

Educação e Matemática

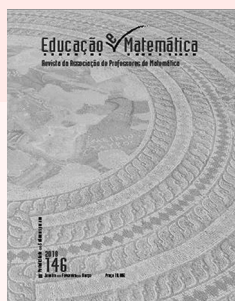
Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2018
146

■ Janeiro ∞ Fevereiro ∞ Março

Preço 10,00€



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Catarina Delgado
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Filipa Machado
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	João Terroso
	Manuela Pires
	Silvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
 Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
 Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
 José Paulo Viana **O problema deste número**
 Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Março de 2018

Tiragem 1000 exemplares

Periodicidade

Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
 Urbanização Vale Azul, n.º 8
 Casal da Espinheira
 2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

A capa da edição 146 da EM reproduz numa pavimentação em mosaico romano (Parque Arqueológico de Paphos, Chipre) o duelo mítico entre o herói grego Theseu e o Minotauro, criatura imaginária, com a cabeça de um touro num corpo de homem. No mito, Theseu consegue triunfar sobre o Minotauro e abandonar o labirinto. O Labirinto do Minotauro é uma das histórias mais divulgadas da mitologia grega, tendo chegado a Portugal, também, pela cultura do império Romano e podendo ser observada nas ruínas romanas de Conímbriga.

Os labirintos têm sido utilizados, ao longo dos tempos, por exemplo, na matemática, na literatura, na poesia, na religião e na pintura. Com diferentes interpretações no imaginário humano, o Labirinto do Minotauro exprime-se como uma metáfora para a luta incessante do ser humano contra o obscuro, o medo do desconhecido, conseguindo, por fim, obter a clareza e a sabedoria.

Neste número também colaboraram

Carlos Alberto Assis, Carlota Brasileiro, Cristina Cruchinho, Eduardo Veloso, Fátima Simões, Fernando Nunes, Isabel Correia, Isabel Rocha, José Paulo Viana, Manuela Pires, Maria Emília Brederode Santos, Mário Bessa, Neusa Branco, Patrícia Damas Beites, Rogério Berrincha, Sandra Bento, Sílvia Semana, Susana Colaço (A.Khan), Susana Colaço (IPS), Thiago Barcelos Castilhos

Saiu da Redação da Educação e Matemática

No final de 2017, saiu da Redação a nossa colega Helena Amaral. Esta nota corresponde ao agradecimento público que fazemos aos colegas que colaboraram connosco, mas neste caso precisamos de um preâmbulo.

A Helena Amaral integrou a equipa em 1996, na edição do número 39, curiosamente o número que antecede a publicação da revista dedicada ao 1.º ciclo, o seu ciclo de ensino. São portanto 103 as edições em que participou, ao longo de quase 22 anos. Como a própria Helena gosta de dizer, “ainda é do tempo” em que os redatores paginavam a revista, recorrendo aos seus conhecimentos em PageMaker, numa versão muito menos sofisticada e com muito menos recursos do que os que existem hoje. Além do contributo que tem dado, a Helena tem sido um testemunho da história da Educação e Matemática que é feita não só dos números que são publicados, mas também das pessoas que têm “passado” pela Redação, das suas ideias, energia e conhecimento. Agradecemos assim à Helena Amaral o muito que nos deu ao longo destes anos.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
 Rua Dr. João Couto, n.º 27-A, 1500-236 Lisboa
 Tel: (351) 21 716 36 90
 Fax: (351) 21 716 64 24
 E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

O Professor no seu Labirinto

Os professores em Portugal parecem encontrar-se numa situação paradoxal: por um lado, os resultados escolares têm vindo a melhorar¹ e os professores gozam de uma imagem positiva por parte dos alunos e dos seus familiares². Também uma sondagem recente num jornal popular colocava a escola e os professores à frente, na “confiança dos portugueses, da Igreja, dos Tribunais, da Banca ou dos Hospitais”.

Mas, por outro lado, “em Portugal regista-se uma elevada percentagem de professores que se sentem muito pouco reconhecidos no seu local de trabalho” e poucos são os alunos do secundário que quereriam seguir uma carreira ligada à educação³.

Se os resultados dos alunos têm melhorado, permanece uma taxa de retenção escolar que é das mais elevadas da OCDE e que continua a ser precoce (começa logo no 2.º ano de escolaridade), injusta (por ser muito mais provável nas crianças de meios mais desfavorecidos) e inútil⁴. A prevalência da “metodologia expositiva” na sala de aula (que é considerada das mais elevadas entre os países da OCDE) é apontada como um dos fatores possíveis de explicação para o insucesso escolar em Portugal.

Os directores de escolas do 3.º Ciclo e Secundárias consideram que o maior problema dos professores é “a resistência à mudança” que se traduziria, por exemplo, na pouca frequência de aulas

dadas em conjunto mas é a própria organização do tempo e do espaço da escola que o dificulta.

Estas aparentes contradições colocam os professores numa situação paradoxal e penosa. Sentem que a sua profissão se tornou muito mais complexa, que as suas funções se multiplicaram e não podem ser reduzidas à antiga definição do ensino como “transmissão de conhecimentos”.

Os professores sabem que o mundo mudou. Hoje, quando a educação é reconhecida como um direito de todos os cidadãos e uma necessidade de desenvolvimento das sociedades, os resultados já não são só atribuídos aos alunos e às famílias, tornaram-se também uma responsabilidade das escolas e dos professores.

Essa responsabilidade torna a profissão de professor muito mais exigente, múltipla e complexa. Os professores sabem que têm que diversificar metodologias e diferenciar a sua pedagogia. Mas sentem-se espartilhados numa lógica que se autossustenta: programas extensos e inadequados, exames sobre esses programas, gestão pouco pedagógica, horários sobrecarregados que não favorecem a articulação e a colaboração entre colegas, numa tradição de isolamento que os condiciona e leva à imutabilidade.

Para que os professores não se sintam acusados nem acoitados, para que não se sintam “de pés e mãos atados”, muito tem que mudar na escola, mas essa mudança tem que ser feita com eles e com os parceiros, principais interessados – alunos, pais, comunidade.....

O Conselho Nacional de Educação (CNE), com a riqueza, variedade e representatividade dos seus Conselheiros, pode contribuir para abrir caminhos de mudança neste labirinto de expectativas contraditórias.

MARIA EMÍLIA BREDERODE SANTOS

PRESIDENTE DO CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

¹ No Prefácio do Estado da Educação 2016 “Os resultados das avaliações internacionais do final do 1º Ciclo (TIMMS) e aos 15 anos (PISA) têm revelado claras melhorias nas aprendizagens dos alunos portugueses. Estes estudos realçam também o aumento da percentagem de escolas portuguesas inseridas em meios socioeconómicos desfavorecidos capazes de mitigarem a desvantagem dos alunos.” (p.7).

² “Os alunos portugueses do 4º ano não só se sentem bem na escola como têm os professores em grande consideração. 88% dos alunos afirmam que o seu professor tem um grande sentido de envolvimento com os alunos, porque conhece as suas necessidades, expõe de forma clara e fácil de compreender, dá trabalhos interessantes, sabe ouvir os alunos e dá bom feedback para que os alunos possam melhorar” (E.E. 2016, p.34).

³ Estado da Educação 2016, CNE, (p.40)

⁴ Ver prefácio Estado da Educação 2016, CNE, (p.7)

PUBLICAÇÕES APM

PRINCÍPIOS ORIENTADORES PARA A MATEMÁTICA ESCOLAR

Ensino e Aprendizagem.
Acesso e Equidade.
Currículo.
Ferramentas e Tecnologia.
Avaliação.
Profissionalismo.

PRÁTICAS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Estabelecer metas matemáticas para enfatizar a aprendizagem
Propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas
Usar e relacionar representações matemáticas
Favorecer um discurso matemático significativo
Colocar questões pertinentes
Chegar à fluência procedimental a partir da compreensão conceptual
Apoiar um esforço consequente na aprendizagem da matemática
Obter e utilizar evidência do pensamento dos alunos.



Preço de capa: €18,00

Preço de sócio: €15,00

PREÇOS ESPECIAIS PARA FORMAÇÃO

Inclua no material para os seus formandos esta importante obra;

para grandes encomendas temos preços especiais:

A partir de 25 exemplares até 49 exemplares:	preço unitário 10,00€
A partir de 50 exemplares até 99 exemplares:	preço unitário 7,00€
A partir de 100 exemplares:	preço unitário 6,00€



217163690; encomenda@apm.pt

O Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular – PAFC

CRISTINA CRUCHINHO

Em julho de 2017, no Despacho nº 5908, publicado no Diário de República do dia 5 desse mesmo mês, pude começar a ler ideias como: “autonomia e flexibilidade curricular”, “valorização da gestão e lecionação interdisciplinar e articulada do currículo através do desenvolvimento de projetos que aglutinem aprendizagens das diferentes disciplinas”, “assunção da importância da natureza transdisciplinar das aprendizagens, da mobilização de literacias diversas, de múltiplas competências, teóricas e práticas, promovendo o conhecimento científico, a curiosidade intelectual, o espírito crítico e interventivo, a criatividade e o trabalho colaborativo”, “flexibilidade contextualizada na gestão do currículo utilizando os métodos, as abordagens e os procedimentos que se revelem mais adequados para que todos os alunos alcancem o Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória”.

Já me tinha cruzado com discussões sobre o Perfil dos alunos à saída da Escolaridade Obrigatória, mas movida pela sua referência no Despacho nº 5908, que me estava a deixar bem curiosa e inquieta, fui analisar o documento e entre princípios e valores, saliento o que se pode ler sobre competências-chave, “os sistemas educativos têm vindo a mudar de paradigmas centrados exclusivamente no conhecimento para outros que se focam no desenvolvimento de competências – mobilizadoras de conhecimentos, de capacidades e de atitudes – adequadas aos exigentes desafios destes tempos, que requerem cidadãos educados e socialmente integrados; jovens adultos capazes de pensar crítica e criativamente, adaptados a uma sociedade das multiliteracias, habilitados para a ação quer autónoma quer em colaboração com os outros, num mundo global que se quer sustentável”. Neste documento, aparece uma definição de competência - “competências são combinações complexas de conhecimentos, capacidades e atitudes que permitem uma efetiva ação humana em contextos diversificados. (...) Podem ser representadas em termos visuais como uma construção integrada, de acordo com o esquema da figura 1.



Figura 1. Esquema conceitual de competência, do projeto 2030 da OCDE (adaptado), extraído do Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória, pág.19.

PAFC E PERFIL DOS ALUNOS À SAÍDA DA ESCOLARIDADE OBRIGATÓRIA/PROGRAMA DE MATEMÁTICA

Fiquei e estou incrédula!

Como conciliar o PAFC e o perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória com o atual programa de matemática? Será que se promove o desenvolvimento de competências, nos estudantes, quando se defende que “apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas mais exigentes.”? – página 28 do programa e metas curriculares de matemática A, ensino secundário.

Não me parece que haja compatibilidade entre o PAFC, o perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória e o programa e metas da disciplina de matemática!

Aprende-se matemática, fazendo matemática e não decorando a matemática!

Experiências como a área de projeto ou a área escola, há anos atrás, permitiram-me ter a certeza que os alunos aprendem e aprendem muito ao desenvolverem os seus projetos. Desenvolvem variadíssimas competências - de relacionamento interpessoal, de desenvolvimento de autonomia, de interpretação e comunicação, de raciocínio e resolução de problemas - e adquirem conhecimentos científicos porque os procuram para resolverem situações com que se deparam e estão fortemente motivados a empreenderem no seu projeto.

PAFC NA MINHA ESCOLA

No atual ano letivo de 2017/2018, sou professora de matemática das duas turmas que a Escola Secundária com 3º ciclo Filipa de Vilhena tem no PAFC: 7ºB e 10ºB. Embora pertençam à mesma escola, a forma como o projeto curricular de turma se está a desenvolver em cada uma delas é radicalmente diferente, evidenciando bem que é um documento próprio de cada turma e que é resultado dos seus intervenientes.

No 7ºB, escolheram-se certas atividades do plano anual de atividades da escola para a turma participar. O conselho de turma decidiu tratar os temas escolhidos da disciplina transdisciplinar e autónoma – Cidadania e Desenvolvimento – através de domínios de autonomia curricular. Surgiram vários projetos para a turma desenvolver ao longo do ano letivo: “E, se fosse contigo?”, “Paranhos, um território em mudança”, “Jovens promotores de saúde”, “Comunicar online”, “Distribuir afetos” e “Projeto de educação sexual de turma”.

Em cada projeto, para além da atividade a desenvolver, das suas finalidades e dos objetivos a atingir, preocupamo-nos em ter presente as competências, listadas no perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória, que se podem desenvolver nos alunos e as aprendizagens essenciais que cada disciplina interveniente vai promover. Em “Paranhos, um território em mudança”, na disciplina de matemática, os alunos vão identificar e representar semelhanças de figuras no plano, usando material e instrumentos apropriados e utilizá-los para a construção de uma maquete de ruas e locais da freguesia de Paranhos. Ainda na listagem das aprendizagens essenciais a privilegiar na colaboração da

realização do projeto, os alunos vão conceber e aplicar estratégias de resolução de problemas e ter oportunidade de desenvolver a sua capacidade de abstração e generalização, compreendendo e construindo argumentos matemáticos e raciocínios lógicos.

No 10ºB, com vista à construção da articulação curricular, os professores do conselho de turma foram desafiados pela diretora de turma, a listar, em relação à sua disciplina, palavras-chave, temas, competências, conteúdos e atividades de enriquecimento curricular. Na matemática listei: lógica, história da matemática, modelação, tecnologia, resolução de problemas, raciocínio e comunicação. Com este levantamento, em conselho de turma, planearam-se os primeiros domínios de autonomia curricular: “Terra um planeta especial” com a intervenção das disciplinas de Biologia e Geologia A e Português; “De que modo a lógica está presente no discurso quotidiano?” onde se podem promover as aprendizagens essenciais das disciplinas de Filosofia e Matemática A; planeou-se ainda um domínio entre Física e Química A e Matemática A a privilegiar aprendizagens essenciais no tema funções. Já deu para constatar que o projeto curricular de turma é dinâmico e está fluentemente em mudança. Há novos domínios que se criam, há problemas e dificuldades que surgem que é premente ultrapassar.

Este Domínio de Autonomia Curricular construído pelas professoras de Filosofia e Matemática A, começou por identificar os conhecimentos, as capacidades e as atitudes comuns às duas disciplinas:

– utilizar conscientemente diferentes tipos de argumentos formais e não formais na análise crítica do pensamento e



Domínio de Autonomia Curricular – Guião 1

Filosofia e Matemática – 10.º B – 2017/18

Filosofia - Racionalidade argumentativa da Filosofia; a dimensão discursiva do trabalho filosófico
Matemática – Lógica Proposicional

Tema: A importância da lógica.

Problema: De que modo a lógica está presente no(s) discurso(s) do quotidiano?

Perfil dos alunos

- Aplicar linguagens, de modo adequado em diferentes contextos de comunicação.
- Trabalhar, em colaboração, em ambientes digitais e analógicos.
 - Gere adequadamente a sua conta de correio eletrónico e a relação com as diferentes aplicações a ser usadas.
 - Compreende o papel de cada uma das aplicações em uso face às tarefas solicitadas: de gestão de informação, de seleção e partilha de informação, de discussão, de colaboração, de organização e produção.
 - Participa ativamente nos processos de decisão e de partilha de responsabilidades.
 - Cumpre as suas tarefas dentro do tempo e com qualidade, contribuindo com valor acrescido para a elaboração dos produtos finais.
- Desenvolver e aplicar, transferindo para novas situações, ideias e soluções.
- Pensar logicamente com um pensamento crítico, capaz de mobilizar o conhecimento matemático e filosófico.

Figura 2. Domínio de Autonomia Curricular – Filosofia e Matemática A

na expressão do próprio pensamento;

- aplicar o conhecimento de diferentes falácias formais na verificação da estrutura e qualidade argumentativas de diferentes formas e de comunicação;
- aplicar inspetores de circunstâncias na validação de formas argumentativas;
- aplicar as regras de inferência do Modus Ponens, do Modus Tollens, do silogismo hipotético, das Leis de De Morgan, da negação dupla, da contraposição e do silogismo disjuntivo para validar argumentos;
- simplificar expressões envolvendo operações com proposições, substituindo-as por proposições equivalentes e determinar o valor lógico sempre que possível;
- resolver problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições.

O trabalho foi apresentado aos alunos no início de dezembro e terminou em finais do primeiro período. Foi fornecido um guião, onde constam a listagem das áreas de competências do perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória a privilegiar, os conhecimentos, as capacidades e as atitudes comuns às duas disciplinas que se pretendiam desenvolver, os critérios de avaliação no processo de trabalho e dos produtos finais, assim como ainda um cronograma das atividades. Pretendia-se que os alunos construíssem um texto argumentativo sobre **Igualdade de Género** – um dos temas da área curricular Educação para a Cidadania. Nesta escrita colaborativa, deveriam surgir proposições nas cinco formas conectivas e as formas argumentativas estudadas. O texto devia conter uma tese explícita, ter pelo menos três formas proposicionais comuns às duas disciplinas e três formas de inferência válidas estudadas.

Definiram-se os seguintes parâmetros de avaliação:

- pesquisa informação acerca do tema;
- seleciona e organiza informação;
- revela conhecimento sobre o tema;
- argumenta, negoceia e aceita diferentes pontos de vista;
- toma posição fundamentada e crítica acerca do tema;
- estabelece objetivos e toma decisões para resolver problemas;
- revela aperfeiçoamento e aprofundamento de competência, conhecimentos e atitudes;
- demonstra responsabilidade, autonomia e solidariedade;
- dialoga e demonstra respeito pelos outros.

Para avaliar o produto final, considerámos os seguintes critérios de avaliação:

- aplica corretamente, ao longo do texto, as formas proposicionais e de inferência válidas;
- cumpre as indicações para a construção do texto;
- cria textos corretos, originais e pertinentes para o tema em

questão.

Os alunos envolveram-se na criação dos textos e trabalharam a par as suas preocupações sobre a Igualdade de Género com a escrita de frases em que as proposições, as operações lógicas e as inferências fossem uma realidade.

Alguns excertos dos textos dos alunos:

“As mulheres deviam ter as mesmas oportunidades que os homens ou as mulheres são seres inferiores. As mulheres não são seres inferiores. Logo, as mulheres deviam ter as mesmas oportunidades que os homens.”

“Se as mulheres são seres intelectualmente iguais aos homens, então, não são seres inferiores aos homens. Se não são seres inferiores, então, deviam ter os mesmos direitos dos homens. Logo, se as mulheres são seres intelectualmente iguais aos homens, então, ambos os sexos deviam ter os mesmos direitos.”

Em finais de janeiro, passados quatro meses de implementação do PAFC que balanço se faz?

Ver os alunos a fazer matemática, aprendendo matemática sempre foi e há-de continuar a ser muito bom, talvez a linha orientadora de qualquer professor(a). Claro que já todos nós, ao longo dos vários anos da nossa profissão, vimos os nossos estudantes envolvidos em projetos de interdisciplinaridade onde se realizam enquanto adolescentes e onde lhes é permitido desenvolver competências que os tornem cidadãos conscientes, críticos e cooperantes de uma sociedade sempre em mudança. Então qual a diferença?

O PAFC veio dar ênfase, veio legislar, a existência de projetos interdisciplinares que de alguma forma se faziam com mais ou menos frequência. Trouxe a Cidadania e Desenvolvimento para os conselhos de turma com os respetivos domínios a desenvolver.

E NA MATEMÁTICA?

As aprendizagens essenciais parecem ser uma lufada de ar fresco face ao atual programa de matemática. Serão? Estarei a entender bem?

Estes dois documentos, Aprendizagens Essenciais e Programa de Matemática A, embora tenham os mesmos conteúdos matemáticos, permitem orientar as aprendizagens de forma claramente diferente. Num, cumprindo o que é aprendizagem essencial, lê-se: “recorrendo a situações e contextos variados, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia, o aluno deve resolver tarefas que requeiram a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos”, enquanto que no atual programa de matemática deparamo-nos com citações como “provar, fixada uma unidade de comprimento e dados um referencial ortonormado do espaço

e pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, que a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2)}$ e representá-la por « $d(A, B)$ ».

Será que alguma vez estas duas formas de abordar a aprendizagem matemática se conseguem conciliar?

O PAFC estrutura-se numa lógica de que se aprende ciência, fazendo, experimentando, resolvendo problemas, intervindo, ... O aluno vai construindo o conhecimento, realizando aprendizagens efetivas e significativas tendo assim acesso a uma educação, promotora da justiça social e da igualdade de oportunidades.

O Programa de Matemática assenta no princípio da transmissão dos conteúdos, da passagem do testemunho que a matemática é uma ciência de hipótese, tese e demonstração. Entende que há que primeiro conhecer os conteúdos existentes há séculos para depois ter oportunidade de desenvolver certas áreas de competências.

Como se estará a interpretar o Programa e/ou as Aprendizagens Essenciais pelas diversas escolas do país? Da minha experiência neste ano letivo, constato a existência de algum acompanhamento relativo à flexibilização dos currículos das diversas disciplinas e como é gerido a nível do conselho de turma. Há reuniões com a equipa de acompanhamento do PAFC onde vão representantes das escolas, mas a preocupação não é sobre a gestão disciplinar. Sente-se a ênfase no conselho de turma e menos preocupação nos grupos disciplinares.

Em agosto de 2016, as Orientações de Gestão Curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática e Matemática A acrescentaram mais um conjunto de ideias para orientar as planificações, mas que tem algumas orientações apenas para os alunos que vão a exame nacional em 2018 e em 2019. E os alunos que, neste ano letivo, estão no décimo ano?

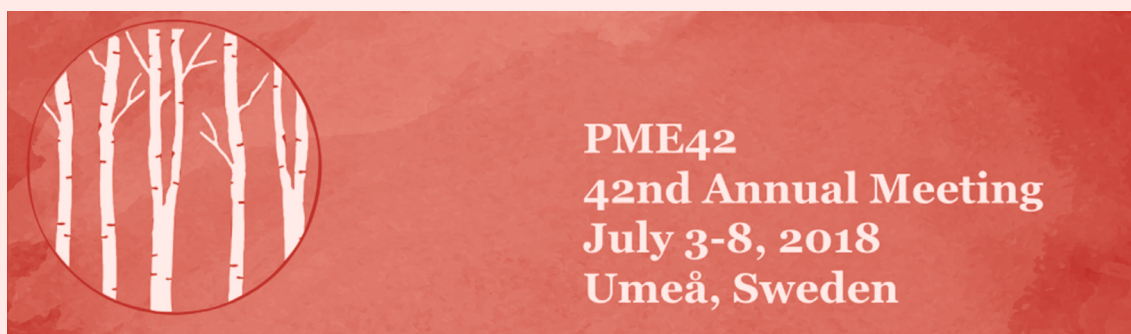
Há os das Aprendizagens Essenciais e há os outros. Os que estão abrangidos pelo Despacho nº 5908, ainda se sabe que a avaliação externa tem como referencial as Aprendizagens Essenciais enquanto denominador comum (artigo 23º). E os alunos que não ingressaram no PAFC? Também já não estão abrangidos por algumas das orientações de gestão do documento de agosto de 2016. Então esses conseguirão apreender tudo o que ainda nenhum conseguiu?

É preciso claramente um novo programa de matemática.

E também é preciso tempo. Os professores precisam de mais tempo. Para se poder adaptar a realidade matemática a cada turma, é preciso mais tempo. Se se quer personalizar, em vez de demonstrar de igual forma para todos, sem olhar às características identificadoras de cada grupo turma, é preciso tempo para reunir, tempo para pensar, tempo para respirar.

CRISTINA CRUCHINHO

ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA



O **42nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)** realiza-se entre 3 e 8 de julho de 2018, na cidade de **Umeå, situada no norte da Suécia**. Este ano dedica-se ao tema “*Delight in Mathematics Education*”, focando-se nos aspetos que contribuem para um ensino e uma aprendizagem da Matemática divertidos, significativos e inspiradores, tanto para os professores como para os alunos.

As datas de inscrição e de submissão de propostas, o programa e outras informações úteis estão disponíveis no site: <http://www.pme42.se/>

Paralelas no quadrado

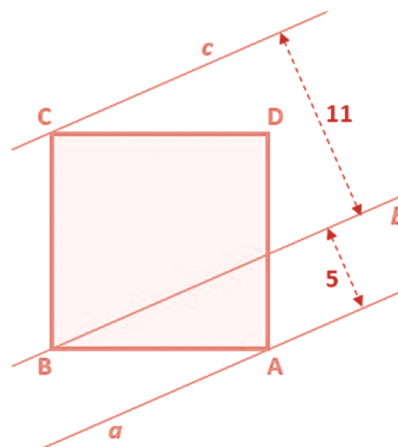
Temos um quadrado ABCD.

Pelos vértices A, B e C traçamos três retas paralelas a, b e c.

A distância entre as retas a e b é de 5 centímetros e entre as retas b e c é de 11 centímetros.

Qual é a área do quadrado?

(Respostas até 10 de junho, para zepaulo46@gmail.com)



Perfeições numéricas

O problema proposto no número 143 de Educação e Matemática foi o seguinte:

A Graça encontrou três números naturais que cumprem estas condições:

- A diferença entre quaisquer dois deles é um quadrado perfeito.
- A soma dos três números é um quadrado perfeito.
- O maior dos números é o menor possível.

Quais são os números da Graça?

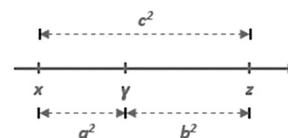
Recebemos dez respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Edgar Martins (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Letícia Martins (Guimarães), Manuel Saraiva (Covilhã), Mário Roque (Guimarães), Martim Correia (Alcácer do Sal) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Uma primeira questão se levantou ao Alberto, ao Carlos e ao Edgar: Os números da Graça podem ser repetidos? Por exemplo, será de admitir (1, 1, 2) ou (3, 3, 3) como soluções? Aí, o Martim foi categórico: “No início, sabia que não podia haver números repetidos porque a diferença entre eles seria de 0, e 0 não é um quadrado perfeito”. Realmente, a definição com mais aceitação é a de que os quadrados perfeitos são números naturais (1, 4, 9, 16, 25, ...) e não incluem o zero. Além disso, reforça o Carlos, o problema ficaria “muito pouco interessante”.

Ultrapassada esta dúvida, quase todos os nossos leitores seguiram, com mais ou menos formalismo, um processo semelhante.

Sejam x, y e z os números procurados por ordem crescente.

Façamos um esquema, usando a primeira informação.



Logo, $a^2 + b^2 = c^2$ e portanto (a, b, c) é um terno pitagórico.

Como queremos a menor solução possível, vamos partir do terno (3, 4, 5), sendo então as diferenças entre pares de números iguais a 9, 16 e 25.

Podemos escrever os números da Graça em função do menor deles:

$$y = x + 9 \quad \text{e} \quad z = x + 25$$

A soma dos três números tem de ser um quadrado perfeito Q:

$$x + (x + 9) + (x + 25) = Q \quad \text{ou} \quad 3x = Q - 34.$$

Então, $Q - 34$ tem de ser múltiplo de 3. Experimentemos os possíveis valores de Q maiores que 34.

Se $Q = 36$, vem $3x = 36 - 34 = 2$. Não serve.

Se $Q = 49$, vem $3x = 49 - 34 = 15$. Logo, $x = 5$.

Os números da Graça são (5, 14, 30).

Encontrada a solução, há quem vá mais longe, apresentando resultados que cumprem todas as condições exceto a última.

Ainda a partir do menor terno pitagórico (3, 4, 5), o Mário indica os casos seguintes: (10, 19, 35), (22, 31, 47), (29, 38, 54), (45, 54, 70), (54, 63, 79), ...

Já o Manuel e o Carlos, usam o terno pitagórico (6, 8, 10) para encontrar (11, 47, 111), (20, 56, 120), (40, 76, 140), ...

Finalmente, o Carlos escolhe o terno (9, 40, 41) para as soluções (29, 110, 1710), (58, 139, 1739), etc.

Nesta secção concluímos a publicação do texto de Malcolm Swan, cuja primeira parte foi publicada na revista Educação e Matemática temática n.º 144-145.

Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica¹

MALCOLM SWAN

PRINCÍPIOS PARA A CONCEÇÃO DE AULAS A PARTIR DE TAREFAS

Os princípios que norteiam a conceção das tarefas e a realização de aulas têm uma base substancial na investigação teórica e empírica. Este espaço não nos permite enumerá-los todos aqui. São principalmente derivados do construtivismo social: tanto os conceitos como as estratégias são conjuntamente criados como linguagem e os símbolos são apropriados e interiorizados (Bakhtin 1981; Vygotsky, 1996). Os seguintes princípios são, talvez, os mais importantes:

- Usar avaliação formativa; conceber e adaptar as aulas ao conhecimento que os alunos já têm (Black & Harrison, 2002; Black et al, 2003; Black & Wiliam, 1998; Black et al., 1999).
- Desenvolver a linguagem matemática através de atividades de comunicação que incentivem o diálogo (Ahmed 1987; Alexander, 2006; 2008; Mercer, 1995).
- Focar diretamente quaisquer obstáculos concetuais específicos ou processos (Bell, 1993; Wigley, 1994) e criar surpresa, tensão e conflito cognitivo que possam ser abordados através de discussão (Brousseau, 1997).
- Criar conexões entre tópicos, tanto dentro da matemática como entre esta e o mundo real. Utilizar várias representações (Askew, Brown, Rhodes, Johnson & Wiliam, 1997).
- Promover a avaliação de pares, usando tarefas que permitam aos alunos a permuta de papéis, a explicação e o apoio mútuos (Bell, Swan, Crust & Shannon, 1993).
- Utilizar tarefas e questões que promovam a explicação, a aplicação e a síntese, ao contrário de apenas recorrerem à memória (Bills et al, 2004; Watson & Mason, 1998).

No entanto, os princípios não são suficientes. Também devem ser acompanhados por uma compreensão do contexto para o qual são planificados, tendência criativa e visão profissional (Schoenfeld, 2009).

CONCEÇÃO DE AULAS A PARTIR DE TAREFAS: ALGUNS EXEMPLOS

A conceção de uma aula envolve a sequenciação de tarefas matemáticas de forma a conseguir cativar tanto os alunos, como chamar a sua atenção para determinados conceitos ou estratégias. Planificar o desenvolvimento de uma aula é bastante parecido com a tarefa do guionista quando descreve a ação de um filme. Segundo Trottier (1998), o roteiro típico de um filme está estruturado em três fases. Existe uma fase inicial de preparação, na qual são apresentadas as personagens, os seus relacionamentos e os seus mundos e se coloca a questão ou situação dramática. Depois, há o confronto com um obstáculo. As personagens devem aprender novas competências e trabalhar colaborativamente para lidar com a sua difícil situação. Muitas vezes falham o objetivo, a tensão sobe e atinge-se o clímax da crise. Finalmente, há a fase de resolução que inclui um pico, um desenlace e, talvez, até mesmo uma reviravolta. O terreno comum com a conceção da aula é evidente.

A minha própria conceção de aulas foi influenciada pelo processo demonstrado no estudo da aula japonesa (Fernandez & Yoshida 2004; Shimizu 1999). Estas aulas são frequentemente estruturadas com quatro componentes chave: *hatsumon* (o professor apresenta à turma um problema para iniciar a discussão); *Kikan-shido* (os alunos resolvem o problema em grupos ou individualmente); *neriage* (uma discussão a nível de toda a turma em que se comparam e contrastam estratégias alternativas e na qual se pretende chegar a um consenso) e finalmente o *matome* ou resumo. Entre as diversas fases, a parte de *neriage* é considerada a mais crucial. O termo refere-se a amassar ou polir em cerâmica, onde argilas de diferentes cores são misturadas, servindo como metáfora para a consideração da combinação de interpretações e abordagens utilizadas pelos alunos na resolução de um problema de matemática. Na fase de *matome*, os professores japoneses costumam fazer uma cuidadosa observação final sobre a sofisticação matemática das

abordagens utilizadas. Contudo, verificámos que a utilização deste modelo acarreta enormes exigências aos professores, particularmente quando tentam interpretar, selecionar e discutir detalhadamente o raciocínio dos alunos.

Em 2009, a Fundação Bill e Melinda Gates contactou o centro de investigação em Nottingham, para desenvolver um conjunto de cem aulas que seriam um elemento essencial no programa da Fundação “College and Career Ready Mathematics”, que se apoia nos “Common Core State Standards for Mathematics” (NGA & CCSSO, 2010). Em resposta, foi criado o “Mathematics Assessment Project” (MAP) para se perceber em que grau o material didático pode habilitar os professores a implementar os princípios que descrevemos, aliados às tarefas de qualidade, parte integral do currículo implementado nas suas aulas, mesmo nos casos em que o apoio ao desenvolvimento profissional é limitado ou inexistente. A conceção dessas aulas apoiou-se em resultados da investigação e permitiu a publicação dos “Classroom Challenges”, descritos noutro lugar (Swan & Burkhardt, 2014). Neste artigo, vou sublinhar com brevidade a sua estrutura e ilustrar como o quadro anteriormente descrito foi utilizado na sua conceção. Amostras de aulas podem ser descarregadas em <http://map.mathshell.org>.

Dentro do projeto MAP, criámos dois tipos de aulas: aulas de desenvolvimento de conceitos (orientadas para os objetivos¹ 2 e 4) e aulas de resolução de problemas (dirigidas aos objetivos 3 e 4). Decidimos, desde o início, que estes dois tipos de aulas necessitavam ser mantidos em separado, pelas razões antes discutidas. A estrutura destas aulas é semelhante, com um claro foco na avaliação formativa. Vamos agora evidenciar a estrutura geral de aulas típicas de desenvolvimento concetual e de resolução de problemas dos “Classroom Challenges” e considerar como os princípios acima referidos são realizados dentro desses desafios.

A conceção das aulas de desenvolvimento concetual tem sido fortemente orientada por princípios que se têm revelado eficazes na nossa investigação anterior (Swan, 2006). Cada aula é precedida por uma avaliação diagnóstico curta, concebida para descobrir os entendimentos e interpretações atuais dos alunos. Damos aos professores alguma orientação sobre o que pode ser a avaliação diagnóstico, no sentido de auxiliar o professor na preparação de perguntas de exploração que podem ser usadas na própria aula. A aula, em geral, segue o contorno descrito a seguir. O leitor encontrará uma explicação completa da aula relacionada com a tarefa da “Representar e traduzir: aumento e redução percentual” (publicado na EM nº 144 -145), no sítio do

MAP². O espaço não nos permite reproduzir todos os detalhes aqui.

1. **Explicita os conceitos e os métodos em jogo na aula.** Propõe-se uma tarefa inicial com o propósito de fazer com que os alunos se apercebam das suas próprias interpretações intuitivas, para que surja curiosidade e seja esboçado o nível de raciocínio que se espera conseguir durante a atividade principal. Assim, por exemplo, o professor apresenta a tarefa ilustrada na figura 11 e pede aos alunos que selecionem a história que melhor se ajuste ao gráfico. Geralmente, o resultado é a circulação de opiniões dos alunos, com a maioria a optar pela hipótese B. O professor pede e analisa as explicações e assinala no diagrama essas escolhas, mas não corrige os alunos, nem tenta que a solução seja descoberta, nesta altura.

2. **Atividade colaborativa: correspondência entre gráficos, histórias e tabelas.** Cada grupo de alunos recebe um conjunto de cartões, como o mostrado na figura 12. Dez gráficos de distância/tempo devem ser associados a nove ‘histórias’ (a décima será escrita pelos alunos). Posteriormente, quando os cartões forem discutidos e associados, o professor distribui um conjunto adicional de cartões que contêm tabelas de distância/tempo com dados numéricos. Esses cartões permitirão que os alunos verifiquem as suas respostas e reconsiderem as decisões tomadas. Os alunos farão cartazes para revelar o seu raciocínio.

3. **Discussão entre grupos: comparar interpretações.** Os cartazes dos alunos são exibidos, e eles observam e verificam cada um dos cartazes dos outros grupos, pedindo explicações para correspondências que parecem não estar corretas. Nesta fase, portanto, sublinha-se a avaliação entre pares.

4. **Discussão plenária.** Os alunos retomam a tarefa que foi introduzida no início da aula, cuja resolução é agora pedida. Baseando-se em exemplos dos alunos, elaborados durante a aula, o professor chama a atenção para os conceitos significativos que surgiram (e.g., a conexão entre velocidade, declives nos gráficos e as diferenças com as tabelas). Colocam-se questões adicionais para verificar a aprendizagem, usando pequenos quadros em branco. “Mostrem um gráfico de tempo/distância para esta história”; “Mostrem uma história para este gráfico”; “Mostrem uma tabela que se encaixe neste gráfico”; e assim por diante.

5. **Trabalho individual: melhorar as soluções para a tarefa introdutória.** Os alunos agora retomam o trabalho que fizeram na tarefa introdutória, descrevem o que responderiam de maneira diferente e escrevem sobre o que aprenderam.

A estrutura da aula acima descrita contém muitas das características do ‘ensino diagnóstico’ (ver, por exemplo, Bell, 1993; Swan, 2006) que a nossa investigação anterior mostrou

1 Estes objetivos são apresentados na 1.ª parte do texto.

1º Objetivo: Desenvolver o conhecimento factual e a fluência processual

2º Objetivo: Desenvolvimento da compreensão concetual; 3º Objetivo: Competência estratégica; 4º Objetivo: Competência crítica

2 <http://map.mathshell.org.uk/materials/lessons.php?taskid=208&subpage=concept>

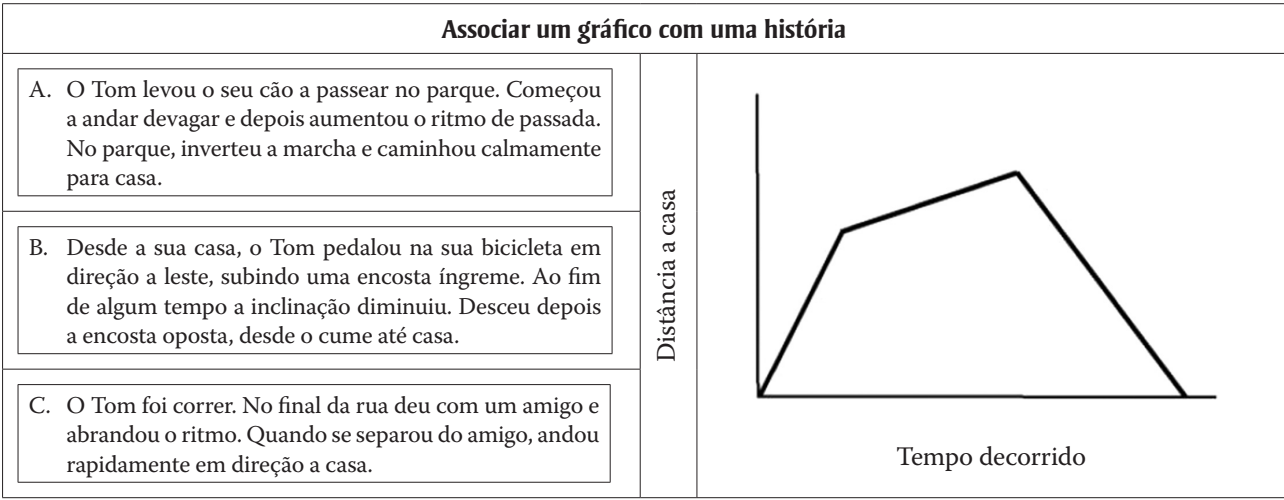


Figura 11. Atividade introdutória: Interpretar gráficos de distância/tempo.

A	B	1. O Tom correu de casa até à paragem do autocarro e esperou. Percebeu que tinha perdido o autocarro e regressou a casa.	2. À frente da casa do Tom está uma colina. O Tom subiu lentamente a encosta, atravessou o cume e desceu a correr a encosta oposta.
C	D	3. O Tom partiu de casa na prancha de skate e foi aumentando a velocidade. Diminuiu a velocidade de modo a poder evitar o piso irregular, tendo acelerado depois.	4. O Tom andou devagar e parou para ver as horas no relógio. Percebeu que estava atrasado e começou a correr.
E	F	5. O Tom saiu de casa para correr mas, como estava em baixo de forma, foi andando mais devagar, até que parou.	6. O Tom caminhou até à loja que estava no extremo da rua. Comprou o jornal e fez o percurso de volta a correr.
G	H	7. O Tom foi dar um passeio com amigos. Lembrou-se de repente que tinha deixado a carteira em casa. Correu para a ir buscar e depois teve de correr para alcançar os outros.	8. Este gráfico está completamente errado. Como é que o Tom pode estar simultaneamente em dois sítios?
I	J	9. Depois da festa, o Tom andou com calma para casa.	10. Escreve uma história feita por ti.

Figura 12. Correspondência de cartões: gráficos e histórias

ser mais eficaz, a longo prazo, do que qualquer das outras abordagens, exposição ou descoberta guiada, acontecendo o mesmo em diversos temas: valor decimal de posição, razões, transformações por reflexão, funções e gráficos e números racionais (Bassford, 1988; Birks, 1987; Brekke, 1987; Onslow,

1986; Swan, 1983). Estes estudos permitiram concluir que o valor do ensino diagnóstico parece estar ligado à valorização dos métodos intuitivos e das ideias que os alunos traziam para cada aula, proporcionando experiências que despoletaram ‘conflitos’ de ideias, tanto a nível individual como em relação aos colegas,

e criou oportunidades para os alunos refletirem e analisarem as inconsistências das suas interpretações.

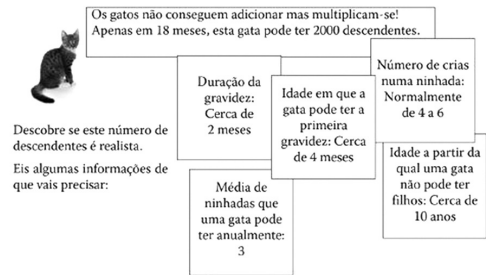
Vou agora ilustrar um dos desafios da sala de aula, focado na resolução de problemas: “Ter gatinhos”³. Como já foi assinalado, os professores acham que é muito difícil interpretar, monitorar e selecionar o extenso raciocínio dos alunos durante uma aula de resolução de problemas. Foi por isso que resolvemos preceder cada aula com uma avaliação preliminar, em que os alunos resolvem o problema individualmente. O professor analisa uma amostra das tentativas iniciais dos alunos e identifica as principais questões que precisam de ser abordadas na aula. Através dessa testagem anterior, desenvolvemos uma tabela de problemas “comuns” que alerta os professores para as dificuldades que os alunos possam ter e indica as perguntas que o professor poderá colocar para potenciar um pensamento mais frutuoso (figura 13). Os professores analisam as respostas iniciais dos alunos, com a ajuda dessa tabela. Se o tempo permitir, podem escrever questões de retorno sobre o trabalho de cada aluno ou, alternativamente, preparar perguntas para serem consideradas por toda a turma.

Problema	Sugestões para perguntas
Tem dificuldade em começar	Consegues descrever o que acontece nos primeiros cinco meses?
Não consegue desenvolver uma representação apropriada	Consegues fazer um diagrama ou uma tabela que mostrem o que está a acontecer?
O trabalho não é metódico	Consegues começar olhando apenas para as ninhadas da primeira gata? O que farás a seguir?
Desenvolve um modelo parcelar	Pensas que a primeira ninhada de crias terá tempo para crescer e terem elas próprias ninhadas?
Não formula suposições claras ou razoáveis	Que suposições fizeste? Todos os gatinhos nasceram no início do ano? Todas as crias são fêmeas?
Faz uma tentativa bem sucedida	Como é que podes verificar esta resposta usando outro método?

Figura 13. Um estrato da “Tabela de problemas comuns” da atividade “Ter gatinhos”

3

Ter gatinhos⁴



Enunciado da tarefa inserido na primeira parte do texto, publicado na Educação e Matemática nº 144 -145

Esta forma de retorno tem-se vindo a revelar mais poderosa do que a atribuição de classificações ou de notas, que desvalorizam a matemática e que encorajam a competição, e não a colaboração (Black et al. 2003; Black & Wiliam, 1998)

Chegamos agora à própria aula. Enquanto a estrutura rigorosa dependerá do problema específico, as aulas de resolução de problema são geralmente organizadas da seguinte forma:

- 1. Introdução.** O professor volta a apresentar a tarefa principal para a aula e devolve o trabalho aos alunos junto com as perguntas formativas. Os alunos têm alguns minutos para lerem essas perguntas e para lhes responder individualmente.
- 2. Trabalho de grupo: comparação das estratégias de abordagem.** Pede-se aos alunos que trabalhem em pequenos grupos para discutir o trabalho de cada um e para produzir seguidamente um cartaz mostrando uma solução conjunta que seja melhor do que qualquer das tentativas individuais. Os grupos estão organizados de modo a que os alunos com ideias contrastantes fiquem juntos. Esta atividade promove a colaboração e a avaliação entre pares. O papel do professor será o de observar os grupos e desafiar os alunos, usando as perguntas preparadas e assim aperfeiçoarem e melhorarem as estratégias.
- 3. Discussão entre grupos: comparar as estratégias de abordagem.** Dependendo do leque de abordagens utilizadas pelos alunos, o professor, neste momento, pode pedir aos alunos para reverem as estratégias elaboradas por outros grupos da turma e justificar a sua própria (a maioria não terá chegado a uma solução, nesta fase). Se não existirem divergências marcantes nos métodos usados, ou se não é evidente a utilização de representações mais sofisticadas, então o professor pode ir diretamente para a fase seguinte.
- 4. Trabalho de grupo: criticar “exemplos do trabalho dos alunos”.** O professor apresenta no máximo quatro exemplos de “trabalho dos alunos”, retirado dos materiais (figura 14). Este trabalho previamente preparado foi selecionado para destacar abordagens alternativas. Cada exemplo está anotado com perguntas que chamem a atenção dos alunos. (por exemplo, “O que é que cada aluno fez corretamente? Quais os pressupostos? Como poderá ser melhorado o seu trabalho?”) Isto permite que os alunos contatem com estratégias e representações que até essa altura podem não ter considerado.
- 5. Trabalho de grupo: aperfeiçoamento de soluções.** Os alunos têm uma oportunidade para reverem as abordagens iniciais. Voltam à tarefa e tentam usar ideias para aperfeiçoarem ainda mais as suas resoluções.

6. Discussão a nível de toda a turma: uma revisão da aprendizagem. O professor organiza uma discussão em plenário para focar os processos envolvidos no problema, tais como as implicações de adotar suposições diferentes, o poder de representações alternativas e as representações matemáticas gerais da estrutura do problema. Tudo isto também poderá acarretar referências adicionais às abordagens incluídas nos exemplos do trabalho dos alunos.

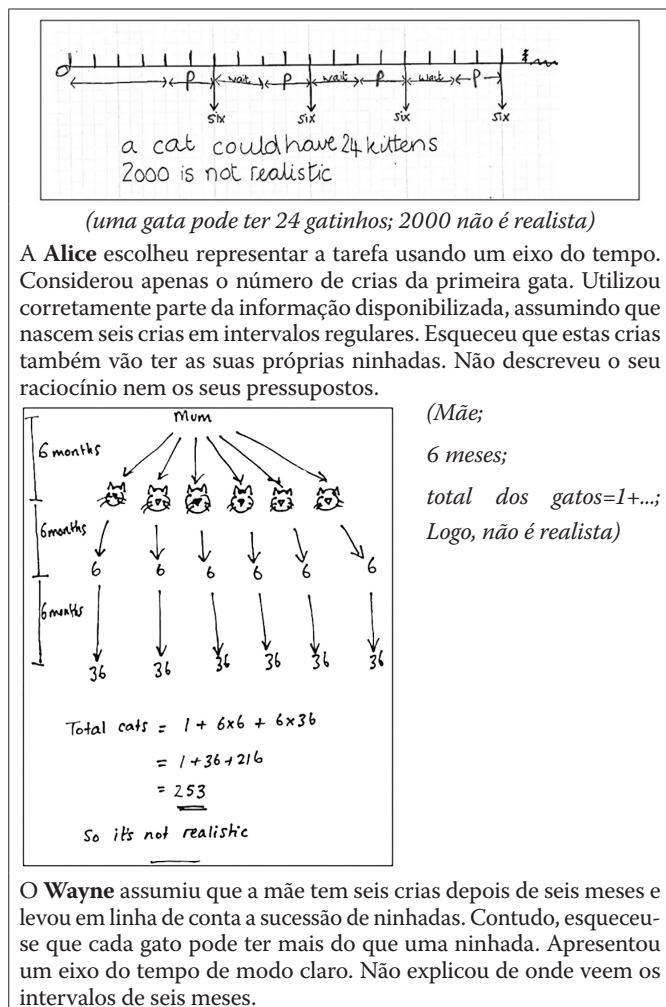


Figura 14. Amostra de trabalho para discussão, com comentários do professor

A anterior descrição da aula contém muitos recursos que não são comuns no ensino da matemática, pelo menos nos EUA ou no Reino Unido. Existe uma ênfase pronunciada na utilização preliminar da avaliação formativa, o que permite ao professor preparar-se para o que irá encontrar na aula, no que respeita aos raciocínios dos alunos, fornecendo respostas adaptadas. Os alunos passam a maior parte da aula conversando colaborativamente, focados na comparação de processos matemáticos. As sucessivas oportunidades para o aperfeiçoamento da resolução permitem que os alunos utilizem

uma multiplicidade de métodos, os quais comparam e avaliam. Finalmente, ‘a amostra do trabalho dos alunos’ é usada para promover o desenvolvimento da *competência crítica* (4º objetivo). Este aspeto tornou-se o foco da nossa investigação mais recente. Vamos agora apresentar alguns dos problemas que esse facto gera.

DESENVOLVIMENTO DA COMPETÊNCIA CRÍTICA COM AMOSTRA DO TRABALHO DOS ALUNOS

Muitos investigadores têm salientado a importância da comparação de abordagens usadas pelos alunos para as tarefas cognitivamente exigentes, no entanto, tem-se revelado extremamente difícil para os professores colocarem este aspeto em prática. No ambiente complexo da sala de aula, lutam para monitorizar o raciocínio matemático dos alunos, discernir o valor matemático das abordagens alternativas, selecionar resoluções para a discussão em toda a turma e organizar essa discussão para que os alunos construam significados. Os professores têm dificuldade em estabelecer conexões entre as abordagens dos alunos e em reconhecer e valorizar os seus métodos comparando-os com conhecimento válido existente (Brousseau, 1997; Chazan & Ball, 1999; Lampert, 2001; Stein et al, 2008). Na prática, a partilha de ideias degenera muitas vezes em meros ‘apresenta e relata’, com a participação a ter prioridade sobre a aprendizagem (Stein et al, 2008).

Em resposta a este desafio estamos atualmente a investigar os usos potenciais da preparação anterior à aula de ‘amostras do trabalho dos alunos’ para discussão em sala de aula, focando conceitos e processos fundamentais, enquanto se desenvolve simultaneamente a competência crítica. Aachamos que os exemplos do trabalho dos alunos têm variados usos potenciais. Na resolução de problemas, por exemplo, podem ser usados para encorajar um aluno que está preso numa linha de raciocínio a considerar outras perspetivas, ou para permitir a comparação de representações alternativas e concentrar-se na identificação dos pressupostos de modelação. Na aprendizagem concetual, as amostras podem ser usadas para chamar à atenção a existência de conceções erradas comuns e de interpretações alternativas. A amostra de trabalho precisa de um delineamento cuidado para cada um destes propósitos, de modo a que a atenção dos alunos fique em consonância com as finalidades das aulas. Começamos habitualmente com o trabalho real do aluno que depois é adaptado e reescrito, tornando-o claro, legível e focado na questão que desejamos ver discutida.

A partir de evidência recolhida da observação de mais de 100 professores em, salas de aula, nos EUA, estabelecemos as seguintes diretrizes para a conceção de amostras de trabalho (Evans & Swan, 2014):

- Desencoraje as análises superficiais que os alunos possam fazer, afirmando explicitamente o propósito da amostra de

trabalho e fazendo perguntas específicas que se relacionem com esta finalidade:

- Incentive comparações holísticas, construindo amostras de trabalho curtas, acessíveis e claras e excluindo erros processuais, ou outros, que desviam a atenção do objetivo proposto;
- Deixe o trabalho incompleto, de modo a que os alunos tenham de se envolver no raciocínio iniciado para o completar;
- Sequencie a distribuição da amostra do trabalho dos alunos para que possam ser feitas comparações sucessivas entre pares de abordagens semelhantes;
- Dê aos alunos tempo e oportunidades suficientes para incorporarem, nas suas próprias soluções, o que eles aprenderam das amostras de trabalho;
- Providencie apoio aos professores, de forma a que, na discussão a nível de toda a turma, eles possam identificar e extrair critérios para a comparação de abordagens alternativas.

OBSERVAÇÕES FINAIS

Este artigo é uma reflexão pessoal sobre como é que estamos agora a começar a compreender os desafios da conceção de tarefas, depois de muitos anos de realização de investigações sobre este assunto.

O quadro teórico aqui apresentado não pretende ser abrangente, mas tem-se revelado forte, nas mãos de quem concebe tarefas e currículos. Quando se identifica um objetivo a alcançar, o quadro fornece-nos uma forma de identificar o tipo de atividade de sala de aula que pode alcançar esse objetivo, e o nosso corpo de modelos acumulados fornece-nos exemplos, sobre os quais podemos conceber tarefas. É com a utilização deste processo, lento e iterativo, que as tarefas são concebidas e ensaiadas nas aulas, revistas e corrigidas. Esta abordagem, embora normativa no desenvolvimento de produtos em geral, é muito mais dispendiosa do que o “modelo de autoria”, tantas vezes usado em educação: produzir um esquema; recolher comentários; rever; publicar. No nosso trabalho, observamos geralmente cada aula entre três e cinco vezes, em cada um dos dois ciclos de desenvolvimento. Isto permite-nos obter um retorno rico e detalhado, ao mesmo tempo que também nos permite distinguir problemas gerais de implementação a partir de mais exemplos de variações idiossincráticas dos professores considerados individualmente. Nós desenvolvemos ferramentas de observação sistemática para recolha de dados (Swan & Burkhardt, 2014) e, no desenvolvimento dos “Desafios da sala de aula”, agora temos mais de setecentas destas observações para nosso apoio. Lentamente, estamos a aprender. Talvez que o campo de investigação do projeto esteja ainda na sua fase inicial, mas estamos a fazer progressos.

Referências

- Ahmed, A. (1987). *Better Mathematics: A Curriculum Development Study*. London: HMSO
- Alexander, R. (2006). *Towards Dialogic Teaching: Rethinking Classroom Talk* (3ed.). Thirsk: Dialogos
- Alexander, R. (2008). *How can we be sure that the classroom encourages talk for learning? Here is what research shows*. Cambridge: Dialogos
- Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays by M. M. Bakhtin* (C. Emerson & M. Holquist, Trans.): University of Texas Press.
- Bassford, D. (1988). *Fractions: A comparison of Teaching Methods*. Unpublished M. Phil, University of Nottingham.
- Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 24(1).
- Bills, C., Bills, L., Mason, J., & Watson, A. (2004). *Thinkers: a collection of mathematical activities to provoke mathematical thinking*. Derby: Association of Teachers of Mathematics.
- Birks, D. (1987). *Reflections: a Diagnostic Teaching Experiment*. University of Nottingham.
- Black, P., & Harrison, C. (2002). *Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom*. London: GL assessment.
- Black, P., & Harrison, C, Lee, C., Marshall, B., & William, D. (2003). *Assessment for learning: Putting it into practice*. Buckingham: Open University Press.
- Black, P., & William, D. (1998). *Inside the black box: raising standards through classroom assessment*. London: King's College London School of Education.
- Black, P., William, D., & Group A. R. (1999). *Assessment for learning: Beyond the black box*. Cambridge: University of Cambridge Institute of Education.
- Brekke, G. (1987). *Graphical Interpretation: a study of pupils' understanding and some teaching comparisons*. University of Nottingham.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield, Trans. Vol. 19). Dordrecht: Kluwer.
- Chazan, D., & Ball, D. L. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics*, 19(2), 2-10.
- Evans, S., & Swan, M. (2014). Developing students' strategies for problem solving: the role of pre-designed “Sample Student Work”. *Educational Designer*, 2(7).
- Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approach To Improving Mathematics Teaching and Learning*. Mahwah, New Jersey: Laurence Erlbaum Associates.
- Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge*. Clevedon, Philadelphia, Adelaide.
- NGA, & CCSSO (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from <http://www.corestandards.org/Math>
- Onslow, B. (1986). *Overcoming conceptual obstacles concerning rates: Design and Implementation of a diagnostic Teaching Unit*. Unpublished PhD, University of Nottingham.
- Schoenfeld, A. (2009). Bridging the cultures of educational research and design. *Educational Designer*, 1(2). Retrieved from <http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue2/article5/>
- Shimizu, Y. (1999). Aspects of Mathematical Teacher Education in

- Japan: Focusing on Teachers' Roles. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2, 107-116
- Stein, M. K., Eagle, R. A., Smith, M. A., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Swan, M. (1983). Teaching Decimal Place Value – a comparative study of 'conflict' and 'positive only' approaches. Paper presented at the 7th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, Jerusalem, Israel.
- Swan, M. (2006). *Colaborative Learning in Mathematics: A Challenge to our Beliefs and Practices*. London: National Institute for Advanced and Continuing Education (NIACE) for the National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy (NRDC).
- Swan, M., & Burkhardt, H. (2014). Lesson Design for Formative Assessment. *Educational Designer*, 2(7).
- Trottier, D. (1998). *The screenwriter's bible*. Los Angeles: Silman-James Press.
- Vygotsky, L. (1996). *Thought and Language* (A. Kozulin, Trans, 9th ed.) Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Press.
- Watson, A., & Mason, J. (1998). *Questions and prompts for mathematical thinking*. Derby: Association of Teachers of Mathematics.

MALCOLM SWAN

CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE NOTTINGHAM

TRADUÇÃO: FERNANDO NUNES

¹ Tradução da segunda parte da conferência plenária que Malcolm Swan apresentou no Encontro de Investigação em Educação Matemática, realizado em Sesimbra em 2014 e organizado pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Números racionais como operadores

Sabemos das dificuldades dos alunos em trabalhar com números racionais em todas as interpretações do conceito, por isso escolhemos alguns problemas que incidem na interpretação do número racional como operador e em diferentes representações (fração e percentagem).

Na interpretação como operador, os números racionais surgem como transformadores de uma situação (operam sobre ela), por exemplo, aumentam ou reduzem o número de itens num conjunto discreto, transformam uma figura geométrica plana noutra da mesma forma, mas com dimensões diferentes (maior ou mais pequena), ... Estamos a falar em ampliações, reduções, aumentar, encurtar, multiplicar e dividir.

E compreender os números racionais como operadores implica compreender os efeitos da aplicação sucessiva de dois ou mais operadores, quando o segundo operador é aplicado ao resultado

obtido com a aplicação do primeiro operador. Este tipo de composição surge com frequência em situações do dia a dia.

Para os Materiais para a aula de Matemática, deste número da Educação e Matemática, selecionámos do livro *Teaching fractions and ratios for understanding*, de Susan Lamon (2006) um conjunto de sete problemas, que traduzimos e adaptámos. Após a sua resolução os alunos têm um conjunto de questões de reflexão, que poderá dar origem a uma *discussão plenária* (no sentido de Swan, ver texto da seção para este n.º selecionámos) em que se podem colocar questões adicionais para verificar a aprendizagem. .

ISABEL ROCHA

MANUELA PIRES

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS MARINHA GRANDE POENTE

Números racionais como operadores¹

Resolve os sete problemas que se seguem e responde às questões colocadas na reflexão final, de forma a serem discutidas na turma.

1. Ontem poupei na compra de uma blusa cujo preço original era 60 euros, porque me fizeram um desconto de 10%. A minha irmã foi hoje à mesma loja e conseguiu um desconto adicional de 10% sobre o preço de ontem.

1.1. Quanto é que ela poupou em dinheiro?

1.2. E em termos percentuais qual o valor do desconto relativamente ao preço original?

2. O meu primo ofereceu-me um poster, ampliando uma foto das nossas férias conjuntas para 360% do seu tamanho original. Como ficou com falta de clareza e perdeu-se a foto original, decidi levar o poster a uma loja de cópias para reduzir de forma a ficar apenas 220% do tamanho original. Que percentagem do seu tamanho atual devo solicitar?

3. De 1990 a 2000, numa certa cidade, a população sofreu um decréscimo de 10%. Os censos seguintes abrangendo a década seguinte (2000-2010), revelaram que, devido à recuperação económica, a população da cidade aumentou 10%.

Comparando com 1990, que podemos dizer da população em 2010?

4. Começamos com uma certa quantidade e executamos sucessivos aumentos (ou acréscimos) e reduções (ou decréscimos) nessa quantidade. Ao resultado da nossa primeira ação outro acréscimo ou decréscimo é aplicado. Que percentagem da quantidade original obteremos em cada situação?

- Um decréscimo de 10% é seguido de um acréscimo de 15%
- Um acréscimo de 10% é seguido de um decréscimo de 10%
- Um decréscimo de 50% é seguido de um acréscimo de 60%
- Um acréscimo de 20% é seguido de um decréscimo de 50%
- Um decréscimo de 30% é seguido de um acréscimo de 25%
- Um decréscimo de 10% é seguido de um acréscimo de 10%

5. Resolve cada um dos problemas que se seguem, indicando o operador.

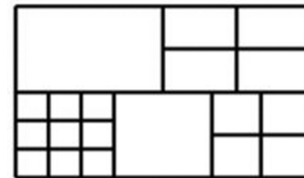
- a. A Mariana e o Pedro concordam que uma troca justa é 10 amendoins por $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate. Se Mariana dá ao Pedro 3 barras de chocolates, quantos amendoins ele deverá dar à Mariana?

- b. A Mariana e o Pedro concordam que uma troca justa é $1\frac{1}{3}$ barras de chocolate para 6 bolos. Se a Mariana

dá ao Pedro 6 barras de chocolates, quantas bolos ele deverá dar à Mariana?

- c. A Mariana e o Pedro concordam que uma troca justa é 6 pacotes de sumo por $\frac{2}{3}$ de uma pizza grande. Se o Pedro dá à Mariana 21 pacotes de sumo, que quantidade de pizza deve dar-lhe a Mariana?
- d. A Mariana e o Pedro concordam que uma troca justa é 2 tortas de pêssego por 5 tortas de maçã. Se o Pedro dá à Mariana 6 tortas de maçã, que quantidade de tortas de pêssego deve dar-lhe a Mariana?
6. Nesta figura consegues ver $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$? Pinta a parte correspondente.

Que parte desta figura representa o produto $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$?



7. Representa a parte sombreada de cada figura como um produto de frações



REFLEXÃO

Pensando nalguns dos problemas resolvidos, apresenta as justificações pedidas.

- como explicar a razão de sucessivos acréscimos e decréscimos da mesma percentagem não nos conduzirem à quantidade inicial?
- porque dois decréscimos seguidos não correspondem a um decréscimo total em relação ao valor inicial igual à soma desses decréscimos?
- que operadores originam um acréscimo na quantidade inicial e que operadores levam a um decréscimo?

¹ Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Que símbolos são estes?

SANDRA BENTO

PATRÍCIA DAMAS BEITES

FÁTIMA SIMÕES

No domínio de conteúdo Primitivas e Cálculo Integral, do novo Programa de Matemática do Ensino Secundário, surge uma lista de descritores norteados pelos objetivos gerais: Definir a noção de primitiva; Abordar intuitivamente a noção de integral definido; Resolver problemas. Apesar de aparecer logo no descritor 1.3. uma indicação para a possibilidade de representar as primitivas de $f(x)$ pela notação $\int f(x)dx$, só no descritor 2.2. surge o objetivo de conhecer a origem histórica da expressão $\int_a^b f(x)dx$.

Encontramos no *caderno de apoio* ao 12.º ano, secção PCI12, informação complementar com uma breve explicação sobre o símbolo $\int$. Atribui-se a Leibniz a sua introdução no século XVII, por ser a forma usada nessa época para a letra s e pretender abreviar a palavra soma. O texto continua de forma vaga e informal a explicar, sem referência, a atribuição do significado de produto de duas medidas à expressão $f(x)dx$. Resume a notação $\int f(x)dx$ como significando historicamente, se f for positiva, uma soma de áreas de retângulos com largura infinitesimal dx e altura $f(x)$, esta considerada constante ao longo de um intervalo de comprimento chamado desprezável.

Com este resumo, o professor só terá algumas pistas sobre a origem dos símbolos $\int$ e dx . A quantidade de informação formal que fica subentendida, nomeadamente com uma só referência a medidas infinitesimais como sendo assunto trivial, e a ausência de representações visuais caracterizam uma postura académica conhecedora do formalismo subjacente mas reticente quanto à contribuição da História da Matemática no ensino-aprendizagem.

HISTÓRIA, PORQUÊ?

O papel da História da Matemática na Educação tem vindo a ser marcadamente destacado com fundamentação de dois tipos: instrumento no ensino-aprendizagem da Matemática e objetivo em si mesmo (Jankvist, 2009). A este propósito, Radford, Boero e Vasco (2002) exploram a relação da História no desenvolvimento conceptual da Matemática com a aprendizagem desta. Destaca-se a importância da Psicologia Sócio-Histórica, que tem em Vygotsky um dos expoentes máximos, pelo papel relevante na conceção de aprendizagem, nomeadamente na construção

da mente a partir das raízes socioculturais. Vygotsky (1989) analisa os mecanismos que integram História e Cultura no funcionamento cognitivo e identifica as bases natural e cultural. A influência da primeira manifesta-se nos processos cognitivos básicos mais relacionados com mecanismos automáticos de resposta; a segunda está implicada em funções superiores que dependem da capacidade do sujeito recorrer a processos simbólicos como raciocínio, resolução de problemas ou linguagem. Esta é a ferramenta da construção do pensamento que o autor mais valoriza, porque é veículo de expressão e agente mediador no contexto socio-histórico e cultural em que o indivíduo se desenvolve.

Da perspetiva sociocultural e histórica, a mediação é central na evolução humana, pois configura mudanças de ordem qualitativa ao longo do tempo. Considera-se que o desenvolvimento humano deve ter em conta as mudanças ocorridas simultaneamente a quatro níveis: filogenético (desenvolvimento da espécie), histórico (espécie), ontogenético (individual) e microgenético (processos psicológicos). São as funções psicológicas superiores que permitem o desenvolvimento do sujeito ao nível ontogenético, num *continuum* que se caracteriza por transformações dialéticas qualitativas (Abreu, 2000).

Ao nível ontogenético, considera Vygotsky que existem dois saltos qualitativos: linguagem oral e linguagem escrita. A aquisição da linguagem constitui assim um marco importante no sentido em que, como sistema simbólico, é o mediador por excelência no desenvolvimento das funções psicológicas superiores, pois o indivíduo ao interagir com o seu contexto, mesmo não tendo acesso direto aos objetos, dispõe de sistemas simbólicos que representam a realidade na base da experiência e do conhecimento. A competência permite que o indivíduo consiga, de forma abstrata, analisar e generalizar as características dos objetos a outros acontecimentos e contextos e fundamentar a comunicação na sua função de transmissão das experiências ao longo da história (Luria, 1976; Vygotsky, 1989).

Através da linguagem constrói-se a comunicação, a planificação e a autorregulação dos processos de pensamento, sendo a função comunicativa a que o liga ao mundo externo, na relação com os intervenientes do contexto sociocultural e histórico. De igual

forma, considera-se a Matemática um sistema de signos a serem apropriados pelo aluno a partir da interação com o contexto, da mediação dos professores e do desenvolvimento histórico da área. Os signos funcionam como ferramentas para solucionar problemas a nível cognitivo, tais como recordar, analisar e decidir.

Outro conceito fundamental, que permite compreender a importância de integrar historicamente conceitos matemáticos, é o de internalização dos mediadores culturais. Para Abreu (2000), o ato de contar dependerá de uma reconstrução interpessoal dos sistemas de contagem em uso num contexto cultural particular. Neste sentido, alguns auxiliares mais objetivos, por exemplo contar pelos dedos, serão progressivamente transformados em representações, subsidiárias de um discurso interno que permitirá ao indivíduo tornar-se autônomo, deixando assim de depender desses auxiliares.

Na construção da internalização dos mediadores culturais, destaca-se o papel estruturante do contexto através das propriedades dos sistemas de signos de uma cultura e das interações sociais dos membros dessa cultura com os aprendizes, uma vez que os primeiros são detentores do conhecimento do sistema de signos. Para esta construção é necessário que as culturas promovam processos de ensino-aprendizagem potenciadores do desenvolvimento. É neste âmbito que surge o conceito de zona de desenvolvimento proximal em Vygotsky – distância entre os níveis de desenvolvimento real e potencial. O primeiro refere-se a uma zona do desenvolvimento na qual o indivíduo resolve, de forma independente, as tarefas que a sua cultura lhe exige. O segundo configura um potencial que só será atingido se, nessa resolução, o indivíduo tiver a mediação de pares mais desenvolvidos, assumindo relevância o papel do professor e o dos métodos pedagógicos ativos.

FACTOS MARCANTES

A figura 1 reproduz uma elucidativa figura na tradução de Motte (1739) dos *Principia* de Newton, considerado, juntamente com Leibniz, um dos fundadores do Cálculo (Boyer, 1968). O enunciado conclui, da construção, que diminuindo a largura dos retângulos inscritos e aumentando o seu número *in infinitum*, a soma das áreas dos retângulos inscritos ou circunscritos à curva e a área delimitada pela curva serão iguais.

Segundo Rickey (1996), o símbolo de integral aparece impresso pela primeira vez em 1686 na primeira obra *Sobre uma geometria oculta e a análise dos indivisíveis e infinitos* de Leibniz. A primeira vez que a palavra integral aparece associada ao símbolo é num artigo de Jakob Bernoulli em 1690. O seu irmão Johann explica o uso dessa palavra em resposta a uma carta de Leibniz: consideração do “diferencial como uma parte infinitesimal de um todo ou integral” (citado em Rickey, 1996, p. 34).

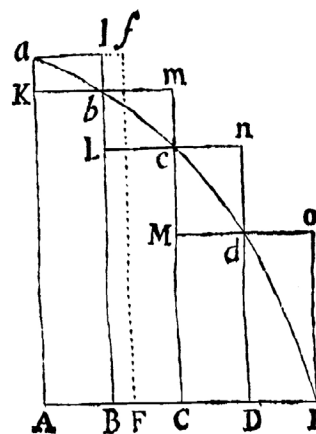


Figura 1. Reprodução da figura 6 em Motte (1739, p. 44)

Segundo Kline (1972, Vol. I), a ideia mais influente do Cálculo, depois dos conceitos de derivada e de integral como limite de uma soma, foi a de que o integral pode ser obtido invertendo o processo de diferenciação. As conclusões de Newton nesse sentido foram generalizações de ideias de muitos matemáticos antes dele, tendo sido particularmente influenciado pelo trabalho *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis. No que diz respeito a relacionar a soma de áreas infinitesimais com a reversão do processo para obter taxas de variação instantâneas, numa publicação de 1711 Newton determina a área abaixo de uma curva designando por momento de x o acréscimo infinitesimal o feito à variável, e por momento da área o acréscimo oy feito à área $z = ax^m$ debaixo da curva.

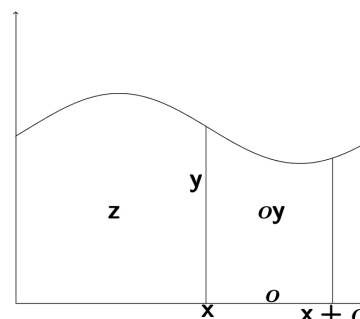


Figura 2. Reprodução da Fig. 17.13 em Kline (1972, Vol. I, p. 360)

Newton designa por $z + oy$ a área delimitada pela curva, pelos eixos e pela ordenada em $x + o$, concluindo que $z + oy = a(x+o)^m$. Newton prova que $y = amx^{m-1}$ dividindo o desenvolvimento binomial por o e desprezando, sem rigor formal, os termos com o . Reciprocamente, se a curva for definida por $y = amx^{m-1}$, então a área abaixo da curva é dada por $z = ax^m$. Como já tinha expressado esta mesma área como soma de áreas infinitesimais, Newton mostra assim que estas somas podem ser obtidas por reversão do processo de derivação (Teorema Fundamental do Cálculo integral).

Leibniz desenvolve em paralelo métodos análogos mas com diferenças, nomeadamente por o objeto de estudo inicial serem sequências de números, a partir das quais faz a transição para o Cálculo pensando nos seus termos como imagens por uma função. Elucidativo pode ser o facto do ponto de partida de Leibniz para a igualdade $\int x \, dx = \frac{x^2}{2}$ ser o cálculo da área do triângulo de base x e altura $y = x$. Leibniz fará a transição do caso discreto das sequências para o caso geral em que dx e dy são incrementos de uma *função arbitrária*. Concluirá também que a “integração como processo de soma é o inverso da diferenciação” (Kline, 1972, Vol. I, p. 375).

Tanto Newton como Leibniz foram responsáveis pelas aritmetização do Cálculo e redução dos problemas de cálculo de áreas, até então tratados como somas, a processos de anti-diferenciação. Mas o rigor formal só chegará século e meio depois, no princípio do século XIX, com as contribuições de Bolzano, Cauchy, Abel, Dirichlet e Weierstrass, que chamam a si a missão de “trazer ordem ao caos” (Kline, 1972, Vol. III, p. 947). Quanto à definição de derivada, foi Cauchy que introduziu as quantidades dx e dy , cujo quociente é $f'(x)$, em 1821. É também Cauchy que publica a primeira demonstração formal do Teorema Fundamental do Cálculo.

O significado preciso do termo infinitesimal e a abordagem nos cursos atuais de Cálculo continua a ser assunto de debate. Tall (1981) enuncia a premissa polémica de que o velho cálculo infinitesimal, criticado nos últimos três séculos por constituir uma teoria imprecisa e imperfeita, pode ser perfeitamente satisfatório em determinados contextos de ensino pré-universitário. Analisa várias hipóteses de abordagem do conceito, iniciando com o “velho e intuitivo método infinitesimal” de Leibniz (Tall, 1981, p. 16), mas, depois de discutir a necessidade de ferramentas de níveis distintos de sofisticação, conclui que o método do limite dinâmico, com exemplos numéricos e visualizações dinâmicas, pode constituir a melhor abordagem inicial.

HISTÓRIA, COMO?

Jankvist (2009) considerou três categorias na utilização da História da Matemática em sala de aula: iluminação; modular; de base histórica. Na primeira, a informação histórica surge como um complemento ao ensino-aprendizagem da Matemática. Exemplo desta seria uma biografia de Leibniz. Na segunda, a estruturação é por módulos dedicados à História, como algumas aulas relativas ao currículo mas propiciando o estudo de outros conteúdos. O desenvolvimento da Matemática ao longo do tempo fundamenta a terceira, aplicando-se indiretamente no ensino-aprendizagem. Um exemplo seria a ordem de apresentação de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ respeitando a evolução histórica.

Katz, Dorier, Bekken e Sierpinska (2002) referem estudos de caso que relacionam os domínios histórico e psicológico, dando exemplos da História da Matemática onde transparecem

as dificuldades dos matemáticos em problemas do currículo escolar numa versão contemporânea, e para os quais parecem existir dificuldades de aprendizagem. O exemplo que interessa particularmente no contexto do Cálculo Integral é o conceito de limite, pois aí reside o mistério do termo infinitesimal. É de alguma forma esclarecedor que a formalização rigorosa do conceito de limite, a instilação do rigor na Análise (Kline, 1972, Vol. III) só tenha sido desenvolvida cerca de século e meio depois da contribuição de Leibniz e Newton.

O referido exemplo é objeto de pesquisa de Schneider (1988) que conclui que as dificuldades na passagem da intuição para a compreensão rigorosa no conceito de limite e as consequentes na compreensão da noção de integral como área limitada por uma curva, provêm do mesmo obstáculo epistemológico: “os alunos não conseguem separar na sua mente a matemática do mundo ilusoriamente sensível das medidas” (Katz, Dorier, Bekken & Sierpinska, 2002, p. 150). Como referem Radford, Boero e Vasco (2002), esse obstáculo é a fonte de erros previsíveis e recorrentes de um indivíduo ao tentar utilizar conhecimento para resolver um problema. Distingue-se de obstáculos individuais, como as capacidades cognitivas, ou de obstáculos didáticos criados pelas escolhas de ensino.

Bussi e Sierpinska (2002) consideram que a abordagem histórica no ensino da Matemática pode ser feita de forma explícita, com a consulta de documentos ou estudos histórico-epistemológicos relacionados com os conceitos, mas também pode ser implícita. Na investigação de Schneider (1988) as tarefas são desenhadas com o intuito de confrontar os alunos com as suas crenças prévias. A mediação do professor é fundamental para garantir a consciencialização das perceções da Matemática pelos alunos e das suas conexões com os fenómenos físicos percetíveis. A eficiência desta abordagem deve ser testada caso a caso, atendendo à especificidade dos conteúdos, à origem sócio-cultural dos estudantes e às variáveis didáticas precisas.

Mason (2002) sugere a História da Matemática para humanizar, advogando que alguns alunos podem ser conquistados se tiverem noção das dificuldades que os matemáticos passaram ao longo do tempo, sujeitos às suas próprias paixões e fragilidades, para chegar a resultados que foram sendo aperfeiçoados. Para isso sugere táticas para as aulas, que contribuam para a aprendizagem dos alunos e o enriquecimento do currículo: recolher uma coleção de retratos e curiosidades sobre matemáticos ou teoremas importantes; localizar os momentos em que certos símbolos ou ideias emergiram e a sua evolução; explorar controvérsias; e estabelecer conexões entre resultados que surgem em diferentes momentos de aprendizagem e para os quais não se adivinha à partida uma ligação.

O fazer matemática, processo heurístico que inclui erros e dúvidas, tem vindo gradualmente a ser reconhecido como muito importante do ponto de vista didático. A comunicação da

Matemática é, em geral, organizada de forma linear, mas esconde as motivações e as dúvidas que surgiram no seu desenvolvimento. A integração da História da Matemática no ensino, com reservas elencadas por Tzanakis e Arcavi (2002), pode contribuir para mostrar aos alunos que erros, dúvidas, argumentos intuitivos, becos sem saída, controvérsias e abordagens alternativas são parte integrante da construção matemática. A integração pode ser direta, com factos e fontes históricas, mas também indiretamente inspiradora numa abordagem genética do ensino-aprendizagem (Tzanakis & Arcavi, 2002). Esta visão, caso particular das abordagens de base histórica, considera fundamental, para a atribuição de significado pelos estudantes, o carácter de necessidade do objeto de estudo como solução para um problema. Segue a metodologia de recuperar as ideias chave e questões que originaram novos caminhos de investigação ao longo da evolução histórica do assunto estudado, e tentar reconstruir os passos de forma didaticamente apropriada para a sala de aula.

Schneider (2002) apresenta exemplos, inspirados na História da Matemática, do grupo de trabalho Abordagem Heurística da Análise. Reproduzimos aqui a abordagem do conceito de limite, pois nela reconhecemos a introdução à definição de integral na nossa prática letiva, ainda que com o auxílio de representações visuais.

Considera-se a área limitada por $y=x^3$, $x=0$, e $y=0$. Preenche-se esta com $n-1$ retângulos inscritos, cuja soma das áreas é dada pela sucessão:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \left(\frac{i}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4} \times \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Considera-se também a sucessão definida pela soma das áreas dos retângulos circunscritos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \left(\frac{i+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4} \times \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^3 = \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

As duas sucessões têm ambas limite $\frac{1}{4}$. Para provar que o valor da área pretendida é este limite, observa-se que a mesma é limitada pelas duas sucessões (Schneider, 2002, p. 246).

Também encontramos este tipo de abordagem genética em Paschos e Farmaki (2011). Os autores recuperam elementos históricos do século XIV, relacionados com o estudo do movimento no final da Idade Média, destacando o papel das representações geométricas do movimento e da Geometria Euclidiana no aparecimento do Cálculo. Transcrevem enunciados de alguns matemáticos, designados na época por calculadores, onde são definidos os conceitos de velocidade instantânea, movimento de aceleração uniforme e não uniforme, e se enuncia o Teorema da velocidade média, acompanhados das representações na figura 3.



Figura 3. Representações de abordagem genética (Paschos & Farmaki, 2011, p. 148)

As tarefas de Paschos e Farmaki (2011) são baseadas em situações de estudo de um movimento, em particular usando gráficos tempo-velocidade para a representação que são familiares aos alunos. Estes identificam a representação de grandezas relacionadas com o movimento (tempo, velocidade, distância percorrida) nos gráficos, instrumentos fundamentais de mediação numa abordagem intuitiva a conceitos matemáticos.

Referências

- Abreu, G. (2000). O papel mediador da cultura na aprendizagem da Matemática: A perspectiva de Vygotsky. *ESC*, 13, 105-117.
- Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. New York: Wiley.
- Bussi, M., & Sierpiska, A. (2002). The relevance of historical studies in designing and analysing classroom activities. In J. Fauvel, J. V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 154-161). Dordrecht: Springer.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educ. Stud. Math.*, 71, 235-261.
- Katz, V., Dorier, J.-L., Bekken, O., & Sierpiska, A. (2002). The role of historical analysis in predicting and interpreting students’ difficulties in mathematics. In J. Fauvel, J. V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 149-154). Dordrecht: Springer.
- Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Vol. I-III). New York: Oxford University.
- Luria, A. R. (1976). *Cognitive development*. Cambridge, MA.: Harvard University.
- Mason, J. (2002). *Mathematics Teaching Practice*. Cambridge: Woodhead.
- Motte, A. (1739). *The Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Vol. I), Sir Isaac Newton. London: Middle-Temple-Gate.
- Paschos, T., & Farmaki, V. (2011). Integrating the History of Mathematics into Activities Introducing Undergraduates to concepts of Calculus, In V. Katz, C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 145-163). MAA.
- Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2002). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In J. Fauvel, J. V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 162-167). Dordrecht: Springer.
- Rickey, V. F. (1996). *Historical Notes for the Calculus Classroom*. Washington: American University.
- Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux “aire” et “volume” au calcul des primitives*, Tese de Doutoramento, Université Catholique de Louvain.
- Schneider, M. (2002). A heuristic introduction to analysis implicitly inspired by its historical development. In J. Fauvel, J. V. Maanen

- (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 245-248). Dordrecht: Springer.
- Tall, D. (1981). Comments on the difficulty and validity of various approaches to the calculus. *FLM*, 2, 16-21.
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2002). Integrating history of mathematics in the classroom. In J. Fauvel, J. V. Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 201- 240). Dordrecht: Springer.
- Vygotsky, L. S. (1989). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes.

Agradecimentos

P. D. Beites agradece o apoio do Governo Português através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto UID/MAT/00212/2013 do CMA-UBI

SANDRA BENTO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

PATRÍCIA DAMAS BEITES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR E CMA-UBI

FÁTIMA SIMÕES

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA E EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR E LABCOM.IFP

Flexibilidade curricular em Matemática

perspetivas, experiências, interrogações
encontro de professores

5 de maio de 2018

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa



Informações e inscrições em: www.apm.pt

organização

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Associação de Professores de Matemática



O terceiro encontro de professores organizado pela Associação de Professores de Matemática e o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, no âmbito de um protocolo de colaboração entre estas instituições, será dedicado à reflexão sobre a flexibilidade curricular em Matemática nos diferentes níveis de escolaridade, num momento em que este tema está na ordem do dia, assumindo-se também como um tempo e um espaço de formação de professores.

Pretende-se, com este encontro, aprofundar a reflexão e o debate em algumas questões relativas à flexibilidade curricular nomeadamente no que se refere ao Projeto de Autonomia de Flexibilidade Curricular (PAFC). Com esta finalidade apresenta-se um programa do encontro com três Sessões plenárias — uma conferência seguida de debate, uma apresentação do PAFC, um painel sobre aspetos específicos do tema do encontro — e sessões paralelas de Grupos de Discussão por ciclos de escolaridade.

O encontro realiza-se em Lisboa no Instituto de Educação, a 5 de maio de 2018, entre as 9 horas e 30 minutos e as 17 horas e 30 minutos. A Associação de Professores da Matemática e o Instituto de Educação convidam à participação os professores do ensino básico e do ensino secundário, a quem o encontro é particularmente dirigido.

O encontro será certificado como ação de curta duração (Despacho n.º 5741/2015 Artigo 3.º).

Geometria com e sem muros

A ideia chave deste artigo é uma reflexão sobre a utilização de programas de geometria dinâmica (AGD) na aprendizagem da geometria desde os primeiros anos. Esta reflexão é feita aproveitando o duplo sentido da palavra muro e brincando um pouco com esse sentido.

UM PROBLEMA COM MUROS

São bastante conhecidos os problemas de geometria sobre muros. A variação do comprimento da sombra de um muro em função da sua altura, a obtenção da altura do muro sem precisar de ir ao cimo do muro são dois dos modelos mais comuns. Nesta nota resolvo e discuto mais um. O problema é simples e foi divulgado há algum tempo pelo José Paulo Viana num dos seus artigos semanais do Jornal Público. Não me lembro exatamente da formulação apresentada, mas o problema é o seguinte:

Temos dois muros paralelos e ligamos o topo de cada um deles à base do muro oposto por uma corda, como mostra a figura 1. As duas cordas encontram-se num ponto. Um dos muros tem 3 m de altura e o outro 5 m. Qual é a altura do ponto de encontro das duas cordas.

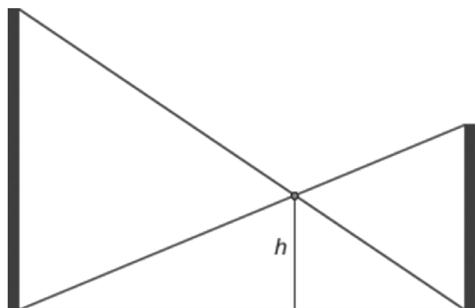


Figura 1

Para mim é impensável nos dias de hoje abordar um problema de geometria como este sem recorrer de imediato a um ambiente de geometria dinâmica (AGD). Para fazer a construção dinâmica

surge logo uma questão, qual é a distância entre os muros? A ausência deste dado, que não foi facultado, aponta logo para fazer a construção dinâmica com esta distância variável. Depois de feita a construção, basta fazer as medições e obtemos de imediato o valor da altura pedida. O problema está resolvido para os valores dados e identifica-se logo um primeiro invariante: a altura pedida mantém-se quando se varia a distância entre os muros. Porém, ainda nos falta conhecer outras relações entre os vários elementos da figura.

O passo seguinte é identificar alguns elementos e estabelecer relações entre eles. Propositadamente decido representar os dados por letras pois o ambiente dinâmico empurra-me para trabalhar com medidas variáveis, o que é o mesmo que dizer que estamos a trabalhar com qualquer medida (figura 2).

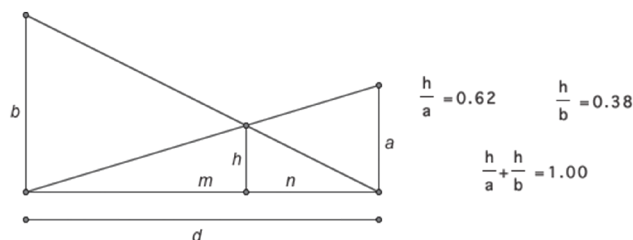


Figura 2

Obtidas algumas medidas e calculando a razão entre a altura pedida e a altura de cada um dos muros, surge um novo e desafiador invariante. A soma destas duas razões mantém-se sempre igual a 1. Conhecida esta relação, o problema está resolvido para qualquer valor de a e b , isto é, para todas as medidas da altura de cada um dos muros. Basta substituir a e b e calcular h .

Nesta fase faz sentido perguntar porque será a soma das duas razões invariante e igual a 1?

Para compreender esta relação o problema vai passar rapidamente de um problema de geometria a um problema de álgebra.

$$\frac{m}{h} = \frac{d}{a} \quad \text{ou seja} \quad m = \frac{dh}{a}$$

$$\frac{n}{h} = \frac{d}{b} \quad \text{ou seja} \quad n = \frac{dh}{b}$$

$$\text{de onde se tira} \quad \frac{dh}{a} + \frac{dh}{b} = d$$

$$\text{que simplificado é} \quad \frac{h}{a} + \frac{h}{b} = 1$$

$$\text{relação esta que é equivalente a} \quad h(a + b) = ab$$

$$\text{ou seja} \quad h = \frac{ab}{a+b}$$

O problema que já estava resolvido com o AGD para quaisquer medidas da altura de muros, fica agora totalmente compreendido. Mas tornou-se um problema de álgebra e isso carregou-o de dificuldades, colocou-lhe mais muros, agora de natureza compreensiva. Considero que ao nível da aprendizagem o problema foi desafiador e interessante na parte do AGD, adequado ao 3º ciclo para todos os alunos. A segunda parte, algébrica, já coloca outras exigências e é discutível para que nível a sua adequação para todos.

Como conclusão destaco a ideia de que, com recurso a um AGD, o problema dos muros adquiriu uma configuração totalmente diferente do que se fosse resolvido com papel e lápis. Aliás, sem um AGD o problema dos muros era, simultaneamente, um problema de geometria e de álgebra, e teria sido resolvido com recurso às relações entre os elementos de dois triângulos retângulos. A resolução de um problema como este leva-nos a questionar a orientação do ensino da geometria, tanto ao nível dos conteúdos a trabalhar como da natureza das tarefas a realizar pelos alunos. É aqui que entra a segunda parte da reflexão.

APRENDER GEOMETRIA SEM MUROS

Descrevo agora um episódio simples passado recentemente numa turma de 2.º ano de escolaridade. Nesta turma a professora integra o recurso ao GeoGebra, pelos seus alunos, desde o 1.º ano.

A tarefa proposta aos alunos foi a seguinte:

Descobrir todas as bandeiras triangulares que se podem construir num geoplano de 3 por 3.

O GeoGebra permite trabalhar com uma rede quadriculada e, por isso, é uma representação fiel do geoplano com a mais valia de ser dinâmica. Os alunos tinham de recorrer ao GeoGebra para fazer as experiências e depois representar as soluções

obtidas no papel. O objetivo da tarefa era construir triângulos, em posições diversas, e identificar relações simples entre os lados dos triângulos. O contexto escolhido, construir bandeiras, tinha como intenção proporcionar logo uma orientação para que os triângulos não fossem desenhados nas posições mais comuns.

Na resolução os alunos descobriram os 8 triângulos possíveis (figura 3). Nem todos os alunos descobriram todos os triângulos, mas o oitavo, o último da figura 3, em baixo à direita, foi descoberto por vários alunos e originou uma discussão coletiva animada. Mas o mais interessante é que a própria professora, ao fazer a planificação da tarefa, tinha pensado que os alunos não iriam descobrir este oitavo triângulo pois era o único que não tinha nenhum lado coincidente com as linhas da rede quadriculada e poderia não ser considerado como uma bandeira. Foram os alunos que o descobriram e argumentaram que só com este tinham todos os triângulos possíveis.

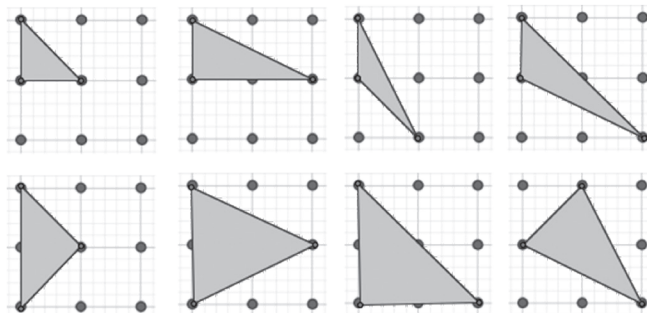


Figura 3

Os alunos desta professora resolvem tarefas de geometria desafiadoras e as expectativas da professora são sempre elevadas, no entanto eles ultrapassam-nas sem dificuldade e acabam por surpreender a professora. Vale a pena destacar que esta professora lhes apresenta a geometria sem muros.

No caso das bandeiras, o problema sugere logo um desenvolvimento que é descobrir todos os quadriláteros possíveis de construir num geoplano de 3 por 3 e depois descobrir todos os polígonos. No caso do problema dos muros ficou clara a abordagem por invariantes que os AGD possibilitam para a resolução de problemas.

A matemática sempre teve muros para os alunos. Entendidos aqui muros como obstáculos que é preciso ultrapassar. Os recursos tecnológicos permitem eliminar muitos desses muros. Infelizmente parece que insistimos em manter os muros, mesmo quando temos recursos cada vez mais acessíveis e poderosos à disposição de todos e que nos permitem eliminá-los.

Geometria descritiva e perspectiva cavaleira

EDUARDO VELOSO

Começamos por recordar uma afirmação que deveria constituir, neste tempo em que se continua ainda à procura das “aprendizagens essenciais” na matemática escolar, o tema principal de reflexão sobre a matemática na escolaridade obrigatória:

“A razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural, associada ao facto de a matemática constituir uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de pensar e de aceder ao conhecimento”¹.

Se tal fosse aceite e seguido, seria natural que os estudantes portugueses acessem, por exemplo, ao longo da sua escolaridade, a algum dos trabalhos do matemático português Pedro Nunes — que para muitos, depois de 12 anos de matemática, é apenas o nome de uma escola em Lisboa.

Acontece que a tecnologia nos dá hoje a possibilidade de explorar temas de matemática, sobretudo de geometria, que sem o seu recurso seriam inacessíveis. Com a ajuda de software apropriado, esses temas podem contribuir assim para a finalidade apontada da educação matemática para todos. É o caso da *linha de rumo* de Pedro Nunes, um tema muito interessante que começaremos a abordar neste artigo. Tratando-se de uma curva sobre a esfera, teremos que recorrer a processos de representação, transformações geométricas e curvas auxiliares. Tal facto irá exigir uma sequência de três artigos:

- o primeiro dizendo respeito à geometria descritiva e à perspectiva cavaleira;
- o segundo dedicado a projecção estereográfica;
- e finalmente o terceiro apresentando a *linha de rumo* de Pedro Nunes.

Como dissemos, a tecnologia a que os alunos deveriam ter acesso permanente permite tratar este assunto num nível relativamente elementar. Recorreremos a um programa de geometria dinâmica, o *Geometer's Sketchpad* (GSP). Será possível, aos leitores que utilizem habitualmente outro programa, como o *Cabri*, ou mesmo o Geogebra, replicar os métodos, que mostraremos

em detalhe — descrições completas e pequenos vídeos online, por exemplo².

GEOMETRIA DESCRITIVA

Foi o matemático francês Gaspard Monge (1746-1818) que inventou a geometria descritiva, uma descrição dos princípios matemáticos para a representação de objectos tridimensionais no plano. Esta representação tinha naturalmente sido aproximada de forma empírica desde há muitos séculos por arquitectos e cenógrafos, mas Monge sistematiza-a de forma rigorosa. Como processo exemplar de matematização, envolvendo actividades de visualização importantes na educação matemática para todos, a sua abordagem elementar deveria ser considerada na escolaridade obrigatória.

A *Geometria Descritiva*, como disciplina, está integrada nos cursos superiores de arte, arquitectura e engenharia e no ensino secundário, como disciplina bial da componente específica dos cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologia e de artes visuais (e nos cursos de ensino artístico especializado de artes visuais). Faremos uma apresentação muito sumária da descritiva de Monge, apenas o que necessitamos para, por meio da perspectiva cavaleira, abordar a projecção estereográfica.

Imagine o leitor dois planos π_1 — horizontal e π_2 — vertical (figura 1). Os rectângulos sombreados servem apenas para indicar a posição relativa dos planos, pois estes estendem-se indefinidamente em todas as direcções. A intersecção dos dois planos chamava-se — no meu tempo, há 70 anos... — linha terra (LT). Imagine ainda um sólido tridimensional representado na figura: trata-se de uma pirâmide ABCDE, cuja base é o quadrado ABCD. Considere em seguida que efectua as projecções ortogonais da pirâmide sobre os dois planos, obtendo as figuras traçadas sobre π_1 e π_2 na figura 1.

Monge dá ainda um passo essencial: executa uma rotação de 90° de um dos planos de projecção em torno da recta LT, de modo a que os planos fiquem coincidentes e portanto as duas figuras possam ser desenhadas em verdadeira grandeza numa mesma folha de papel... Imaginemos então a rotação de π_1 em torno de LT de modo a ficar coincidente com π_2 .

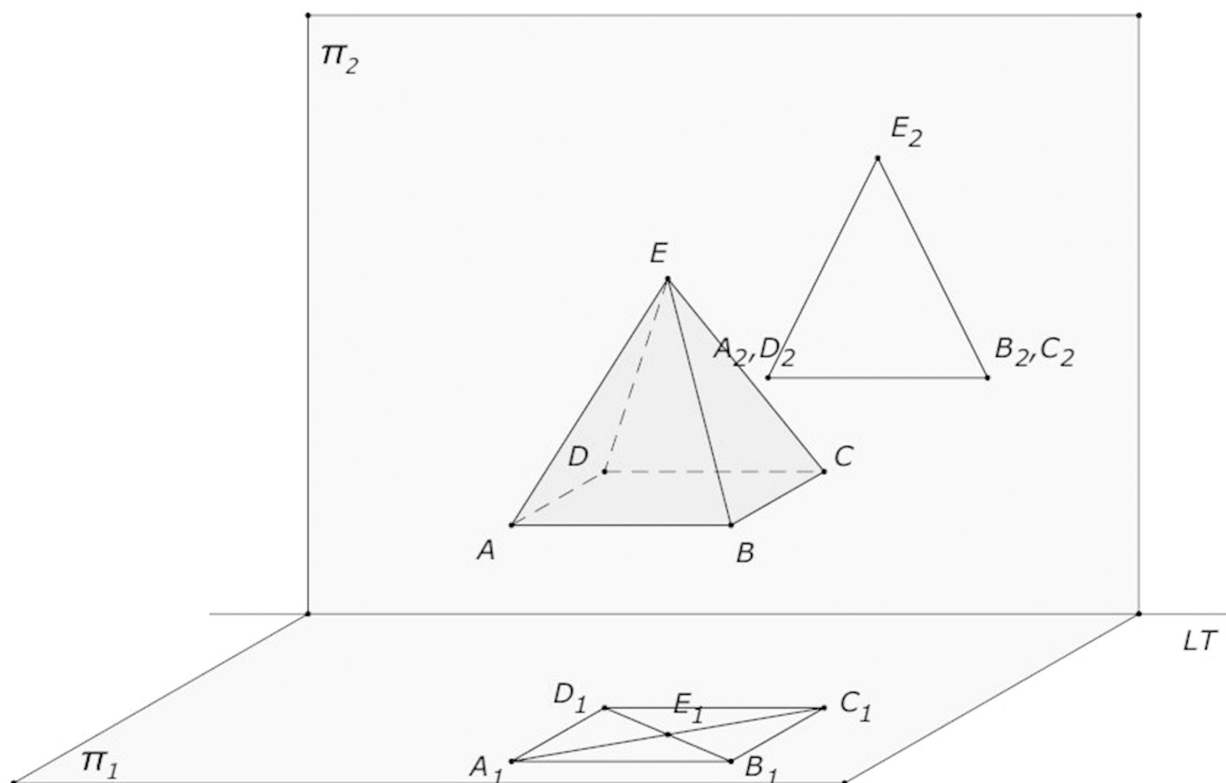


Figura 1

Na figura 2 está o resultado final. A pirâmide está apenas representada pelas suas projecções ortogonais nos dois planos, agora coincidentes. Devido a este facto, os sombreados não são precisos nesta representação. As duas figuras que representam a pirâmide são vulgarmente chamadas a vista de cima (projecção em π_1) e a vista de frente (projecção em π_2).

Em resumo, a tese de Monge, tal como está exposta nas lições que dava na Escola Normal Superior no ano III da República Francesa (1794), é que podemos ter um conhecimento completo de um objecto tridimensional se conhecermos as suas duas vistas, de frente e de cima³. Essas lições foram publicadas em 1799 e mereceram, de Poncelet e de Gauss, as seguintes observações:

Poncelet, 1865

Dissemos que a Geometria descritiva, tal como é empregue normalmente, tem, sobre a das coordenadas, a vantagem de usar apenas dois planos de projecção. Além disso, opera directamente e graficamente sobre as projecções e, por operações ainda gráficas, leva-nos ao que se refere à figura do espaço. Numa palavra, todas as relações ou propriedades descritivas do plano são traduzidas em relações ou propriedades espaciais, e reciprocamente.

Gauss, 1813

Esta obra deve ser louvada pela sua enorme clareza, a concisão do seu texto, a progressão bem conseguida do mais fácil ao mais difícil, a

grande quantidade de ideias que apresenta e a sua realização perfeita. Por essa razão, recomendamos a sua leitura; encontraremos aí um rico alimento espiritual, que contribuirá sem qualquer dúvida para a conservação e progresso do verdadeiro espírito geométrico que falta por vezes na matemática actual.

Julgamos que as palavras destes dois matemáticos são ainda muito justas, incluindo a falta de um verdadeiro espírito geométrico na educação matemática actual, estando a matemática na escolaridade obrigatória infestada de equações, coordenadas e análise... A inclusão nos programas de uma apresentação histórica e conceptual da geometria descritiva poderia contrariar esta tendência.

PERSPECTIVA CAVALEIRA

Se alguém nos pedisse um desenho dando a ideia do que é um cubo, nunca nos lembrariamos de desenhar as suas duas vistas em geometria descritiva... O que talvez fizéssemos era apresentar-lhe um dos desenhos da figura 3. Como se obtém este tipo de representação? Imaginemos um cubo no espaço e um plano exterior, no caso presente um plano paralelo à face DCGH. Efectuemos uma projecção cilíndrica (ou paralela) do cubo, mas não ortogonal, sobre esse plano. O resultado seria um desenho como os da figura 3. Apenas as imagens das faces paralelas ao plano de projecção se manteriam iguais às faces do cubo, as outras dependeriam da direcção de projecção. Este

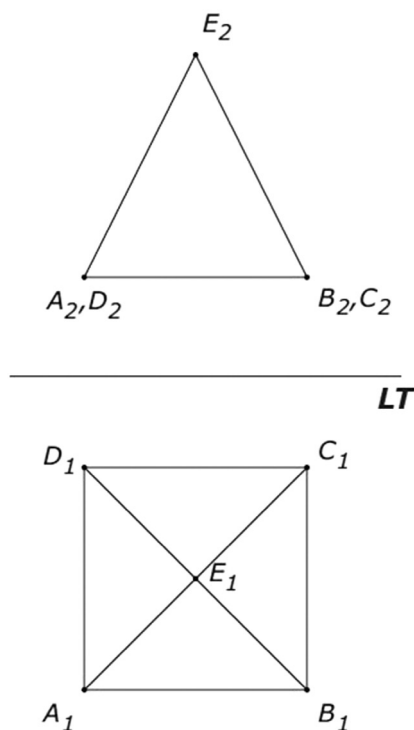


Figura 2

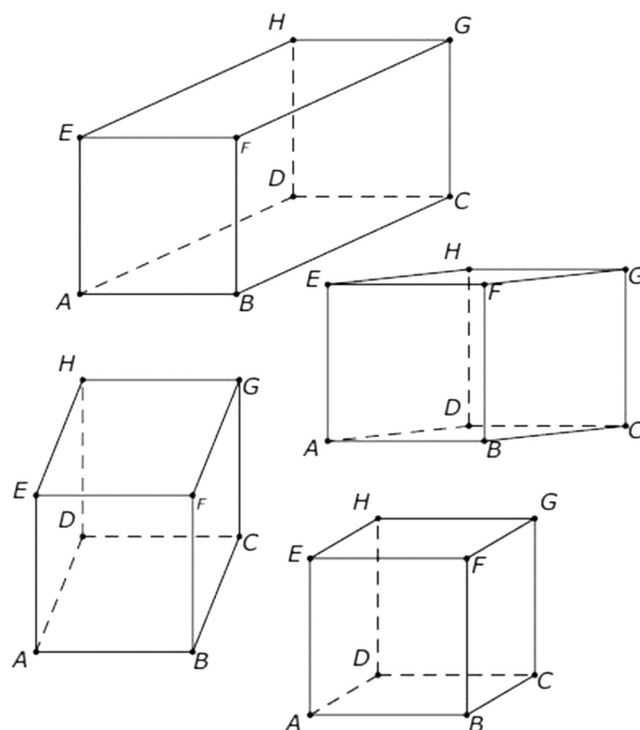


Figura 3

tipo de imagem do cubo é denominada representação do cubo em perspectiva cavaleira⁴.

Acontece que é muito simples, com a ajuda de um software de geometria dinâmica, como o GSP, construir a perspectiva cavaleira de um sólido tridimensional a partir das suas duas vistas em geometria descritiva.

Esse processo está descrito de forma completa, incluindo um pequeno vídeo, nas páginas online de apoio a este artigo (ver nota 2). Resta apenas dizer neste ponto que a direcção da projecção paralela preferida e portanto escolhida é a que tem como resultado a figura sombreada (em baixo, à direita). O que se pretende é que

- os segmentos ortogonais ao plano de projecção fiquem com 50% do comprimento dos segmentos iguais e paralelos ao plano de projecção, isto é $BC/AD = .5$
- o ângulo entre um segmento ortogonal e um paralelo seja de 30° ; por exemplo, $\text{ang}(AB, AD) = 30^\circ$.

No ponto seguinte, obteremos uma esfera em perspectiva cavaleira.

IMAGEM DE UMA ESFERA EM CAVALEIRA

Vamos mostrar como, a partir das vistas de frente e de cima de uma esfera, podemos obter a sua imagem em perspectiva cavaleira, tendo em atenção que em artigos seguintes esse tipo de imagem da esfera irá ser fundamental.

Trata-se de um processo exigindo um programa de geometria dinâmica, como o GSP. Aqui indicaremos o processo sem grandes detalhes, sendo o recurso aos materiais *online* essencial para a compreensão e execução prática da construção da perspectiva cavaleira. Iremos supor que a esfera de partida representa a esfera terrestre, dado que iremos posteriormente traçar sobre ela a *linha de rumo* do Pedro Nunes.

No lado direito da figura 4 estão representadas as vistas da esfera, que são obviamente duas circunferências iguais e com os centros na mesma perpendicular à linha terra (LT). Para fixar ideias, supomos que a semi-circunferência g_2 (a linha mais carregada) é a vista de frente do meridiano de Greenwich (sendo a sua vista de cima o segmento horizontal g_1). Como poderá ver *online*, definimos uma ferramenta denominada cavaleira, no GSP, que constrói, para cada par de vistas (P_2, P_1), o ponto correspondente P na perspectiva cavaleira (dada uma projecção paralela sobre o plano de frente, definida pelas suas vistas d_2 e d_1). Assim sendo, obtemos:

- a partir de C_2 e de C_1 ,
- a circunferência de centro C e raio igual ao segmento CP_N , que é a imagem em perspectiva cavaleira do meridiano de Greenwich;
- por meio do comando *locus*, o equador *eq* (ver *online*).

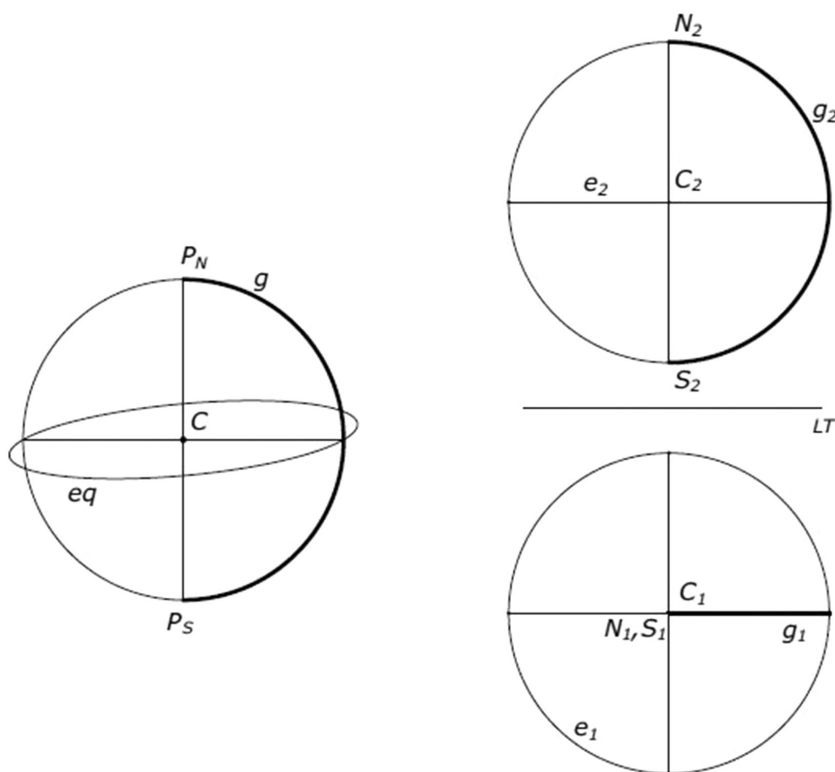


Figura 4

Notas

1. Paulo Abrantes, http://www.netprof.pt/pdf/Competencias_basicas/Matematica.pdf
2. Site de apoio a este artigo: https://www.eduardoveloso.pt/geom_textos
3. As lições de Monge estão publicadas: Gaspard Monge. *Geometrie Descriptive*. Editions Jacques Gabay, 1989, Paris.

4. Para informação suplementar sobre a perspectiva cavaleira, pode ler um texto de apoio, <http://www.apm.pt/apm/geometria/inoveg/egtext1.html>, a um curso organizado pelo Centro de Formação da APM em 1998: <http://www.apm.pt/apm/geometria/inoveg/curso.html>.

EDUARDO VELOSO



6th INTERNATIONAL CONGRESS of EDUCATIONAL SCIENCES and DEVELOPMENT

SETÚBAL (PORTUGAL), 21-23 JUNHO, 2018



De 21 a 23 de junho de 2018, na cidade de Setúbal, decorre o **6th International Congress of Educational Sciences and Development** que incide sobre diversos temas no âmbito das Ciências da Educação e da Psicologia do Desenvolvimento e tem como destinatários investigadores, docentes, educadores, estudantes, gestores e diretores escolares, abrangendo todos os níveis do sistema educativo formal e contextos informais de aprendizagem e educação. As datas de inscrição e de submissão de propostas, o programa e outras informações úteis estão disponíveis no site: http://congresoeducacion.es/edu_web6/presentacion_p.html

Autorregulação da aprendizagem dos alunos em matemática: que papel para o professor?

A autorregulação da aprendizagem compreende processos de regulação em que os alunos monitorizam e avaliam o seu progresso em direção a objetivos, recorrendo a feedback interno que geram para determinar quando devem persistir numa determinada abordagem ou ajustar as suas estratégias de aprendizagem. Um investimento intencional do professor para promover estes processos tende a resultar numa melhoria da capacidade de autorregulação dos alunos, o que, por sua vez, contribui para uma melhoria da aprendizagem (Brown & Harris, 2013; Zimmerman, 2011). Mas de que modo se pode levar esta intencionalidade à prática?

AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM PELOS ALUNOS E O PAPEL DO PROFESSOR

A autorregulação da aprendizagem pode ser entendida como um ciclo que inclui três fases: (i) *antecipação*, com definição de objetivos e planos; (ii) *desempenho*, que envolve autocontrolo e auto-observação; e (iii) *autorreflexão*, que inclui autojulgamento e autorreação (Zimmerman, 2011). A autoavaliação é um processo de autorregulação especialmente associado à fase de autorreflexão. As mais-valias da autoavaliação são reconhecidas pela investigação e tendem a ser mais significativas quando esta não se limita a uma simples autotranscrição e recorre a critérios com foco num conceito de qualidade partilhado (Andrade, 2013; Black & Wiliam, 1998; Brown & Harris, 2013). De facto, uma autoavaliação promotora da aprendizagem pressupõe que os alunos: (i) possuam um conceito de qualidade (ou objetivo) a que possam aspirar; (ii) comparem o seu nível atual de desempenho com o nível desejado; e (iii) se envolvam em ação apropriada que minimize ou elimine o fosso entre o nível atual e o desejado (Sadler, 1989). Neste contexto, o nível de qualidade desejado é refletido por critérios de avaliação partilhados por professor e alunos. Embora os critérios possam ter origem externa, eles devem ser apropriados internamente pelos alunos (Black & Wiliam, 1998; Nunziati, 1990). O envolvimento dos alunos em processos de negociação que os ajudem a compreender esses critérios e o modo como podem usá-los no contexto do seu trabalho facilitam esta apropriação (Wiliam, 2007).

A autorregulação é uma capacidade naturalmente presente no aluno, mas o seu desenvolvimento requer um processo de aprendizagem (Nunziati, 1990) que deve ser apoiado pelo

professor (Sadler, 1989). Discussões matemáticas coletivas podem ser promovidas com este intuito. O debate coletivo de conceitos e processos matemáticos não só permite informar sobre o modo como os alunos estão a aprender, mas também promove a responsabilidade e autoridade dos alunos enquanto agentes de aprendizagem (Wiliam 2007). Feedback que ajude os alunos a ter uma perceção mais precisa sobre a qualidade do seu desempenho e oportunidades para reflexão sistemática são também estratégias com potencialidades para o desenvolvimento da autorregulação pelos alunos (Black & Wiliam, 1998).

UMA INTERVENÇÃO DE ENSINO PROMOTORA DA AUTORREGULAÇÃO PELOS ALUNOS

A intencionalidade do professor para promover a autorregulação pelos alunos só pode ser concretizada através de uma intervenção de ensino cuidadosamente planeada. Este foi o caso de uma intervenção concebida num contexto de um grupo colaborativo constituído por cinco professores de matemática do 3.º ciclo do ensino básico e eu enquanto investigadora. A professora Joana, um dos membros do grupo, implementou a intervenção de ensino ao longo de dois anos letivos, numa turma inicialmente do 8.º ano de escolaridade. A intervenção contemplou estratégias orientadas para três vertentes: apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos; comunicação oral intencional em discussões matemáticas coletivas; e autoavaliações escritas pelos alunos.

Os critérios de avaliação foram estabelecidos e apresentados aos alunos na forma de uma grelha de descritores para o desempenho desejado (Quadro 1). Os critérios foram definidos pelo grupo colaborativo (para que refletissem o desempenho matemático desejado no âmbito da intervenção), tendo, portanto, origem externa aos alunos.

O *significado* e o *valor* dos critérios de avaliação foram objeto de negociação sistemática entre professora e alunos, especialmente em *momentos formais*, intencionalmente planeados. Destes, destacam-se a primeira abordagem aos critérios, com avaliação de um exemplar de trabalho de alunos; e confrontos regulares de avaliações de alunos e professora. No primeiro ano, a *valorização dos critérios* foi promovida quase exclusivamente como *referentes para a autoavaliação a posteriori*, já no segundo contemplou o uso dos critérios como *referentes para uma regulação interativa*

e *proativa* (para monitorização do desempenho nas aulas e definição de objetivos).

Quadro 1. Critérios de avaliação

Na aula de Matemática, sou capaz de/vou trabalhar para:	
Conceitos e Procedimentos	Usar os conceitos e resultados matemáticos corretamente e mostrar compreensão.
	Usar os termos certos.
	Realizar os procedimentos necessários (cálculos, algoritmos, uso de fórmulas e regras ...) de forma completa e correta.
Estratégias e Processos de Raciocínio	Usar conhecimentos exteriores à tarefa importante para a sua resolução.
	Usar e relacionar os dados importantes da tarefa, de forma adequada.
	Apresentar uma estratégia adequada e sistemática.
	Apresentar um processo de resolução completo.
	Apresentar uma solução/conclusão completa, correta e de acordo com a restante produção.
Comunicação Escrita e/ou Oral	Descrever/Explicar de forma clara o trabalho realizado.
	Apresentar argumentos/justificações válidos. Fazer intervenções importantes, nos momentos certos e por iniciativa própria, em particular em reação às intervenções dos colegas e professor. – Colocar questões a colegas ou ao professor. – Comentar as intervenções dos colegas ou professor. – Fazer comparações entre as intervenções. – Relacionar as intervenções com outras ideias matemáticas/aprendizagens anteriores.

As discussões matemáticas coletivas foram parte integrante de um modelo cíclico de aulas num quadro de ensino exploratório, surgindo após a realização em pequenos grupos de uma tarefa matemática desafiante e antes de uma tarefa de autoavaliação escrita. Estas discussões foram reguladas por normas sociais e matemáticas estabelecidas com os alunos e sistematicamente reforçadas pela professora. As normas sociais destacavam o valor de: (i) contribuições dos alunos para o discurso; (ii) ouvir e fazer sentido das contribuições dos pares; (iii) pares como audiência privilegiada de comunicação; (iv) participação equitativa dos alunos. O redirecionar de questões para a turma e o proporcionar de espaços para interação entre pares com uma contribuição intencional reduzida da professora são exemplos de estratégias usadas. As normas matemáticas traduziram-se maioritariamente pelos critérios de avaliação.

Tarefas de autoavaliação escrita diversificadas foram propostas aos alunos de acordo com objetivos mutáveis ao longo da intervenção. Por exemplo, numa fase inicial uma grelha de

avaliação foi usada para a autoavaliação em grupo pelos alunos, face ao nível reduzido de autorregulação envolvido e ao objetivo primordial de negociar o significado e valor dos critérios como referentes para a autoavaliação. Alunos e professora usaram esta grelha para os quatro primeiros ciclos de aulas, situando o desempenho dos alunos num nível de 1 a 4, dependendo da proximidade ao nível desejado descrito. Justificações para os níveis atribuídos foram discutidas na turma nos momentos de confronto de avaliações. *Reflexões escritas* individuais foram propostas por dez vezes numa fase posterior (face aos níveis superiores de autorregulação) e foram suportadas por orientações para a sua escrita e feedback regular relativamente ao desempenho dos alunos nas aulas e em autoavaliações anteriores. Nestas autoavaliações foi pedido aos alunos que refletissem sobre: *aprendizagens e dificuldades; comparação do desempenho face aos critérios de avaliação; aspetos a melhorar e ações para atingir o nível desejado*. A autoavaliação não teve consequências diretas para a avaliação sumativa, e a confiança e o à vontade dos alunos foram promovidos por uma abordagem positiva e não-punitiva.

Ao longo da intervenção de ensino e em relação com a prática de Joana, os alunos melhoraram o seu desempenho nas discussões coletivas, evoluíram em direção à apropriação dos critérios de avaliação e desencadearam processos de autorregulação enriquecidos, especialmente potencializados pelas reflexões escritas, num percurso individualizado e não linear.

PAPEL DO PROFESSOR E AUTORREGULAÇÃO PELOS ALUNOS EM DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

Recorro agora a um episódio de aula para ilustrar a prática de Joana na vertente das discussões coletivas e as oportunidades geradas para a autorregulação pelos alunos. No episódio discute-se o número de casos possíveis para determinar a probabilidade de, escolhendo três vértices de um cubo, eles definirem uma face. Sandro está no quadro a apresentar a sua resolução. O aluno já havia identificado, por exaustão, o número de possibilidades fixando o vértice A e está a registar as possibilidades (sem repetição) fixando o vértice B. Nesse registo, Sandro comete um erro e Joana aguarda que a turma se pronuncie. Daniel acaba por identificar o erro do colega (fala 1). Sandro é encaminhado por colegas para a correção do erro (fala 2) e é incentivado pela professora a continuar a resolução (fala 3). Andreia e Maria dão indicação de outra possibilidade que não deve ser contemplada (falas 5 e 6). Desta vez, Joana remete a validação da contribuição das alunas para Sandro, aparentemente, para que ele se aproprie da situação e das contribuições e possa, autonomamente, avançar na resolução (fala 7). As oportunidades concedidas revelam-se bem-sucedidas, com Sandro a revelar processos de autorregulação. O aluno usa o feedback recebido para reorientar a sua ação inicial que havia conduzido ao erro e parece monitorizar eficazmente a nova ação, ao continuar

corretamente a resolução e avançar com uma conjectura matemática, ao mesmo tempo que identifica obstáculos que se lhe colocaram na resolução inicial (falas 8 a 11):

1. **Daniel:** Oh Sandro (...) o A já não conta.
2. **Eduardo:** Pois (...) Porque agora tu vais pôr BAC, por exemplo, não é? (...) E já está ali ABC. E depois vais pôr BAD e já está ali ABD (Pausa) Podes apagar o A.
(Sandro apaga registo)
3. **Professora:** Portanto, ali, em vez de começar com o A, já só vais começar com...?
4. **Eduardo:** O C.
(Sandro recomeça registos no quadro)
5. **Andreia:** (...) também não vai pôr BCA.
6. **Andreia e Maria:** Porque já está ABC.
7. **Professora:** (...) Agora, é que ele vai ver (...) Oh Sandro, agora para terceiro vértice, então? (...)
8. **Sandro:** B, C, D.
(...)
9. **Professora:** E a seguir?
(...)
10. **Sandro:** BCE.
(Sandro conclui registos para vértices B e C. Discute-se o número de possibilidades fixando determinados vértices, até que Sandro avança com uma conclusão)
11. **Sandro:** Está sempre a reduzir 1 (...) Eu não tinha percebido isto.

Neste episódio, a professora assume um papel relativamente estruturante das interações, mas ao valorizar a partilha e apreciação dos processos matemáticos adotados pelos alunos, e em especial encarregar os alunos de validar/refutar e decidir sobre a adequação/eficiência das resoluções apresentadas, desencadeia processos de regulação pelos alunos, os próprios e também os pares.

A CONCLUIR

A autorregulação da aprendizagem pelos alunos é uma capacidade que pode e deve ser desenvolvida com o apoio do professor. A literatura aponta diversas possibilidades para a prática do professor com esse intuito. A intervenção de ensino aqui apresentada contempla e articula estratégias e ações específicas dirigidas a três vertentes – apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos; comunicação oral intencional em discussões matemáticas coletivas; e escrita de autoavaliações pelos alunos – e constitui um modelo longitudinal (prolonga-se por dois anos letivos) e relativamente holístico (molda o próprio processo de ensino e aprendizagem através de múltiplas linhas de ação) com potencialidades para a promoção da autorregulação dos alunos.

O professor de matemática interessado em promover o desenvolvimento da capacidade de autorregulação dos alunos é convidado a usar esta intervenção como inspiração e ponto de partida para a sua própria prática, ajustando as estratégias sugeridas e forma de concretização em função das características, condições disponíveis e intenções específicas à sua sala de aula. Importa, contudo, notar que o desenvolvimento da autorregulação pelos alunos é um processo complexo, que requer um investimento sistemático do professor. Não obstante as sugestões e possibilidades aqui apresentadas, são esperados desafios e dificuldades na sua implementação. A colaboração entre professores mostra-se um contexto favorável à conceção e concretização de uma intervenção desta natureza e pode ajudar a ultrapassar eventuais obstáculos.

Referências bibliográficas

- Andrade, H. L. (2013). Classroom assessment in the context of learning theory and research. In J. H. McMillan (Ed.), *The SAGE Handbook of Research on Classroom Assessment* (pp. 17-34). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Black, P. & Wiliam. D. (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education*, 5, pp. 7-71.
- Brown, G. T. L., & Harris, L. R. (2013). Student self-assessment. In J. H. McMillan (Ed.), *The SAGE handbook of research on classroom assessment* (pp. 367-393). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *Cahiers Pédagogiques*, 280, pp. 47-62.
- Sadler, R. (1989) Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, 18, pp. 119-144.
- Wiliam, D. (2007). Keeping Learning on Track: Formative Assessment and the Regulation of Learning. In F. K. Lester Jr. (ed.) *Second Handbook of Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 1053-1098). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Zimmerman, B. J. (2011). Motivational sources and outcomes of self-regulated learning and performance. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (Eds.), *Handbook of self-regulation of learning and performance* (pp. 49-64). New York: Routledge.

SÍLVIA SEMANA

INTERNATIONAL SCHOOL OF PARIS



Questões à volta dos problemas

JOSÉ PAULO VIANA

Quando queremos que a resolução de problemas tenha um papel decisivo no ensino da Matemática, pode ser importante, ou mesmo essencial, refletir sobre o assunto e tentar responder a uma série de questões. O que iremos fazer é justamente procurar encontrar resposta para um conjunto de interrogações que, enquanto professores, nos podem surgir quando queremos resolver problemas com os alunos.

Claro que as respostas aqui apresentadas refletem não só as experiências por que passei mas também as opiniões que criei e as opções que fui tomando. Não são, de modo nenhum, respostas definitivas nem absolutas. Pretendem simplesmente ser um contributo para as desejáveis discussões que se devem ir tendo nas escolas entre os professores.

EM QUE ANOS DE ESCOLARIDADE SE PODERÁ PROPOR UM CERTO PROBLEMA?

Perante um problema que nos parece interessante, temos de pensar em que anos de escolaridade ele fará sentido e poderá contribuir positivamente para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos ou para a aplicação, numa situação inesperada, de conteúdos matemáticos recentemente tratados. Por outro lado, o mesmo problema poderá ser apresentado, com ligeiras variantes ou restrições, em diferentes níveis de escolaridade. É o que acontece, por exemplo, com o problema “Um número muito grande”:

Qual é o maior número que se consegue obter usando apenas quatro vezes o algarismo 2?

Descoberto esse número, que ultrapassa a capacidade das calculadoras, pode lançar-se uma nova pergunta a quem tenha um pouco mais de conhecimentos matemáticos:

Aproximadamente, quantos algarismos tem esse número?

Quando os alunos já estudaram os logaritmos de base 10, podemos mesmo levar o problema mais longe:

Exatamente, quantos algarismos tem esse número?

O PROBLEMA DEVE ESTAR DIRETAMENTE RELACIONADO COM OS CONTEÚDOS DO PROGRAMA?

Claro que não é obrigatório. Sempre que possível deveremos ir colocando problemas relacionados com o que os alunos estão a aprender, e os manuais escolares trazem habitualmente este tipo de propostas.

No entanto, em qualquer momento pode ser oportuno um problema interessante, ligado a outros conteúdos matemáticos ou que, não diretamente relacionado com o que os alunos estão a estudar nesse momento, obrigue a um tipo de raciocínio não usado com frequência. Existem muitas fontes onde os procurar: revistas, como a *Educação e Matemática* e a *Mathematics Teacher*, ou livros de divulgação, como os da coleção *O Prazer da Matemática*, da Gradiva, ou livros de recolha de problemas como os *Desafios*.

Um bom exemplo disto é o problema “Soma para 2017”:

Descobre as parcelas desta soma, em que cada letra corresponde a um só algarismo e vice-versa. Além disso, nenhum número começa por 0.

$$\begin{array}{rcccc} & A & B & C & \\ & D & E & F & \\ + & G & H & J & \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 & \end{array}$$

Com este enunciado, o problema pode ser proposto a qualquer pessoa. Aos mais novos exigir-se-á apenas que descubram uma solução. Para quem conheça a prova dos nove, pode sugerir-se que responda primeiro a esta questão:

Dos dez algarismos 0, 1, 2, ..., 8, 9 só vamos usar nove. Lembra-te da prova dos nove e descobre qual é o algarismo que, de certeza, não poderá ser usado.

O PROBLEMA ESCOLHIDO É ADEQUADO PARA A MAIORIA DOS ALUNOS DA TURMA PARA ONDE O VOU LEVAR?

Esta é uma questão que deve estar sempre presente. Um problema desadequado pode ter efeitos contraproducentes e negativos:

- desmotivar vários alunos,
- acentuar a ideia, infelizmente frequente, de que a Matemática é muito difícil, abstrata e só ao alcance de uma minoria.

Como as turmas são normalmente heterogêneas, de vez em quando temos de ter previstos prolongamentos ou variantes do problema para os propor aos alunos que o conseguem resolver mais depressa que a maioria. Um exemplo é, no problema anterior, “Soma para 2017”, acrescentar uma restrição ao enunciado inicial:

O número ABC é a menor das três parcelas. Qual é o maior valor possível para ABC?

E depois:

Qual é o menor valor possível para ABC?

ONDE DEVEM OS ALUNOS RESOLVER O PROBLEMA: NA AULA OU EM CASA?

Alguns problemas serão resolvidos na sala de aula. Como os alunos têm bem presente a situação, é possível avançar mais facilmente para uma discussão alargada:

- verificando a validade das várias estratégias de resolução que foram descobertas e usadas,
- comparando as várias estratégias apresentadas,
- analisando as possíveis soluções (se houver mais que uma),
- avançando para variantes ou prolongamentos do problema.

Outros problemas deverão ser resolvidos em casa e entregues ao professor. Desta forma, poderemos testar dois objetivos que normalmente não são fáceis de avaliar, pelo menos de forma sistemática, no decorrer das aulas:

- a capacidade de encontrar uma estratégia de resolução e de chegar à solução,
- a capacidade de transmitir ideias, raciocínios e conclusões matemáticas por escrito.

Neste caso, devemos previamente explicar claramente que os alunos poderão (e, por vezes, deverão) discutir o problema entre si ou com outras pessoas mas que a resolução e a passagem a escrito terão de ser sempre rigorosamente individuais.

Podem existir alguns inconvenientes:

- como os trabalhos têm de ser previamente corrigidos, a discussão do problema poderá não ser tão profunda e

enriquecedora visto terem passado alguns dias e os alunos não terem tão presente as estratégias que utilizaram,

- não há garantias de que os trabalhos foram na realidade feitos pelos alunos.

Na minha opinião, isto não acontece com frequência e a maior parte dos casos são facilmente identificáveis (a linguagem usada não é a habitual no aluno, o tipo de raciocínio é mais rebuscado do que o costume, a técnica matemática não foi ainda dada nas aulas, etc.).

Uma forma de atenuar esta última desvantagem é, quando acharmos que isto possa ter acontecido ou vir a acontecer, pedir aos alunos que expliquem uma ou duas passagens da resolução. Claro que, para isto, é preciso fazer uma boa gestão do tempo.

COMO DEVE O PROBLEMA SER RESOLVIDO: INDIVIDUALMENTE OU EM GRUPO?

Não há regras absolutas sobre esta questão. Alguns problemas têm mais sentido se pensados e feitos individualmente, enquanto outros se tornam muito mais ricos e formativos se forem analisados, discutidos e resolvidos em grupo. Contudo, mesmo nestes últimos, penso que é de exigir sempre uma resolução escrita individual.

COMO DEVEM OS ALUNOS APRESENTAR A RESOLUÇÃO: ORALMENTE OU POR ESCRITO?

Tudo dependerá dos objetivos que o professor pretende alcançar com o problema.

A apresentação oral exige muito mais tempo de aula e, por isso, muitas vezes não pode ser pedida a todos os alunos. Tem a vantagem de permitir ao professor discutir certos aspetos e aperceber-se de falhas ou lacunas que, noutras circunstâncias, talvez passassem despercebidas.

A resolução escrita pode ser pedida a todos os alunos e corrigida e classificada pelo professor. Posteriormente, é possível dedicar parte de uma aula à análise do problema e das estratégias de resolução.

Durante a discussão dos problemas, poderá valer a pena referir que:

- Todas as estratégias que levam à solução são boas.
- Algumas estratégias poderão ter vantagens sobre outras mas apenas por serem mais claras, menos trabalhosas ou utilizarem conceitos e técnicas mais simples.
- Embora o objetivo último seja chegar a uma solução, é conveniente usar estratégias que nos permitam garantir que encontrámos todas as soluções e, também, que possam ser usadas noutros problemas e situações.

O QUE DEVEM APRESENTAR OS ALUNOS: APENAS A RESPOSTA OU UM RELATO DE TODO O PROCESSO DE RESOLUÇÃO?

Só em casos excepcionais nos interessará apenas a resposta.

No ensino da Matemática, a riqueza da resolução de problemas virá não apenas do desenvolvimento dos raciocínios e técnicas específicos desta disciplina mas também do aperfeiçoamento da capacidade de transmitir, oralmente ou por escrito, as ideias, os conceitos e os processos matemáticos.

COMO DEVERÁ SER FEITA A AVALIAÇÃO DO TRABALHO DOS ALUNOS?

A avaliação deve estar sempre presente, embora possa assumir várias formas.

Em todos os casos, alguns comentários poderão ser muito úteis para o aperfeiçoamento do aluno. Além das eventuais correções matemáticas, devemos ir chamando a atenção para outros aspetos: a necessidade de se usar linguagem apropriada, o benefício da clareza, a vantagem de se ser conciso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que tenho verificado quase sempre é que, perante um bom problema, praticamente toda a gente se concentra a tentar

encontrar uma solução. E a grande maioria não desanima perante as dificuldades. Por exemplo, veja-se o que me aconteceu nalgumas aulas em que foi proposto um problema interessante. Quando um grupo significativo de alunos já o tinha resolvido e me pareceu que era preciso avançar para os ocupar, não me contive e disse: *Vou dar uma pista*. Mas logo os que ainda não tinham terminado reclamaram e, sem levantar os olhos do papel ou da calculadora, gritaram: *Espere só um bocadinho!* E eu, vendo o erro da minha impaciência, esperei...

Sou de opinião que, no decorrer das aulas, os problemas deverão estar sempre presentes. Uma vez como introdução a um novo conceito ou a uma nova técnica de cálculo. Outras vezes como forma de verificar se esses conceitos ou técnicas estão assimilados. Outras ainda para fazer a ponte entre diferentes temas da Matemática. Finalmente, de vez em quando, simplesmente como forma de desenvolver e comparar os vários tipos de raciocínio.

(Adaptado de Viana, J. P. (2012), *Uma Vida Sem Problemas – A Matemática nos Desafios do Dia a Dia*, Lisboa: Clube do Autor)

JOSÉ PAULO VIANA



VPCT2018 Encontro Internacional

8 a 10 Nov 2018, UTAD, Vila Real, Portugal

<http://vpct2018.utad.pt>

O VPCT2018 – **A voz dos professores de C&T Encontro Internacional**, com a duração de três dias, pretende ser um fórum internacional, para profissionais da Educação em Ciência e Tecnologia (Ciências Matemáticas, Ciências da Natureza, Ciências Físicas e Químicas, Engenharia, Informática e Tecnologia), apresentarem e discutirem relatos e investigação de práticas de ensino e divulgação de C&T. Em particular pretende-se:

- Divulgar, apreciar, valorizar e melhorar as práticas de ensino de C&T de professores de todos os níveis de ensino que lecionem estas matérias, mostrando o que fazem para que seja possível refletir e melhorar;
- Interagir com investigadores, para que tanto professores como investigadores possam beneficiar deste trabalho conjunto.

A inclusão da cegueira na aula de Matemática...

O que necessitam os professores de saber?

CARLOTA BRAZILEIRO

A visão é, por excelência, o sentido que faculta uma melhor recolha de informação do meio envolvente. A ausência total ou parcial deste sentido, limita a perceção que o indivíduo cria da realidade e, em particular, interfere no seu perfil geral de aprendizagem. Segundo Campo (1986) a deficiência visual condiciona o ensino/aprendizagem da matemática, cabendo ao professor o papel de incentivar o processo de aquisição de conceitos matemáticos nos alunos com problemas visuais.

A minimização do impacto provocado pela ausência total, ou parcial da visão na aprendizagem da matemática, pode ser conseguida através da articulação de técnicas e estratégias de ensino, apoiadas por auxiliares técnicos específicos e recursos materiais adaptados. Deste modo, a conceção de um currículo adaptado para a matemática exige um investimento significativo por parte do professor, uma vez que os alunos cegos devem ter acesso à informação e a materiais equivalentes aos seus pares de modo a que lhes seja garantida uma educação de alta qualidade. (Kinash & Paszuk, 2007).

Pretende-se com o presente artigo, facultar algumas ideias/pistas que permitam ao professor de matemática nortear uma prática pedagógica inclusiva.

CARACTERIZAÇÃO DA DEFICIÊNCIA VISUAL

A deficiência visual de acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS) contempla 5 categorias diferentes, baseadas na medição da acuidade e do campo visual, após correção. Em Portugal, a legislação atual contempla as categorias apresentadas na tabela 1.

As situações que se enquadram na problemática da deficiência visual incluem uma população bastante heterogénea. Por exemplo, a cegueira integra indivíduos totalmente cegos, mas também aqueles que têm problemas visuais graves que os coloca num quadro de cegueira legal. Estes últimos podem possuir resíduos visuais passíveis de serem utilizados para o desenvolvimento das aprendizagens uma vez que a cegueira é uma deficiência sensorial caracterizada por uma recolha de informação visual total ou seriamente prejudicada (Ochaíta & Espinosa, 2004).

Tabela 1. Categorização da deficiência visual em Portugal Retirado de: Dias, C. (2012). Tese de Doutoramento (p. 14)

Categoria	Descrição	Situação
Moderada ou Parcial	Acuidade visual, no melhor olho, corrigida entre 3/10 e 1/10, e sem problemas no campo visual.	Baixa Visão
Severa ou residual	Acuidade visual menor do que 1/10 e 1/20 e um campo visual inferior ou igual a 20°.	
Cegueira Legal	Acuidade visual superior a 1/10 e com um campo visual inferior ou igual a 20° em cada olho.	Cegueira
	Acuidade visual inferior a 1/10, no melhor olho após correção.	
	Ausência total de visão.	

Nestes casos o tato é um dos principais sistemas sensoriais que o aluno utiliza para obter representações espaciais equivalentes às que advêm da informação visual (Morash, Pensky, Alfaro & McKerracher, 2012). Desta forma há uma recolha de informação bastante precisa no caso de objetos próximos e de dimensões pequenas, todavia, mais lenta do que a visão e, no caso de objetos grandes, faculta informação sequencial e fragmentada (Ochaíta & Espinosa, 2004). No entanto, é possível percecionar as características dos objetos (tamanho, forma, textura, etc.) e o modo como podem ser utilizados (Withagen, Vervloed, Janssen, Knorrs & Verhoeven, 2010).

A audição também é importante no desenvolvimento e na aprendizagem de crianças com problemas de visão. Contudo, os autores não são unânimes no modo como a informação auditiva é incorporada pelo indivíduo. Ochaíta & Espinosa (2004) defendem que no caso da cegueira é utilizada com o propósito de localizar e identificar objetos e pessoas no espaço, sendo menos precisa do que a visão. Ihlen, Troester & Brambring (2010) argumentam que o facto de uma criança identificar a localização de um som, não é sinónimo de reconhecimento representacional. Não existem evidências de que seja expectável que a criança pense que um determinado objeto está no local onde se localiza o som, mas defendem que o som de um objeto familiar tem um papel importante na identificação desse objeto por uma criança cega congénita.

O olfato é o sistema sensorial cuja função é essencialmente para reconhecer pessoas e ambientes (Ochaíta & Espinosa, 2004).

A deficiência visual interfere no modo de reconhecimento do meio e terá, por isso, implicações no processo de ensino/aprendizagem do aluno. A preparação das adequações necessárias à implementação do currículo de matemática junto de alunos com deficiência visual carece de um conhecimento prévio, por parte do professor, de aspetos fundamentais relacionados com o modo como se processa essa aprendizagem. Contudo, a aprendizagem da criança com deficiência visual depende de vários fatores. Esses fatores incluem, para além da problemática visual, o próprio contexto onde está inserida (Simón, Echeita, Sandoval & López, 2010).

CARACTERIZAÇÃO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Uma perceção deficitária do quotidiano, por si só, terá influência no processo de ensino/aprendizagem do aluno. Este facto deve ser tido em consideração pelo docente de matemática aquando da sua prática em contexto de sala de aula. Campo (1986) concebe a existência de dois princípios orientadores de uma prática diferenciada do currículo de matemática, um de ordem matemática e outro de ordem psicológica geral, assumindo que ambos são diretamente influenciados por problemas visuais (baixa visão ou cegueira), denominados de *condicionamentos*. No concernente aos princípios de ordem matemática, Campo (1986) defende que o professor deve efetuar conexões com a realidade, em particular, relacionadas com o quotidiano do aluno em situações concretas. O recurso à experimentação é fundamental, podendo, para isso, recorrer-se à física com a realização de atividades experimentais e com recurso a materiais adaptados. Além disso, os conteúdos devem seguir



Figura 1. Princípios orientadores de uma prática diferenciada no currículo de matemática segundo Campo (1986)

uma coerência lógica, incorporando a linguagem simbólica e formal e respeitando as grafias específicas (no caso da cegueira).

Os enunciados das atividades/tarefas devem ser objetivos, conter apenas a informação relevante e terem em conta os constrangimentos enunciados. Por exemplo, o pressuposto de que a exploração visual é mais morosa, leva a que a apresentação das imagens/figuras seja simplificada e/ou acompanhada de explicações orais ou escritas. No caso da cegueira o recurso permanente a materiais adaptados (modelos tridimensionais, cubarítmo, etc.) e tecnologias específicas de apoio (leitor de ecrã, linha braille, etc.) torna-se essencial. Além disso, o professor

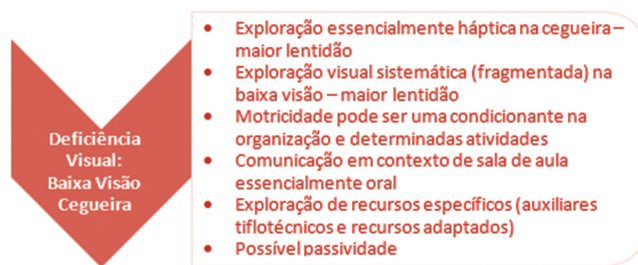


Figura 2. Constrangimentos provocados pela Deficiência Visual, Campo (1986)

deve estar atento a possíveis sinais de passividade por parte destes alunos, promovendo momentos de descontração e/ou pausas no trabalho sempre que se justifique.

Em Portugal, as principais estratégias para a promoção das aprendizagens em alunos com problemáticas ao nível da visão constam do documento *Alunos Cegos e com Baixa Visão – Orientações Curriculares*. A tabela 2 plasma algumas dessas estratégias.

Tabela 2. Orientações adaptadas de Pereira, F. (2008)

Baixa Visão	Cegueira
– Proporcionar informações verbais que descrevam o que ocorre na sala de aula.	– Evitar fornecer informações desnecessárias;
– Alertar para as mudanças na disposição da sala;	– Substituir expressões como “aqui”, “ali”, por localizações espaciais relativas ao aluno (à tua direita, à tua esquerda, etc.);
– Verificar se o aluno compreendeu os conceitos e se os registou;	– Utilizar modelos a três dimensões fazer associações entre informações visuais, sons ou cheiros;
– Usar contrastes;	– Solicitar a ajuda da docente de educação especial para a exploração de um recurso específico (cubarítmo etc.);
– Evitar reflexos da luz. Assegurar-se se o aluno necessita de iluminação adicional;	– Verificar se percebeu o objeto no seu todo;
– Estar atento a sinais de fadiga. Alternar as tarefas que exigem maior esforço visual com tarefas não visuais.	– Ter em consideração que a escrita em braille ocupa mais espaço e é mais morosa;
	– Efetuar instrumentos de avaliação com dimensões adequadas ao tempo útil em sala de aula.

ADAPTAÇÃO DE RECURSOS MATERIAIS

As estratégias a aplicar pelo docente devem integrar recursos materiais adaptados. Esses recursos devem ser construídos e/ou adaptados de acordo com determinadas qualidades (ver tabela 3).

Tabela 3. Qualidades do material manipulável
Retirado de: Dias, C. (2012). *Tese de Doutorado* (p. 52)

Qualidades que o material manipulável adaptado deve reunir	
Cegueira	Baixa Visão
Cineticamente estático.	Cineticamente estático ou pouco dinâmico.
O tamanho total, no máximo, deve caber nas duas mãos.	O tamanho deve permitir uma observação ao nível do campo visual .
Todas as partes bem distintas ao tato (volumes, texturas e relevos).	Todas as partes distinguíveis através do uso da cor, do contraste, do brilho ou do fundo .
Resistente e estável de forma a não se alterar com a ação mecânica de exploração háptica.	Estar a uma distância acessível e oportuna, evitando explorações limitadas e complexas.
Posição adequada, procurando a simetria em relação ao plano vertical.	Posição e iluminação adequadas , conforme as características da baixa visão.

A inclusão de crianças com deficiência visual em contexto de sala de aula carece de um conjunto de estratégias específicas, não implicando necessariamente uma mudança radical na prática letiva do professor. Segundo Uliana (2013) o uso correto de materiais concretos na sala de aula, principalmente nas aulas de matemática, reduz o grau de abstração. Heller, McCarthy & Clark (2005) defendem que um cego tem dificuldade na identificação de uma figura de natureza tridimensional no plano. Segundo os autores, os alunos cegos não estão familiarizados com as noções de perspectiva e de profundidade (abstratas). Partindo-se do princípio que no caso da cegueira a exploração tátil assume uma relevância extrema, o professor deve, numa fase inicial, utilizar modelos tridimensionais e só após um trabalho ao nível da percepção das projeções de figuras tridimensionais no plano, recorrer a impressões em alto-relevo (Heller, McCarthy & Clark, 2005).

EXPERIÊNCIAS PRÁTICAS

Com o propósito de exemplificar a aplicação, em contexto de sala de aula, de algumas das estratégias, princípios e orientações anteriormente referidas, apresentam-se de seguida dois exemplos práticos de adaptações específicas para um quadro de cegueira.

ALGUNS EXEMPLOS DE ADAPTAÇÕES

A Inês (nome fictício) é uma aluna com cegueira total congénita que atualmente frequenta o 2.º ano de escolaridade. As suas professoras, a docente titular de turma e a professora de educação especial prepararam, adaptaram e aplicaram alguns recursos materiais e estratégias à luz dos princípios e orientações mencionadas anteriormente.

No âmbito do reconhecimento de características externas de alguns animais selvagens integrado no programa curricular para

o 2.º ano de escolaridade, mais especificamente integrado no tema *Os seres vivos no seu ambiente*, selecionou-se o hipopótamo como objeto de estudo.

Numa fase inicial a Inês explorou uma representação tridimensional do hipopótamo. Depois de identificadas as principais características desse animal (forma, número de patas, cor, etc.) explicou-se à aluna quais as dimensões reais do animal comparando-o ao cavalo, que a aluna conhece bem por fazer hipoterapia. Paralelamente, escutou-se o som emitido pelo hipopótamo (discriminação auditiva). Em seguida, incutiu-se a ideia de que o hipopótamo iria ser “prensado” até atingir a espessura de uma folha de papel. Deu-se então início à noção de projeção de objetos tridimensionais no plano. Esta noção foi aprofundada através da percepção tátil do contorno do hipopótamo, ainda no seu formato tridimensional. Posteriormente, com o auxílio de um escantilhão a aluna identificou tatilmente a silhueta de um hipopótamo.

Na figura 3 observa-se a Inês a pintar a silhueta de um hipopótamo de cor castanha usando um marcador com aroma de canela (discriminação olfativa).

Esta metodologia foi replicada no contexto do estudo dos sólidos geométricos tendo sido utilizados os *polidrons* e uma estrutura que permite observar empiricamente a representação em perspetiva de um paralelepípedo no plano.

O estudo das noções supraditas realizou-se através da exploração tátil dos sólidos que se encontram na figura 5.

Na figura 6 observa-se o paralelepípedo que permitiu à Inês compreender o modo como se obteve a projeção do paralelepípedo no plano. A sequência de imagens ilustra a



Figura 3. Pintura da silhueta de um hipopótamo



Figura 4. Marcadores perfumados (específicos para usar com crianças cegas)

experiência realizada em contexto de sala de aula, em que a Inês acompanhou tatilmente a “deformação” do sólido.

No decurso deste processo a aluna trabalhou a noção de profundidade e de perspetiva recorrendo a explicações orais e à exploração tátil. Após esta experiência, a Inês revelou compreender melhor a noção empírica da representação do paralelepípedo em perspetiva, no plano.

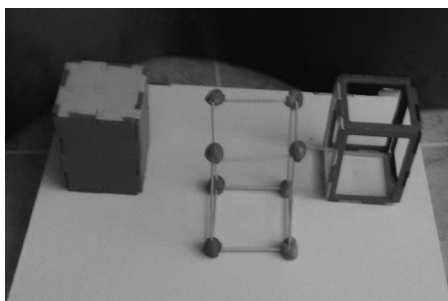


Figura 5. Situação inicial

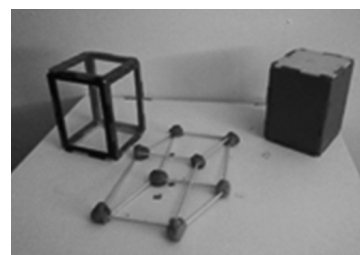
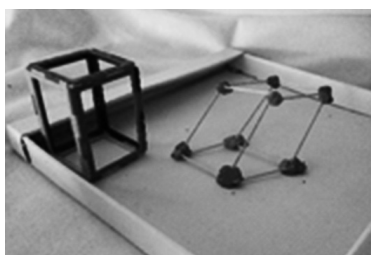
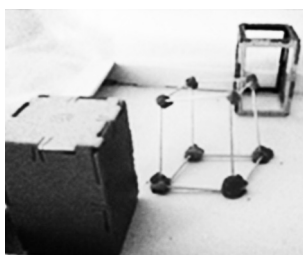


Figura 6. Projeção (empírica) de uma figura tridimensional

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As estratégias seguidas, embora aplicadas em conteúdos de áreas curriculares diferentes, assentaram num mesmo princípio. A criança partiu da exploração tátil de figuras tridimensionais, para em seguida, tomar conhecimento da noção empírica de profundidade e da representação de figuras tridimensionais no plano. De notar que a tarefa inicial (com o hipopótamo) apenas fez referência à silhueta e só numa fase posterior (com os sólidos geométricos) é que a Inês experienciou as noções de profundidade e de perspetiva no plano. Paralelamente, foram trabalhadas competências/capacidades específicas ao nível das diferentes áreas sensoriais (perceção tátil, auditiva e olfativa).

Os exemplos anteriores plasmam a importância das práticas do professor no processo de ensino/aprendizagem dos alunos e, neste caso particular, de alunos com deficiência visual. Estratégias como as mencionadas anteriormente devem fazer parte integrante da atividade habitual ao nível das práticas letivas dos docentes.

Referências Bibliográficas

- Campo, J. (1986). *La Enseñanza de la Matemática a los Ciegos*. Madrid: ONCE.
- Dias, C. (2012). *Jogos matemáticos adaptados à baixa visão e cegueira* (tese de doutoramento) (pp. 369-370) Braga: Universidade do Minho/Instituto da Educação.
- Heller, M., McCarthy, M. e Clark, A. (2005). Pattern Perception and Pictures for the Blind. *Psicologica*, 26, 161-171.
- Ihsen, E., Troester, H. & Brambring, M. (2010, agosto). The Role of Sound in Encouraging Infants with Congenital Blindness to Reach for Objects. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 28(2), 478-488.
- Kinash, S. e Paszuk, A. (2007). *Accessible Education for Blind Learners. Kindergarten Through Postsecondary*. Charlotte, North Carolina: Information Age Publishing.
- Morash, V., Pensky, A., Alfaro, A. e McKerracher, A. (2012). A Review of Haptic Spatial Abilities in the Blind. *Spatial Cognition & Computation*, 12, 83-95.
- Ochaíta, E. & Espinosa, M. (2004). Desenvolvimento e intervenção educativa nas crianças cegas ou deficientes visuais In Coll, C., Marchesi, A. & Palacios, J. (Orgs.) *Desenvolvimento psicológico e educação. Transtornos de desenvolvimento e necessidades educativas especiais* (2.ª ed) (pp. 151-170). São Paulo: Artmed Editora, S. A.
- Pereira, F. (Coord). (2008). *Alunos Cegos e com Baixa Visão - Orientações Curriculares*. Lisboa: DGIDC/DSEEASE.
- Simón, C., Echeita, G., Sandoval, M. & López, M. (2010, setembro). The Inclusive Educational Process of Students with Visual Impairments in Spain: An Analysis from the Perspective of Organizations. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 28(3), 565-575.
- Uliana, M. (agosto 2013). Inclusão de Estudantes Cegos nas Aulas de Matemática: a construção de um kit pedagógico. *Bolema*, 27(46), 597-612.
- Withagen, A., Vervloed, M. Janssen, N., Knoors, H. & Verhoeven, L. (2010, janeiro). Tactile Functioning in Children Who Are Blind: A Clinical Perspective. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 28(1), 43-54.

CARLOTA BRAZILEIRO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE ALAPRAIA

Expressões numéricas na promoção do pensamento relacional no 1.º ciclo do ensino básico

ISABEL CORREIA

SUSANA COLAÇO

NEUSA BRANCO

Os alunos desde os primeiros anos de escolaridade devem desenvolver a sua proficiência de cálculo, dando sentido aos números e às operações, e à sua capacidade de raciocínio, conseguindo identificar regularidades e generalizá-las. Várias situações de sala de aula são propícias a essas aprendizagens, tal como o trabalho com expressões numéricas para a promoção do pensamento relacional. O pensamento relacional envolve uma abordagem ao trabalho com números que foca a identificação de relações numéricas significativas (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi & Battey, 2007), tendo por base o conhecimento das propriedades das operações e a sua utilização, sem que seja necessário o seu conhecimento formal, ou seja, o conhecimento da sua definição. O pensamento relacional compreende a análise de expressões ou equações na sua globalidade e não como processos a serem realizados passo a passo (Carpenter, Levi, Franke & Zeringue, 2005; Franke, Carpenter & Battey, 2008). Os alunos evidenciam pensamento relacional quando compreendem porque são possíveis as transformações nas expressões e porque substituem expressões por outras que lhe são equivalentes, aspeto essencial para o pensamento algébrico (Kaput, 2008).

Neste artigo procuramos conhecer o desempenho de alunos do 3.º ano de escolaridade em expressões matemáticas onde se evidencia o pensamento relacional e analisar aspetos centrais da sua discussão em sala de aula.

EXEMPLOS DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS EM TESTES NACIONAIS E INTERNACIONAIS NO 1.º CICLO

Nos últimos anos, provas de avaliação nacionais e internacionais para alunos do 1.º ciclo do ensino básico, têm contemplado expressões numéricas com espaços vazios para os alunos preencherem. Apresentamos, em seguida, alguns exemplos dessas situações e os resultados obtidos. Em 2011, o *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) questiona o valor em falta para que a igualdade $3+8= __+6$ seja verdadeira. Esse espaço está imediatamente a seguir ao sinal de igual, do seu lado direito. Nesta questão, apenas 40% dos alunos portugueses

responderam corretamente. No teste intermédio de 2.º ano de 2013, 34,6% dos alunos indicaram corretamente o número em falta para completar corretamente a igualdade $17-5= __-4$. O espaço para preencher está também junto ao sinal de igual, do seu lado direito. Contudo, esta expressão envolve a subtração. Dos que erraram, 37,1% colocaram o número 12 no espaço em falta, resultado que, tal como refere o relatório “indicia uma visão operacional do sinal de igual em detrimento de uma visão relacional” (IAVE, 2013, p. 17), uma vez que os alunos colocam a seguir ao sinal de igual o resultado da operação que está do lado esquerdo do sinal de igual, desprezando a operação do lado direito. Em 2014, no teste intermédio do 2.º ano, evidenciase uma melhoria nos resultados (IAVE, 2015) que pode estar associada a uma melhoria na interpretação do uso do sinal de igual para expressar uma relação de equivalência em detrimento da interpretação operacional, mas também ao facto de estar envolvida a adição e não a subtração, como anteriormente. Os alunos tinham que indicar o número que completava corretamente a igualdade $15+8= __+7$, ao que responderam corretamente 50% dos alunos. Os dois documentos referem a importância dos alunos se envolverem em situações que permitam desenvolver o significado do sinal de igual, de modo a promover a passagem de uma visão procedimental para uma visão relacional. O teste intermédio de 2.º ano de 2015 envolve uma divisão, estando o espaço para preencher do lado esquerdo, $__ \div 4=5$, e a prova de aferição de 2.º ano de 2016 também apresenta expressões numéricas com espaços para preencher do lado esquerdo e do lado direito do sinal de igual, envolvendo a adição, $11+ __=19$, $19+ __=25$, $8+4= __+5$. Destes dois últimos anos não estão publicados os resultados.

DISCUSSÃO DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS NO 3.º ANO DE ESCOLARIDADE

No âmbito da prática pedagógica, durante a formação inicial da primeira autora deste artigo, foram propostas a 22 alunos de 3.º ano várias tarefas que visavam promover o pensamento relacional. Na aula, os alunos respondiam individualmente a cada questão e

perante as respostas obtidas em cada uma eram envolvidos na sua discussão coletiva, confrontando interpretações e relações entre eles. A discussão sobre o modo como pensam sobre as diversas expressões numéricas é fundamental para o desenvolvimento do seu pensamento relacional. A apresentação e a discussão de diferentes abordagens que possam surgir, por parte de alguns alunos, permitem que sejam analisadas várias relações de modo que progressivamente se apropriem de diferentes estratégias e selecionem estratégias eficientes para cada situação.

Identificamos aqui a interpretação dos alunos do sinal de igual em expressões numéricas e a sua capacidade de estabelecer relações entre os números e usar as propriedades das operações, no âmbito de uma abordagem que visa a promoção do pensamento relacional. Além disso, descrevemos as principais ideias matemáticas envolvidas na discussão coletiva proporcionada pela dinâmica da ferramenta digital Kahoot!. A figura 1 exemplifica o modo como a questão é projetada para os alunos, ficando a questão na parte superior, um círculo com o tempo restante para resposta e as várias opções de resposta. A figura 2 apresenta o esquema de cores e figuras (vermelho - $\triangle$; azul - $\diamond$; laranja - $\circ$; verde - $\square$) que os alunos observam no seu dispositivo (*smartphone, tablet* ou computador). Esse esquema corresponde ao que é projetado, permitindo-lhes selecionar a sua resposta.



Figura 1. Exemplo de questão colocada no Kahoot!



Figura 2. Esquema de cores e figuras para resposta no dispositivo do aluno

Esta ferramenta digital permite definir um período de tempo para resposta e quando este termina fornece ao professor

dados das respostas dos alunos em cada questão, permitindo que este identifique e discuta com a turma as principais ideias matemáticas e os principais erros de interpretação e de cálculo que os alunos cometem.

As tarefas que aqui apresentamos dizem respeito ao trabalho com expressões numéricas envolvendo a adição, em particular, igualdades em que falta um número e igualdades que os alunos devem identificar como verdadeiras ou falsas. Para Carpenter, Franke e Levi (2003) o trabalho com expressões numéricas contribui para que os alunos: (i) se envolvam em discussões sobre o uso apropriado do sinal de igual; (ii) usem o pensamento relacional; (iii) tenham confiança na utilização de propriedades matemáticas fundamentais, e (iv) elaborem conjecturas.

Situação 1 - Qual o valor em falta na expressão: $7 + 8 = \square + 9$

Para esta questão surgem como possibilidades de resposta os valores 15, 6, 8 e 24. A maioria dos alunos (64%) assinala como resposta correta o valor 15, o que evidencia uma visão procedimental, tendo os alunos colocado no espaço imediatamente a seguir ao sinal de igual o resultado da operação que está à esquerda deste sinal, $7 + 8$, ignorando parte da expressão do lado direito ($+ 9$). Apenas 23% dos alunos assinala a resposta correta, o valor 6. Face a estes resultados a discussão em sala de aula focou (i) a posição do sinal de igual e do espaço a preencher e o papel da parcela 9 no lado direito do sinal de igual, e (ii) comparação de parcelas de um lado e de outro do sinal de igual, de modo a estabelecer relações entre elas e com isso determinar o valor em falta.

Situação 2 - Qual o valor em falta na expressão: $23 + 15 = 26 + \square$

Para esta questão surgem como possibilidades de resposta os valores 12, 18, 38 e 64. Metade dos alunos assinala a resposta correta, o valor 12, o que mostra uma melhoria no desempenho dos alunos. Contudo, 27% ainda evidencia uma visão procedimental, indicando como resposta o valor 38 que corresponde à soma à esquerda deste sinal, $23 + 15$, ignorando ainda parte da expressão do lado direito (26). A discussão em sala de aula focou uma vez mais (i) a posição do sinal de igual e do espaço a preencher e o papel da parcela 26 no lado direito do sinal de igual, e (ii) a comparação de parcelas de um lado e de outro do sinal de igual, de modo a determinar o valor a compensar na parcela em falta para igualar os resultados de ambos os lados, tal como exemplifica a Figura 3.

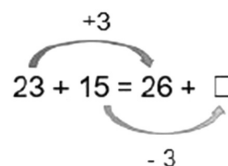


Figura 3. Esquema de relações na igualdade da situação 2

Situação 3 - Qual o valor em falta na expressão: $72 + 36 = 36 + \square$

Nesta questão surgem como possibilidades de resposta os valores 36, 108, 72 e 10. Cerca de 41% dos alunos assinala a resposta correta, o valor 72. Trata-se de uma situação onde se aplica a propriedade comutativa da adição, sendo dada uma das parcelas no lado direito que é igual a uma das parcelas do lado esquerdo. Os resultados evidenciam que os alunos ainda revelam dificuldade na interpretação da expressão, em particular do significado do sinal de igual e da sua posição na expressão, tendo cerca de 27% dos alunos dado como resposta o valor 108 ($72 + 36$). Além dos aspetos relacionais já evidenciados nas questões anteriores, emerge também nesta questão a referência à propriedade comutativa da adição.

Situação 4 - Qual o valor em falta na expressão: $\square + 177 = 331 + 170$

Nesta questão surgem como possibilidades de resposta os valores 331, 324, 177 e 323. Cerca de 86% dos alunos assinala corretamente o valor em falta, 324. Este resultado revela uma grande melhoria na interpretação da expressão e no estabelecimento de relações entre as parcelas de um e de outro lado do sinal de igual. Na discussão coletiva emerge a referência à posição da parcela em falta e a relação entre os valores de um lado e de outro, destacando-se a compensação necessária para se verificar a igualdade.

Situação 5 – Assinala a igualdade que é falsa:

$$18 + 15 = 20 + 13; 18 + 26 = 20 + 24;$$

$$18 + 22 = 20 + 24; 18 + 12 = 20 + 10$$

Nesta questão não é solicitado o valor em falta, mas são apresentadas quatro expressões diferentes, sendo que três delas respeitam a igualdade e uma delas não verifica a igualdade. Os resultados são bastante dispersos. Apenas 25% dos alunos responde corretamente e assinala a igualdade $18 + 22 = 20 + 24$ como falsa. A igualdade que mais alunos consideram como falsa (40%) é $18 + 15 = 20 + 13$. Estes resultados evidenciam a necessidade de propor e discutir situações diversificadas para melhorar a compreensão dos alunos e para que estes sejam colocados perante desafios cognitivos significativos para a sua aprendizagem matemática.

A CONCLUIR

Esta experiência permite conhecer a interpretação das igualdades e do sinal de igual que os alunos apresentam e identificar aspetos a abordar em sala de aula para o desenvolvimento do seu pensamento relacional. Como refere o NCTM (2017), uma das práticas de ensino nucleares que visam a promoção de uma aprendizagem profunda da Matemática é a obtenção e a utilização de evidências do pensamento dos alunos. Esse documento refere que “um ensino eficaz da matemática usa evidências do

pensamento dos alunos para avaliar o seu progresso no sentido da compreensão matemática e para ajustar continuamente o ensino de modo a apoiar e ampliar a aprendizagem” (p. 53). O trabalho realizado contribui para a aprendizagem matemática dos alunos, bem como para o desenvolvimento do conhecimento profissional da futura professora, em particular, sobre o significado que os alunos atribuem ao sinal de igual e como desenvolvem o seu raciocínio e expressam as suas ideias matemáticas. Ao considerar as evidências dos erros cometidos pelos alunos e das lacunas conceptuais que evidenciam, o professor pode planejar a sua prática ajudando-os a melhorar a sua compreensão e o seu raciocínio matemático. Os resultados obtidos nesta experiência reforçam a importância de práticas que fomentem o pensamento relacional, recorrendo a igualdades diversificadas e levando os alunos a estabelecer relações entre as operações e os números de um lado e outro do sinal de igual.

Referências

- Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school* (1.ª ed.). Portsmouth: Heinemann.
- Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., & Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM Mathematics Education* 37(1), 53-59.
- Franke, M., Carpenter, T., & Battey, D. (2008). Content matters: Algebraic reasoning in teacher professional development. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 333-359). New York: Lawrence Erlbaum e NCTM.
- IAVE (2013). *Projeto testes intermédios - 1.º ciclo do ensino básico. Relatório 2013*. Lisboa: IAVE. Disponível em http://iave.pt/np4/file/106/Relatorio_TI_2_2013_LV.pdf.
- IAVE (2015). *Projeto testes intermédios - 1.º ciclo do ensino básico. Relatório 2014*. Lisboa: IAVE. Disponível em http://iave.pt/np4/file/103/Relat_TI2_2014_com_anexos.pdf.
- Jacobs, V., Franke, M., Carpenter, T., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258-288.
- Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- NCTM (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. (Tradução do original de 2014). Lisboa: APM.

ISABEL CORREIA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM

SUSANA COIAÇO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM
UIIPS

NEUSA BRANCO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM
UIDEF, INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA, UIIPS

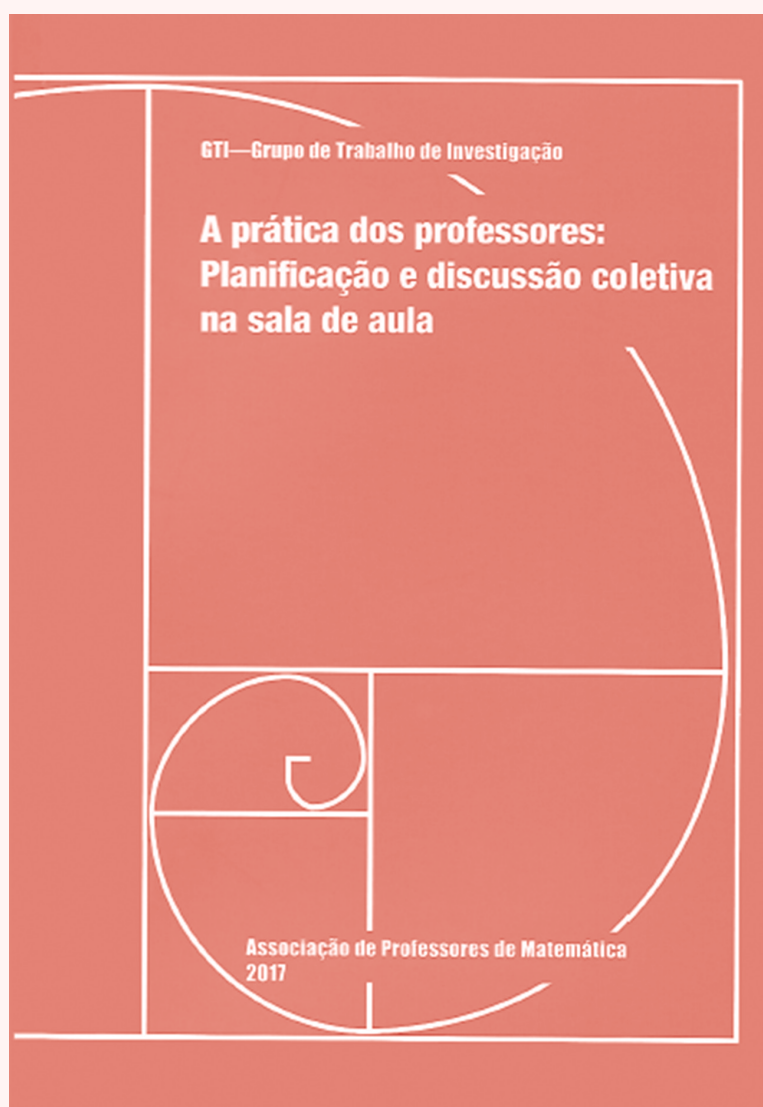
A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula

Este livro corresponde ao culminar do 5.º ciclo de estudos do Grupo de Trabalho de Investigação da APM que visou a reflexão sobre dois momentos importantes da prática do professor – a planificação e a discussão coletiva.

O livro é composto por nove capítulos, os dois primeiros de âmbito teórico incidindo sobre os dois temas em análise e os restantes sete que resultam de experiências vividas pelos seus autores. Como se lê na introdução, “os quatro primeiros envolvem experiências com alunos dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, tendo o primeiro o foco na planificação e os três seguintes nas discussões coletivas de sala de aula. Os três últimos capítulos relatam experiências na formação de professores, onde se confronta a planificação com os desempenhos apresentados pelos futuros professores na orientação de discussões coletivas de sala de aula”.

Preço de capa: € 15,00

Preço de sócio: € 12,50



Khan Academy em Portugal

Neste artigo pretende dar-se a conhecer a plataforma Khan Academy em português europeu, bem como a utilização da mesma num projeto-piloto realizado em 5 Agrupamentos de Escolas da Zona Oeste.

A Khan Academy em português europeu é uma plataforma educativa online gratuita e acessível a todos, que permite que os alunos, através da resolução de exercícios e visualização de vídeos, aprendam matemática de uma forma diferente, divertida e ao seu ritmo.

Lançada em fevereiro de 2017 pela Fundação Portugal Telecom, a plataforma Khan Academy (KA) em português europeu está disponível em <https://pt-pt.khanacademy.org/>; contém atualmente, 21.000 exercícios interativos e mais de 1.250 vídeos de matemática, sobretudo do ensino básico. Conta hoje com 22.000 utilizadores e 3,9 milhões de minutos de utilização, disponibilizando a experiência para três tipos de utilizadores: alunos, professores e encarregados de educação.

UTILIZADORES E FUNCIONALIDADES DA PLATAFORMA

Os alunos usufruem de uma experiência personalizada de aprendizagem, com recursos educativos adaptados ao ritmo de cada um. Podem explorar os conteúdos resolvendo exercícios interativos de Matemática, tendo a ajuda de dicas e/ou visualizando vídeos explicativos. Uma vez que a plataforma tem características de jogo, vão ganhando pontos, medalhas e desbloqueando “avatars” quando resolvem exercícios e visualizam vídeos. À medida que os alunos evoluem na aprendizagem, a sua atividade vai sendo registada em relatórios, disponíveis para o aluno, professores e encarregados de educação.

Os professores, por seu turno, podem criar turmas, recomendar exercícios e vídeos e monitorizar em tempo real os conhecimentos e progresso dos alunos (por período de tempo, por conteúdo, ou mesmo por alunos com dificuldades).

Os pais, podem não só monitorizar o progresso do seu educando mas também (re)aprender Matemática.

UM ANO DE TESTES NAS ESCOLAS DO OESTE - O PILOTO “MATEMÁTICA E KHAN ACADEMY”

Nos anos letivos de 2016/2017 e 2017/18 a Fundação Portugal Telecom, em colaboração com a Direção Geral da Educação e com a Educom, tem vindo a desenvolver um projeto-piloto de utilização da Khan Academy em 5 Agrupamentos de Escolas

(AEs) da Zona Oeste: AE Rafael Bordalo Pinheiro (Caldas da Rainha), AE Josefa de Óbidos (Óbidos), AE Dom Luís de Ataíde (Peniche), AE Fernão do Pó (Bombarral) e AE do Cadaval), envolvendo 30 professores e 750 alunos. O projeto-piloto é acompanhado por uma equipa de monitorização do Centro de Investigação, Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento (UIED), sediado na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova da Lisboa.

Em cada um destes dois anos letivos, os professores frequentam uma oficina de formação de 50 horas (25 horas presenciais e 25 horas de trabalho autónomo). Aqui, não só ficam a conhecer todas as funcionalidades da plataforma como são acompanhados no trabalho desenvolvido com os alunos. A plataforma Moodle é utilizada como ferramenta de apoio ao processo de formação, potenciando a partilha de recursos e experiências dos professores com os seus alunos. Cabe aos professores do projeto decidir as metodologias de utilização da plataforma com os seus alunos, tendo a KA sido utilizada, durante o primeiro ano do projeto-piloto, para consolidar pré-requisitos, introduzir novos conteúdos, rever conceitos já lecionados, dentro e fora da sala de aula, entre outros. A plataforma foi utilizada regularmente nas salas de aula, quer em aulas práticas realizadas nas salas de computadores quer através da projeção de vídeos e exercícios. Muitos professores utilizaram, ainda, a plataforma para realização de T.P.C.

Na sessão de apresentação dos resultados do primeiro ano, realizada em maio de 2017, todos os professores referiram que o projeto desenvolveu a capacidade de interajuda e cooperação entre os alunos, bem como uma maior autonomia na utilização das TIC.

No que respeita à aprendizagem dos alunos, todos os professores referiram que, com o projeto, se verificou um aumento da motivação dos alunos para a aprendizagem da matemática. Salientaram que, com a utilização da KA, as aulas se tornaram mais dinâmicas e interessantes e que no caso dos T.P.C a maior parte dos alunos se sentia mais motivado para a realização de exercícios na plataforma do que para os habituais exercícios do manual.

As características de jogo da plataforma permitiram que os alunos aprendessem matemática de uma forma lúdica, aumentando a sua motivação, entusiasmo e envolvimento nas atividades. Este facto parece ter tido efeitos benéficos na aprendizagem:

os bons alunos mantiveram o bom nível de desempenho e os alunos com mais dificuldades revelaram melhores desempenhos, impulsionados pela motivação acrescida que a plataforma lhes proporciona (efeito de jogo) e pelo apoio de colegas com maior nível de proficiência.

Houve ainda professores que relataram que a KA permite respeitar a velocidade de trabalho de cada aluno, desenvolvendo a sua autonomia. Referiram que os melhores alunos revelaram uma maior autonomia no seu processo de aprendizagem e que os alunos com muitas dificuldades, que normalmente desmotivam devido às grandes lacunas a nível dos pré-requisitos essenciais, encontraram na plataforma uma maneira de experienciar o sucesso. Com a ajuda da plataforma, foram percorrendo pequenos passos que não os deixaram cair num ciclo de desânimo, desenvolvendo tarefas adequadas à sua aprendizagem, permitindo que aos poucos fossem adquirindo competências da disciplina que eles julgavam nunca conseguir atingir.

Entre março e abril de 2017 realizou-se o “Torneio Interturmas Khan Academy” (TIKA), nas escolas do projeto piloto com dois objetivos principais: 1) motivar os alunos para a utilização sistemática dos recursos da KA em contexto escolar, proporcionando-lhes oportunidades de prática e promovendo as aprendizagens da Matemática na KA; e 2) apoiar os professores e respetivos AEs no envolvimento dos seus alunos na utilização pedagógica e didática da plataforma KA. Os objetivos do TIKA foram plenamente alcançados, uma vez que o tempo médio diário de utilização da plataforma por cada aluno aumentou 9 vezes na semana da fase de qualificação.

Com este projeto-piloto, os alunos dos 5 AEs utilizaram a plataforma KA durante mais de 333.900 minutos, tendo praticado quase 80 mil competências.

A RELEVÂNCIA DOS EQUIPAMENTOS E DA CONETIVIDADE

Ainda no projeto-piloto, a qualidade da internet, o número de computadores/tablets disponíveis na escola e especificidades de cada turma foram fatores decisivos na escolha das metodologias a utilizar. Na grande maioria das escolas existia menos de um equipamento (computador ou tablet) para cada dois alunos, pelo que os alunos trabalhavam a pares ou em pequenos grupos, permitindo experiências muito ricas ao nível de tutoria entre alunos. Por forma a equilibrar a igualdade de oportunidades de acesso à utilização da plataforma, garantindo, no entanto, que a realidade escolar não era alterada significativamente, durante o primeiro ano de piloto, a Samsung disponibilizou 37 tablets para o projeto.

FUTURO - NOVOS CONTEÚDOS E FORMAÇÃO

A Fundação PT continua a trabalhar no sentido de disponibilizar na plataforma mais conteúdos de matemática, não só do ensino básico mas também do ensino secundário. Para além disso, como forma de disseminar a utilização da KA nas escolas nacionais, desenvolve sessões de formação práticas, destinadas a professores, com a duração de 3 horas. Em parceria com a DGE e Educom, irão ainda ser realizadas oficinas de formação em várias localidades do país.

No site da Fundação PT, disponível em www.fundacaotelecom.pt, pode encontrar recursos para utilização da plataforma e solicitar uma sessão prática para a sua escola.

SUSANA COLAÇO

GESTORA DA KHAN ACADEMY NA FUNDAÇÃO PT



O **V Congresso Internacional TIC e Educação – ticEDUCA2018** é um evento bienal que se realiza desde 2010 no Instituto da Educação da Universidade de Lisboa, tendo este ano como tema Technology Enhanced Learning. Este congresso tem-se constituído como um espaço de partilha e de reflexão sobre a investigação desenvolvida no domínio das Tecnologias Digitais na Educação e destina-se a toda a comunidade académica nacional e internacional – educadores, professores, formadores e estudantes de licenciatura, mestrado e doutoramento.

As submissões encontram-se abertas até dia 1 de março de 2018.

Mais informações em: ticeduca2018.ie.ulisboa.pt

Regra da derivada do quociente revisitada

Em Josevich (2016) foi feita uma abordagem alternativa à prova da regra da derivada do produto de duas funções evitando o argumento clássico de prova que consiste em adicionar e subtrair uma determinada quantidade. Acontece que truques como esse podem ser bastante contraintuitivos para estudantes. Argumentos similares de 'adicionar e subtrair' são usados também para provar a regra da derivada do quociente. Provas alternativas podem ser obtidas usando a regra da cadeia ou derivação implícita. No entanto, essas ferramentas aparecem mais tarde, enquanto que a regra do quociente aparece logo no início do Cálculo Diferencial. Aqui, inspirados pela ideia de Josevich deduzimos também a regra do quociente.

Começamos por obter três regras usando a definição de derivada e artifícios algébricos simples como casos notáveis e redução ao mesmo denominador:

$$\begin{aligned} 1. \quad (f^2)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))(f(x+h) + f(x))}{h} = \\ &= 2f(x)f'(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)f(x)}}{h} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}. \end{aligned}$$

Agora, com uma combinação de 1. e de 2. obtemos:

$$\begin{aligned} 3. \quad \left(\frac{1}{f^2}\right)'(x) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f^2(x+h)} - \frac{1}{f^2(x)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x) - f(x+h))(f(x) + f(x+h))}{f^2(x+h)f^2(x)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f^3(x)} = \\ &= -2\frac{f'(x)}{f^3(x)}. \end{aligned}$$

Usando 1. e 2. temos que:

$$\begin{aligned} 4. \quad \left[\left(f + \frac{1}{g}\right)^2\right]' &= \\ &= 2\left(f + \frac{1}{g}\right)\left(f + \frac{1}{g}\right)' = 2\left(f + \frac{1}{g}\right)\left(f' - \frac{g'}{g^2}\right) = \\ &= 2\left(ff' - \frac{fg'}{g^2} + \frac{f'g}{g^2} - \frac{g'}{g^3}\right) \end{aligned}$$

Usando 1. e 3. deduzimos que:

$$\begin{aligned} 5. \quad \left[\left(f + \frac{1}{g}\right)^2\right]' &= \left[f^2 + 2\frac{f}{g} + \frac{1}{g^2}\right]' = \\ &= 2ff' + 2\left(\frac{f}{g}\right)' + \left(\frac{1}{g^2}\right)' = 2\left(ff' + \left(\frac{f}{g}\right)' - \frac{g'}{g^3}\right) \end{aligned}$$

Por uma observação direta de 4. e de 5. obtemos a regra da derivada do quociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Durante a apresentação, em aula, podemos escolher apresentar a regra do produto, como em Josevich, usando 2. e finalmente observar que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f \frac{1}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' = \\ &= f' \frac{1}{g} - f \frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

Referência

Josevich, P. (2016). An Alternative Approach to the Product Rule. *The American Mathematical Monthly*, 123(5), 470.

MÁRIO BESSA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR, COVILHÃ, PORTUGAL.

Dois erros no uso do Teorema de Tales/Critérios de Semelhança de triângulos

O Teorema de Tales ocupa um lugar central no programa atual da disciplina de Matemática no 3.º Ciclo. É um resultado muito importante do ponto de vista teórico, no sentido em que serve de “alicerce” a outros resultados, também centrais, como sejam os critérios de semelhança de triângulos, por exemplo. Neste texto breve serão aspetos de natureza prática que serão abordados.

O Teorema de Tales surge nos manuais escolares, e noutras obras de referência, com diferentes formulações. Gosto particularmente do enunciado usado por Amorim [1]:

Se cortarmos os lados dum ângulo (ou os seus prolongamentos) por um feixe de paralelas, os triângulos formados terão os lados proporcionais (figura 1).

Simbolicamente:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BD}}$$

Da proporção

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \quad (1)$$

pode deduzir-se a proporção

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \quad (2)$$

Da proporção (2) pode ainda deduzir-se a proporção

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} \quad (3)$$

As proporções (2) e (3) são bastantes úteis em termos práticos, como se ilustra nos dois exemplos registados. Em cada uma das situações, assinalou-se a “proporção mais simples”.

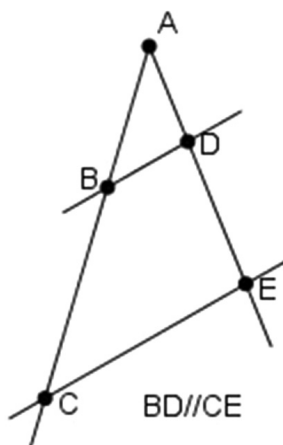


Figura 1

	Proporção (1)	Proporção (2)	Proporção (3)
	$\frac{10}{10-x} = \frac{5}{2}$	$\frac{10-x}{x} = \frac{2}{3}$	$\frac{10}{x} = \frac{5}{3}$

Figura 2

	Proporção (1)	Proporção (2)	Proporção (3)
	$\frac{12}{8} = \frac{x+1,5}{x}$	$\frac{8}{4} = \frac{x}{1,5}$	$\frac{12}{4} = \frac{x+1,5}{1,5}$

Figura 3

Na resolução de exercícios onde é possível o usar o teorema de Tales (ou os critérios de semelhança de triângulos) é usual alguns alunos escreverem a seguinte igualdade:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \quad (\overline{AB} > \overline{BC})$$

Será que esta “proporção” poderá ser válida?

A resposta a esta questão é *sim*; esta igualdade é verdadeira, quando, e apenas quando, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ for igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de ouro).

Consideremos então a situação representada na Figura 4.

Suponhamos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \quad (\overline{AB} > \overline{BC})$$

Pelo Teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

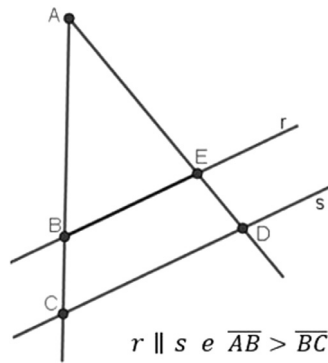


Figura 4

Designando $\overline{AB}$ por a e $\overline{BC}$ por b :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$$

fazendo $\frac{a}{b} = q$, vem: $q = 1 + \frac{1}{q} \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0$

Resolvendo a equação anterior resulta: $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como $q > 1$, $q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Portanto, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$ quando, e apenas quando, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

É possível observar o erro referido acima na resolução seguinte.

A proporção apresentada pelo aluno está incorreta (figura 5).

A igualdade $\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ ocorre somente quando $\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

5. Na Figura estão representadas duas semirretas, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ e duas retas paralelas, r e s .

Sabe-se que:

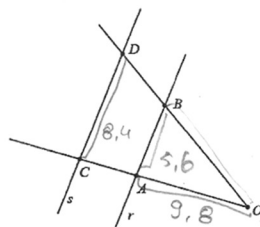
- a reta r intersesta as semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ nos pontos A e B , respectivamente;
- a reta s intersesta as semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ nos pontos C e D , respectivamente;
- o ponto A pertence ao segmento de reta $[OC]$;
- $\overline{OA} = 9,8$ cm, $\overline{AB} = 5,6$ cm e $\overline{CD} = 8,4$ cm

A figura não está desenhada à escala.

Determina $\overline{AC}$.

Apresenta o resultado em centímetros.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.



$$\frac{9,8}{\overline{AC}} = \frac{8,4}{5,6} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{9,8 \times 8,4}{5,6} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{82,32}{5,6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 14,7 \text{ cm}$$

$$R: \overline{AC} \text{ é de } 14,7 \text{ cm}$$

Figura 5

Outro erro que surge com alguma frequência pode ser observado na resolução que se apresenta na figura 6. A “proporção” apresentada pelo aluno só é válida quando, e apenas quando, $\overline{AH} = \overline{HI}$.

17. Na figura, as retas AM e AI são concorrentes e as retas NH e MI são paralelas.

Sabendo que:

• $\overline{HI} = 15,2$ cm;

• $\overline{AH} = 6,4$ cm;

• $\overline{HN} = 4$ cm.

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{HN}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IH}} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{21,6}{15,2}$$

Determina $\overline{MI}$. $6,4 + 15,2 = 21,6$

$$x = \frac{4 \times 21,6}{15,2} = \frac{86,4}{15,2} = 5,68$$

$$\overline{MI} = 5,68$$

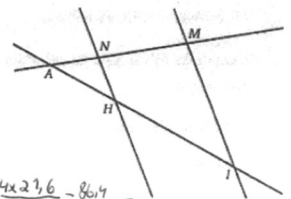


Figura 6

Demonstração.

Suponhamos que $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}}$

Pelo Teorema de Tales: $\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

Assim,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$$

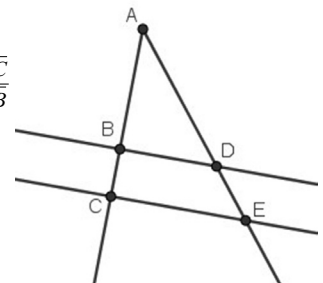


Figura 7

CONCLUSÃO

Contrariamente a outros erros que habitualmente observamos nas resoluções dos alunos, penso que não será fácil encontrar uma explicação para as duas situações referidas neste texto. Será que estes erros também ocorreriam na eventualidade dos alunos não terem conhecimento das igualdades (2) e (3) referidas? Convém, no entanto, ter presente que não facultando estas duas proporções aos alunos, surgirão, inevitavelmente, constrangimentos na resolução de alguns exercícios.

Referências

- [1] Amorim, D.P. *Compêndio de Geometria*. Biblioteca Básica de Textos Didáticos de Matemática, Vol. I, SPM, ISBN: 972-99521-3-4.
- [2] Araújo, V. P. *Curso de Geometria*, Gradiva, ISBN 972-662-591-2.
- [3] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, L. Loura e M.^a C. Timóteo. *Programa e Metas Matemática*, Ensino Básico. MEC, 2013.
- [4] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira e M.^a C. Timóteo. *Caderno de Apoio 3.º Ciclo – Metas Curriculares do Ensino Básico*. MEC, 2013.

ROGÉRIO BERRINCHA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DO TEIXOSO

Os Polígonos estrelados regulares e a fórmula de Euler

CARLOS ALBERTO M. DE ASSIS

THIAGO BARCELOS CASTILHOS

A igualdade $e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta$, conhecida como a fórmula de Euler é uma das mais belas fórmulas. Sendo assim, o objetivo deste artigo, é mostrar a utilização da expressão do lado esquerdo da fórmula (no caso, $e^{i\theta}$) na construção de polígonos estrelados regulares.

USANDO $e^{i\theta}$ NA CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES

Primeiramente, vamos utilizar equações polinomiais da forma $x^n - 1 = 0$, e, atrelado a encontrar essas raízes, utilizaremos $e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta$, na construção do polígono regular inscrito na circunferência. Observe que, resolver equações desse tipo, nada mais é, do que encontrar as n raízes de *índice* n da unidade, fazendo rotações, considerando $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ onde $K=0, 1, 2, \dots, n-1$, $\sqrt[n]{1} = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, ver em [2]).

Começemos, então, exemplificando, com a equação $x^5 - 1 = 0$. Ou seja, iremos calcular as raízes de ordem 5 de 1, e construir o polígono chamado de pentágono regular. Fazendo os cálculos, para $K=0$, temos $e^{i \cdot 0} = \cos 0 + i \cdot \text{sen} 0 = 1$; para $K=1$, fica,

$$e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1+i(\sqrt{10+2\sqrt{5}})}{4},$$

que equivale a uma rotação de 72° , ou ainda, temos $\frac{1}{5}$ da volta. Para o valor de $K=2$, obtemos,

$$e^{\frac{4\pi}{5}i} = \cos \frac{4\pi}{5} + i \cdot \text{sen} \frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1+i(\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{4};$$

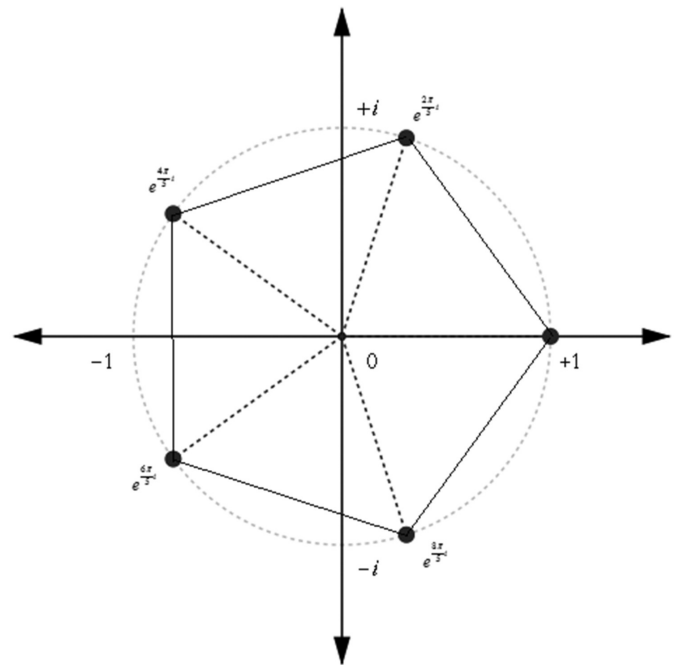
no caso de $K=3$, ficamos com,

$$e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos \frac{6\pi}{5} + i \cdot \text{sen} \frac{6\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1-i(\sqrt{10-2\sqrt{5}})}{4},$$

e, finalizando, sendo $K=4$, temos,

$$e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos \frac{8\pi}{5} + i \cdot \text{sen} \frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1-i(\sqrt{10+2\sqrt{5}})}{4}.$$

Estes valores são rotações sucessivas de 72° . A representação geométrica dessas raízes está no gráfico a seguir.



OS POLÍGONOS ESTRELADOS

A representação de um polígono estrelado regular se dará através da notação $\{n/r\}$, onde n e r são primos entre si e $1 < r < \frac{n}{2}$. Essa notação significa que, a construção desses polígonos estrelados se dará ao construirmos o polígono regular de n lados através da resolução da equação $x^n - 1 = 0$, e fazendo r rotações (ou voltas) utilizando a sequência dos valores encontrados, respectivamente,

nas potências $e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, $\left(e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)^2$, $\left(e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)^3$, ... em torno da origem,

iremos obter as “pontas” do polígono.

UM EXEMPLO

Para exemplificar, vamos iniciar, com a construção do seguinte polígono estrelado regular tão conhecido em nossa literatura, que é a “estrela de 5 pontas”, e, será representada usando a notação $\{5/2\}$. Ou seja, $n=5$ representa a construção do pentágono regular (usando a equação $x^5 - 1 = 0$ conforme mencionado antes), e, fazendo rotações de 2 em 2 pontos (a sequência das potências de uma de suas raízes) em torno da origem, serão construídas as “pontas” dessa estrela.

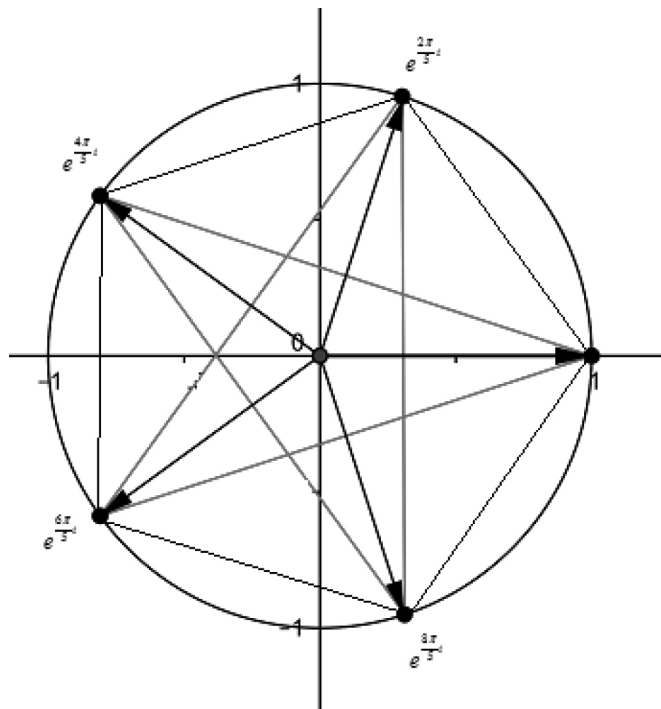
Voltando às raízes da equação $x^5 - 1 = 0$, perceba que se escolhermos $e^{\frac{2\pi}{5}i}$ ou $e^{\frac{8\pi}{5}i}$, as sequências de suas respectivas potências serão, $\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}, \left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^2, \dots, \left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5\right)$ e $\left(e^{\frac{8\pi}{5}i}, \left(e^{\frac{8\pi}{5}i}\right)^2, \dots, \left(e^{\frac{8\pi}{5}i}\right)^5\right)$, e ambas irão “percorrer” os 5 pontos da circunferência formando o pentágono regular. Só nos restam verificar as sequências de $e^{\frac{4\pi}{5}i}$ e $e^{\frac{6\pi}{5}i}$. Assim, para as potências de $e^{\frac{6\pi}{5}i}$, temos as seguintes rotações, $e^{\frac{6\pi}{5}i}$,

$$\left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^2 = e^{\frac{12\pi}{5}i} = e^{\frac{2\pi}{5}i}, \left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^3 = e^{\frac{18\pi}{5}i} = e^{\frac{8\pi}{5}i},$$

$$\left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^4 = e^{\frac{24\pi}{5}i} = e^{\frac{4\pi}{5}i}, \left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^5 = e^{\frac{30\pi}{5}i} = e^{6\pi i} = 1 \text{ e}$$

$$\left(e^{\frac{6\pi}{5}i}\right)^6 = e^{\frac{36\pi}{5}i} = e^{\frac{6\pi}{5}i}.$$

Veja, que essa sequência irá construir as “pontas” da estrela dentro do pentágono regular, fazendo rotações de 2 em 2 pontos em torno da origem em uma circunferência de raio unitário.



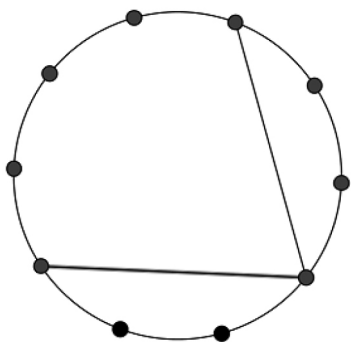
Observação:

Note que, para $e^{\frac{4\pi}{5}i}$, teremos, em um primeiro instante, a “mesma” estrela de 5 “pontas”, com a notação $\{5/3\}$. Mas, repare que esse polígono não satisfaz a condição de $1 < r < \frac{n}{2}$.

A SOMA DOS ÂNGULOS DAS “PONTAS” DO POLÍGONO ESTRELADO

Uma relação importante que merece atenção, é que a soma dos ângulos internos das “pontas” de um polígono estrelado regular é dada por $S = (n - 2r) \times 180^\circ$. Esta relação foi descoberta pelo matemático Thomas Bradwardine (1290 – 1349). Assim, por exemplo, a soma dos ângulos internos das “pontas” de $\{5/2\}$, é igual a, $S = (5 - 2 \times 2) \times 180^\circ = 180^\circ$.

Para mostrar tal relação, perceba que a circunferência é dividida em n partes iguais, então, cada arco mede $\frac{360^\circ}{n}$ graus. Agora, ao escolhermos o vértice de partida, são feitas r “voltas” para a construção do primeiro lado e depois r “voltas” novamente, formando o primeiro ângulo inscrito (que nada mais é do que uma “ponta” do polígono estrelado) como ilustra a figura seguinte:



Como foram dadas $2r$ “voltas”, temos então um arco de $\frac{360^\circ}{n}(n-2r)$ graus, e com isso, cada ângulo das “pontas” do polígono estrelado regular é dado por $\frac{180^\circ}{n}(n-2r)$. Mas, como são n ângulos, podemos multiplicar $\frac{180^\circ}{n}(n-2r)$ por n e obter

a soma S . Para aguçar a curiosidade do leitor, deixamos como exercício, que construa os seguintes polígonos estrelados: $\{7/2\}$, $\{7/3\}$, $\{8/3\}$, $\{9/2\}$, $\{9/4\}$ e $\{10/3\}$.

Referências Bibliográficas:

- [1] COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry*, New York, 1969.
- [2] COXETER, H. S. M. *Regular Polytopes*, 3rd. ed., Dover Publications, 1973.
- [3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.
- [4] FERNANDEZ, C. S., JR, N. C. B. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática/ Coleção Textos Universitários, 2006.

CARLOS ALBERTO M. DE ASSIS

UNIVERSIDADE ESTÁCIO DE SÁ – CAMPUS CABO FRIO

THIAGO BARCELOS CASTILHOS

PROFESSOR DA REDE MUNICIPAL DE CABO FRIO – RJ

TUTOR PRESENCIAL DO CEDERJ PÓLO DE SÃO PEDRO D’ALDEIA/RJ

ESTATUTO EDITORIAL DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

A *Educação e Matemática* é uma publicação periódica da Associação de Professores de Matemática (APM). A sua periodicidade atual é de cinco números anuais, sendo um deles temático e duplo. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro. Os principais objetivos da *Educação e Matemática* são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas atuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;

- Divulgar informação relevante para os professores.

A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, resenhas de livros, resolução de problemas, notícias... A *Educação e Matemática* tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com carácter permanente. A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista. À semelhança das outras revistas informativas, a *Educação e Matemática* assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A DIRETORA DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

APM 2018 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

*A Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado aos professores do 1º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indiferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um nº de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados individuais têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito

também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista Quadrante.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados terão descontos na requisição de materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos na formação e em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Assinatura das revistas Educação & Matemática e Quadrante

		Educação & Matemática 3 números + 1 número duplo temático	Quadrante (2 números)
Associado individual	Portugal		15,00€
	Estrangeiro		30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas Educação & Matemática e Quadrante

	Educação & Matemática		Quadrante
	Temática		
Associado	Normal	10,00€	10,00€
		7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	

Modalidades de associado individual	Quota
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	Quota
Modalidade I (1 exemplar da E&M)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da E&M)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da E&M+Quadrante)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da E&M+Quadrante)	140,00 €

Editorial

- 01 **O Professor no seu Labirinto**
Maria Emília Brederode Santos

Artigos

- 03 **O Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular - PAFC**
Cristina Cruchinho
- 16 **Que símbolos são estes?**
Sandra Bento, Patrícia Damas Beites, Fátima Simões
- 23 **Geometria descritiva e perspectiva cavaleira**
Eduardo Veloso
- 30 **Questões à volta dos problemas**
José Paulo Viana
- 33 **A inclusão da cegueira na aula de Matemática... O que necessitam os professores de saber?**
Carlota Brasileiro
- 37 **Expressões numéricas na promoção do pensamento relacional no 1.º ciclo do ensino básico**
Isabel Correia, Susana Colaço, Neusa Branco
- 46 **Os Polígonos estrelados regulares e a fórmula de Euler**
Carlos Alberto M. de Assis, Thiago Barcelos Castilhos

Secções

- 07 **O problema deste número** *José Paulo Viana*
Paralelas no quadrado
- 08 **Para este número selecionámos**
Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica, *Malcolm Swan*
- 15 **Materiais para a aula de Matemática**
Números racionais como operadores, *Isabel Rocha, Manuela Pires*
- 21 **Caderno de Apontamentos de Geometria** *Cristina Loureiro*
Geometria com e sem muros
- 27 **Espaço GTI**
Autorregulação da aprendizagem dos alunos em matemática: que papel para o professor?
Sílvia Semana
- 41 **Tecnologias na Educação Matemática** *António Domingos*
Khan Academy em Portugal, *Susana Colaço*
- 43 **Pontos de vista, reações e ideias, ...**
Regra da derivada do quociente revisitada, *Mário Bessa*
Dois erros no uso do Teorema de Tales/Critérios de Semelhança de triângulos, *Rogério Berrincha*