Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2016

139-140

Outubro ∞ Novembro ∞ Dezembro Preço 10,00 €

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Lina Brunheira
Subdiretora Helena Rocha
Redação Catarina Delgado
Cristina Cruchinho
Cristina Tudella
Helena Amaral
Irene Segurado
Isabel Rocha
Manuela Pires
Paulo Alvega
Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número
Mário Baía Edição gráfica

Capa Mário Baía
Paginação ACD PRINT, S.A.

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Dezembro 2016
Tiragem 1250 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão
Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.º 8
Casal da Espinheira
2560–401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre este número temático

A revista temática de 2016 é dedicada às tecnologias, um tema a que já dedicámos um número no passado e que agora revisitamos em virtude da sua pertinência, do seu contínuo desenvolvimento e da importância da reflexão sobre as suas potencialidades e impacto sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Na conceção e elaboração deste número, a redação da *Educação e Matemática* contou com a orientação e colaboração de António Domingos que, sendo já responsável pela secção *Tecnologias na Educação Matemática* da nossa revista, aceitou prontamente o convite para ser o editor deste número duplo. Obrigada António, não só pela disponibilidade para colaborar uma vez mais com a nossa Revista, pelas ideias, sugestões e comentários que muito contribuíram para dar forma a mais uma revista temática, mas também pela simpatia e boa disposição que te caracteriza. Foi um prazer trabalhar contigo!

Sobre a capa

Na capa deste número reproduzem-se fotografias e ícones sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação. Esta opção, para a capa da EM, não é indiferente ao tema que é abordado nos vários artigos da revista em que se procura explorar o potencial pedagógico de diferentes tecnologias digitais em diferentes contextos de sala de aula.

Mário Baía

Neste número colaboraram

Ana Alves, Ana Cristina Tudella, Ana Paula Canavarro, Anabela Santos, António Cardoso, António Domingos, Carmen León-Mantero, Cecília Monteiro, Cristina Loureiro, Hélia Oliveira, Isabel Oitavem, João Torres, José Paulo Viana, Lina Brunheira, Luís Menezes, Marisa Gregório, Miguel Figueiredo, Nádia Ferreira, Neusa Branco, Paulo Correia, Raquel Santos, Reinhard Kahle, Rita Bastos, Rui Candeias, Sónia Barbosa, Sónia Palha, Sílvia Zuzarte, Teresa Martinho Marques, Vitor Teodoro.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

A tecnologia na escola... sim porque...

Este número duplo da revista é inteiramente dedicado à tecnologia, ao papel que desempenha no ensino, às vantagens que traz à aula e à aprendizagem e à forma como é encarada pela escola e pela sociedade. Quando colocamos a questão se vale a pena utilizar a tecnologia na escola, a resposta é obviamente Sim!

Sim, porque as Grandes Opções do Plano para 2017 destacam a inovação do sistema educativo, onde uma das ações deve ter em conta o "reforço da utilização das TIC no âmbito do currículo, tendo em vista a apreensão, desde cedo, de práticas de aprendizagem baseadas nas novas tecnologias" (DR 28/12/2016, p.4846).

Sim, porque o Conselho Nacional de Educação reconhece que existem práticas pedagógicas e modelos de organização escolar que recomendam a "realização de um maior investimento em tecnologia de apoio ao ensino e às aprendizagens" (DR 18/11/2016, p.34475).

Sim, porque a investigação é unânime em mostrar que a tecnologia pode trazer benefícios muito significativos a todo o processo de ensino e aprendizagem em geral e da Matemática em particular.

Sim, porque existem vários exemplos de boas práticas de uso da tecnologia, mostrando que esta pode criar ambientes de aprendizagem autênticos e inovadores, onde os alunos vivem, adquirem e desenvolvem a experiência matemática.

Sim, porque a tecnologia está a assumir ou já assumiu um papel de destaque na sociedade. Espera-se que a Escola acompanhe a evolução em todas as suas estruturas com o objetivo de auxiliar o desenvolvimento tecnológico em movimento na sociedade.

Como contributo para concretizar todos estes Sim's, trazemos, com esta revista, uma abordagem à tecnologia que permita aos professores estabelecer pontes para a inovação e progresso nos processos de ensino, melhorando a aprendizagem dos alunos.

Começamos por um ponto de situação focado nos últimos 30 anos, com o objetivo de refletirmos sobre o papel que a tecnologia deve ter no processo de ensino e aprendizagem. E fazemos uma abordagem histórica revisitando a tecnologia do passado, assente essencialmente em materiais manipuláveis, que dominavam antes do advento da época digital.

Numa entrevista a Eduardo Veloso ficamos com a visão de quem vivenciou a evolução e o impacto da tecnologia fora da escola e desenvolveu uma perspetiva e uma intervenção no sentido de a colocar ao serviço da aprendizagem. No ano do desaparecimento de Papert relembramos o seu legado e o muito que ainda há para fazer. Os princípios que nos deixou (*continuity principle*, *power principle* e *cultural resonance*) serão certamente de ter em conta se quisermos compreender o papel da tecnologia na forma como se aprende, como se pensa e como se cria conhecimento no século XXI.

A dimensão curricular leva-nos a fazer uma incursão pelos currículos de Espanha, Finlândia, Holanda e Reino Unido, que nos pode servir como termo de comparação, ao mesmo tempo que nos permite refletir sobre o percurso que já fizemos e o que desejamos fazer.

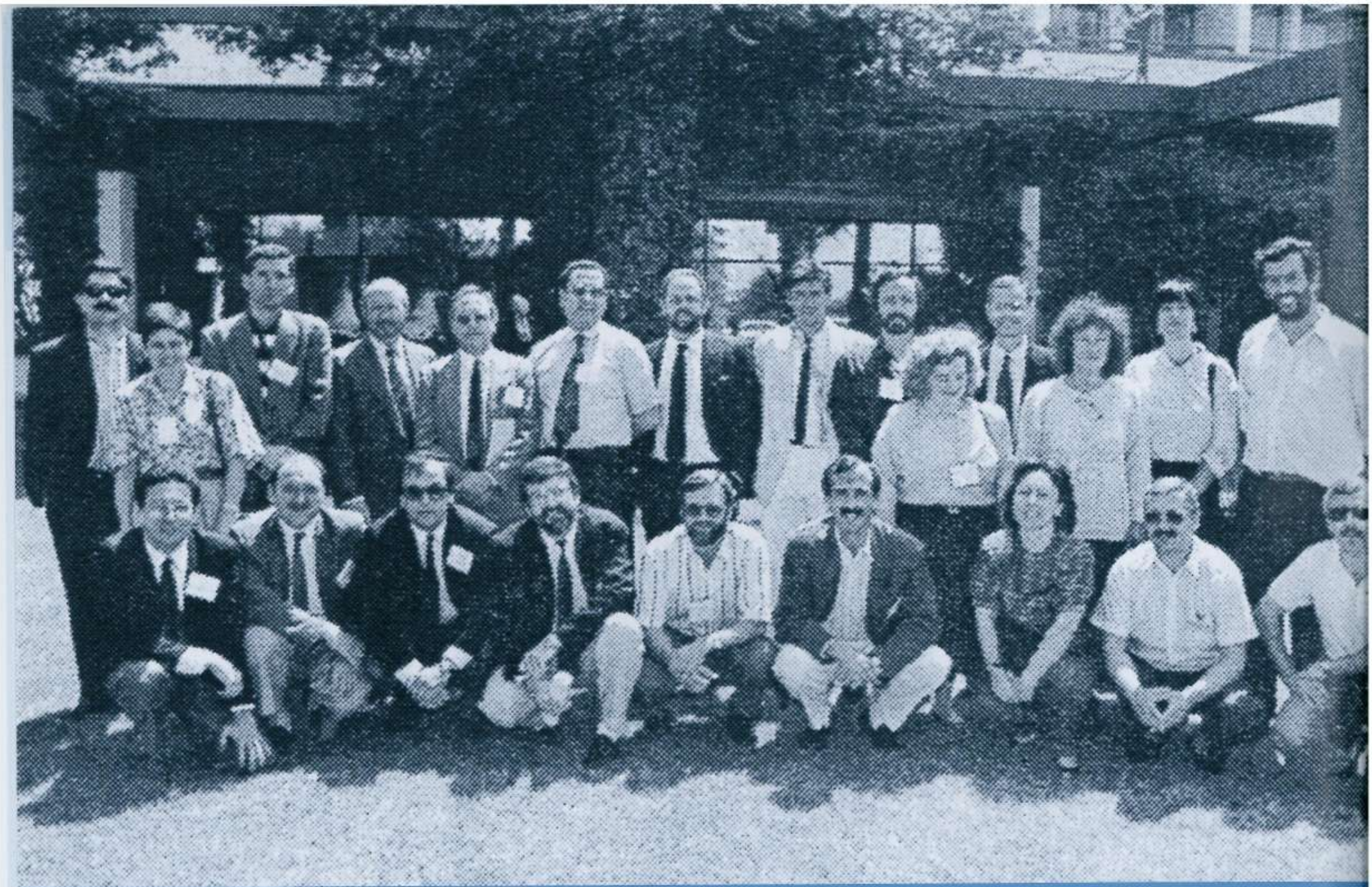
Partilhamos contributos para a formação de professores, ainda que alguns estejam mais relacionados com a aprendizagem dos alunos. Temos abordagens com recurso à *internet* e ao uso de *applets*, onde as ferramentas disponíveis na *web* podem ser conjugadas para realizar tarefas em ambientes de aprendizagem ricos. Apresentamos experiências em ambientes que recorrem a programas como o *Geogebra* ou o *TinkerPlots* que permitem aprofundar conceitos de um dado tópico, ou ambientes que misturam ferramentas multimédia envolvendo o ensino exploratório ou o desenvolvimento de competências no campo da modelação matemática. É ainda de destacar a programação, por exemplo através do *Scratch*, pelos contributos que pode dar à aprendizagem e ao desenvolvimento do raciocínio.

A investigação em Educação Matemática tem reflexo em vários dos trabalhos aqui descritos, mas quisemos saber também como é que a investigação em matemática olha para a tecnologia. Neste contexto é destacado o papel da tecnologia na validação de demonstrações.

Apontamos ainda para o futuro. É nesse sentido que referimos a "Iniciativa Laboratórios de Aprendizagem", com atividades inovadoras e testemunhos de implementação no terreno.

Convidamos todos os leitores a fazer esta viagem pelo mundo da tecnologia, que não sendo única nem exclusiva, pode ajudar a revisitar ou compreender melhor o passado enquanto refletem e projetam o futuro que as tecnologias podem vir a desempenhar nas escolas, no ensino e na aprendizagem da matemática.

António Domingos
UIED, DCSA, FCT, Universidade NOVA de Lisboa



Equipa do Projeto Minerva

30 Anos com Tecnologia: afinal onde é que estamos?

António Domingos

É claro que a principal finalidade do estudo da Matemática deve ser a de fazer os alunos pensarem.
(John Young)

O uso da tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática tem sido um tema recorrente ao longo dos últimos 30 anos. O aparecimento do Projeto Minerva, em meados dos anos 80 do século passado, constitui-se como um marco importante para que a utilização educativa do computador seja uma realidade na escola e na formação de professores, particularmente de professores de Matemática. A aposta então realizada mostra um esforço notável, numa época em que o acesso à tecnologia era ainda escasso e pouco democrático. As escolas que se encontravam próximas dos 'Pólos' (era assim que se designavam os centros onde se desenvolvia o trabalho de formação e disseminação do uso das tecnologias) conseguiam ter uma interação próxima com toda a dinâmica que se criava à sua volta, podendo alguns professores beneficiar de formação na utilização das ferramentas computacionais aí disponíveis. É neste contexto que surgem as primeiras experiências de utilização das tecnologias no processo de ensino aprendizagem.

Nesta altura os currículos das várias disciplinas não preveem a utilização destas ferramentas, mas os professores começam a dar os primeiros passos e a constatar que há uma mais-valia na forma como podem abordar alguns dos conteúdos programáticos, recorrendo a outras representações que vão para além dos livros de texto e dos manuais escolares.

A proliferação destas ideias e das metodologias de ensino que se começam a vislumbrar levam a que muitos professores de Matemática se empenhem em aprofundar os seus conhecimentos e partam para uma nova etapa – a criação de Laboratórios de matemática nas suas escolas. Aparecem assim salas apetrechadas com computadores, onde se recorre a um exíguo conjunto de *softwares* para ensinar conteúdos de matemática. Para os professores que se envolveram nestas iniciativas, começava a ser claro o ganho que os seus alunos adquiriam quando trabalhavam nestes ambientes. Alguns *softwares* disponíveis na época eram desenvolvidos pelos Pólos do Projeto Minerva e, a título de exemplo, destaco aqui o 'Trinca Espinhas', o 'Estimatempo' ou o 'Funções'. Era interessante ver a forma como os alunos se envolviam no trabalho com os divisores de um número e com os números primos, apresentados aqui na forma de jogo, criando assim uma motivação acrescida para o seu uso. Também a forma como interpretavam o gráfico de uma função (figura 1), traçado a partir da sua representação algébrica, que aparecia como um objeto dinâmico no ecrã do computador, era considerada um desafio por passarem a ter uma representação visual diferente daquela a que estavam habituados, a par com uma tabela de leitura pouco simpática acompanhada de um som que variava com o crescimento ou decrescimento da função (Domingos, 1994).

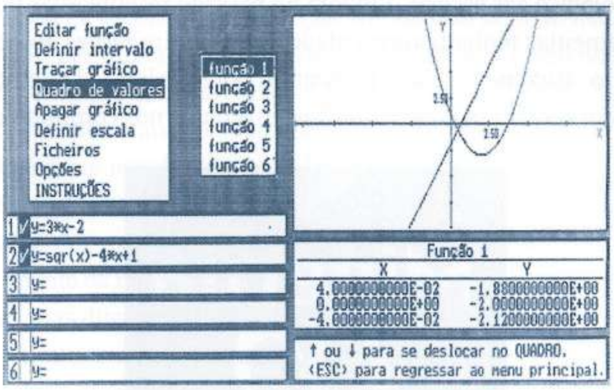


Figura 1. Ecrã do programa Funções.

Estas duas novas representações vinham 'revolucionar' a forma como se podia pensar sobre as funções, levando os alunos a fazer conjeturas acerca dos parâmetros presentes na representação algébrica. Esta era uma época em que se começava a olhar com esperança para o desenvolvimento destas ferramentas e para os ganhos em termos da aprendizagem de conceitos matemáticos por parte dos alunos.

Seguiram-se outros programas com vista à introdução das tecnologias na escola, como o Nónio-Século XXI, Internet na Escola, CRIE ou PTE, que procuraram manter e reforçar o esforço feito inicialmente. As escolas passaram a ter mais computadores, os *softwares* foram-se desenvolvendo, apareceram aplicações específicas (*applets*) para o ensino de conteúdos de matemática e a formação de professores ganhou uma dimensão nunca antes conseguida. A formação inicial passou a apostar na introdução, nos seus cursos, de disciplinas específicas relacionadas com as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e a formação contínua de professores ganhou uma posição de destaque nos Centros de Formação das Escolas e Associações de Escolas.

A par desta evolução das TIC surge uma outra ferramenta, a calculadora gráfica, que vai ganhando uma importância crescente, passando a ser considerada uma ferramenta de trabalho da aula de Matemática, nomeadamente no ensino secundário. O recurso a esta ferramenta foi alvo de interpretações muito diversas e o seu uso na aula de Matemática envolveu abordagens muito diferentes. Esta utilização variou desde a substituição do trabalho gráfico de papel e lápis realizado anteriormente ao seu aparecimento, até à utilização das suas potencialidades como ferramenta de aprendizagem, colocando os alunos no centro do processo, ao resolverem problemas e tarefas de investigação, impossíveis de resolver apenas com recurso a papel e lápis.

Hoje em dia as calculadoras gráficas apresentam um nível de desenvolvimento e sofisticação que lhes permite competir com o computador na aula de Matemática. É possível encontrar numa mesma unidade portátil uma calculadora científica, um programa de traçado de gráficos, um *software* de geometria dinâmica, uma folha de cálculo, um programa de representação e análise de dados, bem como a capacidade de recolher dados reais quando ligada a sensores apropriados. Esta tecnologia torna-se assim numa alternativa à utilização mais tradicional que o computador implica, por ser de fácil portabilidade, não implicar a deslocação dos alunos para espaços físicos próprios para a realização da aula com tecnologia, por ser de custo mais acessível que o de um computador (fazendo mesmo parte do material didático no ensino secundário) e acima de tudo, por se poder constituir como uma verdadeira ferramenta de aprendizagem quando devidamente integrada no processo de ensino e aprendizagem.

A evolução da tecnologia tem mantido um desenvolvimento permanente e a democratização do acesso à *internet* tem permitido o aparecimento de outras ferramentas. As plataformas de ensino, como por exemplo a Plataforma *Moodle*, a disponibilização de *applets* e vídeos educativos, como os que são disponibilizados pela *Khan Academy*, a par com os progressos tecnológicos, têm vindo a sustentar novas abordagens ao uso da tecnologia. A integração das várias potencialidades destas ferramentas sustenta uma nova área, criada recentemente, de CTEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática) e leva à criação de novos ambientes de aprendizagem ricos e inovadores, como é o caso dos 'Laboratórios de Aprendizagem' ou 'Salas de Aula do Futuro'.

O percurso seguido pelo desenvolvimento da tecnologia deixa uma perspetiva de evolução constante, proporcionando cada vez mais e melhores meios para a implementação de ambientes de aprendizagem ricos e poderosos. São inúmeros os trabalhos de investigação e as experiências de ensino que mostram como a utilização de ferramentas tecnológicas são potenciadoras de aprendizagens significativas, onde os alunos desempenham um papel primordial na construção dos conhecimentos matemáticos. Tomando apenas como exemplo alguns dos trabalhos que foram publicados em números anteriores desta revista, podemos aferir sobre o papel de diferentes ferramentas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. É o caso da discussão sobre os materiais eletrónicos que acompanham os manuais e a sua relação com a aula de Matemática (Domingos e Teixeira, 2011), o recurso ao *Geometer's Sketchpad* para o estudo de pavimentações (Domingos e Vieira, 2012), a utilização da calculadora gráfica no estudo da estatística (Domingos, 2012) ou a forma com esta pode ser usada num dado ano de escolaridade para aprender sobre um tópico específico (Domingos e Rosa, 2013) ou ainda o papel formativo que o *Geogebra* pode desempenhar na compreensão de conceitos elementares que são estruturantes para a construção de conhecimento (Domingos, 2014). Estes trabalhos são uma ínfima parte das produções científicas e das experiências com tecnologia que se têm realizado e atestam sobre as potencialidades das ferramentas tecnológicas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Na presença do cenário até aqui traçado parece poder afirmar-se que estamos perante um percurso favorável à integração da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem. A realidade é, no entanto, muito diferente. As escolas possuem de facto laboratórios de informática dedicados essencialmente à lecionação de disciplinas relacionadas com as TIC, disciplinas estas que esgotam toda a sua ocupação possível. O parque de material que compõe estes laboratórios apresenta-se muitas vezes envelhecido e pouco capaz de dar resposta aos desafios que são colocados pelas tecnologias mais modernas. Os professores de Matemática são frequentemente confrontados com a impossibilidade de recorrer a estes espaços para poder envolver os seus alunos em ambientes de aprendizagem autênticos com tecnologia. Mesmo quando os professores se envolvem em programas de formação contínua, na modalidade de oficina, apresentam sempre enormes dificuldades em poder aceder a um laboratório com TIC para a realização de experiências de ensino pontuais. A recente criação de 'Salas de Aula do Futuro' também não vem potenciar, por si só, o uso da tecnologia em benefício do ensino da Matemática. Basta verificar que apenas, por si só, estão identificados pela DGE 12[1] destes laboratórios em todo o País.

O recurso à calculadora gráfica tem-se afigurado como uma alternativa às dificuldades colocadas pelo parque tecnológico das escolas. Embora no passado recente estas ferramentas tenham apresentado algumas limitações ao seu uso, atualmente elas apresentam potencialidades que podem ser comparadas aos *softwares* em uso nos computado-

res atuais, sem no entanto apresentarem limitações ao nível do acesso, uma vez que fazem parte integrante do material didático que o aluno deve mobilizar em aula. A falta de investimento, por parte dos professores, na valorização desta tecnologia tem vindo a degradar a qualidade do seu uso, sendo os alunos desencorajados a utilizá-la ou a usá-la em procedimentos e processos rotineiros que em nada beneficiam o desenvolvimento do raciocínio e a capacidade de resolver problemas. Este desinvestimento é fortemente potenciado pelo papel cada vez mais secundário que a calculadora gráfica tem vindo a desempenhar nos exames nacionais.

A par das dificuldades colocadas pelo parque tecnológico das escolas e a falta de investimento sério na utilização educativa da calculadora, há que ter em conta as orientações curriculares, nomeadamente ao nível do currículo prescrito e apresentado aos professores (Gimeno, 2000). Se no início do Projeto Minerva não tínhamos indicações curriculares para integração da tecnologia, as primeiras modificações que ocorreram posteriormente foram no sentido da utilização destas ferramentas de forma transversal a todo o currículo. É mesmo de destacar a utilização obrigatória da calculadora gráfica no ensino secundário, o que traduz uma grande inovação no nosso currículo em termos de recurso à tecnologia. Nas revisões curriculares mais recentes há um retrocesso enorme em termos da utilização das TIC que presentemente começa a dar sinal de abrandar, apesar dos sinais contraditórios vindos da tutela. Estes avanços e retrocessos que o uso da tecnologia tem vindo a ter no currículo prescrito têm-se revelado como determinantes no uso que lhe é dado na escola e, particularmente, na aula de Matemática. Se por um lado a escola continua a apostar e defender que as tecnologias devem fazer parte das aprendizagens dos seus alunos, a aula de Matemática parece afastar-se cada vez mais deste paradigma. As aulas centram-se essencialmente na realização de procedimentos e processos assentes em metas que privilegiam a memorização e a abstração em detrimento da manipulação e construção dos conceitos a partir das suas diferentes representações, onde a tecnologia pode ter um papel determinante pela sua facilidade em representar e manipular os objetos matemáticos em construção.

Passados 30 anos sobre as primeiras experiências de introdução das TIC na aula de Matemática temos ainda um longo caminho a percorrer. Embora nos tenhamos afastado do ponto de partida, tal afastamento parece insignificante dado o avanço que as tecnologias tiveram ao longo destes anos. Se o recurso à tecnologia na aula de Matemática tivesse acompanhado a evolução que essa mesma tecnologia sofreu estaríamos certamente hoje com todos os alunos a trabalhar em ambientes como os que se pretendem recriar nas atuais 'Salas de Aula do Futuro', envolvidos em ambientes de aprendizagem autênticos, onde a construção dos conceitos matemáticos seria encarada com naturalidade, sendo os alunos os principais agentes da sua aprendizagem. No entanto a realidade é bem diferente. Isto não significa que nos devamos cingir à fatalidade dos factos, antes pelo contrário está na hora de modificar o atual panorama, uma vez que ainda está aberta uma janela de possibilidades para que a tecnologia possa efetivamente vir a ter um papel preponderante na aula de Matemática. As ferramentas existem, estão à disposição dos professores e alunos e têm a qualidade suficiente para que se possam tornar em ferramentas de aprendizagem autênticas. Para tal será necessário que se garanta a existência das ferramentas apropriadas que permitam que o professor se empenhe e recorra a metodologias de ensino que privilegiem o seu uso com qualidade. Se a tecnologia hoje se generalizou e está presente em todas as dimensões da nossa sociedade, por que é que não está generalizada no ensino e aprendizagem da Matemática?

Notas

[1] Dados obtidos a partir da página web (http://www.erte.dge.mec.pt/ambientes-educativos-inovadores).

Referências

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações.* Tese de Mestrado não publicada, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Domingos, A., & Teixeira, P. C. (2011). Os materiais electrónicos que acompanham os manuais e a aula de matemática. *Educação e Matemática, 115*, 64-66.

Domingos, A., & Vieira, M. J. M. (2012). Pavimentações com o Geometer's Sketchpad- um estudo no 10.º ano de escolaridade. *Educação e Matemática, 119*, 38-40.

Domingos, A. (2012). Estatística com recurso à TI-Nspire. *Educação e Matemática, 120*, 32-34.

Domingos, A., & Rosa, V. (2013). O Navigator e a forma como os alunos de 10.º ano utilizam a calculadora gráfica. *Educação e Matemática, 123*, 37-39.

Domingos, A. (2014). O papel da tecnologia na aprendizagem da matemática. Um exemplo com recurso ao Geogebra. *Educação e Matemática, 126*,14-16.

Gimeno, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática* (3.ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original publicada em 1988).

António Domingos
UIED, DCSA, FCT, Universidade NOVA de Lisboa

A tecnologia do passado: os materiais manipuláveis

Rui Candeias

Cecília Monteiro

O recurso a materiais concretos no ensino da Matemática foi, desde meados do século passado, considerado um valioso auxiliar de aprendizagem. Os trabalhos de Dienes (1977), Piaget (1952) e Bruner (1960, 1986) defendem que as crianças não têm maturidade cognitiva para apreender conceitos matemáticos que lhes são apresentados somente por palavras ou símbolos e que múltiplas experiências com materiais concretos constituem uma base para uma posterior abstração. De acordo com Bruner, à fase inativa, correspondente à manipulação de objetos, deverá seguir-se a fase icónica (esquemas e desenhos) e depois a fase simbólica.

Os materiais manipuláveis usados com intencionalidade educativa enquadram-se assim numa perspetiva construtivista da aprendizagem onde ações do sujeito sobre objetos físicos têm uma importante influência no desenvolvimento de conceitos. Esta perspetiva foi sendo interiorizada pelos professores dos primeiros anos, que nas suas aulas recorriam a materiais, por vezes não estruturados, para ajudar os seus alunos a aprender matemática.

Ao longo do tempo, os programas oficiais também foram destacando a importância da utilização dos materiais manipuláveis. Palma (2013) refere que já nos finais do século XIX a legislação emanada centralmente apelava ao carácter prático e intuitivo que o ensino deveria ter, embora a imprensa pedagógica da época salientasse que a falta de condições das escolas não permitiam essa concretização. No início do século XX a imprensa pedagógica continua a destacar a importância do ensino intuitivo, considerando que mesmo as escolas menos dotadas poderiam recolher na natureza objetos manipuláveis que pudessem ser utilizados na sala de aula (Palma, 2013).

No início da década de 60 do século XX, os programas do ensino primário mencionam a utilização de materiais não estruturados no âmbito das contagens e os instrumentos de medida usados no trabalho nas medidas de certas grandezas. Já no início da década de 70, os programas do ensino primário de 1974, muito marcados pela Matemática Moderna, destacam a importância da utilização de materiais não estruturados, como seixos, feijões, tampas, para a concretização dos conjuntos e a utilização do flanelógrafo para a sua representação. Os programas de 1974 fazem também menção à utilização de materiais estruturados no âmbito da comparação e classificação de objetos com referência a diferentes atributos. Estes programas especificam mesmo o material estruturado a que se referem, destacando a utilização do material de Cuisenaire e dos Blocos Lógicos para os alunos fazerem comparações e classificações. Estes programas referem, no entanto, que as crianças deverão poder brincar com estes materiais enquanto estiverem interessadas e da forma que quiserem, dando "assim largas à sua imaginação, ao mesmo tempo que, por si próprias, irão fazendo comparações e classificações." (p. 46). Os restantes programas do ensino primário publicados ainda na década de 1970 referem também a utilização de materiais não estruturados, principalmente devido à importância que se dá ao trabalho com conjuntos.

Em Portugal podemos destacar alguns marcos importantes da introdução de materiais manipuláveis no ensino da Matemática: o trabalho de Nabais com o material Cuisenaire e o material multibásico no início da década de 60, o Profmat de 1985 onde um grupo de educadores matemáticos levou a cabo ateliers para a divulgação do geoplano e a formação inicial de professores levada a cabo nas ESEs a partir de 1985. Destacamos ainda um número da revista Educação e Matemática (1990) dedicado em grande parte ao uso de materiais manipuláveis no ensino da Matemática.

Nabais, desenvolvimento e divulgação de materiais didáticos para o ensino da Matemática[1]

É a partir da importância dada ao ensino da Matemática com recurso à concretização, que Nabais[2] iniciou, em 1960, o trabalho de experimentação do material Cuisenaire[3] no Centro de Psicologia Aplicada à Educação. Em 1961 foi feita uma primeira experiência de aplicação no Colégio Vasco da Gama, em Meleças, com alunos da 4.ª classe (Nabais, 1965).

Figura 1. Material Cuisenaire – Editado por Cuisenaire de Portugal – Centro de Psicologia Aplicada à Educação.

Estes primeiros trabalhos desenvolvidos com o material Cuisenaire parecem ter causado um impacto muito positivo, sendo este material apresentado como um notável progresso pedagógico. Com estas primeiras experiências na utilização do material Cuisenaire, Nabais (1965) faz uma reflexão sobre o papel do professor no ensino da Matemática, destacando o papel deste como orientador das aprendizagens.

Assim, realizou-se o primeiro Curso Cuisenaire de 23 a 28 de Abril de 1962, no Colégio Vasco da Gama, em Meleças, no qual participaram 135 professores de diferentes níveis de ensino e de todos os pontos do país. Este curso foi dirigido por Caleb Gattegno e decorreu ao longo de seis dias (Nabais, 1965).

Figura 2. Almoço do I Curso de Iniciação no Método Cuisenaire, em 1962. Ao centro pode ver-se Caleb Gattegno e à sua esquerda João Nabais. (Nabais, 1965, p. 158).

Este primeiro Curso Cuisenaire recebeu o apoio do Ministério da Educação Nacional, que dispensou do serviço os professores que nele quiseram participar[4].

No total, entre 1962 e 1967 realizaram-se dezanove cursos de iniciação ao método Cuisenaire, em diversos pontos de Portugal, incluindo a Madeira e os Açores, onde participaram cerca de 1250 professores. Para além de Nabais, alguns cursos contaram com a orientação de outros professores como António Augusto Lopes[5] ou Madeleine Goutard[6]. Na divulgação dos materiais para o ensino da matemática é ainda de destacar a relação estabelecida com os Jardins-Escolas João de Deus onde, entre 1965 e 1977, Nabais orientou diversas Conferências Pedagógicas dirigidas a estudantes da instituição. Em 1969, Nabais organizou um curso de verão para professores que contou com a presença de Georges Papy na orientação do curso intitulado *Matemática Moderna e Pedagogia da Matemática*.

O desenvolvimento dos materiais didáticos e a organização das metodologias

Em 1963 foi publicada a 1.ª edição do livro *O Zeca já pode aprender aritmética: guia para o método dos números em cor*, cuja tradução portuguesa foi revista e editada por João António Nabais. Neste livro, Caleb Gattegno expõe o método de ensino da Matemática de Georges Cuisenaire.

Figura 3. Capa e folha de rosto da 1.ª edição do livro ***O Zeca já pode aprender Aritmética*: *guia para o método dos números em cor***, de Caleb Gattegno. Exemplar autografado pelo autor.

Num contexto em que surgem algumas críticas ao material Cuisenaire[7], nomeadamente a sua falta de adaptação à Matemática Moderna, em 1967, Nabais criou o material Cubos – Barras de Cor, uma adaptação do material Cuisenaire.

Figura 4. Cubos-barras de cor (cores Cuisenaire) – Editado por EDUCA

Esta adaptação do material Cuisenaire à Matemática Moderna é justificada mais tarde por Nabais, em anotações produzidas para uma edição sem data do livro *O Zeca já pode aprender aritmética: guia para o método dos números em cor*. Nestas anotações, para além dos elogios feitos ao material Cuisenaire, Nabais aponta-lhe algumas desvantagens e falta de adequação à fundamentação da Matemática Moderna, como por exemplo:

> ... caracter *[sic]* exclusivista do material Cuisenaire, não permitindo variar as situações; o exigir à criança que meça antes mesmo de adquirir a ideia de número para saber contar; o facto de as dez pedras Cuisenaire constituirem *[sic]* outros tantos conjuntos singulares, não apresentando cada um número de elementos que se pretende que a criança neles descubra; designação imprópria, inadequada e deformadora ... (Nabais em Gattegno, edição portuguesa, s.d.b, p. 42)

Em 1968, Nabais apresenta a metodologia a utilizar com o material desenvolvido, onde inclui as seguintes secções: *o Material, os Conjuntos Singulares e Vazios, Conjuntos Iguais e Equivalentes, Reunião de Conjuntos (adição), Subtracção de Conjuntos, Iteração – Repetição de Conjuntos (multiplicação), Subtracção Iterada de Conjuntos (divisão), Factorização e Divisibilidade, Fracções e Conjuntos, Famílias de Fracções e a Representação de Conjuntos.*

O Calculador Multibásico

Em 1966 é criado por Nabais e experimentado no ensino da Matemática no Ensino Primário do Colégio Vasco da Gama, o Calculador Multibásico. Este material é constituído por três placas, com cinco orifícios cada uma, e 50 elementos em

Figura 5. Calculador multibásico – Editado por EDUCA

seis cores diferentes: 10 amarelos, 13 verdes, 13 encarnados, 10 azuis, 2 cor-de-rosa e 2 cor de lilás. Estes elementos encaixam uns nos outros bem como nos orifícios das placas.

Em 1968, Nabais expõe a metodologia a utilizar com este material. O ábaco parece estar na origem do seu desenvolvimento. Para além de ser apontado como um meio de fácil concretização da aritmética na escola primária, é também referido como um material "polivalente para a descoberta da matemática nas escolas secundárias: Ideal para a introdução da criança na numeração (diferentes bases), bem como no algoritmo das operações aritméticas" (Nabais, s.d., p.61).

O Profmat de 1985 e a revista da APM de 1990

O primeiro Profmat realizou-se no Instituto Superior de Agronomia nos dias 25, 26 e 27 de setembro de 1985 e contou com a presença de 350 professores, entre eles alguns elementos do "grupo de Boston". Recém-chegados dos Estados Unidos, estes professores tinham frequentado um curso de mestrado onde uma das componentes de formação tinha sido a exploração didática de materiais manipuláveis na sala de aula de Matemática. Três pares desses professores orientaram *ateliers* sobre o uso do geoplano, simultaneamente em três salas, com a presença de aproximadamente 30 professores em cada uma. A construção do geoplano fazia parte da agenda, pelo que todos os participantes levaram para as suas escolas um geoplano, assim como fichas para a sua utilização. Trabalharam-se as medidas de área e perímetro e a construção de polígonos, com o apoio de papel ponteado para a transferência icónica da manipulação. Foi elaborado um documento intitulado "Materiais Manipulativos no Ensino da Matemática" (Fernandes, Guimarães, Matos & Monteiro, 1985), que foi publicado nas atas do Profmat.

Mais tarde a revista Educação e Matemática, da APM, dedicou o seu número treze (1990) a este tema. Na época, Serrazina (1990) realça, no editorial, que as diferentes correntes psicopedagógicas destacavam a importância dos modelos concretos na compreensão dos conceitos matemáticos com a devida orientação do professor. Destaca ainda que a aprendizagem se baseia na experiência e que "a construção de conceitos matemáticos é um processo longo que requer envolvimento activo do aluno e que vai progredindo do concreto para o abstracto" (Serrazina, 1990, p. 1).

Nesse número da revista, são também publicados diversos artigos que abordam a questão dos materiais manipulativos[8]. Helena Marchand, da Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação, da Universidade de Lisboa, publica o artigo *A aprendizagem do número – Que exercícios? Que materiais?*, onde aborda o desenvolvimento do conceito de número, embora não se centre só nos materiais, fazendo uma reflexão mais alargada sobre a construção do conhecimento. Também neste número da revista, Lina Fonseca, Pedro Palhares e Teresa Pimentel publicam um artigo que descreve uma experiência de construção de materiais manipulativos realizada com alunos da ESE de Viana do Castelo. Leonor Cunha Leal e Eduardo Veloso assinam um artigo que descreve uma experiência de utilização de materiais manipulativos numa turma do 7.º ano de escolaridade, enquadrada no projeto de renovação curricular, MAT7,8,9. Os materiais utilizados são poliedros em plástico transparente. Um outro artigo, de Cristina Ponte, intitulado *Um lugar para o geoplano no ensino da geometria*, descreve uma experiência de utilização deste material com alunos dos primeiros anos de escolaridade. Esta revista tinha ainda uma secção sobre os materiais na sala de aula de matemática.

Instituições de formação inicial de professores

Na década de 80 e na sequência da criação do Ensino Superior Politécnico[9] dá-se início ao processo de instalação, em todo o país, das Escolas Superiores de Educação (ESE). Em 1984 havia um total de 15 ESEs cuja finalidade era formar a nível superior educadores de infância e professores do ensino primário e ensino preparatório[10]. No processo de implementação dessas escolas foram selecionados pelo Ministério da Educação cerca de 70 docentes para frequentarem em 1984 um mestrado da Universidade de Boston e do qual faziam parte 14 professores de matemática, um para cada ESE[11]. Esses professores que iriam liderar os departamentos de educação matemática de cada uma das ESEs mantinham encontros periódicos com vista à troca de experiências relativas ao seu trabalho enquanto formadores. O recurso aos materiais manipuláveis na maior parte das ESEs era uma prática comum na formação inicial e contínua dos professores. No início, os materiais mais usados eram: a) *blocos lógicos* para a classificação, seriação, formas geométricas, sequências e ainda para jogos lógicos como o exemplificado na figura 6; b) *material Cuisenaire* para a decomposição de números, adição e subtração de naturais, múltiplos e divisores e frações (frações equivalentes, reconstrução da unidade); c) *Geoplano* retangular e circular (figura 7 que mostra um livro editado pela APM muito divulgado nas ESEs) para os polígonos, ângulos, topologia no plano, áreas e perímetros, fração como parte de um todo; d) *MAB* (figura 8) para os sistemas de numeração, sistema de numeração decimal e operações em diferentes bases, algoritmos; e) *Calculadores multibásicos e ábacos* para o sistema de numeração decimal; f) *Tangram* para a composição de figuras, áreas e figuras equivalentes, orientação espacial, visualização, fração como parte de um todo; g) *Pentaminós* para áreas e perímetros, figuras equivalentes e isoperimétricas, eixos de simetria de uma figura, composição de figuras; h) *Espelhos* para Simetrias, orientação e visualização, ângulos, círculo e circunferência; i) *Cubos de encaixe* para medição de volumes e vistas de sólidos; j) *Réguas articuladas* que além de permitirem a construção de polígonos, permitiam a descoberta da regra de formação de triângulos; l) *Os polydrons* para os sólidos, suas planificações e pavimentações.

ACTIVIDADE 1. (dominó). Divida pelos elementos do grupo as peças da caixa de blocos lógicos. Um aluno põe uma peça qualquer na mesa. O aluno seguinte coloca uma peça junto da primeira que difira desta apenas por um atributo. Proceder do mesmo modo até se acabarem as peças. Perde quem ficar com peças.

ACTIVIDADE 2. Esta actividade é semelhante à anterior, mas agora mudando dois atributos.

Figura 6. Exemplo de uma atividade com blocos lógicos para alunos da formação inicial, desenvolvida por alguns formadores das ESEs.

As ESEs foram, de um modo geral, equipadas com laboratórios de materiais para serem utilizados não só nas aulas de formação inicial e contínua, como para alunos em estágio os levarem para as escolas dos 1.º e 2.º ciclos e com eles trabalharem com as crianças.

Figura 7. Livro editado pela APM

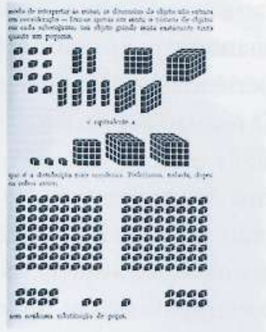


Figura 8. Página do livro de Dienes que mostra o uso do MAB para o sistema de numeração de base 4

Neste artigo tentámos traçar um breve percurso do que foi a introdução e a divulgação de alguns materiais manipuláveis utilizados no ensino da Matemática em Portugal, num passado recente. Realçámos alguns casos que sem dúvida marcaram o seu uso e divulgação em Portugal. Existiram com certeza outros episódios, igualmente importantes, que não foram aqui retratados. Podendo ser considerados como a tecnologia do passado, os materiais manipuláveis continuam hoje a ser uma prática comum na formação inicial de professores dos primeiros anos de escolaridade assim como um recurso para a aprendizagem da Matemática. Um exemplo da importância deste tema encontra-se bem descrita num artigo escrito em 2002 pela professora da ESE de Viana do Castelo, Isabel Vale.

Notas

[1] Esta secção do artigo é baseada no trabalho de Candeias (2008).

[2] João António Nabais nasceu na Aldeia do Bispo, concelho do Sabugal, em 1915, realizando os primeiros estudos escolares em Forcalhos, no mesmo concelho. Paralelamente à sua carreira eclesiástica, realizou estudos na área da Pedagogia e Psicologia vindo a licenciar-se, nesta área científica, no ano de 1948 pela Universidade de Lovaina, na Bélgica. Em 1959, fundou o Colégio Vasco da Gama, em Meleças, onde desenvolveu grande parte da sua obra pedagógica (Nóvoa, 2003).

[3] O material Cuisenaire foi desenvolvido por Georges Cuisenaire, professor do Ensino Primário belga, no início da década de 1950 (Jeronnez, 1964).

[4] Ofício – Circular n.º 48, de 7 de Março de 1962.

[5] Professor metodólogo do Liceu D. Manuel II, do Porto, membro da Comissão de Revisão do Programa do 3.º Ciclo do Ensino Liceal (atuais 10.º e 11.º anos), que em 1962 elaborou um programa experimental. (Matos, 2004).

[6] Pedagoga que desenvolveu trabalho no âmbito do ensino da Matemática com crianças. Autora de várias obras, entre as quais *Les Mathématiques et les Enfants*, editada pela editora Delachaux et Niestlé (Nabais, 1968).

[7] Para um aprofundamento sobre estas críticas ver por exemplo Brissiaud (1994) ou Lovell (1988).

[8] Designação dada na época aos materiais manipuláveis

[9] Decreto-lei n.º 513-T/79.

[10] Devido à existência de Institutos Universitários não houve criação de Escolas Superiores de Educação na Madeira e nos Açores.

[11] A ESE de Setúbal foi criada mais tarde pelo que não foram contemplados professores para o mestrado de Boston.

Referências

Brissiaud, R. (1994). *Como as crianças aprendem a calcular.* Lisboa: Instituto Piaget.

Bruner, J.S. (1960). *The Process of Education*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Bruner, J.S.(1986). *Actual Minds, Possible Worlds*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Candeias, R. (2008). *Contributo para a história das inovações no ensino da matemática no primário: João António Nabais e o ensino da matemática no Colégio Vasco da Gama.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Dienes-Golding (1977). Primeiros passos em matemática: Conjuntos, Números e Potência. EPU: São Paulo.

Fernandes, D., Guimarães H., Matos. J. M., Monteiro, C. (1985). Materiais Manipulativos no Ensino da Matemática. Actas do Profmat, 1,40-51.

Gattegno, C. (s.d.a). *O Zeca já pode aprender matemática: guia para o método dos números em cor* (1.ª ed.). Lisboa: Cuisenaire de Portugal – Centro de Psicologia Aplicada à Educação.

Gattegno, C. (s.d.b). *O Zeca já pode aprender matemática: guia para o método dos números em cor* (2.ª ed.). Meleças: Éduca – material didáctico.

Jeronnez, L. (ed.). (1964). *Bulletin Cuisenaire: les Réglettes en Couleurs.* Bruxelles: Editions Calozet.

Matos, J. M. (2004). *Cronologias: Cronologia do ensino da matemática (1940-1980) – Portugal.* Recuperado em 2007, Janeiro 15, de http://phoenix.sce. fct.unl.pt/jmmatos /clivros/CLVR-SHTM/CRONOL/CRONEST.HTM

Nabais, J. A. (s.d.). *À descoberta da matemática com o calculador multibásico.* Colecção – Constrói a tua matemática n.º 2. Meleças: Éduca material didáctico.

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number.* New York: Humanities Press.

Lovell, K. (1988). *O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança.* Porto Alegre: Artmed.

Nóvoa, A. (dir.) (2003). *Dicionário de pedagogos portugueses* (1.ª ed.). Porto: Edições Asa.

Palma, H. (2013). Os materiais didáticos utilizados no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos na escola primária (séculos XIX-XX). Em Mogarro, M. (2013). *Educação e património cultural: escolas, objetos e práticas.* Lisboa: Edições Colibri.

Vale, I. (2002). Materiais Manipuláveis. Edição do Laboratório de Educação Matemática. ESE de Viana do Castelo.

Rui Candeias
Agrupamento de Escolas Terras de Larus, UIED/FCT
Portugal

Cecília Monteiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

Entrevista a Eduardo Veloso

Rita Bastos

A redação da revista pediu-me para entrevistar o Eduardo Veloso, para o número temático da revista Educação e Matemática sobre Tecnologias, o que aceitei desde logo porque faz todo o sentido. O Eduardo foi a pessoa com quem mais aprendi, sobre muitas coisas, mas em particular sobre Geometria e sobre a utilização de programas de Geometria Dinâmica com os alunos. Há muito tempo que trabalhamos juntos no Grupo de Geometria da APM e noutras circunstâncias, e isso tem constituído uma experiência muito enriquecedora para mim.

Foi muito fácil entrevistar o Eduardo, porque ele é um bom contador de histórias e tem uma vida já longa e bem preenchida para contar. Foi em casa dele, em Cascais, numa tarde de verão, que nos encontrámos e a entrevista foi mais uma conversa entre velhos amigos do que outra coisa qualquer.

Rita Bastos – Tu foste das primeiras pessoas, entre as que eu conheço, a aderir com entusiasmo às TIC, logo nos anos 80. O que é que te atraiu? Como é que isso começou?

Eduardo Veloso – Julgo que começou, não pelo lado meu de professor – que eu tinha sido e depois interrompi quando estive na TAP durante 34 anos a voar como navegador – mas porque realmente a tecnologia caracteriza a aeronáutica – os aviões são sempre tecnologia de ponta, sempre. Portanto, foi por isso que me adaptei sempre bem aos avanços tecnológicos. Nos aviões começou cada vez mais a haver coisas computorizadas, ou pelo menos certos equipamentos que eram, digamos, uma pré-história dos computadores... Isso foi, digamos, eliminando tripulantes... nós começámos sendo cinco, dois pilotos, um radiotelegrafista, um mecânico e um navegador, como eu. Como navegador, a tecnologia que usava era o sextante, a tecnologia da navegação no mar, já muito usada, portanto não tinha nada de computadores. O radiotelegrafista "morreu" quando apareceu a voz, a comunicação por voz, e acabou a radiotelegrafia e o alfabeto morse, e o navegador "morreu" quando apareceram, aí sim, computadores que dirigiam o avião, nós apenas metíamos os pontos por onde queríamos passar e tudo o resto era feito pelo computador. Os sextantes desapareceram, tudo o resto acabou e o sistema de navegação que apareceu, e que incluía um computador, não dispensava inicialmente o navegador mas com o tempo substituiu-o. Porque os pilotos começaram a poder fazer tudo a partir dos seus painéis. Marcavam eles os pontos da rota e o sistema de navegação fazia o resto. Era extremamente interessante perceber como o fazia, mas demora muito tempo a explicar.

O que acontece é que eu habituei-me a usar e a gostar de computadores. E quando eles me tiraram do ar, por assim dizer, e me colocaram em terra, passei a desempenhar umas funções que eles chamavam de "matemático da TAP", era o que fazia as contas (risos) digamos assim, quando era preciso. Claro está que eu tentava era não fazer contas, portanto os primeiros computadores ou calculadoras que apareceram começaram logo a ser usados. Havia além disso um chamado "computador da TAP" que fazia o trabalho administrativo (vencimentos, etc.) que ocupava o rés-do-chão todo do edifício onde eu trabalhava, um rés-do-chão inteiro com montes de máquinas que perfuravam e liam cartões... E depois foi a evolução conhecida. Essa evolução na TAP foi muito intensa, dada a tecnologia de ponta dos aviões com que lidávamos diariamente – a automatização dos procedimentos de rotina, para libertarmos a nossa inteligência para novos avanços a aprendizagens, era o nosso dia-a-dia. E esta é certamente uma filosofia que nos deve mover na educação.

RB – E depois houve os computadores pessoais, os Macintosh, tu foste das primeiras pessoas a trazer os Macintosh para cá.

EV – Já não me lembro bem, mas os primeiros computadores não tinham nada que ver com os Macintosh, eram ...

RB – Ah! O Spectrum?

EV – Sim, sim, os Spectrum... que eram usados por vários de nós no Departamento de Educação da Faculdade.

RB – Eu sei, eu sei, mas os primeiros Macintosh que eu vi foi nas tuas mãos. Também havia aquela tua relação com os Estados Unidos, trazias as novidades de lá.

EV – Pois, também, também. Mas foi a atracção por aquelas lutas de carácter político ou mesmo "religioso"... a *Microsoft* dominava a situação e depois aparecia numa *garage* aquela *startup* do Jobs e companheiros... fizeram um computador e eu comprei logo o primeiro que cá chegou. Mas o que de mais importante revolucionou o estado da educação no que diz respeito aos computadores foi o *Logo*. O *Logo* foi uma coisa extraordinária, não é verdade?

Porque o *Logo*, além de ser uma linguagem de programação, era um modo de fazer andar uma tartaruga no chão, e não um ponto no ecrã! Fazê-la deslocar-se, mudar de direcção, traçar figuras geométricas... isso, foi uma coisa espantosa, na utilização dos computadores na educação foi um avanço incrível, fundamental.

Fiz muita coisa em *Logo*, muita coisa. Sem dúvida que foi para mim uma experiência fundamental o trabalho com o *Logo*... isso aconteceu com muitas pessoas. Um dos meus programas em *Logo* foi o *LogoGeometria*, com comandos de *Logo* que faziam geometria: escrevia-se recta e aparecia uma recta desenhada no ecrã, escrevia-se rodar e o ponto mudava de direcção, etc. etc.

RB – Rodar 90, rodar 30... eu lembro-me disso!

EV – Ok, era no início das coisas, mesmo! Não havia muitos programas já feitos. Portanto isso obrigava a programar e a perceber o que é isso de programar. Depois apareceram outras linguagens – o *ProLog* que fundamentalmente usava conceitos da Lógica para realizar projectos, e era, portanto, muito atrativo do ponto de vista da matemática, da lógica e da educação. O *Logo* foi o mais importante, mas havia outras coisas paralelas. Finalmente chegaram os programas de Geometria Dinâmica (primeiro o *Cabri*, depois o *Sketchpad*) e a partir daí, digamos, a situação estabilizou e hoje trabalho fundamentalmente com o *Sketchpad*.

RB – No entanto, mais recentemente, não aderiste muito às redes, as redes sociais, as redes profissionais...

EV (rindo) – Não aderi muito? Não aderi nada!

RB – Nem às redes profissionais, que também há!

EV – Sim, sim, durante vários anos – agora não porque as pessoas já perceberam isso – eu recebia imensas mensagens que diziam: "porque é que tu não me dizes nada quando eu te convido para o *LinkedIn*?". Eu não sei o que é o *LinkedIn*, nem quero saber! Ou seja, a questão é que eu não precisei dos computadores para me relacionar com muita gente! E sempre tive muitas solicitações, muita ocupação, nunca disse para mim mesmo: "o que é que hei-de fazer agora? Ah, vou ver quem é que está no *Facebook*, ou não sei onde"... tenho sempre que fazer, não preciso! É um bocado absurdo dizer isto, mas eu não preciso de redes sociais para ser social! Não preciso que façam a rede para mim, eu tenho a minha rede já, que me chega e sobra, às vezes!

RB – Então e no dia-a-dia, como é que as TIC estão na tua vida? Que mudanças é que trouxeram à tua vida, ou foram trazendo?

EV – Na matemática, como me dedico à Geometria, é o *Sketchpad* o meu programa de Geometria. Fora da matemática, como também me dediquei sempre muito à fotografia, é o *Photoshop*. Antes era fotografia não digital e eu cheguei a usar uma câmara escura e essa história toda. Cheguei mesmo a usar uma máquina do tipo das dos fotógrafos antigos, aquelas do pano por cima da cabeça, preto...

RB – os grandes formatos?

EV – ... era o que eu gostava, o grande formato. Era um caixote, que eu comprei na América, e que trouxe para cá, um tripé grande, etc. Depois quando apareceram as primeiras máquinas digitais, comprei o *Photoshop* e comecei a editar completamente as fotografias até serem impressas: modificação das tonalidades, melhoria da resolução, enquadramentos, etc.

Portanto, quanto a programas, uso fundamentalmente o *Sketchpad* na matemática e o *Photoshop* na fotografia. Quando escrevo textos para publicação – nos livros, por exemplo – uso o *InDesign* porque gosto de ser eu a paginar... Descobrir... organizar uma página, é uma coisa maravilhosa. Escrever logo a paginar é o que é simples para quem quer publicar, porque quando tem uma figura a ocupar uma meia-página, escreve só meia-página...

RB – Ah e quando fazias a revista, também começaste logo...

EV – Na revista, também. Mas nunca usei o *Word*...

RB – Não, tu não usas os habituais, tu usas os profissionais!

EV – Não, não uso o *Word*, porque é da *Microsoft*, e portanto é da religião contrária (risos). Portanto, nunca usei o *Word* na minha vida, que é uma coisa que faz muita impressão às pessoas, mas usei o *Excel*, o *PowerPoint*, etc., portanto não sou um fanático!

RB – Não eras completamente radical...

EV – Só para acabar a lista dos programas que uso, como também faço sites para acompanhar os livros que publico, uso em geral um programa da Apple, *iWeb*, mas estou a aprender – com 88 anos... – o *Muse*, da *Adobe*, que liga muito bem com o *InDesign* e com os outros da *Adobe* que uso.

RB – Tens usado vários, porque antigamente havia um da *Adobe*, que era o *GoLive*, não é? Nós chegámos a usar. Era um percursor deste, talvez.

EV – *GoLive*? Sim. Houve umas variantes.

RB – Relativamente à Educação, fizeste parte do projecto Minerva?

EV – Projecto Minerva, pois. Foi aí que eu aprendi imensas coisas! Foi quando estive na Faculdade, no Departamento de Educação. Quando acabei a minha vida de navegador – a reforma era aos 60 – e pensei nas coisas que gostava de fazer (gostava de Educação e de dar aulas mas infelizmente não tinha podido dar aulas durante trinta e tal anos) fui falar com o meu grande amigo Paulo Abrantes, que eu conhecia já das políticas, e ele sugeriu que eu fosse fazer o mestrado, e fui inscrever-me. Não fiz mestrado nenhum, mas fui aluno livre de mestrado, na disciplina de Metodologia da Educação, do João Pedro da Ponte. E pronto, aprendi e reaprendi muito com isso.

Eu nunca tinha abandonado teoricamente o domínio da educação, em particular da educação matemática, porque gostava muito de ser professor, gostava muito de matemática e tinha tido a sorte de ter professores fantásticos – como Ferreira de Macedo e Sebastião e Silva.

E agora tinha tempo para perceber o que se passava e como a situação era muito diferente de há trinta anos, não é verdade? Aprendi muito, julgo que percebi bem a situação e comecei a colaborar e a gostar... não poderia haver, naquela altura plena de vitalidade e iniciativas, melhor estágio para perceber o que se passava do que ter estado na Faculdade de Ciências, no Departamento de Educação.

RB – Onde era um polo do projecto Minerva, também?

EV – ... onde era o projecto Minerva também, exatamente. Foi um desenvolvimento natural. O projecto Minerva, ainda na "24 de Julho", foi muito importante para mim, muito importante! Porque me ajudou a compreender a situação da educação matemática – a que tinha que ver computadores e de uma forma geral...

RB – Reflectir muito, em conjunto, sobre o que se pretendia para Educação, numa altura de mudança, não é?

EV – Exactamente. Não era uma Educação que estava parada e a que nós íamos acrescentar os computadores, não era tecnologia para acrescentar, foi realmente uma tecnologia para transformar! Transformar filosoficamente a nossa abordagem da Educação.

RB – E depois nunca mais deixaste de fazer formação, formação de professores. Eu fiz muitas acções contigo, com o *Sketchpad*. E como é que tu, do que te chega porque agora não frequentas muito as escolas, do que te chega o que é tu achas de como está a ser usada a tecnologia nas escolas?

EV – Sinceramente eu não sei bem. Não sei, não te sei dizer bem porque eu estou muito longe. Realmente neste momento não tenho contacto directo com as escolas. O que eu sei é aquilo que oiço nas reuniões do Grupo de Trabalho de Geometria.

RB – E das formações que fizeste, também ficaste com alguma ideia...

EV – Não sei bem, sinceramente não tenho uma opinião formada sobre isso. Parece-me que existe muito pouca tecnologia nas escolas e computadores, e que os alunos passam a vida a olhar para o telemóvel, mas que isso não tem nada que ver com a educação, é para comunicar, nas redes sociais ou seja lá o que for. Mas o meu pressentimento é que se podia transformar completamente a vida nas escolas, ainda, neste momento, mas eu não conheço bem, não vou estar a falar de cor.

RB – Bom, mas tens certamente uma ideia de como é que poderia ser. Como é que poderia ser uma escola ideal, como é que as tecnologias estavam na sala de aula, na escola ...

EV – Não, mas é que a sala de aula dos 50 minutos...

RB – Por exemplo, 50 minutos por semana de uma disciplina TIC.

EV – Não! não!.

RB – É o que existe agora, mais ou menos. No 7.º e 8.º anos, os meninos têm uma disciplina de TIC.

EV – Vejamos então o que penso. Devo dizer que defendo fortemente a existência de muitas ocasiões de trabalho de grupo pequeno (três a quatro alunos). Mas a experiência do projecto Mat789 levou-me a compreender a importância da existência de turmas com dimensão de cerca de 20 alunos, por exemplo, para confrontação de resultados do trabalho de grupo e para intervenções colectivas por parte do professor. O que eu gostaria era de ver a turma frequentemente a funcionar em trabalho de projecto de pequenos grupos, em trabalho individual muitas vezes com o auxílio do *iPad* pessoal ou de um computador da escola, e em leituras na biblioteca – no fundo, os alunos trabalham como todos nós trabalhamos... Portanto, um sistema muito mais dinâmico, muito menos rígido, com muito menos toques – não sei se ainda há toques de campainha ...

RB – Há. Pode não haver toques, mas há a mesma separação do tempo.

EV – Mas sem períodos fixos e imutáveis de dia para dia... Com propostas do professor: "olhem, hoje à tarde preciso da vossa presença na sala X... uma hora e meia deve dar". Ou a turma toda, ou um grupo. "Olhem, coloquei no site da escola três propostas, durante dois dias não vos quero ver, quero que vocês estejam dedicados a isso". "Não se esqueçam que as horas de visita do museu Y são .... e na nossa reunião da próxima sexta têm que lá ter ido". Estás a perceber? É dessa maneira que eu vejo a escola! É uma estrutura completamente diferente. É uma estrutura que depende das propostas que os alunos fizerem, que os professores fizerem. E possivelmente com diferenças grandes, porque os professores proporão coisas muito diferentes se puderem propor aquilo que lhes parece melhor. Tudo será difícil de melhorar enquanto existirem programas com tudo previsto como existem agora, e com exame no fim. Portanto, enquanto não acabarem os exames, enquanto não acabarem os manuais escolares, enquanto os alunos não tiverem *tablets* e acesso a computadores, vai ser muito difícil mudar o que quer que seja. Vão ser precisas grandes alterações na formação de professores e muita formação contínua para as mudanças poderem resultar. E os professores devem ser formados para serem mais contra a escola que temos. E devem poder exprimir também as suas diferenças pessoais na formação dos seus alunos. Se naturalmente as suas formações e interesses e gostos são diferentes, têm que poder reflectir essas diferenças nas propostas que fazem aos seus alunos. E disso vai depender a formação dos seus alunos. Agora não depende. Agora são eles que têm que se adaptar a uma única via. Mas eu acho que os alunos deviam poder ter experiências diferentes conforme os interesses e características dos seus professores. Porque, como dizia Dewey, "a escola não é uma preparação para a vida, é a própria vida"

RB – ... e a própria sociabilização é limitada, não é? O saber viver com os outros?

EV – Exatamente. Portanto, estarem na escola com professores com interesses muito diferentes, culturalmente ricos e com imaginação, vai fazer com que eles tenham uma vida muito mais rica e essa vida é que os vai "preparar". O que prepara para a vida é a vida, é sempre assim, mas deve ser a vida e não uma "vida de preparação".

RB – Mas nem falaste da tecnologia...

EV – A tecnologia num ambiente desses é fundamental porque faz actualmente parte da vida, é a maneira como as coisas se fazem, porque é o modo de comunicar entre grupos, entre o professor e os seus alunos.

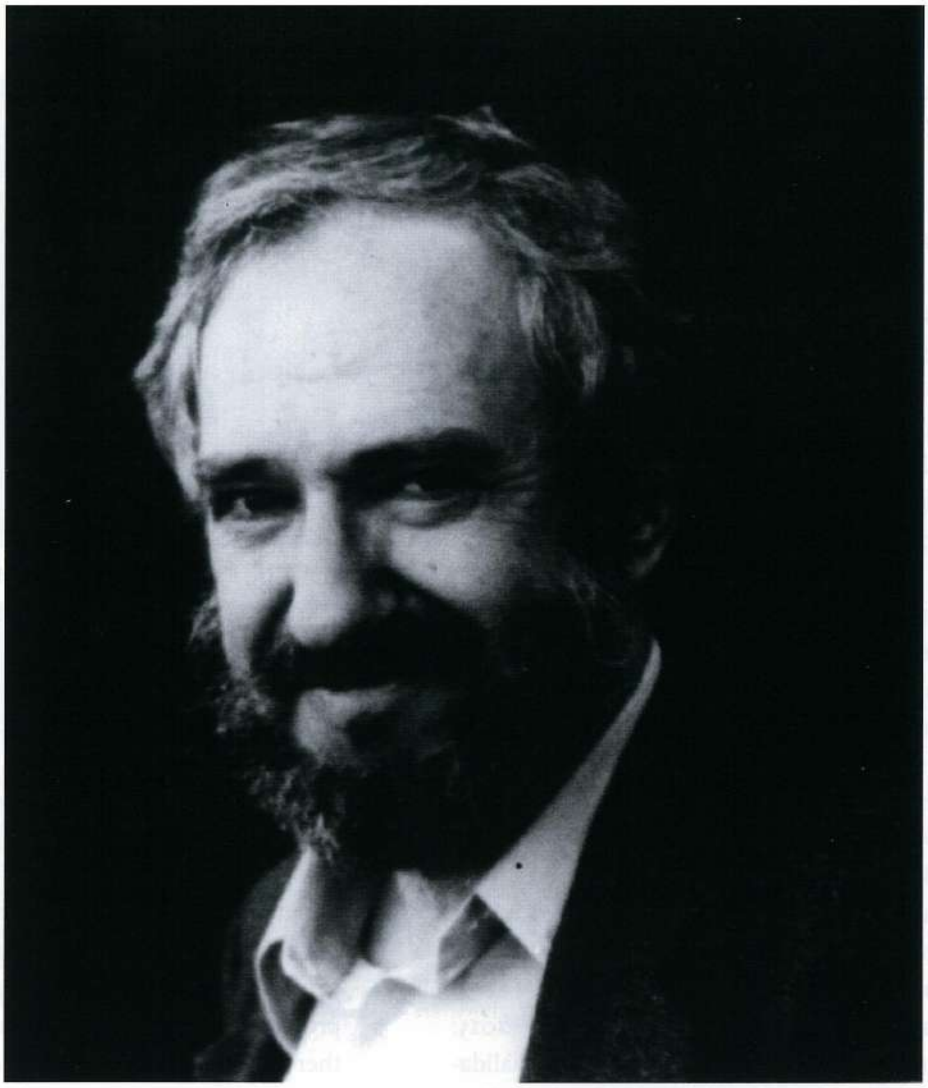
RB – Também faz parte da nossa cultura atual.

EV – Exatamente. É um modo fundamental de viver, e se é um modo fundamental de viver, deve estar na escola. A escola deve viver também disso e não me parece que seja o caso, ainda.

RB – Portanto, a tecnologia não é para se ensinar tecnologia é para viver com ela a nossa vida.

EV – Pois, não é para ter uma hora por semana! É para viver.

Entrevista conduzida por:
Rita Bastos
Escola Artística António Arroio



Revisitar Papert 40 anos depois: há tanto ainda para fazer...

Vítor Duarte Teodoro

The understanding of learning must be genetic. It must refer to the genesis of knowledge. What an individual can learn, and how he learns it, depends on what models he has available. This raises, recursively, the question of how he learned these models. Thus the 'laws of learning' must be about how intellectual structures grow out of one another and about how, in the process, they acquire both logical and emotional form.

(Papert 1980, p. vii)

A parte do currículo escolar que agora se convencionou chamar STEM (Science, Technology, Engineering & Matematics) – e que eu prefiro designar por STEAM (... Art & Mathematics)[1], uma vez que traduz melhor a importância das componentes artísticas e humanistas nas ciências e nas engenharias – é fonte de preocupação para professores, pais, alunos e, claro, decisores políticos e empresariais, devido ao tipo de sociedade e de economia que resultou das diversas revoluções industriais e culturais dos últimos séculos. A nossa sociedade e o nosso dia a dia estão profundamente dependentes do conhecimento científico e tecnológico, desde os atos mais simples (acordar de manhã com um relógio/ telefone...) até aos mais complexos (e.g., operar o cérebro para retirar um tumor). É o reconhecimento da importância desse conhecimento que justifica a integração da Matemática e das Ciências, bem como das tecnologias, no currículo escolar.

As "guerras da Matemática" (https://en.wikipedia.org/ wiki/Math_wars), que tão bem foram evidenciadas nos últimos anos devido à ação do governo de Passos Coelho/ Nuno Crato, colocam em evidência dois modos de encarar o ensino da Matemática e, de certo modo, das Ciências e Tecnologias em geral. Um *modo formalista*, centrado nos conteúdos e numa exigência e rigor conceptual quase absoluto (de que são exemplo as "Metas Curriculares" de 2013; veja-se por exemplo a meta referente à proporcionalidade direta, no 7.o ano...), e um modo que à falta de melhor termo designo por *contextualista*, no qual Seymour Papert (um dos criadores da linguagem *Logo*, https://en.wikipedia.org/wiki/Logo_(programming_language) é um dos mais importantes defensores.

Como escreveu João Ponte no prefácio à edição portuguesa de um dos livros de Papert[2]:

> Papert é um dos autores fundamentais do mundo dos computadores na educação. É principalmente conhecido como o criador da linguagem *Logo*, uma linguagem desenvolvida especialmente para fins educativos, baseada na metáfora de "ensinar a tartaruga". Mas o *Logo* não é só uma linguagem – é também uma filosofia sobre a natureza da aprendizagem e a relação entre o homem e a tecnologia.
> Relativamente à aprendizagem, a sua ideia fundamental é que deve ser a criança a comandar o computador e não este a comandar a criança. A melhor forma de aprender é de um modo "natural" ou "piagetiano", cujo paradigma é a aprendizagem da língua materna, logo na infância. No contexto escolar usual os alunos têm grande dificuldade em aprender os novos assuntos cujo significado não vislumbram e que não lhes despertam qualquer interesse. A tarefa da educação é, assim, a de criar os contextos adequados para que as aprendizagens se possam desenvolver de modo natural. Papert insere-se na perspectiva educativa da escola nova, reconhecendo-se a proximidade das suas ideias com as de autores como Dewey, Pestalozzi, Freinet e Montessori. O que o distingue essencialmente é a sua exploração aprofundada das possibilidades e limites das novas tecnologias de informação.

As ideias de Papert podem ser sintetizadas num termo chave, cuja tradução para a língua Portuguesa é relativamente difícil: "empowerment". À falta de melhor termo, uma tradução aceitável é "empoderamento". Escreve Papert sobre os princípios de ensino e aprendizagem:

> First, there was the *continuity principle*: The mathematics must be continuous with well-established personal knowledge from which it can inherit a sense of warmth and value as well as "cognitive" competence. Then there was the *power principle*: It must empower the learner to perform personally meaningful projects that could not be done without it. Finally, there was a principle of *cultural resonance*: The topic must make sense in terms of a larger social context. (Papert, 1980, p. 54)

Estes são princípios curriculares que se aplicam a qualquer área de estudo, não apenas à Matemática. Enfatizam o *empoderamento de ideias através da ação*, o *reconhecimento da dimensão afetiva* na aprendizagem e a *ressonância com os contextos sociais e culturais*.

Nas décadas de 70 e 80, os computadores eram ainda algo muito distante da maioria das pessoas, adultos e jovens. Hoje, numa época em que a maioria das pessoas possui maior poder computacional no bolso que o computador mais potente dessas décadas, os princípios de Papert podem começar verdadeiramente a fazer sentido. É nessa perspetiva que se enquadra a ênfase atual na utilização educativa de ambientes de programação que são os sucessores diretos da Linguagem *Logo*. Esses ambientes, dos quais o mais conhecido é o *Scratch* (https://scratch.mit.edu), que pode interatuar com sensores, controladores e robots baseados no ambiente Arduino (http://scratchx.org), são pelo menos a terceira iteração das ideias de Papert.

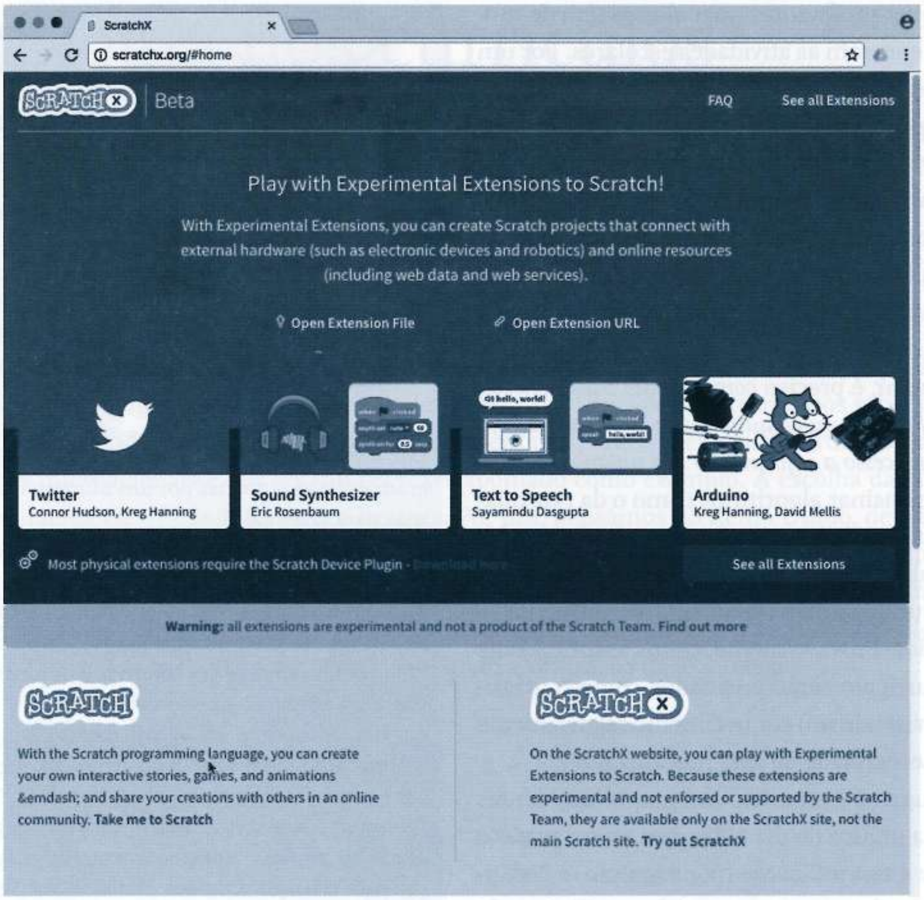


Figura 1. Uma página sobre a utilização do *Scracth* para controlar sensores, controladores e robots.

A utilização deste tipo de ambientes *diretamente* nas aulas das disciplinas escolares é um desafio que se coloca atualmente e que vai continuar provavelmente ainda por muito tempo. É relativamente fácil conceber atividades educativas com estes ambientes em "clubes de ciência e de matemática" mas face ao tipo de programas curriculares atuais e à forma de pensar dominante em professores e responsáveis educativos, não é fácil imaginar o que poderá ser um programa curricular "normal" em que estes ambientes estejam completamente integrados no ensino. Várias razões existem para esse facto, desde a necessidade de haver equipamentos computacionais (e outros) diretamente nas "mãos" de todos alunos até à dificuldade sobre como se avaliam conhecimentos e capacidades quando o ensino os integra de modo continuado. Certamente nos próximos anos se começará a esboçar uma resposta, com a provável generalização de *tablets* em substituição de outros recursos educativos (livros, calculadoras, sensores, etc.).

A integração de poderosos ambientes computacionais no ensino – no sentido de ambiente proposto por Papert – tem ainda outras facetas que estão muito longe de se generalizarem. É relativamente fácil a um professor ou a um aluno integrar ou utilizar recursos como a *Academia Khan* (https://pt.khanacademy.org) ou outros que funcionam na base da "explicação", a atividade predominante dos professores. Mas já é bastante mais complexo, quer para professores quer para alunos, utilizar *ambientes exploratórios* como o *Geogebra* ou o *Wolfram Alpha,* numa perspetiva de *construção de documentos* (que nestes ambientes funcionam um pouco como os programas construídos em *Scratch* ou *Logo*), indo para além da simples utilização de exemplos já disponíveis (quer o *Geogebra* quer o *Wolfram Alpha* têm dezenas de milhares de exemplos, respetivamente em https://www.geogebra.org/materials e em http://demonstrations.wolfram.com).

A construção de documentos nesses ambientes exploratórios exige um *grau de autonomia e, simultaneamente, de orientação* que não é comum na maioria das situações de aprendizagem. Estamos pois perante um problema chave do ensino: *como conciliar a aprendizagem que resulta diretamente do ensino pelo professor com a aprendizagem exploratória que é centrada na atividade individual e de grupo dos alunos.*

Parece claro que quer professores quer alunos têm de mudar a forma como encaram as atividades escolares. Por um lado, os professores têm de dar tempo, espaço e oportunidades para os alunos trabalharem em ambientes exploratórios e, por outro, os alunos têm de reconhecer que o seu papel tem uma forte componente de atividade exploratória, guiada por problemas, questões e desafios.

Quais serão os fatores críticos para a adoção das ideias e princípios propostos por Papert (e muitos outros autores) desde há mais de 40 anos?

Em primeiro lugar, é preciso *compreender o que é necessário saber e saber fazer de modo automático num mundo em que a tecnologia e o acesso a informação são ubíquos.* Assim como se deixou de ensinar algoritmos como o da raiz quadrada ou o uso da tábua de logaritmos para calcular produtos e divisões, também muito do que hoje se ensina – e se pretende que os alunos saibam fazer "automaticamente" – terá os dias contados. Provavelmente, certos assuntos hoje dominantes no currículo serão ensinados como "curiosidades históricas", visando um conhecimento relativamente superficial, sem necessidade de ser "mecanizado".

Em segundo lugar, é necessário integrar os ambientes computacionais na prática do dia a dia, *sem nunca perder o significado inerente à sua utilização* (por exemplo, o "sentido do número" é absolutamente essencial na utilização de calculadoras e de *software* de cálculo).

Por último, mas não por fim, será determinante o *desenvolvimento de uma cultura profissional* de professores e de autores curriculares (de programas curriculares, de manuais escolares, de páginas da Internet, etc.) que reconhecem e compreendem o papel da tecnologia na forma como se aprende, como se pensa e como se cria conhecimento no século XXI. Os princípios de Papert (*continuity principle, power principle* e *cultural resonance*) serão certamente "bons princípios" a ter em conta.

Notas

[1] Ver http://steam-notstem.com.

[2] Papert, S. (1997). *A Família em Rede.* Lisboa: Relógio D'Água Editores. (Edição original de 1996.)

Referência

Papert, S. (1980). *Mindstorms, Children, Computers, and Powerful Ideas.* NY: Basic Books.

Vitor Duarte Teodoro
FCT, Universidade NOVA de Lisboa

Seymour Papert (1928 / 2016)

Há muitos, muitos anos, os computadores não tinham quaisquer capacidades gráficas... A interação entre as pessoas e os computadores era feita utilizando comandos escritos, mais ou menos simples (ou complicados, conforme o ponto de vista...). E também não havia grande necessidade de outros tipos de interação, uma vez que havia poucos computadores e os que havia eram utilizados apenas por um número muito restrito de pessoas para fazer cálculos.

Por volta de 1960, alguns visionários como Ted Nelson, imaginaram outros usos e outras formas de interação (https://en.wikipedia.org/wiki/Project_Xanadu), que apenas 30 anos depois foram concretizados (1990), com a criação daquilo que hoje conhecemos como Internet. Um dos passos fundamentais foi a invenção de ambientes gráficos em 1980 (https://en.wikipedia.org/wiki/WIMP_(computing)).

Ainda antes da invenção dos ambientes gráficos tal como os conhecemos atualmente (com "janelas", "ícones", "botões", "ponteiro e rato", etc.), foram criados programas com possibilidades gráficas, nomeadamente linguagens de programação para crianças. Um dos pioneiros foi Seymour Papert, um "computer scientist", na altura no Laboratório de Inteligência Artificial do MIT (Cambridge, Massachusetts, USA) com formação em filosofia, matemática e psicologia, na África do Sul (onde nasceu) e no Reino Unido.

O principal objetivo do *Logo*, a linguagem de programação que Papert e colaboradores criaram (1967), era permitir às crianças "pensar computacionalmente", isto é, analisar situações problemáticas utilizando ideias e modelos matemáticos e implementar computacionalmente e testar as respetivas soluções. Uma das principais características das diversas variantes do *Logo* era a utilização de uma "tartaruga gráfica" que obedecia a comandos da linguagem de programação, permitindo assim a visualização do resultado dos programas em *Logo*. Esses programas podiam utilizar recursão, listas, funções, etc. (https://en.wikipedia.org/wiki/Logo_(programming_language)). O *Logo* deu origem a um "movimento educacional" (livros, congressos, formações, introdução curricular, etc.) que atingiu o auge entre 1985 e 1995, quase desaparecendo após a generalização da Internet. Mas as sementes da mudança mantiveram-se ativas, graças a Papert e a líderes educacionais como Mitchel Resnick (https://en.wikipedia.org/wiki/Mitchel_Resnick) que, colaborando com educadores, artistas e ativistas cívicos, com o apoio da Fundação LEGO e de outros financiadores, como a Google, nos conduziram ao reconhecimento da importância do "pensamento computacional" na educação integral de crianças e jovens.

Seymour Papert (circa 1985) com um exemplo de uma "tartaruga" que pode executar programas *Logo* sobre uma folha de papel, construindo imagens.
(Imagem: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Seymour_Papert.jpg).

A tecnologia nos currículos de Espanha, Finlândia, Holanda e Reino Unido

Estando este número da revista dedicado à temática da tecnologia e fazendo nós parte da Europa, pareceu-nos pertinente saber como o uso da tecnologia surge nos currículos de outros países europeus. Ocorreu-nos saber o que dizem ou fazem os nossos vizinhos do lado, a Espanha. A Finlândia também nos pareceu ser muito pertinente, tendo em conta os resultados nos testes internacionais e por ser muitas vezes apontado como exemplo. A escolha da Holanda deveu-se à sua tradição na abordagem através da Matemática Realista. Por fim, pensámos no Reino Unido, devido à influência que a língua inglesa tem no mundo, nomeadamente como língua universal também na utilização da tecnologia. Lançámos o desafio às colegas Anabela Santos, Carmen León-Mantero, Nádia Ferreira e Sónia Palha, que vivem nestes países, ou que tiveram um contacto próximo com os mesmos, para nos darem a conhecer como os currículos do Reino Unido, de Espanha, da Finlândia e da Holanda, respetivamente, integram a utilização da tecnologia.

A redação da Educação e Matemática

O uso da tecnologia no currículo espanhol

A Espanha encontra-se em pleno processo de implementação da "Ley Orgánica 8/2013, Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa" (LOMCE). Esta constitui a proposta de reforma da LOE, Ley Orgánica 2/2006 (LOE) e foi implementada nos anos escolares 2014-2015 e 2015-2016 nos seis cursos de Educação Primária, nos quatro de Educação Secundária Obrigatória (ESO), no primeiro curso de Bacharelato e na Formação Profissional.

A LOE (2006) defendia a melhoria da qualidade dos sistemas de educação e, apostava em

> (...) melhorar a formação de professores, desenvolver as competências necessárias para a sociedade do conhecimento, garantir o acesso de todos às tecnologias da informação e comunicação, aumentar as matrículas em estudos científicos, técnicos e artísticos e aproveitar ao máximo os recursos disponíveis, aumentando o investimento em recursos humanos (LOE, 2006, p. 17160).

Por outro lado, as tecnologias da informação e comunicação (TIC) estavam entre os temas a serem trabalhados em todas as áreas do conhecimento. A Tabela 1 mostra os objetivos a serem alcançados em cada uma das etapas escolares no que diz respeito às TIC.

Promover experiências de iniciação precoce em tecnologias da informação e comunicação (LOE, 2006, p. 17167).	Educação Infantil
Iniciar-se na utilização, para a aprendizagem, das tecnologias da informação e comunicação desenvolvendo um espírito crítico perante as mensagens que recebem e elaboram (LOE, 2006, p. 17168).	Educação Primária
Desenvolver habilidades básicas na utilização das fontes de informação para, com sentido crítico, adquirir novos conhecimentos. Adquirir uma preparação básica no campo das tecnologias, especialmente as da informação e comunicação (LOE, 2006, p. 17169).	E.S.O.
Utilizar de forma confiável e responsável as tecnologias da informação e comunicação (LOE, 2006, p. 17172).	Bacharelato

Tabela 1. Objetivos das Aprendizagens referentes às TIC. Fonte: LOE (2006). Elaboração própria.

Vários relatórios, como o Plano Avanza (2007) analisaram a influência do contexto familiar, os recursos e os processos escolares e os processos de aula, na implementação das TIC e o seu impacto nos alunos. As conclusões mais relevantes indicaram que os alunos tinham acesso a computadores e à Internet a partir de uma idade precoce, com uma alta frequência de uso em casa; que as famílias promoviam atitudes positivas nos filhos na utilização das TIC, por considerá-lo um recurso de interesse; que os Centros investiram na melhoria das características dos computadores e no acesso à Internet nas salas de aula, ao mesmo tempo que as equipas diretivas dos Centros Escolares sentiam uma grande satisfação com os avanços realizados relativos às TIC.

No entanto, em termos de melhoria da qualidade da educação, a disponibilidade de recursos tecnológicos nas escolas não envolveu mudanças significativas, nem na planificação ao nível do Centro, nem na prática dos professores. Embora alguns professores tenham realizado pequenas inovações educacionais, as TIC foram utilizadas como recursos de apoio didático e não, como uma ferramenta que permitia novos ambientes para aprender, comunicar ou trabalhar (Area de 2010).

Portanto, na LOMCE (2013) é dada uma ênfase especial ao trabalhar no âmbito das TIC, dado que "A aprendizagem personalizada e a sua universalização como grandes desafios da transformação educativa, assim como a satisfação das aprendizagens em competências não cognitivas, a aquisição de atitudes e o aprender fazendo requerem um uso intensivo das tecnologias"(p. 97865).

De acordo com esta nova legislação, a incorporação das TIC no sistema educativo faz com que o aluno seja protagonista da sua aprendizagem, personalizando e adaptando as suas necessidades ao seu ritmo. Por outro lado, destaca-se como ferramenta fundamental para a formação contínua de professores cujo trabalho será o de orientar os alunos na construção do seu próprio conhecimento.

É uma tarefa árdua enumerar os benefícios que as TIC têm trazido ao nosso sistema educativo em todas as áreas do conhecimento. Além disso, é inegável que tenham fornecido, tanto a alunos como professores, numerosos materiais didáticos e uma grande quantidade de informação. Diversos estudos mostram evidências da melhor compreensão dos conteúdos das disciplinas, no aumento da motivação e participação dos estudantes, no desenvolvimento das competências ou até mesmo na sua capacidade de promover a inclusão social.

Referências

Area, M. (2010). EL proceso de integración y uso pedagógico de las TIC en los centros educativos. Un estudio de casos. *Revista de educación*, 352, 77-97.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (2006). BOE, 106, 17158-17207.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (2013). BOE, 295, 97858-97921.

Plan Avanza (2007). Las tecnologías de la información y comunicación en la educación. Informe sobre la implantación y el uso de las TIC en los centros docentes de educación primaria y secundaria (curso 2005- 2006). Recuperado el 10 de julio de 2016, de www.oei.es/tic/TICCD.pdf

Carmen León-Mantero
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Córdoba

As TIC no currículo e no ensino da Matemática da Finlândia

Na Finlândia o currículo para o ensino básico elenca capacidades gerais a desenvolver pelos alunos e uma delas é o *know-how* nas tecnologias de informação e comunicação, TIC. No documento explicita-se que esta capacidade é simultaneamente uma capacidade cívica, importante em si mesma, e parte da "multi-literacia" a desenvolver nos alunos. Ou seja, é um objetivo e um recurso *a* e *para* aprender. Deste modo, no currículo nacional, considera-se importante um planeamento da utilização das TIC em todos os níveis de ensino, nas diferentes disciplinas e de modo transversal às disciplinas ou noutros trabalhos escolares. Pretende-se que os alunos, utilizando as tecnologias, sejam motivados para a aprendizagem, procurem soluções, desenvolvam percursos de aprendizagem e a criatividade neste processo e que, simultaneamente, reconheçam as suas potencialidades e limitações, e as usem de forma informada e responsável. Como futuros cidadãos, os alunos finlandeses devem ser competentes nas tecnologias para estudar e trabalhar numa sociedade que é global, perspectivando riscos e oportunidades. No documento acrescenta-se que devem aprender a analisar criteriosamente a informação partindo de uma perspetiva de desenvolvimento sustentável e agindo como consumidores responsáveis. Analisando o documento como um todo percebemos que o termo tecnologias de informação e comunicação inclui os recursos tecnológicos (programas e aplicativos específicos) e como tal no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática o termo tecnologias será o mais adequado.

A comunicação é uma das dimensões valorizadas pelo currículo finlandês, onde é importante o trabalho colaborativo, a discussão e construção de conhecimento com os outros. As tecnologias assumem o papel de potenciador da interação mas também desafiam novas formas de comunicar o conhecimento. Neste sentido, é objetivo que os alunos, nos diferentes espaços escolares, tornem as suas ideias visíveis de diferentes formas, utilizem diferentes aplicações e recursos. Especificamente na secção da Matemática (2014, pp. 234-239), encontramos como operacionalizar este objetivo: "O professor incentiva os alunos a apresentar as suas conclusões e soluções, oralmente e por escrito, recorrendo a materiais concretos, desenhos e/ou incluindo as tecnologias de informação e comunicação". É recomendado aos professores que incentivem o uso das tecnologias de modo que "os alunos representem as suas ideias e que as usem como ferramentas de apoio" e que nos momentos de "avaliação retirem proveito dos instrumentos, incluindo as TIC".

No entanto, na Finlândia, não se esgotam no currículo nacional as intenções curriculares. Partindo do currículo nacional, as comunidades constituem um currículo local mais próximo da realidade de alunos e professores existindo espaço para adequações metodológicas. Assim, segundo Enrique, professor do ensino básico e secundário na Finlândia, a utilização das tecnologias, nas salas de aula da Finlândia, tem sido cada vez mais comum e as calculadoras e os programas de geometria dinâmica fazem parte da realidade finlandesa. Com os novos currículos pretendem ir mais longe e as alterações dar-se-ão a três níveis: no aumento de equipamento, na inclusão de conteúdos que implicam o recurso às tecnologias e nas metodologias de ensino. Relativamente ao aumento dos equipamentos, muitas escolas do ensino básico estão a adquirir *Tablets* e computadores e os alunos do secundário para além de utilizarem as calculadoras gráficas têm, como material escolar essencial, que adquirir um computador pessoal munido com várias aplicações para as várias disciplinas. O professor referiu que, neste momento discutem-se recursos como o *Scratch* e o *Mathematica*. No que respeita aos conteúdos curriculares foram introduzidos tópicos relativos à Lógica e Programação a trabalhar desde o 1.º ano de escolaridade tal como pudemos verificar. Note-se que, como já foi referido, os professores são encorajados a recorrer às tecnologias para o processo de ensino e de aprendizagem incluindo o seu recurso nos processos de avaliação. Por fim, e reforçando as orientações curriculares, os alunos que se inscreverem, este ano letivo, no exame de 12.º ano terão que o resolver no computador.

Em conclusão, na escola finlandesa já se tinham dado passos para a inclusão das tecnologias no ensino da Matemática, mas com as novas orientações curriculares e com outras ações mais pontuais caminha-se para um futuro onde pensar e comunicar Matemática vai ser diferente como consequência de uma maior integração das tecnologias no processo de aprendizagem.

Nota

As citações são tradução livre da autora. Pode encontrar o currículo nacional finlandês em:
http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

NÁDIA FERREIRA
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Uso de tecnologia no currículo Holandês

Na Holanda o ensino primário é comum a todos os alunos (6-12 anos). No final do ensino primário os alunos são aconselhados a seguir uma de duas trajetórias: vocacional (VMBO, 12-16 anos) ou básico-secundário. O ensino básico (12-15) e o ensino secundário (15-17 ou 15-18) conhecem por sua vez duas vertentes: estudos técnicos (HAVO) ou estudos de preparação para a universidade (VWO). A Matemática é obrigatória durante toda a escolaridade. No ensino secundário os alunos podem escolher entre a Matemática A (análise aplicada, estatística e probabilidades), Matemática B (álgebra, análise, geometria e raciocínio matemático) ou Matemática C (álgebra, funções, lógica, geometria e estatística). Esta escolha está ligada à área de estudos seguida pelo aluno. Em algumas escolas é possível, para além da Matemática obrigatória escolher Matemática D. Esta disciplina é facultativa e é um aprofundamento dos vários tópicos matemáticos.

Os objetivos curriculares são definidos pelo Instituto Nacional para o Desenvolvimento Curricular (SLO) mas não o caminho que leva a cumpri-los. As escolas na Holanda são autónomas e têm liberdade para decidir a forma como organizam o currículo e o tipo de tecnologias e materiais a utilizar na sala de aula. No ensino secundário há exames nacionais obrigatórios. A especificação dos objetivos e conteúdo dos exames é estabelecido pela Comissão de Testes e Exames (CvTE, College voor Toetsen en Examens). O único instrumento tecnológico obrigatório é a calculadora básica (no caso do ensino básico e vocacional) e gráfica (no ensino secundário). A calculadora gráfica é o único tipo de tecnologia permitido no exame nacional do ensino secundário. No caso do ensino vocacional é possível utilizar o computador (como meio de escrita) no exame.

O uso das tecnologias tem vindo a aumentar nos últimos anos, assim como o desenvolvimento de materiais de aprendizagem digitais. Na Holanda existem três manuais escolares principais, sendo que as escolas adotam um deles ou podem optar por não adotar manual. Todos estes manuais têm (ou estão ainda a desenvolver) uma versão digital. Tipicamente os professores e os alunos são utilizadores assíduos do manual adotado e a escolha do tipo de tecnologia usada pelo professor na prática letiva está geralmente relacionada com o manual utilizado pela escola.

Em 2015 entraram em vigor novos programas para a disciplina de Matemática no ensino secundário. Uma das alterações relativamente ao programa anterior é uma maior integração da tecnologia, que se reflete através da explicitação quanto à sua utilização nos objetivos curriculares. No ensino primário, básico e vocacional os objetivos para os alunos focam-se na aprendizagem da utilização da tecnologia e na compreensão da sua utilidade. No ensino secundário, os objetivos focam-se no desenvolvimento de capacidades matemáticas (aluno aprende a utilizar as tecnologias adequadas para consultar informação matemática para explorar situações matemáticas, no raciocínio matemático e na realização de cálculos matemáticos) e na aprendizagem de tópicos especificos. Na Estatística (Matemática A e C) o aluno aprende a utilizar *software* (Excel, SPSS, VU-Stat) nas diversas fases do ciclo empírico (definição do problema, análise do projeto, visualização de dados, etc...). No estudo de Funções, gráficos, equações e inequações (Matemática A) e no Cálculo Integral (Matemática B) o aluno aprende a utilizar métodos numéricos ou gráficos para resolver problemas com a calculadora gráfica, *applets ou software* (*VU-Grafiek*). Na Geometria (Matemática B) o aluno aprende a investigar propriedades de objetos geométricos e é envolvido na demonstração Matemática no contexto de utilização de *software* de geometria dinâmica como a *Geogebra* ou com a *TI-Nspire*. No ensino vocacional o aluno aprende a utilizar as tecnologias estrategicamente e para desenvolver o seu próprio conhecimento e competências académicas. Entre elas: a habilidade de cálculo mental, aplicar as regras matemáticas, medir e aplicar recursos, efetuar operações, frações, percentagens, calcular potências e raízes.

Concluindo, as tecnologias estão integradas em todos os níveis de escolaridade. No ensino primário, básico e vocacional, o foco é a aprendizagem da sua utilização e a compreensão da sua utilidade. No ensino secundário as tecnologias surgem referidas no currículo para a aprendizagem de tópicos específicos como a Análise, Estatística e a Geometria.

Referências

https://www.hetcvte.nl/ (website do Colégio de Testes e Exames onde é possivel encontrar informação sobre os exames nacionais e o seu conteúdo)

http://leerplaninbeeld.slo.nl/ (website do Instituto Nacional para o Desenvolvimento Curricular onde é possível encontrar os objetivos curriculares para o ensino primário, vocacional e secundário)

http://www.oecd.org/edu/EDUCATION%20POLICY%20OUTLOOK_NETHERLANDS_EN%20.pdf (o esquema da organização do ensino na Holanda é apresentado no anexo A)

Sónia Palha

Faculdade de Educação da Universidade de Ciências Aplicadas de Amsterdão

Uso de tecnologias no ensino da Matemática no Reino Unido

O *Office for Standards in Education, Children's Services and Skills* (*Ofsted*) recomenda que o ensino da Matemática deva ser estimulante, tendo em conta a diversidade de tecnologias ao dispor dos jovens e os seus interesses.

Em 2003 o governo desenvolveu um programa de formação de professores em Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). No entanto, relatórios de inspeção indicam uma enorme diversidade na utilização e na sofisticação pedagógica no uso de tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática.

A forma como o currículo de Matemática é especificado permite às escolas um elevado grau de autonomia em relação às abordagens tomadas em sala de aula. Esta autonomia permitiu a algumas escolas inovar, enquanto outras apresentam uma abordagem de ensino exclusivamente focada nos resultados dos exames.

O relatório "*Mathematics: made to measure*"[1] publicado em 2012 pelo *Ofsted* (Ofsted, 2016) revela que, apesar do uso de tecnologia no ensino da Matemática estar presente no currículo nacional desde 1988, na generalidade esse uso é subutilizado sendo predominantemente centrado no professor com recurso a apresentações em *PowerPoint* ou quadros interativos. O aluno apenas utiliza ferramentas digitais na construção de materiais de revisão e na realização de trabalhos de casa.

Este mesmo relatório refere que a maioria dos alunos tem poucas oportunidades de usar e aplicar a Matemática, para fazer conexões entre diferentes áreas científicas, para estender o seu raciocínio ou para usar TIC e que raramente são utilizadas TIC em modelação matemática.

É explícito no currículo (Education, 2016[2]) que as calculadoras não devem ser usadas como um substituto de processos aritméticos escritos e mentais, devendo ser introduzidas apenas no final do ensino primário (6.º ano) para apoiar a compreensão de conceitos e exploração de problemas numéricos mais complexos, quando a aritmética escrita e mental já está seguramente adquirida. A utilização de calculadoras gráficas não é permitida no exame nacional, não sendo o seu uso comum na sala de aula.

Nas orientações curriculares a nível do ensino primário são escassas as referências ao uso de TIC. Nas notas e orientações para o 2.º ano é referido que os alunos devem usar o conceito de ângulo e linguagem matemática apropriada para compreensão do ângulo giro, devendo aplicar rotações utilizando contextos práticos (por exemplo programar robôs utilizando instruções dadas em ângulos retos). Para o 5.º ano as orientações curriculares referem que os alunos devem usar o termo diagonal e fazer conjeturas sobre os ângulos formados pelas diagonais e lados e outras propriedades dos quadriláteros, podendo ser utilizadas ferramentas de geometria dinâmica.

A nível do ensino secundário há muitas referências ao uso da tecnologia para apoiar a aprendizagem da Matemática. A nível de conceitos chave: selecionar ferramentas e métodos matemáticos apropriados, incluindo TIC. A nível de processos chave: comparar e avaliar representações e escolher entre elas; visualizar e operar com imagens dinâmicas; explorar os efeitos da variação de valores e investigar invariância e covariância; esboçar diagramas matemáticos, gráficos e construções em papel e em monitor; calcular com exatidão selecionando métodos mentais ou ferramentas tecnológicas adequadas; utilizar corretamente notação, incluindo sintaxe correta quando do uso de TIC; analisar dados e encontrar padrões e exceções e utilizar diferentes formas de comunicar resultados a diferentes audiências. A nível de oportunidades curriculares: familiarizar-se com uma gama de recursos, incluindo TIC, selecionando o mais adequado a cada situação.

No programa de estudo para a compreensão Matemática é referido que os alunos devem, inicialmente, usar calculadoras para explorar padrões numéricos e, em fases posteriores, usar tecnologias para representar padrões de números na forma de gráficos, usando fórmulas simples; usar folhas de cálculo para modelar situações financeiras; usar calculadoras eficientemente como uma de várias estratégias para o cálculo; utilizar TIC para gerar instruções para o movimento e para gerar e explorar padrões geométricos e problemas. É também referido que numa fase inicial os alunos devem usar TIC para armazenar, organizar e analisar dados recolhidos com um objetivo específico, para posteriormente explorar possíveis relações e interpretar resultados.

Nas Estratégias Nacionais foram identificadas seis grandes oportunidades para a utilização de TIC no ensino aprendizagem da Matemática: aprender com o *feedback*; observação de padrões; identificação de conexões; exploração de dados; ensinar o computador; e desenvolvimento de imagens visuais (Pope, 2013)[3].

A questão de como garantir um correto uso de tecnologia nas aulas de Matemática continua a ser um desafio. Atualmente o Governo aconselhou o utilização do método do *Singapore Maths* nas escolas, trata-se de um método de ensino e aprendizagem baseado nas teorias de aprendizagem de Bruner (Concreto, Pictorial e Abstrato) e focalizado na resolução de problemas. Quiçá uma nova oportunidade para a utilização de TIC nas salas de aulas do Reino Unido.

Notas

[1] Ofsted. (November de 2016). ICT in schools 2008–11 An evaluation of information and communication technology education in schools in England 2008–11. Obtido de https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/181223/110134.pdf

[2] Education, D. f. (November de 2016). Statutory guidance National curriculum in England: mathematics programmes of study. Obtido de https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study

[3] Pope, S. (2013). Technology in Mathematics Education. Journal of the Association of Teachers of Mathematics, 6 - 8.

Anabela Santos
Thames Christian College

Utilização do *Scratch* no Ensino e na Aprendizagem da Matemática: Uma experiência de formação

Raquel Santos
Neusa Branco

INTRODUÇÃO

Vários países europeus, incluindo Portugal, estão a integrar a programação nas suas atividades curriculares ou como complemento às atividades escolares (Balanskat & Engelhardt, 2014). A ideia geral é que os alunos aprendam a programar, e também que aprendam programando. Balanskat e Engelhardt (2014) identificam a preparação dos professores para as mudanças curriculares como uma área de investimento essencial para o sucesso efetivo dessas mudanças e dos resultados da aprendizagem. Desenvolver formação no ambiente de programação *Scratch* pode mudar o paradigma de como a tecnologia é utilizada em sala de aula e desenvolver nos alunos o pensamento computacional e a criatividade.

A formação de professores para a utilização do *Scratch* deve envolvê-los ativamente na sua experimentação e na realização de tarefas de natureza diversificada para a sua exploração. Assim, neste artigo apresentamos um relato de uma experiência de utilização do *Scratch*, realizada na formação contínua de professores dos 1.º e 2.º ciclos, sem experiência ou com experiência pontual neste programa. A proposta envolve tarefas de diferente natureza que visam a introdução aos comandos do programa e a abordagem a conceitos de geometria, com vista à discussão da utilização do *Scratch* com alunos para a promoção da aprendizagem matemática.

SCRATCH E O ENSINO-APRENDIZAGEM

O *Scratch* é um ambiente de programação que permite às crianças programar e compartilhar histórias interativas, jogos e animações. Segundo os seus criadores (Resnick et al., 2009), este ambiente de programação tem as características fundamentais que as linguagens de programação devem possuir: um chão baixo, facilitando a iniciação e podendo ser utilizada desde o pré-escolar; um teto alto, tornando os projetos progressivamente mais complexos, motivando o seu uso até por adultos; e paredes largas, permitindo diferentes tipos de projetos, independentemente do interesse e contexto. Além disso, pretende ser mais prático e interativo, incentivando à experimentação; ter mais significado, incitando à diversidade e personalização; e ser social, devido à associação com o *website* do *Scratch* que incorpora uma comunidade (Resnick et al, 2009). É uma ferramenta que utiliza blocos de comandos, que se unem como legos, não incorporando a complexidade existente numa linguagem de programação, e que permite a integração de gráficos, imagens, fotos, música e som, fomentando um ambiente de aprendizagem motivante.

Segundo Kordaki (2012), existem 11 tipos de tarefas com o *Scratch* que podem ser realizadas por alunos: a) Atividades criativas livres; b) Resolução de um problema específico; c) Tarefas com soluções múltiplas; d) Experimentação dentro de um projeto; e) Modificação de um projeto; f) Trabalho com um projeto correto, mas com parte do código incompleto; g) Trabalho com um projeto correto e uma mistura do seu código; h) Trabalho com um projeto com parte do código incorreto; i) Trabalho com um projeto de modo a prever o que acontece; j) Atividades de caixa negra, em que se vê o que acontece e se cria um projeto que replique o observado; e k) Atividades de aprendizagem colaborativa.

A utilização deste programa em aula tem já fomentado investigações sobre as implicações na aprendizagem dos alunos. Estas evidenciam, nomeadamente, que o *Scratch* desenvolve nos alunos a capacidade de resolução de problemas (Calao, Moreno-León, Correa & Robles, 2015), a capacidade de modelação matemática (Calao et al., 2015), o raciocínio matemático (Calao et al., 2015) e o conhecimento matemático, como conceitos de geometria e medida (coordenadas, ângulo e comprimento) (Calder, 2010). O programa fomenta ainda outras capacidades essenciais, como pensamento criativo, comunicação efetiva, análise crítica, experimentação sistemática, *design* iterativo, aprendizagem contínua (Monroy-Hernández & Resnick, 2008) e empreendedorismo (Tinoca, 2014). Os erros que ocorrem na programação parecem ter efeito positivo nos alunos, uma vez que desencadeiam mais experimentação para atingir o movimento desejado (Calder, 2010).

ABORDAGEM DE INICIAÇÃO AO *SCRATCH*

Para uma primeira abordagem ao ambiente de programação propusemos duas tarefas. A Tarefa 1 apresenta um projeto já construído (figura 1), fomentando o contacto com diferentes áreas do programa e a correspondência entre as ações do ator e a sequência de comandos dada.

Tarefa 1 – Introdução.

Análise de um projeto já construído no *Scratch*: "1.Intro". Analise o que o projeto leva o *Scratch* a fazer, tentando interpretar cada um dos comandos utilizados.

Nesta tarefa, os formandos tomaram conhecimento das diferentes áreas do programa e discutiram o que cada comando significa e a ordem em que aparece. Os formandos identificaram o desenho de segmentos de reta, a alteração da cor e o aumento gradual da espessura desses segmentos, bem como a mudança de direção. Reconheceram também o papel do comando que faz surgir os segmentos, mas destacaram o facto de poder ser difícil para os alunos identificar todos os segmentos pelas limitações que o palco pode introduzir, uma vez que durante o desenho de segmentos, se o ator atingir o limite do palco, é desenhado um novo segmento com outra direção. As alterações de cor e de espessura foram apontadas como positivas numa implementação com alunos pois ajudam a evidenciar os segmentos, muito embora não tenham significado matemático. Contudo, os professores apontaram a necessidade de fazer algumas alterações, de acordo com o ano de escolaridade, para melhorar a análise a fazer pelos alunos, por exemplo, mudando o número de repetições, o nú-

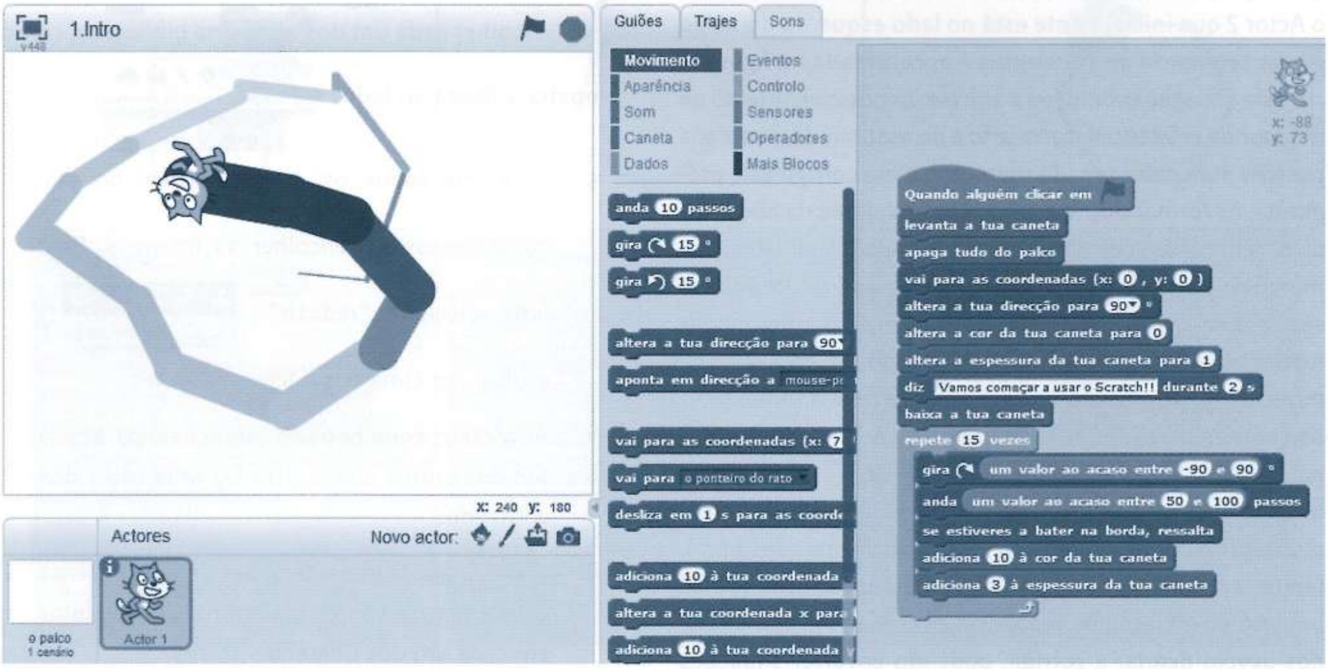


Figura 1. Projeto "1.Intro"

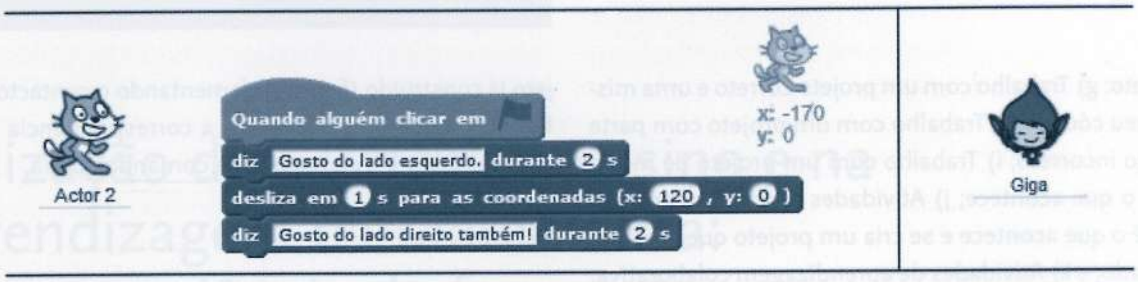


Figura 2. Projeto "2.Erro"

mero de passos, ou o valor a adicionar à cor. Os professores assinalaram ainda a referência às coordenadas na sequência de comandos como mote para uma discussão com alunos sobre o referencial cartesiano, com origem no centro do palco, e as coordenadas do ponto referente à posição do ator.

A Tarefa 2 propõe a análise de projetos já construídos, desta vez de modo a encontrar erros ou omissões na sequência de comandos e a corrigi-los, sendo aqui apresentado o Erro 2.

Tarefa 2 - À descoberta do erro (Erro 2

Análise de um projeto já construído no *Scratch* de modo a identificar o erro e a corrigi-lo. "2.Erro". Quando se clica na bandeira verde, o Ator 2 deve começar do lado esquerdo do palco (à esquerda do Giga), dizer algo sobre estar nesse lado, deslizar para o lado direito do palco e dizer algo sobre estar nesse lado (à direita do Giga). Funciona da primeira vez que se corre o programa ao clicar na bandeira verde, mas não nas vezes seguintes.

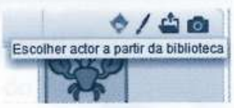
Este projeto tem dois atores, o Giga que não tem qualquer ação e se encontra posicionado no centro do palco e o Actor 2 que inicialmente está no lado esquerdo do palco e cuja sequência de comandos é apresentada na figura 2.

Esta situação promoveu a análise do posicionamento de um ator no referencial cartesiano e do assumir de uma dada posição num determinado momento. Para corrigir este programa, os formandos identificaram os valores da abcissa e da ordenada que permitem ao Actor 2 posicionar-se inicialmente no lado esquerdo do palco, recorrendo a uma abcissa negativa. Os formandos apresentaram e discutiram duas maneiras de solucionar o erro, colocando um comando de movimento para essas coordenadas no final da sequência de comandos (para que o ator volte à posição inicial no final da sequência) ou no início (para colocar o ator sempre do lado esquerdo no início de cada simulação). Quanto à discussão sobre o trabalho em aula, os formandos apontaram a pertinência de tarefas desta natureza, em que há um erro ou omissão na sequência de comandos que os alunos devem detetar e corrigir, podendo envolver situações com diferentes graus de complexidade e tipos de comando.

SCRATCH E A CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES

A Tarefa 3 propõe a utilização do *Scratch* para trabalhar Geometria, no que respeita às propriedades de polígonos regulares. Apresenta uma sequência de comandos de um ator, o Caranguejo, para a construção de um triângulo equilátero (figura 3) e depois da sua análise sugere-se a construção de sequências de comandos para outros atores para a construção de outros polígonos regulares.

Tarefa 3 - Construção de polígonos regulares.

1. Abrir o documento *Scratch* "3.Poligono";
2. Analisar os comandos do caranguejo de modo a perceber como este constrói um triângulo equilátero;
3. Incluir novos atores de modo a que estes desenhem novos polígonos (). Para isso, escolher cada um dos atores na biblioteca, como mostra a figura ao lado. 
4. Para que todos os atores caibam no palco, é necessário encolher as imagens. Para isso, selecionar "reduzir" () e clicar em cima dos diferentes atores.
5. Arrastar os comandos do caranguejo para cada um dos outros atores. Isto faz uma cópia dos comandos.
6. Analisar agora que alterações são necessárias para a construção de cada um dos polígonos em cada um dos diferentes atores:

a.  Carocha (polígono regular com 4 lados);

b.  Peixe (polígono regular com 5 lados);

c.  Hipopótamo (polígono regular com 6 lados).

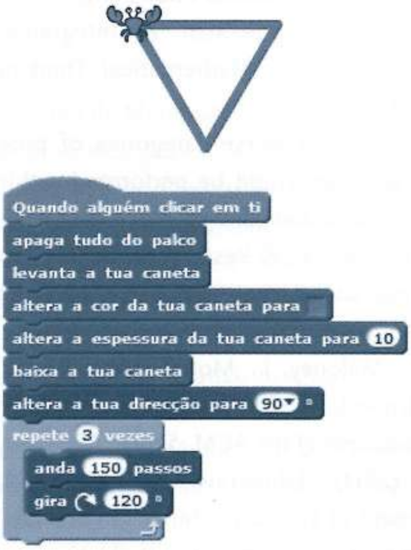


Figura 3. Construção de um triângulo equilátero

Nesta tarefa os formandos identificaram os diferentes tipos de comandos utilizados na construção do triângulo. Referiram que, ao implementar esta tarefa em aula, pode ser discutido o conceito de polígono regular e a classificação de cada polígono. Os professores fizeram alterações nos valores dados para identificarem a sua influência na construção obtida, nomeadamente no número de passos colocado em cada ciclo de repetição verificando que este determina o comprimento do lado do polígono. Da discussão na sessão emergiram dois aspetos a analisar em aula com os alunos: i) o número de lados de cada polígono que influencia o número de repetições a indicar no comando, e ii) a amplitude do ângulo da rotação a realizar pelo ator de modo a se obter o polígono regular pretendido. Em relação ao primeiro aspeto, os formandos destacaram que os alunos se podem esquecer de indicar no mínimo tantas repetições quanto o número de lados do polígono de modo a obter uma linha poligonal fechada. Além disso, alguns formandos encontraram como obstáculo a posição inicial do ator. Se este estiver próximo dos limites do palco, podem não obter uma linha poligonal fechada devido à falta de espaço para respeitar o comprimento dos lados indicado. O segundo aspeto envolveu uma discussão mais aprofundada sobre as propriedades dos polígonos, nomeadamente sobre a análise da amplitude do ângulo da rotação que é realizada no triângulo equilátero, 120°, que corresponde à amplitude do ângulo externo. Assim, analisou-se a possibilidade de chegar a esta amplitude do ângulo externo do triângulo equilátero a partir da amplitude do ângulo interno $\left(\frac{180°}{3}=60°\right)$, verificando que estes são suplementares $180° - 60° = 120°$, ou pela soma das amplitudes dos ângulos externos $\left(\frac{360°}{3}=120°\right)$. Também para os restantes polígonos (figuras 4, 5 e 6), os

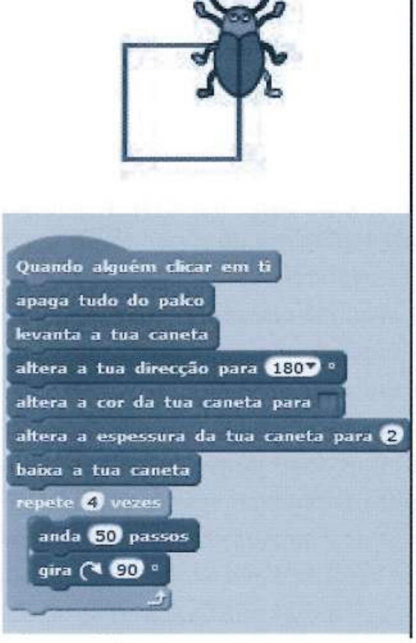


Figura 4. Construção de um quadrado.

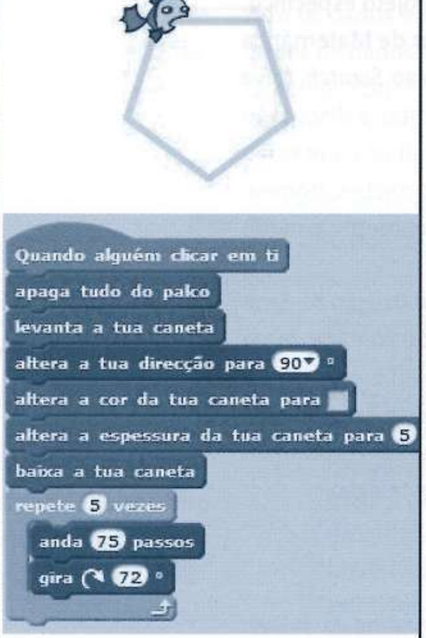


Figura 5. Construção de um pentágono regular.

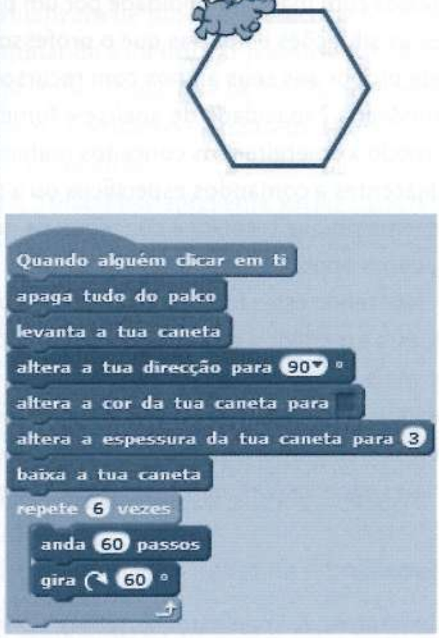


Figura 6. Construção de um hexágono regular.

formandos identificaram que o ator realiza a rotação de centro no vértice e de ângulo de amplitude igual ao ângulo externo do polígono. Sobre a sua implementação em aula, os formandos referem que esta tarefa constitui uma oportunidade para realizar a generalização da amplitude de um ângulo externo de um qualquer polígono regular.

Durante a sessão, os formandos mostraram-se bastante motivados, fazendo por vezes muito mais do que era pedido, com a curiosidade de ir experimentando diferentes comandos. Refletiram também sobre a possível implementação com alunos, notando que o programa pode fazer toda a diferença, até para alunos que manifestam mais dificuldade em Matemática, uma vez que incita à experimentação, mesmo quando se erra. Foi também apontada a vantagem de ser uma ferramenta atrativa, utilizar imagens apelativas e permitir vários tipos de projetos, mais simples ou mais complexos, envolvendo, neste caso, ideias matemáticas importantes (sistemas de coordenadas, polígonos regulares, ângulos, grandezas e medidas).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta experiência de formação os professores envolveram-se com muita motivação e entusiasmo na realização destas tarefas. Experimentaram e identificaram o papel da criação e análise de projetos no *Scratch* com vista ao desenvolvimento de capacidades transversais e de conhecimentos matemáticos, alguns subjacentes aos vários projetos e outros desenvolvidos com mais profundidade por um projeto específico. Nestas situações e noutras que o professor de Matemática pode propor aos seus alunos com recurso ao *Scratch*, deve promover a capacidade de análise e fomentar a discussão de modo a emergirem os conceitos matemáticos que estão subjacentes a comandos específicos ou a projetos, nomeadamente no que respeita a conceitos de geometria e medida, como aponta Calder (2010).

Não tendo estes formandos prática na utilização do *Scratch*, esta experiência evidenciou a sua grande vontade de saber mais sobre tecnologia e sobre a sua utilização para a aprendizagem dos alunos, devendo por isso a formação de professores proporcionar-lhes desafios que correspondam às suas expectativas, como se verificou neste caso.

Referências

Balanskat, A., & Engelhardt, K. (2014). *Computing our future: Computer programming and coding - Priorities, school curricula and initiatives across Europe*. Bruxelas: European Schoolnet.

Calao, L., Moreno-León, J., Correa, H., & Robles, G. (2015). Developing Mathematical Thinking with Scratch. *Design for Teaching and Learning in a Networked World* (pp. 17--27). Springer International Publishing.

Calder, N. (2010). Using Scratch - An Integrated Problem-solving Approach to Mathematical Thinking. *APMC, 15*(4), 9-14.

Kordaki, M. (2012). Diverse categories of programming learning activities could be performed within Scratch. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 46*, 1162-1166.

Monroy-Hernández, A., & Resnick, M. (2008). Empowering kids to create and share programmable media. *Interactions*, 50-53.

Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., ... Kafai, Y. (2009). *Communications of the ACM, 52*(11), 60-67.

Tinoca, L. (2014). EduScratch: a case study on the development of key competences in Europe. *European Journal of Curriculum Studies, 1*(1), 23-32.

Raquel Santos
Escola Superior de Educação de Santarém

Neusa Branco
Escola Superior de Educação de Santarém
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Raciocínio estatístico com recurso ao programa *TinkerPlots*

Marisa Gregório

Como professora de Matemática do 2.° Ciclo questiono-me regularmente sobre o papel e a conexão entre a Matemática curricular, a que vem descrita nos documentos oficiais e a dita Literacia Matemática, aquela que entendo estar ao dispor da sociedade e que permite ao cidadão enfrentar e interpretar o dia a dia com relativa segurança e eficácia. Vivendo nós cada vez mais numa sociedade tecnológica, é no mínimo incoerente que o atual programa de Matemática para o ensino básico não contenha uma única vez a palavra *tecnologia*. Também não deixa de ser curioso que a palavra *investigações* seja omissa neste documento.

É indiscutível o potencial da tecnologia em todos os domínios da matemática, contudo pretendo destacar neste artigo a sua importância no domínio da organização e tratamento de dados. O computador pode ser um instrumento fundamental no trabalho a realizar neste tema, uma vez que permite que os alunos se concentrem na análise de dados e na interpretação de resultados, oferecendo vastas possibilidades de organizar e representar dados em diferentes representações.

Parece-me ser possível afirmar que, ao nível do ensino básico, é feito algum trabalho com os alunos no Excel, mas, e não querendo menosprezar esta ferramenta, parece-me que esse trabalho se resume, na maioria das vezes, a representações *standard* dos dados. O aluno elabora uma tabela a partir da qual escolhe uma representação, normalmente um gráfico de barras ou um gráfico circular.

Existem, porém, outras ferramentas úteis para trabalhar na organização e tratamento de dados. O *TinkerPlots™ Dynamic Data Exploration*, por exemplo, é um programa de análise de dados que proporciona um ambiente de aprendizagem propício ao desenvolvimento do raciocínio estatístico inferencial (Ben-Zvi, 2007). O *Tinkerplots* é um ambiente de aprendizagem interativo e dinâmico que permite construir e avaliar criticamente representações visuais construídas pelos alunos e tem o seu foco principal no estabelecimento de relações entre variáveis. A análise e interpretação de dados através das representações construídas pelos alunos constituem um momento do trabalho que lhes possibilita estabelecer relações e conjeturas que podem ser o ponto de partida para novas investigações.

Este *software* apresenta um interface de uso fácil e apelativo. O ecrã consiste numa página em branco com uma barra de menus no topo e possui um sistema de cartões para a organização dos dados (cada cartão contém a informação relativa a um caso – as variáveis, que é automaticamente carregada numa tabela). As representações gráficas aparecem num arranjo aleatório no ecrã com os pontos (casos) coloridos para a variável selecionada no cartão. Se a variável é qualitativa é atribuída uma cor distinta para cada categoria, no caso das variáveis quantitativas contínuas é atribuída uma cor ao longo de um gradiente.

Existe a possibilidade de obter uma grande variedade de representações gráficas informais, para além das representações formais tradicionalmente utilizadas, dando ao aluno o poder de escolher a representação que melhor expõe o seu raciocínio. Estas representações são construídas intuitivamente realizando ações simples como "arrastar" e/ou usando um conjunto operadores informais que organizam os dados e atualizam de modo dinâmico as representações de dados ajudando a identificar padrões. A manipulação dos dados permite, ainda, que os alunos relacionem até três variáveis em simultâneo e analisem dados através de várias medidas estatísticas.

Desta forma, o *TinkerPlots* apresenta várias características que podem facilitar o desenvolvimento do raciocínio estatístico:

- Potencializa a conexão entre os dados e o problema sob investigação;
- Materializa os dados;
- Facilita as relações entre as variáveis em estudo;
- Promove outras formas de comunicação matemática que envolvem outros aspetos para além do cálculo;
- Desenvolve o discurso (argumentos/ideias estatísticas);
- Permite a exploração de diferentes tipos de justificação matemática.

Um outro aspeto que importa realçar é o facto de o *software* possuir um conjunto de tutoriais e tarefas já elaboradas com dados que permitem explorar diversos conteúdos estatísticos.

O TinkerPlots na sala de aula – Tarefa "Rápido rapidíssimo"

A tarefa proposta foi apresentada a alunos do 6.° ano sob a forma de desafio: pretendia-se medir com uma régua o tempo de reação dos alunos para agarrar uma régua entre o polegar e o indicador, após esta ser largada sem os avisar. A régua, elaborada em cartolina, tinha uma dupla graduação, em centímetros e a respetiva conversão para milésimas de segundo. Os alunos registavam numa folha os resultados das três tentativas.

Após a recolha dos dados, estes eram introduzidos no programa. No guião da tarefa[1] era proposto aos alunos a formulação prévia de conjeturas. As conjeturas dos alunos foram apresentadas oralmente em grande grupo: "Os rapazes são mais rápidos que as raparigas"; "Na terceira tentativa os alunos obtêm melhores resultados"; "Os alunos com um palmo maior são mais rápidos"; "Os alunos mais velhos são mais rápidos".

Alguns resultados...

Após a introdução dos dados no programa, os alunos trabalharam em pequeno grupo com o objetivo de analisar os dados e procurar representações que pudessem validar as conjeturas iniciais. Atendendo às conjeturas formuladas pelos alunos foi necessário introduzir, para além do tempo de reação das três tentativas, os dados referentes à idade, género e comprimento do palmo (figura 1).

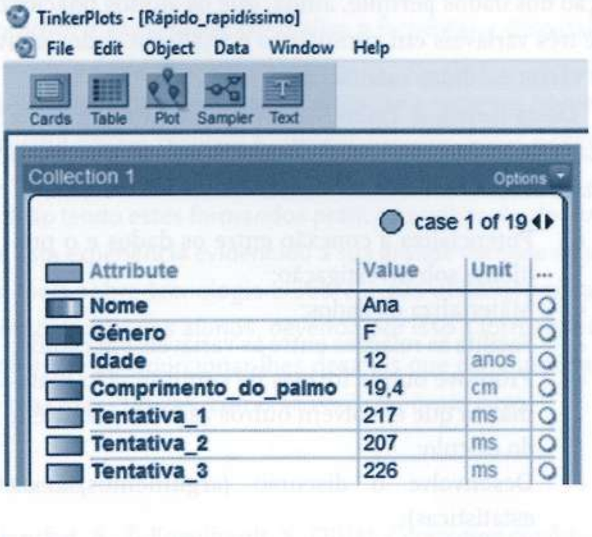


Figura 1. Variáveis consideradas para a análise dos dados obtidos.

Foram várias as representações realizadas pelos alunos, ao longo do trabalho de grupo, e muitas as discussões entre os elementos de grupo na procura da representação que melhor justificava a análise dos dados. Esta fase exige ao professor o apoio na leitura das representações informais feitas pelos alunos, pois nem sempre estas justificam o que eles pretendem afirmar. Contudo, é desta discussão que pode resultar uma melhor interpretação dos dados.

Uma das representações informais que surgiu permite relacionar a primeira e a terceira tentativa para cada aluno, verificando-se que houve uma melhoria dos resultados obtidos da primeira para a terceira (figura 2). Observa-se que, na primeira tentativa, não houve alunos que tivessem realizado um tempo inferior a 155 milésimas de segundo, enquanto na terceira tentativa a maioria dos alunos realizou um tempo inferior a 155 milésimas de segundo.

Numa leitura mais pormenorizada é possível observar que apenas um aluno se manteve na mesma classe de tempo (195-234) da primeira para a terceira tentativa, dois dos alunos apenas conseguiram melhorar ligeiramente o seu desempenho passando da classe (195-234) para a classe (155-195) e que outros dois melhoram significativamente ao passar da classe mais lenta (195-234) na primeira tentativa para a classe mais rápida (75-114) na terceira tentativa.

Certas representações também nos mostram, por vezes, que não podemos tirar conclusões com os dados disponíveis. Com a representação seguinte não podemos validar a conjetura feita pelos alunos de que os rapazes seriam mais rápidos do que as raparigas (figura 3), dado que estas aparecem distribuídas de forma homogénea nos três intervalos considerados. É importante salientar que esta amostra era desequilibrada relativamente ao género, uma vez que a turma era constituída por seis raparigas e treze rapazes.

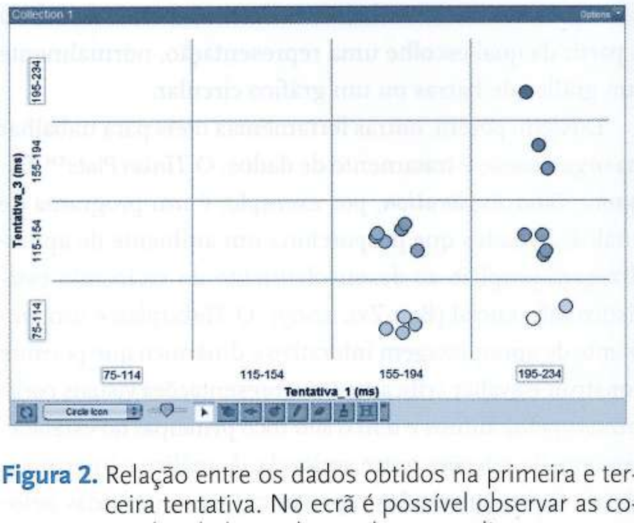


Figura 2. Relação entre os dados obtidos na primeira e terceira tentativa. No ecrã é possível observar as cores dos dados ao longo de um gradiente.

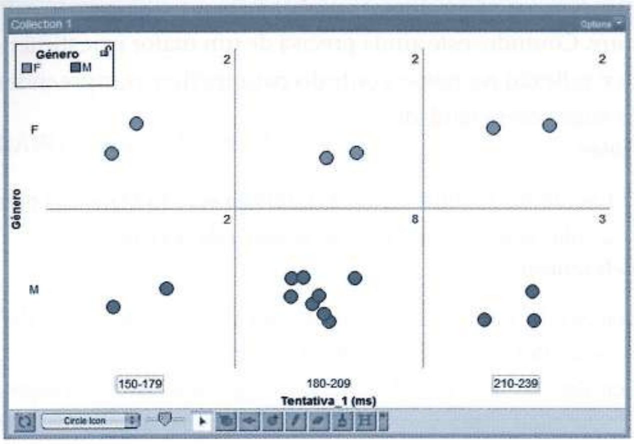


Figura 3. Relação entre o tempo de reação na primeira tentativa e o género. No ecrã é possível observar duas cores distintas associadas a cada uma das categorias.

Já a representação seguinte (figura 4) apresenta evidência de que na terceira tentativa as raparigas não melhoraram tanto os seus resultados quanto os rapazes. De facto, apenas uma rapariga conseguiu obter um tempo inferior a 140 milésimas de segundo, melhorando assim o seu resultado relativamente à primeira tentativa.

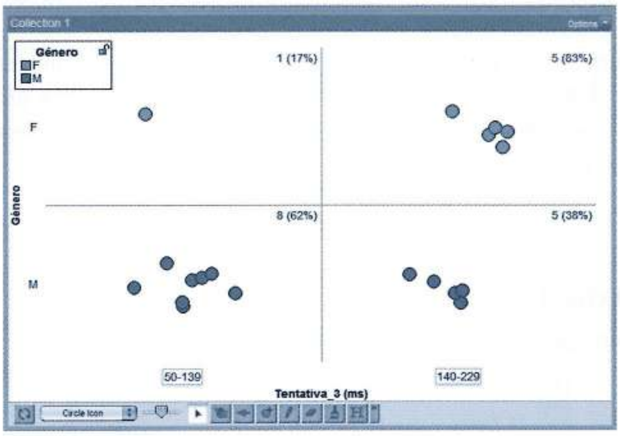


Figura 4. Relação entre o tempo de reação na terceira tentativa e o género.

Este programa também permite comparar distribuições usando a média ou a mediana. Os alunos facilmente podem comparar, por exemplo, as médias relativas a duas variáveis distintas da mesma população, como é evidente na figura 5, em que está representado o valor da média da primeira e da terceira tentativas para o conjunto dos alunos da turma.

A média na primeira tentativa foi de 194 milésimas de segundo e na terceira foi de 137 milésimas de segundo. Podendo concluir uma melhoria nos reflexos de aproximadamente 57 milésimas de segundo da primeira para a terceira tentativa. Podemos também observar que cinco alunos

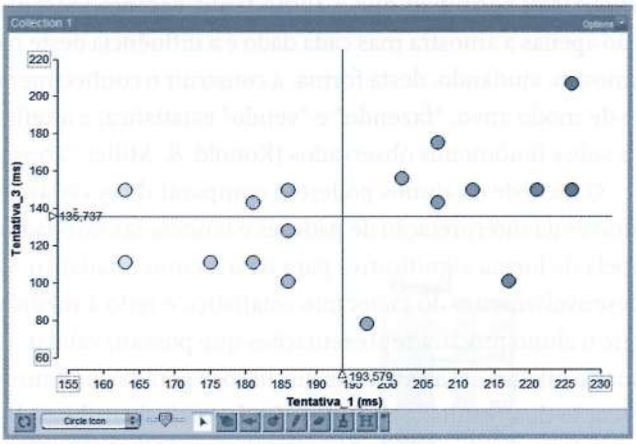


Figura 5. Relação entre a média dos tempos de reação na primeira tentativa e na terceira tentativa. No ecrã é possível observar as cores dos dados ao longo de um gradiente.

conseguiram obter um tempo inferior à média (e por isso foram os que perante esta atividade mostraram ter melhores reflexos) quer na primeira quer na terceira tentativa.

No final do trabalho realizado em grupo, os alunos apresentaram à turma as suas conclusões.

Nesta fase a professora tenta confrontar diferentes representações e levar os alunos a argumentar qual a que melhor evidencia a validade ou não das conjeturas realizadas no início da aula.

Para refletir...

> "O raciocínio estatístico é o modo como os indivíduos raciocinam com ideias estatísticas e atribuem significado à informação estatística, englobando a compreensão e a capacidade de explicar os processos estatísticos."
>
> (Ben-Zvi & Garfield, 2004)

O raciocínio estatístico envolve entre outras ações a realização de interpretações com base em conjuntos de dados, representações ou sumários estatísticos de dados e tem subjacente a compreensão concetual de ideias estatísticas importantes, tais como variação, distribuição, centro, dispersão, associação e amostragem ou a combinação de ideias sobre dados e incerteza que conduz à realização de inferências (Garfield & Gal, 1999).

Os aspetos apresentados pretendem ilustrar, embora que duma forma muito resumida, as potencialidades do uso da tecnologia na exploração de tarefas de investigação. A tarefa proposta aos alunos revelou-se muito aliciante, não só pelo contexto, como pela forma de recolha dos dados, o que em muito contribuiu para dar significado às representações obtidas no seu tratamento. As características do

TinkerPlots permitem que o aluno tenha sempre presente não apenas a amostra mas cada dado e a influência deste na amostra, ajudando, desta forma, a construir o conhecimento de modo ativo, "fazendo" e "vendo" estatística, e a refletir sobre fenómenos observados (Konold & Miller, 2005).

O facto de os alunos poderem comparar duas variáveis através da interpretação de padrões e tendências nos dados apela de forma significativa para o raciocínio estatístico. O desenvolvimento do raciocínio estatístico é feito à medida que o aluno procura representações que possam validar as suas conjeturas e através das discussões geradas na comunicação dos resultados obtidos. Será possível também desenvolver o raciocínio inferencial, uma vez que a análise dos dados obtidos na amostra poderá levar à formulação de novas conjeturas relativamente à população considerada. O foco nas ideias estatísticas possibilita consolidar e aprofundar conceitos e processos complexos, trabalhando-os nos níveis mais elementares a partir de ideias intuitivas dos alunos (raciocínio inferencial, covariação, distribuições).

Para desenvolver o raciocínio estatístico dos alunos é especialmente importante a prática de análise de dados e de resolução de problemas reais, suportada pelos múltiplos recursos tecnológicos hoje disponíveis, ao longo de toda a escolaridade. Para isso, é fundamental que o papel desta disciplina seja reforçado nos programas do ensino básico, sobretudo nos níveis mais elementares, e criar condições para que as escolas apostem na vertente tecnológica, a partir de políticas educativas com permanência no tempo (Oliveira & Henriques, 2014).

A exploração dos dados a partir do programa *TinkerPlots* preconiza a grande importância das representações na forma de pensar, comunicar e tomar decisões, o que a meu ver é um dos objetivos principais da estatística e que constitui um grande avanço relativamente a outro tipo de *software*. Contudo, este ainda precisa de um maior investimento e reflexão no nosso contexto para melhor compreender as suas potencialidades.

Notas

[1] Encontra a formulação desta tarefa na secção Materiais para a aula de Matemática, neste número da revista.

Referências

Ben-Zvi, D. (2007). Reasoning about Informal Statistical Inference (SRTL-5). *ISI Newsletter 31*(2), 27.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Garfield, J. B., & Ben-Zvi, D. (2010). *Developing students' statistical reasoning. Connecting research and teaching practice.* Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice.* Emeryville, CA: Key College Publishing.

Garfield, J., & Gal, I. (1999). Teaching and assessing statistical reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio(Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 207-219). Reston, VA: NCTM.

Konold, C., & Miller, C. D. (2005). *TinkerPlots: Dynamic data exploration.* [Computer software] Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Oliveira, H., & Henriques, A. (2014). Promover o raciocínio estatístico no ensino básico recorrendo à tecnologia: Um projecto de investigação e desenvolvimento. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística, Outono*, 23-31.

Marisa Gregório
Agrupamento de Escolas Marquesa de Alorna

Materiais para a aula de Matemática

O material para aula de matemática que aqui propomos foi baseada na tarefa apresentada no artigo "Raciocínio estatístico com recurso ao programa *Tinkerplots*". Pode ser adaptado a uma versão sem esta tecnologia, embora essa opção lhe retire algumas potencialidades.

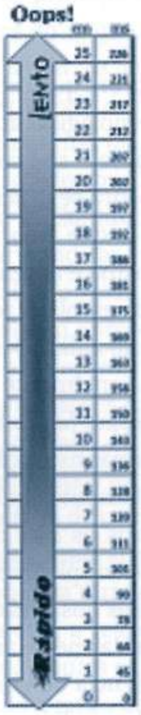
Destina-se a alunos do 2.º ciclo, podendo ser explorada mais aprofundadamente no 3.º ciclo. Esta tarefa tem como objetivo envolver os alunos em algumas das fases de uma investigação estatística e sugerimos a sua realização em grupo. Num primeiro momento é apresentada a tarefa e é pedido aos alunos que formulem questões/conjeturas que possam ser respondidas com os dados recolhidos da turma. Após uma exploração destas questões/conjeturas é então pedido aos alunos que recolham os dados e resolvam as questões apresentadas no guião. No final é discutido em plenário de turma as respostas dadas pelos alunos e cada grupo apresenta os seus argumentos fase às questões/conjeturas levantadas inicialmente.

Marisa Gregório
Agrupamento de Escolas Marquesa de Alorna

RÁPIDO, RAPIDÍSSIMO

Hoje vamos medir os reflexos!

1. Lê com atenção o protocolo da experiência:



Material: Régua de reflexos e folha de registo

Procedimento: Pede a um colega para segurar a régua de reflexos num dos extremos (Oops!). Posiciona o teu polegar e indicador, entre a régua, no extremo oposto (0). Sem avisar ele deverá largar a régua e tu deverás segurá-la o mais rápido possível apenas com os dois dedos. Regista o nível da posição do polegar em milésimas de segundo.

Repete a experiência três vezes.

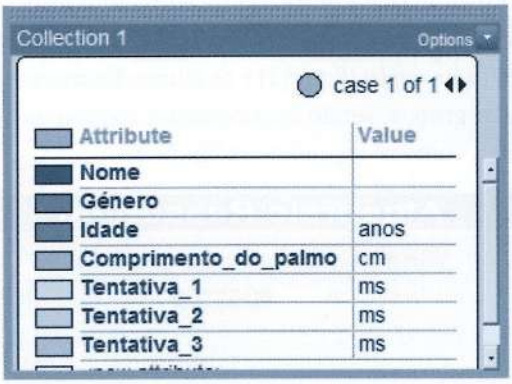
1. 1. Identifica e classifica a variável envolvida na experiência descrita anteriormente.

1. 2. Regista os dados obtidos.

1.ª Tentativa	2.ª Tentativa	3.ª Tentativa

Agora vamos interpretar e analisar os dados recolhidos na experiência "Rápido rapidíssimo".

2. Abre o ficheiro Reflexos_TP, onde encontras os resultados obtidos pela turma.



2.1. Formula conjeturas com base nos dados recolhidos.

Guarda o teu trabalho (File – Save as: nome do grupo_2_1).

2.2. Com base em representações gráficas, justifica se as tuas conjeturas são verdadeiras ou falsas.

Guarda o teu trabalho (File – Save as: nome do grupo_2_2).

Resolução de equações do 1.º grau com recurso a *applets*

António Domingos

Numa época em que existe uma grande diversidade de ferramentas tecnológicas ao nosso dispor, é imprescindível que se reflita sobre o seu contributo para o ensino e aprendizagem. Procura-se descrever neste artigo uma abordagem metodológica que recorre à exploração de *applets* para potenciar o ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau, no 7.º ano de escolaridade.

Applets são aplicações interativas, ou programas interativos, que normalmente são programados em *java*. Pode-se aceder às *applets Java* através da *internet*. No entanto, estas requerem uma instalação prévia do *Java*, que pode ser obtido, gratuitamente, fazendo o *download* no site *java.com*. São inúmeros os *sites* onde é possível encontrar *applets*. A título de exemplo deixa-se aqui a referência à *Wisweb*[1] e à *NLVM*[2], dois dos *sites* de onde são retiradas algumas das *applets* referidas neste artigo.

A experiência de ensino que a seguir se apresenta foi desenvolvida por Eduarda Oliveira e envolveu uma turma do 7.º ano de escolaridade, onde o trabalho da aula oscilou entre a sala de aula normal e o recurso a computadores com acesso à *internet*. As atividades foram planificadas tendo em conta que os alunos deveriam trabalhar em sala de aula os pré-requisitos para a introdução dos novos conceitos, sendo posteriormente estes conceitos introduzidos com recurso a *applets* previamente selecionadas. Dadas as restrições tecnológicas verificadas na escola, uma parte das aulas foi realizada no grande grupo, com auxílio de apenas um computador e um quadro interativo, sendo distribuído aos alunos um conjunto de tarefas em papel que reproduziam várias janelas da *applet*. Desta forma a aula foi orquestrada entre a visualização da *applet* e o recurso aos documentos que estavam na posse dos alunos. Nas aulas em que os alunos foram solicitados a manipular a *applet*, foi necessário desdobrar a turma, para que pudessem ter acesso a um computador por grupo de dois alunos.

O tópico das equações foi assim estruturado em 15 aulas (tabela 1) das quais nove envolveram trabalho com *applets* e seis trabalho de sistematização e resolução de tarefas sem recurso à tecnologia.

Tabela 1. Planificação da experiência de ensino

Aula	*Applet* utilizado
1.ª e 2.ª aulas	*Applet* 1 – Algebric Reasoning
3.ª e 4.ª aulas	Sala de aula normal
5.ª aula	*Applet* 2 – One Step Equation Game
6.ª e 7.ª aulas	*Applet* 3 – Algebra Balance Scales
8.ª e 9.ª aulas	Sala de aula normal
10.ª, 11.ª e 12.ª aulas	*Applet* 4 – Solving equations with balance strategy: game
13.ª e 14.ª aulas	Sala de aula normal
15.ª aula	*Applet* 5 – Escape Planet X

Desenvolvimento das atividades

As duas primeiras aulas tiveram a duração de um bloco de 90 minutos. A sala tinha capacidade para 26 alunos e possuía um computador e um quadro interativo. Os alunos foram divididos em grupos de dois ou de três elementos, com o intuito de formar equipas para a realização de um jogo envolvendo as tarefas propostas na *applet Algebric Reasoning*[3], com o objetivo de proporcionar aos alunos uma transição suave entre os procedimentos aritméticos e algébricos. A professora foi apresentando as várias tarefas presentes na *applet* (figura 1) e os alunos foram resolvendo nos seus grupos, sendo encorajados a registar as suas resoluções, como se reproduz na figura 2.

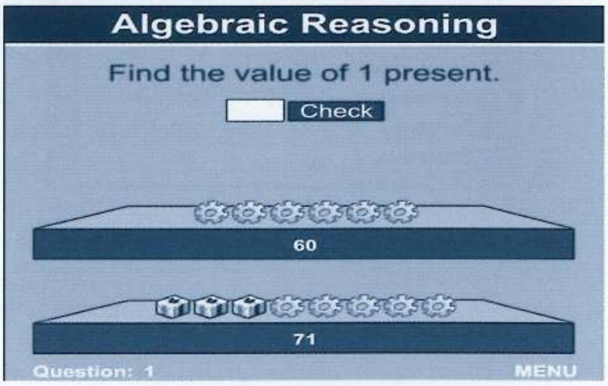


Figura 1. Janela da *applet*

Gustavo

60 : 6 = 10

10 x 5 = 50   71 - 50 = 21

21 : 3 = 7

Manuel

$\frac{60}{6} = 10$ $\begin{array}{r} 71 \\ -50 \\ \hline 21 \end{array}$ 21 : 3 = 7

10x5 = 50

Figura 2. Resolução do Gustavo e do Manuel

Esta *applet* apresenta várias situações-problema, onde se pretende que os alunos descubram o valor de cada presente (a incógnita) recorrendo a procedimentos aritméticos, que numa fase mais avançada da utilização da *applet* serão formalizados em procedimentos algébricos.

Nas duas aulas seguintes os alunos continuaram a trabalhar resolvendo problemas e sistematizando os conceitos abordados na *applet* utilizada na aula anterior.

Na quinta aula, de 45 minutos, a turma foi dividida em grupos mais pequenos (por falta de computadores), tendo os alunos trabalhado em grupos de dois por computador. Nesta tarefa foi utilizada a *applet One Step Equation Game*[4], com o objetivo de proporcionar aos alunos a apropriação do conceito de incógnita e de solução da equação. Esta tarefa também teve o objetivo de possibilitar o recurso a métodos tais como o da substituição da incógnita para verificar a solução da equação e a utilização das operações inversas para resolverem as equações. A *applet* assenta num jogo onde os elementos do grupo se defrontam na resolução de equações que envolvem apenas a aplicação de um dos princípios de equivalência. Tal como na tarefa anterior, dispunham de uma ficha em suporte papel, onde tinham espaços adequados à reprodução da sua resolução. Apresenta-se a título de exemplo as figuras 3 e 4 com a reprodução de uma das janelas da *applet* e a obtenção da resposta por parte do Manuel.

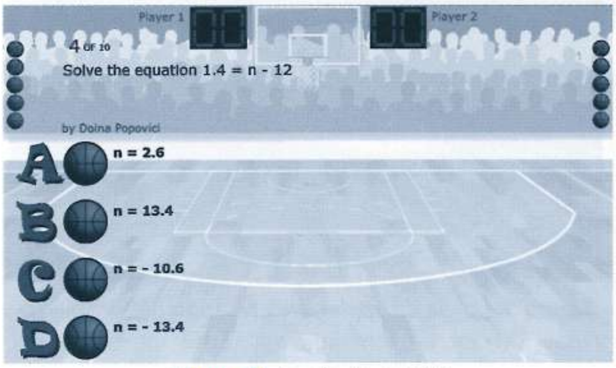


Figura 3. Janela da *applet*

-Manuel

Resposta selecionada na applet: B

Cálculos apresentados:

1,4 = n - 12   13,4 - 12 = 1,4

Figura 4. Resposta do Manuel à questão da figura 3

Esta aula revelou-se demasiado curta para a quantidade de tarefas que envolvia a *applet*, levando os alunos a solicitar à professora se poderiam continuar a jogar na aula seguinte.

Nas aulas seguintes, 6.ª e 7.ª, com a duração de 90 minutos, foi apresentada aos alunos uma nova *applet*, *Algebra Balance Scales*[5]. Esta aula teve o objetivo de proporcionar aos alunos a compreensão do significado da incógnita, do conceito de equações equivalentes e dos princípios de equivalência e ensinar a resolver equações do 1.º grau utilizando os referidos princípios. Através da *applet*, os alunos começam por representar na balança o equilíbrio de forças sugerido pela equação. De seguida devem retirar ou acrescentar pesos, mantendo o equilíbrio, de acordo com a estratégia que lhes permita descobrir o peso x. Contudo, para retirar ou acrescentar pesos, é necessário indicar as operações correspondentes. Desta forma, os alunos estão a aplicar os princípios de equivalência e a *applet* vai apresentando no retângulo do topo a nova equação que representa o equilíbrio de forças, ou seja, as sucessivas equações equivalentes. Este procedimento vai evoluindo ao longo do desenvolvimento da *applet* para uma abordagem mais formal através da manipulação simbólica. Dada a falta de computadores, esta *applet* foi apresentada ao grande grupo, seguindo uma abordagem por questionamento que era dirigida a alunos específicos. Era mostrada a janela com a respetiva balança (figura 5) e um aluno ia explicando quais os passos que deveriam ser efetuados, explicitando a razão dos mesmos.

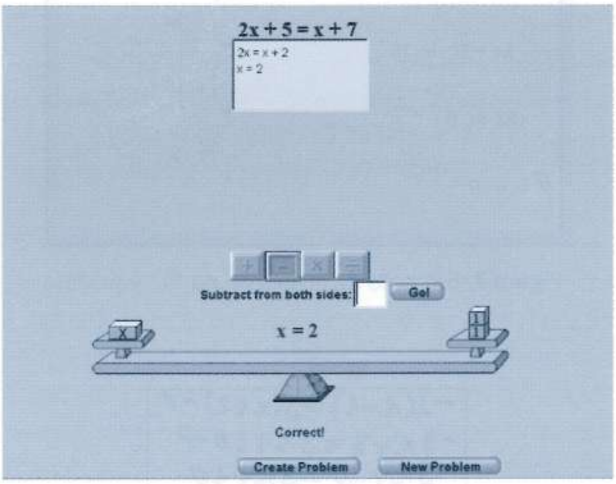


Figura 5. Exemplo de uma janela da *applet*

Posteriormente foi distribuída, em papel, uma tarefa que envolvia várias janelas da *applet* sendo solicitado aos alunos que resolvessem cada uma das situações aí apresentadas. Os alunos mostraram uma boa compreensão dos conceitos em estudo, apresentando resoluções como a que se reproduz na figura 6.

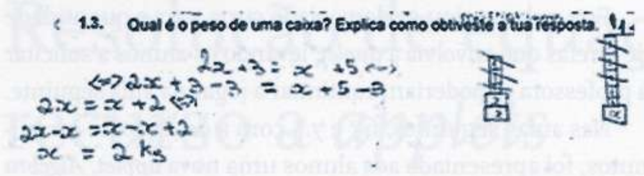


Figura 6. Resposta do José à questão 1.3

Nesta resolução é possível verificar que o aluno recorre à representação pictórica e algébrica para resolver a equação dada.

As 8.ª e 9.ª aulas foram utilizadas para sistematizar os conceitos entretanto abordados e as 10.ª, 11.ª e 12.ª aulas serviram para a introdução de uma nova *applet*, *Solving equations with balance-strategy*[6], com o objetivo de aplicar os princípios de equivalência em equações do 1.ﬄ grau com parênteses e denominadores. Nestas aulas os alunos voltaram a trabalhar em grupos de dois por computador e começaram a resolver, de forma alternada, cada uma das primeiras quinze equações propostas na *applet*, registando todos os procedimentos efetuados, para todas as equações propostas. São exemplos das resoluções apresentadas as figuras 7 e 8.

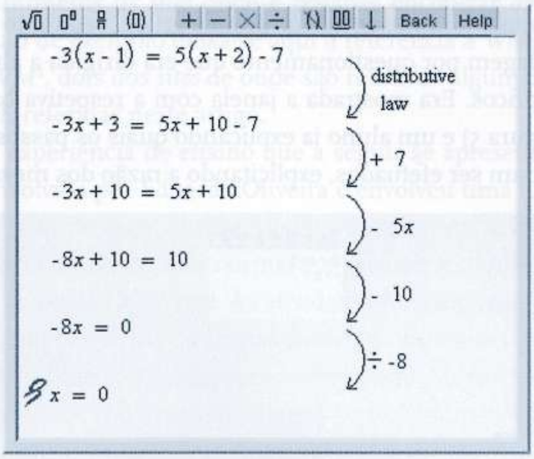


Figura 7. Exemplo da resolução da 13.ª equação

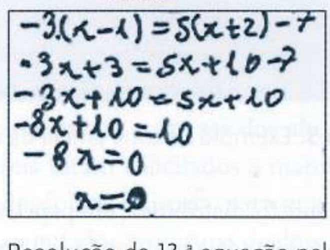


Figura 8. Resolução da 13.ª equação pelo Manuel

Nos desenvolvimentos destas 3 aulas foi possível observar que os alunos mostravam um bom desempenho na resolução algébrica das equações, antecipando os cálculos no papel, para garantirem que não tinham nenhum erro assinalado na *applet*. Como a confirmação de cada um dos passos realizados na *applet* é assinalada como correta ou errada, a alternativa usada pelos alunos era antecipar toda a resolução no papel e só posteriormente faziam a sua resolução no computador. Desta forma a resposta era assinalada a verde (como correta) e assim podiam ganhar o desafio que estavam a realizar com os outros grupos. Este desempenho foi ainda notório quando apareceram as primeiras equações com coeficientes fracionários. Mesmo não tendo sido abordadas no decorrer das aulas, alguns dos alunos conseguiram mobilizar os conhecimentos que tinham das operações com frações e resolveram as equações em causa.

As 13.ª e 14.ª aulas foram utilizadas para sistematizar os conceitos entretanto abordados e na 15.ª aula recorreu-se à *applet Escape Planet* X7, que teve como objetivo o desenvolvimento da linguagem matemática. Nesta *applet* os alunos têm de selecionar as equações que correspondem aos enunciados apresentados. À medida que acerta nas respostas, a imagem vai-se compondo com as várias peças do foguetão e ao fim de um certo número de respostas corretas o foguetão levanta. O desenvolvimento deu-se no grande grupo implementando a estratégia de jogo. Devido ao facto da *applet* estar escrita em inglês, foi necessário traduzir e adaptar cada um dos enunciados dos problemas nela propostos. Os alunos escreveram em espaços adequados a tradução de cada uma das janelas e escolheram qual das equações consideravam a mais adequada (figuras 9 e 10).

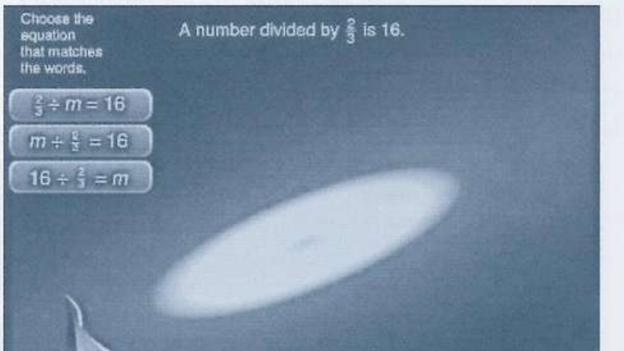


Figura 9. Janela da *applet* evidenciando um problema

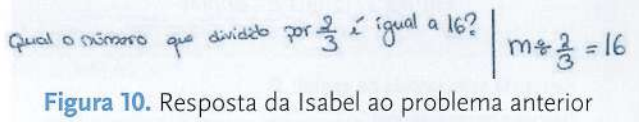


Figura 10. Resposta da Isabel ao problema anterior

Esta experiência de ensino mostra-nos uma abordagem ao tópico das equações onde, na primeira *applet* os alunos são convidados a raciocinar a partir de representações pictóricas que apoiam o raciocínio que é feito posteriormente, constituindo um passo para o desenvolvimento do raciocínio algébrico. A *applet* das balanças recorre a uma ideia que é frequentemente utilizada na introdução das equações, mas neste caso a sua operacionalização apoia uma compreensão mais profunda dos princípios de equivalência. Finalmente, outras *applets* como é o caso das duas últimas, promovem um trabalho que pode ser perfeitamente reproduzido em papel e lápis e onde a tecnologia pode representar um contexto de trabalho mais atrativo, por se configurar na forma de jogo. No entanto, a motivação que este meio pode trazer não deve ser subvalorizada e pode ter um efeito significativo na aprendizagem dos alunos.

A partir do trabalho realizado com estes alunos verificamos que o recurso a *applets*, muitas vezes apresentadas na forma de jogo, são boas ferramentas de aprendizagem que os motivam, mesmo quando as tarefas a realizar assumem uma forte componente algébrica que os obriga a recorrer a tarefas de cálculo rotineiras. A falta de recursos tecnológicos é uma dimensão que deve ser tida em conta, no entanto é possível implementar aulas motivadoras e providas de conteúdo utilizando uma orquestração adequada dos meios disponíveis em cada momento.

Notas

[1] Site da wisweb _ http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html

[2] Site da National Library of Virtual Manipulatives - http://nlvm.usu.edu/

[3] Disponível em : http://www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.html

[4] Disponível em: http://www.math-play.com/One-Step-Equation-Game.html

[5] Disponível em: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions

[6] Disponível em: http://www.fi.uu.nl/toepassingen/02018/toepassing_wisweb.en.html Para a realização deste trabalho a *applet* foi facultada pelos autores, uma vez que o acesso à página web apresentava dificuldades no acesso à mesma.

[7] Disponível em: http://www.harcourtschool.com/activity/escape_planet_6/

Nota final

Algumas *applets* referidas neste artigo podem funcionar apenas em determinados programas e é possível que requeiram a instalação de ficheiros específicos. De uma maneira geral, é comum que estas aplicações sofram alterações de aspeto ou funcionamento, ou sejam substituídas por outras *applets* mais avançadas. Ao leitor interessado, sugerimos que não desista e procure pelas atualizações.

Referências

Oliveira, E. M. V. (2014). *A utilização das aplicações interativas no ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau.* (Mestrado), Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa.

António Domingos

UIED, DCSA, FCT, Universidade NOVA de Lisboa

Ver as estrelas... com o *Geogebra*

Lina Brunheira

Os ambientes de geometria dinâmica (AGD) são uma família de programas assentes na mesma funcionalidade: todos fornecem um conjunto de ferramentas de construção e medição rigorosas que permitem construir elementos livres (por exemplo, segmentos ou pontos arbitrários), podendo ser movidos ou transformados quando arrastados por um cursor, e outros elementos construídos a partir daqueles (frequentemente designados por dependentes) e que se ajustam automaticamente de forma a preservarem todas as relações de dependência da construção inicial (King & Shattschneider, 2003). Estas caraterísticas tornam possível uma outra funcionalidade que é a manipulação das figuras através do arrastamento mantendo as suas propriedades. Por um lado, a manipulação da construção faz emergir as propriedades que se mantêm invariantes ao arrastamento e, por outro, funciona como um teste que permite validar se a construção está ou não correta.

King e Shattschneider (2003) apresentam oito razões para utilizar os AGD: (i) tirar partido do rigor das construções geométricas e das suas medições que conduzem a um elevado grau de confiança nos resultados obtidos; (ii) promover a visualização, já que o AGD "ajuda os alunos a *ver* [itálico dos autores] o que significa um facto verdadeiro em geral" (p. 10); (iii) incentivar a exploração, investigação e descoberta conduzindo à formulação de questões (em especial, a questão "e se?") e conjeturas, bem como o seu teste; (iv) motivar para a demonstração, pois a evidência experimental obtida com o AGD oferece a convicção necessária para tal empreendimento, além de que o próprio AGD pode fornecer pistas úteis para a construção dessa demonstração; (v) apoiar a compreensão das transformações geométricas, pois ao testemunharem os efeitos destas transformações, os alunos percebem que não são meras fórmulas simbólicas e apercebem-se melhor das suas propriedades; (vi) apoiar a compreensão dos lugares geométricos, particularmente de algumas curvas clássicas para as quais é usada, na maioria das vezes, uma abordagem analítica; (vii) fornecer oportunidades de simulação de uma enorme variedade de situações; e (viii) possibilitar a criação de micromundos através da utilização de scripts que produzem novas ferramentas, permitindo a exploração de geometrias não-euclidianas.

Uma ênfase que tem sido dada à utilização dos AGD é a realização de construções geométricas. Laborde (2001) compara este tipo de atividade quando realizada com recurso a um AGD (no caso o *Cabri-Géomètre*) versus com recurso a papel e lápis. Na sua opinião, quando fazemos construções com papel e lápis, a atividade é muitas vezes controlada pela perceção em vez de ser orientada pelas propriedades da figura. Ao contrário, num AGD não é possível construir um quadrado "a olho" e é necessário mobilizar um conjunto de propriedades que possam definir a figura, as quais são veiculadas através das ferramentas usadas na construção.

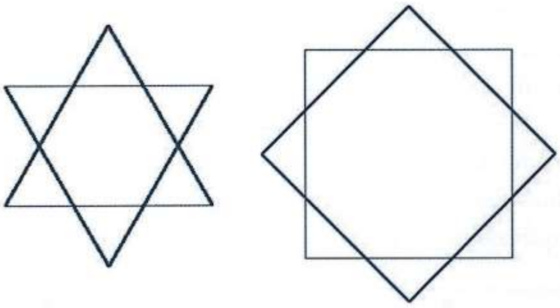
Esta capacidade de identificar as componentes de uma figura e relacioná-las entre si de várias formas – uma componente fundamental da capacidade de visualização – deve ser promovida continuadamente, como defendem as orientações curriculares provenientes da investigação em didática da matemática. Por exemplo, o NCTM afirma que "os alunos que conseguem visualizar de maneiras diferentes uma dada configuração podem possuir mais conhecimentos e poder matemáticos do que aqueles que estão limitados a uma única perspetiva" (NCTM, 2007, p. 118). No número temático anterior da *Educação e Matemática*, dedicado à criatividade, Isabel Vale (2015) fala-nos mesmo da "arte de ver" referindo Leonardo da Vinci, para quem esta capacidade estava na raiz da inventividade e criatividade. Mas também na matemática, o conceito de "olho geométrico", da autoria do matemático do início do século XX Charles Godfrey, e recuperada por Fujita e Jones, enfatiza "o poder de ver as propriedades geométricas destacadas da figura" (2002, p. 385).

Na verdade, a forma como configuramos os objetos geométricos está, para Battista (2008), na base do raciocínio geométrico e pode ser descrita a partir dos conceitos de estruturação espacial, geométrica e lógica/axiomática. A estruturação espacial é um tipo de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos, através da identificação das suas componentes, da forma como se combinam e relacionam. A estruturação geométrica descreve a estruturação espacial através de conceitos formais, tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformações geométricas ou sistemas de coordenadas. A estruturação geométrica assenta na estruturação espacial, isto é, para que seja possível estruturar geometricamente um objeto, é necessário que o indivíduo tenha interiorizado a estruturação espacial correspondente. A estruturação lógica/axiomática organiza formalmente os conceitos geométricos num sistema para que as suas relações possam ser estabelecidas através de dedução lógica.

Nos próximos pontos, analisarei algumas construções geométricas produzidas por estudantes da Licenciatura em Educação Básica com recurso a um AGD, procurando compreender a forma como estruturam as figuras. As resoluções apresentadas pertencem a Catarina Chaves, Carolina Rodrigues e Francisco Cruz e foram selecionadas por representarem a diversidade de raciocínios que surgiram na atividade.

Construir estrelas

1. Construa cada uma das estrelas. Descreva sumariamente o processo de construção que usou.



2. Para cada uma das estrelas obtenha um outro processo distinto de construção. Descreva sumariamente o processo usado.
3. Construa outras estrelas desta família com maior número de vértices, usando processos de construção análogos. Generalize um dos processos de construção que usou.
4. Estabeleça relações entre o número de pontas da estrela e outros elementos da construção.

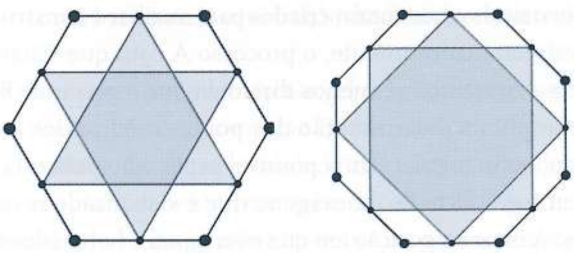
Figura 1. Tarefa Construir estrelas (adaptada de Johnston-Wilder e Mason, 2005).

As construções geométricas dizem respeito à tarefa apresentada na figura 1, resolvida na sala de aula com recurso ao Geogebra. As resoluções que apresento são retiradas dos seus portefólios[1].

Resolução de Catarina

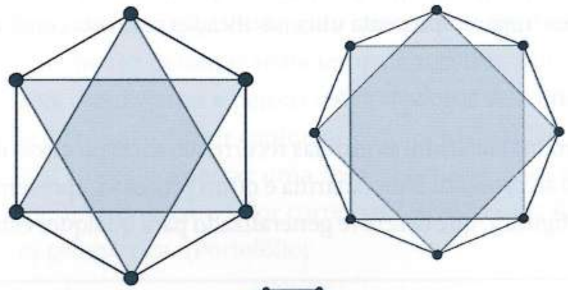
Nesta resolução apresento os dois processos utilizados por Catarina, sendo que o processo A é descrito estritamente para as estrelas de 6 e 8 pontas e o B tem uma descrição generalizada à construção de qualquer estrela desta família.

Processo A



Estrela de 6 pontas: Construir um hexágono regular, encontrar os pontos médios de cada lado e unir os pontos médios não consecutivos. Estrela de 8 pontas: O mesmo processo começando com um octógono.

Processo B



Construir um polígono com um determinado número de lados e construir dois polígonos nele a partir da união de vértices não consecutivos.
O número de pontas das estrelas corresponde ao número de vértices do polígono utilizado para a sua construção. Não é possível utilizar [este processo] com base em polígonos regulares de número de lados ímpar, uma vez que não existem dois conjuntos de pontos não consecutivos que possam ser unidos.

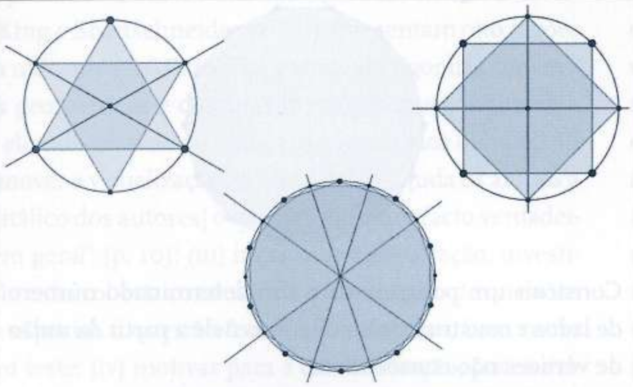
Figura 2. Resolução de Catarina da tarefa *Construir estrelas.*

Ambas as construções assentam na visualização da estrela como uma figura só (ou seja, como um todo) e um hexágono regular (no caso da estrela de 6 pontas) onde a estrela se inscreve de duas formas – no processo A, os vértices da estrela coincidem com os pontos médios dos lados do hexágono e, no processo B, com os vértices do hexágono. Assim, em qualquer dos casos, são mobilizados elementos invisíveis e que foram criados para auxiliar a construção da estrela. Curiosamente, o processo A com que Catarina inicia a construção é menos direto do que o processo B, já que implica a determinação dos pontos médios dos lados do polígono regular. Uma possível explicação para esta sequência é o facto de o hexágono que é visualizado no processo A estar na posição em que essa figura é habitualmente apresentada, o que pode ter levado a formanda a visualizá-lo mais rapidamente do que o hexágono no processo B.

No que diz respeito à generalização, Catarina consegue apresentar um processo que pode ser aplicado a qualquer estrela e estabelece uma relação entre o polígono de que parte e o número de vértices da estrela. Finalmente, identifica que o polígono regular inicial não pode ter um número de lados ímpar e apresenta uma justificação para esta conclusão.

Resolução de Carolina

Carolina construiu as estrelas recorrendo a um processo idêntico ao processo B de Catarina e outro processo, apresentado na figura 3, que descreve generalizado para qualquer estrela.



1. Construir uma figura inicial de acordo com o número de pontas da estrela pretendido (este polígono deverá ser um polígono regular em que o seu número de vértices é metade do número de pontas da estrela). 2. Traçar as mediatrizes de cada um dos lados do polígono previamente construído para assim ser descoberto o seu centro. 3. Traçar uma circunferência com centro no ponto de interseção das mediatrizes e com raio até um dos vértices da figura 4. Os pontos de interseção entre as mediatrizes e a circunferência serão os vértices da segunda figura que compõe a estrela.
O número de pontas da estrela é o dobro do número de lados da figura que se usa inicialmente para a construção.

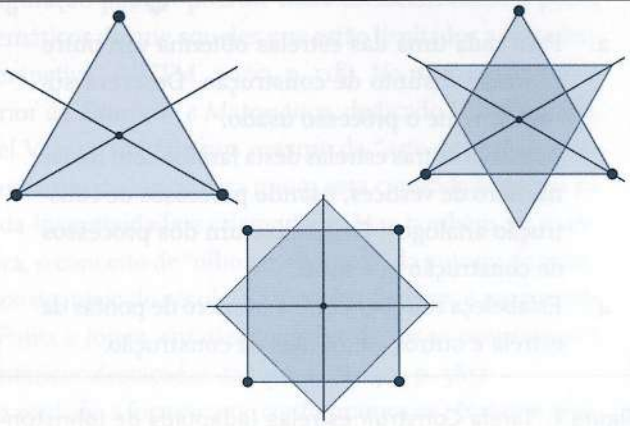
Figura 3. Resolução de Carolina da tarefa *Construir estrelas.*

Ao contrário do primeiro processo que utilizou, nesta construção Carolina olha para a estrela decompondo-a em dois polígonos regulares congruentes, sendo que um deles constitui o ponto de partida para a construção. A determinação do segundo polígono implica a visualização da estrela inscrita na circunferência e, além disso, a visualização dos vértices do segundo polígono contidos nas mediatrizes (um conceito que não dominava), o que significa o reconhecimento de que os vértices consecutivos da estrela são equidistantes entre si e ainda equidistantes do centro da estrela. No que respeita às relações entre elementos da construção e o número de pontas da estrela, identifica que este é o dobro do número de vértices do polígono inicial, mas não justifica porquê.

Resolução de Francisco

O segundo processo a que Francisco recorre e que apresento na figura 4, tem uma primeira formulação para a estrela de 6 pontas e uma segunda generalizada a qualquer número de pontas.

Neste processo, Francisco olha para a figura da mesma forma que Carolina, ou seja, decompondo a estrela em duas figuras congruentes. A sua resolução acaba por ser equivalente à da sua colega porque recorre às mesmas re-



Construção de um polígono regular de 3 lados. Marcam-se as mediatrizes dos lados para encontrar o ponto de interseção. O passo seguinte consiste na rotação da figura em torno do ponto de interseção e amplitude 60° = (360/(3 x 2))
Começar com qualquer polígono regular de x lados e rodá-lo em torno do ponto central com uma amplitude de 360°/(n.° lados do polígono x 2)
Número de pontas = n.° de lados do polígono inicial x 2
Número de pontas = 360/amplitude de rotação

Figura 4. Resolução de Francisco da tarefa *Construir estrelas.*

lações – a equidistância entre os vértices consecutivos da estrela e entre estes e o centro da estrela. Contudo, Carolina parece olhar para a estrela de um ponto de vista estático, enquanto Francisco visualiza o "movimento" de rotação do primeiro polígono de forma a obter o segundo e assim construir a estrela.

No que respeita às relações entre elementos da construção e o número de pontas da estrela, Francisco estabelece duas relações válidas – com a amplitude de rotação e com o número de lados do polígono inicial. Além disso, generalizou o processo de construção mobilizando uma terceira relação entre a amplitude do ângulo de rotação e o número de lados do polígono inicial.

O papel do *Geogebra*

As resoluções que apresentámos são todas válidas e todos os participantes foram bem-sucedidos na resolução da tarefa, tendo elaborado as construções através de processos diferentes e mostrando ainda grande envolvimento na atividade. O facto de esta tarefa ter sido escolhida para constar no portefólio individual por quase todos os estudantes, constitui também um indicador de que o trabalho realizado foi considerado bastante significativo. Na verdade, este aspeto foi referido por todos e as reflexões constantes nos portefólios suportam algumas das conclusões que passarei a apresentar.

A principal conclusão que pretendo destacar é que o *Geogebra* potencia significativamente a estruturação geométrica, o que deriva de diferentes características e potencialidades que reconhecemos no AGD. Começo com duas características – a facilidade de utilização e o rigor das construções – as quais associo a duas potencialidades – a promoção da intuição e da exploração. Por vezes, foi notório que os estudantes começavam a construção partindo da intuição de que a utilização de algumas propriedades ou elementos da figura (ou figuras auxiliares) poderiam ser úteis para o fim em vista, mas sem certeza. A possibilidade de testar facilmente essas conjeturas através de uma construção rápida e rigorosa, ou voltar atrás caso não se verificassem, foi um aspeto determinante, como podemos reconhecer nas palavras de Catarina:

> Com a aplicação do *Geogebra*, foi possível explorar diferentes formas de construção de estrelas utilizando polígonos, retas, pontos médios, retas paralelas, entre outros, de forma fácil, simples e com rigor. A não utilização desta aplicação traduzir-se-ia num processo longo e relativamente difícil, especialmente no momento de construção dos polígonos regulares utilizados como base para a construção das estrelas. (Portefólio)

Outra potencialidade do *Geogebra* que emergiu em alguns momentos é a promoção da justificação. De facto, a possibilidade de testar a validade das construções, quase num processo de tentativa e erro, não significa que os estudantes não tenham refletido sobre os passos a dar para chegar à estrela pretendida, como observamos no comentário de Ana Lúcia:

> Após a descoberta da ferramenta que realizava a rotação da figura selecionada, segundo um ângulo escolhido por mim, tive de refletir sobre qual o valor que deveria aplicar a cada polígono regular consoante o número de lados de cada um. Este foi um ponto que me fez demorar mais tempo a resolver a tarefa, pois tive de parar e pensar sobre o porquê de o ângulo de rotação diferir conforme o número de lados, assim como, encontrar uma resposta matemática que me apresentasse o valor correto referente a cada figura geométrica. (Portefólio)

No caso desta formanda, vemos que sentiu a necessidade de refletir sobre o valor da amplitude a introduzir mas, mais do que isso, essa ação conduziu-a a pensar na justificação do valor escolhido, relacionando-o com o número de lados do polígono original. Desta forma, vemos que apesar de o AGD ter um papel importante na convicção do utilizador de que uma relação é válida, podendo conduzir à subvalorização da justificação ou prova, ele pode ter o efeito contrário, ou seja, promover a procura da justificação para as relações encontradas. Esta ideia estende-se ainda às construções impossíveis, tal como vemos Catarina a justificar (figura 2) por que razão não é possível partir de um polígono com um número ímpar de lados.

Uma outra característica do *Geogebra* é levar-nos a trabalhar com os conceitos formais associados às suas ferramentas. Podemos pensar que só é possível tirar partido do AGD quando se opera ao nível da estruturação geométrica, ou seja, quando já se dominam os conceitos e, de facto, como refere Battista (2007), não é possível fazer as construções geométricas sem ter atingido algum nível de "explicitação conceptual e representacional". No entanto, estes dados mostram que o *Geogebra* pode favorecer a transição da estruturação espacial para a geométrica. Finalmente, em ligação à natureza aberta da tarefa que promove diferentes resoluções, o *Geogebra* apoia esta diversidade através do conjunto de ferramentas que disponibiliza, o que é também um estímulo à criatividade, tal como refere Francisco:

> A escolha desta tarefa incidiu no facto desta nos dar liberdade, com a ajuda visual do *Geogebra*, para construirmos as figuras a partir de processos distintos. Estes processos dependem da nossa capacidade de imaginar sobreposição de figuras geométricas, linhas orientadoras na construção (retas, semirretas, etc.) e outros pontos indispensáveis da figura final (estrela) ... melhora a capacidade de encontrar relações entre figuras e os seus elementos de construção (dependendo do processo) e estimula a criatividade no processo em si. (Portefólio)

Concluindo, este trabalho confirma as afirmações de King e Shattschneider (2003) no que respeita às razões que apoiam a utilização dos AGD, particularmente no que respeita a tirar partido do rigor e promover a visualização, exploração, investigação, descoberta e demonstração, ao que acrescento a criatividade e a intuição. Além disso, as resoluções apresentadas evidenciam ainda que a realização de construções no *Geogebra* contribui para a estruturação espacial e geométrica. De facto, tal como dizem Fujita e Jones (2002), é necessário treinar o "olho geométrico", ou seja, a capacidade de destacar as propriedades das figuras, algo que foi central na atividade realizada e claramente favorecido pelo AGD.

Notas

[1] Algumas figuras foram reproduzidas para este artigo, por forma a garantir a sua legibilidade. As resoluções apresentadas correspondem a excertos das resoluções originais de forma a ilustrar os métodos utilizados.

[2] Este artigo foi escrito a partir de uma comunicação apresentada no Encontro de Investigação em Educação Matemática, com a referência Brunheira, L. & Ponte, J. P. (2016). Realizar construções geométricas com o Geogebra, o contributo do AGD para a estruturação geométrica. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 341-353). Évora: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Referências

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heide (Eds.) *Research on technology and the teaching and learning of mathematics, Vol. 2: Cases and Perspectives* (pp. 131-156). Greenwich, CT: Information Age.

Fujita, T., & Jones, K. (2002). The bridge between practical and deductive geometry: Developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, 384-391), Norwich, UK.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing thinking in geometry*. London: Sage.

King, J. R., & Schattschneider, D. (2003). Tornar a geometria dinâmica. In E. Veloso & N. Candeias (Eds.), *Geometria dinâmica: Seleção de textos do livro Geometry Turned on!* (pp. 7-13). Lisboa: APM.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 283-317.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). Princípios e *Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Vale, I. (2015). A criatividade nas (re)soluções visuais de problemas. *Educação e Matemática 135*, 9-15.

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa

Matemática, experiências e vídeo

António Cardoso
Paulo Correia

São recorrentes as referências à relação da matemática com a realidade e aos méritos de se matematizar as vivências dos alunos no sentido de os consciencializar da presença da matemática nas suas atividades. É igualmente frequente a referência às vantagens da abordagem de conceitos matemáticos enquadrados numa situação globalizante, onde os modelos matemáticos possam ser avaliados e analisados criticamente para além da coerência formal ou da abstração matemática, ou seja, atividades matemáticas globalmente designadas por modelação.

No programa de Matemática A, este assunto é destacado: "...a modelação matemática não consiste em associar de forma arbitrária – e sem qualquer critério ou justificação razoável – uma dada função matemática a uma dada grandeza. Proceder dessa forma é transmitir aos alunos uma visão deturpada de como se pode, de facto, aplicar corretamente a Matemática ao mundo real." (MEC, p. 5)

O programa de Física e Química A, pela própria natureza da disciplina, "...recorre frequentemente a conhecimentos e métodos matemáticos. Alguns alunos poderão ter dificuldades na interpretação de relações quantitativas entre grandezas físico-químicas, incluindo a construção de modelos de base matemática na componente laboratorial, ou na resolução de problemas quantitativos por via analítica, devendo o professor desenvolver estratégias que visem a superação das dificuldades detetadas. O recurso a calculadoras gráficas (ou a *tablets*, ou a *laptops*) ajudará a ultrapassar alguns desses constrangimentos, cabendo ao professor, quando necessário, introduzir os procedimentos de boa utilização desses equipamentos." (MEC, pp. 5-6)

A tecnologia pode desempenhar um papel importante nesta vertente na medida em que torna possível "capturar" experiências dos alunos e dar-lhes depois o tratamento matemático que evidencia a presença da matemática no seu quotidiano.

Num contexto de formação de professores, foi experimentado o processo de registo de um vídeo, e a respetiva edição, para utilização numa calculadora gráfica num processo de modelação. Esta experiência visou a testagem desta funcionalidade num modelo de calculadora gráfica (CASIO *fx*-CG20) e a identificação das abordagens e dos elementos essenciais no estudo de um movimento parabólico nas disciplinas de Matemática A e Físico-Química, no ensino secundário.

A partir de um registo em vídeo do lançamento de uma bola de basquetebol, com recurso a um telemóvel, procedeu-se à aquisição de dados e à construção de modelos matemáticos que permitem descrever a trajetória da bola.

Obtendo o vídeo

O processo de registo de filmes e fotos tem evoluído em qualidade e quantidade, registando melhorias extraordinárias, sendo cada vez mais fácil obter registos digitais de qualidade e de fácil manipulação.

O acesso a dispositivos de captação de imagem e vídeo tornou-se acessível à maioria da população com o advento dos telefones de última geração, permitindo a obtenção de registos com qualidade razoável, sem o pressuposto de conhecimentos técnicos relevantes ou o recurso a equipamentos de difícil acesso. A edição dos registos continua a evoluir, registando avanços impressionantes, quer ao nível do resultado final, quer na supressão de competências específicas para manipular e editar imagens ou vídeos. Ainda assim, o recurso à análise de vídeos para criar situações de aprendizagem significativas, para os alunos, na Matemática, não tem sido frequente, ou pelo menos não tem merecido a divulgação que outras abordagens com recurso à tecnologia conseguiram.

Neste contexto, o recurso a imagens ou vídeos para desenvolver atividades de modelação matemática pode proporcionar aos alunos uma experiência matemática mais ligada à realidade, sustentada em registos criados pelos próprios alunos, para além da contribuição para o desenvolvimento de uma literacia digital associada. O recurso a vídeos registados pelos próprios alunos permite uma melhor estruturação da atividade de modelação, porque implica algum grau de planificação na captura das imagens, ou seja, na recolha de dados. Pode ainda constituir uma oportunidade para desenvolver a capacidade de fazer estimativas porque os alunos contactaram com o fenómeno modelado de forma ativa.

A consciência de que nem todos os vídeos proporcionam boas fontes de informação para um trabalho de modelação não é um elemento óbvio, e esta consciência não é favorecida quando os alunos utilizam vídeos previamente registados.

Os alunos devem ainda ser confrontados com a necessidade de observar alguns cuidados no momento da gravação das imagens:

- Vídeos em que a câmara se movimenta durante a gravação comprometem a fixação de um referencial, ou seja, a hipótese de comparar diferentes "frames" do vídeo, relativamente a um observador.
- Um bom vídeo deve incluir pontos de referência que possam posteriormente permitir a identificação de escalas, fazer estimativas e avaliar a adequação do modelo, nomeadamente a sua capacidade de descrição da situação, ou a sua capacidade de fazer previsões.
- Finalmente o posicionamento do equipamento de gravação num plano perpendicular ao plano onde decorre o movimento a filmar evita a distorção das distâncias e os dados que daí venham a ser retirados dispensam um tratamento matemático para corrigir esta distorção.

Na situação estudada, a câmara que registou o lançamento da bola de basquete foi colocada aproximadamente num plano perpendicular ao plano que continha a trajetória (esperada) da bola, desde o lançamento até ao momento em que atingiu o cesto.

Preparando o vídeo

A etapa complementar à aquisição do vídeo para a modelação é a edição do vídeo. Nesta experiência o vídeo foi editado com recurso ao *software* "CASIO Picture Conversion Engine" (figura 1) que essencialmente converte o formato digital do vídeo capturado para um formato que é reconhecido e manipulado através da calculadora gráfica. Durante este processo de conversão é possível definir outros elementos como escolher as *frames* que correspondem ao início e ao final do vídeo a utilizar, os detalhes do referencial a utilizar (localização da origem e escala), fazer reflexões segundo eixos horizontais e verticais das imagens, e mais importante, definir o número de *frames* do vídeo (30 no máximo). Esta última característica assume uma relevância adicional porque corresponde ao número de dados que serão, posteriormente, recolhidos – um registo por cada *frame* do vídeo.

Figura 1 Edição prévia do vídeo para utilização na calculadora

No exemplo estudado, o vídeo foi registado usando a câmara de um telemóvel e transferido para o computador. Durante a edição foram escolhidas 20 *frames*, fazendo corresponder o início do vídeo ao momento em que a bola sai da mão do lançador e o final com o momento em que a bola atinge o cesto. Foi ainda tomada a opção de fazer uma reflexão segundo um eixo vertical, com o objetivo de que o movimento da bola se fizesse da esquerda para a direita, o que não acontecia no registo original (no vídeo o lançador aparentemente usa a mão esquerda para lançar, o que não corresponde à situação original).

Recolhendo dados e gerando o modelo

Após a edição do vídeo, o ficheiro foi transferido para a calculadora gráfica num processo de transferência de ficheiros semelhante à gravação numa *pen drive*, através da ligação por cabo da calculadora ao computador. Na eventualidade de ser pretendida a utilização do mesmo vídeo em várias unidades diferentes deste modelo de calculadora, o ficheiro pode ser transferido para outras unidades a partir do computador ou diretamente ligando calculadoras diferentes e executando a transferência do ficheiro num processo em tudo semelhante à transmissão de outros ficheiros da calculadora.

Recorrendo às funcionalidades específicas deste modelo de calculadora para recolha de dados a partir de ficheiros de vídeo, foi possível fazer os registos das coordenadas dos pontos que representam a posição da bola em cada *frame* do vídeo (figura 2). E depois, a partir destes dados, foi feita a modelação da trajetória da bola através de uma regressão estatística, com valores referentes ao referencial definido.

Finalmente, pudemos reproduzir o gráfico da função que modela a trajetória da bola sobre as imagens que compõem o vídeo. Desta forma, foi feita uma comparação do modelo com a trajetória que se pretendia modelar, confrontando em cada *frame* a posição da bola com a posição prevista pelo modelo gerado (figura 3).

No vídeo estudado, a representação do modelo permitiu identificar, por exemplo, que o momento em que a bola atingiu o ponto mais alto da trajetória não ficou registado em nenhuma das *frames* do vídeo, o que implicou que a determinação da altura máxima atingida pela bola ficasse acessível apenas através da análise do modelo matemático e não de uma medição direta no vídeo analisado.

Explorando o modelo

Para além da confrontação visual do traçado do gráfico com as imagens do vídeo, para uma verificação visual da adequabilidade do modelo, podemos utilizar o gráfico para obter outro tipo de dados ou informações que poderão não ser acessíveis no vídeo, como no exemplo, estimativas (mais precisas) da velocidade atingida pela bola em diferentes etapas do lançamento, a altura máxima atingida pela bola ou a distância do lançador ao cesto (figura 4).

Para que os valores que resultam da análise do modelo possam ter correspondência com os valores reais da situação estudada, é necessário fazer uma conversão entre a distância medida nas imagens e a distância correspondente na realidade, recorrendo a distâncias ou comprimentos conhecidos e acessíveis após o registo das imagens ou a medições efetuadas no local da gravação do vídeo. Esta correspondência pode ser determinada durante o processo de edição do vídeo, manipulando a escala no referencial; no entanto, a definição desta conversão implica um processo de cálculo não trivial que pode ser remetido para uma etapa posterior à criação do modelo.

No caso estudado, durante o processo de edição do vídeo não foi alterada a escala definida automaticamente pelo *software* de edição para o referencial a utilizar, mas a origem do referencial foi ajustada para coincidir com a

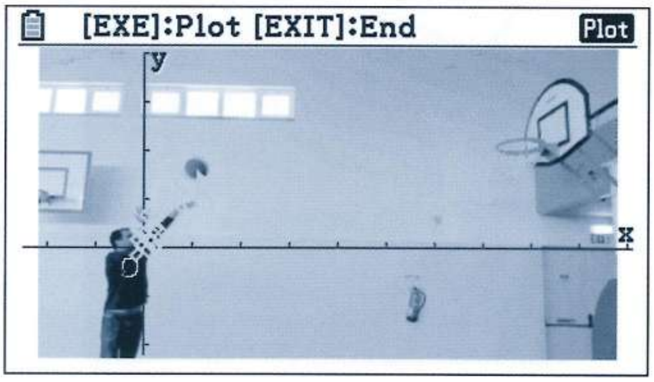


Figura 2. Marcação de pontos e recolha de dados

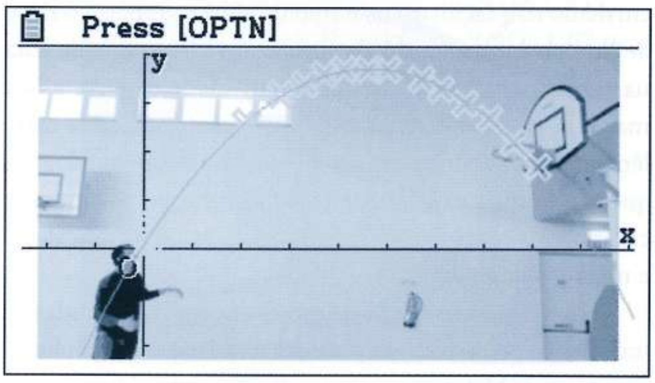


Figura 3. Comparação do modelo com o vídeo

posição da bola no momento do lançamento (ou seja, na primeira *frame* do vídeo). Desta forma os valores determinados através do modelo não tinham correspondência a valores reais, e a conversão foi feita a partir da diferença das alturas da bola na primeira *frame* (estimada a partir da altura do lançador) e da altura do cesto (que é uma medida *standartizada*). A comparação desta diferença nos valores indicados pelo modelo e nos valores estimados para a situação real permitiu identificar um fator de escala para ser utilizado na conversão de qualquer valor da altura indicada pelo modelo.

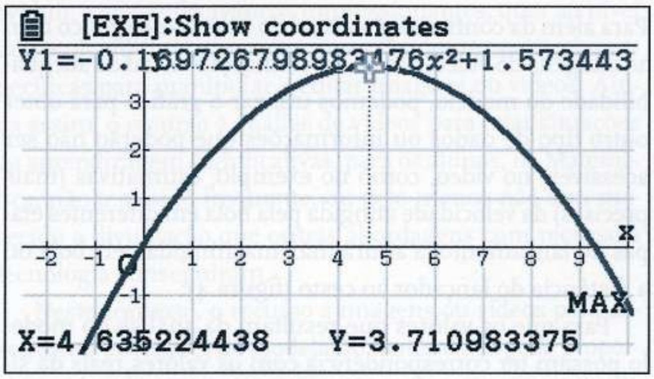


Figura 4. Identificação de dados relevantes no modelo de difícil identificação no vídeo

Sobre a experiência

O atual enquadramento curricular não sustenta abordagens metodológicas que mobilizem a tecnologia para além de um nível elementar e algorítmico, ou que visem o desenvolvimento de atividades que impliquem o envolvimento dos alunos para além das situações tradicionais ditas de "papel e lápis". Ainda assim, são reconhecidas as potencialidades e méritos de outras abordagens, quer pela investigação, quer por evidências empíricas decorrentes da experiência dos professores.

Os constrangimentos de ordem temporal na gestão do currículo não facilitam este tipo de abordagem, ou o risco de investir uma quantidade significativa de tempo de aula na experimentação deste tipo de atividade. Assim, a formação de professores constitui uma oportunidade de excelência para a experimentação e definição de metodologias, que sendo mais exigentes na sua preparação, permitem a criação de situações de aprendizagem mais significativas e mais ambiciosas.

O contexto da formação de professores permite ainda um trabalho conjunto entre professores de diferentes disciplinas, neste caso de Matemática e Física, favorecendo a identificação da mobilização de ferramentas e saberes complementares.

A evolução da tecnologia gráfica, em unidades portáteis como as calculadoras ou em *software* tradicionalmente manipulado em computadores, e a evolução recente de outro tipo de dispositivos como *tablets* e *smartphones* cria continuamente um contexto de oportunidades para explorar e criar situações de aprendizagem mais ricas e com mais significado para os alunos. A modelação com recurso a vídeos é uma dessas oportunidades!

Referências:

Ministério da Educação e Ciência (2014). Programa e Metas Curriculares – Matemática A. Consultado em http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf

António Cardoso
Agrupamento de Escolas de Redondo
Paulo Correia
Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal

A curiosidade matemática e a tecnologia

José Paulo Viana

O avanço da tecnologia veio permitir abordar a Matemática de formas inovadoras e muito diferentes das tradicionais. Agora, torna-se possível, a qualquer pessoa com um mínimo de curiosidade, fazer investigações, colocar conjeturas e descobrir resultados que anteriormente lhe estariam vedados ou que nem sequer se lembraria de iniciar. Vejamos alguns exemplos.

A ÁREA DO ESTÁDIO DA LUZ

Se consultarmos o *GoogleMaps* na Internet e formos à cidade de Lisboa, podemos ver que o Estádio da Luz tem uma forma curiosa: parece ser uma elipse ou uma oval. Surge então uma questão: será que, usando a tecnologia, conseguimos descobrir que área tem o estádio? É o que vamos tentar saber.

No computador, ampliamos a cidade de Lisboa até se ver claramente o estádio da Luz, reorientamos o mapa para que o eixo maior do estádio fique na horizontal e capturamos a parte do ecrã que nos interessa.

Com a *Ti-Nspire*, abrimos um novo documento com uma página de *Gráficos* e importamos a imagem anterior. Arrastamos a página de modo que a origem do referencial coincida com o centro do campo de futebol (figura 1).

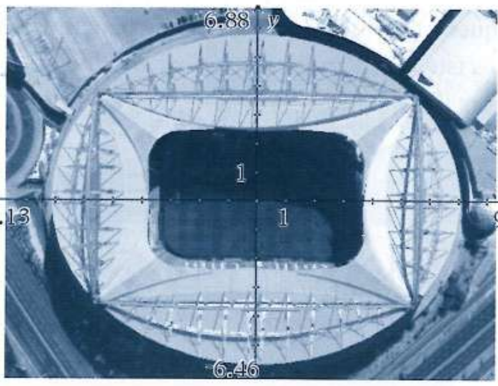


Figura 1.

Temos agora de fazer com que a escala do referencial se adeque à realidade. Como o comprimento dos campos de futebol dos campeonatos da UEFA é de 105 metros (esta informação é fácil de encontrar na Internet), a distância do centro do campo a uma das balizas é de 52,5 metros. Dá jeito considerar o hectómetro como unidade de medida. Marcamos então o ponto de coordenadas (-0,525; 0) e, *agarrando* no eixo, fazemos com que ele coincida com a baliza do lado esquerdo (figura 2).

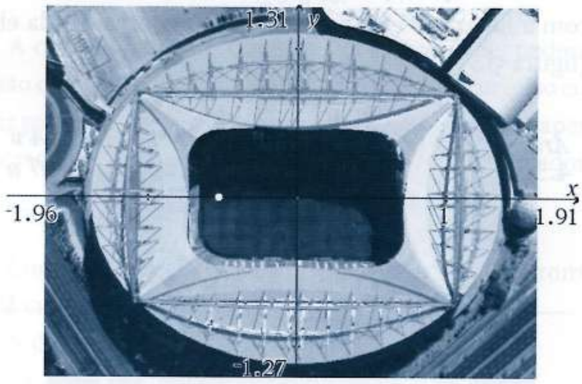


Figura 2.

Vamos agora ver se a forma do estádio é realmente uma elipse. Para isso, precisamos de saber as medidas dos semieixos maior e menor. Marcamos a origem O do referencial, um ponto P na extremidade do semieixo maior, um ponto Q na extremidade do semieixo menor, e pedimos depois as distâncias de O a P e a Q (figura 3).

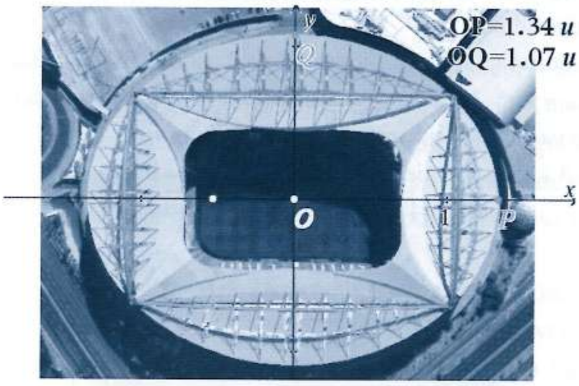


Figura 3.

Temos então $\overline{OP}$= 1,34 hm e $\overline{OQ}$= 1,07 hm.

No editor de funções, escolhemos *1:Introdução/Edição de gráficos, 3:Modelos de equações, 4:Elipse*, que nos permite escrever a equação da elipse conhecidos os semieixos (figura 4).

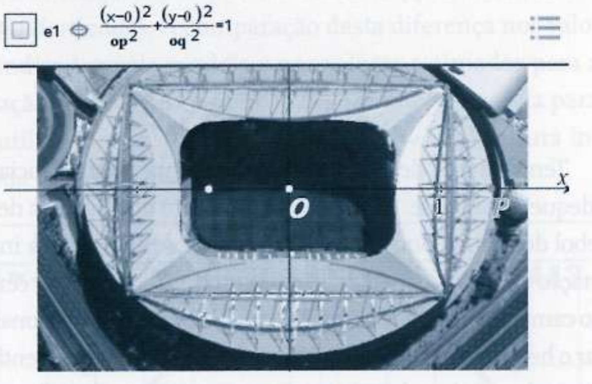


Figura 4.

Obtida a elipse (que confirmamos coincidir exatamente com a forma do estádio), resta-nos pedir a área da elipse (figura 5).

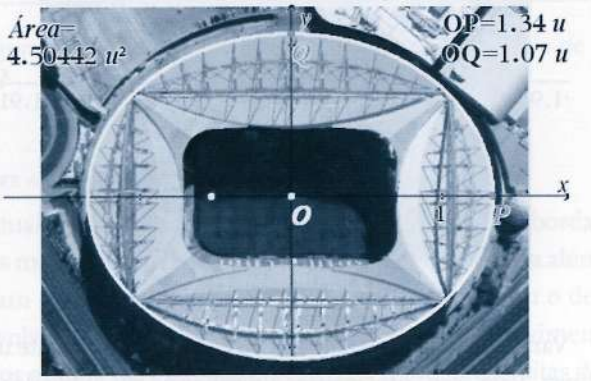


Figura 5.

O estádio da Luz tem uma área de 4,5044 hectares ou 45044 m².

Em vez de pedir a área, poderíamos tê-la calculado diretamente.

Como sabemos, a fórmula da área da circunferência é $A_{circ} = \pi.r^2$. A elipse (que é como "uma circunferência de *raio variável*") tem uma fórmula relacionada:

$A_{elipse} = \pi.$*(semieixo maior).(semieixo menor)* =

$= \pi \times 1{,}34 \times 1{,}07 = 4{,}5044$ hectares

op	1.34
oq	1.07
$\pi \cdot op \cdot oq$	4.50442

Figura 6.

Epílogo: Antes de fazer este trabalho, tínhamos tentado encontrar na Internet a informação da área do estádio, mas sem êxito. No final, fizemos nova e mais cuidadosa pesquisa e tivemos mais sorte. Na página http://www.maisfutebol.iol.pt/geral/24-10-2003/estadio-da-luz--a-casa-nova-do-benfica-em-numeros vem lá que a área é de 45000 m². Podemos ficar satisfeitos, os valores estão muito próximos um do outro.

Uma nota final. Escolhemos o Estádio da Luz porque é o único que se adequa a um estudo deste tipo. Com os outros, o problema seria ou demasiado simples ou bastante complicado. É que o do Dragão e o de Alvalade são circulares, o de Braga é um retângulo, e os de Guimarães e Algarve têm formas estranhas.

A coleção de cromos

Comecemos com um problema:

Em média, quantos lançamentos de um dado normal é preciso fazer para que saiam todos os números, de 1 a 6?

Uma forma de obter um valor aproximado desta média seria fazer "muitas" experiências. Poderíamos usar dados verdadeiros (de preferência pondo muita gente – alunos? – a fazê-lo...). Outra hipótese, menos trabalhosa e mais rápida, era fazer simulações, usando a tecnologia. Quantas mais experiências fizermos, mais confiança podemos ter na média obtida, mas nunca saberemos o valor real.

Vamos fazer um parêntesis antes de avançarmos com este problema.

Uma das séries mais famosas e estudadas é a série harmónica:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

Os termos da série são cada vez menores e tendem para zero. No entanto, à medida que k aumenta, a série ultrapassa qualquer valor que se queira e tende para infinito. Verifiquemos isto, calculando o somatório para 10, 100, 1000, ... parcelas (figura 7 e 8).

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1.}{k}\right) \quad 2.92897$$

$$\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1.}{k}\right) \quad 5.18738$$

$$\sum_{k=1}^{1000}\left(\frac{1.}{k}\right) \quad 7.48547$$

Figura 7.

$\sum_{k=1}^{10000}\left(\frac{1.}{k}\right)$	9.78761
$\sum_{k=1}^{100000}\left(\frac{1.}{k}\right)$	12.0901
$\sum_{k=1}^{1000000}\left(\frac{1.}{k}\right)$	14.3927

Figura 8.

Os valores do somatório vão aumentando regularmente, com um valor quase constante (figura 9).

$k=1$	
$\sum_{k=1}^{1000000}\left(\frac{1.}{k}\right)$	14.3927
5.1873775176394−2.9289682539682	2.25841
7.4854708605505−5.1873775176394	2.29809
9.7876060360459−7.4854708605505	2.30214
12.090146129764−9.7876060360459	2.30254
14.392726722897−12.090146129764	2.30258

Figura 9.

Parece até que estas diferenças entre valores (quando o número de parcelas vai sendo multiplicado por dez) estão a tender para um número. Prova-se que esse número é precisamente o logaritmo neperiano de 10:

$$\ln 10 \cong 2{,}302885$$

Voltemos ao nosso problema, que é um caso particular do Problema das coleções. Este tipo de problemas já foi resolvido teoricamente e a sua solução está precisamente relacionada com a série harmónica.

Com efeito, se quisermos fazer uma coleção de *n* objetos obtidos aleatoriamente, em média o número de objetos a juntar é dado por:

$$média = n\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = n\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

No nosso caso, a coleção tem 6 elementos (as seis faces do cubo). Logo, o número médio de lançamentos a fazer é:

$$média = 6\times\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k} =$$

$$= 6\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) = \frac{147}{10} = 14{,}7$$

Ou seja, em média, é preciso lançar o dado 14,7 vezes até que saiam as seis faces.

Aproveitemos isto para analisar uma nova situação.

Sempre que há uma grande competição futebolística, a *Panini*, uma empresa italiana especializada, lança uma coleção de cromos. Foi o que aconteceu com o Euro 2016.

Figura 10.

A coleção tem 680 cromos. Por curiosidade, podemos então calcular, em média, quantos cromos era preciso comprar para fazer a coleção completa, se aceitássemos apenas o acaso e não fizéssemos trocas com outros colecionadores.

$$680\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{680}\right)\cong 4828$$

Como cada carteira custa € 0,70 e tem cinco cromos, cada cromo fica ao preço de € 0,14.

A despesa total média seria de

4828 x 0,14 = 675,92 euros.

Mas este preço, elevadíssimo, é irrealista porque podemos fazer trocas. Vamos imaginar que, com muita sorte e com muitos colecionadores conhecidos, fazíamos a coleção completa comprando o mínimo de cromos. Neste caso ideal, gastaríamos

680 x 0,14 = 95,20 euros.

Com o preço da caderneta, iríamos gastar cerca de 97 euros.

Agora reparem. Se a *Panini* pusesse as cadernetas já completas à venda por €97, alguém as compraria? Duvido muito. Quase toda a gente acharia (e com razão...) que era demasiado caro. Mas assim, em saquetas, milhares de pessoas em Portugal gastam muito mais por uma coisa que vale muito menos.

Para terem uma ideia de quão bom é este negócio, nas últimas épocas, a *Panini*, segundo os dados disponíveis na sua página da Internet, produziu anualmente um bilião (sim, um bilião!) de saquetas por ano. O que corresponde a 6 biliões de cromos!

As curvas da Torre Eiffel

Um dos principais motivos que fazem com que a Torre Eif-fel seja tão apreciada tem a ver com as suas caraterísticas estéticas. Tem uma beleza que nos atrai. As suas proporções e as suas linhas são muito agradáveis e não há quem vá a Paris e não a visite e fotografe (figura 11).

Figura 11.

A torre foi construída para ser a porta de entrada da Exposição Universal de 1889, que comemorou os cem anos da Revolução Francesa. Curiosamente, deveria ser desmantelada após a exposição, mas o seu êxito foi tal que se decidiu mantê-la.

O projeto da torre foi feito por Gustave Eiffel e pelo seu gabinete de engenharia. Os cálculos desenvolvidos acabaram por se perder mas o próprio Eiffel, num documento que se preservou, afirma que, em cada ponto, o momento das forças aplicadas pelo vento é igual e oposto ao momento do peso da estrutura.

Dois matemáticos dos Estados Unidos resolveram refazer os cálculos seguindo estas indicações. Para obter a curva do perfil da torre, tiveram de resolver uma equação integro-diferencial. Qualquer coisa como o que se vê na figura 12, em que a incógnita é a função f e onde aparecem também o integral e a derivada de f.

$$f(x).\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f'(x).\int_{x_0}^{x} (x-t)f(t)\,dt$$

Figura 12.

Verificaram que a solução é uma função exponencial. Não encontrámos na Internet mais nenhuma informação sobre a expressão analítica da função nem sabemos resolver este tipo de equação. Por isso, vamos descobri-la (aproximadamente, claro) usando a tecnologia.

Arranjámos uma boa fotografia da torre e colocámo-la numa página de Gráficos. Fizemos com que o eixo horizontal coincidisse com a base e que o eixo vertical fosse eixo de simetria da torre. Resolvemos usar o hectómetro (100 metros) como unidade de medida. Para que tudo ficasse à escala e como a altura da torre é de 324 metros, marcámos o ponto P de coordenadas (0; 3,24), ajustando depois a escala dos eixos de modo que o ponto P ficasse sobre o ponto mais alto da torre (figura 13).

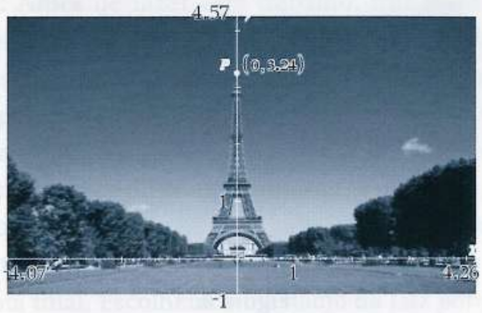


Figura 13.

Vamos procurar uma função exponencial do tipo $f(x) = a.b^x$

Criamos dois seletores. Um para o parâmetro a, a variar entre 1 e 4, outro para b, a variar entre 0 e 0,05 (figura 14).

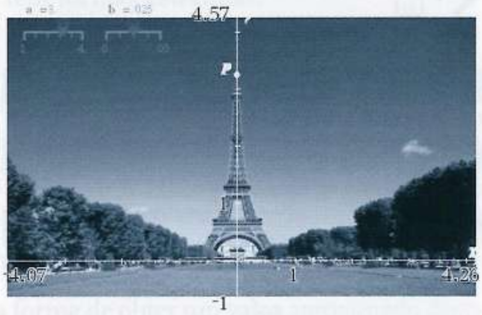


Figura 14.

No editor de funções introduzimos $f(x)=a.b^x$. Vamos agora, com a ajuda dos seletores, alterar os valores de a e b, tentando encontrar uma função cujo gráfico se adapte ao perfil direito da torre.

Isso acontece para a=3,24 e b=0,013 e portanto $f(x)=3{,}24\times0{,}013^x$.

Descoberta a função f_1 do lado direito, a do perfil esquerdo é $f_2=f_1(-x)$.

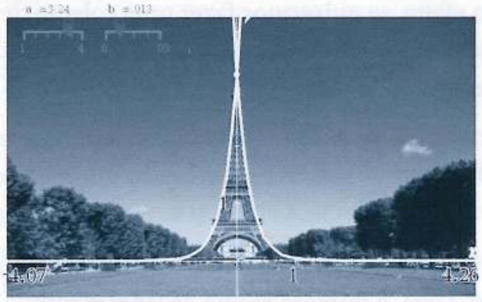


Figura 15.

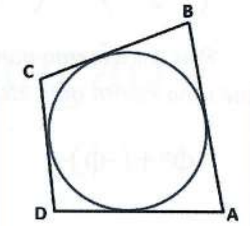
O resultado é o que se mostra na figura 15.

Estão a ver? Que maravilha.

A partir de agora, será inevitável. Cada vez que virmos a Torre Eiffel (ao vivo, numa fotografia, num filme) vamos ver também a matemática que lá está e as exponenciais do seu perfil. E vamos achá-la ainda mais bela.

José Paulo Viana

Um quadrilátero circunscrito



O quadrilátero ABCD circunscreve uma circunferência (a figura é apenas ilustrativa).
O lado AB mede 46 centímetros, o lado BC 40 centímetros e o lado CD 32 centímetros.
1.ª Pergunta: Quanto mede o lado DA?
2.ª Pergunta (para os entusiastas da tecnologia): De todos os quadriláteros nestas circunstâncias, qual é a área do maior? Qual é, neste caso, o raio da circunferência que ele circunscreve?

(Respostas até 31 de março, para zepaulo46@gmail.com*)*

ÀS VOLTAS COM A SEQUÊNCIA DE LUCAS

O problema proposto no número 137 de *Educação e Matemática* foi este:

O Carlos começou a escrever os primeiros termos da sequência de Lucas, aquela que começa com os números 1 e 3 e, depois, cada termo é igual à soma dos dois anteriores: *1, 3, 4, 7, 11, 18, ...*

O Luís, que o estava a observar, desafiou-o: – Descobre lá qual vai ser o algarismo das unidades do termo que ocupa a posição 2016.

O Carlos não se atrapalhou, fez uns cálculos e deu-lhe a resposta certa.

Que algarismo é esse?

Recebemos 13 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Catarina Ferreira (Viseu), Edgar Martins (Queluz), Carlos Dias, Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Graciano Martins (Carregado), Ilca Cruz (Amadora), José Carlos Frias, Luís Lopo (Montijo), Luís Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Mário Roque (Guimarães).

A primeira resolução que nos chegou foi da Alice e começava assim:

Adorei o problema que chegou hoje no correio. Deixei as coisas urgentes e fui resolver.

O método seguido pelos nossos leitores foi praticamente o mesmo. Demos a palavra à Graça:

O algarismo das unidades de cada termo obtém-se adicionando os algarismos das unidades dos dois termos anteriores. Vamos estudar a sequência dos algarismos das unidades dos primeiros termos da sequência de Lucas e procurar regularidades.

Ao que o Edgar acrescentou:

Chegar ao termo 2016 ia levar algum tempo. Se o Carlos apenas fez alguns cálculos deve haver algum "truque".

Realmente, repare-se no que acontece se fizermos uma tabela para os primeiros casos.

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
Algarismo	1	3	4	7	1	8	9	7	6	3	9	2	1	3	...

Como facilmente se constata, os algarismos das unidades repetem-se em sequências de comprimento 12. Assim, uma vez que 2016 = 12×168, o algarismo das unidades do termo de ordem 2016 é 2. [Graça]

O Edgar foi mais longe:

Só para confirmar, fui buscar a minha velhinha TI-83 e fiz correr este programa:

```
1→A
3→B
For(N,1,2014)
B→C
10*(fPart((A+B)/10))→B
C→A
End
Disp B
```

e bateu certo :)

O Mário acrescentou:

Já agora uma nota extra que, dada a dimensão do termo envolvido, é neste caso... absolutamente inútil.

Com algum trabalho, pode demonstrar-se que o termo geral da sequência de Lucas é

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Pois é... o eterno número de ouro ataca de novo e permite até uma escrita mais elegante:

$$\phi^n+(-\phi)^{-n}$$

Finalmente, o Alberto aproveitou a "embalagem" e resolveu o mesmo problema para mais duas sequências.

Na sequência de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), a sequência das terminações é periódica de período 60. Neste caso o termo na posição 2016 termina em 5.

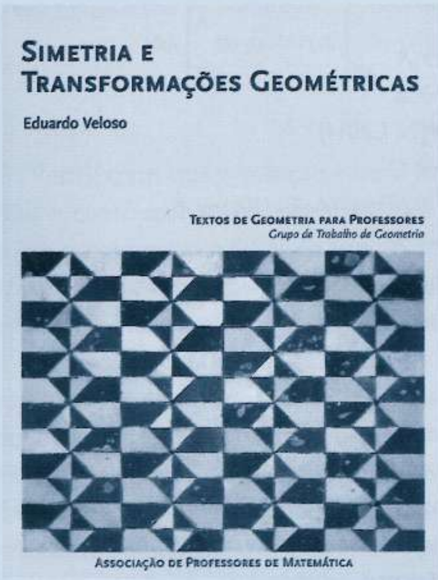
No caso da sequência de Mersenne (termo geral 2^n-1) a sequência das terminações é periódica de período 4. Neste caso o termo na posição 2016 termina em 5.

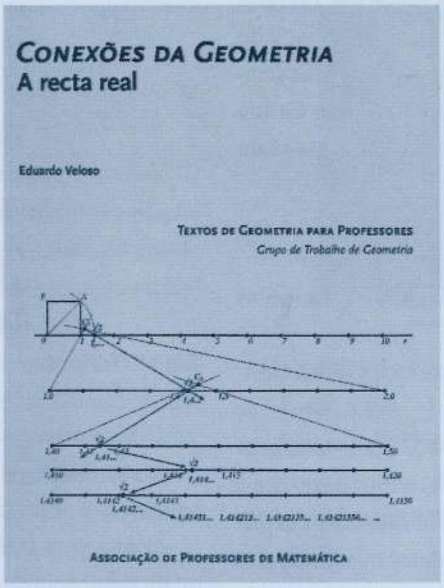
Publicações APM

Esta coletânea de textos de autoria de Eduardo Veloso, editada pela Associação de Professores de Matemática (APM) e da responsabilidade do Grupo de Trabalho de Geometria (GTG), tem por fim o desenvolvimento profissional dos professores nos ensinos básico e secundário, em particular no tema da Geometria. Tentaremos ter em atenção, como fator orientador dos conteúdos que escolhemos para os textos e da forma como são tratados, o propósito cultural que enfatizamos para o currículo de matemática, nomeadamente o conhecimento da sua história, da sua intervenção nas diferentes civilizações e das características próprias como aborda a realidade e se desenvolve como ciência.

A coletânea foi iniciada em 2012 e estão publicadas as seguintes obras:

- Simetria e Transformações Geométricas
- Conexões da Geometria: a recta real
- Conexões da Geometria: O plano complexo





Casos multimédia sobre ensino exploratório da Matemática: do retrato de uma prática à formação de professores

Hélia Oliveira

Ana Paula Canavarro

Luís Menezes

A tecnologia digital tem sido utilizada, nas últimas décadas, não só no ensino da Matemática mas também em contextos de formação de professores. Esta tem um papel importante, particularmente, ao retratar práticas de sala de aula inovadoras e exigentes como o ensino exploratório, permitindo uma compreensão alargada do que representa e do potencial de tal prática, assim como da complexidade de que esta se reveste. Neste artigo, ancorado no projeto P3M (Oliveira, Canavarro, & Menezes, 2014), damos a conhecer casos multimédia sobre ensino exploratório, em aulas de Matemática, que retiram partido das tecnologias digitais e discutimos as suas potencialidades para a formação de professores.

Retratar e analisar a prática de ensino exploratório

O ensino exploratório

A perspetiva adotada na construção e orientação dos casos multimédia centra-se na ideia de ensino exploratório, através do qual se pretende levar o aluno a realizar tarefas matemáticas desafiantes e também a colaborar, comunicar, questionar e refletir. A aprendizagem é assumida como um processo simultaneamente individual e coletivo, resultado da interação dos alunos com o conhecimento matemático, no contexto de uma atividade matemática, e também da interação com outros, através de processos de negociação de significado (Bishop & Goffree, 1986; Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

A este tipo de ensino está subjacente um novo papel para o professor. No apoio ao trabalho autónomo, mais do que explicar, o professor precisa ouvir e compreender cada aluno e promover a sua participação; nos momentos de interação em grande grupo, necessita de orquestrar discussões e sistematizar as ideias centrais, fomentando novas aprendizagens (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014; Chapman & Heater, 2010). Esta perspetiva de ensino exploratório enquadra-se num conjunto de abordagens de ensino centradas no aluno: este levanta questões, explora situações e desenvolve os seus próprios caminhos para a procura de soluções. Não é uma ideia nova, estando presente, de alguma forma, em educadores como Dewey e Polya ou em psicólogos como Vygotsky e Bruner, mas continua pouco representada nas aulas de Matemática devido a múltiplos constrangimentos.

Neste tipo de ensino é dada particular atenção às tarefas matemáticas propostas que podem assumir diversas naturezas, como problemas, investigações ou explorações. Não obstante esta diversidade, reconhecemos-lhes características particulares que potenciam uma atividade matemática significativa:

- partem de uma situação desafiadora e apelativa;
- admitem o uso de diferentes estratégias (e representações) e com diferentes níveis de sofisticação matemática, permitindo ao aluno apoiar-se na sua experiência para as resolver;
- favorecem o pensamento matemático, nomeadamente as capacidades cognitivas de nível superior;
- visam uma compreensão aprofundada dos conceitos e processos matemáticos ou ideias matemáti-

cas que se ligam com o conhecimento que os alunos constroem nas aulas;

- favorecem a articulação entre os conhecimentos matemáticos (e extramatemáticos);
- permitem evidenciar o que o aluno sabe ou consegue fazer.

O ensino exploratório constitui um desafio às práticas de ensino mais habituais, não só pelas tarefas a propor mas pela própria estrutura de aula, pelos papéis que são exigidos ao professor e aos alunos e pelo reconhecimento da comunicação matemática como elemento fundamental na aprendizagem (Oliveira et al., 2014). Uma aula de ensino exploratório estrutura-se, em geral, em três ou quatro momentos. Por exemplo, Stein et al. (2008) apresentam um modelo em três fases: lançamento da tarefa, exploração pelos alunos, e discussão e sintetização. No nosso contexto adotamos um modelo com quatro fases: introdução da tarefa; realização da tarefa; discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens. Esta organização de aula permite tirar partido do trabalho autónomo dos alunos e da discussão coletiva das suas resoluções para a construção ou aprofundamento de conhecimento matemático (Canavarro et al., 2014).

O uso de materiais multimédia para retratar práticas exigentes

São diversas as potencialidades que são reconhecidas à tecnologia digital, em particular ao uso de vídeos de aula que possibilitam representar práticas de ensino e facilitam o seu reconhecimento e análise pelos professores (Oliveira et al., 2014). Os vídeos proporcionam um contacto facilitado com práticas reais, de forma bastante completa, dando a conhecer ao professor abordagens ao ensino eventualmente novas ou desafiantes e levando-o a estabelecer conexões com a sua própria experiência profissional e a refletir sobre a sua prática, revendo-se como protagonista da situação e mobilizando conhecimentos que colocaria em ação em situações idênticas à observada (Koc, Peker, & Osmanoglu, 2009). Verifica-se, contudo, a necessidade de focar a sua atenção em aspetos particulares da prática visionada (van Es et al., 2014), nomeadamente no papel do professor e do aluno, natureza do discurso da sala de aula ou pensamento dos alunos. O vídeo é assim encarado como um recurso para a promoção da reflexão sobre a prática, eventualmente entre pares e com apoio de um formador.

Para aceder efetivamente à prática de outro docente, é necessária a observação das suas ações mas também conhecer as suas intenções, pois o professor age intencionalmente, de acordo com os seus propósitos. Assim, incluímos nos casos multimédia materiais diversos, como entrevistas com os professores visionados ou os seus planos de aula, construindo um recurso multimédia alargado que permite o acesso às ações do professor e também as razões que justificam o seu comportamento, situado em contexto de ensino (Canavarro et al., 2014).

Para desenvolver uma visão holística do ensino exploratório que permita compreender como este pode ser concretizado não é suficiente a análise de alguns episódios de aula esporádicos, mais ou menos pontuais. Assim, proporcionamos nos casos uma visão sequencial de uma aula de ensino exploratório, permitindo aos professores construir uma narrativa mental de uma aula desenvolvida a partir de uma tarefa matemática.

Um caso multimédia

Apresentamos de seguida, a título de exemplo, um dos casos multimédia "Subidas e descidas de combustíveis" (Menezes, Oliveira, & Canavarro, 2012). Trata-se de uma reconstrução de uma aula de Matemática do 6.º ano que recorre a diversos artefactos: vídeos de episódios de aula; ficheiros com transcrições de diálogos de aula, resoluções dos alunos e planos de aula; e áudios de duas entrevistas à professora.

A estrutura narrativa do caso multimédia segue-se através dos cinco separadores do caso: (i) Introdução ao caso multimédia; (ii) A tarefa matemática; (iii) A aula; (iv) Reflexão pós-aula; e (v) Passar à prática. Estes separadores incluem menus e submenus que os detalham.

Introdução ao caso multimédia

Neste separador inicial, apresentam-se informações sobre o contexto em que decorre a aula, nomeadamente sobre a escola, a professora e a turma. Este caso passa-se numa escola básica portuguesa, numa turma do 6.º ano com 19 alunos, com uma professora experiente e profissionalmente envolvida. Fica-se aqui também a saber qual o propósito da aula e da tarefa matemática proposta: aprofundar o conceito de percentagem.

A tarefa matemática

Neste separador apresenta-se o enunciado da tarefa, que retrata uma situação de subida do preço do combustível, seguida de uma descida com o mesmo valor de percentagem (10%). Pretende-se saber o que acontece ao preço final relativamente ao inicial, pedindo aos alunos que justifiquem a sua resposta. Os utilizadores do caso são convidados a resolver a tarefa e, em seguida, analisá-la em termos didáticos (figura 1), tendo em consideração um conjunto de questões orientadoras (por exemplo, "Que conhecimentos matemáticos estão envolvidos nesta tarefa? Que estratégias de resolução poderão os alunos, do 6.° ano, desenvolver? Como enquadraria esta tarefa no programa do 2°. Ciclo do Ensino Básico?").

A AULA

Este separador diz respeito à planificação e concretização da aula, que se desenrola em torno da tarefa matemática. Como se pode observar na figura 2 (barra vertical), a aula desdobra-se nas quatro fases do ensino exploratório (Canavarro et al., 2014). Para cada uma dessas fases é proposta uma reflexão em torno de três aspetos. O primeiro diz respeito à "Preparação" da aula, propondo-se a análise do plano de aula (pdf) e das intenções da professora (áudio da entrevista pré-aula). O segundo aspeto respeita à "Concretização" da aula, sendo apresentados episódios de aula em vídeo (legendados e transcritos em pdf). O terceiro aspeto, designado de "Sintetizando", pretende contribuir para apoiar a teorização da prática de ensino exploratório, em cada uma das fases de aula (figura 2).

Na "Preparação", o plano da aula da autoria da professora considera a introdução da tarefa, prevendo um conjunto de ações que visam a apropriação e a adesão dos alunos à tarefa (por exemplo, leitura do enunciado, formulação de questões para avaliar a compreensão dos alunos) e, simultaneamente, a organização do trabalho dos alunos (por exemplo, definir tempos e produtos esperados).

Na "Concretização" da aula apresentam-se dois episódios desta fase de introdução da tarefa (figura 3). A partir deles, os utilizadores são convidados a refletir sobre as ações concretizadas pela professora para introduzir a tarefa.

Após a "Preparação" e a "Concretização" da aula, surge o "Sintetizando" relativo à fase de introdução da tarefa, que resume numa página A4 as ideias teóricas mais relevantes relativas a esta fase. Através dele e das leituras para que reencaminha (disponíveis no menu "Leituras") e do trabalho de reflexão realizado antes, os utilizadores têm oportunidade de construir conhecimento didático sobre o ensino exploratório.

Depois de introduzida a tarefa, a aula avança para a nova fase: a realização da tarefa. Os alunos, organizados em grupos de três ou quatro elementos, "atacam" a tarefa. O facto de o enunciado não fazer menção a um valor para o preço da gasolina constitui uma dificuldade. O apoio da professora, através de perguntas, comentários e sugestões, mostra-se essencial para desbloquear o trabalho dos alunos. Esta tem a preocupação de não diminuir o nível cognitivo da tarefa,

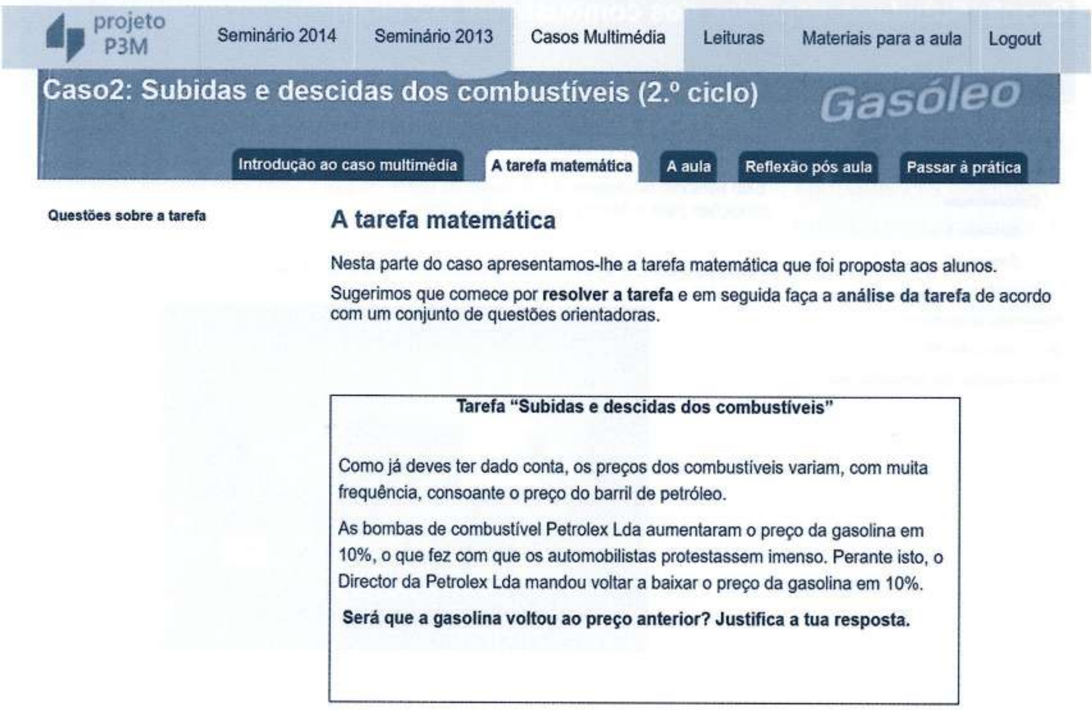


Figura 1. A tarefa matemática

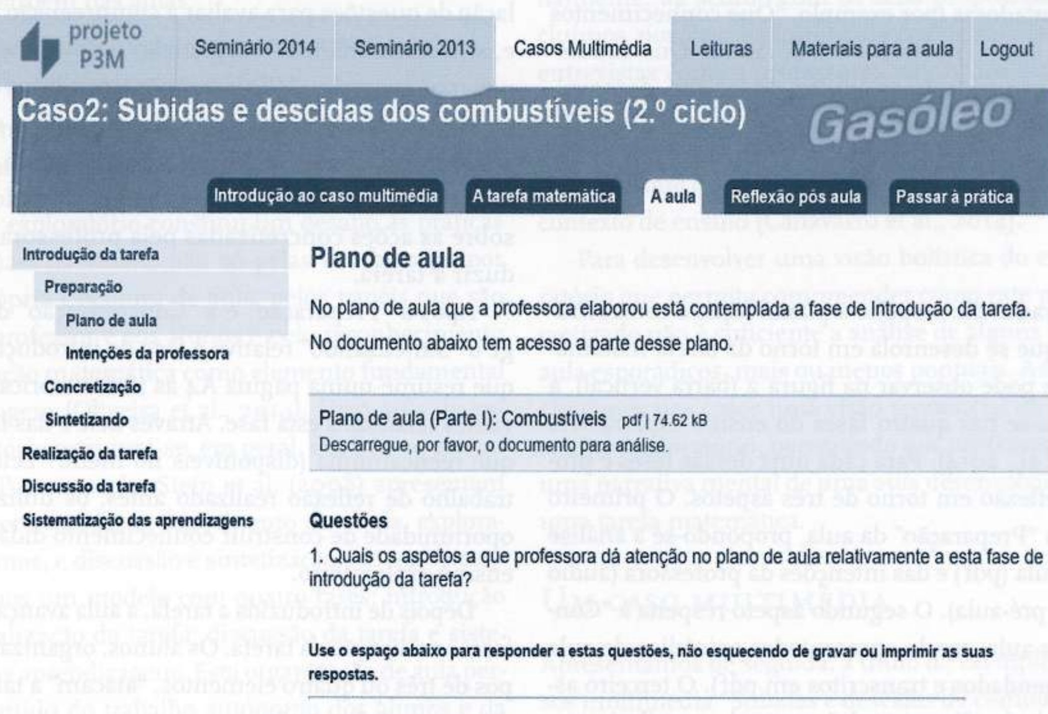


Figura 2. A aula

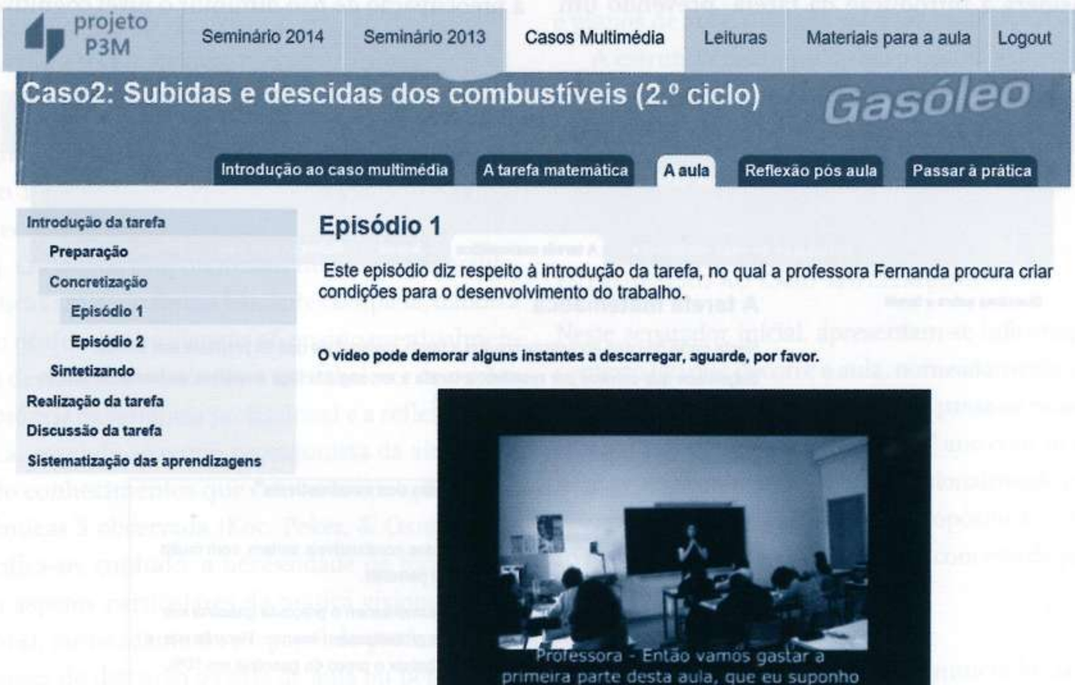
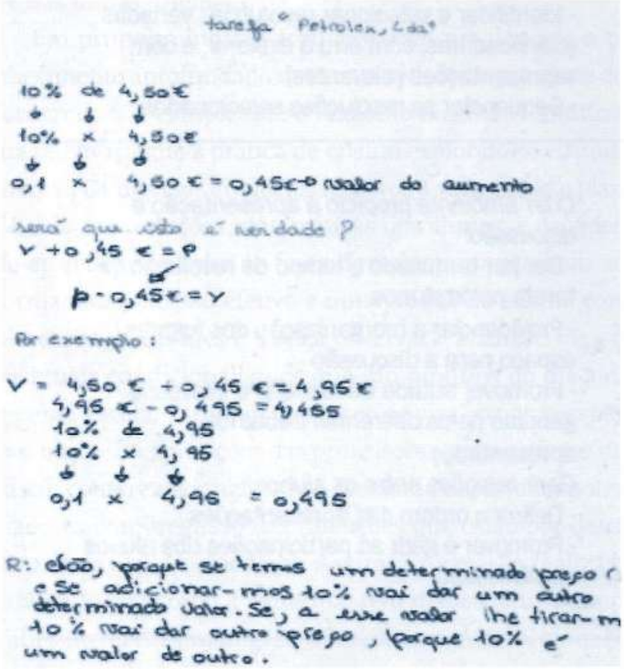


Figura 3. Vídeo do episódio da fase de concretização

dando espaço aos alunos para encontrarem resoluções criativas e eficazes. Tendo em conta os objetivos previstos e a observação que faz do trabalho dos grupos, a professora seleciona as resoluções que pretende ver discutidas em plenário, bem como a sua sequência.

Para a análise da fase de discussão coletiva, os utilizadores começam por encontrar uma secção relativa à preparação desta fase onde coexistem elementos que são prévios à aula (plano e intenções veiculadas na entrevista pré-aula) e as resoluções dos alunos que surgem na aula.

Numa das resoluções ali disponibilizadas, o grupo regista um dos exemplos que experimentou (figura 4). A resposta, embora pouco desenvolvida, representa um passo para a generalização, evidenciando a compreensão que a alteração do preço da gasolina é independente dos exemplos dados, como depois se visualiza num dos episódios disponíveis acerca da discussão coletiva.


tarefa "Petrolex, Lda"

10% de 4,50€
10% × 4,50€
0,1 × 4,50€ = 0,45€ → valor do aumento

será que isto é verdade?
v + 0,45 € = p
p - 0,45€ = v

Por exemplo:

V = 4,50 € + 0,45 € = 4,95 €
4,95 € - 0,495 = 4,455
10% de 4,95
10% × 4,95
0,1 × 4,96 = 0,495

R: Não, porque se temos um determinado preço e se adicionar-mos 10% vai dar um outro determinado valor. Se, a esse valor lhe tirar-mos 10% vai dar outro preço, porque 10% é um valor de outro.

Figura 4. Resolução do grupo 1

Na fase de discussão coletiva, a professora procura promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos, pedindo-lhes explicações para clarificar ideias e justificações dos seus raciocínios. Tal como acontece nas outras fases, propõe-se a análise do plano da professora, que inclui a sequência de diferentes resoluções que antecipa nos seus alunos, bem como a visualização de vídeos de aula em que se observa a orquestração da discussão coletiva pela professora. Deixando para o fim o grupo que mais avançou em termos da generalização, esta prepara já a fase da sistematização das aprendizagens. Relativamente a esta última fase, um episódio vídeo mostra como a professora procura distanciar-se da tarefa em concreto e evidenciar o conceito de percentagem nela subjacente e as suas ligações com outros conceitos matemáticos. Para tal, recorre a tiras de papel colorido e estabelece conexões entre o conceito de percentagem e os de unidade e de número racional. Ancorada na apresentação do último grupo, dirige-se aos alunos:

> E aquilo que eu queria agora convosco, pegando um bocadinho nesta ideia deles [o último grupo a apresentar] da unidade, era que pensássemos um pouco, para construirmos uma conclusão geral, todos em conjunto. (...) Então, isto é o vosso preço [mostra uma tira de papel colorido.] (...) O que é que eu tenho de acrescentar aqui à minha tira [no caso de haver um aumento de 10%]?

Os utilizadores do caso são por fim convidados a refletir sobre as intenções e as ações da professora tendo em vista a sistematização das ideias matemáticas relativas ao conceito de percentagem.

Reflexão pós-aula

Neste separador, os utilizadores têm possibilidade de analisar a reflexão pós-aula da professora relativamente a cada uma das quatro fases da aula, tendo como referência um quadro do ensino exploratório da Matemática (figura 5) por nós construído (Canavarro et al., 2014, p. 229).

Os utilizadores, apoiados em questões orientadoras, são convidados a identificar e relacionar as intenções e as respetivas ações da professora em cada uma das fases da aula, cruzando elementos relativos à preparação, concretização e reflexão da aula.

Passar à prática

Neste último separador, propõe-se aos utilizadores que planifiquem uma aula de ensino exploratório da Matemática que seja concretizável. Sugere-se o registo do respetivo registo vídeo e a elaboração de uma reflexão escrita que incida nas ações do próprio professor e nas aprendizagens matemáticas realizadas pelos seus alunos.

	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão dos alunos e da turma
Introdução da tarefa	*Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:* - Familiarizar com o contexto da tarefa (material cubos e autocolantes para apresentação) - Esclarecer a interpretação da tarefa (como?) - Estabelecer objetivos (o que se quer saber?) *Promover a adesão dos alunos à tarefa:* - Estabelecer conexões com experiência anterior - Desafiar para o trabalho	*Organizar o trabalho dos alunos:* - Definir formas de organização do trabalho (grupos de dois alunos para o trabalho autónomo e turma toda para a discussão coletiva) - Organizar materiais da aula (folhas com enunciado da tarefa e cubos e autocolantes para todos os grupos)
Realização da tarefa	*Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:* - Colocar questões e dar pistas - Sugerir representações - Focar ideias produtivas - Pedir clarificações e justificações *Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:* - Cuidar de promover o raciocínio dos alunos - Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos (nem respostas, nem expressões faciais)	*Promover o trabalho de pares/grupos:* - Regular as interações entre alunos - Providenciar materiais para o grupo *Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:* - Pedir registos escritos - Fornecer materiais a usar (acetatos e canetas) *Organizar a discussão a fazer:* - Identificar e selecionar resoluções variadas (clarificadoras, com erro a explorar, e com representações relevantes) - Sequenciar as resoluções selecionadas
Discussão da tarefa	*Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:* - Pedir explicações claras das resoluções (Porquê?) - Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas - Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas (tabelas e regras escritas como expressões com letras) *Regular as interações entre os alunos na discussão:* - Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas - Incentivar a resposta às questões colocadas	*Criar ambiente propício à apresentação e discussão:* - Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos - Providenciar a reorganização dos lugares/espaço para a discussão - Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados *Gerir relações entre os alunos:* - Definir a ordem das apresentações - Promover e gerir as participações dos alunos na discussão
Sistematização das aprendizagens matemáticas	*Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico suscitado pela exploração da tarefa:* - Identificar representações produtivas para obter generalizações (tabela) - Reconhecer o valor de uma regra com letras *Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:* - Evidenciar ligações com conceitos matemáticos e procedimentos anteriormente trabalhados (ideia de regra com letras; ideia de operação inversa).	*Criar ambiente adequado à sistematização:* - Focar os alunos no momento de sistematização coletiva - Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada *Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:* - Registo pela professora em acetato que previamente estruturou

Figura 5. Quadro de ensino exploratório

Uso dos casos multimédia na formação de professores

Os casos multimédia têm vindo a ser usados na formação de professores da responsabilidade de elementos da equipa do P3M. Na formação inicial, os casos têm sido explorados em sequências de aulas das unidades curriculares da área da Didática da Matemática, relativas a cursos de mestrado profissionalizantes de professores de todos os ciclos de escolaridade; na formação contínua, têm suportado a realização de oficinas de formação de grupos de professores preferencialmente provenientes do mesmo agrupamento de escolas.

Aparte diferenças resultantes das adaptações aos públicos-alvo e seus contextos de prática, a formação tem seguido linhas orientadoras comuns, tirando partido das potencialidades dos casos multimédia com vista ao desenvolvimento profissional dos formandos. Destacamos três ideias fortes dessas linhas orientadoras.

Em primeiro lugar, a formação tem privilegiado o conhecimento aprofundado do caso multimédia por parte dos formandos. A completude e realismo dos casos multimédia relativamente à prática de ensino exploratório é fundamental. Os diversos artefactos relativos à aula, desde o plano de aula às produções matemáticas dos alunos, e os vídeos de episódios de todas as fases da aula, proporcionam aos formandos o acesso efetivo a uma prática de ensino complexa que assim lhes é dada a observar e analisar, livre de eventuais condicionalismos que são próprios do dia-a-dia de uma escola. Também conhecer de viva voz as perspetivas, opções e explicações das professoras protagonistas dos casos, confere racionalidade à realidade observada, potenciando a compreensão das intenções que estão por detrás da prática e que a orientam. Assim, a formação realizada, tanto a inicial como a contínua, tem dedicado um tempo suficientemente prolongado ao conhecimento dos casos pelos formandos (uma média de 12h presenciais), beneficiando também da possibilidade de poderem aceder ao caso em estudo fora do contexto formativo, em regime autónomo.

Em segundo lugar, a formação tem tido uma dinâmica interrogativa e reflexiva, beneficiando da natureza reflexiva do caso, estimulada pelo facto de os formandos trabalharem em grupo. As questões que o caso vai colocando relativamente a diversos aspetos desta prática promovem a reflexão dos formandos sobre a prática de ensino exploratório. As respostas dos formandos a essas questões, elaboradas no seio do grupo e registadas por escrito, encontram lugar para debate em momentos plenários que a formação tem consignado para interação coletiva, nos quais existe a possibilidade de discussão das diversas visões e dúvidas que vão surgindo, bem como a sistematização de conhecimento partilhado sobre esta prática de ensino, orquestrada pelo/a formador/a. Esta reflexão sobre a prática de ensino exploratório, na formação inicial, desperta o aparecimento das conceções que os estudantes, futuros professores, têm acerca do ensino da Matemática, marcadas pelas vivências prévias, quase sempre muito tradicionais; na formação contínua, esta reflexão favorece a confrontação com as práticas regulares de ensino dos próprios professores. Em qualquer dos dois contextos, esta dinâmica de formação aproxima-se do exercício da prática de ensino exploratório, desta vez tomando-a como objeto.

Em terceiro lugar, a formação tem valorizado a relação teoria-prática que os próprios casos têm já imbuída. Esta relação culmina na proposta de realização de uma aula de ensino exploratório por parte de cada grupo de formandos, com o apoio do formador na fase de planificação para lhes dar *feedback*. Estas experiências de ensino são apresentadas em plenário para partilha com os restantes formandos. A concretização desta intervenção de "passar à prática" é geralmente vista como um grande desafio pela maioria dos formandos e beneficia em muito dos recursos teóricos constantes no caso, em especial do quadro do ensino exploratório da Matemática que serve de guia na preparação e condução da aula. Este quadro tem também servido de suporte à reflexão posterior sobre as experiências de ensino realizadas, proporcionando focos específicos relevantes para ancoragem da reflexão. Na formação contínua, o "passar à prática" concretiza-se nas turmas dos próprios professores; na formação inicial, têm existido duas possibilidades: ou na prática de ensino supervisionada ou em aulas de alguma unidade curricular do curso na qual a turma dos futuros professores funcione como contexto de experimentação.

A concluir

Os casos multimédia do P3M constituem um recurso poderoso e versátil que as tecnologias digitais possibilitam. Constituírem-se como possibilidade de acesso a práticas curriculares complexas, oferecendo uma representação real e completa desse objeto multifacetado – com facetas dinâmicas como a comunicação e a experiência matemática dos alunos – é, por si só, uma mais-valia para a formação relativa ao ensino exploratório. Mas é-o enquanto oportunidade de análise e reflexão sobre a prática de ensino, sustentada na relação teoria-prática, partilhada em interação entre pares mediada pelo formador, que proporciona a construção de conhecimento didático sobre esta prática de ensino da Matemática. A formação beneficia em muito dos casos, que são uma ferramenta ímpar, mas não se basta neles. Tal como em outros contextos de uso de tecnologias digitais, estas abrem múltiplas possibilidades que seriam vedadas na sua ausência, mas são as pessoas, formadores e formandos, e as sua interações que criam dinâmicas formativas que geram conhecimento relevante e útil para as práticas futuras.

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 217-233). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 445–458.

Koc, Y., Peker, D., & Osmanoglu, A. (2009). Supporting teacher professional development through online video case study discussions: An assemblage of preservice and inservice teachers and the case teacher. *Teacher and Teacher Education, 25*, 1158-1168.

Menezes, L., Oliveira, H., & Canavarro, A. P. (2012). Subidas e descidas dos combustíveis (2.º ciclo) – caso multimédia. In *Site do Projeto P3M, Práticas Profissionais de Professores de Matemática*. (http://p3m.ie.ul.pt/caso2-subidas-e-descidas-dos-combustiveis-2-ciclo)

Oliveira, H., Canavarro, A. P., & Menezes, L. (2014). Casos multimédia na formação de professores que ensinam Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 437-472). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (disponível em http://www.ie.ulisboa.pt)

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

van Es, E., Tunney, J., Goldsmith, L. T., & Seago, N. (2014). A framework for the facilitation of teachers' analysis of video. *Journal of Teacher Education, 65*(4), 340-356.

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
Luís Menezes
Instituto Politécnico de Viseu

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A ÁREA DO ESTÁDIO DA LUZ

As tecnologias atualmente disponíveis podem (e devem) alterar profundamente não só a forma de ensinar e aprender matemática, mas também a nossa atitude perante os problemas e interrogações que nos surgem.

Para além do habitual uso que fazemos da tecnologia nas nossas aulas, aproveitando o seu enorme *poder de visualização*, devemos ir mais longe e usá-la como instrumento de investigação. O nosso ensino será muito mais rico e útil se conseguirmos que os alunos se habituem, não apenas a responder às perguntas que lhes fazemos, mas sobretudo a colocar interrogações e conjeturas e a tentar ultrapassá-las com os conhecimentos e meios disponíveis. Neste aspeto, a tecnologia, abrindo possibilidades alargadas de experimentar e testar rapidamente, permite que as investigações se façam com muito mais eficiência e em menos tempo.

Pensamos que o nosso papel de professores não é apenas ensinar conteúdos. É também o de criar e desenvolver o espírito crítico e de investigação, aproveitando todos os meios que a sociedade nos disponibiliza.

A atividade que aqui se propõe vem precisamente nesta linha. É uma das que se apresentam no artigo *A Curiosidade Matemática e a Tecnologia* desta revista e destina-se a alunos do ensino secundário. Usando várias tecnologias, pode-se descobrir que área tem o Estádio da Luz.

José Paulo Viana

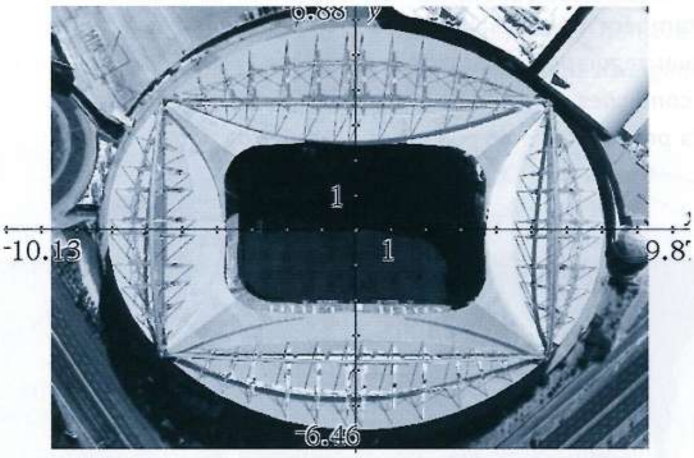
A ÁREA DO ESTÁDIO DA LUZ

Usando algumas das tecnologias hoje disponíveis, vamos descobrir a área do Estádio da Luz.

1. Na Internet, procura um mapa com fotografia aérea da cidade de Lisboa (por exemplo, o *GoogleMaps*). Faz uma ampliação de forma que se veja claramente o Estádio da Luz. Verifica se estão visíveis o centro do campo e pelo menos uma das balizas.

2. Como se vê, o estádio tem a forma de uma elipse. Reorienta o mapa de modo a que o eixo maior do estádio fique na horizontal. Faz uma captura de ecrã, apanhando apenas o estádio.

3. Transfere a imagem obtida para a tua máquina gráfica *Ti-Nspire* (ou similar), colocando-a numa página de *Gráficos*. Arrasta a página de modo que a origem do referencial coincida com o centro do campo de futebol. Confirma que o eixo passa pelo meio das balizas.



4. Temos agora de fazer com que a escala do referencial coincida com a realidade. Considera o hectómetro (100 metros) como unidade de medida. Como o comprimento do campo de futebol é de 105 metros (medida oficial da UEFA), a distância do centro do campo a uma das balizas é de 52,5 metros. Cria o ponto de coordenadas (0,525; 0) ou (-0,525; 0) e, alterando a escala, faz com que ele coincida com a baliza correspondente.

5. Cria o ponto O, origem do referencial, um ponto P na extremidade do semieixo maior da elipse e um ponto Q na extremidade do semieixo menor. Pede agora as distâncias de O a P e a Q.

6. No editor de funções, escreve a equação da elipse conhecidos os semieixos (escolhe *1:Introdução/Edição de gráficos, 3:Modelos de equações, 4:Elipse*). Verifica que a elipse coincide com a forma do estádio.

7. Mantendo-te nesta página, usa o comando que te dá a área da elipse. Em alternativa, numa página de cálculo, usa a fórmula da área da elipse, conhecidos os seus semieixos.

Tecnologia, Arte e Geometria

Este texto não está ligado a nenhuma experiência de ensino, não tem nenhuma sugestão didática ou profissional, é apenas uma oportunidade para refletir sobre estes três domínios e partilhar algumas ideias.

Há algumas caraterísticas próprias da utilização da tecnologia. Destaco três: repetição, variação e dinamismo. O recurso a instrumentos tecnológicos permite-nos repetir, rapidamente e sem esforço, uma grande multiplicidade de objetos. Esta repetição pode ser operada sobre ou a partir de representações dos objetos ou sobre objetos com existência física tangível. O avanço é de tal ordem que hoje reproduzimos facilmente objetos 3D pensados a partir das suas representações num ecrã. As possibilidades de variações sobre um objeto são também múltiplas, incluindo variações *ad-hoc*, sem qualquer regularidade ou critério, até variações reguladas por condições de múltipla natureza. O dinamismo advém da possibilidade de constituir variações interligadas e poder assim estudar as invariâncias decorrentes e simular até à exaustão as consequências dessas variações.

Estas três ideias, repetição, variação e dinamismo, são tão fortes e estão de tal forma já integradas nos nossos modos de raciocínio que influenciam sobremaneira o modo como olhamos para objetos que foram construídos sem o recurso à tecnologia. Refiro-me a objetos artísticos e destaco alguns com que me cruzei recentemente e que me deixaram a pensar (figuras 1 e 2). Todos eles são também objetos com valor geométrico. A figura 1 é a fotografia de uma composição em guache e tinta da china sobre papel, a figura 2 a fotografia de uma composição de relevos com recurso a recortes em plástico. Ambas recorrem repetidamente à reflexão, parecendo a primeira um exemplo de um estudo para a composição dos relevos como o da figura 2. Ambos os trabalhos são do artista português José Escada.

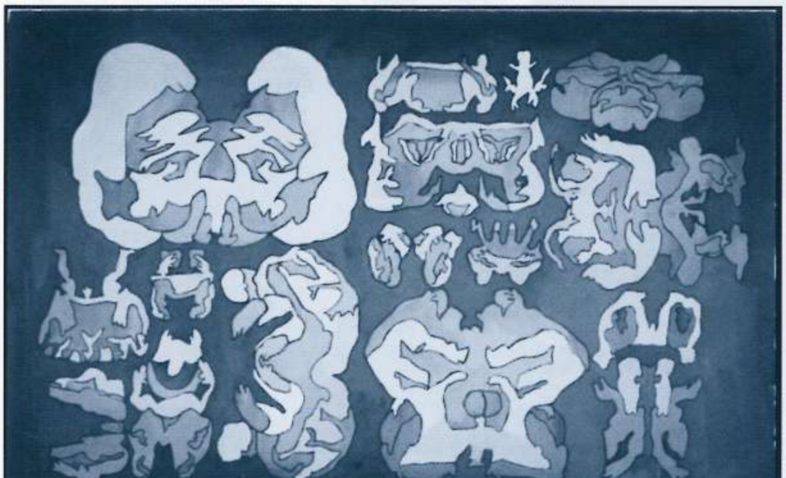


Figura 1

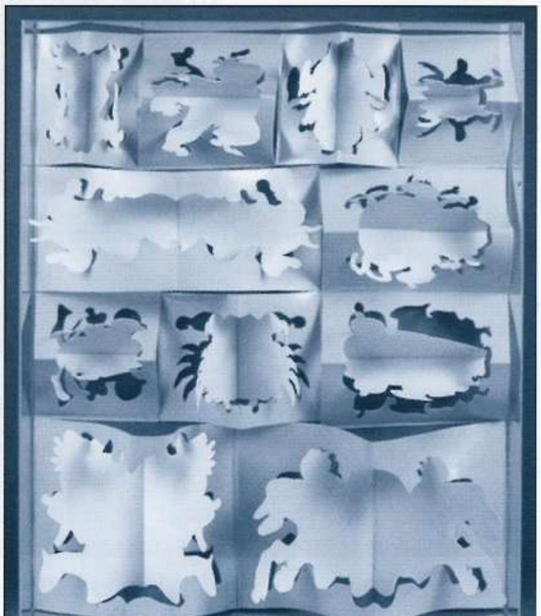


Figura 2

Nos anos sessenta, José Escada elaborou muitos relevos desta natureza com recurso aos mais diversos materiais. "Estes trabalhos constroem-se a partir de módulos retangulares onde se inscrevem, recortadas até três elementos por módulo, formas-figuras dobradas simetricamente, num sistema positivo-negativo (cheio-vazio) interdependente" (Museu Calouste Gulbenkian, 2016, p. 9). Estes trabalhos são classificados como Metamorfoses e considera-se que constituem uma abordagem à tridimensionalidade.

O que faria José Escada hoje com o recurso à tecnologia? Teria explorado outras possibilidades, fazendo composições mais complexas com recurso a outras transformações geométricas e à sua composição? Até onde iria a sua pulsão artística tão carregada de repetição, variações e dinamismo?

Artur Rosa criou esculturas belíssimas e composições planas nas quais se encontra repetição, variações e dinamismo (figuras 3 e 4).

É impossível observar em paralelo estas duas obras de Artur Rosa e não as relacionar. As mesmas questões sobre o recurso à tecnologia, colocadas a partir das obras de José Escada, poder-se-iam colocar a propósito dos trabalhos de Artur Rosa. Talvez aqui de uma outra forma. Como foram criadas estas obras sem o recurso aos instrumentos tecnológicos de que hoje dispomos? Seguramente que Artur Rosa usou matemática para criar objetos artísticos como aqueles que as figuras mostram. José Escada poderá ou não ter usado, mas deu sentido à simetria para os criar. Nos trabalhos de ambos pode apreciar-se a geometria com vida, tangível e em movimento.

Os exemplos são imensos. Mesmo sem sair da esfera dos artistas plásticos portugueses, em obras de muitos nomes encontramos repetição, variação e dinamismo. Como se estas três caraterísticas fossem próprias da criação plástica. Deixo por isso uma pergunta. O que poderemos aprender e ensinar sobre geometria e sobre a utilização da tecnologia a partir da criação artística plástica?

Ao fazer esta pergunta situo-me na educação básica. Penso que ao nível do secundário há já respostas e experiências muito interessantes, nomeadamente nas escolas artísticas e em muitos artigos divulgados na E&M.

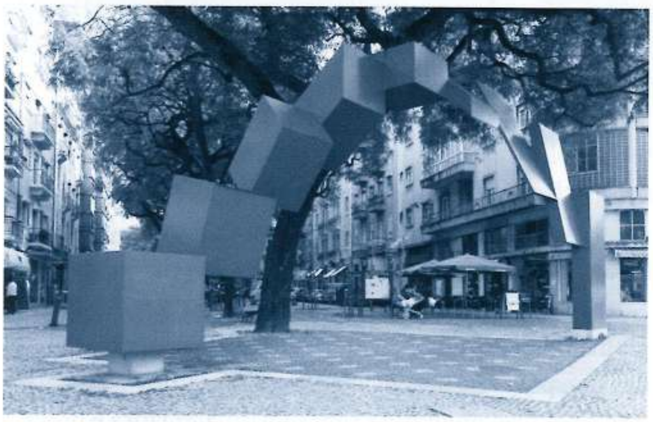


Figura 3

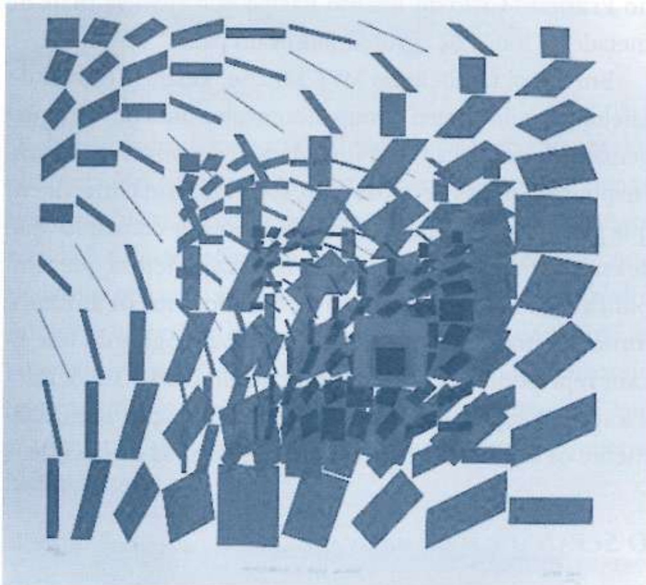


Figura 4

Referências Bibliográficas

Museu Calouste Gulbenkian (2016). *Eu não evoluo, viajo – José Escada.* Coleção Moderna. Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

Sousa, Pedro Miguel Pereira (2008). A arte op na arte pública em Portugal. Tese de mestrado, Repositório da Universidade de Lisboa, Faculdade de Belas Artes. http://hdl.handle.net/10451/639

Aprender a programar ou programar para aprender matemática?

João Torres
Miguel Figueiredo
Teresa Martinho Marques

Introdução

Em 1967 Seymour Papert criou, no Massachusetts Institute of Technology (MIT) a linguagem de programação *LOGO* que tinha como principal objetivo ajudar os alunos a aprender matemática e, em particular, geometria. Mais do que ensinar alunos a programar, Papert pretendia que o aluno aprendesse enquanto programava. Sessenta anos depois, as linguagens de programação voltam a estar na agenda dos sistemas educativos. Países como o Reino Unido ou a França integraram o pensamento computacional nos seus currículos e em Portugal está em curso, desde o ano letivo 2015/2016, um projeto piloto de Iniciação à Programação no Primeiro Ciclo do Ensino Básico que envolve mais de metade de todos os agrupamentos do país.

Em 2007, também no MIT, Mitchel Resnick, diretor do Lifelong Kindergarten Group, desenvolve uma nova linguagem de programação com finalidades educativas: o *Scratch*. Inspirando-se nas peças de *Lego*, foi criada uma linguagem que permite programar arrastando blocos de comandos que se encaixam uns nos outros. Uma ideia poderosa que simplifica a escrita dos programas, evitando erros de sintaxe e tornando mais fácil a compreensão dos programas que ficam representados graficamente, facilitando a sua leitura e a aprendizagem de conceitos de programação, nomeadamente os ciclos de repetição ou as estruturas de decisão.

O *Scratch* e matemática

Ao contrário do *LOGO*, o *Scratch* não foi desenvolvido tendo como principal finalidade o processo de aprendizagem da matemática. Mais abrangente nas suas finalidades, encontramos referências ao desenvolvimento da criatividade e de competências digitais essenciais no século XXI como (i) Competências de Informação e Comunicação, (ii) Competências de Raciocínio e Resolução de Problemas e Competências Interpessoais e de autodirecionamento (Natalie Rusk & Maloney, sd). Mas o raciocínio, a resolução de problemas e as competências de comunicação também se cruzam certamente com as grandes finalidades do ensino da Matemática e é por isso sem espanto que encontramos o *Scratch* entre os programas informáticos referidos nas Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico dos 1.º ao 9.º anos de escolaridade, recentemente disponibilizadas pela DGE, e nestas se encontre uma referência explícita ao uso do *Scratch*:

> . . . o *Scratch*, que, para além de uma iniciação a uma linguagem de programação, consequentemente envolve o pensamento lógico matemático, a estimação, coordenadas em referencial e variáveis (. . .) (DGE, 2016, p. 4)

Não sendo um programa concebido especificamente para o ensino da Matemática, como é o caso dos programas de geometria dinâmica, como o *Geogebra* ou o *Geometer's Sketchpad*, por exemplo, o *Scratch*, e as linguagens de programação de um modo geral, tem, de facto, potencialidades que podem e devem ser aproveitadas nesse processo. Não é possível programar sem saber matemática e programar pode também ser uma excelente oportunidade para desenvolver e consolidar aprendizagens nesta disciplina.

Vejamos algumas das ideias poderosas que os alunos podem desenvolver enquanto programam.

Referencial Cartesiano

Programar em *Scratch* passa por definir uma sequência de ordens a cada um dos "atores" (sprites na versão inglesa). Esses atores vão posicionar-se e movimentar-se num "Palco" com 480x360 pixels. Embora seja possível contornar a inserção manual das coordenadas de cada ator em cada momento, os alunos cedo percebem que é mais preciso e cómodo indicar as coordenadas manualmente. Os alunos trabalharão com o referencial cartesiano por necessidade e terão de compreender o significado dos valores estabelecidos para as coordenadas x e y.

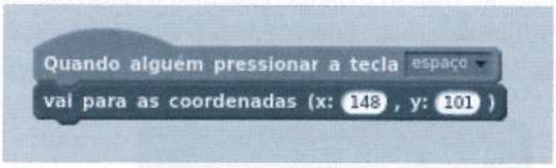


Figura 1. Exemplo de programa que posiciona um ator no palco quando a tecla espaço é pressionada

Se, por exemplo, desejarmos que um objeto se desloque de cima para baixo no ecrã, desde a posição y=180 até à posição y=-180, poderemos usar o código representado na figura 2. Claro que depois de executar o programa alguns problemas se poderão colocar. Com que velocidade desce o objeto? É adequada ao projeto que se está a programar?

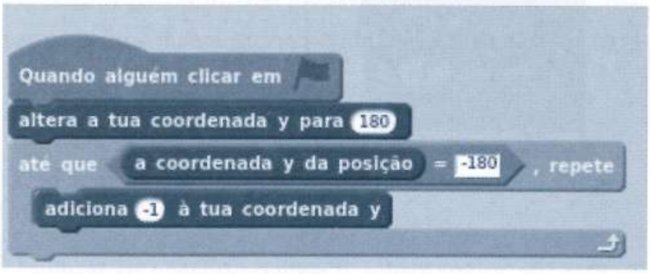


Figura 2. Programar um objeto para "cair" no ecrã

Como se pode aumentar ou diminuir essa velocidade? Todas estas questões são passíveis de ser colocadas pelos próprios alunos. Resolvem-se com matemática e, na maioria das vezes, os próprios alunos colocam-nas e respondem por iniciativa própria.

Números negativos e números decimais

No exemplo representado na figura 2 utilizamos números negativos. A primeira vez para estabelecer o ponto onde o objeto deixaria de descer e a segunda quando adicionamos ´-1´ à posição do objeto. Na realidade não existe em *Scratch* o comando para subtrair um valor à coordenada y (nem x) de um objeto. A solução é adicionar um número negativo. Os números negativos surgem assim naturalmente, para resolver problemas de programação. Da mesma forma, a utilização de números na representação decimal pode surgir como uma necessidade do próprio aluno. Tomemos, mais uma vez, um exemplo. As personagens, ou atores, no *Scratch* podem tomar várias formas ao longo de um programa 'vestindo' vários trajes. Assim, o morcego representado na figura 3 pode, em cada momento, aparecer com o traje 'bat1-a' ou 'bat1-b'. Se alternarmos a sua representação entre cada um destes trajes teremos a sensação de que bate as asas.

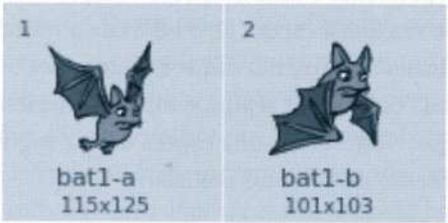


Figura 3. Dois trajes para o morcego

Se no interior de um ciclo infinito colocarmos um comando que permita ao morcego ir alterando o seu traje como representado no código da figura 4 teremos o efeito pretendido... ou quase!

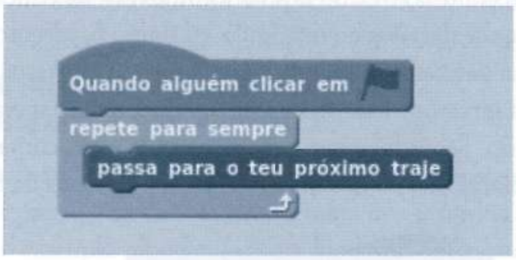


Figura 4. Código para o morcego bater as asas

Na verdade, devido à velocidade de processamento dos computadores, a alteração do traje será tão rápida que não temos a ilusão do bater de asas. Uma das grandes potencialidades deste *software* é a facilidade e rapidez com que podemos testar os nossos programas. Isso permite ao aluno testar e corrigir num espaço muito curto de tempo as suas conjeturas. Coloquemos dentro do ciclo o comando 'espera' que vem preenchido com o argumento '1' a que corresponde uma espera de um segundo, como representado na figura 5.

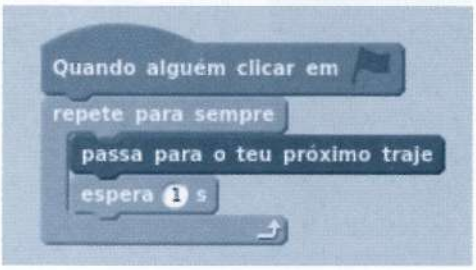


Figura 5. Batimento de asas com o comando 'Espera'

Voltando a testar o programa, o aluno perceberia que agora o morcego bate as asas muito lentamente uma vez que a espera de um segundo é demasiado longa para o efeito pretendido. Alunos do primeiro ciclo, mesmo antes da introdução dos números decimais sentem assim necessidade de representar e usar números compreendidos entre 0 e 1, uma vez que a espera de 0 equivale a retirar este comando e torna o batimento muito rápido e, por outro lado, utilização da espera de 1 segundo torna o batimento demasiado longo. Neste caso, uma espera de 0,2 segundos torna o batimento muito mais realista.

Geometria, variáveis e muito mais

Embora não sendo concebido especificamente para a aprendizagem da matemática, o *Scratch* mantém algumas das características do *LOGO* e possui um conjunto de comandos que permitem às suas personagens deixar um rasto, podendo assim desenhar à medida que se movimentam, tal como acontecia no *LOGO*. Se nos concentrarmos na lista de comandos destacados no retângulo na figura 6, veremos que a nossa personagem começa por "andar" 60 passos, para depois girar 90° e depois fazer uma pequena espera de 1 segundo. Seguidamente, repete 4 vezes estes comandos, desenhando assim um quadrado com 60 passos de lado.

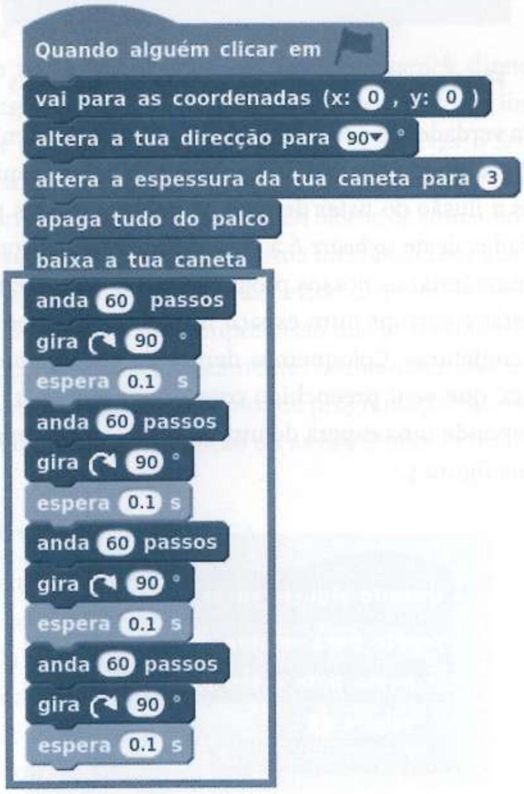


Figura 6. Procedimento para desenhar um quadrado em *Scratch*

Este seria, provavelmente, o conjunto de procedimentos que uma criança do primeiro ciclo utilizaria para programar uma personagem *Scratch* para que desenhasse um quadrado. A matemática está presente, pois só o conseguiria fazer se soubesse as propriedades do quadrado, evidentemente. Contudo, ao analisar o código, podemos verificar que há um padrão que se repete. Poderia, então, o mesmo quadrado ser desenhado utilizando o código que se representa na figura 7.

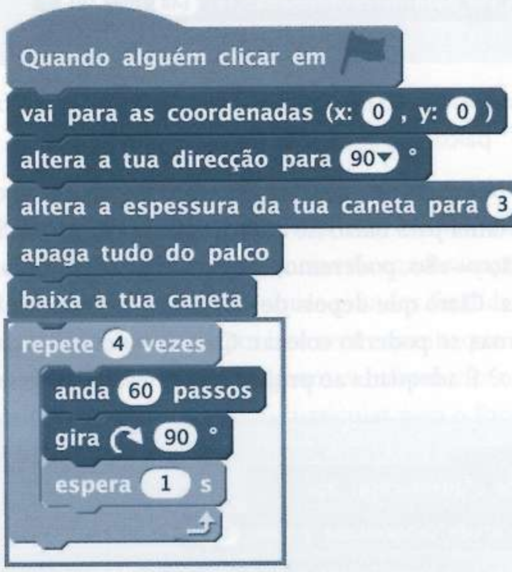


Figura 7. Procedimento para desenhar um quadrado em *Scratch*, utilizando ciclos

Para um programador, o código utilizado na resolução apresentada na figura 7 é mais "elegante" que o utilizado anteriormente, uma vez que é mais curto e simples de ler. Ao nível matemático, também passamos de uma lógica aditiva, em que dissemos à nossa personagem para fazer uma sequência de comandos, para passarmos para uma lógica multiplicativa, em que passamos a dizer que repita 4 vezes uma sequência mais curta, obtendo-se o mesmo resultado final.

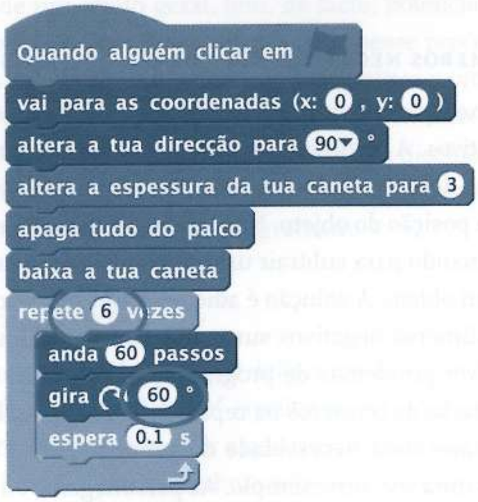


Figura 8. Procedimento para desenhar um hexágono em *Scratch*

Estamos, portanto, perante conceitos matemáticos e o aluno que passe da primeira resolução para a segunda está, certamente, a pensar como um matemático, compreendendo a relação matemática existente entre a multiplicação e a adição de parcelas idênticas.

Modificando apenas dois dos números do programa obteríamos, por exemplo, um hexágono, como se demonstra na figura 8. Facilmente percebemos que teremos de mudar o número de repetições do ciclo, uma vez que o hexágono tem 6 lados e o ângulo que a nossa personagem roda em cada vértice (ângulo externo, suplementar do ângulo interno – conteúdos matemáticos) também é diferente, passando, no caso do hexágono a ser de 60 graus. O aluno poderia agora ser desafiado a encontrar outros pares de valores que permitissem obter outros polígonos regulares e poderia chegar a 3 –> 120 para o triângulo, 5 –> 72 para o pentágono, etc... A procura de regularidades é uma tarefa cognitiva importante no raciocínio matemático.

Quando o aluno compreender que existe uma relação entre estes dois números poderá, utilizando variáveis, passar para uma fase seguinte, onde poderá criar um programa que permita desenhar vários polígonos regulares, bastando, para isso, alterar o valor da variável que controla o número de lados (ver figura 9).

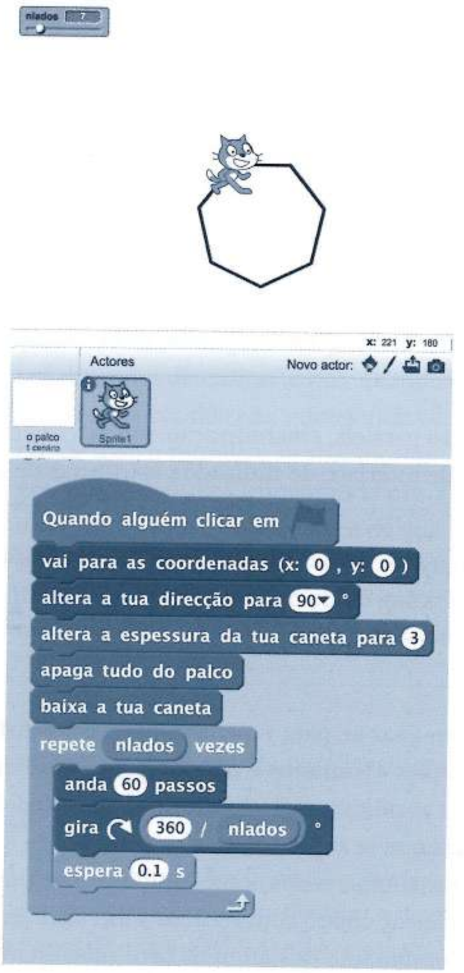


Figura 9. Generalização do desenho de polígonos usando variáveis

Numa conferência TED[1], a determinada altura Mitchel Resnick conta a história de uma visita que fez a alunos que utilizavam o *Scratch*. Um aluno tinha criado um jogo onde um peixe grande, controlado pelo utilizador, comia peixes mais pequenos, que se moviam no ecrã. O aluno queria saber quantos peixes tinham sido comidos e pediu ajuda ao investigador. Mitchel explicou-lhe que o poderia fazer criando uma variável que seria incrementada cada vez que um peixe era comido. Com alguma ajuda, passado poucos minutos, o aluno criou uma variável e a contagem começou a aparecer no ecrã. No final, agradeceu ao investigador dizendo-lhe: "Obrigado, obrigado, obrigado! Obrigado por me ensinar o que são variáveis". Resnick refere muitas vezes em encontros que serão poucas as ferramentas e contextos de trabalho em que os alunos desejam aprender conceitos matemáticos e agradecem quando estes lhes são ensinados, permitindo-lhes avançar na complexidade dos seus projetos.

Criar programas relacionados com a aprendizagem da matemática

A matemática estará presente na maioria dos projetos dos alunos, mas pode também ser o tema dos próprios projetos. No exemplo representado na figura 10, uma aluna do 5.° ano criou um jogo onde o jogador é desafiado a controlar um cavalo com as setas do teclado para tocar em todas as bolas que representem múltiplos de sete. Um contador, à esquerda no cimo do ecrã, será incrementado com 1 unidade por cada múltiplo encontrado. Além de toda a matemática envolvida, por exemplo para movimentar o cavalo, neste caso, o aluno teve que encontrar os múltiplos que queria representar. Neste caso concreto, por exemplo, o jogador tinha apenas 45 segundos para encontrar os múltiplos e, mais uma vez, a matemática estava presente.

Figura 10. *Projeto* Múltiplos de Sete

No exemplo representado na figura 11, outra aluna (6.º ano) criou um jogo, que designou por "Fração intrusa" em que o jogador terá que clicar sobre as frações e, em cada uma delas, ouvirá uma gravação que lhe indicará se a referida fração é a que quer descobrir: equivalente a quatro quintos. Mais uma vez, a aluna teve que mobilizar conteúdos matemáticos para conceber o jogo.

Desafiar os alunos para criarem jogos ou aplicações relacionados com os conteúdos da disciplina de matemática pode ser uma maneira de garantir que os utilizam. No entanto, a matemática estará, quase com toda a certeza, presente em todos os projetos que realizarem em *Scratch*.

Teresa Marques (2009) realizou um estudo em que utilizou o *Scratch* com uma turma de 5.º ano durante um ano letivo. Reproduzimos de seguida algumas das competências matemáticas trabalhadas com os alunos ao longo desse ano letivo que sintetizou num quadro apresentado na página 135 do seu trabalho (Tabela 1)

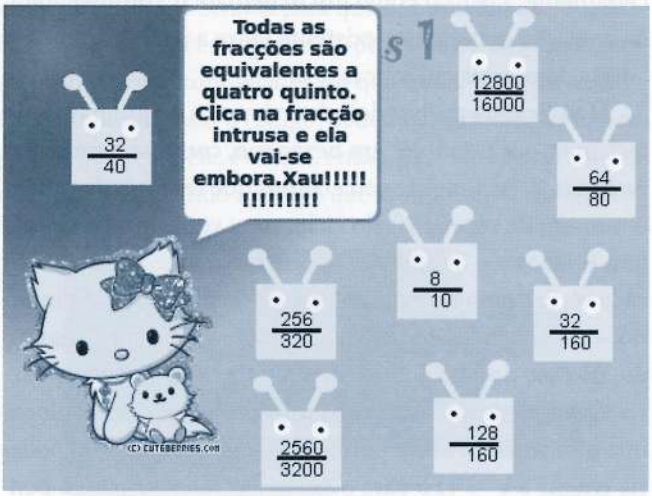


Figura 11. *Projeto* Fração Intrusa

Tabela 1. Síntese de conceitos e competências de programação explorados no *Scratch* e competências e conceitos matemáticos trabalhados na Turma X (adaptado de Marques (2009))

Competências para resolução de problemas e para a concepção de projectos • raciocínio lógico • decomposição de problemas complexos em partes mais simples • identificação e eliminação de erros • desenvolvimento de ideias, desde a concepção até à concretização do projecto • concentração e perseverança **Noções básicas sobre computadores e programação** • os programas indicam ao computador exactamente o que deve ser feito, passo por passo • criar programas para computador em Scratch não exige perícia especial, apenas raciocínio claro e cuidadoso **Conceitos específicos de programação:** Sequência, iteração (ciclos), instruções condicionais, variáveis, execução paralela, sincronização, interacção em tempo real, lógica boleana, números aleatórios, gestão de eventos, desenho de interface do utilizador, estruturas de dados.
Sequência - Para criar um programa *Scratch* é preciso pensar de forma sistemática na ordem de execução das instruções. No estabelecimento de prioridades de cálculo (expressões numéricas), ou de passos de resolução de um problema, o entendimento desta ideia de prioridade trabalhado com as sequências é fundamental.
Iteração (ciclos) e também sequências – repete e para sempre podem usar-se para repetir um bloco de instruções. Operação multiplicação (adição de parcelas idênticas). Todas as operações - **Números e cálculo** (primeira abordagem aos números racionais e ao conceito de percentagem – comandos que permitem redução e ampliação)), **Medida, Geometria e Álgebra** (uma vez que a sequência de instruções combinadas que se repete nos ciclos pode ser de qualquer natureza ou domínio matemático). Alguns aspectos trabalhados pelos alunos: movimento obtido com recurso à variação das coordenadas (posição de um ponto no plano); movimento linear obtido com recurso a um valor inteiro ou fraccionário, ângulos internos e externos, ângulos suplementares; combinação dos ângulos com movimento linear para obtenção de "linhas curvas"); tempo (valor inteiro ou fraccionário), velocidade, direcção, sentido...

Gestão de eventos e desenho de interface do utilizador – resposta a eventos despoletados pelo utilizador ou por outra secção de um programa e desenho de interfaces de utilizador interactivas – por exemplo usando *sprites* clicáveis para criar botões. Mesmo projectos que não ilustram directamente conceitos matemáticos usam-nos. O controlo de gráficos e eventos pode ser uma actividade matemática intensa que envolve conceitos diversos, dependendo do contexto e da situação. Para a construção de histórias e diálogos, por exemplo, os alunos necessitam de controlar os tempos e momentos de intervenção fazendo, por sua iniciativa, os cálculos necessários. Para conceber alguns cenários propostos foi necessário recorrer às coordenadas no plano e descobrir modos de garantir o rigor de determinadas distâncias.

Conclusão

Mais do que um programa concebido para a aprendizagem da matemática, o *Scratch* apela à criatividade dos alunos fornecendo um ambiente rico onde podem utilizar ideias poderosas, testando-as e obtendo imediatamente os resultados para as suas conjeturas, desenvolvendo também competências de resolução de problemas e a autonomia e persistência necessárias para enfrentar os desafios colocados pela programação (transferindo essas competências para outras situações). O aluno perceberá ainda que para programar têm que ser mobilizados conceitos matemáticos, dando sentido à matemática que aprende.

Se programar é uma competência fundamental no séc. XXI, a matemática tem um papel imprescindível para que o aluno consiga programar. Programar pode ser assim um ótimo pretexto para aprender matemática criando necessidade de a compreender como já há muito Papert (1997) alertava:

> Será que estamos mesmo à espera que as crianças se mantenham passivas perante os currículos pré-digeridos do ensino básico, quando já exploraram o saber contido nas auto-estradas da informação de todo o mundo e se abalançaram a realizar projetos complexos, procurando por si próprias o conhecimento e os conselhos de que necessitaram para os pôr em prática? (Papert, 1997, p. 226)

Nota

[1] http://www.ted.com/talks/mitch_resnick_let_s_teach_kids_to_code?language=pt

Referências

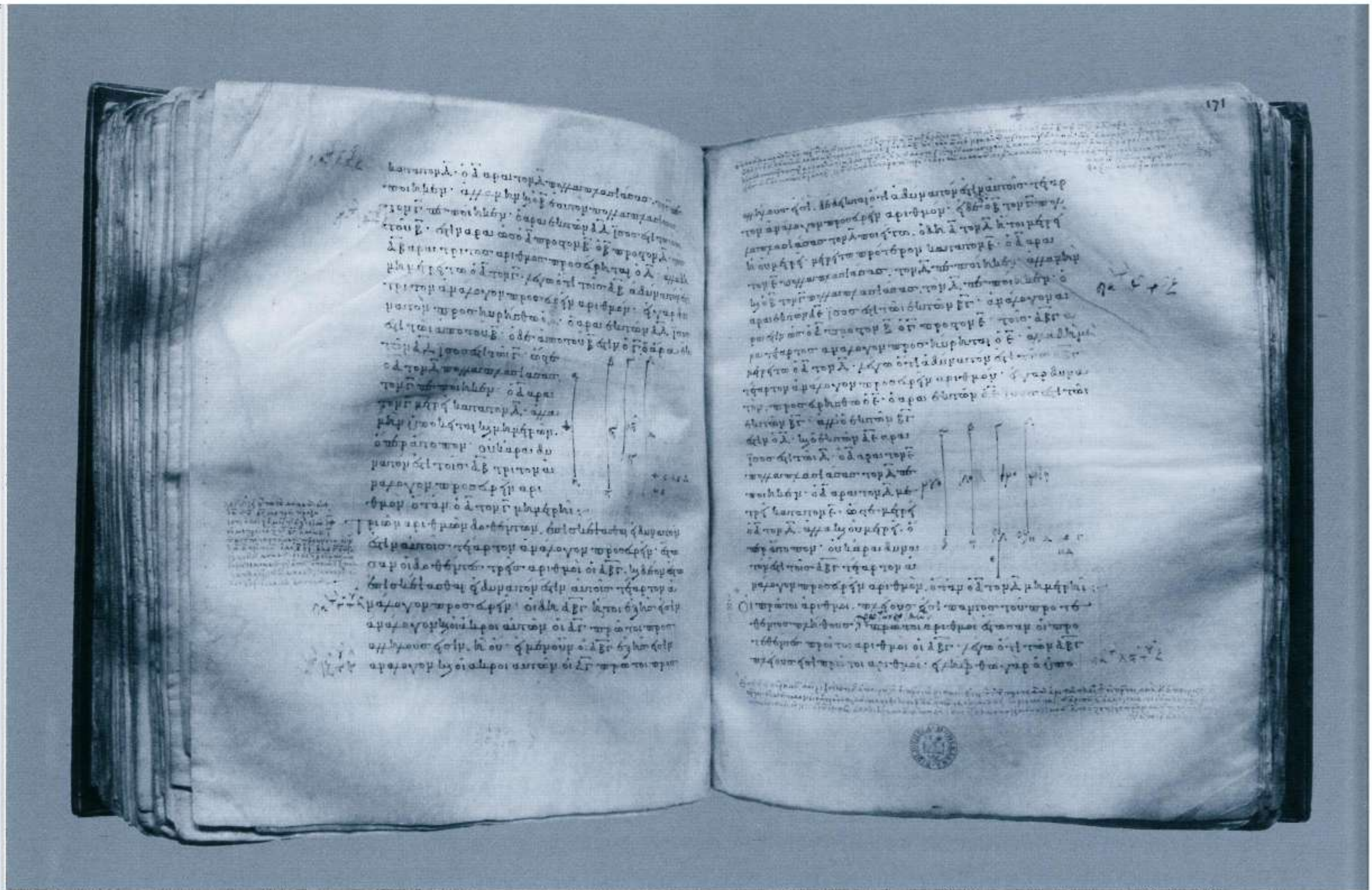
DGE (2016, Agosto). Orientações de gestão curricular para o programa e metas curriculares de matemática ensino básico dos 1.º ao 9.º anos de escolaridade. Acedido em: http://www.dge.mec.pt/ sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/ documento_orientador-_ensino_basico.pdf (Acedido em setembro de 2016)

Natalie Rusk, M. R., & Maloney, J. (sd). Competências de aprendizagem para o Séc. XXI. Lifelong Kindergarten Group MIT Media Laboratory. Acedido em: http://projectos.ese.ips.pt/ eduScratch/index.php/recursos2/finish/34-textos/370-competencias-de-aprendizagem-para-o-sec-xxi-documento-mit/0 (Tradução para português de Teresa Marques, Acedido em março de 2016)

Papert, S. (1997). A família em rede. Lisboa: Relógio D'Água.

Marques, M. T. P. M. (2009). Recuperar o engenho a partir da necessidade, com recurso às tecnologias educativas: Contributo do ambiente gráfico de programação Scratch em contexto formal de aprendizagem. (Tese de Mestrado). Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Lisboa.

João Torres
Escola Superior de Educação/Instituto Politécnico de Setúbal
Miguel Figueiredo
Escola Superior de Educação/Instituto Politécnico de Setúbal
Teresa Martinho Marques
Agrupamento Vertical de Escolas de Azeitão



"Proposição 20 do livro 9 dos Elementos de Euclides"

O computador enquanto tecnologia ao serviço da investigação matemática*

Reinhard Kahle e Isabel Oitavem

Quando, nos anos 1980s e 1990s as universidades foram equipadas com computadores, e estes ficaram acessíveis a estudantes e docentes, para serem usados na docência e também na investigação, a receptividade ao uso do computador nas actividades de investigação em matemática foi reduzida. Houve professores de matemática que recusaram esta tecnologia com o argumento de ela não ser uma mais-valia para a sua investigação. A verdade é que, apesar da grande evolução dos computadores desde então até aos nossos dias, continua a não ser claro como é que a capacidade computacional actual pode ser posta ao serviço da investigação matemática em geral.

Por exemplo, sabe-se, desde Euclides, que existe um número infinito de números primos. A demonstração original foi, obviamente, feita sem recurso a qualquer tecnologia. Hoje em dia, o poder computacional disponível é usado para calcular mais e mais números primos – o recorde atual[1] é $2^{74207281}-1$. Os números primos têm aplicações importantes, por exemplo na criptografia, pelo que é essencial dispormos de ferramentas para os calcularmos. Porém, se a capacidade de cálculo permite alimentar as aplicações, não permite, por si só, responder à questão teórica de base: provar que os números primos são infinitos. Neste sentido, do ponto de vista da investigação matemática, o recurso à tecnologia não constitui uma mais-valia.

Tal pode ser ilustrado pelo problema dos números primos gémeos. Dois números primos dizem-se gémeos se a sua diferença for 2. Os pares (3, 5), (5, 7), (11, 13), mas também (107, 109) são exemplos de números primos gémeos. É uma questão em aberto saber se existe um número infinito de números primos gémeos. Uma curta reflexão mostra que os computadores não podem ajudar a resolver esta questão, pelo menos não a podem resolver por "força-bruta": podemos tentar encontrar mais e mais exemplos de números primos gémeos, mas uma tal procura, mesmo que tenhamos mais e mais "sucessos", não vai permitir concluir que existe um número infinito de tais números; e, no caso de existir só um número finito, vamos procurar sem fim – mas sem saber que não há um fim.

Dito isto, há obviamente áreas de investigação matemática, onde o computador tem um elevado valor heurístico. Ele permite/facilita o cálculo de exemplos que satisfazem conjecturas, ou – em casos particulares – permite mesmo fornecer contra-exemplos. A área da combinatória é, por exemplo, uma área da matemática onde combinações em conjuntos finitos, mas algumas vezes muito grandes, são sistematicamente estudadas. Neste contexto pode-se querer verificar uma certa propriedade para um conjunto grande de casos particulares, e o computador pode fazer este trabalho por nós. Porém, regra geral, a parte matematicamente mais interessante, não é a verificação destes casos, mas sim o argumento matemático que os especifica. Vamos regressar a isto mais à frente, quando discutirmos a demonstração controversa do teorema das quatro cores.

Uma outra área que pode tirar proveito do recurso aos computadores é a investigação operacional. Nesta área procuram-se algoritmos que forneçam soluções óptimas para problemas como o do caixeiro-viajante (determinar a menor rota para percorrer uma série de cidades). De certa forma, aqui o computador (ou mais exatamente os algoritmos a implementar no computador) é o objeto de estudo matemático e, por isso, não deve constituir surpresa que ele seja usado. Adicionalmente, "verificamos" (i.e. testamos) a eficiência dos algoritmos encontrados deixando o computador calcular um grande número de exemplos (este procedimento designa-se em inglês por benchmarking).

O mesmo se aplica em criptografia, onde se investiga os algoritmos de encriptação. Tais algoritmos permitem às pessoas autorizadas uma decifração fácil, e às restantes, mesmo quando usando grandes poderes computacionais, não permitem quebrar a encriptação.

No entanto, recentemente, o computador entrou numa outra zona da investigação matemática: a verificação de demonstrações.

Já mencionamos a demonstração do teorema das quatro cores: baseado em trabalho de Heinrich Heesch os matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken demonstraram este teorema em 1976, usando programas de computadores para a verificação de que 1936 "casos problemáticos" têm uma certa propriedade que é suficiente para assegurar o teorema. Esta demonstração iniciou uma discussão profunda sobre o uso de computadores em demonstrações matemáticas. Note-se que a demonstração teve duas partes: uma primeira que consiste na redução aos 1936 casos – esta parte não envolve o computador e é considerada puramente "matemática" no sentido tradicional – e uma segunda parte que consiste na verificação por "força-bruta" (i.e. exaustiva) dos 1936 casos, efetuada pelo computador. Aqui "o problema" reside apenas no número de casos a considerar que, de tão grande, inviabiliza a sua verificação por um matemático (apesar da verificação de cada caso, por si só e isoladamente, não ser problemática)[2]. Pelo menos quando, em 1996, Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas apresentaram uma nova demonstração ainda com recurso a computadores, mas desta vez com "apenas" 633 casos, a comunidade matemática aceitou esta forma de demonstração.

A discussão reiniciou-se só quando, em 1998, Thomas Hales deu uma demonstração da conjetura de Kepler. Segundo a conjetura de Kepler se empilharmos esferas iguais, a densidade máxima é alcançada com um empilhamento piramidal de faces centradas. De resto, esta é a forma como se empilham laranjas numa banca de venda.

Como no caso do teorema das quatro cores, a demonstração de Hales baseia-se na redução a uma série de casos (apesar da matemática envolvida para chegar a estes casos ser mais complicada do que no caso do teorema das quatro cores). E estes casos são verificados por programas implementados em computadores. Hales foi convidado a publicar o seu trabalho no Annals of Mathematics, uma das revistas mais prestigiadas do mundo; mas o grupo de doze matemáticos, que teve de fazer a revisão chegou a um resultado estranho: estavam "99% seguros" de que o resultado estava correto. Para assegurar o 1% em falta, Hales iniciou um projeto quase revolucionário a que chamou Flyspeck, e consistia na verificação formal da sua demonstração por um outro programa de computador. Sobre o Flyspeck, Hales e muitos colaboradores trabalharam onze anos, de 2001 até 2014, para formalizar a demonstração original num sistema computacional (HOL Light) e verificar todos os passos desta demonstração.

Qual é o significado duma tal verificação de demonstrações por computadores? Poder-se-ia pôr a questão de ter que verificar a correcção da verificação da demonstração, e assim por diante, o que conduziria a uma sequência sem fim de verificações. Mas o que se passa é que, em geral, é bem mais fácil verificar a correcção de uma demonstração do que encontrá-la. Da mesma forma, os programas computacionais para efetuar uma tal verificação são suficientemente simples para, hoje em dia, serem aceites sem necessidade de recorrer a mais uma "auto-verificação". Com os programas de verificação (como o HOL Light) ganhamos, de facto, mais confiança na demonstração verificada. Eles constituem uma ferramenta de "validação" de demonstrações. Nessa medida, a verificação formal de demonstrações complexas tornou-se uma nova "indústria" de investigação matemática que aproveita essencialmente os novos recursos tecnológicos.

Não substituindo o raciocínio humano, os recursos tecnológicos têm hoje um espaço incontestável na investigação matemática.

Notas:

* Investigação apoiada pelo projeto Hilbert's 24th Problem, PTDC/MHC-FIL/2583/2014, e pelo Centro de Matemática e Aplicações, UID/MAT/00297/2013, financiados pela FCT/MCTES.

[1] Ver https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo#Maior_n.C3.BAmero_primo_j.C3.A1_calculado

[2] Existiram também críticas relativamente à elegância, expressa pela frase anónima: "Uma boa demonstração lê-se como um poema, esta parece ser uma lista telefónica."

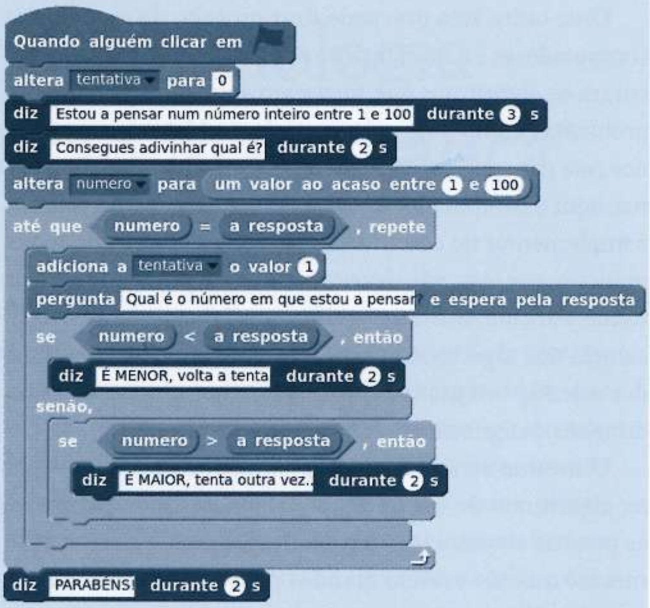
Reinhard Kahle
CMA e DM, FCT, Universidade NOVA de Lisboa
Isabel Oitavem
CMA e DM, FCT, Universidade NOVA de Lisboa

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Esta atividade destina-se a alunos do 3.º ou 4.º anos de escolaridade, de preferência com alguns conhecimentos prévios de Scratch. Alguns destes alunos estão já envolvidos no projeto de "Iniciação à Programação no 1.º Ciclo do Ensino Básico" pelo que faz sentido propor-lhes desafios que promovam a aplicação de conhecimentos na área da matemática. A atividade proposta toma a forma de jogo onde, por entrar a imprevisibilidade dos números sorteados, o próprio construtor do jogo poderá jogar. Depois de criado e testado o jogo, o professor pode promover um debate onde os alunos discutam estratégias que permitam adivinhar os números em menos tentativas. Será também possível aumentar o número máximo sorteado e verificar se há relação entre este número e o número de tentativas necessárias para acertar. Com esta tarefa os alunos podem:

- Compreender o que são números aleatórios
- Compreender o que é um algoritmo
- Utilizar estruturas de decisão e ciclos
- Implementar uma solução programada em *Scratch*
- Discutir estratégias para acertar no número, usando o menor número possível de tentativas

Possível resolução em *Scratch*



João Torres
(CCTIC-ESE/IPS)
Projeto EduScratch 2016

ADIVINHA O NÚMERO EM QUE ESTOU A PENSAR...

Utilizando o *Scratch* cria um programa onde uma personagem vai ter de fazer o seguinte:

- Escolher um número inteiro ao acaso entre 1 e 100.
- Pedir ao jogador para tentar adivinhar o número, entre um e 100, que ele escolheu e esperar a sua resposta.
- Dizer ao jogador se o número indicado é maior ou menor do que o que ele escolheu e dizer que acertou quando o número for descoberto.

Depois de construíres o jogo, joga com os teus amigos e discutam se há alguma estratégia para adivinhar o número com menos tentativas.

Sugestões:

Podes criar uma variável que conte o número de tentativas utilizadas.

Podes, no final, enviar uma mensagem de acordo com o número de tentativas.

Podes dificultar o jogo escolhendo números entre 1 e 1000 ou até 10000 se quiseres.

A iniciativa Laboratórios de Aprendizagem: atividades de aprendizagem inovadoras

Ana Paula Alves
Sílvia Zuzarte
Sónia Barbosa

A iniciativa Laboratórios de Aprendizagem

A iniciativa Laboratórios de Aprendizagem (LA), coordenada e dinamizada pela Equipa de Recursos e Tecnologias Educativas (ERTE) da Direção-Geral de Educação (DGE) representa a concretização, em contexto português, do projeto Future Classroom Lab (FCL) (http://fcl.eun.org/home) da European Schoolnet (EUN)[1].

O projeto FCL promovido e coordenado pela EUN vem na sequência do desenvolvimento da investigação efetuada nos últimos anos relacionada com a criação, implementação e avaliação de cenários inovadores de ensino e de aprendizagem com recurso às Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), muitas vezes apelidados de cenários de "Sala de Aula do Futuro"[2].

Um dos objetivos deste projeto é apoiar a divulgação e a expansão de abordagens pedagógicas inovadoras nas escolas europeias, dando a conhecer os resultados da investigação realizada, nomeadamente a metodologia iTEC (Innovative Technologies for Engaging Classrooms, http://itec.eun.org) que envolve a exploração de cenários de "Sala de Aula do Futuro" em contexto curricular, pretendendo-se a sua utilização e a reflexão sobre as possibilidades dessa aplicação nos contextos educativos em que os professores se inserem. O apoio às escolas através da disponibilização de recursos, formação e partilha de boas práticas representa uma das prioridades do projeto para que os professores possam realmente criar e experimentar cenários inovadores de ensino e de aprendizagem nas suas salas de aula/ outros contextos educativos, ajudando-os na realização de uma implementação bem-sucedida.

Nos dois anos de existência da iniciativa LA, entre 2014 e 2016, realizaram-se vários eventos de natureza formativa (*workshops*, cursos de formação, um encontro nacional, entre outros), especialmente direcionados para os educadores e professores de todos os níveis de ensino, mas também para diretores de escolas, diretores de centros de formação, entre outros profissionais de educação, que, de uma forma geral, levaram os presentes a experimentar e a refletir criticamente sobre a implementação destas práticas pedagógicas inovadoras nas suas salas de aula e escolas, ficando a conhecer, entre outras coisas, as ferramentas e os recursos proporcionados pelo próprio projeto para o desenvolvimento de cenários de ensino e de aprendizagem inovadores com a utilização das tecnologias[3].

Neste texto, procuramos mostrar alguns exemplos de ferramentas digitais que apoiam atividades de aprendizagem[4] que vão ao encontro da concretização desses cenários de aprendizagem e que consideramos que podem ser úteis e exemplificativos de uma utilização simples da tecnologia como suporte à aprendizagem dos alunos.

Escolhemos mostrar as possibilidades de três aplicativos (apps) que podem ser usados em dispositivos móveis (*Popplet*, *Plickers* e *Socrative*) e, além de serem gratuitos e bastante intuitivos (para professores e alunos), consideramos que têm tido sucesso na sala de aula, quer pela experiência que adquirimos com o projeto[5], quer pela nossa prática enquanto professoras de Matemática (3.° ciclo e secundário). Os exemplos que vamos mostrar podem ser facilmente adaptáveis a outros contextos e disciplinas do currículo.

Tecnologias para atividades de aprendizagem

Popplet

O *Popplet* (http://popplet.com/) é uma ferramenta que ajuda os alunos a organizarem visualmente a informação e os dados recolhidos, por exemplo, de uma investigação, facilitando a análise e a identificação de relações entre os seus elementos. De forma rápida e fácil, os alunos podem incluir texto, imagens, vídeos, *links* e anexar ficheiros, complementando a informação que pretendem organizar[6]. É uma aplicação muito intuitiva e atrativa para os alunos, não necessitando de momentos de explicação prévia por parte do professor. Os alunos podem organizar, reorganizar, inserir ou apagar elementos, unindo-os ou distribuindo-os para melhor conseguirem expressar ideias, conceitos e relações entre estes. Os "Popplets" podem ser construídos individualmente ou em grupo, podendo vários alunos trabalhar, de forma colaborativa, no mesmo "Popplet" a partir de dispositivos diferentes e com contas diferentes, facilitando o trabalho em equipa (percebendo-se, por exemplo, quem está a construir o quê).

É ainda uma ferramenta muito versátil, permitindo uma variedade de utilizações em diversos contextos educativos[7]. Pode ser usada em atividades de aprendizagem do tipo "Mapear"[8] em que os alunos têm de realizar pesquisas e organizar as suas descobertas (ver exemplo na caixa de texto), mas também pode ser usada como apresentação em substituição de ferramentas como o *PowerPoint* (sintetizando e relacionando as principais ideias a apresentar pelos alunos ou professor), ou simplesmente, para a organização do próprio trabalho de grupo (por exemplo, para definirem as tarefas de cada elemento).

Plickers

O *Plickers* (https://plickers.com/)[9] é uma aplicação cuja utilização mais imediata é a avaliação formativa, porém também consideramos que esta ferramenta, bem explorada, pode ajudar os alunos a desenvolver a sua capacidade de comunicação e de argumentação. Permite apresentar aos alunos questões de escolha múltipla (até quatro possibilidades de resposta) a que cada aluno responde levantando um cartão com uma imagem (figura 1) sem a necessidade de usar qualquer dispositivo móvel ou computador. Estes cartões são disponibilizados na própria página *web* da aplicação. É possível, para cada questão, visualizar as respostas individuais dos alunos ou agrupadas através de um gráfico de barras.

Atividade de aprendizagem - "Mapear"

Os alunos da Escola básica 2.° e 3.° ciclo da Quinta da Lomba - Barreiro utilizaram o "Popplet" na aula de Matemática para explicarem o conteúdo "homotetias" do 8.° ano de escolaridade.

Foi lançado um desafio aos alunos para a elaboração de um vídeo exemplificando a construção de figuras homotéticas, usando régua e compasso, que evidenciasse a compreensão das homotetias diretas e inversas assim como das suas propriedades.

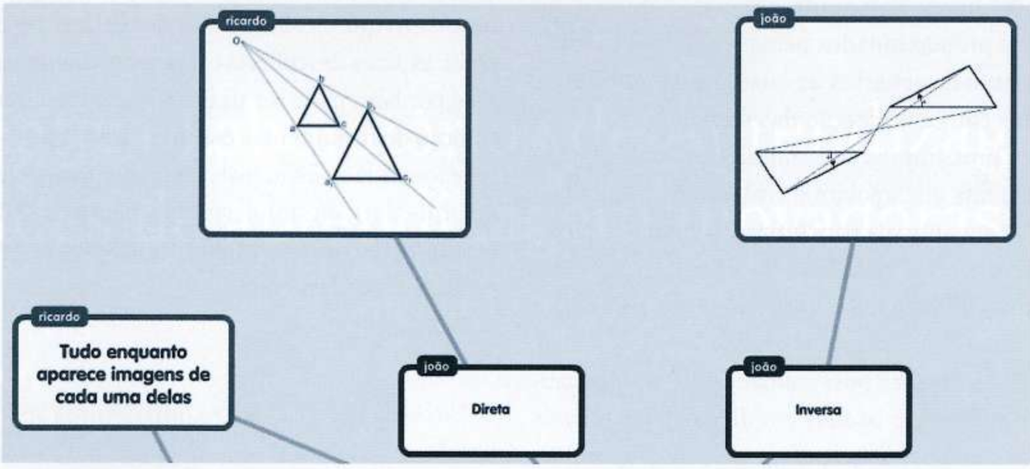
O "Popplet" foi usado pelos alunos para esquematizarem os resultados das pesquisas realizadas sobre a temática em estudo.

Inicialmente os alunos da turma foram divididos em grupos, sendo-lhes fornecido um guião com todas as fases do trabalho, data de conclusão e rubricas de avaliação.

Para a pesquisa a professora forneceu três links que, numa primeira fase, poderiam servir de inspiração, incentivando-os para que num tempo limitado (cerca de 30 minutos) pesquisassem mais três recursos importantes para a temática.

Os alunos foram construindo os seus "Popplets" com base nas pesquisas realizadas tendo em vista o que seria essencial para a organização das filmagens a realizar. Este trabalho foi iniciado em sala de aula (50 min) e continuado em outros momentos fora desta. Os alunos usaram o *Skype* para comunicar e como o "Popplet" permite a construção colaborativa conseguiram mais facilmente chegar ao produto pretendido. Para além disso, permitiu um maior acompanhamento da parte da professora que foi observando a participação de cada elemento da equipa, conseguindo, por exemplo, observar quem realmente contribuiu para a construção do mapa.

O "Popplet" também foi útil para planear a organização do próprio produto final, sendo utilizado para orientar a construção do vídeo. Com recurso ao mapa construído os alunos puderam realizar, de forma mais organizada, as gravações.



(Exemplo de um "Popplet" construído pelos alunos, acessível em http://popplet.com/app/#/2838795)

Com o *Plickers* todos os alunos têm a oportunidade de responder à questão colocada pelo professor, bastando para isso que cada um **levante o seu cartão**, podendo o professor registar a resposta com o seu *smarthpone* ou *tablet*. O professor obtém em tempo real a resposta de cada aluno e um panorama global da turma[10] (figura 2), podendo utilizar imediatamente essa informação para ajustar, se for caso disso, o seu processo de ensino e de aprendizagem. Há ainda a possibilidade de obter relatórios mensais individuais que podem ser gravados em pdf e disponibilizados aos respetivos alunos, ficando tanto o aluno como o professor com uma visão mais completa da evolução das aprendizagens relativamente a um determinado assunto.

Consideramos que o *Plickers* é uma boa ferramenta para o professor integrar a argumentação matemática dentro da sala de aula, levando os alunos a refletirem e a justificarem as suas opções no grupo turma, podendo ser confrontados com opiniões diferentes. A motivação que se gera com a participação ativa dos alunos perante as questões levantadas pelo professor acaba por proporcionar um ambiente propício para a análise e a compreensão das ideias em discussão. Por exemplo, após a recolha de todas as respostas dadas pelos alunos, com o gráfico das respostas visível, o professor pode solicitar a um dos alunos que escolheu uma das opções incorretas (o professor tem visível no seu dispositivo móvel as opções que cada aluno escolheu) que explicite o seu raciocínio e assim sucessivamente até que os alunos, individualmente ou em discussão com os colegas, percebam onde o raciocínio falhou e descubram o raciocínio correto. Claro que a escolha das questões é muito importante: não podem ser muito complexas, para que todos os alunos as consigam responder em tempo útil, e não devem ser muito fáceis (perguntas que todos acertam), para que se fomente alguma discussão (figura 3).

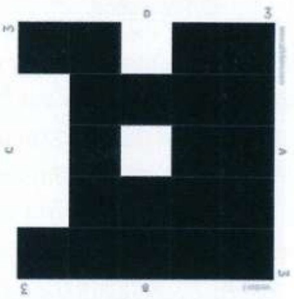


Figura 1

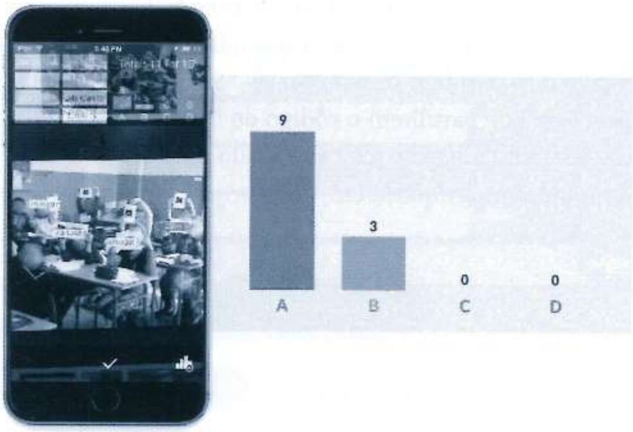


Figura 2

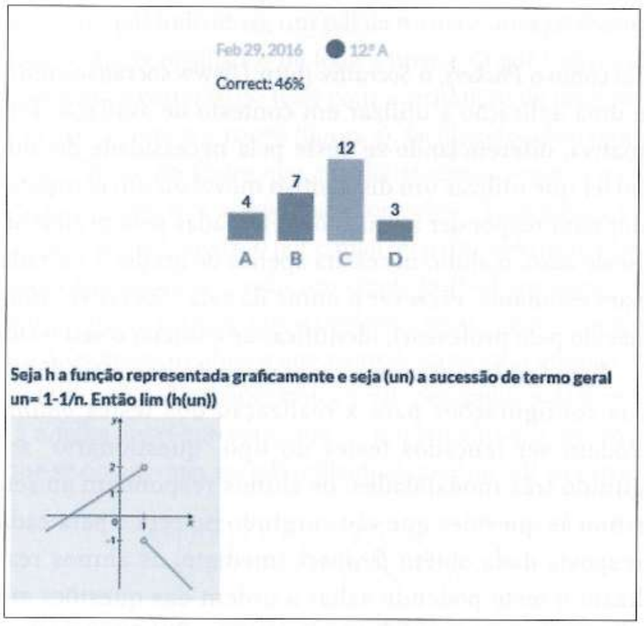


Figura 3

O *Plickers* apresenta, contudo, algumas limitações no que diz respeito à utilização de caracteres matemáticos, no entanto, é uma questão que se pode facilmente ultrapassar recorrendo à utilização de imagens (capturas de ecrã) da linguagem matemática escrita que se inserem nas próprias questões, continuando a ser possível realizar uma grande diversidade de perguntas aplicadas aos diversos conteúdos da disciplina de Matemática, para todos os anos de escolaridade (figura 4).

O ponto (0,0) pertence ao gráfico de f.
Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

(A) $\dfrac{x}{\ln x + 1}$	**(B)** $\ln(\cos x)$
(C) $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$	**(D)** $2^{\operatorname{sen} x}$

A A
B B
C C
D D

Figura 4

Tal como o *Plickers*, o *Socrative* (http://www.socrative.com/) é uma aplicação a utilizar em contexto de avaliação formativa, diferenciando-se deste pela necessidade do aluno ter que utilizar um dispositivo móvel ou um computador para responder às questões efetuadas pelo professor. Neste caso, o aluno necessita apenas de aceder à entrada para estudante, escrever o nome da sala "Socrative" (fornecido pelo professor), identificar-se e iniciar o seu teste.

Esta ferramenta tem a vantagem de permitir diversas configurações para a realização dos testes *online*. Podem ser lançados testes do tipo "questionário" seguindo três modalidades: os alunos respondem ao seu ritmo às questões que vão surgindo no ecrã e para cada resposta dada obtêm *feedback* imediato; os alunos realizam o teste podendo saltar a ordem das questões até o completarem e submeterem para avaliação; o professor lança uma questão de cada vez e os alunos respondem ao ritmo do professor. Em todas as modalidades, o professor pode optar por lançar as perguntas de forma aleatória permitindo que diferentes alunos iniciem a resolução de diferentes questões, entre outras opções. O professor pode ainda visualizar, em tempo real, o progresso dos alunos facilitando a monitorização do processo.

O *Socrative* também permite uma grande variedade de opções para a própria elaboração dos testes, possibilitando testes com muitas questões, a inserção de imagens em cada questão, texto com algumas possibilidades de escrita (figura 5), a colocação da resposta à pergunta e até de uma explicação escrita adicional para que o aluno possa observar, por exemplo, algumas etapas da resolução correta da questão proposta (figura 6). Este último aspeto é importante no apoio à aprendizagem independente já que permite que o aluno possa responder a um teste (na sala de aula ou em casa) seguindo o seu próprio ritmo de trabalho, observando o *feedback* imediato relativo à sua resposta e informação sobre a respetiva correção.

Exponencial e logaritmo 100% (7/7)

✓ **1. O valor de x para o qual $3^x=15$ é:**

(A) 5
(B) $\log_3 15$
(C) $\log_{15} 3$
(D) raiz cúbica de 15

Figura 5

#3

O ponto A (2 , -3) pertence à reta que define a função f(x) = -x -1

Verdadeiro ou falso?

Correct Answer:

True **False**

Explanation:

Sim , é verdade que o ponto A (2, -3) pertence à reta que define a função f(x) = -x -1

porque f(2) = -2-1 = -3

Então a imagem de 2 pela função f é -3

Figura 6

As questões podem ser de escolha múltipla (com a possibilidade de terem mais do que uma resposta certa) e também de resposta aberta, sendo útil para que os alunos possam escrever, por exemplo, as soluções de uma equação que acabaram de resolver ou a resposta a um problema colocado (figura 7).

Name A-Z ▾	Score ▾	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
1	50%	C	Reta ver	S={y=-4	C	y= -2x+3	E	Sistema
10	100%	C	As equaç	O conjun	C	A expres	C E	O sistem
2	100%	C	vermelha	(x,y)={	C	g(x))=-2	C E	Sistema
3	50%	C	(2,1)(3,	(x,y)=(3	A	(0,3)	D, C	(x,y)=(2
4	100%	C	Reta ver	A soluçã	C	A expres	C E	A soluçã
5	50%	C	reta ver	y=0 x=-1	C	7-4x(-3)	A E	possivel
6	0%	A	y=2x-3	O conjun	A	y=-2x+3	E	(4, 2)
8	100%	C	reta ver	conjunto	B	g(x) = -	C E	sistema
grupo 7	50%	A	Reta ver	conjunto	A	y=-2x+3	C E	0y=0
Grupo 9	100%	C	f(x) = -	(x,y)=(3	C	g(x)= -2	C E	sistema
Class Total		80%					60%	

Figura 7

Um outro aspeto interessante para o trabalho em equipa dos professores da mesma disciplina relaciona-se com o poderem partilhar os seus testes "Socratives", bastando para isso que partilhem o código do teste (figura 8). Uma vez recebido o teste pode ser editado para acrescentar, alterar ou remover questões.

Figura 8

Esta ferramenta oferece ainda a vantagem de o professor poder controlar o tempo de duração de um teste. Pode, por exemplo, deixá-lo vários dias disponível para os alunos. Os alunos podem começar a resolver um teste na aula (determinadas questões) e continuá-lo em casa. O professor também pode propor aos seus alunos que o resolvam apenas em casa, mantendo-o aberto, por exemplo, durante uma semana de aulas. Desta forma, pode ir monitorizando as aprendizagens dos alunos ao mesmo tempo que os motiva para os conteúdos em estudo. Os professores podem usar este método para lançar testes *online* que ajudam os alunos a estudar, podendo também obter um diagnóstico mais global (e automatizado) da preparação dos alunos da escola para um determinado tema ou momento de avaliação.

Para além da modalidade "questionário", o *Socrative* permite realizar testes em formato de jogo, do tipo "corrida espacial", onde os alunos visualizam a sua posição na "corrida" à medida que vão respondendo às perguntas (figura 9). A motivação gerada através do jogo pode permitir um grande envolvimento dos alunos que se organizam (por exemplo, a pares ou em pequenos grupos) para a resolução de um determinado conjunto de exercícios propostos. O fator jogo que imprime aos alunos a vontade de chegar em primeiro lugar (procurando responder corretamente às questões propostas) pode ser bastante interessante para que se consiga que muitos alunos resolvam os exercícios propostos, estejam muito concentrados e atentos na sua resolução, sendo também útil no final para a discussão em grande grupo à volta dos erros encontrados. O jogo pode repetir-se, com outras questões e as vezes que se achar conveniente, como atividade aliciante e promotora das aprendizagens dos alunos. O *Socrative* permite ainda mais duas modalidades para colocação de questões aos alunos, o "Levantamento final" e as "Votações", que são úteis, por exemplo, para aferir, no final de uma aula, as aprendizagens realizadas.

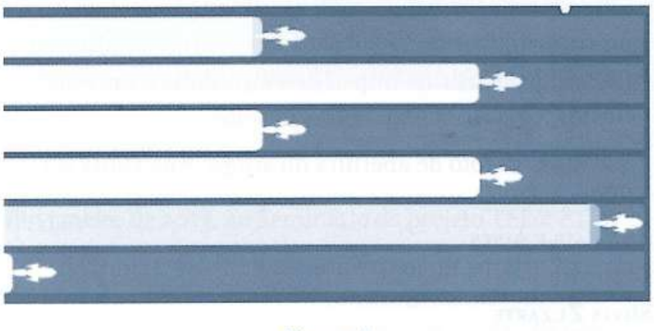


Figura 9

Uma grande vantagem do *Socrative* diz respeito às possibilidades que revela para a obtenção de relatórios dos testes efetuados aos alunos. *Socrative* fornece três tipos de relatório: um pdf individual, um pdf da turma e uma grelha em Excel com os resultados de toda a turma. O pdf individual apresenta a correção do teste com a atribuição de uma percentagem entre 0 e 100% (figura 5), facilitando deste modo o trabalho do professor que, imediatamente a seguir à realização do teste, tem acesso à sua correção e classificação, podendo inclusive enviá-lo por e-mail ou partilhá-lo numa *Drive*, fornecendo deste modo, um rápido *feedback* aos alunos. O pdf da turma permite que o professor tenha uma visão global do número de alunos que acertou/errou cada questão do teste, percebendo a panorâmica geral conseguida pela turma. Já a folha *Excel* apresenta toda a informação discriminada que se obtém quer no pdf individual quer no pdf da turma.

Atividade de aprendizagem "Aprender com os pares"

Os alunos do 8.º ano da Escola básica 2.º e 3.º ciclo Dr. Francisco Sanches - Braga usaram o *Socrative* em diversos momentos de aula enquanto estudavam a temática das funções. Numa das aulas, a professora organizou os alunos da turma em pequenos grupos de trabalho (2 ou 3 elementos) e propôs-lhes a resolução de uma "corrida espacial" no "Socrative". Todos os elementos deveriam resolver os exercícios nos respetivos cadernos, confrontando resultados e discutindo, caso necessário, as estratégias de resolução, de forma a colocarem em cada questão uma só resposta representativa do grupo. As questões eram variadas e diziam respeito aos conteúdos das funções tratados ao longo das últimas aulas. Além das vantagens que a professora pretendia com a discussão entre os alunos, a professora também queria observar o nível de compreensão da turma em relação à temática em estudo. Os alunos usaram os seus *smartphones* ou alguns dos portáteis "Magalhães" disponíveis na escola.

O teste iniciou-se quando a professora disse "partida" e rapidamente os alunos começaram a resolver e a responder às questões. Cada grupo tinha a sua "cor" e podia observar as "ultrapassagens" no gráfico de barras da "corrida espacial" projetado na sala. O objetivo era "ir à frente" e para isso não podiam errar as respostas. No final, todos puderam observar a sua posição, felicitar os vencedores e discutir os "porquês" dos pormenores que afinal tinham errado.

Durante o teste, a professora pôde circular entre os grupos para tirar algumas dúvidas. Um dos aspetos mais interessantes foi o ter observado uma turma empenhada na resolução e discussão dos exercícios propostos, com uma concentração muito maior do que a habitual.

Conclusão

A iniciativa LA foca-se em metodologias em que o aluno tem um papel mais ativo na sua aprendizagem, onde pesquisa, investiga e aprende com os pares, e o professor modera, questiona e orienta as aprendizagens dos alunos.

Foram apresentadas neste texto algumas aplicações para a sala de aula e exemplos da sua utilização para o apoio de atividades de aprendizagem aliciantes e motivadoras para os alunos. Estas ferramentas podem ter um papel importante para o envolvimento dos alunos na sua aprendizagem, neste caso da Matemática, na medida em que podem promover o desenvolvimento da sua capacidade de argumentação, da sua capacidade de trabalhar colaborativamente, da sua autonomia, e mesmo da sua capacidade reflexiva e de autorregulação relativamente às suas aprendizagens, entre outras. Também consideramos que podem ser uma mais-valia para o apoio ao trabalho do professor, nomeadamente, no que diz respeito às possibilidades que oferecem para uma avaliação formativa mais sistematizada e contínua.

Sabemos que nem sempre precisamos da tecnologia para implementar atividades aliciantes e desafiadoras para os alunos, no entanto, muitas vezes, estas podem ajudar-nos a melhorar o processo de ensino e aprendizagem, razão pela qual procuramos descrever algumas das mais-valias por nós observadas relativamente à sua utilização.

Por fim, gostaríamos de referir que as ferramentas digitais que apresentamos podem ser, naturalmente, substituídas por outras, com funcionalidades idênticas ou superiores, sendo importante destacar que se encontram a apoiar atividades que envolvem os alunos numa aprendizagem mais ativa, considerando-se essencial o desenvolvimento das competências do século XXI e a aprendizagem dos próprios alunos, num ambiente que se pretende motivador e estimulante.

Notas

[1] A European Schoolnet (EUN) é uma rede de 31 Ministérios da Educação europeus, com sede em Bruxelas, na Bélgica. É uma organização sem fins lucrativos que tem como objetivo apoiar e contribuir para a promoção da inovação no ensino e na aprendizagem das escolas europeias, trabalhando em parceria com os Ministérios da Educação, escolas, professores, investigadores e potenciais parceiros da indústria.

[2] Referimo-nos à investigação efetuada no âmbito dos projetos de inovação pedagógica que se realizaram entre 2010 e 2015 em muitas escolas europeias, como o projeto Innovative Technologies for an Engaging Classroom (iTEC) (http://itec.eun.org), o projeto Creative Classroom Lab (CCL) (http://creative.eun.org/) e o projeto Living Schools Lab (LSL) (http://lsl.eun.org/).

[3] A "Caixa de Ferramentas da Sala de Aula do Futuro" (Future Classroom Toolkit) está disponibilizada na página *web* do projeto, a partir de http://fcl.eun.org/toolkit

[4] No contexto dos projetos relacionados com o FCL as "atividades de aprendizagem" são orientações práticas dadas aos professores sobre a forma como podem implementar as abordagens inovadoras descritas nos cenários de ensino e de aprendizagem. Não são atividades específicas do currículo pelo que podem ser usadas em diversos momentos e contextos de aprendizagem. São atividades que proporcionam a oportunidade para desenvolver as competências para o século XXI. Na página do projeto FCL pode encontrar a descrição do processo de conceção de atividades de aprendizagem e exemplos de ferramentas digitais de apoio a essas atividades, acessível a partir de http://fcl.eun.org/pt_PT/toolset4

[5] As autoras deste texto são professoras de Matemática que participaram na maioria dos ciclos do projeto iTEC (2010 - 2014) e que, como embaixadoras da iniciativa LA, dinamizaram diversas atividades no âmbito da formação de professores.

[6] Para ver o funcionamento da ferramenta pode fazer a opção *try it out* ao entrar em www.popplet.com onde é disponibilizado um tutorial automático que percorre as funcionalidades mais importantes da ferramenta.

[7] Encontra vários exemplos de utilização do *Popplet* em contexto de sala de aula no blogue da própria aplicação, acessível em http://blog.popplet.com/category/popplets-in-education/

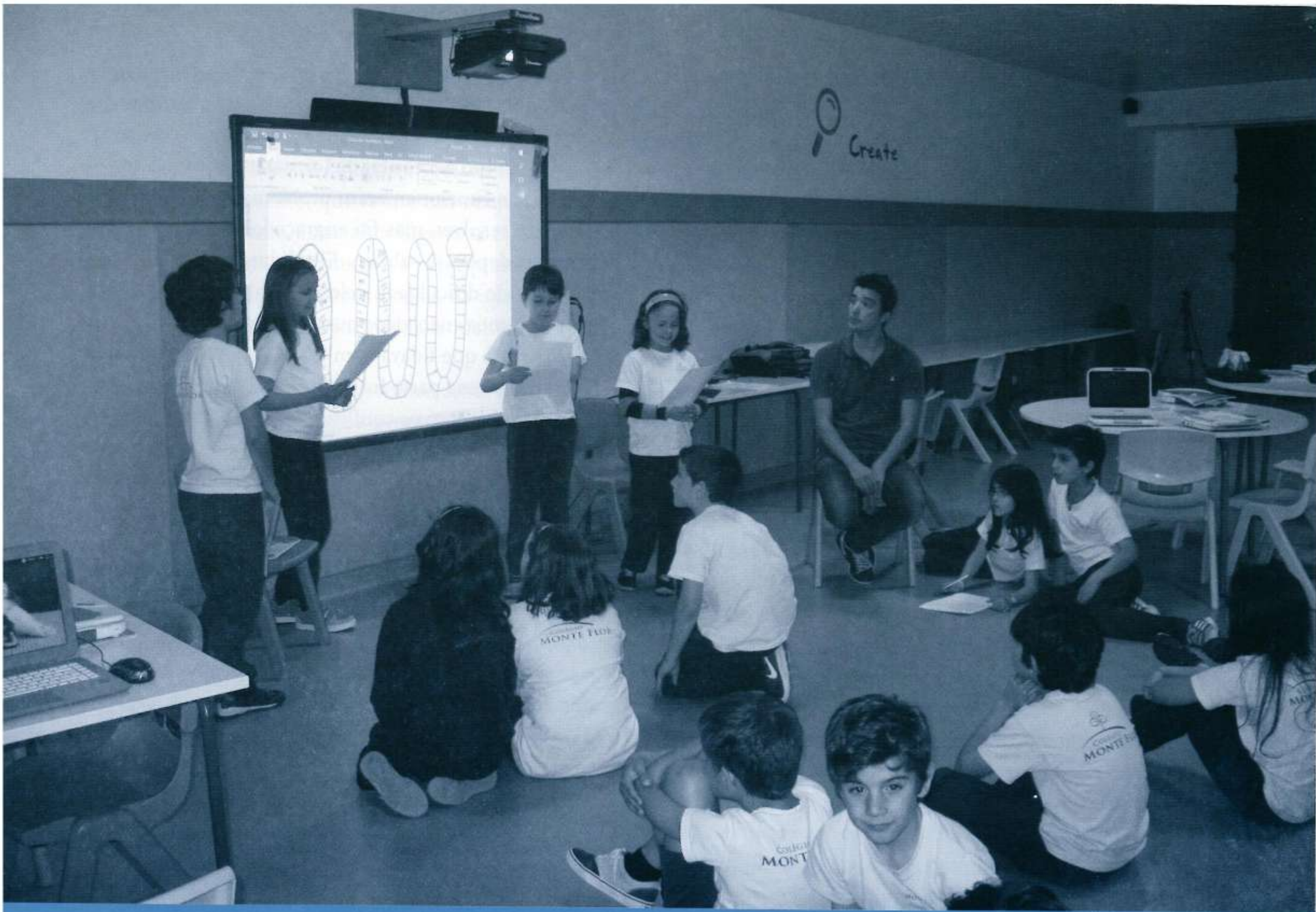
[8] Pode saber mais sobre a utilização do *Popplet* para apoio da atividade "Mapear" na página web do projeto FCL, a partir de http://fcl.eun.org/pt_PT/tool4p2

[9] Pode aceder a um tutorial do *Plickers*, a partir de https://www.youtube.com/watch?v=QpCSixNguaY&t=56s.

[10] Pode visualizar um exemplo de utilização do *Plickers* na sala de aula de Matemática de uma turma de alunos do 1.º ciclo, a partir de https://www.youtube.com/watch?v=dMAX2EQnUXE&feature=youtube

Créditos da foto de abertura do artigo: Ana Paula Alves.

Ana Paula Alves
Agrupamento de Escolas Dr. Francisco Sanches, Braga
Sílvia Zuzarte
Agrupamento de Escolas de Casquilhos, Barreiro
Sónia Barbosa
Agrupamento de Escolas de Santo André, Barreiro
Embaixadoras da iniciativa LA/FCL



À conversa com Rui Lima sobre a *Sala de Aula do Futuro*

Ana Cristina Tudella
Lina Brunheira

Em janeiro de 2015, no Seminário do projeto TEL@FTELAB que aconteceu no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, tivemos contacto com alguns testemunhos de professores que trabalham em escolas com tecnologia, incluindo a designada Sala de aula do futuro. Entre eles estava Rui Lima que é professor do 1.° ciclo e diretor pedagógico do Colégio Monte Flor, uma instituição de ensino particular da região de Lisboa. Como ficámos com curiosidade em conhecer melhor a sua experiência, contactámo-lo nesse sentido. No dia 17 de maio, abriu-nos as portas da sua sala de aula. Ficámos a conhecer a sua turma de 3.° ano que, nesse dia, estava a trabalhar sobre o tópico do perímetro, utilizando uma modalidade de trabalho que vem sendo implementada desde o 1.° ano. Esta modalidade segue globalmente as etapas próprias do trabalho de projeto às quais atribui nomes específicos – Sonhar, Explorar, Planear, Criar e Apresentar/Mostrar – a que correspondem também espaços físicos da sala.

No dia a que fomos à aula, os alunos deram continuidade ao trabalho nos seus projetos sobre o conceito de perímetro, iniciado anteriormente. Depois de os observarmos a trabalhar durante algum tempo, conversámos com Rui Lima e, posteriormente, com alguns alunos. O diálogo que transcrevemos de seguida procura dar conta dos aspetos essenciais dessa conversa.

Educação e Matemática – O que é que levou o Colégio a fazer um investimento neste tipo de recursos?

Rui Lima – O grande investimento foi feito no edifício que está aqui desde 2011 (mas o Colégio já tem cerca de 44 anos) onde se pôde apostar na parte da infraestrutura. Em termos da tecnologia houve parcerias, apesar de os quadros interativos serem comprados. Este que está aqui foi emprestado pela *Promethean*. Quando tivemos os Magalhães, foram custeados parcialmente pelos pais, outra parte pela J. P. Sá Couto. Mais do que a questão de investir [financeiramente] é a questão de investir neste tipo de trabalho. E aí acabam por ser mais os professores, todos nós, apostamos muito nas novas tecnologias e nas próprias dinâmicas. O Colégio "vai mais atrás de nós" no sentido que se é isto que nós acreditamos e se os alunos conseguem trabalhar de uma forma produtiva, força, vamos continuar. Também o facto de sermos uma equipa pequena (quatro professores), facilita muito este trabalho.

EM – Há quanto tempo começaram com esta tecnologia? Foi quando o Colégio abriu aqui neste espaço?

RL – Não, não... Ainda estávamos no outro edifício quando (associado ao programa do *e-escolinhas* e dos Magalhães) a *Microsoft* me considerou um "professor inovador" pelo trabalho desenvolvido com outra turma que acabou em 2009. Depois foi dar continuidade. O facto de participarmos em muitos projetos, acabamos sempre por aprender em eventos com outros professores inovadores, com outras entidades. Hoje em dia sentimos que – e é uma das coisas que tento transmitir aos outros professores quando estou a dar formação – a tecnologia é só uma ferramenta, o que interessa é a forma como vamos usar esta tecnologia. E creio que aí é que tem sido a principal inovação!

EM – Estes alunos começaram a usar a tecnologia quando?

RL – Logo no primeiro ano.

EM – Como é que eles reagiram?

RL – Eles reagem bem à tecnologia. Os adultos é que reagem mal, às vezes [risos]! Esta versão dos Magalhães, que estão a usar, foi uma versão de teste e então deparámo-nos com alguns problemas, com obstáculos grandes porque eles nem sabiam ler... Por exemplo, uma mensagem simples como "Quer guardar o documento?", para meninos que não leem, é um obstáculo gigantesco. Quando ocorreram problemas, como necessitar de formatar o computador, ou a *internet* não funcionar, eram problemas que as crianças não sabiam resolver, mas foi engraçado como um mês ou dois meses depois já sabiam. Eles lidam muito bem com isso. A grande dificuldade deles foi a abordagem. Nós na altura estávamos envolvidos num projeto que era o *Creative Classrooms Lab* que lidava com cenários de aprendizagem colaborativa e essa parte foi mais difícil (e ainda hoje é) – aprender a lidar com os conflitos. Às vezes tinha meninos a chorarem porque não queriam fazer o que o outro queria, ou dois que queriam fazer um *powerpoint* e os outros dois queriam fazer um vídeo (isso hoje ainda acontece) e andam ali, não conseguem decidir... A gestão de conflitos é complicada. Mas também foi engraçado... Há certas personalidades, mais de líder, que começam a sobressair... A capacidade de aos poucos se irem entendendo e dizer "pronto, agora podes ser tu...". Hoje em dia, trabalhar em grupo é uma coisa normalíssima para eles.

EM – E por parte dos pais, como é que foi a reação?

RL – Foi mais difícil. Mais difícil porque os pais são muito importantes (e nesta turma os pais têm sido espetaculares). Só que, por exemplo, em épocas de testes, como no ano passado que fizemos os testes intermédios, houve pais que disseram "pronto agora antes dos testes não podes pegar no computador". Só que os conteúdos todos de Matemática e Português e Estudo do Meio estavam no *OneNote* – que é um *OneNote* colaborativo – onde, para todos os conteúdos que nós trabalhamos, eu coloco lá com *links* para vídeos, para jogos... Ao dizer isto, estão a impedir os alunos de usar uma ferramenta que eles usaram sempre e que até lhes poderá ser útil. Nós estamos todos muito formatados e os pais – a maioria está afastada disto há muito tempo – também e, portanto, é difícil lidar com esta "generation gap". Felizmente, eu com os pais tenho sentido uma grande aceitação, também porque os alunos acabam por ter bons resultados quer na avaliação contínua, quer nos testes intermédios.

EM – Há pouco falou de projetos em que tem estado envolvido. Tem feito muita formação?

RL – Tenho estado muito envolvido com a *Microsoft* e com a DGE e acabo por participar em muitos eventos nacionais e internacionais onde aprendo muita coisa. E depois, como utilizo normalmente tudo o que aprendo na sala de aula, acabo por servir de exemplo a outros professores e, nesse aspeto, tanto a *Microsoft* como a DGE pedem-me muitas vezes para dar formação, ou fazer palestras, e tenho aprendido imenso. Também o facto de estar envolvido com duas entidades (a DGE sempre em articulação com a *European SchoolNet* que está sediada em Bruxelas, onde já fui várias vezes, que reúne um conjunto de professores que utilizam estas abordagens com tecnologia) que estão na vanguarda, mesmo a nível mundial, daquilo que é a introdução das tecnologias na aprendizagem, tem sido para mim uma oportunidade incrível de formação formal e informal.

EM – Pensando agora nas diferentes áreas do currículo, acha que há áreas em que se propicia mais a utilização desta tecnologia?

RL – Há, não vou ser pretensioso e dizer que a uso em tudo, mas a Matemática acaba por ser uma área em que se propicia muito. E há várias razões para isso. Em primeiro lugar, a matemática é uma linguagem universal, ou seja, muitos recursos disponíveis estão em inglês. Isto que eles estão a usar agora (o IXL) está em inglês, mas eles conseguem fazer tudo porque a maior parte das perguntas consegue-se perceber só olhando para lá. Também nós temos feito muita coisa na área da programação. Ora a programação é uma competência essencialmente de raciocínio matemático. O que nós normalmente fazemos com a programação é: utilizamos o raciocínio matemático mas também criamos recursos para o Estudo do Meio, para Português, o que permite maior interdisciplinaridade.

EM – Queria que me contasse um exemplo de algo desenvolvido na Matemática que ache que seja um exemplo mesmo bom, em que os alunos tiraram um proveito grande...

RL – Olhe...

EM – Se quiser pensar um bocadinho... [risos]

RL – A minha dificuldade é o oposto! É tentar escolher... Quando estavam no primeiro ano, começámos a trabalhar com o projeto CCL (*Creative Classrooms Lab*). Isto, o trabalho de grupo nesta sala, funciona em diferentes fases: o sonhar – o que é que vamos fazer?; depois o explorar – eu partilho com eles alguns recursos e eles vão explorar os recursos, aprender no fundo; depois passam para o planear e o criar; no fim, o apresentar em que os alunos desenvolvem as competências da comunicação que são extremamente importantes... No 2.° ano fizemos um trabalho sobre o dobro e o triplo em que cada grupo fez sua coisa. Houve um grupo que fez o trabalho com os robôs – programavam o robô para andar duas voltas e depois tentavam adivinhar se fosse o triplo: se ele tinha percorrido primeiro 20 cm, quanto é que andava depois? Houve outro grupo que fez com o *KODU*, que é programação: como é que programavam o *KODU* para que, cada vez que se apanhava uma maçã, calcular o triplo. Depois outros fizeram um filme... cada grupo fez sua coisa, também houve um *powerpoint*, um teatro... E todos eles aprenderam tão bem o dobro e o triplo, estava mesmo bem consolidado. Este tipo de abordagem permite que eles criem muitas coisas e vão revendo a matéria constantemente.

EM – Queríamos só perguntar mais outra coisa: obstáculos?

RL – A tecnologia [risos]! É verdade, sem dúvida. E isso é um dos condicionalismos à implementação da tecnologia por parte de muitos professores, é precisamente os problemas que ela nos dá...

EM – As surpresas, não é?

RL – As surpresas, constantemente. E quem vai a conferências sabe que aquilo pode não funcionar na hora, ou nos *workshops* que há sempre uns computadores [que falham] e aqui na sala isso acontece... E nós [em Portugal] temos muitos problemas com a *internet* – e isso é comum a todos os países – a largura de banda, a velocidade da *internet*... Eu não sinto tanto esse problema porque... As pessoas às vezes querem utilizar um computador por aluno e isso dá problemas de certeza, porque há alunos que não trazem computador, ou não vem carregado... Eu não planifico as aulas dessa forma. Depois outro obstáculo, a mim às vezes também me custa, é ser capaz de analisar se este barulho é um barulho normal, ou se é um barulho que é sinal de que eles já "se estão a perder". É muito mais exigente do ponto de vista físico acompanhar este trabalho e, ver quem é que está a trabalhar e quem não está.

O testemunho de Rui Lima ajudou-nos a compreender a dinâmica associada à sala que visitámos, o papel da tecnologia e algumas dificuldades que se podem colocar. No contacto com os alunos percebemos que a sua autonomia, com e sem a tecnologia, era maior ou muito maior do que aquela que habitualmente observamos. Ao longo da aula, ouvimos as crianças a utilizarem um vocabulário que in-

EM – O que gostam de fazer com a tecnologia?

Pedro – Eu gosto de fazer minitorneios no *Arcademics.* É um site que tem jogos sobre a matemática e o *Grand Prix Multiplication* é o jogo que nós gostamos, que mais gostamos! Temos quatro carrinhos, nós somos um, e cada vez que acertarmos numa conta da tabuada nós avançamos cada vez mais rápido e se falharmos vamos mais lentinho. Dá para jogar *online*, fazer jogos privados e públicos. Privados é com código, só quem sabe o código é que pode entrar lá. Também há outros temas.

Ana – Gosto dos robôs. Nós temos um robô e nós programamos numa aplicação em que podemos pôr um bloco e depois podemos dizer para andar para a frente ou para trás, a que velocidade queremos, e depois dá para outras coisas. Pego num bloco de rotação e depois ponho a quantos graus é que quero. Ponho 90°, 85°...

Miguel – Lembrei-me de uma coisa que fazíamos no 2.° ano que era o *TurtleAcademy.* Era uma tartaruguinha que fazia formas... Nós tínhamos de programar 90°, 180°, para a direita e para a esquerda e havia códigos e tudo...

corporava termos tecnológicos que referiam com naturalidade. A partir da conversa que tivemos com alguns, percebemos como utilizam natural e frequentemente alguns recursos, particularmente relacionados com a Matemática (alguns que até nós desconhecíamos), e que damos conta nos testemunhos que selecionámos. Ficámos sobretudo com a impressão que a tecnologia faz efetivamente parte da vida destes alunos, fora e dentro da sala de aula.

Claro que, para esta turma, a possibilidade de ter disponíveis os recursos tecnológicos da *sala de aula do futuro* é uma vantagem que sabemos ser acessível apenas a uma minoria. No entanto, tal como a tecnologia só por si não faz tudo, acreditamos que também é possível aproveitar melhor outros recursos que temos à disposição de todos, para que a sala de aula possa incorporar a dimensão tecnológica que já existe há muito tempo nas nossas vidas.

Entrevista conduzida por:
Ana Cristina Tudella
Escola Secundária Frei Gonçalo Azevedo, Cascais
Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa

APM 2017 – sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e quatro modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

*A partir de 2016 a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma nova modalidade de associado aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00 €, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM.

Pode inscrever-se indiferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.º de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista Educação e Matemática (3 números normais e um número duplo temático).

Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante.*

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto que pode ir até 50% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *online.*

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do *Centro de Recursos.*

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Direitos dos associados institucionais

Para os associados institucionais existem diversas modalidades de associado de acordo com a tabela respetiva abaixo. Para além das revistas que recebem de acordo com a modalidade escolhida, os associados institucionais, nomedamente as escolas e agrupamentos de escolas, podem beneficiar os respetivos docentes (grupos 100, 110, 230 ou 500) com preços especiais em encontros ou formações; podem ainda usufruir dos benefícios de associado na requisição de exposições ou na compra de materiais para a respetiva instituição.

Quotas anuais para 2017

A quota tem efeitos de janeiro a dezembro de cada ano civil.

Modalidade de associado individual	
Professor no ativo (sócio regular)	55,00 €
Estudante sem vencimento (com regalias de @sócio)	16,50 €
Estudante sem vencimento (com regalias de sócio regular)	40,00 €
Professor aposentado	42,50 €
@-sócio	42,50 €
Associado residente no estrangeiro	66,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1ºceb)	50,00 €

Modalidade de associado institucional	2017
Modalidade I (1 exemplar da E&M)	72,50 €
Modalidade II (2 exemplares da E&M)	95,00 €
Modalidade III (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	100,00 €
Instituição no estrangeiro (1 exemplar da E&M+*Quadrante*)	140,00 €

Assinatura das revistas *Educação & Matemática* e *Quadrante*

		Educação & Matemática (3 números + 1 número duplo temático)	*Quadrante* (2 números)
Associado individual	Portugal	-------	15,00 €
	Estrangeiro	-------	30,00 €
Não associado individual	Portugal	50,00 €	35,00 €
	Estrangeiro	70,00 €	50,00 €
Não associado institucional	Portugal	75,00 €	50,00 €
	Estrangeiro	95,00 €	65,00 €

Preço de capa das revistas *Quadrante* e *Educação & Matemática*

	Educação e Matemática		*Quadrante*
Associado	Temática	10,00 €	10,00 €
	Normal	7,50 €	
Não associado	Temática	10,00 €	20,00 €
	Normal	7,50 €	

índice

Editorial

Artigos

Secções