Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2017

143

JULHO ∞ AGOSTO ∞ SETEMBRO

Preço 7,50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Março de 2017
Tiragem 1000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.o 8
Casal da Espinheira
2560-401 Silveira

Depósito Legal n.o 72011/93
Registo no ICS n.o 124051
ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

Simples e singular metáfora. Cuidar, ou seja, alimentar e regar a planta de forma apropriada às suas necessidades terá consequências no seu crescimento. Também cuidar de diferentes aspetos relacionados com a avaliação tais como informar, ajustar, apoiar, … contribui para a melhoria das aprendizagens dos alunos.

Mário Baía

Neste número também colaboraram

Adelaide Freitas, Adelina Precatado, Ana Meireles, Ana Paula Alves, Ana Paula Canavarro, Cláudia Silvestre, Graciosa Veloso, Irene Segurado, Isabel Simões Dias, Joana Conceição, João Pedro Cruz, João Pedro da Ponte, Nélia Silva, Paulo Correia, Raul Gonçalves, Renata Carvalho, Sónia Palha.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática

Rua Dr. João Couto, n.o 27-A, 1500-236 Lisboa

Tel: (351) 21 716 36 90

Fax: (351) 21 716 64 24

E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

A propósito dos resultados das provas de aferição em matemática: em busca da consistência perdida?

No final do passado ano letivo realizaram-se provas de aferição das quais foram recentemente conhecidos os resultados, disponíveis no *site* do IAVE. Estas provas focaram-se em anos de escolaridade e disciplinas que não costumam ser abrangidas por este tipo de avaliação, mas também num clássico maior, a matemática, associada às ciências naturais. Embora fosse interessante discutir os resultados de forma transversal, centro-me aqui na matemática pela sua relevância para a EM. Não sem antes recordar que os alunos que responderam a estas provas frequentavam o 2.º ano ou o 5.º ano, sendo portanto alunos escolarizados no reinado das Metas Curriculares para a matemática, implementadas obrigatoriamente a partir de 2013/14 nos 1.º, 3.º, e 5.º e 7.º anos de escolaridade.

O que nos dizem estes resultados? Independentemente do descrédito com que alguns olham para os valores, argumentando com o pouco empenho com que os alunos resolvem provas que sabem não os afetar, independentemente das dúvidas relativas à escala em que os resultados surgem divulgados, que se definem segundo a expectativa de resposta (o que significa *conseguir* responder *segundo o esperado*? admite algum erro, alguma incompletude, ou não? Como se distingue *poder melhorar e revelar dificuldades*?...), os resultados dizem, como sempre, alguma coisa. Não cabe aqui uma análise exaustiva nem a repetição da negatividade com que os órgãos de comunicação social apregoaram a desgraça, mas detenho-me em dois pontos que me chamam por demais a atenção.

Um primeiro tem a ver com as percentagens médias de acerto por domínio cognitivo, sendo estes aqui caracterizados, por ordem de complexidade crescente, nos seguintes três níveis: conhecer/reproduzir; aplicar/interpretar; raciocinar/criar. No 2.º ano, a percentagem de alunos competente no nível inferior está próxima dos 80%, mas desce para um valor próximo dos 50% quando se consideram os resultados observados nas respostas aos itens que mobilizavam processos mais complexos. No 5.º ano, os valores são cerca de metade dos referidos atrás, oscilando entre 40,4%, no que se refere aos desempenhos de nível inferior, e 23,3%, em relação aos desempenhos de nível superior. Isto significa, pois, que os alunos são muito mais capazes de reproduzir (e aplicar) do que de raciocinar e criar. Traz-me à memória os tempos anteriores à nossa subida no PISA, em que os alunos portugueses eram reconhecidos como bons em tarefas de baixa exigência cognitiva mas muito pouco capazes em resolução de problemas. O cenário atual em nada é favorável ao desenvolvimento das competências requeridas nos dias de hoje, em matemática e não só, e, certamente, não resultou de nenhuma recente mutação genética dos alunos.

Um segundo ponto que destaco tem a ver com a acentuada diferença entre os alunos bem sucedidos no 2.º ano e no 5.º ano. No 2.º ano, os alunos que responderam positivamente no nível de maior sucesso rondaram, em valores médios, 47% (Números e Operações , 42,9%; Geometria e Medida, 32,1%; Organização e Tratamento de Dados: 65,8%). Já no 5.º ano, os alunos que responderam no nível de maior sucesso rondaram, em valores médios, 7% (Números e Operações , 4,9%; Geometria e Medida, 5,1%; Organização e Tratamento de Dados: 3,2%; Álgebra: 14,9%). Ou acreditamos que o 2.º ciclo está enfermo de uma epidemia de "piorite" aguda (piores alunos, piores professores, piores atitudes perante as provas, ...), ou aceitamos a evidência — a exposição prolongada às metas é como a exposição prolongada ao Sol: faz mal.

O Ministério da Educação pronunciou-se sobre os resultados das provas de aferição e divulgou um conjunto de propostas de atuação a implementar e desenvolver, estando anunciadas quatro medidas concretas para a matemática, que sintetizo:

- Acompanhamento das escolas com desempenhos mais frágeis.
- Alargamento da formação de professores de 1.º ciclo.
- Criação de uma equipa de acompanhamento do currículo.
- Atualização e reedição de materiais de apoio, produção de recursos.

Congratulo-me por ver o Ministério da Educação a responsabilizar-se e a envolver-se na consecução de medidas que podem ter bons resultados. Em particular, congratulo-me com a medida que incide sobre o currículo de matemática, na expectativa de um estudo rigoroso e completo sobre os efeitos que as Metas Curriculares estão a ter na aprendizagem da matemática pelos alunos. Na realidade, o projeto de flexibilização e autonomia curricular que o ME criou também como forma de superar algumas dificuldades curriculares, terá as suas virtudes, mas não é suficiente para resolver o problema curricular de fundo, que radica no que é ensinado no dia a dia da sala de aula e no que é alvo de avaliação, interna ou externa.

No entanto, gostaria de ter visto o anúncio de mais uma medida. A da criação de condições para que nas escolas haja espaço-tempo-energia para que os professores consigam, em colaboração, dedicar-se ao desenvolvimento curricular adequado aos seus alunos, seguindo uma linha de consistência que potencie investimentos que já provaram gerar bons resultados.

Ana Paula Canavarro

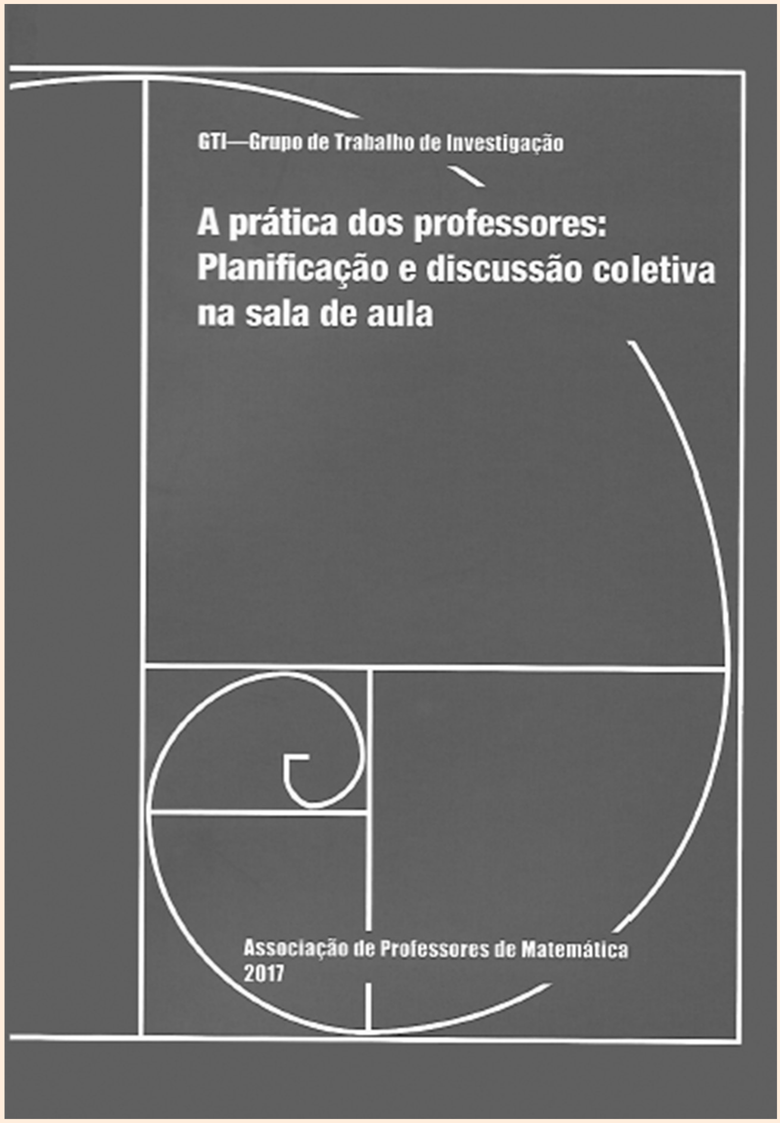
Universidade de Évora

A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula

Este livro corresponde ao culminar do 5.º ciclo de estudos do Grupo de Trabalho de Investigação da APM que visou a reflexão sobre dois momentos importantes da prática do professor – a planificação e a discussão coletiva.

O livro é composto por nove capítulos, os dois primeiros de âmbito teórico incidindo sobre os dois temas em análise e os restantes sete que resultam de experiências vividas pelos seus autores. Como se lê na introdução, "os quatro primeiros envolvem experiências com alunos dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, tendo o primeiro o foco na planificação e os três seguintes nas discussões coletivas de sala de aula. Os três últimos capítulos relatam experiências na formação de professores, onde se confronta a planificação com os desempenhos apresentados pelos futuros professores na orientação de discussões coletivas de sala de aula".

Preço de capa: € 15,00
Preço de sócio: € 12,50



Um exame adequado a um programa desadequado

Paulo Correia

No próximo ano letivo o atual programa de Matemática A entrará em vigor para o 12.º ano, terminando a sua implementação num ciclo completo.

O final do ciclo, neste caso, tem relevância adicional pela realização de um Exame Final Nacional que, para além do papel de certificação das aprendizagens do Ensino Secundário, é também um fator de seriação no acesso ao Ensino Superior para uma parte significativa das opções dos alunos.

A atenção mediática que recai sobre os Exames Nacionais, e sobre o de Matemática A em particular, seria suficiente para justificar uma reflexão sobre as mudanças que conhecemos, as que não conhecemos, as que consideramos desejáveis e as que não gostaríamos que se viessem a verificar. Além da atenção mediática, a ênfase que professores e alunos desta disciplina colocam na preparação para este exame, ao longo de todo o ensino secundário, torna esta reflexão ainda mais pertinente.

São conhecidos os argumentos contra a sobrevalorização dos exames e da consequente adequação de práticas letivas excessivamente orientadas para a preparação dos alunos com vista à realização de exames, e não se pretende, com esta reflexão, contribuir para enfatizar o papel do exame. Ainda assim, pela importância que assume para alunos e professores, também deve ser discutido.

ALGUMAS MUDANÇAS NÃO DECORREM DO NOVO PROGRAMA

Até à data da escrita deste texto, as únicas informações conhecidas sobre o exame de Matemática A a realizar em 2018, definem com clareza que "...vai ser constituído por dois cadernos, à semelhança do que acontece nas provas finais do ensino básico: um em que é permitido o uso da calculadora gráfica e outro em que não é permitido." (DGE, 2016).

Esta opção, pela proibição parcial da utilização, não decorre explicitamente do programa em vigor, e a semelhança invocada com a prática em curso na prova final do ensino básico, remete para uma alteração decidida num contexto fora de qualquer alteração do currículo, sem a discussão desejável e sem explicações convincentes. De resto esta informação não identifica temas preferenciais, grau de aprofundamento, exemplos de itens ou outros dados que possam contribuir para o processo de tomada de decisão na prática letiva e na preparação dos alunos. O único elemento claro é a proibição da utilização da tecnologia numa parte do exame, sem que a proporção relativa desta parte do exame seja explicitada.

A divisão da prova em dois cadernos pode ser entendida como a valorização do papel da tecnologia, ou como uma proibição para assegurar o desenvolvimento (ou avaliação) de outras competências, remetendo a utilização da tecnologia só para situações especiais, devidamente identificadas e sem possibilidade de funcionar em complementaridade com outras ferramentas e procedimentos matemáticos.

A existência de um conjunto de itens em que a calculadora gráfica é permitida, ou essencial, pode resultar num aumento do número de itens que dependem de competências associadas à utilização da tecnologia, visto que, até agora, apenas um item em cada prova dependia diretamente da utilização da calculadora gráfica. Num modelo de exame com uma parte criada especificamente para ser resolvida com a presença de calculadora será natural que este número de itens seja superior ao que tem sido hábito. Dito de outra forma, aguardamos que a possibilidade de apresentar respostas sustentadas na utilização da calculadora seja a regra nesta parte do exame.

Por outro lado, a proibição da utilização de calculadora gráfica numa parte do exame remete para práticas e procedimentos exclusivamente algébricos, descontextualizados das situações de aprendizagem usuais e desadequadas para os alunos dos nossos dias. O entendimento da utilização da tecnologia deixa de ser integrado na aprendizagem e é remetido para alguns tipos de itens, previamente sinalizados para a utilização de calculadora, onde o aluno não é implicado na decisão de utilizar, ou não a tecnologia, para resolver um problema.

Atividades como a verificação, a experimentação de valores e o estabelecimento e refutação de conjeturas numa fase da resolução de alguns exercícios são estratégias válidas que os alunos foram integrando de forma progressiva na sua atividade matemática, até para resoluções que, numa fase posterior, fossem escritas com recurso a procedimentos algébricos. Este tipo de atividade matemática, será progressivamente desvalorizado se esta alteração se mantiver em vigor em consequência do impacto amplamente identificado dos exames sobre as práticas de alunos e professores.

Num questionário recente implementado pela APM, cerca de 75% dos professores, afirmam que a tecnologia não tem estado presente com regularidade nas atividades da sala de aula, sendo as principais justificações apresentadas a falta de tempo, a não prescrição do programa… e a existência de um caderno sem recurso à tecnologia no exame. São dados que apontam para uma alteração, não desejável, das práticas na sala de aula decorrentes das alterações anunciadas no exame…

Apesar das várias solicitações levadas a cabo pela APM e por outros grupos de professores para que fosse clarificada pela Direção-Geral de Educação os moldes em que a avaliação externa viria a ser desenvolvida no quadro da implementação do novo programa, o único elemento adicional veio acrescentar incerteza em vez de contribuir para um processo mais informado e menos conturbado. Os professores e os alunos precisavam e mereciam ter tido acesso a esta clarificação num tempo adequado.

A INTERSEÇÃO DOS PROGRAMAS

A experiência recente do exame de 2017 de Física e Química, implementado em situação análoga ao exame de Matemática A do próximo ano, que versou sobre "conteúdos programáticos comuns" aos dois programas – antigo e novo, permite conjeturar uma orientação semelhante para a matemática.

Na disciplina de matemática, uma parte das diferenças assinaláveis entre os dois programas foi já reduzida pelas "Orientações de Gestão Curricular para o Ensino Secundário", que vieram tentar dar resposta às dificuldades de implementação do novo programa.

Para além dos conteúdos programáticos, subsistem diferenças estruturais de índole metodológica, do tipo de atividade entendida como resolução de problemas, da pertinência de tarefas de investigação ou do entendimento da importância da comunicação matemática. Estas diferenças não deverão implicar uma descontinuidade no formato tradicional dos exames de Matemática A. É desejável que a construção dos itens de exame possa seguir uma linha de continuidade com os exames dos programas anteriores, com conteúdos e graus de dificuldade semelhantes.

A experiência do Ensino Básico, em que a alteração do programa não trouxe alterações significativas na estrutura da prova de final de ciclo, sugere que no final do ensino secundário deve ser seguida uma linha de atuação semelhante. Num processo que se pretende o menos conturbado possível, não parece razoável produzir exames numa linha de rutura com os exames habituais, acrescentando ruído adicional ao ruído já introduzido pelos documentos curriculares e pela introdução dos dois cadernos.

INFLUÊNCIA BENÉFICA DO EXAME?

A avaliação externa, nomeadamente os exames designados por avaliação de alto impacto (*high stake*), tem a característica de influenciar determinantemente o currículo. É costume encarar este tipo de influência como indesejável, por reduzir a diversidade de experiências de aprendizagem dos alunos e o tipo de tarefas propostas, privilegiando as opções que permitem uma identificação com o exame e o treino de tarefas susceptíveis de serem avaliadas em provas deste tipo.

No atual contexto em que o programa preconiza um conjunto grande de temas e em que as metas acrescentam um nível de detalhe exagerado, os tradicionais efeitos colaterais dos exames, como a "erosão" de uma parte do programa, poderá mesmo vir a constituir-se como um efeito positivo na gestão deste programa. Exames com um grau de dificuldade razoável, sem a exigência de formalismos exagerados e a prevalência de itens cuja resolução dependa mais do raciocínio do que da memorização ou do treino de algoritmos e procedimentos, pode ser um sinal importante para uma gestão do currículo mais eficaz por parte dos professores.

O exame valoriza apenas uma parte do currículo e, habitualmente, preocupa-nos a desvalorização de fatores importantes como a resolução de problemas, atividades de investigação, trabalho em grupo ou de projeto, a comunicação não escrita e outras vertentes da aprendizagem difíceis de avaliar num exame. Na situação atual, como o programa valoriza essencialmente as competências que se avaliam por exames, este não será um elemento adicional de perturbação do currículo.

A coerência – desejável – do exame com um conjunto de práticas docentes e um grau de aprofundamento e formalismo razoáveis, que não é clara no programa, poderá contribuir para melhores escolhas dos professores, mas no essencial não resolve o problema da desadequação do programa.

Um exame adequado pode e deve reduzir problemas de gestão do currículo, pode e deve facilitar o trabalho dos alunos, mas não pode nem deve servir para validar um currículo desadequado. O menor risco de interferência dos exames no currículo é uma evidência de um currículo fácil de avaliar e, por isso, pouco ambicioso.

Referências

Direção-Geral de Educação (2016). Ofício Circular S-DGE/2016/3793 consultado a 8 de agosto de 2017 em: http://bit.ly/oficio3793

Direção-Geral de Educação (2016).Orientações de Gestão Curricular para o Ensino Secundário consultado a 8 de agosto de 2017 em: http://bit.ly/documentoorientador

Instituto de Avaliação Educativa (2016). Informações exame de Física e Química A 715 consultado a 8 de agosto de 2017 em: http://bit.ly/Inf_prova

Paulo Correia

Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal

O modelo retangular na compreensão de algoritmos operatórios com números racionais representados em fração

Graciosa Veloso

Este artigo surge na sequência de outros que escrevi e que foram publicados nesta revista, focados no desenvolvimento do conhecimento matemático necessário a um ensino que valoriza a atividade e a compreensão matemáticas nos processos de aprendizagem dos números racionais[1]. Neste tema programático, a herança de um ensino centrado quase exclusivamente no treino de procedimentos de cálculo, conduz frequentemente ao equívoco de que quem domina técnicas de cálculo evidencia conhecimento e compreensão. Na minha experiência de docência em formação inicial de professores tenho constatado que a generalidade dos estudantes, com especial destaque para aqueles que dominam os procedimentos de cálculo algorítmico com números racionais representados na forma de fração, manifestam significativas dificuldades nas representações visuais correspondentes, evidenciando assim significativas lacunas do ponto de vista da compreensão. Trabalham mecanicamente com os números, confirmando que, tal como Kieren (1976) argumenta, tratam os números racionais como meros objetos de cálculo, não evidenciando compreensão de ideias que sustentam os procedimentos algorítmicos utilizados.

O objetivo principal deste documento é o de valorizar as representações em modelo retangular na compreensão dos algoritmos da adição/subtração e da multiplicação que envolvem números racionais representados na forma de fração. Este objetivo relaciona-se diretamente com uma das oito Práticas do Ensino da Matemática

> Chegar à fluência procedimental a partir da compreensão conceptual. Um ensino eficaz da matemática permite chegar à fluência na realização de procedimentos a partir de uma base de compreensão conceptual, de modo que os alunos, ao longo do tempo, se tornem competentes no uso de procedimentos de modo flexível aquando da resolução de problemas contextualizados e matemáticos (NCTM, 2014, p. 10).

Como mostrarei a seguir, os algoritmos da adição/subtração e da multiplicação aplicados aos números racionais são matematicamente justificados pelos conceitos de unidade de referência e de equivalência de frações. As representações em modelos de área, retangular e circular, são ferramentas a usar com o intuito de que esses conceitos sejam cabalmente compreendidos.

O domínio compreensivo de algoritmos constitui uma das componentes do desenvolvimento do sentido de qualquer operação aritmética. Contudo, este sentido carece da exploração de outras componentes cuja análise e discussão não estão contempladas neste artigo. Refiro-me à modelação de situações, quer realistas, quer puramente matemáticas, bem como a outros tipos de cálculo, especificamente o cálculo mental. De imediato e para enquadrar a discussão que me proponho fazer relativamente ao papel do modelo retangular no cálculo algorítmico, apresento uma das possíveis representações formais de número racional, a fração.

A fração como uma das representações de número racional usada em cálculo algorítmico

As representações formais de número racional mais utilizadas em cálculo algorítmico são: fração, numeral misto e numeral decimal. Neste artigo vou referir-me, apenas, à primeira.

Qualquer número racional[2], inteiro[3] ou não inteiro, é representável por uma fração em que o numerador D representa um número inteiro e o denominador d representa um número natural (inteiro não nulo, $d \neq 0$). Estes termos, denominador e numerador, significam respetivamente: o número de partes equivalentes em que a unidade está decomposta; o número de partes equivalentes à parte unitária do denominador que estão a ser consideradas.

Há números racionais que podem ser representados por uma fração cujo denominador é uma potência de base 10 e

1 A palavra racionais é usada neste artigo para designar os números racionais não negativos.

2 Em Veloso G. (2015) é caracterizado número racional como quociente de dois inteiros.

3 A palavra inteiro é usada neste artigo, para representar qualquer número inteiro não negativo

expoente natural. A esta fração dá-se o nome de fração decimal. Note-se, porém, que a fração ½ não é decimal e é equivalente a uma infinidade de frações decimais, por exemplo 5/10, 50/100, 500/1000, etc. Há números racionais que não são exprimíveis por frações decimais, por exemplo 1/3, 1/6, etc. Generalizando, pode afirmar-se que, numa fração que admita uma fração decimal como equivalente, o denominador apresenta uma potência de base 2 com expoente natural ou uma potência de base 5 com expoente natural, ou o produto de potência natural de base 2 por potência natural de base 5.

O MODELO RETANGULAR NA COMPREENSÃO DO ALGORITMO DA ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO

As representações visuais mais frequentemente utilizadas para número racional, expresso por fração irredutível, são a retangular, a circular e em reta orientada. A representação retangular tem como suporte um retângulo cujas dimensões lineares são números inteiros, a circular é feita em círculo e a reta orientada associa-se a uma reta na qual está identificada a origem e um sentido. Considera-se como unidade de referência, a área em cada uma das duas primeiras representações e a distância da origem ao ponto correspondente a 1 na reta orientada.

Qualquer representação visual que envolva números racionais na forma de fração deve dar a entender a equivalência entre todas as partes em que a unidade é decomposta. Veem-se, frequentemente, representações circulares que envolvem denominadores 3, 5, 6, etc., em que é notória a não equivalência entre partes da decomposição da unidade. É de atender a que, com estes denominadores, é preferível utilizar modelos retangulares em papel quadriculado, por exemplo. As representações circulares podem, contudo, ser utilizadas para casos com denominadores 2, 4, 8, etc., ou, generalizando, que apresentem uma potência de base 2 e expoente natural. A representação em reta orientada, se bem que formalmente necessária, requer o domínio compreensivo de mais elementos do que o requerido aquando da representação de números inteiros. Além disto, quando utilizada para a adição/subtração não dá visibilidade direta aos diferentes denominadores dos termos envolvidos. Abreviadamente arrisco-me a afirmar que, enquanto representação, pouco ou nada ajuda na compreensão dos algoritmos que requerem denominadores iguais.

A iniciação aos números racionais é feita tradicionalmente através de modelos retangular e circular representando frações na forma irredutível e com o significado de relação parte/todo. Estes modelos são apressadamente abandonados, passando-se demasiado rapidamente para a representação em reta orientada e para o cálculo algorítmico, não sendo trabalhados com suporte visual os conceitos fundamentais de unidade de referência e de equivalência entre frações.

ALGORITMO DA ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO

O lugar do cálculo algorítmico no programa de matemática do Ensino Básico deve ser discutido à luz do desenvolvimento de competências como é proposto no Currículo Nacional do Ensino Básico: A aptidão para efetuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação (Ministério da Educação, DEB, 2001, p. 60).

Há a considerar ainda que o desenvolvimento tecnológico influenciou grandemente as atividades de natureza científica, tecnológica, social e o quotidiano, a tal ponto que atualmente a esmagadora maioria dos cálculos básicos são realizados em telemóvel. Consequentemente, a importância dos algoritmos de cálculo na matemática do ensino básico tem hoje uma relevância muito diferente da que tinha aquando da Revolução Industrial. Contudo, em termos mundiais, os programas de matemática contemplam algoritmos de cálculo. Como justificar então esta inclusão? Na comunidade educativa há concordância relativamente a que é a compreensão dos conceitos que estão na base dos procedimentos algorítmicos, e não a execução manual mecânica destes, que contribui para o desenvolvimento de competências e de conhecimentos necessários a uma intervenção crítica. O cálculo algorítmico com compreensão é uma das componentes do processo de ensino aprendizagem das operações aritméticas; para além dele há que cuidar do desenvolvimento do sentido de cada operação, valorizando-a como modelo matemático de situações problemáticas com significado.

A adição e a subtração requerem que todos os termos nelas envolvidos se refiram à mesma característica quantitativa. Quando estas operações envolvem números racionais assume particular importância reconhecer que esta exigência se traduz na igualdade dos denominadores de todos os termos. A compreensão destes dois requisitos corresponde à verificação, em simultâneo, da mesma unidade e à igualdade do número de partes em que esta está decomposta. Estas condições podem ser explicitadas recorrendo às representações em modelo retangular. Com as situações que seguidamente apresento e discuto pretendo salientar: (i) o papel estruturante que assumem a unidade de referência e a equivalência de frações no contexto do algoritmo da adição e da subtração; (ii) as vantagens das representações em modelos de área na compreensão destes conceitos.

Considere-se a tarefa (figura 1) que foi proposta numa turma de 3.º ano de escolaridade com o objetivo de desenvolver a compreensão do conceito de unidade de referência, articulando-a com a contagem de inteiros.

O José cozinhou três crepes para a sobremesa do almoço dele e dos dois filhos Ana e João. Comeram os três crepes. A Ana comeu a parte sombreada do crepe que está representado na figura A; o João, sem se saber muito bem porquê, comeu de dois crepes, a parte sombreada como mostra a figura B.

Qual dos dois irmãos comeu maior quantidade? Que quantidade comeu cada um?

Que quantidade comeram, no total, os dois irmãos?

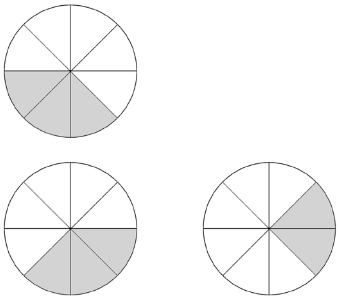


Figura A

Figura B

Figura 1. Tarefa para desenvolver a compreensão do conceito de unidade de referência

Relativamente à quantidade comida pela Ana, a resposta 3/8 foi unânime entre as crianças. Quanto à quantidade referente ao que o João comeu, a maioria das crianças considerou que a resposta adequada era 5/16 e a justificação dada por várias foi que "o João comeu 5 de 16". Esta resposta levou à discussão sobre a identificação da unidade de referência, questão fundamental na aprendizagem com compreensão do conceito de número racional.

Nesta tarefa merecem destaque os seguintes aspetos de natureza didática e formativa:

- é possível responder às 3 questões formuladas sem utilizar frações. São aceitáveis as seguintes respostas: O João comeu mais do que a Ana, esta comeu 3 fatias e ele comeu 5 e em conjunto 1 crepe; esta contagem pode ajudar na discussão sobre a necessidade de a unidade de referência ser comum às duas figuras.
- a adequação da representação em modelo circular de relações parte/todo, dado que existe um número de partes que é potência de 2.
- a importância da unidade de referência de qualquer fração e da sua consideração explícita nas respostas às questões formuladas na tarefa. É natural na situação apresentada considerar como unidade um crepe; foi esta a unidade considerada na resposta dada pelas crianças à quantidade que a Ana comeu; contudo, considerar 5/16 como representando a parte sombreada da figura B, corresponde a ter mudado de unidade, considerando como todo 2 crepes e não 1. Não é correto afirmar, por exemplo, que no total ambas comeram 3/8 mais 5/16.
- discutir no âmbito da formação os dois cenários, de acordo com as duas diferentes unidades de referência e verificar as respetivas diferenças e consistência concetual. Considerar como unidade um crepe sustenta que a Ana comeu 3/8, o João 5/8 e juntos totalizaram 3/8 + 5/8, ou seja, um crepe inteiro. Se a unidade for constituída por 2 crepes, a Ana comeu 3/16, o João comeu 5/16 e no total ambos comeram 8/16 que corresponde a um crepe.

De seguida apresento uma tarefa (figura 2) que pode ser adaptada à abordagem introdutória do algoritmo da adição/subtração. A tarefa tem por objetivo promover a compreensão do algoritmo da adição/subtração tirando partido da representação em modelo retangular.

Numa turma de 5.º ano de escolaridade existe a rotina Número do dia e num dia 20 a professora Célia sugeriu aos alunos que:

–mostrassem qual das frações 1/5 e 1/4 representava o maior número;

–representassem em fração a diferença entre o maior e o menor destes dois números.

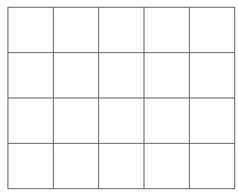


Figura 2. Tarefa para introdução do algoritmo de adição/subtração

Nesta tarefa merecem destaque os seguintes aspetos de natureza didática:

- a unidade de referência é a área do retângulo assumindo como unidade de área a quadrícula;
- a fração 1/5 tem expressão visual imediata numa coluna e a fração 1/4 numa linha;
- o modelo retangular em malha quadriculada permite apoiar a compreensão do algoritmo porque possibilita que a atribuição a cada dimensão linear do retângulo de cada um dos dois denominadores dos termos envolvidos torne visível a equivalência entre as duas frações de cada par: 1/4 e 5/20; 1/5 e 4/20.
- qualquer outro retângulo de dimensões lineares múltiplas de 4 e de 5, pelo mesmo fator, é uma representação a poder ser considerada nesta tarefa.

Para estas operações é possível e desejável em fase posterior proceder à utilização da reta orientada. Contudo, há que evidenciar que este modelo é significativamente mais formal do que os modelos de área considerados neste artigo e que requer, consequentemente, cuidados acrescidos.

O MODELO RETANGULAR E A COMPREENSÃO DO ALGORITMO DA MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação de números racionais envolve a compreensão do sentido aditivo desta operação com números inteiros; requer, também, a aplicação de um dos significados de fração, concretamente, de operador partitivo multiplicativo.

A utilização do modelo retangular para representar esta operação revela-se um auxiliar significativo porque dá visibilidade a dois dos aspetos envolvidos na complexidade deste conceito operatório, a saber, o da consideração de duas[4] unidades de referência diferentes e o do efeito operatório traduzido pela expressão *a multiplicação nem sempre aumenta.*

Considere-se a seguinte situação:

Quando numa sala de aula de 1.º ciclo, com 25 crianças, se procede ao apuramento da quantidade de leite envolvida na distribuição de um pacote de 200 ml a cada uma e se escreve 25 x 1/5 l = 5 l, esta expressão representa a soma de 25 parcelas, sendo 1/5 o valor de cada uma. A multiplicação apresenta-se nesta situação com um dos seus sentidos – o sentido aditivo – e de modo absolutamente idêntico ao que se passa quando os fatores envolvidos são números inteiros. Contudo, para esta mesma operação existem ainda situações em que o sentido aditivo da multiplicação não se ajusta, apesar de também estarem envolvidos um número racional não inteiro e um número inteiro, como acontece na próxima situação:

Quatro quintos dos trinta alunos da turma T almoçam diariamente na cantina da escola. Quantos alunos almoçam por dia nesta cantina?

A expressão 4/5 x 30 representa o número de alunos que almoçam na cantina. A solução pode obter-se começando por determinar a quinta parte de 30 e de seguida multiplicar o resultado obtido por 4 escrevendo:

1/5 x 30 = 6

4 x 6= 24

e concluindo que 4/5 x 30 = 24

O sentido aditivo da multiplicação não é aqui adequado, uma vez que não tem significado a soma de trinta parcelas iguais a 4/5. É necessário recorrer ao significado de número racional como operador partitivo multiplicativo, como passo a exemplificar:

A quarta parte dos alunos desta turma T que almoçam na escola tem apoio da ação social escolar. Quantos alunos da turma são abrangidos por este apoio?

A expressão 1/4 x 4/5 x 30 modela esta situação. À semelhança do que já aconteceu para a adição/subtração, o modelo retangular vai ser também aqui usado para representar a expressão inicial 4/5 x 30. A unidade é composta por 30 alunos que vão ser organizados num retângulo com 5 colunas e 6 linhas, como se vê na figura 3.

Figura 3. 30 crianças dispostas em retângulo de 6 × 5

Cada coluna representa a quinta parte dos trinta alunos da turma e portanto, quatro colunas mostram os 4/5 x 30, como mostra a figura 4.

Figura 4. As colunas sombreadas representam 4/5 × 30

A expressão 1/4 x 4/5 x 30 é representada na figura 5 por uma das 4 colunas sombreadas na figura 4.

Figura 5. A coluna sombreada representa 1/4 × 4/5 × 30

4 Refiro-me aos casos em que, pelo menos um dos fatores é um número racional não inteiro.

Conclui-se que: há 6 alunos abrangidos pelo apoio;

são equivalentes as expressões

1/4 x 4/5 x 30 e 1/5 x 30

ou seja, são verdadeiras as igualdades

1/4 x 4/5 x 30 = 1/5 x 30 = 6

e depreende-se que

1/4 x 4/5 = 1/5

Dando sentido à igualdade 1/4 x 4/5 = 1/5, mas desligando do contexto.

A expressão pode ser interpretada como a quarta parte de quatro coisas, em que estas coisas são quintos. E como a quarta parte de quatro coisas é uma dessas coisas, compreende-se que a quarta parte (1/4) de quatro quintos (4/5) seja um quinto (1/5). Recorrendo novamente ao modelo retangular é possível atribuir significado à igualdade 1/4 x 4/5 = 1/5, como se exemplifica de seguida (figuras 6 e 7). A unidade será a área de um retângulo de 4x5, com 4 linhas e 5 colunas, de tal modo que, quer 1/5, quer 1/4 sejam imediatamente visíveis.

A região sombreada no retângulo apresentado na figura 6 representa 4/5.

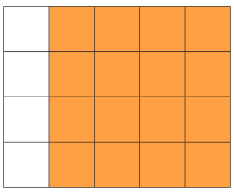


Figura 6. A região sombreada representa 4/5

De seguida há que sombrear a quarta parte da região já sombreada como se apresenta na figura 7.

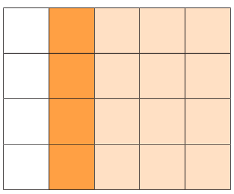


Figura 7. A coluna com o sombreado mais escuro representa 1/4 de 4/5

Finalmente, é necessário exprimir esta região (sombreada mais escura) assumindo a unidade inicial apresentada o que pode ser representado pela fração 1/5. Destaco que foram mobilizadas duas unidades de referência: (i) a área do retângulo de 4*5 foi necessária para representar 4/5; (ii) este valor – 4/5 – serviu como unidade para isolar a (sua) quarta parte; (iii) finalmente foi necessário exprimir este último valor assumindo a unidade inicial.

Generalizando, no produto p, de dois números racionais não inteiros, f e g, p = f x g, estão envolvidas duas unidades:

– a unidade inicial é referência para o que se considerar como primeiro fator, g, e para o produto p; g é a unidade de referencia para f.

Saliente-se ainda um aspeto da multiplicação de números racionais visível na figura 7: o produto de 1/4 por 4/5 é menor do que 4/5, relação não existente quando o universo de trabalho é o conjunto dos números naturais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aprendizagem compreensiva dos algoritmos de cálculo requer a exploração dos conceitos que os fundamentam e consequentemente é ilusório pensar que ela se processa com o treino algorítmico. É assim fundamental organizar, implementar e avaliar o trabalho em torno do desenvolvimento da compreensão dos conceitos de unidade de referência e de equivalência de frações explorando tarefas diversificadas com o apoio de recursos adequados, entre os quais se destacam os modelos de área.

Quando se utilizam modelos retangulares (de dimensões lineares inteiras) é importante a exploração que permite associar cada linha, cada coluna e cada célula (corresponde ao cruzamento de linha com coluna) a frações unitárias. Fica também a sugestão de substituir a expressão *redução ao mesmo denominador* por *considerar a mesma unidade dividida em igual número de partes* para os termos da adição/subtração.

A formação de professores enfrenta vários desafios, entre os quais se destaca o aprofundamento matemático dos conceitos e das relações em articulação estreita com o conhecimento didático requeridos para um ensino que oriente e apoie aprendizagens duradouras e significativas. Se este artigo puder contribuir para a formação cumpriu a finalidade que me propus.

Referências

Battista, M. T., (2012). Cognition-based assessment & teaching of fractions. Building on Student's Reasoning. Portsmouth: Heinemann.

Kieren, T. E. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. A. Lesh (ed.), *Number and Measurement* (pp. 101-144). Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education

National Council of Teachers of Mathematics (2017). Princípios para a Ação – Assegurar a todos o sucesso em Matemática (F. Nunes, Trad.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Veloso, G. (2014). Número Racional como quociente de inteiros. Educação e Matemática, 128, 8-12.

Graciosa Veloso

Escola Superior de Educação de Lisboa

Neste número continuamos a celebrar os 30 anos de edição da revista Educação e Matemática com o testemunho de colegas que muito têm contribuído, no passado e no presente, para a construção desta publicação. Depois dos testemunhos de Ana Paula Canavarro, Isabel Rocha e Fernando Nunes, pedimos a Adelina Precatado, redatora e subdiretora da EeM durante vários anos, para "revisitar" textos publicados há tempo e refletir sobre eles, recuperando o seu significado no tempo em que foram publicados e interpretando-os igualmente no atual contexto educativo. Agradecemos muito a Adelina que, tal como os restantes colegas, aceitaram prontamente a nossa proposta e deram corpo a esta celebração que é, sobretudo, mais uma oportunidade para partilharmos ideias e refletirmos enquanto comunidade.

Que fazer com a Matemática?

Adelina Precatado

Estávamos em 2000, no Ano Mundial da Matemática, e o Eduardo Veloso descrevia assim, na EM 60, o entusiasmo que sentiu por parte dos alunos (1.º ciclo) no forte envolvimento num projeto do poliedro na escola:

> Temos do nosso lado a matemática, a ciência da criatividade, da liberdade, da imaginação. Temos ao nosso redor, o David e todos os seus colegas – curiosos, receptivos, cheios de energia! Tudo parece ser propício a que todos os jovens possam ter uma matemática escolar rica ao longo de toda a escolaridade. Tal como as professoras Alda e Fátima abriram o mundo dos poliedros aos seus alunos, outros mundos matemáticos estão disponíveis e poderiam ser explorados e aprofundados nos anos seguintes

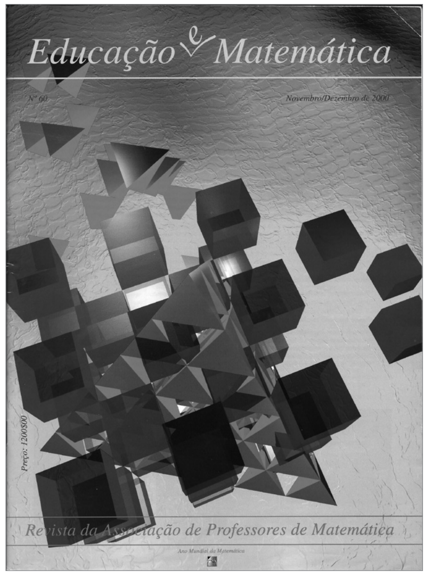
Mas o Eduardo continuava:

> No entanto, infelizmente, a experiência de muitos alunos com a matemática é precisamente oposta. Em vez da criatividade, a rotina dos exercícios sem significado. Em lugar da liberdade, o espartilho das definições caídas do céu. Em vez de investigações e explorações matemáticas com espaço para a imaginação, para a escolha, para o ensaio, caminhos pré-definidos para chegar a soluções únicas

e perguntava:

> Que queremos fazer com a Matemática e com os nossos alunos?

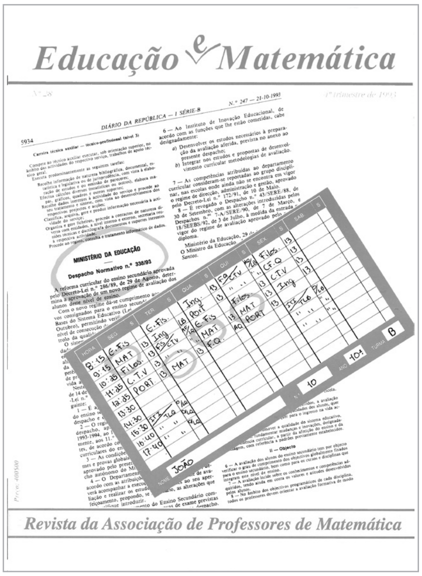
Como resposta ao desafio que a redação da EM me fez, de "escolher e revisitar um artigo passado" escolhi este editorial da EM 60, do Eduardo Veloso, fundamentalmente por duas razões: a primeira porque a questão que levanta está longe de estar resolvida e a segunda porque o Eduardo Veloso tem sido e continua a ser uma referência para a APM e para os professores que se atrevem a experimentar, a questionar e a tentar mudar o rumo à matemática escolar e à escola…. E, volto a citá-lo, agora já em 2008, roubando duas frases soltas do artigo *As*

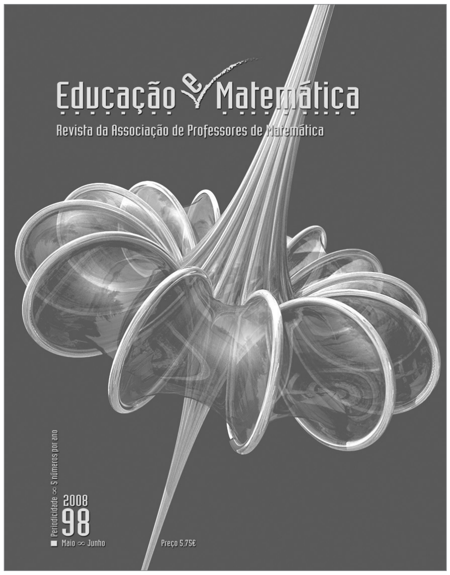


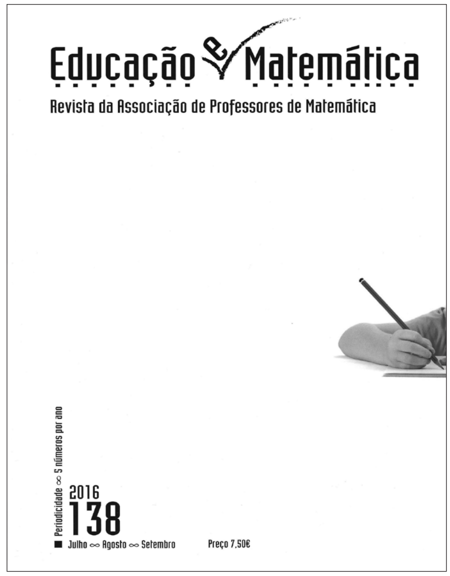
bandeiras de Milfontes (EM 98) porque, na minha perspetiva, referem, ontem como hoje, aspetos essenciais para encararmos uma verdadeira renovação do ensino da matemática:

– Uma das afirmações fundamentais do documento de Milfontes está na pág. 37, em que se afirma que a primeira razão pela qual a Matemática ocupa um lugar tão destacado no sistema escolar decorre de que "a Matemática constitui um património cultural cuja apropriação é um direito de todos.
– (…) os tais muitos professores que referi e que conhecem métodos inovadores e fazem esforços para os aplicar, estão sujeitos a uma pressão enorme, permanente e de sentido contrário, num ambiente em que os objectivos são o sucesso em testes e exames de tempo limitado, onde as qualidades de perseverança, raciocínio ponderado, métodos de investigação e resolução de problemas com apoio de tecnologia, que gostariam de ver nos seus alunos, de pouco servem, quando não são até prejudiciais.

Quando revejo estes 30 anos de revistas e encontro tantas ideias, tantas propostas, tantos relatos de experiências inovadoras, direi







que muito foi feito, que a APM valeu a pena, mas também que há hoje muito, mesmo muito, a discutir e a alterar para caminharmos no sentido que o Eduardo não se cansa de apontar.

Se é verdade que assistimos a um movimento de renovação, ao longo destes 30 anos, com avanços e recuos, onde os professores e a APM desempenharam um papel essencial, é também verdade que os últimos tempos têm sido momentos de enorme retrocesso…

Vivemos tempos em que as políticas educativas se têm caraterizado pela intensificação do trabalho burocrático do professor, pela desvalorização do seu papel enquanto ator principal num funcionamento democrático da escola e na construção de projetos de inovação, pela prestação de contas traduzida em termos de resultados de exames e *rankings*, por cenários de instabilidade e precariedade na carreira. Nestes tempos tem sido reforçada e até assumida a visão da matemática como disciplina elitista e seletiva, desempenhando um papel importante na separação de percursos escolares mais ou menos valorizados e assumindo, no ensino secundário, um objetivo principal de fazer a seleção para determinados cursos do ensino superior.

Anunciam-se hoje o "Perfil do Aluno à Saída do Secundário", a "Flexibilidade Curricular", as "Aprendizagens Essenciais", fala-se na Escola para o Século XXI, mas o que está a ser feito para um envolvimento forte e entusiasmado dos professores? E qual é o papel da matemática neste cenário?

Será possível caminharmos no sentido das tais "aulas vividas" que passam pela resolução de problemas, a utilização da tecnologia, a ligação à realidade, o desenvolvimento de investigações e projetos, sem um envolvimento sério dos professores neste processo? Sem alteração dos atuais programas? Sem alteração do papel seletivo da matemática?

Penso que não!

O que fazer então, para que um dia "o objetivo central da educação matemática para todos os alunos, seja de natureza cultural – conhecimento e reflexão sobre as caraterísticas principais da matemática como ciência, papel da imaginação e da lógica na sua história milenar, relações com outros domínios como por exemplo as ciências experimentais e a arte, e aplicações", como defende o Eduardo Veloso? Como encontrar estratégias para aumentar o debate coletivo e desafiar o instituído... no caminho de um currículo e de uma escola que possibilite, a todos, o acesso ao conhecimento matemático?

Mas foi para responder a questões como estas que nasceu e cresceu a APM e, por isso mesmo, termino, com esperança e desafio:

– a esperança que a Teresa Moreira nos deixa na EM 138, 2017, "esperança que com uma reflexão participada, conjunta, informada e corajosa… a matemática possa contribuir para a formação integral de futuros cidadãos conscientes, preparados e capacitados para todo e qualquer que seja o seu percurso de vida".
– o desafio que o Paulo Abrantes tão bem traduziu em tantos artigos desta revista — o desafio ao empenhamento, à participação, ao envolvimento dos professores e especialmente dos sócios da APM, como aspeto decisivo no processo de renovação do ensino da matemática.

E tal como refere o Paulo, na EM 28, "enfrentar desafios coletivos (…) não fará também parte, afinal, do estilo APM?"

Adelina Precatado

Escola Secundária de Camões

Trabalhar com portefólios escolares

Ana Paula Alves

Podemos dizer, de uma forma simples, que um portefólio escolar é uma pasta organizada que contém uma determinada coleção de materiais (geralmente chamados de "artefactos") que foram selecionados pelo aluno (ou em conjunto com o(s) seu(s) professor(es)) para cumprir determinados objetivos. Os materiais não se referem apenas aos trabalhos curriculares dos alunos mas também às reflexões realizadas em vários momentos do processo de construção: reflexões sobre a sua aprendizagem, justificações ou argumentações sobre as suas produções, análises críticas tendo por base as considerações dos professores, autoavaliação do seu trabalho, entre outras. A sua realização pressupõe o devido acompanhamento e orientação do aluno, pelo que os portefólios não contêm apenas os produtos de aprendizagem mas também evidenciam o respetivo processo de construção. Assim, contêm, de alguma forma, revisões, reformulações ou melhoramentos efetuados pelos alunos e comentários escritos, mensagens ou *feedback* dado por parte dos professores que os orientam ou até de outros intervenientes no processo, como os colegas de turma e/ou os pais dos alunos.

O FORMATO DO PORTEFÓLIO

Hoje em dia, podemos ter portefólios eletrónicos, também referidos como portefólios digitais ou e-portefólios, que usam as tecnologias para serem construídos, lidos ou armazenados. Estes portefólios surgiram no início dos anos 90, nos Estados Unidos da América, a par da evolução tecnológica, podendo diferenciar-se em dois tipos: os que não precisam do acesso à Internet para serem criados e desenvolvidos até aos que são totalmente desenvolvidos na *web* (os *web* portefólios). Assim é possível ter portefólios maioritariamente em formato papel que contêm alguma informação multimédia anexada ao portefólio, por exemplo, um vídeo demonstrativo da participação do aluno num determinado trabalho de grupo, uma fotografia de uma construção realizada pelo aluno em material manipulável ou um ficheiro áudio de uma explicação de um exercício feita pelo aluno. Podemos ainda construir portefólios totalmente digitais a partir de, por exemplo, um processador de texto *Word* ou de uma apresentação *PowerPoint* e utilizarmos o acesso à Internet para os publicar ou divulgar. Mas também os podemos construir totalmente *online* a partir de variadíssimas aplicações livres e/ou gratuitas disponíveis na *web* que se adaptam muito bem à criação de portefólios. Destacamos, por exemplo, os blogs, as ferramentas da Google Drive, as ferramentas de criação de *websites* (por exemplo, o *Weebly*), ou os murais de partilha (por exemplo, o *Padlet*). Temos ainda os sistemas de gestão de aprendizagem (Learning Management Systems, LMS), como é o caso do Moodle, que, além de permitirem um ambiente virtual de apoio à aprendizagem dos alunos, também comportam a incorporação de ambientes de aprendizagem controlados pelos alunos.

Na escolha do sistema de suporte é importante que o aluno possa entrar livremente no seu e-portefólio, podendo geri-lo para enviar os seus trabalhos e reflexões, se possível com permissões para modificar o *layout* ou outras componentes, personalizando-o de acordo com os seus interesses, criatividade e gosto pessoal. Também é importante que o sistema apresente um ambiente que facilite o trabalho aos alunos e professores, seja interessante e atrativo, e tenha potencialidades ao nível da privacidade e da segurança. Estes dois últimos aspetos são importantes porque o portefólio pode conter documentos, reflexões pessoais e comentários (dos professores, dos pais, entre outros) acerca do desenvolvimento do trabalho e/ou de comportamentos e atitudes do aluno, que não devem circular livremente na escola e muito menos pela Internet. Para este efeito, alguns sistemas de suporte possibilitam a colocação de *passwords* de entrada criadas pelo aluno (e fornecidas aos professores e pais) e a escolha de diferentes permissões de partilha para o público com acesso ao e-portefólio (quem pode ler, escrever, moderar ou administrar). Outros, mais sofisticados, permitem que o aluno tenha áreas de publicação reservadas, sendo possível decidir que artefactos podem ser publicados e quem pode observar e comentar o portefólio (para além do professor que terá sempre acesso). Ao nível da segurança, é importante escolher um suporte fiável para não se perder a informação que o aluno construiu ao longo de um ano escolar e, se possível, que possibilite o acesso e a continuidade do trabalho nos anos seguintes.

A escolha do suporte estará naturalmente sujeita às condições do contexto de implementação, nomeadamente, aos recursos tecnológicos que os alunos e professores têm à sua disposição, aos objetivos do programa de portefólios, à idade dos alunos, ao tipo de público a quem se pretende mostrar o portefólio ou mesmo aos conhecimentos tecnológicos dos alunos e dos professores envolvidos.

Quando as condições de acesso à Internet se encontram asseguradas, os *web* portefólios são uma boa escolha porque apresentam muitas potencialidades, principalmente, ao nível da sua acessibilidade e visibilidade, às possibilidades de *feedback* imediato pelos professores que os observam e comentam, e às possibilidades de partilha e de colaboração no processo de construção, por exemplo, para que os alunos possam aceder ou comentar os e-portefólios dos colegas, ajudando-os na sua elaboração.

DIFERENTES POSSIBILIDADES PARA OS PORTEFÓLIOS

Na literatura é referido que normalmente aparecem três tipos de portefólios escolares – de "apresentação", de "aprendizagem" e de "avaliação" (MEQ, 2002), apresentando-se cada um com diferentes desenvolvimentos e funcionalidades, embora todos possam assumir as particularidades uns dos outros (Gomes, 2006, p.3). Assim, podemos ter portefólios cujo principal intuito será, por exemplo, que os alunos possam apresentar, a um determinado público (colegas, professores, pais, escola ou a um público mais vasto), os trabalhos que foram realizando ao longo do ano, evidenciando o seu percurso escolar. Neste caso seriam portefólios com uma maior vertente de "apresentação", pelo que a seleção dos materiais a divulgar é maioritariamente escolha do aluno. No caso de portefólios de "aprendizagem" cujo principal propósito é conseguir que o aluno tome consciência das aprendizagens realizadas, é possível que a sua coleção contenha rascunhos e trabalhos em construção acompanhados pelas reflexões do aluno, assumindo mais a vertente de um portefólio de trabalho. Neste caso, os portefólios podem conter não só as realizações das propostas de trabalho que o professor definiu mas também as que o aluno fez por iniciativa própria para evidenciar a sua aprendizagem. Já os portefólios de "avaliação" são mais vocacionados para a avaliação e classificação do aluno, pelo que contêm maioritariamente propostas estipuladas pelo professor.

Quando se pensa nos objetivos de um portefólio há sempre que considerar a relação entre estas vertentes e o tipo de trabalhos e reflexões que se pretendem que os alunos colecionem nos seus portefólios. Não é fácil gerir um portefólio que seja simultaneamente de avaliação e de aprendizagem. Quando o objetivo do portefólio é muito centrado na avaliação, o aluno pode ter uma reduzida ação sobre as decisões relacionadas com a construção da sua coleção e não conseguir ser autêntico nas suas reflexões (Barrett, 2004). Portanto, o melhor será estabelecer um meio-termo, possibilitando escolhas quer por parte do professor quer por parte do aluno, e uma avaliação que não iniba a reflexão por parte dos alunos.

O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE UM PORTEFÓLIO

O sentido do trabalho com portefólios reside no processo de construção e nas dinâmicas que se estabelecem para que este tenha um valor pedagógico. Este processo vai depender naturalmente das razões pelas quais se pretende implementar esta abordagem com os alunos. Os portefólios vão servir para o aluno documentar aquilo que aprendeu ao longo do ano escolar? Para fomentar a reflexão? Para observar os procedimentos utilizados na resolução de problemas? Para que os alunos explorem e ampliem a sua aprendizagem relativamente a um determinado tema programático? Para fomentar a comunicação matemática na resolução de problemas? Para documentar o desenvolvimento de um trabalho de projeto? Estas e outras questões podem servir para refletirmos sobre aquilo que realmente pretendemos com os portefólios dos alunos para que possam evidenciar o seu crescimento ao longo de um determinado período de tempo relativamente aos objetivos propostos.

Num cenário possível, o processo de construção pode envolver que, durante um determinado período de tempo, à medida que os alunos vão desenvolvendo as atividades relacionadas com as matérias em estudo, vão começando a colecionar as suas produções (individuais ou em grupo) nos seus portefólios. Estas produções, que podem estar no portefólio em diferentes etapas de conclusão (rascunhos, revisões, versão final), vão sendo revistas pelo professor, que por sua vez vai tecendo considerações deixando indicações que podem ajudar o aluno a ultrapassar as suas dificuldades ou a ampliar a sua aprendizagem. As novas versões ou revisões feitas pelos alunos podem ser anexadas ou colecionadas juntamente com as originais para que o aluno e o professor percebam o progresso produzido. A análise, pelo aluno, dos materiais produzidos, tendo por referência os objetivos e os critérios de avaliação do portefólio ajudam-no na organização do mesmo, podendo ser necessário acrescentar produções que enriquecem o seu portefólio ou remover trabalhos de menor qualidade. A seleção dos materiais pode ser realizada individualmente pelo aluno, a pares, ou em pequenos grupos, tendo em atenção as considerações prévias efetuadas por parte do professor. Também podem existir momentos (intermédios e finais) de apresentação dos portefólios (ou de algumas das produções) à turma (e também aos pais) que podem representar pontos de situação interessantes para a autoavaliação e heteroavaliação dos alunos. No final, os portefólios devem ser considerados na avaliação das aprendizagens dos alunos e avaliados de acordo com os critérios de avaliação que o professor, desde o início da experiência, estabelece, combina e clarifica com os alunos e também com a escola e com os pais.

OS MATERIAIS QUE COMPÕEM UM PORTEFÓLIO

É importante perceber que a utilização de portefólios integra-se muito bem em ambientes de aprendizagem em que os alunos assumem uma postura mais ativa, seja para procurarem o seu conhecimento de forma individual, a pares, ou em trabalho de grupo. É muito mais difícil levar os alunos a constituírem portefólios em ambientes em que quase mais nada se faz a não ser resolver exercícios do manual e estudar para o teste de avaliação. Se o professor estabelecer com os alunos um processo mais dinâmico em que estes se envolvem em pesquisas, investigações, projetos, trabalhos relacionados com a aplicação da matemática no mundo real, trabalho interdisciplinar, resolução de problemas não rotineiros, jogos, entre outros, o portefólio assume a sua utilidade, especialmente pela necessidade de organizar e envolver os alunos no processo de aprendizagem.

Stenmark (1991, p.37) identificou alguns exemplos de materiais que podem integrar um portefólio de matemática e que, na nossa opinião, ainda se adequam à atualidade e podem sugerir ideias para a experiência que cada qual pretende desenvolver (tabela 1).

Tabela 1. Materiais para um portefólio de matemática

– Respostas a questões abertas realizadas em trabalho de casa;
– Relatórios de um trabalho de grupo com comentários acerca da contribuição individual;
– Trabalho que relaciona outras áreas de aprendizagem com a matemática;
– Um problema idealizado pelo aluno (com ou sem solução);
– Trabalho de Arte realizado pelo aluno;
– Excertos do jornal diário;
– Rascunho, revisão e versão final de um trabalho do aluno relacionado com a resolução de um problema de matemática complexo (evidência escrita, esquemas, gráficos, e outros procedimentos);
– Uma descrição do professor sobre uma atividade do aluno (que evidencie conhecimento sobre um determinado conceito ou relação matemática);
– Registo (por ex. fotografia) do trabalho do aluno com manipuláveis;
– Correções efetuadas pelo aluno sobre erros ou conceitos mal compreendidos;
– Registo de uma entrevista ao aluno (efetuada pelo professor ou por um outro aluno);
– Observações do professor;
– Autobiografia matemática (reflexão do aluno sobre a sua relação com a matemática);
Traduzido e adaptado de Stenmark (1991, p.37), citado em Alves (2007, p.70)

Considerando que a atividade de colocar os alunos a refletir sobre a sua aprendizagem pode representar uma novidade para muitos alunos, especialmente para os mais novos, pode ser uma boa estratégia fornecer alguma orientação para este processo. Na tabela 2 deixamos alguns exemplos de questões elaboradas pelos autores Lambdin e Walker (1994, p.97) para ajudar os alunos nas suas reflexões.

Tabela 2. Questões orientadoras para a reflexão

– Que atividade ou tema matemático é abordado?
– Em que medida a atividade te ajudou a aprender algo de novo?
– O que aprendeste com esta experiência?
– Consegues descrever a relação existente entre a atividade e a sua aplicação em outras áreas de estudo ou na vida real?
– Terias realizado a atividade de outra forma se tivesses tido mais tempo?
– Que estratégias usaste para a desenvolver? (Como é que pensaste durante o processo de realização?)
– Para encontrares as respostas que procedimentos matemáticos utilizaste?
– Como aprecias (avalias) o teu envolvimento nesta atividade?
– Em relação à matemática, em que temas te sentes mais à vontade?
– Quais são os teus objetivos pessoais relativamente à matemática que estás a aprender?
Traduzido e adaptado de Lambdin e Walker (1994, p.97), citado em Alves (2007, p.71)

Em relação às possibilidades para as reflexões do aluno sobre a sua relação com a matemática, destacamos alguns exemplos que consideramos interessantes para integrarem a denominada "Autobiografia matemática" podendo considerar-se esta tarefa como uma das primeiras a propor aos alunos (tabela 3). Numa fase posterior, podemos fazer uma comparação e observar a evolução dos alunos.

Tabela 3. Orientações para a "Autobiografia de matemática"

- Sempre que penso em matemática, sinto-me … porque …
- O meu histórico familiar em matemática é … Eu sei disso porque…
- Eu sou (bom/mau) em matemática porque …
- Eu acredito/não acredito que alguém pode ser bom em matemática porque ...
- Eu sou o (pior/melhor) a fazer… Eu sei disso porque ...
- Aprendo melhor matemática quando…
- Eu acho que aprender matemática é …
- A matemática é mesmo fácil/difícil de aprender quando …
- A minha recordação preferida/menos preferida sobre matemática é …
- Eu acho que a matemática é/não é realmente importante porque …
- Quando eu crescer, eu gostaria de ser … Vejo que a matemática é importante nessa profissão porque ….
- O mais aborrecido na aula de matemática é quando …
- Interesso-me mais pela aula de matemática quando …
- Uma coisa que eu realmente gostava que soubesse sobre mim é …
- Uma coisa que o meu professor do ano passado gostaria que este ano soubesse sobre mim é …
- Um momento "clique" que eu tive em matemática foi …
- Podes colocar quaisquer outros comentários/ideias que tenhas em relação à tua relação com a matemática.

Traduzido e adaptado de Pearse (2016)

A AVALIAÇÃO DE UM PORTEFÓLIO

Os critérios de avaliação dos portefólios dos alunos devem ser definidos de acordo com a particularidade da experiência. No geral, as avaliações dos portefólios pelos professores incidem sobre três formas diferentes de avaliar (Kuhs,1994, p.335):

- Avaliação de cada peça de trabalho colocada no portefólio para obter a classificação final do portefólio (por exemplo, por média);
- Adoção de um esquema analítico onde várias performances (comunicação matemática, compreensão de ideias, etc.) correspondem a diferentes classificações;
- Opção por uma única classificação global para as peças contempladas no portefólio.

Da nossa experiência com portefólios, em que os professores classificaram os portefólios com base numa grelha de avaliação comum a toda a escola, foi interessante observar que o "resultado global de um e-portefólio [classificado como] «pouco satisfatório» devia-se normalmente ao facto deste documento estar algo incompleto (faltando trabalhos, textos, reflexões, etc.) ou com partes consideradas insuficientes relativamente ao estipulado (material incompleto, imperfeito, pouco consistente ou com vários erros assinalados e não corrigidos pelos alunos, etc.), o que não significava que no seu conteúdo não houvessem partes ou trabalhos de qualidade ou com grande valor (cognitivo ou afetivo) para o aluno" (Alves, 2014, p. 490). Neste aspeto é importante considerar que cada portefólio contém particularidades do seu autor, relevantes do ponto de vista educativo, por vezes não observáveis a partir dos resultados de possíveis grelhas globais de avaliação que muitas vezes apenas contabilizam o número de peças ou o cumprimento de aspetos gerais da organização dos portefólios. Por essa razão, é importante que em determinados momentos, por exemplo, no final de cada período letivo, o professor possa reservar uma aula ou momentos de aula para a apresentação dos portefólios pelos alunos para que estes possam evidenciar os aspetos mais positivos do trabalho que realizaram, tendo por base os critérios de avaliação estabelecidos.

A VALORIZAÇÃO DOS ALUNOS ATRAVÉS DOS PORTEFÓLIOS

Das vantagens pedagógicas que são assinaladas na literatura quando se trabalha com portefólios escolares destacamos a sua importância relativamente ao efeito que os portefólios podem ter na valorização dos alunos. Esta valorização pode afetar desde os alunos com usuais "boas notas" nos testes de avaliação até aos alunos com baixos resultados. Da nossa experiência com portefólios observamos que embora os alunos refiram que têm "mais trabalho" com a construção e apresentação do seu e-portefólio, de uma forma geral, saem compensados com o resultado final (Alves, 2014, p.517).

A questão é que todos os alunos, independentemente das suas notas, podem utilizar o processo de construção dos seus portefólios para mostrarem aspetos do seu conhecimento e capacidades importantes do seu percurso educativo que acrescentam mais-valias à sua avaliação escolar. Para os alunos com mais dificuldades, ao nível do seu rendimento escolar, pode existir uma mudança de atitude perante a aprendizagem da disciplina logo que se apercebem que conseguem desenvolver (como os outros) o seu portefólio. Para alguns alunos, pode mesmo acontecer que, no contexto da construção do seu portefólio, evidenciem competências até então desconhecidas (por exemplo, criatividade na organização do portefólio ou na escrita das reflexões) passando a ser mais valorizados perante os colegas de turma e o professor. Esta elevação da sua autoimagem e a motivação acrescida pode aumentar as possibilidades de recuperação destes alunos.

Também é possível que, numa fase inicial, alguns alunos (mesmo os “bons alunos”) desvalorizem a construção dos portefólios por estarem mais habituados a serem avaliados apenas pelos testes de avaliação. Para ultrapassar esta dificuldade, é importante incentivar os alunos, conversando com eles sobre as razões pelas quais estão a construir os seus portefólios, dar-lhes uma orientação adequada para a sua construção (fornecendo-lhes os objetivos, estrutura, número de materiais, guiões de reflexão, etc.), mostrar-lhes um efetivo acompanhamento do processo, realizar com eles avaliações intermédias para que tenham a oportunidade de reverter e melhorar a sua situação, clarificar com eles a avaliação dos portefólios e avaliá-los de acordo com o combinado, adequar o trabalho que têm de realizar (ou seja, sermos razoáveis relativamente aquilo que os alunos podem fazer e que nós podemos acompanhar) e também incentivar à participação dos pais (para visualizarem ou comentarem os portefólios dos filhos). Em todo o caso, a evolução da familiarização de todos os intervenientes do processo (alunos, professores, pais, escola, etc.) será um dos aspetos mais facilitadores do trabalho com portefólios. É importante começar a experimentar, dando algum tempo e oportunidade para que este tipo de trabalho se integre nas práticas normais de sala de aula. O resultado final será grandemente compensado.

Referências

Alves, A. (2007). *E-Portefólio: Um estudo de caso* (Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga). Consultado em http://bit.ly/2xDk558

Alves, A. (2014). Portefólios digitais no ensino não superior: práticas de implementação no Agrupamento de Escolas Dr. Francisco Sanches (Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, Braga). Consultado em http://bit.ly/2eqUILK

Barrett, H. (2004). *Conflicting Paradigms in Electronic Portfolio Approaches*. Consultado em http://bit.ly/2xDEF5l

Gomes, M. (2006). Portefólios digitais: revisitando os princípios e renovando as práticas. In *Actas do VII Colóquio sobre Questões Curriculares.* III Colóquio Luso-Brasileiro sobre Questões Curriculares, Braga: Universidade do Minho. Consultado em http://bit.ly/2xDPK6F

Kuhs, T.(1994). Portfolio Assessment: Making It Work the First Time. *The Mathematics Teacher,* 87 (May 1994), pp. 332-335

Lambdin, D. & Walker, V.(1994). Planning for Classroom Portefólio Assessment. *Emphasis on Assessment, Readings from School- Based Journals*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston (1996), pp. 95-101

Ministère de l’Éducation du Quebec, Direction des ressources didactiques (2002) *Portfolio sur support numérique*. Consultado em http://bit.ly/2ew6R5D

Pearse, M. (2016). *Getting the Most Out of Math Portfolios*. Consultado a 3 de setembro de 2017 em http://bit.ly/2erjIm6

Stenmark, J. (1991). *Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions, and Practical Suggestions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

COMO QUE POR MAGIA

A tarefa enquadra-se naquele tipo de tarefas que começa por ser um desafio e em que se espera a atenção inicial de todos os alunos na sala de aula de qualquer ciclo de ensino.

A variante aqui apresentada pressupõe um trabalho ao nível do ensino secundário num contexto de estudo de sucessões, nomeadamente a soma de termos de uma progressão geométrica e o limite do termo geral dessa soma na obtenção da “soma infinita”, o que cabe perfeitamente no 11.º ano de escolaridade. Pode contemplar um momento de resolução de equações do primeiro grau ao procurar um ponto fixo de uma função, ou seja, a solução de uma equação do tipo f(x)=x, cuja condição de existência cabe no contexto do estudo do teorema de Bolzano no 12.º ano de escolaridade, sendo a resolução em si tema abordado desde o 7.º ano de escolaridade. Em alternativa ou em complemento, a abordagem poderá contemplar um trabalho com derivadas se se considerar uma condição de convergência de uma função para um ponto fixo, condição essa que não cabe nos programas de matemática do ensino não superior, mas cuja utilização é perfeitamente possível nesse tempo, a partir do trabalho com derivadas ao nível do 11.º ano e/ou 12.º ano. De qualquer modo, há uma abordagem iterativa que muito importa ao desenvolvimento de um raciocínio algorítmico, relacionado naturalmente com a programação.

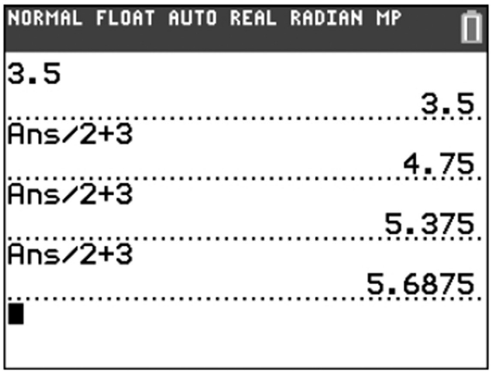
Esta tarefa enquadra-se num trabalho realizado em pós graduação em que se acaba por apontar algumas pistas para o trabalho com métodos numéricos de resolução de equações no ensino secundário.

https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/34723/1/Dissertação Raul Aparício Gonçalves.pdf

Raul Aparício Gonçalves

Agrupamento de Escolas de Ermesinde

Como que por magia



1. Prime as teclas necessárias até aparecer um número à tua escolha no visor da máquina e prime a tecla $\boxed{\text{enter}}$ (em alguns modelos pode ser a tecla $\boxed{=}$);
2. Depois prime sucessivamente as teclas $\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{+}\boxed{3}$ e observa o resultado;
3. De seguida prime as teclas $\boxed{\text{enter}}$ (ou $\boxed{=}$) sucessivamente e observa o que sucede;
4. Repete o procedimento, iniciando com outros números.
   O que observas? ____
5. Repete agora o procedimento seguindo os passos de 1 a 4. Mas, no passo 2, prime sucessivamente $\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{-}\boxed{3}$.
   O que observas? ____

Consegues encontrar uma explicação para a diferença que possas ter encontrado após os procedimentos com cadeias diferentes de operações? Queres tentar com mais uma ou duas cadeias de duas operações, cada uma precedida de um número?

Sugestão: *Interpreta uma cadeia como uma função* φ *do tipo* $\varphi(x) = ax + b$.
Assim, poderás estudar a sucessão de valores obtidos, iniciando pelo valor x_0, *que poderás traduzir por:*

$$x_0,\ x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(\varphi(x_0)) = \varphi^2(x_0), x_3 = \varphi^3(x_0),\ \dots\ , x_n = \varphi^n(x_0),\ \dots$$

Mediana de dados não agrupados: a questão de ser pelo menos 50%

ADELAIDE FREITAS
JOÃO PEDRO CRUZ
NÉLIA SILVA

Com o presente trabalho temos como objetivo ilustrar exemplos que abrangem as diferentes situações que podem ocorrer no cálculo da mediana de uma coleção de dados. Pretendemos mostrar, com exemplos, as possíveis interpretações válidas de mediana que, de forma similar, podem ser extensíveis aos outros quartis. Com esses exemplos pretendemos discutir o eventual confronto entre a noção intuitiva de mediana e sua interpretação. Deste modo, esperamos contribuir para uma melhor compreensão de possíveis deduções, consequentes da interpretação de mediana, que por vezes causam alguma estranheza entre os estudantes, nomeadamente quando, por exemplo, existem observações repetidas e iguais à mediana numa coleção de dados.

CONCEITO EMPÍRICO DE MEDIANA: CÁLCULO E INTERPRETAÇÃO

Associado a uma coleção de dados, Murteira et al. (2010) refere que a mediana é, "de forma aproximada, o valor da coleção que tem 50% de observações inferiores e 50% de observações superiores" (p. 26), acrescentando que "em termos rigorosos, a mediana pode ser definida" do seguinte modo em termos de

$$med = \begin{cases} x_{\left((n+1)/2\right)} & , se\ n\ ímpar \\ \dfrac{x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}}{2} & , se\ n\ par \end{cases} \quad , \qquad \textbf{(1)}$$

onde n é o número total de observações e $x_{(i)}$ representa a i-ésima estatística ordinal (i.e., a i-ésima observação na amostra ordenada). De forma similar, Pestana & Velosa (2008) referem o conceito empírico de mediana, indicando que "a mediana é um conceito que envolve a ideia de ordenação: informalmente (…), é o valor que separa os 50% inferiores dos 50% superiores." (p. 86), e assinala também a fórmula de cálculo (1) para o caso de uma coleção de dados.

Em Guimarães & Cabral (1997) e em Mood et al. (1974), a definição de mediana empírica é dada pela fórmula (1). Em Hall et al. (2011) é dada a noção de mediana amostral usando a definição (1) e interpretando-a como sendo o "elemento que se encontra ao centro" na amostra depois de ordenada (pp. 7-8).

Na verdade, o uso da fórmula (1) é consensual. Ela é encontrada na generalidade dos atuais manuais escolares, dos 7.º e 8.º anos de escolaridade, em concordância com os programas curriculares de matemática (MEC, 2013), e dos livros de estatística que, ao nível do ensino superior, abordam a parte da estatística descritiva.

Se no cálculo do valor da mediana de uma coleção de dados (não agrupados), no contexto da estatística descritiva, é prática comum seguir a fórmula (1), não podemos dizer que encontramos uma uniformização de escrita quando se pretende descrever, por extenso, o significado de mediana. Em Amaro et al. (2009), para além de indicar a fórmula (1) no cálculo da mediana de "dados exaustivos", é esclarecido que se deve ter cuidado com a interpretação daquela medida consoante a natureza dos dados. Nomeadamente, refere que, para dados quantitativos contínuos, "50% das observações são inferiores – ou superiores à mediana" enquanto que para dados quantitativos discretos ou qualitativos ordinais, o significado de mediana deve ser adaptado e dizer "pelo menos 50% das observações são inferiores à mediana" (p. 54). Esta adaptação surge do facto de, na coleção de dados, poderem ocorrer observações repetidas iguais ao valor da mediana. Também Pestana e Gageiro (2008) define a mediana de acordo com a fórmula (1) mas distingue duas situações ao interpretá-la consoante existam observações diferentes ou iguais. Concretamente, aqueles autores referem que sendo "as observações diferentes entre si, a mediana define-se como o valor da sucessão [da amostra ordenada] que tem tantas observações inferiores ou superiores a ela. Caso existam observações repetidas, a mediana define-se como o valor da sucessão que tem tantas observações à sua esquerda como à sua direita" (p. 72). Mais ainda, chamam a atenção para uma particularidade da fórmula (1), referindo que "se n for par, a mediana é indeterminada, podendo ser qualquer valor entre" $x_{(\frac{n}{2})}$ e $x_{(\frac{n}{2}+1)}$, acrescentando que, nesse caso, "convenciona-se tomar para mediana a média aritmética simples dos dois valores centrais" (p. 72). Consultando o programa das Metas

Curriculares (MEC, 2013) verificámos que um dos descritores, no domínio Organização e Tratamento de Dados para o 7.º ano, solicita a necessidade do estudante "reconhecer, considerado um conjunto de dados numéricos, que pelo menos metade dos dados têm valores não superiores à mediana" (p. 61).

É um facto curioso que, a nível da interpretação da mediana, urge a necessidade de algum esclarecimento adicional perante tanta diversidade! Esta multiplicidade de formas, não equivalentes, de interpretar a mediana empírica demonstra a necessidade do cuidado a ter quando pretendemos verbalmente descrevê-la no contexto do problema associado aos dados.

Dado o carácter finito inerente a uma coleção de dados numéricos, sejam eles provenientes de uma variável de natureza contínua ou discreta, podemos socorrer-nos do conceito probabilístico de mediana para obter uma condição universal para a interpretação de mediana de uma coleção finita de dados. Fórmulas diferentes (mas equivalentes) podem ser encontradas para definir a mediana de uma variável aleatória X. Por exemplo, podemos definir mediana de X como qualquer número m tal

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e , simultaneamente,} \quad P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Assim, transpondo as condições (2) para o contexto empírico, transformando as probabilidades em frequências relativas, diremos que *m é mediana de uma coleção de dados se e somente se pelo menos 50% dos dados são inferiores ou iguais a m e pelo menos 50% são superiores ou iguais a m.*

Podemos, todavia, simplificar este texto na interpretação de mediana definida pela conjunção de duas condições? Será que poderemos referir que *exatamente, aproximadamente* ou *pelo menos* 50% das observações ordenadas são inferiores ou superiores à mediana? Será suficiente referir apenas uma parte da distribuição dos dados (inferiores ou superiores à mediana), ou devem ser referidas ambas? Será que deve ser incluído o valor da mediana nessa parte uni ou bilateral de referência?

EXEMPLOS

O cálculo da mediana, de acordo com a fórmula (1), depende se o número total de dados na coleção é par ou é ímpar. Mais ainda, os dois ramos da fórmula (1) podem ser analisados segundo três situações distintas. Concretamente, a mediana de uma coleção de dados pode corresponder a: um valor não observado na coleção, um valor observado com frequência absoluta unitária na coleção de dados, ou um valor observado que se repete na coleção, ou seja, com frequência absoluta superior a 1. Assim, das três situações, tendo em conta a paridade de n e a frequência da mediana, podem resultar quatro possíveis casos distintos, assinaladas na Tabela 1, no cálculo da mediana de uma coleção finita de dados numéricos. No caso de n ser par, o valor da mediana não poderá ser uma observação única na coleção de dados e, no caso de n ser ímpar, a mediana será sempre um valor observado na coleção de dados.

Tabela 1. Situações possíveis no cálculo da mediana empírica

Frequência da mediana numa coleção de dados	Tamanho da coleção	
	é par	é ímpar
0	Caso 1	Impossível
1	Impossível	Caso 2
> 1	Caso 3	Caso 4

Pretendemos discutir a interpretação do valor da mediana face a cada um dos quatro casos possíveis especificados na tabela 1. Se m é o valor da mediana de uma coleção de dados, então que condições podemos mencionar que conduzem a uma interpretação correta da mediana? Com base nas diferentes formas que encontramos, em livros e manuais, de comentar o valor da mediana de um conjunto (finito) de observações, estabelecemos uma lista de 12 condições (simples), tão exaustiva quanto possível, associadas à interpretação de mediana:

i. Exatamente 50% dos valores da coleção de dados são inferiores a a;
ii. Exatamente 50% dos valores da coleção de dados são superiores a a;
iii. Exatamente 50% dos valores da coleção de dados são inferiores ou iguais a a;
iv. Exatamente 50% dos valores da coleção de dados são superiores ou iguais a a;
v. Aproximadamente 50% dos valores da coleção de dados são inferiores a a;
vi. Aproximadamente 50% dos valores da coleção de dados são superiores a a;
vii. Aproximadamente 50% dos valores da coleção de dados são inferiores ou iguais a a;
viii. Aproximadamente 50% dos valores da coleção de dados são superiores ou iguais a a;
ix. Pelo menos 50% dos valores da coleção de dados são inferiores a a;
x. Pelo menos 50% dos valores da coleção de dados são superiores a a;
xi. Pelo menos 50% dos valores da coleção de dados são inferiores ou iguais a a;
xii. Pelo menos 50% dos valores da coleção de dados são superiores ou iguais a a.

Sem perda de generalidade, tomámos quatro exemplos concretos, um para cada um dos quatro casos apontados na tabela 1. Na tabela 2 encontram-se os exemplos considerados e a indicação do valor lógico de cada uma das 12 condições acimas listadas (I,…, XII) em cada exemplo. Exemplo 1 (Caso 1: o valor atribuído à mediana corresponde a um valor não observado na coleção de dados), Exemplo 2 (Caso 2: o valor atribuído à mediana corresponde a um valor com frequência unitária na coleção de dados), Exemplo 3 (Caso 3: o valor atribuído à mediana corresponde a um valor que se repete na coleção de dados de dimensão par) e Exemplo 4 (Caso 4: o valor atribuído à mediana corresponde a um valor que se repete na coleção de dados de dimensão ímpar). Em cada exemplo apresenta-se uma coleção de observações, uma tabela com as frequências relativas $(f(x_i))$ e as frequências relativas acumuladas $(F(x_i)=\sum_{x\le x_i} f(x))$associadas a cada observação distinta (x_i).

Na nossa opinião, a aparente falta de rigor nas várias definições de mediana encontradas nos livros, correspondente ao procedimento prático de procurar a mediana pelo valor posicionado ao meio na amostra ordenada, referindo-se a haver *50% de observações inferiores* ou *50% de observações superiores* à mediana, resulta do recurso aos vocábulos "inferiores a" ou "superiores a". Estes vocábulos levam intuitivamente à representação das observações na reta ordenada concentrando, consequentemente, observações repetidas num mesmo ponto, e diluindo-se a noção de volume de dados que está efetivamente associada à definição de mediana (50% das observações estão à direita da mediana e 50% estão à esquerda da mediana na coleção ordenada dos dados). Ainda da tabela 2 verifica-se que apenas uma das condições, XI ou XII, não é suficiente para identificar corretamente o valor da mediana. Efetivamente, dizer *pelo menos 50% dos valores da coleção de dados são superiores ou iguais a 3* (condição XII) não implica que 3 seja a mediana da coleção de dados. Vários contraexemplos de coleções de dados podem ser considerados para ilustrar tal situação. Por exemplo, para a coleção: 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, tem-se que mais de 50% dos dados são não inferiores a 3 e, no entanto, a mediana não é 3.

Notemos, também, que o exemplo 1 da tabela 2 ilustra a situação da mediana ser indeterminada como mencionado atrás. Na realidade, no caso da frequência da mediana ser nula (caso 1), e denotando por x_i^- o valor observado na coleção de dados tal que $F(x_i^-)=0.5$ e por x_i^+ o menor valor tal que $F(x_i^+)>0.5$, verifica-se que qualquer valor entre x_i^- e x_i^+ pode ser tomado como mediana da coleção; a fórmula (1) convenciona tomar o ponto médio do intervalo [x_i^- , x_i^+] . No exemplo 1, tem-se x_i^- =2, x_i^+ =4.

CONCLUSÃO

A linguagem associada à interpretação de mediana pode ser mais ou menos simplista. Podemos substituir, de forma equivalente, a expressão "inferior ou igual" por "não superior" (similar para "superior ou igual"). Contudo, pretendendo interpretar a mediana de um conjunto de observações, de uma forma completa, teremos que mencionar a conjunção de duas condições e salvaguardar a possibilidade de repetições de observações, ou seja, *m* é mediana de uma colecção de dados se e somente se pelo menos 50% dos dados são inferiores ou iguais a *m* e pelo menos 50% são superiores ou iguais a *m*

Se pretendemos tirar alguma ilação, no contexto do problema dado, do facto do valor *m* ser a mediana de uma coleção de dados, basta usar qualquer condição subsequente resultante daquela conjunção, como é proposto nas (atuais) Metas Curriculares: se *m* é mediana de uma coleção de dados, então pelo menos 50% dos dados são inferiores ou iguais a *m.* Mas tenhamos consciência de que, omitindo uma ou parte das duas condições XI e XII na interpretação da mediana de uma coleção de dados, estaremos a mostrar apenas uma perspetiva do contexto dos dados!

Agradecimentos. Trabalho subsidiado por fundos portugueses através do CIDMA (Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações) da Universidade de Aveiro e FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), dentro do projeto UID/MAT/04106/2013.

Referências Bibliográficas

Amaro, A., Silvestre, C. Fernandes, L. (2009) *Estatística Descritiva. O segredo dos dados.* Lulu.com. Lisboa.

Guimarães, R.C., Cabral, J.A.S. (1997) *Estatística*. McGraw Hill. Portugal.

Hall, A., Neves, C. Pereira, A. (2011) *Grande maratona de Estatística no SPSS*, Escolar Editora. Lisboa.

Ministério da Educação e Ciência (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática do ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Mood, A.M., Graybill, F.A., Boes,D.C. (1974) *Introduction to the theory of Statistics*. 3rd Edition. McGraw-Hill. Lisbon.

Murteira, B., Antunes, M. (2012) Probabilidades e Estatística, Vol. I, Escolar Editora. Lisboa.

Murteira, B., Ribeiro, C.S., Andrade e Silva, J., Pimenta, C. (2010) *Introdução à Estatística*. Escolar Editora. Lisboa.

Pestana, D. D., Velosa, S. (2008) *Introdução à Probabilidade e à Estatística*. 3.ª Edição, Vol I, Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa.

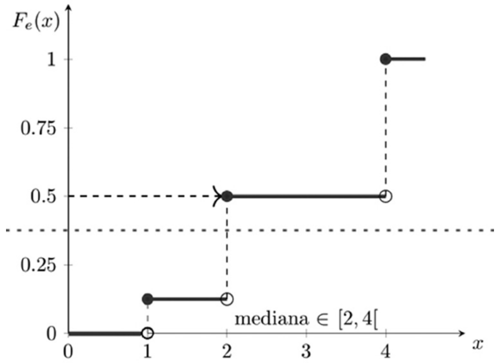
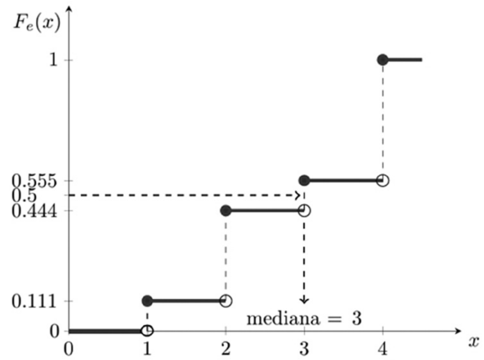
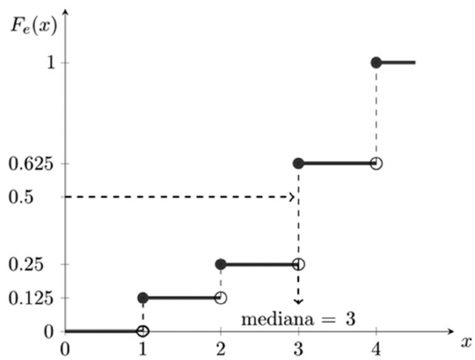
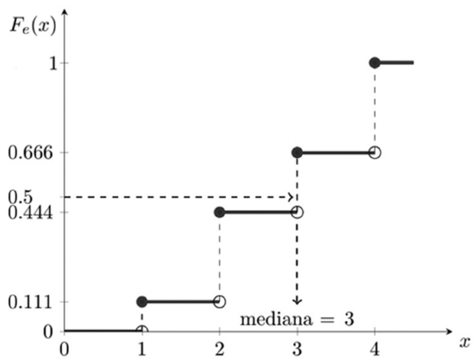
Pestana, M. H., Gageiro, J. N. (2008). Análise de Dados para Ciências Sociais – a complementaridade do SPSS, Edições Silabo. Lisboa.

Adelaide Freitas, João Pedro Cruz, Nélia Silva

Departamento de Matemática e CIDMA

Universidade de Aveiro

Tabela 2. Coleções de dados, não agrupados, em 4 situações distintas no cálculo da mediana. Por aplicação da fórmula (1), a mediana é igual a 3 nos quatros exemplos.

<table>
<tr><th rowspan="2">Situação</th><th rowspan="2">Coleção de dados</th><th rowspan="2">Gráfico da função $F(x_i)$</th><th colspan="2">Condições</th></tr>
<tr><th>verdadeiras</th><th>falsas</th></tr>
<tr><td>Caso 1
(n par)</td><td>Exemplo 1:
1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4
<table><tr><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th><th>$F(x_i)$</th></tr><tr><td>1</td><td>0.125</td><td>0.125</td></tr><tr><td>2</td><td>0.375</td><td>0.500</td></tr><tr><td>4</td><td>0.500</td><td>1.000</td></tr></table></td><td></td><td>I, II, III,
IV, V, VI,
VII, VIII, IX,
X, XI, XII</td><td>----</td></tr>
<tr><td>Caso 2
(n ímpar)</td><td>Exemplo 2:
1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4
<table><tr><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th><th>$F(x_i)$</th></tr><tr><td>1</td><td>0.111</td><td>0.111</td></tr><tr><td>2</td><td>0.333</td><td>0.444</td></tr><tr><td>3</td><td>0.111</td><td>0.555</td></tr><tr><td>4</td><td>0.444</td><td>1.00</td></tr></table></td><td></td><td>V, VI,
VII, VIII,
XI, XII</td><td>I, II, III,
IV,
IX,
X</td></tr>
<tr><td>Caso 3
(n par)</td><td>Exemplo 3:
1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4
<table><tr><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th><th>$F(x_i)$</th></tr><tr><td>1</td><td>0.125</td><td>0.125</td></tr><tr><td>2</td><td>0.125</td><td>0.250</td></tr><tr><td>3</td><td>0.375</td><td>0.625</td></tr><tr><td>4</td><td>0.375</td><td>1.000</td></tr></table></td><td></td><td>VII,
XI, XII</td><td>I, II, III,
IV, V, VI,
VIII, IX,
X</td></tr>
<tr><td>Caso 3
(n ímpar)</td><td>Exemplo 4:
1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4
<table><tr><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th><th>$F(x_i)$</th></tr><tr><td>1</td><td>0.111</td><td>0.111</td></tr><tr><td>2</td><td>0.333</td><td>0.444</td></tr><tr><td>3</td><td>0.222</td><td>0.666</td></tr><tr><td>4</td><td>0.333</td><td>1.00</td></tr></table></td><td></td><td>V, VI,
VIII,
XI, XII</td><td>I, II, III,
IV,
VII, IX,
X</td></tr>
</table>

Articulação curricular, uma aposta necessária

Irene Segurado

A reflexão aqui feita, sobre a prova de aferição de matemática e ciências naturais de 2017, baseia-se essencialmente na minha experiência como professora e em conversas tidas com outros colegas do grupo 230, principalmente colegas de escola.

Os professores do grupo 230 têm qualificação profissional para lecionar matemática e ciências naturais e, apesar de ser desejável que estas disciplinas sejam dadas pelo mesmo professor à mesma turma, por contingências diversas isto nem sempre acontece. A par disto, as revisões curriculares feitas ao longo dos últimos anos contribuíram para ir perpetuando este desenho curricular, uma vez que têm sido omissas quanto aos pontos de convergência entre estas duas disciplinas, não promovendo a sua efetiva interligação. Assim, parece-me que uma prova de aferição que junta estas duas áreas poderá ser, de algum modo, uma chamada de atenção para a existência de pontos de contacto entre as disciplinas de matemática e de ciências naturais, pontos estes que deverão ser tidos em conta no seu ensino.

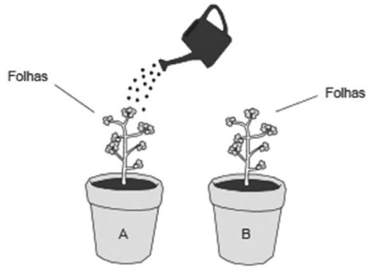
Na prova, é talvez demasiado clara a área a que pertence cada uma das questões, embora haja um esforço de utilizar a matemática em contextos de ciências naturais. A utilização da média ou das percentagens para a interpretação de determinados acontecimentos ou o cálculo de áreas para saber a superfície de um dos cercados do Centro de Proteção ao lince-ibérico, são exemplos disto. Não pretendo aqui fazer uma análise exaustiva das questões da prova por isso irei focar-me unicamente no item 11.1 (figura 1) que irá por certo lançar alguma reflexão. Este item para os alunos e muitos professores é uma questão claramente da área das ciências naturais. Mas será? Vejamos.

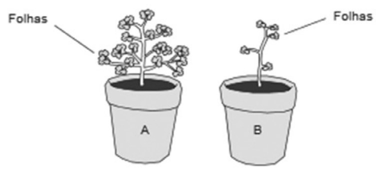
Na tarde da realização da prova de aferição encontrei na biblioteca da escola o Gonçalo, aluno do 5.º ano, que esperava como nas outras segundas-feiras que os pais o fossem buscar. O Gonçalo não é meu aluno mas conheço-o por pertencer a uma das minhas turmas de apoio ao estudo e considero-o um aluno bastante razoável. Como me pareceu estar um pouco aborrecido perguntei-lhe como lhe tinha corrido a prova de aferição e se queria verificar as suas respostas, pois tinha comigo um exemplar desta. O Gonçalo respondeu-me imediatamente que sim, acrescentando que a parte das ciências lhe havia corrido bastante bem mas quanto à matemática não tinha tanto a certeza. O Gonçalo parecia identificar nitidamente quais as questões referentes às ciências naturais e as referentes à matemática. Quando lhe perguntei que resposta havia dado à questão 11.1, respondeu-me que era muito fácil e que a opção correta era a opção A. Pedi-lhe que lesse as outras opções com atenção, pois a resposta que havia dado não era a correta. Tive bastante dificuldade em levá-lo a admitir que a resposta que tinha selecionado estava errada e que a correta era a opção B. O Gonçalo argumentou que, sendo a sardinheira uma planta, a questão A também estava correta. Explicar-lhe que não podia generalizar o que tinha acontecido com a sardinheira para todas as plantas não foi tarefa fácil. Procurei ainda outros exemplos nas ciências e na matemática, mas tenho muitas dúvidas de o ter conseguido convencer.

Este episódio alerta-nos para a importância de termos sempre presente as conexões possíveis entre a matemática e as ciências naturais, mesmo aquelas "mais encobertas" favorecendo assim um ensino mais integrado e transversal. A conversa tida com o Gonçalo é um possível exemplo, pois alerta-nos por um lado para a importância de, quando oportuno, abordar nas aulas, quer de ciências quer de matemática, as generalizações e por outro lado para o "perigo" de as fazer de forma injustificada. Este trabalho por parte dos alunos é uma mais-valia na compreensão do método científico e mais tarde na importância das demonstrações matemáticas.

O facto de uma prova de aferição contemplar as duas áreas não é, por si só, nem suficiente nem significativo para a aprendizagem dos alunos caso as práticas de articulação entre as duas não sejam incentivadas. Discutir matemática a partir de situações vindas das ciências naturais ou ciências

Procedimento	**Resultados**
• Colocaram-se duas sardinheiras, no mesmo estádio de desenvolvimento, em vasos iguais (A e B), com o mesmo tipo de solo. • Os vasos foram expostos a luz e a temperatura constantes. • A sardinheira do vaso A foi regada sempre que o solo estava seco. • A sardinheira do vaso B nunca foi regada.	• Ao fim de quinze dias, observaram-se os resultados a seguir esquematizados.





11.1. Assinala com **X** a opção que indica o que se pretendeu confirmar (hipótese) com a realização desta atividade experimental.

A ☐ A água influencia o crescimento das plantas.

B ☐ A água influencia o crescimento da sardinheira.

C ☐ O solo influencia o crescimento das plantas.

D ☐ O solo influencia o crescimento da sardinheira.

Figura 1. Questão 11 da prova de aferição de 2017

naturais usando a matemática vai enfatizar a importância destas duas áreas na formação dos alunos.

Uma prova de aferição, assente nos documentos curriculares em vigor, tem como primeira finalidade acompanhar o desenvolvimento do currículo de uma dada disciplina a nível nacional, mas permite também aos professores, de certo modo, avaliar as aprendizagens desenvolvidas pelos seus alunos nos domínios que constam no quadro de caracterização dessa prova. Contudo, talvez por ter sido a primeira vez que houve uma abordagem deste tipo, esta prova ultrapassou, na minha perspetiva, as suas finalidades pois promoveu o diálogo entre os professores de matemática e de ciências naturais em questões do tipo: Como classificar/avaliar os itens de uma prova desta natureza? Que informação é possível retirar de determinadas questões? Quais as áreas/conteúdos que podem ser explorados nas aulas de matemática e de ciências naturais visando a ligação entre estas duas áreas? … Se as questões e/ou a forma como foram colocadas, na prova de aferição realizada, são as mais pertinentes é discutível e tenho ouvido várias opiniões divergentes por parte de colegas, mas só por si esta discussão já é importante e por certo irá alertar para a necessidade de um ensino mais integrado destas duas disciplinas. É claro que é possível e desejável avançar muito mais!

Irene Segurado

Escola Básica 2, 3 Dr. Rui Grácio, Montelavar

Como ligar 2D com 3D? Sólidos em camadas, uma possibilidade inesperada e fascinante

"A perceção que as crianças têm do mundo que as rodeia não é bidimensional. A nossa perceção e vivências é a várias dimensões. Se estamos a trabalhar com crianças de idade pré-escolar que descobrem e apreendem o mundo que as rodeia através da experimentação tem todo o sentido explorar e aprender neste enquadramento" (reflexão de uma educadora de infância participante no projeto MARTE1618).

Acrescento a esta reflexão que há muito tempo se discute sobre as formas de abordagem da geometria elementar. É consensual que esta deve ser feita ligando a bi e a tridimensionalidade, seja através das várias formas de representação de objetos geométricos e do desenvolvimento da visualização, seja do conhecimento das propriedades das figuras a duas e a três dimensões, das relações entre elas, bem como do estudo da simetria na sua mais ampla aceção.

Como já escrevi na nota anterior, o currículo de geometria pode ser um caminho com várias entradas e percursos alternativos. Não há uma maneira única de começar nem de desenvolver os conhecimentos de geometria e as formas de pensar próprias desta área. Destaco agora precisamente a continuidade que esta educadora deu às atividades realizadas pelas crianças e descritas na nota anterior a esta ("Por onde começar na geometria? Porque não pelos paralelepípedos?"). Esta descrição é feita com base nas palavras da educadora[1].

> "Após a concretização do nosso projeto da decoração das caixas foi proposto às crianças que com um dos materiais que temos na sala construíssem um paralelepípedo. O material usado foram cubos de encaixe. As crianças começaram por construir um paralelepípedo estreito e depois de compararem com a caixa foram acrescentando mais peças dando mais largura ao objeto. Depois de analisarmos a peça construída chegámos à conclusão que tivemos de sobrepor um conjunto de peças por camadas para formar um objeto idêntico à caixa.
> Uma criança disse que era como as bolachas. Fomos buscar um pacote de bolachas e, como as bolachas eram redondas, o objeto que essas bolachas formavam era diferente ... era redondo. Ficou então combinado entre todos que os rapazes iriam decorar quadrados e as meninas decorar círculos.
> As meninas usaram como molde da unidade de medida um copo. E os rapazes o quadrado construído com as peças (figuras 1 e 2). Após finalizarem o trabalho (figura 3) fomos sobrepô-las, formando um cilindro e um paralelepípedo (figuras 4 e 5)."

TRÊS REFLEXÕES

Com base nesta descrição e nas experiências do projeto MARTE1618 registo três reflexões.

1. No âmbito deste projeto, foi a primeira vez que discuti com professores ou educadores a construção de sólidos em fatias. Esta ideia foi trabalhada nas sessões de formação com o objetivo de abordar o conceito de prisma e também de cilindro a partir da sobreposição de camadas iguais. Esta ideia permite um entendimento da existência de paralelismo entre componentes planas destes sólidos, as camadas, que nos ajuda a estruturá-los de uma forma pouco comum. A estruturação em camadas é a base do Princípio de Cavalieri, ideia chave na compreensão das fórmulas de cálculo do volume do prisma e, por extensão, do cilindro. O conceito de volume de um sólido e o respetivo cálculo através de fórmulas são aspetos curriculares incontornáveis na educação básica. Dois aspetos chave na aprendizagem são a equivalência de sólidos e a compreensão das fórmulas de cálculo de volumes, embora muitas vezes sejam esquecidos ou relegados para segundo plano.
2. Há vários artistas que recorrem à construção de esculturas com base em camadas ou fatias. As esculturas em fatias de um destes artistas, Rui Sanches, ilustram muito bem o Princípio de Cavalieri e permitem compreender, com forte componente visual, a fórmula do cálculo do prisma como produto entre a área da base e a altura (figuras 6 e 7). Além disso, este tipo de composições plásticas evidenciam, através da sua materialidade, o papel das variáveis área da base e altura nesse cálculo. Estas esculturas são também demonstrativas e facilitadoras da compreensão de que o prisma não tem que ser reto para que o cálculo do volume seja obtido por essa fórmula. As esculturas da figura 7 (Colunata 2004) encontram-se na Assembleia da República e outros trabalhos deste artista estão acessíveis na Internet, *http://www.ruisanches.com/pt/escultura_1983-1989.html.*

1 Educadora Maria Leonor Henriques, Agrupamento de Escolas de D. Maria II, JI do Cacém, Sintra.

3. Uma resma de papel é um paralelepípedo. Mas raramente olhamos para uma resma como tal e não destacamos que são 500 folhas, teoricamente 500 retângulos bidimensionais, que sobrepostas nos fazem passar do bidimensional ao tridimensional. Esta é a ideia das esculturas em camadas de Rui Sanches e, de forma ainda mais fascinante, da técnica usada pelo artista chinês Li Hongbo. Totalmente inesperado, para quem ainda não conhece, em

   https://www.youtube.com/watch?v=W2GYslCAkSo.

   Para mim também foram inesperadas e fascinantes as construções do prisma e do paralelepípedo realizadas pelas crianças do grupo desta educadora.

Figura 1

Figura 2

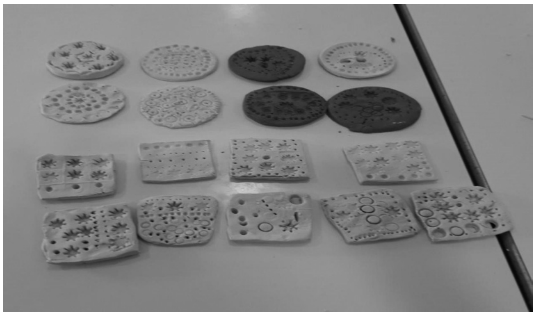


Figura 3

Figura 4

Figura 5

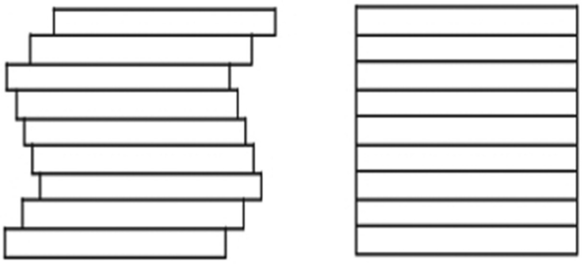


Figura 6

Figura 7

As figuras geométricas no 1.º ano

Joana Conceição

O relato que aqui apresento pretende ser uma partilha da forma como trabalhei com os meus alunos de 1.º ano as propriedades das figuras geométricas de uma forma muito intuitiva e de acordo com a sua capacidade de abstração. As tarefas propostas aos alunos foram adaptadas de Van de Walle, Karp e Bay-Williams (2014). Realizaram-se duas tarefas em duas sessões, cada uma com a duração de quarenta e cinco minutos a uma hora.

O objetivo deste trabalho era levar os alunos a observarem e descreverem formas geométricas para se apropriarem das suas características e assim encontrarem aspetos comuns ou distintos para conseguirem formar classes de figuras.

Mais do que descrever as figuras é importante que, à medida que os alunos vão progredindo na sua escolaridade, sejam cada vez mais capazes de formular raciocínios geométricos mais abstratos que vão, num nível muito inicial, desde a associação das figuras com que são confrontados aos objetos do seu quotidiano até à formulação de raciocínios dedutivos, em níveis elevados de raciocínio.

Para compreendermos de que forma ocorre o desenvolvimento do pensamento geométrico, Van Hiele (cit. em Ponte & Serrazina, 2000) sugere que a estruturação deste tipo de raciocínio se vai desenvolvendo em vários níveis de abstração.

No entanto, Clements e Battista (1992, cit. em Clements, Swaminathan, Hannibal & Sarama, 1999) sugerem algumas alterações ao esquema proposto pelos Van Hiele. Além de proporem um nível de desenvolvimento prévio ao nível 1 de Van Hiele (um nível de pré-recognição), Clements et al. (1999) sugerem também que o nível 1 deve ser um nível sincrético já que muitas das crianças conseguem observar alguns componentes e algumas propriedades das figuras geométricas, embora ainda o façam utilizando uma linguagem mais descritiva do que analítica. Poderíamos organizar esta informação como se apresenta no quadro abaixo.

Estes autores sugerem ainda que os níveis referidos não são estanques e que os alunos podem evidenciar, em fases de transição entre níveis, características de mais do que um nível.

Para a concretização deste trabalho distribuí a cada um dos meus alunos uma figura das apresentadas na figura 1. A escolha das figuras pretendeu ser o mais diversificada possível, para permitir aos alunos um leque mais alargado de figuras que colocasse em evidência diferentes propriedades das figuras. Limitar o leque às figuras mais comuns como o círculo, quadrado, retângulo e triângulo equilátero, que frequentemente aparecem quer nos manuais de 1.º ano quer nos materiais escolares, poderia limitar também os aspetos que os alunos poderiam observar e descrever e as conexões e disjunções que os alunos poderiam encontrar.

A tarefa

Em coletivo, cada um foi descrevendo a sua figura a partir da sua observação natural e intuitiva. À medida que cada aluno fazia a sua descrição, colocávamos a figura no quadro e procurávamos aspetos em comum com as figuras que já tinham sido anteriormente colocadas.

Nível 0 - Pré-conhecimento	As crianças ainda não conseguem identificar algumas formas mais comuns ou discriminar determinadas figuras de contraexemplos. Nesta fase, as crianças estão a começar a criar esquemas mentais em que relacionam conceitos e processos geométricos.
Nível 1 - Sincrético	As crianças utilizam o conhecimento verbal e o imagístico em interação e potenciando-se, sendo que o conhecimento verbal surge a partir do conflito entre uma figura e um protótipo.
Nível 2 - Análise	Os alunos conseguem compreender as propriedades das figuras geométricas a partir da observação e experimentação com recurso a materiais manipuláveis.
Nível 3 - Ordenação	Os alunos estabelecem relações entre as propriedades das figuras, ordenando-as de acordo com essas mesmas propriedades e sendo capazes de compreender a classificação hierárquica.
Nível 4 - Dedução	Os alunos são capazes de propor axiomas e fazer demonstrações com base em relações entre propriedades.
Nível 5 - Rigor	Os alunos podem trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos.

Figura 1. Conjunto de figuras distribuídas aos alunos

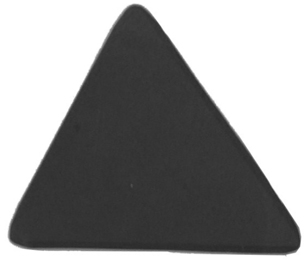


Figura 2. Figura sem vértices

Houve alguns aspetos que foram sendo evidenciados pelos alunos nomeadamente:

- o número de lados e o número de vértices;
- as linhas curvas e linhas retas;
- os ângulos côncavos.

Inicialmente os alunos não utilizaram o vocabulário geométrico mais correto. A sua linguagem baseou-se na sua experiência e observação direta e não em conhecimentos formais. Muitas vezes faltou-lhes o vocabulário que iam substituindo pela expressão "assim" ao mesmo tempo que gesticulavam ou apontavam com a mão. Esta falta de vocabulário não foi um aspeto impeditivo para os alunos concretizarem o que lhes estava a ser pedido já que o objetivo era que os alunos observassem e se apropriassem das características das figuras para conseguirem descrever os aspetos mais importantes que os pudessem incluir num determinado grupo e excluir de outro. No entanto, ao longo das sessões de trabalho, fui utilizando o vocabulário geométrico que considerava ser do entendimento dos alunos para que eles se fossem apropriando e fui sendo cada vez mais exigente no seu uso pelos alunos.

Ao longo dos momentos de trabalho em coletivo, surgiram alguns aspetos referidos pelos alunos que suscitaram discussão na turma. Muitos deles prenderam-se com a análise de alguns triângulos. Despois de já termos alguns triângulos no quadro, um aluno apresentou uma figura que considerou como triângulo (figura 2). Passei a discussão para a turma e perguntei se todos concordavam com esta inclusão e revimos as propriedades das figuras que tinham sido enunciadas para o conjunto dos triângulos (ter três lados e três vértices). Verificamos assim que não se encaixava uma vez que, no lugar dos vértices, tinha linhas curvas e por isso pertencia ao grupo das linhas curvas e linhas retas, pois também tinha linhas retas.

Outra dificuldade que também surgiu com os triângulos teve a ver com o facto de não estarem a ser considerados, nesta classe, os triângulos mais "compridos", ou seja os triângulos isósceles e escalenos (figura 3). Os alunos mostraram que as suas conceções do que pode ser um triângulo se baseiam em triângulos equiláteros ou outros semelhantes e quase sempre estão posicionados com um dos vértices para cima.

Esta conceção talvez advenha do facto de não terem tido ainda contacto com exemplos diversificados de triângulos. Ao refletirem sobre as características destas últimas figuras quando comparadas com o exemplo da figura 2, os alunos conseguiram identificar diferenças, nomeadamente os vértices que são inexistentes na figura 2. Encontraram assim mais semelhanças entre a sua conceção de triângulo e estes dois exemplos do que com o exemplo da figura 2, optando por excluí-la da classe dos triângulos e incluí-la no grupo das figuras com lados retos e curvos.

No final desta aula, chegámos à classificação apresentada na figura 4.

Os alunos conseguiram construir uma classificação, uma vez que organizaram as figuras em grupos (as classes) com base nos atributos semelhantes que encontraram nas figuras.. É de referir que, embora a classificação hierárquica seja mais funcional, nesta fase, os alunos ainda não têm um nível de conhecimento suficiente para compreendê-la, pelo que, segundo De Villiers (1994), a classificação inclusiva é uma forma de classificação importante na compreensão e classificação de figuras geométricas que não deve ser desvalorizada.

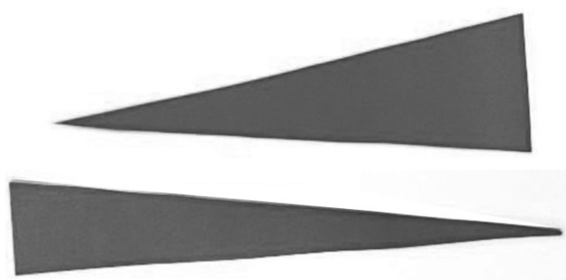


Figura 3. Triângulos que não foram reconhecidos pelos alunos

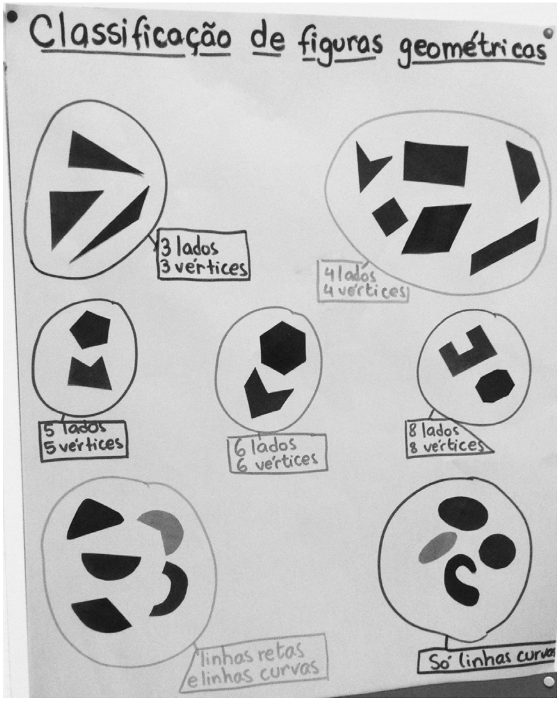


Figura 4. Classes de figuras definidas de acordo com os critérios dos alunos

Na aula seguinte, propus aos alunos uma tarefa diferente, mas com base no que tinha sido trabalhado até agora.

Apresentei aos alunos diversos grupos de figuras. Em cada grupo os alunos tinham de observar e analisar as figuras para descobrir e explicitar as propriedades que consideravam ser comuns à maior parte das figuras do grupo e assim indicar a figura que seria o intruso. Os grupos foram feitos com base nas classes que tínhamos definido na aula anterior, mas também noutros aspetos que tinham sido discutidos, mas que não tinham sido suficientes para formar uma classe.

Alguns exemplos de grupos de figuras que foram apresentados aos alunos encontram-se na Tabela 1.

Estes grupos de figuras permitiram abranger uma grande parte das propriedades que foram trabalhadas na aula. Alguns dos grupos apresentados aos alunos admitiam pelo menos dois critérios de exclusão distintos (como o grupo 5, não ser pentágono ou não ter um ângulo interno côncavo).

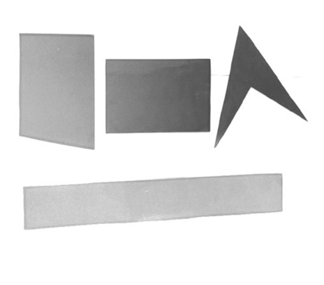
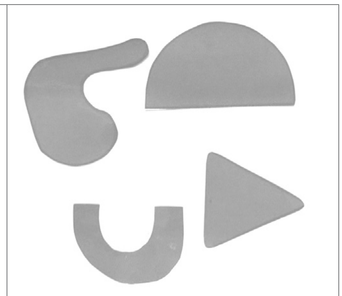
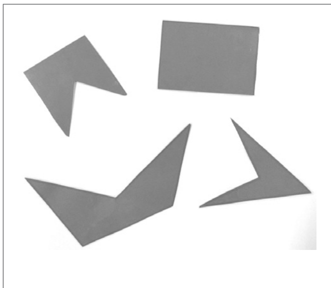
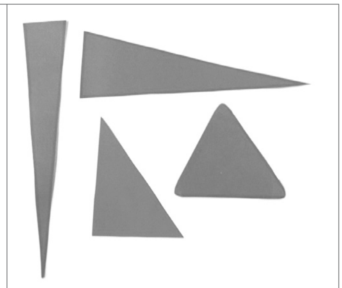
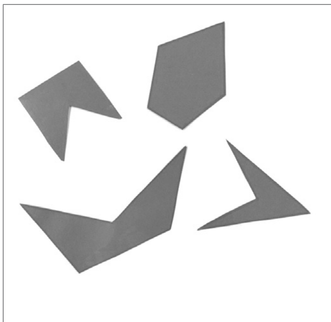
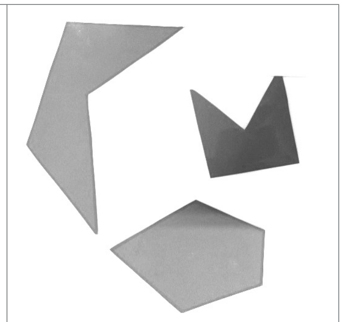
Estas tarefas foram desenvolvidas em grande grupo com a turma, mas poderiam ser também organizadas em grupos mais pequenos e feita uma discussão final com as conclusões de cada grupo.

No primeiro grupo de figuras, foi identificado o bumerangue como sendo o intruso, pois era o único que apresentava "um bico para dentro", referindo-se ao ângulo interno côncavo. No segundo grupo, por exemplo, o critério apresentado pelos alunos foi terem todos lados retos e lados curvos pelo que a figura superior da esquerda teria de ser excluída por ter apenas linhas curvas.

O grupo 3 sugere logo a existência do ângulo interno côncavo em quase todas as figuras, mas exigiu também uma análise mais detalhada, para que se percebesse que duas delas têm quatro lados e as outras duas têm cinco lados. Assim sendo, o critério de exclusão a utilizar não poderia basear-se no número de lados.

Quando o quarto grupo foi apresentado, houve ainda alguns alunos a considerarem o triângulo isósceles como sendo o intruso, mas sem conseguirem justificar. Naturalmente que alguns colegas não concordaram e apresentaram a sua proposta com a devida justificação, excluindo a figura mais à direita uma

Tabela 1. Conjuntos de figuras para deteção do intruso pelos alunos

	
1) Critério de exclusão: ter "uma parte para dentro", referindo o ângulo interno côncavo do bumerangue.	2) Critério de exclusão: não ter linhas retas e curvas
	
3) Critério de exclusão: Não ter um ângulo interno côncavo (não ter uma parte para dentro)	4) Critério de exclusão: Não ter três lados e três vértices
	
5) Critério de exclusão: Não ter um ângulo interno côncavo ou não ter cinco lados e cinco vértices.	6) Critério de exclusão: Não ter um ângulo interno côncavo.

vez que todas as outras tinham "bicos" (referindo-se aos vértices) e aquela tinha linhas curvas.

CONCLUSÃO

Esta abordagem permitiu que os alunos pudessem conhecer um conjunto mais alargado de figuras e, a partir da sua observação, enunciar algumas das suas propriedades utilizando para isso um vocabulário descritivo ainda pouco elaborado. As discussões que se foram gerando entre os alunos tornaram a experiência de aprendizagem mais enriquecedora, porque permitiram que estes verbalizassem as suas conceções que, por sua vez, ao estarem em confronto com as conceções de outros colegas provocaram conflitos cognitivos nos alunos que potenciaram reflexões acerca do que pensavam. Estes conflitos permitiram aos alunos reforçar ou alterar alguns conceitos que tinham construído. Ao mesmo tempo, conseguiram aprender e pôr em uso novos termos e conceitos.

A diversidade de formas geométricas, com diferentes exemplos e com contraexemplos, apresentadas aos alunos permitiu que estabelecessem uma série de conexões e que enunciassem critérios de inclusão e exclusão que não teriam sido considerados em grupos mais restritos, como o do quadrado, retângulo, círculo e triângulo equilátero. O facto de os alunos não conhecerem o nome de todas as figuras pareceu ser também um aspeto positivo já que assim puderam focar-se mais na sua descrição e nas suas propriedades.

O desempenho dos alunos, nestas tarefas, parece estar de acordo com o nível de pensamento geométrico proposto por por Clements e Battista (1992, cit. em Clements et al., 1999), o nível sincrético onde é possível observar um maior foco na descrição das figuras, mas apresentando já alguns aspetos relacionados com a nomeação/identificação de algumas propriedades das figuras, analisando partes e não vendo apenas a figura como um todo. O desenvolvimento de competências que permitam aprofundar o nível de abstração do pensamento geométrico poderá será potenciado sobretudo pelo trabalho escolar de acordo com Clements et al. (1999), se as abordagens futuras forem suficientemente enriquecedoras.

A forma como a atividade se desenvolveu pareceu ser significativa para os alunos, pois mostraram estar envolvidos nas tarefas propostas, pondo em ação algumas capacidades cognitivas de nível elevado como a análise, a síntese ou a categorização. Estas competências postas em ação permitiram que os alunos conseguissem ir mais longe no seu raciocínio geométrico.

A partir daqui poderia ser interessante desenvolver com os alunos um trabalho de análise das propriedades das figuras dentro de cada classe, nomeadamente os triângulos e quadriláteros pois são os que apresentam mais variações.

Referências:

Clements, D, Swaminathan, S., Hannibal, M.A. & Sarama, J. (1999). Young Children Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(2), 192-212.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). Didática da Matemática do 1.º Ciclo. Lisboa: Universidade Aberta.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentaly.* Harlow: Pearson Education Limited.

Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics,* 14(1), 11-18.

Joana Conceição

Colégio da Fonte Velha/Colégio da Beloura

Ideias matemáticas em contexto de creche: evidências da prática

Isabel Simões Dias

Quando a criança ingressa na Creche, já possui conhecimentos prévios do mundo que a rodeia, tendo já experienciado uma diversidade de situações que resultam de saberes matemáticos (Hernández, López & García, 2015). Com esses saberes prévios, na creche, o campo de números e operações pode ser desenvolvido através da utilização da contagem oral nas brincadeiras ou em situações nas quais as crianças reconheçam a sua necessidade (Gaspar, 2004). Esta contagem oral, um dos fundamentos da contagem, pode surgir como ferramenta para resolver problemas (por exemplo, identificar quantidades em falta) ou como possibilidade de conhecer propriedades do espaço (Bulkeley, 2009). De acordo com Butteworth (2005) a contagem é uma das primeiras formas que a criança tem de entrar em contacto com o sentido de número e tal acontece instintivamente, em brincadeiras do seu quotidiano, com adultos significativos.

A noção de quantidade, associada à construção do sentido do número, desenvolve-se progressivamente através da exploração de unidades distintas e da sua visualização em contextos diferentes (Matos & Serrazina, 1996). De forma natural e espontânea, a criança recolhe dados sobre as propriedades do espaço que a rodeia, manuseia e descobre objetos, fortalecendo os alicerces para a compreensão da quantidade e do número. É manipulando um e outro objeto de um conjunto de objetos, selecionando objetos para brincar, recolhendo e amontoando brinquedos, por exemplo, que a criança experimenta o *mais*; é segurando um objeto em cada mão, levando a chupeta à boca, tentando calçar um sapato em cada pé, por exemplo, que a criança experimenta a correspondência de um-para-um e é brincando com um conjunto de objetos cuja quantidade vai sendo alterada ou apontando para cada um dos objetos pertencentes a um conjunto que a criança explora o número de coisas (Post & Hohmann, 2000).

Em contexto de creche, pode-se promover o sentido espacial através da explicitação da posição de pessoas e/ou objetos, da exploração e identificação de propriedades geométricas de objetos e figuras, da identificação de pontos de referência para se situar e deslocar no espaço ou através da descrição e representação de pequenos percursos e trajetos. À medida que a criança ganha consciência corporal e desenvolve a sua mobilidade, vai-se apropriando do espaço que a rodeia. Quando a criança experimenta aproximar-se/separar-se, aconchegar-se no colo de um adulto, gatinhar de uma ponta da sala para outra ou saltar para dentro de uma caixa vai aprendendo a orientar-se, expandindo o seu sentido de espaço. É através da exploração (encher e esvaziar caixas, copos ou baldes de areia; abrir e fechar livros ou portas; vestir-se e despir-se; encaixar Legos ou peças de *puzzles*), da observação das pessoas e dos objetos (observar pessoas e objetos em movimento; observar a mãe com objetos ao colo, observar objetos no chão, na cadeira, …) que a criança vai compreendendo o sentido espacial, apropriando-se dele.

Para Piaget (1977 a/b), no termo do segundo ano de vida, conclui-se o sentido de um espaço geral que compreende todos os outros. Neste sentido, Piaget (1997 b) defende que a revolução intelectual realizada nos dois primeiros anos fundamenta-se na construção das categorias de objeto e de espaço, da causalidade e do tempo. Morgado (1993) corrobora esta ideia, defendendo que o conhecimento lógico-matemático se inicia no período sensório-motor, assim que a criança é capaz de estabelecer a primeira relação prática entre os objetos.

O tempo é um conceito abstrato, de difícil aprendizagem para crianças pequenas. Conforme Post e Hohmann (2000, p.51), "para bebés e crianças, tempo significa agora, neste momento, o presente". A par do seu crescimento, a criança aprende a antecipar acontecimentos através de indícios externos (por exemplo, quando ouve o som da água a correr sabe que vai tomar banho ou quando ouve o barulho das chaves sabe que vai andar de carro). É através da antecipação de acontecimentos familiares, da identificação do início e do *términus* de um acontecimento, da vivência de momentos a velocidades distintas ou da repetição de ações que a criança se vai apropriando da noção de tempo, noção que exige que a criança domine os conceitos de antes, durante e depois.

A resolução de problemas, situação de aprendizagem transversal a qualquer área/domínio de conhecimento, situa a criança com questões que não são de resposta imediata. Ao propor situações problemáticas à criança e ao permitir que seja ela a encontrar as suas próprias soluções, o educador estará a estimular as razões da solução, fomentando o raciocínio e o espírito crítico. Esta estimulação da capacidade de raciocínio está intimamente ligada ao desenvolvimento da capacidade de comunicação de ideias matemáticas que, por sua vez, incentiva a articulação, a justificação e a consolidação do seu pensamento (De Castro & Quilles, 2014).

UMA EXPERIÊNCIA VIVIDA EM CONTEXTO DE CRECHE: CONTEXTUALIZAÇÃO, DESCRIÇÃO E DISCUSSÃO

Este estudo descritivo, situa-se no âmbito do Grupo Projeto Creche (GPC), grupo que surgiu em 2008/2009 na Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria, impulsionado pela necessidade de refletir e investigar sobre o contexto de Creche. Atualmente, o GPC conta com a participação de 13 elementos (9 educadoras, 3 docentes do Ensino Superior e 1 técnica de educação) e reúne periodicamente para partilhar experiências pedagógicas/refletir sobre a ação educativa e para investigar no âmbito da Educação de Infância em diferentes contextos e sob diferentes enfoques. As reuniões de reflexão privilegiam um momento de partilha de informações/experiências e outro de apresentação e discussão de um episódio vivenciado pelas crianças e/ou com as crianças trazido para o grupo em forma de registo narrativo. De cada discussão resulta uma síntese elaborada pelo autor da história e devolvida ao grupo (Dias & Correia, 2017).

Recorrendo a um registo narrativo elaborado por uma das participantes do GPC para dar resposta à dinâmica do grupo e promover a reflexão sobre a prática pedagógica em contexto de creche, procura-se, com este trabalho, refletir sobre a matemática no quotidiano da creche.

Assim, após a apresentação da experiência vivida em contexto de creche, numa sala com crianças com idades entre os 12 e os 24 meses de uma Instituição Privada de Solidariedade Social da região centro do país, discutem-se os dados à luz do estudo das ideias matemáticas em contexto de creche.

Quadro 1: Vamos procurar a bola?

> "O João brincava com uma bola, vendo-me observá-lo nesta sua brincadeira. De repente a bola foge do seu campo de visão. O João para e olha para mim, em silêncio. Dirijo-me a ele e pergunto "Onde está a bola? Vamos procurá-la?". Estendo-lhe a minha mão para ele me acompanhar nesta busca. Ele aceita o convite. Começamos por uma ponta da sala … "Será que está debaixo da mesa?" Olhamos os dois lá para baixo, levantamo-nos, ele olha para mim e eu digo "Não, não está". "Será que está atrás do Duarte?" Dirigimo-nos para ele, sabendo que estávamos a ser seguidos pelo olhar de todos os intervenientes na sala (crianças, estagiárias e educadora). "Oh, não está! Onde estará a bola?". O João levanta a mão como quem confirma o que acabo de verbalizar. "Vamos ver se está dentro da casa? Estará dentro da casa?". Dirigimo-nos para lá, abrimos a porta e observamos. "Não está dentro da casa! Onde estará a bola?". O João, concentrado em tudo o que ia acontecendo, observa atentamente o espaço à sua frente. Viramo-nos e, ao fundo, vemos a bola vermelha. "Olha, está ali!" Corremos para ela, o João agarra-a e dá um grande sorriso. Com a sua mão, mostra-ma orgulhoso."
>
> (Couto, Fonseca, Kowalski & Correia, 2017, p. 28)

Este registo narrativo, discutido no âmbito do GPC no ano letivo 2014/2015, revela uma experiência do quotidiano da creche promotora do desenvolvimento/aprendizagem da criança, nomeadamente, no âmbito da matemática.

Ao interagir com a bola, o João vai percebendo que este objeto tem as suas caraterísticas (tem uma forma, um peso, uma cor e uma textura) e que ocupa o seu espaço na sala. Interagindo com o adulto, o João vai construindo o sentido espacial e temporal. De forma natural e espontânea, vai percebendo que a elaboração do espaço é construída através da coordenação de movimentos e que o tempo é necessário como duração e como ordem de sucessão. Ao vivenciar esta situação, vai compreendendo que a ação da díade tem um ritmo e um tempo próprio. Com o adulto, a criança vai observando, desencadeando uma ação a partir do seu interesse, vivenciando a cadência do tempo, situando-se no espaço geral da sala e no espaço específico de um objeto, compreendendo noções como dentro/fora, cima/baixo, atrás/à frente, encontrando uma resposta para o seu problema. De uma forma lúdica, em parceria com o adulto, o João vai realizando diferentes aprendizagens no âmbito da matemática. Também os seus pares, observando os movimentos desta díade, vão encontrando pontos de referência e compreendendo o sentido espacial, apropriando-se dele.

Visualizando o que se passava ao seu redor, o João foi percorrendo uma área de forma natural, comunicando o que sentia e posicionando-se fisicamente em concordância com as suas emoções (Moreira & Oliveira, 2004). Uma bola, objeto do seu quotidiano em contexto de creche, fê-lo viver tempos diferentes: tempo de interação com o objeto, com o objeto e o adulto, tempo de responder à solicitação do adulto, tempo de observação, tempo de esperar, tempo de levantamento de hipóteses em parceria, de descoberta de uma resposta para resolver o seu problema, tempo de desfrutar. Neste sentido, esta experiência terá facilitado ao João a apropriação do sentido do tempo. Os movimentos do João (andar, parar, correr) permitiram-lhe vivenciar diferentes intensidades e ritmos, contribuindo para que ele se apercebesse que existe enquanto objeto no espaço. Conforme Piaget (1977a/b) e Morgado (1993), a coordenação e direção de movimentos é importante na construção do sentido do espaço. Estas ações da criança (desencadeadas por um interesse próprio), terminaram com a satisfação da sua necessidade e com o restabelecimento do seu equilíbrio e permitiram que, ao resolver o seu problema (Couto et al. 2017), tivesse experienciado os conceitos de peso e força (a bola tem peso!), debaixo (" … debaixo da mesa?"), atrás ("… atrás do Duarte?"), dentro ("Estará dentro de casa?").

Em síntese, a construção da noção de espaço, de tempo, de objeto, de número e/ou da resolução de problemas emerge no quotidiano da creche de forma natural, espontânea e lúdica. Enquanto forma de comunicação, as ideias matemáticas em contexto de creche vão ganhando voz quando o educador coloca os seus conhecimentos em ação.

Referências

Bulkeley, J. (2009). Understanding how babies develop and learn through documenting their learning journey. In Fabian, H. & Mould, C.. *Development & learning for very young children* (pp. 21-33). London: SAGE Publications, Ltd.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*. 46:1, 3-18.

Couto, D., Fonseca, D., Kowalski, I., & Correia, S. (2017). *As nossas histórias com as crianças — Olhares sobre a educação em Creche*. Leiria: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais.

De Castro, C. & Quilles, O. (2014). Construcciones simétricas com 2 y 3 años: La actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil*, 77, 32-36.

Dias, I.S., & Correia, S. (2017). O Grupo Projeto Creche como lugar de formação continuada. *Littera Docente & Discente em Revista*, 1-12.

Gaspar, M. (2004). Aprender a contar, aprender a pensar: as sequências numéricas de contagem abstracta construídas por crianças portuguesas em idade pré-escolar. *Análise Psicológica*, vol 22:1, 119-138.

Hernández, C., López, G. & Garcia, M. (2015). Matemáticas com dos años: buscando teorias para interpretar la actividad infantil Y las práticas docentes. *Tendencias Pedagógicas*, 26, 89-108.

Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Moreira, D. & Oliveira, I. (2004). *O jogo e a matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Morgado, L. (1993). *O ensino da aritmética. Perspetiva construtivista*. Coimbra: Livraria Almedina.

Piaget, J. (1977a). *Problemas de psicologia genética*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Piaget, J. (1977b). *Seis estudos de psicologia*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Post, J., & Hohmann, M. (2000*). Educação de Bebés em Infantários – Cuidados e Primeiras Aprendizagens*. (2.ªed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Isabel Simões Dias

Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Leiria

Centro de Investigação em Qualidade de Vida (CIEQV)

Núcleo de Investigação e Desenvolvimento em Educação (NIDE) – Grupo Projeto Creche (GPC)

Desenvolver o pensamento relacional na aprendizagem dos números e das operações no ensino básico

Renata Carvalho
João Pedro da Ponte

As aprendizagens matemáticas dos alunos devem ser promovidas com base na compreensão e no raciocínio. Compreender e saber operar com números é essencial para o percurso escolar dos alunos e para a sua vida quotidiana. Neste artigo, argumentamos que esta compreensão não se adquire apenas através da manipulação simbólica e da memorização e aplicação de regras e procedimentos de cálculo, mas principalmente através de um ensino que contribua para o desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos.

O QUE É O PENSAMENTO RELACIONAL?

Usar o pensamento relacional é mobilizar as propriedades fundamentais das operações e da igualdade para analisar e resolver problemas tendo em conta o seu contexto (Empson, Levi & Carpenter, 2010).

Desde muito cedo, de forma intuitiva, os alunos desenvolvem e usam conexões aritméticas simples relacionadas com as propriedades das operações (Carpenter, Franke & Levi, 2003; Empson et al., 2010). Por exemplo, quando um aluno tem de adicionar 50 com 30 e diz que são 80 porque 5 mais 3 dá 8 e depois multiplica por 10, usa a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição [$50+30=(5+3)\times 10$]. Se, para dividir 63 por 7, responde que é 9 porque $7\times 9=63$, recorre à identidade fundamental da divisão. Ou ainda, se para calcular $8\times 3/8$, diz que se 8 grupos de $1/8$ é igual à unidade, então então $3/8$ serão três unidades, é porque recorre à decomposição de números, à propriedade comutativa e associativa e ao produto de um número pelo seu inverso ($8\times 3/8=8\times 3\times 1/8=8\times 1/8\times 3=1\times 3=3$).

Se nos desafiarem a pensar sobre o número 48 ou sobre a fração $3/4$, muitas serão certamente as representações e operações que surgem na nossa mente (figura 1). Podemos recuperar imagens mentais de representações icónicas do número, como o modelo de área ou a reta numérica que nos remete para uma compreensão do número 48 como estando próximo de 50, ou então representações simbólicas de um conjunto de operações cujo resultado é 48, e que espelham composições e decomposições de números. Por exemplo, 4×12 relaciona-se diretamente com 2×24 se pensarmos em relações de dobro e metade.

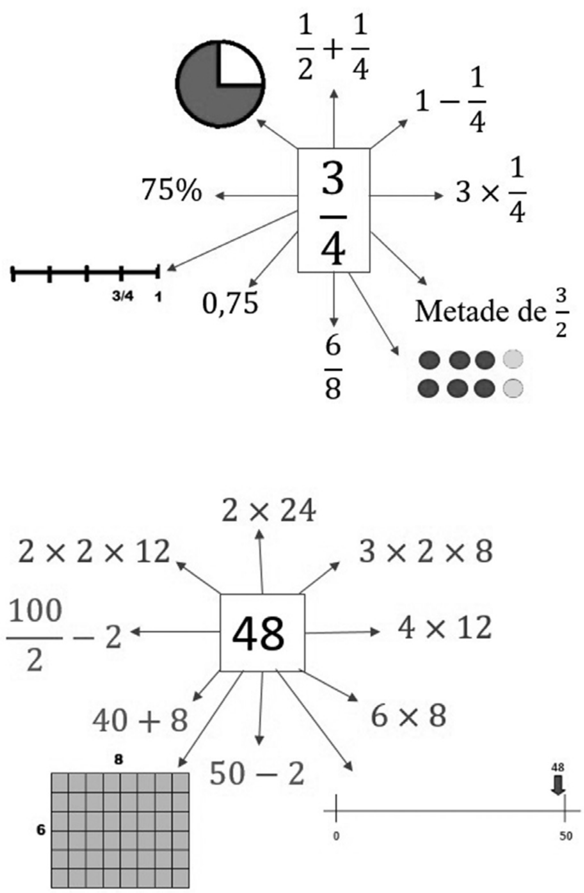


Figura 1. Representações e operações associadas a 48 e 3/4

No caso da fração 3/4, podem igualmente surgir representações icónicas que se associam aos diversos significados de número racional, como é o caso da relação parte-todo quer em unidades discretas quer em unidades contínuas ou à medida, como é o caso da reta numérica. As representações simbólicas podem surgir não só associadas a frações equivalentes como é o caso de 6/8, a representações equivalentes dos números racionais como é o caso de 75% ou 0,75, mas também a operações cujo resultado seja 3/4. É de notar que o entendimento dos números 48 e 3/4 não se esgota nas situações aqui apresentadas.

Embora as expressões indicadas na figura 2 envolvam os mesmos números, o modo como as podemos resolver é diferente pois o seu nível de exigência cognitiva não é o mesmo. Enquanto a resolução da expressão 12+4=☐ requer a compreensão do sinal de igual como indicativo de uma resposta, as expressões 12+☐=16 e 16=☐+12 envolvem uma compreensão relacional da igualdade. A forma redutora com que os alunos usualmente percecionam o significado do sinal de igual é um entrave ao desenvolvimento do pensamento relacional e, consequentemente, ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

$$12 + 4 = \square$$
$$12 + \square = 16$$
$$16 = \square + 12$$

Figura 2. Expressões com e sem valor em falta

O modo como cada um pensa sobre números espelha as aprendizagens, formais e não formais, que teve oportunidade de experimentar. De salientar a importância dos contextos na aprendizagem dos números com compreensão, onde os alunos dão exemplos do modo como pensam enquadrando os números em contextos previamente conhecidos. Por exemplo, quando no cálculo mental um aluno explica que, para calcular $3/4 - 1/2$ "Imaginava uma piza na minha cabeça onde tivesse fora uma fatia, $1/4$, e tirava $1/2$. Ficava 1/4", está a relacionar a expressão numérica com um contexto conhecido em que 3/4 pode associar-se ao modelo circular apresentado na figura 1.

O pensamento relacional centra-se na compreensão e uso de um conjunto de relações (como as que apresentámos). O seu desenvolvimento apoia a compreensão dos números e das operações influenciando as estratégias de resolução de problemas dos alunos e levando-os a usar relações numéricas que lhes são familiares para estabelecer novas relações e efetuar o cálculo, ou mesmo a recorrer a contextos que possam apoiar os seus processos de raciocínio. Na perspetiva de Empson et al. (2010), se o desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos for apoiado, o conhecimento acerca da generalização das propriedades dos números e das operações torna-se mais explícito e pode ser a base para a aprendizagem da álgebra nos níveis de escolaridade seguintes, contribuindo para reduzir os erros e equívocos dos alunos. O trabalho em torno do desenvolvimento do pensamento relacional na sala de aula constitui uma mudança essencial na abordagem aos números e às operações, uma vez que, como dizem Jacobs, Franke, Carpenter, Levi e Battey (2007), o foco deixa de estar no cálculo de respostas (foco aritmético) para passar a estar na análise de relações (foco algébrico) importantes para a aprendizagem da álgebra.

Por vezes, o ensino dos números e das operações centra-se demasiado na manipulação simbólica e na realização de algoritmos, nos primeiros anos de escolaridade, sem que os alunos compreendam a grandeza e valor dos números e as relações entre números e operações. Alguns estudos nacionais resultantes de trabalhos de mestrado e doutoramento, que apresentamos de seguida, realçam a importância do desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos apresentando tarefas que podem ser realizadas com os alunos ao longo do ensino básico. Apesar de terem sido realizados num determinado ano de escolaridade, estas tarefas são transversais a todo o ensino básico quando sujeitas a alguns ajustamentos. Isto é, a resolução de igualdades e desigualdades não se resume a um trabalho no 1.º ciclo; não se incentiva o cálculo mental dos alunos apenas no 1.º e 2.º ciclo; nem se propõe a exploração de sequências apenas no 3.º ciclo.

PENSAMENTO RELACIONAL: ALGUNS EXEMPLOS

Raquel Cerca, em 2014, na sua dissertação de mestrado, apresenta tarefas no âmbito da igualdade (figura 3) e desigualdade (figura 4) no 3.º ano. A resolução indicada na figura 3 mostra que o aluno usou a "propriedade comutativa na subtração", quando esta não existe. Esta tendência de pensar em $6-12$ como igual a $12-6$ deverá fazer-nos questionar se não deveremos apresentar muito mais vezes aos alunos expressões do tipo "$6 = \_\_ - 12$" (em vez de apenas "$\_\_ - 12 = 6$") de modo a ajudar os alunos a desenvolver a sua compreensão do significado do sinal de igual, bem como a não existência da propriedade comutativa na operação inversa da adição.

6 = __6__ – 1 2 porque 6 + 6 é 12 e 12 – 6 dá 12

Figura 3. Relação de igualdade

Na figura 4, a questão A requer que os alunos compreendam o significado do símbolo ">" para que percebam que o valor em falta tem de ser inferior ao resultado da expressão apresentada.

A estratégia do aluno centra-se na resolução da expressão $10+1=11$ em que retira 1 a 11 para chegar a um valor menor. A par disto, o significado do sinal de igual parece não estar ainda devidamente compreendido, uma vez que o aluno, na expressão $10+1=11-1=10$ usa-o como um separador dos passos que realiza de forma sequencial e não como um sinal de equivalência. Este é um procedimento que surge com alguma frequência nas resoluções dos alunos e para o qual os professores devem estar atentos para assim poderem discutir e corrigir conceções incorretas. Na questão B, uma grande parte dos alunos realiza as operações para poder comparar as somas e assim decidir que sinal colocar entre elas, quando a análise de relações entre as parcelas é suficiente para resolver a tarefa. Contudo, existem alunos que estabelecem estas relações verificando que, se 39 e 42 têm mais uma unidade que 40 e 43, respetivamente, então a expressão da esquerda é menor que a da direita.

A

B

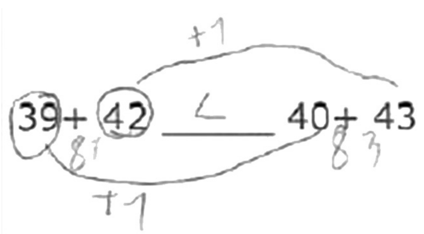
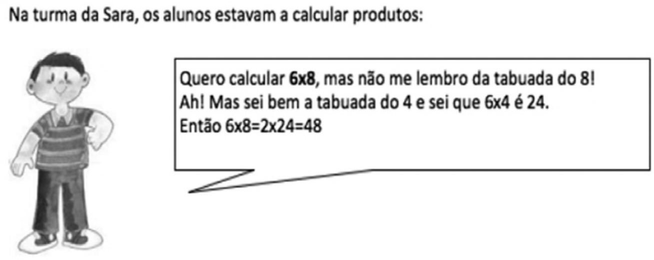


Figura 4. Relação de desigualdade

Célia Mestre em 2014, no seu trabalho de doutoramento, cujo objetivo era desenvolver o pensamento algébrico dos alunos no 4.º ano, apresenta diversas tarefas das quais destacamos duas, que apoiam a generalização de estratégias de cálculo e as relações de dobro e metade (figuras 5 e 6). A figura 5 apresenta parte de uma tarefa cujo objetivo era explorar estratégias de cálculo usando dobro e metade (o dobro dos valores da tabuada do quatro corresponde à tabuada do oito) e a generalização destas estratégias para além dos casos particulares. A estratégia A da figura 5 apresenta a explicitação da generalização da estratégia de cálculo em linguagem natural e a estratégia B uma generalização em linguagem matemática. Durante a discussão coletiva os alunos são desafiados a substituir o "?" por diversos números em expressões semelhantes para que compreendam o símbolo como a representação de "um número qualquer".

A análise e discussão da estratégia B fez com que os alunos percebessem que esta não pode ser verdadeira porque a seguir ao último sinal de igual não pode estar "?", pois assim toda a expressão ficaria igual ao valor atribuído a "?". É durante a discussão da validade desta expressão que surge a representação correta em linguagem matemática – " $?\times 8=2\times(?\times 4)$ "..

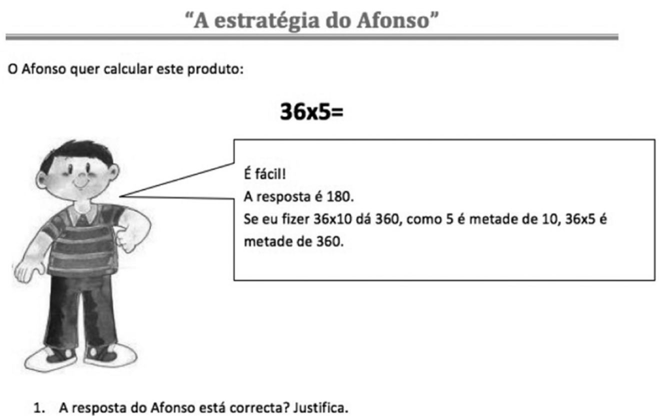
"Calcular usando o dobro"



A	Para descobrirmos a tabuada do 8 fazemos o dobro (x2) da tabuada do 4.
B	$? \times 8 = 2 \times (? \times 4) = ?$ $\quad ? = 6$ $6 \times 8 = 2 \times (6 \times 4) = 6$

Figura 5. Tarefa "calcular usando o dobro" e exemplos da generalização de estratégias dos alunos, correta (A) e incorreta (B)

Na figura 6, apresentamos uma tarefa onde os alunos são desafiados a pensar sobre "A estratégia do Afonso". Esta tarefa tem objetivos semelhantes à anterior, mas pretende especificamente explorar a relação inversa da tarefa anterior (multiplicar por 5 é equivalente a calcular metade da multiplicação por 10).



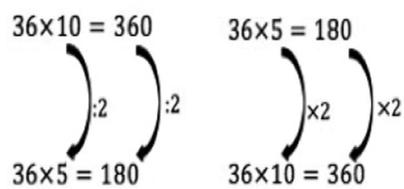


Figura 6. Tarefa "A estratégia do Afonso" e exemplo da relação aritmética entre dobro e metade

A análise da estratégia apresentada na figura 6 permitiu explorar o entendimento dos alunos face à multiplicação por 10 e evidenciar a relação inversa entre as operações multiplicação e divisão. A análise e discussão desta estratégia de resolução, permitiu que os alunos chegassem a uma generalização em linguagem natural – "Para descobrirmos a tabuada do cinco, fazemos metade da tabuada do dez".

Em 2016, Renata Carvalho apresenta propostas centradas no desenvolvimento do cálculo mental com números racionais dos alunos de 6.º ano, onde privilegia diversas relações numéricas, entre elas a relação entre representações dos números racionais (figura 7) e relações de dobro (figura 8).

Qual o valor exato de…

$\frac{1}{4} \div ? = \frac{1}{2}$

Gonçalo: Deu-me $\frac{1}{2}$. Eu fiz por porcentos . . . Vi $\frac{1}{4}$ é 25% e $\frac{1}{2}$ é 50. Então dividi . . . Eu fiz $\frac{1}{4}$ a dividir por $\frac{1}{2}$ que é $25 \div 50$.

Figura 7. Relação entre representações

Na figura 7, a estratégia de Gonçalo evidencia a mudança da representação fracionária para percentagem, onde este opera com percentagens como se fossem números naturais, recorrendo a uma propriedade da divisão (divisor = dividendo÷ quociente).

Qual o valor exato de…

$5\%\ de\ ? = 3$

Eva: Eu passei o 5% para 10% que era mais fácil. Mas tive de multiplicar por 2 e então tínhamos de multiplicar o resultado por 2 também, 6. . . Depois multipliquei 10 por 6 que dá 60.

Figura 8. Relação parte-parte e de dobro

Na figura 8, a estratégia de Eva realça a importância do trabalho em torno de números de referência, neste caso 10% e da relação parte-parte (5% e 3).

As relações de dobro que apresentámos nas figuras 5 e 6, a propósito do trabalho de Mestre (2014), surgem aqui como ferramenta essencial ao estabelecimento de relações com compreensão num conjunto numérico mais complexo, o dos números racionais. Isto reforça a nossa convicção de que o desenvolvimento do pensamento relacional deve ser transversal a toda a aprendizagem de modo a fornecer aos alunos ferramentas para poderem pensar sobre números e operações, em qualquer nível de ensino.

Joana Mata-Pereira, em 2015, no trabalho de doutoramento em desenvolvimento, propõe a exploração de justificações dos alunos. Na figura 9, apresentamos parte de uma tarefa de sequências que tem como objetivo a produção de justificações e generalizações pelos alunos.

1. Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

1.3. Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta.

Figura 9. Tarefa usada por Mata-Pereira (2015) para explorar justificações dos alunos

Os diálogos seguintes mostram o modo como a professora, no momento de discussão coletiva, gere as respostas dos alunos no sentido de apoiar a formulação de justificações:

Duarte: Foi. *86 menos 1 a dividir por 4*.

Professora: Assim Duarte [referindo-se a $\frac{86-1}{4}$]? Está bom para ti? Não sei se é isto, estou a perguntar, é isto? É isto ou é isto [escreve $\frac{86}{4}-1$]?

Duarte: Primeira.

(…)

Professora: Quem pensou de outra forma? . . .

António: À medida que pensámos, mais quatro, os números *iam ser sempre ímpares*. Então, o número ia ter sempre mais quatro unidades.

(…)

Professora: OK. Eles foram somando. A sequência é uma sequência de números ímpares . . . Na sequência não aparecem [números pares]. Justifiquem, acrescentem esta justificação, OK? Que era outra forma de justificar. Não aparecem números pares.

(…)

Joaquim: Nós fizemos… *Nós justificámos que não era múltiplo de 4*.

Professora: (…) *este argumento serve ou não para justificar*. Uma de vocês que me explique, ou então as duas em coro.

Bianca: Se eles dissessem que 85 não era múltiplo de 4 podiam fazer isso, mas… Porque, então, tem de ser, *para ser múltiplo de 4 nós tiramos um, que é o ponto central… O número de pontos é 86, só que nós queremos tirar primeiro o ponto central, só depois é que podemos dividir por 4.*

Estes diálogos mostram o modo como a professora transforma em linguagem matemática a linguagem natural usada por Duarte escrevendo duas expressões no quadro ($\frac{86-1}{4}$ e $\frac{86}{4}-1$), para que este possa dar uma resposta com base na interpretação que faz destas expressões e desafia os alunos a apresentarem outras estratégias. Partindo da estratégia de António e da afirmação de Joaquim, a professora incentiva Bianca a apresentar uma justificação devidamente clara e fundamentada. O objetivo desta tarefa, embora não esteja explícito nos diálogos que aqui apresentamos é que os alunos cheguem ao termo geral – a generalização.

CONCLUSÃO

Os exemplos apresentados ilustram o que consideramos essencial na aprendizagem dos números e das operações no ensino básico, nomeadamente, a importância do desenvolvimento do pensamento relacional. Este deve iniciar-se logo nos primeiros anos para que ao longo da escolaridade os alunos se possam ir munindo de ferramentas que os ajudem a compreender e a pensar sobre números e operações de forma relacional. Existem conceitos básicos essenciais no processo de desenvolvimento do pensamento relacional que, de forma progressiva, permitem uma aprendizagem facilitadora da transição da aritmética para a álgebra. Na perspetiva de diversos autores como Carpenter et al. (2003), Kieran (2004), Ponte, Branco e Matos (2009) e Carvalho (2016), esta aprendizagem, deve focar-se:

- em relações e não apenas no cálculo e na resposta numérica;
- nas operações e suas inversas, e na ideia relacionada de operar/não operar;
- na valorização das representações e nas resoluções, e não apenas nas resoluções;
- em números e letras, e não apenas nos números;
- na compreensão do sinal de igual enquanto relação de equivalência;
- na diversidade de contextos de aprendizagem;
- na valorização do uso de expressões de valor em falta;
- na promoção de discussões matemáticas na sala de aula.

Desenvolver o pensamento relacional dos alunos implica ter uma perspetiva da aprendizagem dos números e das operações mais relacional e não tão mecanicista. A capacidade de mecanizar e aplicar bloqueia perante pequenas mudanças nas situações e rapidamente se esquece, enquanto a capacidade de relacionar assente em referências e aprendizagens significativas é muito mais duradoira e mobilizável para novas situações.

Referências

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi. L. (2003). *Think Mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carvalho, R. (2016). *Cálculo mental com números racionais: Um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal. (disponível em http://hdl.handle.net/10451/23646).

Cerca, M. R. (2014). *O desenvolvimento do raciocínio relacional através das relações de igualdade e desigualdade : uma experiência de ensino no 3º ano.* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal. (disponível em http://hdl.handle.net/10451/17686)

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer.

Jacobs, V., Franke, M., Carpenter, T., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2015). Ações do professor na condução de uma discussão matemática sobre sequências. *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação matemática* (pp. 107-121). Lisboa: APM.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal. (disponível em http://hdl.handle.net/10451/15481).

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: DGIDC.

Renata Carvalho

UIDEF - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Vamos pintar ao acaso

Cláudia Silvestre
Ana Meireles

A Estatística faz parte do nosso quotidiano, ela tem uma presença constante nos meios de comunicação. As estatísticas são frequentemente utilizadas para dar credibilidade a propagandas, argumentos ou conselhos (Crompton & Flanders, 2006). As probabilidades são também utilizadas de forma intuitiva, não só em atividades sociais como desporto e "jogos de azar", mas também em previsões meteorológicas, económicas e financeiras (Gal, 2002; Graham et al., 2005).

A alfabetização estatística e probabilística da população em geral é necessária para que os indivíduos possam decidir se a informação que lhes é apresentada está a ser usada de forma verdadeira ou como representações menos claras da realidade. Por este motivo, é cada vez mais importante garantir a compreensão adequada dessa informação por parte dos cidadãos e desenvolver o seu sentido crítico para a tomada de decisões (Helenius & Mikkela, 2011; Sušec et al., 2014; Gal, 2005). Como consequência, tem-se registado uma preocupação constante por parte de vários países, nos quais se inclui Portugal, para que a estatística e as probabilidades tenham um papel cada vez mais importante nos currículos escolares, desde os níveis de instrução iniciais até aos níveis universitários (Nikiforidou et al., 2010; Graham et al., 2005).

O *pensamento estatístico*, o *raciocínio estatístico* e a *literacia estatística* são três competências cada vez mais relevantes no âmbito do processo de ensino e aprendizagem da estatística, independentemente do nível de escolaridade e área científica dos alunos. Embora não existam definições formais para estes conceitos, considera-se que a *literacia estatística* inclui, por um lado, a capacidade de organizar os dados, por exemplo através de gráficos ou tabelas, que permitam compreender a informação estatística, e por outro, a compreensão de conceitos, vocábulos e símbolos e também a compreensão da noção de probabilidade como medida de incerteza. O *raciocínio estatístico* é definido como a capacidade de entender e ser capaz de explicar os processos estatísticos e interpretar os resultados, sendo muitas vezes necessária a conexão entre vários conceitos estatísticos ou probabilísticos. Por fim, o *pensamento estatístico* envolve habilidades de aplicar, criticar, generalizar, estimar e avaliar que estão subjacentes à compreensão do "porquê" e "como" são conduzidas as análises estatísticas (Ben-Zvi & Garfield, 2004).

Na bibliografia associada à reforma do ensino da estatística, não se encontram definições consistentes para os objetivos de aprendizagem associados a estas competências (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Para alguns autores, estes três domínios são independentes, mas possuindo uma interseção não vazia; enquanto que para outros, o pensamento e raciocínio estatísticos estão contidos no domínio da literacia estatística. Como alternativa a estas duas perspetivas, delMas (2002) sugere o modelo apresentado na tabela 1, onde considera a importância de relacionar cada um destes domínios na elaboração de tarefas a serem realizadas pelos alunos.

Tabela 1. Tarefas que podem distinguir os três domínios de instrução (segundo delMas, 2002)

Literacia	Raciocínio	Pensamento
Identifica	Aplica	Porquê?
Descreve	Critica	Como?
Reformula	Avalia	Explica o processo
Traduz	Generaliza	
Interpreta		
Lê		

Em Portugal o ensino da estatística é geralmente reduzido a um conjunto de conceitos, cálculos e técnicas que se podem reduzir a uma mera mecanização (Pimenta, 2006). O facto de os alunos saberem construir um gráfico não significa que na realidade o consigam compreender e retirar a informação relevante que este lhes pode transmitir. Também o cálculo de uma média, mediana ou moda ("palavras" utilizadas com certa frequência no nosso dia a dia) é um processo bastante simples, mas que a maioria dos alunos revela bastante dificuldade em interpretar de modo a perspetivar o seu verdadeiro significado e utilidade nos diferentes contextos.

Num mundo em constante mudança e onde o pensamento crítico, a criatividade, e as competências sociais são cada vez mais valorizadas, há necessidade de repensar a forma como se transmite o conhecimento aos alunos. No caso particular do ensino da estatística e das probabilidades é importante que os alunos possam realizar experiências e debater ideias uns com os outros. Vários estudos, mostram que, independentemente do nível de escolaridade dos alunos, são recomendadas práticas pedagógicas que envolvam realização de experiências com situações do mundo real que permitam a visualização de conceitos mais abstratos (Langrall & Mooney, 2005; Gal, 2003). O recurso a estas práticas, além de permitir uma melhor compreensão dos conceitos e contribuir para o desenvolvimento dum conhecimento racional e sentido crítico, também tem revelado ser uma forma eficaz de os alunos melhor recordarem o que aprendem (Zandpour & Rimmer, 2006).

Neste artigo pretendemos mostrar como trabalhar um dos conceitos básicos de estatística e probabilidade – a aleatoriedade – através da realização de experiências cujo grau de complexidade terá que ser adaptado à idade dos alunos.

O CONCEITO DE ALEATORIEDADE

Segundo vários autores (por exemplo Gal, 2005) o conceito de aleatoriedade deve ser introduzido desde muito cedo em contexto escolar. Em Portugal, e tal como é recomendado por vários países, as reformas dos programas de matemática do ensino básico chegaram a incluir a noção de aleatoriedade desde os primeiros anos de escolaridade (3.º e 4.º anos). No entanto, na última reforma educativa[1] a iniciação aos fenómenos aleatórios foi adiada para o 3.º ciclo (9.º ano). A nosso ver, esta decisão poderá contribuir para que as crianças mostrem alguma dificuldade em interpretar corretamente este conceito fundamental para explicar inúmeras situações do dia a dia.

Esta dificuldade está, por vezes, associada à grande tendência de verem o mundo de forma determinística e tentarem atribuir causas a situações probabilísticas (Langrall & Mooney, 2005). O tipo de raciocínio exigido em situações de aleatoriedade difere da abordagem típica do ensino tradicional da matemática, uma vez que requer a construção de novas intuições, é mais propenso a julgamentos subjetivos e mais fundamentado na razão e análise (Graham et al., 2005).

Para que os alunos possam compreender o conceito de aleatoriedade desde cedo, propomos a realização duma experiência que consiste na construção de caminhos aleatórios. Embora esta experiência tenha sido realizada com alunos do 3.º e 4.º anos de escolaridade ela é facilmente adaptável a alunos mais velhos ou mais novos.

A EXPERIÊNCIA

Para a realização da experiência que permitiu explicar o conceito de aleatoriedade recorreu-se a duas tampas de cores diferentes[2], um saco opaco, algo para pintar, uma folha de registo e uma grelha quadriculada[3], onde se indica um quadrado de partida designado por "início". Cada experiência teve a duração de 15 a 20 minutos e foi realizada no contexto de ocupação de tempos livres.

A experiência consiste em colocar no saco opaco as duas tampas coloridas, retirar uma tampa, registar a cor que saiu[4] e voltar a colocar a tampa dentro do saco. Na folha de registo é anotada a cor da tampa extraída e simultaneamente é pintado na folha quadriculada, a partir da quadrícula inicial (ver figura 1), o caminho de acordo com a seguinte regra: se sai uma tampa azul avança-se uma casa para a direita; se sai uma tampa vermelha avança-se uma casa para a esquerda. Desta forma, vai-se construindo um caminho aleatório. A experiência termina quando se atinge uma das margens da grelha ou ao fim de um número pré determinado de extrações. Nestas experiências considerámos um máximo de 30 extrações.

Para que os alunos compreendessem melhor o conceito de aleatoriedade, cada grupo realizou a experiência duas vezes. Os dois caminhos obtidos foram representados na mesma grelha quadriculada com cores diferentes[5], sendo que o ponto inicial foi o mesmo nas duas realizações, no entanto foi utilizada uma folha de registo diferente para cada experiência (ver figura 2). O registo desta folha permite explorar um pouco mais os resultados obtidos, como por exemplo, contar o número de tampas azuis e vermelhas. Outros exemplos da realização desta experiência encontram-se na figura 3.

RESULTADOS DA EXPERIÊNCIA

Enquanto se preparavam os materiais para a realização da tarefa, estabeleceu-se um diálogo com os alunos sobre as expetativas relativamente aos possíveis resultados da experiência. Na tabela 2, apresenta-se um resumo das principais ideias desse diálogo bem como as conclusões a que chegaram após a realização das experiências.

Tabela 2. Algumas respostas dadas pelos alunos antes e depois da realização da experiência

	Antes da Experiência	Depois da Experiência
Se saiu tampa azul …	A seguir vai sair tampa vermelha.	Pode sair outra vez azul ou sair vermelha.
Os dois caminhos podem cruzar-se?	Não	Sim podem cruzar-se, mas também podem nunca se cruzar.
O número de vezes que foi retirada cada tampa	___________	Deve ser parecido (analisando todas as experiências).

1 Programa de matemática homologado em 2013

2 A experiência foi inicialmente realizada com o lançamento de uma moeda, mas percebemos que facilmente se poderiam falsificar os resultados e perder o foco desta experiência. Então passámos a usar duas tampas de cores diferentes e um saco opaco.

3 O tamanho das quadrículas depende da idade das crianças.

4 Para alunos do 2.º ciclo, pode-se usar um dado e registar se sai uma face com número par ou ímpar.

5 Embora os alunos tenham pintados os caminhos com cores diferentes, na figura 2 eles são apresentados com os símbolos ● e ×

Extração	Tampa	Direção
	A - Azul	D-Direita
	V - Vermelha	E-Esquerda
1		
2		
3		
4		
…		

(a) Folha de registo pormenorizada

Tampa	Contagem	N.º de vezes
Azul (Direita)		
Vermelha (Esquerda)		

(b) Folha de registo simplificada

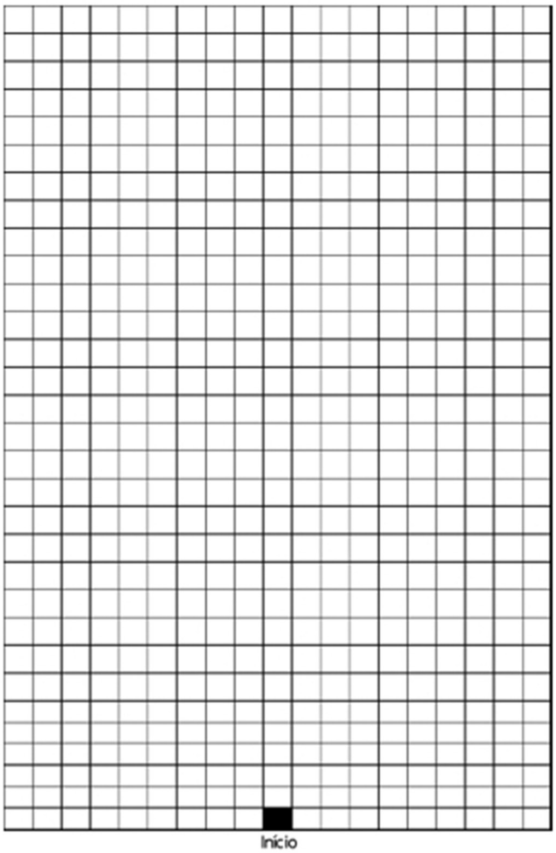


Figura 1. Exemplo de folhas de registo (a) e (b) e de uma grelha quadriculada utilizada na experiência

Tampa	Contagem	N.º de vezes
Azul (Direita)	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18
Vermelha (Esquerda)	𝍸 𝍸 ||	12

Caminho 1 assinalado com ●

Tampa	Contagem	N.º de vezes
Azul (Direita)	𝍸 𝍸 𝍸	15
Vermelha (Esquerda)	𝍸 𝍸 𝍸	15

Caminho 2 assinalado com X

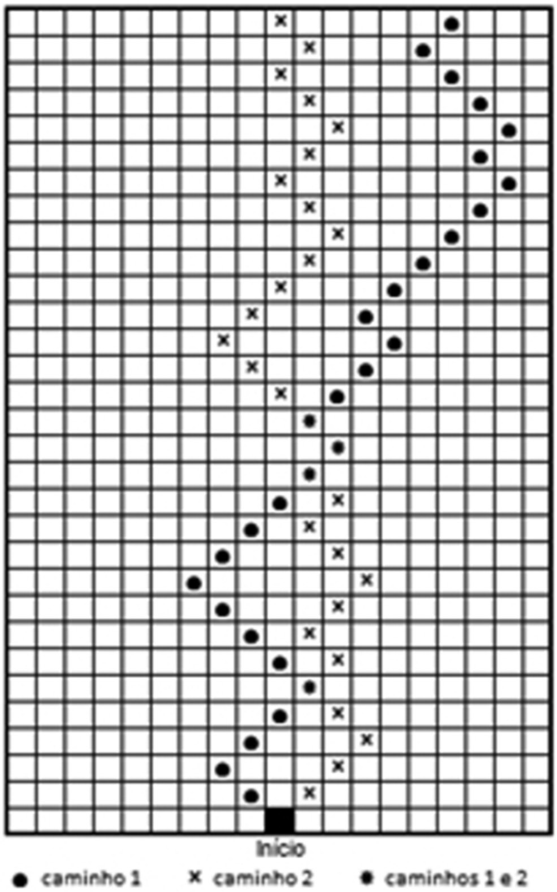
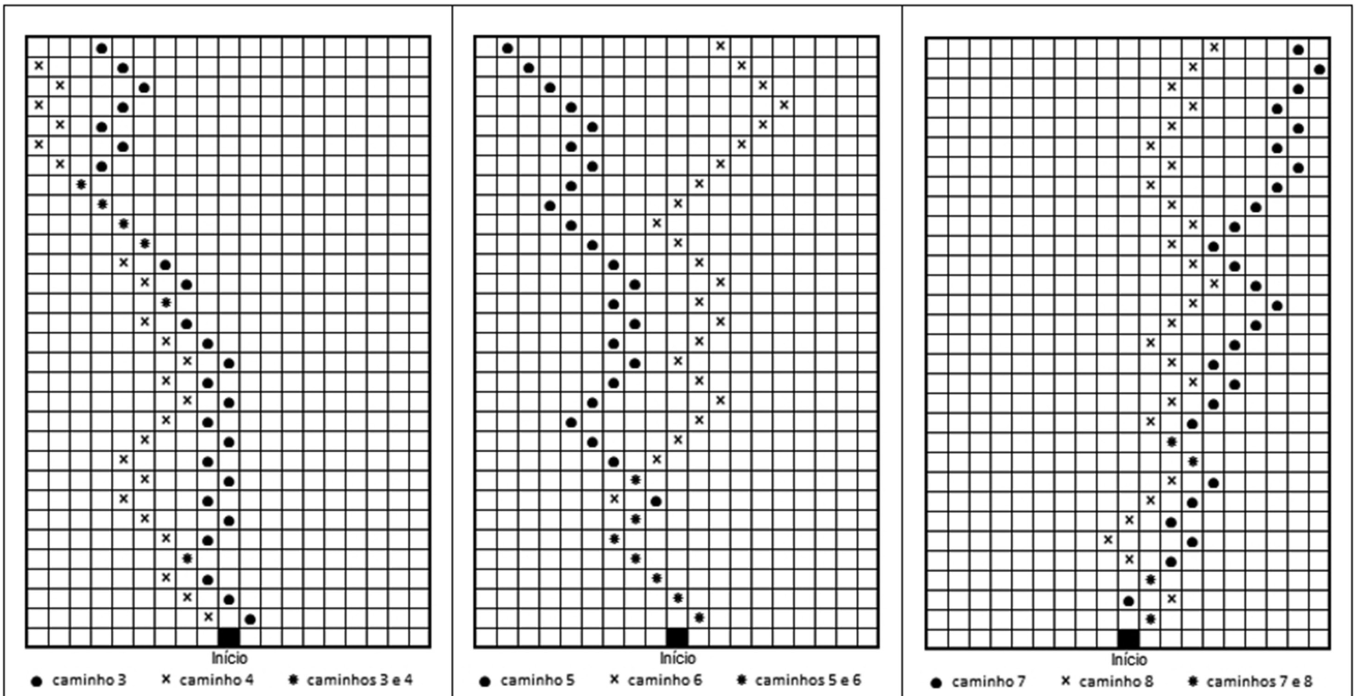


Figura 2. Exemplo de dois caminhos aleatórios e respetivas folhas de registo



Caminho 3

Tampa	Nº de vezes
Azul (Direita)	12
Vermelha (Esquerda)	18

Caminho 4

Tampa	Nº de vezes
Azul (Direita)	10
Vermelha (Esquerda)	19

Caminho 5

Tampa	Nº de vezes
Azul (Direita)	11
Vermelha (Esquerda)	19

Caminho 6

Tampa	Nº de vezes
Azul (Direita)	16
Vermelha (Esquerda)	14

Caminho 7

Tampa	Nº de vezes
Azul (Direita)	19
Vermelha (Esquerda)	11

Caminho 8

Tampa	Nº de vezes
Azul (Direita)	17
Vermelha (Esquerda)	13

Figura 3. Exemplos de 6 caminhos aleatórios

Ao analisarem os diferentes caminhos obtidos, os alunos também puderam concluir que, quando o número de tampas azuis é igual ao número de tampas vermelhas, o caminho termina na mesma coluna que a coluna da casa inicial (ver caminho 2 da figura 2), quando o número de tampas azuis é superior ao número de tampas vermelhas, o caminho termina numa coluna mais à direita que a coluna da casa inicial (ver caminho 1 da figura 2) e, quando se verifica o contrário, o caminho termina numa coluna mais à esquerda. Esta experiência também permitiu concluir que, quando se analisa em conjunto todos os caminhos obtidos, o número de tampas azuis tende a aproximar-se do número de tampas vermelhas.

Tendo por objetivo os alunos poderem partilhar o que fizeram na escola em contexto familiar, digitalizaram-se todos os caminhos, reduziram-se de tamanho e imprimiram-se. Cada aluno fez um postal (figura 4) para levar para casa escolhendo 4 caminhos para colocar na capa.

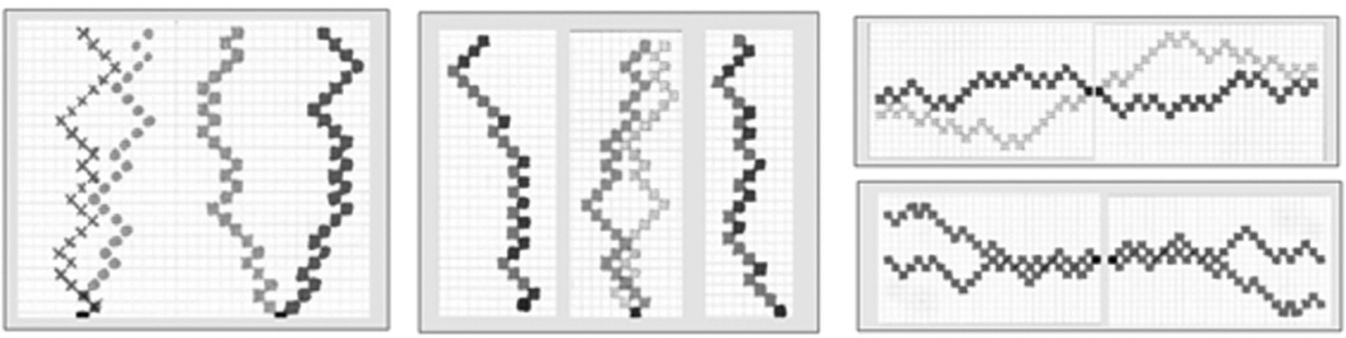


Figura 4. Imagens de 4 postais realizados.

Os materiais obtidos ao longo desta experiência permitem a recolha e o registo de dados. Estes registos podem ser utilizados posteriormente para atingir outras metas curriculares do ensino básico, tais como, a construção de tabelas de frequência absoluta e relativa, a noção de percentagem, a construção e leitura de gráficos de barras e circulares.

CONCLUSÕES

Esta experiência permitiu desenvolver as três competências inicialmente referidas como fundamentais para o ensino e aprendizagem da estatística: (1) a *literacia*, os alunos compreenderam o conceito de aleatoriedade, a repetição da experiência e a comparação dos resultados obtidos foi crucial para a compreensão deste conceito; (2) o *raciocínio*, a análise dos vários caminhos, estimulou o raciocínio, também foi possível sair do âmbito da experiência e falar de situações da vida real que são aleatórias ou determinísticas (não aleatórias); e (3) o *pensamento* que foi necessário para apresentar aos restantes colegas os caminhos que obtiveram, por exemplo, explicar o porquê do caminho ter terminado mais à direita ou mais à esquerda.

Geralmente os alunos estão motivados para realizar experiências e empenham-se neste tipo de tarefas, o que permite que compreendam os conceitos que lhes estão subjacentes. Neste caso, o facto de, após a realização da experiência, os grupos apresentarem os seus caminhos aleatórios e procederem à comparação dos vários caminhos obtidos permitiu que os alunos se apropriassem do conceito de aleatoriedade. No entanto, esta experiência permite explorar outros domínios. Para além de identificar e diferenciar fenómenos aleatórios e determinísticos, também permite identificar os resultados da experiência (tampa vermelha ou tampa azul, no caso da extração de uma tampa de dentro dum saco, ou face 1, 2, 3, 4, 5, ou 6 no caso do lançamento do dado), ou identificar, por exemplo, todos os caminhos possíveis ao final de duas extrações. Esta experiência também pode servir de base à construção e análise de tabelas de frequência (absolutas e/ou relativas) e aos gráficos de barras e circulares. Ou pode-se usar as tabelas e os gráficos como ferramentas de apoio à análise dos caminhos obtidos.

O facto de os alunos terem levado este trabalho para casa em forma de postal permitiu atingir dois objetivos adicionais: mostrarem e explicarem aos seus familiares o que fizeram, pois saber comunicar é uma mais valia para a sua formação; chegar às famílias, sendo um pequeno estímulo à sua alfabetização estatística.

REFERÊNCIAS

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning; Goals, Definitions and Challenges. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Crompton, V. & Flanders, J. (2006). Communicating statistics to the media: Telling the story behind the numbers. Atas da conferência ICOTS 7-*Seventh International Conference on Teaching Statistics* no Brazil.

delMans, Robert C. (2002) Statistical Literacy, Reasoning and Learning: A Commentary. Journal of Statistics Education. 10(3).

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review*, 70(1), 1-25.

Gal, I. (2003). Functional demands of statistical literacy: Ability to read press releases from statistical agencies. Atas da conferência 54th World Statistics Congress, ISI em Berlin.

Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. Em *Graham A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning, (pp. 39-63).* New York, NY: Springer.

Graham et al. (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning. Série Mathematics Education Library. Em Graham A. Jones (Ed.), (pp. 1-12).* New York, NY: Springer.

Helenius, R. & Mikkelä, H. (2011). Statistical literacy and awareness as strategic success factors of a national statistical office–the case of Statistics Finland. *Statistical Journal of the IAOS*, 27(3, 4), 137-144.

Langrall, C. & Mooney, E. (2005). Characteristics of elementary school student's probability reasoning. Em *Graham A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning, (pp. 95-119).* New York, NY: Springer.

Nikiforidou, Z., Lekka, A. & Pange, J. (2010). Statistical literacy at university level: the current trends. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 795-799.

Pimenta, R. (2006, July). Assessing statistical reasoning through project work. Atas da conferência *ICOTS7 – Seventh International Conference on Teaching Statistics* no Brazil.

Sušec, M. P., Muravec, N. J. & Stančić, H. (2014). Statistical Literacy as an Aspect of Media Literacy. *Me_ dijska istraživanaj: znanstveno-–stručni časopis za novinarstvo i medije,* 20(2), 131-155.

Zandpour, F. & Rimmer, T. (2006). Media studies and statistics: Real–world demands, classroom quandaries, and on-line solutions. Atas da conferência *ICOTS7 – Seventh International Conference on Teaching Statistics* no Brasil.

Cláudia Silvestre

Ana Meireles

Secção de Estatística - Escola Superior de Comunicação Social - IPL

O uso da tecnologia na Holanda: um impulso através dos novos programas?

Sónia Palha

Dezoito anos depois da introdução da calculadora gráfica nos exames nacionais na Holanda, aprendeu-se muito sobre o uso de tecnologia na educação. Uma das lições principais foi que integrar as TIC como ferramenta para aprender matemática é uma tarefa complexa, sendo esta complexidade muitas vezes subestimada. Neste artigo é dada uma visão atual do uso das TIC na prática letiva na Holanda e, em particular, na disciplina de matemática. Alguns dos assuntos focados incluem o tipo de tecnologias e materiais de aprendizagem usados e as orientações curriculares para a matemática e avaliação. Refletindo sobre experiências e desafios dos últimos anos é dada uma ideia das prioridades futuras. Direções para melhorar a integração da tecnologia no ensino da matemática, incluem a necessidade de compreender o seu papel na aprendizagem e desenvolvimento do saber e raciocínio matemático dos alunos, um investimento na formação dos professores, na qualidade dos materiais de aprendizagem digitais e em formas mais flexíveis de avaliação.

Síntese do sistema de educação Holandês

- O ensino primário é comum (6-12 anos). No final do ensino primário os alunos são aconselhados a seguir uma das duas trajetórias: vocacional (12-16 anos) ou básico-secundário. O ensino básico (12-15) e ensino secundário (15-17 ou 15-18) conhecem por sua vez duas vertentes: estudos técnicos ou estudos de preparação para a universidade.
- A matemática é obrigatória durante toda a escolaridade. No ensino secundário os alunos têm de escolher obrigatoriamente um tipo de matemática, A, B ou C. Esta escolha está geralmente ligada à área de estudos seguida pelo aluno. Em algumas escolas é possível, para além da matemática obrigatória, escolher matemática D. Esta disciplina facultativa foi criada em 2007/2008 quando o programa da matemática B foi reduzido e temas como Probabilidades e Estatística foram excluídos.
- Os objetivos curriculares são definidos pelo SLO[1] (National Institute for Curriculum Development) mas não o caminho que leva a cumpri-los. As escolas são autónomas e têm liberdade para organizar a aprendizagem dos alunos. No ensino secundário há exames nacionais obrigatórios. A especificação dos objetivos e conteúdo dos exames é estabelecido pelo CvTE[2] (College voor Toetsen en Examens).

USO DE TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO NA HOLANDA: TENDÊNCIAS ATUAIS

Em comparação com outros países, atualmente a Holanda está acima da média relativamente ao uso das TIC na educação (OCDE, 2015) e esta utilização continua a aumentar (Kennisnet, 2015). No ensino primário, básico e secundário, pouco mais da metade dos professores utilizam tecnologias na sala de aula cerca de dez horas por semana, enquanto no ensino vocacional esta utilização é superior a 15 horas. Em comparação com 2012-2013 o número médio de horas quase duplicou no ensino secundário e no vocacional aumentou de quase 11 para 15 horas. Além disso, o grupo de professores que utiliza as TIC menos de cinco horas por semana tem vindo a reduzir e o grupo de professores que as utiliza mais de quinze horas tem vindo a aumentar. Relativamente ao tipo de utilização da tecnologia na prática letiva escolar, as TIC são principalmente utilizadas para monitorizar o progresso de aprendizagem dos alunos, para comunicação (*emails*, redes sociais, Digital Learning Enviroments) e para preparar e dar aulas.

Uma das condições necessárias a uma boa utilização da tecnologia é o uso de materiais de aprendizagem apropriados. Em 2007-2008 cerca de 15% (primário e secundário) e 35% (vocacional) dos materiais eram digitais, atualmente é cerca de 25% (primário e ciclo preparatório), 35% (básico e secundário) e 55% (vocacional), de acordo com os resultados do mesmo estudo. Habitualmente os professores holandeses utilizam bastante o manual escolar adotado pela escola para preparar e lecionar aulas. Esta postura também se reflete na utilização de materiais de aprendizagem digitais, ou seja, os professores usam o software e as aplicações digitais que estão já integradas no manual escolar utilizado. Na figura 1 é dada uma visão geral da

1 O SLO é o instituto nacional para o desenvolvimento curricular na Holanda para o ensino primário, especial, ensino secundário e vocacional e incluí todas as matérias.

2 O CvTE (College voor Toetsen en Examens) é uma entidade administrativa independente responsável pelos exames nacionais https://www.hetcvte.nl/

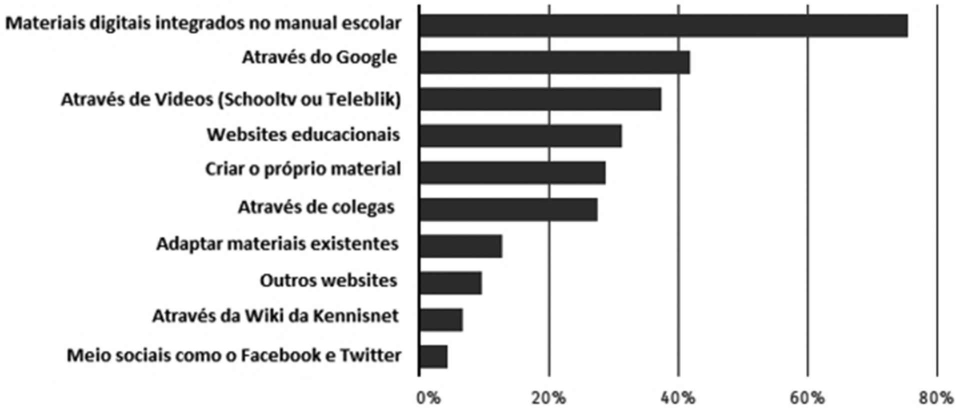


Figura 1. Origem dos materiais digitais utilizados na prática letiva (adaptada da Kennisnet, 2015)

origem dos materiais de aprendizagem digitais mais utilizados pelos professores.

Cerca de 75% dos materiais digitais são oriundos do manual escolar adotado. Estes materiais digitais incluem tutoriais interativos, vídeos, arquivos de texto e *software* associados. O facto de os manuais integrarem tecnologias poderá ser um incentivo para muitos professores em integrá-los na sua prática letiva. Outras fontes amplamente utilizadas para aceder a materiais, são os motores de busca como o Google (40%), banco de vídeos digitais (mais de 35%) e *sites* de educação (mais de 30%). Cerca de 30% dos professores produz materiais e 25% utiliza materiais que recebe de colegas. Um aspeto interessante a realçar é o facto dos professores referirem que usariam mais material digital se houvessem mais computadores disponíveis, se tivessem mais tempo, e a qualidade do material digital fosse melhor.

Olhando para o uso das TIC na educação, a Holanda evoluiu consideravelmente nos últimos 15 anos a nível de criação de infraestruturas e disponibilização de materiais (por exemplo equipamento, ligação à Internet, disponibilização de materiais curriculares digitais e desenvolvimento de conhecimento dos professores sobre as TIC). A utilização das tecnologias pelos alunos como instrumento de apoio à sua própria aprendizagem acontece com menor frequência (Kennisnet, 2015). Há a necessidade de uma mudança de foco em aspetos organizacionais para um foco na aprendizagem dos alunos. A este nível é necessário investir mais nos próximos anos. E, para tal, os professores precisam de perceber o que funciona ou como podem usar as TIC como um aliado na promoção das aprendizagens dos alunos.

ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Em 2015 entraram em vigor novos programas para a disciplina de matemática no ensino secundário. Uma das alterações relativamente ao programa anterior é uma maior integração da tecnologia, que se reflete através da explicitação quanto à sua utilização nos objetivos curriculares. Esta tendência também se observa em outros níveis de escolaridade e diferentes setores (básico e vocacional). No ensino primário, básico e vocacional os objetivos para os alunos focam-se na aprendizagem da utilização das tecnologias e na compreensão da sua utilidade. No ensino secundário, os objetivos focam-se na aprendizagem de tópicos matemáticos específicos tais como estatística, geometria, funções e cálculo. Uma síntese dos objetivos atuais dos diversos níveis é dada na tabela 1.

PRÁTICA LETIVA

Na Holanda existem três manuais principais e que são adotados por quase todas as escolas. Todos estes manuais têm (ou estão ainda a desenvolver) uma versão digital. O único instrumento tecnológico obrigatório é a calculadora básica (no caso do ensino básico e vocacional) e gráfica (no ensino secundário). Outro tipo de *hardware* ou *software* não é especificado nos documentos oficiais que estabelecem o conteúdo a ser aprendido e avaliado (a escola tem liberdade para decidir). No caso do ensino secundário, a calculadora gráfica é o único tipo de tecnologia permitido no exame nacional. No ensino vocacional, o uso do computador (como meio de escrita) é facultativo no exame.

Cada vez mais as escolas optam, por exemplo, por utilizar *tablets* e portáteis em combinação com uma versão digital do manual. Outra evolução observada é a utilização de smartphones e telemóveis para aceder a informação ou para participar em *quizzes*. Uma destas aplicações é o Kahoot com a qual é possível fazer *quizzes* que os alunos respondem no seu próprio telemóvel, ou o Shakespeak que torna uma apresentação Powerpoint mais interativa. De resto, a maioria dos professores usa Powerpoint ou Prezi para preparar e dar aulas. Além da calculadora, outras tecnologias específicas da matemática frequentemente utilizadas são o GeoGebra (*software* dinâmico para a aprendizagem da

Tabela 1. Síntese dos objetivos curricular relacionados com as TIC na Matemática

Nivel ensino
Exemplos de objetivos curriculares
Primário e Básico
Os alunos aprendem a utilizar a calculadora
Secundário
idade 15 -17 anos
• Estatística com as TIC (matemática A e C). O aluno utiliza as TIC nas diversas fases do ciclo empírico (definição do problema, análise do projeto, visualização de dados, etc.). • Funções, gráficos, equações e inequações (matemática A). O aluno consegue criar e manipular fórmulas, construir gráficos resolver equações e inequações com métodos algébricos sem a utilização das TIC e, quando necessário, utiliza métodos numéricos ou gráficos com as TIC e integra os resultados no contexto. • Geometria (matemática B). O aluno investiga propriedades de objetos geométricos e demonstração matemática com as TIC. • Cálculo Integral (matemática B). O aluno determina integrais com ajuda das TIC. • Competências matemáticas (matematica A/B/C). O aluno utiliza as TIC adequadas para consultar informação matemática para explorar situações matemáticas, no raciocínio matemático e na realização de cálculos matemáticos.
Vocacional
idade 12-16 anos
• O aluno aprende a utilizar as TIC para desenvolver competências académicas. Entre elas a habilidade de cálculo mental, aplicar as regras matemáticas, medir e aplicar recursos. • O aluno aprende a utilizar a calculadora para efetuar operações, frações, percentagens, calcular potências e raízes. • O aluno aprende a utilizar as TIC estrategicamente para desenvolver o seu próprio conhecimento e competências. • O aluno (apenas para certo nível de vocacional) aplica técnicas computacionais complexas usando a calculadora.

geometria), VU-Grafiek (software para a aprendizagem de funções e cálculo), VU-stat (*software* estatístico) e *applets* (aplicações para a Internet sobre vários tópicos matemáticos).

A evolução de materiais digitais tem tornado mais atrativo para o professor criar o seu próprio material didático. O professor no papel de *designer* é recente na Holanda e tem recebido um impulso através da criação de redes de professores, grupos de trabalho e de projetos. Um exemplo é o caso dos projetos do Instituto Freudenthal envolvendo *applets*: Wisweb, Welp e, mais recente DWO[3] (em inglês: DME-Digital Mathematical Environment). Neste último, o professor desenvolve, ele próprio, materiais com *applets* e tem acesso ao trabalho dos alunos, o que por sua vez o informa sobre modificações necessárias à construção de novos materiais.

USO DE TECNOLOGIAS NA SALA DE AULA: UM IMPULSO COM OS NOVOS PROGRAMAS?

Por várias razões, a utilização das TIC na matemática até à data nem sempre foi bem-sucedida (cTWO, 2007; Drijvers, Streun, & Zwaneveld, 2012). No caso das calculadoras gráficas várias causas são apontadas: incerteza sobre a natureza das soluções de equações encontradas graficamente — nem sempre é claro para os alunos se estas são exatas ou uma aproximação; referências à calculadora gráfica nas respostas dadas pelos alunos em vez de argumentos matemáticos; os alunos aceitam a autoridade dos resultados na calculadora sem discuti-los ou utilizam a calculadora sem pensar primeiro. Uma causa mais recente tem a ver com o aumento da capacidade de memória das calculadoras que torna possível guardar vários tipos de procedimentos. Contudo, apesar destas críticas é indiscutível que a calculadora gráfica pode constituir uma poderosa ferramenta para a aprendizagem da matemática. Particularmente, no ensino secundário a sua utilização é importante na resolução de problemas e modelação matemática. Por exemplo, torna possível rapidamente examinar o gráfico de uma função, para construir uma tabela ou para verificar uma solução; permite ao aluno visualizar e explorar famílias de funções, etc... Além disso, o uso da calculadora e de outras tecnologias vem aliviar o trabalho de cálculo e algorítmico e facilitar a concentração do aluno em aspetos mais concetuais, contribuindo desta forma para o desenvolvimento do pensamento, raciocínio e capacidades matemáticas. Este é o significado de 'usar para aprender'. No entanto, o foco da sua utilização tem-se relacionado (muitas vezes não intencionalmente) mais com o 'aprender a utilizar o dispositivo'.

Espera-se que os novos programas de matemática (em vigor desde 2015) possam impulsionar a integração das TIC na aprendizagem dos alunos. O tópico de estatística foi um dos tópicos que sofreu mais alterações nesse sentido. No antigo programa o foco da aprendizagem era um conjunto de técnicas

3 The DME (Digital Mathematics Environment) é um ambiente de aprendizagem e avaliação digital para matemática no ensino secundário e superior. Métodos de ensino interativo e *feedback* desempenham um papel central. Os alunos podem trabalhar a qualquer momento em módulos que foram selecionados para eles e receber *feedback* sobre as suas respostas. Os professores podem ver o trabalho dos alunos e adaptar módulos e atividades para responder às necessidades da turma. Algumas funções exigem uma licença, atualmente disponível apenas nos Países Baixos e na Bélgica. Mas é possível a outras escolas experimentar este software - http://ws.fisme.science.uu.nl/dwo/site/index_en.html

e as atividades eram pouco realistas e fragmentárias. No novo programa o foco está no desenvolvimento e aplicação do raciocínio estatístico. Os exercícios passaram a incluir atividades de investigação onde o aluno tem a oportunidade de recolher, organizar e analisar dados e fazer inferências. A utilização de programas como o Excel ou programas de análise estatística como SPSS e VU-Stat torna possível lidar com um grande volume de dados. Outro tópico que sofreu alterações foi a geometria. A utilização de software de geometria dinâmica como a GeoGebra tem demonstrado ser útil no desenvolvimento de conhecimento e raciocínio geométrico.

TENDÊNCIAS E PRIORIDADES PARA O FUTURO

Concluindo: a utilização das TIC tem vindo a aumentar, assim como a sua integração no currículo e prática letiva. A tendência e prioridades futuras parecem apontar para um investimento para melhorar esta integração. Algumas direções que estão a ser tomadas nesse sentido são:

- Investimento na formação de professores (inicial, informal e profissional) e facilitação de outras formas de profissionalização como redes de professores, grupos no Facebook e *workshops* em conferências nacionais.
- Existem estímulos para criar e/ou investigar novas utilizações da tecnologia na educação. Um exemplo é a disciplina matemática D, que neste momento pode ser seguida *online* com um mínimo investimento da escola.
- Mais investigação e experimentação no campo da aprendizagem com as TIC é necessária, devendo centrar-se num desenvolvimento de uma didática das TIC com foco em 'usar para aprender';
- No âmbito da avaliação digital (formativa e sumativa), estão a ser exploradas novas formas. Uma iniciativa é o Teste Intermédio para Diagnóstico (Diagnostische Tussentijdse Toets, DTT); um teste digital para diagnosticar a aprendizagem dos alunos no final do ensino básico. O teste tem um carácter adaptativo e está a ser desenvolvido (2014-2017).

Os novos desafios, centram-se no desenvolvimento de conhecimento, materiais e formas de ensinar com VR (Virtual Reality) e AR (Augmented Reality). Mas neste campo ainda há pouca experiência.

Referências

cTWO (2007). Rijk aan betekennis: Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs. Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, Utrecht2007

Drijvers, P. H. M., Streun, A., & Zwaneveld, G. (Eds.). (2012). Handboek wiskundedidactiek. Epsilon Uitgaven.

Kennisnet (2015), Vier in balans-monitor 2015: inzet en opbrengsten van ICT in het onderwijs, Kennisnet. https://www.kennisnet.nl/publicaties/vier-in-balans-monitor/

OECD (2015), Students, Computers and Learning: making the connection, PISA, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264239555-en

SLO (2014), Vernieuwing examenprogramma's wiskunde havo/vwo. http://www.betanova.nl/downloads/7218_Brochure_Wiskunde_vernieuwde_examenprogramma_s_web.pdf/

Sonia Palha

University of Applied Sciences of Amsterdam e Centre for Applied Research in Education

Nota sobre o artigo **"As tecnologias na aula de Matemática: do Projeto MINERVA à sala de aula do futuro"** (página 32 da Revista 142)

Quando se referem nomes de colegas que desempenharam um papel relevante num projeto, em determinado contexto e período temporal, os riscos de omissão são grandes. Foi o que aconteceu com o nome do Eduardo Veloso, que na área da Educação Matemática deu grandes contribuições, em particular nos anos 80 e 90 do século passado, para a utilização educativa dos computadores. Em particular, todos lhe devemos um enorme contributo na área da Geometria Dinâmica e a criação da ferramenta computacional Logo-Geometria, de cuja utilização educativa resultariam muitos trabalhos de intervenção e investigação, com professores e alunos, no ensino básico e secundário.

As minhas desculpas ao Eduardo pela omissão involuntária e o meu reconhecimento pelo seu contributo. O meu agradecimento aos dois colegas que me fizeram notar essa falta.

José Duarte

PERFEIÇÕES NUMÉRICAS

A Graça encontrou três números naturais que cumprem estas condições:

- A diferença entre quaisquer dois deles é um quadrado perfeito.
- A soma dos três números é um quadrado perfeito.
- O maior dos números é o menor possível.

Quais são os números da Graça?

(Respostas até 31 de dezembro, para zepaulo46@gmail.com)

PONTOS E CIRCUNFERÊNCIAS

O problema proposto no número 141 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

> *Temos quatro pontos do plano, não colineares três a três e não pertencentes a uma mesma circunferência.*
> *No máximo, quantas circunferências equidistantes dos pontos podem existir?*
> *E no mínimo?*

Recebemos apenas quatro respostas: Carlos Dias, Graça Braga da Cruz (Ovar), Mário Roque (Guimarães) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

PRIMEIRA QUESTÃO

A Graça começa por fazer as seguintes considerações:

Como os quatro pontos não pertencem à mesma circunferência, então a sua posição relativamente a uma circunferência de que sejam equidistantes pode ser:

Hip 1. Três no interior da circunferência e um no exterior (ou vice-versa);

Hip 2. Dois no interior e dois no exterior.

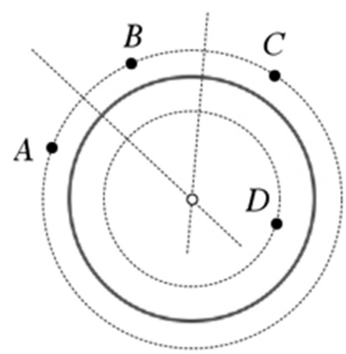
Hipótese 1 – Quatro casos:

ABC-D	ABD-C
ACD-B	BCD-A

Como descreve o Carlos, os passos a seguir em cada um destes casos são sempre os mesmos. Por exemplo, para ABC-D, seria:

– *Traçam-se as mediatrizes dos segmentos AB e BC. O ponto em que estas retas se intersetam é o centro da circunferência que procuramos (neste caso é o circuncentro do triângulo ABC).*

– *Com centro neste ponto traçam-se duas circunferências. Uma que passa por A, B e C e outra que passa por D. O raio da circunferência que procuramos é a média aritmética entre os raios destas duas circunferências.*



Hipótese 2 – Três casos:

AB-CD	AC-BD	AD-BC

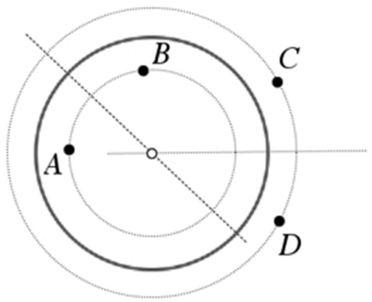
Agora, os passos a seguir para, por exemplo, AB-CD são:

– *Traçam-se as mediatrizes dos segmentos AB e CD.*

– *O ponto em que estas retas se intersetam é o centro da circunferência que procuramos.*

– *Com centro neste ponto traçam-se duas circunferências. Uma que passa por A e B e outra que passa por C e D.*

– *O raio da circunferência que queremos achar é a média aritmética entre os raios destas duas circunferências.*

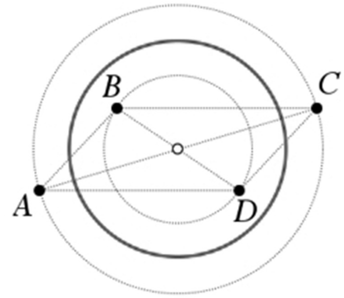


Conclusão, o número máximo de circunferências nas condições impostas é 7.

SEGUNDA QUESTÃO

Demos a palavra ao Mário:

– *Seguindo o método descrito, caso haja paralelismo entre lados, temos problemas! Para mais e para menos…*
– *Analisei situações em que duas das mediatrizes coincidem (quadrados, retângulos, trapézios isósceles) – aí temos infinitas soluções, mas estamos fora do contexto, uma vez que os quatro pontos pertencem a uma mesma circunferência.*
– *Analisei depois situações em que duas das mediatrizes ficam estritamente paralelas. Num paralelogramo sem lados perpendiculares penso ter encontrado a situação "mínima", onde além das quatro circunferências resultantes da hipótese 1, apenas encontrei mais uma da hipótese 2 - a que resulta de unir pares de vértices situados na mesma diagonal, e que tem centro… no centro do paralelogramo.*



Conclusão, o número mínimo de circunferências nas condições impostas é 5.

Nota final – Existe um evidente paralelismo entre este problema e o problema *"Pontos e planos, sempre no espaço"*, proposto no número 127 da *Educação e Matemática*: *Temos quatro pontos no espaço, não complanares. Quantos planos existem que sejam equidistantes dos quatro pontos?*

APM 2017 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @-sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

* A partir de 2016 a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma nova modalidade de associado aos professores do 1.° ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00E, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM.

Pode inscrever-se indeferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.° de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* (3 números normais e um número duplo temático).

Quotas anuais para 2017

A quota tem efeitos de janeiro a dezembro de cada ano civil.

Modalidades de associado individual	*Quota*
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.° CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	*Quota*
Modalidade I (1 exemplar da E&M)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da E&M)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	140,00 €

Os @-sócio só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos ou outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *online*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do *Centro de Recursos*.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidade de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações: podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Assinatura das revistas Educação & Matemática e Quadrante

		Educação & Matemática 3 números + 1 número duplo temático	*Quadrante* (2 números)
Associado individual	Portugal	....	15,00€
	Estrangeiro	....	30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas Educação & Matemática e Quadrante

	Educação & Matemática		*Quadrante*
Associado	Temática	10,00€	10,00€
	Normal	7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	

índice

Editorial

Artigos

Secções