índice

Editorial

01 **Agência no rebentar das ondas**
Margarida Rodrigues

Artigos

03 **A matemática dos números felizes e educados**
José Luiz Pastore de Mello

10 **Educação Financeira e a aula de Matemática**
Ana Santiago, António Domingos e Paula Teixeira

15 **A Caminho de Viseu para o ...**
XXVIII seminário de Investigação em Educação Matemática
Nélia Amado e Alessandro Ribeiro

17 **O meu ProfMat de Viseu**
Sandra Duarte

22 **Moreirinhas Pinheiro (1923-2017), uma vida de professor**
Rui Candeias

24 **Uma curva de cada vez… A espiral equiangular**
Eduardo Veloso

27 **Contributos da percentagem para a aprendizagem**
dos números racionais no 1º ciclo
Helena Gil Guerreiro e Lurdes Serrazina

35 **À procura de um algoritmo**
Eduarda Moura

Secções

07 **O Problema deste número** *José Paulo Viana*
No geoplano

09 **O problema do ProfMat 2017** *José Paulo Viana*

13 **Materiais para a aula de Matemática**
Perfis financeiros, *Ana Santiago, António Domingos e Paula Teixeira*

19 **30 anos da Educação e Matemática**
Nos 30 anos da Educação e Matemática, I*sabel Rocha*
Um olhar subjetivo e sumário sobre o que foi,
o que é e como poderá ser, *Fernando Nunes*

32 **Caderno de Apontamentos de Geometria** *Cristina Loureiro*
Por onde começar na geometria? Porque não pelos paralelepípedos?

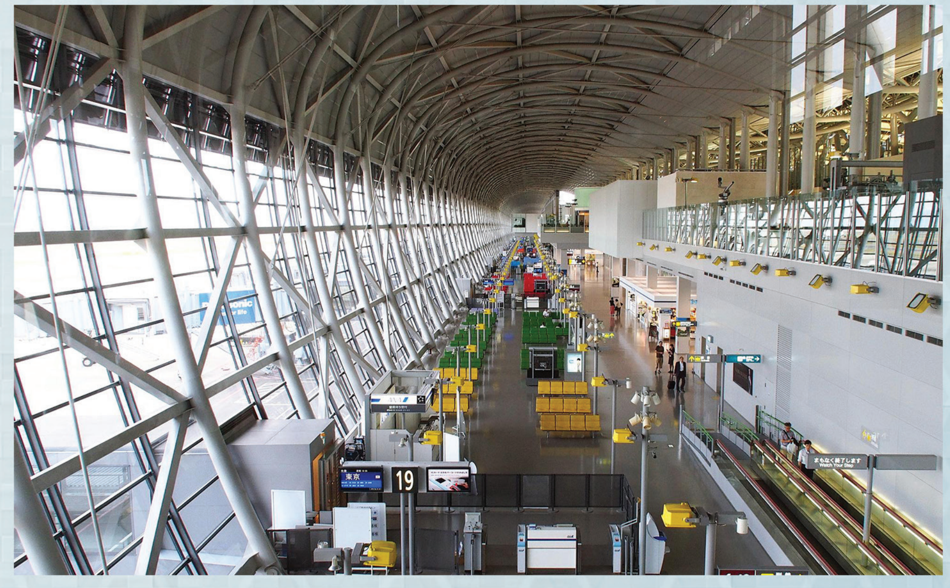
39 **Tecnologias na Educação Matemática** *António Domingos*
As Tecnologias na aula de Matemática:
do Projeto MINERVA à sala de aula do futuro, *José Duarte*
As tecnologias… 17 anos em (Revista), *José Duarte*

44 **Espaço GTI**
Dificuldades em ensinar frações no 1º ciclo do Ensino Básico,
Paula Cardoso e Ema Mamede

47 **Vamos jogar** *Helena Rocha*
Polygame, Helena Rocha e Sílvia Lopes

Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2017
142
ABRIL ∞ MAIO ∞ JUNHO

Preço 7,50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Catarina Delgado
	Cristina Cruchinho
	Cristina Morais
	Filipa Machado
	Helena Amaral
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	João Terroso
	Manuela Pires
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos **Tecnologias na Educação Matemática**
Cristina Loureiro **Caderno de Apontamentos de Geometria**
Grupo de Trabalho de Investigação da APM **Espaço GTI**
José Paulo Viana **O problema deste número**
Mário Baía **Edição gráfica**

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Março de 2017
Tiragem 1450 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.o 8
Casal da Espinheira
2560-401 Silveira

Depósito Legal n.o 72011/93
Registo no ICS n.o 124051
ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

Um aeroporto de sucesso - Aeroporto de Kansai, Osaka, Japão - localizado numa ilha artificial na baía de Osaka, numa zona geológica complexa. Tem a sua enorme estrutura suportada por um sistema flexível e adaptável, idealizado para resistir a fenómenos atmosféricos e geológicos extremos. Estrutura dinâmica e evolutiva, procura responder a interesses e desafios inerentes à diversidade do universo dos seus utilizadores.

(Fotografia da capa de Luke Ma)

Mário Baía

Neste número também colaboraram

Ana Santiago, António Domingos, Eduarda Moura, Eduardo Veloso, Ema Mamede, Fernando Nunes, Helena Gil Guerreiro, Helena Rocha, Isabel Rocha, José Duarte, José Luiz Pastore Mello, José Paulo Viana, Lurdes Serrazina, Margarida Rodrigues, Nélia Amado, Paula Cardoso, Paula Teixeira, Rui Candeias, Sandra Duarte, Sílvia Lopes

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.o 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

Agência no rebentar das ondas

Olho o mar à minha frente. As ondas rebentam, vão e vêm, como num ciclo de vida. É esta a imagem que emerge quando penso na flexibilização curricular a ser implementada no próximo ano letivo. Estamos em 2017, e já desde longa data que se encontra na ordem do dia a urgência em flexibilizar o currículo, em geri-lo de modo a incorporar a vivência de experiências de aprendizagem significativas pelos nossos alunos. Como é possível ignorar a multiplicidade de realidades existentes nas escolas? Constato essa multiplicidade nas salas de aula de Matemática quando vou fazer observações das práticas dos estagiários. Constato a existência de uma multiculturalidade que não pode ser equacionada como limitação ou constrangimento à gestão curricular. Essa multiculturalidade pode e deve ser uma mais-valia. Só o será, contudo, se o tecido vivo da massa humana com quem trabalhamos tiver espaço para respirar, para afirmar a sua voz, para ouvir e ser ouvido. Ou seja, se essa massa humana não for olhada como massa incógnita, uniforme ou informe, mas sim como um todo coletivo construído pelas interações entre os seus elementos específicos. E tal não se compadece com um currículo rígido que acentua as assimetrias sociais, ao ser concebido como um fato de tamanho único e uniforme, no qual não cabe a maioria das singularidades reais das nossas turmas. Já quase há duas décadas, o Decreto-Lei n.º 6/2001 consignava a gestão flexível do currículo do Ensino Básico. Revisito as palavras de Paulo Abrantes, em 2000, no n.º 59 da *Educação & Matemática*, quando ele colocava a diversidade e o "conjunto de aprendizagens consideradas necessárias e que os alunos devem fazer" como sendo indissociáveis da noção de currículo, reforçando a importância do desenvolvimento de novas práticas curriculares e da autonomia das escolas. Assim, é este um discurso velho e gasto, ou mantém-se atual, pertinente, e a apontar para o futuro? O atual Ministério da Educação está apostado em lançar o projeto da flexibilização curricular, em modelo de projeto-piloto, nas escolas que se candidataram. As ondas do mar vão e vêm. Continuamos nós no mesmo ponto? Direi que não. Tal como as ondas constroem e reconstroem novas formas, talham novos perfis, confrontamo-nos hoje, nas nossas escolas, com desafios ainda mais complexos. No entanto, o sistema educativo não tem almejado a consecução da sua adequação a esses desafios. Daí que a flexibilização curricular ainda se mantenha, nos dias atuais, na esfera do ideal, e simultaneamente como algo inadiável, indispensável no garante de uma maior equidade social, e direi mesmo, inevitável.

Sendo a necessidade e a intencionalidade características essenciais de currículo, persistem interrogações, inquietações: no século XXI, que educação matemática temos? será que ela satisfaz a necessidade e a intencionalidade atuais? será que se constitui como um fator de coesão social? que educação matemática queremos? o que significa flexibilizar o currículo? o que são aprendizagens essenciais em Matemática?

Integrei, este ano, o grupo da APM responsável pela elaboração do documento *Aprendizagens matemáticas essenciais*. Durante o processo de elaboração da nossa proposta, este foi o ponto central da discussão entre nós: o que podemos considerar como sendo essencial? Considerámos importante associar aos objetivos essenciais de aprendizagem, as práticas essenciais de aprendizagem para enfatizar a importância de serem criadas as condições de aprendizagem que facultem aos alunos a oportunidade de vivenciar experiências que concorrem para a consecução de objetivos de aprendizagem centrados em processos matemáticos fundamentais, como a resolução de problemas e o raciocínio e a comunicação matemáticos. Essas condições passam pelo empoderamento dos alunos enquanto participantes da sua própria aprendizagem e com ela comprometidos. Subjaz a este trabalho uma esperança renovada. Mas também uma esperança contida pois temos consciência da incongruência entre o documento produzido e os programas de Matemática atualmente em vigor, concebidos numa lógica elitista, e consubstanciados numa lista excessiva de conteúdos, apresentados como tendo igual importância e obrigatoriedade de tratamento. A flexibilização curricular exige políticas educativas arrojadas, capazes de substituir programas sentidos como espartilhos por outros consentâneos com as orientações internacionais e com o documento *Perfil dos alunos à saída da Escolaridade Obrigatória*. Exige também dos professores tomadas de decisão em contexto de um trabalho colaborativo. Exige agência. Uma agência assumida, por professores e alunos, na sua plenitude de risco, de autoria da história que se constrói no presente, e da mudança. Porque, pelos imperativos éticos da nossa condição humana, somos transformadores da realidade, agentes da história do percurso continuamente trilhado e partilhado.

PRINCÍPIOS ORIENTADORES PARA A MATEMÁTICA ESCOLAR

Ensino e Aprendizagem.

Acesso e Equidade.

Currículo.

Ferramentas e Tecnologia.

Avaliação.

Profissionalismo.

PRÁTICAS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Estabelecer metas matemáticas para enfatizar a aprendizagem

Propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas

Usar e relacionar representações matemáticas

Favorecer um discurso matemático significativo

Colocar questões pertinentes

Chegar à fluência procedimental a partir da compreensão conceptual

Apoiar um esforço consequente na aprendizagem da matemática

Obter e utilizar evidência do pensamento dos alunos.

Preço de capa: €18,00

Preço de sócio: €15,00

PREÇOS ESPECIAIS PARA FORMAÇÃO

Inclua no material para os seus formandos esta importante obra; para grandes encomendas temos preços especiais:	
A partir de 25 exemplares até 49 exemplares:	preço unitário 10,00€
A partir de 50 exemplares até 99 exemplares:	preço unitário 7,00€
A partir de 100 exemplares:	preço unitário 6,00€

APM Associação de Professores de Matemática

217163690; **encomenda@apm.pt**

A matemática dos números felizes e educados

José Luiz Pastore Mello

Estudar teoria dos números na matemática escolar pode ser muito divertido e desafiador quando os temas e problemas são bem escolhidos. Mas o que escolher em um universo tão vasto? Neste artigo apresento definições e algumas propriedades dos números felizes e educados, o que constitui uma interessante porta de entrada para a teoria dos números na sala de aula.

Para não carregar o texto com repetições de palavras, sempre que nele aparecer a palavra "número" me refiro a "número inteiro positivo".

NÚMEROS FELIZES

Escolha um número qualquer como, por exemplo, 4599. Agora começa nosso divertimento: some os quadrados dos seus algarismos e, em seguida, some novamente os quadrados dos algarismos do número obtido. Siga esse mesmo processo até a brincadeira "perder a graça".

$4^2+5^2+9^2+9^2 = \mathbf{203}$, $2^2+0^2+3^2=\mathbf{13}$, $1^2+3^2=\mathbf{10}$, $1^2+0^2=1$, $1^2=1$, ...

O jogo perdeu a graça quando a soma chegou em 1 já que, daí em diante, nada irá mudar, certo? Verdade! Mas dê uma chance ao jogo e tente com outro número. Que tal 731?

$7^2+3^2+1^2=\mathbf{59}$, $5^2+9^2=\mathbf{106}$, $1^2+0^2+6^2=37$, $3^2+7^2=\mathbf{58}$, $5^2+8^2=\mathbf{89}$, $8^2+9^2=\mathbf{145}$, $1^2+4^2+5^2=\mathbf{42}$, $4^2+2^2=\mathbf{20}$, $2^2+0^2=\mathbf{4}$, $4^2=\mathbf{16}$, $1^2+6^2=37$, ...

Foi mais divertido, mas quando chegou em 37 pela segunda vez perdeu a graça porque tudo começa a se repetir ciclicamente: 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, ...

Quem gosta de brincar com números quer fazer novos testes. O que será que acontece com outros números? Pois, então, experimente antes de prosseguir a leitura.

Curiosamente parece que o processo sempre termina na monótona sequência de uns, ou no intrigante *loop* **4**, **16**, **37**, **58**, **89**, **145**, **42**, **20**. Aos olhos da matemática, se você decidir parar o jogo com o punhado de exemplos analisados terá, no máximo, uma conjectura. Antes de investigar melhor essa conjectura, é hora de dar "nomes aos bois", isso costuma melhorar a comunicação. Batizaremos de **felizes** os números que terminam o processo descrito em infinitos números uns, e de **infelizes** aqueles em que isso não acontece. Passada a limpo, nossa conjectura diz que:

Todos os números (lembre-se, só estamos falando de inteiros positivos) ou são felizes ou são infelizes e presos no *loop* **4**, **16**, **37**, **58**, **89**, **145**, **42**, **20**.

Deixe por enquanto essa conjectura em compasso de espera para, antes, investigar a seguinte pergunta: - Quantos números felizes, e quantos números infelizes existem?

Se 4599 é um número feliz, também serão felizes os números 45990, 459900, 4599000, ... O mesmo raciocínio se aplica ao número infeliz 731 e seus infinitos "seguidores infelizes" 7310, 73100, 731000, ... Se você achou sem graça essa estratégia para concluir que existem infinitos números felizes e infelizes, talvez ache divertida a de pensar nas permutações de algarismos de um número, o que implica dizer que também são felizes os números 4959, 4995, 5499, 5949, 5994, 9954, 9594, 9549, 9945, 9495, 9459, e também são infelizes 713, 371, 317, 173 e 137. Colocando "zeros a direita" de cada um dos números obtidos com as permutações teremos outros infinitos números felizes (e infelizes), e diferentes dos infinitos que já tínhamos.

Mesmo podendo listar infinitos números felizes e infelizes, nossa conjectura continua aberta já que ainda não sabemos se existem números infelizes fora do loop 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20. Nosso próximo passo será o de encontrar argumentos matemáticos que possam transformar essa conjectura em um teorema, ou que possam refutá-la por meio, quem sabe, de um contraexemplo. Mãos a obra!

Se **n** é um número de **m** algarismos, a soma dos quadrados dos **m** algarismos de **n** necessariamente será um número menor que ou igual a 9^2m, isso porque o maior quadrado possível de cada algarismo será 9^2. Organizando essa ideia em uma tabela, temos:

m	n	Soma dos quadrados dos **m** algarismos de **n** é menor que ou igual a
1	$1 \leq n \leq 9$	81
2	$10 \leq n \leq 99$	162
3	$100 \leq n \leq 999$	243
4	$1000 \leq n \leq 9999$	324
5	$10000 \leq n \leq 99999$	405
⋮	⋮	⋮
m	$10^{m-1} \leq n \leq 10^{m}$	81m

Ocorre que, para $m \geq 4$ sempre teremos $10^{m-1} > 81m$ (verifique![1]), o que implica dizer que para qualquer $n \geq 1000$ ($m \geq 4$), submetido ao "teste de felicidade" com as sucessivas somas dos quadrados dos algarismos, as somas obtidas ao longo do processo

ou constituem uma sequência estritamente decrescente até que se chegue a primeira soma menor do que 1000;

ou constituem uma sequência cujo primeiro termo (primeira soma dos quadrados dos algarismos do número) já é um número menor do que 1000.

(a rigor, há também o caso em que n=1000, e n é trivialmente feliz)

Em última análise, se $n > 1000$, então, em algum momento da sequência de somas dos quadrados dos algarismos chegaremos a um número menor do que 1000. Imagine um número de 15 algarismos. Esse número terá, no máximo, o número 1215 (81x15) como primeira soma dos quadrados dos algarismos. Essa soma representa agora um novo n de, no máximo, 4 algarismos. Se n possui 4 algarismos (m=4), a soma seguinte dos quadrados dos algarismos será, no máximo, igual ao número 324 (81x4), o que reduz o novo n para um número de, no máximo, 3 algarismos, ou seja, um número menor do que 1000. Dessa forma concluímos que a investigação da "felicidade" dos números de 1 até 1000 é um retrato fiel do que acontece com os demais números, maiores do que mil[2].

Já raciocinamos bastante! Chegou a hora de pedir ajuda para quem pensa bem menos do que a gente, mas que faz contas com velocidade incomparavelmente superior: o computador. A investigação da felicidade dos números de 1 até 1000 com a ajuda do computador revela, em fração de segundos, que os números ou são felizes ou infelizes e aprisionados no *loop* 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20. Pronto, agora temos (nós e o computador) um teorema!

O uso de computadores em auxílio à demonstração de teoremas já foi visto com muito preconceito no passado. Essa questão veio a tona com vigor em 1976 quando os matemáticos Appel e Haken, utilizando cerca de 1000 horas de processamento de um computador IBM 360, provaram que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa plano, dividido em regiões, de forma que "regiões vizinhas" não partilhem a mesma cor. Aquilo que era conhecido como "conjectura das quatro cores", ganhou o *status* de "teorema das quatro cores". Eu não vejo o uso do computador como um "roubo" no processo de demonstração, porque o brilho da demonstração não está no trabalho mecânico da máquina, mas no pensamento dos matemáticos que reduziu um número infinito de possibilidades a um número finito que pudesse ser verificados um a um, ainda que com a ajuda da máquina. Hoje é consenso entre os matemáticos que o computador pode ter papel relevante na demonstração de alguns teoremas complexos, e é interessante que essa perspectiva também seja colocada em pauta com estudantes da matemática escolar.

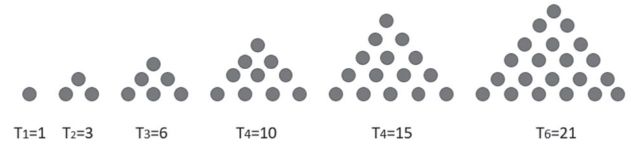
NÚMEROS EDUCADOS

Vamos seguir um pouco mais na brincadeira de adjetivar números, agora com novas definições.

Chamaremos de números educados os que podem ser escritos como soma de dois ou mais números consecutivos. Por exemplo, 29 é um **educado** porque 29 = 14+15. Aqueles que não podem ser assim escritos, como por exemplo o 8, serão chamados de **mal-educados.**

Excetuando-se o caso trivial da troca na ordem dos termos da adição, existem números educados que podem ser escritos como mais de uma adição de consecutivos, como é o caso do 18 que é igual a 3+4+5+6, e também igual a 5+6+7. Chamaremos de "**grau de educação**" de um número educado o total de adições diferentes de consecutivos (exceto pela ordem). Nos exemplos dados, 29 e 18 têm grau de educação 1 e 2, respectivamente.

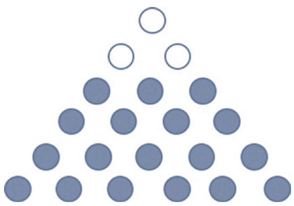
Alguns fatos curiosos podem ser levantados sobre números educados e seu grau de educação. O primeiro é a relação que existe entre números educados e números triangulares. Recordando: um número triangular T_t é tal que



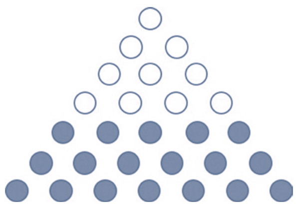
1Não é difícil convencer-se desse resultado observando, em uma tabela, que para m igual a 4, 5, 6, ... os "saltos" em 10^{m-1} são, respectivamente, iguais a 9000, 90000, 900000, ... , ao passo que os "saltos" em 81m são constantemente iguais a 81. Caso o leitor queira uma demonstração mais rigorosa, recomendamos que a faça por indução.

2 Se quisermos ser mais econômicos ainda, a verificação de 1 até 243 já é suficiente como um retrato de tudo o que acontece com os demais números inteiros (pense nisso!).

Um número educado maior do que um sempre será a "diferença entre pares de números triangulares", sendo que essa diferença tem que resultar na soma de pelo menos duas linhas consecutivas do "triângulo". É comum chamar os números educados diferentes de 1 de números trapezoidais devido a forma de trapézio que aparece com a subtração de dois números triangulares. Por exemplo, o educado 18 é trapezoidal, com duas adições de consecutivos que são

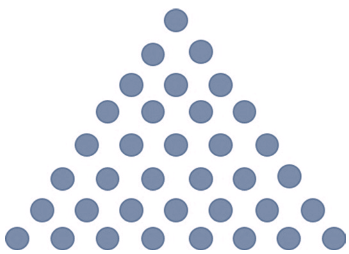


$18=T_6-T_2=3+4+5+6$

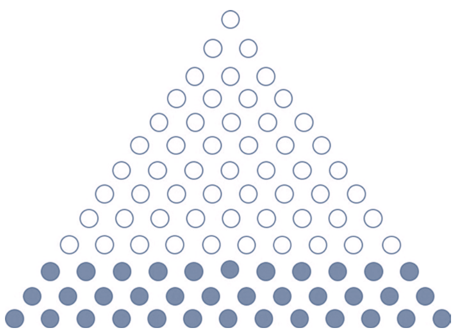


$18=T_7-T_4=5+6+7$

Vale observar que alguns números educados também podem ser escritos, além da diferença entre pares de triangulares, diretamente como número triangular, como é o caso do 36:



$36=T_8=1+2+3+...+8$



$36=T_{13}-T_{10}=11+12+13$

Em síntese, um número educado diferente de 1 sempre será trapezoidal e, eventualmente, também será triangular. Seja olhando para a "forma geométrica" de um número educado, ou simplesmente para a adição aritmética de consecutivos, temos nas mãos uma primeira ideia de algoritmo para achar todas as adições de consecutivos que resultam em um número educado n. Vamos a ele:

Arme um número triangular T_n e procure, da base do triângulo para cima, somas de duas ou mais linhas que resultem em n. Em seguida, repita o mesmo processo com T_{n-1}, T_{n-2}, ... T_1.

Investigaremos agora o curioso fato de que uma potência de 2 (diferente de 1) jamais será um número educado. Seja n um número educado em que a soma dos m números consecutivos, com m>1, comece por k+1. Então, temos

n = (k+1)+(k+2)+(k+3)+ ... +(K+m), ou ainda, $n = T_{k+m} - T_k$.

Relembrando que um número triangular $T_t = 1+2+3+ ... + t$ é a soma dos termos de uma progressão aritmética, segue que $T_t = \frac{(1+t).t}{2}$. Temos agora

n = (k+1)+(k+2)+(k+3)+ ... +(k+m),

$$n = \frac{(k+1+k+m).m}{2}$$

$$n = \frac{m.(2k+m+1)}{2}$$

Observe a última igualdade. Se m for par, então (2k+m+1) será ímpar, e se m for ímpar, então (2k+m+1) será par. Segue então que números educados sempre podem ser escritos como um produto de um número par $\frac{m}{2}$ por um número ímpar (2k+m+1), ou de um número ímpar m por um número par $\frac{2k+m+1}{2}$, o que tira qualquer chance de uma potência de 2 ser um número educado já que, sem usar o 1, as potências de 2 só podem ser escritas como multiplicação de fatores pares.

Por fim, agora vamos demonstrar que todos os números, excetuando-se as potências de 2 (diferentes de 1), são educados. Seja n um número que possa ser escrito como multiplicação de dois números, sendo um deles ímpar e diferente de 1 (note que essa é uma maneira de dizer que n é um inteiro positivo qualquer, sem ser uma potência de 2 diferente de 1). Nesse caso, mostraremos que n sempre será um número educado.

Como n pode ser escrito com um fator ímpar diferente de 1, então, 2n pode ser escrito como $f_1.f_2$ (com $1<f_1<f_2$), com um dos dois fatores (ou f_1 ou f_2) sendo ímpar, e o outro par. Para $f_1=m$ e $f_2=2k+m+1$, que é uma representação de um ímpar e um par, segue que,

2n=m.(2k+m+1)

$$n = \frac{m.(2k+m+1)}{2}$$

Acabamos de mostrar que todo número que não é potência de 2 (diferente de 1) pode ser escrito na forma $\frac{m.(2k+m+1)}{2}$ e, como já vimos anteriormente, inteiros positivos escritos dessa forma são sempre números educados.

O percurso da demonstração ainda nos forneceu de bônus o caminho de um algoritmo bem mais esperto do que aquele que já tínhamos para representar um número educado como adição de consecutivos. Vamos a ele.

Seja n um inteiro positivo com um fator ímpar maior do que 1. Se $2n=f_1.f_2$, com $f_1=m$, $f_2=2k+m+1$ e $1<f_1<f_2$, temos: $m=f_1$ e $k=\frac{f_2-f_1-1}{2}$, com $n=(k+1)+(k+2)+(k+3)+ \ldots +(k+m)$ sendo um número educado.

Vamos aplicar a ideia do parágrafo acima para a obtenção das adições de consecutivos do número educado n=60. Para isso, comecemos encontrando todas as multiplicações de dois fatores em que um deles seja ímpar (e maior do que 1), e cujo produto seja 2n=120. Essa busca pode ser feita analisando os fatores primos do 120. Daí em diante o processo é bem simples.

2n=3.40
$f_1=3$ e $f_2=40$
m=3 e k=18
60=19+20+21

2n=5.24
$f_1=5$ e $f_2=24$
m=5 e k=9
60=10+11+12+13+14

2n=15.8
$f_1=8$ e $f_2=15$
m=8 e k=3
60=4+5+6+7+8+9+10+11

Note que o grau de educação de 60 é 3 já que foi possível escrevê-lo de três formas diferentes como adição de consecutivos. É fácil concluir, agora, que o grau de educação será sempre igual ao total de divisores ímpares maiores do que 1 do número educado.

Finalizo este artigo deixando quatro interessantes perguntas (e respostas) que podem ajudar a compor temas de investigação para uma boa aula de matemática com os números felizes e educados.

Perguntas

1. Estamos no ano 2016, que é um número "infeliz e educado" (verifique isso). Qual será o próximo ano "feliz e educado"?
2. Qual será o primeiro ano da Era Comum que é "feliz e mal-educado"?
3. Qual é o 50.º número educado?
4. Essa é difícil! Complete o próximo termo da sequência 313, 331, 367, ____. (se você conhece a série de ficção científica Doctor Who, aí vai uma dica para resolver este problema: - Assista o episódio 42!)

Respostas

De fato, 2016 é infeliz já que $2^2+0^2+1^2+6^2 = 41$, $4^2+1^2 = 17$, $1^2+7^2 = 50$, $5^2+0^2 = 25$, $2^2+5^2 = 29$, $2^2+9^2 = 85$, $8^2+5^2 = 89$, $8^2+9^2= \mathbf{145}$, $1^2+4^2+5^2 = \mathbf{42}$, $4^2+2^2 = \mathbf{20}$, $2^2+0^2 = 4$, $4^2 = \mathbf{16}$, $1^2+6^2 = \mathbf{37}$, $3^2+7^2 = \mathbf{58}$, $5^2+8^2 = 89$ (entrou em loop). E 2016 é educado porque não é uma potência de 2. O grau de educação de 2016 é 5 porque 2016 tem cinco divisores ímpares diferentes de 1, que são 3, 7, 9, 21 e 63. Usando o último algoritmo descrito no artigo, segue que: 2016 = 671 +672+673=220+221+...+228=285+286+...+291=86+87+...+ 106 = = 1+2+...+63.

O próximo ano "feliz e educado" será 2019. Veja:

$2^2+0^2+1^2+9^2 = 86$, $8^2+6^2 = 100$, $1^2+0^2+0^2 = 1$, e

2019 = 672+674+674 = 334+335+336+337+338+339 (grau de educação 2).

4096, que é mal-educado ($4096 = 2^{12}$) e feliz já que $4^2+0^2+9^2+6^2 = 133$, $1^2+3^2+3^2 = 19$, $1^2+9^2 = 82$, $8^2+2^2 = 68$, $6^2+8^2 = 100$, $1^2+0^2+0^2 = 1$.

Como todos os números, exceto as potências de 2, são educados, pegue os números de 1 até 50, elimine os números 1, 2, 4, 8, 16, 32, e acrescente os números 51, 52, 53, 54, 55 e 56. O número procurado é o 56. O número também pode ser encontrado consultando a "enciclopédia on-line de sequência de inteiros", indicada na bibliografia, ou ainda aplicando o seguinte teorema: o n-ésimo número educado pode ser escrito como f(n+1), sendo $f(n)=n+\{\log_2[(n+\log_2 n)]\}$, com {x} representando o maior número inteiro menor que ou igual ao real x. Fazendo as contas, segue que o 50.º número educado será f(51)=56.

No episódio 42 (ano 2007) da série da TV britânica Doctor Who, a sequência 313, 331, 367, ___ precisa ser completada para o desbloqueio da porta de uma nave espacial que está prestes a colidir com uma estrela. The Doctor (interpretado nessa temporada pelo ator David Tennant) diz que a sequência deve ser completada com 379, que é o próximo **número primo feliz**, e ainda ironiza aqueles que desconfiam da sua lógica dizendo: "- Será que não se ensina mais matemática recreativa nas escolas?".

Referência bibliográfica

Números felizes (Happy numbers): https://en.wikipedia.org/wiki/Happy_number.

Números educados (Polite numbers): https://en.wikipedia.org/wiki/Polite_number.

On-Line Encyclopedia of Integer Sequences: https://oeis.org/.

Gamer, C., Roeder, D. W., Watkins, J. J. (1985). Trapezoidal numbers, 58(2), 108-110.

Lancaster, R. (2016). Lessons on politeness. Mathematics Teacher, 109(5), 330-333.

José Luiz Pastore Mello

Colégio Santa Cruz, São Paulo/Brasil

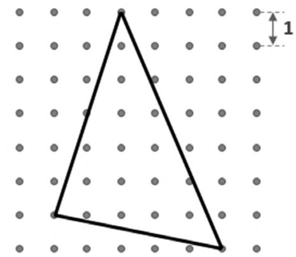
NO GEOPLANO

O Mário afirmou:

– Se tiver um geoplano de malha quadriculada suficientemente grande, consigo construir um triângulo retângulo em que nenhum dos lados é horizontal ou vertical e com as suas medidas a serem números inteiros!

Será que o Mário tem razão?

Se sim, em área, qual é o menor desses triângulos?

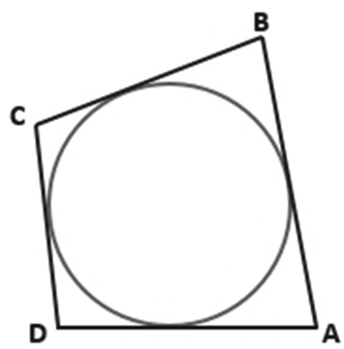


(Respostas até 15 de setembro, para zepaulo46@gmail.com)

UM QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

O problema proposto no número 139/140 de *Educação e Matemática* foi este:

O quadrilátero ABCD circunscreve uma circunferência (a figura é apenas ilustrativa).



O lado AB mede 46 centímetros, o lado BC 40cm e o lado CD 32cm.

1ª Pergunta: Quanto mede o lado DA?

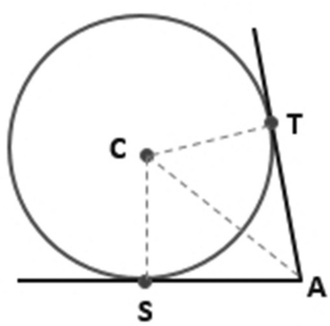
2ª Pergunta (para os entusiastas da tecnologia): De todos os quadriláteros nestas circunstâncias, qual é a área do maior? Qual é, neste caso, o raio da circunferência que ele circunscreve?

Recebemos sete respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Luís Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Mário Roque (Guimarães).

1ª Pergunta

Propriedade: Se, por um ponto exterior A, traçarmos as duas tangentes a uma dada circunferência, são iguais as distâncias de A aos dois pontos de tangência, ou seja, $\overline{AT}=\overline{AS}$.

Quase todos os nossos leitores partiram desta propriedade (e alguns demonstraram-na mesmo, usando a simetria da circunferência e a igualdade dos triângulos ACS e ACT).



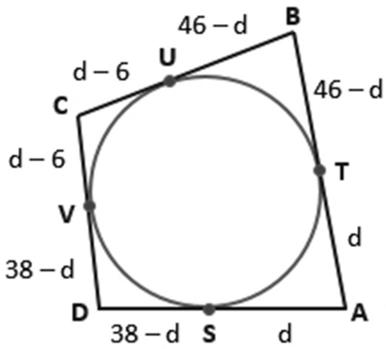
Depois, chamando **d** à medida dos segmentos AS e AT, é possível ir escrevendo as medidas dos sucessivos segmentos em função de **d**.

$\overline{BT}=46-d$

$\overline{BU}=40-(46-d)=d-6$

$\overline{DV}=32-(d-6)=38-d$

Logo $\overline{DA}=(38-d)+d=38$



Nota – Uma propriedade, que resulta imediatamente do que foi feito aqui, é a seguinte: Num quadrilátero circunscrito a uma circunferência, são iguais as somas dos comprimentos dos lados opostos. Foi aplicando esta propriedade que Pedrosa Santos chegou imediatamente à solução.

2ª Pergunta

Há uma infinidade de quadriláteros com lados a medirem 46, 40, 32 e 38 cm, todos eles circunscrevendo uma circunferência. *Os quadriláteros não ficam definidos pelas medidas dos quatro lados, sendo necessário saber o valor de um ângulo ou de uma das diagonais* (Alberto).

Quase todos os leitores usaram um programa de geometria dinâmica para responder a esta pergunta.

O método seguido foi construir o quadrilátero com as medidas indicadas, traçar uma diagonal e medi-la. Depois, alterando a forma do polígono, fazer uma recolha dos valores da área em função da diagonal, pedir o gráfico da relação área/diagonal e obter o valor (aproximado) da área máxima.

No entanto, a Graça e o Mário foram mais longe. Como a diagonal escolhida divide o quadrilátero em dois triângulos, pode calcular-se a área desses triângulos, em função da medida da diagonal, aplicando a fórmula de Heron. Com efeito, conhecidos os seus lados a, b e c de um triângulo e sendo s o semiperímetro, a sua área é dada por

$$A_\Delta = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Consideremos a diagonal AC e representemos por x a medida do seu comprimento. Aplicando a fórmula de Heron, as áreas dos triângulos ABC e ACD são, depois de simplificadas:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{(7396-x^2)(x^2-36)}$$

$$A_{\Delta ACD} = \frac{1}{4}\sqrt{(4900-x^2)(x^2-36)}$$

A área do quadrilátero, em função de x, será:

$$A_{\Delta BCD} = \frac{1}{4}\sqrt{(7396-x^2)(x^2-36)} + \frac{1}{4}\sqrt{(4900-x^2)(x^2-36)}$$

Introduzindo esta função na máquina gráfica e pedindo o seu máximo, temos:

Área máxima ≈ 1495,80747 cm2.

O raio da circunferência circunscrita é ≈ 19,177 cm.

Contudo, o Alberto foi ainda mais longe e nem precisou da tecnologia. Calculou analiticamente a derivada de A(x), igualou-a a zero, resolveu a equação, verificou que correspondia a um máximo e obteve assim o valor exato da medida da diagonal e a correspondente área máxima.

Curiosamente, Pedrosa Santos também prescindiu da tecnologia, utilizando simplesmente papel, lápis, régua, compasso e as fórmulas trigonométricas de resolução de triângulos para obter um valor aproximado da solução. E a verdade é que, desta forma, obteve um resultado com um erro inferior a 0,2%.

O Carlos, depois de resolver o problema, acrescenta:

> *Sem o saber demonstrar estou convencido que a maior área se obtém quando as bissetrizes dos ângulos formado pelas retas que contêm lados opostos são perpendiculares.*

Finalmente, tanto a Graça como o Carlos chamaram a atenção para um mesmo pormenor:

> *Curiosamente, mesmo que o quadrilátero seja côncavo, desde que seja respeitada a regra AB+CD=BC+DA continua a ser possível, não propriamente inscrever uma circunferência, mas pelo menos desenhar uma de modo tal que esta seja tangente às quatro retas que contêm os lados do quadrilátero.*

O problema do ProfMat 2017

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2017 consistiu na resolução do problema "Pares com somas diferentes":

> *Queremos formar um conjunto de dez números naturais, de tal modo que não haja nenhum par de números com a mesma soma de outro par. Ou seja, as somas dos seus elementos, dois a dois, têm de ser todas diferentes. Além disso, o maior número do conjunto tem de ser o menor possível.*

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Foram-nos entregues 19 resoluções (15 individuais e 4 em grupo).

Dez dos concorrentes apresentaram soluções em que o maior número do conjunto é 53. Os restantes ou se enganaram ou o máximo dos conjuntos propostos era superior.

Os processos de resolução foram bastante parecidos.

Estratégia: *escolher os números iniciais e ir eliminando sucessivamente os números restantes quando a soma se repetir* (Paula Barros).

Além disso, como diz a Adriana Ferreira, *não podem existir dois números iguais no conjunto pois a soma destes com qualquer outro seria a mesma.*

Todos foram construindo o conjunto passo a passo, começando pelos menores inteiros, 1 e 2, e acrescentando o menor número que não desse origem a somas repetidas. Várias pessoas decidiram usar um *"instrumento considerado menos ortodoxo nos tempos atuais, a folha de cálculo (de uma calculadora, de um computador, ou de qualquer dispositivo tecnológico"* (João Carlos Terroso), os outros fizeram tudo com papel e lápis.

A Carlota Lemos explica: *Comecei a somar, dois a dois, os números 1, 2 e 3 (obtendo as somas 3, 4, 5). Experimentei o 4 mas exclui-o por dar origem a somas repetidas. Introduzi o 5, que origina somas distintas (6, 7, 8). E assim sucessivamente.*

Seguindo o processo, os primeiros sete números do conjunto são: 1, 2, 3, 5, 8, 13 e 21. Ora este é o início da sequência de Fibonacci, o que fez com que alguns concorrentes admitissem que estava encontrada a regra de formação e deixassem de testar todos os números. Mas, em Matemática, mesmo que uma lei verifique muitos casos, não se pode garantir que ela é válida se não a demonstrarmos. Infelizmente, e com surpresa de muita gente, neste problema a sequência de Fibonacci falha a partir do oitavo elemento.

Quem não se deixou enganar e continuou a experimentar todos os números, obteve o conjunto {1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 30, 39, 53}.

Nota final

Durante a semana do ProfMat, este problema foi também proposto na secção "Desafios" do jornal Público. Após publicação da solução (em que o maior número era também 53), o leitor Delfim Guedes (Gaia) indicou soluções melhores em que não se começa pelos números 1 e 2. Por exemplo, {1, 4, 7, 9, 11, 18, 27, 39, 51, 52} ou {1, 3, 5, 6, 9, 15, 22, 29, 40, 51}.

Premiados e prémios

1º - Letícia Martins

(Unidade TI-Nspire Cx, oferta Texas Instruments)

2º - Adriana Ferreira

(Livro "Problemas… Sem Problema", J. P. Viana, ed. APM)

3º - Paula Barros

(Livro "Problemas… Sem Problema", J. P. Viana, ed. APM)

4º - Carlota Lemos

(Livro "Problemas… Sem Problema", J. P. Viana, ed. APM)

Os prémios devem ser levantados até 31 de Dezembro de 2017. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt ou 217163690).

Outros concorrentes – Alice Martins, Armando Ferreira, Catarina Ferreira, Célia Matos, Conceição Ferreira, Fausto Barros Silva, Fernanda Matias, Fernanda Rua, João Carlos Terroso, Lucília Silva, Raul Aparício, e os grupos: Bruno Francisco & Isabel Beatriz; Grupo Camões (Adelina Precatado, Anabela Teixeira, Pilar Mansos, Teresa Moreira, Tiago Teo & João Jaime Pires); Rita Ribeiro & Miguel Pereira; Sandra, Sofia & Daniel Castanho.

José Paulo Viana

Educação Financeira e a aula de Matemática

Ana Santiago
António Domingos
Paula Teixeira

A Educação Financeira tem vindo a ganhar destaque tanto a nível nacional como a nível internacional.

Segundo a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) **Educação Financeira** é:

> o processo pelo qual os indivíduos melhoram os seus conhecimentos sobre conceitos e produtos financeiros através de programas de formação, instrução, ou outras ferramentas introduzidas com o objetivo de desenvolver capacidades e aumentar a confiança a respeito da sua situação financeira individual. Esta tem por objetivo tornar as pessoas mais conscientes de alguns riscos financeiros e de oportunidades de investimento, consumo e poupança (OCDE, 2005a, p. 26).

Desde 2003 que a OCDE se tem debruçado sobre o tema. Em 2005 foram publicados dois documentos, o primeiro intitulado *Improving Financial Literacy: Analysis of Issues and Policies* (OCDE, 2005a) e o segundo intitulado *Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness* (OCDE, 2005b).

Estes documentos salientam a importância da Educação Financeira, justificada pelo aumento da complexidade dos produtos financeiros e pelos baixos níveis de literacia financeira da população.

O segundo documento, publicado em 2005 (OCDE, 2005b), visava orientar os governos nas suas ações. Contém sete princípios e quatro linhas de boas práticas relativas à Educação Financeira. Desde então a Educação Financeira faz parte da agenda internacional, mobilizando o G20[1], bancos centrais, supervisores financeiros, entre outros (Santiago, 2005). Entre outros aspetos, referiam também a realização de programas de formação de professores e produção de materiais para os mesmos.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA EM PORTUGAL

Em Portugal foi o Banco de Portugal (BdP), a partir de 2008, que assumiu funções no que diz respeito à supervisão comportamental e, consequentemente, na área da Educação Financeira. Realizou um inquérito à literacia financeira dos portugueses, em 2010, com o objetivo de identificar os comportamentos financeiros dos portugueses, medir a inclusão financeira, saber quais os critérios utilizados pelos portugueses na escolha de produtos financeiros e se sabem como estes funcionam, avaliar quais os hábitos de gestão do orçamento e da poupança dos inquiridos e perceber se a população tem conhecimentos sobre conceitos financeiros chave (BdP, 2010).

Dentro dos principais resultados do inquérito destacamos os baixos níveis de conhecimentos financeiros sobre conceitos básicos relevantes para a tomada de decisões financeiras, atitudes em geral adequadas, mas que não se refletem totalmente nos comportamentos financeiros, reduzidos hábitos de poupança, insuficiente compreensão da informação financeira e, por fim, dificuldades na avaliação e seleção de produtos.

O inquérito à literacia financeira dos portugueses foi a forma de diagnóstico que auxiliou na definição de uma estratégia nacional de formação financeira. Foi então elaborado e publicado, pelo Conselho Nacional de Supervisores Financeiros[2], o Plano Nacional de Formação Financeira para o período 2011-2015. Este tinha como objetivos melhorar os conhecimentos e atitudes financeiras, apoiar a inclusão financeira, desenvolver hábitos de poupança, promover o recurso responsável ao crédito e criar hábitos de precaução. Previa a criação de um portal, o portal *Todos Contam*, e definiu como áreas de atuação, entre outras, os alunos do ensino básico e secundário e os alunos universitários.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA NAS ESCOLAS

Sendo os alunos dos Ensino Básico e Secundário uma das áreas de atuação, foi feita uma parceria com o Ministério da Educação e Ciência (MEC). Tendo sido construído entre as duas entidades, PNFF e MEC, o Referencial de Educação

1 Grupo formado pelos ministros das finanças e chefes dos bancos centrais das 19 maiores economias do mundo mais a União Europeia.

2 Formado pelo Banco de Portugal (BdP), Comissão do Mercado de Valores Mobiliários (CMVM) e Instituto de Seguros de Portugal (ISP)

Financeira (REF) publicado em julho de 2013, documento orientador para a implementação da Educação Financeira em contexto educativo e formativo.

Este referencial (MEC, 2013) é dirigido ao Ensino Pré-escolar, Ensino Básico e Secundário e Educação e Formação de Adultos. O tema encontra-se inserido na Educação para a Cidadania (D.L. 139/2012 de 5 de Julho), tem uma dimensão transversal às várias disciplinas, no entanto o referencial não constitui um guia ou programa prescrito, ou seja, é um instrumento de apoio que, no âmbito da autonomia de cada estabelecimento de ensino, pode ser utilizado e adaptado em função das opções a definir em cada contexto, enquadrando as práticas a desenvolver, não existindo a obrigatoriedade da sua implementação em contexto escolar.

O REF está organizado por níveis de educação e ensino e por ciclos, contém uma metodologia de abordagem específica para cada um destes, identificando os temas globais, integradores de subtemas. Define objetivos por subtema, especificados por descritores de desempenho, sendo que os descritores contemplam um conjunto de conhecimentos, capacidades, atitudes/valores e comportamentos. Abrange seis temas: Planeamento e Gestão do Orçamento, Sistema e Produtos Financeiros Básicos, Poupança, Crédito, Ética e, finalmente, Direitos e Deveres.

No ano seguinte, em 2014, as duas entidades, PNFF e MEC, deram início a um processo de formação de professores. Esta foi aplicada na modalidade de Oficina de Formação, abrangeu professores de todos os graus de ensino, desde o Pré-escolar até ao Ensino Secundário e de todas as áreas, no entanto, apenas um número muito reduzido de docentes teve possibilidade de realizar a referida oficina de formação.

Seguiu-se a publicação do primeiro Caderno de Educação Financeira, em 2015, dirigido a professores e alunos do 1.º CEB, abordando os temas necessidades e desejos, despesas e rendimentos, poupança, risco e incerteza e, por fim, meios de pagamento.

No ano seguinte foi lançado o Caderno de Educação Financeira para o 2.º CEB, dirigido a professores e alunos do 2.º CEB, abordando os mesmos temas que o anterior.

Todas estas iniciativas foram dirigidas a docentes dos vários níveis de ensino e das várias áreas disciplinares.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA AULA DE MATEMÁTICA

Observa-se que, por um lado, o programa de Matemática ainda em vigor e as metas curriculares destacam três grandes finalidades para o Ensino da Matemática: Estruturação do pensamento, Análise do mundo natural e Interpretação da sociedade. Por outro lado, o REF considera a Educação Financeira uma temática transversal e transdisciplinar da Educação para a Cidadania. Para além disso, tem sido diversas vezes argumentado que o ensino da Matemática poderá ser valorizado com a utilização de problemas de natureza financeira. Assim, considera-se que ambas as áreas Matemática e Educação Financeira, poderão beneficiar se forem inseridos temas de Educação Financeira na aula de matemática.

Percorrendo o REF, facilmente constatamos ser possível abordar nas nossas aulas alguns dos temas propostos, nomeadamente, Planeamento e Gestão do Orçamento, Sistema e Produtos Financeiros, Poupança e Crédito.

Neste sentido, a Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento (UIED) da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT/UNL) tem desenvolvido trabalho na área da Educação Financeira na aula de Matemática. No trabalho desenvolvido, destaca-se a organização e participação em congressos e seminários sobre o tema, a dinamização de formação de professores, a investigação e a produção de materiais, nomeadamente tarefas para a aula de matemática. Essas tarefas articulam conteúdos de matemática com os temas do REF, com fundamentação teórica na Educação Matemática Crítica (EMC). Skovsmose (2005, p.73) refere que a Matemática "não serve só para resolver problemas e situações, mas sim para criar condições efetivas que favoreçam a reflexão e a compreensão das questões".

Relativamente à investigação realizada nesta área, esta tem-se debruçado sobre a produção de tarefas, para a aula de matemática, para diferentes níveis de ensino e diferentes temas, que abordem os tópicos preconizados no REF. As tarefas são posteriormente implementadas em sala de aula. Observa-se que os alunos se mostram motivados e empenhados na realização das mesmas, questionando os docentes acerca das temáticas trabalhadas, abordando-as fora da sala de aula tanto com os colegas como no seio familiar (Mota, 2016; Nascimento, 2015; Nascimento; 2015a).

No que diz respeito à formação de professores, foram já realizados workshops e cursos de formação. Em ambas as modalidades tem existido uma grande receção da parte dos docentes, justificada pela falta de conhecimento na área da Educação Financeira e pela necessidade que sentem em abordar o assunto com os seus alunos, em sala de aula.

Relativamente aos workshops, estes foram dinamizados no ProfMat de 2016 e de 2017 e tiveram uma duração de 3 horas. Numa primeira parte fez-se uma abordagem genérica ao tema, na segunda parte os formandos trabalharam um conjunto de tarefas para implementação em contexto de sala de aula. Observou-se que os formandos manifestaram mais interesse nas tarefas que permitem que os conceitos de Educação Financeira possam ser trabalhados em simultâneo com os do currículo oficial de Matemática. Mostraram também interesse pelas tarefas que abordam temas mais transversais e que por essa razão podem ser implementadas por outro professor que não o de matemática, por exemplo o diretor de turma.

Quanto ao curso de formação, este decorreu entre setembro e dezembro de 2016, na FCT/UNL e teve a duração de 25 horas. Os formandos tomaram conhecimento do referencial e de alguns materiais já produzidos, nomeadamente nos Cadernos de Educação Financeira (MEC, 2015; MEC, 2016) e nas teses de mestrado (Mota, 2016; Nascimento 2015; Nascimento, 2015a). Durante parte das sessões trabalharam um conjunto de tarefas propostas pelos formadores para implementação em contexto de sala de aula, das quais escolheram ou adaptaram uma para aplicar nas suas turmas. Em contexto de formação foi possível discutir as resoluções dos alunos.

A tarefa proposta na secção "Materiais para a aula de Matemática" deste número da revista é um exemplo das tarefas trabalhadas pelos formandos.

Referências

BdP (Departamento de Supervisão Bancária) (2010). *Inquérito à Literacia Financeira da População Portuguesa 2010*. Lisboa, 2010.

BdP, CMVM e ISP (2011). *Plano Nacional de Formação Financeira 2011-2015: Linhas de orientação.* Lisboa, 2011.

BdP, CMVM e ISP (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020: Linhas de orientação*. Lisboa, 2016.

MEC (2013). *Referencial de Educação Financeira*. Lisboa, 2013.

MEC (2015). *Caderno de Educação Financeira 1*. Lisboa, 2015.

MEC (2016). *Caderno de Educação Financeira 2*. Lisboa, 2016.

Mota, Vera (2016). *A Matemática nos Cursos Profissionais com Recurso a Tarefas de Educação Financeira.* Dissertação de mestrado, UNL – FCT.

Nascimento, F. (2015). *Educação Financeira no Ensino da Matemática: um estudo de caso do Ensino Básico*. Dissertação de mestrado, UNL - FCT.

Nascimento, N. (2015a). *Matemática e Educação Financeira: um estudo de caso do Ensino Secundário.* Dissertação de mestrado, UNL – FCT.

OECD (2005a). *Improving Financial Literacy: Analysis of Issues and Policies*. OECD, 2005.

OECD (2005b). *Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness.* Directorate for Financial and Enterprise Affairs.

Santiago, A. (2015). *A Educação Financeira Escolar em Portugal.* In Boletim Gepem 66 – Educação Financeira Escolar. Rio de Janeiro: GEPEM.

Skovsmose, O. (2005).*Travelling Trough Education: uncertainty, mathematics and responsability.* Rotterdam: Sense Publishers.

Ana Santiago
UIED, ESE de Coimbra

António Domingos
UIED, Universidade Nova de Lisboa

Paula Teixeira
UIED , AE João de Barros

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

PERFIS FINANCEIROS

A tarefa apresentada poderá ser implementada no 2.º ou no 3.º CEB e tem como objetivo principal, no que diz respeito à Educação Financeira, alertar para a importância da elaboração de um orçamento.

Engloba vários temas do currículo de Matemática, nomeadamente os números racionais, expressões numéricas, operações aritméticas, percentagem e estatística. Quanto ao Referencial de Educação Financeira, abrange os temas despesas e rendimentos, planeamento, poupança e crédito.

Pode ser implementada para revisão de alguns conceitos, alertando para as temáticas do Referencial de Educação Financeira e poderá ser utilizado, como recurso, uma folha de cálculo.

Para mais informações acerca da Educação Financeira poderão consultar a página do MEC ou o portal Todoscontam:

http://www.dge.mec.pt/educacao-financeira

http://www.todoscontam.pt

TAREFA | PERFIS FINANCEIROS

O Ricardo e a Mónica são dois amigos com gestões financeiras muito diferentes, como podes concluir da leitura dos perfis que a seguir se apresentam:

PERFIL 1

A Mónica tem 20 anos, está a frequentar a licenciatura em Educação Básica e, como gosta de crianças, toma conta delas desde os 16 anos.

Com esta ocupação dos tempos livres consegue ganhar cerca de 4000 € por ano. Os pais pagam algumas das suas despesas, nomeadamente as propinas e as outras despesas de educação.

Os seus sonhos são viajar e fazer um curso de inglês em Inglaterra.

Para realizar os seus sonhos, a Mónica tem um planeamento pessoal. Aliás, desde que começou a trabalhar e a ter de gerir o seu dinheiro começou a apontar tudo num bloco de notas: as despesas, os rendimentos, os objetivos e as poupanças.

Objetivos	**Orçamento** | Despesas
• **Viagem pela Europa | Interrail** – Preço: 200€ para o bilhete para 15 dias mais 30€ para gastar em alojamento e alimentação por dia – Poupança: 30€ por mês, durante 2 anos • **Curso de inglês de 15 dias** – Preço: 2000€ (Inclui viagem, curso e alojamento com alimentação) – Poupança: 500€ por ano, durante 4 anos **Outras Poupanças:** • Fundo de reserva: 50€ por mês	• Alimentação durante a semana na cantina da escola: 2,40€, durante as 30 semanas de aulas • Passe autocarro: 22€ mensais (11 meses) • Roupa, calçado e acessórios: 200€ por trimestre • Crédito do computador portátil: 70€ mensais, durante um ano • Materiais didáticos para utilizar no serviço de babysitting: 10€ por mês • Mensalidade telemóvel: 10€ por mês

QUESTÕES PARA A ANÁLISE DO PERFIL FINANCEIRO DA MÓNICA

1. Qual é a tua opinião acerca do perfil financeiro da Mónica? Parece-te que ela tem uma gestão financeira equilibrada?
2. Qual é o valor das despesas mensais da Mónica? O valor que ela ganha anualmente é suficiente para fazer face às suas despesas?
3. Qual é a importância da previsão no orçamento da Mónica?
4. Qual é a função do fundo de reserva para o orçamento da Mónica?
5. Qual é a importância, para a gestão financeira da Mónica, da anotação de todos os seus gastos?

PERFIL 2

O Ricardo tem 18 anos, entrou no ensino superior e continua a morar em casa dos pais. O pai perguntou-lhe qual o valor da mesada que ele necessitava para fazer face a todas as suas despesas. Ele pensou um pouco e disse que 300€ seria um valor mais do que suficiente. Afinal é um valor acima de metade do ordenado mínimo nacional!

Pensou que, com este valor poderia ainda ter bons momentos de lazer!

Com esta mesada paga as propinas, a alimentação, o vestuário, as telecomunicações, as despesas associadas ao carro, o ginásio e o lazer. Na tabela estão registadas as despesas do Ricardo por mês:

Propinas	3 prestações de 354,49 € cada ou No ato de matrícula: 1010,30 €
Alimentação	5,90€ de segunda a sexta, num restaurante perto da faculdade durante as 30 semanas de aulas
Vestuário, calçado e acessórios	350€ em cada uma das duas épocas de saldo num shopping outlet
Telecomunicações	Mensalidade de 12,49€
Despesas com o carro	IUC: 30€ Seguro: 35€ pago trimestralmente Inspeção: 32€ Combustível: 20€ por mês
Ginásio	15€ mensalmente ou 150€ anualmente pago no ato de inscrição
Festivais	250€ para os festivais de verão
Outras atividades de lazer	Restante

QUESTÕES PARA A ANÁLISE DO PERFIL FINANCEIRO DO RICARDO:

1. Qual é o valor das despesas mensais do Ricardo? A mesada é suficiente para fazer face às suas despesas?
2. O valor da propina é igual se ele pagar em 3 prestações ou no ato de matrícula? Caso exista desconto, qual a percentagem do desconto?
3. Em relação ao ginásio, em que circunstâncias é preferível pagar mensalmente do que anualmente?
4. Quanto é que lhe sobra para as outras atividades de lazer?
5. Qual é a tua opinião acerca do perfil financeiro do Ricardo? Parece-te que ele tem uma gestão financeira equilibrada?
6. Que sugestões lhe darias?

QUESTÃO FINAL:

Qual é o perfil financeiro com que mais te identificas? Porquê?

Caso ainda não tenhas de gerir o teu dinheiro, o que aprendeste nesta tarefa que te poderá ajudar no teu futuro?

A caminho de Viseu para o ... XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática

Nélia Amado
Alessandro Ribeiro

Em 2017, ano oficial para visitar Viseu, esta cidade preparou-se para receber calorosamente, nos dias 9 e 10 de abril, os participantes do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática.

À semelhança do que tem sucedido nos últimos anos, o programa do SIEM foi aberto aos participantes do *ProfMat* possibilitando assim uma maior divulgação, partilha e discussão da investigação em Educação Matemática entre professores e investigadores.

O programa deste seminário contou com duas excelentes Conferências Plenárias, a primeira proferida por Sílvia Semana, intitulada *Desenvolvimento da autorregulação da aprendizagem dos alunos em matemática: possibilidades e desafios para a prática do professor*. Esta conferência teve por base o trabalho de doutoramento da autora que procurou compreender a prática avaliativa de uma professora centrada na promoção da autorregulação da aprendizagem dos alunos em matemática. Foi apresentada uma intervenção de ensino concebida e planificada num contexto de trabalho colaborativo que envolveu professores de matemática do 3.º ciclo do ensino básico e a investigadora. O estudo relatado contemplou a análise da prática de uma professora no que se refere às estratégias adotadas para a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos e à realização de autoavaliação dos alunos através da escrita.

No segundo dia, e numa sessão partilhada com o programa do *ProfMat*, Maria João Horta apresentou a conferência intitulada *Educação e inovação: preparando as nossas crianças e os nossos jovens para uma sociedade da informação e do conhecimento – desafios pedagógicos.* Nesta conferência foram apresentadas e discutidas algumas questões atuais em torno das competências para o século XXI, tais como: *Quais os desafios que se colocam à Educação, à Escola e aos Professores do século XXI, numa sociedade global? Como inovar em educação e como educar para a inovação? Qual o perfil do aluno no final dos atuais 12 anos de escolaridade obrigatória? Qual o papel das tecnologias enquanto alavancas da inovação em educação?*

O terceiro momento plenário neste SIEM/*ProfMat* ocorreu com um painel moderado por Isabel Vale que contou com a participação de Susana Carreira, Teresa Pimentel e Sandra Pinheiro. Neste painel foi discutida a importância de desenvolver o potencial criativo dos jovens, considerando que a criatividade é fundamental para enfrentar os desafios sociais e tecnológicos emergentes. Segundo as participantes deste painel, estimular o desenvolvimento da criatividade envolve utilizar tarefas e criar um clima que permita aos estudantes produzir muitas ideias diferentes sobre um mesmo assunto (fluência), mostrar capacidade de alterar o modo de pensar (flexibilidade), permitir apresentar respostas incomuns ou menos frequentes (originalidade) e apresentar grande quantidade de detalhes acerca de uma ideia (elaboração). Com base nestes pressupostos, defende-se que a criatividade é uma das facetas da experiência matemática a vivenciar por todos os estudantes. As três intervenientes neste painel ofereceram uma visão que refletiu diferentes experiências e contextos favoráveis ao desenvolvimento da criatividade matemática de alunos de vários níveis de ensino.

Como habitualmente, o SIEM contou com simpósios de comunicações, tendo sido realizados três simpósios que reuniram 25 comunicações.

Os trabalhos apresentados nos Simpósios debruçaram-se sobre investigações em múltiplas temáticas e contemplaram diferentes perspetivas teóricas e metodológicas. Foram apresentados vários estudos relacionados com o desenvolvimento profissional dos professores e aspetos do conhecimento matemático, didático e/ou curricular, quer na formação inicial, quer na contínua. Os temas da resolução de problemas e da comunicação matemática estiveram presentes em diversas comunicações relacionadas com a aprendizagem, bem como o ensino exploratório mediado pelas tecnologias. Surgiram ainda estudos sobre: a Educação Financeira nas escolas; a criatividade matemática em contextos fora da sala de aula; a Etnomatemática; a modelação matemática; os aspetos afetivos na aprendizagem da matemática; e a forma como o humor pode ser encarado na matemática escolar.

O programa do SIEM contou ainda com a apresentação de três posters.

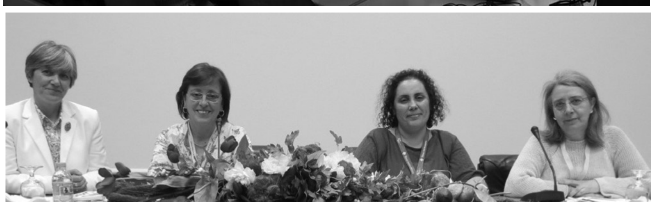
Antes da sessão de encerramento, teve lugar um espaço dedicado ao Grupo de Trabalho sobre Investigação – GTI, onde Helena Martinho apresentou o último livro produzido neste grupo de trabalho, com o título *A Prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula.*

É ainda de destacar o convívio que se registou ao longo destes dias e toda a componente social do SIEM que ficou bem patente no magnífico jantar do encontro.

Deixamos, por fim, uma saudação muito especial à Comissão Organizadora pela dedicação e empenho que colocou na organização do XXVIII SIEM.

Nélia Amado
Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Alessandro Ribeiro
Universidade Federal do ABC e Instituto de Educação, Universidade de Lisboa



O meu ProfMat de Viseu

Sandra Duarte

Pela segunda vez vim ao *ProfMat* em grupo. A primeira vez que participei num *ProfMat* foi em Guimarães em 1999 com as minhas colegas de estágio e com o nosso orientador de estágio. Passaram desde então 17 ProfMat's. Lembro-me do nosso entusiasmo com tudo o que estávamos a viver nesse encontro. As coisas novas que aprendemos e a oportunidade que tivemos em executar tarefas com a calculadora gráfica. No meu caso (e das minhas colegas de estágio) nunca tinha trabalhado com calculadoras (muito menos gráficas) e tínhamos a nosso cargo turmas do 10.º ano onde iríamos ensinar funções polinomiais e tínhamos que usar a calculadora gráfica. Aliás, foi nesse *ProfMat* que comprei a minha velhinha TI 83 (que ainda hoje tenho e uso). Entretanto estive em muitas escolas e em diferentes regiões do país. Faço parte da geração de professores de matemática que apenas efetivou após vários anos ao da conclusão da licenciatura, num QZP longe de casa. Tive vários contratos, em escolas muito diferentes e com alunos muito distintos. Aliás, cheguei a ter mais do que um contrato num mesmo ano letivo. Conheci escolas inseridas em meio rural, em meio urbano e em meio suburbano, com culturas escolares muito distintas. Durante estes 18 anos de docência fui professora do ensino regular (3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário), ensino recorrente e do ensino profissional. Passei por diferentes governos e ministros da educação. Comecei com aulas de 50 minutos, passei por aulas de blocos de 90 minutos, para aulas de 50 minutos e 100 minutos. Penso que já vou no 4.º programa curricular de matemática desde que comecei a dar aulas. Estive em escolas onde havia muita discussão sobre qual deve ser o papel da escola, e passei por outras mais apáticas, onde o silêncio e o medo de se dizer o que se pensa imperam. Estive em escolas onde me senti integrada e envolvida no trabalho do grupo de professores de matemática e pelo conjunto de professores da escola, e outras onde me senti sozinha e isolada, onde me limitei a fazer o meu papel de professora (e neste caso, o meu papel era apenas dar aulas de matemática aos alunos). Nestes 18 anos, houve *ProfMat* a que não fui por diferentes razões: viagem/estadia dispendiosa, maternidade, filhos pequenos, entre outros. No entanto, há dois anos atrás senti uma necessidade enorme de ir a Évora ouvir, pensar, refletir e trocar ideias com colegas de matemática, com experiências diferentes da minha, sobre o ensino da matemática, metodologias e sobre o novo programa e metas curriculares. Nessa altura era a única professora de matemática numa escola profissional com cursos que dão equivalência ao ensino secundário. Para além de perceber que aqueles currículos (propostos para o ensino profissional) não servem para aqueles alunos (opinião partilhada não só pelos alunos, como também pelos professores das outras disciplinas) eu não tinha ninguém com quem conversar sobre o novo programa e metas curriculares que apenas conhecia dos documentos da página do Ministério da Educação. Na altura, não tinha experiência nos novos programas, nem tinha perto de mim professores que estavam ou tivessem estado a lecionar os programas com as metas curriculares definidas pelo ministério do Nuno Crato. Sofria, portanto, de um grande isolamento que me estava a arredar de uma tomada de consciência sobre o que realmente estava a acontecer nas nossas escolas. Apenas tinha acesso aos relatos e às posições que certos professores ou grupos de professores iam tomando publicamente. Sentia-me a definhar como professora e como cidadã, pois sentia que tinha algum desconhecimento de causa para elaborar uma tomada de posição refletida acerca das mais recentes reformas educativas. Por estes motivos resolvi então inscrever-me e participar nesse *ProfMat* de Évora. Recordo da sessão de abertura do cante alentejano e da força que aquele coletivo de vozes (e apenas vozes) tem. Recordo, também, o reencontro com colegas que há muitos anos não via e da desilusão que senti quando verifiquei o número reduzido de participantes (tinha como referência encontros onde havia pelo menos 1500 participantes). Seria o reflexo do nosso desânimo como classe profissional que justificava esse número de participantes? A verdade é que há mais ou menos 10 anos temos vindo a ser muito mal tratados pelos nossos ministros. Fomos acusados de preguiçosos, de maus profissionais e de sermos os responsáveis por tudo o que de mal acontece no nosso país. Maria de Lurdes Rodrigues chegou a afirmar que perdeu os professores mas ganhou a opinião pública, apostou numa organização da carreira docente diferente (onde haveria uma classe especial de professores) e alterou a forma de gestão das escolas. Perdemos, assim, uma caraterística que nos diferenciava de outros sistemas de ensino europeus e também (e mais importante) a relevância que a nossa opinião tinha na organização das escolas onde trabalhávamos. As decisões deixaram de ser discutidas nos grupos disciplinares e passaram a ser-nos comunicadas em mega ajuntamentos de professores em reuniões de departamento. Os diretores tomaram o lugar dos conselhos diretivos e passaram a ter uma carreira distinta com poderes para fazer quase tudo. Claro que estas mudanças alteraram (e muito) a nossa forma de estar nas escolas. Ficámos mais limitados na nossa ação enquanto professores e na nossa forma de sentir a nossa escola como algo a que nós pertencemos e que também nos pertence. A tudo isto, ainda se juntaram horas inúteis passadas nas escolas a fazer coisas que nós não percebíamos muito bem para que serviam. Mas sentíamo-nos mais cansados, mais desanimados e com menos voz e menos capacidade interventiva na organização das nossas escolas. Será que ficámos mais individualistas nas escolas? Mais atomizados? Será por isso que participámos menos em encontros? Estas foram algumas das reflexões que fui fazendo durante o *ProfMat* de Évora …

E passados dois anos, eis que volto aos encontros de professores de matemática, agora em Viseu e inserida num grupo de cinco professoras da escola onde me encontro atualmente e onde já tinha estado há uns anos atrás. No ano letivo anterior, algumas das professoras desta escola combinaram que, independentemente, da escola onde estivéssemos no presente ano letivo, nos encontraríamos em abril, na bonita cidade de Viseu, para participarmos no encontro de professores de matemática. Começámos a organizar a nossa ida a Viseu, no ano passado. E assim, este ano quatro dessas professoras, cá se encontraram em Viseu (curiosamente continuamos todos na mesma escola) e ainda se juntou a nós uma colega que pela primeira vez se encontra a lecionar na nossa escola. Fomos em grupo, mas participámos em sessões diferentes. Fizemos a nossa seleção com base nas nossas necessidades. Eu procurei essencialmente temáticas relacionadas com os novos programas do ensino secundário (e que alívio foi perceber que havia mais colegas que se encontram em situações idênticas à minha/à da nossa escola), e com metodologias a usar no 1.º ciclo. Neste momento, estas são áreas onde eu sinto uma grande necessidade de partilha e de reflexão conjunta. Por um lado, porque pela segunda vez me encontro a leccionar o 10.º ano e também tenho o 11.º ano. Não vou cumprir os programas (o que confesso, me estava a angustiar muito), sinto que dou as aulas a correr e que os alunos não dispõem de tempo para apreender o que é ensinado. Por outro lado, preciso de perceber melhor como trabalhar conceitos matemáticos ao nível do 1.º ciclo porque no meu agrupamento existe um projeto de coadjuvação em algumas horas de matemática nas turmas dos terceiros anos e eu sou uma das professoras coadjuvantes. Apesar da minha formação inicial me habilitar para lecionar matemática a alunos do 3.º ciclo do ensino básico e alunos do ensino secundário, durante este ano letivo tenho trabalhado também com alunos do 1.º ciclo. Para mim tudo é diferente daquilo a que estou habituada: a idade dos alunos é diferente, a maturidade deles também, as relações que se criam entre nós são distintas e de repente passamos a ter alunos que ficam muito contentes sempre que nos veem e que nos dizem "é a melhor professora de matemática que eu conheço". Tudo isto alimenta o nosso ego (e como ele precisa de ser mimado…) e é muito estimulante e desafiador. Como explicar a alunos de 8 anos de idade o que é uma fração, como se adicionam números fracionários, como se representam estes números? Tem sido um trabalho feito em coletivo (com outra colega do 3.ºciclo/secundário e com os professores do 1.º ciclo) que me permitiu refletir sobre elementos básicos (no sentido de basilares) da matemática e que me fez olhar para o 1.º ciclo com outros olhos. Encontro-me, portanto, num momento de descoberta partilhada e sinto-me crescer como professora e como pessoa. Este *ProfMat* de Viseu permitiu-me ir buscar mais informação, mais saber, outras experiências e reflexões de quem tem vindo a trabalhar com estes grupos e que teve a bondade e gentileza de partilhar com os outros colegas o que tem andado a fazer e o que pensa sobre isso. Assisti às conferências plenárias onde tive oportunidade de conhecer novas ideias e projetos e pensar em como adaptá-los às minhas realidades, nomeadamente na conferência plenária "Let's MatDance! – pela exploração de conexões entre a matemática e a dança" e no painel plenário "Criatividade em matemática – diferentes cenários, diferentes desafios". Também estive presente nas conferências plenárias "Curvas e instrumentos para as traçar" e "A avaliação formativa e a diferenciação pedagógica em matemática: uma relação incontornável", onde me foi dada a oportunidade de ficar a conhecer mais aprofundadamente conceitos e aspetos relacionados com os temas tratados e, desta forma, contribuir para um amadurecimento do meu conhecimento sobre os mesmos. Destaco, ainda, a minha participação nas mesas redondas "Números Racionais: Desafios para ensinar, desafios para aprender" e "O currículo da matemática no Secundário", onde tive a oportunidade de ouvir os relatos, as experiências e as opiniões não só dos dinamizadores mas também dos participantes que, tal como eu, estão nas escolas a aplicar e a trabalhar com os alunos estes novos programas e metas. E este é um dos aspetos que mais me agrada nestes encontros, é que é feito para professores e por professores. Sinto-me grata a todos aqueles que dispuseram do seu tempo para comigo refletirem e partilharem as suas experiências. Acrescentaram muito em mim, não só conhecimento, mas também entusiasmo e força. É desta forma que saio de Viseu e com muita vontade de para o ano voltar a Almada e de preferência com este grupo, independentemente da escola onde nos encontrarmos no próximo ano letivo.

Sandra Duarte
Agrupamento de Escolas Nuno Gonçalves, Lisboa

Os 30 anos de edição da revista Educação e Matemática serão assinalados durante este ano de 2017 com uma secção especial que iniciou na revista anterior, nº 141. Contámos com o testemunho de Ana Paula Canavarro, diretora e redatora durante vários anos. Neste número continuamos com o depoimento de Isabel Rocha, também diretora e redatora da revista e ainda com o contributo de um anterior redator, Fernando Nunes. Ao longo dos 30 anos muitos testemunhos e artigos deixam saudades e continuamos a encontrar atualidade em muito do que foi publicado. Ao Fernando Nunes, solicitámos uma "revisita" a textos publicados há tempo, não um regresso ao passado, mas um reencontro de sentidos e significados. A ambos agradecemos os contributos que dão conteúdo à secção especial 30 anos da Educação Matemática deste número.

Nos 30 anos da *Educação e Matemática*

Isabel Rocha

Entrei para a redação da revista Educação e Matemática no último trimestre de 2001 (há quase 17 anos …), na sequência de um convite feito no ProfMat de Vila Real.

Neste ano, em que a revista completa 30 anos, a redação entendeu dar continuidade à reflexão feita por ex diretores/redatores, aquando da comemoração dos 20 anos e assim, no último número da revista pudemos ler a reflexão da Ana Paula Canavarro que foi redatora da revista durante vinte anos e diretora num período de seis anos, a quem sucedi, como diretora no biénio 2010/2012 e antecedendo a nossa atual diretora Lina Brunheira.

E chegamos ao "drama" deste depoimento: que posso eu acrescentar ao brilhante e completo depoimento da APC? Amar/escrever pelas duas!

A REFLEXÃO PESSOAL SOBRE A MINHA PRÁTICA DE REDATORA E DIRETORA

O que me levou a aceitar colaborar na redação da revista? Será que pensei se tinha perfil adequado para tal tarefa? E qual é o perfil adequado para se pertencer à redação de uma revista de e para professores? Provavelmente, se tivesse refletido muito sobre estas questões não teria aceite o convite com o entusiasmo e a curiosidade que senti. Mais um desafio? Sim e também porque é difícil resistir à parceria Isabel Rocha/Manuela Pires visto que o convite também foi dirigido à Manuela Pires na tentativa de ter redatores fora da grande Lisboa. Hoje, não só o centro do país, mas também o norte está com grande representação.

Mas porquê curiosidade, entusiasmo?

Desde que me tornei sócia da APM (em 1989) que sentia a revista Educação e Matemática como o rosto mais visível, mais presente da APM (apesar de todos os rostos dos ProfMats) porque me entrava em casa de dois em dois meses, me acompanhava para quase todo o lado, seja na secretária de trabalho, no sofá, na escola (reuniões de grupo disciplinar, na sala de aula, na formação de professores, …) porque me ajudava a refletir sobre os desafios da educação matemática, porque trazia um artigo que estimularia a discutir determinado tema na reunião do grupo disciplinar, porque trazia uma experiência de sala de aula à volta de uma tarefa ou de um material que constituía um bom caso para a formação de professores, etc, etc.

Ora serem professores, sócios da APM (como eu??, como tu) e não profissionais da comunicação social, a colaborarem, a trabalharem arduamente para colocar a revista de pé, tornavam-os, aos meus olhos, um grupo de exceção, merecedores da minha admiração.

E, por isso, me senti entusiasmada, curiosa e até orgulhosa de ir pertencer a tal grupo e poder dar o meu contributo para que a revista, além de ser para mim, como tinha acontecido até esse momento, também fosse minha, no sentido da questão com que a Ana Paula termina a sua reflexão.

Integrei a redação na tal fase de "semi-profissionalismo" da edição da revista, com o apoio de uma estrutura da APM, o gabinete de edição. Existia toda uma dinâmica de trabalho coletivo em grande e pequeno grupo que procurei manter durante o período como diretora assumindo essencialmente o papel de coordenação da equipa.

Destaco o desafio da comunicação on-line, também estimulado pela institucionalização do @-sócio da APM, a partir de 2006. Relembro o esforço para colocar todas as revistas on-line no formato idêntico à versão em papel, com a possibilidade de pesquisar por ano, por palavras, por autor ou secção. Os sócios podem aceder a todos os artigos da *Educação e Matemática* e alguns dos textos, de cada um dos números, também estão disponíveis para não sócios.

O próprio processo de revisão dos artigos, continuando a ser feito a pares, passou a dispor de uma plataforma, que permite a todos os redatores terem acesso ao estado da revisão, se o artigo está pronto para publicação, se aguarda reformulação ou se é proposto para rejeição por algum dos revisores. Neste caso todos os redatores farão a revisão do artigo e inserem o seu comentário. Este é um processo que ainda precisa de alguma melhoria mas que tem sido facilitador da comunicação on-line entre os redatores. Mas para alimentar este processo precisamos de artigos, precisamos como diz a Ana Paula, de "uma dinâmica de conresponsabilização pela manutenção de uma ferramenta vital da vida associativa onde se espera que cada um coloque a sua parte".

Que nos sirvam de inspiração, com as necessárias adaptações, as palavras de uma profissional da comunicação social que muito prezo (Lúcia Crespo, também editora de um suplemento no Jornal de Negócios):

> ser jornalista implica tentar ver o que geralmente não se vê, implica encontrar ângulos diferentes sobre a realidade. Implica encontrar várias realidades, uma vez que não existe apenas uma realidade. E essas diferentes realidades encontram-se, sobretudo, junto das pessoas, junto dos seus diversos olhares. E, por isso, um bom trabalho jornalístico deve cruzar várias perspetivas, diferentes pontos de vista. (…) Na prática, quem edita tem de estar atento às notícias dos outros jornais e, sobretudo, deve estar desperto para aquilo que vai observando nas ruas. Deve saber tomar o pulso às diferentes realidades e ir anotando ideias para potenciais artigos. Depois, fala com os seus jornalistas, discute ângulos de abordagem, sugere especialistas de diferentes áreas para entrevistar (…)

Não é uma parte desta atitude que temos na sala de aula e na escola, observar, refletir, anotar... e bem! Ora vamos lá escrever para a *Educação e Matemática.*

Isabel Rocha

Um olhar subjetivo e sumário sobre o que foi, o que é e como poderá ser

Fernando Nunes

Quando alguém pediu para comentar algo saído na Educação e Matemática, apenas com a condição de ter sido publicado há alguns anos, de modo a poder servir a quem não viveu a vida associativa nessa altura, o primeiro problema que se me colocou foi exatamente o da escolha. Relativamente ao texto da revista, as hipóteses são muitas. E cada um dos casos pode apresentar uma série de alternativas, relativamente à perspetiva adotada na análise, aos aspetos enfatizados ou ao estilo de escrita. Depois de pensar e de pesar as diversas opções, decidi optar por um texto que tivesse a ver diretamente com a vida da Associação de Professores de Matemática (APM ou Associação), tentando informar sobre o passado, exprimir-me quanto ao presente e perspetivar um futuro.

Em outubro de 1986, a primeira Direção da recém-criada APM escreveu uma comunicação endereçada aos professores de Matemática. O conteúdo foi publicado na contracapa do primeiro número da Educação e Matemática, publicada em janeiro de 1987.

Nos dois primeiros parágrafos informa-se sobre a criação da APM, em Portalegre, que foi fruto de um grande apoio.

No parágrafo seguinte, carateriza-se o estado do ensino e aprendizagem da matemática e o sentimento dos professores.

São identificadas razões que justificam o aparecimento de um movimento organizado para enfrentar as dificuldades sentidas:

> O Ensino da Matemática tem vivido no nosso país em situação de crise permanente. O insucesso na nossa disciplina atinge níveis preocupantes. Uma grande maioria de alunos não gosta de Matemática, não compreende para que serve estudar Matemática. Nós, professores, estamos igualmente descontentes, não sabemos como interessar os nossos alunos, temos que cumprir programas demasiado grandes, rígidos e abstractos. Além disso, sentimo-nos isolados uns dos outros, não partilhamos as nossas dificuldades, nem as nossas ideias, nem as nossas experiências.
>
> O Ensino da Matemática, nas nossas escolas, parece de facto desfasado das necessidades quer individuais quer sociais do nosso tempo. Entretanto, nem os currículos e programas, nem a maneira de ensinar e aprender Matemática, sofreram alterações significativas na última década. Os alunos continuam a ter um papel essencialmente passivo na sua própria aprendizagem.

No penúltimo parágrafo da comunicação, a Direção assegura que "nenhum processo de renovação do ensino terá êxito se não contar com um forte envolvimento dos professores" e que a Associação "pretende ser um movimento que baseie a sua actividade na iniciativa e na criatividade dos professores dos mais diversos pontos do pais e de todos os graus de ensino". No final do documento, depois de se inventariar o que já foi realizado no âmbito do trabalho da Associação, afirma-se que

> A A. P. M. existe e será o que todos quisermos. Trata-se de uma aposta difícil mas que vale a pena fazer. Se ela for ganha, então temos boas razões para acreditar que os professores de Matemática poderão desempenhar um papel decisivo na renovação da Educação Matemática em Portugal.

O entusiasmo que rodeou a criação da APM foi-se alargando nos anos seguintes e permitiu que a Associação fosse crescendo, atingindo, em termos de número de sócios e respetiva atividade, um nível muito considerável, o que viabilizou uma cooperação forte no seio dos professores da disciplina. Os núcleos regionais foram crescendo e cimentando a sua organização, criaram-se grupos de trabalho, o encontro anual (ProfMat) tornou-se obrigatório e chegou a ser um dos maiores encontros nacionais de professores em Portugal. A APM cooperou com várias organizações, públicas e privadas, editou inúmeras publicações, com autoria de sócios e de não sócios, disponibilizou materiais, construiu exposições, organizou encontros regionais, nacionais e internacionais, promoveu a formação contínua de professores e, principalmente, assumiu-se como uma plataforma em que os professores de matemática se podiam encontrar, viabilizando uma atividade conjunta e sustentada que pudesse ajudar o seu enriquecimento.

Quando se compara a descrição, realizada em 1985 pela Direção da Associação, e as razões invocadas para a oportunidade da criação da APM com o estado das coisas no momento em que escrevo, não é difícil encontrar diferenças mas também parece ser evidente a permanência de situações não desejáveis que teimosamente se mantêm presentes na realidade do sistema educativo. Por exemplo, pelo lado das diferenças, toda a história decorrida de realizações conjuntas, associativas ou outras, modificou o isolamento então sentido pelos professores. Quanto às semelhanças, para citar apenas uma, os programas de Matemática "grandes, rígidos e abstractos" são hoje extensos, inadaptáveis e demasiado formais, tendo em vista aqueles a quem se dirigem de forma mediata, os alunos, e de forma imediata, os professores de matemática.

Trinta anos passados, depois de muitos acontecimentos e de se terem atravessado períodos diferentes, o projeto da APM avançou, mas ainda não chegou a um estádio onde se procure que as aprendizagens tenham significado para todos os alunos, sendo eles considerados com potencial para ter sucesso em matemática. A atual conjuntura mostra-se diferente da que existiu há bem pouco tempo, e continuará a evoluir. Embora haja questões e áreas essenciais da política educativa que não são diretamente decididas pelos professores, não será uma quimera acreditar que os governantes não são imunes a serem influenciados, levando em linha de conta o que os professores e as suas organizações defendem. Como existe uma variedade grande de opiniões e teses, algumas complementares, outras opostas, parece ser importante que a argumentação e a defesa dessas teses seja cuidadosamente refletida e apresentada, recolhendo, e integrando, as contribuições do maior número possível de interessados.

A APM tem sido uma plataforma que pode ser utilizada por qualquer professor que se disponha a contribuir com o que pensa ser pertinente, para a discussão e clarificação dos temas que interessam a quem se preocupa com o ensino e a aprendizagem da matemática. Cada professor deve sentir-se livre para exprimir opiniões, questionar, apoiar, enriquecer, cooperar, esclarecer e ser esclarecido, integrar perspetivas diferentes e preservar a sua autonomia e independência. Acredito que a existência destas situações é uma garantia do futuro da Associação da Professores de Matemática.

Fernando Nunes

Moreirinhas Pinheiro (1923-2017), uma vida de Professor

Rui Candeias

Em janeiro de 2007, num artigo da revista Politecnia, do Instituto Politécnio de Lisboa, Vanessa Glória (Glória, 2007) apresentava Moreirinhas Pinheiro[1] como "guardador de livros e de sonhos", pelo trabalho desempenhado por este Professor na preservação do arquivo da Escola Superior de Educação de Lisboa (ESELx). Esta foi uma função desempenhada por Moreirinhas Pinheiro após 1988, aquando da formação da ESELx, e que este continuou a desempenhar após a sua aposentação, em 1993. Para trás tinha ficado uma "vida dedicada à educação", recordando aqui o título da exposição de homenagem a Moreirinhas Pinheiro, inaugurada em 16 de dezembro de 2015, na ESELx[2].

José Eduardo Moreirinhas Pinheiro nasceu em Coimbra, a 20 de agosto de 1923, e faleceu em Lisboa, a 16 de fevereiro de 2017. Fez os seus estudos em Coimbra, tendo terminado o 7.º ano do Curso Complementar de Letras no Liceu Nacional de D. João III, em 1944. Dois anos depois concluiu o curso da Escola do Magistério Primário de Coimbra, para o exercício do magistério primário. De 1946 a 1958 exerceu o magistério em diversas escolas, tanto na zona de Coimbra, como na Figueira da Foz. Em 1953 terminou o curso de Ciências Pedagógicas na Universidade de Coimbra e em 1954 foi nomeado professor efetivo da Escola Masculina Conde Ferreira e delegado escolar no concelho da Figueira da Foz (Ferreira, 2016).

Em 1958 Moreirinhas Pinheiro veio para Lisboa, em consequência da nomeação para professor interino das disciplinas de Didática Especial e Administração Escolares, na Escola do Magistério Primário de Lisboa (EMPL). O que no início foi uma substituição temporária do professor Orbelino Geraldes Ferreira, tornou-se efetiva em 1965. Para efetivar como professor de Didática Especial na EMPL, Moreirinhas Pinheiro prestou provas públicas, práticas e teóricas, num modelo utilizado a nível nacional (Ferreira, 2016).

Em 1975, passou a reger as cadeiras de Introdução à Pedagogia e de Didática Geral, nos cursos especiais para regentes. Em 1976, e até 1977, assumiu o cargo de diretor da EMPL, tendo lecionado, a partir desse ano letivo, a cadeira de Metodologia. Esteve envolvido no processo de conversão da EMPL em ESELx. Já em 1988, foi integrado nos quadros da ESELx, na secção dos reservados do Centro de Documentação e Informação. Aposentou-se em 1993, tendo dedicado os últimos anos da sua carreira ao estudo e divulgação da história da educação em Portugal, designadamente, a história da formação de professores (Ferreira, 2016).

Da sua ampla produção científica, onde se incluem obras sobre pedagogia e didática; história da educação; história, cultura e literatura; memórias; poesia e outras edições, destacamos um título dedicado à didática. A obra *Introdução ao Estudo da Didática Especial: para uso dos alunos-mestres das escolas do magistério*[3] teve uma primeira edição datada

1 Exposição intitulada "Professor José Eduardo Moreirinhas Pinheiro: uma vida dedicada à educação" organizada por Antónia Estrela, Bianor Valente, Rui Covelo e Nuno Ferreira, no âmbito da comemoração dos 100 anos do lançamento da primeira pedra do edifício principal da ESELx (Ferreira, 2016).

2 As fotografias de Moreirinhas Pinheiro utilizadas no presente texto foram retiradas da Comunicação "Professor José Eduardo Moreirinhas Pinheiro: uma vida dedicada à educação." proferida por Nuno Martins Ferreira, na ESELx, em 16 de dezembro de 2016.

3 Esta obra surge no âmbito da disciplina de Didáctica Especial criada pelo decreto-lei n.º 32:243. Com este decreto, esta disciplina assume um papel central na formação inicial dos professores do ensino primário. O programa desta disciplina é publicado em janeiro de 1943, no decreto-lei n.º 32:269, sendo destacado o seu caráter prático. Em 1960, com o decreto-lei n.º 43 369, esta disciplina desdobra-se em grupo A e grupo B, sendo o grupo B dedicado à Aritmética e Geometria, Ciências Geográfico-Naturais e Trabalhos Manuais.

de 1960. De acordo com Pintassilgo e Pedro (2012), esta primeira edição terá resultado da iniciativa de alunas e alunos de Moreirinhas Pinheiro, que compilaram apontamentos das suas aulas. A obra teve uma segunda edição em 1961, já com uma revisão mais profunda do autor, que a ampliou. Foi ainda publicada uma terceira edição em 1967, dedicada à Didática Especial A (Língua Portuguesa, História Pátria e Desenho), área em que o autor se especializara (Pintassilgo & Pedro, 2012). Existe ainda uma terceira edição, também datada de 1967, dedicada à Didática Especial B (Aritmética, Ciências Geográfico-Naturais e Trabalhos Manuais) que, embora esteja completa, não terá chegado a ser publicada, contendo um capítulo manuscrito por Moreirinhas Pinheiro sobre a Matemática Moderna, o que mostra o seu interesse pelo desenvolvimento do ensino nas diferentes disciplinas.

A obra *Introdução ao Estudo da Didática Especial: para uso dos alunos-mestres das escolas do magistério* apresenta um capítulo dedicado à didática da aritmética e outro dedicado à didática da geometria. No capítulo dedicado à didática da aritmética, Moreirinhas Pinheiro (1961) destaca os propósitos do que entende que seria um bom ensino da aritmética: racional, progressivo, prático, regional, ativo e intuitivo. Nestes propósitos do ensino da aritmética destaca-se o caráter prático, ativo e intuitivo. Estes propósitos estão muito ligados aos métodos modernos e às correntes renovadoras, que consideram que a observação tem um papel essencial na aprendizagem, nomeadamente nas ciências. Para Moreirinhas Pinheiro (1961) o ensino da Aritmética deveria ser prático porque "os assuntos práticos da vida corrente serão o mundo concreto a que nos devemos reportar para orientar o ensino" (p. 56). A atividade da criança também é destacada por Moreirinhas Pinheiro (1961) no sentido de ela "colaborar diretamente na lição que lhe está a ser ministrada" No que diz respeito à importância da intuição no ensino e na aprendizagem, Moreirinhas Pinheiro (1961) destaca que "a criança só aprende bem o que cai sob o seu domínio sensorial. Deve, pois, o mestre recorrer à concretização frequente. A intuição leva o aluno a uma rápida perceção" (p. 56). O interesse da criança, outro tema tão destacado nas ideias pedagógicas inovadoras ao longo do século XX, é também destacado por Moreirinhas Pinheiro (1961) no ensino da Aritmética, afirmando que "as correntes modernas deste ensino tendem para a utilização de processos globalizadores, orientados para os interesses e para a atividade lúdica da criança" (p. 55).

Para Moreirinhas Pinheiro (1961), o ensino da Aritmética também deveria contribuir para o desenvolvimento integral do indivíduo, desenvolvendo nos alunos "o sentimento moral e despertar-lhes as faculdades de memória, de juízo e de raciocínio" (p. 57), levando ainda ao desenvolvimento de bons hábitos como a "perseverança, ordem, limpeza, cautela, simplicidade, exatidão, clareza, etc.." (p. 57).

Moreirinhas Pinheiro foi um professor que nos deixou no início deste ano e que permaneceu ligado à educação e à formação de professores durante várias décadas. Mesmo já depois da sua aposentação, em 1993, continuou ligado ao Arquivo Histórico da ESELx, onde, para além de desempenhar um importante papel na preservação do espólio documental da instituição (Glória, 2006), acompanhou diversos investigadores sempre com uma enorme disponibilidade. Nas palavras de Ferreira (2016) "o seu nome é figura incontornável da história da educação portuguesa, nomeadamente da história da formação de professores." (p. 109). Ferreira (2016) defende que está por realizar um trabalho biográfico dedicado à figura deste educador, tendo em conta o seu trajeto profissional e a longa ligação que manteve com as instituições educativas.

O presente texto é uma singela homenagem à sua memória.

Referências

Ferreira, N. (2016) Professor José Eduardo Moreirinhas Pinheiro (1923-2017): um percurso biobibliográfico, *Da Investigação às Práticas*, 7 (1), 91 – 111.

Glória, V. (2007). O monge de biblioteca. *Politecnia*, ano VII, n.º 14, janeiro, 50-55. Acedido a 5 de maio de 2017 em https://www.ipl.pt/sites/default/files/politecnia_no_14_0.pdf

Glória, V. (2006). Um tesouro no campus de Benfica. *Politecnia*, ano VI, n.º 12, junho, 20-25. Acedido a 5 de maio de 2017 em https://www.ipl.pt/sites/default/files/politecnia_no_12.pdf

Pinheiro, J. (1961). *Introdução ao estudo da Didáctica Especial, para uso dos alunos-mestres das Escolas do Magistério Primário* (2.ª edição, revista e aumentada). Lisboa: Oficinas de S. José.

Pintassilgo, J. & Pedro, L. (2012). *As disciplinas de Didáctica nas Escolas do Magistério Primário. Reflexões em torno do currículo da formação de professores.* Comunicação apresentada ao XIX Colóquio da Secção Portuguesa da AFIRSE – *Revisitar os Estudos Curriculares: onde estamos e para onde vamos?* - realizado entre 2 e 4 de fevereiro de 2012 no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Rui Candeias

Agrupamento de Escolas Terras de Larus, UIED/FCT
Portugal

Uma curva de cada vez...

A espiral equiangular

Eduardo Veloso

A espiral equiangular, também apelidada de *logarítmica*, foi inventada por René Descartes (1596-1650) em 1638 e intensamente estudada uns anos depois pelo matemático suíço Jakob Bernoulli (1655-1795), que lhe chamava *spira mirabilis*. Deveria fazer parte dos temas de geometria sugeridos na escolaridade obrigatória, dadas as suas numerosas e interessantes propriedades e a facilidade do seu estudo com um programa de geometria dinâmica.

As espirais serão construídas nestes artigos – e sugerimos que o sejam pelos alunos – com este tipo de *software*, da seguinte forma [1]:

- um parâmetro t é construído na recta $\overleftrightarrow{01}$ ou na semi-recta $\overrightarrow{01}$;
- t pode ser expresso como um número real (a sua abcissa) ou, se multiplicado por *1 radiano*, como medida de ângulos em radianos;
- a recta s é a imagem de $\overleftrightarrow{01}$ pela rotação de centro 0 e ângulo t radianos;
- desta forma, quando t percorre $\overleftrightarrow{01}$ com movimento uniforme, a semi-recta s roda em torno do ponto 0.

O ponto P que vai traçar a espiral é um ponto que se move sobre a recta s ao mesmo tempo que esta roda em torno de 0. A posição de P sobre a semi-recta s será dada pela sua *distância a 0*, que dependerá do valor da *abcissa de t*.

Recorde o leitor que na *espiral de Arquimedes* o movimento de P dependia *linearmente* de t, ou seja, era dada uma constante positiva k — valor da referida distância para $t=1$ — e depois, para qualquer t, *a* distância de P a 0 seria $k.t$. Ou seja, quando o ângulo da recta s com $\overrightarrow{01}$ variasse de *1* para *2 radianos*, por exemplo, o valor da distância referida passaria de k para $2k$.

No caso da *espiral equiangular*, o que se pretende é que – dito informalmente – o crescimento seja *exponencial* e não *linear*. Ou seja, que *a distância* de P ao ponto 0 seja k^t em lugar de $k.t$.

Construamos, então uma espiral equiangular (fig. 1):

Seja k um número positivo (na figura, $k=1.3$). E seja t um

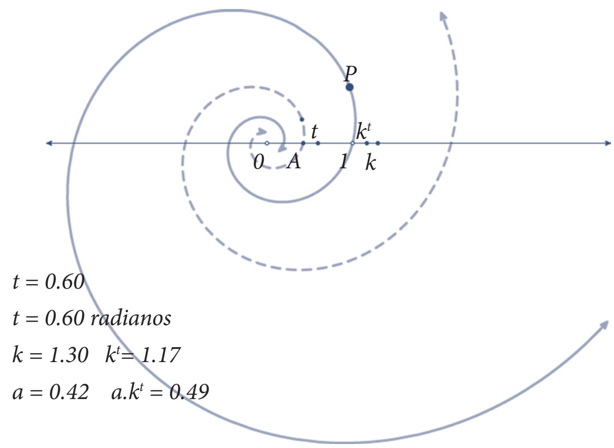


Figura 1

parâmetro em $\overleftrightarrow{01}$ (na figura, $t=.60$ e $t=.60$ *rad*). Construamos o ponto P:

- temos $k^t = 1.3^{.60} = 1.17$ para $t=.60$;
- marcamos o ponto $k^t=1.17$ sobre a semi-recta $\overrightarrow{01}$ (menu *Graph: Plot Value on Axis*);
- efectuamos a rotação (ângulo *.60 rad* e centro 0) do ponto k^t e obtemos o ponto P sobre s (não representada na figura) – será o ponto da espiral correspondente a $t=.60$;
- seleccionamos t e P e traçamos o lugar geométrico de P

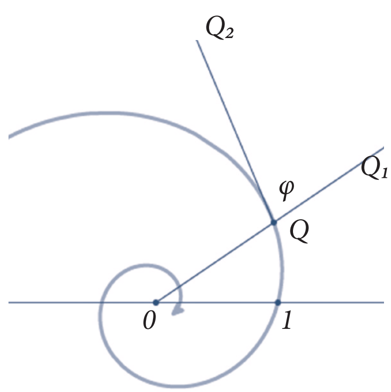


Figura 2

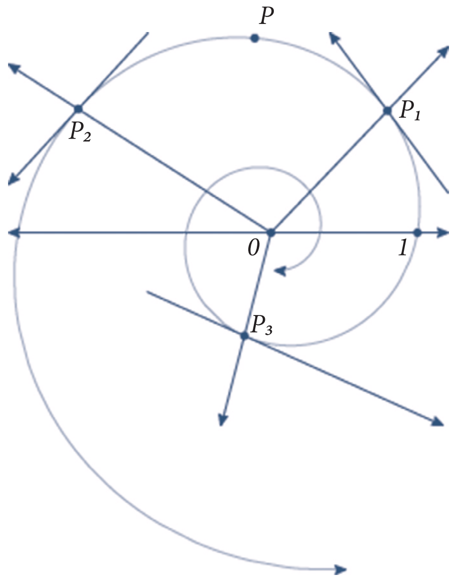


Figura 3

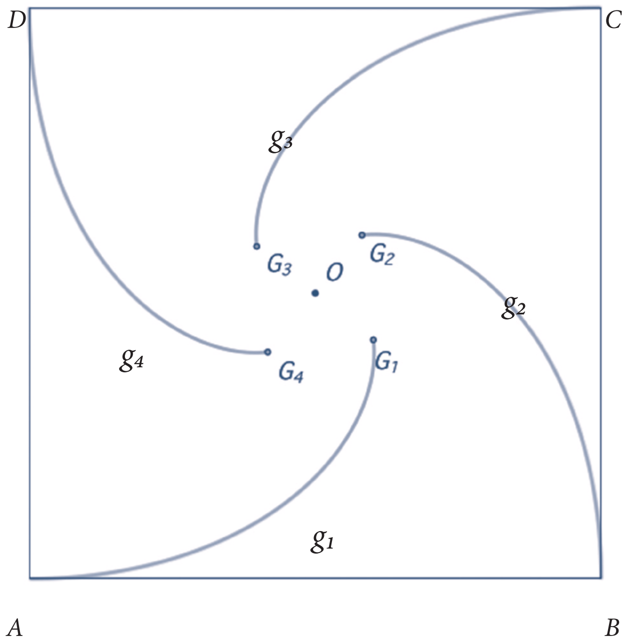


Figura 4

quando t percorre a recta $\overleftrightarrow{01}$ (*Menu Construct:Locus*). Obtemos desta forma a espiral equiangular para o valor de $k=1.3$. Naturalmente, como para $t=0$ o valor de k^t é *1*, a espiral passa pelo ponto *1*. Obtemos uma espiral "paralela" (a tracejado, na figura) passando pelo ponto A (abcissa a=0.42 na figura) se, na construção anterior, substituirmos k^t por a.kt. Veja, no site de apoio a este artigo, o vídeo *equi_1.mov.2*

DONDE PROVÉM O NOME "EQUIANGULAR"?

O nome *equiangular* refere-se a uma *propriedade característica deste tipo de espiral.* Considere um ponto qualquer da espiral – seja Q – e o ângulo ϕ (fig. 2) entre a semi-recta $0Q_1$ e a semi-recta QQ_2 tangente à espiral no ponto Q. Pode demonstrar-se —recorrendo à análise matemática, o que está fora do âmbito deste artigo e certamente fora do âmbito da matemática na escolaridade obrigatória — que *o ângulo ϕ é constante para qualquer ponto Q da espiral.*

Como estamos no séc. XXI, temos acesso a programas de geometria dinâmica — *e isso devia acontecer com os alunos da escolaridade obrigatória!*

Veremos em seguida como uma simples construção mostra claramente essa propriedade da equiangular.

A demonstração pela análise de que o ângulo ϕ é constante pode encontrar-se, por exemplo, no livro *Introduction to Geometry de Coxeter*[3]. Como o leitor pode concluir, dado o modo como construímos a espiral, se o ângulo é constante, então deve estar directamente relacionado com a constante k escolhida. Na realidade, o que Coxeter demonstra é que

$$\phi = \arctan(1/\ln k) \quad \text{ou} \quad k = e \cot \phi$$

Suponhamos então que pretendíamos *mostrar* a constância do referido ângulo numa espiral equiangular em que ϕ (que designamos por *ângulo de referência* da espiral) é igual a $80°$ (equivalente a *1.4 rad*). No *GSP*, procedemos da seguinte forma:

- calculamos o correspondente valor de k (usando a calculadora do *GSP*); $k = e^{\cot 1.4} = e^{(1/\tan 1.4)} = 1.19$;
- traçamos a espiral para $k=1.19$ (como fizemos anteriormente (resultando daí a espiral da fig. 3). Depois escolhemos três pontos quaisquer P_1, P_2 e P_3 sobre a espiral. Unimos 0 com cada um destes pontos e depois, com centros respectivamente em P_1, P_2 e P_3 efectuamos rotações das rectas $0P_1$, $0P_2$ e $0P_3$ (ângulo *1.4 rad*). A fig. 3, embora não demonstre, mostra intuitivamente, com uma grande "força de convicção", que os cálculos de Coxeter estavam correctos...

Veja, no apoio *online* a este artigo, o vídeo *equi_2.mov.* Servindo-se desse vídeo, o professor, como diria Sebastião e Silva, pode "dar ao ensino uma orientação de tal modo natural, que o aluno seja levado a aceitar os factos intuitivamente, e com uma força de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa desses factos."[4]

DOIS MODOS DE CONSTRUIR A ESPIRAL EQUIANGULAR

Existem numerosos processos de construir este tipo de espiral, e daí o nome de *espiral maravilhosa* que lhe deu Bernoulli... Iremos apresentar aqui dois exemplos, possíveis de realizar

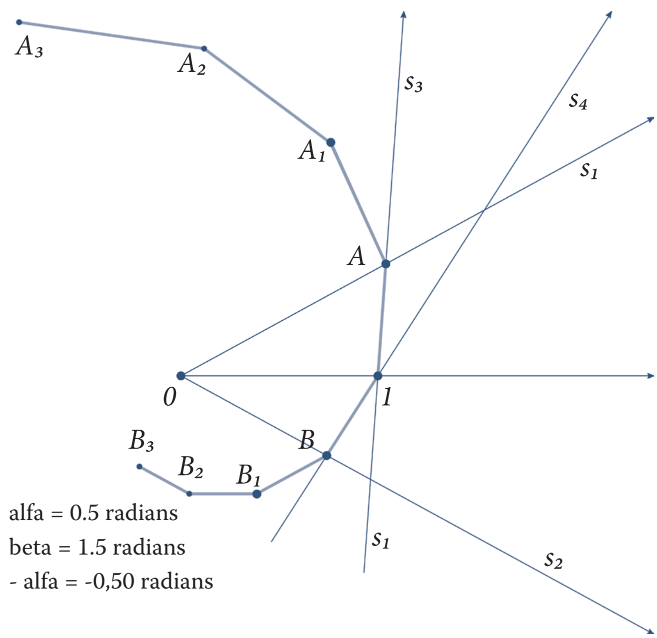


Figura 5

por alunos da escolaridade obrigatória, mediante o uso de um programa de geometria dinâmica.

Exemplo 1. Curvas de perseguição

Imaginemos um quadrado *ABCD* e quatro galgos — G_1, G_2, G_3 e G_4 — colocados respectivamente nos pontos *A*, *B*, *C* e *D* (fig. 4).

Suponhamos que, num dado instante, os quatro galgos começam a perseguir-se mutuamente, correndo todos à mesma velocidade: G_1 persegue G_2, G_2 persegue G_3, G_3 persegue G_4 e G_4 persegue G_1! Podemos pedir ao *Sketchpad* — veja, no apoio *online* a este artigo, o vídeo *equi_3.mov*, para perceber como... — que trace as curvas seguidas pelos galgos até um pouco antes de se encontrarem no centro do quadrado. Cada uma das curvas traçadas pelos galgos — g_1, g_2, g_3 e g_4 — é uma espiral equiangular; para uma justificação informal deste facto, veja o apoio *online* a este artigo.

Exemplo 2. A espiral equiangular por iteração

Vamos mostrar os primeiros passos do início deste tipo de construção, que resultarão na fig. 5, e depois desenvolver as construções seguintes no *website* de apoio a este artigo. O início consiste na sequência seguinte:

- construção de um segmento *01* e da semi-recta *01*
- escolha de três parâmetros que serão os três ângulos α*=.5rad*, β*=1.5rad* e -α — no caso da fig. 5;
- duas rotações da semi-recta *01* com centro em *0* e ângulos α e -α, obtendo as semi-rectas s_1 e s_2;
- uma rotação da semi-recta *01* com centro em *1* e ângulo β obtendo a semi-recta s_3;
- e finalmente uma rotação de s_3 com centro em *1* e ângulo -α obtendo a semi-recta s_4.

Designamos por *A* e *B* as intersecções respectivamente de s_4 com s_1 e de s_4 com s_2.

Note-se que desta forma temos tudo preparado para repetir (*iterate*) este processo, obtendo novos pontos A_1, A_2 *e* A_3 (e também B_1,B_2 e B_3). A_1 obtém-se a partir de *0* e *A* precisamente como *A* se obtivera a partir de *0* e *1* (e analogamente para os pontos *B*).

Detalhes deste procedimento encontram-se no *site* de apoio a este artigo.

O que obtivemos até agora? Não uma curva "contínua", mas uma figura formada por pontos cada vez mais numerosos, os quais, unidos por segmentos, sugerem a curva final. Observe que a fig. 5 depende, de modo decisivo, dos parâmetros angulares α *e* β. O parâmetro β é o *ângulo de referência* da espiral equiangular que estamos a construir. Intuitivamente, sendo *A* o "ponto seguinte" a *1*, a recta *1A* é a "tangente" à espiral no ponto *1*!

Quanto a α, sendo o ângulo entre as semi-rectas *o1* e s_1, define o afastamento entre "pontos consecutivos da figura (curva)". Ao repetirmos este processo usando valores de α menores, as figuras obtidas por iteração aproximam-se da espiral. O processo completo está descrito nas páginas e vídeos do *website* de apoio a estes artigos.

Notas

1. Não deixe de ler – ou reler – a *nota prévia* com que iniciamos o artigo sobre a espiral de Arquimedes (E&M nº 141), pois são dadas aí indicações importantes comuns a todos os artigos sobre curvas que publicaremos. Note-se que o parâmetro *t*, no caso da espiral equiangular, será um ponto da recta $\overleftrightarrow{01}$ e não da semi-recta $\overrightarrow{01}$.
2. Consulte páginas *on line* de apoio a este artigo no endereço *www.eduardoveloso.pt.*
3. H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry* (pág. 126; John Wiley & Sons, Inc. segunda edição).
4. Veja o magnífico texto de Jaime Carvalho e Silva *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva – uma primeira abordagem* em https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsilva.html

Eduardo Veloso

Contributos da percentagem para a aprendizagem dos números racionais no 1.º ciclo

Helena Gil Guerreiro
Lurdes Serrazina

Quando pensamos na percentagem, enquanto conteúdo curricular, não associamos à partida ao trabalho em matemática no 1.º ciclo do ensino básico. Na verdade, no programa em vigor a noção de percentagem surge apenas no domínio da Organização e Tratamento de Dados do 4.º ano, a propósito da frequência relativa. No entanto, alguns estudos evidenciam que os alunos podem desenvolver uma aprendizagem com compreensão dos números racionais[1] quando a sua trajetória de ensino-aprendizagem envolve o estudo da percentagem, numa etapa inicial (Hunter & Anthony, 2003; Moss & Case, 1999).

Parecendo quase contraditório, a percentagem é apontada como um conteúdo matemático em que os alunos revelam dificuldade, sobretudo devido à complexidade das relações que oferece, mas também devido ao facto destas serem escamoteadas pela aparente simplicidade que a sua linguagem apresenta (Parker & Leinhardt, 1995).

Este facto não deixa de ser curioso, uma vez que os alunos contactam com a percentagem no seu dia-a-dia, antes até de terem entrado na escolaridade obrigatória. A percentagem está presente nas mais diversas situações da vida familiar, seja nas promoções nas lojas, nas barras de estado de baterias ou *downloads*, ou mesmo nas etiquetas da roupa que vestem, constituindo informação com significado para os alunos (Figura 1).

Esta ligação à vida quotidiana é por si um fator de motivação intrínseca, que nos faz pensar sobre a importância de a trazer para a sala de aula um pouco mais cedo do que é sugerido atualmente, do ponto de vista curricular. O facto de poder estimular a relação entre a matemática da escola e a matemática da vida, parece ser um argumento de peso, pois permite que a matemática da escola seja interpretada como instrumento de compreensão da matemática da vida. Nesta medida, a sua introdução no 1.º ciclo parece fazer sentido, etapa em que a ligação a situações reais é fundamental na construção do conhecimento matemático. Neste artigo partilhamos algumas reflexões em torno de um trabalho realizado numa turma do 1.º ciclo do ensino básico onde a percentagem teve um papel importante na introdução dos números racionais.

Numa avaliação de diagnóstico, com os alunos no início do 3.º ano, procurámos perceber se estes estariam familiarizados com a linguagem da percentagem, embora esta não tivesse sido trabalhada do ponto de vista curricular. Esta avaliação permitiu-nos constatar a existência de um conhecimento intuitivo relativo à percentagem, associado a um certo sentido

1 Neste artigo usamos o termo números racionais para designar o conjunto dos números racionais não negativos

Figura 1. A percentagem em contextos do dia-a-dia dos alunos

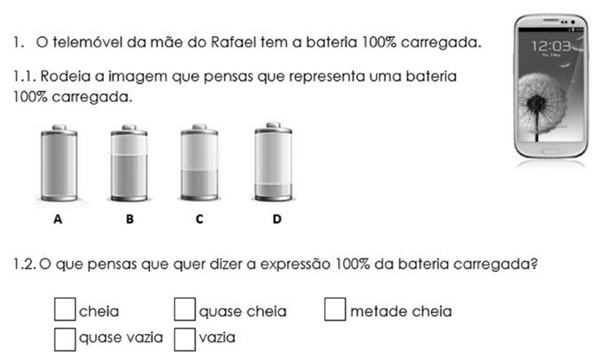


Figura 2. Tarefa da avaliação de diagnóstico

de proporcionalidade, parecendo ser resultante da experiência do quotidiano dos alunos. Numa das tarefas propostas (Figura 2) foi interessante verificar que todos os alunos da turma identificaram a imagem A como a que representava 100% da bateria do telemóvel carregada, cheia, percecionando corretamente o significado do símbolo 100%.

Numa outra tarefa, que remetia para um contexto de utilização do computador (Figura 3), verificámos que a maioria dos alunos da mesma turma conseguiu fazer uma leitura acertada da barra de estado apresentada.

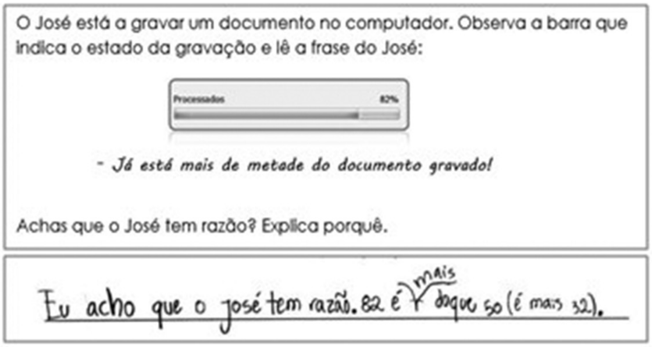


Figura 3. Tarefa e explicação de um aluno a uma tarefa da avaliação de diagnóstico

Nas explicações que apresentaram, os alunos mobilizaram o conhecimento que tinham da decomposição dos números inteiros[2], tendo por base a estrutura de base 100 e as suas relações, na interpretação da linguagem da percentagem.

Esta familiarização com a percentagem estava relacionada com o facto de estes alunos lidarem diariamente, na escola e em casa, com computadores, *smartphones* e *tablets*. Eram utilizadores, mas também produtores de informação, pelo que, revelaram uma boa destreza na exploração das suas funcionalidades. Para estes alunos, um *download* era um procedimento diário, interpretando com clareza a mensagem que a barra de estado traduzia.

Assim, estas representações parecem ser elementos potentes de suporte à aprendizagem, dado que aliam a força da perceção visual à linguagem da percentagem. Todavia, temos presente que o facto de os alunos compreenderem que 100% significa o todo de algo, resultando de um raciocínio aditivo da soma das partes, não significa que compreendam desde logo 100% como o todo num sentido proporcional (Parker & Leinhardt, 1995). Contudo, consideramos que este conhecimento intuitivo pode ser um ponto de partida interessante para uma aprendizagem com compreensão da percentagem, mas também, e num sentido mais amplo, dos números racionais. Numa perspetiva de desenvolvimento numérico que considera a passagem dos números inteiros para os números racionais como um processo natural e de continuidade, num processo isomórfico com o seu desenvolvimento histórico-cultural, o trabalho com a percentagem pode ter um papel importante na compreensão da natureza proporcional dos números neste novo conjunto (NCTM, 2010; Siegler, Thompson & Schneider, 2011).

Alguns autores referem que a percentagem é sobretudo uma linguagem privilegiada, que condensa, mas ao mesmo tempo simplifica, comparações multiplicativas, que estão na base da sua interpretação (Parker & Leinhardt, 1995). Para evitar que a sua compreensão se torne ambígua, alertam que o trabalho em torno da sua aprendizagem não pode remeter-se apenas para o seu significado parte-todo, uma vez que a percentagem é um conceito com propriedades de número, de parte-todo e de razão. Para tal, as representações a privilegiar num trabalho inicial devem envolver os seus diferentes significados. A escolha deve recair sobre representações que permitam aos alunos tirar partido da relação que a percentagem traduz, num dado contexto, e as comparações proporcionais que oferece. Uma das representações sugerida é a barra de estado, que enquanto modelo de uma situação, permite que os alunos percecionem as relações numéricas, nem sempre evidentes (Parker & Leinhardt, 1995; Van Galen & Van Eerde, 2013).

Lançado o desafio, vamos partilhar algumas ideias relativas a um percurso de aprendizagem dos números racionais, no 3.º e 4.º anos de escolaridade, em que privilegiámos a percentagem no processo de desenvolvimento do sentido de número. Importa referir que a aprendizagem é enquadrada numa perspetiva sociocultural, resultando de um processo de participação social, uma construção pessoal, que se realiza com os outros, através da interação social (Vygotsky, 1978). Foram privilegiadas tarefas que se desenvolveram de forma situada em relação à turma, para a qual foram pensadas. A sua exploração na sala de aula seguiu uma abordagem de natureza exploratória (Ponte, 2005).

Tratando-se de alunos do 1.º ciclo, a exploração da linguagem relacional da percentagem começou por ser, necessariamente, intuitiva, tirando partido da base 100, consolidada na aprendizagem dos números inteiros. Valorizámos estratégias de cálculo mental, como o uso de números de referência, a decomposição de números e a partição e iteração, dada a unidade de referência, sempre suportadas em representações contextualizadas. Pretendíamos que os alunos se mantivessem afastados de procedimentos de cálculo algorítmico, pois

2 Neste artigo usamos o termo números inteiros para designar o conjunto dos números naturais com o zero.

considerámos que teriam oportunidade de o formalizar adequadamente, ao longo dos ciclos do ensino básico seguintes.

Numa das tarefas iniciais do percurso de aprendizagem da turma, representada na Figura 4, foi pedido aos alunos que descobrissem que percentagem poderia estar representada em cada barra de estado.

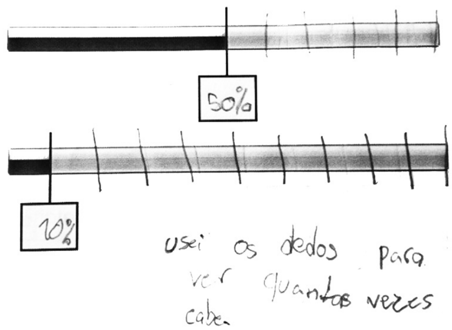


Figura 4. Resolução da tarefa por um dos alunos da turma

Usar os dedos para medir e iterar, considerando uma unidade que é 100%, foi uma das estratégias elementares e intuitivas a que os alunos recorreram, que remetia para um significado de medida e razão. Os alunos construíram esta estratégia apoiando-se nos conhecimentos numéricos que já possuíam e recorrendo a um processo de modelação emergente (Gravemeijer, 1999).

Posteriormente, na tarefa da Figura 5, os alunos foram desafiados a descobrir quantos minutos teria demorado a gravação de um programa, a uma velocidade que se considerou constante, interpretando a barra de estado.

A relação de comparação que estabelecem entre as duas grandezas envolvidas, de natureza diferente – tempo, em minutos, e comprimento da barra, quantidade de programa gravado em percentagem – é suportada pela barra de estado. Esta proporciona a exploração de comparações, numa relação de proporcionalidade tornando visíveis os conjuntos de números, as quantidades que se comparam, numa construção intuitiva e informal do significado de razão.

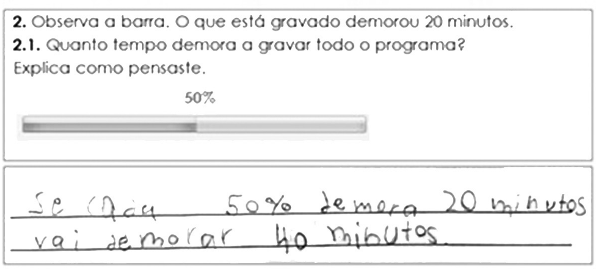
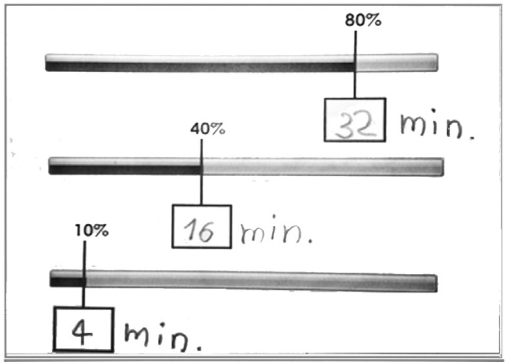


Figura 5. Registo da resolução da tarefa por um grupo da turma

Na mesma tarefa, foi pedido aos alunos que calculassem quanto tempo teriam demorado a gravar outras "quantidades" do mesmo programa. Este desafio tornou poderosa a estratégia do 10%, para outros valores de percentagem, através de cálculos intermédios. Cálculos que realizaram com o apoio de uma tabela de razão (Figura 6).



Percentagem	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Tempo (min)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Figura 6. Registo de um grupo da turma com recurso à tabela de razão

As potencialidades da estratégia dos 10% foram postas em comum na turma, em interação. O estabelecimento de relações entre os números aconteceu na base do conceito de múltiplo/divisor de um número, que conheciam e mobilizaram. Nesta tarefa, a barra de estado e a tabela de razão permitiram, por um lado, explicitar as relações que a percentagem encerra em si, e por outro, a escolha de estratégias de cálculo eficientes, de acordo com o que cada aluno se sentia mais confiante.

A partir da barra de estado, quando esta parecia constituir um modelo de raciocínio na turma introduzimos a reta numérica dupla[3]. A introdução desta representação ganha sentido, apoiada num processo de continuidade. Isto é, é como se a barra de estado se pudesse transformar numa representação com uma estrutura semelhante, mas mais abstrata, que foi corporizada na reta numérica dupla (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Na tarefa da Figura 7, os alunos, depois de medirem vários objetos na sala de aula com uma fita métrica em centímetros, foram convidados a estimar a localização na reta do número que correspondia ao valor da medida de comprimento desses objetos.

No momento de discussão coletiva desta tarefa, a reta numérica apoiou, num significado de medida e razão, o

3 Numa etapa inicial, a reta numérica dupla tomou a forma de um segmento de reta duplo.

Objeto	Medida do objeto (cm)
Ex. altura de um objeto	100
oculos	9cm
caderno de escrita	21cm
separador	27cm

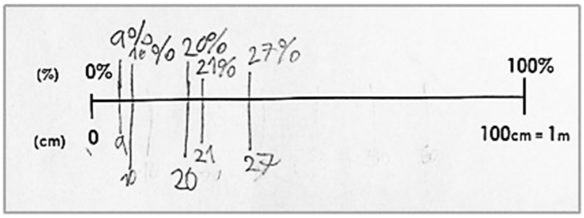


Figura 7. Registo de um grupo ao localizarem os valores de medida na reta

aparecimento da representação decimal a partir da exploração da relação traduzida pela percentagem (Figura 8).

Numa mudança de unidade, de 100 centímetros para um metro, a representação decimal emergiu quando os alunos procuraram identificar uma representação equivalente à percentagem, para o número que traduzia uma distância na reta numérica correspondente ao comprimento de um objeto com 91 centímetros. Os alunos convocaram a representação decimal, com arredondamento às centésimas, para representar esse número como 0,91 metros. Isto é, uma distância que não constitui uma unidade completa, mas apenas 91% dessa unidade. Ou seja, 91 centésimas dessa unidade. Esta experiência permitiu que os alunos percecionassem a razão pela qual 91% e 0,91 se localizam no mesmo ponto da reta, considerando a mesma unidade de referência e apoiados nas relações de grandeza. A estrutura da representação decimal pareceu ganhar sentido, tendo por base a ancoragem na equivalência com a percentagem.

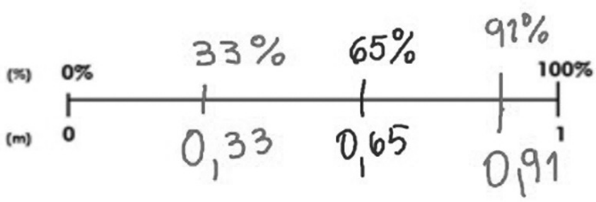


Figura 8. Registo no Quadro Interativo construído durante a discussão da tarefa

Ao longo deste percurso de aprendizagem da turma, pretendíamos que a compreensão das diferentes representações simbólicas dos números racionais acontecesse de forma entrelaçada e embebida em situações realistas e situadas em relação à turma. Numa tarefa cujo contexto envolvia uma corrida de 200 metros estafetas, atividade que tinham realizado na escola, os alunos mobilizaram a reta numérica dupla para identificar os pontos da passagem do testemunho. Assinalaram esses pontos na reta apoiados na relação entre distância de cada etapa da corrida, em metros, e a percentagem da corrida percorrida (Figura 9).

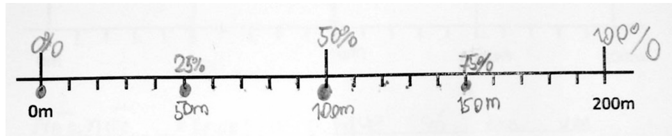


Figura 9. Registo de um grupo em que a percentagem é mobilizada

Quando lhes foi perguntado que parte da corrida fez cada um dos quatro elementos da equipa, recorreram à relação entre a percentagem e a representação decimal. Alguns grupos construíram o modelo da reta numérica dupla para si próprios, fazendo corresponder 25% a 0,25 (Figura 10).

Contudo, também mobilizaram o conhecimento que já possuíam de fração, no significado de medida, para identificarem a parte correspondente a cada etapa da estafeta como $\frac{1}{4}$, designando toda a corrida por $\frac{4}{4}$ (Figura 11).

Perceberam assim que 25% representam 0,25, mas também $\frac{1}{4}$ de uma mesma unidade, neste caso uma corrida de 200 metros. Converteram entre si percentagens, decimais e frações de forma significativa, de acordo com a situação e considerando a grandeza relativa dos números em cada uma das representações.

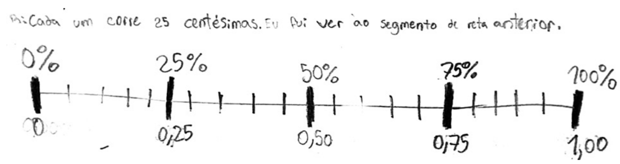


Figura 10. Registo de um grupo em que relaciona percentagem e decimal

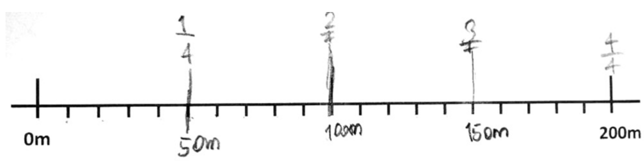


Figura 11. Registo de um grupo com mobilização da fração

É desta forma, tendo em conta as ideias que aqui procurámos partilhar, que consideramos que a percentagem, enquanto linguagem privilegiada e representação dos números racionais, pode ser um conteúdo matemático adequado para trabalhar nesta etapa da escolaridade.

A percentagem revela-se assim potente no alargamento, com compreensão, do conhecimento numérico ao conjunto dos números racionais (Moss & Case, 1999). Contribui para a construção de uma rede de conceitos, relações e símbolos dos números racionais, permitindo coordenar os conhecimentos numéricos que os alunos já possuem, com a construção de uma compreensão interrelacionada da representação decimal e da fração. Isto pressupõe um trabalho numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, suportado na construção de modelos a partir de representações como a barra de estado, a tabela de razão ou a reta numérica dupla. Um trabalho que não pode deixar de ter em linha de conta os diferentes significados dos números, na relação com os contextos onde estes fazem sentido para os alunos.

Referências:

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical thinking and learning,* 1(2), 155–177.

Hunter, R. & Anthony, G. (2003). Percentages: A foundation for supporting students' understanding of decimals. In *Proceedings of the 26th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2 (pp. 452–459). Geelong, Vic: MERGA.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122–147.

NCTM (2010). *Developing Essential Understanding of Rational Numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston: NCTM.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: a privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421–481.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp.11–34). Lisboa: APM.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology,* 62(4), 273–296.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics,* 54(1), 9–35.

Van Galen, F. & Van Eerde, D. (2013). Solving Problems with the percentage bar. IndoMS. J*ournal on Mathematics Education,* 4(1), 4–8. Retirado de http://jims-b.org.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society.* Cambridge: Harvard University Press.

Helena Gil Guerreiro

EB Quinta da Condessa, Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire; UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação de Lisboa; UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

APM - AGENDA DO PROFESSOR 2017-2018

A agenda de 2017/2018 dá continuidade à celebração do trigésimo aniversário da revista *Educação e Matemática.* Desta vez, lembramos esta publicação a partir da sua mais antiga secção e, provavelmente, a mais emblemática: o problema deste número. O José Paulo Viana selecionou 13 problemas e respetivas resoluções, a que se associam as magnificas ilustrações de Cristina Sampaio.

À venda na APM a partir de 1 de agosto.

As Tecnologias na aula de Matemática: do Projeto MINERVA à sala de aula do futuro

José Duarte

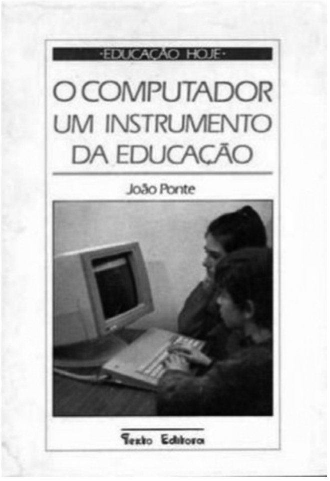
Este artigo constitui uma reflexão sobre o tema do título, a partir dos testemunhos de alguns dos protagonistas do Projeto MINERVA, desde alunos que vivenciaram a experiência, até professores e investigadores, alguns dos quais com uma intervenção destacada na área da Educação Matemática. Os testemunhos e a experiência aqui descrita decorrem do trabalho que acompanhei de perto, em escolas do distrito de Setúbal, enquanto formador da Escola Superior de Educação de Setúbal.

Em meados dos anos 80 do século passado, vários professores e investigadores tiveram uma profunda influência na forma como os computadores entraram no quotidiano das escolas e, em particular, na sala de aula. Aqui quero lembrar os nomes de Seymour Papert, Dias de Figueiredo e João Pedro da Ponte, pelas contribuições relevantes que deram à comunidade educativa.

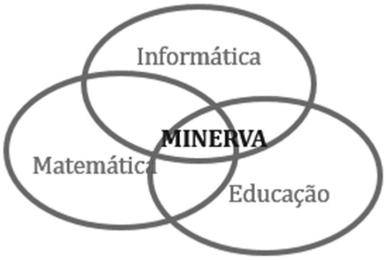
Seymour Papert, educador matemático americano que nos deixou recentemente, foi uma referência internacional, marcada pelas ideias do livro *Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas* e pela linguagem de programação LOGO. Segundo ele, o computador nas mãos das crianças, com elas 'no comando', programando num ambiente intelectualmente desafiador e estimulante, de que o erro faz parte integrante, pode ser um instrumento poderoso na descoberta e na construção do conhecimento, colocando à escola o grande desafio de ter que se reinventar para deixar de ser mera reprodutora de saberes 'inertes' e, como tal, deixar de ser necessária.

Dias de Figueiredo, do Departamento de Engenharia Informática da Universidade de Coimbra, foi o principal responsável e mentor do Projeto MINERVA, criado em novembro de 1985. Com forte sensibilidade para a educação, acreditou nas pessoas e nas equipas interdisciplinares que por todo o país deram vida aos Núcleos e Polos, sediados nas Universidades e Escolas Superiores de Educação. Em 2001 afirmava: "A nosso ver, uma parte significativa do futuro da aprendizagem não se encontra nos conteúdos. Muito desse futuro, talvez a sua parcela mais crítica, encontra-se nos contextos". Com esta frase avisava-nos que, mais do que correr atrás das tecnologias e fazer com elas o mesmo que se fazia até aí, apenas com 'mais cor e som', importava usar as suas potencialidades em ambientes de trabalho favoráveis à construção de novas aprendizagens, só agora tornados possíveis. A uma distância de 32 anos, Dias de Figueiredo refere hoje que na herança deixada pelo Projeto MINERVA "a pedagogia pode sair reforçada, na sua convivência com a tecnologia, mas a segunda deve estar sempre ao serviço da primeira, e não vice-versa".

Finalmente, João Pedro da Ponte, professor e investigador no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, fruto da sua forte ligação à comunidade de Educação Matemática, espalhada por todo o país, em Departamentos de Universidades e Escolas Superiores de Educação, viria a ter um papel determinante na utilização do computador como uma ferramenta ao serviço da educação e como suporte a atividades de projeto, quer ao nível da Matemática, quer em atividades interdisciplinares. Convidado a identificar o que perdurou dessa experiência inovadora, refere "a confiança na capacidade criativa e reflexiva do aluno e do professor quando lhe são proporcionadas oportunidades de trabalhar com tecnologias poderosas e as necessárias condições de trabalho".



Para muitos professores do 1.º ciclo e para os professores de Matemática com quem mais trabalhei, o MINERVA nunca foi um Projeto da Informática, mas um projeto que resultou da interseção de três domínios: a Matemática, a Educação e a Informática. E isso vai marcar as primeiras experiências com computador na sala de aula de Matemática.



Depois de recolher contribuições de responsáveis com dimensão nacional no Projeto, quis ouvir também quem, à época, era professor utilizador dos computadores na aula de Matemática e em espaços informais de aprendizagem, com os seus alunos. O Carlos Pimenta, professor na Escola Secundária D. João II, em Setúbal, refere a importância do Laboratório de Matemática, na sua escola, para poder visualizar mais funções quando comparado com o trabalho realizado com quadro e giz, a par da importância da folha de cálculo para o trabalho com as sucessões, os limites e as correspondentes representações gráficas. Lúcia Grilo, professora na mesma escola, hoje já aposentada, refere: "Tive uma turma de 7.º ano só com alunos repetentes, muito fracos e desmotivados, e consegui 'agarrá-los' para a Matemática, ensinando-lhes LOGO na sala do Projeto MINERVA, numa ou duas aulas por semana".

Nestes dois testemunhos destaca-se o papel da visualização e das representações e a importância dada aos espaços informais de aprendizagem, nomeadamente aos Laboratórios e aos Clubes de Matemática, muito frequentes nos anos 80, para a ilustração de conceitos, mas também como motivação e para a melhoria da autoestima dos alunos.

Quando pergunto o que nos deixa o Projeto MINERVA para o futuro da sala de aula de Matemática, Teresa Martinho Marques, professora de Matemática e Ciências do Agrupamento de Escolas de Azeitão e principal responsável pela 'chegada' a Portugal da versão portuguesa do Scratch e pela tradução de vários manuais e materiais de apoio, diz

sem hesitação: "Um espaço aberto ao trabalho colaborativo, aberto ao desconhecido (quantas descobertas feitas ombro a ombro com os alunos) (…) Contextos motivadores e que permitem a imersão numa espécie de país da matemática (…) [Segundo Papert] o contexto para o desenvolvimento da língua materna era natural e rodeava os alunos constantemente, mas na matemática era preciso criar mundos (micromundos) onde se falasse matemática... e as linguagens de programação permitiram isso (…) A modelação, o 'ver funcionar', que o papel e lápis não permitiam. Estou a lembrar-me dos programas de geometria dinâmica, os aplets, os vídeos tão em voga hoje (…) A matemática como atividade de descoberta ativa, participada, partilhada".

À mesma pergunta, João Torres, professor na Escola Secundária do Pinhal Novo nos primeiros anos do Programa Nónio (sucessor do MINERVA) e atualmente membro do Centro de Competência TIC da ESE de Setúbal, acentua a intemporalidade das boas ideias em educação: "A tecnologia disponível mudou muito (…) [Mas] será que alguma coisa resistiu à passagem do tempo? (…) As ideias subjacentes à sua [da tecnologia] utilização não mudaram assim tanto (…) Porque as ideias, quando são boas, duram muito mais tempo que as tecnologias!"

Sinais desses tempos são as equipas de professores e alunos, explorando e descobrindo em conjunto, criando currículo em ação, com o auxílio de ferramentas desafiadoras integradas de forma natural, ideias que perduram para o futuro, quando se pensa em aprendizagem.

Ficaria incompleta esta reflexão se não ouvisse alunos que viveram a experiência do Projeto, na segunda metade da década de 1980. Foi o que fiz, contactando dois alunos da Escola Primária N.º 2 de Palmela, através da sua professora Maria Augusta de Sousa: a Cláudia Rodrigues, economista que trabalha na área financeira de uma empresa e o Luís Filipe, doutorado em Ótica pelo Instituto Superior Técnico, engenheiro em empresa apoiada pela NASA.

Os dois viveram intensamente o projeto interdisciplinar *Descobrindo e Crescendo* que decorreu na escola entre 1984 e 1988, onde o computador 'chegou' no 2.º ano de escolaridade, experiência ilustrada em livro editado pela Caminho. De que se lembram hoje e o que ficou?

"Aprender e descobrir as potencialidades daquela ferramenta (…) em conjunto, o *output* dos trabalhos que eram desenvolvidos (…) eram maravilhosos, por comparação com os trabalhos que fazíamos, apenas manuais!! A programação em Logo que aprendemos a fazer, ajudava-nos a pensar". Esta oportunidade "numa época em que ainda mal se utilizavam essas máquinas, foi já de si fantástico. Para a nossa vida profissional foi importantíssimo (…) este primeiro contacto com o computador (…) O que era novidade, passou a ser natural... e desafiante... (…) Utilizo o computador diariamente, como ferramenta de trabalho (…) Em casa, com os 3 filhos, temos um 'canto' do computador onde os ajudo a pesquisar" (Cláudia Rodrigues). Já o Luís Filipe refere: "[Sempre] um grande interesse por tecnologia e coisas mais ligadas a regras matemáticas e lógicas (…) entrei em Física no Técnico a pensar na fusão nuclear, mas saí de lá com um doutoramento em Óptica (lasers). Como passatempo, a música. E com ela, os registos multimédia (…) Segundo a teoria do caos, nunca saberemos ao certo como eu teria evoluído sem o Projeto Minerva. Não creio que tenha modelado muito os meus interesses, mas a desenvoltura técnica e lógica foi claramente potenciada (…) E boa parte do meu à-vontade com a tecnologia radica naquele contacto precoce".

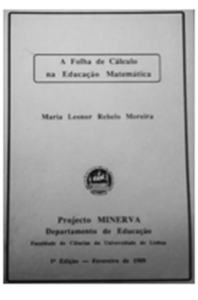
O realce dos alunos vai para oportunidade e importância das experiências nos primeiros anos de escolaridade, principalmente quando elas constituem desafios para pensar.

Também Vânia Ramos, engenheira informática e professora do grupo 550 (Informática) viveu o Projeto MINERVA enquanto aluna, na Escola Básica Luísa Todi, em Setúbal: "Recordo com carinho as aulas de Matemática e Ciências em 1988/89 e as idas à sala de informática. Era como entrar noutro mundo (…) [Hoje, aos alunos], deixo-os descobrir a solução para os problemas/desafios que lhes lanço. Estou lá para os apoiar e ajudar mas o caminho é feito por eles. Considero que esta maneira de agir foi fortemente influenciada por aquele que foi o meu percurso enquanto aluna".

O MINERVA, com o *Logo*, o trabalho de projeto e as ferramentas computacionais, foi também um elemento 'agitador' da organização tradicional da sala de aula, ao ´pressionar, nem sempre de forma intencional, mas às vezes decorrente dos poucos recursos, o trabalho em equipa, a experimentação e a descoberta, dando 'espaço' ao aluno e ´solicitando o professor para uma nova função de criador de contextos, mediador e gestor de situações de aprendizagem.

Num questionário realizado a 20 professores que viveram com intensidade o Projeto, as palavras mais comuns associadas ao MINERVA são *Inovação*, *Mudança*, *Fascinante*, *Criatividade*, Referência, *Aurora* (60 %), mas também *Motivação*, *Novidade*, *Pioneiro, Aprendizagem, Questionamento, Desafio*, *Interessante* (40 %), o que é de si revelador da representação que fazem do Projeto, como ligado à inovação e à mudança, com uma componente emocional forte.

Finalmente, não posso deixar de referir que o Projeto MINERVA deixou um conjunto muito significativo de relatos, destas e de outras boas práticas. Para além de ter criado contextos favoráveis ao desenvolvimento da investigação que, na área da Educação Matemática, se centrou, fundamentalmente, nas utilizações educativas do Logo e nas potencialidades da folha de cálculo para a resolução de problemas. Entre o final



Tese de Mestrado

Efeitos e dificuldades de aprendizagem de alunos do 2º ciclo com a **utilização da folha de cálculo** (L. Moreira, 1989)

De que forma a **utilização do computador na sala de aula** pode ser compatível com uma metodologia de trabalho que leva à descoberta? **Porquê a folha de cálculo?** (G. Tomé & Susana Carreira, 1989)

Tese de Doutoramento

Logo na Educação Matemática:
Um estudo sobre as concepções e atitudes dos **alunos.**
(João Filipe Matos, Universidade de Lisboa, 1991)

da década de 80 e o início da década de 90, realço como trabalhos de referência as investigações da Leonor Moreira e o trabalho da Susana Carreira e da Georgina Tomé sobre a folha de cálculo e a tese do João Filipe Matos sobre o Logo.

Afinal, quais os contributos que o Projeto MINERVA nos deixa para a sala de aula de Matemática do futuro, tendo em conta os testemunhos relatados e aquela que foi a minha experiência como coordenador do Polo do Projeto MINERVA da Escola Superior de Educação de Setúbal, mas também como professor de Matemática do ensino secundário e como formador na área da Educação Matemática?

Pela evidência aqui deixada nas palavras dos protagonistas e pela interpretação que delas faço, filtrada pela experiência que vivi, resumo esses contributos em algumas palavras e curtas frases:

Emoção e paixão; Inovação; Criar oportunidades; Desafios e resolução de problemas; Experimentar e descobrir; Integrar com naturalidade; A tecnologia a valorizar o que já existe; A importância dos espaços informais de aprendizagem; A trilogia tecnologia, currículo e pedagogia; Novos papéis do professor e maior responsabilidade dos alunos; Ideias, reflexão e contextos; Investigação.

Mas … porque não se traduzem na realidade da sala de aula, as elevadas expectativas sobre os potenciais efeitos benéficos da utilização das tecnologias? Muitas respostas têm sido avançadas pela investigação e embora não exista uma resposta consensual, o choque com o currículo e, em particular, com a avaliação estabelecida, têm constituído claramente, nos últimos anos, um sério obstáculo.

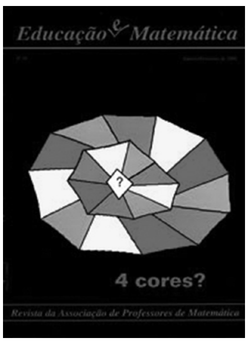
José Duarte

As tecnologias … 17 anos em (Revista)

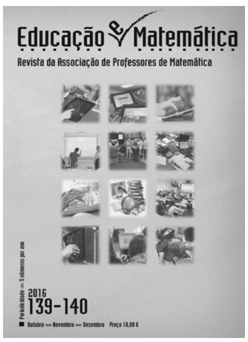
José Duarte

Este trabalho resulta de uma pesquisa que realizei há três anos, nas Revistas Educação e Matemática, de artigos que incidem sobre diferentes tecnologias, desde as calculadoras básicas, científicas e gráficas, às ferramentas computacionais de uso genérico ou específicas para o ensino da Matemática, aos micromundos, a diferentes utilizações dos computadores em sala de aula, à utilização pedagógica da Internet, aos quadros interativos, às plataformas de gestão de conteúdos digitais e a outras ferramentas da Web 2.0.

As Tecnologias na Educação e Matemática



2000



2016

17 anos em (revista)

A pesquisa incidiu, numa primeira fase, nos artigos da Secção de Tecnologias das revistas, mas alargou-se, em seguida, a todos os artigos integrados no corpo da revista, desde que incidissem nesta temática. O intervalo de tempo considerado, neste primeiro trabalho, iniciou-se no primeiro número que saiu em 2000 (N.º 56) e estendeu-se até ao N.º 126 que saiu em 2014. Esta opção decorreu do fator tempo, mas também, dado o tema *Tecnologias na Educação Matemática*, da produção teórica mais significativa e atual se encontrar nesse período. Hoje, a equipa da redação da Revista atualizou essa pesquisa até ao final do ano de 2016, que terminou com a publicação da revista temática dedicada à tecnologia.

Na lista de referências que elaborei, utilizei as referências bibliográficas automáticas do Word (em *Referências*, escolhi Estilo APA, 6ª edição), após introduzir em *Gerir Fontes,* cada um dos artigos com o tipo *Artigo de periódico*.

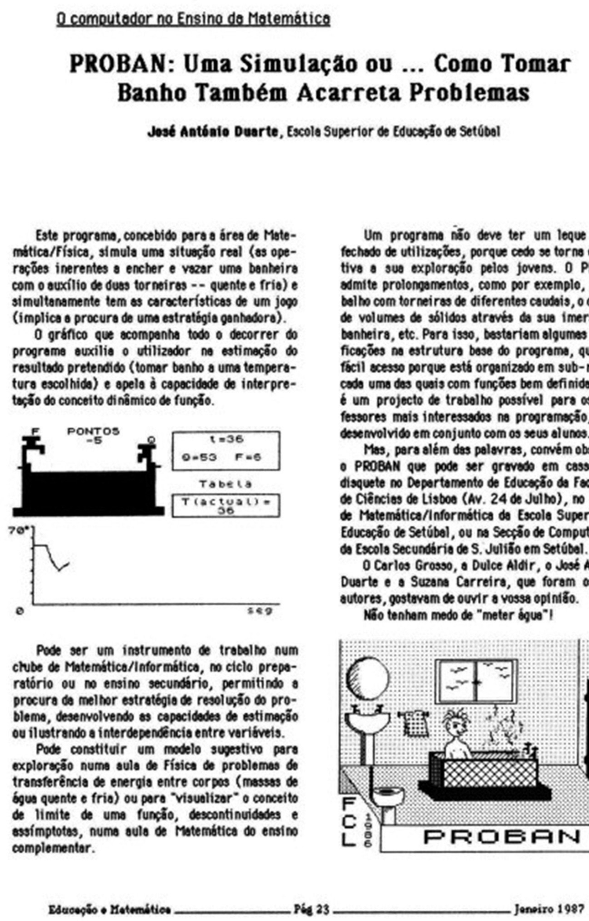
Este trabalho pode servir a professores de todos os níveis de ensino, do ensino básico ao superior, que queiram utilizar as tecnologias com os seus alunos, mas também aos formadores de professores de Universidades ou Escolas Superiores de Educação, responsáveis por unidades curriculares ou teses/relatórios de mestrado de alunos do ensino superior, como recursos bibliográficos.

A forma como achámos pertinente a sua divulgação foi criar um ficheiro (em formato *Word*) com as referidas referências, ordenadas alfabeticamente e por ano, que poderá ser acedido pelos sócios a partir da versão digital da próxima revista (N.º 142).

Posteriormente, poderá vir a pensar-se num trabalho de recolha que incida nos números anteriores, desde o lançamento do primeiro número da revista, em janeiro de 1987, onde publiquei o primeiro artigo sobre tecnologias, intitulado *PROBAN: Uma simulação ou … como tomar banho também acarreta problemas*, resultado de um trabalho académico realizado com o auxílio da linguagem de programação BASIC, que desenvolvi com a Susana Carreira, o Carlos Grosso e a Dulce Aldir.

Vivemos um momento em que é grande o fosso entre as potencialidades anunciadas para as tecnologias e o uso limitado que delas se faz na sala de aula de Matemática. Fatores vários podem ser apontados, como o retrocesso nos programas que vieram valorizar o formal em detrimento dos processos exploratórios e experimentais que a tecnologia permite, a pressão da avaliação e a proliferação de testes e exames que ignoram a tecnologia, a progressiva desatualização de equipamentos nas escolas, o desinvestimento em equipas de apoio técnico e a falta de reconhecimento de um desenvolvimento profissional centrado na escola, onde as TIC tenham presença, parecem ter contribuído para esta situação.

Trazer a público a memória coletiva do que foi feito e registado com as TIC e recordar algumas boas práticas foi outra das intenções deste trabalho.


O computador no Ensino da Matemática

PROBAN: Uma Simulação ou ... Como Tomar Banho Também Acarreta Problemas

José António Duarte, Escola Superior de Educação de Setúbal

Este programa, concebido para a área de Matemática/Física, simula uma situação real (as operações inerentes a encher e vazar uma banheira com o auxílio de duas torneiras -- quente e fria) e simultanamente tem as características de um jogo (implica a procura de uma estratégia ganhadora).

O gráfico que acompanha todo o decorrer do programa auxilia o utilizador na estimação do resultado pretendido (tomar banho a uma temperatura escolhida) e apela à capacidade de interpretação do conceito dinâmico de função.

Pode ser um instrumento de trabalho num clube de Matemática/Informática, no ciclo preparatório ou no ensino secundário, permitindo a procura da melhor estratégia de resolução do problema, desenvolvendo as capacidades de estimação ou ilustrando a interdependência entre variáveis.

Pode constituir um modelo sugestivo para exploração numa aula de Física de problemas de transferência de energia entre corpos (massas de água quente e fria) ou para "visualizar" o conceito de limite de uma função, descontinuidades e assímptotas, numa aula de Matemática do ensino complementar.

Um programa não deve ter um leque muito fechado de utilizações, porque cedo se torna cansativa a sua exploração pelos jovens. O PROBAN admite prolongamentos, como por exemplo, o trabalho com torneiras de diferentes caudais, o cálculo de volumes de sólidos através da sua imersão na banheira, etc. Para isso, bastariam algumas modificações na estrutura base do programa, que é de fácil acesso porque está organizado em sub-rotinas cada uma das quais com funções bem definidas. Este é um projecto de trabalho possível para os professores mais interessados na programação, a ser desenvolvido em conjunto com os seus alunos.

Mas, para além das palavras, convém observar o PROBAN que pode ser gravado em cassete ou disquete no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa (Av. 24 de Julho), no Núcleo de Matemática/Informática da Escola Superior de Educação de Setúbal, ou na Secção de Computadores da Escola Secundária de S. Julião em Setúbal.

O Carlos Grosso, a Dulce Aldir, o José António Duarte e a Suzana Carreira, que foram os seus autores, gostavam de ouvir a vossa opinião.

Não tenham medo de "meter água"!

Educação e Matemática ______ Pág 23 ______ Janeiro 1987

José Duarte

XX ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DE 1º E 2º CICLO - A MATEMÁTICA NOS PRIMEIROS ANOS

O encontro terá lugar nos dias 3 e 4 de novembro de 2017 na Escola Superior de Educação de Castelo Branco. Sessões Plenárias, Comunicações, Sessões Práticas, Posters e um painel de apresentação de projetos envolverão os professores em mais uma jornada de reflexão sobre a aprendizagem da Matemática nos primeiros anos de escolaridade. Com início pelas 16 horas de sexta-feira, as atividades prolongar-se-ão até às 17-.30 horas de sábado e para todos os interessados será creditado como curso de 13 horas.

Por onde começar na geometria? Porque não pelos paralelepípedos?

O currículo de geometria pode ser um caminho com várias entradas e percursos alternativos. Não há uma maneira única de começar nem de desenvolver os conhecimentos de geometria e as formas de pensar próprias desta área.

No projeto MARTE1618, em que nos propomos experimentar e estudar atividades que envolvem simultaneamente aprendizagens matemáticas e de artes visuais, temos vindo a experimentar várias formas de trabalhar conceitos de geometria, desde o jardim de infância, a partir de atividades com grande significado para as crianças, muito envolventes e criativas. A grande vantagem do jardim de infância relativamente a outros ciclos é que neste nível o currículo é muito aberto, com uma formulação de orientações que o educador pode gerir de acordo com o grupo de crianças com quem está a trabalhar (http://www.dge.mec.pt/ocepe/). Além disso, não há manuais adotados e, por isso, cada educador aproveita livremente a flexibilidade do currículo e constrói percursos alternativos. É importante também destacar que o educador trabalha geralmente com grupos de crianças muito heterogéneos, proporcionando-lhes experiências comuns. Dito de outro modo, ao grupo de crianças é proposta a mesma tarefa, sabendo de antemão o educador que alguns irão mais longe do que outros. Este facto aponta por isso para a formulação de tarefas abertas que permitam várias soluções e vários níveis de consecução.

No âmbito deste projeto têm sido realizadas várias atividades que têm como ponto de partida os paralelepípedos. Neste artigo descreve-se uma sequência de atividades iniciada com o objetivo de trabalhar o conceito de oposto. A descrição, feita com base nas palavras da educadora[1] que a realizou, está estruturada em tarefas e comentários. No final apresento uma reflexão final sobre o trabalho realizado.

INTRODUÇÃO DA TAREFA

"Nós estávamos a trabalhar os opostos e pensei trabalhá-los recorrendo à geometria. Para isso pedi às crianças para trazerem caixas que utilizavam lá em casa.

Iniciou-se assim uma conversa sobre as caixas partindo da sua observação. Os primeiros comentários foram sobre o produto que estava nas caixas. Mas agora nós iríamos olhar para elas com um olhar matemático. O que é que nós descobríamos em termos de matemática naquela caixa? Então eles descobriram que a caixa tinha retângulos. Tinha um retângulo à frente, e outro retângulo ao lado, e outro retângulo atrás e outro retângulo do outro lado. Descobriram também que os retângulos não eram todos do mesmo tamanho naquela caixa que estávamos a observar que era uma caixa de cereais.

E depois perguntei, então não veem mais nada?

Eles descobriram que também tinha outro retângulo em cima e outro retângulo em baixo.

Depois eu procurei uma que tivesse um quadrado, um paralelepípedo com quadrados. Então e nesta, que diferença é que nós vemos?

Descobriram que tinha 4 retângulos e tinha 2 quadrados, um em cima e outro em baixo. E então foi aí que eu percebi a importância do dentro, porque o quadrado de cima e de baixo dá para pôr coisas lá dentro. Eles percebem o volume através daquilo que se coloca dentro das caixas."

1ª TAREFA PROPOSTA

"O que lhes foi proposto era um trabalho difícil. Era abrir a caixa e na parte que não era colorida eles fazerem padrões exatamente iguais nos dois retângulos que eram opostos. Se tivessem dúvidas poderiam pegar na caixa, voltar a montá-la e descobrir qual era o retângulo oposto (Fig. 1). Cada um escolheu a sua caixa, poderiam escolher o padrão que quisessem. Também nos padrões não deveriam escolher padrões simples, como por exemplo risquinhas, deveriam fazer coisas mais complexas."

Comentário após a 1ª atividade

"Depois de completada a tarefa, fomos ver se toda a gente tinha cumprido a regra, se os opostos estavam mesmo iguais. Descobrimos que havia um que não estava.

1 Educadora Mª Leonor Henriques, Agrupamento de Escolas de D. Maria II, JI do Cacém, Sintra.

Descobrimos os padrões que eram iguais, porque alguns tinham feito padrões iguais. Alguns tinham usados cores iguais, mas com formas diferentes. Por exemplo, a Yara tem riscas a azul e amarelo, o David tem círculos a azul e amarelo.

Estivemos a observar as caixas e a observar os padrões. Depois tivemos que decidir o que faríamos com as nossas caixas, que tipo de construção iríamos fazer. E eles decidiram fazer a turma, já que cada um tinha a sua caixa iríamos fazer a nossa turma."

Figura 1

2ª TAREFA PROPOSTA

Esta tarefa foi no âmbito das artes visuais. As crianças desenharam olhos e bocas e cortaram cartão para os cabelos e nariz. Cada um ficou com o seu boneco feito.

3ª TAREFA PROPOSTA

"Depois de cada um ter o seu boneco feito fomos então desenhar. Cada criança tinha que desenhar em 2 planos, de frente e de lado."

Comentário após a 3ª atividade

"No plano de frente ninguém teve dificuldade. No plano de lado já não. Há meninos que conseguiram fazer os 2 planos, houve meninos que fizeram o plano de frente e de lado e o que imaginaram que estava do outro lado. E houve meninos que não os colocaram juntos, portanto fizeram separados, apesar de os estar a ver juntos (Fig. 2 e 3). Depois eu alertei para o facto de que quando estavam a desenhar a caixa que se pudesse ver a parte de cima, era importante a parte de cima porque aí é que faz a grande diferença do volume. Eles aí tiveram muita dificuldade

Figura 2

Figura 3

como é que desenhavam em perspetiva. Eles tiveram muita dificuldade em desenhar em perspetiva e em ver como é que aquilo tudo funciona. Eles até conseguiram sentir na mão, mas depois no desenho tiveram muita dificuldade."

4ª TAREFA PROPOSTA

O trabalho culminou com a realização de uma composição coletiva a que foi dado o nome de "A cidade da amizade" (Fig. 4).

REFLEXÃO FINAL

Com base nesta descrição coloco algumas ideias para reflexão.

1) A sequência de tarefas, umas de natureza matemática, outras de artes visuais e a sua articulação conduziram à criação de um produto final coletivo, cheio de significado para o grupo de crianças. No percurso seguido, cada criança realizou atividades individualmente, ao seu ritmo e de acordo com as suas capacidades.

2) O sentido que as atividades tiveram para as crianças. Há uma motivação intrínseca para cada uma das atividades

Figura 4

e que tem como ponto de partida o conhecimento das crianças e que as envolve. O educador ou professor habilmente parte desse conhecimento e cria condições para que as aprendizagens ocorram.

3) A apropriação que as crianças fizeram dos paralelepípedos: forma das faces; faces opostas e iguais duas a duas; relação entre a forma tridimensional e a sua planificação; representação dos paralelepípedos através de vistas. É de destacar o facto de o foco ter estado nos paralelepípedos e de eles serem encarados de diversos pontos de vista, mas sempre serem com sentido.

4) O saber da educadora que conduziu o processo e que, ao partilhar a experiência e ao refletir sobre ela, nos interroga sobre os aspetos matemáticos envolvidos neste trabalho. Ficaram vários aspetos em aberto, nomeadamente o estudo sobre a forma como as crianças encararam duas formas distintas de representação no plano de objetos tridimensionais: as vistas e a representação em perspetiva. Esta, embora não tenha sido trabalhada está claramente presente nas palavras da educadora.

5) Considero também importante registar que inicialmente eu não valorizei a ideia da educadora relativamente à utilização das caixas para decorarem as faces com padrões. De certa forma até a desvalorizei. Refletindo após esta descrição reconheço o sentido que a educadora conseguiu que as crianças dessem às faces opostas através da realização desta atividade. Destaco também a possibilidade que lhes deu de irem verificando se o seu trabalho estava a cumprir os critérios através do montar e desmontar das caixas.

EIEM – ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O Encontro de Investigação em Educação Matemática 2017 realiza-se nos **dias 11 e 12 de novembro**, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, tendo como tema "O ensino e a aprendizagem da Geometria".

Este encontro tem como objetivos refletir sobre questões essenciais do tema escolhido para o encontro, partilhar resultados de investigação e perspetivar e/ou promover futuras investigações sobre o tema.

Como habitualmente, o programa do encontro contempla sessões plenárias e sessões em paralelo, organizadas segundo três grupos de discussão, onde serão discutidos e analisados trabalhos de investigação, concluídos ou em curso, apresentados pelos participantes através de comunicações ou posters. Os três grupos previstos centram-se na aprendizagem em Geometria, nas práticas de ensino em Geometria e na formação de professores em ensino da Geometria. O prazo para submissão de propostas de trabalho a apresentar no encontro decorre até 18 de setembro.

O EIEM 2017 destina-se a todos os investigadores, formadores ou professores que se interessem pela investigação em Educação Matemática, em particular sobre o ensino e aprendizagem da Geometria.

Mais informações disponíveis em

http://eiem2017.spiem.pt/

À procura de um algoritmo

Eduarda Moura

O PUZZLE

Um problema tipo puzzle proposto no livro A Caixa de Pandora da Matemática é o de encontrar 12 quadrados numa rede quadrada 6x6 de tal forma que em cada linha e coluna estão colocados 2 quadrados e em cada diagonal 1 ou 2 quadrados.

41
DOIS E BASTA!

O leitor consegue descobrir alguma forma de colorir doze dos quadrados pequenos do quadro 6x6 da direita, de tal modo que fiquem dois quadrados coloridos em cada linha e em cada coluna e não mais do que dois em cada diagonal? (Bolt, 1996, p. 54)

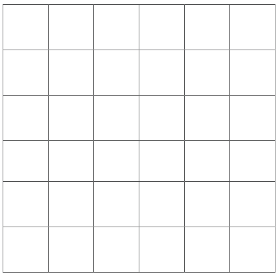


Figura 1. Rede 6x6

Um puzzle que pode ser inventado a partir deste é descrito num artigo, num número anterior desta revista, O *Problema de Baltazar*, em que toda a rede fica colorida em 3 cores: 12 quadrados de uma cor, 12 quadrados de outra cor e 12 quadrados de uma terceira cor, todos colocados segundo as regras impostas no Problema 41 do Bolt para só 12 dos quadrados. Algumas soluções para este puzzle são apresentadas no artigo referido.

Um problema não resolvido neste puzzle é se existe uma outra configuração para uma das cores que não seja a seguinte:

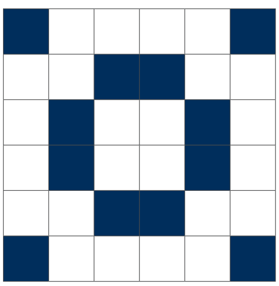


Figura 2

Esta solução é simétrica, mas em outras soluções simétricas não é possível colorir todas as casas da forma descrita. Será a boa distribuição dos quadrados na rede? Este é com certeza um bom problema a explorar.

O problema discutido neste artigo é o de encontrar todas as soluções quando a primeira das cores é colocada segundo a configuração da figura 2.

UMA ABORDAGEM SISTEMÁTICA

O que será uma abordagem sistemática ao problema proposto? É a de encontrar um processo tal que todas as soluções são geradas. Dessa forma encontraríamos uma demonstração que nos daria a certeza sobre quantas e quais são todas as soluções do puzzle inventado a partir do Problema 41 do Bolt. É tentador pensar que dado ser simplesmente um problema de escolha entre duas hipóteses que será fácil programar um computador para as gerar todas.

Caso seja esse o caso, uma demonstração por computador seria então o que chamaríamos a esta demonstração e de tipo exaustivo, ou seja que exibiria todas as soluções. Vejamos a diferença entre os dois tipos de demonstração:

A. Demonstração feita, ou auxiliada, por computador: o computador pode ajudar a subdividir o problema em casos disjuntos, ou casos cuja interseção é conhecida e identificar um problema já resolvido com que o problema dado pode ser modelado e sabemos assim que existem soluções, quantas soluções existem, ou se existem soluções.
B. Demonstração do tipo exaustivo: podemos subdividir também o problema em casos disjuntos e encontrar maneira de programar o computador para gerar as soluções. Neste caso a demonstração exibe todos os casos.

No entanto, para a demonstração de tipo exaustivo poder ser feita por um computador é necessário inventar o algoritmo que gera as soluções antes de programar o computador.

Um só algoritmo para gerar todas as soluções seria o ideal e poderíamos ver no final se encontraríamos alguma estrutura para o conjunto das soluções, por exemplo, um grupo e uma operação que as relacionasse. Um grupo de transformações seria o que pensaríamos primeiro dado que se encontram soluções que são reflexões ou rotações de outras soluções.

Sem querer entrar em teoria de demonstração que se tem provado limitada para o trabalho de fazer demonstrações, muitas demonstrações por computador têm sido feitas, algumas famosas como a do Teorema das Quatro Cores, e cujos métodos foram debatidos durante muitos anos antes da geração de software para fazer demonstrações explodir no mercado.

Insistindo na validade de uma demonstração feita, ou auxiliada por computador, teremos de exigir que um algoritmo seja inventado para que a demonstração conduza a resultados fiáveis ou pelo menos com alguma ordem de viabilidade. Ou seja, qualquer outro matemático ou matemática que programe o computador com um algoritmo para fazer uma demonstração encontre resultados que estejam logicamente relacionados com a demonstração com base no primeiro algoritmo.

A GERAÇÃO DE UM CONJUNTO DE SOLUÇÕES

Vamos agora descrever um processo através do qual todas as soluções parecem ser geradas. O sistema é o seguinte:

Dadas as 4 casas centrais na configuração da figura 2. Temos as seguintes possibilidades, que definem casos a partir dos quais é possível prosseguir para outras escolhas:

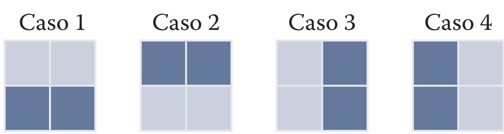


Figura 3

Os últimos três casos conduzem a soluções que como esperávamos são reflexões, ou rotações, do primeiro caso. De facto, só temos duas soluções:

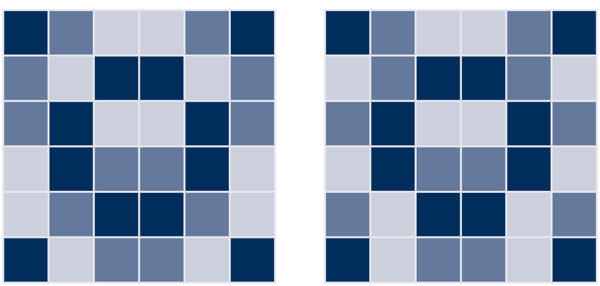


Figura 4

Foi excluída a escolha das 4 casas centrais de uma só cor, dado que não conduz a nenhuma solução como o leitor pode facilmente verificar.

Os restantes casos são então:

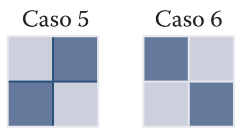


Figura 5

Seria de esperar que também neste caso as soluções de um dos casos seriam transformações das soluções do outro caso. Tal não acontece como veremos. O processo de geração procede da seguinte forma: dadas as quatro casas centrais várias outras casas ficam determinadas:

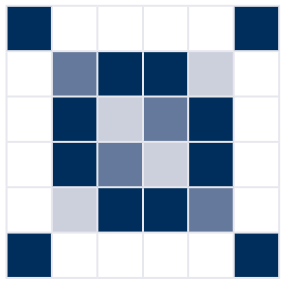


Figura 6

Podemos agora fazer outra escolha, por exemplo, as escolhas cor 1 e cor 2 para a casa (1,3), são duas:

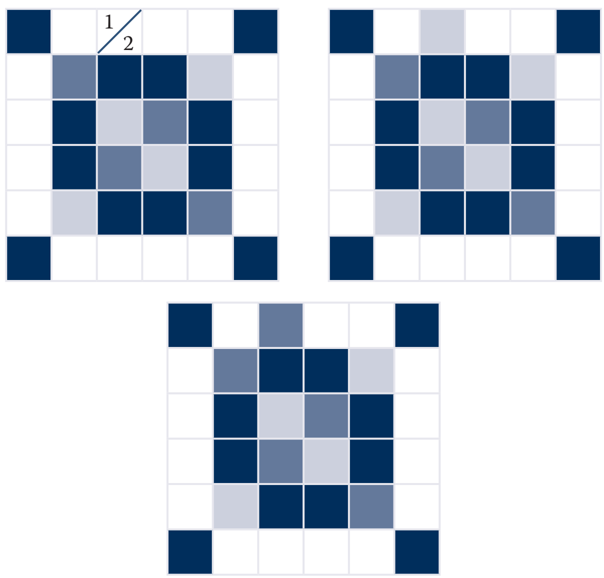


Figura 7

E as casas que ficam determinadas com essas escolhas são, respetivamente:

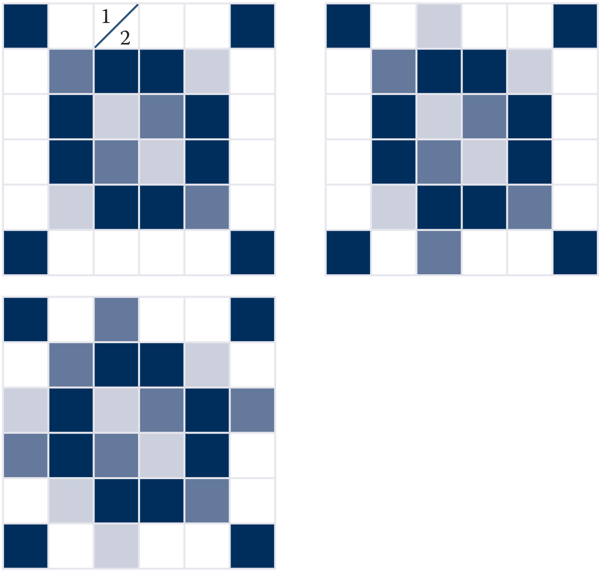


Figura 8

Prosseguindo por etapas conseguimos determinar todas as casas. Este processo por etapas conduz às soluções da figura 9:

13 para o Caso 5, e

9 para o Caso 6.

Contudo a menos de rotações e reflexões são somente 13 soluções (ver Tabela 1).

Tabela 1

Congruentes a menos de rotações									
F	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
E	e_{10}	e_2	e_3	e_{11}	e_5	e_4	e_8	e_7	e_1
e reflexões									
F	f_3	f_4	f_7	f_8	f_9				
E	e_9	e_5	e_8	e_{12}	e_{11}				

Com as duas do Caso 1, e a menos de reflexões e rotações, temos 15 soluções ao todo (figura 9).

AS SOLUÇÕES EM PERSPETIVA

E agora? Temos todas as soluções! Parece que sim! Porquê? Porque encontramos um processo exaustivo que produz um conjunto de soluções que esgota todas as possibilidades. E, de facto, podemos ter a certeza que existe um algoritmo para o qual um computador poderia gerar estas soluções. Mas nada garante até agora que todas as soluções do puzzle das três cores foram obtidas. Com outras escolhas não se obtêm todas as soluções. Por exemplo, se começarmos a fazer escolhas na casa (3,6) conseguimos um conjunto de soluções que é diferente do conjunto do Caso 5, ficam a faltar as soluções e6, e12 e e13. Uma solução que não pertence ao conjunto E é a seguinte:

X	2	1	2	1	X
1	2	X	X	1	2
2	X	1	2	X	1
1	X	2	1	X	2
2	1	X	X	2	1
X	1	2	1	2	X

Figura 10

Para termos a certeza que encontramos todas as soluções teríamos de verificar todas as escolhas. Uma demonstração difícil de realizar. Um computador poderia gerar todos os conjuntos de configurações fazendo a escolha 1 e depois a escolha 2 para cada casa. Seriam geradas 2^{24} configurações (16 777 216). Muitas dessas escolhas não levariam a uma solução, mas seria a forma de determinar se o conjunto gerado contém todas as soluções. De notar que não teríamos uma demonstração porque seria necessário um olho humano para identificar as soluções. Seria uma demonstração auxiliada por um computador.

Com o algoritmo acima indicado, que pode ser generalizado a nxn casas, é produzido um algoritmo programável (penso eu, que simples, uma matriz pode modelizar as escolhas da rede 6x6) que gera as soluções. E até um puzzle digital pode ser feito posteriormente para a pequenada poder desenvolver a sua perceção espacial.

Uma outra questão é se o conjunto acima indicado pode ter qualquer tipo de estrutura. Como não aparenta ter qualquer estrutura podemos ficar desconfiados relativamente ao algoritmo acima indicado poder gerar todas as soluções. E da desconfiança na matemática nasce a inspeção e da inspeção outras ideias e observações podem ser feitas. Fica aqui a ideia para alguém descobrir um algoritmo que as produza a todas. Teríamos então uma demonstração automatizada para o problema.

Referências

Bolt, B. (1996) A caixa de Pandora da Matemática. Gradiva.

Moura, E. (2015). O problema do Baltazar. Educação e Matemática, 134: Setembro-Outubro, APM, Lisboa.

Wikipédia, Automated theorem proving https://en.wikipedia.org/wiki/Automated_theorem_proving – [Dezembro, 2015].

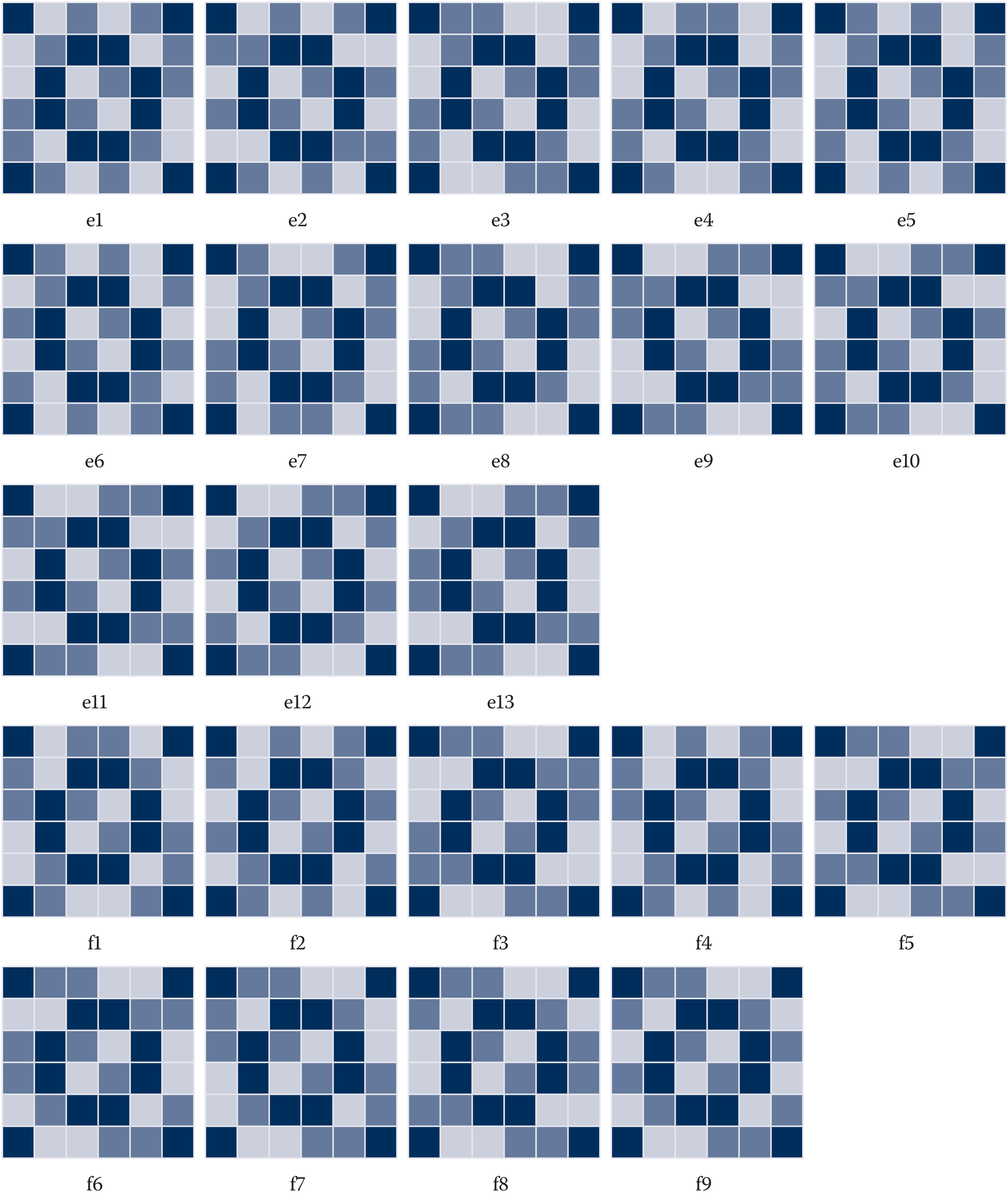


Figura 9

Eduarda Moura

Dificuldades em ensinar frações no 1.º Ciclo do Ensino Básico

Paula Cardoso
Ema Mamede

O conceito de fração é considerado complexo, mas, simultaneamente, fundamental na aprendizagem matemática das crianças. A literatura sugere que este conceito só está completamente adquirido quando o aluno é capaz de trabalhar com frações em todas as interpretações do conceito e de utilizar e traduzir frações em todos os modos de representação (concreto, verbal, pictórico, simbólico) (ver Behr, Lesh, Post & Silver 1983; Kieren, 1993; Nunes, Bryant, Pretzlik, Wade, Evans & Bell, 2004). As dificuldades dos alunos na aprendizagem das frações são já conhecidas (ver Cardoso, 2009; Hart, 1981; Kerslake, 1986). Além de difícil de aprender, o conceito de fração é, para os professores, difícil de ensinar (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Post, Harel & Lesh, 1991). Mas como ensinam os professores do 1.º ciclo frações? Que dificuldades manifestam?

Num estudo que pretendeu analisar as práticas de ensino dos professores do 1.º ciclo do Ensino Básico relativamente ao conceito de fração e às suas diferentes interpretações (quociente, parte-todo, medida e operador), observaram-se aulas de quatro professores deste nível de ensino, a lecionar 2.º e 3.º anos de escolaridade, com diversidade de tempo de serviço, que participaram de um programa de trabalho colaborativo com a investigadora (uma das autoras deste artigo). O trabalho colaborativo incluiu ciclos de reuniões de grupo para reflexão e preparação de aulas observadas, reflexão individual do professor após cada aula observada.

OBSERVANDO AULAS SOBRE FRAÇÕES

Apesar de os resultados obtidos não serem generalizáveis, não deixam, ainda assim, de indiciar fragilidades entre os professores do 1.º ciclo. Das aulas observadas, percebeu-se que os mesmos delinearam e implementaram aulas ajustadas às orientações curriculares em vigor. Contudo, identificaram-se algumas dificuldades na abordagem às tarefas sobre representação, ordenação e equivalência de frações, nas diferentes interpretações.

Observou-se, por vezes, uma redução da interpretação quociente à parte-todo. Numa situação em que se pretende apresentar a fração de item que cabe a cada recipiente, numa partilha equitativa de itens por recipientes, a opção por ter de levar a divisão dos itens em partes iguais, destacando algumas destas e apresentando a fração como uma relação entre o número de partes destacadas e o número total de partes, não promove a abordagem da fração na interpretação quociente. Por exemplo, no caso da partilha de uma piza por seis meninos (Figura 1), um dos professores participantes divide a piza em seis partes iguais referindo que a cada menino cabe uma das seis partes em que a piza foi dividida, ou seja, $\frac{1}{6}$. Porém, no âmbito da interpretação quociente, esta divisão de itens em partes iguais, é desnecessária e não promove a compreensão da fração como uma relação entre o número de itens e o número de recipientes.

Frequentemente se solicita ao aluno que associe a representação pictórica da fração à representação simbólica. Sublinha-se aqui a importância de abordar a divisão de diversas figuras geométricas em partes iguais, dado que constitui uma dificuldade para os alunos. Pois, não podem aceitar-se como válidas representações pictóricas em que a unidade está dividida em partes desiguais. Ignorar este ponto é condicionar o trabalho com frações. Numa das aulas, o professor não destacou a importância de os itens estarem divididos de forma rigorosa, aceitando divisões impróprias (Figura 1).

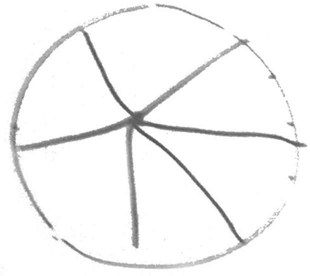


Figura 1. Divisão do item em seis partes iguais pelo aluno

Noutro momento, volta a observar-se o professor a aceitar resoluções dos alunos com divisões incorretas. A Figura 2 ilustra um momento de uma aula observada em que um aluno revela dificuldades em dividir um retângulo em três partes iguais, mas o professor aceita-a como correta, não efetuando qualquer reparo.

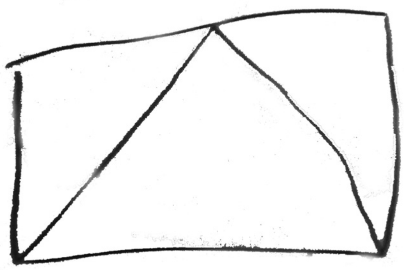


Figura 2. Divisão de um retângulo em três partes iguais por um aluno, mas aceite na aula

A abordagem à unidade de referência manifesta-se subexplorada, ainda que se constitua essencial na construção do conceito de fração. Assiste-se frequentemente à utilização de uma figura geométrica (círculo, quadrado, retângulo, etc.) como a unidade de referência. A utilização adicional de outros tipos de unidade de referência teria sido profícua para a aprendizagem dos alunos. Por exemplo, sugerir que se pinte metade de dois retângulos, entre outros exemplos, pode suscitar uma reflexão mais profunda sobre este conceito.

Das aulas observadas percebe-se que a marcação de frações na reta numérica constitui uma atividade muito popular na aula de matemática. Todavia, para essa marcação de frações na reta numérica, assistiu-se por vezes a uma associação prévia da fração à representação da mesma na forma de dízima (Figura 3). Depois de realizada esta associação, procedia-se à divisão da unidade em dez partes iguais de modo a marcarem-se os números decimais obtidos. Porém, dada uma fração $\frac{a}{b}$ (b≠0), deveria antes utilizar-se a fração $\frac{1}{b}$ (b≠0) a vezes, para determinar uma distância à origem igual a $a \times \frac{1}{b}$.

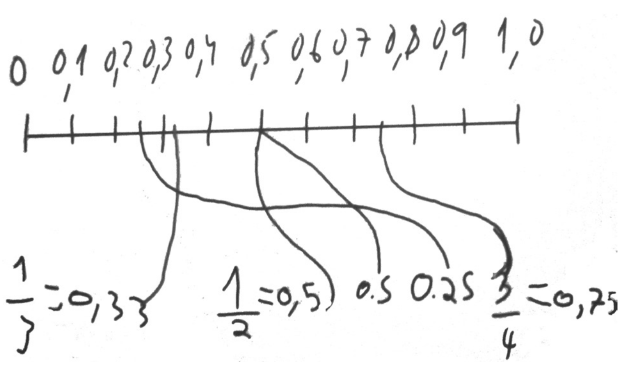


Figura 3. Correção de um problema sobre a marcação de frações na reta numérica

Os resultados deste estudo sugerem, no âmbito da interpretação operador, uma ênfase nos procedimentos algébricos que, por vezes, não se faz acompanhar de uma compreensão das ideias matemáticas subjacentes. A regra "multiplicar pelo numerador e dividir pelo denominador", no caso de ter-se $a \times \frac{b}{c}$ (a, b e c números inteiros e c≠0), parece dominar os procedimentos de abordagem a esta interpretação de fração. Contudo, tal opção didática não garante necessariamente que os alunos dominam o significado do numerador e do denominador na interpretação operador. Com efeito, numa das aulas observadas, alunos que completaram corretamente a expressão "$\frac{1}{4} \times 8 = \_\_\_$" manifestaram dificuldades em destacar um quarto de oito elementos apresentados. Assim sendo, convirá que o ensino do significado do numerador e do denominador na interpretação operador preceda a abordagem a este tipo de procedimentos algébricos.

A compreensão da ordenação e da equivalência de frações é essencial para o domínio do conceito de fração. Os resultados sugerem, no entanto, que estes aspetos não são, por vezes, explorados em toda a sua amplitude. No âmbito da ordenação é fulcral que se compreenda a relação inversa entre o valor do denominador e a magnitude da fração, quando o valor do numerador se mantém. A promoção da compreensão desta relação é conseguida através da seleção de tarefas que envolvam frações com o mesmo numerador. Já a seleção de tarefas envolvendo frações com o mesmo denominador pode conduzir a respostas dos alunos que, ainda que corretas, não se traduzem necessariamente numa verdadeira compreensão da ordenação de frações. Os resultados deste estudo sugerem isso mesmo perante um caso, por exemplo, de ordenação de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, tarefa esta proposta por um dos professores para introduzir a ordenação de frações. Numa situação desta natureza, os alunos podem responder corretamente dizendo que $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$, comparando apenas os números inteiros 1 e 2. A circunscrição da abordagem à ordenação de frações a tarefas que envolvem frações com o mesmo denominador pode fazer crer ao professor que os alunos compreendem este tema, mesmo que tal não tenha sucedido devidamente. Assim sendo, importa selecionar tarefas que envolvam frações de igual numerador, para que seja explorada e discutida a relação inversa entre o valor do denominador e a magnitude da fração, quando o numerador se mantém, própria da ordenação de frações e que é essencial para dominar o conceito de fração.

No âmbito da abordagem à equivalência de frações, os professores manifestam algum desconforto. Na interpretação quociente, registou-se por vezes uma preferência do professor por respostas dos alunos nas quais a fração apresentada tinha como valor do numerador o número de itens a partilhar e como valor do denominador o número de recipientes, em detrimento de respostas com frações equivalentes mais simples. Por exemplo, numa situação sobre a partilha de duas pizas por seis meninos, um aluno apresentou a resposta $\frac{1}{3}$ como a parte de piza que cabe a cada menino. No entanto, face a esta resposta, o professor induziu este aluno a apresentar a alternativa $\frac{2}{6}$, argumentando que "cada uma das pizas era diferente e que os meninos teriam de comer das duas pizas". Assistiu-se assim a uma subexploração desta tarefa. As intervenções dos alunos potenciaram a abordagem da equivalência entre as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$. Porém, o professor induziu os alunos a apresentarem somente a fração em que o valor do numerador coincide com o número de itens a partilhar e em que o valor do denominador coincide com o número de recipientes, ou seja, $\frac{2}{6}$.

Por último, um dos professores ensinou os alunos a gerarem frações equivalentes através da realização de sequências dos valores do numerador e do denominador (ver Figura 4). A linguagem utilizada pelo professor ("Em cima [apontando para o numerador] vai de um em um e em baixo [apontando para o denominador] vai de dois em dois") conduz o aluno a uma interiorização de procedimentos algébricos, desprovida de uma efetiva compreensão de conceitos.

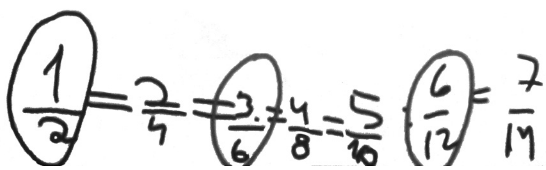


Figura 4. Gerar frações equivalentes a $\frac{1}{2}$

Os alunos que com sucesso realizaram estas sequências não souberam responder, por exemplo, a questões do tipo $\frac{3}{?} = \frac{1}{5}$. Esta dificuldade dos alunos parece resultar de o procedimento ensinado pelo professor consistir na realização de sequências de dois números inteiros de forma independente (numerador e denominador), sem considerar-se a magnitude da fração.

COMENTÁRIOS FINAIS

O domínio do conceito de fração passa pela articulação de todas as interpretações deste. Naturalmente, a abordagem estanque de cada uma das interpretações não favorece tal articulação. Os resultados sugerem que as interpretações são, tendencialmente, abordadas pelos professores de forma independente, não se verificando uma relação entre as mesmas, pelo menos deliberada e consistentemente. Ainda que o professor domine estes aspetos, a aprendizagem dos alunos depende, isso sim, de opções didáticas que lhes deem sentido.

Os professores parecem revelar-se empenhados em alterar as suas práticas de ensino do conceito de fração, embora reconheçam que este é um assunto complexo. Os resultados deste estudo sugerem que, para que se observem mudanças em práticas de ensino tão enraizadas, deverão ser aprofundados os conhecimentos matemático e didático no que concerne aos significados de fração e às propriedades deste conceito. Por conseguinte, parece ser urgente disponibilizar ao professor apoio no desenvolvimento da sua prática docente.

Referências

Ball, D., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on Teaching Mathematics: The Unsolved Problem of Teachers' Mathematical Knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*, 4th ed., (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 92-127). New York: Academic Press.

Cardoso (2009). *O conceito de fração: um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade.* Dissertação de Mestrado. Universidade do Minho.

Hart, K. (1981). Fractions. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics*: 11-16, (pp. 66-81). London: John Murray Publishers.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors – A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* Berkshire: NFER-NELSON.

Kieren, T. (1993). Fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter & E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences,* Paper presented in Paris : 28-31, January.

Post, T., Harel, G., Behr, M. & Lesh, R. (1991). Intermediate Teachers' Knowledge of Rational Number Concepts. In E. Fennema, T. Carpen-ter, S. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177-198). NY: State University of NY Press.

Paula Cardoso
Ema Mamede
CIEC – Universidade do Minho

Polygame

N.º de jogadores: 2 a 5

Nível de ensino: secundário – 10.º ano

Conteúdos envolvidos: no domínio da Álgebra são abordados conteúdos relativamente a polinómios - sua fatorização (incluindo casos notáveis), divisibilidade, zeros e respetiva multiplicidade

Material necessário: um baralho Polygame com 40 cartas: 10 cartas azuis com polinómios, 10 cartas rosa com raízes de polinómios, 10 cartas amarelas com a multiplicidade da raiz, 10 cartas verdes com polinómios que dividem o polinómio original. É importante notar que as cores das cartas não são visíveis no seu verso.

Objetivo do jogo: formar polygames combinando quatro cartas de cores diferentes com caraterísticas do mesmo polinómio.

Preparação do jogo

Começa-se por escolher de entre os jogadores aquele que será o Poly e que terá a seu cargo a coordenação do jogo. O Poly distribui quatro cartas a cada jogador, coloca outras quatro cartas sobre a mesa, viradas para cima, e deixa o restante baralho sobre a mesa, com as cartas viradas para baixo.

Modo de jogar

Em cada jogada e apenas após o Poly dar autorização para tal, cada jogador poderá retirar da mesa uma carta em que esteja interessado, devolvendo de seguida à mesa uma das suas cartas, de modo a que cada jogador continue com quatro cartas. O processo continua até que já nenhum dos jogadores tenha interesse nas cartas sobre a mesa, tanto nas cartas originalmente aí colocadas como nas cartas deitadas por outro jogador. Nessa altura o Poly retira de jogo as cartas e coloca-as no final do baralho. Sobre a mesa coloca quatro novas cartas retiradas do cimo do baralho e dá início a uma nova jogada.

Quando um jogador conseguir formar um conjunto de quatro cartas de cores diferentes respeitantes ao mesmo polinómio deve anunciá-lo dizendo: Polygame! As cartas são então apresentadas perante todos para que o Polygame seja validado. As cartas são então postas de lado e distribuídas novas cartas ao jogador que fez Polygame para que o jogo prossiga. No caso de o Polygame não ser aceite, o jogo prossegue sem qualquer alteração de cartas.

Fim do jogo

O jogo termina quando acabarem as cartas do baralho e todas as cartas fizerem parte de um Polygame.

Pontuação

Por cada Polygame formado o jogador ganha um ponto. O vencedor será aquele que no final do jogo tenha conseguido a maior pontuação.

Exemplo de uma jogada

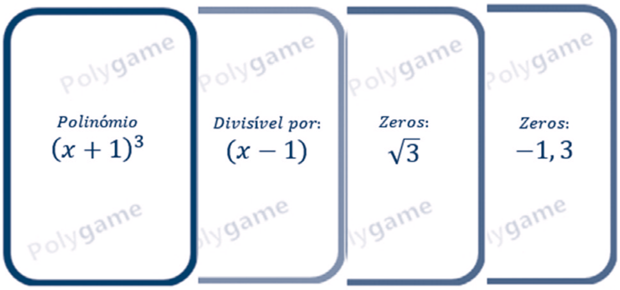
Consideremos a situação ilustrada na figura relativamente às cartas que se encontram na mesa e aquelas que um jogador tem em seu poder. Nestas circunstâncias o jogador pode optar por retirar da mesa a carta azul com o polinómio. Trata-se de um polinómio que tem uma raiz de multiplicidade 3, carta que o jogador já possui. É ainda um polinómio divisível por $4(x+1)^3$, carta que o jogador já tem igualmente em seu poder. Fica-lhe assim a faltar apenas a carta com o zero do polinómio para conseguir fazer Polygame.

Mas existem outras possibilidades. O jogador pode reparar que uma das cartas rosa sobre a mesa tem o zero do polinómio que tem em seu poder. Pode então optar por retirar essa carta. Como esse polinómio tem um único zero de multiplicidade 3 e essa é uma carta que também possui, fica-lhe a faltar apenas uma carta verde com um polinómio que divida o seu polinómio.

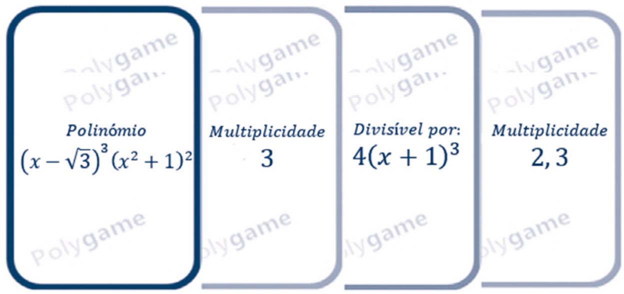
É ainda possível pensar em retirar a carta rosa com os zeros -1 e 3. Como tem uma carta amarela que indica as multiplicidades 2 e 3, o jogador pode pensar em fazer um

Polygame em torno do polinómio $(x+1)^2$ $(x-3)^3$. Neste caso ficar-lhe-ia a faltar a carta azul com o polinómio e uma carta verde com um seu divisor. No entanto, esta poderá não ser a melhor estratégia. O problema é que nestas circunstâncias o jogador não pode ter a certeza se este polinómio efetivamente existe no baralho. E a verdade é que não há nenhuma carta azul com tal polinómio. Assim, um jogador que não queira correr o risco de ficar à espera de cartas que não fazem parte do baralho, deverá desenvolver estratégias que lhe permitam evitar este tipo de situações.

Cartas na mesa



Mão do jogador



O baralho de cartas

Cartas azuis	Cartas rosa	Cartas amarelas	Cartas verdes
$P(x) = (x+5)^3\,(x-2)$	-5, 2	3, 1	$(x+5)(x-2)$
$P(x) = (x^2+2x+1)(x-3)^4$	-1, 3	2, 4	$(x+1)(x-3)$
$P(x) = (x-2)(x^2-4)$	2, -2	Uma raiz simples e uma raiz dupla	$(x-2)^2$
$P(x) = (x+3)(x+2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$	-3, -2, $\frac{1}{2}$	1,2,3	$(x+3)(x+2)$
$P(x) = (x-5)^3$	5	3	$10\times(x-5)^2$
$P(x) = \left(x-\sqrt{3}\right)^3(x^2+1)^2$	$\sqrt{3}$	3	$\left(x-\sqrt{3}\right)^2$
$P(x) = (x+1)^3$	-1	3	$4(x+1)^3$
$P(x) = \left(x+\sqrt{3}\right)^4(x^2-1)$	$\sqrt{3}, 1, -1$	4, 1, 1	$(x-1)$
$P(x) = \left(x+\frac{2}{3}\right)^2\,(x-4)^3$	$-\frac{2}{3}, 4$	2, 3	$4\times\left(x+\frac{2}{3}\right)$
$P(x) = (x-3^2)(x+2^3)$	-8, 9	Duas raízes simples	$(x-9)(x+8)$

Helena Rocha
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa

Sílvia Lopes
Escola Secundária António Gedeão

APM 2017 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @-sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

* A partir de 2016 a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma nova modalidade de associado aos professores do 1.° ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00E, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM.

Pode inscrever-se indeferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.° de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* (3 números normais e um número duplo temático).

Quotas anuais para 2017

A quota tem efeitos de janeiro a dezembro de cada ano civil.

Modalidades de associado individual	*Quota*
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.° CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	*Quota*
Modalidade I (1 exemplar da E&M)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da E&M)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	140,00 €

Os @-sócio só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos ou outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *online*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do *Centro de Recursos*.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidade de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações: podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Assinatura das revistas *Educação & Matemática* e *Quadrante*

		Educação & Matemática 3 números + 1 número duplo temático	*Quadrante* (2 números)
Associado individual	Portugal	....	15,00€
	Estrangeiro	....	30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas *Educação & Matemática* e *Quadrante*

	Educação & Matemática		*Quadrante*
Associado	Temática	10,00€	10,00€
	Normal	7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	