar geométrico de $St^{-1}(N)$ na vista de cima (Lr_2) e na perspectiva (Lr), como se pretendia.
- constrói-se $St(A)_1$ e ajustam-se L e k até Es_1 passar por $St(A)_1$ e — visualmente — Lr coincidir com o arco AB na vizinhança do ponto A .

Notas:

1. Segue-se uma lista de recursos escritos e online sobre a linha de rumo. É uma resenha necessariamente incompleta.

Livros

PEDRO NUNES. Sobre a arte e a ciência de navegar. *OBRAS*, vol. IV, Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.

RAMOND D'HOLLANDER. *Loxodromie et projection de Mercator*. Institut Océanographique, Paris, 2005.

Este livro é muito completo e descreve detalhadamente os trabalhos de Pedro Nunes e a actividade posterior de matemáticos que comentaram e desenvolveram as ideias de Pedro Nunes.

Artigos

Queiró, J. F. (2002). Pedro Nunes e as linhas de Rumo, *Gazeta de Matemática*, 143 42-47.

Randles, W.G.L. (2002). Pedro Nunes e a descoberta da curva loxodrómica, *Gazeta de Matemática*, 143 90-97.

Recursos online

O site de apoio ao conteúdo deste artigo contém, por exemplo, vídeos descrevendo construções no *Sketchpad*, acesso directo a textos, etc. https://www.eduardoveloso.pt/geom_textos/linha_de_rumo.html

O site do Atractor contém, nos Temas Matemáticos, uma magnífica secção dizendo respeito à curva loxodrómica <https://www.atractor.pt>

2. Artigos anteriores nas revistas 142, 146 e 147.

3. Ver online os vídeos exemplificativos destas construções.

EDUARDO VELOSO



REPORTAGEM - 1.º CAMPEONATO NACIONAL MULTIPLI EM LEIRIA

DINA TAVARES, EUNICE OLIVEIRA, FERNANDO SEBASTIÃO, HUGO MENINO

ANA LA FÉRIA, RITA TEIXEIRA

O Instituto Politécnico de Leiria (IPLeiria) e a Alfiii (empresa que criou o Multipli) promoveram, no passado dia 14 de junho de 2018, a primeira edição do **Campeonato Nacional Multipli**, que se realizou na Escola Superior de Educação e Ciências Sociais (ESECS) do IPLeiria e contou com o apoio da Associação de Professores de Matemática (APM) e da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).

O Campeonato Nacional Multipli, que se pretende que tenha uma periodicidade anual, é fruto de uma organização conjunta, constituída por docentes do departamento de matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão (ESTG), do Departamento de Matemática e Ciências da Natureza da ESECS, do IPLeiria, assim como por elementos da Alfiii.

Este campeonato baseia-se no jogo de cartas MULTIPLI da Alfiii, com uma dinâmica especialmente criada para o ambiente escolar. O MULTIPLI é o jogo da tabuada *ao contrário*, que para além de poder ser jogado como um simples *jogo de bisca*, até 10 jogadores, se apresenta agora também na modalidade de campeonato, com uma dinâmica diferente e novas regras: um árbitro que lança os pedidos e dois jogadores que se defrontam, pontuando o jogador que responder de forma correta mais rapidamente. O jogo permite multiplicar de uma forma divertida, ao mesmo tempo que leva os jogadores a raciocinar e a exercitar a memória. O Campeonato Nacional Multipli destina-se a alunos dos 3.º, 4.º, 5.º e 6.º anos de escolaridade do ensino básico, de qualquer escola nacional pública ou privada e tem como principais objetivos potenciar o desenvolvimento do pensamento lógico e os conhecimentos relativos à tabuada, fomentar o interesse dos alunos pela matemática e estimular a componente lúdica ao longo do processo de ensino-aprendizagem.

Nesta 1.ª edição cada escola ficou responsável por organizar todo o processo de seleção dos alunos, podendo inscrever no campeonato no máximo 4 alunos por cada um dos 4 anos de escolaridade.

A competição decorre num formato de rondas, nas quais os jogadores competem apenas entre jogadores do mesmo ano de

escolaridade, sendo o número de rondas definido para cada ano de escolaridade, em função do número de alunos participantes, de acordo com o método suíço.

Nesta primeira edição, o campeonato superou as expectativas, em termos de alunos inscritos, uma vez que contou com a participação de 131 alunos (54 alunos do 3.º ano, 55 alunos do 4.º ano, 10 alunos do 5.º ano e 12 alunos do 6.º ano), provenientes de 34 escolas a nível nacional.

Alguns estudos nacionais e internacionais, como o PISA, têm vindo a revelar que a par de atividades em sala de aula, os alunos também aprendem matemática numa multiplicidade de contextos não formais, onde se inclui a participação em competições matemáticas. Desta forma, acreditamos que a participação dos alunos, em competições desta natureza, poderá ter um efeito positivo na sua motivação para a aprendizagem da matemática, no desenvolvimento do cálculo mental através da multiplicação de números naturais, e no seu gosto e autoconfiança na disciplina de matemática.

São vários os estudos que destacam que o uso de tarefas diversificadas, de materiais manipuláveis e de jogos podem favorecer a aprendizagem da matemática. Em particular, a utilização de jogos no processo de ensino e aprendizagem da matemática pode favorecer a aprendizagem de conceitos, o cálculo mental e a capacidade de raciocinar em contexto, sendo um fator de motivação para os alunos e consequentemente contribuir para o sucesso escolar. Foi nesta base que a comissão organizadora tomou a iniciativa de promover o primeiro campeonato nacional com o jogo MULTIPLI, esperando também desta forma vir a estimular o uso de dinâmicas matematicamente ricas em sala de aula que envolvam o recurso ao MULTIPLI para auxiliar o trabalho relativo às tabuadas, ao mesmo tempo que os professores identificam os alunos para participarem no campeonato.

O Campeonato Nacional Multipli é também uma oportunidade para estimular a motricidade fina e capacidades motoras, uma vez que o jogo implica agarrar com os dedos e fazer lançamentos



rápidos de cartas, sendo a rapidez uma variável importante para ganhar ou não uma jogada.

O ambiente geral do campeonato foi muito agradável para todos os participantes. Desde logo para os professores e pais que acompanharam as crianças até à ESECS, manifestando o seu orgulho nestes heróis do cálculo mental, passando pelos árbitros (estudantes do ensino superior) que orientaram a realização das rondas e se envolveram ativamente em todas as dinâmicas, até aos concorrentes que estiveram felizes e empolgados em todos os momentos do campeonato. Foi possível recolher vários testemunhos que ilustram esta dimensão de envolvimento e alegria:

“Eu gostei e achei muito divertido. Eu acho que é bom para a memória e para ficar mais esperto.” **Noah - 3.º Ano**

“Gostei muito do MULTIPLI porque aprendi a multiplicar melhor e não só, aprendi que o mais importante não é ganhar e, sim, participar nesta competição incrível criada pela Ana.” **Rodrigo - 3.º Ano**

“Achei engraçado. Não ganhei mas diverti-me muito. Mas mesmo assim por já estarmos aqui já somos todos campeões. Gostei de trabalhar a pares e foi espetacular!” **Maria - 4.º Ano**

“O jogo é extraordinário, criativo. Gostei muito de estar aqui presente. Aprendi, diverti-me e sem esquecer-me. Foi fantástico.” **Manuel - 4.º Ano**

“Eu acho que este campeonato é muito importante para exercitarmos o nosso cérebro e também nos divertirmos que é o mais importante. Eu gostei muito...” **Helena - 5.º Ano**

“É um jogo muito divertido para jogares com os teus amigos ou familiares. É um bom jogo para desenvolver o cálculo mental e a tabuada. É um bom jogo para desenvolver a tua movimentação das mãos.” **Samuel - 6.º Ano**

Decorridas as rondas em cada uma das categorias, apuraram-se os 1.º e 2.º lugares:

Categoria 3.º ano 1.º Lugar: Maria Amaral - Colégio Conciliar de Maria Imaculada – Leiria 2.º Lugar: Constança Ferreira - Jardim Escola João de Deus – Leiria	Categoria 4.º ano 1.º Lugar: David Luz - Escola Básica de Santo António – Rio Meão 2.º Lugar: Afonso Mendes - Escola Básica de Picassinos – Marinha Grande
Categoria 5.º ano 1.º Lugar: Arthur Longo - Escola Os Aprendizes – Birre Cascais 2.º Lugar: Manuel Jordão - Escola Os Aprendizes – Birre Cascais	Categoria 6.º ano 1.º Lugar: Miguel Carvalho - Colégio Rainha Dona Leonor – Caldas da Rainha 2.º Lugar: Samuel Roda - Agrupamento de Escolas Dr. Correia Mateus - Leiria

Foram posteriormente atribuídos prémios ao 1.º e ao 2.º vencedores de cada ano de escolaridade do campeonato, nomeadamente livros, kits MULTIPLI, sacolas com material escolar, T-shirts, relógios, pulseiras digitais e medalhas assim como certificados de vencedores. A todos os participantes no campeonato foi também oferecido um certificado de participação, e uma sacola com material escolar e vouchers de entradas gratuitas em todos os museus de Leiria para dois adultos.

Atendendo ao sucesso desta primeira edição, que só foi possível como o apoio dos nossos parceiros, irá ter lugar em 2019, em Leiria, o 2.º Campeonato Nacional Multipli.

Estejam atentos a novidades em <http://campeonato.multipli.pt/>.

DINA TAVARES, EUNICE OLIVEIRA, FERNANDO SEBASTIÃO, HUGO MENINO

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LEIRIA

ANA LA FÉRIA, RITA TEIXEIRA

ALFIII

Retas e mais retas

O Hugo traçou várias retas numa folha de papel.

A reta r intersesta 18 retas.

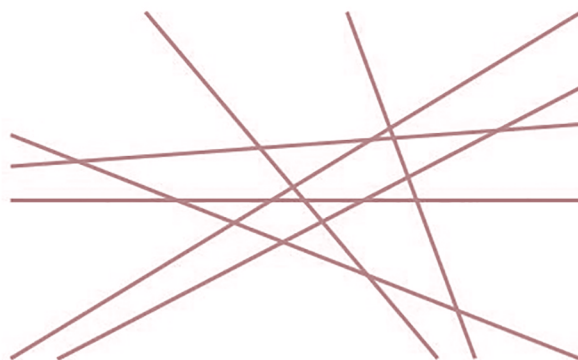
A reta s intersesta 13.

No mínimo, quantas retas intersesta a reta t ?

E no máximo?

Nota: as retas poderão só se intersestar fora da folha.

(Respostas até 31 de dezembro, para zepaulo46@gmail.com)



PARALELAS NO QUADRADO

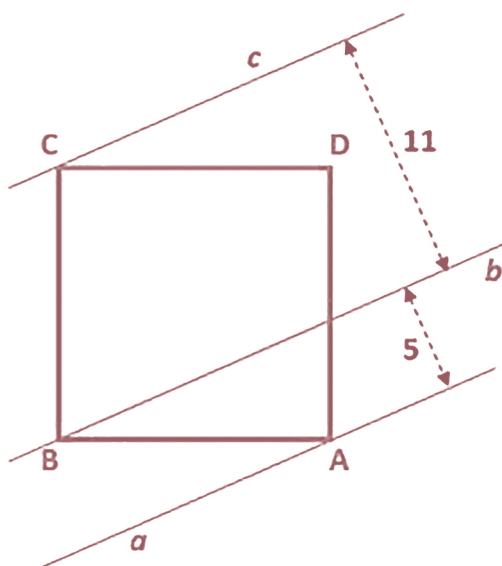
O problema proposto no número 146 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Temos um quadrado ABCD.

Pelos vértices A, B e C traçamos três retas paralelas a, b e c.

A distância entre as retas a e b é de 5 centímetros e entre as retas b e c é de 11 centímetros.

Qual é a área do quadrado?



Recebemos 17 respostas:

Adilson de Campos (Brasil), Alice Martins (Torres Novas), Bruno Visnadi, Carlos Dias, Graça Braga da Cruz (Ovar), Helder Martins (Lisboa), Hugo Ribeiro (Guimarães), Hugo Silva, José Carlos Frias (Lisboa), José Carlos Pereira, Letícia Martins (Guimarães), Mário Roque (Guimarães), Marta Marques

Martins, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Susana Dias (Torres Novas), do duo Eduarda Barreto & Gabriela Barreto (Torres Novas) e do trio João Mendes, Rodrigo Filipe & Rui Fernandes (Guimarães).

O Hugo Ribeiro começou com estas considerações:

Devo de dizer que o problema, numa primeira impressão, me parecia impossível. Era como um daqueles problemas em que nos dão a massa do sol, a distância do sol à Terra e nos perguntam qual é a temperatura em Guimarães.

Mas depois de olhar com olhos de ver percebi que não era assim tão complicado. Digamos que inicialmente estava a olhar para o problema. Não a vê-lo.

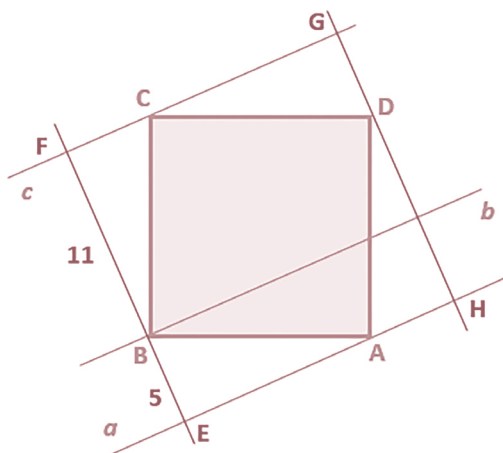
As resoluções foram quase todas geométricas. As exceções vieram dos dois Hugos e do trio de Guimarães, que seguiram a via trigonométrica a partir do ângulo α entre a reta b e o lado BA. A Marta acrescentou também uma confirmação do resultado usando o programa Geogebra.

As estratégias geométricas foram bastante variadas.

1.ª Resolução (para fora do quadrado)

Foi usada por vários leitores (Adilson, Alice, Mário, Graça, JC Pereira). Demos a palavra à Graça.

Redesenhei a figura e completei-a, traçando as retas perpendiculares a a, b e c que passam por B e D:

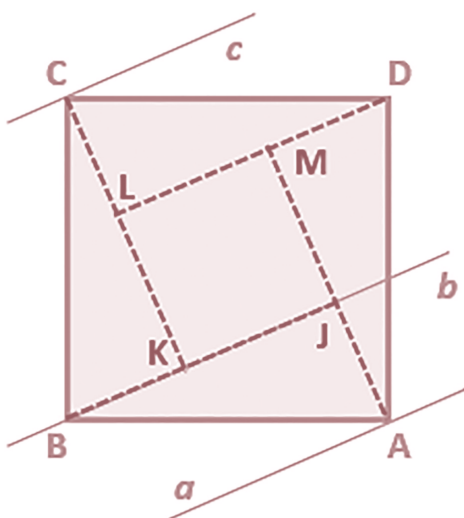


A figura é bem nossa conhecida: é uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras! (É imediato mostrar que os triângulos ABE e BCF são congruentes).

A área de ABCD é $11^2 + 5^2 = 146$.

2.ª Resolução (para dentro do quadrado)

Foi seguida pelo duo Barreto e por Alice, Mário, Marta, JC Pereira e Carlos. Seguem-se as explicações deste último.



Desenham-se os segmentos:

- CK perpendicular a b
- DL paralelo a b
- AM perpendicular a b
- BJ sobre b

Os triângulos ABJ, BCK, CDL e DAM são obviamente idênticos. Pelo enunciado sabe-se que AJ mede 5 e que CK mede 11, logo BJ também mede 11.

O lado AB é a hipotenusa do triângulo retângulo ABJ e mede $\sqrt{5^2 + 11^2} = \sqrt{146}$.

Logo, BC tem a mesma medida.

A área do quadrado ABCD será

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \sqrt{146} \times \sqrt{146} = 146.$$

O Mário, usando a figura anterior, acrescentou uma variante a este processo.

$$\text{Temos } \overline{MJ} = \overline{AM} - \overline{AJ} = 11 - 5 = 6.$$

O quadrado ABCD está decomposto num quadrado central, de lado 6, e mais quatro triângulos retângulos idênticos, de catetos 5 e 11. Então, a sua área é

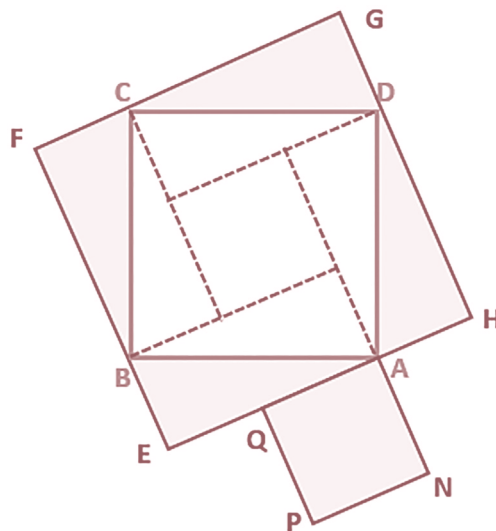
$$6^2 + 4 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 11 = 36 + 110 = 146$$

O José Carlos Frias fez uma mistura dos dois primeiros processos, considerando o triângulo CBK dentro do quadrado e o triângulo CDG fora. Como eles são iguais, pelo teorema de Pitágoras determina-se a medida do lado do quadrado e, a partir daí, a área pedida.

3.ª Resolução (com dois quadrados)

O Mário propôs ainda o seguinte.

Consideremos o polígono EFGHANPQ, formado pela junção do quadrado EFGH, de lado 16, e do quadrado ANPQ, de lado 6.



A área deste polígono é $16^2 + 6^2 = 292$

Pela partição da figura, vê-se que a área de ABCD é exatamente metade, ou seja 146.

Nota final: Pedrosa Santos foi enviando resoluções cada vez mais simples, acompanhando a última com a frase de Antoine Saint-Exupéry “A perfeição não é alcançada quando já não há mais nada a ser incluído, mas sim quando já não há mais nada a ser retirado”.

A aplicação MILAGE APRENDER+, um contributo para a diferenciação pedagógica e aprendizagem autónoma da matemática

MAURO FIGUEIREDO

ANA PAULA ALVES

SÍLVIA ZUZARTE

SÓNIA BARBOSA

INTRODUÇÃO

O professor no século XXI assume um papel cada vez mais relevante ao orientar os alunos na sua aprendizagem, usando ferramentas e estratégias que os ajudem a desenvolver não só competências técnicas (*hard skills*), mas também competências que os preparem para enfrentarem um mundo em constante mudança. Estamos a referir-nos ao desenvolvimento de competências transversais (*soft skills*) como o pensamento crítico, a capacidade de desenvolver soluções criativas para os problemas, a capacidade de comunicação, o trabalho em equipa e a resiliência.

A tarefa do professor de matemática não é fácil, na medida em que tem de gerir as aprendizagens dos alunos atendendo aos diferentes pontos de partida e à diversidade de formas de aprender, sabendo motivá-los para a aprendizagem, orientando-os no seu percurso com recurso a estratégias que lhes desenvolvam o prazer por aprender.

A popularização das tecnologias móveis, com o uso generalizado dos *smartphones* pelos alunos, cria uma oportunidade de utilização destes equipamentos para fins educativos. A aprendizagem móvel envolve o uso de tecnologias móveis, isoladamente ou em combinação com outras tecnologias de informação e comunicação, a fim de permitir a aprendizagem a qualquer hora e em qualquer lugar (UNESCO, 2014). A aprendizagem móvel apresenta diversas vantagens em relação à aprendizagem tecnológica convencional por ser pessoal, portátil, colaborativa, interativa e contextual, servindo de apoio à aprendizagem formal e informal, com um enorme potencial para transformar as práticas pedagógicas nas salas de aula atuais, sem investimentos adicionais em tecnologia, nem necessidade de reinvestimentos por obsolescência dos equipamentos.

O PROJETO MILAGE APRENDER +

O projeto MILAGE (Mathematics bLended Augmented GamE), financiado pela União Europeia e coordenado pela Universidade do Algarve, teve o seu início em 2015, através do programa ERASMUS+ e envolve sete parceiros de quatro países (Portugal, Espanha, Noruega e Turquia). O seu principal objetivo é promover a criação de recursos digitais e a utilização de tecnologias móveis (*smartphones* e *tablets*) para a aprendizagem da matemática, visando melhorar o desempenho de todos os alunos nesta disciplina (Figueiredo et al., 2017).

No âmbito deste projeto a Universidade do Algarve desenvolveu uma aplicação para a utilização pelos alunos, MILAGE APRENDER+, que está disponível gratuitamente para dispositivos móveis com sistema operativo Android, iOS e Windows.

Esta aplicação foi desenvolvida essencialmente para potenciar a aprendizagem móvel com recurso aos *smartphones* ou *tablets*. O seu modelo pedagógico tem por base motivar os alunos, pela inclusão da gamificação; estimular a autonomia dos alunos através de um esquema de autoavaliação e de avaliação por pares; promover uma aprendizagem mais interativa adaptada às necessidades individuais dos alunos, pela inclusão de materiais e ajudas diversificadas e assegurar que todos os alunos tenham acesso a uma base comum de conhecimento de qualidade, pela disponibilização de fichas de variados graus de dificuldade (Figueiredo et al., 2017).

Na verdade, a gamificação tem sido uma das apostas da educação no século XXI e é geralmente definida como “o uso de elementos de design de jogos em contextos não relacionados com jogos” (Deterding et al., 2011). De um modo geral, a gamificação assenta em três objetivos: motivar, comprometer e recompensar (Lee

e Hammer, 2011). A gamificação está presente na nossa vida quotidiana, por exemplo, a própria remuneração é uma forma de gamificação usada para motivar e comprometer quem trabalha e de recompensa pelo desempenho individual. Na educação, a gamificação tem um grande potencial para motivar os alunos para a aprendizagem (Lee e Hammer, 2011).

Esta componente de gamificação está presente na aplicação MILAGE APRENDER+, pois esta inclui um esquema de pontuação que está associado à resolução de exercícios com quadros de classificação organizados por três categorias: *Escola*, *País* e *Mundial*. Considera-se que a atribuição de pontos ao resolver exercícios pode motivar o aluno. Quanto mais exercícios resolver, mais pontos ganha. Para além disso, a aplicação também comporta um esquema de autoavaliação gamificado em que o aluno determina a sua avaliação, comparando a sua resolução com as instruções de avaliação que lhe são apresentadas, analisando deste modo as diferentes etapas de resolução do exercício, com benefícios para a sua aprendizagem.

Sabemos ainda que a investigação tem apoiado a ideia de que os alunos motivados autonomamente são mais bem-sucedidos em contexto escolar e que beneficiam mais quando a sua autonomia é apoiada pelo contexto (por exemplo, pelos professores, pelas ferramentas...) (Reeve, 2006). No caso da aplicação MILAGE APRENDER+, a promoção do trabalho autónomo e a revisitação dos conteúdos alcançados com o esquema de autoavaliação e de avaliação pelos pares, contribui para a identificação dos passos fundamentais na resolução de exercícios, o que se reflete no armazenamento do conhecimento na memória de longa duração (Figueiredo et al., 2017).

Por outro lado, a aplicação também coloca à disposição de cada aluno um conjunto de fichas, elaboradas por professores, com diferentes níveis de complexidade (inicial, intermédio e avançado) bem como elementos de ajuda, explicando as resoluções através de instruções de avaliação ou com vídeos educacionais. Estes elementos de ajuda, que são importantes para a resolução autónoma dos exercícios, podem ainda ser revisitados sempre que os alunos necessitarem, proporcionando um apoio que se prolonga no tempo e se adapta às suas necessidades individuais. Para além disso, pela disponibilização de recursos diferenciados, os alunos têm acesso não só a exercícios com um grau de dificuldade reduzido e às suas resoluções, mas também a problemas mais complexos suscetíveis de estimular os alunos com mais competências (figura 1).

Por tudo isto, podemos dizer que a aplicação MILAGE APRENDER+ pode assegurar a igualdade de oportunidades para todos ao contribuir não só para a melhoria de desempenho dos estudantes com maiores dificuldades na matemática, mas também por proporcionar aos alunos com melhor desempenho estímulos e desafios mais complexos.



Figura 1. Captura de ecrã com fichas de diferentes graus de dificuldade

A UTILIZAÇÃO DO MILAGE APRENDER+ EM CONTEXTO DE APRENDIZAGEM

A aplicação MILAGE APRENDER+ contém materiais para o ensino da matemática, organizados por anos de escolaridade, do 1.º ao 12.º, que podem ser utilizados em sala de aula ou fora desta, com total autonomia do aluno. Definimos, de seguida, três possibilidades de utilização da aplicação em contexto de aprendizagem.

A - Utilização da aplicação MILAGE APRENDER+ em contexto de sala de aula

Na aula, os alunos podem resolver (individualmente, a pares ou em pequenos grupos) uma ficha de exercícios da aplicação MILAGE APRENDER+, selecionando-a a partir de um conjunto de fichas organizadas pelas respetivas temáticas do seu ano de escolaridade. Indicamos a seguir um exemplo de utilização da aplicação MILAGE APRENDER+ em sala de aula que pode ser aplicado a qualquer ano de escolaridade.

Atividade prática - MILAGE APRENDER+ (Aprender com os pares)

Tempo de duração: 45 min ou 90 min

Material necessário: 1 dispositivo móvel por cada par de alunos

Ano de escolaridade: geral

Descrição:

Os alunos, a pares, acedem a uma ficha da aplicação MILAGE APRENDER+ e resolvem-na, no seu caderno, apresentando todos os passos da resolução de cada um dos exercícios da ficha (figura 2). Ambos os alunos resolvem os exercícios apresentados, confrontando as resoluções, melhorando, se for caso disso, e escolhendo uma delas ou reescrevendo-a com base em ambas as resoluções. De seguida, um dos alunos fotografa a resolução com a aplicação. Ambos comparam a resolução fotografada com a apresentada na aplicação MILAGE APRENDER+ e atribuem

a pontuação. Se quiserem, poderão ainda visualizar, para cada questão, uma explicação em vídeo da resolução. Concluída a ficha, iniciam a revisão por pares, analisando as resoluções dos colegas, verificando o raciocínio apresentado e atribuindo a respetiva pontuação.

Nota: O aluno que inicialmente não tirou a fotografia, pode entrar de seguida e continuar os mesmos procedimentos de modo a obter a sua pontuação.



Figura 2. Alunos do 12.º ano de Matemática A

Preparação:

Antes do início da utilização da aplicação MILAGE APRENDER+, em aulas anteriores, os alunos e os respetivos encarregados de educação recebem informações sobre o projeto e a aplicação, esclarecendo as dúvidas e questões relativamente à sua utilização e pertinência pedagógica.

Material:

Para a resolução das fichas em sala de aula, o professor deve certificar-se que os alunos têm à sua disposição os dispositivos móveis. Em relação ao acesso à Internet, caso não haja um bom acesso, os alunos poderão descarregar previamente a ficha indicada para uma resolução *offline* na sala de aula.

Orientação:

Na aula, o professor indica duas fichas com níveis de dificuldade diferente (inicial e intermédia) que cada par de alunos vai procurar resolver.

Os alunos terão de resolver as suas dúvidas no par podendo, quando necessário, esclarecer dúvidas com o professor.

Avaliação:

No final, o professor pode acompanhar o trabalho, o desempenho e a evolução dos seus alunos e obter dados estatísticos. Por exemplo, o professor tem acesso, para cada aluno, à resolução dos exercícios, à pontuação que este atribuiu à sua resolução, bem como à cotação atribuída na avaliação de pares (figura 3).

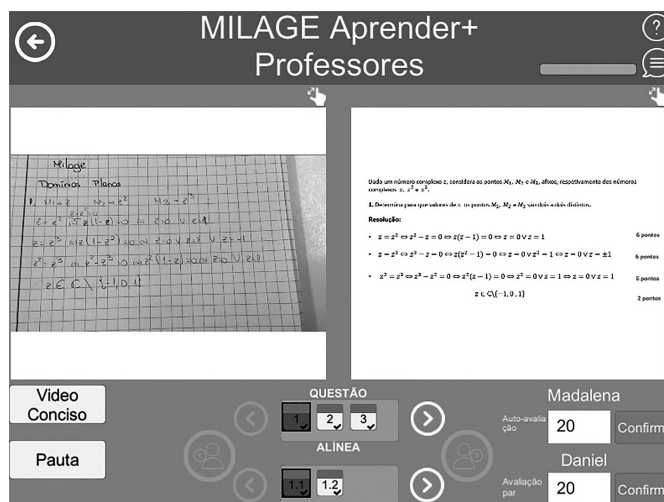


Figura 3. Ecrã da aplicação na versão do professor

B - Utilização da aplicação MILAGE APRENDER+ fora da sala de aula

A aplicação MILAGE APRENDER+ também pode ser usada na aprendizagem fora da sala de aula (em casa, na biblioteca ou em outros espaços). Os alunos podem realizar autonomamente as fichas que quiserem, por sua iniciativa, ou as indicadas pelo professor, ao seu ritmo e onde estiverem.

Um misto de utilização em sala de aula e em casa também é possível. No entanto, pela nossa experiência, consideramos importante que o professor faça pelo menos uma atividade em sala de aula para que os alunos percebam o potencial da aplicação e se motivem para a sua utilização.

C- Construção de recursos pelos alunos para a aplicação MILAGE APRENDER+

Os professores podem ainda proporcionar aos seus alunos atividades de aprendizagem em que estes assumem o papel de produtores de recursos para a aplicação MILAGE APRENDER+ (figura 4). Motivar os alunos para a explicação de um exercício em vídeo pode representar uma experiência muito rica para o aluno que se confronta não só com o domínio do conteúdo, mas também da comunicação matemática. Nesse contexto, cabe ao professor o papel de orientação, supervisão e de validação final das fichas construídas pelos alunos. As fichas são sempre submetidas na aplicação pelo professor, de acordo com as normas estipuladas pelo projeto. Este tipo de atividades pode promover um maior envolvimento do aluno na sua aprendizagem na medida em que este passa a sujeito da própria construção e reconstrução do saber.

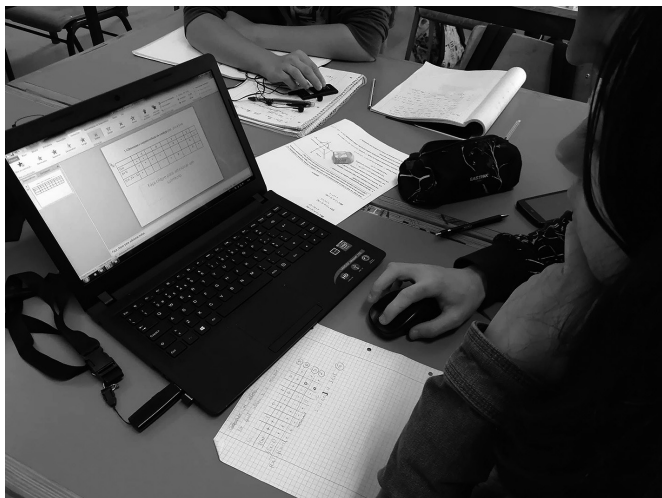


Figura 4. Alunos do 10.º ano de Matemática A

A VERSÃO DO PROFESSOR MILAGE APRENDER+ PROFESSORES

Associada à aplicação dos alunos está disponível a versão do professor, MILAGE APRENDER+ PROFESSORES, igualmente gratuita para os sistemas operativos Windows e OS X da Apple, para que os professores (do 1.º ciclo ao secundário) possam acompanhar o trabalho dos seus alunos. Também os professores podem tornar-se criadores de conteúdos de aprendizagem, sendo necessário o preenchimento do formulário (<https://bit.ly/2mRSSrj>), tendo sido prática a realização de ações de formação de professores no âmbito da utilização pedagógica da aplicação.

Uma das vantagens da aplicação para o professor é que lhe permite a inclusão, de um modo simples, de materiais adequados aos seus alunos e de acordo com o contexto da turma. Os materiais são produzidos por professores de acordo com o currículo nacional de matemática. Desde 2016, tem-se vindo a constituir uma comunidade de professores e alunos utilizadores da aplicação e, também de “produtores” de conteúdos, que disponibilizam materiais que ficam acessíveis a todos os utilizadores da aplicação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Da nossa experiência de utilização da aplicação MILAGE APRENDER+ com alunos do 3.º ciclo e secundário, podemos destacar a sua importância no apoio ao estudo autónomo do aluno e à sua motivação para a aprendizagem da matemática. Com a sua utilização conseguimos gerir de um modo mais eficiente diferentes ritmos de aprendizagem e outras dinâmicas de trabalho. O facto de também criarmos recursos para a aplicação, permite-nos aproveitar melhor o seu potencial pedagógico, pois dispomos sempre de recursos adequados às aprendizagens dos alunos.

Consideramos que a utilização da aplicação MILAGE APRENDER+ pode ser uma estratégia pedagógica bastante útil, a juntar a tantas outras de que o professor dispõe atualmente. Pode dar um contributo importante para um aumento da autonomia dos alunos e para a diferenciação pedagógica dentro e fora da sala de aula. Cabe ao professor analisar a melhor estratégia de utilização desta aplicação para benefício da aprendizagem dos seus alunos.

Agradecimentos

A aplicação MILAGE APRENDER+ foi desenvolvida no âmbito do projeto “MILAGE-Mathematics bLended Augmented GamE” (N.º2015-1-PT01-KA201-012921), do programa Erasmus+, financiado pela União Europeia.

Referências

- Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., & Nacke, L. (2011). From game design elements to gamefulness: defining “gamification”. In *Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference: Envisioning Future Media Environments* (MindTrek '11). ACM, New York, NY, USA, 9-15. Disponível em <https://doi.org/10.1145/2181037.2181040>
- Figueiredo, M. J. G., Bidarra, J., González-Pérez, A., & Godejord, B. (2017). Promoting Autonomous Work of Students with the MILAGE LEARN+ app. In *International Technology, Education and Development Conference*, March, pp. 7660-7667.
- Lee, J. J. & Hammer, J. (2011). Gamification in Education: What, How, Why Bother? *Academic Exchange Quarterly*, 15(2), pp. 146-151.
- Reeve, J., & Jang, H. (2006). What teachers say and do to support students' autonomy during a learning activity. *Journal of Educational Psychology*, 98, 209–218.
- UNESCO (2014). Diretrizes de políticas para a aprendizagem móvel. Disponível em <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002277/227770por.pdf>
- Projeto MILAGE APRENDER+, disponível em http://milage.ualg.pt/?page_id=556

MAURO FIGUEIREDO

ISE, CIMA, CIAC, UNIVERSIDADE DO ALGARVE, PORTUGAL

ANA PAULA ALVES

AE DR. FRANCISCO SANCHES, BRAGA, PORTUGAL

SÍLVIA ZUZARTE

AE DE CASQUILHOS, BARREIRO, PORTUGAL

SÓNIA BARBOSA

AE DE SANTO ANTÓNIO, BARREIRO, PORTUGAL

Avaliação de atitudes, valores e comportamentos: uma investigação na formação de professores

GABRIELA DINIS
CRISTINA MARTINS

A formação para a docência dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, em Portugal, é estruturada em dois ciclos, um 1.º ciclo correspondente à Licenciatura em Educação Básica e um 2.º ciclo relativo ao mestrado profissionalizante. No mestrado, a prática de ensino supervisionada (PES), correspondente ao estágio de natureza profissional, é objeto de relatório final (RF), a apresentar e defender em provas públicas. O regulamento da PES da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança (ESE-IPB) dá orientações para a elaboração do RF, tornando visível o reconhecimento de uma postura reflexiva e investigadora na prática profissional de um professor ou futuro professor para melhor poder enfrentar e lidar com situações problemáticas que constantemente surgem na sua prática.

O RF, na ESE-IPB, fruto da reflexão constante dos supervisores sobre o processo de supervisão e formação de futuros professores, tem conduzido a reestruturações, quer quanto à sua estrutura quer quanto ao seu conteúdo. Na última versão, é relevante a existência de um tema integrador da ação, aprofundado na reflexão sobre as várias experiências de aprendizagens realizadas e na investigação empírica realizada.

Neste texto pretendemos dar conta, sinteticamente, de parte do trabalho desenvolvido pela primeira autora e plasmado no seu RF (Dinis, 2016), da qual a segunda autora foi orientadora. Neste RF o tema integrador escolhido foi o processo de avaliação, tendo em mente que a consideração das atitudes, valores e comportamentos dos alunos é determinante para uma avaliação completa e integral das e para as suas aprendizagens (Fernandes, 2011).

Num primeiro ponto deste artigo, revelamos o resultado da análise efetuada aos documentos oficiais orientadores do processo de avaliação do ensino básico, à data de realização deste estudo (ano letivo de 2015-2016), particularizando como é contemplada (ou não) a consideração das atitudes, valores e comportamentos. O mesmo foi feito em relação a documentos

específicos do agrupamento onde a primeira autora realizou o seu estágio.

No ponto seguinte apresentamos as opiniões dos professores sobre o processo de avaliação das aprendizagens dos alunos e, especificamente, sobre a consideração das atitudes, valores e comportamentos.

Relativamente à metodologia de investigação seguida na elaboração do RF e especificamente na investigação realizada, optámos por uma perspectiva qualitativa, seguindo um design de investigação sobre a própria prática. Acreditamos que o professor na concretização da sua missão tem necessidade de se envolver em investigação que o ajude a lidar com as situações problemáticas que constantemente surgem na sua prática (Ponte, 2002).

O QUE NOS DIZEM DOCUMENTOS ORIENTADORES

O Decreto-Lei n.º 17/2016, de 4 de abril, em vigor à data de realização do estudo, apresentava como objetivo “estabelecer os princípios orientadores da avaliação das aprendizagens nos ensinos básico e secundário” (p. 1123), tendo por base o reconhecimento da “necessidade de aprofundar a articulação entre a avaliação externa e a avaliação interna das aprendizagens e de reavaliar a realização de exames nos primeiros anos de escolaridade” (p. 1123).

Para a análise deste diploma, numa primeira fase, procedemos à análise de cada um dos artigos ou pontos referentes à avaliação e numa segunda fase procurámos dar resposta às categorias definidas *a priori*, baseadas nos tópicos constantes no guião da entrevista realizada aos professores: (i) Conceito de avaliação; (ii) Domínios integrantes da avaliação; (iii) Instrumentos de avaliação utilizados; (iv) Funções da avaliação no processo de ensino-aprendizagem; (v) Forma de consideração das atitudes, valores e comportamentos no processo de avaliação; (vi) Provas

de avaliação externa; e (vii) Articulação entre a avaliação interna, currículo e avaliação externa.

Na tabela 1 destacamos, apenas, o resultado da segunda fase da análise em que tivemos em consideração as referidas categorias. Especificamente, sobre a consideração das atitudes, valores e comportamento no processo de avaliação dos alunos verificamos que o Decreto-Lei n.º 17/2016 não fazia qualquer referência a este assunto. Desta feita, aprove-nos dizer que seria importante que o principal documento orientador contemplasse explicitamente este domínio.

Tabela 1- Cruzamento das categorias pré-definidas com o definido Decreto-Lei n.º 17/2016, de 4 de abril

Categorias	Referência efetuada no Decreto-Lei n.º 17/2016, de 4 de abril
Conceito de avaliação	Não é feita referência ao conceito
Domínios integrantes da avaliação	São referidas as modalidades de avaliação
Instrumentos de avaliação utilizados	É feita referência à importância da recolha de informação
Funções da avaliação no processo de ensino e aprendizagem	São explicitadas
Forma de consideração das atitudes, comportamentos e valores no processo de avaliação	Não é feita referência a estas componentes/domínios
Provas de avaliação externa	São explicitadas as funções das provas
Articulação entre a avaliação interna, currículo e avaliação externa	Referência explícita à complementaridade entre os processos de avaliação interna e externa das aprendizagens (artigo 3.º, alínea n)

Salientamos que, foi com satisfação, que vimos este decreto recentemente revogado através do Decreto-Lei n.º 55/2018 de 6 de julho, onde, no seu artigo 1.º, pode-se ler:

O presente decreto-lei estabelece o currículo dos ensinos básico e secundário, os princípios orientadores da sua conceção, operacionalização e avaliação das aprendizagens, de modo a garantir que todos os alunos adquiram os conhecimentos e desenvolvam as capacidades e atitudes que contribuem para alcançar as competências previstas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Apresentamos a tabela 2 com a síntese da segunda fase da análise efetuada aos documentos orientadores do agrupamento.

Podemos, assim, aferir que os documentos orientadores definidos no agrupamento fazem referência à consideração das atitudes, valores e comportamentos no processo de avaliação dos alunos, bem como apresentam os itens que são tidos em consideração nesta avaliação.

Tabela 2- Cruzamento dos regulamentos do agrupamento com as categorias pré-definidas

Categoria	Documentos orientadores do agrupamento
Conceito de avaliação	Indicado
Domínios integrantes da avaliação	Indicados
Instrumentos de avaliação dos alunos	Identificados
Funções da avaliação no processo de ensino-aprendizagem dos alunos	São explicitadas
Forma de consideração das atitudes, comportamentos e valores no processo de avaliação	É indicada a ponderação na atribuição percentual aos diferentes domínios
Provas de avaliação externa	São indicadas as modalidades de avaliação
Articulação entre a avaliação interna, currículo e avaliação externa	Não é referida explicitamente

A VOZ DOS PROFESSORES

Os objetivos desta parte da investigação foram: identificar e interpretar as perceções de professores sobre o processo de avaliação das aprendizagens dos alunos e, mais especificamente, sobre a consideração das atitudes/valores dos alunos neste processo. Participaram nesta investigação seis professores dos 1.º e 2.º ciclos. A recolha de dados foi efetuada através de entrevistas semiestruturadas. A análise dos dados consistiu na seleção dos dados mais representativos e na sua interpretação e organização de acordo com as categorias definidas a priori e apresentadas no ponto anterior.

Relativamente aos conceitos e funções do processo de avaliação, destacamos que, na opinião dos professores participantes neste estudo, é entendido como uma verificação das aprendizagens e que permite adequar e mudar estratégias, bem como regular e ter *feedback* da aprendizagem. Quanto às componentes/domínios a considerar no processo de avaliação e aos instrumentos de avaliação a utilizar, constatámos que o comportamento, as atitudes e valores são considerados numa percentagem que é definida em departamento, recolhendo os professores informações com os instrumentos que consideram adequados. As grelhas de observação foram especificamente apresentadas para a avaliação deste domínio. A inclusão no processo de vários domínios, como sejam o dos conhecimentos e capacidades e o socioafetivo é fundamental para a concretização do processo e, conseqüentemente, a diversificação dos instrumentos de avaliação. Em nossa opinião, a diversificação e a adequação dos instrumentos de avaliação ao processo de ensino-aprendizagem vão permitir ao professor realizar uma avaliação contínua, completa, global e integradora. No trabalho realizado, os

professores, no geral, sugerem que se faça uma avaliação contínua, ao longo do ano, devendo os pais e os alunos ter um papel mais ativo na escola. Há, ainda, professores que consideram que o currículo deveria sofrer alterações, de forma a estar adequado ao que é compreensível os alunos aprenderem.

EM SÍNTESE

Da análise do Decreto-Lei n.º 17/2016, de 4 de abril, destacamos a abordagem de aspetos fundamentais do processo de avaliação, contudo, não é efetuada qualquer referência aos diferentes domínios a contemplar neste. Não nos foi possível perceber a indicação da forma como é efetuada a consideração das atitudes, valores e comportamentos no processo. A nosso ver, este apresentou-se como um ponto menos positivo neste diploma, consequentemente considerámos que a tutela deveria ter a função de tornar explícito este assunto no documento que se apresenta como o principal orientador do processo. Ao encontro das nossas expectativas, o recentemente publicado Decreto-Lei n.º 55/2018 de 6 de julho contempla de forma clara este aspeto.

A análise dos documentos orientadores do agrupamento revelou que o processo de avaliação das aprendizagens dos alunos deve englobar conhecimentos, competências, atitudes, valores e comportamentos.

Da voz dos professores destacamos que o processo de avaliação deve incluir as atitudes, valores e comportamentos e está articulada com a ideia expressa nos documentos orientadores do agrupamento, obedecendo a sua consideração, na classificação final do aluno, a uma percentagem que é previamente definida em departamento. O professor deve recolher informações utilizando os instrumentos adequados.

Salientamos que a realização desta investigação deixou claro, em nosso entender, o interesse de (re)pensar o processo de avaliação (Santos, 2003). Os pais, a sociedade e a escola têm o dever de formar pessoas com princípios e valores, ou seja, cidadãos ativos e responsáveis. Em contexto de sala de aula, o professor deverá valorizar a aquisição de conhecimentos pelos alunos e o desenvolvimento de várias capacidades, bem como relevar a aquisição de comportamentos, atitudes e valores consentâneos com as exigências da sociedade atual, perfeita e naturalmente alinhados com o processo de avaliação.

Neste contexto, é de ressaltar o expresso no atual documento Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Gomes, C. S., Brocardo, J. L., Pedroso, J. V. et al., 2017)), homologado pelo Despacho n.º 6478/2017, 26 de julho, igualmente após a conclusão do estudo aqui apresentado. Este apresenta-se como um referencial “a nível curricular, no planeamento, na realização e na avaliação interna e externa do ensino e da aprendizagem”

(p. 9) estando estruturado em Princípios, Visão, Valores e Áreas de Competências. Concretamente, os Valores, são “entendidos como os elementos e as características éticas, expressos através da forma como as pessoas atuam e justificam o seu modo de estar e agir” (p. 9), tratando-se de uma “relação que se exprime através de atitudes, condutas e comportamentos” (p. 9). As competências são “entendidas como combinações complexas de conhecimentos, capacidades e atitudes que permitem uma efetiva ação humana em contextos diversificados” (p. 9), envolvendo “conhecimento (factual, concetual, processual e metacognitivo), capacidades cognitivas e psicomotoras, atitudes associadas a habilidades sociais e organizacionais e valores éticos” (p. 9). É, pois, imperativo afirmar que os atuais documentos orientadores dos ensinos básicos e secundário evidenciam a importância dos aspetos emergentes do estudo realizado, sendo nossa crença que o(a) professor(a) os colocará em prática no processo de ensino-avaliação-aprendizagem.

Referências

- Dinis, G. (2016). *Prática de ensino supervisionada em ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança. (Relatório final)
- Fernandes, D. (2011). Avaliar para melhorar as aprendizagens: análise e discussão de algumas questões essenciais. In I. Fialho & H. Salgueiro (pp. 81-107), *TurmaMais e Sucesso Escolar. Contributos teóricos e Práticos*. Évora. CIEPUE. Universidade de Évora.
- Gomes, C. S., Brocardo, J. L., Pedroso, J. V. et al. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação. Disponível em: <http://dge.mec.pt/perfil>
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.
- Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, 74, 16-21.

GABRIELA DINIS

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA

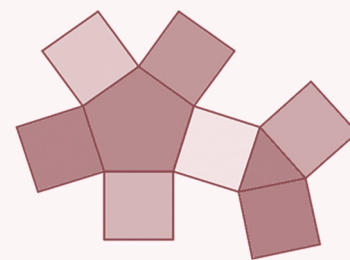
CRISTINA MARTINS

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA

APS: Alunos Promotores do Sucesso

RAQUEL AZEVEDO

RUI LEMOS



Alunos Promotores do Sucesso

Alunos promotores do sucesso (APS) é um projeto do Agrupamento de Escolas de Ribeirão que se enquadra na concretização das dimensões Elevados Padrões Académicos e Aprendizagem Ativa do Plano de Melhoria do Projeto Educativo do agrupamento e procura dar resposta aos objetivos estratégicos definidos no Plano Municipal de Melhoria e Eficácia da Escola, integrando desde o ano letivo 2014/2015 a matriz curricular do terceiro ciclo do agrupamento como oferta complementar para os oitavo e nono anos de escolaridade.

APS surge para dar resposta a uma fragilidade evidente do agrupamento: elevadas taxas internas de insucesso à disciplina de matemática no terceiro ciclo e taxas de sucesso na avaliação externa de nono ano de escolaridade abaixo das nacionais, pretendendo intervir não só sobre o insucesso à disciplina de matemática, como também na qualidade do seu sucesso.

Com este projeto o agrupamento dá um passo importante na construção de um plano estratégico contextualizado de promoção do sucesso escolar antecipando-se ao Programa Nacional de Promoção do Sucesso Escolar (PNPSE).

APS foi desenhado numa perspetiva de desenvolvimento e promoção não só de aprendizagens matemáticas significativas, mas também de valores sociais e comportamentais essenciais que favoreçam uma cidadania ativa.

A aprendizagem ativa da matemática, pressupondo “processos de ensino centrados no envolvimento ativo dos alunos na sua aprendizagem, promovendo a sua autonomia, centrando-se o processo ensino aprendizagem no aluno, devendo cada um desenvolver o seu potencial, para conseguir progredir nas aprendizagens matemáticas, consolidar conhecimentos e atingir as metas de aprendizagem existentes” (Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas de Ribeirão, p.8) constitui a estratégia central do projeto.

A igualdade de oportunidades de sucesso e a diferenciação pedagógica constituem os princípios orientadores deste projeto, que ao longo de toda a sua operacionalização “implica a consideração das preferências e expectativas dos alunos no planeamento e implementação de estratégias” (Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas de Ribeirão, p. 8). O envolvimento ativo do aluno na gestão dos processos da recuperação e

consolidação de aprendizagens e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem de competências matemáticas de nível mais elevado impulsiona sucesso à disciplina de matemática.

OBJETIVOS DO PROJETO

APS tem como objetivos:

- criar ambientes de aprendizagem diversificados e centrados no aluno que permitam desenvolver o trabalho colaborativo entre pares e motivem os alunos para a aprendizagem da matemática;
- melhorar as aprendizagens dos alunos de oitavo e nono anos a matemática, implementando estratégias que promovam a igualdade de oportunidades e um ensino mais individualizado;
- recuperar e consolidar aprendizagens de conteúdos matemáticos de ano(s) de escolaridade transato(s) ou do próprio ano de escolaridade que estejam a condicionar o sucesso do aluno à disciplina;
- criar dispositivos de identificação de alunos que revelem capacidades excecionais para a aprendizagem da matemática e definir, para estes, percursos que promovam o desenvolvimento de competências matemáticas de nível mais elevado;
- intervir sobre o insucesso à disciplina de matemática no terceiro ciclo, pretendendo também qualificar o sucesso;
- potenciar uma escola inclusiva tendo como princípio a educação para a cidadania.

IMPLEMENTAÇÃO DO PROJETO

APS resulta da triangulação no processo ensino e aprendizagem dos vetores:

- avaliação diagnóstica e formativa;
- processos de ensino e aprendizagem colaborativos e centrados nos alunos;
- diferenciação pedagógica.

O sucesso desta triangulação exige um reforço da participação e envolvimento dos encarregados de educação na vida escolar dos seus educandos, assumindo o diretor de turma um papel preponderante na comunicação do projeto.

O projeto é operacionalizado em quatro fases:

- Fase 1 – Avaliação diagnóstica (diagnose das dificuldades evidenciadas pelos alunos em conteúdos do terceiro ciclo, de anos transatos ou do próprio ano de escolaridade);
- Fase 2 – Definição dos grupos homogêneos de trabalho (até 5 alunos) e escolha do aluno impulsionador do sucesso;
- Fase 3 – Reforço e consolidação de aprendizagens;
- Fase 4 – Avaliação formativa das aprendizagens.

FASE 1

Avaliação diagnóstica

A primeira fase decorre até ao final do mês de setembro ocupando dois a três blocos de 50 minutos. Nesta fase o professor começa por apresentar o projeto aos alunos e uma listagem dos conteúdos do terceiro ciclo de anos transatos. Os alunos registam no seu caderno todos os conteúdos ordenando-os segundo uma escala numérica que traduz as dificuldades sentidas na aprendizagem, aplicação, operacionalização e articulação desses conteúdos. Após a recolha desta informação e com os dados obtidos da avaliação diagnóstica, o professor apresenta aos alunos uma síntese desta informação, apresenta indicadores que constituem o ponto de partida para a construção de um processo de promoção do sucesso contextualizado e diferenciado.

FASE 2

Definição dos grupos homogêneos de trabalho (até 5 alunos) e escolha do aluno impulsionador do sucesso

De acordo com os dados recolhidos da Fase 1, o professor, organiza grupos de alunos que evidenciam dificuldades no mesmo conteúdo (até 5 alunos) e escolhe um aluno da turma para ser o aluno impulsionador do sucesso do grupo. Este aluno é escolhido de entre aqueles que revelam menos dificuldades no conteúdo a ser trabalhado no grupo.

O processo de formação dos grupos e escolha do aluno impulsionador do sucesso dos alunos é realizado sempre com a participação e concordância destes.

FASE 3

Reforço e consolidação de aprendizagens

O professor constrói tarefas de acordo com as dificuldades diagnosticadas em cada grupo, para serem trabalhadas pelos alunos nos seus grupos. Na seleção das tarefas o professor procura proporcionar aos alunos diferentes tipos de experiências matemáticas, nomeadamente comunicação matemática, resolução de problemas, atividades de investigação, e demonstrações matemáticas, que proporcionem uma aprendizagem significativa, permitindo aos alunos capitalizarem e mobilizarem aprendizagens. As tarefas proporcionam um percurso de aprendizagem individualizado e coerente que permite aos alunos construir colaborativamente aprendizagens que promovam a recuperação, enriquecimento e desenvolvimento de aprendizagens matemáticas.

O processo de ensino e aprendizagem está centrado nos

alunos, assumindo estes um papel ativo e desenvolvendo as aprendizagens de forma colaborativa, sendo autores de processos de aprendizagem únicos. O aluno que assume o papel de impulsionador do sucesso ajuda o grupo na resolução do trabalho proposto, solicitando a intervenção do professor sempre que o grupo não consiga, colaborativamente, ultrapassar alguma dificuldade. O professor intervém quando solicitado, gerindo dificuldades que surjam na resolução das tarefas, proporcionando aos alunos pistas/reflexões que lhes permitam continuar de forma autónoma e num contexto de partilha e colaboração o seu processo de aprendizagem. Esta dinâmica de trabalho colaborativo permite a aquisição e desenvolvimento de competências essenciais para o desenvolvimento de uma cidadania ativa, estimulando a reflexão crítica e criando experiências de comunicação ímpares.

FASE 4

Avaliação formativa das aprendizagens

Após os alunos terem terminado as tarefas propostas (o número de blocos destinados para a sua resolução será ajustado à maior ou menor complexidade das aprendizagens) os alunos realizam uma tarefa que pretende ser um instrumento de avaliação formativa do processo de recuperação e consolidação de aprendizagens. A avaliação formativa é realizada na aula e posteriormente o professor apresenta critérios de avaliação permitindo aos alunos, em contexto de grupo, refletirem sobre o processo de aprendizagem desenvolvido. Ao longo do ano letivo o professor utiliza os resultados da avaliação formativa essencialmente com o objetivo de melhorar os processos de ensino e aprendizagem implementados e de introduzir ajustes que promovam o sucesso. Também na avaliação formativa os alunos assumem um papel preponderante na reflexão sobre os resultados obtidos e na regulação e melhoria destes processos. A avaliação formativa é uma informação em *feedback* para todos os intervenientes, suportando um importante processo de tomada de decisão: o aluno irá continuar a reforçar e consolidar a aprendizagem desse conteúdo ou irá fazer parte de um grupo de reforço e consolidação de aprendizagens de outros conteúdos. No caso de serem necessários o reforço e consolidação da aprendizagem desse mesmo conteúdo, estes nunca ocorrerão de forma contínua, devendo ser proporcionado ao aluno novas experiências de aprendizagens de outros conteúdos e só mais tarde este integrará um novo grupo para reforço de aprendizagens essenciais não consolidadas, procurando-se sempre reforçar a autoestima do aluno.

CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

Os grupos de trabalho são definidos de acordo com as dificuldades diagnosticadas, não sendo estanques, podendo um aluno num determinado conteúdo fazer parte de um grupo e noutro conteúdo fazer parte de um outro grupo. A escolha do aluno impulsionador da aprendizagem em cada grupo também

não é fixa, sendo a escolha deste sempre adequada ao conteúdo em causa, podendo mesmo um aluno num dado momento ser impulsionador da aprendizagem de um conteúdo e noutro não o ser.

Sempre que o professor considera pertinente, ou os alunos evidenciam a necessidade de reforçar e consolidar processos de aprendizagem de conteúdos lecionados no próprio ano letivo, estes conteúdos integram os processos de aprendizagem a desenvolver pelos alunos.

Ao longo da operacionalização e do decorrer do ano letivo, os professores envolvidos no projeto reúnem, para refletir e debater em diferentes momentos as estratégias pedagógicas utilizadas e os dados recolhidos da avaliação formativa. Assim, ao longo da implementação, os professores ajustam eixos de atuação a partir da reflexão conjunta sobre as decisões pedagógicas e organizacionais e os efeitos dos reajustamentos que vão sendo introduzidos.

MONITORIZAÇÃO DO PROJETO

A monitorização do projeto desenvolve-se em duas fases: recolha e compilação sistemática de dados acerca dos resultados que decorrem da implementação do projeto (avaliação intercalar e avaliação final do primeiro e segundo períodos), e análise do grau de consecução dos objetivos consignados no projeto e reflexão sobre a eficácia das estratégias e medidas preconizadas. No processo de monitorização do projeto pretende-se o envolvimento de diversos membros da comunidade educativa, considerando que os resultados obtidos permitem não só verificar o grau de concretização dos objetivos propostos mas também introduzir ajustamentos ou correções estratégicas ao projeto.

AVALIAÇÃO DO PROJETO

O plano de avaliação do projeto integra dois campos de avaliação: avaliação da implementação e avaliação dos resultados ou impacto.

Com a avaliação procura-se analisar:

- o projeto no sentido de determinar se este foi implementado como previsto ou adequadamente implementado. Neste caso avalia-se a que nível as atividades da componente organizacional e pedagógica foram implementados (i.e. avaliação de implementação do projeto);
- os resultados obtidos com o projeto, avaliando o impacto do projeto nos resultados escolares dos alunos a matemática (oitavo e nono anos) e na relação pedagógica (i.e. avaliação de resultados ou impacto do projeto).

Os dados obtidos da monitorização do projeto constituem uma base de trabalho para a avaliação do projeto.

REFLEXÃO FINAL

APS pretende estabelecer nos alunos uma motivação e ambição pelo sucesso a matemática de todos e de cada um, procurando

a promoção de uma ação autónoma, responsável e solidária dos alunos a nível coletivo e individual.

O projeto foi perspectivado não só no proporcionar condições para que todos os alunos possam efetuar aprendizagens significativas e recuperar e consolidar aprendizagens, combatendo-se o insucesso à disciplina de matemática, mas também no qualificar o sucesso escolar.

Este projeto assume-se como um projeto de promoção do sucesso, da igualdade de oportunidades de sucesso, da participação ativa dos alunos na construção de espaços e experiências de aprendizagens diferenciadoras, procurando não só a recuperação e consolidação de aprendizagens matemáticas mas também o desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem de competências matemáticas de nível mais elevado. Foi desenhado numa lógica de progressão exponencial contextualizada, não se estabelecendo aprioristicamente percursos estruturados, mas sim de acordo com as respostas que cada aluno individualmente for sendo capaz de dar, assumindo a avaliação formativa um papel preponderante.

APS é hoje um agente não só de mobilização de competências matemáticas nos alunos e catalisador de conhecimentos das aprendizagens entre pares, promovendo o sucesso e a qualidade, mas também potenciador de capacidades e atitudes inscritas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. APS reconhece contextos, respeita diferenças e torna a matemática uma disciplina inclusiva. Terminamos com o testemunho de uma aluna impulsionadora do projeto “Eu sou aluna impulsionadora do sucesso! Ser professora dos meus colegas é uma enorme responsabilidade! O que posso fazer de diferente da minha professora? O facto de trabalhar num pequeno grupo, respeitando o ritmo de cada um, ouvirmos todos as dúvidas de todos, partilharmos sugestões, utilizarmos uma linguagem matematicamente desconstruída, faz a diferença! E se eu não tenho dificuldades no conteúdo em que estou a trabalhar com os meus colegas, porque é que APS é importante para mim? Permite-me não só desafiar as minhas competências e aprendizagens matemáticas, como melhora as minhas competências sociais. Aceitar as diferenças e construir a partir destas o sucesso é ambicioso!” Diana, aluna do 8.º ano.

Referências bibliográficas

Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas de Ribeirão (2014). *Uma Escola que aprende*. Consultado em 15/11/2017
http://www.eb23-ribeirao.pt/agrupamento/doc/PROJ_EDUCATIVO_2014_pdf

RAQUEL AZEVEDO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE RIBEIRÃO, VILA NOVA DE FAMALICÃO

RUI LEMOS

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE RIBEIRÃO, VILA NOVA DE FAMALICÃO

Esferas e aproximações de esferas — definição e definições.

A PROPÓSITO DA NATUREZA E DO PAPEL DAS DEFINIÇÕES EM GEOMETRIA

Uma das ideias que considero mais marcantes sobre a natureza e o papel das definições em geometria é a preocupação de Coxeter (1973) ao definir polígono. Este matemático afirma no início do livro que vai considerar uma definição e que depois, mais à frente no mesmo livro, vai considerar outra. Além disso é notável o cuidado que Coxeter tem em associar sistematicamente a ideia de possibilidade quando refere definições. “Podemos definir” é uma expressão recorrente para este geómetra.

Conhecendo o destaque que é dado às definições no ensino da geometria, nunca é demais refletir sobre a natureza dinâmica das definições e discutir as consequências desse dinamismo para o papel que estas podem ter no ensino e na aprendizagem. Nesta caso, escolho a esfera como objeto de debate.

A ESFERA

Este objeto geométrico está praticamente ausente da aprendizagem nos primeiros anos de escolaridade. É quase exclusivamente relegado para o papel de contraexemplo de poliedro. No entanto, a esfera é o sólido geométrico com simetria perfeita, simultaneamente o mais móvel e mais instável. Está também muito presente no nosso dia a dia, sendo as suas aproximações objetos comuns. Poderia e deveria por isso ter um papel mais relevante na aprendizagem.

Mas afinal de que falamos quando queremos referir uma esfera? Nesta discussão recorro às ideias de Baruk (2005) por as considerar as mais completas e dinâmicas. Para falar de uma esfera, esta matemática parte da superfície esférica e evidencia duas ideias importantes:

- uma superfície esférica é uma superfície cujos pontos estão todos à mesma distância de um ponto chamado centro;
- uma superfície esférica encerra uma porção de espaço, ou seja, um volume, a que se chama esfera” (Baruk, 2005, p. 437).

E acrescenta ainda. “Os pontos de uma superfície esférica são todos aqueles cuja distância ao centro é igual ao raio. Os pontos da esfera são todos aqueles cuja distância ao centro é inferior ao raio. Se a esfera inclui a superfície esférica considera-se fechada, no caso contrário considera-se aberta”.

Gosto especialmente da observação de Baruk: “Quando a palavra “esfera” figura num enunciado sem mais precisão, é porque se trata de uma esfera fechada” (2005, p. 437).

Tenho encontrado outras definições de esfera. Esfera é definida

como “o conjunto dos pontos do espaço tridimensional que estão à mesma distância de um ponto fixo, chamado centro” (Musser, Burger & Peterson, 2006, p. 623). Esta definição considera apenas a superfície esférica e é comum em outros livros de referência de origem anglo saxónica.

No livro de geometria Elementos de Geometria (Fernandes, p. 478): “Esfera é o sólido gerado por um semicírculo (semicírculo gerador) que roda em torno do seu diâmetro (eixo) até dar uma volta completa”. Nesta definição a esfera é considerada como um sólido de revolução.

Para já temos definições que não são totalmente equivalentes e definições que recorrem a propriedades distintas da esfera. Seguramente que podemos obter outras definições se atendermos a outras propriedades da esfera. Para isso é útil procurar maneiras distintas de estruturar espacialmente a esfera, isto é, de conceber vários tipos de estruturas que permitem obter ou compor uma esfera.

A ESTRUTURAÇÃO DA ESFERA

Um balão cheio pode ser uma boa imagem de uma superfície esférica. Assim como uma bola de basquete ou de andebol. As bolas de futebol já são aproximações à esfera de outra natureza pois são poliedros.

Os deliciosos bombons Baci são boas aproximações a esferas fechadas em que a superfície esférica é de chocolate e o interior é um saboroso recheio com avelãs. Mas é verdade que há outros bombons que são aproximações mais perfeitas da esfera.

As laranjas são esferas quase perfeitas. Podemos destacar a casca como uma superfície esférica e o interior que revela uma estrutura de gomos muito apelativa. Começamos a encarar a esfera como um sólido de revolução.

O que acontece quando cortamos uma esfera por um plano? Obtemos sempre um círculo. A esfera é o único sólido que tem esta propriedade, isto é, qualquer corte determinado por um plano gera sempre uma figura plana do mesmo tipo. Nem o cubo tem esta propriedade. Não há maneira de cortar uma esfera e obter uma outra figura que não seja um círculo. Há algum tempo, numa sessão de formação, ficámos todas estupefactas e algo incrédulas com esta propriedade da esfera. Nunca tínhamos encarado a esfera deste ponto de vista. Obtivemos a confirmação desta propriedade no dicionário de Baruk.

A propriedade anterior tem uma situação de restrição quando o corte da esfera passa pelo centro. Neste caso, obtemos círculos máximos ou meridianos. Esta propriedade permite obter uma esfera estruturada a partir de um conjunto de círculos máximos como mostra a figura 1. Faço notar que embora usemos a designação de “círculos máximos”, o que temos são circunferências.

Um berlinde de vidro é uma esfera que não revela a estrutura. Pode ser útil para medir o volume da esfera e obter de um modo concreto a inesperada relação entre o volume de uma esfera e o de um cilindro circunscrito. Recordo que esta relação é de $2/3$. Entre os objetos do nosso dia a dia descobrimos várias estruturas espaciais da esfera. Todas elas reveladoras de relações significativas do objeto tridimensional com os seus elementos constituintes bidimensionais. São excelentes exemplos da relação 3D-2D.



Figura 1

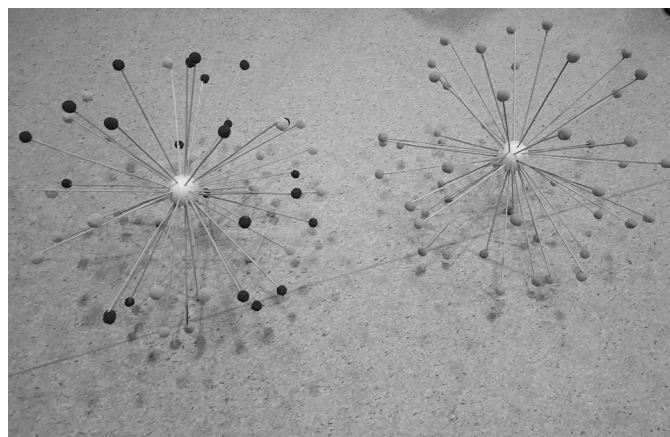


Figura 2



Figura 3

COMENTÁRIOS FINAIS

A superfície esférica é uma superfície não planificável. Talvez por isso tenhamos a ideia de que é uma superfície difícil de obter. No entanto, as estruturas de que falámos dão excelentes pistas para construir objetos esféricos que são muito boas aproximações à esfera. Para este trabalho foram inspiradoras as obras de alguns artistas que são sem dúvida nenhuma quem melhor explora estas relações.

Apresentamos um conjunto de objetos esféricos construídos pelas crianças em dois jardins de infância. Na figura 1 as esferas são construídas a partir de tiras de papel iguais para obter círculos máximos, na figura 2 a estruturação é feita a partir dos raios. Apresentamos também uma aproximação à esfera, do artista Rui Sanches (2017), em que a estruturação é feita a partir de planos paralelos (figura 3).

Referências bibliográficas

- Baruk, S. (2005). *Dicionário de Matemática Elementar*. Edições Afrontamento.
- Coxeter, H. S. M. (1973). *Regular Polytopes*. New York: Dover Publications.
- Fernandes, A. (sem data). *Elementos de Geometria*. Coimbra: Coimbra Editora.
- Musser, G., Burger, W. & Peterson, B. (2006). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach*. USA: John Wiley & Sons.
- Sanches, R. (2017). *Janela, espelho, mapa ...* Lisboa: Sistema Solar.

Ensino de conceitos básicos de probabilidade por meio de um jogo de dados e da metodologia de resolução de problemas

JOÃO VITOR TEODORO

JOSÉ MARCOS LOPES

Apresentamos neste trabalho um novo jogo, baseado naquele elaborado por Lopes (2006), para o ensino dos conceitos básicos de probabilidade. Por uma questão de espaço, consideraremos aqui apenas alguns dos muitos problemas que elaboramos envolvendo situações de jogo, onde suas soluções induzem os alunos na construção/reconstrução dos conceitos matemáticos estudados.

O JOGO

O jogo consiste no lançamento simultâneo de dois dados e deve ser disputado por dois jogadores, diremos João e Maria, onde um jogador joga após o outro terminar a jogada. Supondo que João jogue primeiro, então ele lança os dois dados simultaneamente e sua pontuação corresponde à soma das faces superiores dos dados, caso queira, poderá repetir o lançamento com os dois dados mais uma vez, mas os pontos desse segundo lançamento substituirão os pontos do primeiro. O mesmo ocorre com Maria. Vence o jogo quem obtiver a maior pontuação.

Questões que poderão ser colocadas aos alunos:

1. O jogador deve sempre aproveitar o segundo lançamento?
2. O segundo jogador possui vantagens sobre o primeiro jogador?

ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

Problema 1. Quantas e quais são as pontuações possíveis nesse jogo?

Solução. Sabendo-se que cada dado tem os valores das faces variando de 1 até 6 e, que, para uma possível pontuação, somam-se dois desses valores. Então, podemos ter as seguintes pontuações: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12. Portanto, existem onze possibilidades de pontuação.

Problema 2. De quantas maneiras diferentes o jogador poderá marcar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 pontos?

Solução. Denotaremos por (face do dado um; face do dado dois) as possíveis faces superiores dos dados sorteadas. Então, independentemente do jogador utilizar um ou dois lançamentos, para marcar:

dois pontos temos {(1; 1)}; três pontos temos {(1; 2), (2; 1)}; quatro pontos temos {(1; 3), (2; 2), (3; 1)}; cinco pontos temos {(1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1)}; seis pontos temos {(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)}; sete

pontos temos {(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1)}; oito pontos temos {(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2)}; nove pontos temos {(3; 6), (4; 5), (5; 4), (6; 3)}; dez pontos temos {(4; 6), (5; 5), (6; 4)}; onze pontos temos {(5; 6), (6; 5)}; doze pontos temos {(6; 6)}.

Nos problemas 1 e 2, consideramos os acontecimentos da experiência aleatória “Lançamento de dois dados” e, observamos que a união de todos esses subconjuntos que fornecem as possibilidades de faces sorteadas (acontecimentos elementares), forma o espaço amostral da experiência.

Dessa forma, no caso do jogo considerado, o espaço amostral das possíveis faces sorteadas nos dois dados, que representaremos por S , é dado por 36 elementos.

DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

Problema 3. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, João terá mais chances em obter sete ou oito pontos?

Solução. Como foi visto no problema 2, há seis possibilidades entre 36 existentes de se fazer sete pontos, isso corresponde à fração $\frac{6}{36} \approx 16,67\%$. E, há cinco possibilidades entre 36 existentes de se fazer oito pontos, isso corresponde à fração $\frac{5}{36} \approx 13,89\%$. Portanto, como $\frac{6}{36} > \frac{5}{36}$, João terá mais chances em obter 7 do que 8 pontos.

Na resolução do problema 3 temos utilizado a noção de proporção entre a parte e o todo. Estamos assim, usando intuitivamente a definição de probabilidade de Laplace como sendo o quociente entre o número de casos favoráveis (número de elementos do evento) e o número total de casos possíveis (número de elementos do espaço amostral).

Assim, $p = P(\text{Evento}) = \frac{\text{número de elementos do Evento}}{\text{número de elementos do Espaço Amostral}}$

Esta definição é válida apenas para espaços amostrais finitos com acontecimentos elementares equiprováveis, possibilitando resolver problemas como: Qual a probabilidade de João obter 10 pontos?

As probabilidades para cada uma das pontuações possíveis, considerando-se apenas o primeiro lançamento são apresentadas na figura 1.

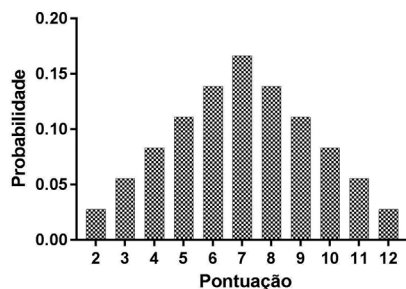


Figura 1. Gráfico com pontuações possíveis e suas respectivas probabilidades no primeiro lançamento

Problema 4. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João não obter 10 pontos?

Solução. Este problema pode ser utilizado para introduzir o importante conceito de evento complementar. Para a solução do problema calculamos a probabilidade de João obter 10 pontos e depois subtraímos do todo (100% ou 1).

Como a probabilidade de João marcar 10 pontos é 8,33%, teremos então que a probabilidade de não marcar 10 pontos será dada por:

$$p = 100\% - 8,33\% \approx 91,67\%$$

O evento complementar é denotado por $\bar{A}$ e $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Problema 5. Se João obteve 7 pontos no primeiro lançamento, qual a probabilidade de manter, aumentar ou diminuir sua pontuação se decidir usar o segundo lançamento?

Solução. Para manter a pontuação João deve obter 7 pontos no segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade

$$p = \frac{6}{36} \approx 16,67\%$$

Para diminuir sua pontuação, João deve obter 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos no segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade

$$p = \frac{15}{36} \approx 41,67\%$$

Para aumentar sua pontuação, João deve obter 8, 9, 10, 11 ou 12 pontos em seu segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade

$$p = \frac{15}{36} \approx 41,67\%$$

João pode diminuir a pontuação quando utiliza o segundo lançamento e deve decidir em quais casos é vantajoso lançar novamente. Apresentamos na figura 2 as probabilidades que João possui para aumentar sua pontuação, assim deverá adotar a seguinte estratégia.

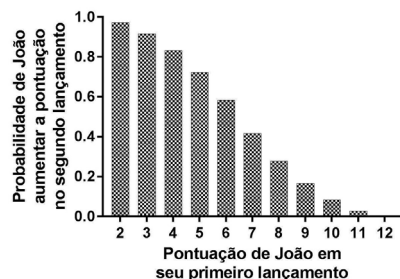


Figura 2. Pontuações possíveis e respectivas probabilidades de aumentá-las no segundo lançamento

Estratégia de João: Se João obtém 7 pontos ou mais em seu primeiro lançamento então ele pára. No caso contrário, isto é, se obtém 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos em seu primeiro lançamento então usará o seu segundo possível lançamento.

Deve-se observar que se João marcou 3 pontos em seu primeiro lançamento então usará o segundo lançamento e poderá diminuir sua pontuação. A estratégia de Maria deve ser diferente, ela já conhece a pontuação obtida por seu opositor.

SOMA E PRODUTO DE PROBABILIDADES

Problema 6. Qual a probabilidade de João obter 2 pontos neste jogo?

Solução. João obtém 2 pontos no seguinte caso:

- Obtém 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos no primeiro lançamento e obtém 2 pontos no segundo lançamento. Temos assim a probabilidade, $p = \frac{15}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{15}{1296} \approx 1,16\%$

Observar o papel do “e” na solução do problema 6. Neste caso devemos multiplicar as probabilidades referentes ao primeiro e segundo lançamento.

Problema 7. Qual a probabilidade de João obter 7 pontos neste jogo?

Solução. João obtém 7 pontos nos seguintes dois casos:

- Obtém 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos no primeiro lançamento e obtém 7 pontos no segundo lançamento. Temos neste caso a probabilidade, $p_1 = \frac{15}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{90}{1296}$
- Obtém 7 pontos no primeiro lançamento. Temos neste caso a probabilidade, $p_2 = \frac{6}{36}$

Portanto, a probabilidade de João obter 7 pontos será dada por:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{90}{1296} + \frac{6}{36} = \frac{306}{1296} \approx 23,61\%$$

A figura 3 apresenta as probabilidades que João possui para marcar 2, 3, 4, ..., 12 pontos no jogo. A pontuação mais provável é 7 com aproximadamente 24% e a menos provável é 2 com aproximadamente 1%.

Observar na solução do problema 7 o papel do “ou”, por isso somamos as probabilidades dos dois casos.

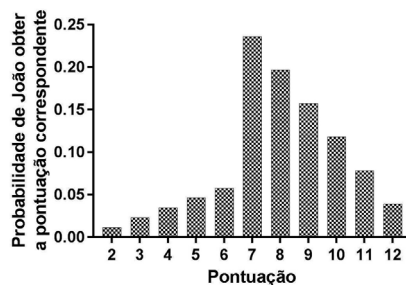


Figura 3. Pontuações possíveis do jogo e suas respectivas probabilidades de João pontuar no jogo

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Problema 8. Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João marcar 7 pontos, sabendo-se que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo?

Solução. Quando lançamos dois dados temos um espaço amostral S constituído de 36 resultados possíveis, neste caso a informação que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo, reduz o espaço amostral para $\{(2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5)\}$, ou seja, 15 elementos (espaço amostral reduzido, notação: S'). Destes 15 elementos, João pode marcar 7 pontos em três deles, quando ocorrer $(4; 3)$, $(5; 2)$ ou $(6; 1)$. Assim, a probabilidade de João marcar 7 pontos no primeiro lançamento, sabendo-se que o número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo dado é $p = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

A informação fornecida *a priori* altera o valor da probabilidade, ou seja, o cálculo da probabilidade está condicionado à informação tida *a priori*. O número de casos possíveis (S') varia de um problema para outro. Entretanto, para todos estes problemas, estamos calculando a probabilidade condicional como o quociente:

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\#S'}$$

onde $\#S'$ representa o número de elementos do conjunto S' .

Para o problema 8, vamos definir os seguintes acontecimentos:

$A = \{\text{João marcou 7 pontos no primeiro lançamento dos dois dados}\}$ e

$B = \{\text{O número da face do primeiro dado é maior do que a do segundo}\}.$

Desejamos calcular a probabilidade de ocorrer o acontecimento A , sabendo-se que o acontecimento B já ocorreu. A notação comumente utilizada é $P(A|B)$.

Temos neste caso, $B = \{(2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5)\}$, com 15 elementos. Assim, $P(B) = \frac{15}{36}$.

Ainda, $A = \{(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1)\}$ e $A \cap B = \{(4; 3), (5; 2), (6; 1)\}$, com 3 elementos. Assim, $P(A|B) = \frac{3}{36}$.

Das probabilidades calculadas acima e do resultado do problema 8, obtemos:

$$P(A|B) = \frac{3}{15} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A relação acima não se verifica apenas para o caso particular do problema 8. Esta relação é a definição do conceito de probabilidade condicional.

UM ÚLTIMO PROBLEMA

Estratégia de Maria: se obtém pontuação maior do que João em seu primeiro lançamento, então o jogo termina com a vitória de

Maria. Se obtém pontuação menor do que João em seu primeiro lançamento então utiliza o seu segundo lançamento. Agora, quando empata com João em seu primeiro lançamento então realiza o segundo lançamento se, e somente se João obteve uma pontuação menor do que 7.

Problema 9. Se João marcou 3 pontos qual a probabilidade de Maria vencer, perder ou empatar o jogo?

Solução. Maria vence o jogo nas seguintes duas condições:

- Obtém 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 pontos no primeiro lançamento. Isto ocorre com probabilidade $p_1 = \frac{33}{36}$
- Obtém 2 ou 3 pontos no primeiro lançamento e obtém 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 pontos no segundo lançamento. Isto ocorre com probabilidade $p_2 = \frac{3}{36} \times \frac{33}{36} = \frac{99}{1296}$

Portanto, a probabilidade de Maria vencer será dada por:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{33}{36} + \frac{99}{1296} = \frac{1287}{1296} \approx 99,31\%$$

Maria perde o jogo se obtém 2 ou 3 pontos no primeiro lançamento e 2 pontos no segundo lançamento. Isto ocorre

com probabilidade $p = \frac{3}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{3}{1296} \approx 0,23\%$

Maria empata o jogo se obtém 2 ou 3 pontos no primeiro lançamento e obtém 3 pontos no segundo lançamento. Isto

ocorre com probabilidade $p = \frac{3}{36} \times \frac{2}{36} = \frac{6}{1296} \approx 0,46\%$

Usando o Teorema da Probabilidade Total, podemos mostrar que a probabilidade de Maria vencer o jogo é 45,22%, de perder é 38,47% e a de empatar é 16,31%. Assim, concluímos que a probabilidade de Maria vencer o jogo é maior do que a probabilidade de perder. Esta observação já havia sido feita anteriormente; o segundo jogador está numa situação melhor, ele já sabe a pontuação obtida por seu opositor.

Utilizar a estratégia e o conhecimento pode trazer certas vantagens nos jogos e nas situações cotidianas, em relação às decisões intuitivas ou tomadas impulsivamente. Muitas vezes, mesmo que de forma imperceptível, lidamos com pessoas que propõem situações, estando em um cenário vantajoso. É imprescindível compreender e sistematizar, por meio da matemática, essas situações, de forma a estabelecer uma relação igualitária.

Referências bibliográficas

LOPES, J. M. (2006). Probabilidade condicional por meio de resolução de problemas. *Revista do Professor de Matemática*, 62, 34-38. São Paulo: SBM.

JOÃO VITOR TEODORO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

JOSÉ MARCOS LOPES

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO

A tecnologia entre uma tarefa de geometria analítica e a *Vesica Piscis*

Num período em que a discussão sobre as questões de gestão e desenvolvimento do currículo se reavivou, nomeadamente com o projeto da autonomia e flexibilização curricular, parece ganhar redobrada pertinência uma abordagem transformadora e estruturadora do ensino e aprendizagem da matemática – também ela contendo uma dimensão de desenvolvimento do currículo – a resolução de problemas suportada pelo recurso às tecnologias digitais.

Santos-Trigo, Reyes-Martínez e Aguilar-Magalón (2015) estão entre os autores que defendem exatamente essa ideia. As variadas ferramentas digitais que estão à nossa disposição têm diferentes potencialidades, intencionalidades e capacidades. Mas as suas potenciais vantagens estão sempre diretamente relacionadas com a qualidade das tarefas e dos processos de raciocínio que os alunos poderão experimentar ao trabalhar com uma dada ferramenta (sejam tecnologias de múltiplas finalidades, sejam tecnologias mais especificamente destinadas a atividade matemática). Santos-Trigo é um investigador mexicano interessado no papel transformador da tecnologia que nos impele a questionar formas tradicionais e padronizadas de tratar e sequenciar os conteúdos e os conceitos matemáticos e a hierarquização de conhecimentos, tantas vezes aceites como dados adquiridos e incontestáveis. Os seus trabalhos ilustram frequentemente formas de abordar situações matemáticas com recurso a tecnologias dinâmicas que as tornam em situações *poderosas* porque, num ápice, suscitam e promovem desdobramentos, incursões por tópicos inesperados, ligações entre conceitos e tópicos ou a investigação de relações matemáticas.

É neste sentido que a ideia de *problematização* no ensino e aprendizagem da matemática – em que as questões e situações matemáticas ganham fôlego e profundidade no âmbito de uma abordagem questionadora com recurso a tecnologias – está nitidamente ligada à flexibilização do currículo. Por isso, fica a advertência: “uma barreira a uma abordagem de resolução de problemas com tecnologias é o facto de se trabalhar e acompanhar um currículo muito estruturado geralmente composto de sequências de unidades e conteúdos” (Santos-Trigo, Reyes-Martínez e Aguilar-Magalón, 2015, p. 300).

No que se segue, trazemos uma breve visão desta perspetiva transformadora, propulsionada pela integração coordenada de ferramentas digitais no âmbito de uma tarefa de geometria analítica no plano. Discutimos vários aspetos da tarefa, tirando partido de potencialidades do GeoGebra, e depois infletimos em direção a outras questões de geometria com conexões a outras áreas do conhecimento.

GEOMETRIA ANALÍTICA: EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA, INTERSEÇÕES E ÁREAS

A tarefa proposta tem aspetos que lhe conferem alguma riqueza, no sentido em que não pressupõe apenas um trabalho rotineiro de reprodução de métodos ou conhecimentos tratados previamente. O mais importante, contudo, é vê-la como uma tarefa *dinâmica e poderosa* quando se incorpora o uso coordenado de tecnologias. Esta tarefa envolve várias questões relacionadas com duas circunferências cujos centros e raios são dependentes de um parâmetro a .

Considere os pontos $A=(a,0)$ e $B=(0,0)$, sendo $a>0$. Sejam as circunferências com centro em cada um desses pontos e raio a .

1. Prove que cada uma das circunferências passa pelo centro da outra.
2. Determine as coordenadas dos pontos de interseção das circunferências, P e Q , à custa de a .
3. Determine a relação entre o comprimento de PQ e o comprimento de AB .
4. Considere a região de sobreposição dos dois círculos (uma lente). Determine a sua área.
5. Como varia a área dessa região em função de a ?

Naturalmente, todas as questões colocadas podem ser resolvidas analiticamente, usando conhecimentos essenciais de geometria analítica e noções de trigonometria.

A nossa abordagem vai, porém, no sentido de tirar partido do GeoGebra e das suas possibilidades, quer no domínio da geometria, quer do cálculo algébrico (CAS), quer ainda da representação de funções.

Na janela gráfica, começamos por criar um parâmetro a , associado a um seletor, em que definimos a variação de a entre 0 e 10, por exemplo. De seguida, mantendo os eixos coordenados visíveis, marcamos os pontos A e B. Por fim, usando a ferramenta que permite construir uma circunferência com centro num ponto e raio dado, construímos as duas circunferências referidas. O resultado na janela gráfica, colocando o seletor no valor 5, corresponde ao que se vê na figura 1:

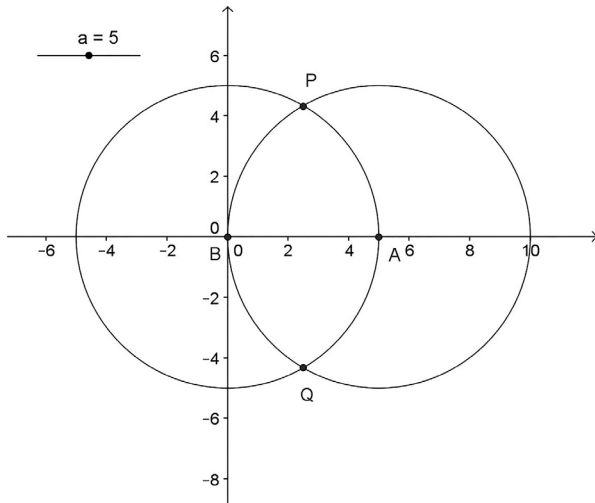


Figura 1. A construção das duas circunferências ligadas a um seletor que permite variar o parâmetro a

Naturalmente, esta construção é dinâmica, sendo condicionada pelo valor do parâmetro a , que, ao ser alterado, desloca o centro A e altera o raio das circunferências.

Relativamente à primeira questão proposta, é claro, ao fim de algumas observações, que cada uma das circunferências passa pelo centro da outra. Visualmente, esta conclusão é imediata. Mas também é possível justificar este facto, percebendo que a distância entre os centros das duas circunferências é igual a a , ou seja, ao valor do raio. Isso equivale a afirmar que qualquer das circunferências passa pelo centro da outra. Ainda outra forma de justificar a mesma observação seria mostrar que a equação de cada circunferência é verificada pelas coordenadas do centro da outra. Esta poderá ser a forma menos espontânea de pensar e, para muitos alunos, provavelmente a mais complexa. Sabe-se que a ideia de um ponto *pertencer a uma curva* como sinónimo de *verificação da sua equação* não é fácil de assimilar, para muitos alunos. A utilização das ferramentas de CAS pode eventualmente dar uma ajuda para tornar essa ideia mais clara. Na janela algébrica, as duas circunferências, automaticamente designadas por c e d, ficam representadas pelas suas equações. Na janela de CAS, podemos ver o resultado da ação de substituir as coordenadas do centro de uma circunferência na equação da outra, usando o comando *Substitute*. O resultado é apresentado a seguir (figura 2). Em cada linha, relativa a cada uma das

substituições, surge uma igualdade verdadeira.

Algebra	CAS
Conic	1 Substitute[c, {x=0,y=0}]
c: $(x - 5)^2 + y^2 = 25$	→ $0 = 0$
d: $x^2 + y^2 = 25$	
Number	2 Substitute[d, {x=a,y=0}]
a = 5	→ $25 = 25$
Point	3
A = (5, 0)	
B = (0, 0)	

Figura 2. A utilização de ferramentas de CAS para verificar o efeito da substituição das coordenadas de um ponto na equação de uma circunferência

Passando à questão seguinte, vamos tratar da obtenção das coordenadas dos dois pontos de interseção das circunferências, que se designam por P e Q. Na janela gráfica, podemos construir os pontos de interseção das duas curvas, usando a ferramenta que determina a interseção entre dois objetos. Na janela algébrica, surgem as coordenadas desses pontos (para o caso de $a=5$), expressas em números decimais: $P=(2.5, 4.33)$ e $Q=(2.5, -4.33)$. Não é fácil estipular uma relação entre estes valores e o valor do parâmetro a . Podemos fazer experiências, recorrendo à alteração do parâmetro a e observar o efeito nas coordenadas dos dois pontos, como se ilustra na figura 3:

a = 2	P=(1, 1.73) Q=(1, -1.73)
a = 4	P=(2, 3.46) Q=(2, -3.46)
a = 10	P=(5, 8.66) Q=(5, -8.66)

Figura 3. Variação do parâmetro a e as correspondentes coordenadas de P e Q

Parece bastante óbvio que a abcissa dos dois pontos corresponde a $\frac{a}{2}$. Contudo, não é tão evidente a forma como se obtém o valor da ordenada à custa de a .

Passemos, novamente, à janela de CAS. Iremos usar a função *CSolve* que permite obter as soluções de um conjunto de equações simultâneas com uma ou mais incógnitas (figura 4):

Conic	1 Substitute[c, {x=0,y=0}]
c: $(x - 10)^2 + y^2 = 100$	→ $0 = 0$
d: $x^2 + y^2 = 100$	
Number	2 Substitute[d, {x=a,y=0}]
a = 10	→ $100 = 100$
Point	3 CSolve[{c,d}, {x,y}]
A = (10, 0)	→ $\left\{ \left\{ x = 5, y = 5\sqrt{3} \right\}, \left\{ x = 5, y = -5\sqrt{3} \right\} \right\}$
B = (0, 0)	
P = (5, 8.66)	
Q = (5, -8.66)	

Figura 4. Os valores exatos das coordenadas dos pontos de interseção, com recurso ao CAS

De novo, se alterarmos a posição do cursor para variar o parâmetro a , encontraremos o mesmo tipo de expressão

numérica para as ordenadas dos pontos P e Q, podendo portanto admitir-se que se tem $P = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ e $Q = \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$. Com esta informação, já é fácil encontrar a relação entre a medida do segmento PQ e do segmento AB: $\overline{PQ} = \sqrt{3}a$ e $\overline{AB} = a$, logo $\overline{PQ} = \sqrt{3} \overline{AB}$.

Avancemos agora para a questão da área da região em que os dois círculos se sobrepõem. Chama-se a esta figura geométrica uma *lente*. No caso que estamos a considerar, trata-se de uma lente especial, pois os dois círculos têm raios iguais e a distância entre os centros é igual ao raio. Veremos adiante que esta lente tem tido uma grande influência na arte, ao longo de muitos séculos.

Para o cálculo da área da região pretendida, as ferramentas gráficas do GeoGebra poderão dar algum apoio, ainda que não de forma direta pois, para a construção de porções de círculos, apenas encontramos ferramentas para construir setores circulares e setores circuncirculares. Faremos a construção em dois passos, para obter um segmento de círculo: construiremos um setor circular e retiraremos um triângulo (com vértices no centro da circunferência e nos pontos P e Q) a esse setor. Dessa forma, obteremos metade da lente. A respetiva representação gráfica obtém-se, atribuindo uma cor ao setor circular e colocando o triângulo a branco, escolhendo depois nas propriedades avançadas dos dois objetos a camada (*Layer*) 1 e a camada 2, respetivamente (figura 5).

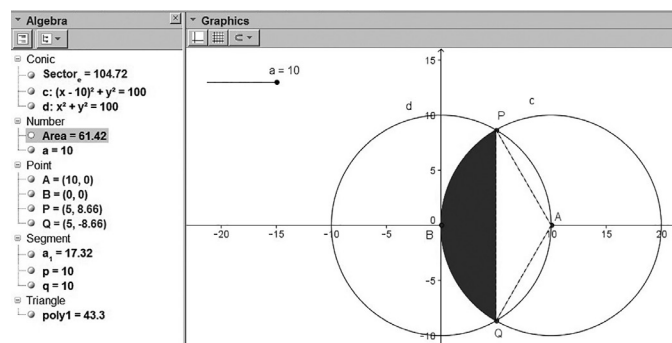


Figura 5. Sobrepondo um triângulo (branco) a um setor circular (sombreado) surge a representação de um segmento circular

Como se pode ver na janela de álgebra, a área do setor circular é calculada de imediato (104.72) e a área do triângulo é também obtida automaticamente (43.3). Basta fazer a diferença entre estes valores para obtermos a área de meia lente. Assim, quando o raio é 10, essa área é 61.42. Portanto, nesse caso, a área da lente terá o valor de 122.84 (figura 6).

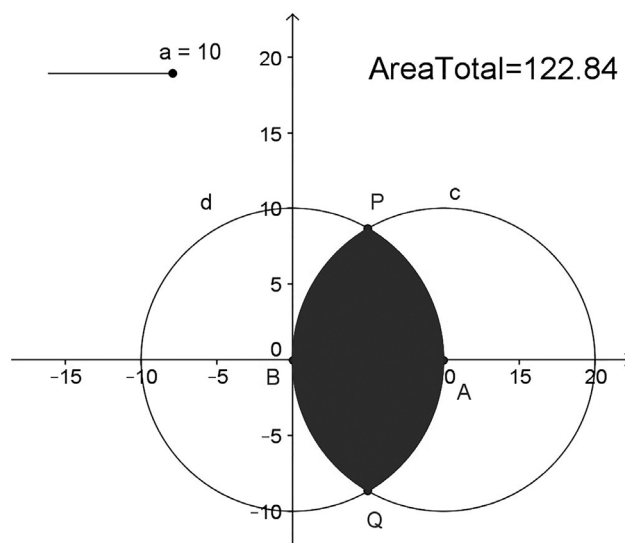


Figura 6. A representação da lente, com base em duas meias-lentes, e respetiva área

O valor exato da área da lente pode ser encontrado sem grandes cálculos. O ângulo ao centro $\angle PAQ$ é um ângulo específico desta lente: 120° . Este facto pode ser facilmente verificado, notando que o triângulo PAB é equilátero, pelo que o ângulo $\angle PAB$ mede 60° . Assim, a área do setor circular é: $A(\text{setor}) = \frac{\pi a^2}{3}$. Quanto à área do triângulo isósceles de vértices P, A e Q, sabe-se que a base tem o comprimento $\overline{PQ} = \sqrt{3}a$ e a altura é $\frac{a}{2}$. Depois, calculando a diferença entre a área do setor e a área do triângulo e multiplicando o resultado por 2, tem-se a área da lente: $A(\text{lente}) = \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right) a^2$.

O resultado permite afirmar que a área da lente é diretamente proporcional ao quadrado do raio (parâmetro a). Mas existe a hipótese de criar, na janela de Folha de Cálculo, uma tabela de valores representando a variável a e a variável *Área da lente*. A tabela obtém-se, gravando os dados destas variáveis em duas colunas à medida que se desloca o seletor (entre 0 e 10) (figura 7).

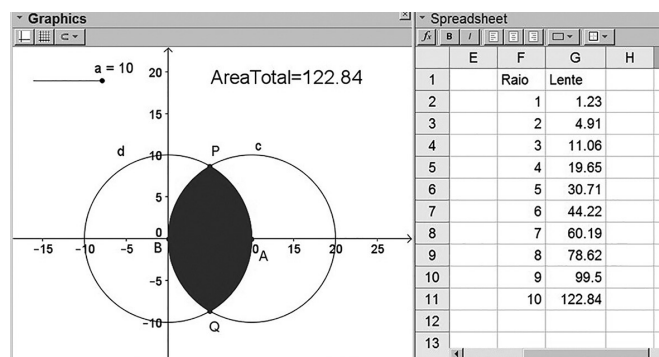


Figura 7. A recolha dos valores das duas variáveis numa janela de Folha de Cálculo, à medida que se faz variar o valor de a

Fazendo a regressão bivariada, observa-se a representação gráfica de uma função quadrática e a respetiva expressão analítica: $y = 1.23x^2$ (figura 8).

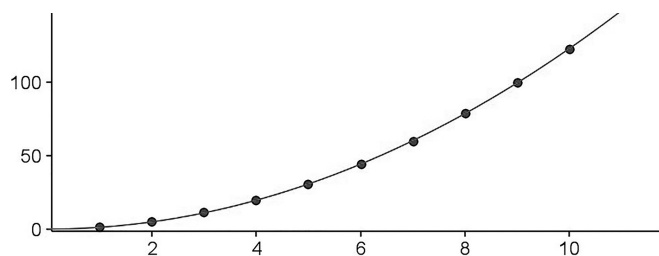


Figura 8. Gráfico da curva ajustada ao conjunto de pontos representados na tabela

Compreende-se facilmente que a área da lente varia com o quadrado do raio, já que esta é também a lei de variação da área do círculo como função do seu raio. A constante de proporcionalidade, $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$, é menos óbvia e constitui uma das características específicas desta lente especial.

Uma breve síntese das várias potencialidades que o GeoGebra ofereceu para trabalharmos sobre as questões lançadas numa situação de geometria analítica fica espelhada nas diversas janelas (Álgebra, Gráficos, CAS, Folha de Cálculo) que fomos gerando e manipulando, em torno da resolução das sucessivas questões (figura 9):

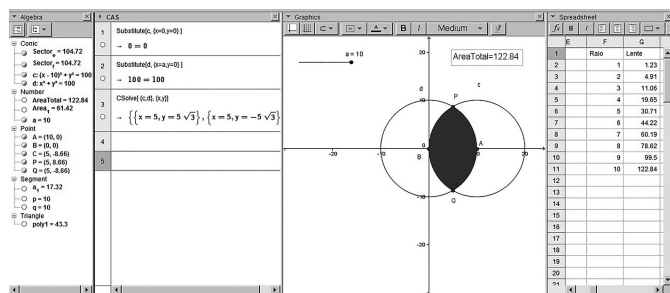


Figura 9. As diversas janelas do GeoGebra utilizadas na resolução das diversas questões

A VESICA PISCIS: UMA PONTE COM A ARTE

Vesica Piscis é o nome atribuído a esta figura geométrica (região de interseção de dois círculos com o mesmo raio e cujos centros estão separados entre si por uma distância igual ao raio). O nome da figura tem origem no Latim e literalmente significa *bexiga de peixe*.

De facto, a tarefa de geometria analítica que colocámos no início tem a ver com a construção da *Vesica Piscis* e leva-nos a algumas das suas características especiais. Desde logo, a *Vesica Piscis* conduz à construção da raiz quadrada de 3. Como verificámos, se o raio dos círculos for igual a 1, a altura da *Vesica Piscis* é $\sqrt{3}$. Outro resultado é a medida da sua área, para um raio

unitário: $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} \approx 1.23$.

A *Vesica* tem uma extraordinária importância na geometria e na arte e tem igualmente atraído a atenção dos matemáticos, designadamente pelas relações que esta permite estabelecer com outros conceitos (como é o caso do número de ouro) e pela forma como se liga a outras construções geométricas. É oportuno referir, além disso, que a *Vesica Piscis* é atualmente objeto de estudos diversos e constitui tema de investigação em teses de mestrado e de doutoramento, designadamente em Belas Artes. Refiram-se, como exemplos, a tese de mestrado em Desenho, de Filipe Alberto da Silva (2013), e a tese de doutoramento em Ciências da Arte, de Simão Palmeirim Costa (2016). No primeiro destes trabalhos, é dito no resumo: "... de régua e compasso, revelaram-se exaustivamente (mas seguramente não todas) as construções possíveis de serem construídas por duas circunferências ou dois arcos apenas" (p. do Resumo).

Há, com efeito, toda uma mística que envolve a *Vesica Piscis* e que a torna numa construção especial, muito em virtude da sua simplicidade e da forma como dessa simplicidade podem nascer variadas construções, mas também de algumas das suas propriedades e de uma certa harmonia estética básica que consegue imprimir em muitas obras notáveis de arquitetura e pintura. Silva (2013) apresenta, no seu estudo, uma resenha histórica sobre a origem e a presença da *Vesica Piscis*, desde a Pré-história até ao Renascimento. Segundo o autor, o mais antigo testemunho encontrado em Portugal da *Vesica Piscis*, que reproduzimos na figura 10 (a *Vesica Piscis* na construção de um triângulo equilátero), é o legado de um arquiteto chamado António Rodrigues. Viveu no século XVI, foi arquiteto de obras régias e a ele se atribui a autoria de um Tratado de Arquitetura datado de 1576.

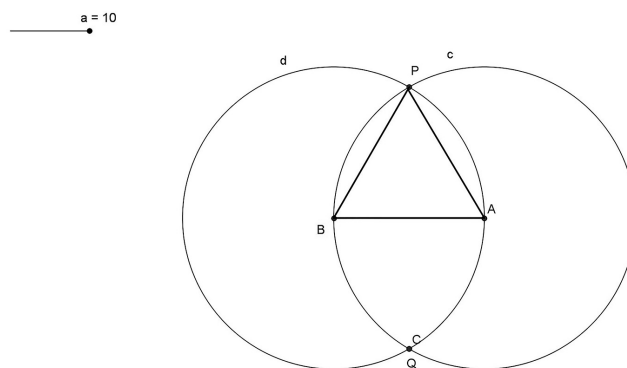


Figura 10. A *Vesica Piscis* na construção de um triângulo equilátero

A figura que se segue (figura 11) foi retirada da galeria digital *The Web Gallery of Art* (<https://www.wga.hu/index.html>), um repositório aberto de obras de arte e arquitetura da Europa,

do século VIII ao século XIX, que contém muitos milhares de reproduções de obras. A imagem é de uma escultura em madeira policromada, datada do período 1200-20, da autoria de um artista Catalão desconhecido. Representa *Cristo em Majestade e os Apóstolos*, podendo ser encontrada no Museu Nacional de Arte da Catalunha, em Barcelona. A imagem mostra perfeitamente a *Vesica Piscis* (ou, segundo alguns autores, a *Mandorla* que se reduz aos dois arcos de circunferência que delimitam a lente).



Figura 11. Foto de escultura em madeira representando “Cristo em Majestade e os Apóstolos” (disponível em <https://www.wga.hu/index.html>)

No GeoGebra, podemos importar a imagem e sobre ela realizar a construção da *Vesica Piscis*, como se ilustra na figura seguinte. Para o efeito, foi-se deslizando o cursor no seletor até se chegar a um ajuste razoável (figura 12).

A imagem pode agora impelir-nos a levantar algumas outras questões: Qual será, aproximadamente, a relação entre a altura e a largura desta peça de madeira? Qual será, aproximadamente,

a relação entre a altura da figura de Cristo e a altura da figura de um Apóstolo? Qual será, aproximadamente, a relação entre a área ocupada pela figura de Cristo (a *Vesica Piscis*) e a área ocupada pela figura de cada Apóstolo? (Uma curiosidade: a peça de madeira, de acordo com os dados disponibilizados pela galeria digital, tem 135 × 98 cm).

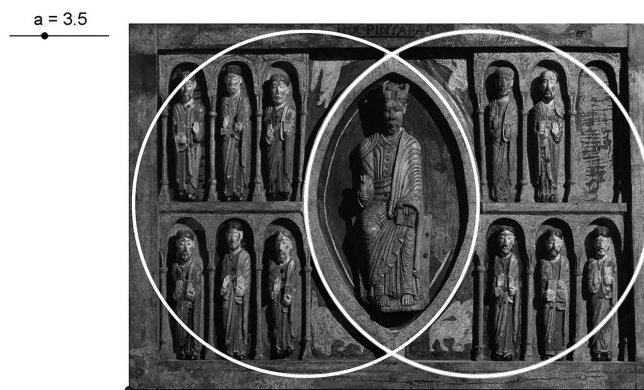


Figura 12. A *Vesica Piscis* construída no GeoGebra sobre a imagem da escultura

Ao leitor, deixamos o convite de pensar sobre estas e outras possíveis questões que podem daqui despontar, não deixando de sublinhar o caráter mesclado, entre o enigmático, o evidente e o surpreendente, que esta construção tão simples nos permite captar nesta peça. Ao mesmo tempo, não podemos deixar de notar que na arte do princípio do século XIII não existia o GeoGebra... mas já existia, há muito, a geometria, o compasso e o esquadro. Temos hoje outras tecnologias e outros media, e somos hoje outros humanos-com-media (Jacinto & Carreira, 2017), podendo usufruir destes media digitais, não apenas para resolver questões de geometria analítica de uma forma mais estimulante e poderosa, levando a raciocinar e aprender ideias matemáticas, mas também como ferramentas que nos permitem investigar o mundo, através da matemática.

Referências

- Costa, S. P. (2016). *A aquisição do espaço plástico renascentista na pintura portuguesa de c.1411 a c.1525: competências geométricas e compositivas do final da idade média ao renascimento*. (Tese de Doutoramento em Ciências da Arte). Faculdade de Belas Artes, Universidade de Lisboa. [Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/25111>].
- Jacinto, H. & Carreira, S. (2017). Diferentes Modos de Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Matemática para Além da Sala de Aula: Evidências de fluência tecno-matemática. *Bolema*, 31(57), 266-288. [Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0266.pdf>].
- Santos-Trigo M., Reyes-Martínez I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The Use of Digital Technology in Extending Mathematical Problem Solving Reasoning. In L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud – LTEC 2015*, (pp. 298-309). Cham: Springer.
- Silva, F. A. (2013). *A figura da Mandorla e da Vesica Pisces: as suas possibilidades de construção*. (Tese de Mestrado em Desenho). Faculdade de Belas Artes, Universidade de Lisboa. [Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/10249>].

SUSANA CARREIRA

UNIVERSIDADE DO ALGARVE E UIDEF – INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

NÉLIA AMADO

UNIVERSIDADE DO ALGARVE E UIDEF – INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

VAMOS JOGAR MATEMÁTICA

SANDRA CRISTINA COSTA

Todos os dias nos deparamos com sérias dificuldades de aprendizagem dos alunos, que claramente identificamos associadas à *falta de atenção/concentração, falta de empenho, falta de trabalho individual*, etc. No entanto, quando os confrontamos com a possibilidade de jogar um jogo, a atitude inverte-se, quase globalmente. A primeira questão que colocam é: “que jogo?”. A segunda questão que colocam é natural: “como se joga?”.

Falo de todos os tipos de jogos, que não os jogos de azar em que a sorte de ganhar ou perder não dependem da habilidade do jogador, mas apenas de probabilidades matemáticas.

O ser humano tem uma capacidade, diria inata, para jogar. Desde tenra idade, o desafiar de um sorriso, um choro, um fixar de olhar, o desafio para receber cócegas, lançar um brinquedo ao chão e esperar que alguém lho devolva, faz com que tudo à volta de um bebé lhe crie articulação e desenvolvimento, ao mesmo tempo que interage, socializa, estimula, aprende, desafia e desenvolve processos criativos. Ganha experiências, partilha conhecimentos e emoções. Desenvolve a cognição, a autoconfiança e o autoconceito.

O carácter lúdico dos jogos pode, pois, ser transformado num carácter interventivo. Implementando o jogo em atividades associadas à atividade pedagógica ou criando analogias entre a aprendizagem de um domínio e a predisposição e propensão que os alunos têm para jogar, quer em contexto de sala de aula, quer em contexto ocupacional, pode promover-se a metacognição.

Através do jogo, aprendem a respeitar-se as regras e, por conseguinte, a fortalecer as relações interpessoais. Com o jogo, experiencia-se o sucesso, o insucesso, desenvolvem-se novas estratégias, novos desafios. Aquando da explicação ou da compreensão das regras de um jogo, da análise das estratégias utilizadas, dos erros cometidos, do estudo do pormenor de posições dominantes, do reconto, ou aquando do desenvolvimento de um jogo, desenvolvem-se *skills* como a comunicação, a atenção, a concentração, o empenho, a memória, o raciocínio lógico/dedutivo, a aptidão para resolver problemas, a abstração, o espírito crítico, a proficiência, a competência, a destreza mental, o respeito, o estímulo. Desenvolve-se a capacidade de treinar, de inovar e de recomeçar, transversal a todas as idades e às diferentes áreas do saber. Desenvolvem-se a autoconfiança,

a autossuperação, a persistência, a resiliência, a inteligência emocional, “técnicas de argumentação e de demonstração, que constituem a própria natureza da Matemática”, bem como a “Comunicação ou o Raciocínio Matemático”,... “capacidades estruturais indispensáveis”¹.

Para jogar um jogo, seja este de estimulação mental ou física ou muitas vezes ambos, é necessário conhecer as suas regras e existir um objetivo, tal como na matemática; o jogador deve prever, planejar, organizar, articular, analisar a parte e o todo, antecipar consequências e modificar estratégias com vista ao sucesso, não descurando o seu carácter lúdico, devem definir-se estratégias vencedoras, assim como na matemática.

Parece, portanto, importante estabelecer uma analogia entre esta temática dos jogos e a aprendizagem da matemática, articulada com o meio envolvente, com vista ao sucesso integral dos nossos alunos.

Vamos, por isso, *jogar Matemática*. De facto, aprender matemática não é mais do que aprender a jogar um jogo e conhecer as suas regras.

É necessária persistência na resolução de um exercício, de um problema, de um desafio, ou de uma tarefa em matemática e para ultrapassar dificuldades é necessário ter atitudes compatíveis, em particular, de nunca desistir do desafio. Estratégias devem ser desenvolvidas, facilitando a comunicação, a expressão, a língua e criando analogias com a matemática. Assim, a maneira como o aluno se comporta a jogar matemática está relacionada com as consequências que terá, a curto ou a longo prazo.

A minha principal motivação para ser professora de matemática é, para além de a divulgar, desenvolver nos alunos o gosto de a aprender e de a discutir. De não desistir perante as dificuldades. Tentar e errar, não é perda de tempo, mas um investimento na concretização de um objetivo. Fazem parte do jogo. Se desistir, perco. Se não souber as regras, perco. E honestamente, ninguém gosta de perder! Por isso, devo recomeçar.

No dia 28 de abril de 2014, o meu filho Bernardo ficou doente e não foi à escola. Pediu-me para jogar xadrez com ele. Após algumas partidas, deixei-o a sós para que pudesse descansar. Pouco tempo mais tarde chamou-me e desafiou-me a jogar um jogo que acabara de inventar, com somente quatro regras,

¹ Metas Curriculares do Ensino Básico - Matemática

Jogo “Cavalo em Linha”

Categoria: Jogo matemático.

Material:

4 peças (cavalos) por jogador, de cor diferente.

Tabuleiro 4X4.

Número de Jogadores:

2 jogadores.

Objetivo:

Alinhar os quatro cavalos, em qualquer direção, horizontal, vertical, ou diagonal, ou impedir o adversário de se movimentar.

Regras:

1. Colocar as peças no tabuleiro de acordo com a figura 1.

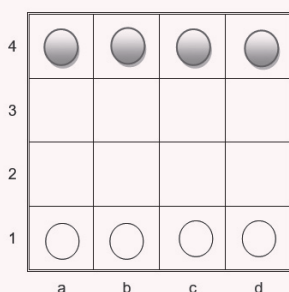


Figura 1. Disposição inicial das peças no tabuleiro do jogo do “Cavalo em Linha”

2. Sortear o jogador que inicia a partida.

3. Movimentos:

Alternadamente, cada jogador pode mover uma das suas peças em qualquer direção de um ponto para uma casa vazia do tabuleiro, descrevendo um L (2x1 ou 1x2), podendo saltar as peças intervenientes (à semelhança do movimento do cavalo do xadrez).

a. Na figura 2 o cavalo que ocupa a casa c2, pode jogar para uma das casas vazias: a1, a3, b4 ou d4.

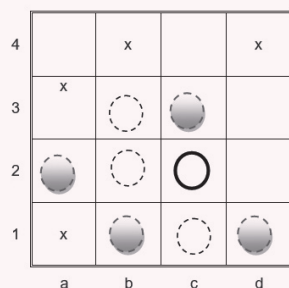


Figura 2. Movimentos possíveis do cavalo que ocupa a casa c2

b. Para um jogador vencer a partida, deve ter movimentado todas as suas peças, pelo menos, uma vez.

Na figura 3, os cavalos que ocupam as casas b2, c3 e d4 foram movimentados. No entanto, o cavalo que ocupa a casa a1 ainda não foi jogado. As brancas ainda não reuniram condições para vencer o jogo².

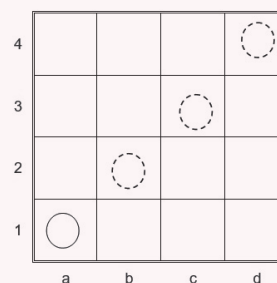


Figura 3. No jogo do “Cavalo em Linha” todas as peças têm de ser jogadas, pelo menos, uma vez.

4. Captura: Não existe captura.

5. Fim da partida:

Vence o jogador que conseguir alinhar os seus cavalos em qualquer direção, vertical, horizontal, ou diagonal (figuras 4 e 5) ou que consiga impedir todos os movimentos do adversário (figura 6).

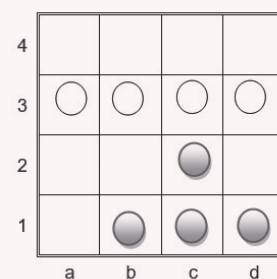


Figura 4. As brancas ganham

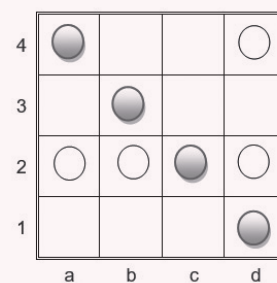


Figura 5. As pretas movimentaram todos os cavalos e ganham

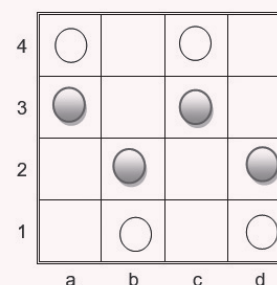


Figura 6. Jogam as brancas. Perdem o jogo

² Apelo à memória e concentração de ambos os jogadores, dado que as peças de cada jogador são indistinguíveis.

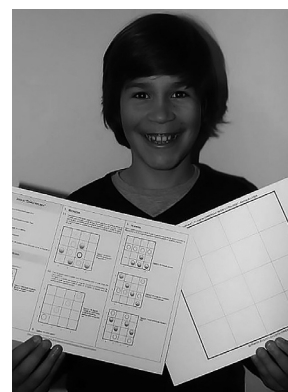
e que designou, no mesmo dia, por *Cavalo em linha*. Dado que já joga xadrez desde os quatro anos, foi fácil para ele desenhar o tabuleiro ideal, definir as regras formais do jogo, condições de vitória e de derrota. Incentivado, escreveu-as ele próprio a computador, e, após revisão do texto e da imagem, submeteu-o ao concurso *Inventa o teu jogo*, do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos², décima primeira edição, levada a cabo pela Associação LUDUS/Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. O jogo *Cavalo em linha* foi considerado *Jogo Matemático* e foi classificado em ex aequo, com o primeiro lugar!³

O Jogo Matemático *Cavalo em Linha* é muito fácil de explicar e de jogar, e o Bernardo desenvolveu diferentes aberturas e algumas estratégias dominantes, que tornam o jogo cada vez mais interessante e estimulante, à medida que as explora a cada partida.

Com o objetivo de divulgar a matemática e o seu jogo, o Bernardo imprimiu os tabuleiros e as instruções, recortou os peões em eva, com a ajuda do irmão mais novo, César, e ofereceu, em mão, um exemplar do jogo a cada um dos alunos participantes na Cerimónia de Abertura das Finais Nacionais das Olimpíadas Portuguesas da Matemática de 2017, que decorreram em Viseu.

³ <http://ludicum.org/cnjm/2014-2015-cnjm11/concurso-inventa-o-teu-jogo-vencedores>

Este processo criativo é um exemplo em como as capacidades e as competências matemáticas se podem desenvolver sem ter, necessariamente, de dar *mais do mesmo*.



O Bernardo com o Jogo *Cavalo em linha*

O Bernardo tem agora treze anos de idade e continua a gostar muito de *jogar Matemática*!

SANDRA CRISTINA MENDES DA COSTA

ESCOLA SECUNDÁRIA ALVES MARTINS, VISEU



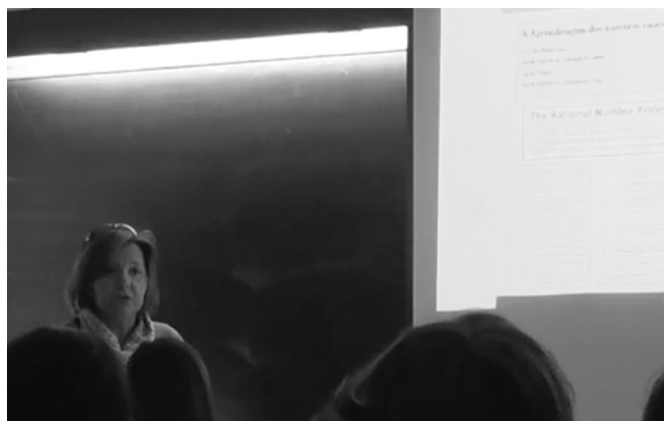
Este ano o encontro **A Matemática nos Primeiros Anos** realiza-se no **Instituto de Educação, da Universidade do Minho**, em Braga.

Este encontro, promovido pela **Associação de Professores de Matemática** é dedicado aos primeiros anos, ou seja, desde o pré-escolar ao final do 2.º ciclo.

Sessão especial do ProfMat 2018: O papel das revistas na vida profissional dos professores

As revistas *Educação e Matemática* e *Quadrante*, as duas publicações periódicas da APM, a primeira mais dirigida aos professores e a segunda mais dirigida aos professores investigadores, realizaram uma sessão especial conjunta no ProfMat 2018 no dia 5 de abril ao fim da tarde. As diretoras das revistas, Lina Brunheira (*Educação e Matemática*) e Hélia Oliveira (*Quadrante*) apresentaram as principais linhas orientadoras das revistas. Ana Isabel Silvestre e José Tomás Gomes foram os colegas convidados a partilhar as suas experiências e reflexões com e em torno de cada uma das revistas, respetivamente *Quadrante* e *Educação Matemática*. A sala esteve cheia e a sessão foi filmada. Dada a riqueza das experiências apresentadas nessa sessão, pareceu-nos que seria uma pena não partilhar com os nossos leitores algumas delas. Assim, deixamo-vos aqui a transcrição de alguns dos momentos de partilha enriquecedora da sessão, revista pelos colegas convidados.

Ana Isabel Silvestre



Boa tarde a todos.

Ana Isabel da Escola Dom Pedro Varela, no Montijo.

Obrigada pelo convite, estou muito satisfeita por partilhar, no ProfMat, a minha experiência em torno da leitura da revista *Quadrante*. Inicialmente, eu tive algum receio de aceitar este convite, pois é difícil dizer quais são os artigos da *Quadrante*, que usei durante o mestrado e o doutoramento, aos quais reconheço impacto na minha prática profissional.

Eu tive conhecimento da revista em 2003, 2004. Nessa altura, fiz leituras regulares para os trabalhos do mestrado e para o projeto PDTR¹, em que tive a oportunidade de participar. Com a leitura dos artigos identifiquei, não só alguns conteúdos que

eram alvo de investigação, quer nacionais, quer internacionais, como aspetos que eram inovadores, nomeadamente, as questões relacionadas com a comunicação, a argumentação e o raciocínio matemático. A importância das conexões [matemáticas] descrita em vários artigos, também fez repensar outras questões, nomeadamente, aspetos da prática da sala de aula. No fundo, a revista *Quadrante* foi uma janela aberta para o conhecimento. O que é que este conhecimento me deu em termos de trabalho com os meus alunos? Num processo contínuo, que não acontece de um dia para o outro, considero que me deu a capacidade para tomar decisões em relação à gestão do programa, em particular, tomar decisões de acordo com o perfil das minhas turmas. Além disso, a capacidade para selecionar e adaptar as tarefas disponíveis nos artigos, no sentido de criar aquilo que eu considero muito importante, os percursos de aprendizagem, para as minhas turmas. E ampliei, ainda, o meu conhecimento sobre o reportório das estratégias dos alunos. Compreender, quase de imediato, as estratégias de resolução dos alunos tem, na minha opinião, um impacto muito importante no trabalho de sala de aula. Quantas vezes os alunos dizem “eu não percebo isto, isto e isto” e nós estamos a ouvir mas, de facto, não estamos a compreender aquilo que eles nos querem dizer. À medida que fui lendo, também fui percebendo padrões nos erros [dos alunos]. Por estes motivos, perco muito tempo a ouvir os alunos.

Público: Desculpa. Não perdes, gastas.

AIS: Gasto, mas também ganho. E, penso que os alunos também ganham. Ouvir os alunos para compreender como pensam é muito importante.

Concluindo, estas leituras deram-me conhecimento e tranquilidade para decidir o que fazer com as turmas. Não decisões ad-hoc, mas decisões baseadas no conhecimento. É importante ter um conhecimento sólido para decidir e justificar as nossas opções, na escola, aos colegas, à comunidade e também aos pais.

Foi difícil selecionar os artigos para apresentar, mas existem dois que tenho a certeza terem tido impacto, não só na minha, como na prática de outros colegas. (...) O primeiro artigo que menciono é A aprendizagem dos números racionais, um artigo de Cecília Monteiro e de Hélia Pinto, publicado em 2005² que, de forma aprofundada, apresenta os diferentes significados da fração. Foi realmente um artigo muito importante! Apresenta

¹ Projeto internacional - Professional Development of Teacher-Researchers

² Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, Vol. 14, N.º 1, 89-106. APM.

indicações sobre a necessidade de trabalhar esta representação de forma articulada com as outras representações dos números racionais e documenta os erros frequentes dos alunos. Além disso, deu-me a conhecer um conjunto de aspetos [sublinhados e visíveis no slide] que me pareceram extremamente relevantes, os aspetos que envolvem o raciocínio multiplicativo. E, de facto, na minha opinião, este deve ser um trabalho muito forte no 2.º ciclo de escolaridade.

Como vos disse estes são artigos de janela aberta para o conhecimento. Porquê? Neste artigo encontrei o Rational Numbers Project³, um projeto com 30 anos, que foi sempre financiado, alocado na Universidade do Minnesota, nos Estados Unidos, cujos últimos artigos saíram em 2017. [O site] tem disponível um conjunto de lições, retiradas das diferentes fases do projeto e que estão acessíveis. Quando uso este recurso, eu adapto as tarefas às nossas necessidades. Na sequência da leitura deste artigo, procurei mais recursos para a sala de aula, em linha com indicações do projeto e encontrei o Illuminations (NCTM). Como exemplo, mostro uma aplicação que permite explorar, em simultâneo, as diferentes representações dos números racionais⁴. Uma aplicação fácil de usar, gratuita e os alunos podem usá-la no seu telemóvel.

O segundo artigo, O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos⁵ [no slide], de Ana Paula Canavarro, é um artigo que considero muito importante e que tem sido o meu guião de trabalho, no âmbito da álgebra nos primeiros anos. O que é que é importante para os alunos? Saber fazer generalizações e utilizar diferentes representações. Mais uma vez, este é um artigo de uma janela para o conhecimento. Vamos à procura de mais! Não vamos ficar só por aqui! Nesse sentido, apresento dois exemplos de recursos que usei posteriormente. O primeiro exemplo, é um livro *Reconceptualizing Early Mathematics Learning*⁶, que apresenta reflexões, baseadas em investigações, sobre o que é relevante na aprendizagem da matemática nos primeiros anos de escolaridade. O segundo exemplo, são as brochuras publicadas⁷ pelo Ministério da Educação, da região do Ontário, com acesso livre na Internet (figura 1).

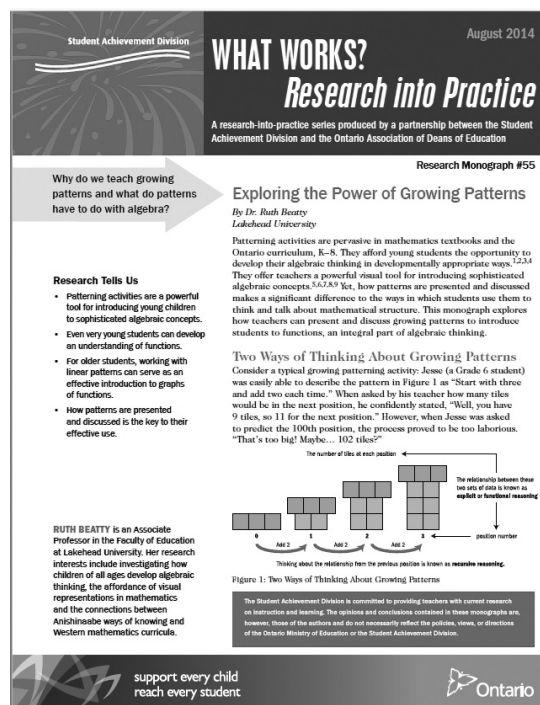


Figura 1. What works? Research into Practice (Ontário)

Como resultado do aprofundamento do meu conhecimento sobre vários aspetos do pensamento algébrico, fui explorando as tarefas com propósitos mais claros e definidos. Por exemplo, constatei que a maioria dos alunos respondia a questões do manual que apresentam sequências figurativas, pois as cores usadas sugerem estratégias de resolução. Pelo contrário, os mesmos alunos não resolviam tarefas semelhantes, em fichas de trabalho ou de avaliação, em que a cor ou sombreado não estava presente. Para ultrapassar esta dificuldade dos alunos, segui as indicações dos recursos que indiquei anteriormente, isto é, incentivei os alunos a pintar as figuras de acordo com o padrão que observavam, a fazer a sua própria exploração numérica. Como exemplo, apresento duas resoluções de uma tarefa que pede aos alunos, do 6.º ano, a escrita da expressão geradora de uma sequência figurativa (figura 2).

1º termo	2º termo	3º termo	
nº do termo	nº de [figura]	nº de [figura]	nº total de [figura]
1	3 = 1 + 2	2 = 2 x 1	3 + 2 = 5
2	5 = 2 + 3	4 = 2 x 2	5 + 4 = 9
3	7 = 3 + 4	6 = 3 x 2	7 + 6 = 13
n	n + 2	n x 2 = 2n	2n + 2n + 1

Figura 2. Resolução da Glória (6.º ano)

3 Rational Numbers Project <http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/>

4 Aplicação do Illumination (NCTM) <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fraction-Models/>

5 Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81-118.

6 livro *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (Advances in Mathematics Education) <https://www.springer.com/gp/book/9789400764392>

7 Brochura *Exploring the Power of Growing Patterns*, uma publicação do governo de Ontário (Canadá) http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/WW_ExploringPower.pdf

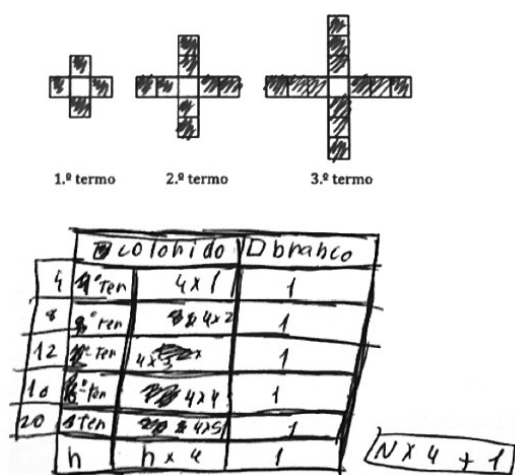


Figura 3. Resolução da Nicole (6.º ano)

As duas alunas revelam o modo como visualizam o padrão, como exploram as regularidades e escrevem uma expressão geradora. Apesar da necessidade de melhorar a escrita algébrica, as alunas revelam compreender o significado da “sua” expressão geradora.

José Tomás Gomes



Comecei a dar aulas em Tondela, em 1976, onde me iniciei nos jornais, nos panfletos.... e o cheiro faz parte dessas coisas. A revista da APM tem o seu cheiro. Se a revista cheira bem ... (risos). Outra coisa é a capa. Há capas de que se gosta mais, outras nem tanto. A explicação que acompanha a capa desperta-me sempre a atenção, ela conta-me a sua história. Depois,... vou à contra capa... consulto a secção dos problemas. E ando por ali a pensar. Dos problemas falarei daqui a pouco.

Ontem, encontrei a Lina e contei-lhe o que estava a pensar dizer-vos hoje aqui. Com um ar sério, ela aconselhou-me a encarar a coisa de uma maneira mais profunda e avisou-me de que iria lá estar mais gente (risos). Então, fui buscar esta

preciosidade (o primeiro número da revista) que tinha lá num baú! Neste primeiro número há muitos temas de que poderíamos falar, mas destaco um artigo, engraçadíssimo, que eu utilizei n vezes na escola, na relação com os pais, como diretor de turma,... vocês devem saber a que me refiro, aquela história da Mafalda que o Henrique vai buscar sobre o que a professora escreveu no caderno... Sabem essa história?

Público: Não. (Risos) Não nos lembramos...

JTG: Para já, era banda desenhada, que é uma coisa que eu acho que a revista perdeu. E o que é que diz o Filipe à Mafalda? “Vê lá o que a professora de Matemática me escreveu no caderno.” E portanto, o que se pedia depois aos miúdos, aos pais, aos professores, etc., era que “conjeturassem” sobre o que a professora teria escrito no caderno do Filipe. Portanto, o Henrique divulga as respostas de um conjunto de alunos. Isto foi assunto de várias revistas e de acesa polémica. Durante vários anos, esta ideia acompanhou-me e esteve na base de muita coisa que fiz.

Passou-me pela cabeça trazer uma carrada de revistas,... mas depois disse...não, vamos controlar esta sede! Trouxe, assim, uma outra revista que marcou o meu percurso profissional enquanto trabalhei na ESE de Lisboa, na formação inicial, particularmente no 1.º ciclo. Foi a revista n.º 40 aquela a que mais vezes recorri. Esta foi, digamos, a minha revista de referência. A que li e reli... Mas a esta aqui (revista n.º 32), achei particular graça,... “A reforma dos programas”! Nos anos 90, tinha deixado o 3.º ciclo e a coisa estava mais ou menos calma,... quando reentrei, em 2011, perguntavam-me “Quantos testes já fizeste?”, “Qual é a média das tuas turmas?”, “Como é que estamos de ranking?”... e eu pensei, “Oh raio!”, os resultados da matemática (batendo com a mão na revista)! Portanto, é uma pressão inacreditável! E vivo indignado porque,... quando hoje me confronto outra vez com o 3.º ciclo, vejo duas coisas: primeiro, o programa é muito parecido com o que eu já dava em 1980 e 90 e depois, ainda tem mais conteúdos! Em 1980 já se dizia “não se consegue cumprir o programa”. Dizíamos isso nestes fóruns. “Como é que a gente faz?”. Hoje, não podemos dizer isso. Cumprimos todos o programa! Não se debate. A escola não debate. Por acaso, achei engraçado que este ano, no *ProfMat*, esta questão tenha estado presente em vários fóruns.

É curioso (mostrando a capa da revista),... é um *ProfMat* em que estão todos jovens (risos), a Cristina Loureiro, a Guilhermina, a Lurdes Serrazina, a Adelina e o Albano. Estas carinhas... (risos).

Público: Foi onde esse *ProfMat*?

JTG: Este foi o *ProfMat* 94 foi ...

Público: ...em Leiria. Qualquer dia fazemos um quiz (risos)!

JTG: Hoje as coisas estão piores. Nós temos de dizer isto aqui (a revista)... dizemos, mas tem de ser mais forte. Quando estamos no terreno a dar aulas, isto é dramático. Sinceramente é dramático...

Para irmos jantar, eu só quero dizer mais uma coisa em relação à revista e aos problemas. Depois destas derivas é preciso ler coisas sérias... então, dedico-me ao editorial.

Em geral, qual é a minha atitude quer em relação à revista, quer em relação à *Quadrante*? É a de uma ave de rapina (risos), é uma atitude de aproveitar as ideias, as propostas e os materiais para a sala de aula, “isto vai-me dar jeito ou não?”.

Vou à última parte da história. Uma das coisas que tenho feito nas escolas é pegar no problema que o José Paulo propõe e levá-lo para a sala de professores. A escola assina a revista, está lá na sala de professores e normalmente até temos espaços mais ou menos formais, outras vezes informais, para conversar sobre o problema. No ano passado, conseguimos (o grupo de professores de Matemática) dar resposta a quase todos os problemas,... enviamos em nome da escola, etc..

Vocês conhecem o perfil dos problemas do Zé Paulo e não são nada de transcendente, são problemas que o comum dos mortais é capaz de resolver, mas de facto, há dificuldades e, por vezes, este diálogo é importante... e para mim o desafio é levarmos isto para partilhar. Esta construção cruza-se com outro trabalho que tenho andado agora a fazer,... é o Polya que apresenta uma lista de uma vintena de problemas com ajudas intermédias. Para mim, a ajuda intermédia é essa conversa que eu tenho com os colegas. Tenho vindo a coligir problemas com ajudas intermédias. A minha ajuda intermédia na resolução de problemas é esta conversa com os colegas ... e, vamos lá conversar para o jantar.

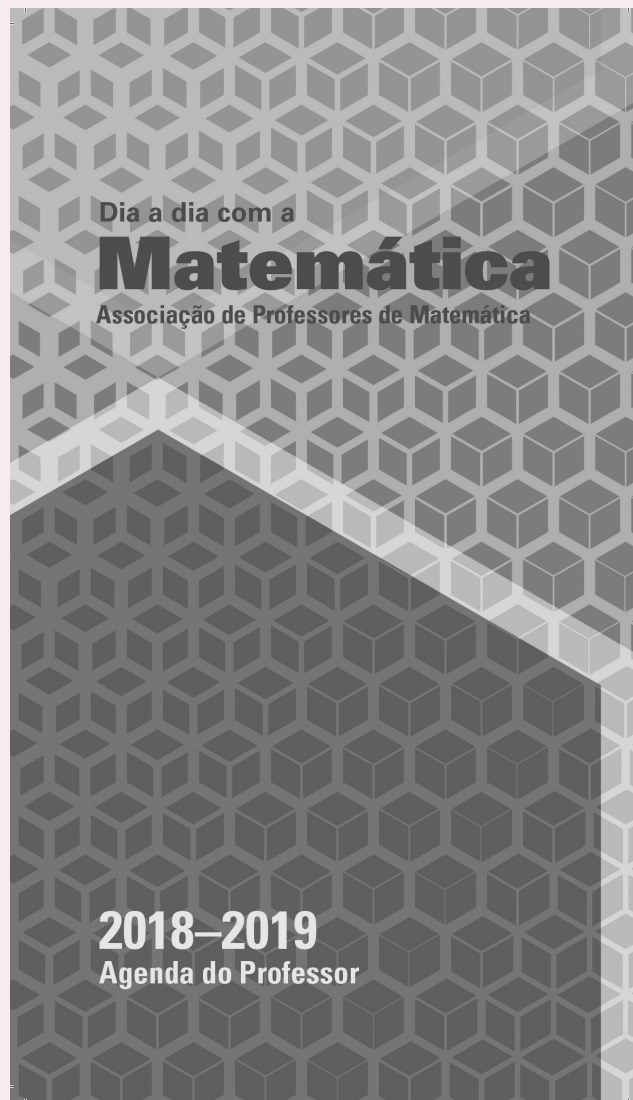
A REDAÇÃO DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

APM - AGENDA DO PROFESSOR 2018-2019

A agenda deste ano teve a colaboração do Núcleo do Algarve na escolha dos desafios mensais.

Preço de capa: 8,50 €

Preço de sócio: 7 €



APM 2018 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

*A Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indiferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um nº de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados individuais têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito

também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista Quadrante.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados terão descontos na requisição de materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos na formação e em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Modalidades de associado individual	Quota
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	Quota
Modalidade I (1 exemplar da E&M)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da E&M)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da E&M+Quadrante)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da E&M+Quadrante)	140,00 €

Assinatura das revistas Educação & Matemática e Quadrante

		Educação & Matemática 3 números + 1 número duplo temático	Quadrante (2 números)
Associado individual	Portugal		15,00€
	Estrangeiro		30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas Educação & Matemática e Quadrante

	Educação & Matemática		Quadrante
	Temática		
Associado	Temática	10,00€	10,00€
	Normal	7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	

Editorial

01 **A insuficiência das mudanças abundantes**

Paulo Correia

Artigos

02 **À descoberta da matemática nos caminhos do linho**

Helena Martins, Fátima Regina Jorge, Fátima Paixão António Pais, Susana Dionísio

05 **Entrevista à MathGurl**

Entrevista (escrita) para a revista *Educação e Matemática*, *Inês Guimarães*

07 **Geoplano ordenado e o estudo das frações**

José Luiz Pastore Mello

15 **Linha de rumo de Pedro Nunes**

Eduardo Veloso

18 **Reportagem - 1.º Campeonato Nacional Multipli em Leiria**

Dina Távares, Eunice Oliveira, Fernando Sebastião, Hugo Menino, Ana la Féria, Rita Teixeira

22 **A aplicação MILAGE APRENDER+, um contributo para a diferenciação pedagógica e aprendizagem autónoma da matemática**

Mauro Figueiredo, Ana Paula Alves, Sílvia Zuzarte, Sónia Barbosa

29 **APS: Alunos Promotores do Sucesso**

Raquel Azevedo, Rui Lemos

34 **Ensino de conceitos básicos de probabilidade por meio de um jogo de dados e da metodologia de resolução de problemas**

João Vítor Teodoro, José Marcos Lopes

45 **Sessão especial do ProfMat 2018: O papel das revistas na vida profissional dos professores**

Redação da Educação e Matemática

Secções

09 **Materiais para a aula de Matemática**

Número racional como quociente, *Adelaide Cosme, Isabel Rocha, Manuela Pires*

11 **Para este número seleccionámos**

Pedro Nunes (1502-1574). Sua vida e obra, por Henrique Leitão, *Henrique Leitão*

14 **Pontos de vista, reacções e ideias ...**

O Binómio discriminante de uma equação de segundo grau com coeficientes inteiros, *David Pires Dias*

20 **O Problema deste número** *José Paulo Viana*

Retas e mais retas

26 **Espaço GTI**

Avaliação de atitudes, valores e comportamentos: uma investigação na formação de professores, *Gabriela Dinis, Cristina Martins*

32 **Caderno de Apontamentos de Geometria** *Cristina Loureiro*

Esferas e aproximações de esferas — definição e definições

37 **Tecnologias na Educação Matemática** *António Domingos*

A tecnologia entre uma tarefa de geometria analítica e a Vesica Piscis, *Susana Carreira e Nélia Amado*

42 **Pontos de Vista, reacções e ideias ...**

Vamos jogar matemática, *Sandra Cristina Mendes da Costa*