Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2017

141

Janeiro ∞ Fevereiro ∞ Março

Preço 7,50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Lina Brunheira
Subdiretora Helena Rocha
Redação Catarina Delgado
Cristina Cruchinho
Cristina Morais
Filipa Machado
Helena Amaral
Irene Segurado
Isabel Rocha
João Terroso
Manuela Pires
Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número
Mário Baía Edição gráfica

Capa Mário Baía

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Março de 2017
Tiragem 1450 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.o 8
Casal da Espinheira
2560-401 Silveira

Depósito Legal n.o 72011/93
Registo no ICS n.o 124051
ISSN 0871 – 7222

Porte Pago

Sobre a capa

Percorrer os números publicados da *Educação e Matemática* nestas três décadas de existência é recordar uma parte significativa do que foi a história da educação em Portugal neste período e, em particular, as reflexões, os desafios e os debates sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática nos diferentes níveis de ensino.

Neste momento de comemoração é essencial chamar ao pódio todos aqueles que contribuíram para uma história de sucesso em dedicação e persistência tornada realidade pelos 140 números editados. Como é referido por Ana Paula Canavarro, nesta edição, por detrás daqueles números "estão ziliões de horas de dedicação de inúmeras pessoas" - professores, sócios e colaboradores da APM. Parabéns!

Para celebrar, a capa deste número da revista é ilustrada com a imagem da capa do primeiro número de cada um dos anos de vida da *Educação e Matemática*.

Mário Baía

Saíram da redacção

Cristina Tudella e Paulo Alvega deixaram de integrar a redação da revista. A Cristina durante oito anos e o Paulo durante quatro, viveram intensamente o processo de edição da nossa revista, contribuindo com ideias, saber, espírito crítico e muitas horas de trabalho. Reforçaram a redação com um forte sentido de equipa e grande humanidade. Foi um privilégio trabalhar com ambos.

Neste número também colaboraram

Ana Paula Canavarro, Ana Teresa Vieira, Artur Coelho, Eduardo Veloso, Hélia Pinto, João Carlos Terroso, Margarida Rodrigues, Maria Luísa Branco, Miguel Castro, Lina Brunheira, Luís Menezes, Lurdes Figueiral, Pablo Flores, Patrícia Damas Beites, Sandra Bento, Valentina Piacentini

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.o 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

Os desafios da *Educação e Matemática*, no 30.º aniversário da revista.

Este ano a *Educação e Matemática* completa 30 anos, por isso dedico este editorial aos desafios que atualmente enfrentamos na redação. Creio que este é um assunto que não deve ser do exclusivo interesse da equipa, até porque toca aspetos mais profundos, como a forma como somos hoje professores e membros de uma associação.

Começo, em primeiro lugar, pelo desafio da mobilização. A revista é (ou deve ser) composta essencialmente por textos submetidos espontaneamente. Nos últimos anos, esta oferta tem sido muito reduzida. Certamente, existem vários fatores que contribuem para este fenómeno. Ao contrário do que acontecia nos primórdios da APM, hoje existem vários meios e espaços onde é possível dar a conhecer experiências, discutir ideias, apresentar projetos... A Internet abriu várias hipóteses, como os *blogs*, os *sites*, o *youtube*, ou as redes sociais. Existem outras publicações, incluindo revistas de investigação, algumas de livre acesso ou indexadas a bases de dados (o que as distinguem das demais). Todos estes fatores se traduziram na diminuição da proposta de artigos. Por isso, cada vez mais a redação tem solicitado textos para garantir a saída de cada número, o que não consideramos desejável. Diria antes que este é um desafio de todos nós, professores e associados, e há essencialmente três razões para o fazer. Em primeiro lugar, a *Educação e Matemática* é, como escreveu o Henrique Guimarães no editorial dos 20 anos, uma revista "dos professores, é feita por professores e para os professores". Em segundo lugar, porque a partilha e a discussão são dois elementos fundamentais numa associação como a APM. Em terceiro lugar, porque escrever um depoimento ou artigo é, por excelência, um exercício de reflexão sobre a nossa atividade. Difícil, é certo, mas necessário.

Associado ao desafio anterior, vem o desafio do conteúdo. A *Educação e Matemática* tem a responsabilidade de discutir temas atuais e importantes da educação matemática e da educação em geral. Esta preocupação tem estado sempre no horizonte da redação, em especial na escolha dos assuntos que são tratados no número temático. Mas se as revistas temáticas promovem a reflexão e o conhecimento sobre um assunto, os números regulares devem manter a qualidade e alargar a diversidade, o que nem sempre é possível. Por exemplo, a sub-representação de alguns níveis de ensino tem sido frequente. Durante bastante tempo, os textos diziam respeito sobretudo ao 3.º ciclo e ensino secundário – os níveis de ensino da maioria dos sócios. Lentamente, esta situação acabou por se inverter e existem várias razões para este fenómeno. Por exemplo, o campo da didática da matemática tem-se fortalecido particularmente nos primeiros anos, havendo muitos professores de 1.º e 2.º ciclos a desenvolverem estudos no seu contexto de ensino. Mas o que tem acontecido no ensino secundário? Por que razão há menos contributos neste ciclo, seja das áreas de prosseguimento de estudos, seja do ensino profissional?

Além do conteúdo, temos o desafio da forma e da imagem. A *Educação e Matemática* já teve diferentes formatos, desde a versão composta pelos redatores que paginavam a revista com os fracos recursos de que dispunham, evoluindo progressivamente até ao formato que temos usado nos últimos anos, desenvolvido pelo António Fernandes, que lhe imprimiu um estilo único e profissional. Atualmente vivemos uma fase de constrangimentos, mas já nenhum sócio aceitaria que a *Educação e Matemática* voltasse à sua imagem original. A revista deve procurar acompanhar as publicações atuais, oferecendo um produto de qualidade na sua versão impressa e digital, acompanhada de outras possibilidades (como ficheiros digitais que complementem alguns artigos), tudo organizado numa página *online* funcional, com uma imagem cuidada. Contudo, muitas destas exigências requerem a mobilização de vários recursos, em especial financeiros.

Para terminar, o desafio da renovação. Este ano demos as boas vindas à Cristina Morais, ao João Terroso e à Filipa Machado que entraram para a redação. Os três aceitaram um convite que foi dirigido intencionalmente a jovens professores e que, estamos certos, trarão uma energia nova, perspetivas e experiências diferentes. A redação era composta por professores (melhor dizendo, professoras e um professor!) muito experientes, a maioria há vários anos na equipa. Esta experiência é importante, em particular porque há rotinas a dominar e alguns conhecimentos técnicos que não se adquirem rapidamente. Mas a redação, como a APM, precisa de renovação e, acreditamos, também os colegas mais jovens poderão beneficiar pela sua integração, quer desenvolvendo o seu conhecimento, quer a sua identidade profissional.

Estes são os desafios do presente. São certamente os desafios da redação que vive a revista intensamente. Precisamos que sejam os desafios de muitos e muitas mais.

Lina Brunheira
Diretora da Educação e Matemática

Do Perfil e das Aprendizagens essenciais

Lurdes Figueiral

Estamos de novo perante desafios importantes à Educação. Não o estamos permanentemente? Não deve a Educação estar atenta aos sinais dos tempos, às exigências do momento, aos desafios que percepcionamos do futuro? Não devemos ser céleres na correção dos erros, alguns há tanto tempo identificados? Que queremos dizer quando pedimos estabilidade para a Educação?

DA MUDANÇA E DA ESTABILIDADE

Muitas vezes estes termos são usados de uma forma ambígua ou deslocada, confundindo estabilidade com imobilismo, e mudança com protagonismos de ocasião. Em geral, essa ambiguidade origina discursos falaciosos, quando não demagógicos, que vão dando forma a uma opinião pública e que se vai assumindo como verdade e em que tendemos todos a embarcar. Quase sempre essa "verdade" floresce tanto mais quanto mais "negativa" for, gerando assim um sentimento generalizado de desconforto, ceticismo e oposição cega.

O camoniano *mudam-se os tempos, mudam-se as vontades*, no que à Educação diz respeito, tem aparecido assim no discurso público como *mudam-se os governos, mudam-se as políticas educativas*. Repetimos à saciedade este lugar comum sem nos apercebermos que há mudanças que *não se mudam já como soía* e que essas são de facto as que fazem *mor espanto*, as mais determinantes, e que não acontecem nem aconteceram sempre que muda um governo.

Se fizermos um exercício rápido de memória, para os que a memória ainda pode conduzir ao 25 de abril de 1974 — esses sim, tempos de mudança e de mudanças — recordamos que aí começou uma corrida de obstáculos para recuperarmos, em Educação, mais de 100 anos de atraso em relação, por exemplo, aos países do centro e norte da Europa com quem hoje nos gostamos de comparar de igual para igual. Passados os primeiros anos de inquietação e ensaio, o país disse-se a si próprio, em voz quase unânime, o que queria em matéria de Educação, com a aprovação da Lei de Bases do Sistema Educativo em 1986. O ministro da tutela era João de Deus Pinheiro e o primeiro ministro, Cavaco Silva. Mas esta lei haveria de ficar associada sobretudo a Roberto Carneiro, ministro da educação do governo seguinte (1987-1991), que trabalhou profundamente na sua rápida implementação através da grande reforma curricular do início dos anos 90 a que Manuela Ferreira Leite, ministra que se lhe seguiu entre 1991 e 1995, deu continuidade. Destes três governos, todos eles chefiados por Cavaco Silva, datam a maior parte das políticas educativas que, de uma forma continuada, foram sendo assumidas pelas governações seguintes sem sobressaltos significativos, embora com algumas outras medidas que se revestiram de importância especial, como a definição do Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (Augusto Santos Silva, 2001, no segundo governo de António Guterres) ou a introdução dos exames nacionais para concluir o ensino secundário (Marçal Grilo, 1996, no primeiro governo de António Guterres) e para concluir o ensino básico (David Justino, 2004, no governo de Durão Barroso). Em termos de currículos e sobretudo de programas, no que à Matemática diz respeito, eles foram sofrendo ajustamentos de acordo com dificuldades detetadas na sua implementação (p.e., o de Matemática A) ou de desajustamentos e falta de coordenação entre ciclos (como foi o caso do programa de Matemática do Ensino Básico homologado em 2007, que resultou de um tratamento integrado dos programas que então existiam de forma independente para os primeiro, segundo e terceiro ciclos). Nesta legislatura (2005-2009, Maria de Lurdes Rodrigues, no primeiro governo de José Sócrates), para além do programa de matemática do ensino básico, vivemos um dos maiores impulsos para o ensino da Matemática concretizado nas diversas medidas do *Plano de Ação para a Matemática*. Falamos então de mais de 20 anos de políticas educativas que em matéria curricular foram suficientemente estáveis e cuja ideologia subjacente (nenhuma política educativa é neutra), como podemos verificar, não dependeu do posicionamento partidário dos governos que as levaram a cabo, ao contrário do que nestes tempos nos têm querido fazer crer.

DOS CURRÍCULOS E PROGRAMAS

Contrariando este caminho percorrido e os principais estudos nacionais e internacionais no que concerne ao ensino da Matemática, às suas questões pedagógicas, didáticas e metodológicas, sem paralelo em currículos de países de referência neste âmbito, foi homologado, em junho de 2013, um programa de Matemática para o Ensino Básico (PMEB2013) que substituiu o programa homologado em 2007 e cuja generalização terminava nesse mesmo ano de 2013. Sem avaliações, sem estudos, sem análises, atropelando prazos e procedimentos de adoção de manuais escolares, simulando consultas públicas sem debate e sem divulgação de resultados. Fomos depois surpreendidos com um programa para Matemática A que, na senda do que havia sido feito com o PMEB2013, assumia uma abordagem demasiado formalista e abstrata da Matemática, distante da experiência, da prática e da intuição dos alunos, componentes fundamentais para uma aprendizagem com compreensão e significado. Esse caminho veio reintroduzir forte e precocemente sinais daquela relação de medo, de inacessibilidade, de impotência numa grande parte das crianças e dos jovens no nosso país. E, para resolver os problemas de aprendizagem e formação, o ministro multiplica os exames. Exames para tudo, exames no 4.º ano, no 6.º ano, induzindo práticas de treino para estas provas, reduzindo drasticamente a duração do ano letivo, introduzindo precocemente fortes fatores de seleção. E acaba-se com a formação e o acompanhamento no terreno dos professores. E acaba-se com o reforço do apoio naqueles lugares onde ele é mais necessário (basta recordarmos a sinistra fórmula que concedia mais horas de crédito horário às escolas com melhores resultados... nos exames). E aumenta-se o número de alunos por turma, inviabilizando um trabalho interativo na sala de aula e uma atenção mais personalizada, por parte dos professores, entretanto absorvidos e consumidos por condições profissionais que cada vez mais lhes minam a possibilidade de um trabalho conjunto e pessoal de estudo, de reflexão e de partilha.

DO PERFIL DOS ALUNOS

Hoje, nesta encruzilhada, e apesar de todos os reveses, podemos olhar para trás e reconhecer que o país está prestes a ganhar a batalha da escolarização para todos mas ainda longe de ganhar uma de maior alcance: a de uma educação de qualidade com sucesso para todos. Temos além disso o grande desafio do alargamento da escolaridade obrigatória, não perdendo de vista que ela continua a incluir e a distinguir o ensino básico, do ensino secundário obrigatório até aos 18 anos que inclui por isso percursos formativos diferenciados a partir da conclusão do 9.º ano. Esta distinção põe de manifesto as diferentes etapas de desenvolvimento e formação que se desejam articuladas e ajustadas, tendo em vista um ensino de 12 anos de escolaridade de qualidade para todos e com todos. Por isso é tão importante um *ensino básico* essencialmente igual para todas as crianças e jovens, evitando seleções precoces, e com incidência curricular (conteúdos e objetivos) suficientemente abrangente para poder desenvolver nos alunos capacidades e atitudes diversificadas e abrir-lhes portas das diferentes áreas de conhecimento e de expressão. Em relação ao ensino secundário, importa reafirmar que este é um ciclo de ensino obrigatório mas diferenciado, com valências múltiplas e não mutuamente exclusivas. É o momento em que se realiza uma primeira escolha dos jovens que, no entanto, está longe de ser uma escolha definitiva. É por isso necessário sublinhar que este nível de ensino deve fazer sentido por si só e não pode ser visto à luz de um ciclo de pré-ensino superior, ainda que de cursos de prosseguimento de estudos se possa tratar. Todos os alunos do ensino secundário, independentemente do tipo de curso que escolham, devem ter um tratamento equivalente em termos de direitos e deveres e diferenciado em termos das suas opções, num pressuposto prévio de que todos os cursos têm o mesmo nível de dignidade, em particular através da dignificação dos cursos profissionais e da integração dos seus alunos num sistema que lhes permita qualidade de aprendizagem, justeza na avaliação e na abertura de percursos futuros.

Com este quadro de fundo estão anunciadas medidas educativas que, no momento em que escrevo, balançam entre um bem anunciado e um processo duvidoso. Pede-se-nos um novo olhar sobre o currículo e não vemos uma construção consistente, planeada. Aponta-se-nos um horizonte de esperança mas no caminho que trilhamos é difícil antecipar esse horizonte, abrindo assim uma brecha perigosa entre altas expectativas (será que ainda as temos?) e baixas, muito baixas condições para as alcançar. Um bom exemplo disso é o recente documento *Perfil dos alunos à saída da Escolaridade Obrigatória*.

Neste documento, que se assume como referencial capaz de convocar *os esforços e a convergência da sociedade*, são explicitados *princípios, visão, valores, competências* *e as decorrentes aprendizagens dos alunos ao longo de doze anos de escolaridade.* Assim sendo, o que nele está explicitado pretende estabelecer *uma visão de escola e um compromisso da escola* e servir de matriz *para a tomada de decisões sobre as opções de desenvolvimento curricular* de quantos *direta ou indiretamente têm responsabilidades na educação*. O *perfil* apresenta uma *visão de futuro* relevante para os nossos jovens e nele encontramos os grandes compromissos civilizacionais da cultura a que pertencemos: a *base humanista* e o compromisso com *o desenvolvimento sustentável*, uma educação para a *consecução efetiva das aprendizagens* assente no *valorizar do saber*, com *coerência e flexibilidade*, com *adaptabilidade e ousadia*, capaz de dar a *estabilidade* indispensável ao sistema para que, com tempo e persistência, possa consolidar-se e simultaneamente adaptar-se, produzindo os frutos desejados; uma educação que tem como requisito a *inclusão* que deve traduzir com consistência a equidade e a democracia que queremos e defendemos.

A perplexidade entra-nos quando olhamos, por exemplo, para as *Implicações práticas* e para os *Descritores Operativos* enunciados neste documento e imediatamente vemos a distância para a nossa realidade mas sobretudo para a possibilidade de a mudar.

Definir este *Perfil*, ao contrário daquilo que tem sido dito frequentemente acusando-o de ser um conjunto banal de generalidades, é um ato fortemente ideológico (como o deve ser) e tem a ver com o modelo de sociedade que queremos construir e com a forma como queremos educar as nossas crianças e os nossos jovens. O que dizemos é que queremos formar jovens autónomos, com autoestima e confiantes nas suas capacidades, respeitadores da autonomia dos outros, ativos, intervenientes e capazes de colaborar com outros; jovens que possuam uma base sólida de cultura humanística e científica, com sensibilidade, com compromisso social e ecológico, abertura e espírito crítico, capazes de se adaptar às mudanças, de interpretar e analisar a própria realidade e realidades outras, capazes de apreciar o mundo da cultura e os valores estéticos; jovens conscientes da importância do desenvolvimento saudável do seu corpo, quer no que diz respeito à condição física, quer ao controlo emocional, inseridos numa realidade fortemente tecnológica, sensorial e visual, numa época de "tempo veloz" e constante mudança.

DAS APRENDIZAGENS

A APM está agora a participar na tarefa de definir as *aprendizagens essenciais* para as disciplinas de Matemática tendo como referência os atuais programas. Tarefa difícil, quase impossível, que ainda assim decidimos aceitar como desafio e contributo para as mudanças necessárias. Em relação à Matemática no ensino básico e à Matemática A, como trabalhar aprendizagens referentes a listagens de conteúdos? Não se trata tanto de discutir os conteúdos e hierarquiza-los, mas sobretudo as finalidades e objetivos e práticas essenciais, de acordo com o *Perfil*, numa perspetiva de desenvolvimento tríplice de conhecimentos, capacidades e atitudes que tenham um vínculo claro com a Matemática. Jogam-se aqui questões fundantes de concepção e questões metodológicas: que abordagens, para os diversos conteúdos? Que estratégias de desenvolvimento de trabalho na sala de aula? Mas também, que conceções sobre a própria Matemática? No entanto, mais uma vez, a discussão parece estar a generalizar-se e a distorcer para a negociação das horas atribuídas a cada disciplina.

O grande contributo da Matemática na formação das crianças e jovens, para além dos conteúdos fortes e de grande aplicabilidade em todas as áreas científicas e tecnológicas, sociais e humanas, económicas, ambientais, estéticas, é o desenvolvimento de capacidades como, a de formular e resolver problemas, a de comunicar e raciocinar em Matemática, a da memória, bem como o desenvolvimento do rigor, do espírito crítico e da criatividade. Como linguagem, a Matemática é ainda um forte instrumento de interpretação (e intervenção) da realidade, bem como das possibilidades do pensamento humano e de outras realidades, inclusive sem expressão física, para além de instrumento de comunicação rigoroso e de grande universalidade.

Nesse sentido, o que entendemos dever procurar é que os nossos jovens possam compreender e utilizar a Matemática, promovendo uma visão adequada da Matemática e da atividade matemática e favorecendo uma relação positiva com a Matemática.

Nos programas de Matemática em vigor para o Ensino Básico e de *Matemática A* a aprendizagem é entendida como um processo linear e cumulativo; neles se espartilha a aprendizagem "pulverizada" em centenas de (micro)objetivos comportamentais, com abordagens demasiado formais e em que se pressupõe que as metodologias de ensino são apenas estratégias de motivação e não meio e instrumento tendo em vista a promoção da apropriação e construção de conhecimento, e em que se assume que os alunos não aprendem descobrindo ou errando, apenas se entretêm... A opção metodológica a eles subjacente é clara: *trata-se, assim, de uma abordagem diretiva que procura evitar os erros decorrentes da descoberta dos alunos e que os ajudará a construir representações corretas dos problemas, evitando* *os desvios originados pelas falsas interpretações que tantas vezes ocorrem em todos os níveis de escolaridade.*

Sabe-se que a capacidade de formular e resolver problemas é uma das principais competências exigidas hoje em dia e foi justamente incluída no *Perfil*. Sendo esta uma das áreas específicas que a Matemática trabalha de uma forma sistematizada há décadas, o que se entende, nos atuais programas, é *que se queremos eleger a resolução de problemas como finalidade da aprendizagem, não a podemos tomar como meio e método*, convertendo a resolução de problemas em meros exercícios de aplicação da matéria dada, com número de passos previamente definidos. Assim o atual programa avisa mesmo: *A resolução de problemas não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta que, podendo constituir estratégias de motivação, não se revelam adequadas à concretização efetiva de uma finalidade tão exigente. Embora os alunos possam começar por apresentar estratégias de resolução mais informais recorrendo a esquemas, diagramas, tabelas ou outras representações, devem ser incentivados a recorrer progressivamente a métodos mais sistemáticos e formalizados.*

A sobrevalorização do cálculo, anulando e subjugando praticamente todas as outras dimensões e processos matemáticos, a ênfase nos aspetos formais, a desconfiança para com a tecnologia e a sua desvalorização na capacidade de possibilitar o acesso fácil e imediato a modelações matemáticas que, aliás, foram retiradas do programa, mostram bem o desacerto a que estamos votados e a dificuldade de, com este paradigma, chegarmos a definir *aprendizagens essenciais* com significado e pertinência. As próprias Metas Curriculares, na sua formulação e conteúdos refletem uma perspetiva uniformizadora e reprodutora do ensino. Não percebemos como é que a autonomia, os métodos ativos, o trabalho de grupo, as tarefas de investigação na sala de aula, a resolução de problemas, o tempo necessário para acompanhar todos os alunos, é compatível com este tipo de programa.

No mesmo sentido vai a falta de articulação curricular e o desmembramento da Escola como lugar privilegiado da colaboração e inter-relação integradora de saberes e práticas. O foco colocado na avaliação externa e nos seus resultados como sinal de rigor e qualidade — e que continua a persistir nas escolas, junto das famílias, nos media e, de uma maneira geral na opinião pública —com a consequente indução de práticas letivas, de investimentos familiares, de interiorização da necessidade de competir, foi – e é – uma das principais dificuldades colocadas a um trabalho articulado, harmonioso e partilhado no âmbito educativo e escolar; estas provas, de forma especialmente gravosa nos primeiros anos, levaram a um estreitamento e a uma distorção curriculares sem precedentes e por isso sempre defendemos que a sua introdução em anos não terminais de um segmento de ensino completo deveria ser rapidamente revertida como em boa hora o foram.

DA APM E DOS PROFESSORES

No momento em que escrevo estou a terminar o segundo mandato de presidente da Direção da APM. Foram anos, entre 2012 e esta primeira parte de 2017, de um enriquecimento pessoal indescritível e incomensurável. A APM e os professores que ensinam Matemática foram sempre o meu estímulo nos momentos difíceis em que o compromisso com um ensino de qualidade para todos os alunos e com todos os alunos se converteu numa exigência de vigilância e presença sem tréguas. Este artigo é fruto da reflexão e de intervenções feitas em múltiplos encontros com professores ao longo destes anos. Hoje, nesta hora que é também de gratidão e renovado compromisso, o meu apelo é que não tenhamos medo da mudança. Porque *é (a) hora*, é a hora dos professores. Por isso é aos professores que presto a minha homenagem: com más e boas políticas educativas, com boa e má imagem pública, com reconhecimento ou não das direções das escolas, com maus ou bons ambientes, resistindo ao cansaço e ao desgaste, é aos professores que se tem devido o progresso das aprendizagens dos nossos alunos, naquela relação de autonomia e proximidade na sala de aula e fora dela. Todas as mudanças têm que ser feitas com os professores e não contra eles ou apesar deles. E, neste momento, é urgente mudar e por isso é urgente mudar com os professores e através dos professores. É urgente, por isso, reconstruir o tecido educativo reerguendo os professores. É imprescindível recuperar os professores, ganhar os professores, confiar nos professores. Ganhá-los para a esperança que, no dizer de Hannah Arendt, *reside sempre na novidade que cada geração traz consigo* e que por isso nos exige uma opção consciente pelo ato educativo que nunca é neutro, e pelo tempo presente que nos desafia em cada momento. Acrescenta Arendt, *a educação é assim o ponto em que se decide se se ama suficientemente o mundo* — e eu acrescentaria, explicitando, o tempo, o nosso tempo — *para assumir responsabilidade por ele e, mais ainda, para o salvar da ruína que seria inevitável sem a renovação, sem a chegada dos novos e dos jovens.*

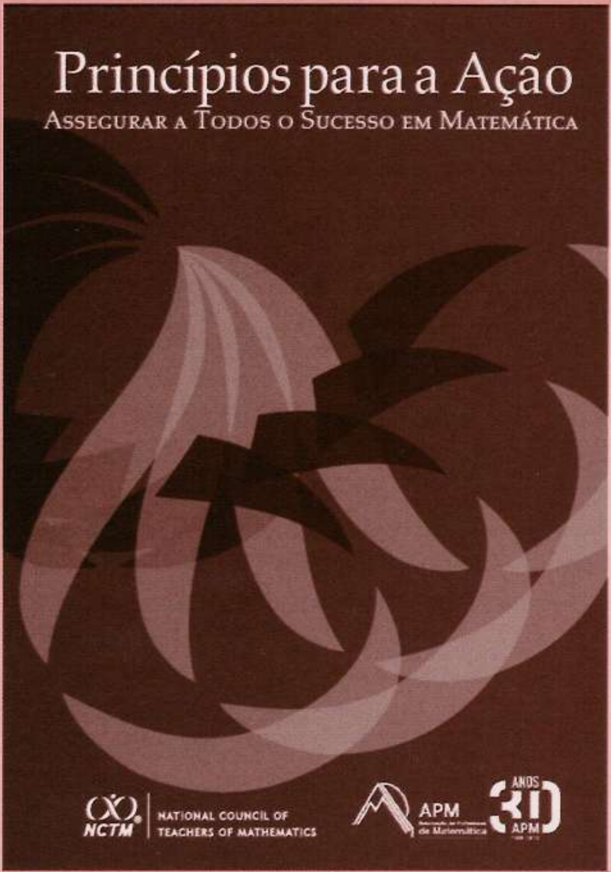
Certamente que precisamos de melhores condições de trabalho em muitos sentidos e, sobretudo, no *sentido* desse mesmo trabalho; certamente que precisamos que se nos reconheça o valor e o indefectível papel que temos na

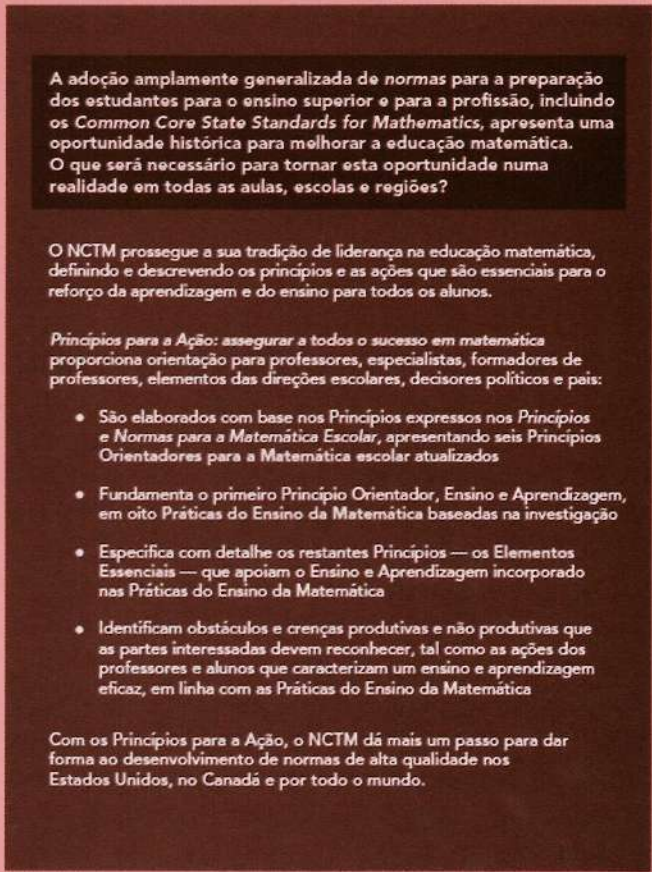
Educação, na vida das escolas e no crescer dos nossos alunos; certamente que precisamos de apoios e certamente que precisamos de recuperar o desígnio do trabalho colaborativo entre nós, onde a cizânia do confronto e da disputa foi semeada. Certamente que nunca será suficiente nem bastante que a nossa voz se erga com determinação. Mas gostava de voltar a Hannah Arendt quando acrescenta ao amor ao mundo, este outro ato de amar: *A educação é também o lugar em que se decide se se amam suficientemente as nossas crianças para não as expulsar do nosso mundo deixando-as entregues a si próprias, para não lhes retirar a possibilidade de realizar qualquer coisa de novo, qualquer coisa que não tínhamos previsto, para, ao invés, antecipadamente as preparar para a tarefa de renovação de um mundo comum.*

É a nossa hora!

Lurdes Figueiral
Presidente da APM

PUBLICAÇÕES APM





A adoção amplamente generalizada de *normas* para a preparação dos estudantes para o ensino superior e para a profissão, incluindo os *Common Core State Standards for Mathematics*, apresenta uma oportunidade histórica para melhorar a educação matemática. O que será necessário para tornar esta oportunidade numa realidade em todas as aulas, escolas e regiões?

O NCTM prossegue a sua tradição de liderança na educação matemática, definindo e descrevendo os princípios e as ações que são essenciais para o reforço da aprendizagem e do ensino para todos os alunos.

Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática proporciona orientação para professores, especialistas, formadores de professores, elementos das direções escolares, decisores políticos e pais:

- São elaborados com base nos Princípios expressos nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, apresentando seis Princípios Orientadores para a Matemática escolar atualizados
- Fundamenta o primeiro Princípio Orientador, Ensino e Aprendizagem, em oito Práticas do Ensino da Matemática baseadas na investigação
- Especifica com detalhe os restantes Princípios — os Elementos Essenciais — que apoiam o Ensino e Aprendizagem incorporado nas Práticas do Ensino da Matemática
- Identificam obstáculos e crenças produtivas e não produtivas que as partes interessadas devem reconhecer, tal como as ações dos professores e alunos que caracterizam um ensino e aprendizagem eficaz, em linha com as Práticas do Ensino da Matemática

Com os Princípios para a Ação, o NCTM dá mais um passo para dar forma ao desenvolvimento de normas de alta qualidade nos Estados Unidos, no Canadá e por todo o mundo.

Do Prefácio à Edição Portuguesa

"A Associação de Professores de Matemática (APM) possibilita, mais uma vez, ao público de língua portuguesa o acesso a um importante documento do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) dos EUA, organização cuja reflexão e produção tem constituído uma indispensável referência para a investigação e a prática do ensino da Matemática, um pouco por toda a parte.

A APM deseja que toda a comunidade que, em Portugal, trabalha e se interessa por um ensino de qualidade para e com todos os alunos, possa abrir-se a esta reflexão e possa debater com lucidez e conhecimento as questões que se prendem com os temas e os processos matemáticos mais prementes e significativos, em função das idades, da época em que vivemos, e do entendimento tido, quer sobre a própria Matemática como atividade e como corpo de conhecimentos, quer sobre a evolução, o conhecimento internacional e a investigação partilhada no âmbito do ensino, nomeadamente na didática, no currículo e na avaliação."

O humor no ensino da Matemática pode ser coisa séria!

Luís Menezes
Pablo Flores

O ensino da Matemática ocorre em situações de comunicação entre o professor e os alunos. Para que esta comunicação tenha lugar é necessária a existência de um ambiente de aprendizagem em que os participantes se encontrem predispostos a compartilhar significados. As atitudes do professor e dos alunos são fundamentais para a criação deste ambiente, que é favorecido se o discurso da aula é agradável, aberto à participação de todos e respeitador da diversidade de perspetivas.

Desde que a perspetiva socioconstrutivista afirmou que a aprendizagem se produz por construção e reconstrução de significados, num espaço de interação e negociação de significados, os professores procuram apresentar aos alunos situações matemáticas desafiantes que favoreçam o aparecimento de ruturas cognitivas. Estas ruturas acontecem quando os alunos são confrontados com tarefas matemáticas não rotineiras, frequentemente em situações inesperadas, que lhes provocam desequilíbrios cognitivos e os obrigam a pensar *outside the box*.

O humor permite que estas condições para a ocorrência da aprendizagem da Matemática se possam verificar, uma vez que este, por um lado, facilita a comunicação na sala de aula por criar um clima distenso e agradável e, por outro lado, pode proporcionar o conflito cognitivo ao apresentar situações inesperadas e criativas (Guitart & Flores, 2003).

Uma das teorias que explicam o humor, ou porque se criam situações humorísticas, assume que este se produz ao apresentar saídas imprevistas numa situação reconhecida e compartilhada por diversos interlocutores (Flores, 2003; Guitart, 2012). No ato humorístico, a reação física do riso é provocada pela simultaneidade de duas ou mais circunstâncias incongruentes, que não se ligam logicamente entre si (Adão & Oliveira, 2010; Martin, 2008). Por exemplo, numa tira de banda desenhada (BD) muito conhecida, do gráfico argentino Quino, é-nos apresentada uma professora a desenhar um pentágono num quadro negro, ao mesmo tempo que ela diz: "Bem, hoje vamos estudar o pentágono". Logo em seguida, Mafalda, um dos alunos da classe, comenta: "E amanhã, o Kremlin?" Depois de uma pequena pausa, a protagonista completa a sua intervenção: "Quer dizer, para equilibrar.". A resposta inesperada de Mafalda à professora, e a incongruência do sentido das intervenções, leva os leitores a analisar o sentido de cada uma das ideias apresentadas, a indagar por conexões entre elas e a encontrar o humor na situação apresentada.

As situações humorísticas que surgem nos média, em revistas humorísticas e também na internet, frequentemente na forma de tiras de banda desenhada, fazem, por vezes, uso da Matemática, como acontece na situação descrita anteriormente. Em alguns casos, esse uso decorre de os autores necessitarem da Matemática para resolver uma situação previamente apresentada. Em outros casos, para fazerem humor com os próprios conceitos matemáticos que fazem parte da cultura matemática dos leitores a que é destinado. Em muitos casos, é o próprio ensino-aprendizagem da Matemática que é alvo do sarcasmo dos autores de humor, tirando partido do facto de esta ser uma disciplina muito marcada socialmente. Estas propostas humorísticas podem ajudar-nos a compreender as situações em que os conceitos matemáticos estão a ser empregues, a identificar a forma como a Matemática é vista pela sociedade, a observar que aspetos dos conteúdos matemáticos são vistos de forma jocosa e que erros de interpretação se fazem dos conteúdos matemáticos.

Assim, parece-nos que o humor sobre e com a Matemática pode constituir um recurso didático interessante para a sala de aula. Com este texto, procuramos refletir brevemente sobre o humor na Matemática, apresentando algumas ideias sobre o seu uso no ensino-aprendizagem desta disciplina.

REFLETINDO SOBRE O HUMOR

O humor pode ser visto como um modo de agir que envolve frequentemente a comunicação de sentidos incongruentes, divertidos de alguma maneira e que provocam nas outras pessoas a boa disposição e o riso (Flores & Moreno, 2011). O conceito de humor surge, muitas vezes,associado ao de "cómico". No entanto, trata-se de conceitos diferentes dado que a situação cómica ocorre, múltiplas vezes, pela surpresa e pelo ridículo de um acontecimento inesperado. Por exemplo, será eventualmente uma situação cómica a entrada de um professor numa sala de aula em que este, por engano, usa dois sapatos de cor diferente. Por seu turno, a situação humorística resulta de uma interação comunicativa entre pessoas que tem subjacente, por quem a promove, a intenção de despertar nos outros o riso e a boa disposição, mediante o emprego de uma estratégia intelectual potencialmente cómica que toma em conta os significados dos objetos que aparecem nela de forma inesperada e criativa, seja pela incoerência que revelam, pelo sentimento de superioridade que veiculam relativamente à situação retratada ou mesmo pelo *nonsense* (Banas, Dunbar, Rodriguez &Liu, 2011; Flores, 2003).

O humor pode ocorrer em situações recreativas, por exemplo, num espetáculo de teatro, num programa televisivo ou na Internet. Neste caso, a função principal do humor é divertir as pessoas, criando momentos de descompressão e bem-estar. Os benefícios do humor para o bem-estar levam a que ele seja utilizado no campo da saúde, sendo colocado ao serviço da melhoria dos doentes (Fernandes, 2015). O humor pode também ser usado com o objetivo de melhorar o desempenho das pessoas, tanto em contexto profissional como em contexto educativo.

No contexto educativo, o humor é colocado ao serviço da instrução, cumprindo as funções de ajudar a diminuir tensões e disposições pouco favoráveis à aprendizagem, de aumentar a motivação e de facilitar a comunicação entre professor e alunos (Matarazzo, Durik &Delaney, 2010). Guitart e Flores (2003) consideram que no campo educativo, o humor cumpre, essencialmente, duas funções: (i) afetiva/emocional; e (ii) intelectual/cognitiva. O humor tem valor afetivo/emocional dado que incrementa a coesão dos grupos e diminui situações de *stress* que ocorrem com alguns alunos na aprendizagem da Matemática. O humor possui potencialidades para o desenvolvimento intelectual dos alunos uma vez que envolve o raciocínio e a memória no processamento de informação, ou seja, os alunos mobilizam conceitos e raciocínio para interpretar as situações humorísticas que lhes são colocadas (Banas et al., 2011). A revisão dos estudos realizados nas últimas quatro décadas sobre o uso do humor com intenção educativa, nas diversas disciplinas escolares, mostra que: (i) a função afetiva/emocional tem sido preferida relativamente à função intelectual; (ii) o humor é sobretudo uma estratégia comunicativa do professor para criar um bom ambiente de aprendizagem e facilitar o ensino; (iii) o uso do humor é marcado pelas características e estilos individuais dos professores, tendo uma certa dose de espontaneidade; e (iv) o humor não agressivo e associado aos conceitos em estudo tem resultados positivos na aprendizagem dos alunos (Banas et al., 2011).

RIR COM A MATEMÁTICA

A Matemática é uma atividade humana fortemente enraizada na cultura de todos os povos. Para além de estar profusamente presente no quotidiano das pessoas é uma disciplina estruturante nos currículos escolares e uma área do saber importante. Por isso, é natural que a Matemática seja alvo da atenção dos humoristas. Em particular, centrar-nos-emos no humor que está presente na banda desenhada, em tiras, vinhetas e outras ilustrações.

As representações sociais da Matemática como uma matéria "difícil", "complicada" e que "atemoriza os alunos" são muito comuns na sociedade ocidental. Na tira de Dragonarte (figura 1), o medo da Matemática é tal que faz acalmar a classe mais difícil, que outros super-heróis não conseguem em outras disciplinas:

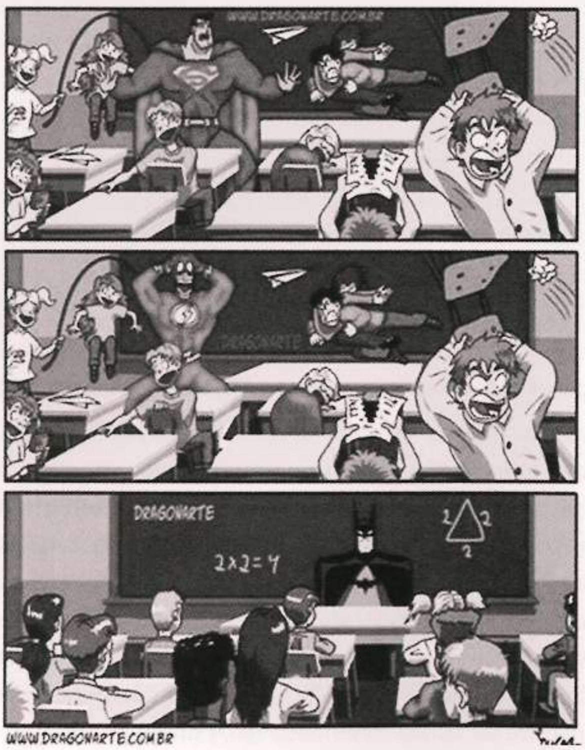


Figura 1

Os professores aparecem muitas vezes nas situações humorísticas associadas à Matemática, seja para refletir a imagem social que se tem da Matemática seja para apontá-los como responsáveis por essa imagem. Podemos apreciar na figura 2, da autoria do humorista Zeillinger Dominik (disponível na sua página http://www.mathtics.doze.at/index.html), uma visão corrente da Matemática e dos professores de Matemática, onde o simbolismo e o ato de provar o que parece óbvio tende a ser encarado como uma obsessão. Esta situação deve fazer-nos pensar sobre a importância de explicar o que fazemos, mas também a razão de o fazermos, mostrando que "provar o que é óbvio" (com argumentos mais ou menos complexos) é necessário (e não desnecessário, como a "sociedade", em geral, evoca).

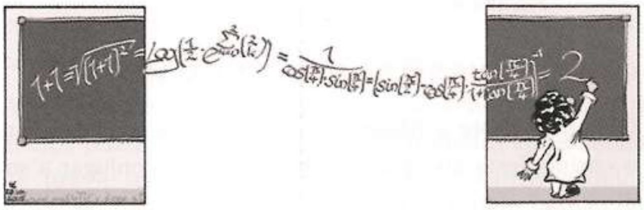


Figura 2

O cartoonista norte-americano Bill Watterson, autor do famoso dueto Calvin & Hobbes, apresenta-nos na figura 3 um diálogo entre os dois protagonistas em que o primeiro apresenta a "verdade" matemática como uma questão de fé:

Figura 3

Muitas situações humorísticas retratam episódios que visam diretamente a utilização de conceitos matemáticos. As figuras seguintes (4 e 5) apresentam duas situações do domínio da Estatística que glosam humoristicamente com conceitos desta área. Na primeira (figura 4), Chumy Chumez, humorista espanhol, apresenta um cidadão que reivindica *"Queremos viver como nas estatísticas"*. A figura 5 traduz uma anedota muito conhecida que humoriza com o conceito de média.

A utilização humorística de conceitos matemáticos em contexto de sala de aula é muito comum nas tiras da BD.

Figura 4

Figura 5

O cartoonista norte-americano Randy Glasbergen dedicou parte importante da sua obra a desenhar *cartoons* com contexto educativo, e alguns sobre a Matemática. Na figura 6, apresentamos uma situação relativa ao cálculo de uma multiplicação simples que, estando errada, não deixa de ter um "fundo" de verdade.

As imagens das figuras 7 e 8 recriam duas situações de uma hipotética realidade em que a Matemática é usada de uma forma pouco convencional e potencialmente humorística.

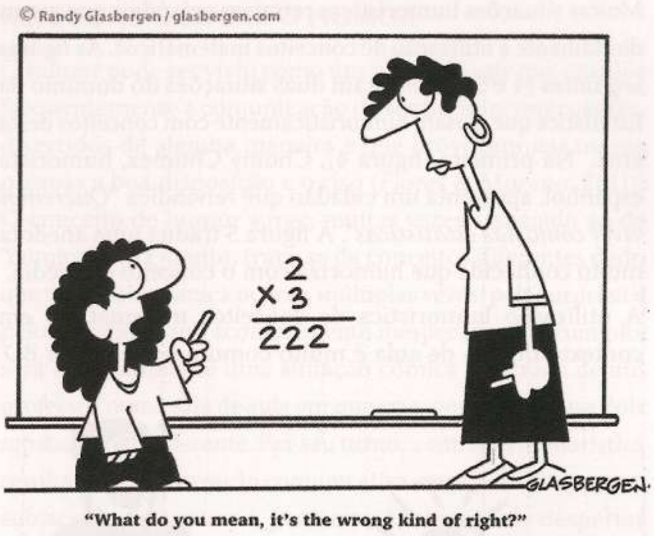


Figura 6

Figura 7

Na figura 7, a situação criada por Ryan Kramer torna-se hilariante face ao inusitado número que representa a pessoa que está a ser atendida e a grande "distância" face ao número 2 (que parecia, inicialmente, excelente) que foi atribuído ao protagonista.

A figura 8 retrata um episódio irrealista, de compra de uma camisola, presente em *Comic Math* (http://www.comicmath.com/comics.html), em que se procura fazer um trocadilho entre os conceitos de "número racional" e de "racionalidade" e se apresenta o preço de uma camisola de forma invulgar, recorrendo ao quadrado da soma de dois números irracionais.

Estas situações humorísticas que focam diretamente conceitos matemáticos são aquelas que têm maior potencial para poderem ser utilizadas em sala de aula, dado que implicam da parte dos alunos competência matemática para rir com elas.

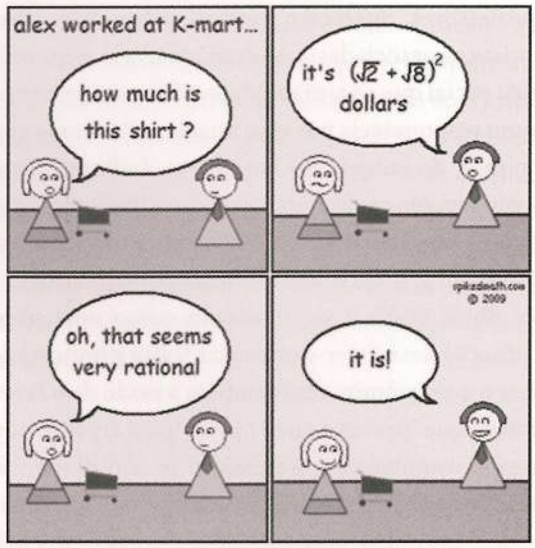


Figura 8

O HUMOR NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA

O humor sobre a Matemática tem potencialidades para o ensino desta disciplina, sobretudo se se conjugar a sua dimensão afetiva/emocional com a dimensão cognitiva/intelectual. As tarefas que tomam como base situações humorísticas, nomeadamente a partir de tiras de BD, podem cumprir esse papel. Neste caso, o foco do humor está no trabalho com conceitos matemáticos, ou seja, os alunos são convidados a se envolverem em desafios matemáticos com situações em que o humor está presente. Assim, procura-se aliar os efeitos afetivos e emocionais que uma situação humorística pode trazer com o desenvolvimento de competências matemáticas visando a construção de conhecimento matemático.

A tira do humorista Chris Browne, de "Hagar, o terrível" (figura 9), apresenta inicialmente uma situação em que face a um ataque em curso se prepara um contra-ataque ao inimigo que será iniciado após uma contagem até 10. O cómico da situação advém da forma como a "contagem" é realizada, motivada pelo medo de Chiripa. Esta personagem "conta" recorrendo a números racionais representados por frações. Partindo desta tira, Menezes, Gomes, Rodrigues e Tavares (2009) conceberam uma tarefa matemática, para o 5º ano de escolaridade, no tópico "Números racionais" (figura 10). Esta tarefa, que fazia parte de uma sequência de tarefas matemáticas pensadas para estudar este tópico matemático, procura tirar partido da componente afetiva/emocional que a situação humorística pode trazer para os alunos e potenciá-la, colocando-a ao serviço da aprendizagem de conceitos matemáticos. Ou seja, a tarefa "Ao ataque!"conjuga as dimensões emocional e intelectual da situação humorística,

Figura 9

assumindo que estas dimensões se relacionam. Se os alunos não possuírem competência matemática para compreender a situação, não conseguirão captar o humor que está presente nela. Para além disso, o trabalho matemático sobre a situação permitirá aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos e, consequentemente, captar a dimensãocómica do episódio.

A tarefa "Ao ataque!" começa por apelar à compreensão dos alunos relativamente à situação humorística apresentada na tira e segue com um conjunto de outros pedidos procurando que os alunos, primeiro em grupo e depois através da discussão coletiva, atinjam um conjunto de objetivos (ligados a tópicos matemáticos e a capacidades de natureza transversal), nomeadamente: (i) comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas; (ii) localizar e posicionar na reta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas; (iii) interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas; e (iv) explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos.

FINALIZANDO

A aprendizagem da Matemática depende fortemente das experiências em que os alunos se puderem envolver e da possibilidade de refletir sobre elas. Essas experiências de aprendizagem estão fortemente dependentes das tarefas que

Ao ataque![3]

Hagar, o terrível, Chris Browne

1. **Descreve a situação apresentada na tira. Que intenção terá tido o protagonista desta situação e que estratégia usou?**
2. **Quantos números tem o Chiripa que dizer antes de atacar? Que números foram usados? E que representações?**
3. **Como poderia reduzir o tempo de espera? E se, pelo contrário, quisesse atrasar ainda mais o ataque?**
4. **Imagina que o Chiripa chega a $9\frac{7}{8}$. A que estratégia pode recorrer para adiar ainda mais o início do ataque?**

[3] Tarefa inspirada em Flores, P. (2003). *Humor grafico en el aula de matemáticas*. Granada: Arial.

Figura 10

o professor coloca aos alunos e do ambiente de aprendizagem das aulas. Como referimos anteriormente, o humor em torno de situações humorísticas tem boas possibilidades de garantir estas duas condições para a aprendizagem. Por isso, é importante preparar tarefas matemáticas desafiantes, com situações humorísticas, que permitam a aquisição e aprofundamento de conceitos matemáticos e o desenvolvimento de capacidades transversais como a comunicação e o raciocínio matemáticos. A tarefa "Ao ataque!" corresponde a um exemplo do que pode ser a utilização do humor em aulas de Matemática, combinando na aprendizagem elementos de natureza cognitiva e emocional. Desenvolver tarefas matemáticas com estas características, enquadradas curricularmente e pensadas para uso em sala de aula, é um desafio para professores e para desenvolvedores de currículo.

Referências

Adão, T., & Oliveira, A. M. (2010). Mecanismos cognitivos e humor: uma atitude linguística que pressupõe a inteligibilidade mútua. In *Proceedings do Congresso Línguas Pluricêntricas: Variação Linguística e Dimensões Sociocognitivas*, Universidade Católica Portuguesa.

Banas, J. A., Dunbar, N., Rodriguez, D., & Liu, S. J. (2011). A review of humor in educational settings: Four decades of research. *Communication Education*, 60(1), 115-144.

Fernandes, C. J. (2015). *O humor em cuidados paliativos*. Dissertação de mestrado apresentada à Escola Superior de Saúde do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Flores, P., & Moreno, A.J. (2011). *Matemáticamente competentes para reír*. Barcelona: Graó.

Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de Matemáticas*. Granada: Arial.

Guitart, M. (2012). *Permitido reír... Estamos en clase El humor como recurso didáctico en aula de Estadística* (Tese de Doutoramento,Universidade Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina).

Guitart, M., & Flores, P. (2003). Humor gráfico para la enseñanza y el aprendizaje del azar. *Suma*, 42, 81-89.

Martin, R.A. (2008). *La psicologia del humor*. Madrid: Orion.

Matarazzo, K. L., Durik, A. M., & Delaney, M. L. (2010). The effect of humorous instructional materials on interest in a math task. *Motivation and emotion*, 34(3), 293-305.

Menezes, L., Rodrigues, C.; Gomes, H., & Tavares, F. (2009). *Números racionais não negativos - tarefas para o 5º ano*. Lisboa:DGIDC.

Luís Menezes

Escola Superior de Educação de Viseu

Pablo Flores

Universidade de Granada

ESTATUTO EDITORIAL DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

A *Educação e Matemática* é uma publicação periódica da Associação de Professores de Matemática (APM). A sua periodicidade atual é de cinco números anuais, sendo um deles temático e duplo. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro. Os principais objetivos da *Educação e Matemática* são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas atuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias... A *Educação e Matemática* tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com caráter permanente. A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista. À semelhança das outras revistas informativas, a *Educação e Matemática* assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Diretora da Educação e Matemática

Uma curva de cada vez...

A espiral de Arquimedes

Eduardo Veloso

Nota prévia – Para evitar ocupar em cada artigo desta série um espaço prévio sobre o método, que usaremos sempre, no traçado das curvas – e reflectido portanto nos procedimentos e nas figuras que ilustram os artigos – redigimos esta nota prévia, que servirá como introdução a todos os artigos.

Como *software* de apoio usaremos sempre, e aconselhamos, o *Geometer's Sketchpad* (v. 5) (*GSP*), mas qualquer outro programa para geometria dinâmica com capacidades semelhantes pode ser utilizado, devendo o leitor fazer as indispensáveis adaptações.

1) No caso do *GSP*, aberto um documento, *o primeiro passo* a dar é instalar um sistema de coordenadas (não porque vamos utilizar a geometria analítica, mas para incluirmos uma *recta real* no plano).

- menu *Graph: Define Coordinate System;*
- *seleccionar* os eixos coordenados e depois comando *Display: Hide Axes*;
- esconder a *grid:* comando *Graph: Hide Grid*;
- *etiquetas 0* e *1* nos dois pontos que restam e traçar a recta definida por eles: *seleccionar 0* e *1* e comando *Construct:Line*;
- *0 e 1* serão as extremidades do segmento *unidade, e podemos ajustá-los;*

2) O método geral que utilizaremos para o traçado de cada curva será o seguinte:

- criamos um parâmetro *t* sobre a recta *01* ou sobre parte dela:
- construímos, de acordo com a *definição da curva* e dependente de *t*, um ponto *P* sobre a curva;
- seleccionamos *t* e *P* e traçamos a curva: comando *Construct:Locus.*

Naturalmente, com o domínio actual, no ensino da matemática, da geometria analítica, as curvas são normalmente apresentadas *a partir da sua equação.* Mas trata-se, do ponto de vista da educação matemática para todos, de um *erro crasso,* pois ignora um dos aspectos mais importantes dessa educação, que é a história da matemática.

E passemos então à espiral de Arquimedes...

UM POUCO DE HISTÓRIA

Esta curva foi descoberta pelo matemático e astrónomo grego Conon, nascido, cerca de 280 a.C. na mesma ilha de Samos onde nascera Pitágoras trezentos anos antes. Arquimedes (287, 212 a.C.; filho do astrónomo Fídias) viveu e morreu em Siracusa, Sicília – então parte da Grécia – mas estudou em Alexandria.

Nesta cidade foi contemporâneo e amigo de Conon, por quem tinha muita consideração como matemático. Comunicou-lhe alguns resultados – sem demonstração – sobre a espiral e escreveu, no início do tratado *Sobre as Espirais,* que Conon tinha morrido antes de ter tido tempo suficiente para estudá-los, senão tê-los-ia certamente descoberto e demonstrado.

No referido tratado, Arquimedes descreve a curva espiral nos seguintes termos:

> Se uma semi-recta traçada num plano roda, em torno da sua origem, num movimento uniforme, voltando à posição de que partiu e se, ao mesmo tempo que a semi-recta roda, um ponto sobre a semi-recta se afasta dessa origem com velocidade constante, esse ponto descreverá uma ***espiral*** no plano. [1]

Ao longo dos tempos, a noção de espiral foi adquirindo contornos mais amplos, nomeadamente ao admitir outras relações matemáticas entre os dois movimentos, que na espiral de Arquimedes são ambos de velocidade constante.

TRAÇADO DA ESPIRAL

Começamos por construir a semi-recta *01* e será sobre essa semi-recta que construiremos o parâmetro *t*. Tenha o cuidado de, nas preferências do *GSP*, escolher como unidade de medida dos ângulos o *radiano*. Certifique-se além disso, no menu *Graph:Grid Form,* que está na versão *Square Grid* (embora a *grid* esteja escondida).

Vejamos então os passos que temos a dar para, no *GSP*, traçar a espiral (figura 1):

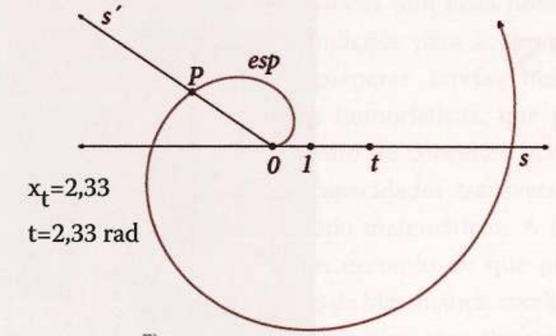


Figura 1

(1) – medimos o valor de *t*: menu *measure*, comando abcissa(x); obtemos= *2.23 (no caso da figura)*;

(2) – na calculadora do programa, multiplicamos r_t por *1 radiano*: menu *Number:Calculate;* obtemos *t = (x_t.1 radians) = 2.23 radians* (*no caso da figura*);

(3) – arrastando *t* na semi-recta *s*, vemos os valores x_t e *t* a variar;

(4) – seleccionar a semi-recta *s* e efectuar uma rotação de *t* radianos em torno de *0*, obtendo *s´*;

(5) – construa *P*, imagem da rotação de *t*, de centro em 0 e ângulo *t* radianos; naturalmente, *P* pertence a *s´*;

(6) – arraste *t* sobre *s*, e observe o movimento de *P*;

(7) –note que desta forma construiu um ponto *P* que está sobre a semi-recta inicial s rodada de *2.23 radianos* e simultaneamente se afasta em velocidade uniforme da origem, estando agora a uma distância de *2.23*; ou seja, o lugar geométrico traçado por *P*, quando *t* descreve a semi-recta *01*, *é uma espiral de Arquimedes!*

(8) – para traçar concretamente a espiral, basta seleccionar *t* e *P* e utilizar o comando *Construct:Locus.*

Nota: As semi-rectas *s e s´* não são essenciais na construção, servem apenas como referência à definição de Arquimedes.

VARIAÇÕES DA FORMA DA ESPIRAL

Primeira variante. Note-se que na espiral da figura 1 os pontos *t* e *P* afastam-se da origem *0 à mesma velocidade*... Mas, na definição de espiral de Arquimedes, exige-se *apenas* que os movimentos sejam uniformes, ou seja, a velocidade constante, mas não necessariamente iguais. Para ver que formas tomam as espirais em que as velocidades não sejam iguais, consideremos as constantes positivas *b e c*, em que *b<1* e *c>1*. Vamos construir duas espirais, a *esp.b* e a *esp.c*, em que o ponto P_b é resultado da rotação de *t* radianos do ponto *b.t* (ou seja, a sua velocidade de afastamento de *0 é menor* do que a de *t*) e o ponto P_c é resultado da rotação de *t* radianos do ponto *c.t* (portanto, a velocidade de afastamento de P_c é maior do que a de *t*). A figura 2 mostra as formas que tomam as espirais resultantes dos movimentos de P_b e de P_c , respectivamente.

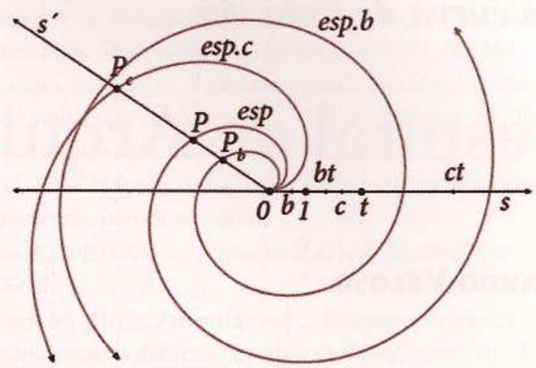


Figura 2

Segunda variante. Na definição de Arquimedes *também não se exige* que o ponto *P* inicie o seu movimento no ponto *0*, como o ponto *t*. Se marcarmos um ponto *a* sobre a recta *s* (como na figura 3) e depois, efectuarmos a rotação (de ângulo *t* radianos) do ponto *a+t* (em vez do ponto *t*, como no caso inicial), obtendo o ponto P_a, podemos traçar a espiral *esp.a*, "paralela", por assim dizer, à primeira espiral, mas partindo do ponto *a*.

A TRISECÇÃO DO ÂNGULO COM A ESPIRAL DE ARQUIMEDES

Como vimos em detalhe num artigo anterior[2], enquanto a divisão de um ângulo em dois ângulos iguais tem uma resolução simples com compasso e régua não graduada, a trisecção é um problema impossível se apenas podemos utilizar estes dois instrumentos. Os matemáticos gregos já tinham essa convicção – embora a demonstração apenas tivesse sifo feita no séc. XIX... – e portanto procuraram outros meios de resolver esse problema, que juntamente com a quadratura do círculo e a duplicação do cubo constituem os célebres três problemas clássicos da geometria grega.[3]

Arquimedes demonstrou, no tratado *Sobre as Espirais*, como a sua espiral podia resolver o problema. Na sua tese de mestrado, J. M. Rodrigues de Sousa mostra em detalhe essa solução.[4] Vejamos em que termos faz Arquimedes essa demonstração.

Seja *AOB* o ângulo a trissectar (figura 4) e seja a curva traçada pelo ponto *P* uma espiral de Arquimedes *qualquer*, apenas se exige que o ponto de partida seja o ponto *0*. Consideremos o ponto de intersecção *C* da semi-recta *0B* com a espiral.

Seja *D* um ponto sobre *0B* tal que o segmento *0D* tenha por medida 1/3 da medida de *0C* – o ponto *D* é constructível com régua e compasso, como o leitor pode confirmar (partindo da proposição 2, livro VI, de Euclides)[5]. Seja *E* o ponto de intersecção da circunferência de centro *0* e raio *0D* com a espiral. Como a espiral é de Arquimedes, o movimento da semi-recta em torno de *0* (desde *0A* até *0B*), tal como o do ponto *P*, sobre ela (desde *0* até *C*), que a vai traçar, são *uniformes*.

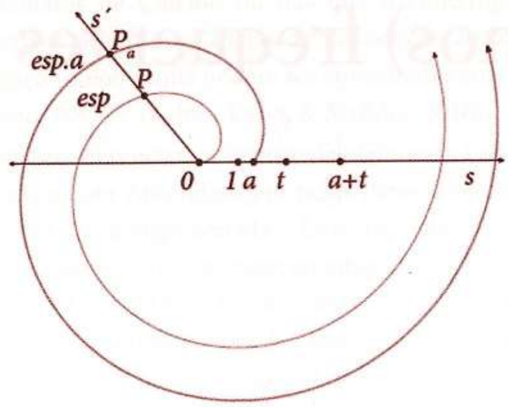


Figura 3

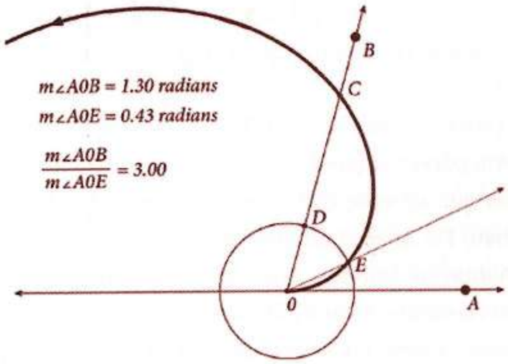


Figura 4

Ou seja, quando o ponto *P* percorreu 1/3 da distância *0C*, e está portanto sobre *E*, a semi-recta *0A* está sobre *0E* e percorreu um terço do ângulo *AOB*. Portanto, $\angle A0B/\angle A0E = 3$, como pretendíamos.

A ESPIRAL E OS CARRINHOS DE LINHAS

A minha mãe (tal como as trisavós dos meus leitores...) usava uma máquina de costura na qual a espiral de Arquimedes servia para os carrinhos de linhas serem bem comportados... Se não temos cuidado ao tentar enrolar automaticamente uma linha num chamado carrinho de linhas, o resultado será que a linha não fica uniformemente distribuída em toda a largura do carrinho, tendo tendência para se acumular nas extremidades. A espiral de Arquimedes resolve esse problema... vejamos como. A figura 5 mostra uma dessas máquinas de costura e, na figura 6, a peça que nos importa comentar. Vamos esquematizar essa peça na figura 7. O que o fabricante pretendia era uma parte da sua máquina de costura que enrolasse fio num carrinho de linhas. Mas pretendia que a *haste L* alimentadora do carrinho tivesse um movimento horizontal *uniforme*, para que o carrinho não ficasse com mais fio em certas zonas. Bom, movimento uniforme provocado por um movimento circular (como muitos que já existiam na máquina de costura) tinha que ser com uma *espiral de Arquimedes*, pensou o artífice...! Vai daí, como se pode ver no esquema da figura 7, inventou uma nova haste – a *haste K* – que era movida para a esquerda e para a direita num movimento uniforme, já que era empurrada e puxada por uma espiral de Arquimedes e pela sua simétrica, ao rodarem em torno do ponto 0.[6]

Figura 5

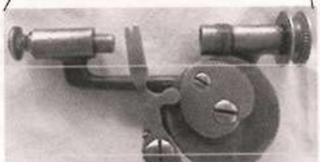


Figura 6

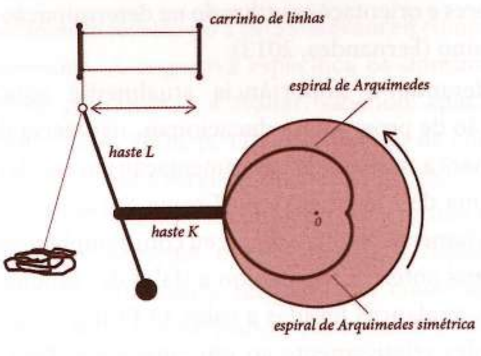


Figura 7

NOTAS

0. Veja o site de apoio a este artigo no endereço www.apm.pt/textosGTG/artigos_EM/index.html.
1. As obras de Arquimedes são do domínio público. Veja o site *http://www.gutenberg.org/ebooks/35550*
2. Educação e Matemática, nº 138, *O caracol de Pascal*
3. Ver *Os três problemas clássicos da matemática grega*, em Veloso, Eduardo, *Geometria:Temas Actuais*, p. 41.
4. Pode fazer o *download* da tese, em *pdf*, no site *http://www.prof2000.pt/users/miguel/tese/*.
5. Veja por exemplo no site da David Joyce, *http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVI/bookVI.html*
6. Não deixe de ler o magnífico artigo de Tony Phillips no site da American Mathematical Society: *http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2015-05*

Eduardo Veloso

Perguntas (mais ou menos) frequentes sobre primitivas

Patrícia Damas Beites
Sandra Bento
Maria Luísa Branco

A avaliação está na ordem do dia nos vários domínios da vida social, correspondendo a um processo que procura dotar os cidadãos de informações que tornem mais transparentes as opções tomadas com os dinheiros públicos, em matérias de interesse geral. Como salientado por Fernandes (2011), a avaliação de programas públicos corresponde a uma prática consolidada em muitos países, nos quais se incluem a maioria dos países europeus. Em Portugal, esta é igualmente uma preocupação e uma área que tem vindo a ganhar expressão. No domínio da educação, em particular, tem-se assistido à preocupação com a avaliação dos programas educacionais. O propósito desta avaliação consiste basicamente em perceber se um programa está a corresponder aos objetivos com que foi implementado, passando pela verificação da sua eficácia, a identificação de problemas no seu desenvolvimento e nos resultados obtidos, assim como a necessidade de alterações ou conceção de novos programas (Fernandes, 2011). A avaliação de um programa pressupõe o esclarecimento cabal do quadro de valores e orientações utilizado na determinação do valor do mesmo (Fernandes, 2013).

Considerando a importância atualmente concedida à avaliação de programas educacionais, não deixa de causar estranheza a ausência de experimentação nas escolas do novo Programa de Matemática do Ensino Secundário (PMES), contrariamente ao que aconteceu com a implementação do programa anterior, bem como a (falta de) fundamentação para as mudanças levadas a cabo. O PMES trouxe muitas novidades relativamente ao seu antecessor. Para além de aspetos estruturais e organizacionais, entre outros, introduziu novos tópicos matemáticos. Poderá este acréscimo de conteúdos comprometer a abordagem de outros? Esta e outras questões que nos parecem pertinentes foram colocadas em pareceres e artigos escritos por colegas do Ensino Secundário, do Ensino Superior e/ou investigadores em Didática da Matemática/Educação Matemática. Mais detalhes podem ser consultados, nomeadamente, em (APM, 2013), (SPIEM, 2015), (SPM, 2013) e nos números 126-127 da revista *Educação e Matemática*.

Entre as questões pertinentes colocadas sobre a exequibilidade do programa, destacam-se as dificuldades de gestão relativamente ao tempo destinado a cada tema. Dada a extensão do PMES, o cumprimento do programa parece impossível ou, pelo menos, muito difícil, a menos que se opte quase exclusivamente pelo método expositivo. De facto, modelos que se afastam deste e cuja implementação implica um maior dispêndio de tempo ficam seriamente comprometidos. A vertente temporal não parece, assim, ter sido bem analisada e a extensão do PMES acabará certamente por condicionar o livre-arbítrio dos professores, nomeadamente, quanto aos métodos de ensino-aprendizagem. Paradoxalmente, o PMES anuncia uma intenção nas palavras "autonomia pedagógica e liberdade" (Bivar et al., 2014, p. 3), fundamentação utilizada para não indicar abordagens preferenciais nem aprofundamentos adequados, embora a presença destes até pudesse ser justificada por estudos da Didática da Matemática. A ausência de indicações metodológicas claras pode também, de acordo com o referido atrás, ser problemático em termos de uma futura avaliação.

Não sendo o propósito deste trabalho discutir todas essas mudanças, no que se segue focamo-nos num tópico novo – Primitivas – até aqui da responsabilidade do Ensino Superior. Este insere-se no domínio de conteúdo do PMES designado por Primitivas e Cálculo Integral (Bivar et al., 2014, p. 21), o qual foi considerado facultativo, a título excecional, nos anos letivos 2017/18 e 2018/19. Apesar da extensão do programa e da posição que o tópico nele ocupa, acreditamos que se possa pensar numa abordagem que envolva aspetos transversais como resolução de problemas, métodos de ensino-aprendizagem não expositivos, uso de tecnologia.

No contexto descrito, parece-nos oportuno tentar perceber os motivos para a inclusão do tópico supracitado no PMES e partilhar perguntas, mais ou menos frequentes, sobre primitivas, que os nossos alunos nos colocaram em unidades curriculares de Cálculo ou nas que o contemplam nos respetivos programas. Ideias de introdução ao tópico ou de ligação à Economia podem ser consultadas em (Beites & Serôdio, 2015) e (Beites, Lobo, & Serôdio, 2016).

As citadas referências contêm ainda ideias para a abordagem do tópico com Aprendizagem pelos Pares, eventualmente auxiliada tecnologicamente. Este método de ensino-aprendizagem, cujos acontecimentos precursores foram apresentados em (Beites & Romano, 2014), caracteriza-se pelos típicos eventos de votação. Estes decorrem da proposta de questões conceptuais e implicam a indispensável discussão dos alunos com os seus pares (outros alunos), sob a mediação do professor.

A INCLUSÃO DAS PRIMITIVAS NO PMES

A propósito do PMES surgiram três pareceres, um da Associação de Professores de Matemática (APM), outro da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM) e um da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM). No primeiro, a inclusão do tópico das primitivas é vista como um prenúncio do sacrifício de outros conteúdos anteriormente lecionados e, noutros momentos, encarados como mais relevantes (APM, 2013). No segundo, o tópico é considerado um acréscimo de conteúdos e refere-se ainda o desconhecimento da razão para essa alteração (SPIEM, 2015).

No terceiro parecer sobre o PMES, contrariamente aos da APM e da SPIEM, salienta-se positivamente a alteração em questão por ser, por um lado, aproximante a programas congéneres a nível internacional e, por outro lado, um complemento essencial do Cálculo Diferencial que possibilita aumentar as suas aplicações (SPM, 2013). Esta posição é consentânea com a que se encontra no balanço da consulta pública realizada, infelizmente no reduzido espaço de tempo de um mês, pelos autores do PMES:

> É um dos pontos em que o anterior Programa se encontrava claramente desatualizado e desalinhado com aquilo que é a prática da maioria dos currículos internacionais. Em particular, o TIMSS-Advanced, que se constitui como um importante referencial internacional de avaliação para alunos do final do Ensino Secundário, refere explicitamente este ponto: «Integrate polynomial, exponential, trigonometric and rational functions. Evaluate definite integrals, and apply integration to compute the area under a curve». [(IEA, 2008, p. 14)] Note-se que a abordagem preconizada neste novo Programa dá resposta a quase todos estes requisitos (Bivar et al., n.d., p. 5).

Esta mesma justificação de alinhamento com o plano internacional surge no PMES, onde se refere a participação de Portugal em duas avaliações internacionais que foram tidas em consideração: o Programme for International Student Assessment (PISA) e o TIMSS-Advanced. Os autores esclarecem ainda que, tendo em conta que o PISA avalia estudantes de 15 anos, optaram pelo TIMMS-Advanced (Bivar et al., 2014, p. 3). No que diz respeito aos conteúdos matemáticos salientam que analisaram currículos de outros países não participantes no TIMSS-Advanced, embora sem especificar quais.

Torna-se assim pertinente recordar que o *Trends in International Mathematics and Science Study-Advanced* (TIMMS-Advanced) é uma avaliação do desempenho dos alunos em Física e em Matemática no final do Ensino Secundário. O estudo é desenvolvido pela *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA), associação independente formada por instituições de investigação educacional e por agências governamentais de investigação que se dedicam à melhoria dos sistemas educativos (IAVE, n.d.).

Ainda relativamente à justificação, no TIMSS-Advanced refere-se que o conteúdo de Cálculo foi definido com base no que, em princípio, surge nos anos finais de Matemática em quase todos os países participantes (IEA, 2008, p. 14). Assim, de facto, os tópicos do domínio de conteúdo Primitivas e Cálculo Integral do PMES consistem no que norteou o tópico Integrais do domínio de conteúdo Cálculo no TIMSS-Advanced. Contudo, não se utilizaram os resultados da avaliação do TIMMS-Advanced na construção do PMES, pois não participámos em 2008 e participámos sem o tópico das primitivas em 2015.

O enquadramento teórico do TIMSS-Advanced compreende duas dimensões. A cognitiva especifica os domínios dos processos de pensamento a avaliar: sabendo, aplicando e raciocinando (IEA, 2008, p. 11). A dimensão de conteúdo compõe-se das áreas a serem avaliadas: Álgebra, Cálculo e Geometria. Cada domínio de conteúdo especifica os tópicos por área, nomeadamente o do Cálculo. A organização do PMES é similar, com a terminologia coincidente de domínio de conteúdo e os verbos, como saber e justificar, que explicitam os desempenhos a evidenciar pelos alunos (Bivar et al., 2014, p. 4).

No entanto, a similitude só é parcial. No PMES fala-se pouco de raciocínio, reduzindo-se a sua menção às páginas 5 a 7, e não se utiliza o verbo raciocinar. Por outro lado, destaca-se o raciocínio hipotético-dedutivo como basilar, o que é natural na Matemática como Ciência, mas não parecem ser valorizados outros tipos de raciocínio que frequentemente o antecedem. No entanto, muitas vezes, um matemático passa pela construção de exemplos e pela enunciação de conjeturas previamente ao raciocínio marcadamente dedutivo na elaboração de uma demonstração.

Seria de esperar que outras formas de raciocínio associado ao dedutivo marcassem presença no PMES, nomeadamente o indutivo pela sua importância na atividade da Matemática e, consequentemente, no ensino da mesma. Apesar de se referir o raciocínio indutivo entre as páginas 6 e 7, em particular por presidir à formulação de conjeturas, a sua menção é fugaz. De facto, apesar do alerta, que nos parece relevante, dos perigos do raciocínio indutivo poder levar a conclusões erradas, não transparece a oportunidade de aprender a conjeturar e de compreender o papel dos contraexemplos na Matemática.

Mais adiante, na página 29, volta a falar-se em conjeturas numa abordagem experimental ao estudo de funções. Menciona-se, e a nosso ver bem, a necessidade de uma análise crítica da validade das conjeturas. Este bom prenúncio carece de continuidade, pois nada mais volta a aparecer a este respeito, em particular no tópico das primitivas. Porque não conjeturar, por exemplo, uma fórmula das primitivas de x^{α} a partir de casos particulares, valorizando o raciocínio indutivo, que depois teria de ser demonstrada? Pode-se sempre argumentar que isso é pedagogia, ao cuidado do professor, mas não é coerente referir a importância das conjeturas sem que isso se note nas metas e nos descritores do PMES.

No TIMSS-Advanced, o Cálculo é uma ferramenta essencial para compreender o mundo físico e para as carreiras científicas com base na Matemática. O referido domínio de conteúdo compõe-se dos tópicos Limites, Derivadas e Integrais (IEA, 2008, p. 12). Esta visão, espelhada no PMES, pode explicar a pergunta: Será que os responsáveis por este programa ainda perspetivam o Ensino Secundário como "uma passagem" para o Ensino Superior, não lhe reconhecendo valor por si próprio e, por conseguinte apenas destinado a quem pretende seguir estudos com forte componente científica? (SPIEM, 2015, p. 4).

Não obstante, o Cálculo Integral no PMES é positivamente olhado como um complemento fundamental do Cálculo Diferencial, permitindo uma visão de unidade e de abrangência da Análise elementar (Bivar et al., 2014, p. 22). Esta visão remete-nos para Tall (1996), onde o Cálculo, na perspetiva esquemática deste autor, é o estudo do fazer e do desfazer dos processos envolvidos, numa clara alusão à derivação e à primitivação ou, seguindo Stewart (2006), antiderivação. Infelizmente, a visão propiciada não desculpa os problemas de incoerência e de extensão do PMES e, consequentemente, da sua exequibilidade e do seu condicionamento aparentemente não desejado.

DUAS RESPOSTAS DIFERENTES?

A importância das várias representações (gráfica, algébrica, tabular e verbal) de uma função no processo de ensino-aprendizagem, bem como o estabelecimento das suas relações, é indicada por numerosos estudos da Didática da Matemática. Nomeadamente, Andrade e Saraiva (2012) e Duval (2006) consideram que este é um aspeto fundamental para a compreensão do conceito de função pelos alunos.

Em (Andrade & Saraiva, 2012) confirma-se que o processo de formação das noções matemáticas envolve a combinação do conceito definição e do conceito imagem, estes em ação recíproca. O primeiro termo em (Tall & Vinner, 1981) designa uma forma com palavras utilizadas para especificar verbalmente esse conceito. Quanto ao segundo termo, descreve a estrutura cognitiva total (imagens mentais, propriedades relacionadas e processos) associada a um conceito.

Mas mesmo num só tipo de representação, por exemplo algébrica, podem presenciar-se distintas representações onde a sua conexão se revela importante. Para o ilustar, no âmbito da primitivação imediata, vamos considerar uma tarefa inicial que diz respeito ao cálculo das primitivas de funções reais de variável real dadas por polinómios.

$$\boxed{\text{Determine } \int (3x+5)\,dx.}$$

Figura 1 . Proposta de tarefa.

Da nossa experiência em unidades curriculares do primeiro ano de diversas Licenciaturas, os alunos, recorrendo à linearidade da primitivação, costumam apresentar uma resolução similar à que se segue:

$$\int (3x+5)\,dx = 3\int x\,dx + 5\int 1\,dx = \frac{3x^2}{2} + 5x + C$$

Por vezes e tendo em conta a regra de primitivação imediata aplicada anteriormente,

$$\int f' f^{\alpha}\,dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad se\ \alpha \neq -1$$

alguns alunos escrevem uma resolução semelhante à subsequente:

$$\int (3x+5)\,dx = \frac{1}{3}\int 3(3x+5)\,dx = \frac{1}{3}\times\frac{(3x+5)^2}{2} + K = \frac{(3x+5)^2}{6} + K$$

O pedido de confronto do professor aos alunos, das aparentemente distintas soluções finais da tarefa, costuma ser interessante pelas boas discussões que gera. Muitas vezes, leva-os a dizer que deve haver algo de errado em alguma das resoluções. Mas as respostas coincidem, apesar das suas diferentes representações algébricas. De facto, uma vez que $\frac{25}{6}+K$ é uma constante, tem-se:

$$\frac{(3x+5)^2}{6}+K=\frac{9x^2+30x+25}{6}+K=\frac{3}{2}x^2+5x+\frac{25}{6}+K=$$
$$=\frac{3}{2}x^2+5x+C$$

Mesmo que a oportunidade de discussão não surja naturalmente, por as produções dos alunos seguirem todas a primeira resolução, ela pode ser criada. Uma possibilidade é aquela que advém da proposta de tarefa seguinte que construímos, a qual visa a avaliação de uma resposta final pelos alunos, nomeadamente quanto à representação, e a discussão de estratégias de resolução.

> Perante a tarefa de encontrar as primitivas da função real de variável real dada por 3x+5, um aluno apresentou a resposta final
>
> $$\int(3x+5)dx=\frac{(3x+5)^2}{6}+C.$$
>
> Esta resposta está correta? Em caso afirmativo, explicite a resolução que a ela teria conduzido. Caso contrário, corrija-a através da resolução que poderia fazer.

Figura 2 . Proposta de tarefa.

PRECISAMOS DO MÓDULO?

Quaresma e Ponte (2014) referem que há abordagens nas aulas que favorecem o surgimento de desacordos, os quais podem levar os alunos a aspetos essenciais do raciocínio matemático tais como justificações e generalizações. Para isso, é essencial que o professor seja um condutor de discussões matemáticas, uma vertente da sua prática profissional que implica a realização de ações: convidar, apoiar/guiar, informar/sugerir e desafiar no âmbito da gestão da aprendizagem, (Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013). Wood (1999) destaca as potencialidades da exploração de desacordos entre alunos, no sentido de estes fundamentarem as suas posições. O professor assume-se, assim, como um mediador no processo de ensino-aprendizagem, papel relevante nomeadamente numa abordagem com Aprendizagem pelos Pares. De facto, os desacordos podem ser despoletados por uma questão conceptual e resolvidos pelas discussões entre alunos, estas mediadas pelo professor, (Beites & Romano, 2014) e (Beites & Serôdio, 2015).

Uma proposta que já gerou discussões matemáticas interessantes foi a tarefa subsequente.

> Quais são as primitivas da função real de variável real definida por $\frac{1}{x}$?

Figura 3 . Tarefa proposta sobre as primitivas de uma função.

Tipicamente, alguns alunos costumam escrever, especialmente como primeira tentativa,

$$\int\frac{1}{x}dx=\int x^{-1}dx=\frac{x^0}{0}+C$$

Outros, ou alguns na segunda tentativa, costumam apresentar

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$$

Mas, por um lado, se $x>0$ e $F(x) = \ln x$ então $F'(x)=\frac{1}{x}$ pelo que $\ln x$ é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ para $x > 0$. Por outro lado, se $x < 0$ e $G(x)= \ln(-x)$ então $G'(x)=\frac{1}{x}$ pelo que $\ln(-x)$ é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ para $x < 0$. Atendendo a que

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$$

então $\ln|x|$ é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ para todo o x não nulo. Como todas as primitivas de uma função diferem por uma constante aditiva, então

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

Numa próxima oportunidade em contexto de Aprendizagem pelos Pares, poderemos, alternativamente, despoletar a discussão entre alunos com a questão conceptual seguinte. Esta foi construída com base nas discussões já geridas.

> A família de primitivas da função real de variável real dada por $\frac{1}{x}$ é
>
> a) $\frac{x^{-1+1}}{-1+1}+C$
>
> b) $\ln x+C$
>
> c) $-\frac{1}{x^2}+C$
>
> d) nenhuma das respostas anteriores

Figura 4. Questão conceptual sobre as primitivas de uma função.

É O PRODUTO DAS PRIMITIVAS?

Depois de aprenderem a calcular as primitivas de algumas funções de referência e de memorizarem essas fórmulas de cálculo de acordo com o descritor 1.5 do PMES, os alunos podem expandir o seu espaço de exemplos aplicando a linearidade da primitivação e explorando um conjunto de casos onde se inverte o processo de derivação de uma função composta. No apoio ao descritor 1.7 listam-se uma série de exemplos (Bivar, et al, n.d., p. 67).

Numa situação ideal em que a gestão do tempo em sala de aula permite uma atitude exploratória e construtiva da atividade matemática por parte dos alunos, o professor pode usar alguns exemplos desta lista para incentivar os alunos a gerarem eles próprios novos exemplos. Watson e Mason (2005) sublinham que "tal como noutros aspetos do pensamento matemático, é a procura de exemplos e não o produto final que promove a aprendizagem" (p. 100).

Esta atitude exploratória cria oportunidades de aceder aos processos cognitivos dos alunos e identificar alguns dos erros mais comuns no cálculo de primitivas. A experiência mostra-nos que, mesmo depois de enunciar um teorema ou escrevermos uma fórmula de cálculo dele resultante, se colocarmos como questões o cálculo de

$$\int x e^{x^2}\, dx \quad ou \quad \int \sin^2 x\, dx,$$

confrontamo-nos muitas vezes com as seguintes respostas erradas respetivas:

$$\frac{x^2}{2}e^{x^2}+C, \quad \frac{\sin^3 x}{3}+C,$$

Nestes exemplos muitos alunos recorrem ao conforto que lhes dá reconhecerem uma fórmula já aprendida, como $\int e^x\, dx = e^x + C$ ou $\int x^p\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}+C$ e tentam aplicá-la de forma generalizada, sem controlo sobre os danos colaterais.

Como refere Bagni (2000), os alunos têm tendência a estender a aplicação de regras que reconhecem como simples e familiares de forma inapropriada. Este autor identifica razões afetivas para este comportamento – o medo de problemas sem um resultado e a segurança que lhes dá aplicar uma fórmula em que confiam. Mas também identifica as raízes do problema numa denominada fraqueza algébrica – os alunos não aprenderam convenientemente algumas técnicas algébricas. O caso mais paradigmático deste comportamento é o erro cometido quando identificam a derivada do produto de funções com o produto das funções derivadas, por lhes ser familiar a propriedade da soma das derivadas ser a derivada da soma. No cálculo de primitivas enfrentamos o mesmo tipo de erro: "Professora, a primitiva do produto é o produto das primitivas não é?" Como combater esta tendência enganadora?

Nos erros anteriormente referidos, a evolução cognitiva que está em causa é na verdade aquela que está associada à aprendizagem da representação simbólica do conceito de derivada, mas entendido como um processo, no sentido dado por Tall (1996), que inclui o fazer (derivar) e o desfazer (antiderivar). Assim, o conflito cognitivo deve ser reconhecido por professor e alunos ao propor o cálculo das derivadas:

$$\left(\frac{x^2}{2}e^{x^2}+C\right)' = xe^{x^2}+\frac{x^2}{2}(2xe^{x^2}); \quad \left(\frac{\sin^3 x}{3}+C\right)' = \cos x \sin^2 x,$$

Estes e outros exemplos mediados pela intervenção do professor servirão o propósito de reconstruir a fórmula da derivada de uma função composta $(F(u(x)))'=u'(x)F'(u(x))$, e assim recuperar a primitivação aprendida como processo inverso da derivação: se $F'(x)=f(x)$ então $\int u'(x)\, f(u(x))\, dx = F(u(x))+C$.

Watson e Mason (2005) sublinham que bons exemplos ou contraexemplos matemáticos abrem perspetivas de generalização para além da sua própria particularidade. Goldenberg e Mason (2008) referem a importância da experiência com exemplos familiares na re-construção de generalizações e abstrações por parte dos alunos, classificando-os como ferramentas de mediação cultural entre os alunos e os conceitos matemáticos, sendo meios privilegiados de comunicação matemática e de contextualização. Mas esta pode ser também uma oportunidade para identificar e resolver conflitos cognitivos se procurarmos exemplos exemplares nos sentidos dados por Zazkis e Chernoff (2008).

No contexto da primitivação de um produto, o que será um exemplo essencial (*pivotal example*, na designação dos autores) para identificar o conflito cognitivo? Porque não usar como (contra)exemplo um dos que mais segurança inspira nos alunos? Sugerimos escrever uma potência de x como produto de potências. Por exemplo, $x^3 = x\, x^2$ e provocar o conflito cognitivo começando por pedir o cálculo de

$$\int x\, x^2\, dx.$$

Mas se a provocação não for eficaz, a experiência diz-nos que provavelmente resulta com

$$\int x\sqrt{x}\, dx$$

A partir do momento em que é identificado e resolvido o conflito cognitivo, as tarefas exploratórias seguintes podem ser guiadas pela procura de exemplos de ligação (na designação de Zazkis e Chernoff (2008), *bridging examples*) à formula da primitivação por partes, cuja dedução é sugerida como exercício no apoio ao descritor 3.2 do conteúdo PCI12 do PMES (Bivar, Grosso, Loura, Oliveira, & Timóteo, n.d., p. 73). Sugerimos que se comece por considerar produtos de funções das quais os alunos conheçam as primitivas, por exemplo:

$$\int xe^x\, dx \quad ou \quad \int x\cos x\, dx$$

Se nesta fase o conflito cognitivo referido anteriormente já tiver sido resolvido, o professor pode mediar a ligação à fórmula pedindo aos alunos para calcular:

$$(xe^x)' = e^x + xe^x; \quad (x\sin x)' = \sin x + x\cos x.$$

E inverter o processo de derivação, primitivando:

$$\int (xe^x)'\,dx = \int e^x dx + \int x e^x\, dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx,$$
$$\int (x\sin x)'\,dx = \int \sin x\, dx + \int x\cos x\, dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx.$$

A primeira parte da primitivação por partes pode ser identificada em mais alguns exemplos e a sua compreensão mediada pelo professor num processo participado, em que os alunos são chamados a reconhecer algumas regras, de primitivação e de derivação, e a aplicá-las criteriosamente às funções nos fatores. Mas na primitivação por partes, como o próprio nome indica, seguir-se-á a inevitável outra parte. Surgem aí diferentes graus de dificuldade consoante o exemplo.

Será que os seus alunos também lhe vão colocar estas questões?

Agradecimentos

P. D. Beites agradece o apoio do Governo Português através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto PEst-OE/MAT/UI0212/2014 do CMA-UBI.

Referências bibliográficas

Andrade, J., & Saraiva, M. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Relime*, 15 (2), 137-169.

APM (2013). *Parecer da direção da APM sobre a proposta de programa de Matemática A para os cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas*, 5 páginas.

Bagni, G. T. (2000). "Simple" rules and general rules in some high school students' mistakes. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21 (2), 124-138.

Beites, P. D., Lobo, F. J., & Serôdio, R. (2016). Antiderivação: uma ponte entre a Matemática e a Economia. *Gazeta de Matemática*, (179), 32-39.

Beites, P. D., & Serôdio, R. (2015). A tecnologia não é a pedagogia, mas ajuda!. *Atas do CiEMeLP2015*, 5 páginas.

Beites, P. D., & Romano, A. (2014). Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!. *Educação e Matemática*, (129), 13-16.

Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2014). *Programa e Metas Curriculares - Matemática A - Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.

Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (n.d.). *Programa de Matemática A – Consulta Pública*, 6 páginas.

Bivar, A., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (n.d.). *Caderno de Apoio 12.º Ano*. Lisboa: MEC.

Carvalho e Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., da Fonseca, C., & Lopes, I. (2001/2002). *Programa de Matemática A – Ensino Secundário*. Lisboa: ME, DES.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l' analyse de l' activité et des productions mathématiques. *Relime*, 9 (1), 45-82.

Fernandes, D. (2011). Avaliação de programas e projetos educacionais: Das questões teóricas às questões das práticas. In D. Fernandes (Org.), *Avaliação em educação: Olhares sobre uma prática social incontornável* (pp. 185-208). Pinhais, PR: Melo.

Fernandes, D. (2013). Avaliação em Educação: uma discussão de algumas questões críticas e desafios a enfrentar nos próximos anos. *Ensaio: aval. pol. públ. Educ.*, 21 (78), 11-34.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 183-194.

IAVE (n.d.). *TIMSS*, http://iave.pt/np4/11.html

IEA (2008). *TIMSS Advanced Assessment Frameworks*. Chestnut Hill: IEA.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22 (2), 55-81.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2014). A condução de discussões matemáticas como vertente da prática profissional do professor. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 169-186). Lisboa: IEUL.

SPIEM (2015). *Parecer da SPIEM*, 5 páginas.

SPM (2013). *Parecer da SPM sobre o documento Programa e Metas Curriculares - Matemática A*, 2 páginas.

Stewart, J. (2006). Cálculo. São Paulo: Thomson Learning.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer Academic.

Tall, D., & Vinner (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah: Erlbaum.

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample examplary?. *Educational Studies in Mathematics*, 68 (3), 195-208.

Patrícia Damas Beites[1, 2],

Sandra Bento[1],

Maria Luísa Branco[3,4]

[1]Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior

[2]Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior (CMA-UBI)

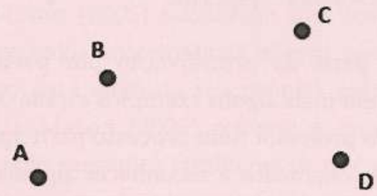
[3]Departamento de Psicologia e Educação da Universidade da Beira Interior

[4]Unidade de Investigação LabCom.IFP

Pontos e Circunferências

Temos quatro pontos do plano, não colineares três a três e não pertencentes a uma mesma circunferência.

No máximo, quantas circunferências equidistantes dos pontos podem existir? E no mínimo?



(Respostas até 30 de junho, para zepaulo46@gmail.com)

O problema proposto no número 138 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Num quadrado de 3×3, colocar nove números naturais diferentes de modo que:

- *os três produtos horizontais e os três produtos verticais sejam todos iguais,*
- *o maior dos números seja o menor possível.*

Recebemos 10 respostas: Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Edgar Martins (Queluz), Guilherme Salvador (Torres Novas), Maria Carolina (Braga), Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), de um grupo de professores da Escola Básica Carlos Gargaté (Charneca da Caparica), e dos alunos David, Francisca e Guilherme (Colégio D. Diogo de Sousa – Braga)

Os métodos utilizados foram muito diversos e vale a pena partilhá-los. Como se verá, o maior valor do quadrado é 15.

Edgar Martins

Existem 6 maneiras de acrescentar um número de forma a manter o produto vertical e horizontal igual.

A		
	A	
		A

		B
	B	
B		

	C	
C		
		C

D		
		D
	D	

		E
E		
	E	

	F	
		F
F		

Fazendo o produto, quadrado a quadrado:

AD	CF	BE
CE	AB	DF
BF	DE	AC

Substituímos as letras por 1, 1, 2, 3, 4 e 5 de forma a não haver números repetidos no quadrado.

A=1 e B=1

D	CF	E
CE	1	DF
F	DE	C

C=2 e D=3

3	2F	E
2E	1	3F
F	3E	2

E=4 e F=5

3	10	4
8	1	15
5	12	2

Carlos Dias

O método utilizado foi procurar combinações de números primos (mais a unidade, já que esta não é considerada primo) o mais baixo possível que pudessem ser agrupados de 6 maneiras diferentes.

Cada uma das linhas (e das colunas) é composta por diferentes combinações destes fatores primos.

Temos portanto que conseguir agrupar os números de 6 formas diferentes (3 linhas mais 3 colunas)

Com produtos inferiores a 120 não é possível arranjar os 9 valores todos diferentes. Experimentei com 60=1×2×2×3×5, com 90=1×2×3×3×5 e com 56=1×2×2×2×7.

Assim, o número $120 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ é o menor valor que nos serve.

O quadrado expresso nos seus fatores primos fica pois:

2×2×3	1	2×5
2	3×5	2×2
5	2×2×2	3

Maria Carolina

1. Coloca-se em cada célula do quadrado uma letra diferente.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

2. Substitui-se A, E e I por 3, 2 e 1 (os três menores números naturais), na diagonal para todas as linhas ou colunas ficarem apenas com duas incógnitas.

3. Obtém-se as igualdades

$ABC = DEF = GHI = ADG = BEH = CFI \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3BC = 2DF = GH = 3DG = 2BH = CF$

Donde, por substituições, se obtém:

$GH = 2BH \Leftrightarrow G = 2B,$

$GH = 3DG \Leftrightarrow H = 3D$

$CF = 2DF \Leftrightarrow C = 2D$

Assim, $GH = 6BD$

Substituindo o B e D pelos menores números naturais seguintes, 4 e 5, obtinha-se

$6BD = 6 \times 4 \times 5 = 120$, ou seja, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Efetuando as últimas substituições no quadrado, obtemos a resposta:

3	4	10
5	2	12
8	15	1

Professores da EB Carlos Gargaté e Mário Roque

Foram mais longe, impondo a condição de as diagonais terem também o mesmo produto. Construíram o que julgam ser o quadro mágico multiplicativo com o menor número possível. A constante mágica nas linhas, nas colunas e nas diagonais é 216.

2	36	3
9	6	4
12	1	18

E, como diz o Mário:

Mas enfim, se não foi mágico... foi pelo menos muito divertido!

A *Educação e Matemática* completa este ano 30 anos. São 140 números, 141 se contarmos com este que tem nas suas mãos... Ou no ecrã do computador, claro. Talvez possamos dizer que a *Educação e Matemática* já entrou na fase madura e tem uma história apreciável que, pensamos, vale a pena revisitar. A revista 91 – o número comemorativo dedicado aos 20 anos e editado por Henrique Guimarães – constitui um excelente testemunho dessa história. Partimos então daí. Volvidos mais 10 anos, como olhamos hoje para a nossa revista? Para abordar este assunto, abrimos uma secção especial em 2017. Nela contamos incluir depoimentos de alguns sócios, em particular, colegas que tiveram uma ligação especial com a EeM. É o caso de Ana Paula Canavarro, diretora e redatora durante vários anos, com quem inauguramos a secção.

Nos 30 anos da *Educação e Matemática*

Uma revista para todo/as, uma revista de todo/as?

Convidaram-me a escrever por ocasião dos 30 anos da *Educação e Matemática*, na minha condição de ex-diretora da revista. Na realidade, apesar de ter sido diretora da revista durante um período de seis anos, entre 2004 e 2010, é talvez mais a experiência como redatora, que fui durante quase vinte anos, que inspira a reflexão que aqui partilho. Entrei para a redação da *Educação e Matemática* em 1993, quando afortunadamente aceitei o convite que me chegou pelo Eduardo Veloso, por entre goladas duma sopa fumegante na Av. 24 de Julho. Nessa altura ainda eram os elementos da redação que milimetricamente editavam, em PageMaker, cada uma das páginas que compunha a revista e aguardava-se sempre com enorme expectativa o momento em que, a cada novo número, os exemplares em papel chegavam à sede da APM, revelando-se finalmente o resultado — que por vezes se distinguia surpreendentemente do esperado. Desde aí, muito mudou e, hoje em dia, o amadorismo desses tempos deu lugar a um "semi-profissionalismo" em que o número em papel já não revela (quase?) nada de novo que os pdfs não tivessem dado a perceber (excluindo o toque e o cheiro, claro). No entanto, se a tecnologia resolveu sobejamente as dificuldades de produção, o mesmo não se passou com um outro desafio fundamental que a *Educação e Matemática* continua a enfrentar.

Mas a primeira ideia desta reflexão vai naturalmente para o imenso sentimento de satisfação por este aniversário da nossa revista. São 30 anos, a acompanhar os 30 anos da APM, pois a Associação desde cedo perspetivou, e bem, a existência de uma revista profissional. Não admira pois que a *Educação e Matemática* seja um elemento identitário da APM, como que um seu cartão de visita com que se apresenta ao mundo, em Portugal e no estrangeiro. Por detrás dos 140 números já publicados, estão ziliões de horas de dedicação de inúmeras pessoas que para a revista contribuíram ao longo dos tempos. Permito-me destacar os muitos redatores e redatoras que conseguiram ser bem sucedidos no esforço coletivo de criar cada uma das revistas, o que envolve um enorme trabalho invisível aos olhos que quem lê, muitas vezes em contexto de relaxada e prazeirosa produção, outras vezes sob intenso stress em prolongadas horas de cansaço sustentado a café. Estes 30 anos de *Educação e Matemática* são 30 anos de manter continuada colaboração, vencer dificuldades, inventar soluções, criar novas hipóteses, ou seja, 30 anos de persistir e resistir — tudo entre colegas que generosamente se sintonizam e mobilizam em benefício de uma causa comum. Sinto uma imensa gratidão por todo/as o/as que têm possibilitado que, número após número, a *Educação e Matemática* me chegue sem descontinuidades e cheia de qualidade(s), perpetuando o meu vínculo com a APM.

Passo agora a problematizar o papel da *Educação e Matemática*. O que se espera de uma revista profissional de uma associação de professores? No fundo, esta questão está em boa parte respondida no estatuto editorial da revista, o qual nem sempre se tem presente no balanço do dia-a-dia. Como se pode ler no site, pretende-se que a *Educação e Matemática* se constitua como "um meio de comunicação privilegiado da Associação", no que diz respeito a "questões relacionadas com o ensino e a aprendizagem da Matemática". De forma mais concreta, o estatuto editorial toma como objetivos um conjunto de cinco aspetos que, do meu ponto de vista, têm sido continuamente perseguidos mas não alcançados com o mesmo sucesso e vigor. São eles:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas actuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;

- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

Começo pelo fim. "Divulgar informação relevante para os professores" foi estando sempre presente na revista, pese embora nos dias de hoje me questione sobre a pertinência e possibilidade de consecução eficaz deste objetivo. O mundo digital domina tudo o que tem a ver com divulgação de informação e é imbatível na rapidez e no volume com que a dispensa. Nesta sociedade liquida em que hoje vivemos, a necessária atualidade da informação não é compaginável com a bi/tri-mestralidade da saída dos números da *Educação e Matemática* mas, de qualquer modo, a revista pode ter um papel em vincar algo especialmente significativo.

No que diz respeito a "fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores", a revista tem sido pródiga. Para além da secção dos materiais para a sala de aula, que em muitas avaliações anteriormente realizadas foi sempre muito apreciada pelos leitores, sempre esteve no espírito da revista a preocupação com os relatos reais de sala de aula, ilustrativos de formas de trabalho com os alunos em torno de tarefas valiosas, apoiados com diversos recursos, que proporcionem experiências matemáticas positivas e que sejam inspiradoras para quem as lê.

Parece-me inequívoco que a revista tem cumprido muito bem o seu papel no que diz respeito a tomar como objeto de atenção "temas atuais e importantes da educação matemática" e, por vezes, a estabelecer pontes com "a educação em geral". E tem-no feito em articulação com a investigação em educação matemática, procurando também incluir vozes (escritas) teoricamente sustentadas e informadas pelos desenvolvimentos recentes que, nacional e internacionalmente, vão marcando as tendências do ensino e da aprendizagem da Matemática. Esta preocupação revela-se de especial maneira nos números temáticos e também em diversas secções que a *Educação e Matemática* sempre valorizou, umas de carácter permanente e outras inspiradas no que a atualidade vai ditando.

"Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática" decorre da consecução dos dois objetivos anteriores. A reflexão não acontece do vazio, ela é estimulada pelo sentimento de (in)satisfação e apoiada pelo contacto com realidades diferentes e conhecimento de outras possibilidades, mesmo quando parecem utópicas. E isso é fundamental para a sobrevivência, sempre e no cenário atual em que o professor vive — como ouvi dizer a António Nóvoa, "entalado". E o professor de Matemática está, diria eu, duplamente entalado. Entalado entre o seu micro sistema da sala de aula com seus alunos, com idiossincrasias específicas que clamam por diferenciação, e o macro sistema que tudo quer homogeneizar para comparar em avaliações externas que tudo comandam; Entalado entre práticas curriculares que promovam o sucesso dos seus alunos numa Matemática válida adequadas às atuais necessidades e um programa normativo com orientações curriculares retrógradas, focadas em metas desjustadas às necessidades e que excluem tantos alunos da Matemática. A *Educação e Matemática* é uma porta que se abre para "desentalar" o professor e a professora, com páginas cheias para os apoiar e desoprimir.

Tudo isto é potenciado se a revista conseguir "Promover a troca de ideias e experiências entre professores". Não tenho atualmente estatísticas precisas de quantos autores diferentes já escreveram para a revista, mas serão certamente um grande número em termos absolutos, que tiram partido da variedade de tipologia de contribuições que a revista acolhe. No entanto, não serão assim tantos os autores se os considerarmos em termos relativos. Mesmo sem contas feitas, a percentagem de sócios que já se dispuseram a contribuir para a revista, seja com um artigo, com um depoimento, com uma breve ideia, parece-me qualitativamente reduzida. Existe um sentimento generalizado de que a revista é feita por alguns poucos para proveito de muitos outros. E se, em parte, pode parecer natural que assim seja, isto não é um bom sinal, nem para a revista, nem para a Associação, nem para a comunidade que ela serve. A dimensão da comunicação é vital numa revista profissional em que a troca entre pares assume grande importância no robustecimento de atitudes e na criação e sistematização de um conhecimento próprio. O reconhecimento de que a revista recebe reduzido número de contribuições espontâneas por parte dos professores é já antigo, o que significa que a situação persiste e muito há ainda a fazer para contrariar esta tendência. Claro que a equipa redatorial em conjunto e cada um/a dos redatores em particular faz o seu melhor na captação de artigos, o que permite que a revista subsista com muitas "encomendas". Mas aos trinta anos de revista, não se poderia esperar mais? Não conseguiríamos gerar uma maior dinâmica coletiva de partilha? Uma dinâmica de co-responsabilização pela manutenção de uma ferramenta vital da vida associativa onde se espera que cada um coloque a sua parte?

Termino esta reflexão focando-me precisamente nesta questão: Nos 30 anos de *Educação e Matemática*, o que pode cada um de nós fazer para contribuir para que a revista, para além de ser para todo/as, seja também de todo/as?

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Tecnologia e(m) educação matemática: uma proposta com padrões fractais no ensino básico

Valentina Piacentini
Artur Coelho

A Matemática é uma das disciplinas na qual os alunos, ao longo dos ciclos de ensino, apresentam mais dificuldades e, consequentemente, os apoios complementares estão entre os mais procurados. A sua compreensão implica integrar vários registos de representação (Duval, 2006). Porém determinadas práticas de ensino dissociam o conhecimento conceptual das situações reais em que ele é aprendido. Esta descontextualização dos conceitos leva, frequentemente, os alunos a desenvolver uma reação hostil face a esta ciência. A matemática encontra-se dramaticamente associada a números, fórmulas, equações e procedimentos que não fazem sentido para muitos dos alunos (Devlin, 1998). Esta perceção negativa está especialmente presente no domínio da álgebra (Borralho, Cabrita, Palhares, & Vale, 2007).

Assim, a questão que se coloca é: "Como desenvolver o pensamento algébrico de forma a conduzir os alunos a acharem a álgebra indispensável e interessante e a fazerem conexões com outras disciplinas e com o mundo real?" A procura e a identificação de padrões são processos de abordagem defendidos por estes e outros autores.

Esta proposta, que surge no âmbito de um trabalho curricular de um Programa Doutoral em Educação (Coelho, Mbandje, Piacentini, & Ribeiro, n.d.) – enquadrada numa perspetiva socioconstrutivista, que assume a aprendizagem e o desenvolvimento intelectual como atividades sociais colaborativas – consta de um conjunto de tarefas relacionadas com a construção de padrões fractais, suportadas por ferramentas tecnológicas como Ambientes Dinâmicos de Matemática Dinâmica [ADMD], num contexto que envolve a Geometria, a Arte e o próprio entorno natural.

TECNOLOGIA E(M) EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Os contextos educativos contemporâneos exigem habilidades e competências quer dos professores, quer dos alunos, que transformam o ensino-aprendizagem ao permitir alargar este processo para além dos espaços formais. Carecem também de estratégias que envolvam o uso de ferramentas tecnológicas, que viabilizem uma exploração continuada que se traduza numa aprendizagem significativa, ativa e reflexiva. As Tecnologias da Comunicação, ao disponibilizarem instrumentos variados, podem ser, também, uma resposta aos diversos estilos intelectuais dos alunos. Pretendem-se interações que alimentem dinâmicas colaborativas que façam do aluno um elemento integrante, ativo e participativo na sua aprendizagem, capaz de produzir e partilhar os seus conteúdos, desenvolvendo o seu pensamento crítico e a sua criatividade. Lévy (2010) refere-se também à promoção da inteligência coletiva através do uso da tecnologia de rede. Esta promove e facilita a interação e a conectividade dos intervenientes, favorecendo a aprendizagem colaborativa e social. A comunidade assume um papel fulcral, na construção do conhecimento com e para os outros e no desenvolvimento de atividades sociais colaborativas (Vygotsky, 2001).

Siemens (2005) refere que as teorias da aprendizagem são omissas quando esta decorre no exterior dos indivíduos e/ou quando a informação é armazenada e manipulada através da tecnologia. Um dos aspetos mais importantes destacados por este autor é a possibilidade de agora, em ambientes altamente tecnológicos, transferir parcialmente ou apoiar (offload) processos mentais através da tecnologia, promovendo assim no indivíduo a capacidade/possibilidade de pensar e raciocinar num nível mais elevado e de navegar em espaços de conhecimento mais complexos.

Num tempo em que as circunstâncias se alteram constantemente e de forma muito rápida, em que tudo se relaciona com tudo, onde o volume de informação é muito superior ao que podemos aprender, para a aprendizagem são extremamente relevantes aspetos como a adaptação, o reconhecimento de alterações nos padrões e consequente reajustamento, o formar conexões entre comunidades especializadas e a criação de padrões de informação úteis a partir de uma variedade de fontes de informação (Siemens, 2005). O que aprendemos tem que ser atualizado, relevante e contextualizado. A atualidade do conhecimento é uma função da rede, que processa, filtra, avalia e valida nova informação (Downes, 2007). Ignorar a natureza em rede da sociedade atual, da vida e da aprendizagem, é alhear-se das mudanças fundamentais que ocorrem no nosso mundo.

UMA PROPOSTA COM FRACTAIS

Um "padrão" é uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons que, a nível matemático, está associado a regularidade(s), sequência, motivo, regra e ordem (Borralho et al., 2007). Como "sublimado" por Devlin (2003) a Matemática é a Ciência dos Padrões. Também nas áreas da Poesia e da Música, das Educações Física e Visual, os padrões estão presentes, fazem parte do quotidiano das pessoas, da arte e da natureza. Os padrões fractais – caraterizados pelo facto das partes que os compõem se mostrarem similares à forma como um todo e de se repetirem infinitas vezes, numa área finita – estimulam "[...] a contemplação da estética nas regularidades presentes na aparente irregularidade" (Faria & Maltempi, 2012, p. 42).

Grande parte dos elementos ou acontecimentos naturais não podem ser entendidos no âmbito da geometria euclidiana. Esta proposta, dirigida a alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico (12-15 anos), sugere uma abordagem da geometria fractal num contexto mais alargado. Tem como objetivos: 1) desenvolver o pensamento algébrico e geométrico nos alunos; 2) contextualizar a matemática no mundo real e; 3) desenvolver habilidades tecnológicas. Esta proposta desenvolve-se através da: i) procura de padrões na vida real; ii) construção, manipulação e análise de padrões fractais geométricos num ADMD e significados algébricos relacionados; iii) criação de melodias recursivas e; iv) articulação dos padrões visuais e sonoros através da construção de animações frame a frame.

A construção de um fractal pode revelar-se uma tarefa de elevada complexidade, que exige precisão e eficácia. Este processo pode ser suportado pela utilização de um ADMD como o GeoGebra, que "[...] pode facilitar a aprendizagem [...] a descoberta de um método para reproduzir e expressar um conceito matemático [...] pois permite criar, mover, distorcer, analisar e testar propriedades de figuras num processo de investigação" (Faria & Maltempi, 2012, p. 42). Para a criação e manipulação das melodias recursivas propõe-se a utilização da ferramenta online gratuita Soundation. Para a montagem e edição do vídeo a partir destes arquivos e dos frames (dos fractais) criados no software gratuito Paint.NET, será utilizado o VideoPad.

AS TAREFAS

As tarefas selecionadas pelo professor continuam a ser a base para a aprendizagem dos alunos (Vale, Pimentel, Cabrita, & Barbosa, 2012). Cabe-lhe, portanto, criar abordagens que estimulem a criatividade, que exijam bastante mais do que o procedimento memorizado rotineiro, que é ainda observável em muitas salas de aula (Redecker, Ala-Mutka, Baciagalupo, Ferrari, & Punie, 2009). Propõem-se, assim um conjunto de tarefas, cuja implementação prevê quatro fases distintas: 1) introdução; 2) desenvolvimento; 3) discussão e; 4) sistematização das aprendizagens (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Previamente à realização das tarefas propõe-se aos alunos uma pesquisa colaborativa, para além da sala de aula, recorrendo a plataformas da Social Web como o Facebook ou o Google+. Pretende-se que os alunos explorem diversos tipos de padrões presentes na natureza: sonoros, geométricos, de repetição, de crescimento, a série de Fibonacci e também padrões fractais. Focando-nos nestes últimos, discutem-se características e propriedades presentes como a autossimilaridade (aparecimento de um determinado padrão independentemente da escala a que se observa), ou a complexidade infinita (observável através da visualização da iteração dos níveis do fractal) (Faria & Maltempi, 2012).

TAREFA I - CONSTRUÇÃO DA CURVA DE KOCH (ADAPTADO DE MACEDO & FRANCO, N.D.)

Nesta tarefa, propõe-se a descoberta e exploração da Curva de Koch (figura 1) no GeoGebra. Os alunos realizam os printscreen das várias iterações do padrão (a guardar automaticamente através do Dropbox ou Onedrive) para construir a galeria de imagens que são editadas no Paint.NET. Inicia-se a exploração desta tarefa com a visualização de imagens deste fractal, relembrando alguns aspetos da história da Matemática abordados em atividades prévias de pesquisa. Convidam-se os alunos a identificarem as suas características e o padrão geométrico utilizado na sua construção.

Mobilizam-se conceitos sobre classificação de triângulos,

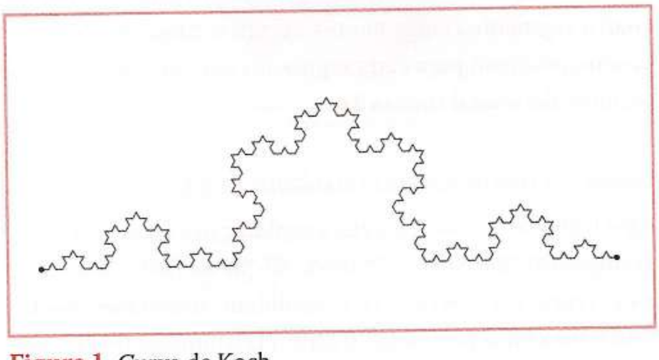


Figura 1. Curva de Koch

Construção passo a passo

1. Construir um segmento definido por dois pontos a=AB entre A e B;
2. Construir outro segmento definido por dois pontos b=CD entre C e D;
3. Construir uma semirreta com origem no ponto A e a passar por E (ver figura 1);

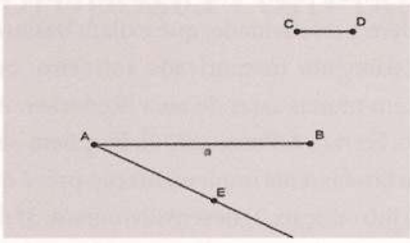


Fig. 1 – Construção da Curva de Koch

4. Marcar na semirreta AE um ponto utilizando o comando circunferência e raio, onde o valor deste seja b e o seu centro no ponto A. Repetir o processo mais duas vezes utilizando o ponto obtido no processo anterior como centro;
5. Intersetar todos os pontos entre as circunferências e a semirreta (Pontos F, H e J);
6. Construir um segmento de reta entre os pontos J e B;
7. Construir duas retas paralelas a [JB] e a passar pelos pontos F e H;
8. Intersetar as retas com o segmento de reta [AB] (definem-se os pontos K e L);

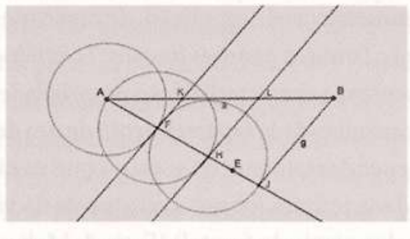


Fig. 2 – Divisão do segmento de reta em 3 segmentos congruentes

9. Ocultar a semirreta AE, as circunferências, as retas paralelas e o segmento de reta [JB];
10. Construir uma circunferência com centro no ponto K até A;
11. Construir uma circunferência com centro no ponto L até B;
12. Intersetar as circunferências (definem-se os pontos M e N);

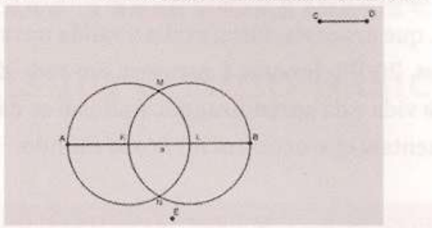


Fig. 3 – Construção do triângulo no segmento [AB]

13. Construir os segmentos [KM] e [ML];
14. Ocultar o segmento a, as circunferências e o ponto N;

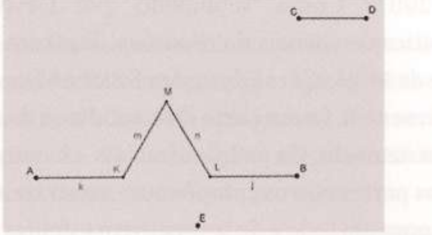


Fig. 4 – Iteração 1 da Curva de Koch

15. Para repetir este processo em todos os segmentos (iteração) é necessário criar uma ferramenta. Para isso, selecionar no menu de ferramentas, Criar nova ferramenta, secionar os objetos iniciais (pontos K, M e L; segmentos j, m, n, l), nomear a ferramenta e concluir. Um novo ícone é adicionado à barra de ferramentas.
16. Clicar no novo ícone, em seguida no segmento a fracionar, depois nos pontos C e D e finalmente no ponto E. Repetir até chegar ao nível desejado.

Extensões da tarefa:

-Relacionar o número de iterações com o número de segmentos, o seu comprimento e extensão total da curva (registar numa tabela);

-Estabelecer formalmente a progressão geométrica associada a partir da observação da tabela.

Figura 2. Protocolo de construção da Curva de Koch

noção de segmento, de reta, semirreta, paralelismo, circunferência e raio e interseção de conjuntos. Pretende-se também recorrer a noções de potenciação e dos números racionais para representar a medida de comprimento dos segmentos em cada iteração, estabelecendo-se assim, concomitantemente, a relação com a simbologia algébrica. Este padrão constrói-se a partir de segmento de reta. O seu processo iterativo consiste em dividir este segmento em três partes congruentes e ocultar o segmento central, substituindo-o por outros dois, de maneira a formar um triângulo equilátero com o segmento oculto. Obtêm-se quatro segmentos congruentes. A partir daqui realiza-se o mesmo processo para cada segmento para alcançar o nível seguinte do fractal (figura 2).

TAREFA II - CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKY

Agora, propõe-se a descoberta, a exploração e a construção do Triângulo de Sierpinsky. Pretende-se que os alunos deduzam a sua regra de construção e consolidem, simultaneamente, conceitos como perímetro e área, classifiquem triângulos, e recorram à álgebra para estabelecer leis de formação, efetuando generalizações.

Apresenta-se, então, uma imagem do triângulo (figura 3) e solicitam-se aos alunos conjeturas sobre o possível ponto de partida e sobre o processo de construção que lhe deu origem, devendo os alunos ensaiar, no GeoGebra, possíveis resoluções para o problema apresentado. Uma resolução provável passaria pela construção de um triângulo equilátero onde o seu processo iterativo consiste em inscrever, nos pontos médios de cada triângulo, um novo a quem é alterada a cor. Este processo define sempre mais três triângulos inscritos no triângulo de origem. Realiza-se o mesmo processo para cada triângulo cuja cor não tenha sido alterada (figura 4). Poder-se-ia ainda: i) discutir sobre as características da figura inicial; ii) relacionar o número de iterações com o número de triângulos, a medida do comprimento do lado, o perímetro de cada triângulo e o perímetro total (a registar numa tabela); iii) deduzir uma regra para o número de triângulos desconsiderados em cada iteração; iv) estabelecer uma regra de formação dos triângulos considerados em cada iteração; v) estabelecer formalmente a progressão geométrica associada a

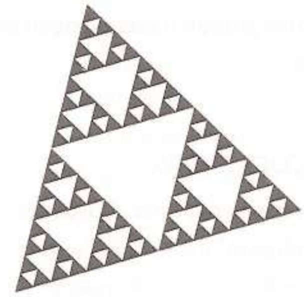


Figura 3. Triângulo de Sierpinsky

Construção passo a passo

1. Construir um polígono regular dados os pontos A e B e o número de lados (3);
2. Marcar os pontos médios de cada lado do triângulo;

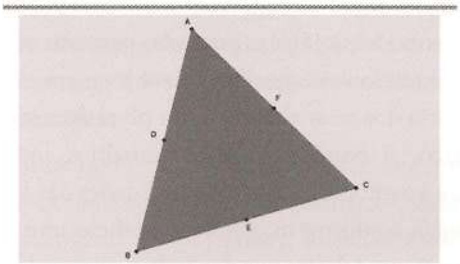


Fig. 1 – Nível 0 do Triângulo de Sierpinski

3. Construir um novo polígono a partir dos pontos obtidos no processo anterior;
4. Desconsiderar, alterando-lhe a cor, o triângulo central;

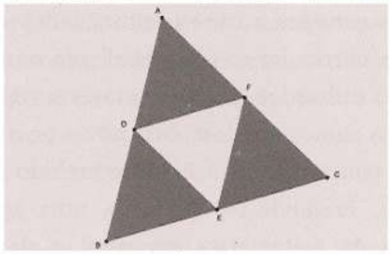


Fig. 2 – Primeira iteração do triângulo de Sierpinski

5. Para repetir este processo em todos os triângulos (iteração) é necessário criar uma ferramenta. Para isso, selecionar no menu de ferramentas, Criar nova ferramenta; secionar os objetos iniciais (segmentos [AB], [AC] e [CB], nomear a ferramenta e concluir. Um novo ícone é adicionado à barra de ferramentas.
6. Clicar no novo ícone, em seguida no segmento a fracionar, depois nos pontos desejados. Repetir até atingir o nível desejado. Ocultar os rótulos e os pontos.

Figura 4. Protocolo de construção do Triângulo de Sierpinsky

partir da observação da tabela e; vi) extrapolar as conclusões para as áreas.

TAREFA III · CONSTRUÇÃO DE UMA ÁRVORE PITAGÓRICA (ADAPTADO DE FARIA & MALTEMPI, 2012)

Na construção da Árvore Pitagórica (figura 5), pretende-se, novamente, que os alunos identifiquem a regra de construção do fractal e estabeleçam algebricamente as suas leis de formação e, simultaneamente, consolidem outros conceitos geométricos, de forma análoga ao realizado nas tarefas anteriores.

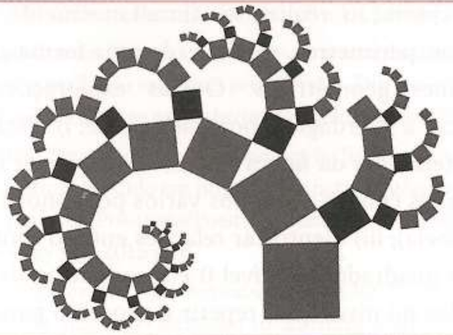


Figura 5. Árvore Pitagórica

Apresentam-se então imagens deste fractal relacionando-o, por exemplo, com a disposição dos ramos dos brócolos. Convidam-se os alunos a identificar as suas características, propriedades e o padrão geométrico utilizado para a sua construção. Este padrão constrói-se a partir de um quadrado, em que se define, a partir de um dos seus lados, um triângulo retângulo, cujos lados são o lado do próximo quadrado. O seu processo iterativo consiste em gerar um novo quadrado, tendo como base os vértices do triângulo do nível anterior. Realiza-se o mesmo processo para cada triângulo (figura 6).

Construção passo a passo

1. Construir um segmento de reta [AB]
2. Construir uma semicircunferência entre os pontos A e B;
3. Marcar o ponto C na semicircunferência;
4. Construir um polígono (triângulo) [ABC] (este triângulo é retângulo em C porque está inscrito na semicircunferência);

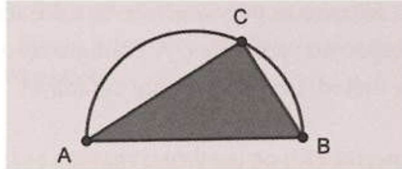


Fig. 1 – Triângulo inscrito numa semicircunferência

5. Construir um polígono regular (quadrado) dados os pontos A e C e o número de lados (4) e ocultar a semicircunferência;
6. Construir um polígono regular dados os pontos B e C e o número de lados (4);
7. Intersetar a semirreta com a semicircunferência (define-se o ponto F);

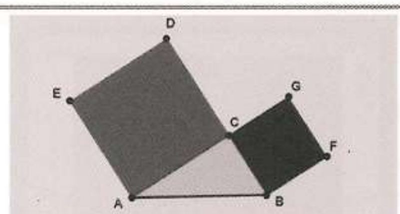


Fig. 2 – Quadrados gerados a partir dos catetos do triângulo

8. Selecionar no menu de ferramentas, Criar nova ferramenta, selecionar os objetos iniciais (pontos A, B, C, D, e E, F e G); o triângulo [ABC], e os dois quadrados; nomear a ferramenta e concluir. Um novo ícone é adicionado à barra de ferramentas.
9. Construir um polígono dados aos pontos A e B e o número de lados (4);
10. Ocultar rótulos, a semicircunferência e definir outra cor para o quadrado com menor área;
11. Clicar no novo ícone, em seguida nos pontos desejados para gerar um novo elemento. Repetir até chegar ao nível desejado.

Figura 6. Protocolo de construção da Árvore Pitagórica

Nesta exploração realiza-se, simultaneamente, trabalho com áreas, perímetros, razões e, de uma forma geral, com progressões geométricas. Outras explorações podem enriquecer a abordagem, nomeadamente: i) discutir sobre as características da figura inicial; ii) relacionar o número de iterações com as áreas dos vários polígonos (a registar numa tabela); iii) identificar relações entre o somatório da área dos quadrados no nível 0 e o somatório da área dos quadrados no nível 1; iv) repetir o processo para o fractal de nível 2; v) identificar um padrão analisando as respostas anteriores; vi) generalizar para o cálculo da área do fractal em qualquer nível e; vii) discutir o Teorema de Pitágoras.

TAREFA IV - CONSTRUÇÃO DE UM PADRÃO RECURSIVO SONORO

Depois de finalizados os fractais geométricos, propõe-se aos alunos a construção de um padrão recursivo sonoro a partir de regras muito simples e utilizando uma ferramenta baseada na Web, o Soundation.

Assim, escolhe-se uma nota musical de partida, por exemplo o Mi; a sua duração, por exemplo 4 tempos e; a duração de uma nota diferente, por exemplo 3 tempos. Denomine-se esta configuração como 4-Mi-3. Em seguida, configura-se um ciclo repetitivo de 4 por 4 tempos e faz-se soar a nota de partida (Mi). Aplique-se então esta simples regra: assim que a última nota deixe de soar, faça-se soar outra com a mesma duração, mas um tom acima. Se a nova nota soar simultaneamente com alguma outra nota prévia, altere-se a duração desta de 4 para 3 tempos ou vice-versa. A configuração 10-Sol-3,5 produz uma melodia especialmente agradável.

TAREFA V - CONSTRUÇÃO DE UM VÍDEO FRAME A FRAME

Por último, aos alunos é-lhes proposta a construção de um vídeo no VideoPad (figura 7). Para isso utilizam os frames capturados aquando da resolução das tarefas com os fractais geométricos, integrando a composição sonora realizada na tarefa anterior.

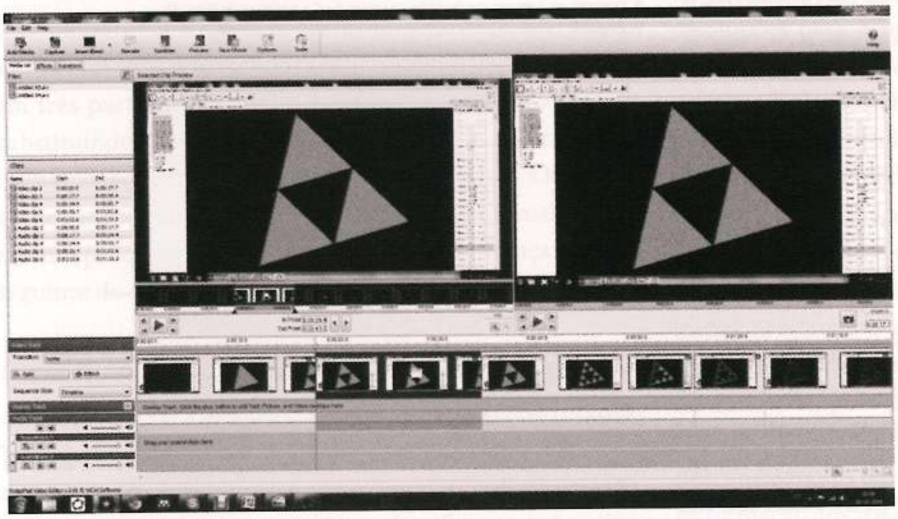


Figura 7. Montagem de um vídeo, frame a frame, no VideoPad

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho representa uma abordagem à "matemática em ambiente tecnológico" mais do que à "tecnologia em ambiente matemático". Centra-se na utilização de recursos tecnológicos multimédia no desenvolvimento do pensamento algébrico e geométrico, de forma contextualizada no mundo real, por meio da construção de padrões geométricos e sonoros.

O professor, enquanto mediador, motivador e potenciador do processo de aprendizagem, quando recorre à utilização de ferramentas tecnológicas pensadas para serem usadas em cenários educacionais específicos, deve levar em consideração a faixa etária dos seus alunos, o seu nível de conhecimento tecnológico, o equilíbrio entre trabalhos individuais e coletivos e a exploração das funcionalidades das ferramentas selecionadas, conforme os objetivos estabelecidos na unidade curricular, já que é destes que depende a eficácia da tecnologia utilizada.

O processo de aprendizagem, quando contextualizado com acontecimentos da vida real, transversais a vários domínios, envolvendo a natureza, a arte e a cultura, independentemente da unidade curricular a ser trabalhada e dos recursos tecnológicos utilizados, pode promover a criatividade e o interesse dos alunos em descobrir novas possibilidades de explorar os conceitos intrínsecos, reduzindo a hostilidade à disciplina. Pretende-se, de facto, uma aprendizagem significativa da matemática em geral, e da álgebra em particular. Através de possibilidades e caminhos alternativos que nos são oferecidos por algumas ferramentas tecnológicas, é possível envolver os alunos numa investigação e inquirição verdadeiras, que contornem as respostas prontas e mecanizadas.

O uso equilibrado de calculadoras e de outras ferramentas é essencial para uma educação matemática de qualidade, quando se desenvolve a compreensão conceptual, a habilidade de cálculo e a de resolução de problemas (NCTM, 2015). A manipulação destas ferramentas pode motivar os alunos para a matemática, na medida em que é favorecida a integração dos canais cognitivos, metacognitivos e afetivos

(Pierce, Stacey, & Barkatsas, 2007). Para a realização destas tarefas selecionámos, assim, um conjunto de ferramentas de natureza open source ou com períodos de utilização gratuitos, quer no âmbito circunscrito da geometria – o GeoGebra – quer em domínios não diretamente ligados à educação, mas significativos em contextos transversais – o Paint.NET, o Soundation e o VideoPad.

Parece claro que a escola e os currículos de matemática devem proporcionar aos alunos e professores acesso a uma formação em ambiente tecnológico, com computadores e software de matemática em ambiente de rede. Em plena revolução digital no século XXI, todavia, a opção por metodologias não tradicionais reduz-se ao domínio pessoal do professor ou ao uso de recursos tecnológicos em abordagens que se mantêm essencialmente transmissivas (Redecker et al., 2009), com impactos limitados na inovação das práticas de ensino e de aprendizagem.

Consideramos que é necessário vivenciar, no contexto do ensino e da aprendizagem formal e informal, o Construtivismo social preconizado por Vygotsky, ampliado/mediado na perspetiva Conectivista de Siemens. Ou seja, um ensino e uma aprendizagem alicerçados também nas interações sociais, humanas e tecnológicas, fazendo uso de recursos didáticos diferenciados, com o objetivo de conduzir à formação de cidadãos criativos e críticos que participem do seu processo de aprendizagem, que partilhem e interajam para construírem novos conhecimentos.

Bibliografia

Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Eds.), Números e Álgebra (pp. 193–211). Lisboa: SEM-SPCE. Disponível em http://hdl.handle.net/10174/1416

Coelho, A., Mbandje, D., Piacentini, V., & Ribeiro, R. (n.d.). Desenvolvimento do Pensamento Algébrico através da Exploração de Padrões em Ambiente Tecnológico. Universidade de Aveiro.

Devlin, K. (1998). Life by Numbers. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Devlin, K. (2003). Mathematics: the Science of Patterns. The Search for Order in Life, Mind, and the Universe. New York: Henry Holt and Company.

Downes, S. (2007). What Connectivism Is. Disponível em http://halfanhour.blogspot.com/2007/02/what-connectivism-is.html

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1), 103–131. http://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Faria, R., & Maltempi, M. (2012). Padrões Fractais: conectando Matemática e Arte. EccoS Revista Científica, 33–53. http://doi.org/10.5585/EccoS.n27.3484

Lévy, P. (2010). Cibercultura (3a Ed). São Paulo: Editora 34.

Macedo, J., & Franco, V. (n.d.). Fractais – uma abordagem em sala de aula com o auxílio de softwares geométricos. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2204-6.pdf

NCTM. (2015). Strategic Use of Technology in Teaching and Learning Mathematics. Acedido em http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Position_Statements/Strategic Use of Technology July 2015.pdf

Pierce, R., Stacey, K., & Barkatsas, A. (2007). A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology. Computers and Education, 48(2), 285–300. http://doi.org/10.1016/j.compedu.2005.01.006

Redecker, C., Ala-Mutka, K., Baciagalupo, M., Ferrari, A., & Punie, Y. (2009). Learning 2.0: The Impact of Web 2.0 Innovations on Education and Training in Europe. Disponível em http://ftp.jrc.es/EURdoc/JRC55629.pdf

Siemens, G. (2005). Connectivism: A Learning Theory for the Digital Age. International Journal of Instructional Technology and Distance Learning (ITDL), January, 1–8. http://doi.org/10.1.1.87.3793

Stein, M. K., Engle, R. a., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. Mathematical Thinking and Learning, 10(4), 313–340. http://doi.org/10.1080/10986060802229675

Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., & Barbosa, A. (2012). Pattern Problem Solving Tasks As a Mean To Foster Creativity in Mathematics. Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4(1), 171–178.

Vygotsky, L. S. (2001). Pensamento e Linguagem (Ed. Elect). Ridendo Castigat Mores. Disponível em http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/vigo.html.

Valentina Piacentini

Centro de Investigação "Didática e Tecnologia na Formação de Formadores", Dep. de Educação e Psicologia, Universidade de Aveiro

Artur Coelho

Agrupamento de Escolas de Almeida

Experiências de simetria com crianças

Quando damos oportunidade às crianças de nos dizerem como pensam ou como vêm os objetos elas surpreendem-nos. Infelizmente muitas vezes estamos tão obcecados com os conteúdos previstos para ensinar que não lhes proporcionamos essas oportunidades. Perdemos assim a possibilidade de repensar os conteúdos que queremos ensinar, as tarefas a propor e as estratégias a seguir. A geometria é uma das áreas da Matemática onde a Arte nos pode ajudar a melhorar os conteúdos de aprendizagem, organizando experiências de aprendizagem ricas, significativas e poderosas.

O trabalho que agora apresento e discuto foi realizado numa experiência que decorreu num Jardim de Infância, dinamizada por uma educadora[1], no âmbito do Projeto MARTE1618 da Escola Superior de Educação de Lisboa. Este projeto de investigação tem como objetivo experimentar e estudar atividades que envolvem simultaneamente aprendizagens matemáticas e de educação artística. Os experimentadores participam no projeto a partir da realização de ações de formação.

TAREFA PROPOSTA

Cada criança teria de fazer 4 quadrados iguais. Escolheriam os materiais que quisessem (botões de vários tamanhos, pedaços de tecido de cores, pedaços de cartão canelado). No caso de optarem por um material com cor, só poderiam optar por uma cor.

Depois dos quadrados feitos, as crianças iriam ser distribuídas por equipas e realizar uma sequência. Do trabalho conjunto culminaria uma obra de arte, uma composição coletiva para a qual só seriam escolhidos 3 quadrados de cada criança. É por esta razão que a obra coletiva foi nomeada pelas crianças como "Quadrados coloridos menos um" (figura 1)

Esta atividade foi realizada na continuidade de outras atividades em que as crianças tinham observado obras de Cargaleiro e conversado sobre elas. Nestas obras o artista recorre a sequências de elementos diversos. As crianças tinham também construído sequências de objetos com materiais diversificados antes de realizarem esta atividade individual de construção de 4 quadrados iguais. Para a composição coletiva final não havia qualquer critério matemático para as sequências dos quadrados construídos individualmente. O objetivo foi exclusivamente estético.

Como afirma a educadora no seu relatório da formação: "Todos os materiais colocados à disposição das crianças tinham como cor o castanho claro ou bege e as três cores primárias: amarelo, azul e "magenta". Ao escolher os materiais teriam de ter atenção que tudo o que escolhiam tinha de ser multiplicado por 4, nomeadamente no tamanho, cor, textura e forma. Os botões eram muitos, de diferentes tamanhos e

1Educadora Mª Leonor Henriques, Agrupamento de Escolas de D Maria II, JI do Cacém, Sintra.

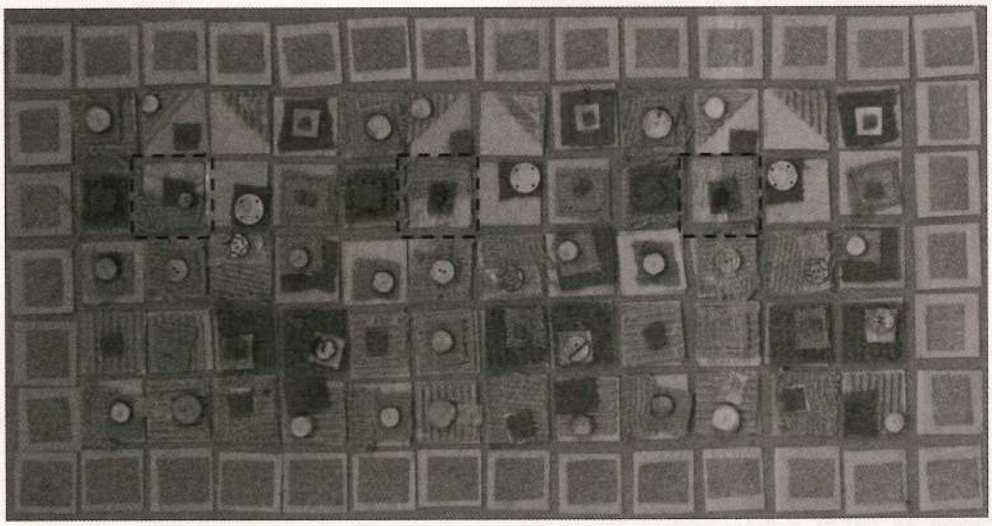


Figura 1. Fotografia de composição realizada numa sala de jardim de infância, "Quadrados coloridos menos um". Destaque na composição de elementos individuais relacionados através de rotações

sendo do mesmo tamanho tinham um número de furos em quantidades diferentes.As crianças perceberam o que lhes foi pedido e realizaram a atividade com empenho, interesse e divertimento. Não apresentaram dificuldades na realização da atividade individual. A composição coletiva foi realizada num momento posterior. Depois da obra esteticamente organizada foi analisada matematicamente ainda em coletivo".

É durante esta discussão coletiva que os raciocínios das crianças sobre simetria se revelam, proporcionando grande admiração à educadora que não estava à espera destas ideias nem do impacto que a composição coletiva tinha dado às componentes individuais relativamente à simetria de rotação.

> Uma criança reparou que um dos seus quadrados não estava na posição certa. A educadora respondeu que ela estava correta, no entanto este trabalho era uma obra de arte e ela poderia colocá-los em posições diferentes pois seria mais dinâmico. Então, colocou os três quadrados em posições diferentes, outra criança fez o mesmo com os seus que estavam todos na mesma posição. Uma terceira criança observou que mesmo rodando o seu quadrado, ele ficaria sempre igual pois estava colado no meio. Uma das crianças poderia ter rodado os seus, mas preferiu não o fazer deixando-os ficar a todos na mesma posição.
>
> (Excerto de relatório de educadora)

Para melhor ilustrar o que as crianças viram destacamos e analisamos alguns elementos individuais. Cada grupo de 4 composições quadradas, em que isoladamente os elementos eram iguais, permitiu destacar diferenças na sua simetria intrínseca quando colocados na composição coletiva. Na figura 2, as duas composições elementares têm simetria de rotação de ordem 1, e por isso podem ser colocadas em 4 posições distintas que correspondem à rotação de ordem 4 da figura original. Foi num destes casos que uma criança não quis aplicar a rotação ao seu quadrado base e, por isso, o deixou sempre na mesma posição. Na figura 3, cada uma das duas composições elementares têm simetria de rotação de ordem 4 e, por isso, seja qual for a posição em que o quadrado base for colocado o resultado é sempre igual.

A maior parte das crianças fizeram composições de base quadrada com simetria de ordem 1, pois ao colocarem os vários elementos quebraram a simetria do quadrado. No entanto, algumas crianças fizeram composições com simetria de ordem 4 como vimos. Não houve, mas poderia ter havido também, composições com simetria de rotação de ordem 2 (figura 4). Os materiais que a educadora deu às crianças abriam estas três possibilidades e essa intencionalidade foi muito importante. Embora os objetos colocados à disposição das crianças constituíssem elementos bastante irregulares, devido aos materiais de que eram feitos, tinham formas base muito regulares e carregadas de simetria (botões circulares, quadrados e retângulos de tecido, triângulos retângulos de cartão).

Esta experiência mostra que a ligação entre a educação

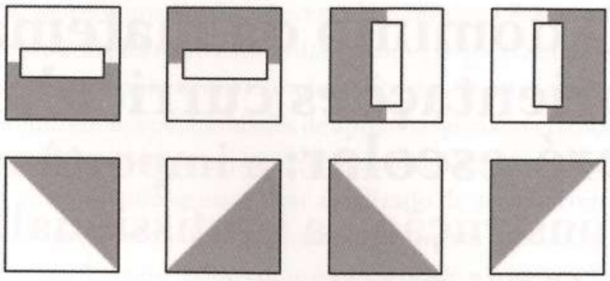


Figura 2

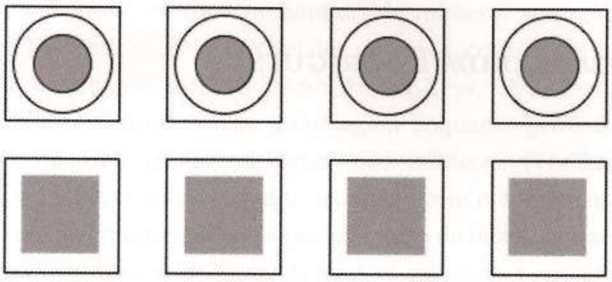


Figura 3

artística e a matemática permite desenvolver desde muito cedo o conceito de simetria geométrica na sua mais ampla aceção e com toda a sua riqueza. Aproveitar e explorar a simetria nas figuras geométricas é precisamente o que têm feito os artistas plásticos ao longo dos tempos. No projeto MARTE1618 temos vindo a identificar aspetos muito interessantes no âmbito da Geometria e da Combinatória que abrem novas possibilidades de atividades exploratórias e de resolução de problemas ligadas a atividades de Educação Artística.

A educadora que fez esta experiência escreveu também no seu relatório que "As crianças pensaram, aprenderam matemática, divertiram-se e criaram! Não será isto que se pretende de um jardim-de-infância?" Eu acrescento, não será isto o que se pretende da escola em qualquer nível de escolaridade na sua vertente de educação matemática?

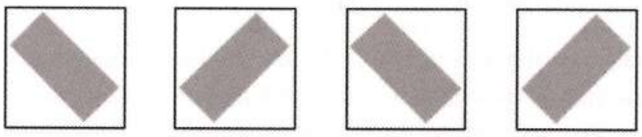


Figura 4

Referências Bibliográficas

Loureiro, C., Guerra, C., Castro, S. & Pereira, T. (2016). Contributos para uma interdisciplinaridade entre Matemática e Literacia Visual. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos, Livro de Atas do EIEM 2016 - Encontro em Investigação em Educação Matemática - Recursos na Educação Matemática (EIEM 16, 19-20 Novembro 2016) (pp. 99-112), Universidade de Évora. ISSN: 2182-0023.

O domínio da matemática nas novas orientações curriculares para a educação pré-escolar: a importância da explicitação na construção da profissionalidade do/a educador/a de infância

Margarida Rodrigues

No presente artigo, proponho-me fazer uma análise crítica das Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (OCPE) recentemente publicadas, em junho de 2016. Nesta análise, saliento os aspetos positivos e refiro, outros aspetos que, na minha perspetiva, se manifestam como insuficiências deste novo documento curricular.

Nas novas OCPE, os fundamentos e princípios da pedagogia para a infância assumem uma unidade atendendo à educação de crianças dos 0 aos 6 anos. Lembro, a este propósito, a petição pública a ser enviada para a Assembleia da República e que já foi assinada por 2467 pessoas a

> solicitar a inclusão da educação dos 0 – 3 anos no sistema educativo, através da alteração da Lei de Bases do Sistema Educativo, passando a educação pré-escolar a designar-se como educação de infância e destinando-se a todas as crianças desde o seu nascimento até à idade de ingresso no ensino básico, independentemente das entidades responsáveis pela sua promoção. (Petição Pública)

Assim, embora as novas OCPE mantenham a designação anterior (Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar), assumem os mesmos fundamentos que justificam esta petição solicitando a mudança de designação para educação de infância: o reconhecimento, na Convenção dos Direitos da Criança (1989) ratificada por Portugal em 1990, da educação dos 0 aos 3 anos como um direito da criança, em consonância com a Recomendação nº 3/2011 do Conselho Nacional de Educação e com as recomendações da OCDE (*Early Childhood Education: From 0 to 6*) e da União Europeia (*Proposal for Key Principles for Early Childhood Education and Care*, publicadas em 2014).

Os fundamentos e princípios da pedagogia nas OCPE estão também conformes com a investigação atual sobre a forma como a criança se desenvolve e aprende. Destaco a importância das aprendizagens holísticas e da atividade de brincar/jogar como meio privilegiado de aprendizagem. Igualmente fundamental é o papel do/a educador/a de infância enquanto promotor/a de aprendizagens em contexto de intencionalidade educativa. Esse papel é claramente reconhecido no documento, que explicita elementos importantes do trabalho profissional do/a educador/a quer em termos gerais quer mais específicos nas várias áreas de conteúdo. Assim, as OCPE podem constituir um instrumento de trabalho importante apoiando os/as educadores/as com bastantes sugestões concretas, sendo de relevar as sugestões de reflexão que atravessam todo o documento, fundadas numa perspetiva de desenvolvimento de uma profissionalidade reflexiva.

A estrutura das secções respeitantes às áreas de conteúdo está muito bem conseguida, clarificando as aprendizagens a desenvolver pelas crianças (*Aprendizagens a promover*) e os indicadores de avaliação dessas aprendizagens (*Estas aprendizagens podem ser observadas, por exemplo, quando a criança...*), e exemplificando ações de ordem metodológica a realizar pelo/a educador/a no âmbito da intencionalidade educativa de promoção das aprendizagens das crianças (*O/A educador/a promove estas aprendizagens quando, por exemplo:*).

O Domínio da Matemática encontra-se integrado na área de conteúdo *Área de Expressão e Comunicação*, tal como sucedia no documento curricular anterior, as OCPE de 1997, uma vez que as novas OCPE correspondem a uma revisão e atualização do documento anterior, sem a pretensão de criar rupturas estruturais significativas. A justificação para esta integração é plausível embora também pudesse estar integrado na *Área do Conhecimento do Mundo* já que a estruturação do pensamento potenciada pelas aprendizagens matemáticas é fundamental para o conhecimento do mundo envolvente e não apenas como forma de expressão e comunicação, tal como é aliás reconhecido, no próprio documento, na justificação apresentada para a integração em *Área de Expressão e Comunicação*: "o acesso a esta linguagem [matemática] é fundamental para a criança dar sentido, conhecer (...) o mundo" (Silva, Marques, Mata, & Rosa, p. 6).

O Domínio da Matemática é coerente com os fundamentos e princípios da pedagogia para a infância apresentados antes e sublinha, na parte introdutória geral, aspetos específicos importantes como sejam a importância da aprendizagem matemática nos primeiros anos e a matemática inserida no quotidiano.

Este Domínio é estruturado em quatro componentes: Números e Operações, Organização e Tratamento de Dados, Geometria e Medida, e Interesse e Curiosidade pela Matemática. É de toda a relevância a incidência não só nos temas matemáticos mas também numa dimensão de natureza atitudinal, já que esta influencia o desenvolvimento das aprendizagens. Poderia existir uma menção à caracterização dos componentes que referisse a sua natureza distinta já que a listagem dos componentes tal como é apresentada pode dar a ideia de serem do mesmo tipo.

Os três primeiros componentes incidentes em conteúdo matemático são coincidentes com os Domínios apresentados nas Metas de Aprendizagem para a Educação Pré-escolar relativas à Matemática, existindo coerência entre estes dois documentos curriculares. É também coerente com os domínios programáticos da Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico, o que pode facilitar o trabalho de articulação vertical entre estes níveis educativos, nomeadamente nos agrupamentos onde funcionam salas de Jardim de Infância e salas de 1.º Ciclo.

A explicitação destes três componentes com um foco claro nas aprendizagens específicas das crianças, nos respetivos indicadores de avaliação e nas ações concretas a desenvolver pelo/a educador/a é um avanço relativamente às OCPE de 1997 que, embora com pressupostos metodológicos e pedagógicos similares, apresentavam uma formulação mais vaga. Esta explicitação é um contributo fundamental para a consciência do/a educador/a da intencionalidade educativa no Domínio de Matemática. A compreensão profunda da natureza e das potencialidades das tarefas matemáticas pelo/a educador/a é uma condição necessária para o desenvolvimento das capacidades matemáticas das crianças, já que fragilidades ao nível do conhecimento matemático dos/as educadores/as reduzem as oportunidades de aprendizagem das crianças (Fox, 2006). Além da explicitação, há ainda a destacar o facto do seu conteúdo se encontrar atualizado de acordo com a investigação em educação matemática nesta faixa etária. Exemplo disso é o modo como é apresentado o componente *Números e Operações*. Em linha com a investigação recente, encontramos um foco no sentido de número, enquanto compreensão global e flexível dos números, com ênfase no seu caráter evolutivo (McIntosh, Reys & Reys, 1992). Neste âmbito, é dado destaque à contagem enquanto processo fundamental na aprendizagem dos números (Treffers, 2001), contrariamente ao que acontecia com o documento curricular anterior em que a aprendizagem do número estava unicamente associada às atividades de classificação e seriação, de acordo com a perspetiva piagetiana de construção do conceito de número "como correspondendo a uma série (número ordinal) ou uma hierarquia (número cardinal)" (ME, 1997, p. 74).

Passo a apresentar breves apreciações sobre cada uma das partes que estruturam o Domínio da Matemática.

Parte introdutória do Domínio da Matemática. Nesta parte, são explicitados processos gerais, tais como a classificação e a seriação, a identificação das regularidades em padrões de repetição e de crescimento, o raciocínio matemático, a representação e a comunicação do pensamento matemático, a resolução e invenção de problemas, e que são transversais aos diversos componentes de conteúdo matemático. Sublinho a importância destes processos gerais e também a forma como é salientada a inter-relação entre eles, assim como o modo como os mesmos podem ser desenvolvidos pelas crianças através das suas atividades de brincar e de jogar.

O trabalho com padrões assume uma grande relevância, já que a consciência da estrutura de um padrão (ilustrado na figura 1) é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático das crianças (Mulligan, 2013).

A investigação tem mostrado que as crianças conseguem generalizar ideias matemáticas mais cedo do que antes se supunha. Por exemplo, o estudo de Serra (2014), desenvolvido com crianças com idades compreendidas entre 3 anos e meio e 4 anos e meio, evidencia que as mesmas são capazes de criar (ilustrado na figura 2), copiar e continuar padrões de repetição com unidades de repetição até 5 elementos. Estas crianças evoluíram até à codificação dos padrões com letras, o que lhes permitiu reconhecer diferentes estruturas, tendo sido, ainda, capazes de transferir um dado padrão para diferentes modos

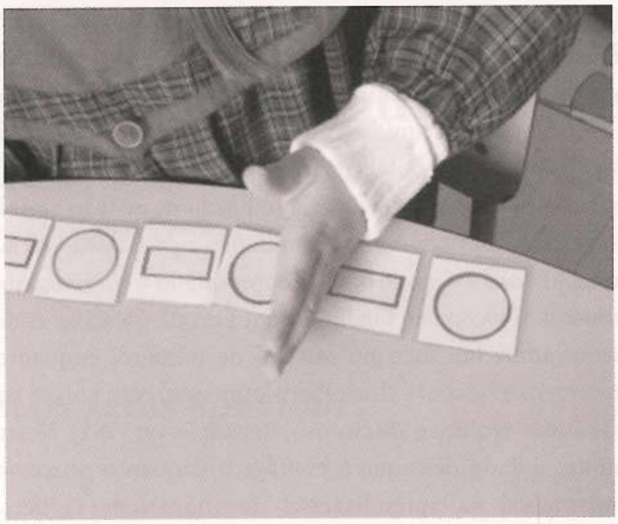


Figura 1. Marcação da unidade de repetição com a mão (figura retirada de Serra, 2014, p. 80)

ou materiais (por exemplo, transferir um padrão gestual do tipo ABC, em que as crianças tocam em diferentes partes do corpo, cabeça-pernas-pés, para um padrão pictórico de cores do tipo ABC, vermelho-azul-cinzento).

Números e Operações. Além dos aspetos de fundo que já atrás referi, há que destacar a importância da utilização de materiais como suporte da aprendizagem dos números. É

Figura 2. Criação de um padrão de repetição do tipo ABB (figura retirada de Serra, 2014, p. 58)

a este propósito que são referidos os dados, cartões com pintas e dominós como exemplos de materiais que apoiam o desenvolvimento da capacidade de *subitizing*, isto é, a capacidade de reconhecimento da mancha sem necessidade de contagem. A meu ver, não se dá o devido destaque a esta capacidade nas novas OCPE, sendo explicitada uma única vez e neste âmbito de utilização de materiais. Podemos distinguir dois tipos de *subitizing* (Sarama & Clements, 2009), o *percetivo*, consistindo no reconhecimento automático de um número num determinado padrão numérico sem recorrer conscientemente a outro processo mental ou matemático, e o *conceptual*, consistindo no reconhecimento súbito do número em que a pessoa usa estratégias de decomposição de forma consciente (por exemplo, olhando rapidamente para a peça de dominó representativa do 6, a criança reconhece o 6, decompondo-o em dois grupos de 3, e por isso, compõe o 6 como unidade de unidades, sendo que o 6 é visto simultaneamente como dois grupos de três e também como um todo, o seis). Inicialmente, as crianças começam por realizar *subitizing* percetivo, evoluindo depois para o conceptual. No estudo de Cordeiro (2014), de entre as seis crianças participantes com 4 anos, duas delas evidenciaram realizar *subitizing* conceptual até ao número 6, capacidade esta que contribuiu para as mesmas verem os números como somas e compreenderem as relações parte-todo. O *subitizing* conceptual desempenha, assim, um papel avançado de estruturação numérica, o qual é desvalorizado, por omissão, nas OCPE.

A contagem é um processo muito importante na aprendizagem do número, sendo explicitada essa importância, tal como indico atrás. Justifica-se, pois, que este processo seja contemplado na subsecção *Aprendizagens a promover*. Contudo, não se trata de uma representação, tal como é colocado na listagem de representações, a par de desenhos, símbolos, entre outras.

Organização e tratamento de dados. Este componente adota uma perspetiva correspondente a um ciclo investigativo com diferentes fases vivenciadas pelas próprias crianças: a formulação de questões, recolha e organização dos dados, representação dos dados, interpretação e comunicação dos dados (Sheffield, Cavanagh, Dacey, Findell, Greenes, & Small, 2004). São referidos os gráficos de barras como representações dos dados. Não há, no entanto, qualquer alusão ao gráfico de pontos como um gráfico a explorar previamente ao gráfico de barras, o que se justificaria por ser um gráfico mais intuitivo e simples e cuja exploração pode conduzir posteriormente à compreensão do gráfico de barras.

Geometria. Destaco a relevância dada ao pensamento espacial desenvolvido através da vivência das crianças do espaço que as rodeia, "tendo como ponto de partida as [suas] atividades espontâneas e lúdicas" (Silva et al., 2016, p. 79). Um dos itens contemplado como área de trabalho é a construção de padrões, englobando no mesmo padrões geométricos, associados à observação de azulejos e desenhos da calçada portuguesa mas também padrões cujos exemplos -- "As

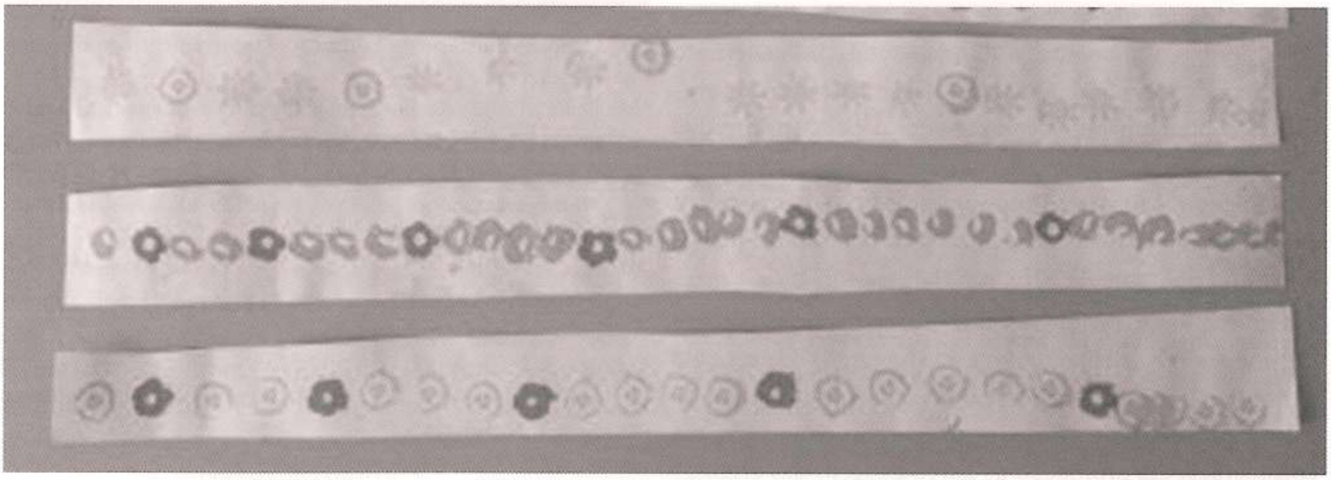


Figura 3. Padrões de crescimento realizados por várias crianças (Serra, 2014, p. 115)

crianças muitas vezes inventam naturalmente padrões quando estão a construir com legos ou a enfiar contas (...) a criação de ritmos musicais" (p. 80) -- remetem para padrões de repetição ou de crescimento (ilustrado na figura 3), enquadrados nos processos gerais, e cuja inclusão neste componente pode gerar alguma confusão conceptual entre os/as educadores/as de infância.

Um padrão geométrico caracteriza-se por ter duas simetrias de translação com direções diferentes, prestando-se para a identificação de simetrias. Os padrões de repetição ou de crescimento caracterizam-se por conterem uma lista de itens discretos com um início mas sem fim, sendo que a ordem dos termos corresponde à sequência dos números naturais, podendo, por isso, fazer-se uma conexão entre a exploração deste tipo de padrões e a aprendizagem dos números; contudo, não faz sentido o seu enquadramento neste componente. Alude-se à identificação de simetrias em *Aprendizagens a promover*, associada a "reconhecer e operar com formas geométricas e figuras" (Silva et al., p. 80) mas não existe qualquer referência às isometrias inerentes a este objetivo de aprendizagem, já que grande parte das atividades que visam operar com figuras geométricas não passam pela identificação de simetrias mas sim pela utilização das isometrias que não são simetrias (ou seja, em que a imagem obtida não coincide com o objeto). Embora não se pretenda que as crianças neste nível educativo tenham noção de quando usam as isometrias bem como das suas características, é importante que as utilizem para resolver problemas como o de montar puzzles ou o de compor e decompor figuras geométricas. Assim, é relevante que as crianças evoluam na utilização da rotação, reflexão ou translação de peças desde a adoção de estratégias de tentativa e erro até a uma antecipação do efeito dessas isometrias, envolvendo uma utilização intencional das mesmas (figura 4) para conseguir solucionar os vários dilemas com que se podem confrontar (Sarama & Clements, 2009; Nunes, 2016).

Medida. É de relevar a referência a uma trajetória de aprendizagem, com início na compreensão dos atributos mensuráveis dos objetos e na sua comparação direta, passando-se depois para a utilização de unidades de medida não padronizadas. No final, é sugerida a utilização de unidades de medida padronizadas em atividades como pesar a farinha para um bolo, ou medir as suas alturas, o que considero ser prematuro, devendo reservar-se essa utilização para o 1.º Ciclo quando os alunos já conseguem compreender a medição efetuada com esse tipo de unidades. A medição com recurso a unidades de medida não padronizadas envolve uma série de conceitos que é importante que a criança aprenda antes de se encetar o uso de unidades de medida padronizadas.

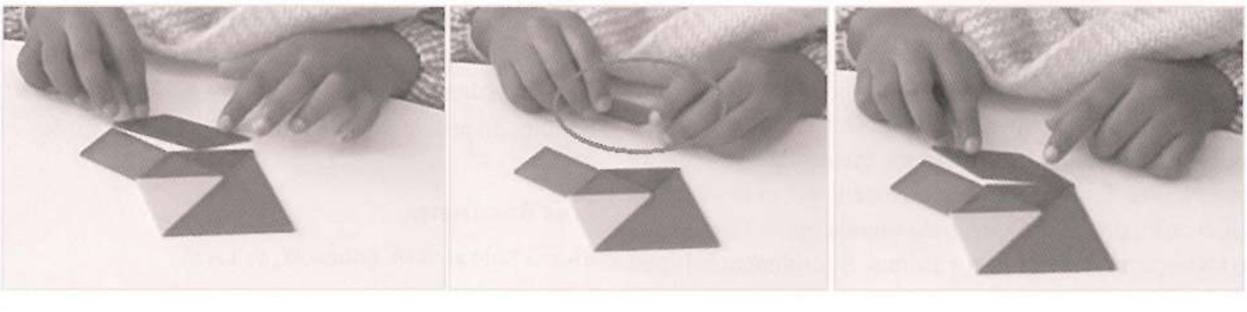


Figura 4. Aplicação da reflexão à peça com antecipação do respetivo efeito (figura retirada de Nunes, 2016, p. 64)

Interesse e Curiosidade pela Matemática. Tal como referi atrás, este componente é fundamental, influenciando positivamente as aprendizagens das crianças. As novas OCPE sublinham neste componente o papel primordial do/a educador/a na promoção desse interesse e curiosidade, estimulando a formulação de questões e "encorajando a descoberta de diversas estratégias de resolução e o debate em grupo" (Silva et al., 2016, p. 83).

Em síntese, as OCPE (Silva et al., 2016) configuram-se como um documento orientador da gestão integrada do currículo globalmente coerente e consistente, sendo que o Domínio da Matemática explicita aspetos centrais e pertinentes a ter em consideração na promoção de aprendizagens das crianças nesta área.

Referências

Cordeiro, M. (2014). *A capacidade de subitizing em crianças de 4 anos* (Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa). Consultada em http://repositorio.ipl.pt/handle/10400.21/3905

Fox, J. (2006). A justification for mathematical modelling experiences in the preparatory classroom. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* 1 (pp. 221-228). Hobart: MERGA.

MacIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8.

ME (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Mulligan, J. (2013). Reconceptualizing early mathematics learning. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 139-142). Kiel, Germany: PME.

Nunes, M. (2016). *A resolução de problemas geométricos por crianças de 5 anos* (Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa).

Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children.* New York: Routledge.

Serra, P. (2014). *Lendo e explorando histórias: A emergência do pensamento algébrico em crianças de 4 anos.* Lisboa: APM.

Sheffield, L., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C., Greenes, C., & Small, M. (2004). *Navigating through data analysis and probability in prekindergarten-grade 2* (2ª ed.). Reston: NCTM.

Silva, I., Marques, L., Mata, L., Rosa, M. (2016). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar.* Lisboa: Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação.

Treffers, A. (2001). Kindergarten 1 and 2: Growing number sense. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 31-42). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University and National Institute for Curriculum Development (SLO).

Margarida Rodrigues

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Uma investigação com cúpulas

A tarefa apresentada destina-se a ser desenvolvida no 3.º ciclo e tem como objetivo principal o desenvolvimento do raciocínio geométrico, o que decorre de três atividades: a) a construção de um modelo físico e mental, a partir da representação no plano; b) a identificação de relações numéricas, associadas à forma como os elementos dos sólidos se encontram organizados; e c) a justificação da inexistência de outros sólidos deste tipo.

Para a sua realização sugiro fortemente que sejam utilizados, como recurso, polígonos encaixáveis (tipo polydron), especificamente o conjunto que permita construir uma cúpula pentagonal, a triangular e a quadrangular, embora sem as bases. Embora também existam peças hexagonais no mercado, proponho que, pelo menos numa fase inicial, não forneçam estas peças aos alunos. A tendência habitual é achar que poderão construir uma cúpula qualquer. No entanto, a construção das três cúpulas e a sua observação deve alertar para o facto de umas serem mais "achatadas" do que outras. Podemos então questionar o que poderá acontecer se formos aumentando o número de lados do polígono que dá nome à cúpula. É que, no caso de ser um hexágono, já obteremos uma figura plana, visto que a soma das amplitudes dos ângulos internos em torno dos vértices do hexágono é 360º!

Para investigar mais sobre poliedros pode fazer o download gratuito do programa Poly http://www.peda.com/download/

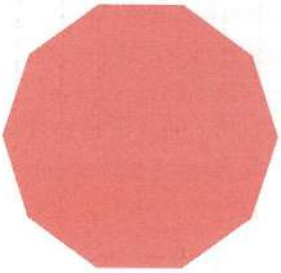
Lina Brunheira

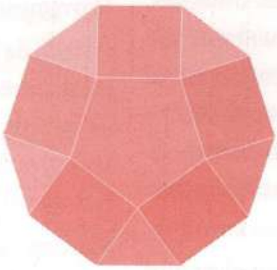
Escola Superior de Educação de Lisboa

Uma investigação com cúpulas

Nas figuras abaixo encontras três vistas do mesmo sólido – uma cúpula pentagonal. Trata-se de um sólido que pertence à família dos sólidos de Johnson, cujas faces são polígonos regulares. As cúpulas, subfamília dos sólidos de Johnson, tem o seguinte processo de construção: Cada aresta dessa face liga-a a outras faces quadradas e, entre estas, existem triângulos equiláteros. O nome da cúpula é dado pelo polígono que ocupa a face topo, neste caso um pentágono regular. A cúpula tem ainda uma outra face (representada à esquerda) que é a sua base.

Além da cúpula pentagonal, existem outras cúpulas: a cúpula triangular e a cúpula quadrangular.





1. Preenche a tabela com o número de vértices, faces e arestas de cada cúpula.

Nome de cúpula	Nº de vértices	Nº de faces	Nº de arestas
Pentagonal			
Quadrangular			
Triangular			

2. Qual a relação que existe entre o número de arestas da face topo e:
   a. O número de arestas da base? Justifica.
   b. O número de faces da cúpula? Justifica.
   c. O número de vértices da cúpula? Justifica.
   d. O número de arestas da cúpula? Justifica.
3. Estas cúpulas são únicas. Significa que não existem cúpulas hexagonais, heptagonais, etc. Justifica porquê.

Educação Matemática Crítica: intervindo no Presente para construir o Futuro

João Carlos Terroso

Vários são os momentos em que o cidadão comum se depara com informações, factos ou situações sociais, económicas e políticas que envolvem números. Desde, por exemplo, as percentagens de nados vivos em determinado país, às taxas de juro oferecidas pelas instituições financeiras, até às comuns situações de imposto do dia a dia... Em todas estas situações, para qualquer pessoa é essencial o desenvolvimento de um espírito crítico e de um nível de literacia matemáticos. Essencial uma vez que a falta desse conhecimento e dessa dimensão de pensamento poderá gerar situações de transmissão de informação falaciosas entre indivíduos ou situações menos agradáveis para quem as vive.

A grande instituição que é a Escola poderá desenvolver, nos futuros cidadãos de uma sociedade em permanente mudança e evolução, esta vertente crítica de pensamento de cada um.

Assim aponta o documento "Perfil dos Alunos para o Século XXI" (2017) recentemente discutido e alvo de uma cuidada reflexão. Neste documento, os pensamentos crítico e criativo são apontados como competências chave a desenvolver nos alunos até ao final do ensino obrigatório. O pensamento crítico abrange "observar, identificar, analisar e dar sentido à informação, às experiências e às ideias e argumentar a partir de diferentes premissas e variáveis" (Gomes et. al., 2017, p. 14). Também envolve construção de um conjunto de possíveis cenários solução de determinado problema, bem como a definição de um conjunto de critérios de avaliação de resultados. Essa revisão envolve o revisitar constante dos cenários solução, aquando da sua construção. No que concerne ao pensamento criativo, o documento aponta que este envolve "gerar e aplicar novas ideias em contextos específicos, abordando as situações a partir de diferentes perspetivas, identificando soluções alternativas e estabelecendo novos cenários" (Gomes et. al., 2017, p.14).

Tendo em conta estas ideias, é importante que uma área tão abrangente como a Matemática desenvolva esse mesmo espírito crítico através da atividade de resolução de problemas, atividade essa que deverá ter um lugar permanente nas salas de aula de Matemática.

O conceito de Educação Matemática Crítica foi introduzido nos Estados Unidos da América e na Europa simultaneamente por dois educadores diferentes: Frankenstein em 1981; Skovsmose em 1985 (Tutak, Bondy & Adams, 2010).

Focado na perspetiva estatística, Frankenstein considera que a Educação Matemática Crítica corresponde a questionar as estruturas assumidas como garantidas pela sociedade na tentativa de percebê-las de forma a agir e atuar criticamente nas mesmas.

Skovsmose, no mesmo sentido, explicita o poder formatador que a Matemática possui na realidade. Na sua opinião, a Matemática reinventa a realidade, arranjando novos entendimentos que poderão não só mudar a interpretação, mas também dominá-la parcialmente e reordená-la. Desta forma, a Educação Matemática Crítica trata-se de potencializar os alunos para o poder formatador da Matemática e, assim, evitar que sejam controlados por ele.

Arranjando um ponto de convergência destas duas definições, encaro a Educação Matemática Crítica como o estabelecimento de uma relação pessoal entre a matemática e as estruturas que envolvem a sociedade. Deste modo, o cidadão consegue agir e atuar ativamente de forma crítica nessas mesmas estruturas, evitando ser apanhado desprevenido de forma falaciosa pela modelação constante da sociedade. A educação matemática não pode estar restringida à sala de aula (Conceição e Rodrigues, 2015), mas sim ter uma visão exterior e global sobre a realidade que é vivida pelos indivíduos da sociedade.

Fica claro que a Educação Matemática Crítica não é limitada. A aula de Matemática não se pode restringir a situações contextualizadas e significativas para a construção do conhecimento nos alunos. Deve também contribuir para construir uma interpretação pessoal acerca dessas intervenções e uma perspetiva crítica, de forma a conduzir a uma intervenção social direta dos indivíduos na sociedade.

Destaco que "uma educação matemática que esteja comprometida com a democracia não pode reduzir-se simplesmente às qualidades intrínsecas da matemática, ou às construções conceptuais da disciplina" (Skovsmose &Valero, 2002, p. 12). A comunidade científica assume a posição de que a educação matemática consegue ter uma perspetiva crítica que influencia e sensibiliza os indivíduos para a realização de ações ativas, sob um ponto de vista crítico. Em 2013, Tenreiro-Vieira e Vieira apresentam um quadro para o Pensamento Crítico, distribuindo-o por três domínios principais: Conteúdo; Processos/Capacidades de Pensamento; Disposições/Atitudes e Valores.

Pode-se constatar que "o pensamento crítico está incorporado numa família de modos de pensar que se intersetam" (Tenreiro-Vieira & Vieira, 2013, p. 181), entre os quais se localiza o pensamento matemático. Daí ser cada vez mais importante a formação de futuros indivíduos e cidadãos das sociedades que sejam matematicamente literados e que saibam interpretar a informação dada através dos números, ao mesmo tempo que utilizam a matemática de forma mais refletida e consciente possível (Conceição & Rodrigues, 2015).

Dimensão do Conteúdo	- Termos/vocabulário - Conhecimento conceptual e axiológico do domínio subjacente à questão ou problema sobre o qual incide o pensar de forma crítica
Dimensão dos Processos/ Capacidades de Pensamento	- Tomar decisões - Formular a questão ou problema a resolver - Estabelecer e avaliar razões - Analisar e avaliar argumentos - Argumentar e contra-argumentar (procurar diferentes pontos de vista e identificar as suas potencialidades e limitações) - Avaliar imparcialmente todos os pontos de vista - Identificar assunções e avaliar a sua provável validade - Identificar falácias - Avaliar a credibilidade de uma fonte - Fazer generalizações - Formular hipóteses - Tirar conclusões (procurar inferências que são profundas, conscientes e lógicas) - Identificar as potencialidades relativas de uma inferência - Ligar as inferências, forte e diretamente, da evidência às conclusões - Investigar - Fazer juízos de valor - Analisar e avaliar crenças e cursos de ação - Avaliar o processo de pensamento
Dimensão das Disposições/ Atitudes e Valores	- Autoconfiança no uso das capacidades para pensar de forma crítica - Atitude inquiridora - Abertura de espírito - Procurar estar bem informado - Procurar tanta precisão quanta o assunto o permitir - Confiança e respeito pelas razões - Humildade, coragem, empatia, integridade e perseverança intelectual - Imparcialidade ou equidade

Fonte: Tenreiro-Vieira & Vieira, 2013

O campo da Educação Matemática Crítica e do Pensamento Crítico, apesar de já desenvolvido a nível de quadros teóricos, ainda está muito por explorar na sua vertente mais empírica. Torna-se importante o desenvolvimento de investigações que estudem qual a relação que a Educação Matemática Crítica tem com a democracia e a cidadania. Com essas investigações poder-se-á desenvolver novas teorias que irão contribuir para os atuais currículos de Matemática.

O Professor de Matemática é um dos responsáveis por desenvolver o pensamento matemático crítico dos alunos, futuros cidadãos das gerações vindouras. Muito do desenvolvimento futuro da Humanidade passará pelas mãos desses alunos, pelo que é fundamental a sua boa formação matemática escolar com vista ao alcance do bem social.

Concluo a minha reflexão com o desafio.... Visto que os resultados são a longo prazo e que se pretendem resultados de forma urgente, porque não começar já?

Referências Bibliográficas

Conceição, J. & Rodrigues, M. (2015). O trabalho de projeto em Matemática: questionando a realidade num 3.º ano de escolaridade. *Quadrante, 24*(1), 129-152.

Tutak, F., Bondy, E. & Adams, T. (2010). Critical pedagogy for critical mathematics education. *International Journal of Mathematics Education in ScienceandTecnology, 42* (1), 65-74.

Skovsmose, O. &Valero, P. (2002). Quebrando a neutralidade política: o compromisso crítico entre a educação matemática e a democracia. *Quadrante, 11* (1), 7-28.

Tenreiro-Vieira, C. & Vieira, R. (2013). Literacia e pensamento crítico: um referencial para a educação em ciências e em matemática. *Revista Brasileira de Educação, 18* (52), 163-242.

Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Ucha, L., Encarnação, M., ..., Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.*Lisboa: Ministério da Educação.

João Carlos Terroso

Colégio Guadalupe

O ensino exploratório numa primeira abordagem ao estudo da multiplicação: a importância da discussão em plenário

Ana Teresa Benjamim Ribeiro Vieira
Hélia Gonçalves Pinto

Neste artigo apresenta-se uma proposta para uma primeira abordagem à multiplicação, no 2.º ano de escolaridade, num contexto de ensino exploratório. Esta abordagem emana de um estudo realizado pela primeira autora (Vieira, 2015), que teve como objetivo perceber como se processa a aprendizagem da multiplicação no 2.º ano de escolaridade, a partir da resolução de uma sequência de tarefas, no referido contexto. Neste artigo, após um pequeno enquadramento ao ensino e aprendizagem da multiplicação nos primeiros anos de escolaridade, em contexto exploratório, serão apresentados e discutidos os resultados da exploração da primeira tarefa, implementada pela primeira autora no seu estudo, enfatizando-se o momento da discussão em plenário.

O ensino e a aprendizagem da multiplicação no 1.º CEB

De acordo com Treffers e Buys (2001), a primeira abordagem à multiplicação passa, normalmente, pela adição sucessiva de parcelas iguais. Consideram que é nesta fase que os alunos reconhecem três mais três como o mesmo que duas vezes três, ou seja, começam a desenvolver o conceito de multiplicação. Alertam ainda para o facto de que a aprendizagem da multiplicação deve ser um processo de desenvolvimento conceptual baseado na exploração de contextos adequados, os quais podem ser fornecidos através dos problemas de contexto e dos modelos subjacentes. Segundo os autores, os problemas de contexto revelam aspetos fundamentais das estruturas multiplicativas que lhe estão associadas e permitem identificar propriedades da multiplicação a partir dos problemas e dos respetivos modelos. Assim, importa propor contextos que estruturem progressivamente a multiplicação, começando com grupos de objetos com o mesmo cardinal e avançando para situações relativas a grupos de objetos aos quais se associe uma disposição retangular.

Vários estudos realizados no âmbito do ensino e aprendizagem da multiplicação nos primeiros anos de escolaridade (e.g. Mulligan e Mitchelmore (1997), Sherin e Fuson (2005)), revelam que os modelos intuitivos mais usados pelos alunos, aquando da resolução de problemas de grupos iguais, envolvem a contagem direta, adição repetida e operação multiplicativa. Segundo Mulligan e Mitchelmore (1997), o modelo de contagem direta concretizou-se na utilização de estratégias de uso de material concreto ou de desenhos para resolver um problema. O modelo de adição repetida estava associado a estratégias de contagem crescente ritmada, contagem por saltos para a frente, de adição repetida e de adição de dobros. O modelo de operação multiplicativa estava relacionado com estratégias que usam a multiplicação enquanto operação formal, tais como o conhecimento de factos multiplicativos básicos e de factos multiplicativos derivados. No entanto, Fosnot e Dolk (2001) e Treffers e Buys (2001) salientam a importância da apresentação, comparação e discussão das diferentes estratégias, bem como da reflexão sobre semelhanças e diferenças entre os vários procedimentos, pois é através da discussão das resoluções das tarefas apresentadas pelos diferentes alunos e da reflexão sobre elas, que estes desenvolvem o sentido das operações.

O ensino exploratório da matemática

De acordo com Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), uma aula de ensino exploratório desenvolve-se em três fases: "o lançamento da tarefa", a "exploração pelos alunos" e a "discussão e síntese". Consideram que nesta última fase a turma trabalha em plenário, pelo que deverá ser apresentada uma variedade de estratégias de resolução do problema, emanadas e selecionadas pelo professor no decurso da fase de "exploração pelos alunos", para toda a turma discutir. Os pares selecionados apresentam as suas estratégias, sendo que os colegas junto com o professor podem solicitar alguns esclarecimentos e pedir que as justifiquem. Gera-se o debate na aula e o professor assume o papel de "orquestrador da discussão", também ele questionando, procurando que haja qualidade matemática nas explicações e argumentações apresentadas. Para além disso, deve garantir a comparação de distintas resoluções e a discussão da respetiva diferença e eficácia matemática (Yackel & Cobb, 1996, citados em Oliveira, Menezes e Canavarro, 2013). A aula termina com a discussão coletiva e o resumo das várias estratégias apresentadas.

Para outros autores (e.g. Ponte e Serrazina (2004)), a discussão da tarefa e a sistematização das aprendizagens matemáticas ocorrem em fases distintas. Salientam que nesse momento final da síntese da aula, com a ajuda do professor, a turma deverá reconhecer os conceitos e os procedimentos matemáticos envolvidos e estabelecer conexões com aprendizagens anteriores. Oliveira et al. (2013) consideram ainda fundamental, que se garanta o registo escrito das ideias resultantes da sistematização para que os alunos, posteriormente, também possam fazer o seu registo no caderno individual.

De salientar que, num ensino exploratório da Matemática, defende-se que a aprendizagem decorre da possibilidade dos alunos trabalharem com tarefas matematicamente ricas (problemas e investigações) e da possibilidade destes partilharem as suas ideias com os colegas e o professor. Quando os alunos são incentivados a partilhar as suas ideias, justificá-las e argumentar sobre as ideias dos colegas, negociando significados matemáticos, estão a construir novo conhecimento ou a ampliar o conhecimento existente (Cengiz, Kline & Grant,2011, citado em Menezes, Oliveira e Canavarro, 2013).

UMA PRIMEIRA ABORDAGEM À MULTIPLICAÇÃO COMO ADIÇÃO SUCESSIVA

A sequência de catorze tarefas iniciou-se com a tarefa 1 – Coleção de cromos. Antes do início da aula, a professora organizou a sala de aula e pensou na organização dos pares, procurando que os mesmos fossem heterogéneos ao nível das competências de leitura, para que a participação dos alunos não ficasse comprometida por essas dificuldades.

A tarefa foi apresentada pela professora: *O Simão faz coleção de cromos de futebol. A sua mãe comprou-lhe dez saquetas. Cada saqueta tem seis cromos. Quantos cromos comprou a mãe do Simão?*, que, para além de ler a tarefa, procurou que os alunos compreendessem a tarefa e se sentissem desafiados a trabalhar nela.

Antes de se iniciar a segunda fase da aula, foram recordados alguns procedimentos a ter em conta na realização do trabalho, nomeadamente, as regras de trabalho a pares. Durante este trabalho autónomo, a professora acompanhou os diferentes grupos, regulando as interações, colocando questões de modo a perceber se o enunciado tinha sido percebido e se todos os alunos estavam envolvidos na resolução da tarefa. Também se foi inteirando das diferentes estratégias de resolução e estruturando a sequência de apresentações de diferentes resoluções em plenário.

A apresentação das estratégias em grande grupo iniciou-se com o grupo de três alunos (Alda, Guida e Henrique), que modelaram a situação e foram o único grupo a representar a situação apenas através do desenho das saquetas de cromos (figura 1), uma estratégia intuitiva, que parece ter sido promovida pelo contexto do problema.

Os alunos deste grupo explicaram que, após o desenho, contaram um a um os cromos. Aproveitando a disposição

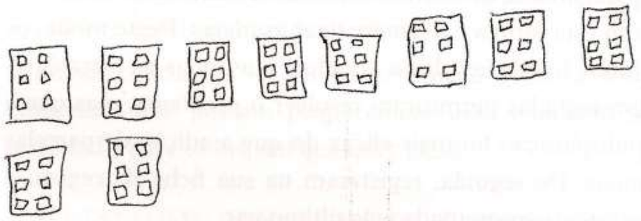


Figura 1. Produção de Alda, Guida e Henrique

dos cromos apresentada por estes alunos, previa-se que a contagem realizada atendesse já a alguns agrupamentos e não fosse uma contagem unitária, pelo que estes alunos não pareciam ter ainda a perceção de grupo.

Após a exploração da produção anterior em grande grupo, foi solicitado ao par de alunos Olga e Dinis que apresentassem a sua estratégia. Estes alunos apresentaram uma contagem por saltos de seis em seis, apresentando uma correspondência entre o número de saquetas e o número de cromos correspondente (figura2). Aqui surge um cálculo mais estruturado, muito semelhante ao uso de uma reta dupla, o que evidencia um nível de contagem mais avançado que o do grupo anterior.

Olga: Nós fomos dando saltos de seis em seis e escrevemos que uma saqueta tinha seis, fomos continuando até ter dez e deu-nos sessenta cromos.

Prof: Como é que foram contando?

Olga: Com a ajuda dos dedos, contávamos sempre seis mais seis.

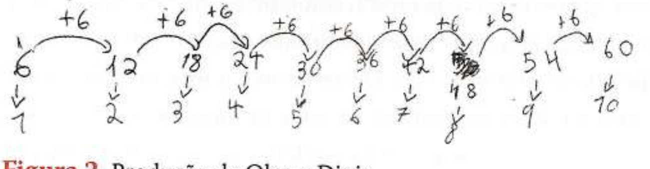


Figura 2. Produção de Olga e Dinis

Seguiu-se a apresentação do par dos alunos Rui e Maria, que após a adição de parcelas iguais transformou essa adição repetida numa multiplicação. Durante a apresentação, Rui refere:

Rui: Nós começamos pela adição como outros grupos, mas depois vi que o seis aparecia dez vezes, porque eram dez saquetas. Então disse à Maria que era muito mais rápido fazermos uma conta de vezes e escrevemos 10 x 6 que dava 60. (...)

Um dos objetivos pensados para esta tarefa foi precisamente fazer emergir a multiplicação a partir da adição de parcelas iguais e evidenciar o sentido aditivo da multiplicação. Assim, após a apresentação deste par e com a estratégia já registada no quadro, foi feita uma comparação das estratégias apresentadas, de forma a conectar as estratégias anteriores com esta última e a sistematizar as ideias. Deste modo, os alunos foram levados a concluir que todas as estratégias apresentadas permitiram resolver o problema, mas que a multiplicação foi mais eficaz do que a adição de parcelas iguais. De seguida, registaram na sua ficha de registo a estratégia apresentada pelo último par.

O momento de apresentação das estratégias pelos pares ao grande grupo possibilitou a clarificação das ideias apresentadas e esclarecimento de dúvidas, o confronto e comparação entre as diferentes estratégias apresentadas, a avaliação da sua eficácia e a apropriação dessas estratégias, usando-as nas tarefas que se seguiram. Este foi um momento privilegiado de desenvolvimento da comunicação e raciocínio matemático e, por conseguinte, de promoção de aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da tarefa apresentada vão ao encontro das identificadas em outras investigações (e.g. Mulligan e Mitchelmore (1997), Sherin e Fuson (2005)), ou seja, os alunos recorrem a procedimentos de contagem, aditivos e multiplicativos, adequados às situações propostas, mas sempre a partir da modelação da tarefa. Assim, esta parece ter suportado os raciocínios usados, sendo que o contexto da tarefa parece ter sido promotor da sua modelação, já que envolvia um contexto real.

A aula decorreu de acordo com o modelo de aula de um ensino exploratório preconizado por Oliveira et al. (2013), ou seja, apresentação da tarefa, trabalho autónomo/trabalho a pares, partilha e discussão em grande grupo e sistematização das ideias matemáticas. Desta forma, a interação mantida em diferentes momentos da aula proporcionou situações em que os alunos puderam refletir sobre o seu trabalho, partilhar e refletir sobre as suas estratégias, contactar com as estratégias apresentadas por outros pares, compará-las e avaliá-las, comportamentos que parecem ter promovido o desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação. Estes resultados corroboram com as ideias de Cengiz, Kline e Grant (2011,citados em Menezes et. al. (2013)), quando argumentam que a partilha de estratégias e o facto de os alunos terem de justificar as suas ideias, argumentar e negociar significados, ajuda-os a construir novos conhecimentos e a ampliar os existentes.

Bibliografia

Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division. Portsmouth, NH: Heinemann.

Menezes, L., Oliveira, H. & Canavarro; A. (2013) Descrevendo as práticas de ensino exploratório da matemática: o caso da professora Fernanda in Actasdel VII CIBEM, Montevideo.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (1997). Young children´s intuitive models of multiplication and division. In Journal for Research in Mathematics Education, 28, 309-331. Disponível em http://www.jstor.org/stable/749783.

Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. Quadrante, Número Temático-Práticas de ensino de Matemática Vol. XXII, n.º 2, 29-53. Lisboa: APM.

Ponte, J. & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. Quadrante, 13(2), 51-74.

Sherin, B. & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. Journal for research in mathematics education, 347-395.

Stein, M., Engle, R., Smith, M. & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five Practices for Helping teachers Move Beyond Show and Tell in Mathematical Thinking and Learning,10 (4) , 313-340.

Treffers, A. & Buys, K. (2001) - Garde 2 (and 3) – Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Children Learn Mathematics, (pp. 61-88). Freudenthal Institute, Utrecht University & National Institute for Curriculum Development. The Netherlands: Sense Publishers.

Vieira, A. (2015). A aprendizagem da multiplicação num contexto de ensino exploratório. (Dissertação de Mestrado). Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Leiria.

Ana Teresa Benjamim Ribeiro Vieira
Agrupamento de Escolas Fernão do Pó

Hélia Gonçalves Pinto
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Leiria/NIDE

A elaboração de um acaso

A história que vos venho contar começou por acaso.

A Khan Academy surgiu por um feliz acaso na vida do seu autor, tal como foi descoberta por mim e poderá ser por todos vós.

Mas comecemos pelo princípio...

Salman Khan nasceu no dia 11 de outubro de 1976, em New Orleans e concluiu quatro formações académicas: bacharelato em matemática, bacharelato em engenharia eletrónica e ciências da computação, mestrado em ciência da computação do Massachusetts Institute of Technology (MIT) e MBA pela Harvard Business School.

Trabalhou numa empresa de gestão de fundos financeiros para empresas entre 2000 e 2009, altura em que se despede e se dedica à plataforma da Khan Academy a tempo inteiro.

MAS QUANDO E COMO SURGIU A KHAN ACADEMY?

Em 2004, Salman casou-se e mudou-se para Boston. Nessa altura, uma tia que vivia em New Orleans, pediu-lhe se podia dar uma ajuda à sua filha que estava com dificuldades em alguns tópicos do 7º ano. Começou por ajudar a prima Nádia por telefone. Não correu muito bem. Um colega sugeriu-lhe que fizesse pequenos vídeos no Youtube e lhe disponibilizasse os links para ela visualizar. Decidiu que nesses vídeos não apareceria a sua cara para não distrair quem via e, num fundo preto, imitando um quadro de sala de aula, iriam surgindo escritos, com diferentes cores, resumos de matéria e a resolução de exercícios. Teriam de ser vídeos de curta duração e dinâmicos. Os vídeos tornaram-se virais, e foram vistos por muitas pessoas, de diferentes partes do mundo, de diferentes estratos sociais, de diferentes culturas e religiões... Entre os visualizadores encontra-se nada mais nada menos que Bill Gates! Em agosto de 2010, a Bill & Melinda Gates Foundation, decidiu doar 1,5 milhões de dólares para permitir que Salman Khan contratasse mais algumas pessoas e desenvolvesse melhor uma plataforma online que servisse de suporte aos exercícios e vídeos criados. Esta plataforma continua a ser totalmente gratuita. Entretanto, em setembro de 2010, Salman ganhou um prémio, no valor de 2 milhões de dólares, num concurso promovido pela Google, denominado "Project 10^100". Em dezembro de 2010, a fundação gerida por Bill Gates decidiu doar mais 4 milhões de dólares! Com 7,5 milhões de dólares foi possível criar uma equipa e um suporte informático maior. Atualmente, a plataforma está traduzida em 18 línguas (inclusive a língua portuguesa, de Portugal), tem 18 520 vídeos, 6 353 exercícios e 4 680 artigos (resumos de matéria).

A missão continua a ser a mesma: fornecer gratuitamente conteúdos que possam proporcionar uma educação de qualidade, para todos, em qualquer lugar.

QUANDO TOMEI CONHECIMENTO DA KHAN ACADEMY?

Num final de tarde de outubro de 2011, fui tomar um café com um amigo que partilha comigo o gosto pela matemática. Perguntou-me se eu conhecia a Khan Academy. Respondi que não. Disse-me que poderia ser algo interessante para explorar nas minhas aulas e mostrou-me no seu smartphone. De regresso a casa, fui pesquisar. Efetuei o registo e comecei a explorar. Ainda continuo a fazê-lo...

Tinha iniciado o meu mestrado muito recentemente e encontrei ali uma boa hipótese de investigação. Falei com o meu orientador, Professor Dr. António Domingos, e decidimos fazer um estudo de caso numa das minhas turmas. Foram selecionados 7 alunos da minha Direção de Turma do sétimo ano de escolaridade, mas depressa percebi, pelo impacto que causava junto destes alunos, que devia usar esta ferramenta nas outras turmas também. Afinal, para quê privar outros alunos desta extraordinária plataforma? Até porque eles comentavam uns com os outros e percebia-se no ar um ambiente de competição salutar: alunos iam à biblioteca nos intervalos ou nos períodos em que não tinham aulas para usar os computadores aí existentes para aceder à Khan Academy; alguns almoçavam comigo na cantina e aproveitavam para colocar dúvidas; cruzavam-se comigo nos corredores e comentavam entusiasmados sobre o seu progresso...

Utilizei a plataforma nas minhas aulas, com os meus alunos, durante 5 anos letivos, de outubro de 2011 até junho de 2016. Nas 15 turmas, turmas diversificadas (do 6º ao 9º ano), umas grandes outras mais pequenas (número mínimo de 13 alunos e máximo de 31) com uma média de 17 alunos por turma (número ótimo, é verdade) experimentei diferentes metodologias. Em casa, visualizava os vídeos, que serviram de inspiração nalguns momentos, listava os exercícios que estavam de acordo com o nosso currículo e fazia recomendações para os alunos praticarem em casa. Na sala de aula tinha apenas o computador da secretária do professor e o projetor. Os exercícios surgiam na minha aula com a mesma naturalidade que os exercícios da Escola Virtual, por exemplo. Tentava que todas as turmas pudessem passar pela sala de informática da escola, onde existem 20 computadores, quando pretendia que cada um estivesse a resolver exercícios na sua conta de utilizador. Para isso era necessário reservar a sala com antecedência. Havia alunos que gostavam de praticar nos "furos" ou logo a seguir ao almoço, na biblioteca da escola. Nas aulas de apoio, com grupos de alunos menores (máximo de 8), enquanto um resolvia no computador do professor, os colegas registavam as resoluções nos seus cadernos diários. Entretanto aprendi, pela experiência de outros países que têm a plataforma da Khan Academy, que é útil fazer guias de estudo para ajudar a focar os alunos nos exercícios que pretendemos que resolvam. Deste modo evitamos que se "aventurem" demasiado em conteúdos do ensino secundário, ou superior, e também que percam muito tempo em exercícios demasiado básicos (como "Somar até 5").

Lembro-me que uma das minhas dúvidas, ou melhor, preocupação, era como é que seriam os resultados da avaliação externa? Os resultados dos meus alunos nas provas finais de ciclo seriam muito diferentes dos resultados da avaliação interna? Como classificador nuns anos e supervisor noutros, os exames sempre estiveram muito presentes na minha mente. Os resultados foram bastante semelhantes, principalmente para aqueles alunos que utilizaram a plataforma desde o sétimo ano.

A QUE SE DEVE O SUCESSO DESTA PLATAFORMA DE ENSINO?

Sempre procurei, na minha prática docente, desenvolver competências de autonomia na construção das aprendizagens e de motivação para o estudo da matemática. Esta plataforma permite que cada aluno aprenda ao seu ritmo. Permite ainda ao professor recomendar diferentes habilidades a praticar por cada aluno. Mas uma das minhas características preferidas é o facto de podermos obter relatórios das práticas dos nossos alunos, por níveis de desempenho, permitindo-nos perceber exatamente onde estão as suas dificuldades ou quem já domina determinado conceito.

Esta informação permite avaliar melhor o aluno e perceber que conceitos ele precisa de rever. Além disso, permite utilizar dinâmicas diferentes em sala de aula, por exemplo, pedir a um aluno que já domina uma "competência" (conjunto de exercícios) para ajudar outros que ainda estejam a praticá-la enquanto o professor se foca nos alunos que estão a ter mais dificuldades.

Queria partilhar convosco um exemplo mais concreto. Primeiro identificava quais eram os exercícios em que os alunos estavam a ter dificuldades:

O aluno Bernardo Guerreiro, como se pode ver na figura 2, estava a ter dificuldades na competência "Order of operations". Nos últimos 35 exercícios realizados acertou apenas 18 (figura 3).

Figura 1

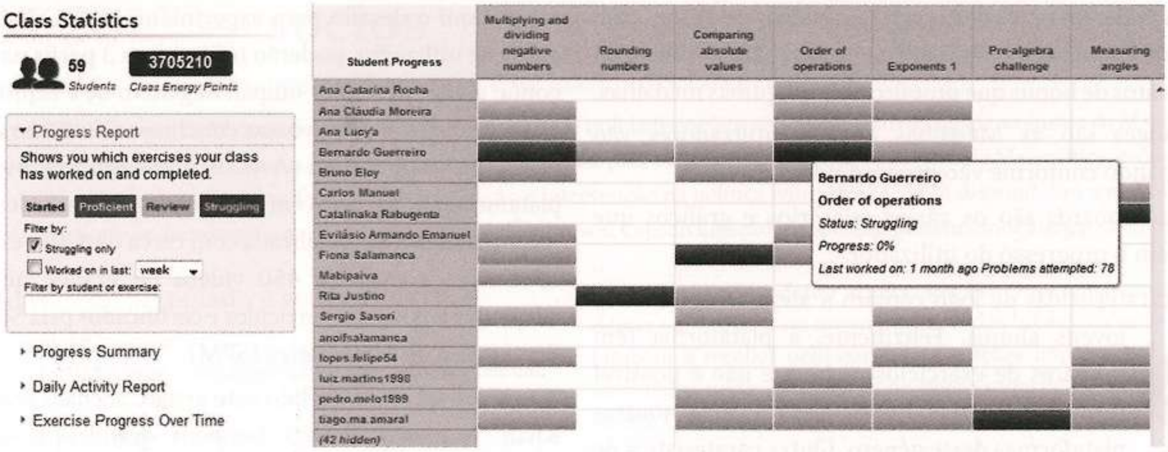


Figura 2

Nos que errou (barras mais escuras) pediu algumas dicas assinaladas pelos pontos de interrogação. No exercício 78 acertou e depois quis ver um vídeo sobre este exercício. Ao clicar no exercício 62, abrimos o ecrã da figura 4.

Aqui podemos ver que depois de 22 segundos de resolução no caderno diário, respondeu 30. Cometeu o erro muito comum de somar 6, multiplicar por 9 e subtrair 24. Verificando que errou pediu uma pista, que corresponde à primeira igualdade e percebendo onde errou (dentro do parêntesis deveria ter multiplicado primeiro) pediu as outras 3 pistas e respondeu 6. Estes relatórios também estão disponíveis para os pais, que na plataforma podem acompanhar o progresso do seu educando.

PORQUE RAZÃO GOSTAM OS ALUNOS DA KHAN ACADEMY?

Esta plataforma encontra-se gamificada, ou seja, tem características de jogo conhecidas por PBL (Points, Badges and Leaderboards).

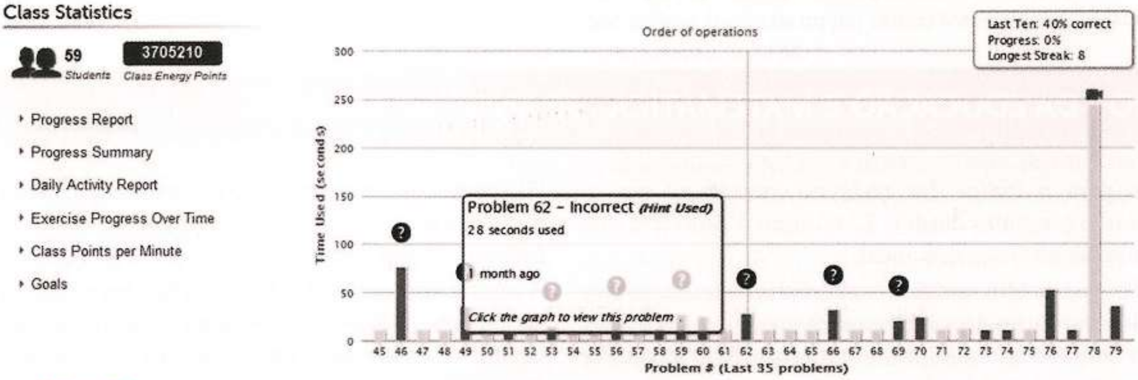


Figura 3

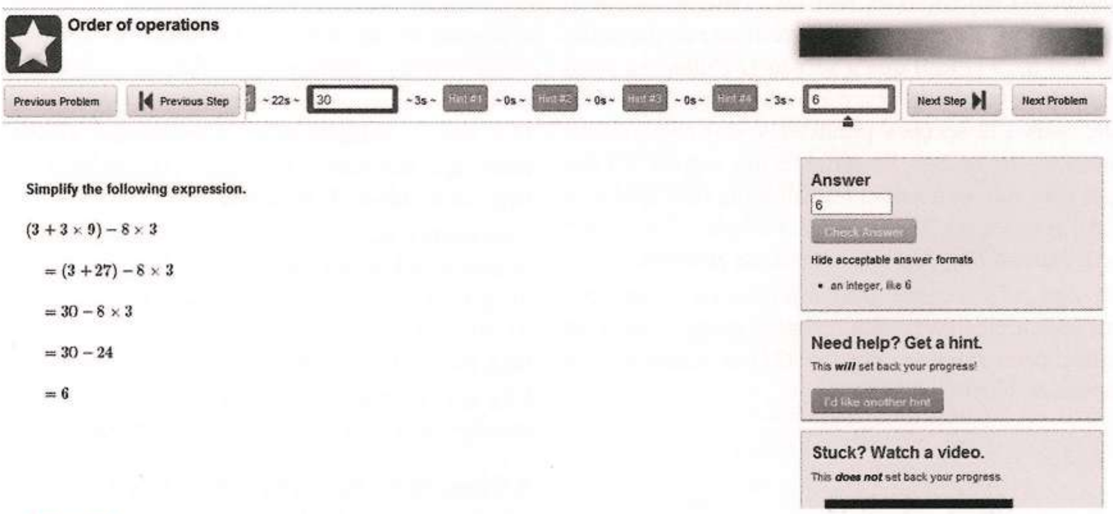


Figura 4

Os Points são os Pontos de Energia que podem ser ganhos com a realização de exercícios, com a visualização de vídeos ou com pontos de bónus que proporcionam algumas medalhas.

Os Badges são as Medalhas que os utilizadores vão amealhando conforme vão progredindo.

As Leaderboards são os vários relatórios e gráficos que espelham o progresso do utilizador.

Estas caraterísticas de jogo captam a atenção dos nossos jovens alunos. Felizmente, a plataforma tem milhares de exercícios, pelo que não é possível resolvê-los todos rapidamente como noutras plataformas deste género. Outra caraterística de jogo é a evolução do avatar do utilizador. Conforme vamos ganhando pontos de energia, podemos ir desbloqueando novos avatares. Os alunos falam-nos nos seus avatares com orgulho. Alunos motivados aprendem melhor. Tenho a experiência própria de que os alunos não dedicam tanto tempo na realização de um trabalho de casa convencional como dedicam a uma recomendação de uma habilidade na Khan Academy.

Deixo aqui o desafio para experimentarem. Criando uma conta de utilizador, poderão ter acesso a 3 perfis na mesma conta: aluno, professor ou pai. Registem-se e explorem. Só assim poderão tirar as vossas conclusões. Poderão aceder à plataforma original em www.khanacademy.org, ou ainda à plataforma portuguesa, em https://pt-pt.khanacademy.org/, recentemente disponibilizada com cerca de 8.400 exercícios interativos e mais de 450 vídeos de grande qualidade, adaptados aos nossos currículos e certificados pela Sociedade Portuguesa da Matemática (SPM).

Tire a prova! Após ter lido este artigo, aceda à plataforma Khan Academy e faça também grandes descobertas matemáticas...por acaso?

Bibliografia:

KHAN, Salman, The One Word School House, 1 ed. Twelve Books, 2013

https://www.khanacademy.org/

https://pt-pt.khanacademy.org/

Miguel António Cortiço de Castro

Agrupamento de Escolas de São João da Talha

30 ANOS DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA - 30 ANOS DE SECÇÕES

Olhando para o índice das revistas, constata-se que as secções estão presentes desde o 1.º número. Como tem sido a sua evolução ao longo dos anos?

Há secções que se têm mantido inalteráveis na intenção e na forma, desde os primeiros números: *Pense Nisto; Encontros; Para este número selecionámos* e *Materiais para a aula de Matemática*, esta mantendo-se como secção permanente, ou seja, publicada em todas as revistas. Também desde o 1.º número, a resolução de problemas tem estado presente, mas foi na EM n.º 9 (1989) que a secção *O Problema deste número* ganhou a forma atual e o coordenador José Paulo Viana, que, após 132 secções publicadas, é o colaborador mais permanente da revista. De igual forma, a presença das Tecnologias tem sido constante, inicialmente com a secção LOGO.MAT e desde há 20 anos com a secção *Tecnologias na educação matemática*, com coordenador próprio.

Para além das três secções permanentes referidas, que atravessam toda a vida da revista, existem atualmente mais duas secções permanentes: *Espaço GTI* e *Cadernos de Apontamentos de Geometria*.

Há secções que, não sendo permanentes, têm uma existência prolongada e regular: *Pontos de vista, reações, ideias...; Leituras e Vamos jogar.*

A revista *Educação e Matemática* também tem tido secções ou cadernos delimitados no tempo, normalmente um ano, ligados a efemérides internacionais – *Ano Mundial da Matemática; Ano Internacional da Física; Matemática do Planeta Terra; Ano Internacional da Estatística* – ou a iniciativas da Associação, como os anos temáticos – *Matemática e...Natureza; Profissões; Tecnologias; Jogo.*

Secções houve que deixaram de existir, como *Dia a Dia com a Matemática; Matemania, Poesia, Magia* e mais recentemente a secção *Atualidades*, que era da responsabilidade da redação.

Destacamos os contributos dos professores ao longo dos 140 números publicados, nas secções que não têm coordenador próprio: *Materiais para a aula de Matemática* (160); *Pontos de vista, reações, ideias...*(210); *Leituras* (43); *Pense Nisto* (41); *Para este número selecionámos* (59) e *Vamos jogar* (31). Esta participação continua a ser necessária para manter as secções da revista vivas e atuais. Contamos contigo!

A Redação da Educação e Matemática

APM 2017 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @-sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

* A partir de 2016 a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma nova modalidade de associado aos professores do 1.° ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00E, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM.

Pode inscrever-se indeferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.° de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* (3 números normais e um número duplo temático).

Quotas anuais para 2017

A quota tem efeitos de janeiro a dezembro de cada ano civil.

Modalidades de associado individual	*Quota*
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	16,50 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.° CEB)	50,00 €

Modalidades de associado institucional	*Quota*
Modalidade I (1 exemplar da E&M)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplar da E&M)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	140,00 €

Os @-sócio só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos ou outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante.*

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *online.*

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do *Centro de Recursos.*

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidade de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomeadamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações: podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Assinatura das revistas *Educação & Matemática* e *Quadrante*

		Educação & Matemática 3 números + 1 número duplo temático	*Quadrante* (2 números)
Associado individual	Portugal	....	15,00€
	Estrangeiro	....	30,00€
Não associado individual	Portugal	50,00€	35,00€
	Estrangeiro	70,00€	50,00€
Não associado institucional	Portugal	75,00€	50,00€
	Estrangeiro	95,00€	65,00€

Preço de capa das revistas *Educação & Matemática* e *Quadrante*

	Educação & Matemática		*Quadrante*
Associado	Temática	10,00€	10,00€
	Normal	7,50€	
Não associado	Temática	10,00€	20,00€
	Normal	7,50€	

índice

Editorial

Artigos

Secções