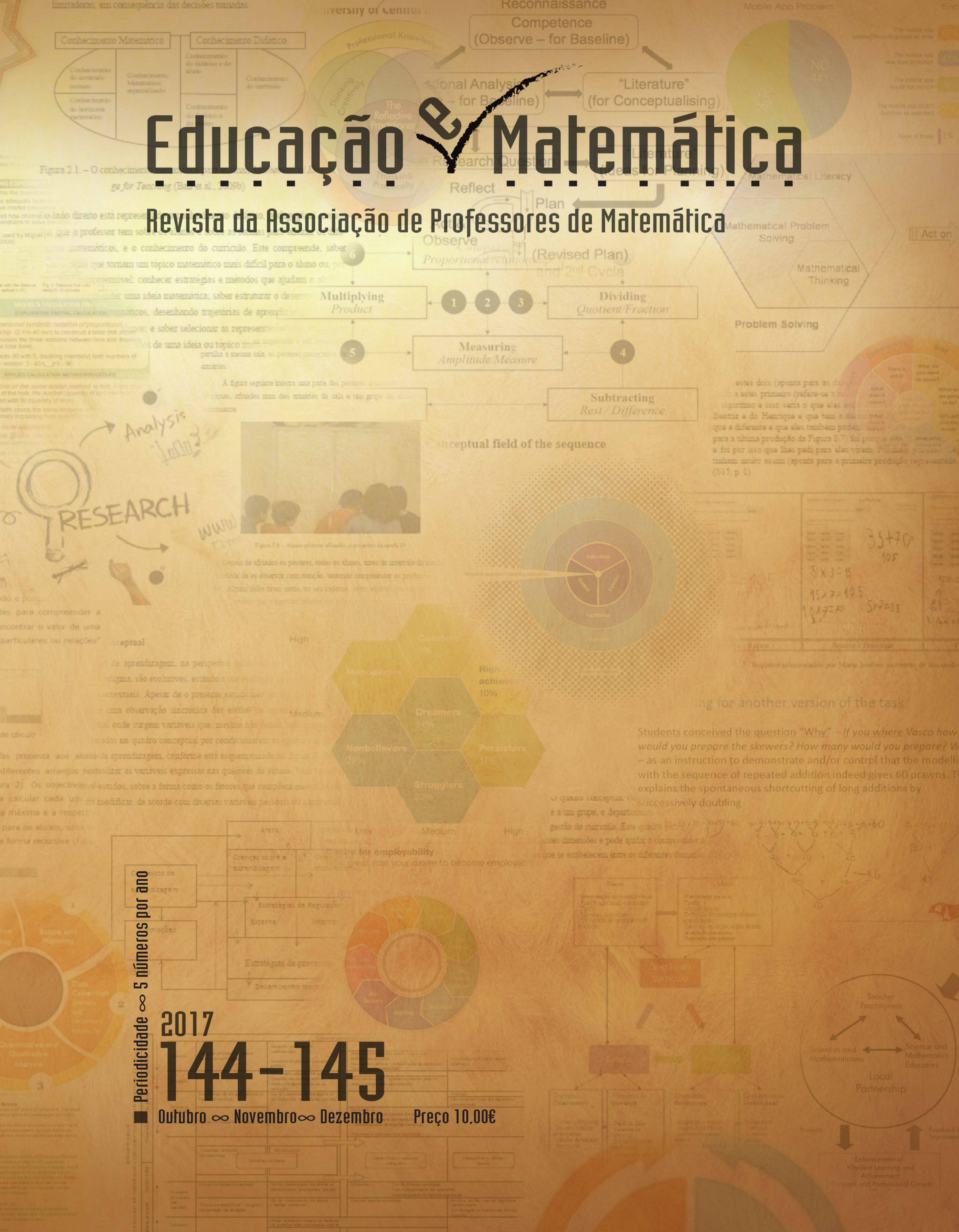
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2017

144-145

Outubro ∞ Novembro ∞ Dezembro Preço 10,00€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Catarina Delgado
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Filipa Machado
	Helena Amaral
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	João Terroso
	Manuela Pires
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
José Paulo Viana **O problema deste número**
Mário Baía **Edição gráfica**

Capa **Mário Baía**

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Março de 2017
Tiragem 1000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.o 8
Casal da Espinheira
2560-401 Silveira

Depósito Legal n.o 72011/93
Registo no ICS n.o 124051
ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Neste número também colaboraram

Ana Henriques, Ana Paula Canavarro, António Domingos, Catarina Delgado, Cristina Loureiro, Dina Morais, Fátima Mendes, Fernando Nunes, Helena Gil, Helena Moreira, Hélia Oliveira, Irene Segurado, Isabel Rocha, Joana Brocardo, João Pedro da Ponte, Leonor Santos, Lina Brunheira, Lurdes Serrazina, Manuela Pires, Paula Figueiredo, Susana Brito, Susana Carreira.

Sobre o número temático

O que diz a investigação em educação matemática sobre as aprendizagens dos alunos é o tema escolhido pela redação da revista para a temática de 2017. A opção por este tema, inédito nas nossas temáticas, deve-se à relevância que atribuímos ao contributo da investigação para as práticas de sala de aula. Entendemos que à revista também compete a divulgação dessa investigação junto dos professores, daí a seção permanente do Grupo de Trabalho em Investigação (GTI), pelo que chegou a altura de a ela dedicarmos um número temático.

Felizmente que na nossa associação temos uma comunidade de investigadores em educação matemática muito ativa, com saber e experiência relevante para a conceção deste número temático. A dificuldade não foi encontrar um nome, mas escolher um. E escolhemos a Joana Brocardo, porque além de pertencer a essa comunidade, tem enriquecido esse percurso profissional com outras vivências, nomeadamente na área do currículo e da formação de professores, uma conjugação muito enriquecedora para o objetivo desta revista.

Agradecemos a motivação e o empenho que colocou na conceção e concretização deste número da Educação e Matemática.

Nota: Neste número há três secções que não têm a dimensão habitual e que foram além dos seus objetivos. Cristina Loureiro e António Domingos, colaboradores permanentes das secções Caderno de Apontamentos de Geometria e Tecnologias na Educação Matemática e Lurdes Serrazina, membro do GTI, foram, por proposta da redação, autores de artigos focados nas recomendações da investigação relevantes para a aprendizagem dos alunos, dentro das temáticas que são abordadas nas respetivas secções, ficando enquadrados nelas.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.o 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

A aprendizagem da Matemática olhada a partir da investigação: uma visão de 360º

A propósito de um pequeno artigo que escrevemos há já muitos anos, recordo bem o modo entusiasta com que Paulo Abrantes identificava como característica distintiva da investigação em educação matemática realizada em Portugal, a estreita relação de colaboração entre investigadores e professores. Como explicava, os investigadores e professores do ensino superior tinham sido professores dos outros níveis de ensino durante vários anos e mantinham laços de trabalho e colaboração com os seus anteriores colegas.

Igualmente distinto do que acontece em muitos outros países é o facto de a investigação se ter começado a desenvolver relativamente tarde. A primeira tese de doutoramento é de João Pedro da Ponte, em 1984, e as primeiras dissertações de mestrado datam da segunda metade dos anos 80.

Este número temático da revista reflete a existência de uma atividade de investigação em educação matemática dinâmica, bem mais intensa do que nos anos 80, e mesmo 90, e preocupada com as aprendizagens dos alunos. Tal como nos anos 90, investigadores e professores continuam a colaborar em projetos de âmbitos diversos. Algumas destas colaborações são suscitadas pela necessidade de desenvolver projetos individuais como o da realização de uma dissertação de doutoramento. Outras refletem a realização de projetos mais longos e que integram equipas de investigadores e professores bem mais numerosas. Todas elas têm marcado decisivamente o que sabemos sobre a aprendizagem dos vários tópicos da Matemática em Portugal, permitindo-nos partir de exemplos e experiências curriculares realizadas nas escolas portuguesas para perspetivar caminhos a seguir que possam conduzir a uma melhoria das aprendizagens dos nosso alunos.

A revista abre com um artigo da responsabilidade do GTI, elaborado por Lurdes Serrazina, que nós dá uma panorâmica geral da investigação realizada em Portugal nos últimos anos. Depois, uma série de nove artigos situam recomendações da investigação relevantes para a aprendizagem dos alunos, articulando conclusões e exemplos de estudos portugueses com o que se perspetiva em cada tópico e em vários níveis de ensino, ao nível internacional. Cada um destes artigos proporciona uma visão geral, mas precisa do que se sabe ser importante ao nível da geometria, da modelação e conexões matemáticas, da organização e tratamento de dados, dos números e da álgebra, do uso da tecnologia, da comunicação e da avaliação. Nesta revista conseguimos, também, contar com o retrato de uma experiência colaborativa de quatro professoras que procuram integrar resultados da investigação na planificação de aulas de um grupo de professoras do 1.º ciclo e analisar o modo como alguns manuais escolares refletem recomendações da investigação sobre aspetos relativos aos números racionais.

Pensámos ser importante que ao folhear e ler esta revista se conseguisse ter uma abrangência de 360º que reflita a panorâmica sobre o que sabemos acerca da aprendizagem dos nossos alunos. Por isso, selecionámos um artigo do notável designer e investigador Malcolm Swan sobre a conceção de tarefas que permitam desenvolver a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica.

Completamos esta visão 360º com dois aspetos. O primeiro, incluído no "Pense nisto", perspetiva uma organização de sala de aula em que os alunos resolvem problemas nos quadros que a rodeiam e em que os professores conseguem ter evidências imediatas do que eles pensam, à medida que o seu pensamento se desenrola. O segundo, subjacente a todas as conclusões da investigação é, por isso, transversal a todo esta revista. Diz respeito ao professor, unanimemente reconhecido como o elemento chave central da promoção de uma aprendizagem relevante e significativa dos alunos. 'Professor 360º' talvez possa dar uma boa imagem desta ideia! Porque não?

Joana Brocardo

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal & UIDEF - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Contributos da investigação para a aprendizagem da matemática: uma visão global

LURDES SERRAZINA

Aceitar o desafio lançado pela editora convidada deste número temático para fazer este artigo representou uma certa ousadia da minha parte. Realizar um levantamento da investigação realizada em Portugal em educação matemática implica ter acesso a informação que nem sempre está disponível, sobretudo no que se refere a dissertações de mestrado.

Assumo assim o risco de, por falta de informação, não referir trabalhos importantes, pois, embora tenha procurado fazer uma pesquisa exaustiva, há sempre algo que fica de fora. Elegi como fonte privilegiada de informação os repositórios institucionais inseridos no sistema RCAAP[1], não ignorando que estes só foram institucionalizados na última década e que a informação que disponibilizam pode corresponder apenas a trabalhos com datas posteriores à sua criação. Apesar destes constrangimentos, decidi aceitar o desafio por me parecer importante que este número temático da Educação e Matemática inclua esta informação.

Optei por me focar nos estudos académicos concluídos a partir do ano 2000, dadas as limitações do espaço, a maior dificuldade em aceder a trabalhos mais antigos e também porque já existe informação publicada sobre a investigação realizada até aos anos 90 do século passado (Ponte, 1993; Ponte, Matos & Abrantes, 1998). Também a APM disponibilizou até muito recentemente uma lista de dissertações de mestrado e teses de doutoramento realizadas pelos sócios.

Este artigo tem um carácter sobretudo informativo, com o objetivo de dar a conhecer contributos da investigação realizada no nosso país para a aprendizagem da Matemática. São referidas investigações focadas na aprendizagem dos alunos, mas também outras focadas nos professores ou questões curriculares, no entendimento que todas elas constituem contributos para uma melhor aprendizagem da Matemática.

Pelas limitações no acesso, já referidas, por razões práticas e de exequibilidade optei, ainda, por considerar apenas dissertações de mestrado realizadas após a profissionalização, isto é, não foram consideradas dissertações (normalmente designadas por relatórios) desenvolvidas para completar a formação inicial (nos cursos pós-Bolonha). Dentro das limitações enunciadas, a minha opção foi olhar apenas para estudos académicos realizados em Portugal e certificados por instituições portuguesas.

A proximidade que tem existido entre a comunidade de investigação em educação matemática, as salas de aula e os professores dos ensinos básico e secundário reflete-se no facto que muitos dos investigadores que realizaram teses de doutoramento ou dissertações de mestrado, no período em análise, são eles próprios professores daqueles níveis de ensino, mantendo-se como tal mesmo depois de concluídas as suas teses e dissertações.

O artigo está organizado em várias secções focando respetivamente: os níveis de escolaridade em que incidem os estudos (desde o pré-escolar até ao ensino superior), principais metodologias utilizadas, temas curriculares abordados (quer temas matemáticos quer temas transversais), outras temáticas.

Tendo em conta as limitações referidas, optei por partir das teses de doutoramento, completando com informações vindas de dissertações de mestrado. Na minha pesquisa identifiquei que foram concluídas[2], entre 2000 e julho 2017 em universidades portuguesas, mais de 85 teses de doutoramento em Didática da Matemática ou cujo foco é o ensino-aprendizagem da matemática ou, ainda, a interdisciplinaridade com a matemática. Ficam de fora da análise a seguir apresentada um pequeno número (menos de 10%) que correspondem a estudos desenvolvidos em comunidades de prática extraescolar ou estudos de história de ensino da matemática que tive dificuldade em integrar na organização adotada.

A INVESTIGAÇÃO REALIZADA POR NÍVEIS DE ESCOLARIDADE

A tabela 1 ilustra, em termos quantitativos, as teses de doutoramento concluídas em Portugal, agrupadas por quinquénios. Como se constata, o número de teses concluídas não foi o mesmo nos diferentes quinquénios, nem a sua evolução foi linear ao longo do tempo. O período 2010-2014 é o de maior produção, tendência que poderá manter-se em 2015-2019 dado o número de trabalhos concluídos nos últimos dois anos e meio.

1 RCAAP – Repositório Científico de Acesso Aberto Português

2 Consideram-se as teses apresentadas e aprovadas em provas públicas no período referido.

Tabela 1. Teses de doutoramento realizadas por níveis de escolaridade

Período	Pré-escolar	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB/ Sec	Superior	
					F.I. Prof.	Mat
2000-2004	1	2	1	8	2	1
2005-2009	1	2	1	3	3	-
2010-2014	-	14	5	12	3	1
2015-2017 (Julho)	1	5	3	6	1	1
Total	3	23	10	29	9	3

A inclusão de uma tese num dos níveis de escolaridade significa que o seu objeto de estudo incidiu sobre professores, alunos ou currículo desse nível (há trabalhos referidos em dois níveis de escolaridade, por eles incidirem, por exemplo, no pré-escolar e no 1.º ciclo ou nos 1.º e 2.º ciclos).

Em relação ao ensino superior optei por separar os estudos realizados na formação inicial de professores daqueles que incidem sobre a aprendizagem dos alunos em disciplinas de Matemática (Domingos, 2003; Henriques, 2010) ou sobre conceções dos professores (Rosa, 2015). Os estudos relativos à formação inicial de professores distribuem-se de uma forma bastante equilibrada ao longo do tempo. Este equilíbrio mantém-se quando se olha para o tipo de instituição de formação – Escolas Superiores de Educação (ESE) ou Universidades. Incidem sobre: a formação em Didática da Matemática num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis (Vale, 2000); o estágio pedagógico (Viseu, 2008); a história da matemática (Jorge, 2008); a comunicação em matemática (Medeiros, 2010); ou, as mais recentes, sobre aspetos específicos do conhecimento matemático e didático relativos ao pensamento algébrico (Branco, 2013) ou ao conhecimento estatístico (Santos, 2015) de estudantes de Licenciatura em Educação Básica (LEB).

Na educação pré-escolar foram apenas concluídos três estudos de doutoramento de natureza muito diferente, sendo todos focados nas crianças. Palhares (2000) estuda a transição pré-escolar – 1.º ciclo; Maia (2007) os registos gráficos das crianças e a aprendizagem da matemática; e Soutinho (2016) a compreensão de problemas de natureza aditiva e estrutura multiplicativa por crianças do pré-escolar. No que se refere a dissertações de mestrado com foco no pré-escolar, o número é também reduzido quando comparado com o número total de dissertações realizadas.

A leitura da tabela 1 permite ainda ver que as teses que incidem no 1.º ciclo do ensino básico representam cerca de 37% do total das realizadas com foco nos ensinos básico e secundário. A sua distribuição ao longo do tempo não é linear, tendo o maior número sido concluído no período 2010-2014. Constata-se que a investigação neste ciclo de ensino sofreu um grande incremento no período em análise, verificando-se uma tendência contrária à referida por Ponte (1993) que constatava que os estudos no 1.º ciclo tinham apenas um carácter pontual.

Com incidência no 2.º ciclo do ensino básico identifiquei 10 estudos de doutoramento o que faz com que, proporcionalmente, este seja o ciclo do ensino básico onde foram desenvolvidos menos estudos de doutoramento, mantendo-se a tendência identificada por Ponte (1993), embora pareça estar a alterar-se.

A maioria dos estudos realizados tem como foco o 3.º ciclo do ensino básico e o ensino secundário.

Das 14 teses desenvolvidas com foco no 1.º ciclo, no período 2010/2014, sete correspondem a trabalhos desenvolvidos com professores e os restantes com alunos. De referir ainda que três das teses desenvolvidas com professores (Cardoso, 2010; Martins, 2011; Silva, 2011) foram-no no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM), que se desenvolveu em Portugal entre 2005 e 2011, onde foram também desenvolvidas várias dissertações de mestrado, com foco no desenvolvimento profissional dos professores.

Porque pode ser relevante, relativamente ao ensino não superior, a tabela 2 mostra o número de trabalhos cujo foco são alunos e aqueles que estudam professores.

Tabela 2. Público alvo dos estudos de doutoramento realizados nos 1. º, 2.º ou 3. º ciclos do ensino básico e no ensino secundário

Período	Incidência	
	Alunos	Professores
2000-2004	5	7
2005-2009	5	2
2010-2014	19	12
2015-2017	8	5
	36	26

De notar que existe um maior número de estudos que tem como foco os alunos. Os estudos realizados com professores têm como objetivo estudar: (i) o seu desenvolvimento profissional através de dispositivos de colaboração (por exemplo, Saraiva, 2002) ou tendo como foco a história de vida (Guimarães, 2004); (ii) a prática letiva (por exemplo, Santos, 2001); (iii) a identidade profissional de professores de matemática no início da carreira (Oliveira, 2004). Apenas um pequeno número estuda as conceções e atitudes dos professores perante a Matemática e o seu ensino (Guimarães, 2003; Martins, 2015).

METODOLOGIAS UTILIZADAS

A metodologia predominante é a metodologia qualitativa e, na sua grande maioria, estudos de caso. Dependendo do estudo, os casos são professores, alunos, grupos de alunos ou turmas. Mais recentemente, alguns estudos assumem como metodologia a investigação baseada em design (*design based research*), como é o caso de Mendes (2012) ou Carrapiço (2016). A tese de Dias (2013) assume, num dos estudos que a compõem, uma metodologia de investigação baseada em design e, no outro, uma abordagem qualitativa. Apenas um número reduzido de teses de doutoramento assume uma metodologia mista, isto é, qualitativa e quantitativa (por exemplo Vieira, 2013; Martins, 2015; ou Soutinho, 2016). O estudo de Figueiredo (2017) assume uma metodologia quantitativa, descritiva e correlacional.

Relativamente a dissertações de mestrado, a metodologia mais comum é também qualitativa e na grande maioria estudos de caso.

TEMAS CURRICULARES

Nesta secção apresento a análise das temáticas abordadas nos diferentes estudos, partindo mais uma vez das teses de doutoramento identificadas no período indicado. Incluí também nas tabelas temáticas números relativos a estudos de mestrado que consegui identificar, numa tentativa de dar uma visão mais completa da investigação realizada. Numa primeira parte os estudos estão agrupados por temas matemáticos curriculares. Na segunda parte esse agrupamento é feito por temas transversais.

Temas matemáticos curriculares

Os trabalhos analisados cobrem de modo muito desigual os temas curriculares: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Medida e Organização e Tratamento de Dados (OTD) (tabela 3).

Tabela 3. Número de teses de doutoramento nos diferentes temas e níveis de ensino

Temas	Pré-escolar	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	Sec	F. I. Prof.	Total
Números e Operações	1	4	3				8
Geometria e Medida		1		2	1	1	5
Álgebra e Funções		4*	2*	2	3	1	11
OTD		2	1	2	1	1	7

*Uma das teses incide sobre os 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.

Números e Operações

Incluí neste tema estudos que incidem sobre tópicos relativos aos Números e Operações, quer sejam realizados com alunos ou com professores ou incidam no currículo. Os estudos com foco no pensamento algébrico no 1.º ciclo do ensino básico são considerados no tema Álgebra.

Tabela 4. Estudos no tema Números e Operações

	Pré-escolar	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB
Teses de doutoramento	1	4	3	0
Dissertações de mestrado	2	16	2	1

Os estudos analisados incluem temáticas como sentido do número, conceito de número (nos diferentes conjuntos numéricos), operações aritméticas e cálculo mental. Foram identificadas oito teses de doutoramento. Soutinho (2016) centra-se na educação pré-escolar e na compreensão de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas. Na perspetiva do sentido de número, Ferreira (2012) estuda a resolução de problemas de adição e subtração de alunos do 2.º ano e Mendes (2012) debruça-se sobre a aprendizagem da multiplicação também no 1.º ciclo. Rodrigues (2015) estuda a aprendizagem da noção de número e da resolução de problemas aritméticos no 1.º ciclo. Delgado (2014) debruça-se sobre as práticas dos professores do 1.º ciclo e o desenvolvimento do sentido de número. Carrapiço (2016), no 2.º ciclo, incide sobre o cálculo mental com números racionais. Também no 2.º ciclo e sobre números racionais são os estudos de Pinto (2011) e Ventura (2014), sendo o primeiro sobre o desenvolvimento do sentido de multiplicação e divisão e o segundo sobre a aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as diferentes representações.

Também identifiquei um grande número de dissertações de mestrado realizadas no 1.º ciclo e apenas uma no 3.º ciclo que aborda a temática dos números reais. A grande maioria parte da ideia de sentido do número, estudando diferentes operações aritméticas ou diferentes campos numéricos. Grande parte dos estudos realizados no 1.º ciclo focam essencialmente no conjunto dos números naturais com o zero, já os do 2.º ciclo têm como foco os números racionais.

Geometria e Medida

O tema menos estudado é o da Geometria e Medida (tabela 5), quer no que se refere a dissertações de mestrado quer a teses de doutoramento. Apenas identifiquei cinco teses de doutoramento, abordando temáticas e níveis de ensino muito distintos. A tese de Costa (2005) aborda o tema da visualização a partir de uma experiência com alunos do 4.º ano. Ainda no 1.º ciclo existem algumas dissertações de mestrado sobre o tema das figuras geométricas e a sua classificação ou aspetos transversais como atividades de investigação em geometria ou o desenvolvimento do pensamento geométrico ou ainda a geometria e as histórias infantis.

A tese de Lopes (2010) desenvolvida no 3.º ciclo do ensino básico debruça-se sobre práticas de ensino de geometria, tendo como principal foco de investigação as práticas de ensino da professora investigadora. A de Santos (2016) estuda o desenvolvimento de uma plataforma digital e o seu contributo para o ensino da geometria. Também com foco no 3.º ciclo foram realizadas algumas dissertações de mestrado incidindo sobre o raciocínio geométrico, por vezes com recurso ao computador e/ou programas de geometria dinâmica ou envolvendo outros materiais.

Ao nível do ensino secundário foi desenvolvido o estudo de doutoramento de Neto (2009), sobre desenvolvimento do raciocínio dedutivo de alunos do ensino secundário.

Na formação inicial de professores dos primeiros anos, a tese de

Tabela 5. Estudos em Geometria e Medida

Tema		Pré-escolar	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	Sec	F.I.
Geometria	Teses de doutoramento	-	1		2	1	1
	Dissertações de mestrado	1	6	1	4	-	
Medida	Teses de doutoramento	-	.	-	-	-	
	Dissertações de mestrado	-	2	3	-	-	

doutoramento de Ribeiro (2005) debruçou-se sobre a influência da utilização de um programa de geometria dinâmica na forma como os alunos encaram a Matemática e a sua aprendizagem. Foi ainda desenvolvida uma dissertação de mestrado que faz um diagnóstico dos conhecimentos em geometria revelados por alunos da Licenciatura em Educação Básica.

Sobre Medida não tive acesso a nenhum estudo de doutoramento. Identifiquei duas dissertações de mestrado realizadas no 1.º ciclo que abordam o conceito de área com alunos do 3.º ano de escolaridade. No 2.º ciclo foi realizado um trabalho com alunos do 5.º ano que se refere à aprendizagem dos conceitos de perímetro e área, e outro também no 6.º ano sobre o conceito de volume. Um terceiro estudo desenvolvido no 5.º ano foca também a aprendizagem do perímetro e área, no âmbito de uma experiência de ensino realizada com o GeoGebra. Existe ainda uma dissertação de mestrado sobre os conceitos de área e perímetro com alunos de um curso de Educação e Formação.

Álgebra

Este é o tema onde foram identificados mais estudos de doutoramento. Foram desenvolvidas 11 teses de doutoramento, com incidência nos diferentes níveis de ensino. Três destas teses focam-se no 1.º ciclo do ensino básico e na aprendizagem do pensamento algébrico pelos alunos (Mestre, 2014; Pimenta, 2016; Vieira, 2014). Uma quarta tese (Cardoso, 2010), realizada com professores do 1.º ciclo no âmbito de um programa de formação contínua, estuda o seu conhecimento matemático e didático com incidência no pensamento algébrico. A tese de Fernandes (2006) estuda as aprendizagens algébricas de alunos do 1.º ao 6.º ano. A aprendizagem deste tema foi também objeto de estudo em diversas dissertações de mestrado e nos diferentes níveis de escolaridade (tabela 6).

Tabela 6. Estudos desenvolvidos em Álgebra

Álgebra	Pré-escolar	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	Sec	F. I.
Teses de doutoramento	-	4*	2*	2	3	1
Dissertações de mestrado	1	5	3	8	7	1

*Um estudo foi desenvolvido com alunos do 1.º ao 6.º ano.

Silvestre (2012) trabalhou com alunos do 2.º ciclo sobre a aprendizagem do raciocínio proporcional. As teses desenvolvidas no 3.º ciclo também referem o desenvolvimento do pensamento algébrico: Duarte (2011) analisa o papel das tecnologias no conhecimento profissional dos professores; Nobre (2016) realizou uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano. As oito dissertações de mestrado no âmbito do 3.º ciclo do ensino básico estudam, para além do desenvolvimento do pensamento algébrico, temas como equações e funções.

No ensino secundário o tema Funções é focado nas três teses, sendo que duas (Bishop, 2001; Consciência, 2014) estudam o papel da calculadora gráfica na aprendizagem daquele tópico e a outra (Pereira, 2016) pretende promover a construção dos significados e dos raciocínios matemáticos dos alunos do 11.º ano de escolaridade na aprendizagem dos parâmetros em funções. As dissertações de mestrado também abordam este tema, sendo ainda estudado o efeito das tecnologias. A tese de Branco (2013), na formação inicial de professores dos primeiros anos, incide igualmente sobre pensamento algébrico. No âmbito da formação de educadores de infância e do estudo dos padrões foi realizada uma dissertação de mestrado.

Existem também dissertações desenvolvidas em cursos de Educação e Formação, nomeadamente sobre a aprendizagem da proporcionalidade direta e das funções.

Organização e Tratamento de Dados (OTD)

Com foco neste tema, foram identificadas seis teses de doutoramento nos diferentes níveis de ensino e na formação inicial de professores dos primeiros anos (tabela 7). Martins (2015) estuda as atitudes dos professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico em relação à estatística e Rodrigues (2016) o conhecimento e práticas de professores do 1.º ciclo em educação estatística no contexto de um trabalho colaborativo.

Tabela 7. Estudos desenvolvidos em OTD

Álgebra	Pré-Escolar	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	Sec	F. I.
Teses de doutoramento	-	2*	1*	2	1	1
Dissertações de mestrado	1	2	3	1	1	-

*Uma tese está incluída nas duas colunas.

Os estudos de doutoramento com âmbito no 3.º ciclo são estudos realizados com alunos, tendo como objetivo a promoção do desempenho estatístico (Carvalho, 2001) e o desenvolvimento da literacia estatística (Campelos, 2014). O estudo de Filipe (2017), realizado no ensino secundário, debruça-se sobre o conhecimento de professores do ensino profissional para ensinar estatística em contexto de modelação.

De notar que foram realizadas dissertações de mestrado na educação pré-escolar e nos diferentes níveis de ensino, tendo como objetivos o desenvolvimento do pensamento estatístico, da literacia estatística ou o planeamento estatístico. Um estudo foi realizado com alunos do 12.º ano e teve como foco a análise combinatória.

TEMAS CURRICULARES TRANSVERSAIS

Vários estudos desenvolvidos nos ensino básico e secundário ou na formação inicial de professores focam temas transversais (ver tabela 8), como a resolução de problemas (Amaral, 2016; Barbosa, 2010; Ferreira, 2012; Jacinto, 2017; Rodrigues, 2015; Sardinha, 2011; Soutinho, 2016; Vale, 2000), as tarefas de investigação (Brocardo, 2001; Henriques, 2010), o raciocínio matemático (Neto, 2009; Silvestre, 2012), ou a comunicação matemática (Guerreiro, 2012; Martinho, 2007; Medeiros, 2010; Menezes, 2004).

Tabela 8. Teses de doutoramento sobre temas curriculares transversais

Temas	Pré-escolar	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	Sec	Sup	F.I.
Resolução de problemas	1	3	2	1			1
Investigações				1		1	
Raciocínio			1		1		
Comunicação		2	1	1			1
Argumentação/ Demonstração			1	2			

Embora tenha incluído na mesma categoria diferentes estudos sobre resolução de problemas, este termo não é entendido da mesma forma nas diferentes teses. Refere-se tanto a problemas relativos a operações aritméticas (Ferreira, 2012; Mendes, 2012; Rodrigues, 2015) como à resolução de problemas em geral (Barbosa, 2016; Vale, 2000) ou ainda à resolução de problemas com tecnologias (Amaral, 2016; Jacinto, 2017). As teses inseridas na categoria raciocínio referem-se ao desenvolvimento do raciocínio proporcional no 2.º ciclo (Silvestre, 2011), ou ao raciocínio dedutivo no ensino secundário em geometria (Neto, 2009). Sobre a comunicação matemática foram realizadas duas teses com professores do 1.º ciclo (Guerreiro, 2012; Menezes, 2004) e uma com professores dos 2.º e 3.º ciclos (Martinho, 2007), tendo como característica comum o facto de terem sido realizados em ambientes de natureza colaborativa. Existe apenas uma tese sobre demonstração (Rodrigues, 2009) e duas sobre argumentação (Boavida, 2005; Gil, 2013) que poderiam ter sido incluídas no tema raciocínio, mas optei por separar.

Tabela 9. Dissertações de mestrado sobre temas curriculares transversais

Temas	Pré-escolar	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	Sec	F.I.
Resolução de problemas	-	5				
Investigações		3	1			1
Raciocínio		1		1	1	
Comunicação		3	1			

Tal como os estudos de doutoramento, o maior número de dissertações identificadas são na temática da resolução de problemas e na das atividades de investigação seguida pela da comunicação. O desenvolvimento do raciocínio é aquele em que identifiquei menos estudos.

Outras temáticas

Os jogos são objeto de estudo em, pelo menos, duas teses de doutoramento, uma que analisa o papel dos jogos na aprendizagem da matemática do 1.º ao 6.º ano de escolaridade (Ferreira, 2014) e outra que estuda a adaptação dos jogos para alunos com baixa visão e cegueira (Dias, 2013). Também identifiquei uma dissertação de mestrado desenvolvida no 1.º ciclo sobre o papel do lúdico na aprendizagem. Existe ainda a tese de doutoramento de Albino (2017) enquadrável nas necessidades educativas especiais, com alunos surdos. Esta autora já tinha na sua dissertação de mestrado trabalhado com alunos surdos.

O papel dos materiais manipuláveis na aprendizagem, nomeadamente o geoplano, é objeto de estudo em pelo menos duas dissertações de mestrado, uma realizada no 1.º ciclo e outra no 2.º ciclo do ensino básico. A utilização e o papel de diferentes tecnologias como a calculadora, a calculadora gráfica e programas de geometria dinâmica são objeto de estudo em diferentes teses e dissertações.

Relativamente à avaliação das aprendizagens identifiquei três teses de doutoramento que estudam práticas avaliativas, uma no 3.º ciclo (Semana, 2016) e duas no ensino secundário (Dias, 2013; Monteiro, 2013). Relativamente a dissertações de mestrados existem duas realizadas no 1.º ciclo, uma sobre critérios de avaliação na resolução de problemas e outra sobre avaliação reguladora. No 2.º ciclo foi desenvolvido um estudo sobre práticas de avaliação formativa. Foi ainda identificado um outro estudo de mestrado centrado nas práticas de avaliação sumativa de professores de Matemática e outro sobre as conceções e práticas de avaliação de professores estagiários de Matemática. No ensino secundário foi estudada a utilização do portefólio reflexivo como instrumento de avaliação reguladora. Ainda nesta temática, e relativo ao 12.º ano, também foi realizada uma dissertação de mestrado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise aqui apresentada, com as limitações enunciadas, mostra que muito se avançou na investigação em Educação Matemática neste século XXI. Mostra ainda que a grande maioria dessa investigação inclui indicações para a aprendizagem e as práticas de sala de aula, a que importa dar uma maior divulgação.

Outro aspeto a realçar é o da existência de investigação em educação matemática, ao nível do doutoramento, nos diferentes níveis de escolaridade, sinal do crescimento da investigação em Educação Matemática em Portugal, quando se compara com o que acontecia nos anos 90 do século passado (Ponte, 1993). Como conseguir que os resultados destes estudos sejam potenciados nas salas de aula e favoreçam as aprendizagens em Matemática dos nossos alunos é o desafio que temos de enfrentar.

De notar que a investigação portuguesa tem acompanhado as tendências curriculares internacionais de que são exemplo o grande número de estudos sobre o pensamento algébrico nos primeiros anos ou sobre Organização e Tratamento de Dados, ou ainda a existência de diferentes estudos sobre temas curriculares transversais como a comunicação matemática.

No entanto, os dados apresentados mostram que existem temas ainda muito pouco estudados e onde é urgente haver maior incidência, como o ensino e aprendizagem da Geometria e Medida. Nos temas transversais destaco o reduzido número de estudos sobre o raciocínio. Outra temática pouco estudada é a da avaliação das aprendizagens quer se trate da avaliação reguladora ou da avaliação sumativa.

Referências

Albino, I. (2017). *Inclusão, transições e matemática: dois estudos de caso sobre percursos académicos de dois estudantes surdos*. Tese doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.

Amaral, N. (2016). *A criatividade matemática no contexto de uma competição de resolução de problemas.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Barbosa, A. C. C. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Tese doutoramento, Universidade do Minho

Bishop, J. (2001). *Mudanças no ensino das funções – a introdução de um novo programa e da calculadora gráfica.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Boavida, A. (2005). *A argumentação em matemática: investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Tese doutoramento, Universidade Lisboa.

Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos.* Tese de doutoramento, Universidade Lisboa.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projeto curricular no 8.º ano.* Tese doutoramento, Universidade Lisboa.

Campelos, S. (2014). *Desenvolvimento da literacia estatística: uma abordagem no 3.º ciclo.* Tese doutoramento, Universidade Aberta.

Cardoso, T. P. (2010). *O conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua.* Tese doutoramento, Universidade do Minho.

Carrapiço, R. C. (2016). *Cálculo mental com números racionais: um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Carvalho, C. (2001). *Interação entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7.º ano de escolaridade.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Consciência, M. (2014). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Costa, C. (2005). *Modelo de pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade.* Tese doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.

Delgado, C. (2014). *As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido do número: um estudo no 1.ºciclo.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Dias, C. (2013). *Jogos matemáticos adaptados à baixa visão e cegueira.* Tese doutoramento, Universidade do Minho.

Dias, P. (2013). *Práticas letivas promotoras da regulação da aprendizagem matemática pelos alunos.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a matemática no ensino superior.* Tese doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.

Duarte, J. (2011). *Tecnologias e pensamento algébrico: um estudo sobre o conhecimento profissional dos professores de matemática.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Fernandes, D. (2006). *Aprendizagens algébricas em contexto interdisciplinar no ensino básico.* Tese doutoramento, Universidade do Porto.

Ferreira, E. (2012). *O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Ferreira, M. D. (2014). *Jogos matemáticos e matemática elementar.* Tese doutoramento, Universidade do Minho.

Figueiredo, M. (2017). *Estilos de aprendizagem na disciplina de matemática.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Filipe, N. (2017). *Conhecimento para ensinar estatística em contexto de modelação: um estudo com professores de matemática do ensino profissional.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Gil, P. (2013). *A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula.* Tese doutoramento, Universidade do Minho.

Guerreiro, A. (2012). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: práticas no 1.º ciclo do ensino básico.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Guimarães, F. (2004). *O desenvolvimento de uma professora de Matemática do ensino básico: uma história de vida*. Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a matemática e a actividade matemática – um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Henriques, A. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de atividades de investigação.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Jacinto, H. (2017). *A atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias e a fluência tecno-matemática de jovens do século XXI.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Jorge, R. (2008). *Formação inicial de professores do ensino básico: um* *percurso centrado na história da matemática.* Tese doutoramento, Universidade de Aveiro.

Lopes, I. C. (2010). *Uma abordagem curricular em matemática no 3.ºciclo do ensino básico: um estudo de caso em geometria.* Tese doutoramento, Universidade de Aveiro.

Maia, J. (2007). *Os registos gráficos das crianças no jardim de infância e a aprendizagem da matemática.* Tese doutoramento, Universidade do Minho.

Martinho, H. (2007). *A comunicação na sala de aula de matemática: um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Martins, C. (2011). *O desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo do ensino básico: contributos da participação num programa de formação contínua em Matemática.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Martins, J. (2015). *Estudo das atitudes em relação à estatística dos professores do 1.º ciclo e dos professores de Matemática do 2.ºciclo do ensino básico.* Tese doutoramento, UTAD.

Medeiros, K. (2010). *A comunicação na formação inicial de professores de matemática: concepções e práticas de explicação em sala de aula.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva do desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projeto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Monteiro, M. R. (2013). *Práticas avaliativas da capacidade de argumentação matemática de alunos do ensino secundário: um estudo com professores de matemática A.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Neto, T. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a geometrias planas.* Tese doutoramento, Universidade de Aveiro.

Nobre, S. (2016). *O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Oliveira, H. (2004). *A construção da identidade profissional de professores de Matemática em início de carreira.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Palhares, P. (2000). *Transição do pré-escolar para o 1.º ano de escolaridade: Análise do ensino e das aprendizagens em Matemática.* Tese doutoramento. Universidade do Minho.

Pereira, M. (2016). *Um método de ensino com tarefas para mediar significados em matemática: ensino de parâmetros em funções no 11.º ano de escolaridade.* Tese doutoramento, Universidade da Beira Interior.

Pimenta, C (2016). *A construção do conhecimento no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Tese doutoramento, Universidade da Beira Interior.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (1993). A Educação Matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. *Quadrante,* 2(2), 95-121.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998).I*nvestigação em educação matemática: Implicações curriculares.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ribeiro, A. (2005). *O cabri-gémètre e a construção de uma nova cultura matemática: um estudo no âmbito da formação inicial de professores do 1º CEB.* Tese doutoramento, Universidade de Aveiro.

Rodrigues, M. J. (2015). *A aprendizagem da noção de número e da resolução de problemas aritméticos na triangulação professor, alunos e manual escolar.* Tese doutoramento, Universidade Aberta.

Rodrigues, M. (2009). *A demonstração na prática social de matemática.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Rodrigues, A. C. (2016). *Conhecimento e práticas de professores em educação estatística: três estudos de caso no 1.º ciclo num contexto de trabalho colaborativo.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Rosa, S. (2015). *A matemática e o ensino da matemática na universidade: conceções dos professores do ensino superior.* Tese doutoramento, Universidade de Évora.

Santos, L. (2001). *A Prática lectiva como atividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Santos, R. (2015). *O conhecimento de estatística e da sua didática de futuros professores.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Santos, V. (2016). *Ambiente computacional adaptativo e colaborativo para a aprendizagem da Geometria.* Tese doutoramento, UTAD.

Saraiva, M. (2002). *O conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática: Um projecto colaborativo.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Sardinha, F. (2011). *Histórias com problemas e a sua ligação à promoção da numeracia e da literacia no 1.º ciclo do ensino básico.* Tese doutoramento. Universidade do Minho.

Semana, S. (2016). *Práticas avaliativas de uma professora na promoção da autorregulação da aprendizagem dos alunos em matemática.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Silva, N. M. P. (2011). *Avaliação do impacto da Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º ciclo do ensino básico no desenvolvimento e implementação do conhecimento didáctico.* Tese doutoramento. Universidade do Minho.

Silvestre, A. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Soutinho, F. (2016). *A compreensão de problemas de estrutura aditiva e estrutura multiplicativa por crianças do pré-escolar.* Tese doutoramento. Universidade do Minho.

Vale, I. (2000). *Didática da Matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis.* Tese doutoramento. Universidade de Aveiro.

Ventura, H. (2014). *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2.º ciclo do ensino básico.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Vieira, L. (2014). *Pensamento algébrico no 1.ºciclo do ensino básico.* Tese doutoramento. Universidade do Minho.

Viseu, F. (2005). *A formação do professor de matemática apoiada por um dispositivo de interação virtual no estágio pedagógico.* Tese doutoramento, Universidade de Lisboa.

Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF- Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Ser matemático na sala de aula

Fátima Mendes

A matemática não é uma disciplina contemplativa, mas sim criativa. Ninguém poderá retirar dela grande consolo quando tiver perdido o poder e o desejo de criar, e isto pode acontecer a um matemático bastante cedo. (Hardy, 2007, p. 113)

A citação com que se inicia este artigo foi retirada da obra *Apologia de um matemático*, de G. H. Hardy, considerado, por muitos, como um dos mais brilhantes matemáticos do século XX. Embora este se esteja a referir aos matemáticos e à matemática pura, esta afirmação poderia, facilmente, referir-se aos alunos do ensino básico e à Matemática enquanto disciplina curricular. Efetivamente pode pensar-se na matemática escolar como uma disciplina a partir da qual deve surgir o desejo de criar e de mostrar aos outros o que se criou, e em que é possível experienciar o que significa fazer matemática tal como fazem os matemáticos profissionais. Não é fácil 'ser matemático' na sala de aula, mas é, certamente, uma experiência pela qual os alunos do ensino básico devem passar, desde muito cedo, sob pena de não retirarem 'grande consolo' da Matemática.

Mas como pensam e trabalham os matemáticos? Há atualmente vários artigos e livros muito interessantes e acessíveis, que nos dão a conhecer, de modo simples, o trabalho dos matemáticos e que nos permitem estabelecer algum paralelismo entre o seu trabalho e o trabalho dos alunos na sala de aula. Um exemplo é o livro *Cartas a uma jovem matemática*[1], de Ian Stewart (2006). Neste, o matemático, baseando-se em Jacques Hadamard, refere que a criação em Matemática parece estar associada a três etapas.

Uma primeira, em que se parte de um problema e se trabalha sobre ele: tenta-se compreendê-lo, exploram-se diferentes modos de o abordar, procuram-se diferentes exemplos para identificar características gerais que se revelem úteis na sua resolução. De acordo com Stewart (2006), esta fase, no caso dos matemáticos, "leva a que nos afundemos num pântano, um estado de confusão desesperada, à medida que a verdadeira dificuldade do problema emerge" (p. 52).

Uma segunda etapa corresponde a deixar de pensar no problema e ir fazer outra coisa, permitindo que o subconsciente pense sobre o problema original e esclareça a confusão resultante dos esforços conscientes. O subconsciente não irá resolver completamente o problema, mas poderá alertar para outros caminhos, provavelmente mais promissores para encontrar a solução. Como explicita Stewart "Este é o grande momento «aha», quando a pequena lâmpada por cima da tua cabeça se liga de repente" (p. 52).

Uma terceira etapa diz respeito à organização e à escrita formal de tudo o que foi pensado e feito, de modo a poder ser publicado e lido por outros matemáticos. Embora não seja referido explicitamente por Stewart, esta fase corresponde também a apresentar o seu trabalho a outros matemáticos profissionais, sujeitando-o a validação, ou não.

Contudo, tal como explicita o mesmo autor, hoje em dia a resolução de problemas matemáticos passa não apenas por um processo em três etapas, mas por uma rede complexa de processos. Cada matemático usa estes processos e etapas muitas vezes, de formas e níveis diferentes.

Na sala de aula, perante um problema desafiador, os alunos, tal como os matemáticos, envolvem-se na sua resolução. Tentam compreendê-lo e pensam numa estratégia de resolução. Frequentemente enveredam por caminhos difíceis, aparentemente sem saída. Nessa altura uma boa decisão é parar um pouco, olhar para o problema segundo uma outra perspetiva, tentar encontrar uma forma diferente de o abordar e explorar. Depois, é essencial construir um caminho que conduza à solução pretendida. Finalmente, é importante registar detalhadamente a resolução encontrada, de modo a ser compreendida e validada por outros. Estes, na sala de aula, não são matemáticos profissionais, mas são os colegas, aprendizes de matemáticos e o professor, que orienta todo o processo.

Procurando ilustrar a atividade matemática que pode ser desenvolvida pelos alunos na sala de aula e o seu paralelismo com a atividade dos matemáticos profissionais, apresento um exemplo das aulas que incluem um congresso matemático, na aceção de Fosnot e Dolk (2001), concretizando-o numa turma do 3.º ano de escolaridade. Nestas aulas os alunos têm oportunidade de fazer matemática, assumindo o papel de matemáticos durante o processo de resolução de problemas e de apresentação do trabalho realizado à comunidade matemática, sujeitando-se a um processo de validação. Tal como acontece nas comunidades de matemáticos, as suas ideias e resoluções são consideradas verdadeiras se os seus pares as considerarem verdadeiras.

1 Recomendado pelo Plano Nacional de Leitura, para leitura autónoma, aos alunos do 3.º ciclo.

CRIAR OPORTUNIDADES PARA FAZER MATEMÁTICA: PARTIR DE TAREFAS DESAFIANTES

Um ponto de partida determinante para o trabalho na sala de aula são as tarefas que se propõem aos alunos. Tal como é referido pelo NCTM (2017) uma das oito práticas do professor que enquadram o ensino e a aprendizagem da matemática é "propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas" (p. 10), de modo a envolver os alunos em tarefas desafiantes que apoiem uma aprendizagem com sentido (idem).

Tendo a preocupação de propor aos alunos tarefas desafiantes, no contexto da aprendizagem das operações multiplicação e divisão, Isabel, a professora da turma do 3.º ano propõe a realização do seguinte problema (Mendes, 2012):

MINIATURAS DE ANIMAIS

Para a visita ao Jardim Zoológico, organizada pelo ATL, os alunos foram divididos por grupos, tendo cada grupo um monitor responsável.

O grupo do Guilherme ficou com oito alunos e o do Francisco com sete alunos.

À porta do Jardim Zoológico cada monitor recebeu um saco com miniaturas de animais para distribuir pelos alunos do seu grupo.

O saco do grupo do Guilherme tinha 256 miniaturas e o do grupo do Francisco tinha 224.

No intervalo para o lanche cada monitor distribuiu, igualmente, as miniaturas do seu saco pelos alunos do respetivo grupo.

- **Achas que é justa esta partilha das miniaturas de animais?**
- **Afinal com quantas miniaturas de animais ficam os alunos do grupo do Guilherme e os alunos do grupo do Francisco?**

Figura 1. Tarefa – *Miniaturas* de animais (Mendes, 2012)

Os alunos leem o problema, mostrando compreender a situação proposta. Antes de passarem à sua resolução são desafiados, por Isabel, a pensar na questão final: "Achas que é justa esta partilha das *miniaturas* de animais?". Imediatamente os alunos se interessam por tentar dar resposta à questão e, na sua maioria, respondem que a partilha não é justa "pois os sacos não têm o mesmo número de *miniaturas*". Alguns, poucos, referem que a partilha até pode ser justa "porque há mais miniaturas para o grupo que tem mais crianças". Perante estas afirmações divergentes, a curiosidade das crianças desperta e sentem-se desafiadas a procurar resoluções que lhes permitam validar, ou não, as conjeturas construídas.

Isabel propõe a realização de um congresso matemático (na aceção de Fosnot & Dolk, 2001) para que possam ser partilhadas as diferentes resoluções. Os alunos sabem que, para que este se realize, têm que resolver a tarefa proposta e construir um póster, que será afixado para que todos o possam observar. A tarefa *Miniaturas de animais* realizou-se já no 3.º período escolar e desde o início do ano que os alunos desta turma realizam congressos matemáticos, não precisando, nesta altura, de grandes explicações sobre o processo. Antes do primeiro congresso, no início do ano letivo, a professora explicou detalhadamente o que significava organizar um evento destes:

> **Isabel** – Depois de resolverem os desafios nas diferentes folhas vou entregar-vos uma folha branca grande e uma caneta mais grossa e vão ter de escolher a melhor forma, porque podem ter resolvido de várias maneiras, para apresentarem aos companheiros como resolveram cada uma das tarefas. Depois vamos expor todas as resoluções, devem ser 11 ou 12, porque estão aos pares. A seguir vão todos ter oportunidade para observar as resoluções de todos com muita atenção. Desta vez vêm três pares apresentar aos colegas o seu trabalho. Das próximas vezes escolherei outros pares para também apresentarem os seus trabalhos. Percebem que não há tempo nem necessidade de todos apresentarem sempre, senão a semana não chegava. Ainda há dúvidas?

Para que todo o processo que culmina com a realização de um congresso matemático seja o motor de aprendizagens efetivas em matemática é essencial a escolha da tarefa.

Para escolher a tarefa, o professor deve ter ideias claras sobre o que pretende que os alunos aprendam durante a sua resolução. Efetivamente "estabelecer metas matemáticas para enfatizar a aprendizagem" (NCTM, 2017, p. 10) é uma das práticas de ensino que ajudam a promover uma aprendizagem efetiva em matemática. No caso desta tarefa, Isabel tinha como finalidade que os alunos relacionassem a divisão com a multiplicação e resolvessem problemas de divisão recorrendo a estratégias multiplicativas.

Na escolha da tarefa pesam também as suas características, que devem desafiar o aluno, motivá-lo a resolvê-la e a perseverar na sua resolução. Além disso, esta deve permitir múltiplas abordagens e estratégias diversificadas de modo a promover o raciocínio e a resolução de problemas (NCTM, 2017).

Também os matemáticos profissionais se sentem desafiados a resolver problemas ou a provar conjeturas elaboradas por outros ou por si próprios. Muitas vezes o desafio e a motivação estão associados à sua intuição sobre a veracidade dessas conjeturas e, frequentemente, ao facto de ainda ninguém as ter conseguido provar. Foi o que aconteceu com a chamada Conjetura de Poincaré.

Poincaré, que viveu entre o final do século XIX e o início do Século XX, formulou a seguinte questão, que pode ser apresentada de forma simples, mas menos precisa do ponto de vista matemático[2]: será que "todos os corpos tridimensionais cujas fitas elásticas possam ser encolhidas num ponto podem ser transformados numa esfera?" (Szpiro, 2008, p. 158). O facto de Poincaré ter formulado uma pergunta, e não uma

2 Entre o rigor e a formalidade do ponto de vista matemático e a compreensão da conjetura pelos leitores não especialistas em topologia e geometria, optou-se por apresentar a conjetura de um modo simples mas compreensível aos leitores.

afirmação que carecia de uma prova, aguçou a curiosidade de muitos matemáticos. De facto, Poincaré deixou a questão sem resposta porque morreu pouco tempo depois. Aparentemente, a resposta do matemático à sua pergunta era afirmativa e, por isso, muitos envolveram-se na procura de contraexemplos. Quando não os encontraram, porque efetivamente eles não existiam, perseveraram durante cerca de 100 anos na procura de uma prova, que veio a ser construída por Perelman. É de referir que, embora tenha sido este matemático, já no século XXI, que demonstrou a conjetura de Poincaré, é consensualmente aceite que os trabalhos de Hamilton foram fundamentais para a construção dessa prova[3].

RESOLVER PROBLEMAS: A ESSÊNCIA DO TRABALHO DOS MATEMÁTICOS

Na turma do 3.º ano o problema é resolvido em pares. Esta opção de Isabel possibilita aos seus alunos uma oportunidade para "construir socialmente o conhecimento através do discurso, da atividade e da interação, no contexto de problemas com sentido" (NCTM, 2017, p. 9).

Se compararmos com o que fazem os matemáticos, temos a ideia de que estes, na procura de uma prova de uma determinada conjetura, ou na resolução de problemas desenvolvem um longo trabalho solitário, não partilhado. De facto, parece ter sido o que aconteceu com Perelman que, durante cerca de oito anos, se isolou na procura da prova da conjetura de Poincaré e que, apenas quando lhe pareceu que a tinha conseguido realizar, a resolveu partilhar (Szpiro, 2008).

Mas nem sempre é assim. Por vezes, durante a tentativa de resolução de um problema ou de demonstração de um teorema, os matemáticos sentem, também eles, a necessidade de partilhar com outros o que estão a fazer. Andrew Wiles, o matemático que em 1995 provou o Último Teorema de Fermat, embora durante muitos anos tenha trabalhado sozinho na sua demonstração, chegou a um ponto em que percebeu que era necessário partilhar com alguém o trabalho que vinha realizando para conseguir avançar (Aczel, 1997). Tal como refere Aczel (1997), Wiles "decidiu que, provavelmente, não conseguiria grandes progressos se mantivesse o actual secretismo" (p. 113) e contactou outro matemático, Nick Katz, familiarizado com a teoria dos números, para discutir alguns aspetos do seu trabalho. Este é um episódio muito interessante, descrito por Amir Aczel, em que é referido o estratagema forjado pelos dois para que ninguém suspeitasse do tema em que estavam a trabalhar – inventaram um curso lecionado por Wiles, em que desistiram todos os estudantes exceto Katz. Deste modo Wiles e Katz tinham um pretexto para trabalhar juntos sem qualquer desconfiança. Pouco tempo depois, Wiles sente, mais uma vez, necessidade de partilhar o seu trabalho com um outro colega "para tentar ganhar um pouco mais de clareza nas últimas dificuldades que lhe surgiam" (p. 114).

Ganhar clareza nas dificuldades e ajudar-se mutuamente são também propósitos do trabalho a pares na turma do 3.º ano. Os pares de alunos leem mais uma vez a tarefa *Miniaturas de animais* e decidem, de modo autónomo, a sua resolução. Isabel monitoriza o seu trabalho, esclarecendo-os e questionando-os de modo que estes possam prosseguir nas estratégias que constroem. Se colocam questões específicas relativamente à resolução que elaboram ou pretendem elaborar, são-lhes dirigidas outras questões que os ajudem a raciocinar, mas que não os orientem para determinada resolução. A professora vai colocando, também, questões com o propósito de os ajudar a explicitar o seu modo de pensar e a construir argumentos que o fundamentem, aumentando a sua compreensão sobre as ideias matemáticas em causa na tarefa (Smith, Bill, & Hughes, 2008). Um outro objetivo da monitorização realizada pela professora é o de ter atenção ao que dizem e fazem, tentando identificar o seu potencial matemático, considerando a fase de discussão da tarefa (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008), neste caso, o congresso matemático.

A tarefa das *Miniaturas* foi identificada como sendo uma situação de divisão por todos os alunos, ainda que tenham construído resoluções diferentes. Nem todos chegaram à solução através da primeira tentativa de resolução.

Cristóvão e Francisco fazem uma primeira tentativa escrevendo consecutivamente todos os números entre 224 e 256, provavelmente para perceberem a diferença entre os dois números (figura 2). Depois de discutirem os dois sobre esta tentativa de resolução decidem abandonar a estratégia, por não a considerarem promissora, e colocam os primeiros cálculos entre parêntesis. Voltam a ler o problema e a discutir sobre uma outra estratégia de resolução.

Numa primeira fase, David e Tiago optam por uma estratégia

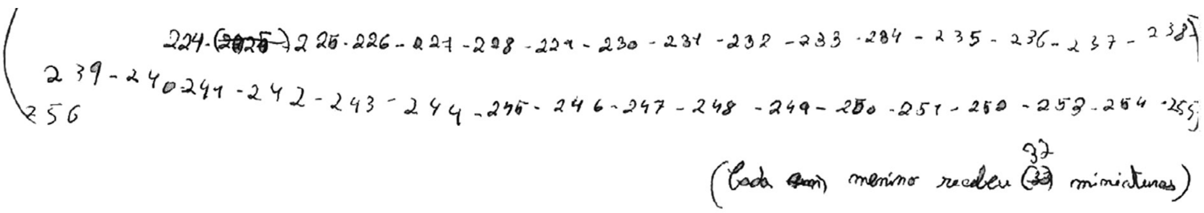


Figura 2. Primeira tentativa de resolução de Cristóvão e Francisco

3 Sobre os diferentes contributos para esta demonstração poderá ser consultada a obra de Szpiro (2008).

subtrativa, calculando também a diferença entre 256 e 224. Contudo, não parecem atribuir significado ao resultado obtido, optando por abandonar esta resolução, riscando-a (registos à esquerda da figura 3). Voltam a ler o problema e a pensar numa outra resolução.

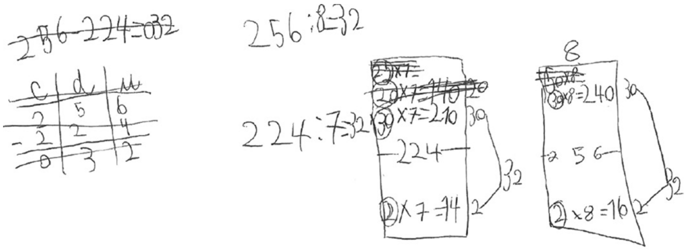


Figura 3. Primeira tentativa de resolução de David e Tiago

Diogo e Maria Rita não compreendem a pergunta final do problema e resolvem-no de modo a encontrar uma situação justa para todas as crianças e não a comparar as duas situações apresentadas. Assim, pensam numa situação próxima da realidade – juntar todas as miniaturas num único saco e reparti-las equitativamente por todas as crianças. Adicionam primeiro 256 e 224 e efetuam o cálculo 480÷15, atribuindo-lhe o significado de partilhar 480 miniaturas de animais por 15 alunos.

Os seus registos (figura 4) evidenciam que não lhes foi fácil efetuar o cálculo necessário, tendo realizado algumas tentativas sem sucesso. Ainda assim, depois de a terminarem, Diogo e Maria Rita estão contentes e confiantes na sua resolução. Confrontam o resultado final com o dos colegas e parece-lhes que foram bem-sucedidos na sua estratégia. Começam então a realizar o seu póster, que irá integrar a exposição antes do congresso. Durante o período de monitorização, Isabel, ao observar a resolução dos dois alunos, decide logo que esta será uma das apresentadas e discutidas no congresso matemático.

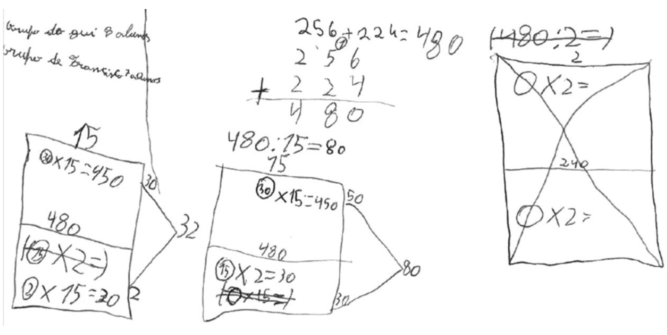


Figura 4. Resolução de Diogo e Maria Rita

Também Andrew Wiles, quando em junho de 1993 termina o seu trabalho e o apresenta em Cambridge numa palestra, está confiante na demonstração do último teorema de Fermat. Numa primeira fase, toda a comunidade matemática acredita que o teorema está finalmente provado e a notícia corre o mundo inteiro. O artigo de Wiles é, então, enviado a um grande grupo de especialistas em teoria dos números para ser analisado (Aczel, 1997).

Na turma do 3.º ano há pares de alunos que constroem estratégias diversificadas baseadas na multiplicação. Ana Rita e Miguel optam por realizar produtos sucessivos a partir de produtos de referência múltiplos de 10 (10×8 e 10×7), como mostra a figura.

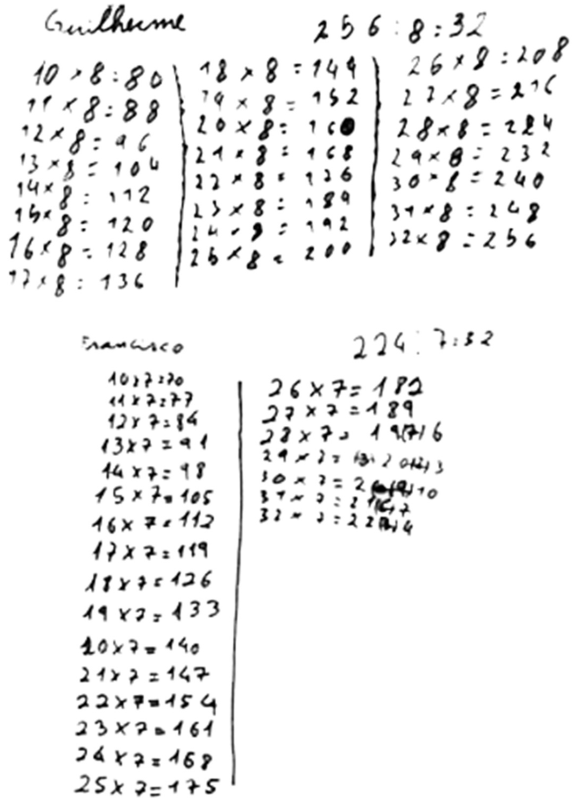


Figura 5. Resolução de Ana Rita e Miguel

Já Enzo e Guilherme apoiam-se na disposição retangular e recorrem a produtos parciais para calcular o número de miniaturas de animais com que ficou cada criança (figura 6).

Nesta fase, todos os alunos estão empenhados em construir as suas resoluções e em procurar respostas para a questão deixada no ar: "Será que a partilha das miniaturas é justa?"

PREPARAR A APRESENTAÇÃO DO TRABALHO REALIZADO: A CONSTRUÇÃO DOS PÓSTERES

Depois de resolverem a tarefa das *Miniaturas* os alunos da turma do 3.º ano começam a produzir os seus pósteres. Nesta altura do ano os alunos já têm alguma experiência de construção de pósteres, a propósito de outras tarefas e, por isso, já decidem com alguma facilidade o que é importante neles constar, de modo que os seus registos sejam compreendidos pelos colegas. Também já se habituaram a organizar melhor a informação, distribuindo os registos pela folha de papel A3 disponibilizada. Por exemplo, David e Tiago cuja primeira resolução é apresentada na figura 3 constroem o seu póster com a informação que consideram

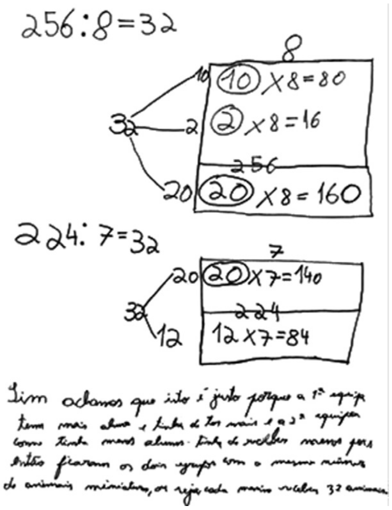


Figura 6. Resolução de Enzo e Guilherme

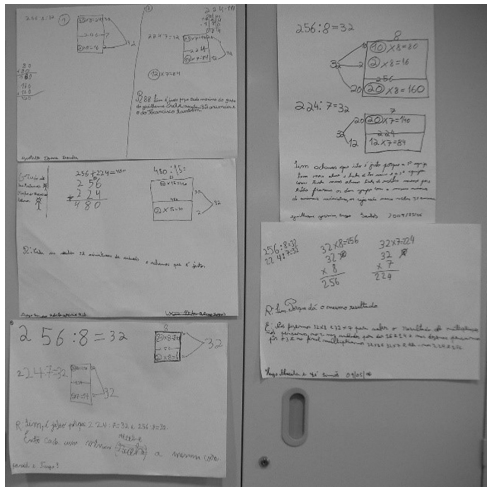


Figura 8. Fotografia de alguns dos pósteres realizados no âmbito da tarefa *Miniaturas*

essencial comunicar e apresentar aos colegas, um pouco diferente dos registos iniciais (figura 7).

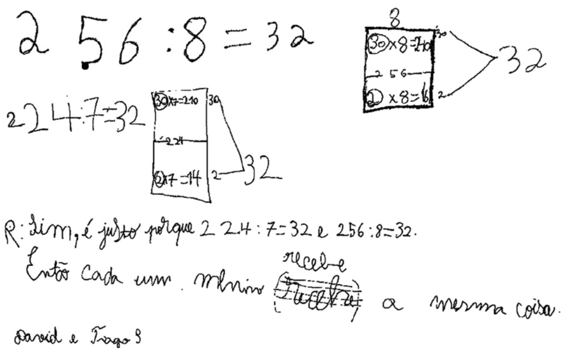


Figura 7. Póster de David e Tiago

Os pósteres são afixados no espaço negociado pela professora Isabel e pelo professor titular da outra turma que partilha a mesma sala. De modo a ficarem acessíveis a todos, os pósteres são colados pelos alunos nas paredes dos armários da sala (figura 8).

Enquanto os vão colando vão observando, com curiosidade e interesse, os pósteres dos colegas, tentando desde logo perceber se chegaram ao mesmo resultado, se usaram o mesmo processo de resolução ou se cometeram alguma incorreção.

Também a maior parte dos matemáticos profissionais preparam apresentações sobre o seu trabalho em congressos. Deste modo, sujeitam o trabalho que vêm realizando a validação externa, efetuada pelos seus pares. Também neste aspeto Perelman foi original relativamente à sua demonstração da conjetura de Poincaré. Ao invés de divulgar num congresso o trabalho que vinha realizando, optou por escrever um conjunto de três artigos que enviou, espaçadamente, para um arquivo na Internet a que tinham acesso apenas matemáticos. Só depois de ter várias reações positivas sobre a correção do seu trabalho, e de a notícia sobre a sua demonstração ter sido amplamente divulgada, é que o matemático aceitou fazer um conjunto de palestras.

CONHECER O TRABALHO DE OUTROS MATEMÁTICOS: A VISITA À EXPOSIÇÃO

Na turma do 3.º ano, depois de a exposição de pósteres estar montada, há um tempo próprio em que todos têm oportunidade de a visitar. Efetivamente é essencial em todo este processo de 'ser matemático' o observar com atenção e tentar compreender as produções dos colegas, comparando-as com as suas, como mostra a figura 9.

Alguns alunos tiram notas no seu caderno sobre aspetos que não compreendem ou sobre questões que pretendem colocar aos colegas durante o congresso. Esta atitude de observação e questionamento é incentivada por Isabel, fundamentando-a com o facto de que, se conhecerem bem os pósteres, poderão intervir mais ativamente na discussão que se irá seguir, tornando-a mais participada por todos. Por exemplo, Joana observa atentamente os pósteres dos outros grupos e aponta as suas dúvidas/questões. Eis algumas: "Não percebo o da Eva. Porque é que a Ana Rita não fez o ábaco e fizeram as tabuadas? Porquê o Gui(lherme) fez 2×8 e 10×8? …. Como é que o Zé e o Hugo sabem logo o resultado?" (figura 10).

Figura 9. Visita à exposição dos pósteres

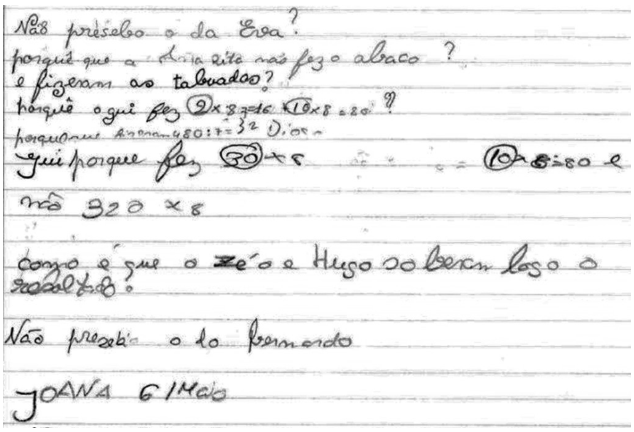


Figura 10. Dúvidas e questões de Joana, durante a ida à exposição

Joana, tal como os colegas, sabe como é importante compreender os raciocínios dos colegas e questioná-los relativamente às suas resoluções, levando a sério o seu papel de participante no congresso. Contudo, é difícil perceber as representações dos colegas, sobretudo quando são muito diferentes das suas, indiciando quase sempre modos de pensar também diferentes dos seus. Por isso, coloca questões que espera virem a ser respondidas no dia seguinte, durante o congresso.

APRESENTAR E VALIDAR O TRABALHO REALIZADO: O CONGRESSO MATEMÁTICO

A professora do 3.º ano organiza o congresso matemático no dia seguinte à resolução do problema que o despoleta, à construção dos pósteres e à visita à exposição. Esta opção está associada à sua prática de seleção e ordenação dos pósteres que vão ser apresentados e discutidos. Deste modo pode observá-los cuidadosamente e, de acordo com as resoluções apresentadas e com o propósito da tarefa, selecionar e ordenar as apresentações.

No dia seguinte, os alunos visitam mais uma vez a exposição e inicia-se o congresso. Isabel vai solicitando aos alunos que apresentem os seus pósteres, de acordo com a ordem pensada. Por isso, estes são descolados dos armários e colados no quadro, como mostra a figura 11. Todos os alunos são convidados a intervir, solicitando esclarecimentos, colocando dúvidas ou comparando o seu modo de resolução com o dos colegas que apresentaram.

Esta fase de discussão coletiva é fundamental para as aprendizagens dos alunos: podem interligar-se as diferentes resoluções e estabelecer-se pontes entre representações distintas e entre as estratégias e as ideias matemáticas que se pretendem realçar (Smith, Hughes, Engle, & Stein, 2009). A orquestração de Isabel é essencial tanto ao longo do congresso como na síntese final que realiza com a ajuda dos alunos.

Ana Rita e Miguel são desafiados por Isabel a explicar como pensaram, uma vez que o seu póster parecia ser alvo de algumas perplexidades por parte dos colegas. Joana foi uma das alunas

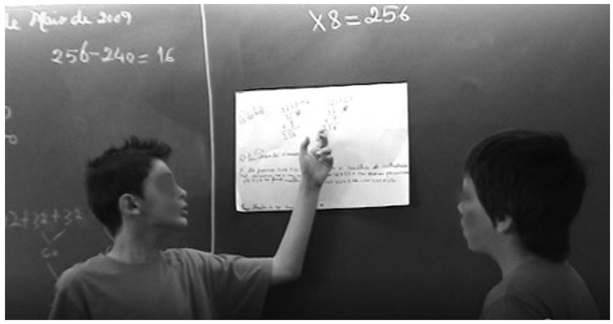


Figura 11. Apresentação de um dos pósteres

que questionou a sua resolução (figura 10).

Ana Rita – Nós vimos que tínhamos de fazer 256 a dividir por oito e 224 a dividir por sete. Como ainda não sabíamos o resultado, fizemos por multiplicações.
Isabel – Os outros grupos também pensaram assim, mas fizeram de maneira diferente. Ora, continuem a explicar.
Ana Rita – Nós também tentámos fazer com o retângulo, mas não conseguimos perceber como se faz.
Isabel – Mas expliquem lá a vossa maneira.
Ana Rita – Nós fomos fazendo a tabuada toda até ao 32.
Guilherme – Mas como é que sabiam que parava aí? Quantas vezes fizeram a tabuada?
Ana Rita – Sabíamos porque 32×8 é 256, o número das miniaturas .
Isabel – E é fácil fazer desta maneira?
Ana Rita – Mais ou menos.
Isabel – E porquê mais ou menos?
Ana Rita – Por causa de demorar algum tempo e quem não sabe a tabuada pode enganar-se.
Isabel – Mesmo quem sabe também se pode enganar, pois são muitos cálculos.
Ana Rita – A nós aconteceu-nos isso.
Isabel – E como podiam fazer de maneira mais rápida e sem se enganarem?
Ana Rita – Passar logo de 10 vezes para 20 e depois para 30 vezes.

Ana Rita fundamenta o seu modo de pensar evidenciando que reconhece ser um problema de divisão e explica que optaram por usar multiplicações. Explica ainda que inicialmente tentaram usar outro processo, mas não conseguiram, tendo decidido depois "fazer a tabuada toda até ao 32". Um colega, Guilherme, coloca-lhe uma questão associada ao "saber quando parar" à qual a aluna responde adequadamente, dando evidência da sua compreensão sobre o procedimento que usa. Além disso, quando interpelada por Isabel, consegue destacar os riscos do uso desta estratégia, avançando ainda para a explicitação de uma outra mais eficaz, recorrendo a fatores múltiplos de dez.

O póster construído por Diogo e Maria Rita tinha suscitado muito interesse e curiosidade. Confiantes na sua resolução, apresentam-na aos colegas, começando por explicar como entenderam o problema e como realizaram os cálculos. Referem que se apoiaram no modelo retangular para realizarem o cálculo 480÷15. Quando explicitam o seu modo de pensar, referem que calculam primeiro 10×15 mas ainda estava "longe" de 480, depois experimentam 20×15 e, finalmente, 30×15. Como já estava "perto", é esse o produto que registam, identificando depois 2×15, de modo a perfazer o total de 480.

Isabel promove a discussão no sentido de esclarecer o contexto do problema e de modo que eles consigam perceber a diferença entre a sua interpretação e a dos outros colegas. Diogo e Maria Rita explicam mais uma vez como entenderam o problema, sendo interpelados pelos colegas no sentido de ser clarificado o entendimento comum sobre a situação aí proposta. No debate associado, há alunos que se admiram como é que, tendo compreendido de modo diferente o problema e tendo efetuado um cálculo diferente, Diogo e Maria Rita obtêm também uma resposta de 32 miniaturas para cada criança. Isabel intervém, explicando a razão e dando um exemplo de uma outra situação em que tal não acontece. Todos os alunos, incluindo Diogo e Maria Rita, concluem que esta resolução não está de acordo com o problema proposto embora até "dê o mesmo resultado".

A discussão coletiva teve como finalidade, entre outras, evidenciar que a resolução de Diogo e Maria Rita não era a adequada ao problema, embora, numa primeira fase, durante a exposição, tanto os próprios autores como os colegas considerassem a resolução correta, mas intrigante.

Também os congressos dos matemáticos profissionais têm como grande finalidade a apresentação e validação, ou não, dos trabalhos desenvolvidos ou em desenvolvimento. Quando Wiles apresentou o seu trabalho sobre a conjetura de Fermat em junho de 1993 estava convencido da sua veracidade, bem como a maior parte dos matemáticos que o ouviu. Mas quando alguns analisaram em pormenor o documento escrito perceberam que alguma coisa não estava correta. Wiles voltou a trabalhar arduamente durante muitos meses até que um dia, já em setembro de 1994, ao voltar a estudar os papéis que tinha escrito descobriu, finalmente, o que estava mal. De acordo com Aczel (1997) o que o matemático percebeu era "tão indescritivelmente belo, tão simples, tão elegante … e olhei precisamente com descrença" (p. 121). Mais uma vez voltou a escrever o documento e a enviá-lo a matemáticos de todo o mundo. Em 1995 é publicado o artigo com a demonstração sem qualquer falha no *Annals of Mathematics.*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação realizada na turma do 3.º ano (Mendes, 2012) evidencia que o envolvimento dos alunos em congressos matemáticos, na aceção de Fosnot e Dolk (2001), possibilita-lhes experienciar o que fazem os matemáticos profissionais: são desafiados a resolver problemas, procuram uma sua resolução que, por vezes abandonam, e persistem na procura de uma estratégia que conduza à solução. Estão conscientes da importância de apresentar e discutir o trabalho realizado, de modo a construir socialmente o conhecimento através do discurso, da atividade e da interação (NCTM, 2017). Ou seja, a investigação realizada revela que é possível proporcionar aos alunos, através da realização de congressos matemáticos, uma verdadeira experiência matemática na sala de aula, tal como é preconizado em documentos de natureza curricular, como o NCTM (2017).

A turma funciona como uma comunidade de matemáticos, colocando questões, solicitando esclarecimentos, tirando dúvidas, validando o trabalho realizado, ajudando todos a avançar no seu conhecimento matemático.

Os alunos, tal como os matemáticos, percecionam que a pertença a essa comunidade matemática e, em particular, a realização de um congresso, reflete o que é dito por Stewart (2016) "A melhor forma de fazeres progredir a causa da matemática é encontrares-te com outros matemáticos" (p. 132).

> *Mas a matemática nunca chega ao fim. A solução de um problema apenas abre portas a um conjunto de novos problemas (Szpiro, 2008, p. 368)*

Agradecimento

À professora da turma do 3.º ano referida no texto, Isabel Salvado, da Escola Básica n.º 2 da Cova da Piedade, Agrupamento de Escolas António Gedeão.

Referências

Aczel, A. (1997). *O último teorema de Fermat*. Lisboa: Gradiva.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hardy, G. (2007). *A apologia de um Matemático.* Lisboa: Gradiva.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo.* (Tese de doutoramento). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. In http://hdl.handle.net/10451/5893.

NCTM (2017). *Princípios para a ação. Assegurar a todos o sucesso em matemática.* Lisboa: APM.

Spziro, G. (2008). *A conjetura de Poincaré.* Lisboa: Gradiva.

Stewart, I. (2016). *Cartas a uma jovem matemática*. Lisboa: Relógio d'Água.

Smith, M. S., Bill V., & Hughes, E. (2008). Thinking through a lesson: Successfully implementing high-level tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(3), 132-138.

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(9), 549-556.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Fátima Mendes

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal

O desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial *

O raciocínio geométrico e espacial são indissociáveis, afirmação que justifica a escolha do título deste artigo, escrito com o propósito de apresentar as ideias poderosas que a investigação educacional tem trazido ao ensino da geometria. O ponto de partida é a ideia de que o raciocínio geométrico se constrói e que os alicerces desta construção são determinantes para toda a aprendizagem da geometria subsequente. A sua orientação é a procura da conciliação de um ensino da geometria baseado no rigor do raciocínio geométrico com o sentido das formas e das relações geométricas. Assim, embora as ideias apresentadas se foquem principalmente na educação básica, ele cobre toda a aprendizagem da geometria. A orientação do texto não enveredou por uma abordagem temática da geometria e não há referências a nenhum tema em particular. É um texto naturalmente incompleto em que procurei responder a um desafio de forma também desafiadora.

O texto está organizado em três pontos encadeados, sendo que o último constitui uma espécie de conclusão: I) Aspetos específicos do ensino e aprendizagem da geometria; II) Resultados decorrentes da investigação neste domínio; III) Desafios que se colocam hoje à investigação.

O ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA — ALGUNS ASPETOS ESPECÍFICOS

O mundo da geometria está a mudar e os últimos anos têm dado um novo brilho a este campo do conhecimento matemático, afirma Joseph Malkevitch. Para este matemático, a geometria, que ao longo da história se desenvolveu entre o interesse na descrição do mundo físico e a construção de sistemas axiomáticos, passou hoje do ramo da matemática dedicado ao estudo das formas e do espaço, para o ramo da matemática que estuda os fenómenos visuais (Malkevitch, 2009).

Podemos considerar a geometria como uma rede complexa de conceitos, formas de pensar e sistemas de representação que são usados para analisar e imaginar ambientes espaciais (Battista, 2007). Michael Battista afirma que "a maior parte do raciocínio geométrico é espacial, considerando este tipo de raciocínio como a habilidade para ver, analisar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações" (2007, p. 843). Este investigador destaca o papel das imagens ao serviço de outras operações mentais e afirma que o raciocínio espacial proporciona, simultaneamente, a entrada e os instrumentos para o raciocínio geométrico formal.

A geometria lida com objetos que podem ter uma existência física, com os quais podemos interagir, e estuda também os processos de interação com esses objetos. É decisivo ter presente que os objetos físicos, com existência palpável ou desenhos, são sempre representações dos objetos geométricos (figura 1). Esta caraterística específica do conhecimento matemático distingue-o de todas as outras formas de conhecimento, conferindo à visualização e à representação um papel essencial na compreensão matemática.

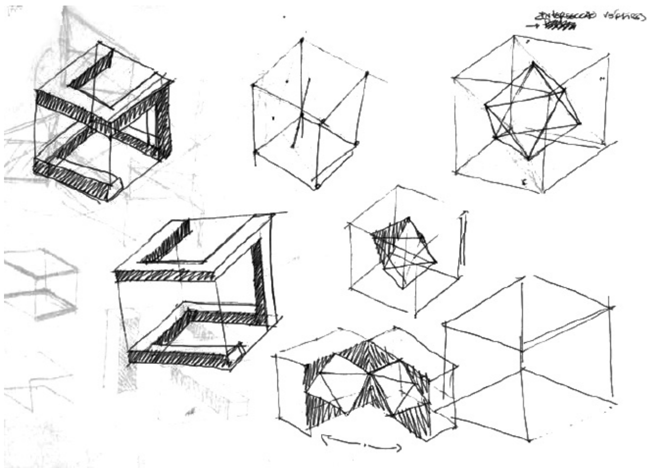


Figura 1. Desenho de um cubo, in "Desenho – Perceção e investigação Formal" de António Olaio, Coimbra 2016

O raciocínio espacial, nos níveis iniciais do raciocínio geométrico, está limitado ao nível superficial das ideias visuais. É reconhecido que um dos aspetos mais importantes da educação matemática das crianças é que estas desenvolvam, de modo crescente e integrado, representações que sintetizem imagens flexíveis e conceptualizações geométricas (Sarama e Clements, 2009), constituindo assim o seu reportório de imagens pessoal, progressivamente mais rico, diversificado, flexível e dinâmico. Além disso, deve ser dado ênfase aos processos pelos quais os alunos progridem da análise de figuras particulares para abstrações gerais de classes de figuras, bem como, aos mecanismos que permitem usar conceitos geométricos abstratos e formais para analisar figuras particulares (Battista, 2007).

Investigar sobre os vários tipos de raciocínio geométrico implica investigar sobre os vários aspetos do raciocínio espacial que lhe estão associados. Esta caraterística do raciocínio geométrico tem orientado o foco da investigação em geometria principalmente para os processos cognitivos. Embora a natureza social da aprendizagem seja hoje considerada como um dos aspetos mais relevantes no ensino, é reconhecido que poucos estudos têm examinado a aprendizagem da geometria nesta perspetiva. Mantém-se ainda hoje a afirmação de que os investigadores ainda não sabem o suficiente sobre como as várias componentes da prática social influenciam a construção pelos alunos dos conceitos e raciocínio geométricos, muito embora a investigação neste domínio tenha vindo progressivamente a integrar as dimensões de comunicação matemática e as perspetivas sociais da aprendizagem (Battista, 2007; Jones & Tzekaki, 2016).

É amplamente afirmado que a maior parte da investigação atual no ensino e aprendizagem da geometria está focada na utilização de ambientes computacionais (Battista, 2007; Jones & Tzekaki, 2016). Esta atração, a expressão é do próprio Battista, leva alguns autores a tentar compreender porque razão o ensino e a investigação em geometria abraçaram a tecnologia talvez mais entusiasticamente do que qualquer outra área da educação matemática. Um dos aspetos identificados está precisamente na riqueza que os ambientes de geometria dinâmica (AGD) proporcionam ao processo de fazer geometria, permitindo a cada um explorar ideias geométricas de modos diferentes, e indiscutivelmente melhores, do que explorações de papel e lápis, ampliando significativamente a habilidade para examinar grandes conjuntos de exemplos rigorosamente construídos, infundindo movimentos dinâmicos às investigações (Battista, 2007).

Interdependência entre raciocínio geométrico e raciocínio espacial, com envolvimento da visualização, necessidade de maior atenção ao papel dos aspetos sociais da aprendizagem e o recurso a ambientes digitais são três circunstâncias específicas da investigação sobre o ensino e aprendizagem da geometria, que ajudam a compreender a situação atual da investigação neste domínio.

IDEIAS DECORRENTES DA INVESTIGAÇÃO NO DOMÍNIO DA GEOMETRIA DETERMINANTES PARA O CURRÍCULO E PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Destaco quatro ordens de ideias chave como basilares para pensar o ensino da geometria hoje, seja do ponto de vista curricular ou das práticas de ensino: a) a estruturação do raciocínio geométrico; b) a ligação 3D-2D; c) as tarefas e os recursos, d) o desenvolvimento do raciocínio geométrico do professor.

O modelo de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio geométrico é considerado como o melhor e um dos mais significativos para descrever como é que os alunos constroem conceções matemáticas (Sfard & Cobb, 2014). Este modelo, desenvolvido a partir do fim dos anos cinquenta, tem como ideia base fundamental o pressuposto de que o raciocínio geométrico evolui segundo níveis de compreensão de complexidade crescente, passando sucessivamente desde o nível de visualização pela análise, abstração, dedução e rigor. Segundo a teoria de van Hiele, o progresso do raciocínio geométrico faz-se por níveis discretos, sequenciais e hierárquicos. Este modelo é consistente com a perspetiva construtivista da aprendizagem e constitui uma teoria útil para entender o progresso a fazer pelos estudantes à medida que o seu raciocínio geométrico se desenvolve (Battista, 2008).

Existe um consenso de que o objetivo destes níveis não seja o de classificar o raciocínio de cada estudante. Os descritores que caraterizam cada nível são úteis para identificar aspetos importantes do raciocínio geométrico e devem ser considerados como guias para o ensino que o professor se propõe fazer. Para desenvolver as capacidades de raciocínio inerentes a um nível é necessário ter em consideração o desenvolvimento de capacidades e conceitos inerentes a um nível anterior. Por exemplo, para compreender a classificação de uma figura geométrica (terceiro nível, abstrato/relacional) é necessário ser capaz de caraterizá-la tendo em conta as suas propriedades, descrevendo as relações espaciais entre as componentes da figura (segundo nível, descritivo/ analítico). É precisamente entre estes dois níveis que se situam os conceitos geométricos fundamentais da geometria elementar próprios da educação básica. Tem sido identificado pela investigação que muitos estudantes no final da educação básica não apresentam indicadores de desenvolvimento do seu raciocínio geométrico inerentes ao terceiro nível, e muitas vezes nem sequer inerentes ao segundo.

No que respeita aos níveis mais exigentes, facilmente se compreende que estejam relacionados com a escolaridade mais avançada. O quarto nível, dedução, é inerente à capacidade de elaborar uma sequência de afirmações que justifique uma conclusão como consequência dos dados de partida. E o quinto nível, rigor, inerente à capacidade de compreender o próprio sistema axiomático.

Num dos artigos mais recentes da autoria do próprio van Hiele, este investigador afirma que "pensar sem palavras não é pensar" e que o desenvolvimento do raciocínio geométrico depende mais do ensino e das experiências vividas do que da idade ou de qualquer outro tipo de maturidade do aprendente. Para van Hiele, o ensino deve promover o desenvolvimento do raciocínio geométrico através de sequências de atividades que possibilitem a integração progressiva de novas aprendizagens no conhecimento que o estudante já possui (van Hiele, 1999).

Ao longo dos anos este modelo tem sido estudado, melhorado, aplicado e desenvolvido, dando também origem a outros modelos. No entanto, as suas ideias fundamentais permanecem. O modelo de van Hiele é considerado ainda hoje como particularmente robusto e com impacto e influência na investigação e na aprendizagem (Sfard & Cobb, 2014). Segundo estes autores, a identificação do papel do ensino na mudança cognitiva e o foco na linguagem como o principal fator dessa mudança contribuem para a facilidade de conciliação deste modelo com as abordagens centradas no desenvolvimento da comunicação matemática.

Um dos desenvolvimentos do modelo de van-Hiele é o modelo de estruturação de Battista que constitui uma orientação muito útil do ponto de vista didático. Este investigador, a partir de experiências de aprendizagem realizadas com o recurso a AGD, desenvolve a ideia de que a aprendizagem da geometria tem por base o conceito chave de estruturação, sendo esta de três tipos: estruturação espacial, estruturação geométrica e estruturação lógico formal (2008, p. 138).

A estruturação espacial, entendida como a operação mental de construção e organização no espaço de uma forma ou objeto, ou de um conjunto de objetos, determina a perceção do objeto e integra a identificação de componentes do objeto e o estabelecimento de relações entre componentes e compósitos.

Por exemplo, o mesmo objeto geométrico, o paralelepípedo, admite mais do que uma estruturação espacial. Pode ser encarado como um sólido compacto em que se destacam seis faces retangulares, como uma pilha de retângulos todos iguais sobrepostos, como uma estrutura oca na qual se destacam as arestas, ou como uma superfície desmontável composta por três pares de retângulos iguais. Ao ler cada uma destas quatro descrições diferentes, propositadamente apontadas aqui sem qualquer representação visual associada, idealizamos uma imagem mental do paralelepípedo. No primeiro caso a melhor imagem é a de um sólido de madeira, no segundo, de uma resma de papel ou de um pacote de bolachas cream craker, no terceiro, de uma estrutura feita com palhinhas ou, mais sofisticadamente, com polydrons, e, no quarto, de uma caixa de cartão facilmente planificável. Qualquer destas estruturações espaciais do paralelepípedo nos remete para características distintas deste poliedro, todas elas importantes e necessárias para a sua conceptualização geométrica. Percebemos que a estruturação espacial do paralelepípedo não se esgota numa única imagem, física ou mental, e que todas elas poderão ter um papel distinto. Além disso, rapidamente também percebemos que há outras estruturações possíveis, por exemplo, a disposição de um conjunto de cubos todos iguais, dispostos em camadas iguais que são formadas pelo mesmo número de barras iguais.

A estruturação espacial é condição indispensável à compreensão e estruturação das medidas geométricas de comprimento, área e volume e das relações entre elas (Sarama & Clements, 2009).

A estruturação geométrica descreve a estruturação espacial em termos de conceitos de geometria formal. Isto é, na estruturação geométrica de uma situação espacial, o sujeito usa os conceitos de geometria como ângulos, declive, paralelismo, comprimento, retângulo, sistemas de coordenadas e transformações geométricas, entre outros, para conceptualizar e operar sobre uma dada situação. Para que a estruturação geométrica faça sentido para alguém, ela terá que evocar uma estruturação espacial adequada.

Por exemplo, para relacionar os elementos faces, arestas e vértices de um paralelepípedo, a estrutura espacial a evocar deve ser a estrutura de polydrons. Para identificar o paralelismo das faces do paralelepípedo é significativo evocar uma pilha de retângulos justapostos.

Por fim, Battista considera a estruturação lógico formal, na qual se organiza os conceitos geométricos ou as estruturas geométricas num sistema e que especifica as relações que podem ser descritas e estabelecidas através de raciocínio lógico. Para chegar à estrutura lógica, o indivíduo deve organizar logicamente conjuntos de propriedades.

Seguindo o exemplo dos paralelepípedos, é nesta estruturação que encaramos o cubo como um paralelepípedo. Para o fazer percebe-se o sentido de evocar uma pilha de retângulos justapostos ou uma superfície desmontável formada por três pares de retângulos iguais e associar a qualquer destas imagens, pilha ou planificação, o quadrado como elemento da classe dos retângulos. Deste modo organiza-se a classe dos paralelepípedos numa perspetiva inclusiva, de classes hierarquicamente integradas em outras classes.

Este exemplo ajuda-nos a compreender a importância destes três tipos de estruturação e a utilidade destas ideias para a elaboração de tarefas de aprendizagem e para o planeamento do ensino. O exemplo ilustrativo do paralelepípedo foi escolhido intencionalmente por apontar um outro aspeto determinante na estruturação geométrica, a ligação 3D-2D.

Figura 2. Foto de escultura de arte pública de Artur Rosa (Lisboa)

"— São quadrados.
— Mas também retângulos.
— Há retângulos de grossuras diferentes, um é mais grosso, outro é médio e o outro é fino."

Estas afirmações de três crianças são um excerto de um diálogo, ocorrido no jardim de infância, a partir da observação da uma escultura composta por paralelepípedos de várias dimensões, com espessuras vincadamente diferentes, em que dois deles são aproximadamente cubos (figura 2). Este diálogo serve para introduzir a discussão do lugar relativo das figuras 2D e 3D, uma das questões que se coloca sempre na organização do ensino e aprendizagem da geometria. Deverão ser as figuras 3D encaradas primeiro que as outras, pelo facto dos objetos tridimensionais serem mais familiares para as crianças? Johnston-Wilder e Mason (2005) respondem a esta questão ao defenderem que tanto a geometria sólida como a plana devem ser ensinadas de modo integrado. O que é importante, é que o foco seja o raciocínio geométrico e este exige tarefas que envolvam os alunos em manipulações apropriadas, que proporcionem oportunidades para dar sentido às relações e para ver essas propriedades como invariantes, independentes de uma situação particular, e passar a raciocinar com base nessas propriedades.

Segundo Jones e Tzekaki (2016) a investigação tem mostrado que as dificuldades dos alunos em visualizar e explicar os seus raciocínios podem ser devidas à falta de experiências prévias e ao débil desenvolvimento de imagens mentais. Ideia que confere uma relevância especial à tridimensionalidade e à necessidade de a articular com a bidimensionalidade. Os objetos reais são maioritariamente tridimensionais e muitos desenhos a duas dimensões são representações de objetos tridimensionais. Ainda segundo estes investigadores, os resultados de estudos em que as tarefas espaciais combinam figuras geométricas 2D e 3D, apoiadas por ferramentas tecnológicas relevantes, contribuem para o desenvolvimento das capacidades e do conhecimento inerentes ao raciocínio geométrico e espacial, confirmando assim o importante papel dos ambientes tecnológicos no desenvolvimento deste raciocínio.

A perspetiva de estruturação que discutimos aponta para a necessidade de ir conjugando ao longo da escolaridade tarefas que combinem o desenvolvimento do raciocínio geométrico com o desenvolvimento do raciocínio espacial, associados sempre à visualização. E tendo também sempre presente a natureza abstrata dos objetos e conceitos geométricos e a necessidade de que eles e as ações sobre eles se sustentem num universo pessoal de imagens mentais ricas e dinâmicas. A investigação tem mostrado (Jones & Tzekaki, 2016) que a visualização é um requisito para demonstrar e resolver problemas em geometria. Tanto as representações visuais como o processo pelo qual estas se desenvolvem são indispensáveis para a obtenção de soluções e para construção de demonstrações. No entanto, estes investigadores consideram que ainda são limitadas as pesquisas que relacionam a visualização com o desenvolvimento de processos criativos, muito embora afirmem que os AGD e o recurso a tecnologias digitais oferecem novas possibilidades para o estudo da visualização de objetos geométricos.

Estas orientações conduzem-nos naturalmente a encarar o professor, o principal responsável por orquestrar o ensino. Para isso retomo o modelo de van Hiele, pois uma das suas caraterísticas mais significativas é que ele se aplica a qualquer aprendente. Este aspeto explica a importância que este modelo tem tido na compreensão do desenvolvimento do raciocínio geométrico dos professores e tem influenciado muita da investigação sobre a sua formação neste domínio. É por isso que é adequado comparar a investigação sobre o conhecimento geométrico dos professores recorrendo aos mesmos referenciais usados para compreender o conhecimento geométrico dos estudantes. Jones e Tzekaki afirmam que, "com base nos mesmos referenciais, a investigação sobre o conhecimento dos professores sobre diferentes ideias geométricas tem vindo a apresentar baixos níveis de compreensão geométrica" (2016, p. 139). Para estes investigadores esta conclusão aponta para a necessidade de melhorar a formação de professores e de realizar estudos com propostas que incluam tarefas relevantes, software específico e exploração de abordagens de ensino.

DESAFIOS QUE SE COLOCAM HOJE À INVESTIGAÇÃO NO DOMÍNIO DA GEOMETRIA

Um das mais importantes áreas de investigação, tanto para a prática de ensino como para a produção de conhecimento, está no estudo dos processos que permitem aos estudantes avançar da sua estruturação espacial pessoal, idiossincrática e auto inventada, para a estruturação geométrica formal (Battista, 2008; Jones & Tzekaki, 2016). Este avanço deve ser encarado de forma progressivamente refinada, com uma orientação recursiva e adaptada à acessibilidade dos conceitos geométricos apropriados em cada momento.

De certo modo é como se encarássemos a aprendizagem da geometria como um caminho a percorrer, com duas vias lado a lado, a da estruturação espacial e a da estruturação geométrica na qual está incluída a estruturação lógico formal. As duas vias vão estabelecendo cada vez mais ligações entre si. A via da estruturação espacial é uma espécie de alicerce da estruturação geométrica. Não faz sentido que os conceitos geométricos formais, com uma forte natureza abstrata, sejam trabalhados sem uma sólida estruturação espacial.

Ao defender a acessibilidade conceptual como dependente de uma boa rede de estruturação dos conceitos, tanto espacial como geométrica, que progressivamente se vai complexificando, Michael Battista defende também a dependência das interações sociais que se estabelecem na sala de aula à medida que o ensino proporciona os andaimes para a construção dessa rede. É precisamente ao professor que compete proporcionar as condições para a construção dessa rede de estruturação.

Este investigador evidencia o interesse em conhecer os tipos de salas de aula que promovam a valorização, pelos estudantes, de justificações cada vez mais sofisticadas em geometria, bem como os processos sociais que ajudam a desenvolver esses progressos. E preconiza a necessidade de investigação sobre como os fatores afetivos estão relacionados com a aprendizagem da geometria, nomeadamente o interesse em saber qual o sentido que os estudantes dão às ideias comunicadas por outros quando estas ideias são discrepantes das suas próprias ideias ou, sendo consistentes com as suas, são expressas numa linguagem ou raciocínio diferentes.

Podemos concluir que a investigação tem proporcionado ideias e instrumentos poderosos para melhorar o ensino e aprendizagem em geometria e, simultaneamente, que há muito por estudar e conhecer neste domínio. Apesar de no nosso país a investigação neste âmbito não ser a mais relevante ao nível de doutoramentos e de projetos de investigação institucionais ou de grupos de investigadores, este domínio de estudo tem tido uma presença significativa em projetos e dissertações de mestrado realizadas em Portugal. Este facto indicia seguramente interesse neste domínio e um potencial de trabalho colaborativo entre professores de matemática e educadores matemáticos.

Todo o raciocínio espacial e muito do raciocínio geométrico não são exclusivos da Matemática e destaco a sua importância nas Artes Visuais. Importa evidenciar este aspeto no momento atual em que se discute a flexibilidade curricular e em que se desenham condições mais favoráveis para o desenvolvimento de projetos curriculares interdisciplinares. Matemática e Artes Visuais são seguramente uma boa aliança.

Para terminar convido-o a fechar os olhos. Durante uns minutos pense apenas em paralelepípedos procurando exaustivamente percorrer o seu banco pessoal de imagens. Depois procure na internet imagens do trabalho do escultor português José Pedro Croft e desafie um colega de Artes Visuais para realizar um projeto de geometria, seja com crianças do pré-escolar ou com alunos do ensino básico ou secundário.

Referências

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In Frank K. Lester, Jr. (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 843-908. NCTM.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry world. In Glendon W. Blume & M. Kathleen Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 - Cases and Perspetives,* (pp. 131-156). NCTM & IAP.

Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry.* London: The Open University.

Jones, K. & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* 109-149. 2016, Sense Publishers.

Malkevitch, J. (2009). What Is Geometry? In Timothy V. Craine e Rubenstien Rheta (Eds.), U*nderstanding Geometry for a Changing World. 71th NCTM Yearbook: 3-16.* Reston: NCTM.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children.* New York: Routledge.

Sfard, A & Cobb, P. (2014). Research in mathematics education: What can it teach us about human learning? In R. Keith Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences, Edition: Second.* pp. 545-564. DOI:10.1017/CBO9781139519526.033.

van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, fevereiro 1999, 5*(6), 310-316. NCTM.

Notas

* O título deste artigo coincide com o nome de um capítulo do Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, de 2007, da autoria de Michael Battista. Duas razões presidiram a esta escolha. A primeira é o reconhecimento de que raciocínio geométrico e espacial são indissociáveis, a segunda razão, mais afetiva, prende-se com a importância que reconheço às ideias deste educador matemático.

** Agradeço aos professores que, numa fase de finalização, leram este artigo e deram sugestões significativas para a sua melhoria.

Contributos da investigação para o ensino da Estatística e das Probabilidades

Ana Henriques
Hélia Oliveira

O modo como os alunos percecionam as suas experiências em Estatística, descrevendo-as muitas vezes como pessoalmente desinteressantes, revela que ainda não se verificaram mudanças significativas no modo como o ensino da Estatística e das Probabilidades é concretizado para permitir desenvolver as capacidades que são esperadas e que justificaram a inclusão desta área no currículo (Hedges & Harkness, 2017). Para nos adaptarmos com sucesso às mudanças sociais e tecnológicas que enfrentamos atualmente, é necessário encontrar formas de proporcionar aos alunos oportunidades de experienciar a prática da Estatística, a qual, por sua vez, ajuda-os a compreender o seu poder e utilidade e a tornar o seu estudo mais significativo.

Na educação estatística tem-se verificado um crescente recurso a simulações para ilustrar conceitos estatísticos e permitir aos alunos descobrirem por eles próprios importantes princípios, desenvolvendo igualmente o seu raciocínio estatístico (Lane & Peres, 2006). De facto, a disponibilidade generalizada da tecnologia, em particular a educacional, tem tornado a maioria das simulações de livre e fácil acesso.

Neste texto centramo-nos na simulação e o seu potencial para o ensino da Estatística e das Probabilidades, em particular no que respeita ao raciocínio estatístico dos alunos. Apresentamos dois exemplos que informam a utilização de simulações no ensino e aprendizagem de importantes ideias estatísticas que a investigação em educação estatística tem vindo a defender, os quais envolvem, especificamente, as ideias de variabilidade, amostragem, representações, distribuições, aleatoriedade e probabilidade.

RACIOCÍNIO SOBRE DISTRIBUIÇÕES E AMOSTRAGEM

A comparação de distribuições tem sido apontada na investigação como uma atividade de enorme importância no ensino da Estatística pelo facto de incorporar noções basilares como a de dados, variabilidade e distribuição (Biehler, Frischemeier, Reading & Shaughnessy, 2018). De facto, problemas que requerem a comparação de distribuições para dois ou mais grupos são comuns em Estatística e constituem uma oportunidade de os alunos poderem experimentar, pelo menos parcialmente, o processo de investigação estatística. Nessa atividade, é fundamental que os alunos compreendam o papel da amostragem e sejam sensíveis a aspetos relacionados com a variabilidade nos dados, passando a vê-los não como casos isolados, mas como agregados. Para tal há necessidade de pensar em contextos ricos que estimulem os alunos a desenvolver o seu raciocínio em torno dessas noções, tal como procuramos ilustrar em seguida.

Uma experiência com peixes

A tarefa *Uma experiência com peixes* (Oliveira & Henriques, 2015) parte de uma situação hipotética, enquadrada numa atividade humana (figura 1), para levar os alunos a raciocinarem sobre distribuições e amostragem ao compararem dois grupos, a partir de amostras de diferentes dimensões geradas por simulação. Para responderem à questão inicial colocada, os alunos têm de compreender aspetos importantes de uma investigação estatística, como a necessidade de dados e os fatores que podem afetar a precisão das suas inferências. Com esta tarefa pretende-se que os alunos aprofundem as noções de distribuição e variabilidade, em particular a variabilidade que resulta do processo de amostragem, apoiados num software para trabalhar com dados estatísticos (*TinkerPlots*™).

Esta tarefa foi realizada por alunos de duas turmas do 8.º ano, de duas escolas, após terem abordado o tema da amostragem, constituindo uma oportunidade de estes aprofundarem as suas ideias sobre este tópico.

> Um aquicultor tem abastecido os seus tanques-rede com um novo tipo de peixe, geneticamente modificado, fornecido por uma empresa que lhe assegurou que "o**s peixes geneticamente modificados, ao crescerem, atingem o dobro do comprimento dos peixes normais**".
> Pensas que o aquicultor pode confiar na afirmação da empresa? O que deverá ele fazer para verificar a sua veracidade?

Figura 1. Tarefa *Uma experiência com peixes* (Oliveira & Henriques, 2015)

Numa primeira fase, os alunos foram levados a pensar sobre como proceder para obter as evidências necessárias para responder à questão inicial, de modo a sensibilizá-los para a importância de averiguar a veracidade de determinadas afirmações através da exploração de dados recolhidos com esse propósito. O grande objetivo é levar os alunos a perceber como planear uma experiência estatística que permita obter evidências necessárias para verificar a veracidade da afirmação com base em dados, discutindo aspetos como: que dados são necessários e como proceder à sua recolha (onde se incluem questões relacionadas com a amostragem e os fatores que a podem afetar).

Diversos alunos afirmam a necessidade de obter informação estatística, associada às ideias de amostra, como referem Miguel e Pedro (figura 2), ou à realização de um teste, como é apontado por António (figura 3), que permita avaliar se os peixes geneticamente modificados atingem o dobro do comprimento dos peixes normais. É curioso verificar que António, tal como outros alunos destas duas turmas, parece sensível à necessidade de garantir que os dois tipos de peixe cresçam sob as mesmas condições.

Pensas que o aquicultor pode confiar na afirmação da empresa? O que deverá ele fazer para verificar a sua veracidade? Não, devia confiar. Ele devia pedir uma estatística de uma amostra um ~~um~~ ~~esperimento~~ esperimento feito pela empresa.

Figura 2. Resolução de Miguel e Pedro da Q1

Pensas que o aquicultor pode confiar na afirmação da empresa? O que deverá ele fazer para verificar a sua veracidade? O ~~Aquiustor~~ Aquicultor não podo dizer que afirmação da empresa é boa. Sem primeiro fazer um teste. Para verificar se a afirmação é real tem de juntar os peixes novos com os peixes modificados.

Figura 3. Resolução de António da Q1

De modo a garantir que todos os alunos compreendiam plenamente a situação, e se apropriavam do processo de amostragem, antes de iniciarem o trabalho no software, foi feita uma simulação com "cartões-peixe" (n=625), em papel. Cada cartão indicava o tipo de peixe de que se tratava (normal ou geneticamente modificado) e o respetivo comprimento. A professora fez a simulação, em grande grupo, com cada aluno a 'pescar', de um saco, um cartão-peixe, e registando o respetivo comprimento no quadro, numa representação gráfica semelhante à que surge na Parte I da tarefa (figura 4).

Este é um momento que pretende levar os alunos a ponderar sobre a necessidade de medir todos os peixes, o que seria muito demorado e dispendioso, ou optar por uma amostra que seja representativa da população, ou seja, através de uma amostra aleatória, tal como simularam. Os alunos geralmente têm opiniões muito diversas sobre a dimensão dessa amostra, o que representa uma boa oportunidade para discutir com eles que esta dimensão depende mais da variabilidade da população subjacente (no limite, se todos os peixes fossem iguais bastaria recolher um) do que da dimensão da população a estudar.

A partir da representação gráfica, os alunos podem obter um conjunto de informações que permita a comparação dos dois grupos de peixes. Analisando as respetivas distribuições, podem atender, por exemplo, aos valores mínimos e máximos, concentração/dispersão de valores, valores centrais ou a forma da distribuição como um todo, variabilidade dos dados e a aleatoriedade do processo.

Na parte II da tarefa (figura 5), os alunos tiveram oportunidade de continuar a discussão sobre a variabilidade e representatividade das amostras, através da simulação da recolha de amostras de dimensão crescente, com o *software TinkerPlots*™, para a população que tinham considerado na parte I da tarefa. Uma das representações mais úteis para comparar distribuições de dados numéricos é o diagrama de extremos e quartis, uma vez que tal análise exige que sejam tomadas em linha de conta as características globais de cada distribuição (centro, dispersão e forma). Assim, para cada amostra simulada, os alunos analisaram a sua distribuição através da construção de diagramas de extremos e quartis focando-se na média, mediana e amplitude interquartil para cada tipo de peixe, para poderem responder à questão inicial.

1. Simula amostras de dimensão 25, 50 e 100. Para cada uma delas, constrói um diagrama de extremos e quartis e regista, numa tabela, algumas das medidas estatísticas que calculaste.

2. Com base na informação obtida, compara as distribuições obtidas para as várias amostras e responde à questão inicial. Apresenta argumentos para justificar a tua resposta que possam ajudar o aquicultor a decidir se deve manter este negócio com a empresa fornecedora.

Figura 5. Parte II da tarefa

Com a análise das diferentes amostras recolhidas aleatoriamente da mesma população, os alunos podem perceber a sua variabilidade e também que estas, geralmente, apresentam características semelhantes às da população, em particular as caraterísticas associadas ao centro da distribuição. Eles têm agora condições de usar argumentos estatísticos para fundamentar a resposta à questão inicial da tarefa.

Através das suas respostas pode depreender-se que olham para os dados como um agregado, não se centrando nos casos isolados o que poderia levá-los a afirmar que os peixes geneticamente modificados não tinham comprimento superior aos normais "porque há alguns peixes 'normais' que são maiores" (figura 6).

1. O aquicultor decidiu criar num tanque cerca de 625 peixes, alguns de tipo normal e outros geneticamente modificados. Quando os peixes estavam completamente desenvolvidos (fase adulta), o aquicultor identificou e mediu o comprimento de cada um deles. Na tua experiência, estes peixes são simulados por pequenos cartões (cartões-peixe), com a indicação do seu tipo (normal ou geneticamente modificado) e do seu comprimento (em centímetros).

2. Regista abaixo os dados (tipo e comprimento do peixe) relativos a um conjunto de 25 cartões-peixe que a turma 'pescou'.

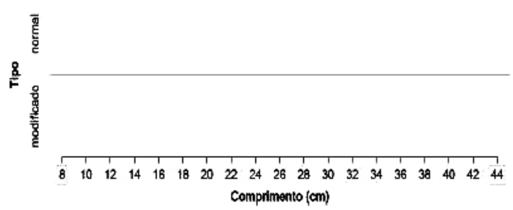


Figura 4. Questões 1 e 2 da parte I

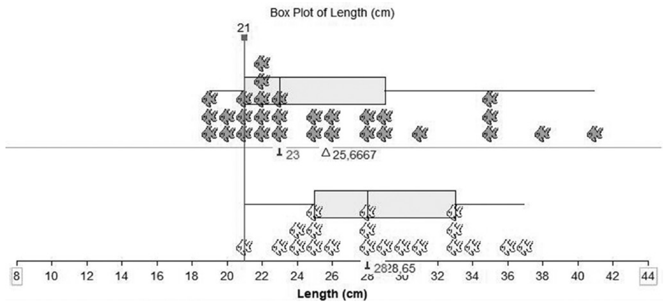


Figura 6. Diagrama de extremos e quartis por Carolina

Embora os alunos tivessem obtido os valores da média e da mediana de cada distribuição, no computador, o grupo Andreia e Gil foi um dos poucos que usou essas medidas na sua resposta à questão 2. O grupo evocou a média na comparação dos dois grupos de peixes, considerando que o aquicultor ainda teria a ganhar com o negócio pelo facto de a média do comprimento dos peixes geneticamente modificados ser superior à dos peixes normais (figura 7). Tal afirmação é corroborada pelos valores da média obtidos para as três amostras crescentes que registaram diretamente numa caixa de texto no *TinkerPlots*™.

Achamos que o aquicultor deve manter o negócio com a empresa fornecedora pois a média do comprimento dos peixes geneticamente modificados é maior do que a dos normais.

Figura 7. Resolução de Andreia e Gil da Q2 da parte II

Verificou-se, nestas turmas, uma tendência dos alunos para se focarem na amplitude interquartil para fundamentar as suas respostas, com base no que observam no diagrama, possivelmente também influenciados pelo pedido de cálculo da amplitude interquartil que é feito na tarefa. Por exemplo, Miguel e Pedro apenas se referem ao intervalo interquartil para cada grupo de peixes, a que associam, erroneamente, uma noção de "média" (figura 8). Não explicam como concluíram que o comprimento dos peixes geneticamente modificados não é o dobro do dos outros, mas ainda assim consideram que o primeiro grupo tem um tamanho superior e que o negócio pode ser vantajoso para o aquicultor.

Verifica-se, pois, que os alunos não retiraram toda a informação relevante dos vários diagramas de extremos e quartis que construíram, o que denota a complexidade associada a esta representação. Embora não sendo possível perceber como interpretam as duas distribuições, verifica-se que encontraram uma forma de acomodar a variabilidade dentro de cada grupo que permite comparar os dois grupos (ainda que com bastantes limitações), de forma a dar resposta à questão desafiante que a tarefa lhes colocou.

Com esta proposta realizada no 8.º ano pretendemos ilustrar algumas das ideias que a investigação realça como sendo as grandes apostas a considerar na educação estatística dos jovens:

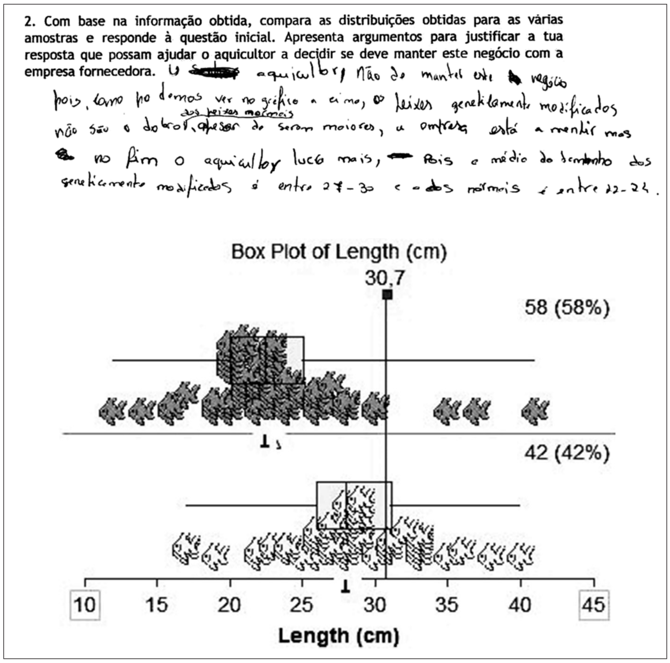


Figura 8. Resolução de Pedro e Miguel da Q2 da parte II

– *Promover o raciocínio estatístico* é o objetivo principal a considerar no ensino da Estatística. Num momento em que, a partir da atividade de qualquer cidadão, são geradas enormes quantidades dados e em que estes são usados para controlar e influenciar a sociedade, é fundamental que os jovens desenvolvam a capacidade não só de interpretar e avaliar criticamente a informação estatística, mas também de tomar decisões com base nessa informação.
– *A realização de investigações estatísticas* pelos alunos contribui quer para a compreensão da Estatística como um processo investigativo para resolver problemas reais quer para explorar ideias chave deste domínio do conhecimento. Para que tal aconteça, é necessário conceder oportunidades aos alunos para experimentarem tais processos, de um modo significativo, nomeadamente, explorando o processo de amostragem.
– O ensino da estatística tem sido fortemente influenciado por abordagens vinculadas à causalidade e ao determinismo, que resultam numa tendência de não reconhecer *o papel crítico da variabilidade no raciocínio estatístico (*Meletiou-Mavrotheris & Stylianou, 2003). É importante que os alunos experienciem a omnipresença da variabilidade e que valorizem as ferramentas estatísticas como meio para descrever e quantificar essa variabilidade, ajudando-os a ter uma visão mais global da estatística (Moore, 1997).
– *O raciocínio sobre distribuições,* nomeadamente na comparação de grupos, é uma atividade central na estatística e que os alunos também podem desenvolver, a partir de contextos a que possam atribuir significado e recorrendo a *representações adequadas e poderosas.*
– Uma vez que o trabalho na Estatística *envolve lidar com conjuntos alargados de dados*, o ensino deve proporcionar também essa experiência aos alunos. *O recurso à simulação,* nomeadamente tirando partido de diversas ferramentas

tecnológicas ao nosso dispor, pode constituir um importante apoio ao raciocínio do aluno.

RACIOCÍNIO PROBABILÍSTICO

É muito comum confrontarmo-nos com situações em que podemos encontrar a probabilidade de um acontecimento recorrendo à regra de Laplace. Por exemplo, escolher uma carta de um baralho, dá-nos uma chance de 1/52 de obter uma carta específica, não importa que carta tenhamos escolhido. No entanto, esta forma de proceder não é adequada para encontrar probabilidades relativas à maioria das situações de vida real, sendo exigido algo mais complexo do que a teoria clássica de Probabilidade para os resolver.

Para além disso, são amplamente reconhecidas as dificuldades que alunos e adultos enfrentam quando raciocinam sobre acontecimentos envolvendo acaso e incerteza, cometendo erros sistemáticos e persistentes na tentativa de tomar decisões sobre eles e evidenciando crenças, por exemplo sobre o lançamento de dados, do tipo 'não sai muitas vezes um seis, por isso o seis deve ser difícil de obter'. Pelo contrário, os jogadores experientes frequentemente aceitam que cada resultado é igualmente provável, pois a observação dos resultados obtidos em anos de experiência de lançamento de dados, moedas ou jogos de cartas confirmam-no (Batanero, Chernoff, Engel, Lee, & Sánchez, 2016).

Esta situação põe em evidência a necessidade de contrariar a excessiva ênfase que é dada no ensino à conceção clássica de probabilidade através da exploração dos seus diferentes significados e das relações que se podem estabelecer entre eles através de simulações, cenário que ilustramos com base na tarefa *lançamento de uma moeda.*

Lançamento de uma moeda: um exemplo

Esta tarefa foi realizada com alunos de 15 e 16 anos de uma turma numa escola da Costa Rica (Ramírez Montes, 2017). Estes alunos têm um bom desempenho académico, o que se refletiu ao longo do trabalho nas tarefas propostas em sala de aula, sendo ativos e empenhados nos desafios propostos pelo investigador.

A tarefa, que integra uma sequência de cinco tarefas construídas e realizadas para trabalhar os conceitos básicos de Probabilidade, visa introduzir o significado de probabilidade frequencista através de uma abordagem experimental, com recurso ao *Geogebra* como ferramenta de simulação, levando os alunos a inferir a lei dos grandes números e a utilizar este significado para determinar probabilidades e identificar equiprobabilidade de acontecimentos. No entanto, para uma boa compreensão de probabilidade em situações reais, é fundamental o confronto entre resultados teóricos e experimentais e, como tal, a abordagem frequencista não deve ser usada isoladamente. Assim, a tarefa também explora a articulação entre os significados clássico e frequencista de probabilidade e aborda conceitos e propriedades importantes (como aleatoriedade, variabilidade e dimensão da amostra) que podem promover o desenvolvimento do raciocínio probabilístico dos alunos e a compreensão do papel dos modelos na previsão da incerteza e da aleatoriedade.

Na introdução da tarefa, tal como mostra a figura 9, os alunos são solicitados a responderem a duas breves questões, antes de realizarem a simulação do lançamento de uma moeda. Nesta fase inicial não é dado nenhum feedback às respostas dos alunos, remetendo a sua discussão para o final da tarefa. Os alunos poderiam responder com base nas suas conceções ou experiências prévias mas, considerando que o modelo envolvido é simples e baseado em resultados igualmente prováveis (assumindo que a moeda é equilibrada), estes foram capazes de afirmar que quando uma moeda é lançada, deve sair metade das vezes cara e outra metade coroa, resultado do modelo de probabilidade clássico que já lhes foi ensinado neste nível de ensino, permitindo o confronto entre resultados teóricos e experimentais na segunda parte da tarefa. Neste caso, os alunos não evidenciaram dificuldades para calcular probabilidades por meio da regra de Laplace, nem para interpretar que esta probabilidade pode representar-se como uma fração ou percentagem.

Lançamento de uma moeda

Nesta tarefa tens a oportunidade de realizar uma experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda ao ar para calcular a probabilidade do acontecimento: "obter coroa ao lançar a moeda".
a) Se lançares uma moeda ao ar, que resultados esperas obter?
b) Qual a probabilidade dos acontecimentos:
A: obter coroa ao lançar a moeda.
B: obter cara ao lançar a moeda.

Figura 9. Introdução da tarefa *Lançamento de uma moeda*

A seguir, na parte I da tarefa (figura 10), propõe-se aos alunos uma observação e reflexão sobre o que acontece com as frequências de um acontecimento quando se repete muitas vezes uma experiência. São fornecidas instruções iniciais sobre como realizar uma simulação com a *applet* do *Geogebra*, mas não como a usar para descobrir as respostas.

A questão começa com uma moeda desconhecida, pelo que não se sabe se é equilibrada ou não. Alguns alunos revelam conhecer a regra de Laplace no início da tarefa, mas não refletem sobre a validade da sua aplicação manifestando a crença que a equiprobabilidade está sempre presente nos acontecimentos elementares e que a podem aplicar no lançamento de uma moeda, como evidencia a resolução seguinte (figura 11) de Enrique e Ricardo à alínea a) da questão1 da tarefa.

Mas a procura da resposta pretende-se experimental, pois os alunos podem examinar os dados resultantes do lançamento da moeda para decidirem se provêm de uma moeda equilibrada ou enviesada, associando a equiprobabilidade ao primeiro caso. Existem várias abordagens possíveis, incluindo lançar a moeda 5 ou 10 vezes, registar o número de caras e coroas e depois repetir

PARTE I

Abre o arquivo do *Geogebra* com nome *Lançamento de uma moeda*. Ao abrir o arquivo encontrarás diversos objetos que simulam a experiência de lançamento de uma moeda. (...) Tens agora a oportunidade de simular o lançamento da moeda.

1. Experimenta realizar várias simulações usando distintos valores de n (número de lançamentos sucessivos da moeda), clicando no botão *VariarQuantidadeDeLançamentos*, e observa o comportamento da frequência relativa dos resultados obtidos em cada simulação. Regista cada valor na folha *Registo de dados*.

Os acontecimentos sair cara e sair coroa são equiprováveis? Justifica.

b) A que valor se aproximam ou tendem as frequências relativas dos acontecimentos sair coroa e sair cara à medida que aumenta o número de lançamentos ?

Figura 10. Parte I da tarefa *Lançamento de uma moeda*

Si, porque los dos tienen la misma probabilidad de salir

[sim, porque os dois têm a mesma probabilidade de sair]

Figura 11. Resolução de Enrique e Ricardo da alínea a) da Q1

várias vezes a experiência para outro número de lançamentos. Ao compilar as frequências dos resultados, os alunos observam que quando lançam uma moeda 10 vezes, como no exemplo da figura 12, podem não obter o mesmo número (metade) de caras e coroas e que os resultados variam de aluno para aluno. No entanto, se lançarem um grande número de vezes, observam que os resultados irão começar a estabilizar para as probabilidades esperadas de 0,5 para cara e coroa (figura 12) levando-os a desenvolver interpretações de frequência relativa e a inferirem a lei dos grandes números.

A simulação do lançamento da moeda é uma experiência que produz resultados aleatórios, na qual existe sempre a incerteza de como a moeda irá cair num próximo lançamento. Observar que se o resultado de um lançamento de uma moeda é cara isso não significa que no próximo irão obter coroa, dada a natureza aleatória da experiência, favorece também o desenvolvimento do conceito de aleatoriedade. Portanto, ao observarem o que acontece num grande número de lançamentos, os alunos começam a desenvolver a noção de que embora haja incerteza e variabilidade nos resultados, estas podem ser quantificadas usando probabilidades.

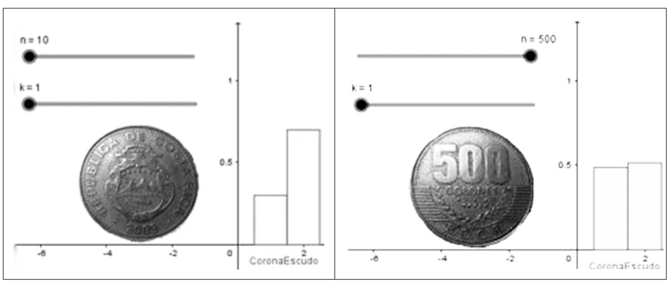


Figura 12. Simulação do lançamento de uma moeda n vezes (n=10 e n=500)

A segunda parte da tarefa (figura 13) tem o propósito de explorar as conexões entre as interpretações frequencista e clássica de Probabilidade, levando os alunos a reconhecer a variabilidade nos resultados e um padrão de tendência das frequências, estabelecendo uma relação entre o número de lançamentos da moeda e a estabilidade das frequências relativas, base para fazer boas estimações da probabilidade. É importante que os alunos compreendam que cada resultado é imprevisível e que a regularidade é apenas alcançada após um grande número de lançamentos.

PARTE II

1. A partir dos dados registados, que relação observas no comportamento dos valores das frequências obtidas na questão anterior para os acontecimentos sair coroa e sair cara à medida que o número de lançamentos aumenta, a respeito do valor da probabilidade que definiste na parte introdutória desta tarefa?

2. Com base na resposta anterior, que relação podes estabelecer entre a probabilidade teórica e a frequência relativa de um acontecimento depois de se realizar uma quantidade "grande" de n simulações de uma experiencia aleatória envolvendo acontecimentos elementares equiprováveis?

Figura 13. Parte II da tarefa *Lançamento de uma moeda*

A partir das simulações realizadas, os alunos desenvolvem a noção que quanto mais vezes se repetir um fenómeno aleatório mais próximos os resultados estarão do modelo matemático esperado (figuras 14 e 15), tendo sido capazes de inferir corretamente a lei dos grandes números como limite das frequências que tende para a probabilidade teórica ou clássica.

Los valores se mantienen entre 40-60%. Mientras aumenta la cantidad de lanzamientos, más cercana a 50% se vuelve la frecuencia.

[Os valores mantêm-se entre 40% e 60%. Quanto mais aumenta a quantidade de lançamentos mais perto de 50% está a frequência]

Figura 14. Resolução de Afonso e Leonardo da Q1, parte II

En una cantidad grande de ensayos, la frecuencia de los eventos va a ser muy parecida a la probabilidad teórica.

[Numa quantidade grande de ensaios, a frequência dos acontecimentos vai ser muito parecida à probabilidade teórica]

Figura 15. Resolução de António e Marcos da Q2, parte II

Esta tarefa, e os breves excertos que apresentámos do trabalho dos alunos na sua resolução, permitem exemplificar o que a investigação tem vindo a defender para o ensino da Probabilidade, contribuindo para desenvolver nos alunos uma maior intuição e o seu raciocínio probabilístico, o qual é visto como relevante para a tomada de decisões na vida real por se referir a julgamentos e tomada de decisão sob incerteza.

– A aprendizagem da Probabilidade envolve um raciocínio "distinto do lógico-determinista que é característico de outras áreas da Matemática" (Sánchez & Valdez, 2017, p. 128), não sendo favorável um ensino que enfatize a conceção clássica de probabilidade sem atender *à sua articulação com outras conceções*, como a frequencista.

- A Probabilidade é vista como ferramenta essencial na Estatística, o que requer *diferentes abordagens* e tipos de raciocínio. Por isso, deve ser introduzida de duas formas; como um valor teórico do grau de confiança que podemos atribuir a um resultado ou pode ser definida após a observação da frequência relativa.
- - A evolução do ensino através de atividades experimentais, a crescente atenção dada à análise de dados e o desenvolvimento de *software* educativo com capacidades dinâmicas (por exemplo, *Applets*, *Geogebra* ou *TinkerPlots*™), permitiu a *introdução experimental da noção de probabilidade* baseada em observações do fenómeno de estabilização de frequências relativas de um evento associado a uma experiência aleatória (Chaput et al., 2011).
- O *método de simulação* constitui uma boa forma de introduzir a Probabilidade, desde os níveis mais elementares, destacando-se o seu potencial para explorar os seus distintos significados e raciocínios mais intuitivos, evitando que os alunos consolidem ideias erradas (Batanero et al., 2016). Este processo também permite explorar importantes conceitos e propriedades (por exemplo, aleatoriedade, variabilidade, tamanho da amostra, lei dos grandes números) que são de difícil compreensão para os alunos mas que podem ajudá-los a desenvolver o seu raciocínio probabilístico e a compreender o papel dos modelos na previsão da incerteza e da aleatoriedade.
- Embora o recurso à simulação possa tornar a aprendizagem mais fácil e divertida, deve evitar-se o uso de simulações em que os alunos sejam observadores passivos ou tenham acesso a uma simulação sem lhes fornecer estrutura suficiente para descobrirem eles próprios os princípios importantes. Uma abordagem em que os *alunos são questionados* antes de interagir com a simulação e depois usam-na para confirmar as suas respostas parece ser efetiva nas suas aprendizagens (Lane & Peres, 2006).
- Um cenário promissor para ir ao encontro da necessidade de aprofundar o ensino da Probabilidade é enfatizar os seus diferentes significados, explorando o raciocínio ligado às conexões entre a probabilidade teórica e a estimação frequencista da probabilidade num ambiente de modelação através de simulação, que surge como o elemento integrador de propostas desta natureza (Batanero et al., 2016; Chaput et al., 2011).

A TERMINAR

Os exemplos aqui apresentados espelham intencionalidades na construção de tarefas que decorrem de resultados da investigação, tendo sido elas próprias aplicadas na sala de aula, com o objetivo de compreender em que medida promovem o raciocínio dos alunos e assim refletir sobre a sua adequabilidade à realidade escolar. Como vimos, estes alunos revelaram diversas dificuldades, mas não se pode esperar um caminho linear para o desenvolvimento de capacidades cognitivas de nível superior, como é o caso do raciocínio estatístico, especialmente quando estas não são valorizadas, de um modo consistente, ao longo da escolaridade. Levantam-se muitos desafios à investigação e, principalmente, ao professor no seu dia a dia, contudo, pequenos passos positivos devem motivar-nos a trabalhar em conjunto para que estes possam multiplicar-se e, assim, tornar mais significativas as experiências dos nossos alunos no campo da estatística.

Referências

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability,* ICME-13 Topical Surveys. DOI 10.1007/978-3-319-31625-3_1

Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2018). Reasoning about data. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp.139-192). Springer. DOI 10.1007/978-3-319-66195-7

Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 85–95). New York: Springer.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., et al. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria. VA: American Statistical Association. http://www.amstat.org/ Education/gaise/.

Hedges & Harkness (2017). Is GAISE evident? college students' perceptions of statistics classes as "almost not math". *Statistics Education Research Journal,* 16(1), 337-356. http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ.

Lane D. M. & Peres S. C. (2006). Interactive simulations in the teaching of statistics: Promise and pitfalls. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics [CD-ROM].* Voorburg: International Statistical Institute.

Meletiou-Mavrotheris, M., & Stylianou, D. (2003). On the formalist view of mathematics: Impact on statistics instruction and learning. *Proceedings of Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Available at http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG5/papers_doc/TG5-Meletiou.doc.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: the case of Statistics. *International Statistical Review,* 65(2), 123-165.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Oliveira, H., & Henriques, A. (2015). *Raciocínio estatístico com tecnologia: Propostas para o ensino básico.* Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (ISBN: 978-989-8753-17-5)

Sánchez, E., & Valdez, J.C. (2017). Las ideas fundamentales de probabilidad en el razonamiento de estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 711, 127 – 143.

Ramírez Montes, G. (2017). *A aprendizagem dos conceitos básicos de Probabilidade com recurso ao Geogebra: um estudo com alunos da Costa Rica* (Dissertação de mestrado). Universidade de Lisboa, Portugal.

Ana Henriques
Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

A aprendizagem da Álgebra: resultados de estudos portugueses

João Pedro da Ponte

Nos últimos anos tem vindo a perceber-se que, para além dos aspetos gerais relativos à aprendizagem da Matemática, é necessário compreender os aspetos específicos relacionados com a aprendizagem em campos específicos como a Geometria, a Álgebra, a Estatística e as Probabilidades. Cada um destes campos envolve processos de trabalho e dificuldades próprias por parte dos alunos. Este artigo apresenta resultados de alguns estudos realizados em Portugal sobre Álgebra, procurando dar conta da diversidade dos trabalhos realizados e das suas implicações para o processo de ensino-aprendizagem.

A Álgebra é um campo da Matemática que se apoia em duas ideias fundamentais: a noção de variável como entidade abstrata que pode ser representada de várias formas (simbólicas e não simbólicas) e a noção de estrutura envolvendo relações, operações e suas propriedades. Uma ideia também fundamental, que se apoia nas anteriores, é a possibilidade de expressar afirmações gerais ("generalizações") sobre as estruturas matemáticas com recurso à noção de variável.

SEQUÊNCIAS

Uma perspetiva que emergiu nos últimos anos é que o pensamento algébrico pode (e deve) desenvolver-se desde o início da escolaridade, mesmo sem o uso de uma linguagem simbólica. É o que em inglês se designa por "*early algebra*". Neste campo, assume grande destaque o trabalho com sequências. As sequências são disposições de objetos, usualmente em número infinito, que seguem (ou não) um determinado padrão. Os objetos podem ser números (sequências numéricas), figuras geométricas, configurações pontuais ou quaisquer outras figuras (sequências pictóricas).

A propósito das sequências podem colocar-se numerosas questões, como encontrar o objeto seguinte, um objeto distante, uma lei geral de formação ou decidir se um certo objeto integra ou não a sequência. Ana Morais (2012) realizou uma experiência de ensino para estudar o modo de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 2.º ano, dando especial atenção às capacidades de representação e generalização. A experiência decorreu na sala de aula, com a participação de toda a turma com base em sete tarefas envolvendo sequências pictóricas repetitivas e crescentes. A maioria dos alunos mostrou facilidade em continuar as sequências repetitivas. Conseguiram também estabelecer generalizações nas sequências crescentes (encontrando termos próximos, termos distantes e leis gerais de formação) utilizando diversas estratégias como a representação e contagem, a estratégia aditiva e até a estratégia mais sofisticada de decomposição dos termos (figura 1). De um modo geral, os alunos recorreram a representações informais por eles criadas e à linguagem natural, mas também usaram representações mais formais, coordenando as sequências dadas com a sequência dos números naturais.

Observem a sequência e descubram como será a figura seguinte. Quantos círculos tem?

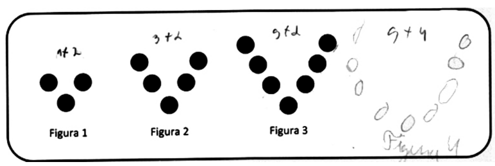


Figura 1. Sequências no 2.º ano de escolaridade - Representação da "sequência em v" feita pelo aluno Frederico (Morais, 2012)

Apesar de algumas dificuldades que, por vezes, os alunos manifestaram, os resultados indicam que a experiência de ensino contribuiu para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico, dando sustentação à conjetura de ensino-aprendizagem segundo a qual os alunos desenvolvem as suas capacidades de representação e generalização realizando tarefas de cunho exploratório, interagindo em pequenos grupos e em coletivo e utilizando diferentes representações matemáticas.

Um importante tipo de sequências são as sequências pictóricas, que dão origem a padrões visuais. Num outro estudo realizado com duas turmas do 6.º ano, Ana Barbosa (2009), deu especial atenção ao modo como alunos resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões nestas sequências. A comparação dos resultados pré-teste/pós-teste mostra que o trabalho com padrões visuais promoveu uma evolução significativa no desempenho dos alunos e na sua capacidade de generalização. Os alunos mostraram-se capazes de usar diversas estratégias de generalização visuais embora, por vezes, quando se pediam valores distantes, usassem estratégias aditivas e formulassem generalizações aritméticas. A visualização foi especialmente útil para analisar a estrutura de um padrão como uma configuração de objetos relacionados entre si por uma dada propriedade.

O trabalho em contextos puramente numéricos conduziu a alguns erros, como a combinação de variáveis diferentes ou a utilização indevida da proporcionalidade direta mostrando a tendência dos alunos para usar processos sem compreender muito bem o seu significado. Como seria de esperar, as tarefas envolvendo padrões não-lineares mostraram-se bastante mais difíceis do que as que envolviam padrões lineares. O estudo mostrou ainda dificuldades por parte dos alunos no uso da linguagem para descrever leis de formação, apoiando-se frequentemente em casos particulares.

As sequências são objetos matemáticos de cunho eminentemente algébrico, uma vez que, no fundo, são funções de variável natural. Estes e outros estudos mostram que o trabalho com sequências tem grandes potencialidades para promover a capacidade de generalização dos alunos e também para os levar a trabalhar com diversas representações matemáticas, relacionando representações ativas (objetos, movimentos do corpo como "contar pelos dedos"), icónicas (figuras, diagramas) e simbólicas (em notação matemática e também em linguagem verbal).

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Um outro campo importante do pensamento algébrico que é importante considerar no 1.º ciclo tem a ver com o raciocínio relacional, que envolve o trabalho com diferentes tipos de relações (como a igualdade e a desigualdade) e propriedades de relações e operações (como as propriedades comutativa, associativa e distributiva).

Os alunos mostram capacidade de realizar raciocínio relacional quando conseguem resolver tarefas recorrendo a estas propriedades e sem efetuar os cálculos indicados. Raquel Cerca (2014) estudou o desenvolvimento do pensamento relacional, através de relações de igualdade e desigualdade, em alunos do 3.º ano, seguindo uma abordagem de cunho exploratório. O estudo deu atenção não só aos processos de generalização, mas também aos processos de justificação, outra faceta importante do raciocínio matemático. A sua experiência de ensino deu especial atenção à interpretação do sinal de igual e dos símbolos de maior e menor, a partir de tarefas envolvendo expressões numéricas. Muito importantes foram também os momentos de discussão coletiva em que os alunos apresentavam e justificavam as suas ideias.

Os resultados mostram que os alunos melhoraram a sua compreensão das relações de igualdade e desigualdade. As estratégias dos alunos mostram muitos exemplos de raciocínio relacional, sem recorrer a cálculos para determinar a relação existente entre duas expressões (figura 2). No entanto, como se esperaria, os alunos mostraram alguma dificuldade em justificar as suas ideias a não ser recorrendo a exemplos concretos. As generalizações que surgiram foram desenvolvidas, na maior parte dos casos, no momento de discussão coletiva e com alguma orientação da professora. A dinâmica de trabalho criada de sala de aula revelou ser muito importante para o desenvolvimento do raciocínio relacional.

Algumas das expressões apresentadas não são verdadeiras. Descobre quais são, sem recorreres a cálculos.

Figura 2. Pensamento relacional - Resolução da aluna Rafaela (Cerca, 2014)

A capacidade de generalização constitui, como vimos, um aspeto fundamental do pensamento algébrico. Num outro estudo, Célia Mestre (2014) procurou compreender como se desenvolve esta capacidade nos alunos do 4.º ano no decurso de uma experiência de ensino na sala de aula ao longo de um ano letivo. Esta experiência tinha por base uma perspetiva de pensamento algébrico que considera a generalização e a sua representação como aspetos centrais, valorizando os contextos que envolviam estruturas algébricas e sequências. O trabalho na sala de aula assumiu uma perspetiva de construção do conhecimento matemático baseada na interação e no diálogo e seguiu uma abordagem exploratória, com destaque para os momentos de discussão coletiva.

Os resultados mostram que a capacidade de generalização dos alunos evoluíu no sentido da mudança de atenção de casos particulares para casos gerais, com progressiva apropriação da representação simbólica e cada vez menor dependência do contexto específico da situação. Verificou-se ainda uma forte interdependência entre o trabalho com sequências e estruturas algébricas, tendo a exploração da variação de quantidades conduzido ao desenvolvimento da noção de variável e da relação de dependência entre variáveis.

Uma estrutura algébrica particularmente importante é a proporcionalidade direta, um tópico fundamental dos programas escolares. Ana Isabel Silvestre (2012) estudou o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano, no quadro de uma unidade de ensino de natureza exploratória. Em vez de ensinar a "regra de três" para usar na resolução de problemas, explorou a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e o uso de diversas representações, com destaque para as tabelas de razão (figura 3).

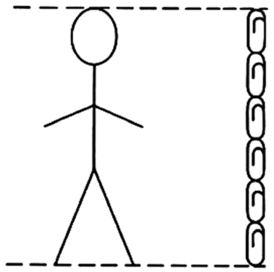
Este estudo mostra que os alunos melhoraram a sua capacidade de distinguir relações de proporcionalidade direta de outras que não o são, embora ainda mostrassem algumas dificuldades após a unidade de ensino, e apropriaram-se facilmente da representação em tabela de razão. Mostra também que, inicialmente, os alunos usavam com frequência estratégias não proporcionais e pré-proporcionais na resolução de problemas de valor omisso. Durante a unidade de ensino e no seu final os alunos revelam tendência para usar estratégias proporcionais, pelo que esta parece ter dado um contributo importante para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos.

Sr. Alto e Sr. Baixo

Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clipes. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto.

Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.

Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto?



×1,5

Baixo	4	6
Alto	6	9
	fósforos	clipes

×1,5

R: São necessárias para medir o Sr. Alto 9 clipes

Figura 3. Problema do Sr. Alto e Sr. Baixo (proporcionalidade) - Resposta da aluna Célia, no teste final (Silvestre, 2012)

Estes estudos mostram que os alunos têm capacidade de desenvolver o seu raciocínio relacional, incluindo o raciocínio proporcional, estabelecendo relações e usando as suas propriedades para realizar generalizações e justificações. Esse desenvolvimento está ligado não só à escolha cuidadosa de tarefas tendo em vista os conceitos visados e ao uso de representações apropriadas, mas também aos modos de trabalho de sala de aula, onde se destaca uma perspetiva exploratória que dá aos alunos a responsabilidade de formular e usar estratégias de resolução das tarefas e onde se cria um ambiente dinâmico de participação, marcado pelo trabalho colaborativo entre alunos e pelas discussões coletivas com toda a turma.

EXPRESSÕES, EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E FUNÇÕES

O estudo da Álgebra entra numa nova etapa no 3.º ciclo. O trabalho feito nos ciclos anteriores (em especial se foi realizado na perspetiva acima descrita) pode ter levado à introdução de símbolos, mas agora passa-se a fazer operações com símbolos e a considerar as suas propriedades. Deste modo, o uso da linguagem simbólica assume agora uma muito maior complexidade, colocando sérias dificuldades aos alunos.

Vários estudos realizados neste ciclo deram especial atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico, com particular atenção ao domínio da linguagem simbólica com compreensão. Estes estudos consideraram tópicos algébricos como expressões, equações, inequações e funções. Uma investigação realizada por Neusa Branco (2008) procurou compreender de que modo uma unidade de ensino para o 7.º ano baseada no estudo de padrões e regularidades pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, para a compreensão das variáveis e equações.

Os resultados mostram que os alunos desenvolveram o seu pensamento algébrico, nomeadamente a capacidade de generalizar e de usar a linguagem algébrica para expressar generalizações (figura 4). No entanto, a evolução que evidenciam não é igualmente significativa em todos os temas abordados. Por exemplo, na resolução de problemas, os alunos usaram sobretudo estratégias aritméticas e manifestaram alguma dificuldade em representá-los usando a linguagem algébrica. Revelam evolução na compreensão desta linguagem relativa aos diferentes significados dos símbolos em diversos contextos e ao significado e manipulação de expressões, mas mostraram fragilidades na sua compreensão, o que levou a autora a sublinhar a necessidade de um longo caminho com vista ao pleno desenvolvimento do pensamento algébrico.

1. Considerem as seguintes figuras:

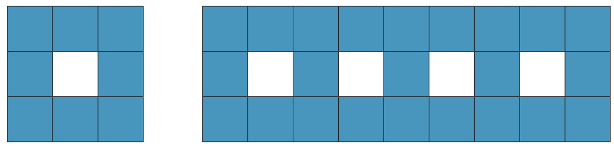


Figura n.º1 Figura n.º2

Professora – De onde vem aquele dois?
Beatriz – Vem dos dois quadrados de dentro.
(…)
Professora – Tenho tantos grupos de dois quantos o número da figura. Agora vamos explicar o três.
Susana – O três são os três quadrados das filas.
Professora – Quantas vezes tenho estas filas de três?
Vários alunos – Quatro.
Professora – Na figura três repetem-se quatro. Na figura quatro vão repetir-se…
Vários alunos – Cinco.
Professora – Na figura cinco, repetem-se…
Vários alunos – Seis.
Professora – Portanto tenho três vezes N mais um.

Figura 4. Discussão da decomposição da figura de acordo com a expressão 2N +3(N +1) (Branco, 2008)

Outro conceito fundamental nesta etapa do estudo da Álgebra é o conceito de função. Ana Matos (2007) realizou uma unidade de ensino para estudar o modo como a resolução de tarefas com carácter exploratório e investigativo, envolvendo este conceito, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 8.º ano.

Os resultados sugerem que a ênfase na exploração de relações funcionais proporcionou o desenvolvimento de significado da linguagem algébrica e das suas possibilidades de utilização por parte dos alunos. Mostram também que os alunos alargaram o leque de estratégias de que dispunham para explorar situações que envolvem variáveis, raciocinando de modo cada vez mais geral e expressando as suas generalizações numa linguagem mais formal. Observa-se uma evolução do pensamento algébrico dos alunos, embora, tal como no estudo anterior, tenham subsistido dificuldades, mostrando que a compreensão da linguagem algébrica é um processo que precisa de ser trabalhado ao longo de um período alargado de tempo.

No estudo dos números reais e inequações dá-se especial atenção às propriedades das operações. Ao contrário das equações do 1.º e 2.º grau, que têm no máximo duas soluções, as inequações podem admitir como solução conjuntos infinitos. Joana Mata Pereira (2012), no quadro de uma unidade de ensino realizada na sala de aula, estudou os processos de raciocínio de alunos do 9.º ano em tarefas algébricas envolvendo estes conceitos. Procurou compreender como estes processos se relacionam com as representações usadas e com a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos.

Os alunos mostraram facilidade na formulação de generalizações, na sua maioria resultantes de abordagens indutivas, partindo de um ou mais casos particulares. Alguns alunos formularam mesmo generalizações de cunho dedutivo com base em propriedades algébricas. As justificações não surgiam espontaneamente, mas os alunos faziam-nas decorrendo do questionamento. Estas justificações baseavam-se em conhecimentos anteriores, propriedades ou conceitos matemáticos ou em contraexemplos que refutam uma afirmação. A atribuição de significado mostrou ser muito importante quando se registavam dificuldades nas conexões entre os conceitos e propriedades necessários à realização da tarefa.

Outros tópicos importantes do 3.º ciclo são os sistemas de equações, a proporcionalidade inversa e a resolução de equações do 2.º grau. Num estudo realizado igualmente no 9.º ano, Sandra Nobre (2016) analisou o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos no quadro de uma experiência de ensino privilegiando a resolução de problemas, alguns dos quais para resolver com a folha de cálculo. O estudo centrou-se no uso de diversas representações na aprendizagem de métodos formais algébricos, considerando a sua evolução e coordenação na resolução das tarefas propostas (figura 5). Ao mesmo tempo, procurou compreender o papel da folha de cálculo na aprendizagem dos métodos formais algébricos, designadamente quando usada em articulação com o papel e lápis.

A sequência de tarefas e a sua articulação, ora conjugando ora alternando entre o uso do papel e lápis e da folha de cálculo, levaram os alunos a evoluir nas representações utilizadas bem como na sua transformação. Os resultados sugerem que a resolução de problemas promoveu nos alunos um pensamento mais abstrato e uma perspetiva algébrica das resoluções que os conduziu ao uso da linguagem algébrica. A resolução de exercícios ajudou a promover a destreza na manipulação simbólica e a fluência na utilização dos métodos formais.

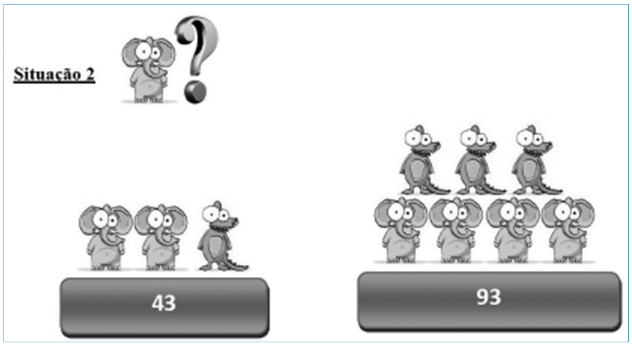


Figura 5. Tarefa de introdução aos sistemas de equações (Nobre, 2016)

No seu conjunto, estes estudos mostram que é possível promover nos alunos o domínio da linguagem algébrica, com reflexos positivos na aprendizagem de conceitos e procedimentos, através de atividades significativas, seja o uso de tarefas envolvendo sequências, seja através de propostas desafiantes como explorações e problemas, seja ainda recorrendo ao uso de novas tecnologias. No entanto, os estudos também mostram a necessidade de um trabalho de longo prazo para que o domínio aprofundado da linguagem algébrica se desenvolva em toda a sua dimensão.

FUNÇÕES NO ENSINO SECUNDÁRIO

O estudo das funções é um tema de natureza algébrica que assume um lugar proeminente nos programas do ensino secundário e que tem sido considerado em diversas investigações. Assim, Carlos Silva (2009) estudou o contributo da resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo o uso da calculadora gráfica, na aprendizagem das funções quadráticas de uma turma de alunos do 10.º ano. Os resultados mostram que, no fim do estudo, os alunos eram capazes de identificar as propriedades das funções afim e quadrática nas representações gráfica e algébrica.

No entanto, os alunos revelaram diversas dificuldades na compreensão do conceito de função em diferentes representações que não foram superadas com o trabalho realizado. Apesar do uso da calculadora gráfica, alguns alunos utilizaram principalmente processos algébricos na resolução de problemas, recorrendo apenas a processos gráficos quando a tarefa o promovia diretamente. Os resultados sugerem que a realização das tarefas propostas contribuiu para a aprendizagem dos alunos, mas também mostram que as suas dificuldades conceptuais e uso limitado de representações não são facilmente ultrapassados numa só unidade de ensino, requerendo um trabalho continuado.

O papel das situações contextualizadas em situações da realidade merece também atenção nesta etapa do estudo da Álgebra. Arminda Azevedo (2009) procurou compreender os processos de raciocínio e dificuldades dos alunos do 10.º ano na resolução de problemas e em tarefas de exploração e investigação de natureza contextualizada, com recurso à calculadora gráfica, numa unidade de ensino sobre funções. Os tópicos tratados foram generalidades sobre funções, função quadrática, função módulo e funções polinomiais com grau superior ao 2.º.

O uso da calculadora gráfica permitiu o confronto das várias formas de representar funções, contribuindo para a sua compreensão e das suas propriedades. Os resultados indicam que a realização das tarefas propostas, com recurso à calculadora gráfica, desenvolveu o raciocínio matemático dos alunos. A resolução de problemas contextualizados contribuiu para uma aprendizagem com significado das funções e as tarefas de exploração e investigação desenvolveram a capacidade de identificar regularidades e formular, testar e justificar conjeturas. Os relatórios escritos e as apresentações orais contribuíram para o desenvolvimento das capacidades de comunicar matematicamente e justificar processos. As discussões e reflexões sobre as tarefas permitiram clarificar o pensamento intuitivo dos alunos e alargaram o leque de estratégias por eles utilizadas.

A calculadora gráfica constitui um instrumento de trabalho com grande potencial para o estudo das funções. Madalena Consciência (2013) procurou compreender como é que os alunos se apropriam deste instrumento ao longo do 10.º e 11.º ano e qual o papel que este desempenha na aprendizagem das funções.

Os resultados sugerem que o processo de apropriação das potencialidades da calculadora é demorado. No final do 11.º ano os alunos mostraram ainda alguma dificuldade em compreender e interpretar determinados aspetos do funcionamento da calculadora, em particular no que diz respeito à representação gráfica. O estabelecimento de conexões entre representações afigura-se essencial para evitar interpretações incorretas. O estudo mostra que o acesso rápido à representação gráfica facilitado pela calculadora promove o desenvolvimento de uma visão estrutural do conceito de função, incentiva a exploração de situações problemáticas e contribui para a flexibilidade nas estratégias de resolução de problemas.

Um tópico específico que mereceu também interesse da investigação é a noção de parâmetro, que conduz ao estudo de famílias de funções. Magda Pereira (2016) estudou o processo de construção dos significados e do raciocínio matemático dos alunos na aprendizagem desta noção em alunos do 11.º ano. Desenvolveu um método de ensino para mediar os significados matemáticos dos alunos desde contextos matemáticos concretos até contextos genéricos e estruturados, que usou para elaborar as tarefas de uma unidade de ensino.

Este método ajudou a atingir os objetivos pretendidos. Os alunos desenvolveram o significado de parâmetro como algo que pode ficar definido e que permite resolver os problemas matemáticos com a atribuição de um valor concreto. O trabalho realizado promoveu a sua compreensão da noção de letra enquanto incógnita, enquanto variável de uma função e enquanto parâmetro, em tarefas envolvendo representações em registos gráficos, algébricos, esquemáticos e em linguagem natural.

CONCLUSÃO

Todos os trabalhos referidos foram realizados na sala de aula, na maior parte dos casos através de experiências de ensino em que o professor assumiu também o papel de investigador. Alguns centram-se em ideias especificamente algébricas, outros usam a Álgebra como contexto para o estudo de questões de natureza transversal como o raciocínio, o uso de representações, as estratégias de resolução de problemas e o uso de tecnologia. Em todos os casos, procurei destacar os resultados especificamente relacionados com conceitos e processos algébricos.

Os estudos indicados mostram que a noção de variável pode ser desenvolvida a partir dos primeiros anos de modo a preparar o seu uso intensivo numa etapa posterior. Nos diversos níveis de ensino, os alunos mostraram-se capazes de formular generalizações, desenvolvendo uma melhor compreensão dos conceitos algébricos, bem como a sua capacidade de raciocínio.

O uso e articulação de diversas representações assume um papel muito importante. Na fase da *early algebra*, é fundamental a articulação entre as representações visuais, numérica e em linguagem natural. Numa etapa mais avançada tem uma importância fundamental a articulação entre as representações algébrica e gráfica e a linguagem natural. A tecnologia (folha de cálculo, calculadora gráfica) pode ter um papel importante precisamente para facilitar este processo de articulação de diversas representações. O uso de situações contextualizadas mostra poder ajudar os alunos na construção de significados.

A escolha de tarefas constitui um elemento decisivo em todos os estudos apresentados. Tarefas de natureza desafiante, como problemas, investigações e explorações mostram-se fundamentais para levar o aluno a desenvolver uma atividade matemática produtiva e construir novos significados.

Na maioria dos estudos, o modo de trabalho na sala de aula seguiu uma abordagem exploratória, em que os alunos foram primeiro desafiados a trabalhar em tarefas e depois a apresentar as suas resoluções e discutir as resoluções dos seus colegas em momentos de discussão coletiva. Estes estudos apontam, sem exceção, que esta abordagem tem grandes potencialidades para promover a aprendizagem dos alunos, com compreensão, dos conceitos e processos algébricos, embora seja necessário um trabalho longo e continuado no decurso dos diversos ciclos de escolaridade.

Referências

Azevedo, A. B. G. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem das funções: Uma experiência com alunos do ensino secundário*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

Barbosa, A. C. C. (2009). *A resolução de problemas que envolvem* *a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Tese de doutoramento, Universidade do Minho.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

Cerca, M. R. (2014). *O desenvolvimento do raciocínio relacional através das relações de igualdade e desigualdade: Uma experiência de ensino no 3.º ano.* Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

Consciência, M. M. C. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Mata-Pereira, J. (2012). *O raciocínio matemático em alunos do 9.º ano no estudo dos números reais e inequações.* Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

Matos, A. S. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

Mestre, C. M. M. V. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Morais, A. (2012). *A exploração de sequências e regularidades como suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

Nobre, S. G. G. (2016). *O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Pereira, M. C. N. (2016). *Um método de ensino com tarefas para mediar significados em matemática.* Tese de doutoramento, Universidade da Beira Interior.

Silvestre, A. I. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6.ºano de escolaridade.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

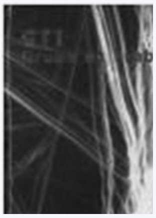
Silva, C. A. A. (2009). *Funções quadráticas no 10.º ano, usando a calculadora gráfica.* Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa.

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

PUBLICAÇÕES GTI

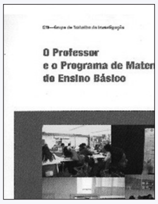
Ser professor hoje obriga a uma aprendizagem constante e a ter capacidade de investigar e refletir sobre a sua prática profissional. Deste modo, torna-se necessário criar dinâmicas, que promovam o desenvolvimento profissional dos professores, integradas na cultura de escola, visando a qualidade das aprendizagens. Este desafio está presente nas publicações O professor como investigador do Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da APM.

Refletir e Investigar sobre a Prática profissional (GTI, 2002)



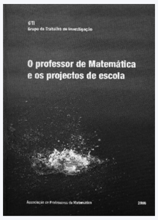
Nesta publicação encontramos uma coletânea de textos que testemunham experiências profissionais dos elementos do grupo enquanto investigam a sua prática profissional para melhor compreender as suas ações e as suas necessidades, e melhorá-las.

O Professor e o Desenvolvimento Curricular (GTI, 2005)



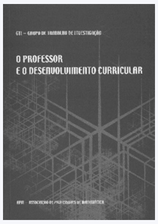
Inclui um conjunto de textos que relatam experiências, vividas pelos autores, centradas na gestão, concretização e desenvolvimento do currículo, contribuindo para uma melhor compreensão das questões curriculares.

O professor de Matemática e os projetos de escola (GTI, 2008)



Publicação cujo foco é o professor que investiga a sua prática no âmbito de projetos de escola. Os artigos reunidos mostram que é possível realizar projetos de escola e gerar dinâmicas que permitam o desenvolvimento profissional dos professores e da cultura de escola.

O professor e o programa de Matemática do ensino básico (GTI, 2010)



Contém o relato de experiências, realizadas por professores e formadores dos diferentes níveis de ensino (do 1.º ciclo do ensino básico ao ensino superior), que levam à reflexão de que forma estas podem contribuir em termos do conhecimento para a profissão, e que mais valias trazem para a vida das escolas, em particular para o grupo de professores de Matemática.

Uma trajetória de aprendizagem para a classificação e definição de quadriláteros

Lina Brunheira

A coerência é um valor muito importante na matemática. A questão perturbadora sobre se um quadrado é ou não um retângulo, a que atualmente respondemos convictamente "sim" contrariando as convicções dos nossos alunos, poderia ter outra resposta: "depende". Depende de quê? Das definições que estamos a adotar para os quadriláteros. Se a nossa definição de retângulo for "quadrilátero com todos os ângulos retos", o quadrado é um caso particular do retângulo. Mas se considerarmos a definição de Euclides (Elementos, Livro I, Silva, s.d.) que afirma sobre o retângulo "E a figura, que de uma parte for mais comprida, pode ser rectangula, mas não equilatera", então o quadrado deixa de ser considerado retângulo. Euclides usava assim uma definição exclusiva que conduz a uma classificação partitiva, ou seja, que organiza separadamente os objetos, neste caso figuras geométricas. Se deixámos de adotar estas definições para alguns conceitos é porque existem várias vantagens nas definições inclusivas, como conduzirem a uma maior economia na formulação de definições ou teoremas e simplificarem a dedução de propriedades para os conceitos mais específicos (De Villiers, 1994).

Na verdade, como refere De Villiers (1994), existe uma estreita relação entre as definições e as classificações. Uma certa definição implica um tipo de classificação e uma classificação determina igualmente o tipo de definição. Mas então por onde começar? Será esta uma questão do tipo "quem nasceu primeiro, o ovo ou a galinha"? Em matemática, uma teoria começa com termos primitivos e axiomas, a partir dos quais todas as outras noções são definidas e os teoremas são demonstrados, usando as regras do raciocínio lógico. Contudo, como explica Pólya (1975), este encadeamento não reflete a forma como a matemática é criada ou como é aprendida. Do ponto de vista do ensino, De Villiers (2017) refere que persiste uma crença de que uma boa prática significa fornecer primeiro uma definição concisa do conceito, depois alguns exemplos e contraexemplos e, posteriormente, a exploração das suas propriedades. Contudo, esta abordagem conduz à ideia errada de que a criação matemática começa com definições (que os alunos não sabem de onde vêm nem como foram escolhidas) e que não existe mais do que uma definição para o mesmo conceito. Mais ainda, De Villiers considera que ao "servir" definições acabadas aos alunos se está a negar a possibilidade de se envolverem no processo de definir e a promover uma imagem da matemática como uma ciência "absolutista".

De facto, e no caso da aprendizagem das figuras geométricas, a investigação em educação matemática tem mostrado evidência que nos leva a questionar a adequação de uma abordagem que parte das definições para a organização das figuras em classes. Vários estudos sobre a aprendizagem dos quadriláteros, envolvendo alunos, professores e futuros professores, mostram que frequentemente os indivíduos conhecem as definições, mas não raciocinam de acordo com tais definições (ver por exemplo Fujita, 2012). Isto significa, por exemplo, que os alunos podem enunciar corretamente uma definição para paralelogramo sem admitir que o retângulo pertence a essa classe. Alguns investigadores, como Hershkowitz (1989), explicam que este problema se deve, em parte, àquilo a que chamam *efeito protótipo*, ou seja, a tendência para restringir os conceitos tomando apenas como exemplos alguns casos especiais e assim acrescentar atributos desnecessários ou falsos. Situações comuns que traduzem este fenómeno são frequentemente detetadas pelos professores: achar que um retângulo tem de ter lados consecutivos diferentes, assumir uma posição convencional com dois lados horizontais e dois verticais ou até considerar que os primeiros têm de ser maiores do que os últimos. Acontece que, frequentemente, é o exemplo protótipo que é usado como base do julgamento que os alunos fazem das figuras e não a sua definição ou as suas propriedades, o que resulta na classificação errada das figuras.

O que fazer então? Poderíamos pensar em contrariar a existência de protótipos, no entanto, Hershkowitz alerta também para que, habitualmente, os indivíduos não assimilam qualquer exemplo de um conceito sem que antes tenham adquirido um exemplo protótipo como referência. É certo que a exposição sistemática dos alunos a um leque restrito de exemplos contribui para reforçar a ideia de que há exemplos mais representativos do que outros mas, como refere ainda a autora, a culpa não é só dos manuais escolares ou dos professores que exibem sempre o mesmo tipo de exemplo. Esta investigadora realizou um interessante estudo com alunos do 5.º ao 8.º ano, professores e futuros professores de 1.º ciclo[1] a quem foi pedido que

1 No original, elementary teachers.

analisassem definições para dois conceitos "inventados" – os *bitrian* (figura geométrica que consiste em dois triângulos com um vértice comum) e os *biquad* (figura geométrica que consiste em dois quadriláteros que partilham um lado) – e a partir das definições escolhessem exemplos destes conceitos a partir de um conjunto de figuras que lhes foi apresentado ou construíssem eles próprios alguns exemplos. Curiosamente, os resultados revelaram que, mesmo sendo conceitos sobre os quais não tinham experiência prévia, também se observou o efeito protótipo pois os participantes tenderam a identificar muito melhor alguns exemplos relativamente a outros. Esta experiência mostra assim que a maneira como analisamos as figuras não é puramente analítica, mesmo quando partimos de uma definição, e que a forma como percecionamos visualmente as figuras tem um papel fundamental.

Deixemos a questão colocada provisoriamente em aberto e consideremos o conceito de trajetória hipotética de aprendizagem.

TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Quando planificamos o ensino de um tópico tomamos várias decisões – o que privilegiar, quais as tarefas a propor, como encadeá-las, quais os recursos a usar, quais os papéis dos alunos e professor em cada momento, etc. Ações tão comuns como a seleção e encadeamento dos exercícios ou problemas a realizar do manual refletem a perspetiva que temos sobre a forma como os alunos aprendem aquele tópico, dadas as condições existentes no momento. De certa forma, concebemos uma trajetória para a aprendizagem dos nossos alunos, informada por experiências anteriores, perspetivas mais gerais sobre o ensino e, nalguns casos, dados da investigação. Esta ideia foi desenvolvida por alguns investigadores, dando origem ao conceito de *trajetória hipotética de aprendizagem*.

Para Clements e Sarama (2004), uma *trajetória hipotética de aprendizagem* compreende três aspetos: um objetivo de aprendizagem, uma perspetiva teórica (ou modelo) sobre a progressão no pensamento e aprendizagem das crianças num determinado domínio e uma sequência de tarefas. A trajetória baseia-se num modelo de aprendizagem que é suficientemente explícito para descrever os processos envolvidos na persecução dos objetivos a atingir e concretiza-se através de uma sequência de tarefas que pretende desencadear a atividade matemática que, hipoteticamente, conduzirá à progressão das crianças. Os investigadores que concebem a sequência assumem que esta constitui um programa particularmente eficaz, mas não sugerem que é a única, ou mesmo a melhor, para atingir os objetivos definidos, até porque o currículo é determinado por vários outros fatores, como os conhecimentos que os alunos já possuem, as suas preferências e envolvimento em determinadas tarefas ou contextos. Este é, por um lado, um dos motivos pelos quais os professores podem e devem construir e/ou adaptar trajetórias de aprendizagem, pois só os próprios detêm o conhecimento mais completo sobre os seus alunos. Por outro lado, é também um dos motivos pelos quais uma trajetória será sempre hipotética, na medida em que o professor, à priori, também não pode conhecer completamente a dinâmica que será desencadeada e, consequentemente, como se processará o ensino e a aprendizagem.

Para a construção destas trajetórias, os investigadores recorrem à investigação já existente e que pode informar as três componentes da trajetória – os objetivos, o modelo de aprendizagem e a construção das tarefas. Contudo, a implementação das trajetórias constitui também um novo campo de investigação e uma oportunidade para aprofundar o conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem.

De seguida, volto à questão inicial sobre a orientação a dar para o ensino da classificação e definição de quadriláteros. Para isso, apresento a trajetória que tenho desenvolvido nos últimos anos com estudantes do 2.º ano de uma Licenciatura em Educação Básica, as ideias em que assenta e alguns resultados da investigação que poderão ser úteis aos professores que pretendam implementar ou adaptar esta trajetória no 3.º ciclo.

UMA TRAJETÓRIA PARA A CLASSIFICAÇÃO E DEFINIÇÃO DE QUADRILÁTEROS

A trajetória construída visou a aprendizagem da classificação hierárquica dos quadriláteros e sua definição. Contudo, é importante clarificar que, além do conhecimento sobre como estas figuras se relacionam e conhecer as definições, este trabalho foi valorizado na medida em que promove o raciocínio geométrico, evocando processos como a generalização e a justificação, bem como a comunicação matemática. Além disso, há ainda uma vertente relativa à natureza da matemática associada à compreensão do que é e qual o papel de uma definição. No que diz respeito ao modelo de ensino, a trajetória está fundada num ensino de tipo exploratório, onde cabe a quem aprende uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento, e numa dinâmica de aula em que se reserva um espaço significativo ao trabalho dos alunos sobre as tarefas, a par de momentos de discussão e negociação de significados (Ponte, 2005). De seguida apresento as ideias que orientaram a construção da sequência de tarefas.

Os resultados da investigação existente, já referidos anteriormente, levaram-me a questionar uma abordagem aos quadriláteros que se iniciasse com as definições. Além da ideia de que conhecer a definição de um conceito não implica raciocinar em consonância com tal definição, os quadriláteros colocam-nos ainda um outro desafio: desde crianças desenvolvemos uma grande familiaridade com alguns quadriláteros, especialmente quadrados, retângulos e losangos, sem conhecer as suas definições (e assim deve ser…) e, portanto, o nosso conhecimento sobre aquelas figuras está fortemente enraizado na nossa experiência e nas imagens visuais que incorporámos. Assim, conjeturei que o trabalho com os quadriláteros devesse alargar essa experiência, numa atividade que aliasse a vertente visual com a vertente analítica. Surge assim a primeira tarefa da sequência – a investigação das propriedades de vários quadriláteros notáveis (quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, trapézio e papagaio) com recurso ao GeoGebra. Preparei um conjunto de ficheiros[2] com construções de cada um destes quadriláteros (ver na figura 1 o exemplo do paralelogramo) e que foram disponibilizados aos estudantes.

A partir da manipulação do quadrilátero, os estudantes responderam a um conjunto de perguntas (ver figura 2) e registaram as suas conclusões numa tabela.

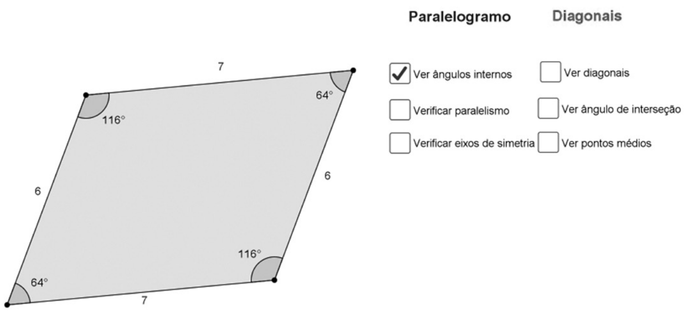


Figura 1. Imagem do ficheiro para estudo das propriedades do paralelogramo

Nesta tarefa propomos que estudes as principais propriedades dos quadriláteros mais conhecidos.

1. Vejamos o caso do paralelogramo:
   - Existem lados congruentes?
   - Existem lados paralelos?
   - Existe alguma relação entre os seus ângulos?
   - As suas diagonais são congruentes? Intersetam-se nos pontos médios (bissetam-se)? Qual é a sua posição relativa?
   - Existem eixos de simetria?

Finalmente, identifiquemos casos particulares. Por exemplo, o quadrado será um paralelogramo? E um retângulo? E um papagaio? …

Figura 2. Questões formuladas na tarefa para as propriedades do paralelogramo

A análise que efetuei sobre a atividade desenvolvida nesta primeira tarefa da sequência identificou alguns resultados interessantes e aspetos críticos a ter em atenção e que sistematizo de seguida:

- O ficheiro do GeoGebra permitiu descobrir com alguma facilidade as propriedades invariantes em análise, pois a manipulação da figura com elementos visíveis (particularmente as medidas) torna muito evidente a congruência de lados ou ângulos.
- A manipulação da figura permite alargar o conjunto de imagens visuais que os estudantes associam ao conceito, particularmente quando o quadrilátero surge em posições não convencionais ou com medidas mais "extremadas" (por exemplo, retângulos muito estreitos).

Há uma tendência geral no que respeita à atitude dos alunos face aos casos particulares: os alunos não manipulam as figuras intencionalmente para assumirem casos particulares (por exemplo, colocar o paralelogramo com a forma de um quadrado) e, quando estes surgem acidentalmente, tendem a ignorá-los por os considerarem uma espécie de erro de programação. Assim, é importante que o professor "provoque" os alunos para considerarem estes casos e começarem a refletir sobre as relações entre os quadriláteros. A discussão coletiva sobre as conclusões dos alunos constitui uma oportunidade fundamental para esta reflexão.

A primeira tarefa da sequência permitiu assim descobrir várias propriedades dos quadriláteros e começar a considerar as relações hierárquicas que surgem ao percebermos, por exemplo, que é possível construir um quadrado a partir de um retângulo ou de um papagaio. Desta forma, a classificação dos quadriláteros começa a surgir na primeira tarefa, mas ela requer um tratamento que permita sistematizar estas ideias. Surge assim a segunda tarefa que recorre a um diagrama de Venn e a um fluxograma para organizar as figuras (figura 3).

Figura 3. Diagrama de Venn e fluxograma da tarefa 2

Nesta tarefa, os estudantes começaram pelo preenchimento do diagrama de Venn de acordo com as relações que estabeleceram na tarefa 1 e prosseguiram para o fluxograma onde colocaram as propriedades que permitem transformar cada quadrilátero

2 Pode aceder a estes ficheiros em https://www.geogebra.org/search/perform/search/lina%20brunheira escolhendo o nome de cada quadrilátero que pretende estudar.

noutro, seguindo a orientação das setas. Por exemplo, o espaço que liga o papagaio ao losango foi preenchido com a propriedade "quatro lados congruentes" (que também pode ser uma definição para losango), mas surgiram também outras hipóteses como "dois eixos de simetria" ou "ângulos opostos congruentes" que, associadas às propriedades do papagaio, implicam que este se restrinja ao losango. Ainda no fluxograma, colocaram uma nova seta que completasse o esquema de forma a respeitar todas as relações encontradas, o que conduziu à ligação entre os paralelogramos e os losangos.

Da análise da implementação desta tarefa destaco os seguintes aspetos:

- A utilização de esquemas visuais como o diagrama ou o fluxograma são fundamentais para organizar e sistematizar as relações encontradas;
- O diagrama de Venn torna particularmente evidente as relações inclusivas. Neste caso, surgem algumas dúvidas a ter em conta: há alunos que tendem a repetir o mesmo quadrilátero em todas as zonas em que as propriedades sejam respeitadas (por exemplo, colocam o quadrado nas seis zonas possíveis). Este erro evidencia a necessidade de compreender que, se colocamos o quadrado fora da região definida pela propriedade "Quatro lados iguais" significa que o quadrado não respeita essa propriedade, o que é falso. Outro aspeto a realçar é a importância de assinalar quadriláteros não notáveis – o conjunto dos quadriláteros que não têm um par de lados paralelos inclui os papagaios (não losangos), mas também outros casos que não têm quaisquer propriedades a não ser os quatro lados que definem um quadrilátero.
- O fluxograma reforça as relações encontradas anteriormente e estabelece uma primeira ponte para as definições. Um aspeto que pode ser sensível é a possibilidade de preencher os espaços de mais do que uma forma, o que deve ser discutido com os alunos.
- As duas formas de organização são muito úteis, mas só se tira o verdadeiro proveito delas se o professor colocar à discussão afirmações como: "todos os quadrados são retângulos", "todos os paralelogramos são losangos" ou "todos os quadrados são papagaios". Estas três afirmações oferecem desafios de nível diferente. A primeira é facilmente aceite depois do estudo realizado; a segunda é facilmente negada, mas os alunos tendem a dizer que "os paralelogramos não são losangos, os losangos é que são paralelogramos", o que está parcialmente correto porque devemos antes dizer "nem todos os paralelogramos são losangos" – uma subtileza que pode ser compreendida aludindo a relações análogas como "nem todos os cães são dálmatas" em vez de "os cães não são dálmatas". Finalmente, a última afirmação representa o maior desafio, pois a tendência é para não aceitar que os quadrados são papagaios. Isto acontece porque as imagens protótipo de cada quadrilátero são significativamente diferentes por haver menos propriedades que são partilhadas pelas duas figuras (o que acontece noutros casos em que as relações são "indiretas").

A última tarefa da sequência trata finalmente as definições de alguns quadriláteros, mas o seu propósito é muito mais ambicioso do que apresentar definições. Pretendemos que os estudantes compreendam o que é uma definição, se envolvam na sua construção e discutam o interesse de umas definições relativamente a outras, em particular, a vantagem de chegar a definições económicas, ou seja, um conjunto de condições mínimo para definir a figura. Desta forma, a tarefa 3 (figura 4) parte das propriedades de três quadriláteros não identificados (A – paralelogramo, B – retângulo, C – papagaio) e que os alunos devem começar por reconhecer. O trabalho com as definições começa com a escolha de propriedades que determinem a figura e prossegue com uma seleção "mais económica". A sugestão da utilização de um geoplano de 11 por 11 decorre da necessidade de fazer várias experiências de construção de polígonos que respeitem as propriedades enunciadas usando um instrumento que promova o rigor da construção. A utilização de um ambiente de geometria dinâmica (AGD) é também adequado para testar tais construções.

Quadrilátero A	Quadrilátero B	Quadrilátero C
A1. Dois pares de ângulos opostos iguais A2. As diagonais bissetam-se A3. Os lados opostos são iguais A4. Os ângulos consecutivos são suplementares A5. Dois pares de lados paralelos	B1. As diagonais são iguais B2. As diagonais bissetam-se B3. Os lados são iguais dois a dois B4. Os ângulos são todos iguais B5. Dois pares de lados paralelos	C1. Lados consecutivos iguais dois a dois C2. As diagonais são perpendiculares C3. Uma diagonal bisseta a outra C4. Dois ângulos opostos iguais C5. Um eixo de simetria contendo dois vértices.

Para as questões seguintes, usa o geoplano de 11 por 11. Faz o registo em papel ponteado de algumas figuras de forma a argumentar as tuas escolhas.

2. Descobre quais são os quadriláteros designados por A, B e C.
3. Será possível definir o quadrilátero A usando apenas uma propriedade? Se sim, qual? Há mais do que uma possibilidade? E duas propriedades? Justifica as tuas escolhas.
4. Faz o mesmo estudo para os quadriláteros B e C.

Figura 4. Excerto da tarefa 3 sobre definições

Nesta tarefa destaco os seguintes aspetos:

- Depois do estudo realizado anteriormente, os alunos descobrem facilmente quais são os quadriláteros designados por A, B e C.
- O paralelogramo (A) surpreende por ser possível defini-lo usando, isoladamente, qualquer uma das propriedades apresentadas. Este caso é particularmente importante para que compreendam que podem existir definições equivalentes e discutir a razão pela qual algumas são mais adotadas do que outras (por exemplo, A5 é muito mais

comum do que A2).

- O retângulo (B) tem apenas uma possibilidade de ser definido por uma única propriedade (B4), no entanto, a conjunção de duas propriedades como as referentes às diagonais (B1 e B2) resulta também noutra definição. Se acrescentarmos qualquer outra propriedade a definição continua correta, mas deixa de ser económica – o que constitui uma oportunidade para perceber este conceito.
- O papagaio (C) apresenta uma propriedade (C5) que envolve um eixo de simetria e que permite definir o quadrilátero – uma propriedade que não é muito utilizada, mas pode ser eficaz se estivermos a construir a figura num AGD – o que mais uma vez conduz à relevância de umas definições face a outras. De registar que neste quadrilátero surge com frequência a proposta de o definir usando apenas C2 ou C3. Isto acontece porque, quando pensamos em segmentos perpendiculares, imaginamos quase sempre que um bisseta outro (e vice-versa), acrescentando assim uma propriedade sem que nos apercebamos.

COMENTÁRIOS FINAIS

Neste artigo falei essencialmente de geometria, da aprendizagem dos quadriláteros e do que nos diz a investigação sobre este assunto. Contudo, gostaria que encontrassem nele uma mensagem transversal relativamente ao ensino de qualquer tópico, seja um conteúdo, seja uma capacidade. Todos sabemos o quão importantes são as tarefas que propomos aos alunos. Exercícios, problemas, investigações, seja qual for a sua natureza, escolhemo-las pelo seu valor intrínseco, pelo potencial que encontramos em cada uma. Contudo, tão importante como a escolha da tarefa, é a sua sequenciação. Uma tarefa pode parecer-nos muito interessante, mas se não for intencionalmente enquadrada numa planificação mais ampla, onde faça sentido, e por uma prática consistente com os nossos objetivos, boa parte do seu potencial pode perder-se. Os resultados da investigação podem ajudar-nos neste aspeto e, certamente, a nossa experiência e conhecimento. No seu conjunto, são eles que apoiam a construção de trajetórias de aprendizagem.

No que respeita à aprendizagem da classificação de quadriláteros, esta será, provavelmente, um processo sempre bastante difícil. Apesar de o processo de classificar ser inerente à nossa condição humana e estar presente em tantas atividades, na verdade, há vários fatores que o tornam bastante complexo. Como afirmam Mariotti e Fischbein (1997), as classificações formais recorrem frequentemente a critérios estruturais que não são imediatamente claros e estão longe dos critérios percetuais aos quais estamos habituados a remeter a atividade espontânea de classificar.

A aprendizagem das definições dos quadriláteros não será algo tão complexo se a restringirmos à simples memorização. Contudo, a literatura mostra que saber dizer a definição não significa conhecer o conceito pois, como explica Vinner (1983), quando mobilizamos um conceito evocamos sobretudo as suas representações (imagens mentais, experiências, etc.), o que é particularmente verdade no caso das figuras geométricas em que os conceitos têm uma componente declarativa mas também uma visual.

Estas dificuldades colocam aos professores e investigadores a responsabilidade de procurarem as estratégias mais adequadas com vista à melhoria das aprendizagens. A trajetória que apresento neste artigo constitui um contributo nesse sentido. Como expliquei anteriormente a propósito do conceito de trajetória, não assumo que seja a única via ou mesmo a melhor. Também como fui referindo a propósito de cada tarefa, não é um caminho sem adversidade. Surgem várias dúvidas, questões e até controvérsias que nem sempre são fáceis de ultrapassar. Contudo, atrevo-me a dizer que qualquer outro caminho que não suscite estes problemas está a encobrir as dificuldades que os alunos têm com estes assuntos. Promover oportunidades para que sejam os alunos a construir o seu conhecimento com compreensão é um caminho desafiante e trabalhoso mas, simultaneamente, mais proveitoso do ponto de vista da aprendizagem. Aprendizagem dos alunos, sobre os conteúdos matemáticos e em torno das capacidades que queremos desenvolver, mas também do professor a quem se oferece uma janela sobre o conhecimento e o pensamento dos seus alunos.

Referências

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and learning, 6*(2), 81-89.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 11-18.

De Villiers, M (2017). From a golden rectangle to golden quadrilaterals and beyond. *At right angles, 6*(1), 64-69.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60-72.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry -- Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61-76.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). *Defining in classroom activities. Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219-248

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Silva, J. C. (s.d.). *Livro I dos Elementos de Euclides*. Consultado em https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/1parte.html

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Lina Brunheira

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões — ideias da teoria ilustradas com exemplos

Ana Paula Canavarro

Ponto prévio

Este artigo tem como propósito sintetizar ideias da investigação atual em educação matemática sobre a aprendizagem de conexões pelos alunos, procurando debruçar-se sobre as potencialidades das conexões relativamente à visão dos alunos sobre a Matemática e aos conhecimentos e processos matemáticos que podem desenvolver. Para tal, discuto o que se entende por conexões, considerando a sua diversidade e propósito, e apresento duas estratégias produtivas para a abordagem de conexões com os alunos — a exploração de representações múltiplas e a utilização da modelação matemática. Isto porque não basta convocar a unânime bondade das conexões, é preciso saber como as promover, na teoria e na prática. As ideias aqui abordadas são válidas para qualquer ciclo de escolaridade — ilustro-as sobretudo com exemplos dos primeiros ciclos de escolaridade pela atual oportunidade que me oferece o projeto MatDance em que estou envolvida com Mercedes Prieto, um projeto de desenvolvimento curricular e investigação que corporiza ele mesmo as conexões entre a Matemática e a Dança, concretizadas no 1.º ciclo de escolaridade. Esclareço ainda que para a elaboração deste artigo contribui um conjunto vasto de referências bibliográficas mas apenas refiro as mais incisivas e acessíveis para não sobrecarregar o texto. Recordo ainda que a Revista *Educação e Matemática* nº 110, de 2010, é uma revista temática dedicada às Conexões, que tem como editora convidada Susana Carreira, e constitui um excelente recurso para aprofundar este tema.

Duas ideias sobre as conexões

O conceito de conexão, reportado com este vocábulo, projetou-se em 2000, quando o NCTM elegeu as conexões como um processo matemático essencial a desenvolver pelos alunos de qualquer idade, desde a educação infantil ao 12.º ano (NCTM, 2000). Até então, era mais vulgar ouvir-se referências às relações da Matemática com outras áreas, às suas aplicações ou até à modelação matemática. A adoção de um termo específico até então quase nada usado e a atribuição de um estatuto igual ao da resolução de problemas ou raciocínio matemático, evidenciaram a importância da abordagem das conexões na aula de matemática.

Mas a que se referem afinal as conexões? Destacam-se na literatura duas ideias transversais.

A primeira ideia tem a ver com a diversidade das conexões. Em geral, a literatura especifica conexões entre a Matemática e as outras disciplinas ou domínios do saber como a Física, a Medicina ou as Artes, entre a Matemática e a vida real, incluindo as práticas culturais diárias como tomar banho, fazer desporto ou ir ao supermercado, entre a Matemática e as profissões ou mundo do trabalho, como a engenharia, a pastelaria ou a produção de tapetes de Arraiolos. São também muito frequentes as referências às conexões dentro da própria Matemática, quer entre conteúdos de domínios distintos como, por exemplo, a Aritmética e a Geometria, quer entre conceitos e procedimentos, como por exemplo entre o conceito de área e o(s) procedimento(s) adotado(s) para determinar o seu valor. Referidas talvez com menos ênfase são as conexões relativas aos diferentes estádios de desenvolvimento das ideias e conceitos matemáticos, que deveriam ter as conceções e conhecimentos prévios que os alunos transportam consigo para a escola como ponto de partida para novas aquisições e ampliações de conhecimentos com vista à construção progressiva de um corpus mais formalizado e abstrato.

A segunda ideia tem a ver com o propósito das conexões. Muitas são as ideias que se encontram na literatura relativas a conexões e que têm a ver com ligar, relacionar, ancorar, articular, associar... mas o seu objetivo fundamental não se basta com proporcionar o conhecimento de relações mais ou menos engraçadas, mais ou menos insuspeitadas, entre diferentes domínios da Matemática ou para além dela. Por exemplo, pode ser interessante reparar que a soma de n números ímpares consecutivos é um número quadrado e a ilustração deste resultado com desenhos de quadrados progressivamente maiores é muito sugestiva, mas a mera observação não garante ir além da curiosidade. O grande propósito das conexões é que ampliem a compreensão das ideias e dos conceitos que nelas estão envolvidos e, consequentemente, permitam aos alunos dar sentido à Matemática e entender esta disciplina como coerente, articulada e poderosa — em vez de ser perspetivada, como recorrentemente acontece, como uma coleção de regras ad-hoc a aplicar em situações particulares pré-determinadas e sem outra utilidade para além da de passar nos testes.

A intencionalidade desta abordagem às conexões é bem patente nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, que defendem que os alunos devem ser capazes de reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas, de compreender como as ideias se inter-relacionam e se constroem umas com as outras de modo a produzir um todo coerente e, por último, de reconhecer e aplicar a Matemática em contextos exteriores à Matemática (NCTM, 2000).

Como tirar então partido das conexões para ampliar a compreensão da Matemática pelos alunos? Naturalmente, não basta enunciar a sua existência ou apresentar exemplos esporádicos. As conexões precisam de integrar a experiência matemática dos alunos, de forma intencional e continuada. A investigação tem vindo a mostrar que existem duas estratégias que apoiam de forma eficaz a abordagem das conexões: uma delas é a exploração de representações múltiplas e suas inter-relações, a outra é a da utilização da modelação matemática como uma tarefa estruturante do trabalho na aula. O que referir sobre cada uma delas?

A EXPLORAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS COMO ESTRATÉGIA PARA AS CONEXÕES

A representação — considerada também pelo NCTM (2000) como um processo matemático fundamental — constitui a possibilidade de comunicação acerca dos entes matemáticos, por natureza abstratos e, portanto, sem existência palpável no mundo dos objetos em que vivemos. Muitas vezes se esquece que, por exemplo, o quadrado não existe senão na nossa imaginação. O desenho que dele fazemos num papel, o quadrado que recortamos em cartolina, a descrição que dele fazemos, a designação [ABCD], todas são meras representações desse ente perfeito que idealizamos, representações apenas aproximadas mas que têm a vantagem de nos permitir lidar com o quadrado em diversas situações. E assim é para todos os conceitos matemáticos, a começar pelos próprios números.

O uso de representações múltiplas e a exploração das suas inter-relações, frequentemente referidas como conexões entre representações, oferece uma oportunidade ímpar para o estabelecimento de conexões, nomeadamente de conexões dentro da própria Matemática — mas não só. A investigação tem vindo a revelar que quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, conseguem aprofundar a sua compreensão sobre essas ideias (NCTM, 2014). Vários estudos mostram que a profundidade da compreensão está relacionada com a força das conexões entre as representações matemáticas que os alunos tiverem interiorizado. Cada representação funciona como uma lente e a sua conjugação proporciona uma imagem mais completa e articulada do conceito (Tripathi, 2008). Isto significa que não basta conhecer diferentes representações sobre uma mesma ideia. Para se ganhar compreensão, é necessário estabelecer pontes entre as diferentes representações disponíveis e interpretar umas à luz das outras.

O esquema de Lesh, Post e Behr (1987) (figura 1) reporta-se a cinco diferentes representações que podem ser convocadas para cada conceito, evidenciando as relações entre essas diferentes representações.

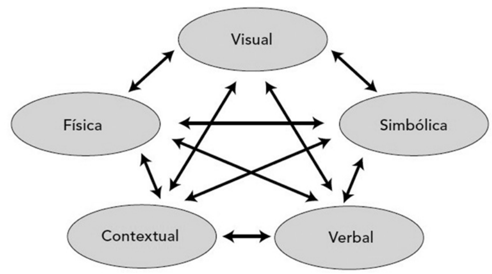


Figura 1. Representações matemáticas e suas conexões

A representação simbólica é uma representação por excelência da Matemática. Os símbolos têm um lugar único, o seu uso simplifica eficazmente a forma de referenciar algo e a sua manipulação permite alcançar resultados que, sem eles, seriam de todo impossíveis. No entanto, a artilharia simbólica não é tudo e por detrás dela ficam camuflados os significados que se revelam através da visualização das imagens (a que Bruner chama representação icónica), da experiência com os objetos físicos que se movem no espaço (a que Bruner chama representação ativa), situados em determinados contextos, e que podem ser explicados pelo uso da palavra oral ou escrita.

A título ilustrativo, podemos recorrer ao exemplo da fração. O símbolo ½ é muito eficaz e utiliza-se bem desde que negociados os significados dos dois números usados e separados por um traço. Além disso, nomeia-se facilmente: um sobre dois ou um meio. Mas a imagem que recorre ao círculo, por exemplo, mostra quanto é o todo inteiro, a sua meia parte e até que sobra outra meia parte e que as duas meias partes juntas se completam — e mostra-o de forma intuitiva sem qualquer negociação prévia — tal como acontece se um círculo de papel for dobrado ao meio e intencionalmente manipulado. Pode até experimentar-se que se se dobrar o semicírculo obtido também ao meio, se obtêm quatro partes iguais, aproveitar para introduzir o conceito de um quarto, representá-lo por ¼, observar que dois quartos correspondem a um meio, escrever ¼ + ¼ = ½ ... Até ao momento, já implicámos, à exceção da contextual, as diferentes representações, relacionando o universo numérico e o geométrico, mantendo-nos dentro da Matemática. No entanto, se ½ se reportar, por exemplo, à amplitude da volta que um dançarino executa ao girar sobre os seus próprios pés, a representação contextual vem estabelecer a conexão das anteriores com a realidade. Neste caso, a designação “um meio” passa a ser “meia volta” e não há dúvidas de que dois quartos de volta são meia volta e que meia volta mais um quarto de volta são três quartos de volta — abrindo lugar ao aparecimento natural da escrita simbólica que acompanha a perceção do movimento físico do corpo, de um seu possível registo por imagem (figura 2), da sua explicação por palavras… Daqui podem despoletar muitas ideias interessantes — por exemplo, se se girarem meias voltas um número par de vezes, completam-se voltas inteiras e fica-se voltado para o mesmo ponto; mas se se girarem meias voltas um número ímpar de vezes, completam-se voltas e meia e fica-se voltado para o ponto oposto. É um excelente ponto de partida para iniciar a adição ou mesmo a multiplicação de frações, podendo as regras derivar da análise dos casos concretos que são experienciados e têm sentido.

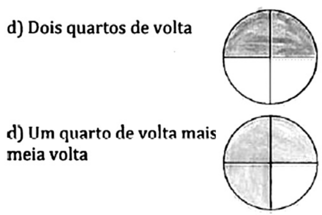


Figura 2. Representação visual de voltas e quartos de volta de alunos no Projeto MatDance

Quando se convocam diferentes representações para um mesmo conceito, em geral conectam-se diferentes domínios da Matemática pois a representação visual recorre com frequência a figuras geométricas e a representação física a objetos tridimensionais, entre os quais está o próprio corpo com a sua inserção e ocupação espacial. A representação contextual, quando pertinente, possibilita a relação do(s) conceito(s) com a situação extra-matemática em exploração.

Note-se que para estabelecer conexões não basta apresentar aos alunos diferentes representações. A presença de diversas representações não garante o aprofundamento da compreensão per si. Gojak (2013), por exemplo, refere-se ao uso de materiais manipuláveis para a introdução de conceitos mas, como ela afirma, muitas vezes estes surgem com intuito de motivação dos alunos ou de ilustrar alguma ideia sem que revertam para a exploração ou articulação da representação física com a(s) outra(s) utilizada(s). O estabelecer de conexões tem de ser intencionalmente preparado pelo professor. Os alunos precisam de ter experiências em que sejam apoiados nos seus esforços de estabelecer conexões entre o que fazem com os materiais manipuláveis e as ideias matemáticas que estes representam — e isto é válido para quaisquer representações.

A MODELAÇÃO MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA PARA AS CONEXÕES

A modelação matemática é um processo composto por uma sequência de fases bem identificadas em que se estabelecem pontes entre o mundo não matemático e o matemático. Rita Borromeo Ferri propôs um ciclo de modelação para o trabalho na sala de aula que pode ser adotado em qualquer nível de escolaridade e não apenas em anos mais avançados, como por vezes tende a pensar-se. Este ciclo foi publicado na Educação e Matemática 110, de onde recupero a figura 3.

Como a figura 3 bem ilustra — adotando uma representação visual — a modelação consiste essencialmente em matematizar, através de um objeto matemático, uma dada situação de um contexto extra-matemático, a qual se analisa e simplifica de modo a ficar tratável, retirando dessa matematização a possibilidade de agir sobre a situação real, tirando benefícios desse uso da Matemática.

Assim, o ciclo de modelação constitui uma ferramenta para o estabelecimento de conexões, nomeadamente, de conexões entre a Matemática e o que está para além dela, sejam outras disciplinas, outros domínios do saber, sejam ciências, humanidades ou artes, ou a vida do dia-a-dia e suas práticas reais. Muito embora se adeque na perfeição a situações que podem ser matematizadas através de funções matemáticas, também funciona no âmbito de modelos matemáticos de outros tipos, como, por exemplo, um esquema que traduz uma situação.

Ilustro este cenário menos comum recorrendo de novo ao projeto MatDance. Os alunos, que haviam recentemente aprendido

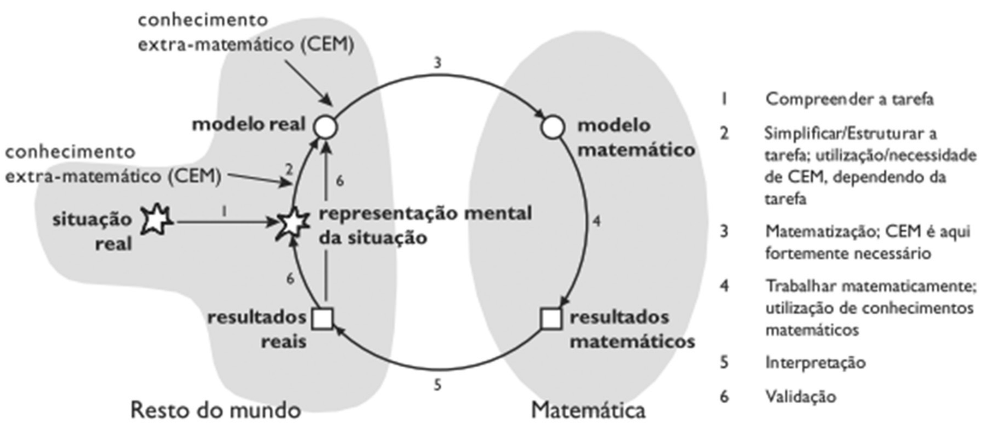


Figura 3. Ciclo de modelação matemática (Ferri, 2010)

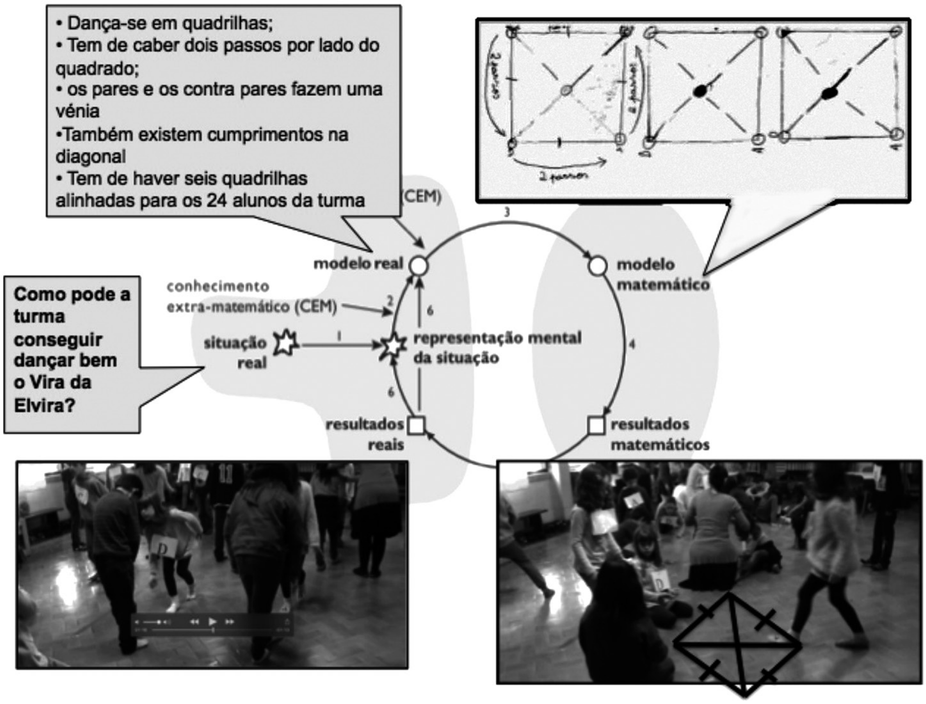


Figura 4. Conexões entre a matematica e a dança, com o modelo dos quadrados para marcar o chão e dançar melhor

uma nova dança, a do Vira da Elvira, procuravam melhorar a imagem global da coreografia executada pela turma, ainda muito desconcertada. Surgiu a ideia de se marcar o chão com pontos chave que permitissem a cada um dançar no(s) sítio(s) certo(s). Revistos em conjunto os conhecimentos extra-matemáticos relativos às condicionantes da dança, cada grupo de crianças apresentou uma proposta e foi eleito o esquema que se observa na figura 4, correspondendo ao modelo que explica a dança das quadrilhas (grupos de quatro dançarinos). E aqui o quadrado já não é só um quadrado desenhado numa folha de papel. Trata-se de um quadrado simultaneamente estático que se refere a posições de dançarinos, mas também de um quadrado dinâmico que incorpora o percurso realizado pelos dançarinos quando "percorrem" o quadrado e se detêm nas vénias sobre os seus lados e sobre as suas diagonais. E a designação [ABCD] já não é uma mera representação simbólica porque A, B, C e D são os quatro dançarinos que compõem a quadrilha e que trazem vestidos dorsais com as correspondentes letras. E a solução gerada pelo modelo para o problema, que se traduz por dançar sobre as marcas entretanto desenhadas no chão em função da proposta desenhada, pode ser apreciada e validada tal e qual ou ajustada e melhorada. Com esta experiência, os alunos têm a oportunidade de estabelecer diversas conexões, aprofundando a compreensão sobre o que é um quadrado, os elementos que o compõem, as relações entre eles e até as funções que podem ter.

A modelação matemática proporciona a oportunidade de os alunos relacionarem efetivamente as situações extra-matemáticas com a Matemática que se lhes adequa, que as explica e que, de algum modo, as controla. Esta experiência, que deve contemplar a implicação dos alunos em todas as fases do processo, reverte para o desenvolvimento de múltiplas capacidades e para a atribuição de sentido e valor aos conhecimentos matemáticos, sendo o reconhecimento da utilidade da Matemática pelos alunos uma das principais vantagens que a investigação reporta deste tipo de abordagem (Pierce & Stacey, 2006).

A modelação e a experiência que ela comporta pode constituir uma oportunidade para proporcionar uma prática matemática mais realista e completa aos alunos. Na realidade, a investigação tem vindo a revelar que a Matemática escolarizada que os alunos aprendem diariamente nas salas de aulas não os prepara necessariamente para lidar com situações efetivamente reais (Bonotto, 2001). Nestes casos, a utilização de estratégias matemáticas locais situadas no contexto são mais eficazes do que os algoritmos que são em geral ensinados na escola — estes são procedimentos genéricos poderosos mas que acabam por ter dificuldade em se adequar a muitos contextos extra-escolares. Levar para a sala de aula exemplos de situações da realidade não é suficiente para o estabelecimento de conexões. É necessário que os alunos tenham oportunidade "de experiência" que lhes permita conectar os dois mundos apartados: a vida além da sala de aula e a Matemática da sala de aula.

SÍNTESE: O QUE PROPORCIONAM AS CONEXÕES EM TERMOS DA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS?

Sistematizando resultados da investigação sobre a aprendizagem da matemática com conexões, destaco os seguintes pontos relevantes que diversos estudos evidenciam de forma transversal:

- Os alunos aprendem com maior aprofundamento

da compreensão, nomeadamente quando diversas representações são conectadas;
- Os alunos conseguem conceber a Matemática como uma atividade que faz sentido;
- Os alunos desenvolvem capacidades transversais, nomeadamente de interrogar e interpretar no contexto das conexões abordadas;
- Os alunos desenvolvem uma atitude mais favorável relativamente à Matemática, apreciando o seu valor como explicação das situações extra-matemáticas e possibilidade de predição/intervenção sobre essas situações;
- Os alunos aprendem não só conteúdos da matemática como também dos assuntos extra-matemáticos que são abordados.

A investigação mostra também que estas aprendizagens requerem intencionalidade por parte do professor e trabalho sistemático, sendo mais eficazes quando as conexões são assumidas como uma forma de abordar a Matemática nas práticas diárias — o que tem vindo a acontecer, que haja registo, no contexto de projetos interdisciplinares. A investigação mostra também que esta abordagem ainda tem muito caminho a fazer e que se depara com grandes desafios no que diz respeito ao currículo de matemática a diversos níveis — o currículo oficial é exclusivamente focado nos seus conteúdos disciplinares, os materiais curriculares têm uma lógica eminentemente disciplinar, o currículo de matemática praticado pelos professores estabelece conexões de forma esporádica e o currículo avaliado ainda não contempla as conexões nos conteúdos avaliados.

Referências

Bonotto, C. (2001). How to Connect School Mathematics with Students' Out-of-School Knowledge, *ZDM, 33*(3), 75–84.

Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática, 110,* 19-25.

Gojak, L. (2013). *Making mathematical connections.* http://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Linda-M_-Gojak/Making-Mathematical-Connections/

Lesh, R. Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in Mathematics learning and problem solving. In Janvier, C. (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

NCTM (2000). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM (tradução em 2007).

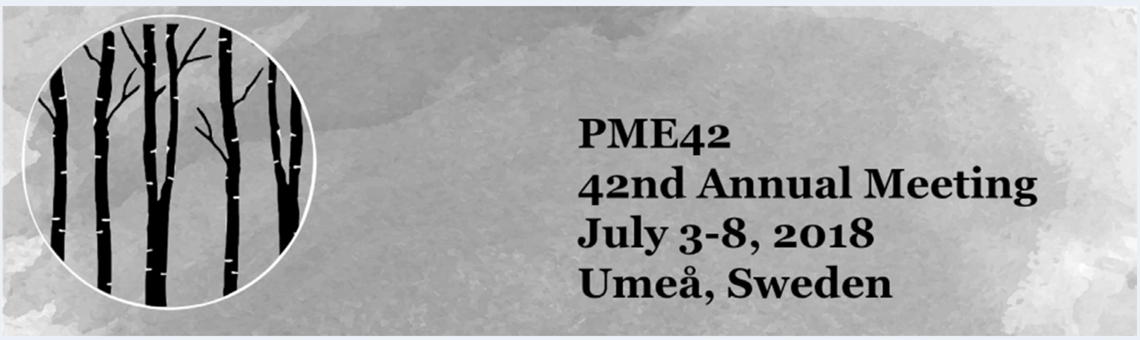
NCTM (2014). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática.* Lisboa: APM (tradução em 2017).

Pierce, R. & Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM, 38(*3), 214-225.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-444.

Ana Paula Canavarro

Universidade de Évora & UIDEF - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa



O **42nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)** realiza-se entre 3 e 8 de julho de 2018, na cidade de **Umeå, situada no norte da Suécia**. Este ano dedica-se ao tema "Delight in Mathematics Education", focando-se nos aspetos que contribuem para um ensino e uma aprendizagem da Matemática divertidos, significativos e inspiradores, tanto para os professores como para os alunos.

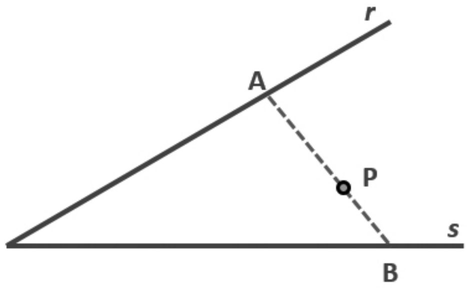
As datas de inscrição e de submissão de propostas, o programa e outras informações úteis estão disponíveis no site: **http://www.pme42.se/**

O dobro do outro

Temos duas semirretas r e s, com a mesma origem, e um ponto P entre elas. Queremos unir as semirretas por um segmento de reta AB passando por P. Onde deve ficar o ponto A (ou o B) de modo que a distância AP seja o dobro da PB?

Nota: Problema de Wayne Wickelgren, publicado no livro *How to Solve Mathematical Problems*, Dover Publications, Nova Iorque, 1995.

(Respostas até 31 de março, para zepaulo46@gmail.com)



No geoplano

O problema proposto no número 142 de *Educação e Matemática* **foi este:**

O Mário afirmou:

– Se tiver um geoplano de malha quadriculada suficientemente grande, consigo construir um triângulo retângulo em que nenhum dos lados é horizontal ou vertical e com as suas medidas a serem números inteiros! Será que o Mário tem razão?

Se sim, em área, qual é o menor desses triângulos?

Recebemos cinco respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias, Ernesto Mota (Lisboa), Luís Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Mário Roque (Guimarães).

Demos a palavra ao Carlos:

Temos que encontrar três triângulos retângulos que satisfaçam as seguintes condições:

1- Tenham lados de comprimento inteiro

2- Sejam retângulos

3- Dois deles sejam semelhantes

4- As hipotenusas desses dois sejam iguais aos catetos do terceiro.

Depois, usou uma folha de cálculo e um programa de visual basic para encontrar todos os triângulos com catetos inferiores a 1000. Por curiosidade, indica o mais "bicudo" (95, 900, 905) e o mais "parecido" a um isósceles (595, 600, 845). No fim, acrescenta:

Não me agrada o modo como resolvi este problema. OK, funcionou, mas não me agrada. Não me agrada por ser do tipo "força bruta".

Outros leitores começaram também por indicar as restrições a impor.

Como diz o Alberto:

Para que tanto os catetos como a hipotenusa do triângulo referido pelo Mário respeitem as premissas do problema têm de verificar-se duas condições:

a) A medida dos lados do triângulo têm de constituir um terno pitagórico;

b) Cada um dos catetos desse triângulo é a hipotenusa de um triângulo retângulo cuja medida dos lados constitui também um terno pitagórico.

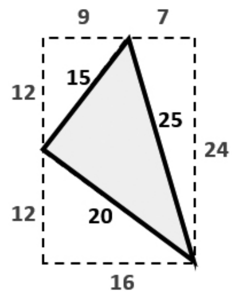
Na mesma linha de pensamento, o Luís acrescenta:

A partir dos primeiros ternos pitagóricos primitivos (3, 4, 5), (5, 12, 13), … e dos produtos destes por fatores inteiros elabora-se uma lista de ternos.

Agora, procuram-se naquela lista os dois ternos mais pequenos, cujos terceiros elementos sejam os dois primeiros de um terceiro terno; isto é, genericamente, se se tiver os ternos (a, b, c) e (d, e, f), procura-se a existência de um terceiro terno (c, f, g).

O Ernesto reforça uma das condições necessárias:

Os dois ternos pitagóricos que dão origem aos catetos do triângulo procurado (no nosso caso 9-12-15 e 12-16-20) têm de ser múltiplos de um mesmo terno pitagórico primitivo (neste caso, 3-4-5).



Para todos estes leitores, o menor triângulo nas condições impostas tem como medidas dos lados 15-20-25.

Finalmente, o Alberto vai mais longe e indica uma forma de encontrar todos os triângulos do tipo procurado:

Em geral, podemos afirmar que se representarmos por a_i-b_i-c_i e a_j-b_j-c_j ternos pitagóricos primitivos (em que i e j são números inteiros positivos, iguais ou diferentes, e representam o número de ordem do terno) e por k um número inteiro positivo, são soluções do problema os triângulos retângulos correspondentes aos ternos pitagóricos dados pela fórmula seguinte:

$$ka_ic_j\text{-}kb_ic_j\text{-}kc_ic_j$$

Por exemplo, a partir dos ternos 3-4-5 e 5-12-13 e com k=1, obtemos quer o triângulo 3x13, 4x13, 5x13 ou 39-52-65 quer o triângulo 5x5, 12x5, 13x5 ou 25-60-65

Ambos são triângulos retângulos construíveis num geoplano, sem que qualquer dos lados seja horizontal ou vertical.

Sublinhando resultados da investigação em modelação matemática e aplicações na aprendizagem

Susana Carreira

Um ensino da Matemática que ignore ou descarte, como algo supérfluo, a atividade de modelação matemática e as aplicações da Matemática em problemas do mundo real, representa um dano para a educação matemática dos jovens e futuros cidadãos. Esta afirmação perentória tem hoje uma clara fundamentação em inúmeras recomendações e orientações internacionais, entre as quais bastará mencionar a reiterada ênfase dada pelos suportes teóricos dos estudos do PISA à capacidade de interpretação, compreensão, análise e tratamento matemático de situações mais ou menos complexas que envolvem problemas da vida quotidiana e fenómenos do mundo real, tanto físico como social, como da esfera do trabalho. Muitas vezes, tais problemas ou situações problemáticas são designados como fracamente estruturados (*ill-structured* no Inglês) para acentuar a sua natureza indeterminada, ambígua, passível de múltiplas abordagens, por vezes confusa e desordenada, por contraste com questões ou problemas cuja estrutura matemática se apresenta como mais definida e previsível.

Há ainda várias ideias enraizadas quanto à forma de ver a modelação matemática no ensino e aprendizagem da Matemática. Uma delas é a de que esta atividade pressupõe uma base prévia de conhecimentos matemáticos, sem os quais o aluno será incapaz de construir e desenvolver um modelo matemático plausível da realidade. Esta ideia tem vindo a ser contestada por estudos e experiências que têm revelado nitidamente que as crianças, desde cedo, têm a capacidade de trabalhar em problemas de modelação matemática e de criar modelos válidos e interessantes para diversas situações sobre as quais são capazes de pensar, refletir e investigar.

Igualmente, há que salientar duas velhas resistências com as quais se dissimula, muitas vezes, a rejeição ou a recusa de incluir a modelação matemática e as aplicações na aula de Matemática, desde o 1.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. A primeira é a ideia de que as tarefas de modelação requerem um tempo prolongado e porventura excessivo para a sua realização. Com efeito, são olhadas, por vezes, como um entrave a um certo tipo de ensino, altamente centrado nos conteúdos, na formalização e no treino de técnicas matemáticas. A segunda resistência consiste na visão de que a modelação matemática não é verdadeiramente Matemática e não cabe nos chamados "conteúdos matemáticos", não merecendo, por isso, a mesma prioridade e a mesma urgência na aula de Matemática. Fica, pois, reservada para um momento de eventual desafogo na planificação do ensino e adquire então o estatuto de uma atividade recreativa e diferente para motivar os alunos ou desanuviar a sala de aula.

A investigação e os estudos já produzidos, tanto a nível teórico como de experiências no terreno, têm, contudo feito vingar resultados e conclusões que contrariam francamente estas e outras ideias cristalizadas. Hoje, podemos afirmar com bastante segurança que a modelação matemática tem uma importância irrefutável na aprendizagem da Matemática de todos os alunos e em todos os níveis de ensino. São vários os fóruns internacionais em que o debate e a investigação se têm desenvolvido e afirmado, neste domínio. Destacaria, por uma questão de brevidade, organizações como o ICTMA (*International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*) e o ERME (*European Society for Research in Mathematics Education*), no último dos quais existe um T*hematic Working Group on Applications and Modelling*. Serão, genericamente, estes dois fóruns que servirão de base a algumas das notas que me proponho dar neste artigo, relativamente a alguns dos principais contributos da inclusão de modelação e aplicações na aprendizagem dos alunos.

Antes, porém, importa salientar que ao falar de aprendizagem estarei a dar uma latitude alargada ao conceito, incluindo nessa amplitude aspetos que, embora muitas vezes negligenciados pelo currículo, não passam despercebidos a alguns decisores políticos. Refiro-me à importância, cada vez mais reconhecida, da capacidade de mobilização de conhecimento matemático e extra-matemático para a resolução de problemas de enorme complexidade e exigência, no mundo em que vivemos, e que rapidamente se podem exemplificar: a premência de encontrar formas eficientes de gerir recursos naturais exauríveis, a necessidade de controlar e erradicar epidemias, ou a busca de soluções eficientes de transporte de pessoas e mercadorias ou, ainda, o desenvolvimento de estratégias para lidar com a poluição e o aquecimento global, entre muitos outros grandes problemas. Para todos estes grandes problemas é óbvio que a integração de conhecimentos científicos de múltiplas áreas é indispensável e também que a participação de modeladores matemáticos será indubitavelmente uma mais-valia.

É neste contexto que vejo com apreço as palavras do ex-presidente dos EUA, Barack Obama, no seu discurso na Feira de Ciências da Casa Branca[1]: "*A ciência é mais do que uma disciplina escolar, ou que a tabela periódica, ou que as propriedades das ondas. É uma abordagem ao mundo, uma forma crítica de compreender, explorar e de lidar com o mundo, adquirindo assim a capacidade de mudar esse mundo e de compartilhar esse conhecimento acumulado. É uma forma de pensar que diz que podemos usar o raciocínio e a lógica e a investigação honesta para chegar a novas conclusões e resolver grandes problemas*".

Abraçando as ideias resumidas nesta curta declaração, apresento em seguida um exemplo do que pode ser feito na aula de Matemática com uma tarefa[2] de modelação matemática que envolve trabalho experimental e o desenvolvimento de um protótipo do mundo real.

UMA TAREFA DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA: EXPLORAR A MATEMÁTICA NO MUNDO REAL

A tarefa foi construída e aplicada em duas turmas do 9.º ano, no âmbito de uma investigação de doutoramento em curso no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Neste estudo, todas as tarefas de modelação (no total de cinco) foram realizadas em aulas de Matemática regulares, tendo como caraterísticas comuns a criação de um ambiente experimental que pressupõe a utilização de materiais relacionados com o problema proposto e a produção de um relatório escrito por cada grupo sobre o trabalho efetuado e as conclusões obtidas. Além disso, foi igualmente decidido que cada uma das tarefas colocaria um problema em que era pedida uma resposta para uma necessidade ou encomenda apresentada por uma pessoa ou grupo de pessoas.

A tarefa "Calibração de tomates" refere-se à necessidade de criar um sistema de calibração de frutos, por exemplo de tomates, segundo um sistema designado por calha (ou trilho) em V, em que os frutos deslizam ao longo de uma calha em forma de V, colocada em plano inclinado, em que os dois bordos da calha formam um ângulo agudo. À medida que os frutos rolam sobe a calha, vão caindo num coletor, de acordo com o seu diâmetro, sendo que no início a distância entre os bordos é menor e no final é maior. A figura 1 ilustra um destes mecanismos de calibração que existem efetivamente para realizar a calibração de frutos por tamanho.

Figura 1. Calibração de frutos por diâmetro num sistema de calha em V

É sabido que, atualmente, na comercialização de produtos agrícolas existem regulamentações diversas sobre a qualidade dos produtos elegíveis para o consumo. Entre outras, ainda que discutível, está a tendência para a uniformização dos tamanhos dos frutos por classes (por isso se designa também de classificação) que são consideradas aceitáveis e que levam, além disso, a uma diferenciação no preço de venda. Existem empresas cujo ramo de atividade é o da produção de sistemas de calibração de frutos e hortícolas, que apresentam as caraterísticas técnicas dos seus sistemas e demonstram como funcionam e o que permitem fazer. A figura 2 está ligada a uma dessas empresas que apresenta diversas imagens e vídeos *online* sobre os processos de calibração[3] que oferece aos seus clientes.

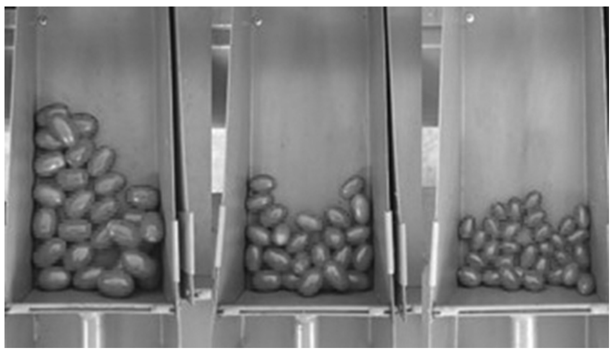


Figura 2. Um exemplo da separação de tomates por calibres

O enunciado da tarefa "Calibração de tomates" é o seguinte:

1 Disponível em https://obamawhitehouse.archives.gov/the-press-office/2015/03/23/remarks-president-white-house-science-fair

2 A tarefa "Calibração de tomates" é uma das tarefas especificamente desenvolvidas no trabalho de investigação que faz parte integrante da tese de doutoramento em Didática da Matemática, de Ana Margarida Baioa, professora de Matemática do Agrupamento de Escolas D. Manuel I – Tavira.

3 Foto disponível em http://www.mvisia.com.br/images/calibradora_tomates_03.jpg

Um pequeno produtor de tomates está a terminar a sua primeira colheita do ano. A colheita dos frutos está a ser feita de forma contínua e os tomates estão a ser armazenados em caixas. O seu objetivo é a venda dos tomates a uma empresa distribuidora que pretende a entrega dos frutos em caixas, segundo diferentes calibres. A calibração de frutos pode ser feita segundo vários critérios (cor, peso, tamanho), sendo o tamanho o mais frequente e mais simples. O agricultor contactou uma firma de equipamentos agrícolas, solicitando aconselhamento para uma forma eficiente e rápida de calibração de tomates por tamanho.

O pedido do agricultor implica ensaiar um protótipo para a calibração dos tomates, como se segue.

Resposta a consulta Nº FR26 de "Tudo fresquinho", 02/03/2017
- Amostra de tomates retirados de 5 caixas
- Análise de tamanhos e definição de calibres
- Separação pelo sistema em V
- Obtenção de modelo de separação para operação do mecanismo

Da experiência...

Tens à tua disposição uma amostra de tomates, tesoura, fita métrica e fita-cola. Utiliza o trilho formado por duas barras ligadas numa extremidade, que devem ser colocadas em plano inclinado e com um ângulo de abertura conveniente. Tens cartão rígido para colocar verticalmente por baixo do trilho de modo a formar divisórias. Os tomates, ao rolarem no trilho, deverão cair na divisão certa de acordo com o seu calibre.

...ao modelo

Define as classes de calibres dos tomates, usando os diâmetros. Regula as separações a colocar no mecanismo em forma de V para que os tomates, ao deslizarem sobre o trilho, caiam nas aberturas corretas e fiquem separados por calibres.

Antes do início da aula, foram colocados na sala os materiais que os alunos, em grupos, iriam utilizar na realização da tarefa. Cada grupo tinha uma calha ou trilho previamente construído com duas estacas de madeira, unidas numa das extremidades por uma dobradiça que permitia variar a sua abertura. Poderiam usar caixas variadas, de uso comum, que lhes foram disponibilizadas, para apoiarem as extremidades da calha de modo a que esta ficasse inclinada. Tinham ainda pedaços de cartão grosso que teriam de cortar com o tamanho adequado e colar a pequenos suportes de madeira para assim criarem separadores que posicionariam por baixo do plano da calha e que funcionariam como divisórias para a recolha dos frutos. Por fim, cada grupo recebeu uma amostra de 10 tomates com diâmetros variados.

A figura 3 ilustra um ensaio de utilização do sistema de calibração em V antes da implementação da tarefa em sala de aula.

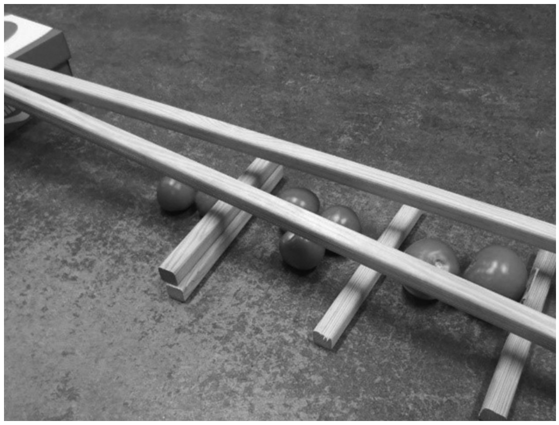
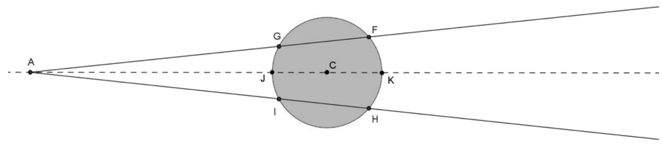


Figura 3. Testes prévios de funcionamento do material usado para simular o trilho em V

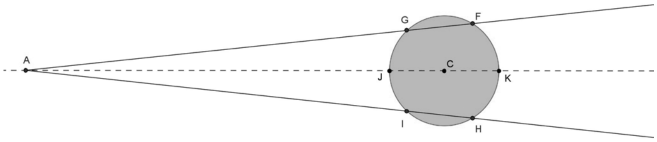
Uma das caraterísticas relevantes da tarefa está no facto de se poder usar o sistema em V para realizar experiências com frutos de tamanhos variados, podendo testar-se a melhor abertura da calha e também decidir sobre as classes de diâmetros que se irão estabelecer. Com efeito, grupos diferentes propuseram diferentes soluções para a classificação dos frutos, havendo alguns que optaram por definir apenas 3 classes de calibres e outros grupos definiram 4 ou mais classes. A possibilidade de efetuarem medições, com uma fita métrica, quer dos diâmetros dos tomates (usando o perímetro equatorial) quer das dimensões do trilho em cada uma das separações, levou ao desenvolvimento de modelos essencialmente empíricos para a definição das classes. Posteriormente, a criação de um modelo matemático para a calibração pelo sistema em V permitiu gerar uma importante discussão e exploração da situação experimental, que envolveu a construção e reconstrução de conceitos matemáticos relevantes, entre os quais: semelhança de triângulos, esfera e circunferência, diâmetro da esfera, reta tangente a uma circunferência, bissetriz de um ângulo e mediatriz de um segmento, circunferência inscrita num triângulo isósceles, razões trigonométricas do triângulo retângulo, variável independente e dependente, função linear, proporcionalidade direta, etc.

Quando se examina o funcionamento do sistema em V, percebe-se que o fruto rola apoiado sobre os dois bordos da calha (isto é, sobre duas retas concorrentes oblíquas) e que, em certo momento, cai porque deixa de ter apoio nas calhas. No momento imediatamente anterior, o tomate terá a sua circunferência equatorial tangente às duas calhas. Usando o GeoGebra para visualizar e explorar esta situação, podemos construir um ângulo agudo e um círculo com um dado raio que se vai deslocando ao longo da bissetriz (figura 4a, 4b, 4c). É evidente que estão a ser assumidas muitas simplificações neste modelo da situação real, começando por uma óbvia que é a de assumir que o tomate tem uma forma esférica.

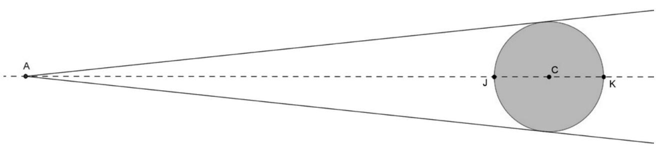
A figura 4 mostra que inicialmente a esfera está apoiada nas calhas, observando-se as cordas *GF* e *IH* nas duas primeiras posições, determinadas pelos lados do ângulo sobre o círculo. Na última posição, as cordas deixam de se observar e isso corresponde ao facto de haver apenas um ponto de contacto entre o círculo e cada um dos lados do ângulo. Nessa situação limite, o fruto está encaixado entre os bordos da calha, mas *imediatamente a seguir* ele cai no intervalo da calha e é recolhido por um recipiente. Todos os círculos de diâmetro inferior ao representado cairiam "dentro" da calha em posições anteriores, isto é, mais próximas da origem do ângulo.



4a



4b



4c

Figura 4 (a, b, c). Simulação do deslocamento da esfera sobre a calha e verificação da passagem do fruto entre as calhas

Assim, podemos estabelecer uma divisória (perpendicular à bissetriz) que nos indica essa mesma condição. Antes da divisória, cairão os frutos de calibre inferior ao dado; depois da divisória, irão cair os frutos de calibre superior. A figura 5 mostra essa divisória e permite ainda observar a medida da abertura da calha tomada com base nos pontos de intersecção da divisória com os lados do ângulo (distância entre *L* e *M*). Na experiência prática, esta medida pode ser obtida com uma fita métrica no protótipo real. Analogamente, pode medir-se o comprimento da calha desde a origem do ângulo até à divisória (distância entre *A* e *L*). Conhecendo estas medidas, podemos saber qual o diâmetro da circunferência (ou diâmetro máximo

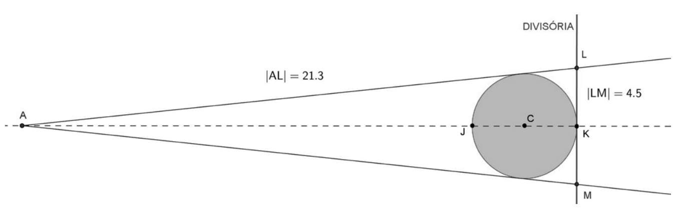


Figura 5. Representação da posição em que a esfera, ao rolar sobre a calha, cai entre os dois braços da calha, exatamente antes da divisória

da esfera). Esta medida é obviamente dada pelo GeoGebra mas pode também ser conseguida com recurso a noções geométricas.

Estamos na situação em que a circunferência está inscrita num triângulo isósceles (figura 6). Isso significa que a circunferência é tangente aos três lados do triângulo *AML* e sabemos que o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência. Portanto, o triângulo *ABC* é um triângulo retângulo em *B*. Além disso, é semelhante ao triângulo retângulo *AKL*, uma vez que têm em comum o ângulo em *A* (metade do ângulo formado pelos lados da calha).

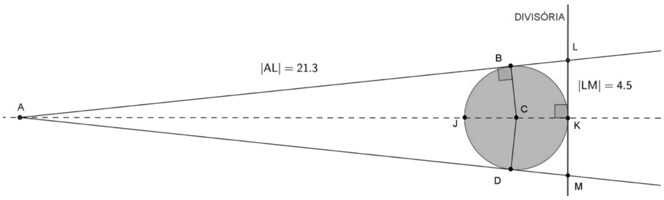


Figura 6. Circunferência inscrita no triângulo isósceles AML

Assim, de acordo com a figura 6, sabendo que $\overline{KL} = 2{,}25$ (metade da distância entre *L* e *M*) e $\overline{AL} \cong 21{,}3$, ao aplicar-se o Teorema de Pitágoras, obtém-se $\overline{AK} \cong 21{,}18$.

Em seguida, usando a semelhança de triângulos, tem-se a relação:

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{AL}} = \frac{r}{\overline{AK} - r}$$

Substituindo os valores conhecidos, determina-se o comprimento do raio da esfera:

$$\frac{2{,}25}{21{,}3} = \frac{r}{21{,}18 - r} = \frac{2{,}25 * 21{,}18}{23{,}55} \cong 2$$

Notamos, portanto, que a abertura da calha (distância entre *L* e *M*), que designaremos por *b*, é b=4,5 e que o diâmetro da esfera é $D = 4$. Isto mostra que a medida da abertura da calha não tem a mesma medida do diâmetro máximo ou calibre do tomate que vai ser recolhido nessa divisória. A colocação das divisórias deve, então, ter em conta este facto.

Uma das questões que parece ser relevante examinar, neste problema, é a seguinte: será o aumento do diâmetro proporcional à distância percorrida pelo fruto até à sua queda? Ou, de outro modo: se quisermos estabelecer as divisórias de modo a que haja um acréscimo constante do calibre, como deve ser estabelecida a medida da abertura da calha? A intuição e a experiência levam-nos a pensar que o calibre aumenta proporcionalmente à distância percorrida pelo tomate sobre o trilho. Da mesma forma, parece razoável supor que o calibre correspondente a cada divisória aumenta proporcionalmente à abertura da calha. E, do ponto de vista geométrico, se considerarmos novamente a semelhança de triângulos, veremos como colocar divisórias que limitarão os diâmetros, por exemplo, na sequência: D_1=4, D_2=6, D_3=8.

O caso do diâmetro D_1=4 está já resolvido e corresponde a uma abertura b_1=4,5 . A figura 7 evidencia a semelhança entre os sucessivos triângulos, de acordo com a qual é possível calcular a abertura da calha da 2ª e da 3ª divisória, usando a proporção: $\frac{D_1}{b_1} = \frac{D_n}{b_n}$

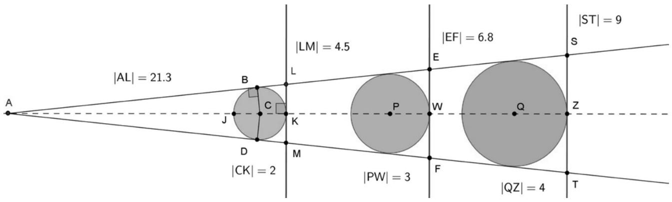


Figura 7. Variação dos diâmetros dos tomates e correspondentes aberturas da calha em V

Assim, para um diâmetro de 6 unidades, vem uma abertura $b_2 = \frac{4{,}5 \text{ x } 6}{4} \cong 6{,}8$ e, para um diâmetro de 8 unidades, a abertura será $b_3 = \frac{4{,}5 \text{ x } 8}{4} = 9$. Visto de outra forma, por cada acréscimo k que adicionarmos ao diâmetro inicial da esfera, a abertura da calha terá um acréscimo de $\frac{4{,}5}{4}k$.

Tomando a abertura da calha como função do calibre, x, é fácil concluir que se trata de uma função linear, cuja expressão será: $b(x) = \frac{4{,}5}{4}x$.

Finalmente, se preferirmos usar o comprimento l, medido sobre o lado do ângulo, desde o vértice até à posição da divisória, uma proporção análoga pode ser utilizada: $\frac{D_1}{l_1} = \frac{D_n}{l_n}$. Para esta opção, importa lembrar que o comprimento l_1=21,3 corresponde ao diâmetro D_1=4. Logo, para cada incremento k no diâmetro do tomate, faremos um aumento de $\frac{21{,}3}{4}k$ na distância entre o vértice e a divisória. Se pensarmos na função em que o comprimento l depende do calibre x, teremos então: $l(x) = \frac{21{,}3}{4}x$.

Na aula, os grupos usaram uma ou outra das duas abordagens, como se pode ver nas figuras seguintes (figuras 8 e 9).

Figura 8. Medição da distância entre o vértice e a divisória

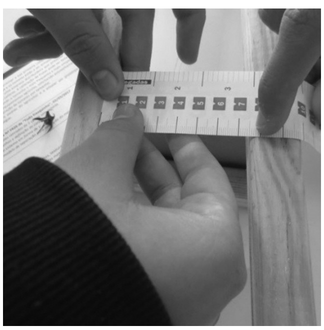


Figura 9. Medição da abertura da calha onde se colocou a divisória

A título de exemplo, um dos grupos considerou as seguintes classes de diâmetros, usando letras para as designar:

CLASSE D	CLASSE C	CLASSE B	CLASSE A
0 – 3,2 cm	3,3 – 5,2 cm	5,3 – 6,2 cm	6,3 – 7,8 cm

Possivelmente, o limite máximo foi induzido pelo tamanho do maior tomate que aparecia na amostra que o grupo recebeu. É interessante comparar esta proposta com a tabela que uma empresa do México, produtora e exportadora de produtos hortícolas, apresenta na sua página na Internet[4] para os calibres de tomates destinados a exportação (figura 10). As semelhanças são curiosas e evidenciam a capacidade dos alunos de compreenderem o problema e de trabalharem sobre ele de uma forma racional e bastante plausível.

Figura 10. Exemplo de classificação de tomates por diâmetro, em 4 classes

O modelo que foi obtido para o sistema em V, que permite saber a distância entre o vértice e a divisória, bem como a abertura da calha, como função do diâmetro, pode ser facilmente aplicado para esta ou qualquer outra proposta de classes de calibres, mantendo o ângulo de abertura da calha inicialmente estipulado. Por exemplo, para limitar o diâmetro de 56 mm, a abertura da calha onde se coloca a divisória terá de ser $b(5{,}6) = \frac{4{,}5}{4} \times 5{,}6 \cong 6{,}3$. Já a distância do vértice à divisória deverá ser $l(5{,}6) = \frac{21{,}3}{4} \times 5{,}6 \cong 29{,}8$.

CONSIDERANDO A INVESTIGAÇÃO SOBRE MODELAÇÃO MATEMÁTICA E APLICAÇÕES NA APRENDIZAGEM

O exemplo da tarefa "Calibração de tomates" e a breve referência ao trabalho que os alunos, na sala de aula, podem desenvolver nessa tarefa, tirando partido de materiais simples e usuais, permitem sublinhar as caraterísticas fundamentais da modelação matemática e as suas potencialidades para a aprendizagem. De facto, do ponto de vista da investigação, inúmeras possibilidades se abrem ao estudo e análise de aspetos relacionados com a aprendizagem neste tipo de aulas. Procurando sintetizar o que a investigação e o trabalho de muitos autores já revelaram (cf. Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007; Carreira & Baioa, 2011; Carreira, Barquero, Kaiser, Lingefjard, & Wake, 2015; English, Ärlebäck, & Mousoulides, 2016; Stillman, Blum, & Biembengut, 2015; Stillman, Blum, & Kaiser, 2017; Stillman, Kaiser, Blum, & Brown, 2013), concluo com um conjunto de notas e observações sobre as contribuições da modelação matemática e aplicações

4 Adaptado de: http://www.premierhorticultura.com/exportacion_premier_horticultura_group.html

para a aprendizagem dos alunos:

- A modelação matemática é uma atividade que *contribui para a construção de significado dos conceitos matemáticos*; os alunos, além de terem a oportunidade de perceber como os conceitos matemáticos são necessários e fecundos para resolver um determinado problema, também *encontram âncoras de análise e compreensão dos conceitos matemáticos nas próprias caraterísticas do problema* e no facto de estar relacionado com aspetos do mundo real que eles alcançam.
- O processo de modelação matemática tem como ideia chave uma permanente interação ou movimento: do mundo real para a matemática e da matemática para o mundo real. Estes dois deslocamentos são essenciais e constituem, na maioria dos casos, a maior dificuldade para os alunos. Por princípio, *perante uma tarefa de modelação, os alunos não têm qualquer ideia de qual a matemática que irão usar para realizar a tarefa.* Uma etapa importante é a da compreensão da situação real a modelar, etapa a que muitas vezes se chama *construção de um modelo real da situação.* Importa que os alunos sejam apoiados nesta etapa, sendo, por exemplo, bastante recomendável uma discussão prévia com todos os alunos sobre a forma como estão a *idealizar e compreender a situação ou o problema.*
- A modelação matemática consiste na construção de modelos de uma parte da realidade; envolve o estabelecimento de pressupostos, a simplificação da realidade e possíveis formas de a considerar. Por isso, *as tarefas de modelação matemática permitem aos alunos criar uma imagem adequada da Matemática*, em que várias soluções são admissíveis, aceitáveis e justificáveis para um mesmo problema.
- A modelação matemática anda de mãos dadas com a aplicação da Matemática; *um problema de modelação matemática tem a possibilidade de ser estendido, ampliado, ou aprofundado, em muitos e diversos sentidos*. As tarefas de modelação matemática podem ser concebidas em termos de sequências, existindo tarefas que são pensadas primordialmente para o surgimento de conceitos matemáticos novos e outras que podem ser pensadas para desenvolver e aprofundar esses conceitos.
- A modelação matemática é, evidentemente, um campo fértil para desenvolver a capacidade de resolução de problemas. E é, também, um campo importante para *fomentar o espírito investigativo dos alunos.* Numa tarefa de modelação, os alunos precisam de procurar caminhos e pistas para estabelecerem uma abordagem ao problema; precisam de interrogar e de perscrutar a realidade. Precisam, no fundo, de pôr em jogo o que conhecem sobre a situação real e de *trazer para a atividade conhecimento extra-matemático relevante, incluindo uma boa dose de intuição matemática e de senso comum.*
- As tarefas de modelação matemática são contextos ideais para promover a discussão e a troca de ideias entre os alunos. São incentivados *a perceber e a explicar decisões e assunções, e a desenvolver o seu sentido crítico.* Por exemplo, as discussões muitas vezes ditas “laterais” sobre uma dada tarefa têm-se mostrado de grande relevância por serem momentos de apuramento da consciência crítica dos alunos. Na tarefa de calibração de tomates, há excelentes oportunidades para ouvir os alunos a discutir se é razoável pagar um preço mais elevado pelo tamanho maior do tomate. Um outro aspeto que pode ser alvo de uma interessante discussão é o da escolha das unidades a utilizar e do tipo de erro ou de precisão que será sensato admitir.
- A modelação matemática pode ser favorecida e facilitada pela utilização das tecnologias digitais. Em muitos problemas, *os alunos podem completar a informação apresentada com dados e elementos que procuram na Internet.* A calculadora foi, naturalmente, um instrumento a que os alunos recorreram frequentemente na tarefa da calibração de tomates. Nesta tarefa, como se pode perceber, o recurso ao GeoGebra também oferece várias potencialidades para o aprofundamento e exploração das ideias matemáticas envolvidas.
- Os problemas de modelação matemática são, por norma, fracamente estruturados. Isto significa, como referido atrás, que as abordagens podem ser variadas entre os alunos de uma mesma turma. E também significa, regra geral, que *a capacidade de utilização de representações matemáticas é essencial.* Tem sido evidenciado pela investigação que os alunos, ao trabalharem sobre problemas de modelação, usam diversas representações, incluindo muitos esquemas, tabelas, gráficos, registos numéricos e algébricos, relações matemáticas, etc. Assim, *a modelação matemática leva os alunos, naturalmente, ao uso de múltiplas representações e à sua combinação* numa dada atividade.
- As tarefas de modelação matemática dão aos alunos a possibilidade de empreender e executar ciclos (por vezes, microciclos) de construção, validação e refinamento de modelos. Em muitas dessas iterações, *formulam conjeturas, hipóteses, ideias preliminares que posteriormente aceitam ou rejeitam.* Assim, a investigação tem mostrado que os alunos efetuam verdadeiras rotas ou trajetórias de modelação, que podem ser bastante distintas de caso para caso, *podendo os modelos obtidos atingir diferentes níveis de complexidade e de generalidade.*
- A modelação matemática tem recentemente vindo a ser considerada como uma via de trabalho consonante com uma abordagem de integração de STEM (acrónimo de *Science, Technology, Engineering, and Mathematics*). Com efeito, vários estudos têm mostrado que os alunos, mesmo no ensino básico, são capazes de trabalhar em problemas típicos

da engenharia, em que se pretende encontrar uma solução prática para um problema ou construir um protótipo. A investigação parece indicar que *a modelação matemática fica enriquecida com a implementação de ambientes de caráter experimental* em que os alunos são chamados a trabalhar em atividades práticas (*hands-on*). Esses ambientes parecem potenciar a *consciência da autenticidade dos problemas por parte dos alunos* e levá-los a compreender e sentir, de forma mais nítida, o que significa o trabalho do modelador matemático e como podem acercar-se desse trabalho na sala de aula.

Referências

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Applications and modelling in mathematics education. The 14th ICMI study.* New York: Springer.

Carreira, S., & Baioa, A. M. (2011) Students' Modelling Routes in the Context of Object Manipulation and Experimentation in Mathematics. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri R., & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, (pp. 211-220). Dordrecht: Springer.

Carreira, S., Barquero, B., Kaiser, G., Lingefjard, T., & Wake, G. (2015). Introduction to the papers of TWG06: Applications and modelling. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.790-793). Prague: Charles University and ERME.

English L. D., Ärlebäck J. B., & Mousoulides N. (2016). Reflections on Progress in Mathematical Modelling Research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 383–413). Rotterdam: Sense Publishers.

Stillman, G. A., Blum, W., & Biembengut, M. S. (Eds.). (2015). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences.* Cham: Springer.

Stillman. G. A., Blum, W., & Kaiser, G. (Eds.). (2017). *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* Cham: Springer.

Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W., & Brown, J. P. (Eds.). (2013). *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice.* Dordrecht: Springer.

Susana Carreira

Universidade do Algarve & UIDEF – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Uma experiência com peixes

A tarefa apresentada destina-se ao 8.º ano do ensino básico e pretende familiarizar os alunos com o processo investigativo em Estatística, particularmente com a realização de inferências a partir de diferentes amostras geradas por simulação, e contribuir para a compreensão das noções de distribuição e variabilidade, apoiados num software para trabalhar com dados estatísticos (*TinkerPlots*™). Para que os alunos possam entender melhor a natureza aleatória das amostras geradas pelo processo de simulação no computador pode ser vantajoso começar por fazer uma simulação com um suporte físico, tal como é proposto na parte 1 da tarefa. Em seguida, usando uma base de dados do *TinkerPlots*™ ("Demos Fish Experiment"), os alunos fazem a simulação com amostras de diversas dimensões, analisam a sua distribuição através da construção de diagramas de extremos e quartis e podem comparar a média, mediana e amplitude interquartil para cada tipo de peixe de modo a responderem à questão colocada no início da tarefa.

Para uma familiarização dos alunos com o contexto da tarefa poder-se-á sugerir que estes façam uma pesquisa sobre a aquacultura em Portugal, de modo a enquadrarem a situação proposta numa atividade humana (http://eaquicultura.pt/aquicultura-em-portugal).

Na página da Educação e Matemática - site da APM, no *link* criado no índice deste número da E e M, pode fazer o *download* dos Cartões-Peixe, material suplementar à realização desta tarefa, que foi utilizado em aulas, conforme relato do artigo Contributos da investigação para o ensino da Estatística e das Probabilidades, na página 21 desta revista.

Ana Henriques
Hélia Oliveira

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Uma experiência com peixes*

Aquacultura ou aquicultura é a produção de organismos aquáticos, como a criação de peixes, moluscos, crustáceos, anfíbios e o cultivo de plantas aquáticas para uso do homem.

Esta atividade é praticada há muito tempo, existindo registos de que os chineses já a realizavam vários séculos antes de nossa era e de que há 4000 anos os egípcios criavam a Tilápia-do-nilo (*Sarotherodon niloticus*). Atualmente, a aquacultura é responsável pela produção de metade do peixe consumido pela população mundial.

Um aquicultor tem abastecido os seus tanques rede com um novo tipo de peixe, geneticamente modificado, fornecido por uma empresa que lhe assegurou que "**os peixes geneticamente modificados, ao crescerem, atingem o dobro do comprimento dos peixes normais**".

Pensas que o aquicultor pode confiar na afirmação da empresa? O que deverá ele fazer para verificar a sua veracidade?

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Aquacultura

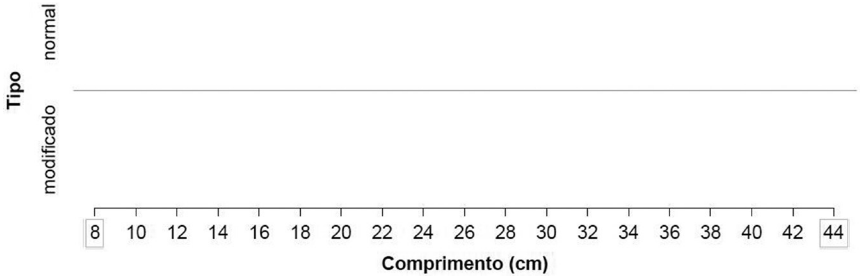
Fonte: http://extension.msstate.edu/news/2017/msu-research-outreach-boosts-catfish-industry

Tens agora oportunidade de **simular** uma 'pescaria' para responderes à questão: *Os peixes geneticamente modificados são mais compridos do que os normais? Se sim, quanto?*

Parte 1

O aquicultor decidiu criar num tanque cerca de 625 peixes, alguns de tipo normal e outros geneticamente modificados. Quando os peixes estavam completamente desenvolvidos (fase adulta), o aquicultor identificou e mediu o comprimento de cada um deles. Na tua experiência, estes peixes são simulados por pequenos cartões (cartões-peixe), com a indicação do seu tipo (normal ou geneticamente modificado) e do seu comprimento (em centímetros).

1. Regista abaixo os dados (tipo e comprimento do peixe) relativos a um conjunto de 25 cartões-peixe que a turma 'pescou'.



2. Com base na representação gráfica anterior, tenta responder à questão em análise: *Os peixes geneticamente modificados são mais compridos do que os normais? Se sim, quanto?*

3. A tua resposta seria a mesma caso tivesses selecionado uma amostra de dimensão 50? Explica porquê.

Parte 2

Propomos-te agora a exploração desta questão a partir de uma base de dados do programa *TinkerPlots* - "Fish Experiment", onde podes simular amostras de dimensões diversas (SampleSize = 25, 30, 50, 75, …).

1. Simula amostras de dimensão 25, 50 e 100. Para cada uma delas, com base na representação gráfica obtida, constrói um diagrama de extremos e quartis e regista, na tabela seguinte, algumas das medidas estatísticas que calculaste.

   Nota:**Para cada amostra**, guarda o teu trabalho. **File** – **Save as**: nome do grupo_ II_#dimensão

		Amostras de dimensão crescente		
		Amostra 1 (25)	Amostra 2 (50)	Amostra 3 (100)
Geneticamente modificados	Média			
	Mediana			
	Amplitude IQ			
Normais	Média			
	Mediana			
	Amplitude IQ			

2. Com base na informação obtida, compara as distribuições obtidas para as várias amostras e responde à questão inicial. Apresenta argumentos para justificar a tua resposta que possam ajudar o aquicultor a decidir se deve manter este negócio com a empresa fornecedora.

Font: https://www.terradouro.pt/wp-content/uploads/2017/03/Aquicultura-em-mar.jpg

* Oliveira, H., & Henriques, A. (2015). Raciocínio estatístico com tecnologia: Propostas para o ensino básico. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (ISBN: 978-989-8753-17-5)

O que nos diz a investigação sobre os contributos da avaliação para a aprendizagem: algumas notas

Leonor Santos

A mudança mais marcante que temos vindo a assistir no âmbito da avaliação é encará-la como um meio para a aprendizagem. Na atualidade, há autores que em vez de usarem as expressões *avaliação sumativa* e *avaliação formativa*, usam as expressões *avaliação das aprendizagens* e *avaliação para as aprendizagens.* Com esta mudança de nomenclatura, procura-se, por um lado, minimizar a dualidade entre as duas modalidades de avaliação e, por outro, reforçar que o que as distingue é o propósito para o qual são desenvolvidas. Por outras palavras, não é o momento em que são feitas, nem o instrumento de recolha de dados utilizado, mas sim o uso que se dá a esses mesmos dados (Santos, 2016).

A avaliação formativa tem constituído um objeto crescente de investigação nos últimos anos (Black, 2005), mesmo no campo da educação matemática, embora ainda com pouca expressão quando comparada com outros temas (Santos & Cai, 2016). O seu desenvolvimento tem tido dois objetivos primordialmente importantes: compreender se as práticas de avaliação formativa melhoram o desempenho dos alunos e procurar perceber quais as condições em que essas práticas devem acontecer para que se tornem realmente produtivas.

A AVALIAÇÃO FORMATIVA E A APRENDIZAGEM

Black e Wiliam (1998) realizaram uma revisão de literatura sobre práticas de avaliação formativa na sala de aula, feita a partir da análise de 681 artigos e capítulos publicados de estudos, sobretudo empíricos, desenvolvidos entre 1988 e 1997, sendo alguns deles também meta-análises. Neste trabalho, os autores com base em cerca de 250 artigos de diversas partes do mundo que abordam os efeitos da avaliação formativa, concluem que uma atenção especial sobre a avaliação formativa pode levar a ganhos significativos na aprendizagem. Mais, acrescentam que não encontraram nenhum estudo que evidenciasse efeitos negativos para a aprendizagem resultantes de práticas avaliativas formativas, quaisquer que elas fossem.

Esta questão continuou a interessar os investigadores. Por exemplo, anos mais tarde, os mesmos autores afirmam que uma prática continuada de avaliação formativa ajuda os alunos a aprender mesmo quando o ensino privilegia objetivos de elevado nível, sendo compatível com o sucesso em situações em que este é medido através de instrumentos limitados, tal como o caso dos exames (Black & Wiliam, 2003). Wiliam (2007) focando-se na aprendizagem matemática e tendo também por base diversos estudos, afirma que os contributos da avaliação formativa para o desempenho matemático dos alunos são maiores do que os resultantes da redução do número de alunos por turma ou do desenvolvimento do conhecimento profissional do professor, acarretando, para além disso, menos custos.

Contudo, nos estudos analisados por estes autores, não existe consenso sobre o significado atribuído à avaliação formativa e são sobretudo estudos realizados em pequena escala, embora cubram longos períodos de tempo. Estas são questões que levantam preocupação junto dos investigadores e há mesmo quem chame a atenção para a necessidade de se ter maior cuidado nos resultados que se tiram (por exemplo, falar num efeito quantificável pode ser abusivo). É o caso de Bennett (2011) que nos alerta para a necessidade de ter maior rigor na escolha dos estudos a analisar e de clarificar o significado de avaliação formativa subjacente a cada um deles.

Fica, porém, a certeza de que em todas as práticas consideradas nos diversos estudos em análise por Black e Wiliam (1998) se identificou pelo menos algum feedback entre professor e alunos, pelo que não é possível separar os efeitos formativos do feedback dos ganhos para a aprendizagem dos alunos.

O FEEDBACK

Chamamos feedback ao diálogo intencional que tem por objetivo ajudar o aluno a superar as suas dificuldades através da aproximação entre o "esperado" e o "realizado" (Sadler, 1989). Nesta perspetiva, o feedback é um elemento chave para uma prática avaliativa orientada, de forma intencional, para as aprendizagens (Black & William, 1998). Contudo, alguns autores chamam a atenção para o facto de não se poder dizer que quanto mais feedback for dado, melhor (William, 1999). Ele exige da parte do professor um saber fazer pedagógico que se liga com múltiplos fatores.

Apresento, de seguida, alguns resultados obtidos em estudos realizados em Portugal no que respeita ao feedback, em que a equipa formada por investigadores e professores de Matemática de diversos níveis de ensino trabalharam regularmente ao longo de três anos de forma colaborativa. Estes estudos seguiram uma metodologia de natureza interpretativa e a recolha de dados incluiu a observação de aulas, entrevistas a professores e alunos e recolha documental, nomeadamente as produções dos alunos.

Características do feedback e sua evolução. Em situações de avaliação, os professores fazem em geral notações e comentários, mas há uns mais eficazes do que outros (Hattie & Timperley, 2007). Nos estudos em análise, os professores assumiram desde o início que: (i) o feedback deveria ser descritivo, e não focado na pessoa do aluno; e (ii) nunca deveria surgir antes do aluno ter oportunidade para pensar e trabalhar sobre uma dada tarefa. Deste modo, as tarefas escolhidas para dar feedback foram sempre resolvidas em duas etapas, não sendo a primeira sujeita a classificação.

Ao longo de três anos foi possível identificar mudanças nas práticas de feedback dos professores envolvidos. Inicialmente, o feedback escrito recorria sobretudo a simbologia (como seja uma cruz, um traço, pontos de interrogação, para assinalar um erro), indicando ao aluno que existia um erro, mas não lhe dando qualquer pista para prosseguir (figura 1).

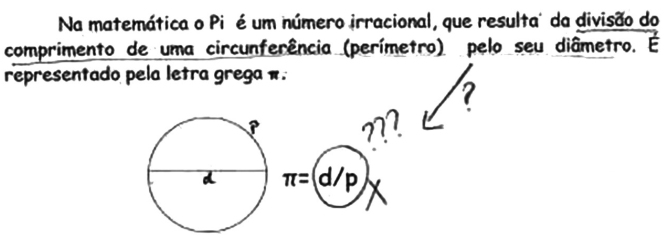


Figura 1. Exemplo de feedback com recurso a simbologia (Santos & Dias, 2007, p. 14)

Com o tempo, foi desaparecendo este tipo de feedback, sendo progressivamente substituído por comentários afirmativos ou interrogativos. A figura 2 apresenta um feedback dado a um grupo de alunos que estava a resolver uma ficha de trabalho sobre adição e subtração de frações, em que lhes foram facultadas duas folhas com o desenho de pizzas e com o picotado de cortes de igual tamanho perfazendo 2, 3, 4, 5, 6 ou 8 fatias, respetivamente:

$\frac{1}{12}$ [resposta a $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$] seria o quê relativamente à pizza 3?

Figura 2. Exemplo de feedback interrogativo (Dias & Santos, 2008, p. 140)

No início do terceiro ano, aparecem também comentários escritos na forma mista, que incluem frases afirmativas e interrogativas (figura 3):

Entendeste muito bem o problema e o esquema que utilizaste é bastante claro.
Porém esqueceste-te de uma condição! É que a caixa onde vinham os "cubinhos" de 5cm de aresta é ela própria um cubo, e ficava cheia de cubinhos.
Quantos cubos utilizas na torre? Estas dão para encher uma caixa que é um cubo?

Figura 3. Exemplo de feedback escrito na forma mista (Santos, 2009, p. 56)

Inicialmente, o foco do feedback incidia sobretudo em *factos sustentados em julgamentos de valor* ou em *chamadas de atenção*: "Não estás a seguir a mesma regra, pois não?". No terceiro ano, verificou-se grande diversidade na natureza do feedback, embora *fornecer pistas para melhorar e desenvolver o trabalho e encorajar a reflexão* fossem os mais frequentes: "Experimenta para outros valores e compara os resultados. O que concluis?" (Santos & Pinto, 2010a).

Quanto à forma sintática, a interrogativa tinha por principal objetivo levar o aluno a refletir sobre o que tinha respondido e a reorientar o seu raciocínio. De modo semelhante, a forma mista, para além destes objetivos, tinha ainda o de fornecer ao aluno uma ancoragem que lhe permitisse criar uma certa autoconfiança sobre a situação matemática proposta. Segundo um aluno do 8.º ano, com bom desempenho a Matemática, estas duas formas sintáticas dos comentários escritos eram para si importantes, embora a interrogativa fosse a mais compreensível porque lhe permitia identificar com mais facilidade como prosseguir com o trabalho: "O comentário geral é importante. Mas percebo melhor as questões do que o comentário geral. Quando o professor mete as questões, nós tentamos dar a resposta. É mais fácil!" (Santos & Pinto, 2009, p. 53). Mas nem sempre um feedback interrogativo os levava a refletir para reorientar o seu raciocínio. Por vezes, as questões eram diretamente respondidas, não contribuindo para a reorientação do seu raciocínio e, consequentemente para uma melhoria da sua produção (Santos & Pinto, 2009). Foi, por exemplo, o que aconteceu com um aluno que ao receber o feedback da figura 3, se limitou a responder à questão "Quantos cubos utilizas na torre?" sem prosseguir o desenvolvimento da tarefa.

Quanto à dimensão, o feedback curto é tendencialmente mais simples para o aluno, porque não só não lhe exige grande capacidade de análise e síntese, como o pode ajudar a concentrar-se em aspetos específicos da tarefa, como nos explica uma aluna do 8.º ano com desempenho fraco a Matemática: "Eu tinha de juntar a informação da primeira frase mais os comentários para fazer a segunda (…) Então chegou a altura em que estava toda baralhada" (Santos & Pinto, 2009, p. 54).

Podemos assim afirmar que a experiência refletida e apoiada por uma atenção intencional por parte da equipa, permite a evolução da escrita do feedback no sentido de dar mais espaço ao aluno enquanto corretor dos seus próprios erros e, portanto, construtor da sua própria aprendizagem. Contudo, há que ter em atenção que há certas formas de feedback que parecem ser mais acessíveis a certos alunos do que outros.

O feedback e a natureza das tarefas matemáticas. A aprendizagem matemática, nos dias de hoje, desenvolve-se através de diversas experiências de aprendizagem. Não basta adquirir conhecimentos, mas é necessário desenvolver processos matemáticos, onde se incluem o raciocínio matemático com atribuição de significado (NCTM, 2009), a resolução de problemas, a comunicação e o uso de representações. Para tal, é necessário que os professores proponham tarefas matemáticas válidas (NCTM, 2017) e diversas, de forma a contribuir para os diferentes aspetos do saber matemático. Coloca-se, então, a questão de saber se o modo como se orientam os alunos através do feedback é ou não alterado de acordo com a natureza das tarefas.

O estudo desenvolvido por Dias e Santos (2010) com alunos do 8.º ano de escolaridade evidencia que os feedbacks dados a produções dos alunos resultantes de tarefas exploratórias (tarefas abertas com baixo nível de dificuldade) são em geral curtos e focados sobre aspetos formais do trabalho. Os alunos revelam ser capazes de apreender a estrutura pedida, organizar as suas tentativas, apresentar as estratégias desenvolvidas, mesmo as que não se revelaram frutíferas, e melhorar as suas justificações. Os feedbacks mais frequentemente associados aos problemas (tarefas fechadas com elevado nível de dificuldade) são essencialmente expressos como comentários longos, focados em conteúdos matemáticos.

Nos exercícios de aplicação (tarefas fechadas com baixo nível de desafio), o feedback tomou a forma de comentários curtos, focados em conteúdos matemáticos. Neste caso, o feedback foi útil para a segunda versão da resolução do exercício, mas se, entretanto, o aluno não adquirisse novas aprendizagens era como se tudo começasse de novo num outro exercício.

Por último, no caso de tarefas de investigação (tarefas abertas com elevado nível de desafio) o feedback fornecido assumiu em geral a forma de comentário longo, com diversas pistas e focado em aspetos formais do trabalho. O feedback ajudou os alunos a desenvolver as suas produções, apoiando-os a criar mais exemplos e assim facilitando-lhes o processo de generalização (Dias & Santos, 2010). Este resultado foi confirmado por Semana e Santos (2010), em outro estudo igualmente desenvolvido no 8.º ano de escolaridade, que evidenciou ainda que os alunos apresentaram também explicações e justificações das estratégias adotadas. Na primeira versão do trabalho, a maioria dos estudantes apresentou explicações relacionadas com os procedimentos e não justificações matemáticas. Por outras palavras, explicaram o que fizeram, mas não por que o fizeram. Na segunda versão, com o apoio do feedback dado pelo professor foram capazes de acrescentar justificações das estratégias adotadas. A título de exemplo, apresentam-se extratos de duas versões do relatório escrito de um grupo de alunos em relação à tarefa de investigação sobre possíveis generalizações do Teorema de Pitágoras, em que era pedido que relembrassem a relação existente entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo e que investigassem o que aconteceria se construíssem outras figuras geométricas sobre os lados de um triângulo retângulo.

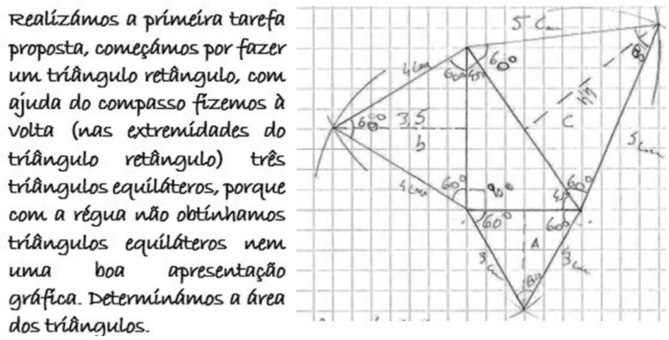


Figura 4. Explicação e apresentação dos procedimentos realizados na 1ª versão do relatório (Semana & Santos, 2010, pp. 769-770)

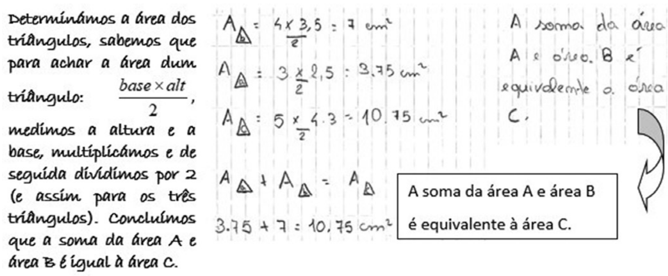


Figura 5. Explicação e apresentação dos procedimentos realizados na versão final do relatório (Semana & Santos, 2010, pp. 770-771)

O feedback que se dirigia a conceitos matemáticos que os alunos deveriam mobilizar nas suas resoluções mostrou-se difícil de fornecer. Como o objetivo era que os alunos conseguissem identificar sozinhos a forma de corrigirem os seus erros, o feedback tinha de dar uma pista sobre o conteúdo que melhor servisse aquela resposta, mas sem o referir explicitamente. Como afirmam Bangert-Drowns, Kulick e Morgan (1991), o feedback parece ser mais produtivo quando é dado a tarefas de natureza mais aberta em oposição a tarefas estruturadas, orientadas e fechadas. Contudo, as tarefas de desafio mais elevado revelaram a necessidade de o professor fazer comentários mais longos, o que poderá dificultar a compreensão dos alunos.

Há ainda a acrescentar que o trabalho em grupo se revelou mais produtivo do que o individual. A evolução verificada nos trabalhos em grupo foi muito superior à dos realizados individualmente, constituindo um ambiente favorável à autoavaliação, tal como apontado por Wiliam et al. (2004), sustentada na coavaliação (Black et al., 2002).

O feedback e as singularidades dos alunos. O feedback exige dos seus protagonistas a capacidade de estar em comunicação. Para tal, é necessário que, para além de o desejarem, ambos dominem o código que permita o diálogo, isto é, se siga uma abordagem dialógica (Nicol, 2010). Assim, quanto mais precoce for a idade da criança e/ou menos dominar o código escrito, mais importante se torna o uso do feedback oral e/ou de situações onde essa complementaridade seja a regra e não a exceção

(Santos & Pinto, 2010b). Mesmo para alunos mais velhos, muitas vezes, revela-se necessário complementar o feedback escrito com o oral (Semana & Santos, 2009). A eficácia do feedback oral prende-se com o facto de este acontecer a par das experiências de aprendizagem, possibilitando uma regulação interativa e, por isso, poder ser dirigido a cada caso e desenvolvido até ao nível necessário.

O nível de desempenho dos alunos a Matemática revelou-se também uma dimensão importante face ao uso que os alunos fazem do feedback recebido. Todos os alunos compreendem que um feedback simbólico indica a existência de um erro, mas apenas os alunos com elevado ou bom desempenho a Matemática conseguiram melhorar a sua produção quando apenas lhes foi fornecido esse símbolo, que não é mais do que uma chamada de atenção para a necessidade de repensarem a resposta. Estes alunos, quando não entendem a mensagem do professor, questionam-no, criando uma nova oportunidade de aprendizagem. Já os alunos com menor desempenho tendem a não pedir ajuda ao professor e a ignorar o feedback. Outros alunos com desempenho fraco a Matemática, em geral não o fazem (Semana & Santos, 2009).

O uso do feedback também gera, por vezes, resistências nos alunos porque também eles constroem uma representação do que é aprender e ensinar. Ora quando um professor usa o feedback provoca um conflito nessa sua representação. Normalmente o uso de feedback implica um trabalho ativo e autónomo que exige exposição pública em sala de aula, o que contraria a ideia de que aprender é ouvir e praticar/aplicar o que se ouviu e que tudo fica entre o professor e o aluno. Para certos alunos esta mudança de modo de funcionar nem sempre acontece de forma imediata e linear.

Em síntese, existe evidência múltipla de que o feedback escrito não serve da mesma forma todos os alunos, não é igualmente eficaz. É importante conhecer os alunos e dar um feedback adequado ao perfil académico de cada um, tendo em atenção as conceções que têm sobre o que é saber Matemática.

A TECNOLOGIA E AS PRÁTICAS AVALIATIVAS

Numa época em que a tecnologia faz parte da nossa vida quotidiana a vários níveis, não posso deixar de lhe fazer uma breve referência. De acordo com Leung (2013, p. 518), "a tecnologia tem vindo a mudar a natureza da matemática que ensinamos, aprendemos e avaliamos". Se tivermos em atenção o Princípio da Coerência (NCTM, 1999), que nos diz que a avaliação deve estar em sintonia com os métodos de ensino, ressalta desde logo que se os alunos usam recursos tecnológicos durante o processo de ensino, então também deverão fazê-lo em momentos formais de avaliação. Acresce que, com tal prática, a validade é igualmente garantida: "o contexto da avaliação não deve diferir de forma significativa do do ensino" (Stacey & Wiliam, 2013, p. 737).

A tecnologia favorece igualmente o desenvolvimento de métodos de ensino em que o aluno assume um trabalho sobretudo autónomo e, em simultâneo, cria condições propícias à recolha de informação por parte do professor. Por outras palavras, cria um contexto onde uma prática avaliativa formativa se torna facilitada (Santos & Santos, 2017). O uso de programas de computador que possam ser usados pelos alunos para os apoiarem na sua aprendizagem não é novo. Teve o seu início nos anos 70 do séc. XX. Fortemente marcado por perguntas de escolha múltipla e organizado por uma sequência de passos de cálculo estava pensado para poder fornecer ao professor informações válidas para a sua posterior intervenção. Contudo, esta ideia de ensino orientado não revelou ter grande eficácia na aprendizagem, pelo que, o que atualmente parece ser mais produtivo em termos de efeitos na aprendizagem são outras abordagens e/ou exploração de potencialidades da tecnologia. A título de exemplo refiro o projeto *Web Project Based Learning* (WPBL) desenvolvido em Taiwan por Lin, Hung e Hsiao (2009). O suporte tecnológico fornecia feedback a grupos de alunos que, trabalhando colaborativamente, tinham a possibilidade de desenvolver discussões *online* durante a resolução das tarefas. O estudo teve a duração de três anos e envolveu 124 alunos do 5.º ano de escolaridade, 62 constituindo o grupo experimental, e os restantes o grupo de controlo. Os resultados obtidos apontam para que o conhecimento coletivo e a criatividade podem ser desenvolvidos usando a avaliação formativa através da WPBL, mesmo em alunos jovens. Um outro estudo desenvolvido na Austrália, com 40 crianças da Educação de Infância e do 1.º ano de escolaridade, conclui que as representações dinâmicas proporcionadas por um *software* que propunha tarefas abertas (Early Digital Fraction Assessment) facilitaram o uso de frações e percentagens com aparente compreensão conceptual (Goodwin, 2008).

Uma vez que a avaliação com recurso à tecnologia se pode focar, e é desejável que se foque, em aprendizagens matemáticas relevantes, onde se incluem o raciocínio matemático e a resolução de problemas, a dimensão tempo deve ser equacionada. A avaliação com tecnologia "necessita ser desenvolvida sem pressão de tempo para que os alunos possam mostrar o que são capazes de fazer" (Stacey & Wiliam, 2013, p. 748). Contudo, este e outros aspetos terão ainda de ser estudados até porque o uso da tecnologia ainda não é uma prática tão generalizada na sala de aula de Matemática como é preconizado nos currículos a nível internacional. Mesmo para os professores que usam recursos tecnológicos, a sua integração em outras componentes do ensino e da avaliação não é simples, nem linear (Geiger, Dole, & Goos, 2011).

A CONCLUIR

O campo da avaliação das aprendizagens é muito amplo. Apenas aqui abordei uma sua dimensão, a da avaliação formativa, e mesmo essa apenas focada em certos aspetos que destaquei e que me parecem de particular importância para quem trabalha no dia-a-dia com alunos.

A investigação tem apontado para a importância de uma prática continuada de avaliação formativa, pelo papel que desempenha para a aprendizagem em geral, e para a aprendizagem matemática, em particular. Mas reconhecendo que tal prática ainda não é uma realidade no quotidiano da sala de aula, quer a nível nacional, quer internacional (Santos, 2016), é imperativo dar a conhecer aos professores e com eles refletir sobre o que nos diz a investigação acerca dos contributos de tais práticas na aprendizagem dos alunos. Sem idealizações, com realismo, e dando conta dos desafios que podem ter de enfrentar associados a esta prática.

Na discussão sobre práticas avaliativas formativas é incontornável falar-se de *feedback*. Como afirma Sadler (1989), há diversas décadas, o *feedback* é um elemento chave na avaliação formativa e talvez o mais poderoso mediador para contribuir para a aprendizagem. Os estudos empíricos que fui referindo deixam clara essa importância. Mas o tipo de *feedback*, a relação entre este e a natureza das tarefas matemáticas em presença e as características dos alunos são fatores que podem influenciar a eficácia que se pretende com o *feedback*. Reconhecê-los é provavelmente o primeiro passo para podermos minimizá-los.

Por último, e porque a tecnologia tem uma presença incontornável na sociedade, recorri a alguns estudos existentes na área da educação matemática para destacar a possibilidade de que dispomos para criar novos contextos de avaliação formativa que, quando desenvolvidos de forma adequada, podem ajudar a aprendizagem dos alunos. Mas também nesta área há que inovar, que fazer diferente das práticas de há 50 anos, cuja eficácia foi claramente questionada pela investigação (Sinclair & Yerushalmy, 2016).

Como afirmei anteriormente muito ficou por dizer! Mas será que estas breves palavras servirão para alguma coisa? Ajudam de algum modo os professores a desenvolverem de forma mais continuada práticas avaliativas para ajudar os alunos a aprender? Contribuem para despertar a curiosidade de alguns professores para aprofundarem estas questões e outras que lhe estejam associadas? Desafiam alguns professores a investigar nesta área? Uma coisa é certa, as nossas práticas avaliativas têm inevitavelmente repercussões na aprendizagem matemática dos nossos alunos! A nossa intervenção pode fazer toda a diferença! (Perrenoud, 2005).

Referências

Bangert-Drowns, R., Kulick, J., & Morgan, M. (1991). Effects of frequent classroom testing. *Journal of Educational Research, 85*, 89-99.

Bennett, R. (2011). Formative assessment: a critical review. Assessment in Education: P*rinciples, Policy & Practice, 18*(1), 5-25. (DOI:10.1080/0969594X.2010.513678)

Black, P. (2005). Formative assessment: views through different lenses. *The curriculum Journal, 16*(2), 133-135. (DOI: 10.1080/09585170500135880)

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. Assessment in Education: *Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7-74.

Black, P., & Wiliam, D. (2003). In praise of educational research' formative assessment. *British Educational Research Journal, 29*(5), 624-37. (DOI:10.1080/0141192032000133721)

Black, P., Harrison, C., Marshall, B. & Wiliam, D. (2002). *Working inside the black box*. London: nferNelson Publishing Company Ltd.

Dias, S., & Santos, L. (2008). Por que razão é importante identificar e analisar os erros e dificuldades dos alunos? O *feedback* regulador. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), A*valiação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 133-143). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. (disponível em http://spiem.pt/publicacoes/arquivo/encontro-2007/)

Dias, S., & Santos, L. (2010). O feedback e os diferentes tipos de tarefas matemáticas. *XXI SIEM* (CD ROM) (pp. 126-136). Aveiro: Associação de Professores de Matemática.

Geiger, V., Dole, S., & Goos, M. (2011). The role of digital technology innumeracy. *Proceedings PME35*, 2, 385-392.

Goodwin, K. (2008). The development of a digital assessment of early fraction learning. *Proceedings PME32, 1,* 263.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81-112.

Leung, F. (2013). Introduction to section C: Technology in the Mathematics Curriculum. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 517-523). New York: Springer Science + Business Media.

Lin, I., Hung, P., & Hsiao, C. (2009). The formative design on mathematics project-based collaborative learning for the 5th grades. Proceedings *PME33, 1*, 421.

NCTM (1999). *Normas para a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM. (obra original em inglês, publicada em 1995)

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics. Reasoning and sense making.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (2017). *Princípios para a ação. Assegurar a todos o sucesso em matemática*. Lisboa: APM. (obra original em inglês, publicada em 2014)

Nicol, D. (2010). From monologue to dialogue: improving written feedback processes in mass higher education. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 35*(5), 501–517. (DOI: 10.1080/02602931003786559)

Perrenoud, Ph. (2005). Différencier: quinze mots clés. *Vivre le primaire, 2,* 34.

Sadler, D. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, 18, 119-144.

Santos, L. (2009). Diferenciação pedagógica: Um desafio a enfrentar. *Noésis*, 79, 52-57.

Santos, L. (2016). A articulação entre a avaliação somativa e a formativa, na prática pedagógica: Uma impossibilidade ou um desafio? *Revista Ensaio, 24*(92), 637-669. (DOI: 10.1590/S0104-40362016000300006)

Santos, L., & Cai, J. (2016). Curriculum and assessment. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook in the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-185). Rotterdam: Netherlands:

Sense Publishers.

Santos, L., & Dias, S. (2007). Será que os alunos compreendem o que lhes escrevem os professores? *Educação e Matemática,* 94, 11-16.

Santos, L., & Pinto, L. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. *Proceedings PME33, 5,* 49-56.

Santos, L., & Pinto, J. (2010a). The evolution of feedback practice of a mathematics teacher. Proceedings *PME 34, 4*, 145-152.

Santos, L., & Pinto, J. (2010b). The use of feedback in written reports and portfolio: an assessment for learning strategy. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education, 14*(3), 281-297.

Santos, E., & Santos, L. (2017). Práticas avaliativas reguladoras, tecnologia e regulação do ensino. In H. Oliveira, L. Santos, A. Henriques, A. Canavarro, & J. P. Ponte (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2017, Encontro de Investigação em Educação Matemática, O ensino e a aprendizagem da Geometria* (pp. 179-192). Lisboa: SPIEM.

Semana, S., & Santos, L. (2009). Estratégias de avaliação na regulação das aprendizagens em matemática. *XIX SIEM* (CD-ROM). Viana do Castelo: Associação de Professores de Matemática.

Semana, S., & Santos, L. (2010). Written report in learning geometry: explanation and argumentation. *CERME6.* Lyon, França. (http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/working-group-5)

Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2016). In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook in the Psychology of Mathematics Education* (pp. 235-274). Rotterdam: Netherlands: Sense Publishers.

Stacey, K., & Wiliam, D. (2013). Technology and assessment in mathematics. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 722-751). New York: Springer Science + Business Media.

Wiliam, D. (1999). Formative assessment in mathematics. *Equals: Mathematics and Special Educational Needs, 5*(3), 8-11.

Wiliam, D. (2007). *What does research say the benefits of formative are?* Assessment research brief. Reston, VA: NCTM. (acedido em 21 de novembro de 2017, http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_05_-_Formative_Assessment.pdf)

Wiliam, D.; Lee, C.; Harrison, C., & Black, P. (2004). Teachers developing assessment for learning: Impact on student achievement. *Assessment in Education, 11*(1), 49-65.

Leonor Santos

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Na sequência do trabalho a que as diversas associações profissionais foram convidadas no âmbito do projeto Autonomia e Flexibilidade Curricular, a Associação Portuguesa de Educação Musical (APEM), a Associação Nacional de Professores de Educação Visual e Tecnológica (APEVT), a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP), em colaboração com o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, propuseram-se realizar um encontro sobre a temática da interdisciplinaridade centrada em projetos, experiências e propostas, dirigido aos professores do 1.º ciclo e do 2.º ciclo do ensino básico nas áreas de Língua Portuguesa, Matemática, Música, Educação Visual e Educação Tecnológica.

Este Encontro, **"Interdisciplinaridade: Projetos e desafios"**, realiza-se no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa no dia 3 de março de 2018 e será certificado como ação de curta duração (Despacho n.º 5741/2015 Artigo 3.º).

O papel da tecnologia na aprendizagem da matemática: contributos da investigação

Neste artigo procuramos traçar um quadro que nos dê uma panorâmica do papel que a tecnologia tem desempenhado na investigação relacionada com a aprendizagem. Identificando a época em que a tecnologia começa a estar ao serviço do processo de ensino/aprendizagem e cruzando esse início com a investigação em Educação Matemática produzida em Portugal procuramos traçar um quadro de correspondência entre a evolução da tecnologia e o aparecimento de trabalhos de investigação que preconizem as aprendizagens dos alunos. Notamos que há uma relação direta e estreita entre ambas as áreas e que a investigação tem acompanhado a evolução da tecnologia dando indicações sobre o papel que esta pode ter nas aprendizagens dos alunos. Dada a quantidade de trabalhos de investigação que existem em Portugal não nos é possível referenciar aqui todos, pelo que se optou por dar exemplos de títulos de alguns deles que ilustram os períodos em destaque. Para um estudo mais exaustivo o leitor poderá encontrar a maior parte destes trabalhos nos repositórios das instituições de Ensino Superior.

A TECNOLOGIA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: INTEGRAÇÃO E EVOLUÇÃO

A introdução das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no sistema de ensino português remonta aos anos 80 do século passado, com a implementação do projeto Minerva. Uma análise breve dos currículos (programas) de matemática mostra-nos uma crescente e incessante procura pela integração das várias ferramentas computacionais que se foram desenvolvendo, com exceção dos programas implementados em 2013 e anos seguintes, onde há um retrocesso claro no que se refere à utilização das tecnologias no processo de ensino.

Embora os programas apontem essencialmente para uma integração crescente das ferramentas computacionais, nem sempre foi essa a tendência quando olhamos para a implementação do currículo, quer ao nível do currículo que é moldado pelos professores, quer ao nível do currículo que é colocado em ação na aula de matemática. As razões para esta fraca correlação entre o que é preconizado no currículo e nas orientações curriculares e o que é posto em ação pelos professores pode ser explicada por vários fatores, nomeadamente a falta de recursos tecnológicos adequados, a necessidade de formação na utilização e integração das várias ferramentas e a exequibilidade do currículo condicionada pela dimensão das turmas.

Embora as questões da fraca integração das TIC no processo de ensino e aprendizagem sejam transversais ao longo deste período, o mesmo não se pode dizer acerca da evolução das ferramentas disponíveis. Com a implementação do projeto Minerva começaram a ser divulgados alguns *software*s e a ser construídos outros, alguns destes com características próximas das aplicações que hoje em dia são utilizadas na maior parte dos dispositivos móveis (APPS). Após o projeto Minerva seguiram-se outros programas de âmbito nacional com vista à introdução das tecnologias na escola, como o Nónio-Século XXI, Internet na Escola, CRIE ou PTE, que procuraram manter e reforçar a presença de ferramentas cada vez mais poderosas com o objetivo de potenciar a qualidade do ensino ministrado e a aprendizagem dos alunos. Esta evolução chegou aos nossos dias com o desenvolvimento de uma grande diversidade de ferramentas computacionais, que na maior parte das vezes contrasta com o reduzido uso que lhes é dado na escola e nos contextos educativos formais. Parece assim, cada vez mais distante, uma correlação forte entre a evolução das tecnologias que podem ser aplicadas à educação e a sua utilização efetiva em contextos de aula, como ferramentas para ajudar o aluno a pensar e a desenvolver o seu raciocínio. É neste contexto de evolução tecnológica com mais de 30 anos que vamos analisar e equacionar o papel que a investigação em educação matemática realizada em Portugal, tem tido na aprendizagem da Matemática.

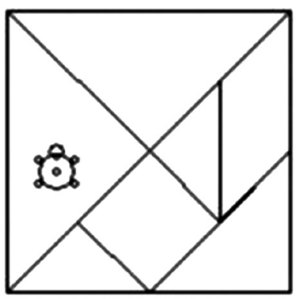
A TECNOLOGIA E O PROCESSO INVESTIGATIVO

Para organizar esta secção optou-se por seguir o aparecimento e desenvolvimento das tecnologias e estabelecer a sua relação com os trabalhos de investigação que as acompanharam, usando-as como objetos de estudo. Nesta sequência faz-se primeiramente uma abordagem mais centrada na geometria, seguida de ferramentas de tratamento algébrico, envolvendo a representação gráfica e manipulação numérica e termina-se com uma referência mais destacada ao papel da calculadora gráfica. A evolução de todas estas ferramentas é acompanhada pela investigação sobre as mesmas com o objetivo de estabelecer o seu papel na aprendizagem dos alunos.

Podemos considerar que os trabalhos de investigação em educação matemática em Portugal começam a ganhar expressão na mesma época em que se dá a implementação do projeto Minerva. A criação e o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem poderosos, como eram referidos por Papert, baseados na utilização de ferramentas computacionais inovadoras, mostravam que era possível centrar as aprendizagens matemáticas nos alunos levando-os a simular ambientes de aprendizagem de natureza construtivista. Rapidamente os investigadores se sentiram atraídos por estes ambientes computacionais, onde era possível identificar sequências de aprendizagem de tópicos específicos que colocavam em evidência os modos de pensar e raciocinar dos alunos que neles trabalhavam. O aparecimento da linguagem Logo e o recurso ao Logo.Geometria marcaram uma época inicial onde as fronteiras entre o trabalho desenvolvido pelos professores e pelos investigadores eram por vezes ténues e os papéis de ambos facilmente se confundiam. Podemos relembrar o que dizia Veloso (1989) a propósito da utilização desta ferramenta:

> Desde há cerca de dois anos que o programa educacional LOGO. GEOMETRIA vem sendo utilizado de modo sistemático por algumas professoras do Ensino Secundário em Lisboa e, de modo esporádico, por outros professores noutros pontos do país. LOGO.GEOMETRIA é um programa educacional para o ensino da Geometria. Trata-se de um conjunto coerente e extenso de procedimentos na linguagem LOGO, que facilitam aos alunos o desenvolvimento de actividades de diversos tipos em Geometria Elementar. Este programa parte do princípio que a iniciativa da aprendizagem deve pertencer a todo o momento aos alunos e ao professor… (https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/nonius/nonius20_1.html)

```
aprenda logo.tangram :Ltan
pf 100*raizq 2 pd 135 tri (2*:Ltan)
pe 45 pf 100*raizq 2 pd 135 tri (2*:Ltan)
pe 45 pgramo :Ltan
pf 50*raizq 2 tri 50*raizq 2
pd 45 pf :Ltan pd 90
pe 90 quadrado :Ltan
pf :Ltan pd 45 pf 50*raizq 2
un pd 90 mudepos[25 60]
fim
```



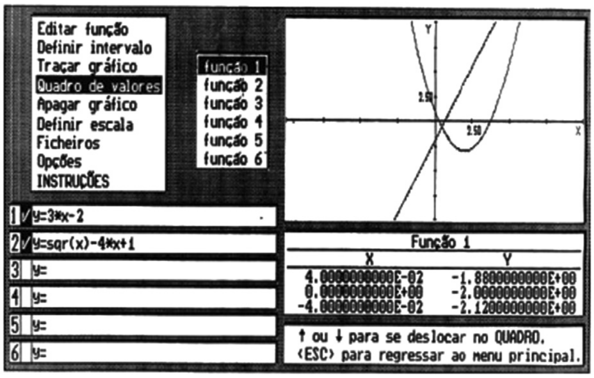
Este ambiente computacional veio proporcionar o desenvolvimento de alguns trabalhos de investigação. Podemos referir as teses de mestrado com os títulos "Logo na educação matemática: um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos" (Matos, 1991) e "O computador na aprendizagem da geometria" (Saraiva , 1991), que com enfoques diferentes marcam esta época na relação entre a tecnologia e o seu contributo para a aprendizagem. O primeiro destes estudos tem como duplo objetivo investigar em profundidade as atitudes dos alunos através da compreensão das suas conceções sobre a Matemática, e iluminar a compreensão acerca da eventual contribuição dos computadores na promoção de atitudes positivas destes em relação à Matemática. O segundo estudo centrou-se na aprendizagem da geometria com recurso ao Logo, evidenciando as suas dimensões vetorial e analítica.

Esta ligação entre tecnologia e investigação começa a ser alargada à utilização de outras ferramentas computacionais da época, salientando-se aqui uma forte ligação entre os investigadores e os professores que estão no terreno a trabalhar com os seus alunos.

Com o passar do tempo e a evolução das ferramentas, entretanto disponíveis, o tema da geometria continuou a ser um campo de pesquisa preferencial devido ao aparecimento de *software*s como o *Cabri-Géomètre* ou o *Geometer's Sketchpad*. Há um interesse redobrado pela utilização destas ferramentas e pela sua introdução no processo de ensino e aprendizagem. Embora estes dois *software*s trabalhem conteúdos de geometria a sua conceção original seguiu caminhos diferentes. Destaca-se neste ensaio a natureza do *Cabri-Géomètre* que se apresenta como uma ferramenta bastante direcionada para o apoio à investigação.

A utilização destes *software*s deu origem a vários trabalhos de investigação, onde podemos destacar títulos como "Uma experiência educacional: avaliação do trabalho com o *Geometer's Sketchpad* na aula de matemática" (Paiva, 2009), "O estudo de pavimentações regulares e semi-regulares com ambiente de geometria dinâmica" (Vieira, 2011), "Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: um estudo no 9º ano de escolaridade (Junqueira, 1995) ou "O *Cabri-Géomètre* na resolução de problemas" (Coelho, 1996). Constata-se que estes trabalhos estão muito direcionados para a aprendizagem dos alunos recriando ambientes de aprendizagem onde estes estão no centro do processo. Neste contexto investigou-se como é que os alunos exploram, realizam, justificam, investigam e resolvem problemas num AGD (Ambiente de Geometria Dinâmica) e como é que isso os habilita a compreender objetos e relações geométricas, a formular conjeturas e a elaborar argumentos indutivos e dedutivos. Procurou-se ainda compreender as relações existentes entre a avaliação e a aplicação de tarefas com o uso do *Geometer's Sketchpad* e as suas repercussões nas aulas de matemática.

O contínuo desenvolvimento deste tipo de ferramentas passou pelo aparecimento de outros *software*s tendo recentemente culminado numa ferramenta bastante completa, o GeoGebra. Ao longo deste período os investigadores continuaram a explorar as potencialidades destas ferramentas na aprendizagem da geometria, sendo que nos últimos tempos esta utilização procura investigar não só problemas de geometria, mas também a sua relação com a álgebra, quer através do cálculo simbólico quer do estudo gráfico de funções. São exemplos de trabalhos de investigação desenvolvidos nesta área teses com os seguintes títulos: "Aprendizagem das funções no 8º ano com o auxílio do *software GeoGebra*" (Candeias, 2010), "Geometria: um estudo sobre ângulos e polígonos, no 9º ano de escolaridade, com recurso ao *GeoGebra*" (Salvador, 2013), "A matemática e as TIC no processo de ensino e aprendizagem: o *geogebra* no ensino de funções e gráficos de uma função" (Van-Dúnem, 2016) ou "*GeoGebra* e iTALC numa abordagem criativa das isometrias" (Coelho, 2013). De notar que todos estes trabalhos se situam no domínio das aprendizagens e que a sua abrangência já vai muito para lá da geometria. Alguns destes trabalhos centram-se no processo de ensino e aprendizagem de conceitos específicos, como é o caso dos conceitos de ângulo, ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência, as propriedades que relacionam os ângulos ao centro, ângulos inscritos e arcos de uma mesma circunferência e as propriedades relativas à soma dos ângulos internos de polígonos convexos. É possível identificar, noutros trabalhos, uma maior transversalidade relacionando os conceitos de geometria e funções, onde o *software* desempenha um papel de mediador das aprendizagens, ou ainda a criação de ambientes de aprendizagem cooperativos e colaborativos com especial enfoque na criatividade dos alunos e a ligação entre ambientes digitais e os ambientes de "papel e lápis".

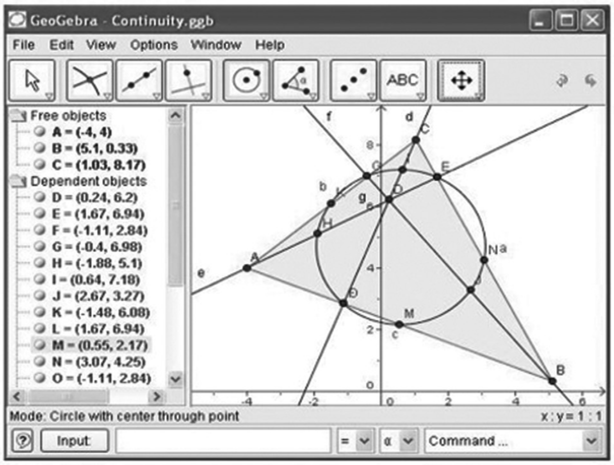


O estudo de funções e o cálculo simbólico começam a ganhar terreno com o recurso a este tipo de ferramentas. É ainda importante destacar o papel desempenhado por elas na criação de aplicações mais simples, *applets*, que têm raízes nos diferentes *software*s atrás referidos e que têm vindo a ter um papel cada vez mais importante no processo investigativo. São exemplo disso mesmo trabalhos de investigação como, por exemplo, "A utilização das aplicações interativas no ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau" (Oliveira, 2014) ou "*Applets* na aprendizagem matemática em situação de aulas de apoio ao estudo" (Andrade, 2014). Os resultados obtidos nestes estudos parecem indicar que as *applets* contribuíram para a mobilização e construção de conhecimentos matemáticos, bem como para promover o gosto dos alunos pela Matemática. Em ambos os casos se conclui que elas podem funcionar como instrumento mediador das aprendizagens, uma vez que os alunos conseguiram apropriar-se dos conceitos matemáticos através das mesmas. Por exemplo, no estudo das equações do 1º grau, permitiram aos alunos efetuar a passagem da aritmética para a álgebra reforçando o uso natural dos princípios de equivalência para que os alunos compreendam a sua aplicação.

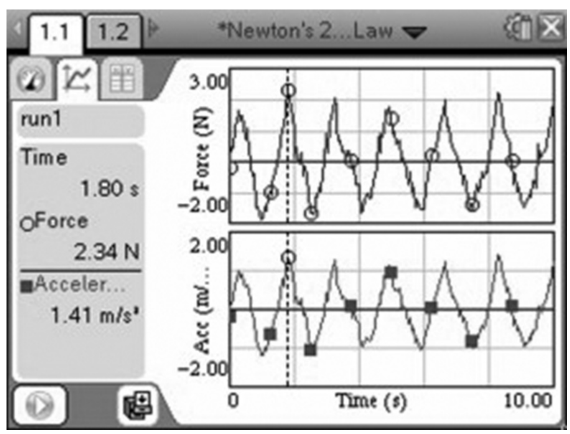
A investigação no domínio da álgebra incluindo a representação gráfica de funções com recurso à tecnologia nem sempre seguiu um percurso tão linear como o que acabamos de descrever para o caso da geometria. Com o aparecimento do projeto Minerva os *software*s de tratamento algébrico tinham como principal ferramenta a folha de cálculo. A apropriação desta ferramenta em termos de investigação teve o seu auge ainda no final dos anos 80 onde é possível identificar trabalhos de investigação, como é o caso da tese de mestrado com o título "A folha de cálculo na Educação Matemática – uma experiência com alunos do ensino preparatório" (Moreira, 1989). Seguiram-se outros trabalhos como os estudos relativos à "A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo" (Carreira, 1992) ou "O desenvolvimento do pensamento algébrico com recurso à folha de cálculo: um estudo com alunos de 9º ano" (Mariano, 2013). No primeiro estudo procurou-se investigar como alunos do ensino preparatório podiam beneficiar do uso desta ferramenta, quer na construção de conceitos, quer no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Os estudos seguintes recorrem às potencialidades da folha de cálculo no domínio da modelação e do pensamento algébrico para ajudar os alunos na construção de conceitos matemáticos específicos. Com o avanço das tecnologias foram surgindo novas ferramentas que vão dar expressão à análise gráfica de muitas das representações algébricas e numéricas antes tratadas. Surgem programas de traçado de gráficos que vêm potenciar o estudo das funções e começam a aparecer trabalhos de investigação suportados na utilização destas ferramentas. Como exemplo desses trabalhos podemos considerar "O computador e o Programa ESTUDUFUNC no estudo das funções" (Duarte, 1992), "A Aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações" (Domingos, 1994) ou o "Desenvolvimento de representações gráficas para o ensino de funções reais de duas variáveis no programa Matemática" (Moreira, 1994). Nestes estudos podemos encontrar investigações que usam *software*s de traçado de gráficos ainda numa fase inicial do seu desenvolvimento, mas onde o papel das diferentes representações do conceito ganha uma dimensão investigativa bastante forte. No terceiro estudo referido são ainda analisados vários *software*s educativos que vão desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico até aos primeiros anos do Ensino Superior.

O desenvolvimento da investigação nesta área beneficiou grandemente da evolução destas ferramentas e, como já foi referido acima, a utilização de programas como o GeoGebra ou a calculadora gráfica tem vindo a ter uma presença contínua nos trabalhos de investigação mais recentes.

Embora os softwares de traçado de gráficos tenham tido grandes desenvolvimentos, a calculadora gráfica acabou por ter um papel muito importante no apoio à investigação em



contexto escolar e consequentemente na aprendizagem dos alunos. Numa fase anterior ao aparecimento da calculadora gráfica, a calculadora científica ocupou algum lugar de destaque no apoio à investigação. Surgiram alguns trabalhos com recurso a esta ferramenta, como por exemplo "A construção do conceito de proporcionalidade mediada pela utilização da calculadora: um estudo com alunos do 6º ano" (Paula, 2000) ou "A calculadora no percurso de formação de professores de Matemática" (Silva, 1991), onde a calculadora aparece quer no âmbito da formação de professores quer na construção de conceitos específicos. Com a rápida evolução das calculadoras científicas para as calculadoras gráficas, estas assumem grande preponderância e chegam rapidamente às escolas, tornando-se uma das principais ferramentas computacionais ao serviço do ensino e aprendizagem no ensino secundário. Esta presença da calculadora gráfica nas escolas leva a um grande incremento em termos de trabalhos de investigação que procuram clarificar o seu papel no processo de ensino e aprendizagem. Numa fase inicial estas calculadoras são um apoio forte à representação gráfica e ao desenvolvimento de algum trabalho algébrico e de tratamento e análise de dados. São muitos os trabalhos de investigação neste domínio, como por exemplo: "A utilização da calculadora gráfica na aula de matemática: um estudo com alunos do 12º ano no âmbito das funções" (Semião, 2007), "Funções quadráticas no 10º ano usando a calculadora gráfica" (Silva, 2009), "A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário" (Consciência, 2014), "O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades" (Cardoso, 1995), "A utilização da calculadora gráfica por alunos do Ensino Secundário" (Rocha, 2000) ou "A calculadora gráfica no ensino/aprendizagem de funções: uma experiência no ensino superior politécnico" (Domingues, 1999). Os vários estudos referidos acima apresentam um mesmo denominador comum – a aprendizagem de conceitos funcionais, relacionados com tópicos específicos do currículo. São várias as referências às dificuldades dos alunos na utilização eficiente da calculadora, ainda que em vários casos se verifiquem melhorias no seu desempenho. A motivação dos alunos para o estudo dos conceitos está também presente nalguns dos estudos, tendo a calculadora desempenhado um papel fundamental. Verificamos que há uma aposta forte na investigação nos níveis de escolaridade mais avançados ao mesmo tempo que a aprendizagem de conceitos está no centro destas abordagens. Mais recentemente as calculadoras gráficas começaram a apresentar potencialidades mais amplas, envolvendo não só abordagens ao estudo das múltiplas representações de funções ou de tratamento de dados, mas sobretudo integrando outras ferramentas como ambientes de geometria dinâmica, folhas de cálculo interativas, sistemas de cálculo algébrico simbólico (CAS) e ferramentas de recolha e tratamento de dados em tempo real por meio de sensores. Estas dimensões começam a ser percecionadas como potenciadoras da criação de ambientes de aprendizagem ricos e inovadores, à semelhança com o que acontece com os ambientes de geometria dinâmica mais recentes referidos acima, potenciando a possibilidade de desenvolver trabalho de investigação muito relevante em todas as áreas do currículo. Começam a aparecer alguns trabalhos de investigação neste domínio, como por exemplo: "Potencialidades das tarefas de modelação matemática com recursos a calculadoras gráficas e sensores na aprendizagem matemática dos alunos" (Lança, 2007), "O papel das tecnologias na aprendizagem da matemática em alunos com síndrome de asperger - estudo de caso" (Almeida, 2012) ou "A utilização da calculadora gráfica no estudo das funções trigonométricas" (Mesquita, 2014). Nestes estudos a calculadora com as suas diversas potencialidades tem um papel central no desenvolvimento do trabalho de investigação. Privilegiando a aprendizagem dos alunos com recurso à modelação de situações problemáticas é possível contribuir para uma consolidação dos conceitos matemáticos em estudo, mesmo em situações de alunos que têm necessidades educativas especiais. O uso que é feito pelos professores continua a condicionar a forma como os alunos usam a calculadora.



EM SÍNTESE

Fazendo o exercício de procurar estabelecer uma relação entre a investigação que tem sido desenvolvida com base na tecnologia e a aprendizagem dos alunos, decidimos fazer uma viagem que procura enquadrar esta temática desde os anos 80 do século passado até ao presente. De facto, é com o aparecimento do projeto Minerva que a tecnologia chega efetivamente à escola, ao mesmo tempo que a investigação portuguesa em educação matemática assume um papel de destaque. Podemos constatar que a tecnologia e a investigação no domínio das aprendizagens se interligam, sendo as ferramentas computacionais um suporte privilegiado para a recolha de dados junto dos alunos com o objetivo de aferir as aprendizagens realizadas e a qualidade dos ambientes de aprendizagem que eram simulados nestes processos de investigação. Constatamos ainda que a evolução da tecnologia determina em boa medida as investigações realizadas, permitindo alargar o espectro de trabalhos que cobrem praticamente todas as dimensões do currículo. Nesta interação é interessante verificar que há muitos professores envolvidos em trabalhos de investigação o que deixa prever que a investigação realizada tem condições para chegar às escolas e ser disseminada junto dos restantes professores.

Nesta breve incursão pela investigação realizada podemos constatar que os ambientes de geometria dinâmica foram especialmente potenciadores de aprendizagens, mostrando-nos que é possível potenciar as aprendizagens de tópicos e conceitos específicos ligados à geometria, à álgebra e às funções, através do estabelecimento de conjeturas que traçam o caminho para a prova das mesmas. A democratização do acesso a ferramentas de aprendizagem é largamente atingida com as últimas gerações da calculadoras gráficas, onde é possível incorporar uma variedade de *softwares* com características particulares, mas que ao mesmo tempo podem ser interligados potenciando o processo de modelação matemática. Vários trabalhos de investigação são desenvolvidos com recurso a estas calculadoras e todos eles apontam para uma compreensão efetiva das diferentes representações dos conceitos em estudo, sendo o processo de modelação especialmente destacado para esse fim. No que se refere às conceções dos professores e alunos é possível verificar alterações significativas que ainda carecem de períodos de utilização das ferramentas mais prolongados no tempo para que possam configurar conceções mais estáveis e duradouras.

A disseminação dos resultados da investigação é por vezes apontada como sendo pouco eficaz, ainda que a maior parte destes trabalhos sejam disponibilizados nos repositórios das Instituições de Ensino Superior. Esta Revista tem tido a preocupação de divulgar alguns desses trabalhos sintetizando-os em pequenos artigos que vão saindo nas suas várias edições e onde se relatam as vantagens da utilização destas ferramentas na aprendizagem dos alunos.

Referências

Almeida, R. M. F. (2012). *O papel das tecnologias na aprendizagem da matemática em alunos com síndrome de asperger - estudo de caso.* Tese de mestrado, Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Retirado de https://run.unl.pt/handle/10362/8948

Andrade, A. P. S. (2014). *Applets na aprendizagem matemática em situação de aulas de apoio ao estudo.* Tese de mestrado, Universidade de Aveiro. Retirado de https://ria.ua.pt/handle/10773/14614

Candeias, A. F. F. (2010). *Aprendizagem das funções no 8º ano com o auxílio do software GeoGebra.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Cardoso, M. T. P. (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Coelho, A. J. A. (2013). *GeoGebra e iTALC numa abordagem criativa das isometrias.* Tese de mestrado, Universidade de Aveiro. Retirado de https://ria.ua.pt/handle/10773/12422

Coelho, M. I. P. (1996). *O Cabri-Géomètre na resolução de problemas.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Consciência, M. M. C. (2014). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa. Retirado de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/10521

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Domingues, M. F. F. C. (1999). *A calculadora gráfica no ensino/aprendizagem de funções: uma experiência no ensino superior politécnico.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Duarte, F. B. (1992). *O computador e o Programa ESTUDUFUNC no estudo das funções.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Junqueira; M. M. (1995). Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: um estudo no 9º ano de escolaridade. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Lança, C. G. E. (2007). *Potencialidades das tarefas de modelação matemática com recursos a calculadoras gráficas e sensores na aprendizagem matemática dos alunos.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Mariano, E. M. D. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico com recurso à folha de cálculo: um estudo com alunos de 9º ano.* Tese de mestrado, Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Retirado de https://run.unl.pt/handle/10362/10184

Matos, J. F. (1991). *Logo na educação matemática: um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Mesquita, J. G. M. S. (2014). *A utilização da calculadora gráfica no estudo das funções trigonométricas.* Tese de mestrado, Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Retirado de https://run.unl.pt/handle/10362/14579

Moreira, M. L. (1989). *A folha de cálculo na Educação Matemática – uma experiência com alunos do ensino preparatório.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Moreira, O. M. V. (1994). *Desenvolvimento de representações gráficas para o ensino de funções reais de duas variáveis no programa Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, E. N. (2014). *A utilização das aplicações interativas no ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau.* Tese de mestrado, Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Retirado de https://run.unl.pt/handle/10362/14578

Paiva, J. C.M. R. S. (2009). Uma experiência educacional: avaliação do trabalho com o Geometer's Sketchpad na aula de matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Paula, I. M. G. D. (2000). *A construção do conceito de proporcionalidade mediada pela utilização da calculadora: um estudo com alunos do 6º ano*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Rocha, M. H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do Ensino Secundário.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Salvador, C. M. F. (2013). *Geometria: um estudo sobre ângulos e polígonos, no 9º ano de escolaridade, com recurso ao GeoGebra.* Tese de mestrado, Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Retirado de https://run.unl.pt/handle/10362/10198

Saraiva, M. J. (1991). *O computador na aprendizagem da geometria.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Semião, M. J. P. P. (2007). *A utilização da calculadora gráfica na aula de matemática: um estudo com alunos do 12º ano no âmbito das funções.* Tese de mestrado, Universidade de Évora. Retirado de https://dspace.uevora.pt/rdpc/handle/10174/16415

Silva, A. V. (1991). A calculadora no percurso de formação de professores de Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Silva, C. A. (2009). *Funções quadráticas no 10º ano usando a calculadora gráfica*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa. Retirado de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3442

Van-Dúnem, I. A. C. (2016). *A matemática e as TIC no processo de ensino e aprendizagem: o geogebra no ensino de funções e gráficos de uma função.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa. Retirado de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/24163

Veloso, E. (1989). LOGO.GEOMETRIA. Actividades e resolução de Problemas em Geometria Elementar. *Nonius* (20). Retirado de https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/nonius/nonius20_1.html em 27 Novembro de 2017.

Vieira, M. J. (2011). *O estudo de pavimentações regulares e semi-regulares com ambiente de geometria dinâmica.* Tese de mestrado, Faculdade de Ciências e tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Retirado de https://run.unl.pt/handle/10362/8690

Uma aula virada ao contrário

Difícil é sentá-los, é o título do livro escrito por Dulce Neto, em colaboração com Marçal Grilo, sobre o período (95/99) em que este foi Ministro da Educação. O título corresponde a um desabafo de uma professora do 1.º ciclo, relativo a alunos a viver em condições precárias e que não estavam habituados a estar sentados.

Esta é uma situação real, mas o dominante na escola é o contrário. Os alunos passam a maior parte do tempo escolar sentados, em aulas sucessivas. Apesar de nessa situação existirem dinâmicas de sala de aula diversificadas, que têm influências diferentes na atividade que os alunos desenvolvem, interrogamo-nos: de que forma o estar predominantemente sentado afeta a capacidade de concentração e aprendizagem dos alunos? Que problemas podem surgir desta prática continuada?

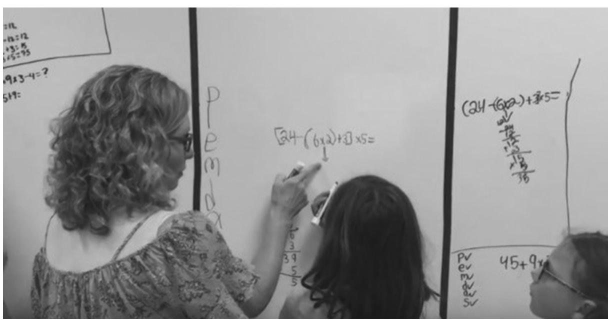
Para apoiar a reflexão sobre estas questões, escolhemos dois exemplos em que os alunos desenvolvem atividades na sala de aula, mas em pé!

PROJETO MATEMÁTICA 360 GRAUS

O texto que se segue, escrito por Nadine Bailey foi traduzido e adaptado de http://informativeflights.blogspot.pt/2014/12/360-degree-whiteboards.html e descreve os objetivos e pressupostos subjacentes a este projeto:

> O conceito de matemática de 360 graus foi aparentemente lançado por Sean Kavanaugh como forma de envolver os alunos. Ao colocar os alunos em pé a resolver problemas nos quadros brancos que cercam a sala de aula, os professores veem "evidências dos processos de pensamento dos alunos à medida que se desenrolam". Se os alunos estão debruçados sobre os cadernos, "os erros geralmente são detetados muito depois de serem feitos e os professores podem ter problemas para identificarem o momento em que o pensamento do aluno `se desviou do caminho correto´".

Segundo a autora, os cinco passos desta estrutura incluem: 1) *os cumprimentos:* cada aluno que entra na sala de aula é pessoalmente saudado pelo professor (sinal de respeito e boas-vindas); 2) *o rebobinamento:* os alunos resolvem três problemas relativamente simples no quadro branco para ganhar confiança;



3) *a micro-apresentação:* o professor faz uma apresentação curta de oito a 10 minutos para introduzir novos conceitos; 4) *a prática:* os alunos voltam ao quadro branco, onde passam a maior parte da aula, a resolver problemas mais desafiadores, facilitados por discussões em grupo e colaboração; 5) *a prova:* o trabalho é feito individualmente nos quadros brancos e revisto pelo professor para compreender em que ponto está cada aluno no domínio das capacidades que estão a ser trabalhadas, de forma a ajudar a planear a aula seguinte.

VISITA À EXPOSIÇÃO DE PÓSTERES E CONGRESSOS MATEMÁTICOS

As ideias são explicitadas por Fátima Mendes no artigo publicado na página 9 deste número temático. Os alunos, em grupo, elaboram pósteres em que apresentam a resolução da tarefa proposta pelo professor e afixam-nos nas paredes da sala. Há um tempo para os alunos visitarem a exposição, lerem os pósteres dos outros, anotarem dúvidas e registar questões a colocar a cada um dos outros grupos, aquando do congresso matemático.

Com os recursos que atualmente existem nas escolas, são possíveis experiências como as descritas. No caso do Projeto Matemática 360 graus, não tendo a maioria das nossas salas espaço para circular à volta das quatro paredes, porque não realizar a experiência em que estão no quadro três ou quatro pares de alunos que alternam ciclicamente com os outros?

Estar de pé pode afinal promover a concentração dos alunos na resolução das tarefas propostas, desde os exercícios às tarefas mais abertas!

Pense nisto!

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal & UIDEF - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

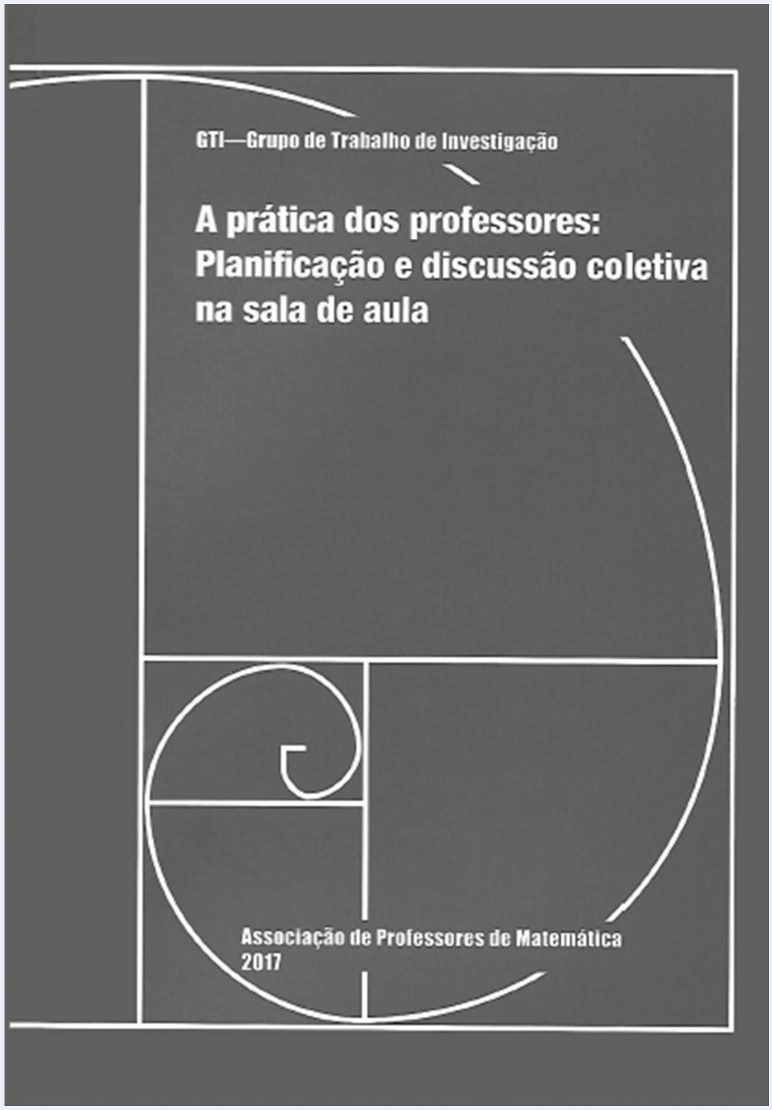
Catarina Delgado, Irene Segurado, Isabel Rocha, Manuela Pires
(da redação da Educação e Matemática)

A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula

Este livro corresponde ao culminar do 5.º ciclo de estudos do Grupo de Trabalho de Investigação da APM que visou a reflexão sobre dois momentos importantes da prática do professor – a planificação e a discussão coletiva.

O livro é composto por nove capítulos, os dois primeiros de âmbito teórico incidindo sobre os dois temas em análise e os restantes sete que resultam de experiências vividas pelos seus autores. Como se lê na introdução, "os quatro primeiros envolvem experiências com alunos dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, tendo o primeiro o foco na planificação e os três seguintes nas discussões coletivas de sala de aula. Os três últimos capítulos relatam experiências na formação de professores, onde se confronta a planificação com os desempenhos apresentados pelos futuros professores na orientação de discussões coletivas de sala de aula".

Preço de capa: € 15,00
Preço de sócio: € 12,50



Para esta secção escolhemos a primeira parte da conferência plenária que Malcolm Swan apresentou no Encontro de Investigação em Educação Matemática, realizado em Setúbal em 2014 e organizado pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Malcolm Swan, que faleceu este ano aos 64 anos, era professor e investigador na Escola de Educação da Universidade de Nottingham. Foi um notável designer de materiais curriculares, aliando criatividade com um profundo conhecimento da investigação sobre a aprendizagem da matemática.

O ICMI atribui-lhe o primeiro prémio Emma Castelnuovo em 2015 "por mais de 35 anos de desenvolvimento e implementação de trabalho inovador e influente na prática da educação matemática".

No texto selecionado para este número temático consideram-se finalidades amplas para o ensino da matemática, que incluem a fluência processual, a compreensão conceptual, a competência estratégica na resolução de problemas puros ou aplicados e a consciência crítica da qualidade do raciocínio matemático. Para cada uma destas finalidades apresentam-se tarefas poderosas que podem ser exploradas em diferentes anos de escolaridade e que são potencialmente geradoras de atividades matematicamente significativas.

Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica

Malcolm Swan

As finalidades que temos para o ensino da matemática são amplas, incluindo a fluência processual, a compreensão concetual, a competência estratégica, tanto na resolução de problemas puros ou aplicados, e a consciência crítica da qualidade do raciocínio matemático. Cada uma das finalidades requer uma variedade de tarefas matemáticas devidamente concebidas. Neste artigo, descrevo e ilustro uma organização de aulas para a conceção de tarefas, que achámos ser útil e eficaz na criação de oportunidades de aprendizagem poderosas, ricas, acessíveis e adaptáveis às necessidades individuais dos alunos. Aspetos formativos particulares da conceção de aulas serão enfatizados. São descritos papéis importantes da pré-avaliação, questões de retorno formativo e apresentação de produções/afirmações para os alunos avaliarem ou comentarem.

INTRODUÇÃO

É com frequência que a literatura critica os currículos da matemática por terem uma perspetiva extremamente estreita da matemática e uma variedade limitada de tipos de tarefas (Kilpatrick et al. 2001; Watson & Sullivan 2008). Isto não será necessariamente culpa dos próprios documentos curriculares, os quais têm objetivos louváveis, mas sim das formas como eles são interpretados e vulgarizados por assessores e autores de manuais escolares (Swan, 2014).

Neste artigo, considero a conceção de tarefas para as amplas finalidades que são citadas e valorizadas frequentemente: a fluência processual, a compreensão concetual, a competência estratégica (na resolução de problemas puros ou aplicados) e a consciência crítica da qualidade do raciocínio matemático. Talvez a razão predominante destas finalidades terem um reflexo insuficiente na prática letiva seja a falta de ênfase que a investigação colocou na conceção de tarefas e a inexistência de uma profissão de "designer" de materiais curriculares (Burkhardt & Schoenfeld, 2003). De facto, é assumido com frequência, de modo pouco razoável, que os professores têm tempo para desenvolver este papel, durante o decurso normal do seu trabalho.

Este artigo começa com a apresentação de uma organização teórica para a conceção de tarefas que une objetivos, produtos, tipos de tarefas e atividades de sala de aula. Daqui segue-se para a consideração dos princípios que regem a elaboração de aulas adaptáveis, a partir dessas tarefas. Aqui, uma "tarefa"[1] é definida como algo que o professor pede aos alunos para fazerem, e "atividade"[2] é tida como referindo-se à resposta dos alunos (Christiansen & Walter, 1986; Mason & Johnston-Wilder, 2006). Uma tarefa significa mais do que a impressão de um problema numa ficha de trabalho ou num manual, incluindo a forma como é mediada e transformada pelo professor na sala de aula, a sua apresentação e a subsequente provisão de indicações, pistas e

1 Optou-se por traduzir o inglês "task", palavra derivada do francês "tache" por "tarefa", que chegou ao português a partir do árabe "tarihâ". (N do T)

2 Tentou-se respeitar a escolha do autor para os sentidos de "atividade" e de "tarefa" (N do T)

outras questões. As tarefas também se alteram à medida que os alunos as interpretam de modos diferentes. Neste artigo, interpreto as tarefas como integrantes de aulas, abrindo-se e desenvolvendo-se com o correr do tempo. O termo "aula" é utilizado aqui com o significado de uma sequência de tarefas e de atividades focadas num objetivo particular de aprendizagem, não se pressupondo que as aulas devem ser limitadas a um tempo letivo.

UMA ORGANIZAÇÃO PARA A CONCEÇÃO DE TAREFAS

Na elaboração desta organização, distingo entre o objetivo educativo da aula, os produtos dos alunos que evidenciam se atingiram esse objetivo, os tipos da tarefa matemática que orientam a nossa conceção de tarefas e as atividades da aula que pretendemos como resultado delas.

1.º Objetivo: Desenvolver o conhecimento factual e a fluência processual

"*A civilização avança a partir da ampliação do número de operações que podemos realizar sem pensarmos sobre elas.*" (Whitehead, 1911, p. 61)

Por factos entendemos informações que estão desligadas ou que são arbitrárias, incluindo as notações convencionais. Por fluência processual entendemos a capacidade de executar rapidamente, eficazmente e com confiança procedimentos matemáticos, sem esforço de raciocínio. O valor da fluência não deve ser subestimado: "o bom domínio de rotinas liberta uma atenção consciente para focar os aspetos da tarefa que são novidades ou que são problemáticos" (Cockroft, 1982 §, 239). Aos produtos relacionados com tarefas e atividades de sala de aula, para atingir o 1.º objetivo, chamamos desempenhos, ensaios e prática de exercícios. Sendo evidente a importância do empenho para se chegar a uma fluência técnica em matemática, a ênfase na prática repetitiva de capacidades isoladas está atualmente omnipresente. É como se o ensino de música estivesse exclusivamente focado em escalas e arpejos. O objetivo da fluência, no entanto, não precisa ser conseguido a partir de uma dieta aborrecida de prática repetitiva. Num artigo recente, Foster (2013) utiliza a metáfora do estudo, a nível da música, para mostrar como a fluência pode ser desenvolvida através do envolvimento na resolução de problemas atraentes e matematicamente satisfatórios.

Um exemplo ilustrará isso. Suponha que um professor quer que os alunos aperfeiçoem a fluência no cálculo de áreas e perímetros de um certo número de polígonos simples. Ele pode desenhar dois eixos perpendiculares, o eixo dos xx, relativo aos perímetros, e o eixo dos yy, da área, e pedir aos alunos para marcarem no plano os pontos relativos a alguns polígonos simples. A seguir, podem colocar-se questões mais interessantes, tais como: "podes desenhar alguns polígonos representados pelas coordenadas (12, 4); (4, 12)?"; "Quais são os pontos do plano que representam quadrados, triângulos...?"; "Quais os pontos que não podem representar um polígono?". Enquanto calculam áreas e perímetros, os alunos propõem os seus próprios exemplos, fazem conjeturas e generalizações e chegam a resultados surpreendentes. Podemos resumir o tipo de tarefa e exemplos de atividades de sala de aula para este objetivo na figura 1.

Tipos de tarefa	Exemplos de atividades de aula
Prática de procedimentos e notação	• Praticar através de exercícios e estudos que proporcionem repetição do uso de procedimentos bem definidos. • Usar e memorizar de modo sistemático termos e notações.

Figura 1. Organização da conceção de tarefas para o conhecimento factual e a fluência processual

2.º Objetivo: Desenvolvimento da compreensão conceptual

Um conceito é uma "cápsula de pensamento que envolve milhares de experiências distintas e que está pronta para integrar mais uns milhares " (Sapir, 1970, p. 35). Os conceitos são orgânicos. Eles são a tentativa do indivíduo para que o mundo faça sentido e como tal evoluem. Sierpinska (1994) sugere que as pessoas sentem que compreenderam algo quando alcançam uma sensação de ordem e de harmonia, existindo um sentido de 'pensamento unificador', de simplificação, de ver alguma estrutura subjacente e que, de certo modo, foi capturada a essência de uma ideia. Pimm (1995, p. 179) refere o duplo sentido da palavra francesa para compreensão, 'comprendre', que também carrega um significado de 'inclusão' ou de 'incorporação'3. Assim, quando compreendemos algo, isso torna-se parte de nós, passamos a possui-lo. Sierpinska (ibid, p. 32) enumera quatro operações mentais envolvidas na compreensão: "identificação: podemos trazer o conceito para o primeiro plano da atenção, nomeá-lo e descrevê-lo; discriminação: podemos ver as semelhanças e diferenças, entre este conceito e outros; generalização: podemos ver propriedades gerais do conceito nos seus casos particulares; síntese: podemos apreender um princípio unificador". Para isso, acrescentamos noções de representação. Quando compreendemos algo, somos capazes de representá-lo de uma variedade de maneiras: verbalmente, visualmente e/ou simbolicamente. Os produtos, que esperamos dos alunos para evidenciar a compreensão, terão de incluir descrições, classificações, representações, justificações e análises estruturais. A seguir, está um resumo dos tipos de tarefas e de atividades típicas de sala de aula, que são consequentes (figura 2).

O desenvolvimento da compreensão conceptual, que deve evidentemente sustentar o conhecimento processual, requer uma negociação cuidadosa de significado na qual os objetos são comparados e classificados, as definições são construídas

3 O mesmo sucede com o português "compreender". (N do T)

e as representações são criadas, compartilhadas, interpretadas e comparadas. Estas atividades são sociais e colaborativas. Existe evidência considerável da investigação para mostrar, por exemplo, a superioridade da discussão de perspetivas diferentes, em relação aos métodos de descoberta individual guiada, no desenvolvimento conceptual (Bell, 1993; Swan, 2006). A criação de uma rede de conexões entre conceitos requer um trabalho exploratório não linear, difícil de conceber e integrar nalgumas especificações curriculares hierarquizadas.

Tipos de tarefas	Exemplos de atividades de sala de aula
Observar, classificar e definir estruturas e objetos matemáticos.	• Observar e manipular objetos mentais. • Identificar, descrever atributos e ordenar objetos de acordo com esses atributos. • Criar e identificar exemplos e contraexemplos. • Criar e testar definições.
Representar e traduzir entre conceitos matemáticos e as suas representações.	• Interpretar várias representações, incluindo diagramas, gráficos e fórmulas. • Traduzir entre representações e estudar o que varia ente elas.
Justificar e/ ou demonstrar conjeturas, conexões e procedimentos matemáticos.	• Elaborar e testar conjeturas e procedimentos matemáticos. • Identificar exemplos que apoiem ou refutem uma conjetura. • Criar argumentos que expliquem por que razões as conjeturas e os procedimentos são ou não válidos.
Identificar e analisar a estrutura dentro de situações.	• Estudar e modificar situações matemáticas. • Explorar relações entre variáveis. • Comparar e relacionar estruturas matemáticas.

Figura 2. Organização da conceção de tarefas para a compreensão conceptual

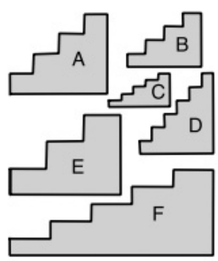
Apenas há espaço para muito poucos exemplos ilustrativos. Para observar, classificar e definir, os alunos podem ser convidados a ordenar, usando os seus próprios critérios, um conjunto de cartões com objetos matemáticos. Os resultados dessa classificação podem ser comunicados a outros alunos, para descobrirem os critérios que foram usados. Os objetos podem ser muito variados, desde formas geométricas até funções algébricas. Como mostrou Zaslavsky (2008), esta será uma maneira poderosa de enumerar as propriedades dos objetos.

A seguir, pode pedir-se aos alunos que listem o máximo possível de propriedades, a partir da apresentação de um objeto matemático. A tarefa torna-se: «Será que existe alguma dessas propriedades que, só por si, define o objeto?» ou «Será que existe algum par dessas propriedades que, só por si, define o objeto?» (figura 3). Estas interrogações levam a uma procura de justificações e de contraexemplos, o que se pode tornar muito exigente. Por exemplo, podemos considerar o par de afirmações: «Quando x = 0, y = 0»; «Quando x duplica o seu valor, y também duplica». Estas declarações definem uma relação de proporcionalidade? Se não, encontrar uma função com ambas as propriedades, mas que não seja uma relação de proporcionalidade. Encontrar definições desta forma está no âmago da atividade matemática (Lakatos, 1976).

Objeto matemático	*Um quadrado*	*Existe uma relação proporcional entre duas variáveis contínuas, x e y*
Propriedades	Quatro lados congruentes	O gráfico de y em função de x é linear
	Duas diagonais congruentes	y:x tem sempre o mesmo valor
	Quatro ângulos retos	Quando x=0, y=0
	Dois pares de lados paralelos	Quando x duplica, y também duplica
	Quatro eixos de simetria	Quando aumentamos x, em passos iguais, também acontece o mesmo a y
	...	...

Figura 3. Observar, classificar e definir: listar propriedades e elaborar definições

Pode estabelecer-se a rotina de apresentar aos alunos definições alternativas e pedir-lhes que as avaliem. Por exemplo, pode pedir-se que coloquem por ordem um conjunto de escadas de acordo com sua perceção da eventual 'adequação de utilização´ e depois pedir-lhes para avaliarem definições alternativas deste conceito (figura 4). Isto conduz naturalmente a discussões sobre as ideias matemáticas de medida e de ampliação.



Escadas

Coloca estas escadas por ordem de adequação.

Será que "(altura do degrau) – (comprimento do degrau)" corresponde a uma definição apropriada da adequação? Testa esta definição nos exemplos.

Porque será que "(altura do degrau) : (comprimento do degrau)" corresponde a uma definição melhor?

Figura 4. Observar, classificar e definir: definições desafiantes

Para representar e traduzir, utilizarei atividades que exigem aos alunos a tradução entre representações numéricas, verbais, gráficas, algébricas e outras. Normalmente, os grupos de alunos recebem conjuntos de cartões e é-lhes pedido que os agrupem de acordo com o facto de apresentarem, ou não, representações equivalentes. Surgem interpretações erradas quando se incluem traduções que são normalmente confundidas. Por exemplo, os alunos podem receber um grupo de quatro cartões com representações de quantias em dinheiro (£120; £150; £200; £100) e um conjunto de dez cartões com setas, mostrando a percentagem de aumento ou de redução (e. g., "aumento de 25% "; "redução de 25%"). Pede-se-lhes que coloquem os cartões com o dinheiro nos vértices de um quadrado e disponham os cartões com percentagem entre eles em lugares apropriados (a figura 5 mostra um lado do 'quadrado'). É normal que os alunos considerem "aumento de 25%" e "redução de 25%" como inversas colocando-os entre os cartões de £120 e £150. Posteriormente, o professor introduz mais cartões com setas com operadores multiplicativos (por exemplo, x 1,25; x 0,8). Depois dos alunos terminarem a colocação destes cartões, utilizarão a calculadora para verificarem e relacionarem os operadores com as percentagens indicadas. Isto causará conflitos e discussões, à medida que se encontram as inconsistências. Mais cartas são adicionadas depois, como se ilustra. Descobrem-se conexões entre todas essas representações e estabelecem-se generalizações.

Mais exemplos de tarefas para representar e traduzir podem ser encontrados em Swan (2008a; 2008b).

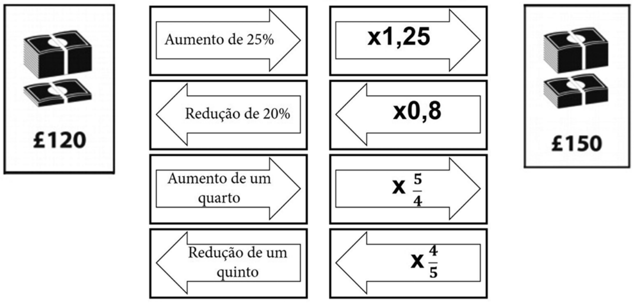


Figura 5. Representar e traduzir: aumento e redução percentual.

Na categoria justificar ou demonstrar, é usual dar aos alunos um conjunto de conjeturas, sendo a sua tarefa determinar os respetivos domínios de validade. Estes domínios são habitualmente designados por 'é sempre, algumas vezes ou nunca verdadeiro'. A figura 6 ilustra uma seleção representativa dessas asserções.

Aumento de ordenado

O Max tem um aumento salarial de 30%.

O Jim tem um aumento salarial de 25%.

Portanto, o Max tem o maior aumento de ordenado.

Frações

Se adicionarmos o mesmo número a ambos os termos da fração, o número representado aumenta de valor.

Área e perímetro

Quando tiramos um bocado de uma figura geométrica, reduzimos a área e o perímetro.

Ângulos retos

Um pentágono tem menos ângulos retos do que um retângulo.

Diagonais

As diagonais de um quadrilátero dividem-no em quatro áreas iguais.

Triângulo retângulo

Se um triângulo retângulo tiver os lados com medidas inteiras, o raio da circunferência inscrita também mede um valor inteiro.

Figura 6. Justificar ou demonstrar: uma seleção de conjeturas para testar

Normalmente, os cartões de um conjunto estão todos relacionados com um tópico matemático específico e têm presentes algumas crenças normalmente aceites. Os alunos são informados que: "se considerarem que uma afirmação é sempre verdadeira ou sempre falsa, então tentem explicar claramente como chegaram a essa conclusão. Se acharem que uma afirmação é nuns casos falsa e noutros verdadeira, então tentem descrever todos os casos em que é verdadeira e todos os casos em que é falsa." Desta forma, os alunos têm primeiro de identificar as variáveis envolvidas e, em seguida, testar a afirmação, construindo exemplos e contraexemplos. Em alguns casos, pode ser solicitada uma prova formal. Quando os alunos se sentirem perdidos, o professor poderá apontar-lhes casos particulares para testarem. Por exemplo, em *Diagonais*, os alunos geralmente afirmam que a frase é verdadeira para quadrados, mas não para os retângulos (temos um desafio!). O professor poderá precisar de os orientar para considerarem uma gama maior de quadriláteros de modo a encontrarem todos os casos em que a afirmação é válida.

Finalmente, vamos falar de identificar e analisar a estrutura. Quando os alunos enfrentam um problema, são levados a analisar a sua estrutura e, ao fazê-lo, elaboram mais problemas. O problema inicial é reescrito como uma lista de variáveis juntamente com os seus valores de partida (incluindo a solução para o problema original, ver figura 7). O primeiro passo da tarefa será descrever como é que cada variável pode ser obtida a partir das outras e, em seguida, explorar o efeito da alteração sistemática das variáveis. Vamos então apagar o lucro. Como é que este se obtém a partir das outras variáveis? (60x4-50 ou l=np-k). Seguidamente, vamos reintegrar o lucro e apagar o preço de venda. Como é que ele pode ser encontrado? (p=(l+k)/n). Depois de trabalhar com cada variável separadamente, podemos considerá-las aos pares. Suponhamos que apagamos o n e l? Como é que o lucro dependerá do número de cartões feitos? Os alunos constroem uma tabela e um gráfico. Para finalizar, os alunos podem apagar todos os valores e descrever a estrutura geral algebricamente (l = np-k).

Sempre que os alunos procurem resolver um problema, podem ser encorajados a usarem este processo de generalização de modo a focarem as relações estruturais de modo mais explícito.

3.º Objetivo: Competência estratégica

A competência estratégica refere-se à capacidade dos alunos para resolver problemas não rotineiros de várias etapas, e estender essa capacidade à formulação de problemas do mundo real. Os produtos que os alunos elaboram podem, portanto, ser designados como soluções de problemas e modelos matemáticos. Podemos definir um problema como uma tarefa que o indivíduo quer resolver, mas para a qual ele ou ela "não têm acesso a um meio simples de solução" (Schoenfeld, 1985). Uma consequência desta definição é que será pedagogicamente inconsistente planificar tarefas de resolução de problemas com a finalidade de praticar um processo, ou desenvolver a compreensão de um conceito específico. Para desenvolver a competência estratégica, os alunos devem estar à vontade para experimentar uma variedade de abordagens, podendo decidir usar qualquer conceito ou procedimento específico, os quais não podem ser predeterminados. Nós estivemos em muitas aulas, onde o professor deu aos alunos um dito 'problema' para resolver, mas ao mesmo tempo exigiu que os alunos implementassem uma dada abordagem. Para nós, isso não é de facto um problema, mas sim um exercício ilustrativo. Claro que uma sequência de tarefas pode ser concebida, integrando um problema que é usado para motivar o desenvolvimento subsequente de métodos particulares mas, na introdução, os alunos não devem saber qual o método que devem utilizar. A resolução de problemas está contida nos processos mais amplos da modelação matemática. Adicionalmente, a modelação requer a formulação de problemas a partir de, por exemplo, restringir o número de variáveis ou colocar hipóteses simplificadoras. Mais tarde no processo, as soluções devem ser interpretadas e validadas em termos de contexto original.

Fazer e vender cartões de presentes

A Jane quer fazer, à mão, cartões de presentes originais, para caridade. O custo de um kit para fazer os cartões é 50€ e com ele podem fazer-se 60 cartões. Ela pensa que pode vender, cada um a 4€. Qual será o lucro, se todos os cartões forem vendidos? Resposta 190€.

Problema reescrito

Custo de compra de um kit	€	k 50	
Número de cartões que se pode fazer com o kit		n 60	Cartões
Preço de venda de cada cartão	€	p 4	
Lucro total se todos os cartões forem vendidos	€	l 190	

Figura 7. Identificar e analisar a estrutura: trabalhar com problemas

Na figura 8, ilustram-se alguns tipos de tarefas e exemplos de atividades de sala de aula, para a competência estratégica.

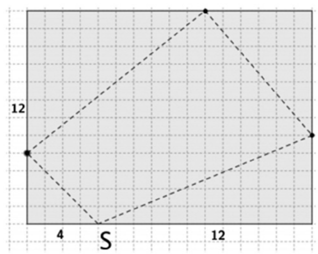
Assim sendo, para mim, a essência de uma tarefa desta categoria deveria ser a facilidade de existir uma variedade de abordagens alternativas, para que os estudantes possam aprender a partir da comparação dessas abordagens. Um exemplo de cada um dos tipos é dado na figura 9. O primeiro é um problema de matemática pura, do género 'quebra-cabeças', definido num contexto artificial num campo de jogos. O segundo, uma tarefa de modelação, é retirado de um contexto da vida real e envolve os alunos na colocação de hipóteses e de simplificações. Contudo, ambos podem ser abordados utilizando uma variedade de maneiras. O problema relativo ao campo de jogos pode ser resolvido por meio de desenho e medição, pelo uso repetido do teorema de Pitágoras ou também por "raciocínio geométrico puro, não quantitativo". O problema dos gatinhos pode ser modelado com uma grande variedade de representações, aí residindo o seu valor educativo. Retomaremos mais tarde este problema no presente artigo.

Tipos de tarefas	Exemplos de atividades de sala de aula
Resolver um problema não rotineiro pela criação e desenvolvimento de uma cadeia de raciocínio	• Selecionar conceitos e procedimentos matemáticos apropriados. • Planificar uma abordagem. • Executar o plano, monitorizar o andamento e alterar a direção, quando for necessário. • Refletir sobre a solução e examinar a sua razoabilidade, dentro do contexto. • Refletir sobre a estratégia e onde poderia ter sido aperfeiçoada.
Formular e interpretar um modelo matemático de uma situação que pode ser adaptada e usada numa variedade de situações.	• Colocar hipóteses adequadas para simplificar uma situação. • Representar matematicamente uma situação. • Identificar as variáveis significativas em situações. • Estabelecer relações entre variáveis. • Identificar questões acessíveis que possam ser abordadas na situação. • Interpretar e validar um modelo, em termos do contexto.

Figura 8. Organização da conceção de tarefas para a competência estratégica

O campo de jogos

Está representado um campo de jogos com 12 metros por 16 metros.
As crianças partem do ponto S, a 4 metros do vértice mais próximo.
Elas têm de correr e tocar em todos os lados, antes de regressarem a S.
O vencedor é quem chegar primeiro a S.
Qual será a trajetória mais curta?



Ter gatinhos[4]

Os gatos não conseguem adicionar mas multiplicam-se!
Apenas em 18 meses, esta gata pode ter 2000 descendentes.

Descobre se este número de descendentes é realista.

Eis algumas informações de que vais precisar:

Duração da gravidez: Cerca de 2 meses

Idade em que a gata pode ter a primeira gravidez: Cerca de 4 meses

Número de crias numa ninhada: Normalmente de 4 a 6

Média de ninhadas que uma gata pode ter anualmente: 3

Idade a partir da qual uma gata não pode ter filhos: Cerca de 10 anos

Figura 9. Tarefas centradas na competência estratégica

4 Esta tarefa foi concebida originalmente por Acumina Ltd (http://www.acumina.co.uk/) para Bowland Maths (http://bowlandmaths.org.uk) e é cortesia da Fundação Social Bowland.

4.º Objetivo: Competência crítica

Até agora, as atividades de sala de aula que foram descritas envolvem os alunos construindo os seus próprios procedimentos, conceitos e estratégias. Para o 4.º objetivo, espera-se que os alunos trabalhem sobre produtos matemáticos elaborados por outros. Os produtos deste objetivo podem ser caraterizados como comentários críticos. As atividades de sala de aula normalmente envolvem uma fase de compreensão, durante a qual os alunos tentam interpretar o raciocínio de outrem, uma fase de avaliação, onde eles testam esse raciocínio e comparam-no com outras abordagens e, finalmente, uma fase de revisão, em que os alunos tentam sugerir aperfeiçoamentos desse raciocínio (figura 10). As tarefas geradas são geralmente combinadas com tarefas que promovam os 2.º e 3.º objetivos. Quando eu discutir mais tarde a elaboração da aula neste artigo, apresentarei exemplos.

Tipos de tarefas	Exemplos de atividades de sala de aula
Analisar e criticar a explicação matemática de um procedimento ou conceito.	• Interpretar e ampliar uma explicação fornecida (pode estar apresentada verbal ou graficamente). • Comparar explicações matemáticas alternativas de um fenómeno. • Avaliar e aperfeiçoar os procedimentos matemáticos e o raciocínio de outros.
Analisar e criticar uma estratégia de resolução de problemas ou o modelo matemático de um fenómeno.	• Interpretar, adotar e dar continuidade a uma estratégia recebida. • Comparar estratégias alternativas; identificar pontos fortes ou fracos e os domínios de aplicação. • Aperfeiçoar uma estratégia recebida.

Figura10. Organização da conceção de tarefas para a competência crítica

Ao apresentar esta organização, reconheço que existem muitas caraterísticas que não mencionei, como, por exemplo, os públicos-alvo para os vários produtos. Contudo, verificou-se que este aspeto foi importante no decorrer das experiências letivas dos alunos. Antes da descrição de como elas aconteceram, devo considerar, de forma breve, o papel das teorias e princípios da conceção de tarefas.

(continua no próximo número)

Referências

Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics, 24*(1).

Burkhardt, H., & Schoenfeld, A. (2003). Improving Educational Research: toward a more useful, more influential and better-funded enterprise. *Educational Researcher, 32*(9), 3-14.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics Counts.* London: HMSO.

Foster, C. (2013). Mathematical´etudes: embedding opportunities for developing procedural fluency within rich mathematical contexts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 44*(5), 765-774

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sapir, E. (Ed.). (1970). *Language and Concepts*. London: University paperbacks, Methuen.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*: Academic Press

Sierspinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: Falmer.

Swan, M. (2006). *Colaborative Learning in Mathematics: A Challenge to our Beliefs and Practices.* London: National Institute for Advanced and Continuing Education (NIACE) for the National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy (NRDC).

Swan, M. (2008a). *The design of multiple representation tasks to foster conceptual development.* Paper presented at the International Congress in Mathematics Education. From http://tsg.icme11.org/tsg/show/35

Swan, M. (2008b). A Designer Speaks: Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra. *Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education 1*(1), article 3.

Swan, M. (2014). Improving the alignment between values, principles and classroom realities. In Y. Li & G. Lappan (eds.), *Mathematics Curriculum in School Education*: Springer.

Watson, A., & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and Resources in Mathematics Teacher Education* (pp.109-135). Rotherdam: Sense Publishers.

Whitehead, A. M. (1911). *An introduction to Mathematics*. New York, London: Henry Holt and Company; Williams and Norgate.

Zaslavsky, O. (2008). *Attention to similarities and diferences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education.* Paper presented at the International Congress in Mathematics Education. From http://tsg.icme11.org/tsg/show/35

Malcolm Swan

Centro de investigação em educação matemática, Universidade de Nottingham

Tradução: Fernando Nunes

Trabalho colaborativo entre professores

Entrevista (escrita) para a revista *Educação e Matemática*

Este número da revista centra-se no papel que a investigação em educação matemática tem na aprendizagem dos alunos. Assim, pareceu-nos fundamental incluir o relato de uma experiência de integração de resultados da investigação, na planificação de aulas de um grupo de professoras do 1.º ciclo (grupo 110). Dina Morais, Helena Gil, Helena Moreira e Paula Figueiredo são professoras do mesmo agrupamento de escolas, Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, há cerca de 12 anos, não trabalhando, contudo, todas na mesma escola, embora isso já tenha acontecido em anos anteriores. Têm entre 16 e 21 anos de serviço. Neste ano letivo a Dina Morais e a Helena Moreira encontram-se a lecionar um 3.º ano de escolaridade, a Paula Figueiredo assume a função de coordenadora da Escola Básica Quinta da Condessa e é professora de Apoio Educativo e a Helena Gil encontra-se de licença sem vencimento e bolseira da Universidade de Lisboa.

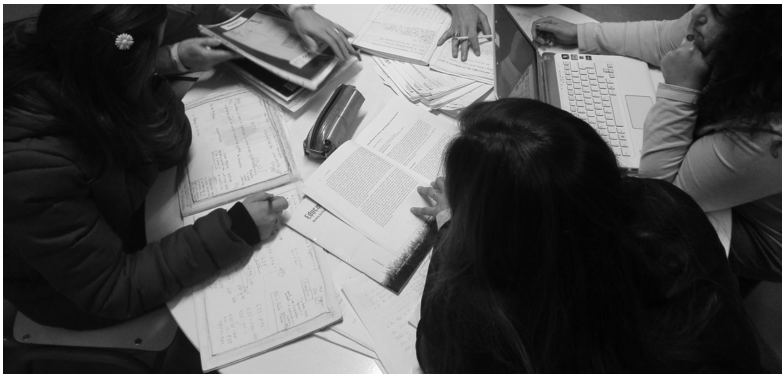
As questões da entrevista foram elaboradas pela redação, enviadas por escrito e respondidas pelas quatro professoras em conjunto.

Porque é que a investigação em educação é importante para vocês?

A investigação em educação é muito importante no trabalho de planificação da nossa prática. Ajuda-nos a organizar uma prática mais rica, pois para além de nos esclarecer dúvidas, permite-nos encontrar ideias, instrumentos e estratégias que nos inspiram a construir percursos que acreditamos serem significativos para os nossos alunos. A investigação tem por base estudos que de algum modo trazem novas formas de pensar e trabalhar determinados conteúdos e até de olhar a sala de aula. Nós acreditamos numa perspetiva de aprendizagem ao longo da vida e para nós existe uma relação direta entre a investigação e o ensino. Aliás, somos todas pré-Bolonha (os anos já são alguns!) e, curiosamente, sentimos necessidade de ir fazer um mestrado, que nos fizesse analisar um determinado aspeto, de forma crítica e fundamentada, que ao mesmo tempo nos ajudasse a articular a teoria da nossa área com elementos da nossa prática. Para além disso estamos de algum modo ligadas a associações profissionais, onde temos formação, pelo que discutimos textos nos grupos de trabalho que integramos e vamos acompanhando o que vai sendo publicado nas revistas, no sentido de perceber o que nos diz a investigação e de que modo conseguimos transferir essa informação para o trabalho com os alunos.

Porque acharam importante levar a investigação para as vossas reuniões? Surgiu de algum problema concreto? Da necessidade de planificar uma dada unidade, ou simplesmente porque acham importante estar a par do que a investigação nos diz?

Acaba por ser por causa de tudo isso. Nós reunimos para planificar o nosso trabalho, mas reunimos também para partilhar e discutir as nossas dúvidas, preocupações, angústias… e é isso normalmente que nos leva a procurar textos no sentido de nos ajudarem a perceber o que os alunos devem aprender e a melhor forma de o fazerem, já que nem sempre os programas nos ajudam e os manuais ainda menos! Reparem no que aconteceu com o programa de 2013, que sugeria, por exemplo, começar o trabalho com os números racionais não negativos, no 2.º ano de escolaridade, logo pela fração num significado de medida, sem o uso de materiais e sem qualquer ligação à vida do dia-a-dia dos



alunos. Parecia-nos absurdo começar daquela maneira. Muitas vezes temos dúvidas sobre conteúdos que não conseguimos esclarecer entre nós e precisamos de aprofundar o assunto. Então, há sempre alguém que traz um documento para analisarmos e discutirmos. Outras vezes queremos chegar à melhor forma de conseguir que os nossos alunos compreendam um determinado assunto. Temos presente os objetivos e sabemos onde queremos que os alunos cheguem, mas tendo em conta a nossa turma, a nossa realidade, acabamos por sentir necessidade de criar um percurso. O que é simples no 1.º CEB, porque temos só uma turma. Para tal, vamos procurar artigos sobre estudos já feitos e planificamos de acordo com o que nos diz a investigação, pois se já foi aplicado e resultou, desafia-nos! É assente na premissa de que nunca sabemos (nem saberemos!) tudo, pelo que se torna imprescindível munirmo-nos de sustentação teórica que fundamente as opções que tomamos.

Como se desenvolvem as vossas reuniões? Quem dinamiza? Como é escolhido o tema?

Nós já nos reunimos para planificar, semanalmente, há cerca de uma década! Temos uma dinâmica de grupo instituída. Sentimos necessidade de planificar cada semana em conjunto, de pensar nas tarefas e materiais que vamos usar com os alunos. Depois, dividimos entre nós a execução e partilhamos umas com as outras, para que todas possamos ver, dar a sua opinião e, sempre que necessário, corrigir. Recentemente criámos até um espaço partilhado na drive para irmos colocando todos os materiais que vamos construindo. As nossas reuniões não têm assim um só tema. Talvez a nossa preocupação comum seja preparar a semana seguinte, contudo, reunimo-nos também para simplesmente conversar, esclarecer dúvidas, desabafar, partilhar preocupações, mas também alegrias, relatando os aspetos que nos correram bem e que estão a ter reflexos positivos visíveis no trabalho realizado com os alunos. Em relação à dinamização, é partilhada por todas, de acordo com o entusiasmo ou a fragilidade em relação a um dado conteúdo. Cada uma contribui com o melhor de si, como resultado da sua experiência, do seu estudo, da sua reflexão. Ainda assim, a dado momento, há sempre uma de nós que nos faz centrar no que é importante, pois muitas vezes os acontecimentos do nosso dia-a-dia fazem com que não consigamos deixar o modo "desabafador".

A título de exemplo e por ser mais recente, quais as preocupações/temas que trouxeram para a vossa última reunião?

Para a última reunião tínhamos pensado falar de geometria, pois queríamos avançar no estudo das figuras. Lemos algumas brochuras e outros textos, que uma colega que está a fazer doutoramento nesta área nos disponibilizou, para nos ajudar a planificar um percurso centrado na classificação, mas nem chegámos a discuti-los! Ainda planificámos uma primeira atividade, com recurso ao geoplano, para rever o que já tinha sido trabalhado com as formas bidimensionais, para os alunos identificarem propriedades e discutirem algumas relações. No entanto, quando fomos consultar as listas de verificação de conteúdos de matemática, onde temos tudo o que o programa preconiza neste tópico, acabámos por nos deixar levar para outro assunto. Uma vez que esta sessão se realizava bem junto ao final do 1.º período, começávamos a sentir alguma ansiedade em relação à necessidade de fazer um balanço dos conteúdos trabalhados, entre nós e com os alunos. Assim, apesar de não ter sido pensado, a nossa reflexão acabou por recair sobre a avaliação. Identificámos o que tínhamos trabalhado e planificámos uma aula para os alunos relerem os descritores assinalados na lista e avaliarem o seu desempenho em cada um. Percebemos que, à medida que os alunos vão identificando as suas dificuldades e o que já dominam, vão-se apropriando do currículo. Ao fazer o balanço entre nós, decidimos também tornar mais clara a relação entre os ficheiros de matemática que temos nas salas e as listas de verificação. Isto é, identificar cada ficha do ficheiro com o(s) descritor(es) da lista de verificação correspondente. Deste modo, quando os alunos fazem uma ficha do ficheiro têm noção clara dos conteúdos que estão a trabalhar. A avaliação é uma dimensão da nossa prática em que sentimos, permanentemente, que precisamos de melhorar, pois pretendemos que seja, sobretudo, formativa e reguladora, mas não é fácil! Talvez seja por essa razão que, com regularidade, ela se impõe nas nossas reuniões.

Há algum episódio mais significativo que queiram relatar?

Há uns anos atrás tivemos connosco uma colega, a fazer doutoramento em didática da matemática, que nos trouxe investigação na área da Medida e que esteve em algumas das nossas sessões. A partir das leituras que fizemos construímos percursos de aprendizagem que envolviam a exploração de propriedades e conceitos que apelavam a atividades concretas de manipulação de objetos, que o programa atual nem refere! E que percebemos serem fundamentais, como a transitividade, a conservação ou mesmo a noção de unidade de iteração, para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa deste tema. Este é um tipo de desafios que agarramos no início do ano ou de um período, mas todas as semanas surgem outros. Por exemplo, como para além de professoras titulares, já fomos também professoras de apoio, professoras coadjuvantes e asseguramos substituições, por vezes, é necessário pensar numa situação específica, não antecipada. No momento fazemos o que nos parece melhor, mas acabamos por trazer para o grupo e refletir em conjunto.

Acham que esta forma de trabalhar contribuiu para uma melhor prática letiva?

O facto de ser uma prática letiva pensada por várias pessoas, de forma cooperada, leva-nos a acreditar que sim. Somos todas diferentes e o ponto de vista e as ideias de cada uma ajudam a melhorar a prática de todas, na medida em que esta vai sendo construída, partilhada, refletida e reconstruída, progressivamente, sob diferentes olhares e perspetivas. No entanto, acontecem sempre problemas, porque nem sempre conseguimos cumprir os planos que fazemos, o trabalho na turma tomou um rumo completamente diferente do pensado ou chegamos mesmo à conclusão que não escolhemos as tarefas indicadas para o objetivo que tínhamos. Ao verbalizarmos, acabamos por desdramatizar e encontrar alternativas. Parece-nos que tudo seria bem mais complicado se cada uma trabalhasse sozinha.

A título de conclusão que "conselhos" podem deixar?

Acreditamos que o desenvolvimento profissional e, consequentemente, a nossa prática, melhoram significativamente se forem pensados em conjunto. Tal como consideramos importante que os nossos alunos apresentem e discutam as suas estratégias e soluções uns com os outros, não parece fazer sentido que nós, professores, possamos refletir sobre a nossa sala de aula de modo isolado. Nós precisamos de fazê-lo também umas com as outras, pois só a experiência acumulada ao longo dos anos (e já são 20 de serviço para a maioria de nós!) parece ensinar-nos pouco, se não paramos para refletir sobre o nosso trabalho, sobretudo em conjunto, como fazemos nestes momentos informais. Só podemos ajudar os nossos alunos se tivermos consciência que nós também precisamos de ajuda. Ajuda para pensar sobre o que os alunos aprendem e a forma como aprendem, através da cooperação entre pares e com a ajuda da investigação.

Dina Morais, Helena Gil, Helena Moreira, Paula Figueiredo e Susana Brito

Professoras do grupo 110, do Agrupamento de Escola Braamcamp Freire, Pontinha, Lisboa.

Como manuais escolares abordam o tema Números Racionais

Joana Brocardo, Catarina Delgado, Irene Segurado, Isabel Rocha, Manuela Pires

Numa revista temática focada no impacto da investigação nas aprendizagens, considerámos importante olhar para os manuais escolares, um dos mediadores da aprendizagem que fortemente influencia o modo como os alunos aprendem e o que aprendem.

Optámos por focar o tema "Números racionais" analisando manuais dos anos de adoção para 2017/2018, o 2.º e o 6.º anos. No 3.º ciclo, em que não houve nenhum ano em adoção, escolhemos o 7.º ano, por ser o ano em que se trabalham mais os números racionais. Em cada um destes anos, selecionámos os dois manuais mais adotados: *PLIM!* 2.º ano da Texto Editores e *TOP! 2* da Porto Editora, 2.º ano; *Máximo 6* da Porto Editora e *Novo MSI 6* da Areal Editores, 6.º ano; *Novo Espaço 7* e *Matemática 7*, ambos da Porto Editora, 7.º ano.

A investigação realizada neste tema reúne alguma unanimidade perspetivando, por exemplo, a importância de desenvolver gradualmente as 'grandes ideias' subjacentes aos números racionais, de construir significados e relações ao nível dessas ideias e de usar contextos e modelos apropriados. Cada uma destas indicações, embora muito relevante, é demasiado vasta para poder ser analisada no âmbito deste artigo. Por isso, selecionámos aspetos mais ´micro' mas que têm sido muito estudados pela investigação sobre os números racionais representados na forma de fração: a introdução do conceito de fração, explorar os vários significados das frações, perceber que o todo importa e relacionar as várias representações de números racionais.

Neste artigo os manuais são vistos como oportunidades para concretizar parte do que hoje se sabe sobre a aprendizagem dos números racionais. Assim, não foi nosso propósito procurar o que está 'bem' ou 'mal' em cada manual. Por isso, o objetivo da análise que fazemos nos pontos seguintes é sugerir ao professor ideias concretas que será importante trabalhar, para além das que os manuais já indicam e proporcionar uma reflexão sobre algumas das opções seguidas pelos manuais analisados.

INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

O modo como se deverá iniciar o trabalho com as frações não reúne unanimidade ao nível da investigação. Nos manuais de 2.º ano analisados, a opção seguida parece ir na linha da sugerida pelo investigador holandês Streefland, fortemente defensor de começar a abordagem das frações a partir de contextos de partilha equitativa (ver figuras 1 e 2, que incluem as tarefas que introduzem o tópico 'Frações').

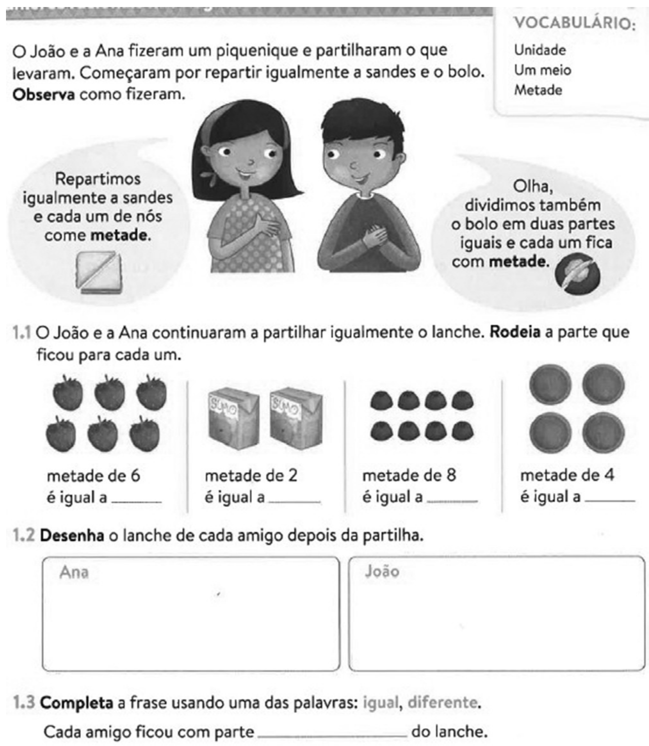
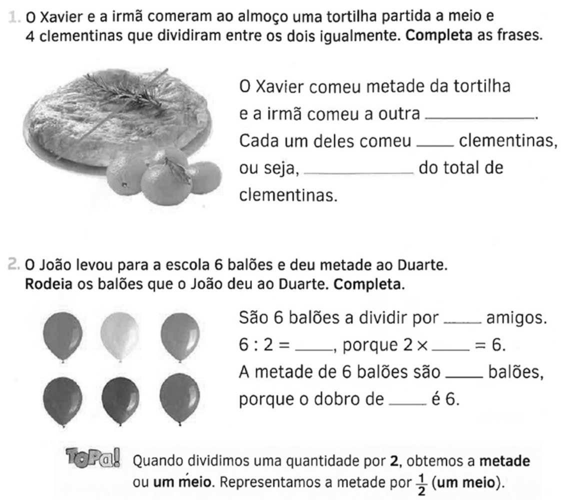


Figura 1. Tarefa de introdução ao conceito de fração – manual PLIM! (p. 84)

Tal como sugerido por este investigador, os contextos propostos são inspirados na realidade quotidiana das crianças. No entanto, a exploração do contexto de partilha para dar significado à fração, parece perder-se numa exploração que engloba vários significados de fração. No manual *PLIM!*, a partilha de uma sandes por dois amigos, e no manual *TOP!* 2, a partilha de uma tortilha por dois irmãos, são exemplos que podem dar sentido à fração $\frac{1}{2}$ como representando 1:2. Os restantes exemplos de partilha destes manuais introduzem frações unitárias ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$), não incluindo nenhum exemplo de partilha que diga respeito a outro tipo de frações, como por exemplo $\frac{2}{5}$, que envolvem analisar situações mais complexas e que habitualmente não se exploram no 2.º ano.

Embora propondo inicialmente situações de partilha equitativa, nenhum dos manuais utiliza a notação de fração para representar essa partilha. O *TOP! 2* explicita simbolicamente a divisão de um conjunto de objetos, por exemplo, na questão 2 da figura 2, representa o 6:2, mas não recorre à representação sob a forma de fração. No *PLIM!,* na questão 1.1 da figura 1, podemos ver que não se representa, por exemplo, o $\frac{6}{2}$ nem o 6:2.



1. O Xavier e a irmã comeram ao almoço uma tortilha partida a meio e 4 clementinas que dividiram entre os dois igualmente. **Completa** as frases.

O Xavier comeu metade da tortilha e a irmã comeu a outra ________.
Cada um deles comeu ____ clementinas, ou seja, __________ do total de clementinas.

2. **O João levou para a escola 6 balões e deu metade ao Duarte. Rodeia os balões que o João deu ao Duarte. Completa.**

São 6 balões a dividir por ____ amigos.
6 : 2 = ____, porque 2 × ____ = 6.
A metade de 6 balões são ____ balões, porque o dobro de ____ é 6.

ToPa! Quando dividimos uma quantidade por **2**, obtemos a **metade** ou **um meio**. Representamos a metade por $\frac{1}{2}$ (**um meio**).

Figura 2. Tarefa de introdução ao conceito de fração – manual TOP! 2 (p. 120)

No manual *PLIM!*, a divisão por partilha centra-se na partilha por 2, passa-se a associar o operador $\frac{1}{2}$ com a metade de uma unidade ou de um conjunto de objetos e propõem-se exercícios focados na determinação da metade ou na identificação das duas metades de um mesmo objeto, mas sem nunca relacionar 'a metade de' com 'o dobro de'. Não se opta, por isso, por seguir uma recomendação da investigação que vai no sentido de considerar que só se compreende bem uma relação/operação quando se consegue articulá-la com a operação/relação inversa.

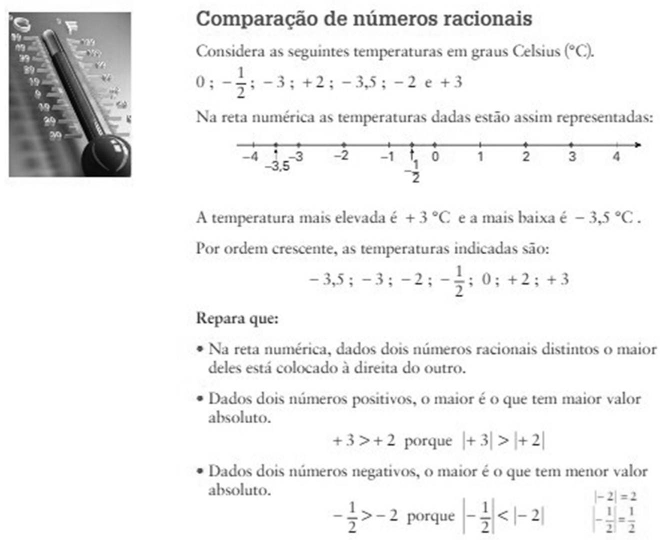
SIGNIFICADOS DAS FRAÇÕES

Um dos aspetos que dificulta a aprendizagem das frações está associado aos seus diferentes significados: relação parte-todo, medida, quociente, operador e razão (por exemplo, Kieren, 1988). A investigação realizada tem focado diferentes aspetos relativos a cada um destes significados e é unânime em recomendar que se trabalhem todos os sentidos das frações. Identifica-se igualmente uma forte indicação de realçar a relação parte-todo, inerente aos números fracionários, em que o 'todo' é visto como uma unidade fracionada (Freudenthal, 2002).

Nos manuais de 2.º ano são introduzidos os significados de parte-todo, operador e medida. Tal como recomenda a investigação, predominam as tarefas com contextos em que se foca a relação parte-todo, trabalhando contextos associados a frações menores ou iguais à unidade e em que 'o todo' (discreto ou contínuo) é dado e definido. O significado de operador é globalmente introduzido em tarefas em que se pede para determinar "$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ de ...". As situações de medida, em número mais reduzido, incluem contextos associados à comparação do comprimento de objetos.

No manual *Máximo 6* introduz-se o significado de razão, em que assenta o conceito de proporção. Note-se, no entanto, que este significado é rapidamente abandonado para resolver situações de proporcionalidade que são, sobretudo, associadas ao uso da propriedade fundamental das proporções e da regra de três simples.

Nos manuais de 6.º ano e de 7.º ano não são focados outros significados das frações que passam a ser exclusivamente 'olhadas' como uma representação de um número racional. A perspetiva global adotada é a de, quanto muito, exemplificar com um contexto, como por exemplo a medição de temperatura com um termómetro, que permita explicar o funcionamento de uma regra que a seguir se pratica (ver figura 3).



Comparação de números racionais

Considera as seguintes temperaturas em graus Celsius (°C).

$0\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ -3\ ;\ +2\ ;\ -3{,}5\ ;\ -2\ \text{e}\ +3$

Na reta numérica as temperaturas dadas estão assim representadas:

A temperatura mais elevada é $+3$ °C e a mais baixa é $-3{,}5$ °C.

Por ordem crescente, as temperaturas indicadas são:

$$-3{,}5\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ +2\ ;\ +3$$

Repara que:

- Na reta numérica, dados dois números racionais distintos o maior deles está colocado à direita do outro.
- Dados dois números positivos, o maior é o que tem maior valor absoluto.
  $$+3 > +2 \quad \text{porque} \quad |+3| > |+2|$$
- Dados dois números negativos, o maior é o que tem menor valor absoluto.
  $$-\frac{1}{2} > -2 \quad \text{porque} \quad \left|-\frac{1}{2}\right| < |-2| \qquad |-2| = 2 \quad \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Figura 3. Comparação de números racionais – manual *Matemática 7* (p. 12)

Embora não tenhamos focado a análise em todos os anos de escolaridade, podemos identificar uma tendência geral que, em parte, traduz o que a investigação recomenda: valorizar a relação parte-todo e introduzir os diferentes significados de fração. No entanto, o valor do significado das frações parece ser quase exclusivamente necessário para a introdução de conceitos sendo praticamente abandonado nos 6.º e 7.º anos. Nestes manuais os significados são considerados tópicos ‘de revisão’ ou indicados para o professor referir na aula. Também não se identificaram situações que fazem apelo à construção da relação parte-todo com ‘todos’ não estruturados e/ou infinitos ou relação parte-parte (Freudenthal, 2002), aspetos que poderiam, por exemplo, ser trabalhados no 6.º ano, a propósito de contextos usados para introduzir situações de razão (por exemplo, partindo da composição nutricional de embalagens de produtos alimentares).

O TODO IMPORTA

Vários investigadores realçam que uma ideia que está constantemente presente ao comparar e operar com frações é a de que estas representam relações em que o ‘todo importa’ (por exemplo, Lamon, 2007). Esta é uma ideia muito relevante para adicionar e subtrair frações, mas que habitualmente só é referida na introdução destas operações com frações. É o caso dos manuais analisados em que não se identificou nenhuma situação do tipo da usada por (Silva, 2012) na investigação que realizou com os seus alunos de 5.º ano: era pedido aos alunos que analisassem um diálogo em que duas crianças conversam e em que uma refere ter comido metade de um chocolate que tinha recebido e a outra ter comido um quarto de um chocolate que também lhe tinham oferecido (ver figura 4).

A discussão do João e da Maria

Ontem o João esteve em casa da Maria, para fazerem um trabalho de investigação em grupo. Como é costume, o avô da Maria, sempre que a visita, leva-lhe um docinho! E durante uma pausa no trabalho que estavam a fazer, a Maria e o João foram apanhados de surpresa… o avô tinha trazido chocolates!!

No dia seguinte, já na escola o João e a Maria comentavam um com o outro:

- **O meu avô deu-me um quarto de um chocolate! – dizia a Maria.**
- **E a mim deu-me metade de um chocolate! – dizia o João.**

Na tua opinião, quem terá comido mais? E quem terá comido menos?
Explica o teu raciocínio.

Figura 4. Tarefa “A discussão do João e da Maria” (Silva, 2012, p.157)

RELAÇÃO ENTRE AS VÁRIAS REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS RACIONAIS

Compreender e saber usar as relações entre as várias representações de números racionais é um aspeto igualmente realçado pela investigação (por exemplo, Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen & Keijzer, 2008).

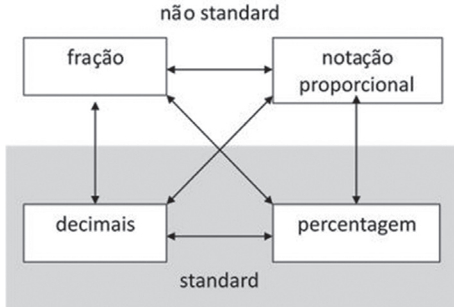
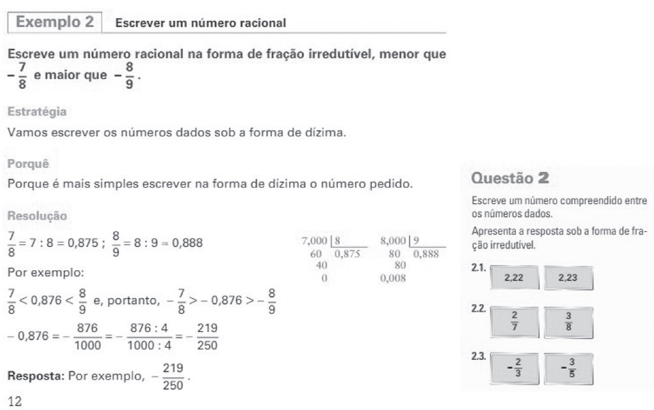


Figura 5. Relação entre as representações de números racionais (Galen et al., 2008, p. 32)

Globalmente, nos manuais analisados, as situações de comparação são maioritariamente exploradas visando o uso de regras (relativas às frações com o mesmo numerador, às frações com o mesmo denominador, obter frações com o mesmo denominador, …) ou mecanizando a passagem da fração para a representação decimal.

Por exemplo, quando se introduz a razão no *Matemática 7*, não se estabelece qualquer relação com as percentagens nem com as frações. Passa-se a falar apenas de razão e a representá-la na forma de razão (a:b ou $\frac{a}{b}$) ou a associar-lhe a sua representação decimal. Deste modo, não se identificam situações que podem ser significativas para relacionar a razão com a percentagem como seja pensar que 3 pessoas em 5 é o mesmo que 30 em 50, que 60 em 100 e que 60% (da razão para a percentagem). Neste manual, a relação entre representações é usada sem ter em atenção o significado do número racional que se está a analisar. É o que acontece no exemplo 2 da página 12 (ver figura 6), que pede para representar na forma de fração irredutível um número menor que $-\frac{7}{8}$ e maior que $-\frac{8}{9}$ e em que se indica como estratégia de resolução passar para a representação em dízima por ser “mais simples”.


Exemplo 2 **Escrever um número racional**

Escreve um número racional na forma de fração irredutível, menor que $-\frac{7}{8}$ e maior que $-\frac{8}{9}$.

Estratégia

Vamos escrever os números dados sob a forma de dízima.

Porquê

Porque é mais simples escrever na forma de dízima o número pedido.

Resolução

$\frac{7}{8} = 7:8 = 0{,}875$; $\frac{8}{9} = 8:9 \approx 0{,}888$

Por exemplo:

$\frac{7}{8} < 0{,}876 < \frac{8}{9}$ e, portanto, $-\frac{7}{8} > -0{,}876 > -\frac{8}{9}$

$-0{,}876 = -\frac{876}{1000} = -\frac{876:4}{1000:4} = -\frac{219}{250}$

Resposta: Por exemplo, $-\frac{219}{250}$.

12

Questão 2

Escreve um número compreendido entre os números dados.

Apresenta a resposta sob a forma de fração irredutível.

2.1. 2,22 2,23

2.2. $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{8}$

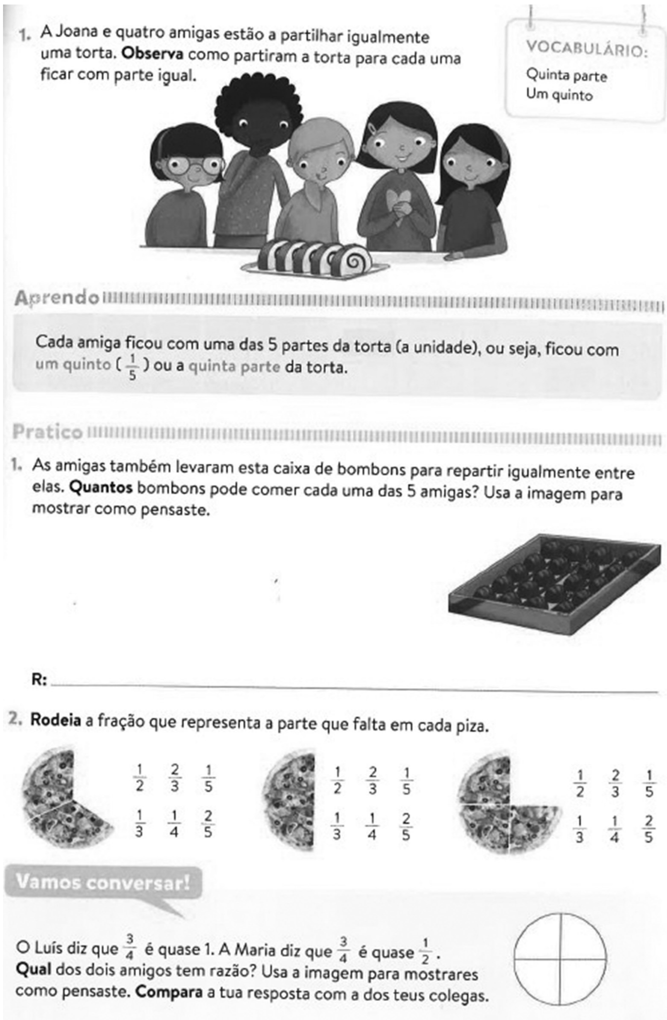
2.3. $-\frac{2}{3}$ $-\frac{3}{5}$

Figura 6. Escrever um número racional na forma de fração irredutível (*Matemática 7,* p. 12)

OUTRAS RECOMENDAÇÕES DA INVESTIGAÇÃO

Outras recomendações relevantes da investigação dizem respeito, por exemplo, à exploração de diferentes tipos de tarefas, à promoção da compreensão em oposição à prática de regras a que não se atribui sentido e à valorização do cálculo mental.

Nos manuais analisados predominam as tarefas fechadas (exercícios e problemas), cuja resolução é orientada a partir de um exemplo resolvido. De um modo geral, em cada página identifica-se um conceito e uma ´técnica' que é aplicada nas tarefas propostas nessa página e, nalguns casos, nas seguintes (como ilustram os exemplos das figuras 7, 8 e 9).



1. A Joana e quatro amigas estão a partilhar igualmente uma torta. **Observa** como partiram a torta para cada uma ficar com parte igual.

VOCABULÁRIO:
Quinta parte
Um quinto

Aprendo

Cada amiga ficou com uma das 5 partes da torta (a unidade), ou seja, ficou com um quinto ($\frac{1}{5}$) ou a quinta parte da torta.

Pratico

1. As amigas também levaram esta caixa de bombons para repartir igualmente entre elas. **Quantos** bombons pode comer cada uma das 5 amigas? Usa a imagem para mostrar como pensaste.

R: __________

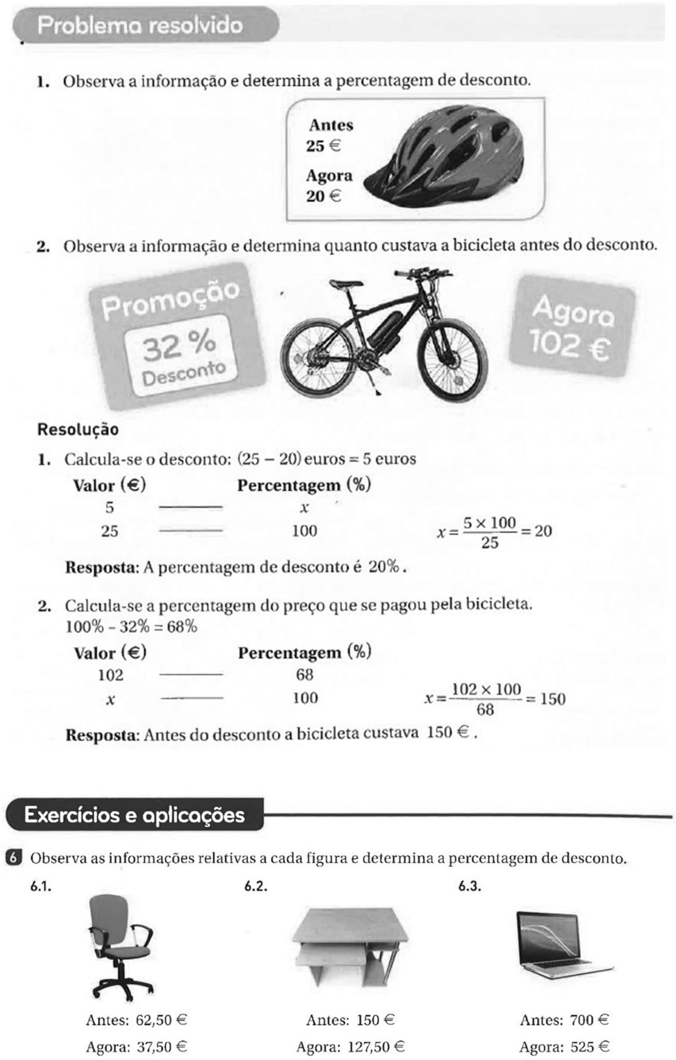
2. **Rodeia** a fração que representa a parte que falta em cada piza.

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$

Vamos conversar!

O Luís diz que $\frac{3}{4}$ é quase 1. A Maria diz que $\frac{3}{4}$ é quase $\frac{1}{2}$. **Qual** dos dois amigos tem razão? Usa a imagem para mostrares como pensaste. **Compara** a tua resposta com a dos teus colegas.

Figura 7. Exemplos de tarefas – manual *PLIM!* (p. 89)



Problema resolvido

1. Observa a informação e determina a percentagem de desconto.

2. Observa a informação e determina quanto custava a bicicleta antes do desconto.

Resolução

1. Calcula-se o desconto: (25 – 20) euros = 5 euros

Valor (€)		Percentagem (%)
5	———	x
25	———	100

$x = \frac{5 \times 100}{25} = 20$

Resposta: A percentagem de desconto é 20%.

2. Calcula-se a percentagem do preço que se pagou pela bicicleta.
100% – 32% = 68%

Valor (€)		Percentagem (%)
102	———	68
x	———	100

$x = \frac{102 \times 100}{68} = 150$

Resposta: Antes do desconto a bicicleta custava 150 €.

Exercícios e aplicações

6 Observa as informações relativas a cada figura e determina a percentagem de desconto.

6.1.	6.2.	6.3.
Antes: 62,50 €	Antes: 150 €	Antes: 700 €
Agora: 37,50 €	Agora: 127,50 €	Agora: 525 €

Figura 8. Exemplos de tarefas – manual *Máximo 6,* (pp. 122-123)

Uma outra recomendação da investigação diz respeito à importância de dar significado ao que se faz, não centrando a experiência de aprendizagem na aplicação de regras. As propostas dos manuais analisados, de 6.º e de 7.º anos, relativas aos números racionais não seguem, de um modo geral, esta orientação. As regras são enunciadas e depois são aplicadas, sem que se dê significado ao que se faz nem se veicule a flexibilidade no uso de procedimentos que facilitem o cálculo. De um modo geral as propriedades das operações são aplicadas para calcular o valor de uma expressão numérica, seguindo procedimentos formais (ver figuras 10, 11 e 12).

Regra de três simples

Como determinar quantas partes de anilina vermelha, x, temos de usar se tivermos 8 partes de anilina amarela e quisermos manter o mesmo tom de cor de laranja?

Número de partes de anilina vermelha	Número de partes de anilina amarela
3	2
x	8

Sabemos que o número de partes de anilina vermelha e o número de partes de anilina amarela necessárias para fazerem o mesmo tom de cor de laranja são grandezas diretamente proporcionais, sendo $\frac{3}{2}$ a constante de proporcionalidade.

O valor de x pode ser calculado:

1. Através de uma proporção

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{8} \qquad \text{logo} \qquad \frac{3}{2} \overset{\times 4}{=} \frac{12}{8}$$

2. Através da propriedade fundamental das proporções

$$3 \times 8 = 2 \times x \qquad \text{logo} \qquad x = 12$$

3. Usando a regra de três simples

$$\begin{array}{ccc} 3 & \text{———} & 2 \\ x & \text{———} & 8 \end{array}$$

$$x = \frac{3 \times 8}{2} \qquad \text{ou seja} \qquad x = 12$$

4. Utilizando a constante de proporcionalidade

$$x = 8 \times \frac{3}{2} = 12$$

Assim, são necessárias 12 partes de anilina vermelha para 8 partes de anilina amarela.

EXEMPLO

A Mafalda vai fazer sumo de laranja misturando concentrado de sumo com água.
Na embalagem está escrita a seguinte informação:
"A cada 2 copos de concentrado de sumo devem juntar-se 6 copos de água".

Qual é o número de copos de água a acrescentar a 5 copos de concentrado de sumo?

Resolução

Cálculo do número de copos de água para 5 copos de concentrado de sumo, utilizando a regra de três simples:

$$\begin{array}{ccc} 2 & \text{———} & 6 \\ 5 & \text{———} & x \end{array} \qquad x = \frac{5 \times 6}{2} \qquad \text{ou seja} \qquad x = 15$$

Figura 9. Exemplos – manual *MSI 6* – 2.ª parte - (p. 20)

Representação de números fracionários na reta numérica

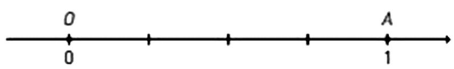
Exemplos

- Marcar na reta numérica o ponto B de abcissa $\frac{3}{4}$.

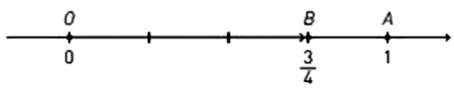
O número $\frac{3}{4}$ permite estabelecer uma relação com a unidade.

A unidade é dividida em quatro partes iguais e $\frac{3}{4}$ representa três dessas quatro partes.

Na reta numérica seja A o ponto de abcissa 1. Começa-se por dividir o segmento de reta $[OA]$ em quatro partes iguais.



A partir da origem, no sentido positivo, consideram-se três dessas partes obtendo-se o ponto B que tem de abcissa $\frac{3}{4}$.



Representa-se por $B \longrightarrow \frac{3}{4}$

Figura 10. Representação de números fracionários na reta numérica – manual Novo Espaço 7 (p. 22)

3. Multiplicação e divisão em $\mathbb{Q}$ – propriedades

3.1. Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Recorda

- Sendo a, b, c e d números naturais tem-se:
  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.
- Sendo q um número racional não negativo tem-se:
  $0 \times q = q \times 0 = 0$

Exemplos

- $5 \times \frac{7}{4} = \frac{5 \times 7}{4} = \frac{35}{4}$
- $\frac{6}{5} \times 3 = \frac{6 \times 3}{5} = \frac{18}{5}$
- $\frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{7 \times 2} = \frac{3}{14}$
- $\frac{8}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8 \times 2}{5 \times 3} = \frac{16}{15}$

Produto de um número natural por um número racional

O produto de um número natural n por um número racional q é a soma de n parcelas iguais a q.

Assim, tem-se: $\underbrace{q + q + ... + q}_{n \text{ parcelas}} = n \times q$ (ou $q \times n$)

Figura 11. Multiplicação e divisão em Q – manual *Novo Espaço 7* (p. 35)

Quociente entre um número racional e um número natural

Define-se quociente entre um número racional q e um número natural n, ou seja, $q : n$ ou $\frac{q}{n}$, como sendo um número racional cujo produto por n é igual a q, ou seja, $\frac{q}{n} \times n = q$.

Prova-se que $\frac{(-q)}{n} = -\frac{q}{n}$, com $q \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exercício

Mostrar que $\frac{(-5)}{3} = -\frac{5}{3}$.

Resolução:

Sabe-se que $\frac{(-5)}{3}$ é o número racional cujo produto por 3 é igual a (-5).

O produto de $\left(-\frac{5}{3}\right)$ por 3 é dado por $\left(-\frac{5}{3}\right) \times 3$.

Como $\left(-\frac{5}{3}\right) \times 3 = -\left(\frac{5}{3} \times 3\right) = -5$, conclui-se que $-\frac{5}{3}$ representa o mesmo número racional que $\frac{(-5)}{3}$.

Logo, $\frac{(-5)}{3} = -\frac{5}{3}$ como se pretendia mostrar.

Figura 12. Quociente entre um número racional e um número natural – manual Novo Espaço 7 (p. 36)

De facto, é raro, ou mesmo inexistente, o uso das propriedades das operações para facilitar o cálculo mental.

Esta perspetiva muito centrada no uso de regras, reflete-se, igualmente na valorização do cálculo escrito em claro detrimento do cálculo mental. Nos manuais de 6.º e 7.º anos analisados, calcular o valor de uma expressão numérica é quase sinónimo de cálculo escrito. Não se integra o trabalho com números de referência, a procura de representações dos números que facilitem o cálculo nem o uso flexível de relações numéricas que decorrem de propriedades estudadas.

No manual *Matemática 7* o cálculo mental é referido para calcular, por exemplo, $(-5)^2$ (ver figura 13), mas quando se pede para calcular $(-1)^2 + (-1)^3 - 1$ (ver figura 14) já não se dá a indicação de usar o cálculo mental.

1. Cálculo mental

Calcula mentalmente.

1.1. 3^2 **1.2.** $(-5)^2$

Figura 13. Exemplos de tarefas – manual Matemática 7 (p. 41)

3.4. $(-1)^2 + (-1)^3 - 1$

Figura 14. Exemplos de tarefas – manual *Matemática 7* (p. 39)

O PAPEL DO MANUAL DO ALUNO

Refletindo uma perspetiva curricular tendencialmente normativa, o manual escolar é muitas vezes encarado pelos professores, pelos pais e até mesmo pelos alunos como o guião a seguir nas aulas. Estas deverão ser uma engenhosa combinação de explicação dos exemplos usados no manual com a correção de todas as tarefas que ele indica, algumas deles remetidas para trabalho de casa. No entanto, um manual escolar, não pode ser o 'planificador' das aulas e da atividade dos alunos. Este é o papel do professor que, de acordo com os alunos e condições que tem, gere a aprendizagem decidindo sobre as tarefas a explorar (que podem ser muito diversas das incluídas no manual), o modo de o fazer e de sistematizar e articular o conhecimento.

Como vimos anteriormente os manuais escolares nem sempre refletem conclusões e recomendações da investigação em educação matemática. Em parte, isto poderá ter origem no facto de um manual do aluno dever ser um recurso para o seu estudo autónomo e não um guião para organizar a sua aprendizagem. Esta deve ser organizada proporcionando uma experiência matemática rica, que inclua a exploração de diversos tipo de tarefas e a oportunidade de trabalhar 'olhando' para os números e para as operações, dando-lhes sentido e manipulando-os de modo flexível, de acordo com as relações numéricas que se podem estabelecer e com as propriedades que se podem usar.

Uma das conclusões unânimes da investigação diz respeito à relevância do papel do professor para ajudar os seus alunos a progredir na aprendizagem. Importa ter bons materiais e, em particular, bons manuais escolares. Importa igualmente que o seu uso seja mediado pelo professor, integrando na planificação das suas aulas ideias relevantes da investigação com que teve contacto na sua formação inicial e/ou contínua e que aprofunda a partir da reflexão sobre a sua prática.

Referências

Fosnot, C., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth, The Net- terlands: Heinemann.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E. & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and propor- tions: A learning-traching trajectory for grades 4, 5 and 6.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), S*econd handbook ok mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Greenwich, CT: Information Age Publishing

Silva, M. (2012). *Do número natural ao número racional: Um projeto de colaboração com uma professora do 3.º ano de escolaridade.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Streefland, (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research.* Kluwer Academic Publishers.

Joana Brocardo

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal & UIDEF - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Catarina Delgado, Irene Segurado, Isabel Rocha, Manuela Pires

(da redação da Educação e Matemática)

APM 2018 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza, aos professores de Matemática e outros educadores, uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

*A Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma modalidade de associado aos professores do 1º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indiferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um nº de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados individuais têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista Quadrante.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou online.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados terão descontos na requisição de materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos na formação e em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Modalidades de associado individual	*Quota*
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.° CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	*Quota*
Modalidade I (1 exemplar da E&M)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da E&M)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	140,00 €

Assinatura das revistas Educação & Matemática e Quadrante

		Educação & Matemática 3 números + 1 número duplo temático	*Quadrante* (2 números)
Associado individual	Portugal	....	15,00€
	Estrangeiro	....	30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas Educação & Matemática e Quadrante

		Educação & Matemática	*Quadrante*
Associado	Temática	10,00€	10,00€
	Normal	7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	

índice

Editorial

Artigos

Secções