

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2018

147

■ Abril ∞ Maio ∞ Junho

Preço 10,00€



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Catarina Delgado
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Filipa Machado
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	João Terroso
	Manuela Pires
	Silvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Junho de 2018

Tiragem 1000 exemplares

Periodicidade

Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

A capa deste número reproduz “Smaller & Smaller”, uma gravação em madeira realizada por um artista notável e original, M.C. Escher, em 1956. Esta obra e cerca de outras 200 deste artista holandês podem ser apreciadas no Museu de Arte Popular até ao próximo mês de novembro. Também, como noticiado na página 2 deste número, a APM tem ativa uma ação de curta duração para professores, relacionada com a exploração didática da exposição “M.C. Escher Arte e Matemática”.

Neste número também colaboraram

Adelina Precatado, Ana Luísa Costa, Beatriz Ribeiro, Bento Cavadas, Cristina Loureiro, Cristina Morais, Direção da APM, Eduardo Veloso, Fátima Mendes, Inês Soares, Joana Conceição, José Paulo Viana, Nelson Mestrinho, Pedro Abrantes, Sandra Nobre, Vitor Duarte Teodoro.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, n.º 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista.apm.dir@gmail.com

Notas

- Por lapso não foi indicada a fonte em que se baseou o guião do Domínio de Autonomia Curricular apresentado na figura 2 da página 4 da revista EM 146. A equipa da redação da EM lamenta o sucedido e informa que este guião teve como base de trabalho o documento “Guião de Atividades 1” disponível em http://apfilosofia.org/wp-content/uploads/2017/12/DAC10_guiao1_mat_fil_FINAL-C%C3%B3pia.pdf.
- Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

Atrás dos tempos vêm tempos e outros tempos não de vir

(Fausto Bordalo Dias)

Fatalidade cíclica da história qual eterno retorno ou avanço em espiral? Círculo vicioso ou hélice que se eleva a cada rotação? Na verdade, a muitos de nós, em relação ao debate sobre o currículo, parece-nos viver um *déjà-vu*, mas certamente temos consciência de que os contextos e os argumentos atuais são diferentes dos subjacentes à reforma curricular do início dos anos 90 do século passado e nas diversas atualizações que se lhe foram seguindo.

Hoje somos conscientes, talvez como antes não o éramos, que há princípios, muitas vezes incompatíveis, que afetam as nossas práticas e as nossas crenças educativas. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), no seu documento *Principles to Actions*¹, enuncia, no próprio subtítulo, um grande objetivo que partilhamos: *assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Este é um princípio forte e uma exigência de justiça inerente às sociedades democráticas.

As dificuldades existentes na aprendizagem matemática de muitos dos nossos alunos refletem-se nos resultados divulgados pela Direção Geral de Estatísticas da Educação em março último relativos aos três anos do 3.º CEB, por disciplina, nos anos 2011/12 a 2015/2016. Conscientes destas dificuldades somos permanentemente desafiados a ultrapassá-las por forma a contrariar os baixos níveis de autoconfiança e autonomia e os sentimentos de desinteresse e de rejeição, que os alunos vão precocemente desenvolvendo em relação à disciplina. Por isso, o desafio, a par da exigência da dignificação da Escola e dos Professores em todas as suas vertentes, é o conseguir chegar a cada aluno para que se possa desenvolver e evoluir enquanto cidadão autónomo e interveniente, sem que a qualidade da Escola e o saber consolidado sejam optativos.

Assim, rejeitamos correntes e orientações sobre o ensino da Matemática subjacentes aos atuais programas do Ensino Básico e de Matemática A, afastadas das exigências da sociedade atual, que sobrevalorizam os aspetos mais formais e abstratos da Matemática, que insistem em conhecimentos factuais e no treino de técnicas e procedimentos, que fragmentam as aprendizagens, que desvalorizam o trabalho com tecnologia e capacidades como a estimação ou a previsão; que induzem abordagens tendencialmente diretivas e expositivas, descontextualizadas e

afastadas da experiência de cada um, da prática e da intuição dos alunos, componentes fundamentais para uma aprendizagem com compreensão e com significado e essenciais para uma educação matemática com relevância.

Também por estas razões, a APM entendeu colaborar no projeto do ME sobre a *Autonomia e flexibilidade curricular* ainda que com críticas substanciais a vários aspetos do processo em curso. Uma das colaborações que estamos a realizar é na definição de *Aprendizagens Essenciais* (AE). Entendemos, nesta definição, que as AE constituem, para cada tema matemático, um todo integrado e articulado de conteúdos, objetivos e práticas de aprendizagem interrelacionados e indissociáveis: os objetivos concretizam as aprendizagens essenciais relativas a cada conteúdo, incidindo sobre conhecimentos, capacidades e atitudes a adquirir e a desenvolver, e as práticas estabelecem condições que apoiam e favorecem a consecução desses objetivos.

Consideramos, no entanto, que enquanto estiverem em vigor programas que consideramos desadequados (Matemática para o Ensino Básico, Matemática A e, por diferentes razões, Matemática B), os atuais normativos curriculares estão longe de se articular entre si, sendo alguns deles até contraditórios, o que constitui uma impossibilidade de se constituírem, como é definido, em matriz concetual de referência. Urge pois corrigir esta situação através de uma alteração urgente dos programas mais desadequados. Defendemos também que as AE devem ser definidas — ou, pelo menos, lidas — por ciclo de escolaridade por forma a facilitar a flexibilidade e articulação curriculares e a sua adequação aos contextos onde se desenvolvem os projetos de escola e de turma.

Defendemos e procuramos orientar-nos para uma educação matemática de excelência para todos. Uma excelência que requer equidade; que requer exigência e expectativas elevadas em relação aos alunos; que requer adaptação às suas idades e adequação aos desafios da sociedade fortemente técnica e tecnológica onde eles já nasceram; que requer, desde o seu início, o foco direcionado para o desenvolvimento de capacidades cognitivas mais complexas que contribuirão para a formação de indivíduos socialmente ativos e pessoalmente realizados, com o saber e o poder de compreender, de analisar, de intervir, de questionar, de criticar, de propor, de mudar e se adaptar às vertiginosas mudanças que o tempo, atrás do tempo, arrasta consigo.

¹ National Council of Teachers of Mathematics, *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*, 2014; versão portuguesa, *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*, APM, 2017.

EXPOSIÇÕES APM

A APM tem onze exposições que podem ser requisitadas, pelas Escolas. Para as conhecer aceda a <http://www.apm.pt/portal/index.php?id=10816> onde encontrará todas as informações necessárias, bem como descrições e imagens dos vários módulos que as constituem, o que permite planejar o trabalho a realizar, a partir delas, na Escola.

Neste momento, a APM tem também duas Ações de Curta duração (ACD), que promovem uma exploração didática de duas das exposições – “M.C. Escher Arte e Matemática” e “Matemática e Natureza”.

M.C. ESCHER ARTE E MATEMÁTICA



A ACD “M.C. Escher Arte e Matemática” pretende apoiar os professores na exploração desta exposição valorizando aspetos matemáticos do trabalho de Escher, sugerindo e exemplificando formas de o fazer em sala de aula.

A exposição da Associação de professores de Matemática, “M.C. Escher, Arte e Matemática”, incide sobre os conceitos matemáticos explorados por M.C. Escher, um conceituado artista holandês. É transversal a todos os ciclos de ensino e um bom instrumento

para explorar as ligações da Arte com a Matemática, nomeadamente a exploração de alguns conteúdos dos programas do ensino básico como as pavimentações (1.º ciclo) e as transformações geométricas (2.º e 3.º ciclos). Permite explorar conceitos geométricos de forma criativa, contribuir para o desenvolvimento do sentido espacial, nomeadamente as capacidades de orientação no plano e no espaço, de visualização e de estabelecer relações espaciais.

MATEMÁTICA E NATUREZA

A ACD “Matemática e Natureza” pretende apoiar os professores na exploração desta exposição. São apresentadas situações desafiantes, para os vários níveis de ensino, que podem complementar o trabalho de sala de aula.

Visitar esta exposição, pode ser uma oportunidade de despertar nos alunos interesse por diferentes campos da matemática e de outras áreas científicas, de trabalhar conceitos em contexto, de

consolidar algumas aprendizagens.

Propõe-se assim explorar conteúdos curriculares do ensino básico ou secundário, como por exemplo: sequências, cálculo mental, classificação de polígonos, poliedros regulares, planificações de poliedros, perímetros e áreas, problemas de optimização... e ainda problemas em aberto na matemática ou resolvidos recentemente, adequando-os ao público presente.



Para uma bibliografia comentada de livros infantis “com matemática”

FÁTIMA MENDES
ANA LUÍSA COSTA

1. O INÍCIO – HISTÓRIAS INFANTIS

Contactar desde muito cedo com o livro e a leitura é um forte preditor de sucesso no desenvolvimento de leitores motivados e proficientes (Sim-Sim, Silva & Nunes, 2008). Por esse motivo, o recurso à leitura de histórias infantis em contexto de jardim de infância e de 1.º ciclo é bastante utilizado por educadores e professores, podendo estes, hoje em dia, consultar portais como a Casa da Leitura¹ e o Plano Nacional de Leitura² que incluem listas bibliográficas para diversos públicos, de modo a selecionar obras adequadas às crianças com quem trabalham. Paralelamente, professores e investigadores têm reconhecido o contributo da literatura infantil para o desenvolvimento do pensamento matemático (Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2012). Algumas características particulares de livros infantis, em particular, dos designados por *mathematical picture books*, que se traduz neste artigo como *livros ilustrados infantis com matemática*, são especialmente interessantes para desenvolver competências de forma articulada no jardim de infância e no 1.º ciclo. A interpretação oral ou escrita de uma narrativa pode ser trabalhada em paralelo com a exploração de ideias matemáticas e neste artigo discutimos alguns critérios de seleção de livros de histórias que, para além de proporcionarem o desenvolvimento da fruição pela leitura, pretendem, também, o desenvolvimento de competências de matemática e de português. Apresentamos ainda uma proposta de bibliografia comentada de livros infantis cujas características possibilitam a construção de tarefas que permitem uma articulação entre estas duas áreas curriculares.

2. LIVROS COM MATEMÁTICA – DE QUE SE TRATA?

Quando falamos de livros “com matemática” estamos a referir-nos a que tipo de livros? Há diferentes categorizações associadas a livros infantis que podem ser úteis quando queremos fazer uma escolha consciente dos livros a trabalhar com as crianças do jardim de infância ou do 1.º ciclo.

A propósito da caracterização e seleção de livros ilustrados de histórias infantis (*picture books*), van den Heuvel-Panhuizen e

Elia (2012) desenvolveram um quadro de referência que inclui como descritores de análise: a relevância das ideias matemáticas neles incorporadas, a possibilidade de se poderem estabelecer conexões, a sua adequação às crianças a que se destinam, a possibilidade de as envolverem e o seu poder na promoção de processos matemáticos.

A expressão *picture book*, que traduzimos por *livro ilustrado infantil*, surge nos trabalhos desenvolvidos pelos autores mencionados anteriormente para designar um livro que contém texto e imagens, sendo caracterizado por Marston (2014) como um livro apropriado para crianças pequenas, que inclui texto e mensagens visuais. É uma narrativa simples que deve ser lida em voz alta e partilhada entre um adulto e uma criança ou um grupo de crianças. Nestes livros, tanto o texto como as imagens são essenciais para a sua compreensão e, no momento de contar a história, é fundamental a relação entre o texto e as imagens, potenciando esta a perceção dos conceitos e processos matemáticos subjacentes.

Ainda assim, o modo como a matemática está explícita ou implícita na história assume contornos muito diferentes. Uma das categorizações mais acessível é a proposta por Marston (2014), que considera que o conteúdo matemático associado aos livros ilustrados infantis com matemática pode ser de três tipos:

- **conteúdo percecionado:** livros de literatura infantil nos quais se pode perceber a ocorrência não intencional de conteúdos matemáticos – estes livros têm, fundamentalmente, objetivos de fruição literária;
- **conteúdo explícito:** livros escritos com referências explícitas a conteúdos matemáticos; incluem-se entre estes os livros para ‘contar’;
- **conteúdo incorporado:** livros escritos com finalidades de fruição literária, mas incluindo, de forma intencional, ideias matemáticas.

Na tabela 1, apresentamos alguns exemplos de publicações classificadas segundo as características do seu conteúdo matemático.

1 <http://www.casadaleitura.org/>

2 <http://www.planonacionaldeleitura.gov.pt/index1.php>

Tabela 1. Exemplos de livros segundo o tipo de conteúdo matemático (Costa & Mendes, 2017)

Livros infantis com conteúdo perçecionado	Agualusa, José Eduardo (texto) & Cayatte, Henrique (ilustrações) (2005). <i>A girafa que comia estrelas</i> . Alfragide: Publicações Dom Quixote.
	Grejniec, Michael (texto e ilustrações) (2015). <i>A que sabe a lua?</i> (Honrado, Alexandre Trad.). Matosinhos: Kalandraka.
Livros infantis com conteúdo explícito	Carvalho, Dorindo (texto e ilustrações) (2006). <i>As brincadeiras do quadrado e do círculo</i> . Lisboa: Instituto Piaget.
	Galloway, Fhiona (texto e ilustrações) (2015). <i>10 Ursinhos</i> . Porto: Civilização Editora.
Livros infantis com conteúdo incorporado	Mejuto, Eva (texto) & Mora, Sergio (ilustrações) (2015). <i>A casa da mosca fosca</i> . (Dora Isabel Batalim, Trad.). Matosinhos: Kalandraka.
	Castro Neves, Manuela (texto) & Matoso, Madalena (ilustrações) (2012). <i>Uma cadela amarela & vários amigos dela</i> . Lisboa: Caminho.

Embora se possa trabalhar com todo o tipo de livros de modo a proporcionar às crianças aprendizagens de matemática e de português, parecem-nos especialmente interessantes os livros com conteúdo matemático incorporado, uma vez que contam uma história que inclui, propositadamente, aspetos matemáticos. Atualmente, em Portugal, já existem muitos livros deste tipo e que podem, por isso, constituir excelentes recursos para trabalhar articuladamente aspetos da matemática e do português, para além de oferecerem bons momentos de leitura (ou de ouvir ler). Na secção 4 apresentamos alguns desses livros mas, antes disso, fundamentamos por que consideramos que este tipo de livros é igualmente essencial para potenciar aprendizagens do português.

3. LIVROS COM MATEMÁTICA E APRENDIZAGENS EM PORTUGUÊS

Embora nos últimos anos se tenha verificado uma crescente tendência para planificar de forma separada os momentos de aprendizagem do português e da matemática, não há evidências de que esta atomização de conhecimentos e competências resulte numa melhoria do processo de ensino-aprendizagem. Uma perspetiva integradora dos diferentes domínios curriculares, ao contrário, traz várias vantagens, algumas suportadas por argumentos de natureza linguística.

Ao longo da fase de escolarização, muitos aspetos do desenvolvimento linguístico tardio estão em curso. O domínio de estruturas linguísticas e de léxico menos comum nos registos de língua familiares depende do envolvimento em contextos discursivos progressivamente mais complexos. A este propósito, Nippold (2004, p. 5) defende que “a educação proporciona à criança em idade escolar a exposição necessária a palavras complexas e pouco frequentes, a expressões multiléxicas e a estruturas sintáticas. Isto acontece quando os alunos leem ou

ouvem discurso complexo.” De uma forma geral, o envolvimento em atividades que implicam tarefas matemáticas complexas constituiu uma oportunidade de participar em contextos discursivos escolares promotores de desenvolvimento linguístico. De forma mais específica, ler livros com matemática permite associar aprendizagens da matemática ao desenvolvimento de diferentes processos de compreensão. Se ler, para lá da decifração, é fundamentalmente compreender, todos os momentos de leitura em que as crianças ouvem ler ou leem autonomamente devem convocar o treino de diferentes tipos de compreensão, o que pode ser feito através perguntas de compreensão literal, inferencial e crítica (Català et al., 2013). Frequentemente, as tarefas escolares em torno da leitura centram-se em perguntas de compreensão literal, solicitando informação que está explícita no texto, como a identificação das personagens. Contudo, a leitura de tipo inferencial, como a interpretação de linguagem figurativa, implica capacidades cognitivas e metacognitivas transversais a muitas tarefas escolares mais complexas. A leitura de livros com matemática está estreitamente associada ao aprofundamento da compreensão inferencial, ou seja, da compreensão que requer um raciocínio lógico para interpretar a informação implícita no texto. Compreender o conteúdo matemático de alguns livros requer inferir uma mensagem que precisa de capacidades matemáticas para ser interpretada. Finalmente, compreender criticamente um texto requer a capacidade de a criança se posicionar perante dilemas ou formular juízos relativamente a personagens, situações ou temas. Muitos livros com matemática convocam igualmente este tipo de compreensão.

4. LIVROS COM MATEMÁTICA – ALGUNS EXEMPLOS DE LIVROS INFANTIS COM CONTEÚDO INCORPORADO

Ligando a ideia de lista bibliográfica de apoio às aprendizagens à assunção de uma articulação entre a literatura e a matemática, apresentamos uma lista de livros infantis com conteúdo matemático incorporado (Marston, 2014) a partir dos quais podem ser trabalhados diferentes conceitos e processos. Considerando a vasta oferta de livros infantis hoje em dia, é fundamental que o educador e o professor tenham à sua disposição critérios de seleção que o ajudem a efetuar escolhas criteriosas dos livros a trabalhar com as suas crianças. Na tabela 2, para além da referência dos livros, explicitamos possíveis aprendizagens de matemática e de português de crianças do jardim de infância e do 1.º ciclo a partir da exploração das histórias infantis sugeridas. Esta lista não deve ser considerada exaustiva, mas uma bibliografia de referência, necessariamente incompleta, que inclui alguns títulos que podem ser úteis a educadores e a professores quando planificam atividades integradoras ou projetos associados a estas duas áreas curriculares. É de realçar que a maior parte dos livros identificados, senão todos, faz parte da lista do Plano Nacional de Leitura.

Tabela 2. Lista bibliográfica comentada (Costa & Mendes, 2017)

Livros infantis com conteúdo matemático incorporado	Aprendizagens de matemática	Aprendizagens de língua
Carle, Eric (2015). <i>A lagartinha muito comilona</i> . (Ana Aires & Isabelle Buratti, Trad.). Matosinhos: Kalandraka.	Sentido de número - Contagem progressiva e regressiva (1 a 10); representação de um número (linguagem natural); cardinal de um conjunto; numeral ordinal Medida (Tempo) - Sequências de acontecimentos; unidades de medida de tempo (dia, semana); dias da semana; relações entre as diferentes unidades de medida de tempo (dias e semana).	Compreensão oral e/ou Leitura - Tipos de compreensão (literal, inferencial) Consciência linguística - Consciência lexical³ (expressões partitivas, como <i>uma fatia de um bocado de, uma rodela de, um pedaço de</i>; adjetivos qualificativos); alargamento do vocabulário (palavras do campo lexical de fruta e do campo lexical de comida; nomes das cores, nomes dos dias da semana); consciência sintático-semântica (conectores temporais; valor do conector <i>mas</i>).
Soares, Luísa Ducla (texto) & Pedro Leitão (ilustrações) (2001). <i>Todos no sofá</i> . Lisboa: Livros Horizonte.	Sentido de número - Contagem regressiva (de 10 a 1); representação de um número (linguagem natural); cardinal de um conjunto; numeral ordinal. Sentido espacial - Perceção figura-fundo; posição relativa de figuras no plano (uso de vocabulário apropriado: à esquerda, à direita, em cima, em baixo, atrás, à frente, entre).	Compreensão oral e/ou Leitura - Tipos de compreensão (global, literal) Consciência linguística - Consciência silábica e intrassilábica (sílabas e rimas na versificação); consciência sintático-semântica (conectores espaciais)
Mejuto, Eva (texto) & Sergio Mora (ilustrações) (2015). <i>A casa da mosca fosca</i> . (Dora Isabel Batalim, Trad.) Matosinhos: Kalandraka.	Sentido de número - Contagem progressiva e regressiva (números de 1 a 8); representações de um número (linguagem natural e simbólica); cardinal de um conjunto; numeral ordinal Sentido espacial - Perceção figura-fundo; posição relativa de figuras no plano (uso de vocabulário apropriado: à esquerda, à direita, em cima, em baixo, atrás, à frente, entre).	Compreensão oral e/ou Leitura - Tipos de compreensão (literal, inferencial, crítica) Consciência linguística - Consciência fonológica (silábica e intrassilábica); consciência lexical (manipulação de quantificadores numerais e de adjetivos numerais, bem como de adjetivos qualificativos); alargamento do vocabulário (numerais ordinais); consciência sintático-semântica (conectores espaciais).
Neves, Manuela Castro (texto) & Maria Bouza (ilustrações) (2015). <i>Cinco pais natais e tudo o mais</i> . Lisboa: Máquina de voar.	Sentido de número - Representação de um número (linguagem natural); cardinal de um conjunto. Número e operações - Múltiplos de 5; resolução de problemas numéricos.	Compreensão oral e/ou Leitura - Tipos de compreensão (literal, inferencial, crítica) Consciência linguística - Consciência fonológica (rimas) - Consciência sintático-semântica (conectores espaciais)
Neves, Manuela Castro (texto) & Madalena Matoso (ilustrações) (2012). <i>Uma cadela amarela & vários amigos dela</i> . Lisboa: Caminho.	Sentido de número - Contagem progressiva e regressiva (números de 1 a 10); representações de um numeral; cardinal de um conjunto, numeral ordinal. Número e operações - Resolução de problemas numéricos Sentido espacial - Perceção figura-fundo; posição relativa de figuras no plano (uso de vocabulário apropriado: à esquerda, à direita, em cima, em baixo, atrás, à frente, entre).	Compreensão oral e/ou Leitura - Tipos de compreensão (literal, inferencial, crítica) Consciência linguística - Consciência fonológica (silábica e intrassilábica); consciência lexical (quantificadores, adjetivos numerais, nomes de animais, nomes de falas de animais, verbos de elocução); consciência sintático-semântica (conectores espaciais)
Alexis Tolstoi (texto) & Niamh Sharkey (ilustrações) (2013). <i>O nabo gigante</i> . (Susana Andrade, Trad.). Lisboa: Livros Horizonte.	Sentido de número - Contagem progressiva e regressiva; diferentes representações de um número (linguagem natural e simbólica); cardinal de um conjunto; numeral ordinal. Sentido espacial - Perceção figura-fundo; posição relativa de figuras no plano (uso de vocabulário apropriado: à esquerda, à direita, em cima, em baixo, atrás, à frente, entre).	Compreensão oral e/ou Leitura - Tipos de compreensão (literal, inferencial, crítica) Consciência linguística - Consciência lexical (adjetivos qualificativos); alargamento do vocabulário (nomes dos dias da semana e das estações do ano); consciência sintático-semântica (conectores temporais e espaciais; valor do conector <i>mas</i> e do conector <i>então</i>).

3 Adota-se o conceito de “consciência lexical” proposto em Duarte (2011).

Livros infantis com conteúdo matemático incorporado	Aprendizagens de matemática	Aprendizagens de língua
Neves, Manuela Castro (texto) & Yara Kono (ilustrações) (2013). <i>Tantos animais e outras lengalengas de contar</i> . Lisboa: Planeta Tangerina.	Sentido de número - Contagem progressiva e regressiva (inclui o zero); representações de um número; cardinal de um conjunto; numeral ordinal; regularidades numéricas (pares, ímpares, dobros, metades, múltiplos e divisores) Número e operações - Resolução de problemas numéricos (adição, subtração, multiplicação e divisão) Sentido espacial - Percepção figura-fundo, posição relativa de figuras no plano (uso de vocabulário apropriado: à esquerda, à direita, em cima, em baixo, atrás, à frente, entre); figuras geométricas (quadrado, triângulo) Medida - Relação unidade de medida/comprimento.	Compreensão oral e/ou Leitura - Tipos de compreensão (literal, inferencial, crítica) Consciência linguística - Consciência fonológica (fonémica, silábica e intrassilábica), associada a aspetos da versificação; consciência lexical, associada aos campos semânticos de cada texto Escrita - Relações entre fonemas e a sua representação gráfica
Garilli, Alessia (texto) & Miguel Tanco (ilustrações) (2005). <i>200 amigos (ou mais) para 1 vaca</i> . (Manuela Pessoa, Trad.) Lisboa: Livros Horizonte.	Número e operações Representações de um número (linguagem natural e simbólica); cardinal de um conjunto; numeral ordinal; dobro e metade de um número natural; potências de 2; resolução de problemas de subtração, multiplicação e divisão.	Compreensão oral e/ou Leitura - Tipos de compreensão (inferencial, de reorganização, crítica); estrutura e elementos da narrativa. Consciência linguística - Consciência lexical (verbos de introdução de discurso direto, como <i>exclamar, comentar, perguntar, retorquir...</i>)
Fromental, Jean-Luc (texto) & Jolivet, Joëlle (ilustrações) (2013). <i>365 Pinguins</i> . (Maria Afonso, Trad.). Lisboa: Orfeu Negro.	Medida Tempo - Sequências de acontecimentos; unidades de medida de tempo (hora, dia, semana, mês e ano); relações entre as diferentes unidades de medida de tempo. Dinheiro e massa - Resolução de problemas envolvendo dinheiro e unidades de medida de massa. Número e operações - Representações de um número (pictóricas e simbólicas); cardinal de um conjunto; numeral ordinal; operação multiplicação e propriedades; disposição retangular e a três dimensões; resolução de problemas de multiplicação; regularidades numéricas e geométricas.	Compreensão oral e/ou Leitura - Tipos de compreensão (literal, inferencial, crítica) Consciência linguística - Consciência silábica (palavras que rimam); consciência sintático-semântica (conectores temporais) Escrita - Representação gráfica de diálogos (sinais de pontuação).

Uma tabela como a anterior não deve relegar para segundo plano o prazer de ouvir contar ou ler uma história, nem se pode correr o risco de esta constituir apenas o pretexto para aprendizagens linguísticas ou matemáticas. De facto, o que se pretende é identificar, partindo de cada uma das histórias, aspetos das Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (OCEPE) e dos Programas destas duas disciplinas que podem ser trabalhados, proporcionando, ao mesmo tempo, aprendizagem e fruição da história.

Importa ainda destacar que as aprendizagens da matemática e da língua listadas na tabela 2 não podem ser entendidas como conteúdos declarativos a ser ensinados e aprendidos explicitamente. Numa perspetiva curricular integradora, as aprendizagens vão sendo construídas a partir das descobertas das crianças. Nos pontos seguintes indicamos alguns exemplos de tarefas para crianças do pré-escolar e do 1.º ano, concretizando a partir da obra *Uma cadela amarela & vários amigos dela*, de Manuela Castro Neves.

5. UMA CADELA AMARELA & VÁRIOS AMIGOS DELA – EXEMPLOS DE TAREFAS

Este livro constitui um contexto particular de aprendizagens numéricas para crianças do pré-escolar e do início da escolaridade e consiste numa narrativa em verso, na qual dez animais diferentes vão chegando, um atrás do outro e, no final, vão visitar um golfinho recém-nascido. A sua estrutura textual é baseada numa estrutura numérica: cada animal, amigo da cadela, vai aparecendo, um a um e em cada página o número de animais é sempre mais um do que na página anterior, até perfazer 10 animais. Nessa altura, há uma alteração na estrutura narrativa e as personagens entram todas numa caravela, uma a uma, para irem ao encontro do golfinho recém-nascido e da sua mãe. No final da história, saem todos da caravela, novamente um a um, deixando marcas das suas patas na areia da praia.

A estrutura narrativa do livro, baseada na construção dos primeiros números naturais, torna-o muito interessante para ser usado no desenvolvimento das primeiras aprendizagens

numéricas e de competências linguísticas. Também as ilustrações, página a página, vão acompanhando o desenrolar da narrativa em verso, permitindo, a cada momento, a contagem dos animais que já estão com a cadela (numa das páginas) e aos quais se junta sempre mais um outro (na outra página) (Figura 2).

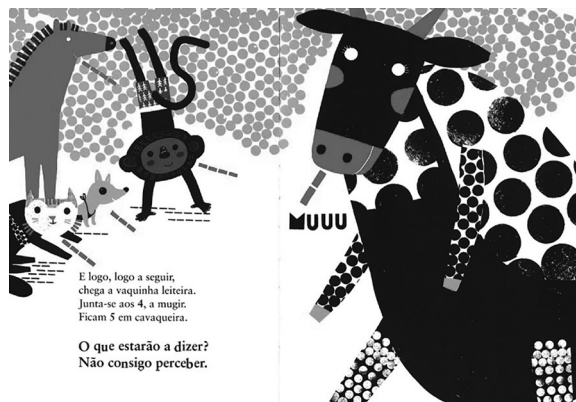


Figura 1. Exemplo de duas páginas do livro *Uma cadela amarela & vários amigos dela*

Considerando como público-alvo as crianças dos 3 aos 7 anos, há um conjunto de intencionalidades que podem estar subjacentes ao trabalho a realizar. No que se refere à área da matemática, tal como explicitado na tabela 2, pode ser promovido o desenvolvimento de ideias e conceitos numéricos, de aspetos associados ao sentido espacial e à organização e interpretação de dados. No que se refere ao português, a tabela 2 também identifica um conjunto de aprendizagens que podem ser desenvolvidas com a realização de atividades em torno desta obra.

Antes de ouvir a história, a partir da capa e do título, podem ser colocadas questões para antecipar as personagens amigas da cadela e explorar o sentido do quantificador *vários*.

Durante a audição da história, podem ser realizadas diferentes tarefas relacionadas com a matemática e o português, tais como:

- enfatizar a leitura dramatizada das vozes de animais e dos verbos de elocução usados no texto;
- antecipar o número seguinte de amigos da cadela;
- descobrir as diferentes representações simbólicas de cada número (impressas no texto e imersas nas imagens). Ver, por exemplo, na imagem da figura 2, a cauda do macaco enrolada de modo a formar o número 5);
- contar as imagens dos diferentes animais em cada dupla página (desde o 1 ou a partir do número anterior) e perceber que, por exemplo, 5 é 4+1 (Figura 1);
- propor a contagem regressiva dos animais à medida que saem do barco (do 10 até ao 0).



Figura 2. Últimas páginas do livro *Uma cadela amarela & vários amigos dela*

Depois de ouvir a história, podem ainda ser realizadas muitas outras atividades, tais como:

- confirmar a lista de amigos da cadela, retomando as hipóteses colocadas antes de ler;
- brincar com algumas rimas;
- resolver o problema do número de patas que ficaram no areal, depois de os animais partirem, no final da história (Figura 3);
- sugerir a observação e a descrição das diferentes imagens que acompanham cada dupla página da história, usando vocabulário apropriado;
- propor a identificação de, por exemplo, uma estrela do mar num fundo complexo com diversas figuras;
- contar a visita ao golfinho, assumindo a perspetiva de uma das personagens;
- representar a fala de animais;
- escolher o animal preferido e explicar porquê;
- identificar/votar o animal preferido das crianças da sala (organizar dados);
- estimar o número possível de votos do vencedor;
- estimar o número total de votos;
- organizar a informação sobre o animal preferido das crianças numa tabela ou gráfico (pictograma, gráfico de barras);
- interpretar a informação organizada numa tabela ou gráfico: identificar o animal mais votado, o menos votado, o que não foi votado, o número de votos em cada um, comparar diferentes números de votos identificando o maior e o menor...

Numa sala de um jardim de infância, depois de ouvirem ler o livro, as crianças realizaram atividades associadas à identificação do animal preferido, de entre a cadela amarela e os seus amigos. Depois de lançada a tarefa, as crianças escolheram, de entre um vasto conjunto de cartões com as figuras dos animais, espalhados no chão, um cartão com o seu animal preferido. Em seguida, foi orientada uma discussão para perceber como se poderia saber qual tinha sido o animal mais escolhido pelas crianças. Depois de uma discussão animada, com muitas sugestões das crianças –

juntar os cartões, contá-los, organizá-los – a educadora propõe a realização de um gráfico (pictograma). Rapidamente as crianças começam a colaborar na sua construção, não manifestando grandes dificuldades (Figura 3).



Figura 3. Uma criança coloca o seu cartão no pictograma

Depois do pictograma construído (Figura 4), as crianças são capazes de analisar criticamente a informação organizada e de elaborar afirmações sobre esta, identificando o animal mais escolhido, o menos escolhido, os que não foram escolhidos e comparando o número de votos obtidos por dois dos animais mais escolhidos (cadela e gatinha). Nas suas intervenções orais foi possível identificar o uso de expressões complexas, ao nível do português, que provavelmente surgiram porque as crianças estavam envolvidas em raciocínios matemáticos que tiveram de explicitar e justificar.

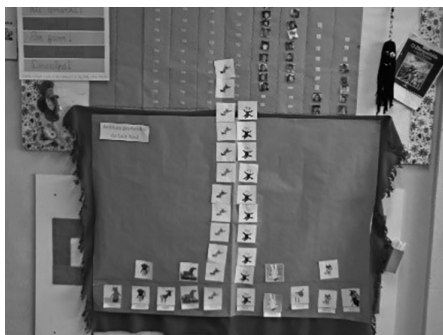


Figura 4. Pictograma sobre o animal preferido

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos outros exemplos de tarefas podem ser propostos a partir da leitura de histórias infantis com matemática. O que queremos realçar é que ouvir ler histórias e, mais tarde, ler histórias com estas características são excelentes itinerários de aprendizagem que promovem o desenvolvimento integrado de competências de matemática e de português, rompendo com a lógica dos saberes compartimentados. Aprender o prazer da leitura e,

simultaneamente, aprofundar saberes específicos através de aprendizagens com sentido são propósitos transversais do trabalho que pode ser realizado em torno de livros ilustrados infantis com matemática.

A lista de livros e os exemplos de tarefas apresentados apontam, de forma integrada, caminhos de aprendizagem que promovem:

- o interesse e a curiosidade pela matemática;
- a construção de significados matemáticos;
- a compreensão de processos matemáticos (comunicação, representação, conexões, resolução de problemas e raciocínio);
- a compreensão de ideias e conceitos matemáticos;
- o prazer pela leitura;
- o treino da compreensão literal, inferencial e crítica;
- a consciência linguística (fonológica, lexical, sintática).

Considerando que, atualmente, há uma grande oferta de livros infantis com matemática, esta lista comentada poderá sempre ser ampliada e revista, tanto pelo aparecimento de novos livros como pela experimentação de práticas educativas, do jardim de infância ao 1.º ciclo do Ensino Básico.

Referências

- Català, G., Català, M., Molina, E. & Monclús, R. (2013). *Evaluación de la comprensión lectora. Pruebas ACL (1.º - 6.º de primaria)*. 8.ª Edição. Espanha: Editorial GRAÓ.
- Costa, A. & Mendes, F. (2017). Leitura e matemática em diálogo. In AA.VV. *Língua e literatura na escola do século XXI. Atas do 12.º Encontro Nacional da Associação de Professores de Português*. Lisboa: APP [CD].
- Duarte, I. (2011). *O conhecimento da língua: desenvolver a consciência lexical*. Lisboa: PNEP. DGIDC. ME.
- Marston, J. (2014). Identifying and using picture books with quality mathematical content. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 19(1), 14-23.
- Nippold, M. (2004). Research on Later Language Development. In Berman, R. (ed.). *Language development across childhood and adolescence*. Amsterdam, Philadelphia: John Benjamins, pp. 1-8.
- Sim-Sim, I., Silva, A. & Nunes, C. (2008). *Linguagem e comunicação no jardim-de-infância*. Lisboa: ME. DGIDC.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Elia, H. (2012). Developing a framework for the evaluation of picture books that support kindergartners' learning of mathematics. *Research in Mathematics Education*, 14 (1), 17-47.

FÁTIMA MENDES

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE SETÚBAL

ANA LUÍSA COSTA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE SETÚBAL

O Estado da Educação 2016: breves notas

PEDRO ABRANTES

Desde 2010 que o Conselho Nacional de Educação tem vindo a publicar sucessivas edições do *Estado da Educação*, oferecendo-nos uma visão atualizada e de conjunto sobre o sistema educativo português, complementada por alguns aprofundamentos temáticos.

A última edição, divulgada em Dezembro de 2017, compila dados essencialmente de 2015 e 2016, analisando as evoluções face aos anos anteriores. Na leitura deste relatório devemos, portanto, começar por distinguir estas duas dimensões.

Num primeiro plano, temos então a atualização de um olhar panorâmico e quantitativo sobre as grandes tendências do sistema educativo português, em termos de rede escolar (capítulo 2), taxas de escolarização nos diferentes níveis e modalidades educativas (capítulo 3), corpo docente (capítulo 4) e financiamento (capítulo 5).

A este propósito, a edição mais recente apresenta poucas novidades, o que aliás era expectável tendo em conta que se centra, sobretudo, em tendências de ciclo longo, além de que 2015 e 2016 representaram, sobretudo, anos de transição.

Assim sendo, por um lado, o relatório espelha ainda um quadro de contração do sistema, sobretudo associado à redução acentuada das taxas de natalidade e a um saldo migratório negativo, durante os anos da crise económica, bem como às políticas de austeridade que, sobretudo em 2012 e 2013, produziram um corte brutal e súbito dos recursos alocados à educação.

Embora seja importante não menosprezar que estes processos têm efeitos prolongados no sistema educativo, por exemplo, ao nível da redução do número de crianças e jovens, bem como ao nível da deterioração dos equipamentos e do envelhecimento do corpo docente, que se irão fazer sentir ainda por alguns anos, também será precipitado não atender ao facto de, em 2015 e 2016, já se ter assistido a uma certa estabilização e até crescimento moderado – não apenas no plano económico, mas também no plano educativo – que, sabemos hoje, se acentuou em 2017, pelo que devemos também desconfiar das previsões mais catastrofistas para o futuro que se baseiam em tendências lineares e, pelo contrário, preparar-nos para que o sistema irá voltar a crescer, com necessidades de acolher mais alunos e

também mais professores e outros profissionais, dentro de poucos anos.

As políticas não são, obviamente, neutras a este propósito. Medidas como a universalização do pré-escolar, a promoção do sucesso escolar e a revitalização da educação de adultos, implicam uma expansão do sistema educativo que, de alguma forma, veio já reequilibrar o efeito de contração provocado pela crise demográfica e pelas políticas de austeridade.

Por outro lado, o relatório vem confirmar o processo continuado, ao longo dos últimos quinze anos, de redução do abandono precoce da educação e formação, bem como de aumento progressivo das taxas de escolarização e qualificação da população portuguesa, mas que foi concomitante com taxas persistentemente elevadas de insucesso escolar, logo a partir do 2.º ano de escolaridade e alcançando os seus valores máximos na disciplina de Matemática.

Nada de novo, portanto, ainda que valha a pena atender a dois aspetos sublinhados no relatório, com base nos dados recolhidos pela Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência: a forte correlação com as condições socioeconómicas das famílias dos alunos e o carácter acumulativo da retenção. Por outras palavras, a larga maioria dos alunos que reprova vive em contextos desfavorecidos, tem classificações negativas a Matemática e volta a ter avaliação negativa a esta disciplina, no ano seguinte a ficar retido, o que atesta bem o fracasso da retenção enquanto medida de recuperação dos alunos.

Estas constatações têm conduzido a medidas governamentais de grande dimensão, tanto ao nível da promoção do sucesso escolar como da orientação, flexibilidade e autonomia curriculares, tomadas de forma necessariamente participada, planeada e faseada. Será, portanto, interessante analisar os seus expectáveis impactos crescentes, nas próximas edições destes reportes estatísticos.

Num segundo plano, temos a dimensão não menos interessante dos aprofundamentos temáticos. A este propósito, o *Estado da Educação 2016* dá especial atenção – até pelo posicionamento logo no capítulo inaugural do relatório – ao trabalho coordenado pelo próprio Conselho Nacional de Educação de exploração de

bases de dados internacionais, produzidas no âmbito de grandes estudos sobre as competências dos alunos realizados em 2015, nomeadamente, o PISA e o TIMSS.

Esta análise inclui uma grande bateria de indicadores, dos quais será de destacar a melhoria progressiva dos resultados obtidos pelos estudantes portugueses, entre 2000 e 2015, mas também o forte impacto (claramente acima das médias europeias) das condições socioeconómicas da família nos resultados dos alunos e, sobretudo, nas probabilidades de ser retido. Esta comparação internacional inclui também alguns aspetos relativos às condições e práticas docentes, assinalando, por exemplo, que em 2015 os professores portugueses privilegiavam ainda o modelo de aulas expositivas, mais do que na maioria dos países europeus, não existindo diferenças significativas em função do grupo etário dos professores. Este dado está, aliás, em linha com a constatação de que formação dos professores em Portugal era ainda escassa, em áreas como avaliação, pensamento crítico, TIC e alunos com NEE, mantendo um enfoque primordial nos currículos e conteúdos disciplinares.

De referir ainda que, na última parte, o *Estado da Educação 2016*

inclui onze pequenos capítulos de especialistas convidados. Não sendo possível abordar agora os onze estudos – cada um deles merecedor de uma síntese igual à que se procurou elaborar para todo o relatório, até pela diversidade e riqueza das abordagens – destaque, pela sua capacidade de sistematização, a análise do universo das teses de doutoramento defendidas em Portugal, na área das Ciências da Educação, ao longo dos últimos trinta anos, por parte de Norberto Ribeiro e Isabel Menezes.

Sem trazer grandes novidades, o *Estado da Educação 2016* não deixa, portanto, de compilar um enorme volume de informação dispersa para compor um retrato panorâmico do sistema, muito útil para todos aqueles que dedicam a vida à educação, em Portugal, compreendermos o contexto em que vivemos e discutirmos o sentido da nossa ação.

PEDRO ABRANTES

UNIVERSIDADE ABERTA, CIES-IUL. ATUALMENTE, EM COMISSÃO DE SERVIÇO, COMO TÉCNICO ESPECIALISTA DO GABINETE DO MINISTRO DA EDUCAÇÃO.

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Explorando o livro “365 pinguins”

As tarefas apresentadas têm como contexto o livro “365 pinguins”, um livro com conteúdo matemático incorporado (ver artigo *Para uma bibliografia comentada de livros infantis “com matemática”* desta revista). O livro conta a história de uma família a casa de quem, no primeiro dia do ano, chega uma encomenda surpresa: um pinguim! Na manhã seguinte, uma nova encomenda – mais um pinguim! Os dias vão-se passando e, em cada um, chega uma encomenda com mais um pinguim. Surge então um grande problema – o que fazer com tantos pinguins? Este é o mote para algumas propostas que envolvem vários desafios numéricos que vão sendo colocados ao longo da história, sendo essencial para a sua compreensão a interação entre o texto escrito e as imagens.

Do ponto de vista matemático a história é um bom contexto para resolver problemas numéricos envolvendo, sobretudo, as operações multiplicação e divisão e tirando partido das imagens sugestivas que acompanham o texto. Permite, também, explorar sequências de acontecimentos e as relações entre as diferentes unidades de medida de tempo (dia, semana, mês e ano).

As tarefas apresentadas destinam-se ao 3.º ano de escolaridade e foram exploradas no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Realça-se que as tarefas vão sendo propostas à medida que a história se desenrola e não todas de uma vez.

FÁTIMA MENDES, BEATRIZ RIBEIRO e INÊS SOARES

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE SETÚBAL

Problemas sobre o livro “365 pinguins”

Resolve os problemas e regista todos os cálculos que efetuares.
Explica por palavras tuas o modo como pensaste para resolver cada um deles.

1. Quantos pinguins arrumou o pai?

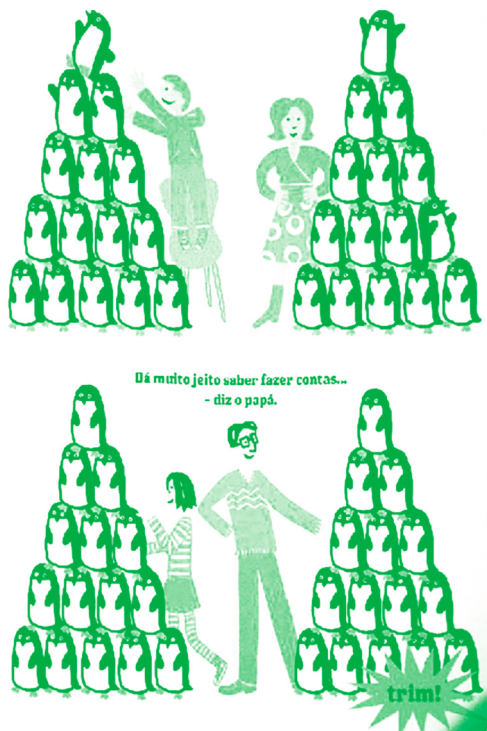


Figura 1. Adaptada da página 13 de “365 pinguins”

2. Aproximadamente, ao fim de quanto tempo isto aconteceu?
Em que dia o pai fez esta arrumação?

3. Será possível arrumar os 60 pinguins em 9 caixas, ficando o mesmo número de pinguins em cada uma?

4. Quando já tinha 120 pinguins, o pai resolveu arramá-los novamente em caixas. Se couberem 8 pinguins em cada uma, de quantas caixas precisará o pai?

5 – Alguns meses depois, quantos pinguins arrumou a mãe?

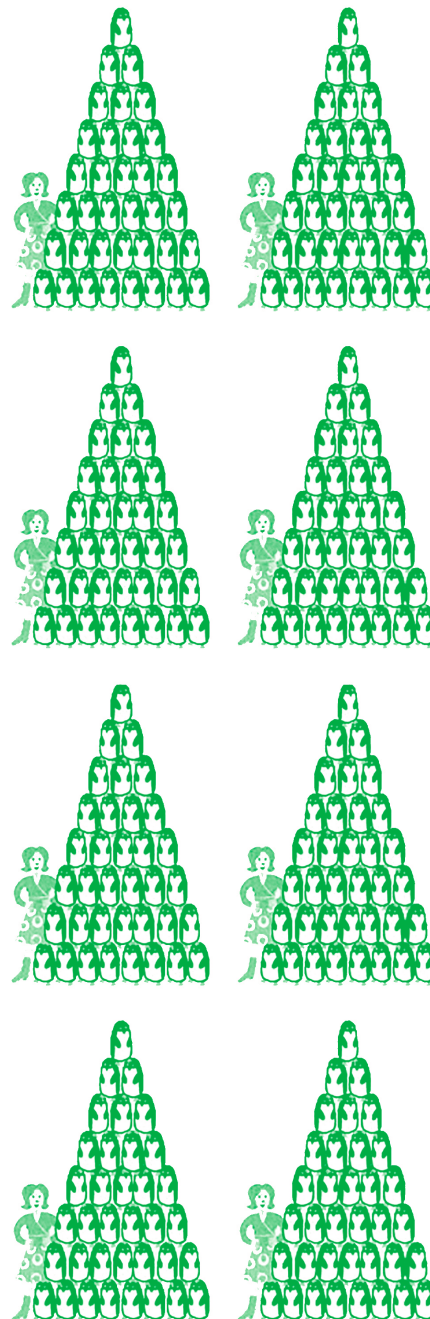
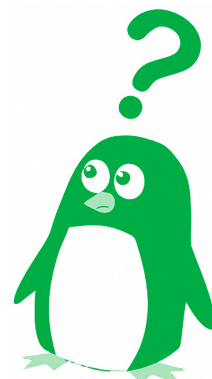


Figura 2. Adaptada de “365 pinguins”



Projectão Estereográfica

EDUARDO VELOSO

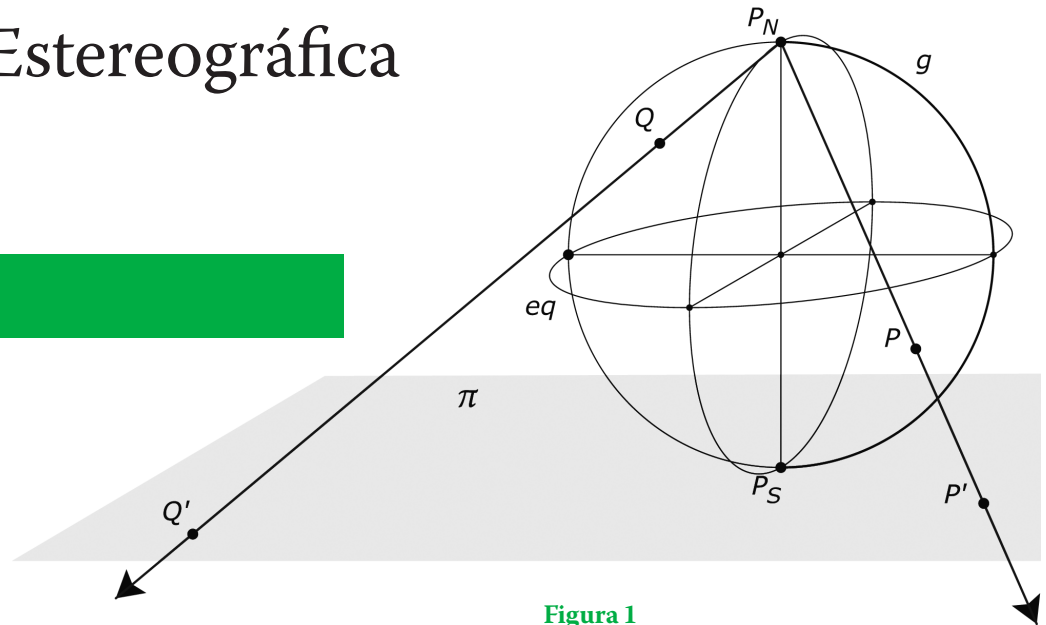


Figura 1

Este artigo é o segundo de uma série de três dizendo respeito à *linha de rumo* (mais tarde apelidada *curva loxodrómica*) de Pedro Nunes. No número anterior (146) da revista publicámos o primeiro artigo da série, intitulado *Geometria Descritiva e Perspectiva Cavaleira*. O presente artigo trata da projecção estereográfica, uma transformação geométrica que nos permitirá visualizar sobre a esfera terrestre a linha de rumo de um modo intuitivo e perfeitamente acessível aos alunos de matemática do ensino secundário, desde que estejam habituados a utilizar *software* de geometria dinâmica, o que nos tempos actuais deveria ser já totalmente corrente.

PROJECCÃO ESTEREOGRÁFICA

Iremos apresentar de modo breve esta transformação geométrica, mas a informação disponível *online* é imensa. Em particular, a *Associação Atractor* inclui no seu magnífico *website* informação sobre a curva loxodrómica e sobre a projecção estereográfica.¹

Imagine uma esfera, dois pontos A e B diametralmente opostos sobre a superfície da esfera, e o plano π tangente à esfera no ponto B . A projecção estereográfica é definida em toda a superfície da esfera, com excepção do ponto A , e faz corresponder a cada ponto P a intersecção P' da semi-recta AP com o plano π .

Tendo em atenção que a esfera, nestes artigos, será sempre a esfera terrestre, tomaremos para A e B os pólos norte e sul, P_N e P_S , e π será o plano tangente à Terra no pólo sul. Assim sendo, a projecção estereográfica é a transformação geométrica $P \rightarrow P'$, em que P é um ponto da esfera terrestre distinto de P_N e P' é a intersecção da semi-recta $P_N P$ com o plano π (fig. 1).

A projecção estereográfica está definida em toda a superfície esférica excepto no ponto P_N . A sua inversa está definida no plano π .

O que nos propomos apresentar neste artigo são as construções a fazer para obter, a partir de um ponto P , o ponto P' , e reciprocamente.

No artigo anterior, vimos como era possível obter, dada a representação da esfera em geometria descritiva, ou sejam as *vistas de cima e de frente*, a chamada *perspectiva cavaleira*, uma visualização mais apelativa mas na qual as propriedades das figuras estão, por assim dizer, escondidas... Por exemplo, o equador não é uma elipse, como “parece ser” na fig. 1, mas uma circunferência...

Neste artigo, iremos enunciar e resolver um conjunto de problemas de construção relativos à projecção estereográfica e à sua inversa, e resolvê-los recorrendo à representação nas *vistas* e/ou em *perspectiva cavaleira*.

Os problemas de construção são interessantes e o leitor deve tentar resolvê-los recorrendo ao programa de *geometria dinâmica* que utiliza habitualmente. No apoio *online* deste artigo² encontrará detalhes de todos os procedimentos utilizados e pequenos vídeos que ajudarão a compreender situações menos claras.

No terceiro artigo desta série, veremos como uma propriedade característica da projecção estereográfica e da sua inversa – o facto de conservarem os ângulos – reduz o problema de traçar uma linha de rumo sobre a esfera a encontrar a transformada, pela inversa da projecção estereográfica, de uma curva bem conhecida no plano: a *espiral equiangular* (que foi tema de um artigo anterior no número 142 da *Educação e Matemática*).

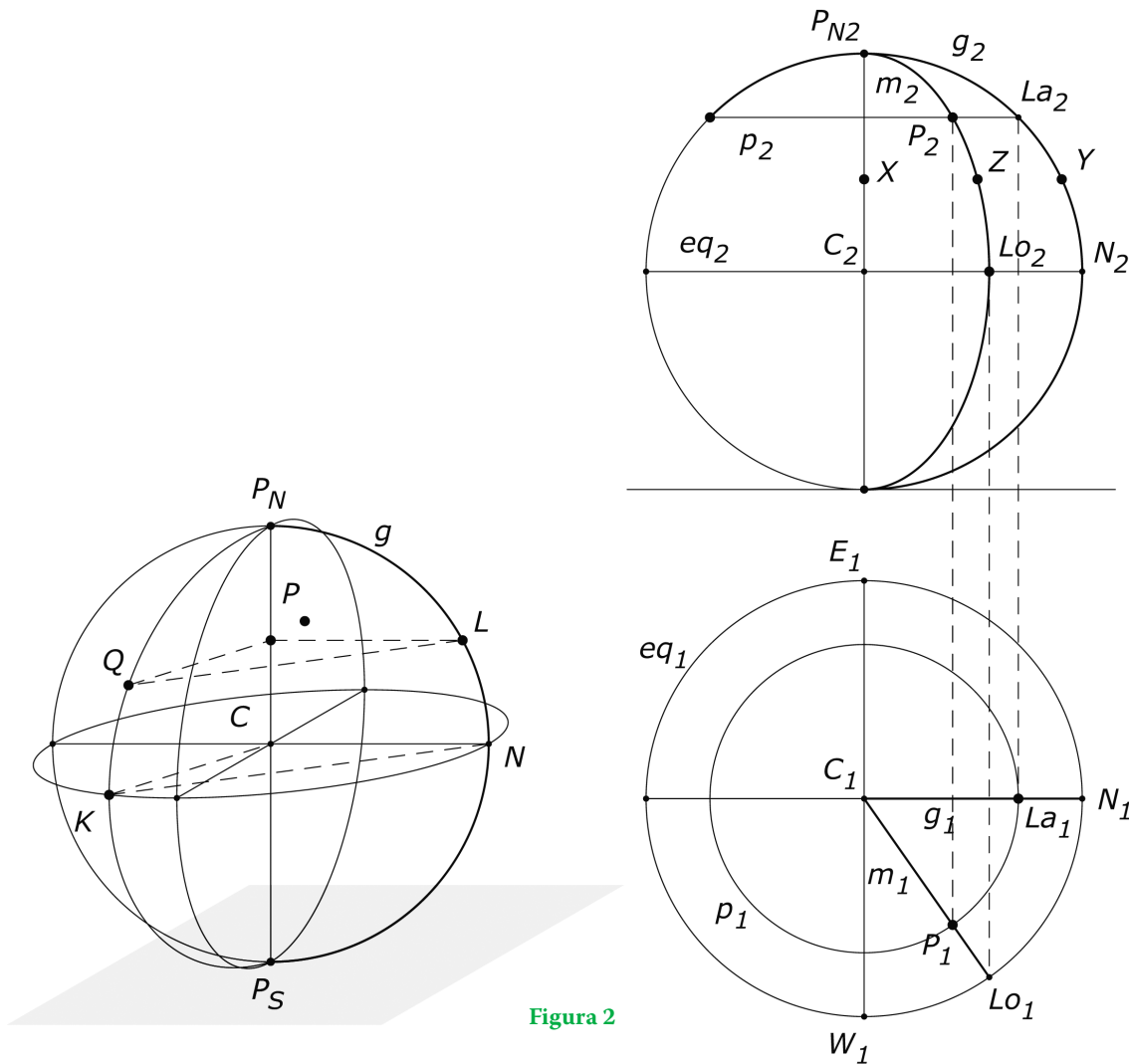


Figura 2

I. Representar, nas vistas e na perspectiva, um ponto P dado pelas suas coordenadas geográficas (fig. 2).

Seja P um ponto sobre a Terra com as coordenadas ($lat=45^\circ$, $long=55^\circ W$), N o ponto do meridiano de Greenwich de latitude 0 e procuremos traçar o paralelo e o meridiano onde P está situado. Seja La_2 o resultado da rotação do ponto N_2 , de centro em C_2 e ângulo $+45^\circ$, e Lo_1 o resultado da rotação do ponto N_1 , de centro em C_1 e ângulo -55° (*longitudes oeste — e latitudes sul — são negativas*). Completamos a figura com os pontos La_1 e Lo_2 . Tracemos o paralelo p (p_1p_2). O segmento $m_1=C_1Lo_1$ é a vista de cima m_1 do meridiano que contém P . Portanto podemos obter P_1 como intersecção de p_1 com m_1 . Naturalmente, P_2 será a intersecção de p_2 com m_2 .

A curva m_2 , representada na figura, parece ser uma semi-elipse. Na realidade, assim é, pois trata-se da vista de frente de uma semi-circunferência (o meridiano que passa por Lo). Como construir essa semi-elipse? Nós conhecemos um ponto, Lo_2 e a semi-elipse é o resultado do alongamento (eixo P_NP_S e razão C_2Lo_2/C_2N_2) da semi-circunferência g_2 — vista de frente do meridiano de Greenwich.

Recorrendo a um *software* de geometria dinâmica, esta construção é quase imediata (mais detalhes *online*). Assim, nas vistas, o ponto P fica determinado, como pretendíamos. A construção do ponto P na perspectiva cavaleira é imediata, a partir das suas vistas e recorrendo à ferramenta *cavaleira*³. Como na perspectiva cavaleira o equador é representado por uma elipse, não é possível obter de modo imediato o meridiano de P , por meio de uma rotação do valor da longitude. Mas, se quisermos definir um ponto Q sobre a esfera, trabalhar *apenas na perspectiva* e abdicarmos de partir de um valor numérico das coordenadas, o processo pode ser o seguinte:

- considere um ponto L sobre o meridiano de Greenwich, definindo uma latitude;
- considere ainda um outro ponto sobre o equador, K , definindo uma longitude, embora não numericamente;
- por meio de uma construção simples — a *tracjado na figura* — e de um *software* de geometria dinâmica, obtenha os correspondentes meridiano e paralelo, e a sua intersecção, o ponto Q .

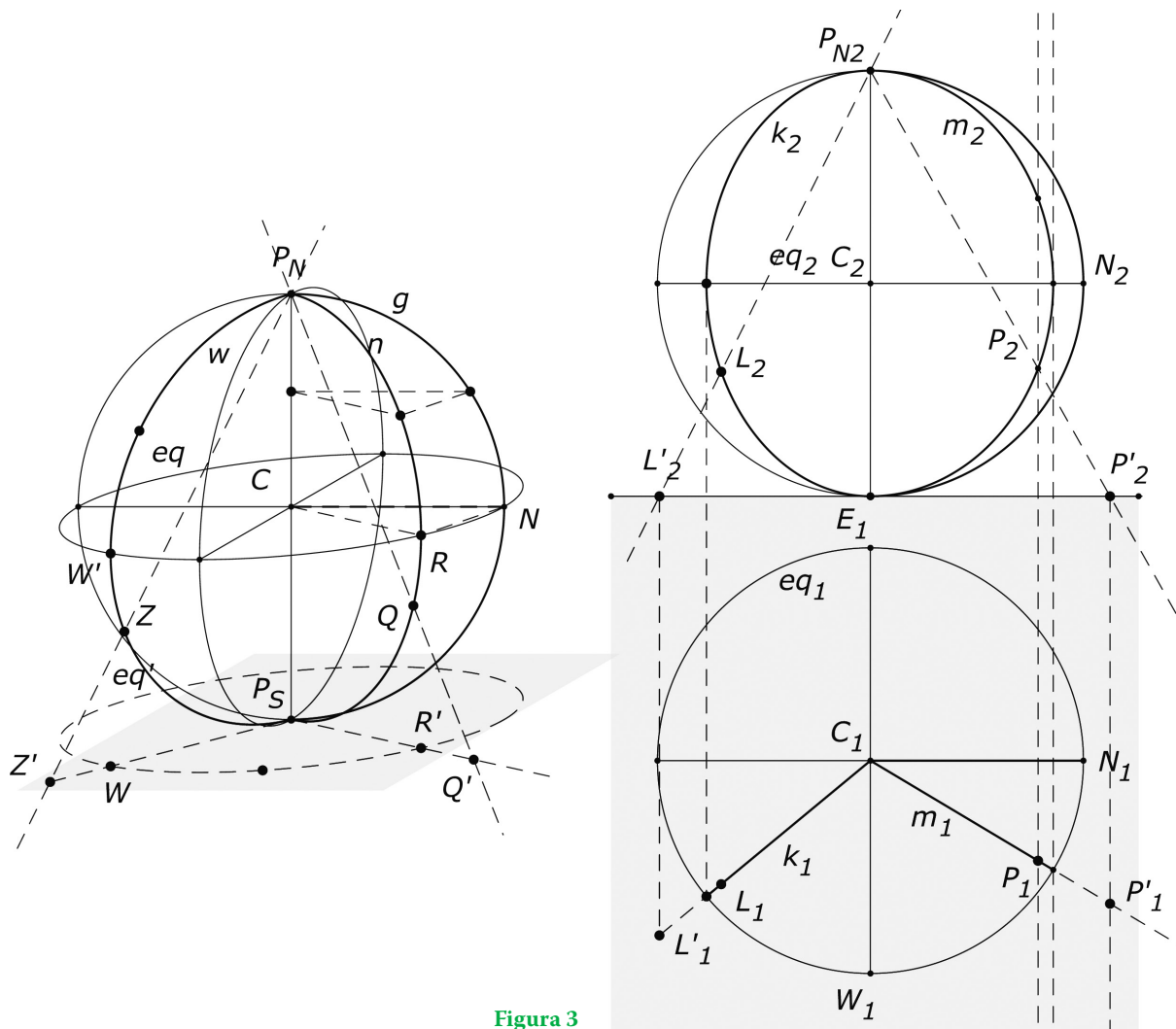


Figura 3

II. Dado um ponto P sobre a esfera, nas vistas, construir a sua projecção estereográfica P' (fig. 3).

Imagine o leitor como, dado a vista de cima P_1 de um ponto P , suposto sobre a esfera, poderá determinar o meridiano m que contém P e depois escolher uma das duas hipóteses para P_2 , como fizemos na fig. 3. A partir daí, a construção de P' (P'_1 , P'_2) é óbvia.

III. Dado um ponto Q sobre a esfera, na perspectiva, construir a sua projecção estereográfica Q' (fig. 3).

Tal como no problema I, pode construir um ponto Q sobre a esfera, na perspectiva, e obter ao mesmo tempo o meridiano de Q , seja n . Fazemos a translação (vector CP_S) do ponto R , intersecção do meridiano n com o equador, obtendo R' . O ponto Q' é a intersecção da semi-recta $P_N Q$ com a semi-recta $P_S R'$.

IV. Dado um ponto L' (L'_1 , L'_2) no plano tangente no P_S , nas vistas, obter a imagem L (L_1 , L_2) pela inversa da projecção estereográfica (fig. 3).

Determina-se, tal como em casos anteriores, o meridiano k cujo plano contém o ponto L' . A intersecção do segmento $L'_2 P_N$ com k_2 determina o ponto L requerido.

V. Dado um ponto Z' no plano tangente no P_S , na perspectiva, obter a imagem Z pela inversa da projecção estereográfica (fig. 3).

Efectuamos a translação, de vector CP_S , do equador, obtendo eq' , e depois determinamos a intersecção W de $Z' P_S$ com eq' . Efectuamos a translação, de vector $P_S C$, de W , obtendo o ponto W' . Como anteriormente, construímos o meridiano, seja w , passando por W' . A intersecção da recta $Z' P_N$ com w será a imagem Z requerida.

PROPRIEDADES DA PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Recomendamos de novo que o leitor recorra à rica informação que poderá encontrar *online* sobre esta importante transformação geométrica⁴. Neste ponto iremos referir duas propriedades fundamentais desta transformação:

- 1) a projecção estereográfica transforma circunferências em circunferências;
- 2) a projecção estereográfica é conforme, ou seja, conserva os ângulos.

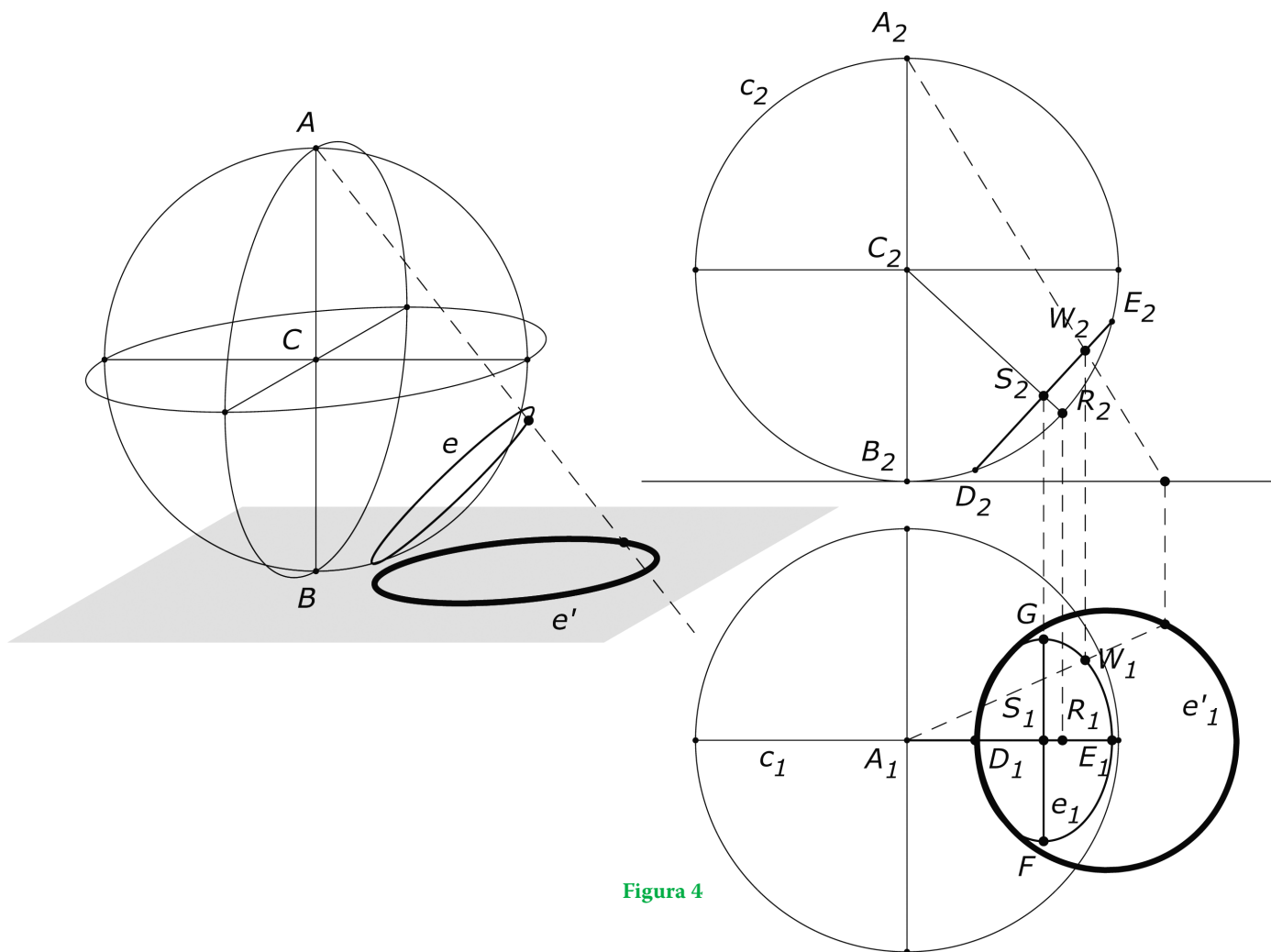


Figura 4

Demonstrações relativamente elementares destes resultados estão incluídas no texto que referenciamos na nota 4. A segunda propriedade referida será o ponto de partida fundamental para o traçado da linha de rumo de Pedro Nunes, que abordaremos no terceiro artigo desta série. Quanto à propriedade da transformação de circunferências em circunferências, iremos tentar uma “constatação experimental”, no fundo um pretexto para mais algum trabalho em geometria descritiva elementar. Uma animação que poderá ver num video, online, será bastante mais convincente.

Seja então dada (nas vistas da geometria descritiva) uma esfera (terrestre ou não...). Sejam A e B os “pólos”, C o centro, R um ponto qualquer da circunferência c (c_1 , c_2) (fig. 4). A esfera é tangente ao plano horizontal de projecção no ponto B .

Seja S um ponto do raio CR e consideremos o plano passando por S e perpendicular ao raio CR . A intersecção do plano com a esfera será uma circunferência que na vista de frente é projectada no segmento D_2E_2 e na vista de cima é projectada numa elipse de eixo menor D_1E_1 e eixo maior FG de medida igual a D_2E_2 .

A projecção estereográfica no plano tangente em B pode ver-se a cheio na vista de cima e *parece* realmente uma circunferência.

Notas

1. O endereço do *website* da Associação Atractor é www.atractor.pt. Procure a curva loxodrómica nos *Temas Matemáticos*. Para uma apresentação mais completa da projecção estereográfica, recorra a um bom tratado de geometria, como Coxeter, H.S.M. *Introduction to Geometry*. J. Wiley & Sons, 1969, New York.
2. https://www.eduardoveloso.pt/geom_textos
3. A ferramenta *cavaleira*, que foi descrita no artigo anterior e para a qual existe *online* um vídeo explicativo, foi gerada para o *Geometer's Sketchpad*. Se o leitor utiliza outro programa, deverá existir um modo de produzir uma ferramenta equivalente.
4. Um texto de Bill Casselman, da University of British Columbia (cass@math.ubc.ca) intitulado *Essays on automorphic forms-Stereographic projection* está disponível online <https://www.math.ubc.ca/~cass/research/pdf/Stereographic.pdf>.

EDUARDO VELOSO

Flexibilidade e Autonomia?

sem tempo..., sem confiança..., restam os exames...

Temos, em debate público (que estará terminado quando este ponto de vista for publicado), uma proposta de despacho que anuncia a vontade de mudar a escola no sentido do encontro com as competências do séc. XXI, definidas no perfil do aluno à saída do secundário. Um dos aspetos “valorizados” para atingir estas competências é o trabalho de Projeto.

Se olharmos um pouco para trás, se folhearmos as revistas Educação e Matemática (EM), encontramos tantos projetos e experiências apresentados em ProfMats e encontros, vividos por alunos e professores, desenvolvidos em tantas escolas. Recordo aqui, apenas alguns documentos/ações/projetos marcantes:

- **O Seminário de Milfontes, 1988, e o documento “Renovação do Currículo de Matemática”**, um documento importante e fundamental no debate sobre as mudanças que se desejavam para os programas, para as práticas,... ainda hoje tão atuais;
- **O Projeto Mat789**, desenvolvido pelo Paulo Abrantes, Eduardo Veloso, Leonor Cunha Leal, Margarida Oliveira e Paula Teixeira (1990), pela sua importância na valorização do trabalho de projeto e pelo papel influenciador que teve a sua divulgação.

Mas eu sou professora numa escola secundária, que não estando na experiência piloto da flexibilidade, tem refletido sobre ela e que também tem desenvolvido e continua a desenvolver muitos projetos em diversas áreas, mais disciplinares ou mais interdisciplinares, alguns continuados no tempo outros que vão surgindo em cada momento, por iniciativas diversas...

A título de exemplo deixo: O Laboratório de História, um projeto já com história, que conta com a colaboração do IHC da Universidade Nova e onde a História tem sido descoberta, investigada e divulgada pelos alunos envolvidos; O Ler para Viver um projeto também continuado, na área da Literatura; O Camusicando, também regular e que conta com o saber artístico/musical da comunidade escolar; A Filosofia Plural - um projeto de integração de alunos que não falam Português ou as assembleias de turma - uma forma encontrada para que os alunos, eles próprios, participem, critiquem, sugiram, uma forma de dar voz aos alunos - e muitos outros, mais pontualmente também em Matemática.

Poderia estar a concluir que a minha escola já faz tanta coisa (como aliás tantas outras escolas), que vamos na direção da flexibilidade e autonomia, mas Não! Na realidade estamos muito longe da escola que desejamos. A opinião generalizada na minha escola é bastante crítica em relação a diversos aspetos

relacionados com o Projeto de Flexibilidade e Autonomia, tal como está a ser pensado e anunciado. Há um conjunto de questões que tem que ter respostas claras, sem as quais não haverá nem autonomia, nem flexibilidade, nem escola pública valorizada... nem uma escola para todos, que prepare cidadãos críticos, livres, responsáveis, preparados para os desafios do século XXI. É preciso construir um caminho, com coerência... Refiro-me, sobretudo, a alguns aspetos:

1. Programas e Metas (especialmente de Matemática)

Não há aprendizagens essenciais que resistam aos atuais programas e metas. Porque não iniciámos mais cedo um processo para a elaboração de novos programas que darão origem a novas aprendizagens essenciais? ou porque não suspendemos os atuais programas de Matemática, quando tantos o defenderam?

Tal como Eduardo Veloso e o Paulo Abrantes tantas vezes referiram, e que é incluído no Currículo Nacional de 2001: **“A razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural, associada ao facto de a matemática constituir uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de aceder ao conhecimento”** (p. 58). Mas, em vez disto, a Matemática é cada vez mais uma disciplina elitista e seletiva..., desde os primeiros anos, por isso temos que perguntar: **Vamos ou não alterar os programas de Matemática?**

2. O Tempo e a Confiança nos Professores e nas escolas?

Não basta dizer que “o papel dos professores é importante”, que tem que responder às mudanças, utilizar estratégias promotoras de melhores aprendizagens, ter em conta a diversidade e heterogeneidade dos alunos, valorizar projetos, etc... mas para isso nada se lhes dá, a não ser os princípios vindos de cima, as lições teóricas sem aplicabilidade, ...

É preciso TEMPO, para inovar, para mudar, para criar, para se envolver nos projetos, para colaborar, para alterar a sala de aula e a escola, para ir a um ProfMat... ONDE ESTÁ ESSE TEMPO?

Onde está a confiança nos professores? Quando tudo é decidido, de cima para baixo, sem os ouvir...

Vou mesmo mais longe, **onde estão os professores? E, em especial, os professores de Matemática?** Pois todos sabemos que tantos abandonaram o ensino mais cedo sem passarem o seu testemunho porque deixaram de acreditar..., tantos estão exaustos, tantos já “deram aulas” em tantas escolas, em tantos

lugares, durante tanto tempo e Não são PROFESSORES!!!!

Onde estão os PROFESSORES NOVOS? Não existem!!! Estão nos centros de explicações!? Dedicaram-se a outras coisas?! Por vontade própria? Acredito que em muitos casos Não!

SÃO PRECISOS PROFESSORES. Recordo que hoje já há falta real de professores de Matemática, Inglês, Informática...

Que flexibilidade e Autonomia existe, quando tudo é decidido e autorizado hierarquicamente, numa lógica que continua com a Gestão (não democrática) das escolas? Quando tudo tem que ser autorizado: turmas com menos um aluno que o previsto, a criação de um curso novo, o desdobramento de uma turma, a constituição de um grupo particular, tutorias ou coadjuvâncias... e tudo tem que ser feito sem aumentar o número de professores.

3. Avaliação Externa e Acesso ao Ensino Superior

Não é possível conciliar uma educação obrigatória, para todos, em situação de justiça e igualdade, mantendo um acesso ao ensino superior, elitista e direi mesmo, não honesto...

Não há autonomia e Flexibilidade sem alteração dos exames e do acesso ao ensino superior. É fundamental desligar o fim do secundário dos exames nacionais e do acesso ao ensino superior. É urgente discutir seriamente este assunto.

Os alunos do Ensino Profissional (quase 50%) não estão em igualdade de circunstâncias no acesso e continuarão a não ficar (com o diploma em debate público) quando se lhes aumenta a componente de formação em contexto de trabalho e se lhes pede que, para terem acesso ao ensino superior, façam exames sobre matérias que nunca trabalharam.

Aconselham-se os professores a avaliarem de forma diferente, acusam-nos de valorizarem muito os testes, mas olhemos para as centenas (SIM CENTENAS!!!) de páginas de regulamentos, normas, circulares, relativas a exames e provas de aferição (publicadas na página do JNE e IAVE), a falarem sobre as ditas provas, a dizerem se o aluno se sente aqui ou ali, se veste um colete ou..., se o professor é da escola ou de outra escola, se as mesas são assim ou..., e, como se confia muito nos professores, por exemplo os júris das línguas, a partir deste ano, têm que ser constituídos por professores de outra escola.

Não estou só a falar no secundário, estou a falar também nas provas de aferição do básico, de alunos com 7 anos?! Que sentido fazem estas inovações? A nossa sorte é mesmo nem sequer termos tempo de ler todos estes regulamentos!

E volto a citar o Paulo Abrantes: **“Temos que saber para onde queremos caminhar. Se a nossa grande meta é o exame, então pensemos nas consequências. O exame torna-se o objetivo, o que vem para exame o programa, o ensino da matéria para exame o método - como escreveu Freudenthal há mais de 20 anos”** (1996, p. 1).

Relativamente ao ensino da Matemática, escrevi também em 2004, num momento de retrocesso... **“Foram-se os**

desdobramentos e a tecnologia... e ficaram os exames” (Precatado, 2004, p. 44), referia-me ao retrocesso vivido na altura relativamente à criação de Laboratórios de Matemática nas escolas, à possibilidade de desdobramento de aulas, à utilização de tecnologia nomeadamente computadores, ao uso de programas de geometria dinâmica, etc. A verdade é que hoje estamos ainda mais longe – temos exames com dois cadernos, um com calculadora e outro sem, com a única justificação apresentada publicamente nas reuniões de avaliação e exames – a calculadora é um acumulador de informação, enviesa o processo, mas nas aulas deve estar...

Em suma, sem alterações nos programas de Matemática, sem tempo, sem confiança nas escolas e professores, sem gestão democrática nas escolas e sem avaliar se os agrupamentos de escolas valeram ou não a pena, sem alterações no acesso ao Ensino Superior e também nos exames e provas de aferição não há nem Flexibilidade nem Autonomia... por mais interessantes que sejam os exemplos de projetos que vão sendo desenvolvidos na minha ou em tantas outras escolas, eles não passarão disso mesmo, exemplos!

Apesar de tudo e de haver escolas e professores a fazerem o impossível, na minha perspetiva, a escola pública está a degradar-se, os professores a desanimarem... e até a desaparecerem...

Alguns dirão, não é possível fazer tudo ao mesmo tempo! É verdade...

Mas com este projeto de “Autonomia e Flexibilidade de 0% a 25%” não vamos longe!

Bento de Jesus Caraça sonhava, quando, em 1944, referia, no texto *A Matemática na Vida dos Homens*, que “... a orgulhosa rainha das ciências, até aqui rainha distante, encerrada num Mont-Salvat mal abordável, tende a tornar-se uma companheira democratizada e querida de todos nós” (p. 295). A verdade é que estamos em 2018, demos passos em frente mas também muitos atrás e estamos muito longe desta Matemática vista como “companheira democratizada e querida de todos nós”.

E então o que vamos fazer?

Resta fazermo-nos ouvir e, no que à Matemática diz respeito, é preciso exigir que novos programas sejam construídos e que sejam criadas as condições para a sua aplicação.

Referências

- Abrantes, P. (1996). Os “bons velhos tempos” são velhos mas não eram bons. *Educação e Matemática*, 39, 1.
- Caraças, B. J. (1978). *Conferências e outros escritos*. Editora: J M C Editor.
- Precatado, A. (2004). Foram-se os desdobramentos e a tecnologia e ... ficaram os exames?!. *Educação e Matemática* 80, 44-45.

ADELINA PRECATADO

ESCOLA SECUNDÁRIA DE CAMÕES, LISBOA

Avaliar para as aprendizagens – Um caminho que se faz avaliando

CRISTINA LOUREIRO

Este texto apresenta algumas reflexões sobre avaliação e planificação, tendo como base resoluções de tarefas de alunos cuja professora frequentou uma ação de formação de integração de matemática e português no 1.º ciclo. A temática da ação é “Avaliar e diversificar aprendizagens no ensino do Português e da Matemática”. As tarefas experimentadas foram concebidas pelas formandas, neste caso em grupo de escola, e experimentadas com grande liberdade. As resoluções dos alunos foram objeto de apresentação e discussão em algumas sessões de trabalho.

A estrutura deste texto contempla um breve enquadramento teórico sobre avaliação, um conjunto de questões orientadoras da reflexão, um episódio de uma tarefa experimentada e uma discussão sobre esse episódio.

BREVE ENQUADRAMENTO E QUESTÕES ORIENTADORAS

Segundo Leonor Santos “há autores que em vez de usarem as expressões *avaliação sumativa* e *avaliação formativa*, usam as expressões *avaliação das aprendizagens* e *avaliação para as aprendizagens*” (2016, p. 53). Para esta investigadora, esta mudança de nomenclatura tem como objetivo reforçar que o que distingue estes dois tipos de avaliação é o respetivo propósito.

Se atendermos ao sentido da expressão “avaliação para as aprendizagens”, podemos fixar-nos na ideia de que avaliamos para intervir e para contribuir para as aprendizagens dos alunos. A avaliação deixa de ser um fim para ser uma componente indispensável nas diversas fases do processo de aprendizagem, passando a estar presente tanto em fases pouco avançadas desse processo, como nos momentos mais avançados. Como afirma Leonor Santos (2016), não é o momento em que é feita a avaliação nem os instrumentos de recolha de dados que distingue os dois tipos de avaliação, mas sim o uso que se faz dos dados recolhidos.

Nesta reflexão assumimos que sobre os dados recolhidos na resolução de uma tarefa podemos distinguir dois tipos de ações do professor: a) análise dos dados com o objetivo de dar *feedback* a cada aluno sobre o ponto em se encontra relativamente ao que era esperado; b) análise dos dados com o objetivo de perspetivar novas ações do professor.

A primeira ação é orientada para o aluno isolado. A segunda ação é orientada para o grupo turma, considerando cada aluno como um elemento importante no grupo e que tem contributos a dar para a aprendizagem dos seus colegas.

Focamo-nos agora no segundo tipo de ação do professor, pois no trabalho realizado nesta ação de formação ganhou expressão considerável a avaliação das resoluções dos alunos numa tarefa, com vista à sua utilização posterior. Esta avaliação tem implicações na organização dos momentos coletivos de partilha e discussão de resoluções de tarefas e também a orientação das aprendizagens subsequentes.

A natureza deste tipo de avaliação é coletiva e encara o grupo turma como um todo. Aproxima-se da procura de sentido para o envolvimento dos alunos nas tarefas, partindo daquilo que os alunos são capazes de fazer e fazendo decorrer a aprendizagem do seu envolvimento na resolução das tarefas propostas.

Para orientar a nossa reflexão formulamos algumas perguntas orientadoras.

- Como é que avaliamos as resoluções dos alunos numa tarefa?
- Com que olhos devemos encarar as resoluções dos alunos? Que instrumentos de análise podemos construir e usar?
- O que podemos fazer com essas resoluções para introduzir novos conteúdos, novos instrumentos de raciocínio, novas ideias, promovendo assim a aprendizagem dos alunos?

Respostas para estas questões são procuradas a partir de exemplos elucidativos que apresentamos e discutimos.

UMA TAREFA DE SOLUÇÃO E DE RESOLUÇÃO ABERTAS

A tarefa proposta é um problema cujo contexto é uma história, “A princesa baixinha”, em que algumas aves, os condores, têm um papel importante. O problema tem uma formulação muito aberta e o seu sentido é dado pela sua relação com a história que os alunos leram e sobre a qual trabalharam na perspetiva da compreensão leitora. A história não envolve nenhum aspeto matemático, tendo sido usada pelas professoras para motivar a resolução de três problemas acessíveis aos quatro primeiros anos de escolaridade. A intenção das professoras era recolher resoluções dos seus alunos, tendo em conta a grande

independência dos problemas relativamente ao domínio de destrezas técnicas ou de procedimentos de cálculo. O objetivo das tarefas era desenvolver a capacidade de resolver problemas.

Apresentamos apenas um dos problemas propostos e algumas resoluções de alunos do 2.º ano de escolaridade.

Problema inicial

Como se organizariam os condores para voarem e formarem um triângulo. Quantos condores estariam no desenho e quantas filas seriam?

Neste caso, o objetivo do problema é identificar e usar representações numéricas triangulares, com especial ênfase para os números triangulares, estabelecendo uma relação entre o número triangular e a respetiva ordem.

Todos os alunos entenderam o problema e fizeram representações triangulares diversas, como por exemplo a resolução A (figura 1). Os condores foram sempre representados por pontos, pequenos círculos ou traços.

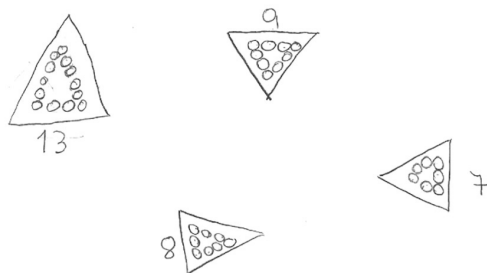


Figura 1. Resolução A

Todos os alunos apresentaram várias soluções para o problema. Houve um aluno que apresentou vários esquemas diferentes mas sempre para o mesmo número de aves. Dois alunos, que trabalharam em conjunto, apresentaram soluções na forma de números triangulares — as resoluções B e C (figuras 2 e 3, respetivamente).

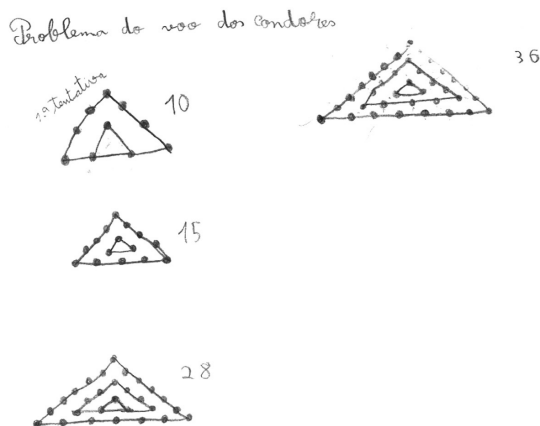


Figura 2. Resolução B

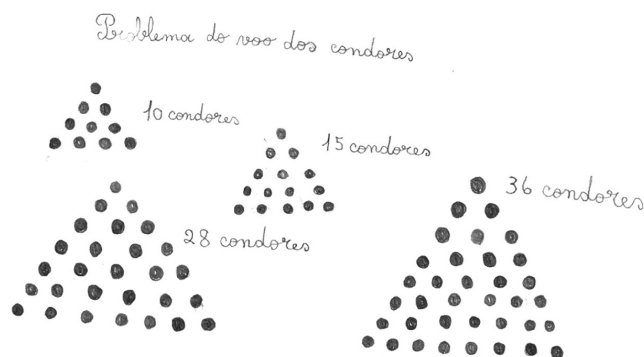


Figura 3. Resolução C

Para além destes dois alunos, todos os outros deram sentido a uma representação triangular da formação dos condores e registaram o número de aves do bando voador, embora tenham feito representações com reduzido ou nenhum valor exploratório do ponto de vista matemático, como é o caso da resolução A. Apenas as duas representações B e C permitem uma exploração algébrica produtiva. No entanto, mesmo nestas duas resoluções, os alunos não atenderam às filas de condores e não marcaram, nem contaram ou registaram esses elementos da figura.

Na nossa perspetiva de avaliação para as aprendizagens, as duas resoluções B e C constituem esquemas muito claros que podem ser utilizadas para introduzir a representação dos números triangulares e para relacionar as filas de condores de cada bando com o número de condores do bando.

Nos esquemas da resolução B, o aluno destacou muito bem a formação em triângulo e percebe-se que há uma relação entre as quatro formações representadas. No entanto, o esquema escolhido não facilita o destaque das filas, embora seja equivalente à resolução C e por isso vamos focar-nos apenas nesta resolução.

Nos esquemas da resolução C podem ser facilmente destacadas as linhas da formação triangular (figura 4).

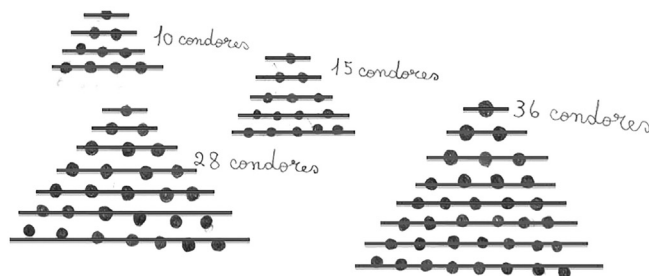


Figura 4. Resolução C com a marcação das linhas

Depois de destacar as linhas, podem ser registadas numa tabela as várias soluções encontradas por este aluno. Numa primeira fase, a tabela pode registar apenas os dados da resolução do aluno. Numa fase posterior, pode ser completada por todos os alunos visto que a representação usada por este aluno permite

uma contagem simples dos elementos representados. A tabela, além de contemplar o registo do número de filas e do número de condores, pode conter uma terceira coluna que aponta para a relação entre o número de aves de cada bando e o número de filas, registando o número de condores a mais de cada vez que o bando tem mais uma fila. Além disso, a tabela pode ser continuada com mais bandos, agora representados apenas numericamente (figura 5).

Nº de filas	Nº total de condores	Nº de condores a mais por cada nova fila
1	1	1
2	3	2
3	6	3
4	10	4
5	15	5
6	21	6
7	28	7
8	36	8

Figura 5. Tabela organizativa da contagem do número de condores dos bandos

Como aspeto comum a todas as resoluções, a professora avaliou que todos os alunos foram capazes de fazer uma representação do bando a voar em triângulo e que foram capazes de contar e registar o número de pássaros do bando. Além disso, todos os alunos estavam abertos a criar várias soluções para o problema, compreendendo que não havia só uma solução.

Após esta avaliação das resoluções dos alunos, identificando as aprendizagens dos vários alunos a partir da análise de cada resolução, a opção foi escolher as duas resoluções produtivas e, em vez de dar um feedback individual a cada aluno, usar as resoluções mais avançadas para criar uma nova tarefa acessível a todos os alunos.

O papel do professor foi avaliar as várias resoluções dos alunos, selecionar a resolução mais forte e produtiva do ponto de vista matemático, perceptível por todos os alunos, destacar os elementos fundamentais da representação usada nesta resolução e introduzir um recurso organizador e estruturante da relação algébrica inerente aos números triangulares, a tabela.

A avaliação teve como propósito definir o sentido de novas aprendizagens, tendo por base as aprendizagens que os alunos já tinham, oferecendo aos alunos condições para se apropriarem de uma forma de estabelecer relações numéricas em estreita ligação com representações esquemáticas de grande impacto visual.

Este problema, aberto nas soluções e na forma de resolver, tem ainda outra potencialidade. Ele abre caminho a outras tarefas

para as quais o professor tem a certeza que os alunos são capazes de compreender. Vamos dar alguns exemplos.

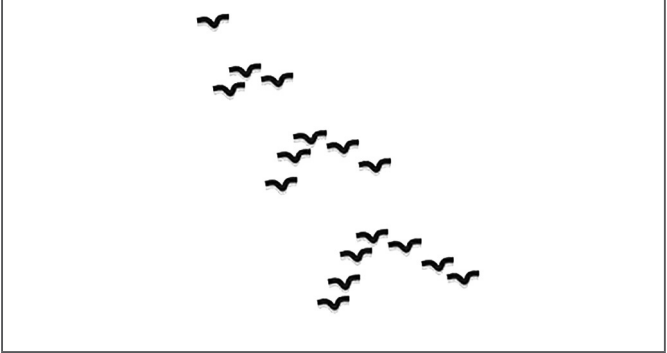
Problema subsequente 1

Na tabela foram registados o número de condores e o número de filas dos bandos de aves desenhadas pelo vosso colega. Continua a tabela até conseguires obter um bando com 100 condores. Quantas filas te parece que seriam necessárias para conseguir um bando com mais de 200 aves? E com mais de 500? Experimenta.

O que é interessante neste problema é que com 20 filas já se consegue um bando com 210 aves e que bastam 32 filas para obter 528 aves e ultrapassar assim 500. Com 45 filas obtêm-se 1035 aves. Do que conhecemos do poder desafiador dos números para as crianças, uma proposta destas levará seguramente alguns alunos a procurar bandos cada vez maiores.

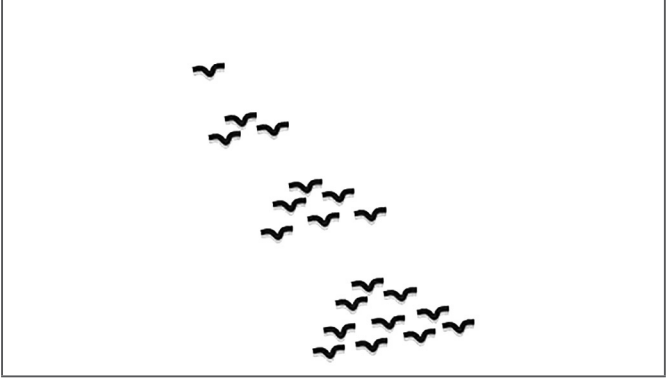
Problema subsequente 2

Na imagem há 4 bandos de gaivotas. No 1.º bando a gaivota vai a voar sozinha. Quantas gaivotas há em cada bando? Quantas gaivotas poderia ter um novo bando a seguir ao 4.º? E a seguir?



Problema subsequente 3

Resolve agora o problema para esta nova sequência de bandos. Continua sempre a acrescentar novos bandos de gaivotas.



O problema 3 é exatamente a situação que os dois alunos apresentaram na resolução do problema inicial. O objetivo de voltar a aparecer a mesma situação algébrica é intencional e permite aos alunos relacionarem esta proposta com uma situação já resolvida.

Problema subsequente 4

Inventa e desenha a tua sequência de bandos de gaivotas. Cada novo bando deve estar relacionado com o anterior. Regista numa tabela o número de ordem do bando e o número de aves.

Apresentamos duas soluções possíveis, com relações bastante simples e interessantes, cuja antecipação nos permite identificar o potencial de exploração algébrica da tarefa (figura 6).



Figura 6. Duas possíveis resoluções de alunos

DISCUSSÃO DESTE EPISÓDIO

Comentamos agora este episódio, tendo como pano de fundo as questões orientadoras que formulámos no início.

O problema inicial nunca tinha sido experimentado pelas professoras que o formularam. Por esta razão não havia dados para antecipar as resoluções dos alunos nem informação para planear a continuidade da tarefa inicial. Era preciso experimentar para decidir o que fazer a seguir.

As resoluções dos alunos foram avaliadas para decidir que continuidade dar à tarefa. Sendo uma tarefa de solução aberta, coube à professora escolher a melhor solução para perspetivar novos objetivos de aprendizagem. O facto de ser uma tarefa muito aberta permitiu à professora avaliar que todos os seus alunos se encontravam num nível de conhecimento apropriado para avançar, isto é, todos os alunos tinham um entendimento do que poderia ser “voar para formar um triângulo”, ou dito de outro modo, “voar em triângulo”. Além disso, estavam abertos a aceitar várias formas de voar em triângulo.

A opção aqui tomada foi escolher uma resolução de um aluno para analisar com o coletivo da turma, para introduzir então

uma forma de registo estruturante, a tabela, e, depois, para criar uma nova tarefa. Esta opção destacou a resolução de um aluno, evidenciando assim que o conhecimento que os alunos já têm pode ser o ponto de partida para novas aprendizagens. Parece-nos que este é um aspeto importante a discutir. Os alunos não estarão todos ao mesmo nível, como se percebe que não estariam os alunos que resolveram este problema. No entanto, todos estavam num nível que permitirá ao professor dar continuidade com a garantia de que todos iriam poder avançar.

Esta ideia leva-nos a concluir que podemos procurar entre as resoluções dos alunos um nível comum a todas que permita aos alunos avançar com segurança para novas aprendizagens.

O exemplo escolhido mostrou também que nenhum aluno resolveu totalmente o problema inicial, permitindo assim ao professor introduzir elementos de destaque no esquema dos alunos, as linhas marcadas (figura 4), e um instrumento estruturante do raciocínio, neste caso uma tabela. Em nosso entender, este é o papel do professor, isto é, introduzir instrumentos de raciocínio levando os alunos a apropriarem-se deles e a ir dominando progressivamente a sua utilização. Avaliar para as aprendizagens tem o propósito de ajudar o professor a decidir quando é adequada a introdução de um novo procedimento ou o seu reaparecimento para uma nova utilização.

Do que temos vindo a experimentar e observar em muitas ações de formação de professores e com muitos tipos de tarefas, as tabelas de diversos tipos são instrumentos estruturantes do raciocínio e do cálculo e são preparatórias da utilização de folhas de cálculo, um dos instrumentos mais poderosos que a tecnologia nos oferece e que pode ser usado desde muito cedo na aprendizagem da matemática.

Pensamos que esta discussão nos ajuda a encarar as resoluções dos alunos com outros olhos. Para isso precisamos de desenvolver instrumentos de análise das resoluções. Neste exemplo, procurámos nas resoluções não a resolução certa, mas um esquema que fosse produtivo e que permitisse introduzir de forma estruturada a representação esquemática dos números triangulares e as relações numéricas preparatórias de uma relação algébrica.

Um referencial simples que a professora poderia ter usado para registar os dados recolhidos na análise das resoluções da tarefa poderia ser o quadro seguinte (figura 7). Referenciais deste tipo foram usados na formação para ajudar os professores a refletir sobre o valor matemático das resoluções dos alunos.

	A	B	C	...
Representação usada	Esboço de triângulo auxiliar Pontos dentro do esboço, alguns não estão em disposição triangular	Representação dos números triangulares	Representação dos números triangulares	
Valor matemático	Reduzido valor	Representação produtiva de relação algébrica não acessível	Representação produtiva de relação algébrica após marcação das linhas	

Figura 7. Registro de avaliação das resoluções individuais dos alunos

Um quadro como o da figura 7 poderá proporcionar uma fotografia global das resoluções dos alunos, mas o seu preenchimento para todas as resoluções é exigente e de certo modo repetitivo. Optamos por isso por propor uma organização mais rápida e que tem por base a planificação da tarefa e a antecipação que o professor pode fazer das resoluções dos alunos.

A conceção do quadro de avaliação global da tarefa tem assim por base as antecipações que o professor faz ao planear a tarefa (figura 8). No caso sobre o qual estamos a refletir, as professoras que planearam a tarefa inicial previam que os alunos iriam fazer diversas representações e que o seu valor matemático seria diferente, por isso decidiram usá-la nos quatro primeiros anos de escolaridade.

Um quadro como o da figura 8 poderá ser logo organizado na fase de planificação da tarefa, ficando o seu preenchimento com os resultados das resoluções para depois da resolução. Neste caso, a resolução C foi escolhida para discutir com o coletivo da turma. O quadro também permite registar que houve uma resolução matematicamente muito interessante, porém ligada

a uma exploração algébrica demasiado elaborada e que não discutimos neste artigo.

Os dois aspetos considerados para avaliar as resoluções obtidas pelos alunos, tipo de representação e o valor matemático das resoluções, conduzem-nos à necessidade de interpretar melhor estes dois aspetos e de aprofundar a natureza das resoluções. É importante referir que, neste caso, a resolução B tem subjacente um modelo algébrico interessante, sugerindo a necessidade do professor dialogar com o aluno para conhecer melhor como é que ele pensou. É possível que este aluno tenha uma capacidade de raciocínio visual notável. Caberá ao professor decidir o que fazer com este aluno individualmente, bem como o interesse que esta resolução poderá ter para o coletivo ou restrição da sua discussão a um pequeno grupo de alunos.

Um outro aspeto que nos importa destacar é o papel das tarefas de solução aberta como o exemplo discutido. Esta tarefa não só permitiu confirmar e desenvolver um caminho de aprendizagem para toda a turma, como permitiu identificar uma resolução totalmente original inesperada e matematicamente muito elaborada, apesar de incompleta, a resolução B.

Valor matemático Representação usada	Valor matemático não produtivo (valor inexistente, reduzido ou desadequado)	Representação algébrica produtiva acessível a todos os alunos	Relação algébrica produtiva inacessível a todos os alunos
Esquema em triângulo sem interior (uma solução única)	—	—	—
Esquema em triângulo sem interior (várias soluções)	Várias resoluções	—	—
Esboço de triângulo auxiliar Pontos dentro do esboço, alguns não estão em disposição triangular	A Várias resoluções	—	—
Representação dos números triangulares	—	C (marcação das linhas em falta)	B
Alunos que não compreenderam o problema: Todos os alunos compreenderam o problema. Fizeram representações de várias soluções e estabeleceram uma ligação entre cada figura e o número de elementos representados.			

Figura 8. Quadro de avaliação global da tarefa

Destacamos assim o papel que podem ter as tarefas abertas desta natureza em momentos iniciais de um percurso específico de aprendizagem. Neste caso o percurso de aprendizagem desenhado está focado na resolução de problemas e na resolução de atividades exploratórias de pré-álgebra, com o estabelecimento de relações numéricas generalizáveis, associando representações visuais a sequências de números inteiros.

Há uma outra ideia a destacar. A grande abertura da tarefa, nas soluções e na resolução, está na sua simplicidade e pouca exigência de conhecimentos. No entanto, a informação que deu e o que proporcionou são de grande valor para a aprendizagem pois ofereceu uma base segura de significados dos alunos e permitiu que a continuidade fosse dada a partir da resolução de um aluno. Ao nível elementar esta situação é fácil de conseguir, embora exija ao professor um conhecimento matemático mais amplo e um maior domínio no estabelecimento de conexões.

Em nosso entender este exemplo reforça a estreita ligação que deve existir entre a avaliação e a planificação. É um exemplo simples que clarifica também a natureza desta ligação e o papel que o saber dos alunos pode ter no estabelecimento dessas ligações.

BREVES NOTAS FINAIS

Quando as professoras planearam a tarefa inicial proposta e discutida neste artigo foi importante convencê-las a arriscar. Mesmo sem conhecer os seus alunos, eu esperava que algum aluno viesse a fazer disposições em número triangular, como se comprovou. Não sabia era o que os outros alunos iriam fazer. Por isso eu já sabia que aquela tarefa abria um caminho. As resoluções que abrem caminhos poderão ser previstas pelo professor previamente e por isso o professor já sabe que há um caminho para abrir. Para arriscar é preciso também aprender a formular tarefas simples, com textos muito simples mesmo que incompletos e com muitos aspetos em aberto. As tarefas em sala de aula são propostas com a presença do professor em que este tem um papel importante e decisivo na sua apresentação. Se repararmos no texto do problema inicial do problema, podemos afirmar que ele é quase apenas uma ideia, uma intenção para desafiar os alunos a pensar como é que os condutores se podem organizar para voar e a aprender que a contagem desses bandos é um problema matemático.

As tarefas propostas neste artigo como subsequentes para a tarefa inicial, que foram discutidas no âmbito da ação de formação referida, já foram experimentadas pela professora com os seus alunos do 2.º ano. O que a professora planeou, o que experimentou e os resultados que já obteve serão objeto de uma reflexão conjunta mas com a voz da professora.

Este texto foi escrito com o propósito de integrar os materiais

de apoio à ação de formação referida e foi também apresentado e discutido durante as sessões. De certa forma estabelecendo também um paralelo entre o processo formativo que vivemos nesta ação e o processo de aprendizagem dos alunos. Por isso é devido um agradecimento às professoras que partilharam as resoluções dos seus alunos e as reflexões que fizeram sobre as suas práticas.

Além desta discussão no âmbito da formação referida, o texto foi também comentado por professores do projeto *Cultura de Sala de Aula em Matemática* da ESE de Lisboa. O propósito deste projeto é o estudo da cultura de sala de aula em matemática com uma orientação de articulação entre os fundamentos teóricos desta cultura e a formação de professores. Os eixos orientadores do trabalho que temos vindo a realizar integram, entre outros aspetos, a natureza e papel das tarefas matemáticas e a avaliação, bem como o papel dos vários atores no processo de aprendizagem. É por isso que o texto escrito na primeira pessoa assume muitas vezes uma voz coletiva. Aos meus amigos da equipa deste projeto fica um agradecimento especial pelo apoio para a escrita deste texto.

Referências

- Masini, B. & Monaco, O. (1999). *A princesa baixinha*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Santos, L. (2017). O que nos diz a investigação sobre os contributos da avaliação para a aprendizagem: algumas notas. *Educação e Matemática*, 144-145, 53-58.

CRISTINA LOUREIRO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

Menino Cúbico

CRISTINA MORAIS

Encontrei na E&M o espaço ideal para partilhar esta experiência que vivi com uma turma e que, pela riqueza e envolvimento de todos, não gostava que se perdesse no tempo.

A experiência que partilho aconteceu num 4.º ano, e nasceu com a questão de uma aluna, colocada num momento de discussão coletiva: “Afinal, o que é aquele 3 em cm^3 ?!”. Iniciámos assim uma discussão que se centrou primeiro sobre o significado de cm^2 , sobre as dimensões no plano e no espaço, falando de área, e depois de volume. Ao discutirmos o que era, efetivamente, o volume de um objeto, um aluno deu o seguinte exemplo “O volume desta sala é como se a quiséssemos encher, e o resultado é o volume, por exemplo, é o número de pessoas que cabem aqui dentro, ou outra coisa, aí o resultado seria... em ‘*meninos cúbicos*’!”. Esta afirmação provocou não só o riso de todos, mas também o que viria a tornar-se um enorme projeto!

Rapidamente os alunos começaram a definir modos de arrumar meninos dentro da sala: de pé, lado a lado, de pé virados para a porta ou para a janela, deitados de barriga de lado ou com a barriga para baixo, uns em “cima” dos outros... Deste modo, fomos definindo que medidas do corpo deveriam ser consideradas e chegámos à conclusão que nos teríamos de transformar em caixas. Teríamos assim de aproximar a forma dos nossos corpos à forma de um paralelepípedo retângulo. Deste modo, e após medições do nosso corpo, concluímos que deveríamos usar a altura, a medida ombro a ombro como medida de largura e que a profundidade corresponderia à medida barriga-nádegas. Tomadas estas decisões, demos início a uma fase de medições destas três medidas de todos.

Inicialmente, os alunos queriam calcular o número de meninos que ocupariam o volume da sala usando as suas próprias medidas, sem reconhecerem a necessidade de definir uma unidade de medida comum para as três medidas realizadas. Estes mesmos alunos, no 1.º ano, haviam passado por uma situação semelhante. Na altura, quisemos medir e registar as alturas e envergaduras de todos, sem recorrer a unidades de medida de comprimento convencionais. Após alguma discussão em torno de “o que usar para medir”, usámos um estojo como unidade de medida das alturas de todos, realizando depois divisões em meios e em quartos quando necessário. É muito interessante verificar que,

apesar de os alunos terem experienciado a necessidade de usar uma unidade de medida comum a fim de poder identificar e comparar comprimentos diferentes, passaram novamente por esse processo de discussão e de descoberta da vantagem em usar uma unidade de medida comum, para usar agora em cada uma das três medidas.

Concluímos que seria necessário encontrar as três medidas representativas da turma para se obter as medidas de um prisma que iria representar um *menino cúbico*. Iniciámos assim uma discussão em torno da noção de média.

Relembrámos o projeto do 1.º ano, especificamente do facto de termos unido com fita-cola todas as barrinhas de cartolina que representavam a envergadura de cada um e colocado essa fita gigante no chão do recreio para ver o seu comprimento (Figura 1).



Figura 1. Disposição da fita correspondente à envergadura da turma – 1.º ano

Retomámos esta mesma ideia de unir as nossas medidas numa fita imaginária única. Pensámos em juntar os valores relativos a cada medida (a soma de todas as alturas, a soma de todas as larguras e a soma de todas as profundidades) de modo a criar uma única fita para cada medida e depois dividi-la em partes iguais, distribuindo por cada aluno cada uma dessas partes. Essa parte corresponderia à média da medida considerada.

Calculadas as médias das medidas de altura, largura e profundidade que definem a unidade de medida de volume criada, o *menino cúbico*, considerei ser fundamental fazer a sua construção para os alunos poderem ver o prisma resultante das médias das suas próprias medidas. Partindo de uma caixa de um frigorífico, realizámos as medições necessárias para que cada medida correspondesse à média calculada (Figura 2).



Figura 2. Medição e construção do *menino cúbico*

Montámos depois a caixa, construindo assim o *menino cúbico*. Após ver a caixa, Rita reagiu referindo “Mas não vamos caber todos nela!”. A resposta do colega Gonçalo foi fundamental para dar sentido à noção de média “Claro que não. Há uns que estão acima da média e outros abaixo!”. Esta discussão levou-nos a experimentar a caixa: alguns alunos ficaram com a pontinha da cabeça de fora, outros ficaram imersos na caixa, e outros fizeram um verdadeiro teste de resistência à fita-cola que unia a caixa!

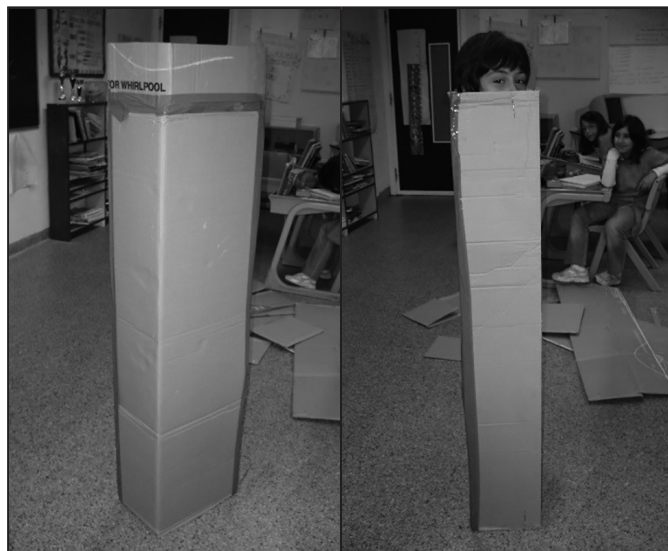


Figura 3. *Menino cúbico* construído e comparação das suas medidas com as de um aluno

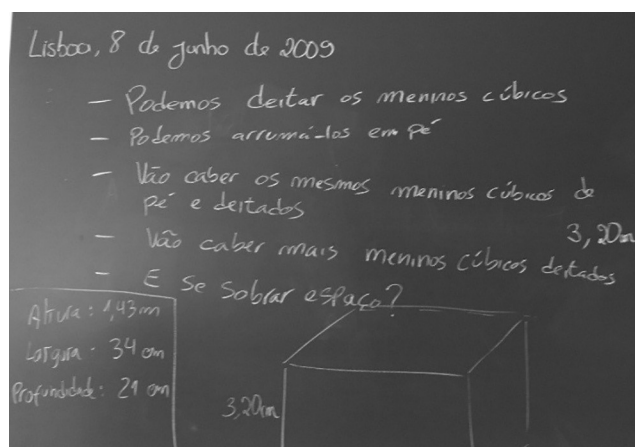
Obtida a unidade de medida de volume, o *menino cúbico*, foi necessário realizar as medições da sala de aula, para as quais usámos como unidade de medida de comprimento o metro.

De seguida, cada grupo de alunos procurou estimar o número de *meninos cúbicos* que caberiam na sala. As estimativas dos grupos foram na ordem dos 400/500 *meninos cúbicos*, tendo existido um grupo a estimar 2700 *meninos cúbicos*. Finalmente, avançámos para o cálculo do número de *meninos cúbicos* necessários para medir o volume da sala. Começámos por discutir como organizar os *meninos cúbicos* na sala. O Diogo começou por dizer que, usando o *menino cúbico* na vertical, poderiam estar organizados de frente para a parede que tinha um placard, ou de frente para a porta. De seguida, outro colega referiu que também poderiam ser dispostos na horizontal. Diogo questionou depois “E se sobrar espaço?”, ao que o colega Duarte respondeu “Divide-se a caixa, ao meio ou assim...”. A questão da divisão da unidade de medida acabou por não ser elaborada, pois após o cálculo envolvendo apenas unidades inteiras, acabámos por não ter tempo para explorar como poderíamos calcular o volume de forma mais rigorosa.

Algumas ideias desta discussão foram deixadas no quadro, assim como as medidas do *menino cúbico* (ver Figura 4, canto inferior esquerdo) e as medidas da sala, para apoiar o trabalho dos grupos de alunos.

Para calcular o volume da sala em *meninos cúbicos* foram vários os alunos que sentiram necessidade de pegar no *menino cúbico* e ir registando quantos caberiam ao longo de uma parede da sala. Os alunos pensaram no volume da sala em camadas horizontais. Começaram por verificar que seriam necessárias

duas camadas, uma vez que eram necessários dois *meninos cúbicos* para perfazer, quase na totalidade, a altura da sala (pois a altura do *menino cúbico* era 1,43 m e a altura da sala era 3,20 m). De seguida, contabilizaram quantos *meninos cúbicos* seriam necessários para preencher o comprimento e a largura da sala, considerando nesta fase a largura e a profundidade do *menino cúbico*.



- Podemos deitar os *meninos cúbicos*
- Podemos arrumá-los em pé
- Vão caber os mesmos *meninos cúbicos* de pé e deitados
- Vão caber mais *meninos cúbicos* deitados
- E se sobrar espaço?

Figura 4. Registo das ideias resultantes da discussão e medidas do *menino cúbico* e da sala

Dado que o *menino cúbico* assumia medidas de altura, largura e profundidade diferentes entre si, era necessário manter presente a posição do *menino cúbico* relativamente à sala para, de forma eficiente, conseguir calcular o número de *meninos cúbicos* necessários para perfazer uma camada. Vários alunos, após o levantamento do número de *meninos cúbicos* necessários para preencher uma das paredes da sala, alteravam a posição do *menino cúbico* ao considerarem outra parede, sem reconhecerem essa mudança de posição (Figura 5). O recurso à caixa de cartão foi fundamental para os alunos verificarem que medidas deveriam ser consideradas tendo em conta o modo como pensaram calcular a primeira camada de *meninos cúbicos*.

Os grupos calcularam o volume da sala usando o *menino cúbico* na vertical e considerando apenas unidades de medida inteiras. Alguns grupos calcularam o volume posicionando o *menino cúbico* de frente para a parede com o placard e outros grupos posicionaram-no de frente para a porta da sala. Por este motivo, o valor obtido nos grupos não foi exatamente igual. No final, os alunos verificaram que seria possível dispor os *meninos cúbicos* em duas camadas na vertical (tal como havia sido calculado) e uma última camada em que seriam dispostos horizontalmente,

uma vez que sobravam 34 cm relativamente à altura da sala, que correspondia precisamente à medida de largura do *menino cúbico*.

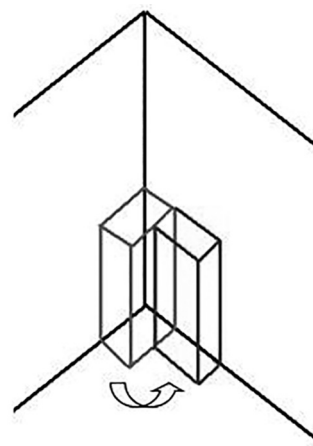


Figura 5. Esquema ilustrativo da mudança de orientação do *menino cúbico*

É importante referir que os alunos, nesta fase, não conheciam a fórmula para o cálculo do volume. Contudo, já tinham explorado diversas situações em que calcularam o volume de objetos. Por exemplo, envolveram-se em tarefas em que calcularam o número de cubinhos necessários para preencher caixas de cartão, tendo à disposição cubinhos em número suficiente e, numa fase posterior, cubinhos suficientes para preencher apenas uma parte da caixa. Assim, o conceito de volume foi explorado através da noção de camadas, e foi deste modo que os alunos calcularam o número de *meninos cúbicos* necessários para preencher a nossa sala de aula.

Este projeto, construído a partir da curiosidade dos alunos, aliou múltiplos conceitos cujas inter-relações ganharam significado para os alunos, como comprimento, área e volume, unidades de medida convencionais e não convencionais, a perceção de relações espaciais, bem como a noção de média. Tudo isto acompanhado de grande destreza de cálculo e de um apurado sentido crítico. Foi uma experiência marcante, que vivi com tanto entusiasmo quanto os alunos, e que ecoou nos próprios pais, que carinhosamente se apelidaram de *pais cúbicos*. É com o mesmo entusiasmo que, como *professora cúbica*, recordo este projeto, devolvendo-o a todos os que nele participaram.

CRISTINA MORAIS

EXTERNATO DA LUZ; UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

Ângulos externos de um polígono e voltas completas

ALGUMAS IDEIAS SOBRE O CONCEITO DE ÂNGULO EXTERNO

O conceito de ângulo externo de um polígono não é muito valorizado e penso até que lhe é dada muito pouca atenção. No entanto, este elemento de um polígono pode ser muito significativo e ajudar a ampliar o conceito de ângulo.

Os ângulos externos de um polígono levam-nos a encarar uma forma de percorrer o polígono por fora. Isto é, partindo de um vértice qualquer de um polígono, percorrendo a linha poligonal que o define, a sua fronteira, de forma a manter sempre a mesma maneira de virar ao chegar a outro vértice, quando chegarmos ao vértice do qual partimos demos uma volta completa, ou seja, rodámos 360° .

Aprendi esta propriedade há muitos anos quando alguém me proporcionou a experiência de percorrer, no verdadeiro sentido da expressão, a fronteira de um polígono desenhado no chão. Esta experiência pode ser feita com crianças desde muito cedo e é realmente marcante. Andamos, paramos em cada vértice e vamos rodando. Seja qual for o número de lados terminamos sempre voltados para o mesmo ponto de referência de quando partimos e, durante o percurso, nunca olhámos para esse ponto de referência. Temos assim uma ideia concreta do que é dar uma volta completa.

Esta propriedade é válida para qualquer polígono seja qual for o número de lados. Uma outra forma de exprimir esta propriedade é afirmar que a soma dos ângulos externos de um polígono qualquer é um ângulo de volta completa, um ângulo giro ou um ângulo de 360° .

A ideia que apresentamos tem subjacente o conceito de ângulo externo encarado como uma grandeza, neste caso associada à medida da rotação definida pelo prolongamento de um lado e pelo lado consecutivo (figura 1).

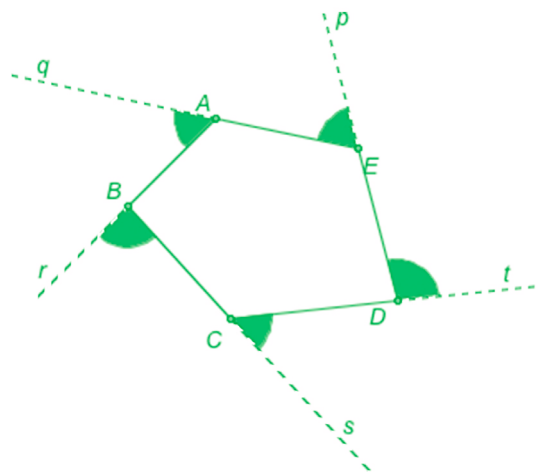


Figura 1

É importante registar que esta marcação de ângulos obedece à regra de que, num dado polígono, todos os prolongamentos dos lados sejam feitos com igual orientação e que, num polígono convexo, um ângulo externo é suplementar do ângulo interno adjacente.

Destaco nesta discussão que se adota o conceito de ângulo como grandeza e não como figura, seguindo a orientação desenvolvida por Stella Baruk. Este conceito é amplamente discutido no Dicionário de Matemática Elementar desta autora. Aliás esta orientação de ângulo como grandeza é a mais correta do ponto de vista formal.

UM EPISÓDIO DE SALA DE AULA

O que acabamos de dizer é fácil de compreender e aceitar num polígono convexo. O que se passará com um polígono côncavo? O que será um ângulo externo num polígono côncavo?

Esta questão surgiu numa turma de 5.º ano e registo o comentário da professora.

“A questão foi-me colocada por um aluno do 5.º ano! Foi um episódio delicioso em que eu fiquei ‘aflita’. Quando o aluno me colocou a questão, a minha resposta foi que o ângulo alfa (a

na figura 2) era o quarto ângulo externo, mas apenas o fiz por uma questão de lógica e coerência com o que estávamos a fazer com os polígonos convexos. Ficámos os dois a olhar para o desenho, por razões diferentes. Ele porque o facto de um ângulo externo estar no interior lhe causava compreensiva estranheza, eu porque a definição assente no facto de um ângulo externo ser suplementar ao ângulo interno adjacente, cair por terra. Fiquei caladinha e tivemos de sair da sala, 'graças a Deus'. Ambos saímos de sobrolho franzido! Nem um nem outro estávamos convencidos."

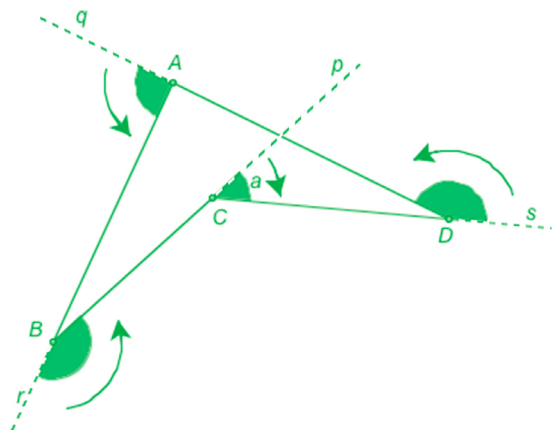


Figura 2

A professora, ciente da importância da conservação de propriedades quando se amplia um conceito, decidi experimentar o que acontecia à soma dos ângulos externos com este ângulo externo "metido para dentro". Conclui que se a medida do ângulo neste caso fosse negativa se mantinha a propriedade da soma igual a 360° . Como fez as experiências num programa de geometria dinâmica concluiu que a propriedade era válida para qualquer polígono côncavo, com qualquer número de lados. Assim, na discussão posterior com o aluno assumiu que o ângulo externo é obtido da mesma maneira e que, nesta situação de reentrância, a sua medida é negativa. Penso que a figura 3 ilustra muito bem a ideia de que iniciando o percurso sobre a fronteira do pentágono côncavo a partir do ponto C, quando retornamos a este ponto temos que fazer um ângulo em sentido contrário para fazer uma volta completa.

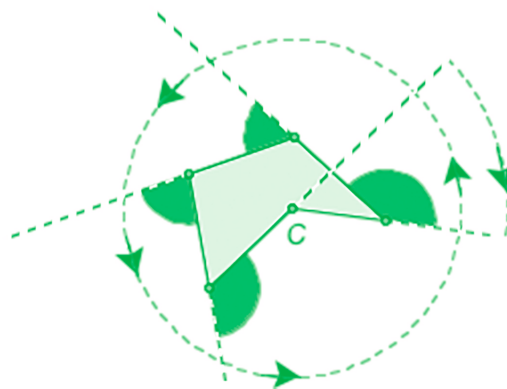


Figura 3

Segundo as palavras da professora "Claro que falar em ângulos negativos é estranho no 5.º ano....". Porém, faz todo o sentido e aumenta a consistência tanto da propriedade da soma dos ângulos externos como da propriedade da relação entre o ângulo externo e o ângulo interno adjacente e que é a de serem suplementares.

Neste último caso, é interessante verificar que o ângulo interno é côncavo, por isso superior a um ângulo raso. Precisamente por isso, ao introduzirmos uma orientação na medição do ângulo externo adjacente, subtraímos a medida deste e concluímos que a soma dos dois é um raso e por isso são suplementares.

É muito engraçado pensar que no polígono côncavo aparece um ângulo que nos apetecia mesmo considerar como externo (figura 4). Se o fizéssemos tudo o que foi dito atrás perdia coerência. Isto é, a soma dos ângulos externos não seria um ângulo de volta completa e o ângulo externo não seria suplementar do ângulo interno adjacente.

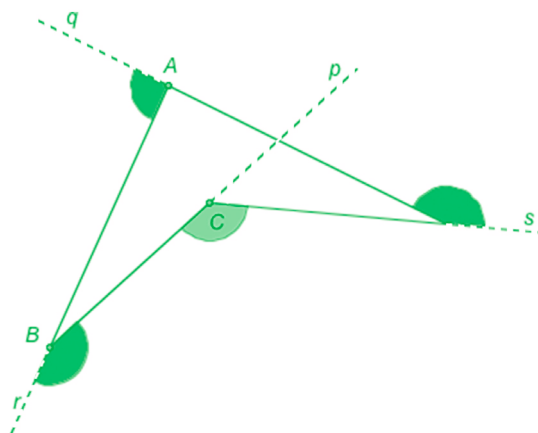


Figura 4

COMENTÁRIOS FINAIS

Não encontrei, em nenhuma das fontes credíveis que consultei, informação sobre ângulo externo de um polígono côncavo. Embora o Dicionário de Matemática Elementar de Stella Baruk seja o que se tornou mais útil para esta discussão e tenha ajudado a clarificar e sustentar o conceito de ângulo como grandeza.

As definições não são estáticas e devem ter significado. Penso que esta discussão ajuda a dar sentido à definição de ângulo externo e ajuda a dar sentido à própria definição de ângulo, que deixa de ser apenas a de uma figura obtida a partir de duas semirretas com a mesma origem, e em que ganha corpo a ideia de grandeza associada à rotação definida por essas duas semirretas. Ao acrescentar desde muito cedo a ideia de medida orientada, esta discussão vai ajudando a construir de forma consistente o conceito de ângulo, um conceito bastante complexo que progressivamente se torna mais elaborado à medida que se avança na escolaridade.

Esta discussão, pela estranheza que causa, ajuda a compreender a ambiguidade topológica do polígono côncavo. É um polígono em que a noção de interior e exterior se ampliam e que nos leva a pensar nestes dois conceitos, bem como no conceito de fronteira. Visualmente, há pontos no exterior do polígono que parecem estar no seu interior. Embora os conceitos topológicos

sejam pouco trabalhados na matemática elementar não deixa de ser interessante pensar sobre eles.

O episódio apresentado por esta professora ocorreu numa aula em que os alunos estavam a usar um programa de geometria dinâmica. Na minha opinião, este episódio reforça a ideia de que estes ambientes ajudam a proporcionar situações matematicamente mais ricas e desafiadoras, tanto aos alunos como aos professores.

Do ponto de vista da estruturação espacial e geométrica, este episódio e esta discussão parece-me muito interessante. No que respeita à estruturação espacial, os ângulos externos, encarados como elementos da figura ganham destaque de forma coerente e as relações geométricas que são estabelecidas são consistentes, evidenciando assim uma ligação entre a estruturação espacial e a estruturação geométrica.

Por tudo isto registo um agradecimento especial à professora que partilhou comigo este episódio e que de forma sábia soube construir matematicamente respostas para as dúvidas do aluno e para as suas próprias dúvidas.

Referências

Baruk, S. (2005). *Dicionário de Matemática Elementar*. Edições Afrontamento.

EIEM – ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



O **Encontro de Investigação em Educação Matemática 2018** realiza-se nos dias 17 e 18 de novembro, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra, tendo como tema a “Aula de Matemática”.

Este encontro tem como objetivos refletir sobre questões essenciais do tema escolhido para o encontro, partilhar resultados de investigação e perspetivar e/ou promover futuras investigações sobre o tema.

Como habitualmente, o programa do encontro contempla

sessões plenárias e sessões em paralelo, organizadas segundo grupos de discussão, onde serão discutidos e analisados trabalhos de investigação, concluídos ou em curso, apresentados pelos participantes através de comunicações ou posters. O prazo para submissão de propostas de trabalho a apresentar no encontro decorre até 23 de setembro.

O EIEM 2018 destina-se a todos os investigadores, formadores ou professores que se interessem pela investigação em Educação Matemática.

Mais informações disponíveis em <http://spiem.pt/>

O PROBLEMA DO PROFMAT 2018

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2018, em Almada, consistiu na resolução do problema “Matrículas bem diferentes”:

Na Sildávia, as matrículas dos automóveis têm seis algarismos. Para evitar confusões, as autoridades decidiram que as matrículas têm de diferir em pelo menos dois símbolos. Por exemplo, se a um automóvel for atribuído a matrícula 979017, já não pode existir outra com o número 975017. No entanto, já é possível o número 970917 porque difere em dois algarismos.

No máximo, quantas matrículas podem existir na Sildávia?

Na Roldávia, as matrículas são constituídas por dois algarismos, duas letras e mais dois algarismos. Também neste país as matrículas têm de diferir em pelo menos dois símbolos. Se houver um carro com 55-FG-62, não podem existir as matrículas 55-FG-82 nem 55-HG-62, mas seriam aceites as 55-GF-62 e 54-FF-62.

O alfabeto da Roldávia tem 26 letras. No máximo, quantas matrículas são possíveis?

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Infelizmente, apenas recebemos uma resposta, da sempre entusiasta Letícia Martins (Guimarães). O que terá afastado os concorrentes? Várias hipóteses se podem colocar:

- O problema era difícil?
- O desafio não era suficientemente atrativo?
- O programa do ProfMat não deixava momentos para se pensar calmamente na resolução?

1. Matrículas da Sildávia

Uma maneira de resolver o problema é começar com casos mais simples, ou seja, com matrículas de menos algarismos e tentar descobrir se existe algum padrão.

Se as matrículas tivessem apenas um algarismo, só haveria uma matrícula possível.

Com matrículas de dois algarismos, conseguiam-se dez matrículas. Por exemplo, 00, 11, 22, 33, ..., 99.

Para três algarismos, chegávamos às cem matrículas, dez por cada centena. As começadas por 0 poderiam ser obtidas das anteriores (000, 011, 022, ..., 099). Para as começadas por 1, avançaríamos o último algarismo de uma unidade (101, 112, 123, ..., 190). Para as começadas por 2 avançaríamos duas unidades

(202, 213, 224, ..., 291), e assim sucessivamente. Obteríamos 100 matrículas.

E continuaríamos desta forma até aos seis algarismos.

Contudo, podemos pensar numa estratégia mais simples. Os primeiros cinco algarismos poderiam ser quaisquer, de 00000 a 99999, num total de cem mil possibilidades. O último algarismo será o que introduzirá a segunda diferença (aquilo a que poderemos chamar um algarismo de controlo). A forma mais fácil é somar os cinco algarismos e atribuir ao sexto algarismo o algarismo das unidades dessa soma. Por exemplo, se a matrícula se iniciar por 98917, temos $9+8+9+1+7 = 34$, logo a matrícula será 989174.

Desta forma, se alterarmos apenas um algarismo dos cinco iniciais, o último também será diferente. Mais alguns casos admissíveis: 010203, 575120, 999995.

Conclusão na Sildávia conseguem-se 100 000 matrículas diferentes.

2. Matrículas da Roldávia

Neste “país”, a situação é um pouco mais complexa devido à existência de letras mas vamos seguir uma estratégia semelhante à anterior. A cada letra atribuímos um valor, de A=1 a Z=26. Só que agora o símbolo de controlo não pode ser um algarismo, tem de ser uma letra.

Assim sendo, os quatro algarismos e a primeira letra podem ser quaisquer. Para se obter a segunda letra, somam-se os valores dos cinco elementos anteriores e, se necessário, subtrai-se sucessivamente 26 até se obter um número entre 1 e 26. Esse número indica-nos qual será a segunda letra.

Por exemplo, partindo de 79-V?-88, e como V=22, temos $7+9+22+8+8 = 54$; $54-26=28$; $28-26=2$. Como B=2, a matrícula será 79-VB-88.

Outras matrículas possíveis: 64-AZ-78, 00-BD-20, 11-CG-11.

Na Roldávia podem ser atribuídas $10000 \times 26 = 260\,000$ matrículas.

Prémios

Como a única resposta entregue não cumpriu os critérios de classificação, este ano não há primeiro prémio, apenas o segundo: Letícia Martins – Livro “Problemas... Sem Problema”, J. P. Viana, ed. APM

DATA DE NASCIMENTO

Estava no café quando chegou a Manuela, acompanhada de um amigo que se apresentou: “Sou o Luís”.

Quando começámos a falar de matemática e de problemas, disse-me ele:

– Vê lá esta curiosidade. Em 2021, no dia em que fizer anos, a minha idade vai ser um divisor do ano em que nasci. E mais, se multiplicarmos os números correspondentes a esse dia, a esse mês e à idade que terei nessa altura, o resultado é precisamente o ano em que nasci.

Fiz uns cálculos.

– Só com estas indicações, não é possível descobrir quando nasceste.

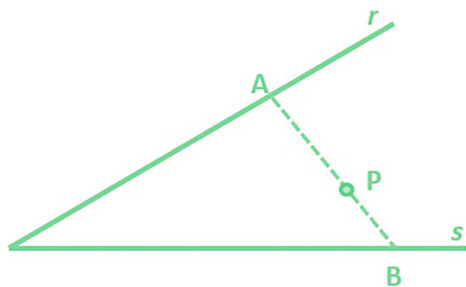
– Ah! – Acrescentou ele. – Mas se soubesses a minha idade, saberias logo a resposta.

Qual é a data do nascimento do Luís?

(Respostas até 11 de setembro, para zepaulo46@gmail.com)

O DOBRO DO OUTRO

O problema proposto no número 144/5 de Educação e Matemática é da autoria de Wayne Wickelgren e aparece no livro *How to Solve Mathematical Problems* (Dover Publications, Nova Iorque, 1995).



Temos duas semirretas r e s , com a mesma origem, e um ponto P entre elas.

Queremos unir as semirretas por um segmento de reta AB passando por P .

Onde deve ficar o ponto A (ou o B) de modo que a distância AP seja o dobro da PB ?

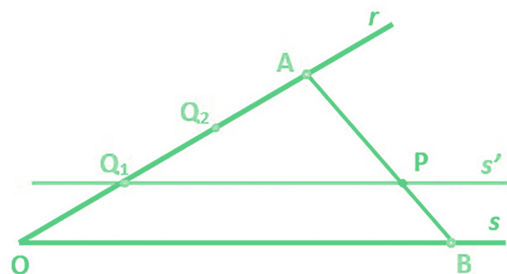
Recebemos 9 respostas, enviadas por Carlos Dias, Edgar Martins (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Luís Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Manuel Saraiva (Covilhã), Mário Roque (Guimarães), Rita Bastos (Lisboa), Vítor Fernandes (Guimarães) e pelos 22 alunos da turma 11CT4 da Escola Secundária Francisco de Holanda (Guimarães), sob a orientação da professora Letícia Martins.

Só o Vítor, com muito trabalho e bastante persistência, seguiu apenas a via analítica (nada fácil, como devem imaginar). Todas as outras resoluções apresentadas usaram uma estratégia geométrica para chegar à solução, embora o Carlos tivesse acrescentado uma segunda resolução analítica.

Os processos geométricos utilizados são essencialmente semelhantes. A versão mais comum é traçar s' , paralela à reta s , a passar por P . Esta paralela intersecta a reta r em Q_1 . Sobre r , e tal como se vê na figura seguinte, marcar os pontos Q_2 e A , de modo que $\overline{OQ_1} = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2A}$.

Unindo A com P e prolongando, obtemos o ponto B sobre a reta s .

Usando o teorema de Tales ou a semelhança dos triângulos AOB e AQ_1P , facilmente se prova que $\overline{AP} = 2 \times \overline{PB}$.



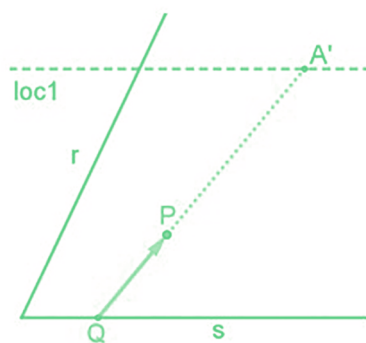
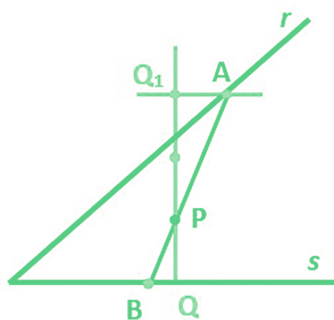
Como diz a Rita:

Este processo de resolução é generalizável para qualquer razão entre as duas distâncias.

O Edgar fez uma construção que, embora equivalente à anterior, vale a pena partilhar.

Por P traça-se a perpendicular a s . Seja Q o pé da perpendicular. Sobre ela, marca-se o ponto Q_1 , de modo que a sua distância a P seja o dobro da de P a Q . Por Q_1 traça-se uma paralela a s . A sua interseção com r é o ponto procurado A .

Unindo A com P e prolongando, obtemos o ponto B sobre a reta s .



Note-se que o ponto Q, sobre r , pode estar noutra posição qualquer. A Graça mostrou isso, usando o Geogebra de uma forma engenhosa:

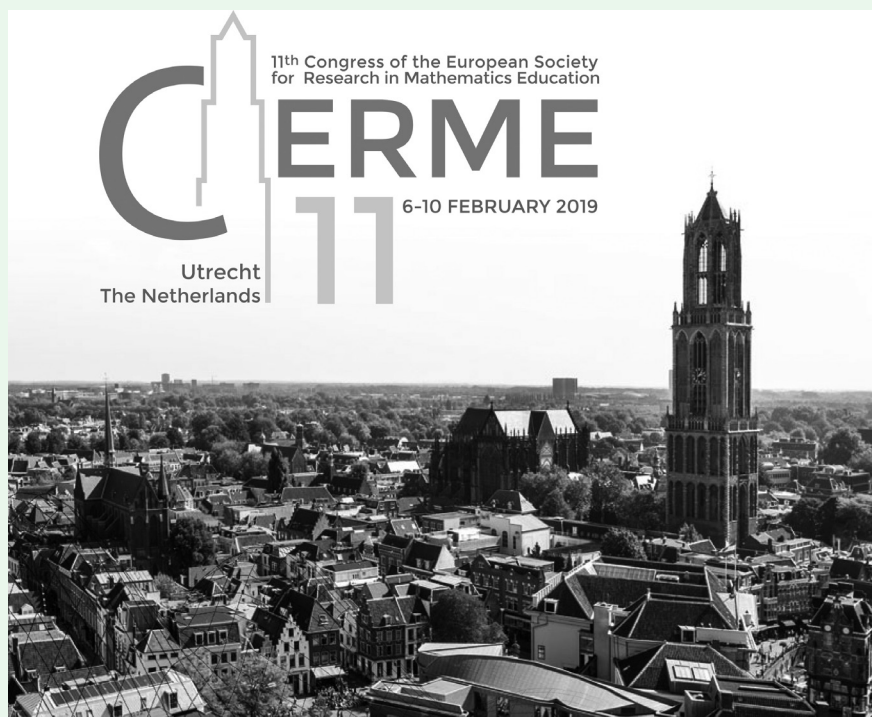
Marquei um ponto Q em s .

Determinei $A' = Q + 3\overline{QP}$

Mandei construir o locus de A' relativamente a Q e o resultado foi uma paralela a s passando por A' !

A Rita seguiu uma via semelhante a esta. Com centro em P e razão -2, fez a dilação (homotetia) da reta s . A interseção da reta obtida com r define o ponto A.

CERME 11 - ELEVENTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION



Realize-se em **Utrecht**, na **Holanda**, entre 6 e 10 de fevereiro de 2019, o **11.º Congresso da Sociedade Europeia para a Investigação em Educação Matemática**. Com uma forte componente dos trabalhos centrada em torno de grupos de trabalho que reúnem diariamente, este congresso contará com vinte e seis grupos focados em temáticas relevantes da investigação em Educação Matemática.

Mais informações disponíveis em <https://cerme11.org/>

Práticas Interdisciplinares em Matemática e Ciências Naturais na formação inicial de professores

NELSON MESTRINHO

BENTO CAVADAS

INTRODUÇÃO

A ideia de integrar o ensino da Matemática e das Ciências tem vindo a ser defendida como forma de fortalecer a compreensão dos alunos relativamente aos conceitos e contextos que unem estas duas áreas (Frykholm & Glasson, 2005). Vários estudos têm vindo a sustentar que o ensino integrado das Ciências Físico-Naturais e da Matemática favorece as aprendizagens, o desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade de resolução de problemas, aspetos que consideramos fundamentais na formação de professores e educadores, para além de ter um efeito positivo ao nível do envolvimento e motivação destes estudantes. Enquanto as Ciências proporcionam contextos concretos de aplicação de conceitos matemáticos, a Matemática permite aos estudantes aprofundar a sua compreensão de ideias científicas, ao proporcionar os meios para quantificar e expressar as relações entre diferentes variáveis e grandezas (Ríordáin, Johnston & Walshe, 2016).

De facto, nas últimas décadas, organizações ligadas à educação matemática têm destacado a importância de o currículo desta disciplina estabelecer conexões com outras áreas, e organizações dedicadas ao desenvolvimento da educação em ciências, vindo a sublinhar a relevância da atividade matemática para a prática científica (NCTM, 2017). Apesar disto, o currículo escolar tem vindo a privilegiar uma abordagem compartimentada das diferentes áreas do saber, excessivamente centrada nos conteúdos *per se*, secundarizando aspetos do conhecimento, tais como o sentido crítico, a criatividade, o raciocínio ou a capacidade de resolução de problemas. Não obstante ser reconhecida a forte ligação entre a Matemática e as Ciências, raramente os estudantes têm oportunidades de viver experiências interdisciplinares entre estas áreas (Frykholm & Glasson, 2005).

Todavia, o trabalho interdisciplinar entre Ciências e Matemática ganhou uma importância acrescida com a publicação do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (ME-DGE, 2017). Este documento mostra que o trabalho interdisciplinar pode constituir-se como uma referência no sistema educativo,

ao nível curricular, na planificação, implementação e avaliação do ensino e da aprendizagem.

Numa tentativa de contrariar a tendência de compartimentação na formação inicial de professores dos primeiros anos, o Departamento de Ciências Matemáticas e Naturais da Escola Superior de Educação de Santarém implementou uma iniciativa didática orientada para o ensino-aprendizagem indisciplinar da Matemática e das Ciências Físico-Naturais que denominou CreativeLab_Sci&Math.

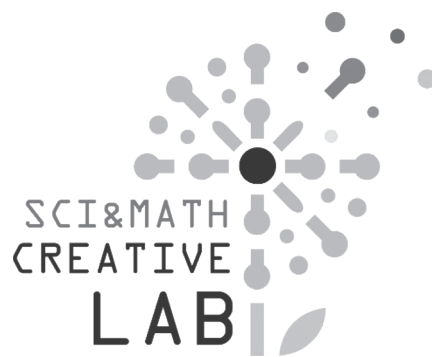


Figura 1. Logotipo do CreativeLab_Sci&Math

De seguida, iremos apresentar o contexto e o ambiente em que este trabalho tem vindo a decorrer e como as atividades interdisciplinares se planificaram e implementaram. Iremos também refletir sobre a pertinência da integração no ensino da Matemática e das Ciências, o modo como este trabalho tem promovido o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos, assim como as vantagens que lhe reconhecemos no contexto de formação inicial de professores.

CONTEXTO E AMBIENTE PEDAGÓGICO

O CreativeLab_Sci&Math tem, entre outros objetivos, a construção, implementação e avaliação de atividades interdisciplinares em Ciências Naturais e Matemática, desenvolvidas em contextos de formação inicial de professores

dos primeiros anos, assim como a partilha de recursos educativos em plataformas acessíveis aos docentes de outras instituições e níveis de ensino, como a Casa das Ciências. Grande parte do trabalho realizado com os estudantes, assim como o trabalho colaborativo dos docentes envolvidos, decorre num espaço que se foi progressivamente ajustando às necessidades e dinâmicas implementadas. O espaço CreativeLab_Sci&Math, inspirado no conceito de *sala de aula do futuro* (European Schoolnet, 2017), resultou da adaptação de um laboratório de ciências clássico que, mantendo essa valência, passou também a contemplar diferentes áreas ligadas aos vários momentos de trabalho teórico e prático interdisciplinar em sala de aula. Para além do espaço em si, a sala dispõe de sinal *wireless*, o que facilita o uso de equipamentos e recursos educativos digitais necessários às atividades.



Figura 2. O espaço CreativeLab_Sci&Math

A generalidade das atividades desenvolvidas no âmbito desta iniciativa integram-se na formação inicial de professores dos primeiros anos, nomeadamente com estudantes do curso de

licenciatura em Educação Básica e dos cursos dos mestrados que habilitam para a docência, o Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB e o Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, tanto em unidades curriculares de formação nas áreas de docência (Matemática e Ciências Físico-Naturais), como nas didáticas específicas. A implementação destas atividades no curso de Educação Básica, associadas a duas unidades curriculares do mesmo ano e semestre letivo, uma da área da Matemática (Modelação Matemática) e outra da área de Ciências Físico-Naturais (Ciências da Terra e da Vida), decorre com a presença em sala de aula de dois docentes em simultâneo. As duas áreas interagem entre si e relacionam os seus conteúdos e objetivos de aprendizagem para aprofundar o conhecimento dos estudantes e introduzir novas dinâmicas no ensino. O intercâmbio de saberes disciplinares é a base para a complementaridade do conhecimento e para um ensino mais flexível e integrado, no qual uma área auxilia a outra.

ATIVIDADES INTERDISCIPLINARES

A maioria das atividades interdisciplinares que são propostas aos estudantes, devidamente enquadradas nos objetivos e conteúdos programáticos de ambas as unidades curriculares, são planificadas e elaboradas em conjunto pelos docentes das duas unidades curriculares, seguindo uma estratégia *inquiry*. De acordo com autores como Hutchings (2007), o *inquiry* consiste num processo de aprendizagem centrado no estudante, promotor do pensamento crítico, reflexão e autoavaliação, trabalho em grupo, autonomia e da literacia científica, que concebe a aprendizagem através do questionamento, na procura do conhecimento de algo que não se sabe. Ernest (1991) distingue diferentes tipos de *inquiry* tendo por base o seu objeto ou foco, processo e pedagogia que lhe está associada. Este autor identifica

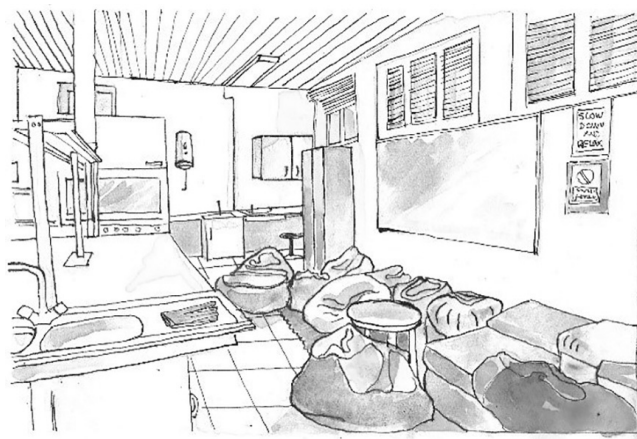


Figura 3. Duas das zonas do espaço CreativeLab_Sci&Math (Ilustrações por Clara Brito)

como modalidades de *inquiry*, de carácter progressivamente mais aberto, a descoberta guiada, a resolução de problemas e as investigações. Apesar das diferenças, em todas as modalidades, os estudantes trabalham a partir de problemas, colocam hipóteses, formulam conjecturas, planificam e executam ações no sentido de recolher evidências que permitam dar respostas aos problemas colocados, comunicando e justificando de forma fundamentadas as suas conclusões.

As propostas de trabalho de ambas as unidades curriculares são materializadas em guiões de atividades, organizados segundo os momentos do modelo de ensino 7E (BSCS, 2006; Kähkönen, 2016, Reis & Marques, 2016): *Engage, Explore, Explain, Exchange, Elaborate, Evaluate & Empowerment*.

No primeiro momento (*Engage*) pretende-se **motivar e envolver** os estudantes na temática em estudo e orientar o trabalho a partir de uma questão ou problema. Nesta fase aferem-se os conhecimentos prévios dos estudantes relativos ao tema e estabelecem-se as relações com conteúdos ou temas já estudados em Matemática e em Ciências, direcionando o seu pensamento para os objetivos de aprendizagem. Aqui o papel do professor é introduzir a problemática e explorar de forma breve a questão inicial ou problema, de modo a causar desequilíbrio cognitivo nos estudantes e motivá-los a saber mais sobre o tema ou a querer resolver o problema proposto.

No momento de **exploração** (*Explore*) os estudantes são envolvidos em atividades *hands-on* e *minds-on* para construírem ideias novas sobre a questão inicial, explorar hipóteses, conjecturar, estabelecer um plano de ação e conduzir uma pesquisa e recolher dados. Nesta fase é facilitado o acesso dos estudantes a materiais e a recursos diversos, sejam eles digitais, laboratoriais, manipuláveis ou outros, que lhes possam ser úteis para a realização do seu trabalho. O professor, que nesta fase assume um papel de facilitador, deve também proporcionar tempo e espaço, que permitam aos estudantes implementarem as suas estratégias para abordarem o problema proposto, tendo como ponto de partida as ideias iniciais. Deve ainda esclarecer dúvidas e auxiliar os estudantes que assim o solicitem a definirem um caminho viável para a consecução da atividade. Nesta fase, é muito importante promover a discussão e a aprendizagem cooperativa, permitindo aos estudantes apresentar as suas ideias e receber opiniões e sugestões dos seus pares. Em muitas situações, os estudantes têm de trabalhar em conjunto de modo a recolher e partilhar dados necessários à construção de modelos que permitam depois dar resposta aos problemas iniciais.

Ao longo da atividade, um ou mais momentos de **explicação** (*Explain*) são usados para focar a atenção dos estudantes em determinados detalhes relativos a conceitos ou processos, podendo haver a necessidade de os ajudar a melhorar a sua

compreensão dos mesmos, através de esclarecimentos diretos ou colocando-lhes questões adicionais que os ajudem a pensar. Esta fase é crucial para estabelecer, na sala de aula, uma linguagem comum e cientificamente rigorosa.

O momento de **elaboração** (*Elaborate*) é usado para envolver os estudantes em novas experiências de aprendizagem que os levem a aprofundar a sua compreensão dos conceitos de Matemática e Ciências abordados nos momentos anteriores. Um dos principais objetivos nesta fase é promover a transferência dos conhecimentos adquiridos para situações novas, relacionando-as com as realizadas anteriormente. Neste momento também é fundamental para a aprendizagem as discussões em grupo e o trabalho colaborativo.

Numa fase adiantada do trabalho importa que os estudantes tenham a possibilidade de **partilhar** (*Exchange*) as suas conclusões com os colegas e professores, explicando o que aprenderam. Para tal, pretende-se que usem linguagem e recursos digitais apropriados a essa apresentação, mostrando-se preparados para responder a questões formuladas quer pelos pares quer pelos docentes.

O momento de **avaliação** (*Evaluate*) proporciona oportunidades para que os estudantes possam aferir as suas aprendizagens. Nesta fase é muito importante dar *feedback* aos estudantes sobre os seus progressos e corrigir conceções erradas.

Em algumas atividades propostas poderá fazer sentido incluir um momento de discussão alargada sobre questões de natureza sociocientífica para aumentar a consciencialização dos estudantes acerca destes temas (*Empowerment*). Pretende-se que um tal momento **capacite** e mobilize os estudantes a assumir uma atitude proativa individual e junto da comunidade, mobilizando os conhecimentos adquiridos para a intervenção direta sobre essas questões.

A maioria das atividades interdisciplinares desenvolvidas dentro dos parâmetros descritos, inserem-se nas unidades curriculares de Ciências da Terra e da Vida e Modelação Matemática, do 2.º semestre do 3.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Santarém. De seguida, apresentamos algumas das atividades já publicadas em atas de eventos científicos ou revistas da especialidade:

1. CreativeLab_Sci&Math: A medida do tempo geológico.

Consistiu na construção de um modelo linear para o tempo geológico, com a identificação nesse registo de momentos fundamentais da geohistória, através da conversão do tempo de existência da Terra (aprox. 4540 M.a.) para uma escala de distâncias (Cavadas & Mestrinho, 2018).



Figura 4. Momentos da atividade **CreativeLab_Sci&Math: A medida do tempo geológico**

2. **CreativeLab_Sci&Math: Corrida no Jurássico.** Nesta atividade, as estudantes determinaram uma estimativa para a velocidade de deslocação de um dinossauro terópode com base na informação extraída de uma pista simulada de pegadas. Para tal construíram um modelo matemático a partir de dados empíricos relativos à locomoção bípede do ser humano. Esses dados permitiram a construção de um modelo de regressão linear que foi usado para dar resposta ao problema inicial (Mestrinho & Cavadas, 2018).

No âmbito das unidades curriculares de Didática das Ciências Físico-Naturais e Matemática e Resolução de Problema, do curso de Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico, foi realizada a atividade interdisciplinar:

3. **CreativeLab_Sci&Math: Sementes Criativas**, atividade interdisciplinar centrada no *Inquiry* e no seu diálogo com a resolução de problemas, organizada em torno do estudo das características das sementes que favorecem a sua disseminação pelo vento (Cavadas & Mestrinho, 2017).

Algumas das atividades interdisciplinares realizadas no âmbito deste trabalho colaborativo são adaptadas para o currículo do ensino básico e secundário, sendo posteriormente partilhadas

em plataformas de recursos educativos. Nesse processo, por vezes é solicitada a colaboração de docentes ou investigadores de instituições científicas ou de outras instituições de ensino superior, como foi o caso da seguinte atividade:

4. **CreativeLab_Sci&Math: A porosidade dos solos.** Esta atividade visa que os alunos do 1.º CEB compreendam o significado e realizem uma investigação sobre uma das características dos solos, a porosidade. Nesta atividade os alunos têm também a oportunidade de explorar conceitos ligados às grandezas e medida e números decimais (Cavadas, Mestrinho & Figueiroa, 2018).

CONCLUSÕES

As reflexões na ação e sobre a ação dos professores envolvidos neste projeto sobre as práticas pedagógicas interdisciplinares evidenciam, como pontos fortes:

- a construção colaborativa de atividades de acordo com um modelo (7E) e uma estratégia de ensino comum (*Inquiry*);
- a promoção do desenvolvimento profissional dos professores decorrente da partilha do saber didático e científico das respetivas áreas;



Figura 5. Momentos da atividade **CreativeLab_Sci&Math: Corrida no Jurássico**

- iii. a articulação, no papel de professor facilitador, em atividades letivas que implicam a presença simultâneas de ambos os docentes;
- iv. a reflexão partilhada das práticas pedagógicas;
- v. a construção colaborativa de um ambiente inovador de aprendizagem com as áreas e materiais adequadas ao trabalho pedagógico nas duas áreas científicas e uma melhor relação com o espaço no decorrer de atividades comuns;
- vi. a colaboração com investigadores e docentes de outras instituições de ensino superior;
- vii. a formação inicial de professores através da vivência em práticas pedagógicas interdisciplinares;
- viii. o aumento da produção científica dos docentes e da produção científica realizada entre docentes e estudantes (*papers*, comunicações);
- ix. a partilha das práticas desenvolvidas no âmbito do CreativeLab_Sci&Math em eventos científicos, *workshops*, partilha de materiais, etc.

No entanto, esta experiência pedagógica traz também importantes desafios:

- i. o desenvolvimento e gestão de uma matriz curricular integrada em matemática e ciências;
- ii. o aprofundamento do processo de avaliação das aprendizagens interdisciplinares;
- iii. a redefinição das relações entre os diferentes intervenientes (entre alunos, entre professor e alunos e entre professores a trabalharem em cooperação);
- iv. a avaliação do reflexo das práticas interdisciplinares que esses estudantes vivenciaram na licenciatura na prática de ensino supervisionada nos mestrados que habilitam para a docência.

Referências

- Biological Sciences Curriculum Study (2006). *The BSCS 5E Instructional model: Origins and effectiveness*. BSCS: Colorado Spring, CO.
- Cavadas, B. & Mestrinho, N. (2018). A medida do tempo geológico. In A. Peixoto, J. Oliveira, J. Gonçalves, L. Neves e R. Cruz (Eds.), *Educação em Ciências em múltiplos contextos - Atas do XVII Encontro Nacional de Educação em Ciências, XVII ENEC, I Seminário Internacional de Educação em Ciências, I SIEC*, 358-366. Viana do Castelo: Instituto Politécnico de Viana do Castelo - Escola Superior de Educação (ISBN – 978-989-8756-17-6). Disponível em http://apeduc.ipcb.pt/XVIIENEC_ATAS.pdf
- Cavadas, B., & Mestrinho, N. (2017). Uma experiência de Inquiry no ensino da Matemática e das Ciências Naturais. In M. V. Pires, C. Mesquita, R. P. Lopes, G. Santos, M. Cardoso, J. Sousa, E. Silva & Teixeira, C. (Eds.), *II Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE): livro de atas*, 426-435. Bragança, Portugal: Instituto Politécnico de Bragança. Disponível em <http://hdl.handle.net/10198/4960>
- Cavadas, B., Mestrinho, N., & Figueiroa, A. (2018). *CreativeLab_Sci&Math: A porosidade dos solos*. Disponível em <https://www.casadasciencias.org/cc/redindex.php?idart=303&gid=41095293>
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.
- European Schoolnet (2017). *Future Classroom Lab*. Disponível em <http://fcl.eun.org/learning-zones>.
- Frykholm, J. & Glasson, G. (2005). Connecting science and mathematics instruction: pedagogical content knowledge for teachers. *School, Science and Mathematics*, 105(3), 127-141.
- Hutchings, W. (2007). *Enquiry-Based Learning: Definitions and Rationale*. Manchester: The University of Manchester.
- Kähkönen, A-L. (2016). *Models of inquiry and the irresistible 6E model*. Obtido em <http://www.irresistible-project.eu/index.php/pt/blog-pt/168-models-of-inquiry-and-the-irresistible-6e-model>
- ME-DGE (2017). Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação. *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação. Retirado de http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf
- Mestrinho, N., & Cavadas, B. (2018). Corrida no Jurássico, *Revista de Ciência Elementar*, 6(01): 018. doi.org/10.24927/rce2018.018
- National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Reis, P., & Marques, A. R. (2016). *Investigação e inovação responsáveis em sala de aula. Módulos de ensino IRRESISTIBLE*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10451/25812>.
- Ríordáin, M. N., Johnston, J., & Walshe, G. (2016). Making mathematics and science integration happen: Key aspects of practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(2), 233-255.

NELSON MESTRINHO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM

BENTO CAVADAS

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM

Pode a escola ser diferente?¹

JOANA CONCEIÇÃO



Este ano o ProfMat e o SIEM foram acolhidos pela cidade de Almada, cidade para mim quase desconhecida apesar de estar aqui tão perto. A Escola Secundária de Cacilhas-Tejo recebeu-nos durante estes dias, apresentando-se como um espaço agradável e acolhedor com os recursos que muitas escolas gostariam de poder ter.

Durante quatro dias tivemos a oportunidade de ouvir, discutir, experimentar, refletir sobre questões atuais da Educação Matemática que, com maior ou menor proximidade, nos tocam a todos.

O programa destes encontros trouxe temáticas bastante atuais e abrangentes, com a presença de todos os níveis de ensino. Do trabalho que realizámos em conjunto, durante estes dias, gostaria de destacar as questões ligadas ao currículo e às tecnologias.

A discussão em torno do currículo assentou sobretudo nas questões mais recentes da flexibilização curricular, um processo que está ainda no início e que precisa de muita dedicação e reflexão para que possa dar os frutos que muitos de nós sabem ser possível. O que é a flexibilização curricular e como se pode concretizar foram aspetos que estiveram na base de algumas comunicações de colegas que estão a ser pioneiros neste trabalho e que nos trouxeram as suas experiências, os seus desafios, as suas expectativas. Estas discussões e partilhas em torno da flexibilidade são fundamentais para aprofundar a nossa reflexão e permitir aos professores desenvolver as ferramentas que precisam para que as suas escolas sejam também elas exemplos de autonomia e flexibilidade e que, assim, possam refletir a realidade de cada escola que é única. Algumas partilhas de colegas que estão agora em processos de flexibilização nas suas escolas mostraram um maior foco no trabalho em torno das competências transversais como a autonomia, o sentido crítico, o trabalho colaborativo, a reflexão, a avaliação formativa e formadora, entre outras.

Desta forma, este modelo de flexibilização traz ainda outras questões: Como é que se articula com o modelo de avaliação em vigor? Será que um modelo por testes e exames é o que ainda faz sentido? Para que serve avaliar? Para certificar? Ou poderá servir para promover aprendizagens? Será que a avaliação não poderá contribuir também para o desenvolvimento da cidadania?

A forma como o currículo ainda é construído, em Portugal, foi outro objeto de reflexão que nos foi trazido, nomeadamente a importância do currículo ser construído com a colaboração de todos os intervenientes no processo educativo. A forma como o currículo tem sido construído, sem o contributo daqueles que o vão pôr em prática, tem dado origem a uma distância considerável entre quem o constrói e quem o implementa, que possivelmente não beneficia o ensino. Assim, a investigação baseada em Design parece oferecer um caminho possível para uma aproximação entre o currículo prescrito e o currículo implementado.

O Programa de Matemática de 2007 constituiu um exemplo diferente, sobretudo porque houve um investimento significativo na formação dos professores que pareceu criar uma aproximação entre o currículo prescrito e o currículo implementado.

Ainda relativamente às questões curriculares, percebemos que, ao longo das últimas décadas, nem todas as mudanças de práticas partiram de mudanças no currículo e nem todas as mudanças curriculares constituíram mudanças nas práticas. É aqui evidente que o professor, mais do que ninguém, tem o poder para mudar o ensino (aliás as intervenções da Associação de Professores de Matemática tem mostrado isso mesmo).

Durante estes dias, e nas nossas práticas diárias como professores, procuramos, a cada momento fazer um pouco melhor, ajudar os alunos para quem a Matemática ainda é difícil a aprender melhor, a ir mais longe e dar o melhor de si. E os alunos com alto rendimento escolar? Como será que o ensino corresponde às suas expectativas e às suas necessidades?

Relativamente às tecnologias, estas também tiveram uma presença significativa neste ProfMat/SIEM. As comunicações evidenciaram dois aspetos: o uso da tecnologia como ferramenta na aula de matemática; e o uso da matemática para o

¹ Adoto este título para o meu texto a partir do título da comunicação proferida por António Teodoro, no painel plenário, *Curriculo e avaliação em Matemática*, deste ProfMat/SIEM.



desenvolvimento da tecnologia. Foram várias as comunicações que incidiram na importância das STEM (Sciences, Technology, Engineering, Mathematics) e do contributo da Matemática no trabalho interdisciplinar. Como pode a escola e a tecnologia estarem ainda tão distantes?

Se, no início do ProfMat/SIEM, nos perguntássemos se a escola pode ser diferente, se ainda tivéssemos essa dúvida, penso que ela estaria esclarecida no final destes quatro dias. As experiências que partilhámos e as reflexões que fomos fazendo, ao longo destes dias, mostram-nos que há muitas experiências que merecem ser partilhadas, divulgadas e disseminadas para que a escola possa ser efetivamente diferente do modelo que agora temos e que está desajustado. Sim, a escola pode ser diferente.

Gostaria de terminar este texto agradecendo à Comissão Organizadora toda a dedicação e todo o empenho para que tudo tivesse corrido da melhor forma e a todos os colegas que se disponibilizaram a partilhar os seus trabalhos, as suas reflexões, os seus percursos. Gostaria também de deixar um desafio à próxima Comissão. Este desafio passa por tornarmos os nossos encontros mais ecológicos e sustentáveis, com menos plásticos, com separação de resíduos, eventualmente com mais opções vegetarianas. Até para o ano.

JOANA CONCEIÇÃO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA



A aprendizagem da resolução das equações do 1.º grau – uma abordagem com balanças

O 3.º ciclo contempla a aprendizagem de vários métodos formais algébricos. Estes métodos constituem um marco no progresso na aprendizagem e a sua utilização permite aos alunos resolver vários problemas, levando-os rapidamente à solução e libertando-os de procurar estratégias alternativas. No entanto, a passagem dos métodos informais aos formais não é fácil para a maioria dos alunos. Muitas das vezes, as dificuldades que surgem com a aplicação dos métodos formais podem estar relacionadas com o ritmo a que os tópicos são estudados, bem como à abordagem predominantemente formal com que são apresentados (Herscovics & Linchevski, 1994). Assim, é importante envolver os alunos em experiências informais antes da manipulação algébrica formal de modo a que os métodos façam sentido. Os alunos devem ser envolvidos em experiências com múltiplas representações para que possam fazer conexões entre elas e os símbolos surjam de forma natural.

No 7.º ano está prevista a aprendizagem de resolução de equações do 1.º grau. No estudo deste conteúdo os alunos devem compreender o conceito de equação, reconhecendo o sinal de igual como uma relação entre quantidades e não como um símbolo que implica um cálculo. Por outro lado, devem aprender a resolver equações com fluência e aplicar este conhecimento na resolução de problemas.

Muitos alunos preferem frequentemente recorrer a métodos aritméticos, mostrando dificuldade na utilização de equações (Kieran, 2006). Embora à primeira vista o pensamento aritmético possa parecer um obstáculo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, ele também pode ser visto como uma via para esse desenvolvimento. Entre os processos aritméticos mais utilizados destacam-se as estratégias de tentativa e erro que consistem em atribuir um valor a uma quantidade desconhecida e verificar a sua exatidão, usando um raciocínio funcional, isto é, reconhecendo a relação existente entre as variáveis, mesmo que essa relação não seja expressa através de linguagem algébrica formal.

No trabalho com as equações, os alunos podem até perceber aquelas do tipo $ax + b = c$, mas têm muitas dificuldades em perceber equações quando a incógnita surge nos dois membros (Kieran, 1981). Este tipo de equações, inicialmente, deve também ser estudado informalmente, recorrendo a situações

em contextos que não sejam puramente matemáticos e que façam sentido para os alunos.

Existem várias abordagens distintas para o estudo das equações, cabe ao professor selecionar aquelas que considera mais adequadas às características dos seus alunos. Uma das possibilidades é o recurso a balanças. Ponte, Branco e Matos (2009) consideram que:

a situação das balanças em equilíbrio ajuda a desenvolver essa compreensão e a promover o surgimento de estratégias informais para a resolução de equações que os alunos devem conseguir justificar. Muitas vezes, essas estratégias permitem estabelecer relações com a representação da situação em linguagem algébrica e com os princípios de equivalência. (p. 11)

Neste artigo analiso as representações matemáticas utilizadas na resolução de uma tarefa introdutória ao estudo das equações que envolve balanças. É importante perceber como é que os alunos expressam as suas ideias matemáticas e como evoluem na aprendizagem de métodos formais, num contexto de trabalho baseado em experiências informais.

Descrevo o trabalho desenvolvido numa turma do 7.º ano constituída por 18 alunos, entre os 12 e 15 anos. Os alunos desta turma manifestam algumas dificuldades de aprendizagem, dois deles têm necessidades educativas especiais e cinco apresentam mais de duas retenções. Anteriormente os alunos já tinham estudado sequências, onde surgiu o conceito de variável na escrita das expressões geradoras. Posteriormente estudaram as expressões algébricas e a sua simplificação. Antes da introdução do conceito de equação já tinham alguma fluência na escrita e simplificação de expressões algébricas.

No estudo das equações do 1.º grau os alunos devem entender o conceito “equação”, saber escrever equações em contextos diversos, aprender a linguagem das equações (membros, termos, incógnita e solução) e resolver equações de diferentes tipologias.

A TAREFA – BALANÇAS EM EQUILÍBRIO

A tarefa é composta por cinco situações distintas, onde os alunos são desafiados a descobrir o valor de cada animal. Cada situação tem como propósito o trabalho com uma diferente tipologia de equação. As propostas estão organizadas de acordo com

a sua complexidade (crescente). Antes da entrega da tarefa questionei os alunos acerca do conhecimento das balanças com dois pratos. Todos eles afirmaram já ter visto “os pesos num prato e a fruta no outro... até ficar certinho”. Os alunos resolveram a tarefa de forma autônoma e posteriormente demos início à apresentação e discussão de processos de resolução. Para cada situação foram promovidos momentos de discussão e de síntese, estabelecendo uma ponte entre as produções dos alunos e o simbolismo algébrico.

Equações do tipo: $x + a = b$

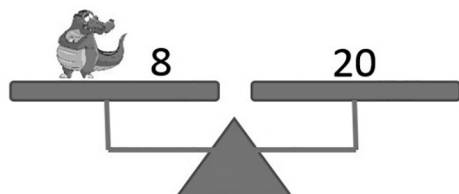


Figura 1. 1.ª situação

Se num prato da balança está 20kg e no outro está 8kg mas não sei qual o peso que cada crocodilo pesa 12 kg.	Crocodilo = $20 - 8 = 12$ kg	$20 - 8 = 12$
Tipo 1 - 1 aluno	Tipo 2 - 1 aluno	Tipo 3 - 16 alunos

Figura 2. Diferentes tipologias de respostas para a 1.ª situação

Todos os alunos da turma conseguiram facilmente responder que o valor desconhecido é 12, tendo surgido três tipologias de resposta. Um aluno apresenta uma explicação em linguagem natural sem explicitar com clareza qual foi a sua estratégia, outro aluno por tentativas, conforme explica na apresentação, verifica que 12 é o valor desconhecido. Os restantes alunos recorrem à subtração – operação inversa da adição.

Na discussão desta situação questionei os alunos acerca da condição que poderia ser escrita e da forma como pode ser obtido o valor desconhecido, ao que os alunos responderam sem dificuldade a equação que deveria ser escrita bem como o cálculo que poderia ser feito para obter a resposta. Procedi ao registo, no quadro, daquilo que os alunos disseram e expliquei-lhes a utilização do princípio de equivalência da adição para esta situação, escrevendo ao lado, conforme apresento na figura 3.

$$\begin{array}{l}
 x + 8 = 20 \\
 x = 20 - 8 \\
 x = 12
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \boxed{x + 8 - 8 = 20 - 8}$$

Figura 3. Resolução de equação do tipo $x + a = b$

O recurso à operação inversa surge de forma intuitiva e é um processo informal que coincide com aquilo que usualmente se faz na prática. Na realidade a maior parte das respostas dos alunos

vai ao encontro dos procedimentos habituais que resultam da aplicação do princípio de equivalência da adição.

Após esta discussão explico aos alunos, tendo como suporte esta primeira situação, que a condição escrita é uma equação e esclareço ainda o significado dos termos “incógnita”, “termo”, “membro” e “solução”. Proponho de seguida a resolução de outras equações deste tipo, $x + a = b$, com diferentes números positivos e negativos, levando-os à generalização (princípio de equivalência da adição). Para além disso explico ainda aos alunos a necessidade da utilização do sinal de equivalência entre cada passo na resolução das equações.

Equações do tipo: $ax = b$

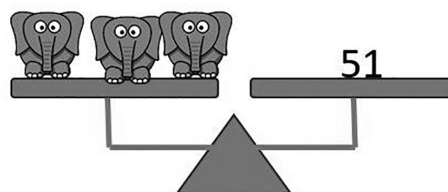


Figura 4. 2.ª situação

Se num prato da balança está 51kg e no outro está 3 elefantes qual o peso que cada elefante pesa 17 kg	Cada elefante = $51 : 3 = 17$ kg	$51 : 3 = 17$
Tipo 1 - 1 aluno	Tipo 2 - 1 aluno	Tipo 3 - 16 alunos

Figura 5. Diferentes tipologias de respostas para a 2.ª situação

Mais uma vez todos os alunos apresentaram facilidade em determinar o valor desconhecido, 17. À semelhança da primeira situação surgiram igualmente três tipologias de resposta. A maior parte dos alunos recorre à divisão. O recurso à operação inversa da multiplicação surge de forma intuitiva e é um processo informal que coincide com aquilo que usualmente se faz na prática, através da utilização do princípio de equivalência da multiplicação. Questionei os alunos acerca da equação que escreveriam bem como acerca dos procedimentos e facilmente responderam corretamente “temos de dividir”, desta vez utilizando já os termos “equação”, “incógnita”, “membro” e “solução”. Tal como na situação anterior expliquei e anotei ao lado o recurso ao princípio de equivalência da multiplicação para este caso, como apresento na figura 6.

$$\begin{array}{l}
 3x = 51 \\
 \Leftrightarrow x = \frac{51}{3} \\
 \Leftrightarrow x = 17
 \end{array}
 \quad \Leftrightarrow \quad
 \boxed{\frac{3x}{3} = \frac{51}{3}}$$

Figura 6. Resolução de equação do tipo $ax = b$

Os alunos resolveram depois outras equações do tipo $ax = b$

também com valores negativos tanto para a como para b , ganhando fluência na aplicação do princípio de equivalência da multiplicação.

Equações do tipo: $ax + b = c$

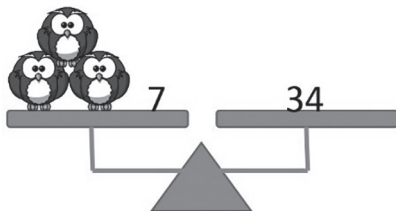


Figura 7. 3.ª situação

$34 - 7 = 27$ Cada $3 \times 9 = 27$	$34 - 7 = 27$ $27 \div 3 = 9$ 9kg/cada
Tipo 1 – 1 aluno	Tipo 2 – 13 alunos

Figura 8. Diferentes tipologias de respostas para a 3.ª situação

Nem todos os alunos conseguiram responder a esta situação que já envolve a utilização dos dois princípios de equivalência. Dos 14 alunos que conseguiram responder, 13 recorrem às operações inversas que equivalem à aplicação dos princípios de equivalência da adição e da multiplicação. Apenas um dos alunos utiliza inicialmente um raciocínio que equivale à aplicação do princípio de equivalência da adição, mas de seguida recorre a outro tipo de procedimento para obter o valor desconhecido (tipo 1). À semelhança das situações anteriores, os alunos traduziram para uma equação a situação apresentada bem como os procedimentos a efetuar, como mostro na figura 9.

$$\begin{aligned}
 3x + 7 &= 34 \Leftrightarrow 3x + 7 - 7 = 34 - 7 \\
 \Leftrightarrow 3x &= 34 - 7 \Leftrightarrow 3x = 27 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{27}{3} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{27}{3} \Leftrightarrow x = 9 \quad c.s. = \{9\}
 \end{aligned}$$

Figura 9. Resolução de equação do tipo $ax + b = c$

A resolução desta situação foi muito importante por coincidir com o estudo de uma equação do tipo $ax + b = c$ que envolve a aplicação dos dois princípios de equivalência, de forma ordenada. Os alunos, de um modo geral, compreenderam que primeiramente é necessário recorrer ao princípio de equivalência da adição e só posteriormente ao princípio de equivalência da

multiplicação.

Equações do tipo: $ax + c = bx + d$

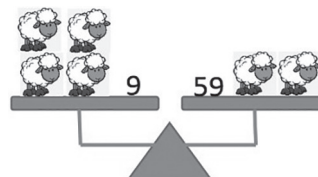


Figura 10. 4.ª situação

Tipo 1 – 9 alunos	Tipo 2 – 2 alunos

Figura 11. Diferentes tipologias de respostas para a 4.ª situação

A quarta situação, mais complexa do que a anterior, por envolver o valor desconhecido nos dois pratos da balança, levou a que sete alunos não respondessem e muitos dos outros tenham recorrido à tentativa e erro para descobrirem o valor em falta, como apresento na figura 11, tipo 1. Na discussão tento também que os alunos que apresentam resoluções do tipo 2 expliquem como pensaram.

Aluno A: Posso tirar duas ovelhas de cada prato que a balança continua em equilíbrio... depois já está!

Esta situação foi depois traduzida, com a colaboração dos alunos, pela equação e respetivo processo de resolução, ao qual acrescento ao lado o recurso aos princípios de equivalência, como apresento na figura 12.

$$\begin{aligned}
 4x + 9 &= 2x + 59 \Leftrightarrow 4x - 2x + 9 = 2x - 2x + 59 \\
 \Leftrightarrow 2x + 9 &= 59 \Leftrightarrow 2x + 9 - 9 = 59 - 9 \\
 \Leftrightarrow 2x &= 50 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{50}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= 25 \\
 c.s. &= \{25\}
 \end{aligned}$$

Figura 12. Resolução de equação do tipo $ax + c = bx + d$

Neste caso os alunos começam por usar duas vezes o princípio de equivalência da adição e só posteriormente o princípio de equivalência da multiplicação. Os alunos resolveram depois várias equações deste tipo, $ax + c = bx + d$.

Por fim, foi discutida a última situação.

Equações do tipo: $a(bx + c) = dx + e$

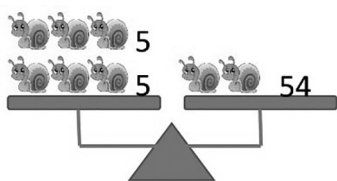


Figura 13. 5.ª situação

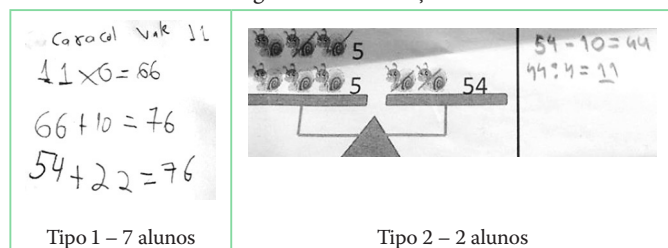


Figura 14. Diferentes tipologias de respostas para a 5.ª situação

Nesta situação nove alunos não responderam. Sete alunos responderam recorrendo à tentativa e erro e apenas dois alunos, como na 4.ª situação, recorreram às operações inversas.

Inicialmente, quando questionei os alunos acerca da equação que poderiam escrever, todos me responderam $6x + 10 = 2x + 54$. Questionei-os também acerca dos procedimentos que deveríamos fazer para a resolver e todos foram respondendo corretamente. Seguidamente questionei-os acerca do facto de poder existir eventualmente outra forma de escrever a equação:

Professora- Não haverá outra forma de escrever a equação? Olhem bem para o primeiro prato da balança...

Aluno B- São duas filas iguais (referindo-se aos 3 caracóis e ao número 5) ...

Professora- Então o que poderemos utilizar?

Aluno C- Parêntesis!

Questiono então os alunos acerca da utilização dos parêntesis ao que alguns me respondem de imediato que a equação seria $2(3x + 5) = 2x + 54$. Peço ainda que me expliquem como ficaria a equação após desembaraçar de parêntesis, o que leva os alunos a perceberem que obteriam $6x + 10 = 2x + 54$ – a mesma equação anteriormente escrita.

Os alunos a partir da resolução desta última situação resolveram depois outras equações e problemas que os levaram a uma compreensão mais ampla do conceito de equação e dos métodos algébricos associados à sua resolução.

A CONCLUIR

No processo de aprendizagem é importante incentivar os alunos a representar as suas ideias matemáticas de forma que façam sentido para eles, mesmo que essas representações não sejam convencionais. No entanto, é igualmente importante que os alunos aprendam as formas estabelecidas de representação que servem de base à atividade matemática e à comunicação das ideias matemáticas.

O recurso a estas diferentes situações de complexidade crescente, envolvendo balanças, pode ser um bom veículo para estimular o uso de representações informais que se revelaram importantes na aprendizagem formal da resolução de equações. Embora nem todos tenham conseguido resolver todas as situações propostas, os alunos recorreram ao uso de processos aritméticos como conhecimento de factos numéricos, a tentativa e erro ou às operações inversas que foram essenciais para a compreensão de representações formais. Ao longo da discussão das diferentes situações verifico que os alunos evoluíram na compreensão do conceito de equação, bem como na linguagem associada a este conceito. Para além disso, os alunos aprenderam a resolver equações a partir das suas estratégias informais e foram ganhando fluência na sua resolução. A notação algébrica, bem como os procedimentos usuais que têm subjacentes a aplicação dos princípios de equivalência, surgiram naturalmente nas suas produções. Esta prática revelou-se facilitadora na transição para um pensamento mais abstrato, necessário para desenvolver uma compreensão mais profunda e completa de um procedimento matemático tendo por base o conhecimento conceptual apoiado em representações intuitivas e informais.

Referências

- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59–78.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317–326.
- Kieran, C. (2006) Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11–50). Rotterdam: Sense.
- Ponte, J.P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

SANDRA NOBRE

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS PROFESSOR PAULA NOGUEIRA - OLHÃO

Como Galileu inventou um modelo matemático

“Vejam: o que constitui a *essência* do corpo, ou da matéria, sem a qual não pode ser pensado — e, consequentemente, não pode ser — é, para Galileu como para Descartes, e para este pelas mesmas razões, as suas propriedades matemáticas. Número, figura, movimento: aritmética, geometria, cinemática. A gravidade não está incluída.”

Koyré, A. (1966). *Études Galiléennes*. Paris: Hermann.

INTRODUÇÃO

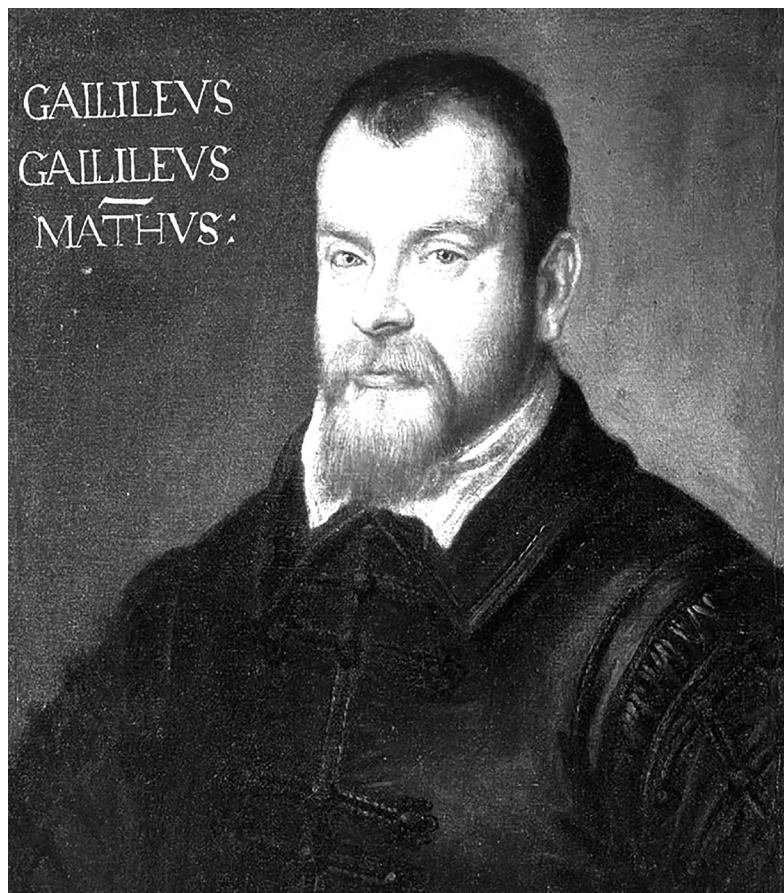
A utilização de modelos matemáticos para descrever a realidade é muito anterior a Galileu e algo de certo modo intuitivo. Por exemplo, se há 2000 anos um romano antigo quisesse ir de Lisboa a Roma a pé, sabendo que a distância era 1500 milhas, facilmente podia calcular quanto tempo demorava. Bastava conhecer quantas milhas podia andar por dia... e utilizar o seguinte modelo matemático (assume-se que andava 20 milhas por dia, 32 km):

$$\frac{1 \text{ dia}}{20 \text{ milhas}} \times 1500 \text{ milhas} = \frac{1500}{20} \text{ dias} = 75 \text{ dias}$$

Este raciocínio proporcional é certamente muito antigo (não necessariamente nesta forma de produto de um quociente tempo/distância por uma distância).

Galileu, o *Matematico Primario* e filósofo do Grande Duque da Toscana, foi uma pessoa excepcional, com grande irreverência intelectual, sempre disposto a olhar ideias antigas segundo novas perspectivas. Como todos os matemáticos e filósofos, estava interessado na “essência” das coisas, isto é, nas ideias abstratas gerais que permitem dar sentido ao maior número possível de situações. Estava, pois, interessado em descobrir as leis da Natureza, entendendo por Natureza *não apenas as coisas concretas mas também os objetos matemáticos*.

Neste artigo mostra-se o modo como Galileu inventou um modelo matemático simples para descrever um certo tipo de movimento, o “movimento naturalmente acelerado”, já analisado por muitos filósofos antigos mas apenas numa perspectiva semi-quantitativa que não permitia obter regras gerais e empiricamente testáveis. E, no final, como estamos no século XXI, utiliza-se uma ferramenta computacional (Geogebra) para representar e explorar “movimentos naturalmente acelerados”...



Um dos dedos de Galileu está exposto no Museu da Ciência em Florença, Itália. Durante séculos, os mártires foram imortalizados através de relíquias, algumas um pouco macabras... Este dedo de Galileu ilustra, de certo modo, como ele foi um mártir da ciência e do pensamento moderno, livre da tutela religiosa.
https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei

GALILEU PENSA UTILIZANDO GEOMETRIA, NÃO ÁLGEBRA...

Um dos aspetos interessantes do pensamento de Galileu é que ele não era capaz de fazer abordagens algébricas a quantidades proporcionais. Por exemplo, para descrever o movimento com velocidade constante, representava a distância por segmentos de reta e o tempo decorrido por outros segmentos de reta...

e em seguida estabelecia relações geométricas entre esses segmentos, como se ilustra no texto seguinte, do livro *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências*, escrito por Galileu no final da sua longa vida:

THEOREM I, PROPOSITION I

If a moving particle, carried uniformly at a constant speed, traverses two distances the time-intervals required are to each other in the ratio of these distances.

Let a particle move uniformly with constant speed through two distances AB, BC, and let the time required to traverse AB be represented by DE; the time required to traverse BC, by EF;

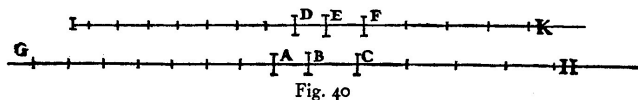


Fig. 40

then I say that the distance AB is to the distance BC as the time DE is to the time EF.

Para quantidades diretamente proporcionais, este tipo de abordagem é relativamente simples de utilizar. Quando não há proporcionalidade direta, como era evidente no caso de um movimento naturalmente acelerado, em que a distância percorrida está constantemente a aumentar de modo não proporcional ao tempo decorrido, a utilização de abordagens geométricas revela-se bastante mais complicada! Por isso, neste texto, vamos utilizar uma abordagem algébrica.

MOVIMENTO NATURALMENTE ACELERADO

Um exemplo de “movimento naturalmente acelerado” é o movimento de um corpo deixado cair de uma certa altura. Quando se deixa cair o corpo, a velocidade deste é nula e, à medida que o corpo cai, *parece* ir cada vez mais depressa. Que fazer para concluir se isso é verdade? Haverá alguma regra matemática que descreva esse movimento naturalmente acelerado?

Quando a velocidade é constante, é muito fácil medir a velocidade; mas, claro, primeiro é necessário definir o que é a velocidade, algo que Galileu começou evidentemente por fazer, relacionando distâncias percorridas e tempos decorridos a percorrer essas distâncias. Quando a velocidade não é constante, como *deve* ser o caso no movimento naturalmente acelerado, a velocidade não pode ser medida dividindo simplesmente a distância percorrida pelo tempo decorrido porque estas duas quantidades estão permanentemente a aumentar de modo não proporcional.

A IMPORTÂNCIA DA EXPERIMENTAÇÃO

Ao contrário de Aristóteles e dos outros filósofos antigos, Galileu pensou que era relevante fazer medições rigorosas de modo a poder confrontar ideias com dados experimentais. A tradição antiga desvalorizava a obtenção de dados experimentais e valorizava a especulação e argumentação verbal.

Mas Galileu tinha um problema para obter dados experimentais: o movimento de queda livre era muito rápido (e no tempo de Galileu não havia nem sensores, nem computadores, nem

telemóveis com cronómetros que podem medir centésimas de segundo, etc., ...).

Simples, pensou Galileu: há que arranjar um movimento semelhante, mas mais lento! O movimento ao longo de um plano inclinado é semelhante à queda livre — a queda livre vertical pode ser considerada como um movimento ao longo de um plano inclinado de 90°. Logo, as regras matemáticas do movimento ao longo do plano inclinado devem ser as mesmas do movimento de queda livre.

No *Museu Galileo* (<https://www.museogalileo.it>, Florença, Itália) está uma reprodução aproximada do plano descrito por Galileu, tal como ilustra a seguinte figura.



Galileu descreve o plano e a experiência do seguinte modo, no livro *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências* (tradução original na versão portuguesa do curso “Projecto Física, editada pela Fundação Gulbenkian):

“Tomou-se uma tábua de madeira, com cerca de 12 cúbitos de comprimento [aproximadamente 6 metros], meio cúbito de largura e três dedos de espessura; na sua face cortou-se um canal com pouco mais de um dedo de altura; feito o entalhe tão rectilíneo quanto é possível, liso e polido, e tendo-se revestido o mesmo com pergaminho, também tão suave e polido quanto possível, fez-se rolar ao longo dele uma esfera pesada de bronze, perfeitamente redonda e de superfície suave. Colocado o conjunto numa posição inclinada, elevando-se uma das extremidades cerca de um ou dois cúbitos em relação à outra, fizemos rolar a bola, como dizia, ao longo do canal, anotando, da maneira que vamos descrever, o tempo necessário para a descida. A experiência foi repetida várias vezes, de modo a medir o tempo com uma precisão tal que a diferença entre os valores correspondentes a duas experiências nunca excedesse um décimo do batimento do pulso. Tendo realizado esta operação e tendo-nos assegurado da sua fiabilidade, fizemos rolar a esfera apenas um quarto do comprimento do canal; e tendo medido o tempo de descida, verificámos que era exactamente metade do primeiro. A experiência foi então repetida para outras distâncias, comparando o tempo de descida total com o de metade da descida, ou com o de dois terços, ou com o de três quartos ou, na verdade, com o

de qualquer outra fracção; em tais experiências, repetidas uma centena de vezes, verificámos sempre que os espaços percorridos estavam em relação uns com os outros tal como os quadrados dos tempos, e isto foi verdade para todas as inclinações do ... canal ao longo do qual fizemos rolar a esfera...” (p. 56)

A medição do tempo decorrido é também cuidadosamente descrita por Galileu:

“Para a medição do tempo, utilizámos um grande reservatório de água, colocado numa posição elevada; no fundo deste reservatório estava soldado um tubo de pequeno diâmetro que fornecia um fino jato de água, que recolhemos numa pequena taça durante o tempo de cada descida, fosse para todo o comprimento do canal, fosse para qualquer fração dele; a água assim recolhida era pesada numa balança muito precisa; as diferenças e os quocientes destes pesos davam-nos as diferenças e os quocientes dos intervalos de tempo, e isto com uma precisão tal que, embora a operação fosse repetida muitas e muitas vezes, não houve qualquer discrepância apreciável nos resultados.” (p. 59)

Galileu nunca publicou os valores medidos nas diversas experiências. Alguns historiadores acreditavam que Galileu tinha “embelezado” os dados para evidenciar um modelo matemático “certinho” mas, na década de 1970, um historiador descobriu por acaso um manuscrito do espólio de Galileu onde estavam os registos originais.

George Johnson (*The Ten Most Beautiful Experiments*, 2008), apresenta esses valores:

“ticks” (tempo decorrido)	<i>punti</i> (distância percorrida)
1	33
2	130
3	298
4	526
5	824
6	1192
7	1620
8	2104

Que significado têm estes valores? À primeira vista, não parece haver qualquer regularidade...

Depois de uma análise cuidadosa, Galileu anotou que:

- 130 *punti* (a distância percorrida ao fim de 2 unidades de tempo) é aproximadamente 4 vezes a distância percorrida numa unidade de tempo (33 *punti*);
- 298 *punti* (a distância percorrida ao fim de 3 unidades de tempo) é aproximadamente 9 vezes a distância percorrida numa unidade de tempo (33 *punti*);
- 526 *punti* (a distância percorrida ao fim de 4 unidades de tempo) é aproximadamente 16 vezes a distância percorrida numa unidade de tempo (33 *punti*);
- 824 *punti* (a distância percorrida ao fim de 5 unidades de tempo)

é aproximadamente 25 vezes a distância percorrida numa unidade de tempo (33 *punti*);

Eureka! A regra metamática é, afinal, bem simples:

- Quando o tempo decorrido duplica, a distância percorrida aumenta $4 = 2^2$ vezes;
- Quando o tempo decorrido triplica, a distância percorrida aumenta $9 = 3^2$ vezes;
- Quando o tempo decorrido quadruplica, a distância percorrida aumenta $16 = 4^2$ vezes;
- Quando o tempo decorrido quintuplica, a distância percorrida aumenta $25 = 5^2$ vezes;

Ou seja, reformulando a tabela anterior e representando por t o tempo decorrido para percorrer a distância d :

t	t^2	d	d / t^2
1	1	33	33
2	4	130	33
3	9	298	33
4	16	526	33
5	25	824	33
6	36	1192	33
7	49	1620	33
8	64	2104	33

A proporcionalidade direta entre a distância percorrida e o tempo decorrido pode ser representada do seguinte modo:

$$\frac{d}{t^2} = 33$$

Nesta equação, d está em *punti*, uma unidade de distância, t está em “ticks”, uma unidade de tempo, e 33 está, evidentemente em *punti/ticks*². O valor desta constante de proporcionalidade depende, naturalmente, da inclinação do plano: quanto mais inclinado estiver, maior será o seu valor.

Mas que significado tem este valor?

Empiricamente não era possível ir mais além. Galileu *sentia* que era necessário introduzir novas ideias para descobrir o significado daquela relação, tão bem descrita pelo poeta e professor António Gedeão no seu *Poema para Galileu*, :

(...)

Por isso estoicamente, mansamente,
resististe a todas as torturas,
a todas as angústias, a todos os contratempos,
enquanto eles, do alto incessível das suas alturas,
foram caindo,
caindo,
caindo,
caindo sempre,

e sempre,
ininterruptamente,
na razão directa do quadrado dos tempos.

[http://www.citi.pt/cultura/literatura/poesia/antonio_gedeao/galileu.html]

A IMPORTÂNCIA DA “TEORIA”...

Galileu demorou quatro anos a descobrir o significado da relação experimental que obteve para descrever o movimento naturalmente acelerado. Depois de alguns erros e hesitações (a velocidade aumentava à medida que a distância percorrida e o tempo decorrido aumentava... — seria a velocidade que a esfera atingia proporcional à distância percorrida ou ao tempo decorrido...?), Galileu colocou a hipótese seguinte: a velocidade da esfera ao fim do tempo t era diretamente proporcional ao tempo decorrido t até atingir essa velocidade:

$$\frac{v}{t} = \text{constante}$$

Se o movimento for “continuamente acelerado”, a velocidade v ao fim do tempo t é dada por:

$$v = \text{constante} \times t$$

Esta “constante” representa, pois, a taxa de variação da velocidade. Galileu designou esta nova quantidade por aceleração, que vamos representar por a . [Em rigor, velocidade e aceleração são quantidades vetoriais e nestas equações estamos apenas a representar a magnitude dessas quantidades vetoriais].

Assim, tem-se:

$$v = a \times t$$

A unidade de aceleração, se v for expressa em *punti/ticks* e t em ticks, é:

$$\frac{\frac{\text{punti}}{\text{ticks}}}{\text{ticks}} = \text{unidades de aceleração}$$

Ou seja:

$$\frac{\text{punti}}{\text{ticks}^2} = \text{unidades de aceleração}$$

Mas estas unidades são as mesmas unidades daquela constante empírica que Galileu tinha obtido no movimento ao longo do plano inclinado (33 *punti/ticks*²)! Seria que esse valor era simplesmente a aceleração da esfera ao longo do plano inclinado...?

Desde o século XIV que era conhecida uma importante regra matemática, que Galileu vai utilizar para obter o significado daquela constante: a chamada “regra de Merton” segundo a qual o valor médio de uma quantidade que varie de modo uniforme pode ser calculado como a média do valor inicial e do valor final.

Assim, o valor médio da velocidade da esfera ao longo do plano inclinado pode ser calculado como a média da velocidade no

final e a velocidade no início:

$$v_{\text{média}} = \frac{v_{\text{final}} + v_{\text{inicial}}}{2}$$

Como a esfera inicia o movimento a partir do repouso, a velocidade inicial é nula. Logo:

$$v_{\text{média}} = \frac{v_{\text{final}}}{2}$$

Mas, por outro lado, o valor médio da velocidade também pode ser calculado conhecendo a distância percorrida d e o tempo gasto t :

$$v_{\text{média}} = \frac{d}{t}$$

Ou seja, há dois processos diferentes de calcular a velocidade média ao longo do plano inclinado. Assim, podemos escrever:

$$\frac{v_{\text{final}}}{2} = \frac{d}{t}$$

Mas já vimos que a velocidade de um objeto com aceleração a , ao fim do tempo t , é

$$v_{\text{final}} = a \times t$$

Substituindo esta equação na anterior, obtém-se:

$$\frac{a \times t}{2} = \frac{d}{t}$$

Rearranjando, vem:

$$\frac{a}{2} = \frac{d}{t^2}$$

Está resolvido o mistério da constante obtida experimentalmente! Afinal não pode ser o valor da aceleração mas sim metade desse valor.

Exprimindo a distância percorrida d como variável dependente, tem-se:

$$d = \frac{1}{2} a t^2$$

Este é, pois, o modelo matemático do “movimento naturalmente acelerado” ao longo do plano inclinado e, claro, do movimento de queda livre. Em unidades modernas, no Sistema Internacional de Unidades, t exprime-se em segundos, a em metros por segundo, por segundo, e d em metros (o coeficiente $1/2$ não tem unidades):

$$\begin{aligned} m &= \frac{\frac{m}{s}}{s} \times s^2 \\ &= \frac{m}{s^2} \times s^2 \\ &= m \end{aligned}$$

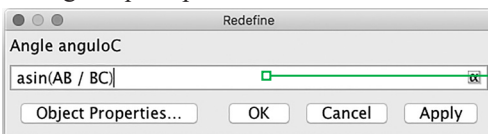
UM MODELO EM GEOGEBRA

É relativamente fácil construir um modelo em Geogebra do movimento num plano inclinado, como se exemplifica no exemplo ao lado.

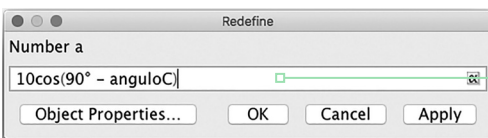
A distância percorrida d é função do tempo decorrido t . Todas as grandezas estão representadas em unidades do Sistema Internacional.

A aceleração ao longo do plano é uma fração da aceleração da gravidade, 10 m/s em cada s. As coordenadas da esfera são calculadas tendo em conta a distância percorrida d e o facto da esfera partir do ponto B. Na sequência de imagens, pode verificar-se que duplicando o tempo decorrido (de 0,2 para 0,4 unidades), a distância percorrida quadruplica, tal como Galileu descobriu.

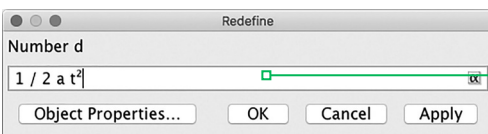
Cálculo do ângulo que o plano faz com a horizontal.



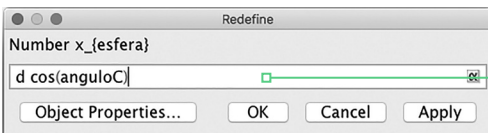
Cálculo da magnitude da aceleração ao longo plano.



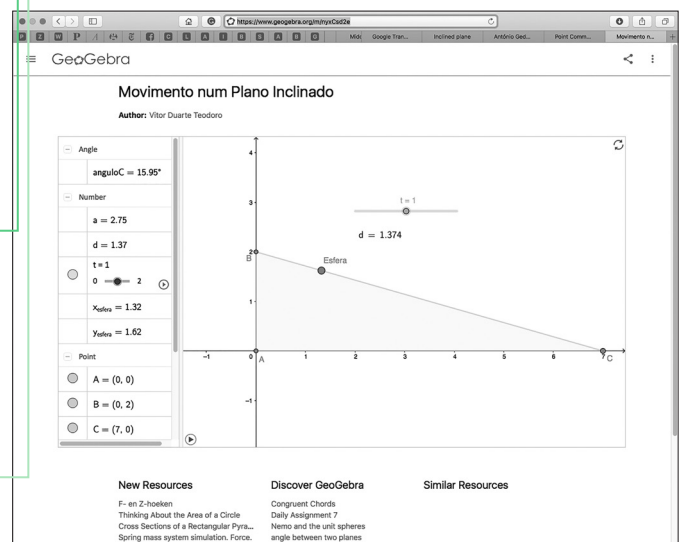
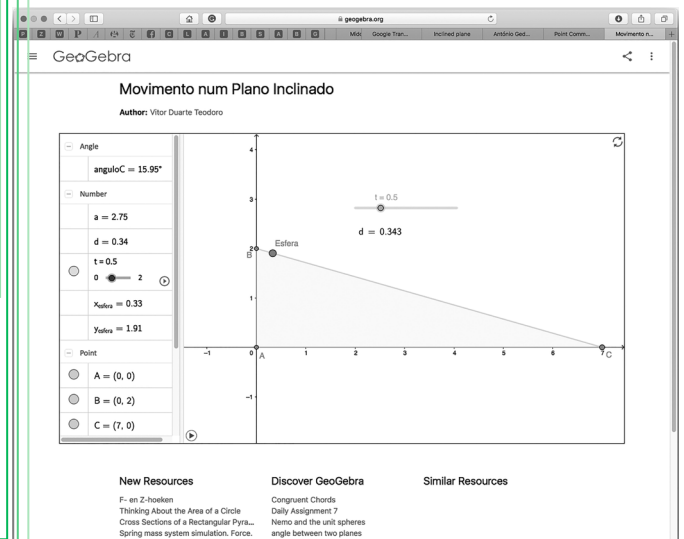
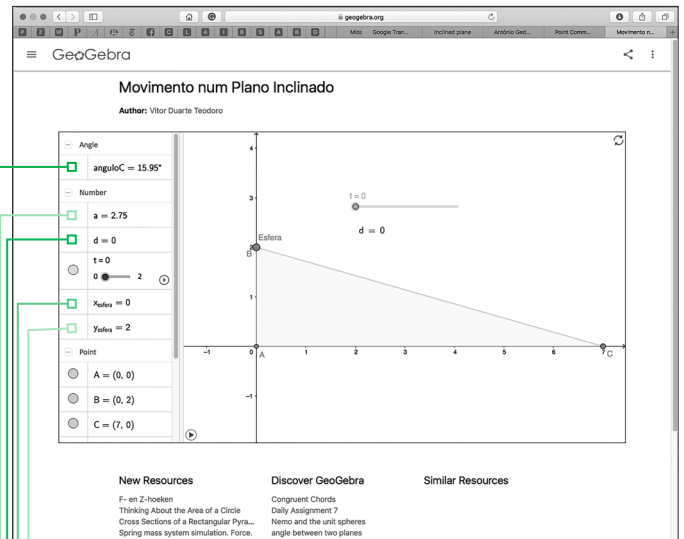
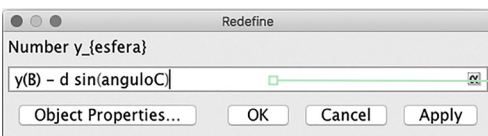
Cálculo da distância percorrida em função do tempo decorrido t .



Cálculo da coordenada horizontal da esfera, no referencial da figura.



Cálculo da coordenada vertical da esfera, no referencial da figura.



(<https://www.geogebra.org/m/nyxCsd2e>)

VITOR DUARTE TEODORO

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, UNL

TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

António Domingos

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

APM 2018 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

*A Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indistintamente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um nº de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados individuais têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito

também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista Quadrante.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados terão descontos na requisição de materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos na formação e em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Assinatura das revistas Educação & Matemática e Quadrante

		Educação & Matemática 3 números + 1 número duplo temático	Quadrante (2 números)
Associado individual	Portugal		15,00€
	Estrangeiro		30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas Educação & Matemática e Quadrante

	Educação & Matemática		Quadrante
	Temática		
Associado	Normal	10,00€	10,00€
		7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	

Modalidades de associado individual	Quota
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	Quota
Modalidade I (1 exemplar da E&M)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da E&M)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da E&M+Quadrante)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da E&M+Quadrante)	140,00 €

Editorial

- 01 **Atrás dos tempos vêm tempos e outros tempos hão de vir**
Direção da APM

Artigos

- 03 **Para uma bibliografia comentada de livros infantis “com matemática”**
Fátima Mendes, Ana Luísa Costa
- 09 **O Estado da Educação 2016: breves notas**
Pedro Abrantes
- 12 **Projecção Estereográfica**
Eduardo Veloso
- 18 **Avaliar para as aprendizagens — Um caminho que se faz avaliando**
Cristina Loureiro
- 24 **Menino Cúbico**
Critina Morais
- 33 **Práticas Interdisciplinares em Matemática e Ciências Naturais na formação inicial de professores**
Nelson Mestrinho, Bento Cavadas
- 38 **Pode a escola ser diferente?**
Joana Conceição

Secções

- 11 **Materiais para a aula de Matemática**
Problemas sobre o livro “365 pinguins”, *Fátima Mendes, Beatriz Ribeiro e Inês Soares*
- 16 **Pontos de vista, reações e ideias, ...**
Flexibilidade e Autonomia? sem tempo..., sem confiança..., restam os exames..., *Adelina Precatado*
- 27 **Caderno de Apontamentos de Geometria** *Cristina Loureiro*
Ângulos externos de um polígono e voltas completas
- 30 **O Problema do Profmat 2018** *José Paulo Viana*
O Problema do Profmat 2018
- 31 **O Problema deste número** *José Paulo Viana*
Data de nascimento
- 40 **Espaço GTI**
A aprendizagem da resolução das equações do 1.º grau – uma abordagem com balanças
Sandra Nobre
- 44 **Tecnologias na Educação Matemática** *António Domingos*
Como Galileu inventou um modelo matemático, *Vitor Duarte Teodoro*