Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2016

138

■ Julho ∞ Agosto ∞ Setembro

Preço 7,50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Lina Brunheira
Subdiretora Helena Rocha
Redação Catarina Delgado
Cristina Cruchinho
Cristina Tudella
Helena Amaral
Irene Segurado
Isabel Rocha
Manuela Pires
Paulo Alvega
Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número
Mário Baía Edição gráfica

Capa Mário Baía
Paginação ACD PRINT, S.A.

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Setembro 2016
Tiragem 1250 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão
Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.º 8
Casal da Espinheira
2560–401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre a capa

O ritual de setembro. Homenagem a um pequeno, mas fundamental, "flash" da vida. O momento em que, pela primeira vez, dezenas de milhares de crianças traçam riscos e rabiscos, esquiços das predisposições que caracterizam o seu personalizado e futuro percurso escolar.

Mário Baía

Neste número colaboraram

Ana V. Lopes, António M. Fernandes, Arsélio Martins, Cristina Morais, Dina Tavares, Eduardo Veloso, Elsa Barbosa, Hélia Pinto, Jaime Carvalho e Silva, Marina Rodrigues, Marisa Quaresma, Paulo Alvega, Pedro J. Freitas, Simão Palmeirim Costa e Teresa Moreira.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

A esperança (na) matemática

A esperança é sem dúvida uma das características únicas do ser humano. Ter esperança é demonstrar um desejo de obter resultados positivos que podem estar relacionados com a possibilidade de mudança.

Foi a esperança na mudança que levou a APM a aceitar a proposta da Secretaria de Estado da Educação de, sob a coordenação da Direção Geral da Educação (DGE), elaborar um conjunto de orientações de gestão que permitissem às Escolas e aos professores tomarem opções que minimizassem as dificuldades sentidas na implementação dos Programas e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico e de Matemática A do Ensino Secundário.

Em Matemática, na teoria das probabilidades, a esperança matemática de uma variável aleatória é a soma das probabilidades de cada possibilidade de saída da experiência multiplicada pelo seu valor. Isto é, representa o valor médio "esperado" de uma experiência se ela for repetida muitas vezes... E quem sabe se não foi tendo em consideração esta definição e, é claro, o clima de "consensos" do atual governo, que a Secretaria de Estado da Educação decidiu propor a constituição de dois grupos de trabalho, um para o básico e outro para o secundário, com a participação da APM mas também da SPM e de duas professores convidadas para o grupo do básico.

Como é hábito na APM, constituíram-se de imediato grupos de apoio com diversos associados de todos os graus de ensino que através do intercâmbio de ideias e das suas próprias experiências participaram ativamente na discussão e elaboração de documentos que, a seu ver, permitiriam minimizar alguns dos problemas resultantes da implementação dos Programas e Metas.

Como a esperança requer perseverança, isto é, acreditar que algo é possível mesmo quando há inúmeras indicações em contrário, lá fomos nós, as escolhidas como representantes – eu, a Adelina Precatado e a Margarida Rodrigues – cheias de propostas de anulação, de reformulação, de substituição, de metodologias, enfim, de tudo o que nos permitisse aproximar os atuais Programas e Metas Curriculares daquilo que entendemos dever ser uma educação matemática para todos os que frequentam a escolaridade obrigatória, sejam do ensino básico ou do secundário.

O "reflexo" das inúmeras horas de reunião, dos dois grupos de trabalho foi, entretanto, apresentado às Escolas e, como previsto e esclarecido pelo Senhor Secretário de Estado, João Costa, não houve alteração aos atuais Programas em vigor. Ao lermos os documentos apresentados pela DGE, cujo texto pretende conciliar os diferentes pontos de vista da APM e da SPM, da opinião das professoras convidadas e das questões levantadas pelas Escolas, professores e encarregados de educação, o balanço é claro – quer no ensino básico, quer no ensino secundário - os atuais programas em vigor mantêm na sua essência aqueles que são os pontos de divergência acerca do Ensino e da Educação Matemática entre o que a APM defende e o que foram as opções políticas do anterior governo.

No ano que agora se inicia, as questões mais importantes continuam, consequentemente, por responder: Qual o futuro reservado aos atuais Programas e Metas Curriculares? Como poderemos trabalhar, mais uma vez, em direção a Novos Programas quando neste momento os nossos alunos, em apenas nove anos de escolaridade básica, já passaram por três programas de Matemática? Será possível explicar novas mudanças aos Pais e Encarregados de Educação, às Editoras, à Comunicação Social?

O contributo mínimo apresentado nos dois documentos intitulados "Orientações de gestão curricular", não permite a todos nós professores, mais uma vez, baixarmos os braços. Desta forma apelo a que todos continuemos a tentar encontrar as melhores soluções para a sala de aula mas, sem deixarmos de levantar nos grupos disciplinares, nos conselhos pedagógicos e principalmente na tutela, todas as questões que considerarmos pertinentes e que permitam caminhar para a melhoria das aprendizagens na Matemática.

Apesar de todas as condicionantes, o mais importante, é saber o que se pretende da Educação Matemática para todos, nos 12 anos de ensino obrigatório. Será que aceitamos que prevaleça aquela que foi a opção clara do Ministro Crato – encarar a disciplina de Matemática como seletiva e cujo objetivo principal é a preparação de alunos para o ensino superior?

E volta a esperança... a esperança que com uma reflexão participada, conjunta, informada e corajosa... a matemática possa contribuir para a formação integral de futuros cidadãos conscientes, preparados e capacitados para todo e qualquer que seja o seu percurso de vida.

Teresa Moreira
Direção da APM

O XIX encontro Nacional da APM "A Matemática nos primeiros anos", realizar-se-á nos dias 4 e 5 de novembro, na cidade de Tomar, onde se pretende apresentar e discutir conteúdos, ferramentas e metodologias de ensino e aprendizagem da Matemática no Pré-escolar, 1.° e 2.° ciclos do ensino básico.

As inscrições estão abertas até 1 de novembro de 2016 e o programa pode ser consultado na página da APM.

O oitavo Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, da responsabilidade da Federação Iberoamericana de Educação Matemática (FISEM) realizar-se-á em Madrid de 10 a 14 de julho de 2017 e é organizado pela Federação Espanhola de Sociedades de Professores de Matemáticas (FESPM).

A APM pertence à FISEM desde a sua fundação e disponibiliza na sua página Facebook um vídeo promocional do CIBEM em português.

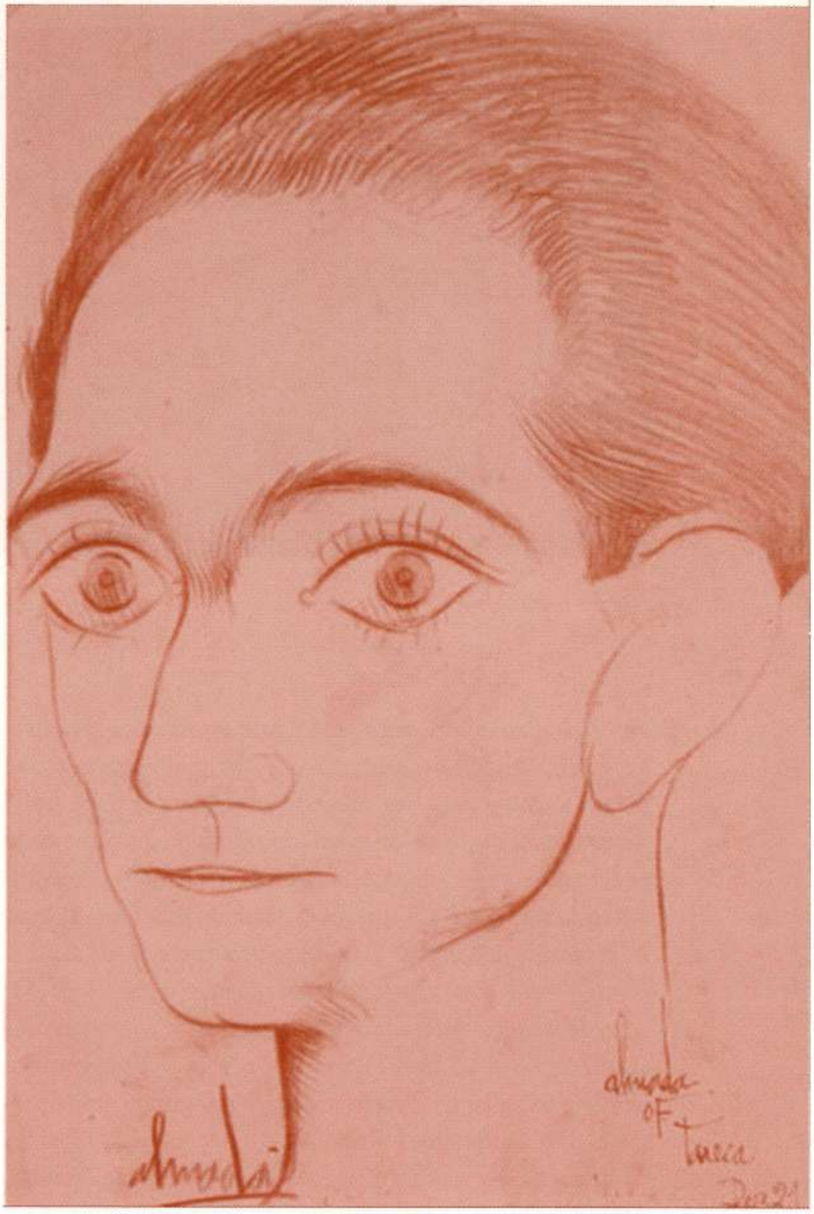
As inscrições estão abertas desde 1 de outubro de 2015 e o primeiro prazo terminará a 28 de fevereiro de 2017.

VIII CIBEM
Madrid 2017

A matemática na obra de Almada Negreiros

Simão Palmeirim Costa

Pedro J. Freitas



Este artigo é baseado e desenvolvido a partir da publicação em ata de uma comunicação no ProfMat2016, organizado pela Associação de Professores de Matemática.

Almada Negreiros (1893-1970) é um dos nomes incontornáveis da arte Portuguesa do século XX. Artista plural, explora uma enorme variedade de expressões plásticas (desenho, pintura, fresco, vitral, etc.) além da sua obra literária. Na conferência que deu origem a este texto abordámos algumas das peças mais importantes do seu trabalho pictórico, que foi progredindo em direção à abstração geométrica. Focando precisamente esta fase da sua obra e apresentando alguns dos fundamentos geométricos que presidem aos seus desenhos, procurámos contribuir para uma renovada e mais informada leitura da obra deste autor ímpar, além de compreender em que medida o próprio poderá ter contribuído para um ramo da matemática, a geometria, através da sua arte.

Desde cedo Almada Negreiros é uma figura da maior importância no contexto artístico nacional, desde as marcantes publicações nas primeiras décadas do século XX – «Manifesto Anti-Dantas e por Extenso" (1916), "K4 O Quadrado Azul" e "A Engomadeira" (ambos de 1917) – passando por grandes obras públicas como os vitrais da Igreja de Nossa Senhora de Fátima (terminados em 1938) ou a publicação do romance "Nome de Guerra" (também em 1938). Com a realização dos grandes frescos para as Gares Marítimas de Alcântara e da Rocha do Conde de Óbidos, na década de quarenta, começa a denotar-se uma geometrização das formas, que marcará o seu percurso artístico. O retrato de Fernando Pessoa que pinta em 1954 reforça esta tendência pictórica, completamente assumida enquanto abstração geométrica nas quatro pinturas de 1957, expostas na *I Exposição de Artes Plásticas* da Fundação Calouste Gulbenkian. Na década de sessenta continua com grandes encomendas públicas como as decorações dos edifícios da Cidade Universitária em Lisboa, publicando ainda "Orpheu 1915-1965", em homenagem à herança modernista nacional de que faz parte. No ano que antecede a sua morte (1969), conclui o grande painel em pedra gravada, "Começar" na Fundação Calouste Gulbenkian, numa espécie de antologia de todo o seu trabalho geométrico.

Mas de onde vem a sua paixão pela geometria?

Segundo relata o próprio, numa ida ao Museu Nacional de Arte Antiga (MNAA) com Amadeu de Sousa Cardoso e Santa-Rita Pintor para visitar os painéis de S. Vicente,

Figura 1

atribuídos a Nuno Gonçalves (figura 1), Almada terá ficado fascinado por uma obra à data também atribuída ao pintor quinhentista – o *Ecce Homo* (figura 2). Este fascínio traduziu-se quase de imediato numa busca incessante por regras composicionais, baseadas em traçados geométricos, que regessem a harmonia visual de uma obra de arte. A importância dos seus estudos geométricos neste âmbito levou, desde logo, a que a disposição dos painéis de S. Vicente fosse reconsiderada. Almada notou que o desenho dos ladrilhos no chão apresentava um ponto de fuga comum aos seis painéis, se fossem ordenados segundo a sua proposta (que ainda hoje é respeitada) e não em dois trípticos como estavam expostos então no MNAA. Durante décadas, Almada explorou a possibilidade de reconstituição retabular destes seis painéis como parte de um conjunto que incluiria várias outras obras, projetado para a Capela do Fundador do Mosteiro da Batalha.

A sua paixão pela Geometria adensou-se ao ponto da mesma invadir progressivamente e acabar por dominar o seu trabalho plástico. Mas também no campo teórico, a sua procura por pressupostos geométricos subjacentes à prática artística levou a que propusesse um *Cânone* geométrico, assente na sua própria pesquisa, mas que se revelava em inúmeros momentos da história da arte, como o próprio procurou demonstrar. Almada chega a afirmar que "o cânone não é obra do homem, é a captação que o homem pode da imanência. É o advento inicial da luz epistemológica" (*Assim Fala Geometria*, entrevistas a Almada Negreiros, Diário de Notícias, 1960) atribuindo a este Cânone uma importância mais abrangente que um mero conjunto de regras geométricas para a produção artística. Diz ainda: "Ir de encontro a um cânone. Eis a razão de todo o meu trabalho" (*Assim Fala Geometria*, entrevistas a Almada Negreiros, Diário de Notícias, 1960).

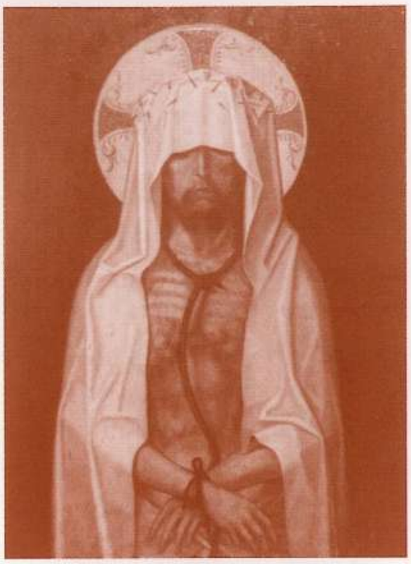


Figura 2

Procurando consubstanciar a presença do Cânone em manifestações artísticas ao longo da história, Almada reúne exemplos que vão desde um vaso de Suse, na Babilónia, a um ladrilho da sala do trono do Palácio de Cnossos, alguns elementos pitagóricos como um triângulo ou a Tetracys, o Ponto da Bauhütte ou a Figura Supérflua Exerrore, desenhada por Leonardo da Vinci. Almada apresenta como que uma retrospetiva destes elementos na tapeçaria *Número* (figura 3), que realiza para o Tribunal de Contas em Lisboa (1958).

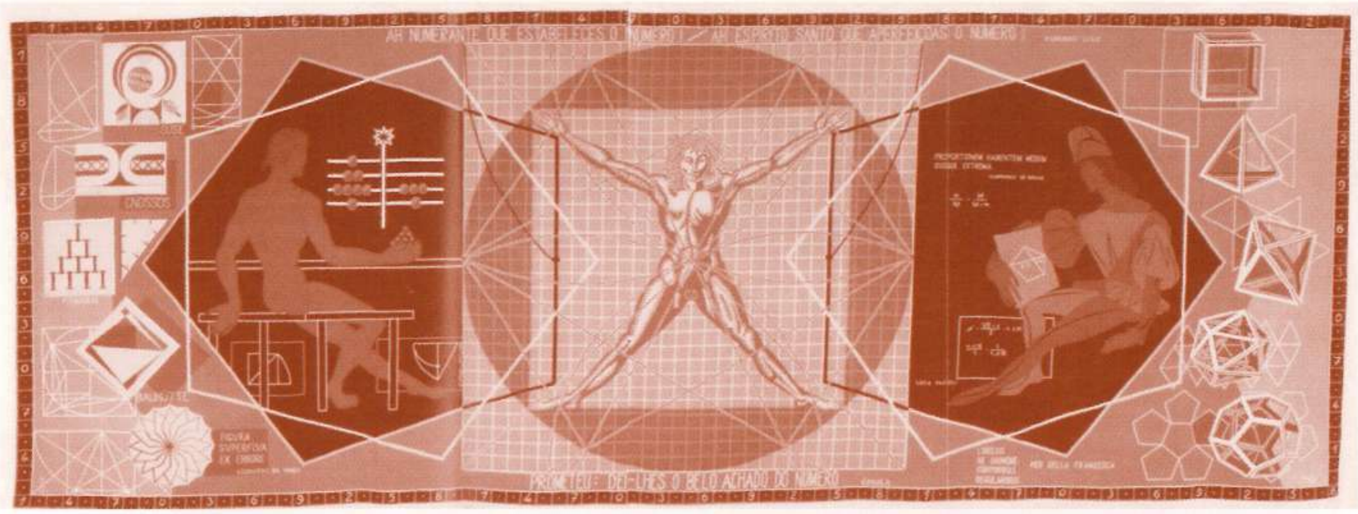


Figura 3

Mas em que consiste geometricamente, para Almada, o Cânone?

"A divisão simultânea do quadrado e do círculo em partes iguais e partes proporcionais é a origem simultânea das constantes da relação nove/dez, grau, medida e extrema razão e prova dos nove." (*Assim Fala Geometria*, entrevistas a Almada Negreiros, Diário de Notícias, 1960).

Quando fala em relação 9/10, Almada refere-se à relação espacial entre os pontos que permitem a divisão de uma circunferência em nove e em dez partes iguais, respetivamente ou, por vezes, a uma proporção ou retângulo com essas dimensões. A figura 4, de um caderno do autor, mostra-nos uma das suas propostas de determinação dos pontos que servem a divisão da circunferência em 9 e 10 partes. Esta construção, extremamente simples e elegante, determina a décima parte da circunferência de forma exata; quanto à nona parte (não construível de forma exata com régua não graduada e compasso) a construção obtém uma excelente aproximação, com erro de 0,5%.

A divisão da circunferência em n partes iguais, com régua não graduada e compasso, foi uma das pesquisas geométricas a que mais se dedicou. Embora saibamos (segundo o teorema de Gauss-Wantzel) que é possível dividir a circunferência em n partes iguais com régua não graduada e compasso se e só se

$$n = 2^k p_1 \dots p_t$$

em que $p_1, \dots, p_t$ são primos de Fermat, distintos dois a dois[1], não sabemos se Almada teria esta informação, ou se seria relevante que a tivesse, já que a sua preocupação fundamental prende-se com os resultados visuais. Isto quer dizer que nos casos impossíveis (segundo o já referido teorema), Almada chegava, experimentando dezenas de traçados diferentes, a aproximações com margens de erro impressionantes e, acima de tudo, com uma notável elegância.

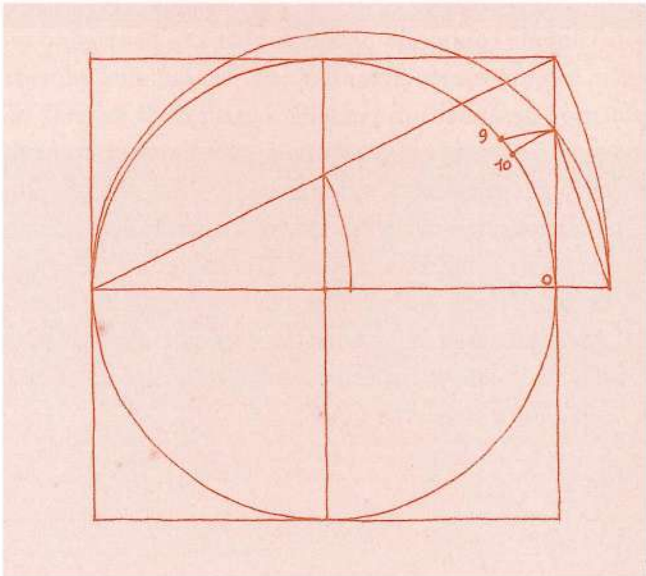


Figura 4

Embora não se saiba se Almada Negreiros estava a par do teorema e das suas consequências, estamos em crer que não era o caso já que apresenta a construção sem explicações e sem distinguir o que é exato do que é aproximado. O próprio autor propõe: "A perfeição contém e corrige a exatidão." (*Assim Fala Geometria*, entrevistas a Almada Negreiros, Diário de Notícias, 1960), o que nos dá a ideia de como a sua preocupação central era ir de encontro à harmonia perfeita, e não à determinação exata dos pontos em questão. A matemática, de construções abstratas e gerais, desligada de qualquer período artístico particular, é particularmente apropriada para Almada, ao serviço da procura do cânone.

Outro tipo de construção geométrica a que Almada dedica considerável experimentação tem a ver com retângulos com diferentes proporções. Não só a proporção entre os lados era relevante (por exemplo um para $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ou Φ), como, naturalmente, diferentes formas de chegar a estas proporções. Muitas vezes chegava a marcar o declive da diagonal, representando uma proporção específica, sem delinear o retângulo propriamente dito. O que o preocupava era, fundamentalmente, estabelecer relações entre os diferentes declives e outros elementos, como a divisão da circunferência em n partes iguais; fazia isto procurando provar que tudo se interrelaciona geometricamente e que o Cânone está por detrás dessas relações.

Um exemplo paradigmático do que descrevemos é visível na figura 5, representando o pentalfa regular. A divisão da circunferência em 5 partes iguais com régua não graduada e compasso é possível e há mais que um traçado sobejamente conhecido para desenhar um pentágono regular inscrito numa circunferência. No entanto, Almada procurou desenhar um pentalfa a partir da já referida relação 9/10. O ponto marcado na figura representa a nona parte da circunferência, a partir dele o autor desenha um pentalfa em que o diâmetro equivale a duas vezes a nona parte mais a décima parte. Este é o pentágono com traço cheio, sendo que a tracejado vemos um pentágono perfeito. Matematicamente, estamos perante um erro evidente, mas visualmente (a maior preocupação do artista), podemos ver que o erro é marginal.

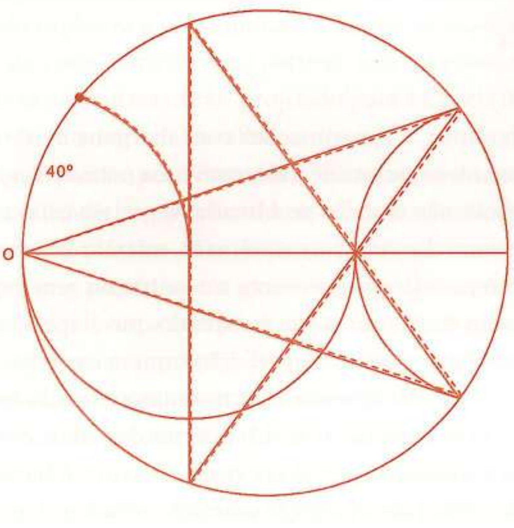


Figura 5

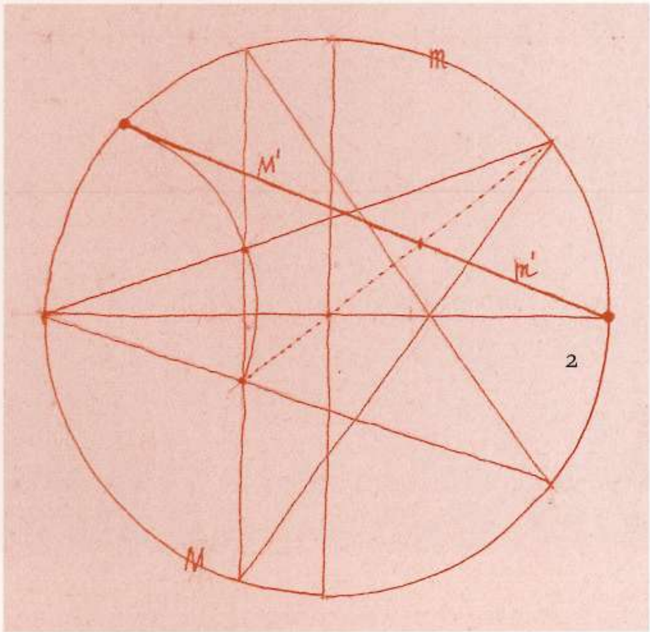


Figura 6

Muito interessante também é o exemplo da figura 6, novo pentalfa em que Almada representa duas propostas a nosso ver inovadoras: a divisão da circunferência segundo a razão de ouro (em que m e M representam a proporção 1 e Φ respetivamente), com uma boa aproximação; a sua segunda proposta é a divisão da reta que une os dois pontos da circunferência resultantes, também na proporção áurea, desta feita representando as secções por m' e M'. É de referir a enorme simplicidade e elegância dos traçados em causa.

Vejamos finalmente alguns dos elementos geométricos que referimos até aqui, quando aplicados ao painel gravado em pedra *Começar*, de 1969, no átrio da Fundação Calouste Gulbenkian (figura 7).

Das figuras sobrepostas no extremo esquerdo do painel (figura 8) podemos agora distinguir claramente três pentalfas inscritos, dois com um vértice comum no topo e um com o vértice no limite inferior da circunferência. Destaquemos a construção deste último, a partir da divisão da circunferência em nove partes iguais (exatamente como explicámos na figura 5). Os outros dois pentalfas (irregulares) são também desenhados em função da divisão da circunferência em nove partes iguais, mas a partir de origens diferentes: um tem dois vértices assinalados com 9', em função do ponto O' (ponto mais à esquerda da circunferência); o outro tem um vértice assinalado com 9'', em função ponto O'' (no limite inferior da circunferência) e dois vértices nos extremos do diâmetro horizontal da circunferência. Ainda na mesma figura, há três retângulos com o lado esquerdo passando no ponto O', o lado superior no ponto 9 e o lado inferior no ponto 9'; estes têm proporções especí-

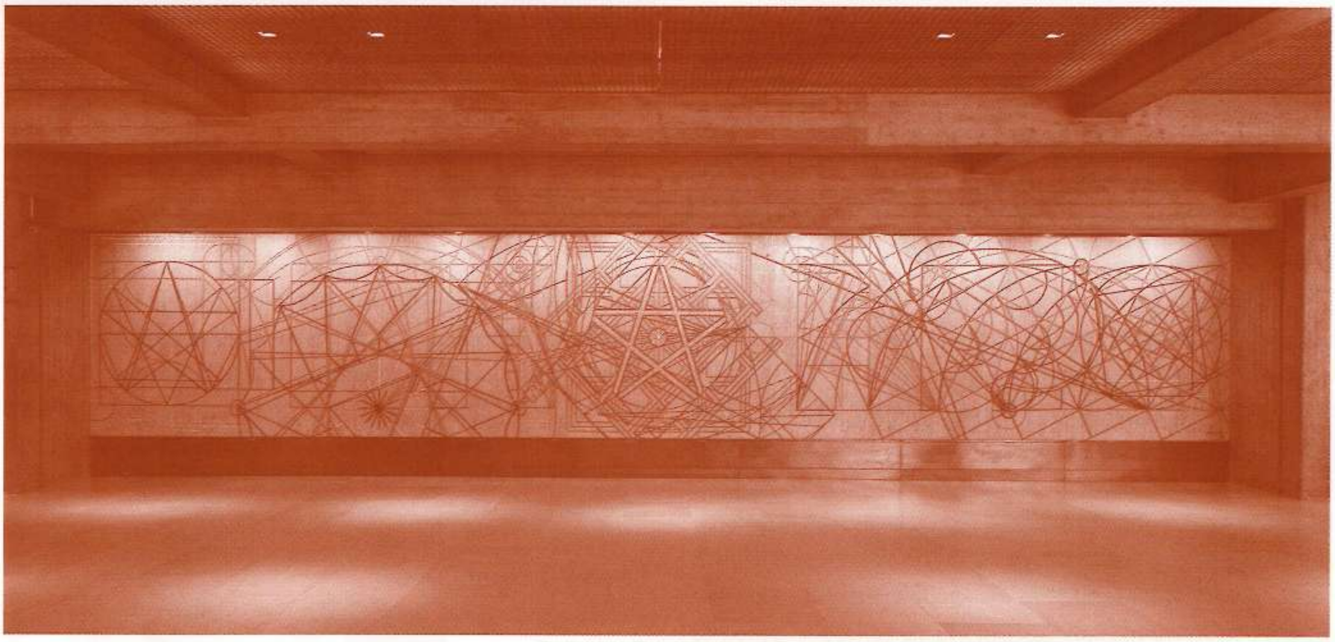


Figura 7

ficas, marcadas nas diagonais dos mesmos: $\sqrt{\Phi}$ (que o autor associa à proporção 7/9 (embora a fração que efetivamente se aproxima mais de $\sqrt{\Phi}$ seja 9/7 – cremos que isto se deve simplesmente a um lapso), $\sqrt{3}$ (que associa à proporção 5/7)[2] e Φ.

A figura 9 apresenta uma representação do autor de parte de uma estrela de dezasseis pontas, originalmente desenhada por Leonardo da Vinci para uma edição de *De Divina Proportione* por Luca Pacioli. No centro desta estrela Almada indica uma série de coincidências que sugere poderem ser tiradas a partir da mesma, nomeadamente a divisão da circunferência segundo a razão de ouro, através de um triângulo que surge da divisão da circunferência em 128 partes iguais, anotando os vértices correspondentes às 49, 47 e 32 partes. Na mesma figura é possível detetar ainda uma repetição do retângulo de proporções Φ, a azul claro.

A figura 10 (ao centro do painel), representa vários elementos que vale a pena referir. As duas grelhas de quatro quadrados sobrepostas (uma ortogonal relativamente aos limites do painel e outra rodada a 45°), que parecem estar num plano de fundo, são associadas por Almada a *Marcahuasi* (nos Andes), como exemplo de manifestação do Cânone. Note-se a recorrência dos retângulos, semelhantes aos da figura 8, desta feita rodados a 45°. Além da forte presença da estrela pitagórica, de cinco pontas, chamamos ainda a atenção para as múltiplas retas num tom mais escuro que invadem esta parte do painel. Estas, presentes em todo o painel aliás, representam declives particulares, como diagonais de retângulos com as proporções correspondentes e têm sempre a respetiva marcação (Φ, Φ^2, ou raízes variadas).

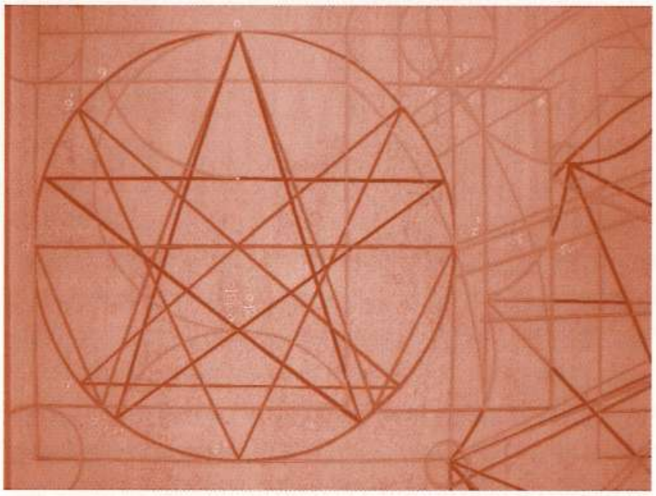


Figura 8

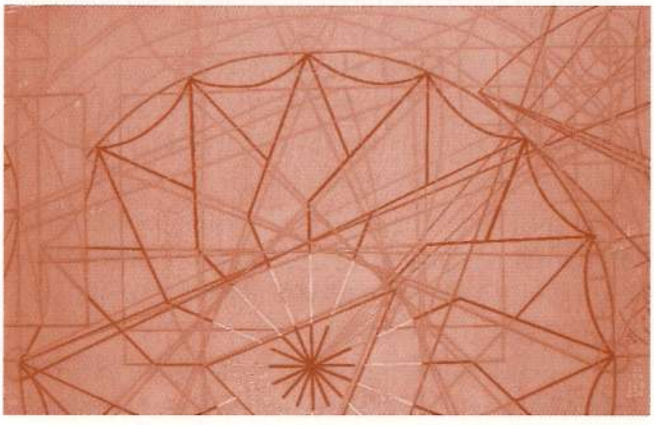


Figura 9

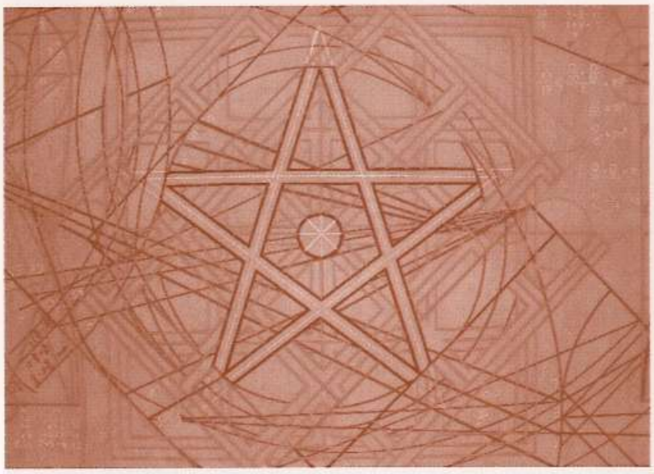


Figura 10

No extremo direito do painel é discernível uma das figuras de maior importância em todo o trabalho de Almada: o Ponto da Bauhütte[3]. O autor fez a interpretação geométrica deste ponto a partir da uma quadra citada no livro *Le Nombre d'Or*, de Matila Ghyka, e atribuída a uma associação medieval de construtores de catedrais denominada Bauhütte.

"Um ponto que está no círculo
E que se põe no quadrado e no triângulo.
Conheces o ponto? tudo vai bem.
Não o conheces? tudo está perdido."

É a partir deste texto algo hermético que Almada propõe a construção que apresentamos na figura 11 e que pode ser identificada, como referimos, no extremo direito do painel *Começar*.

Num quadrado com uma circunferência inscrita, desenha-se um segmento de reta de um vértice para o ponto médio do lado oposto. O ponto de interseção desse segmento com a circunferência será então vértice comum de um quadrado e de um triângulo.

Além da referência medieval presente na construção, chegamos a outra referência histórica: o triângulo que se obtém com este processo é retângulo e tem lados com proporções 3-4-5; a sua particularidade prende-se com a sua aplicação em cordas pelos funcionários reais no antigo Egipto para medir no terreno ângulos retos.[4]

Há finalmente outro elemento geométrico canónico: o arco compreendido entre os dois pontos em baixo à direita, vértices do quadrado e do triângulo, é aproximadamente a 22.ª parte da circunferência

Na pintura homónima de 1957 nada desta construção se vê. Almada pretenderia certamente que a proximidade desta obra final aos elementos canónicos revelasse automaticamente a sua beleza e importância, seguindo o seu próprio lema, escrito em vários cadernos:

Sem texto
Sem enigma
Sem cálculo
Sem opinião

A obra plástica de Almada Negreiros, progressivamente abstratizante, apresenta como vimos uma série de elementos geométricos de grande interesse. Muitas das relações que estabelece entre eles são de pertinência matemática mas, acima de tudo, é de considerar a simplicidade dos traçados que efetua. A elegância do desenho é prova da mestria do autor que, sendo autodidata, muito contribuiu para novas perspetivas, não só da arte moderna portuguesa como da geometria enquanto campo da matemática.

Simão Palmeirim Costa
Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa
Pedro J. Freitas
Faculdade Ciências da Universidade de Lisboa

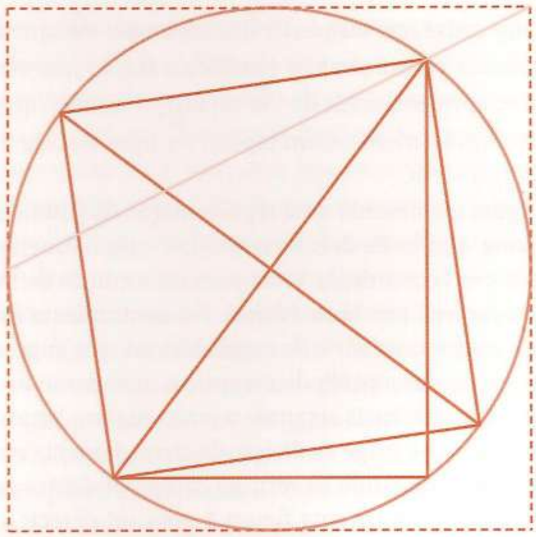


Figura 11

Notas

[1] Um primo de Fermat é um primo da forma 2^m+1, em que m é uma potência de 2.
Primos de Fermat conhecidos: 3, 5, 17, 257 e 65537.
Os polígonos regulares com 7, 9, 14 lados, por exemplo, não são construíveis.

[2] Estamos perante outro lapso do autor parece-nos: onde está $\sqrt{3}$ devia estar $\sqrt{2}$.

[3] Este aliás o título de uma das quatro pinturas de 1957 (CAM-FCG) do autor. As outras três intitulam-se *Porta da Harmonia*, *Relação 9/10* e *Quadrante I*.

[4] Se um triângulo tiver lados com medidas 3, 4 e 5, é retângulo, pelo recíproco do teorema de Pitágoras. Estas são aliás as menores medidas inteiras para os lados de um triângulo retângulo.

Vejam lá o que os professores de matemáticaescrevem nos cadernos...

O Filipe acabou de sair de uma aula de Matemática.
O que terá a sua professora escrito no caderno que ele está a mostrar à Mafalda?

Figura 1

A propósito dos 30 anos da APM e de uma pesquisa que me propus fazer, mergulhei nos imensos números da Educação Matemática que guardo, começando pelo primeiro. Logo a seguir, parei para ler um artigo da seção PENSE NISTO de janeiro (escrevia-se Janeiro então) de 1987 do nosso estimado sócio e colaborador de longa data (desde sempre) , Henrique Guimarães (HG). Claro que me lembrava deste artigo, parece que foi ontem que o li, e, sem avisar, foi toda a minha vida profissional que passou em revista. Pensei nos meus alunos e na minha prática e fiquei curioso. Continuei a minha tarefa com outros objetivos, mas decidido a repetir a experiência e comparar com os resultados e as conclusões de HG.

Há trinta anos, numa turma de oitavo ano, dos arredores de Lisboa, a quem foi perguntado o que teria a professora de Matemática escrito no caderno que o Filipe está a mostrar à Mafalda, 4 alunos disseram tratar-se de um 'bilhete para os pais', outros 4 imaginaram referências positivas, 3 disseram 'trabalhos de casa', 1 aluno referiu alternativamente todas as possibilidades anteriores e outro respondeu que não sabia. Uma turma com quinze alunos, imagine-se.

No passado ano letivo, lancei o desafio numa das sessões quinzenais , Episódios de Cidadania, onde estiveram presentes vinte e cinco dos vinte oito alunos de uma turma de sétimo ano, dos arredores de Lisboa, da qual fui diretor de turma. Sem comentários, estendi-lhes uma folha A5 com a questão original e recolhi-a depois de cinco minutos, procurando que não houvesse muitos comentários entre eles, portanto pouca interferência. Li as respostas em voz alta e provoquei a discussão, e ouvi-os. Mais tarde sentei-me, reli o artigo original(*) e comparei os resultados. A distribuição das respostas obtidas, passados trinta anos, foi a seguinte: 3 'informações ou recados' ; 8 referências positivas; 14 referências negativas relativas ao comportamento e/ou aproveitamento. Algumas das respostas tinham um tom cómico, houve duas sugestões para castigar o Filipe (uma delas propunha cinquenta (?) equações pela sua falta de educação) e um comentário ao seu caderno como lixo(!). Um aluno responde que 'Deve ter escrito que ele se portou mal na aula porque a professora não iria escrever *olhe o seu filho portou-se muito bem na aula*, para isso dizia na reunião [de pais]', o que traduz muito bem o tom da discussão final com a turma. Os alunos foram unânimes quanto a não ser habitual os professores enviarem para casa comentários positivos, e alguns lamentaram, como é natural, que a maioria das observações sejam reparos, admoestações ou apenas informações neutras. Note-se que nestas três décadas generalizou-se o uso da caderneta individual do aluno que, particularmente no ensino básico, é utilizada como meio de comunicação entre o encarregado de educação e qualquer dos professores do conselho de turma. Porém, basta folhear algumas cadernetas para verificar que, além de recados ou informações para toda a turma, a maior parte das mensagens estão nas cadernetas dos alunos mais problemáticos e referem-se a comportamentos perturbadores.

Henrique Guimarães interpelava o leitor se a tendência das respostas seria coincidência ou casualidade? Corresponderia a um ambiente mais ou menos generalizado, ou a uma prática comum dos professores? Mas também, que consequências teria este sentimento nos alunos, no ambiente das aulas, na relação dos alunos com os professores, e na forma como experimentam a Matemática?

E hoje, terá mudado a prática, o sentimento dos alunos? Que mensagens enviam os professores (de matemática) para os encarregados de educação quando escrevem nos cadernos ou cadernetas escolares? Revisitar este artigo e realizar esta experiência simples fizeram com que refletisse na frequência e na natureza daquilo que escrevo. Naturalmente a faixa etária dos alunos será determinante nisso. Mas porque fazê-lo? Com que ganhos? perguntei-me. Pensei nisto e também como converter a questão *'já assinaram a mensagem que enviei? Não te esqueças...'* É possível aproveitar este canal de comunicação para inverter a tendência aparente, digo eu, para 'ralhar'. Que espaço ocupa o elogio e o incentivo e o relato dos progressos? Não temos tempo, numa aula de 45 ou 50 minutos para isso, ouço... Demora tanto quanto um 'ele insiste em falar com os colegas (em vez de) estar atento na aula', como descreve uma das alunas. E decerto, muito menos, acrescento, do que longas mensagens pormenorizadas de 'más-educações' que andam por aí...

Proponho então outro exercício: 'Vê lá o que vou escrever no caderno do Filipe.'

Paulo Alvega
EBS Padre Alberto Neto
Agrupamento de Escolas Queluz-Belas

(*) No número seguinte de EM saiu outro artigo de outro colega comentando este e a realização de outra experiência, alterando as condições iniciais: outra disciplina, Ciências Naturais, e a fisionomia do Filipe, claramente satisfeito. Apareceu também a tira original de Quino da qual a imagem acima fora retirada.

Figura 2

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

INVESTIGANDO CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

A tarefa Investigando casos de semelhança de triângulos foi adaptada da tarefa 4A – Investigando congruências de triângulos dos Materiais do NPMEB de 2007. Uma versão semelhante foi testada em 2014/2015, numa turma do 7.º ano da Escola D. Pedro V, num trabalho conjunto com o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

O atual Programa e Metas Curriculares pressupõem a abordagem da semelhança de triângulos utilizando o Teorema de Tales, no entanto, esta abordagem, é considerada no mesmo programa com diferentes níveis de desempenho.

A tarefa apresentada permite que, no 7.º ano, os alunos conheçam, compreendam, e apliquem adequadamente os critérios de semelhança de triângulos, tendo como único pré-requisito a exploração dos critérios de semelhança de polígonos. Contudo a aplicação desta tarefa na sala de aula obriga a que após a sua exploração com os alunos se realize uma discussão que permita sistematizar os critérios de semelhança de triângulos.

Foi apresentada aos alunos utilizando "triângulos modelo" – os dois triângulos A – para que, por sobreposição, os alunos pudessem comparar as amplitudes dos ângulos dos diferentes triângulos. Optou-se por não utilizar transferidor dado os naturais erros de medição que dificultam as conclusões pedidas.

Ana V. Lopes

INVESTIGANDO CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nesta tarefa pretende-se que descubras o número mínimo de elementos (lados e ângulos) de um triângulo que é necessário considerar para que se possa dizer que dois triângulos são semelhantes.

1. Observa os triângulos A, B e C da figura 1.

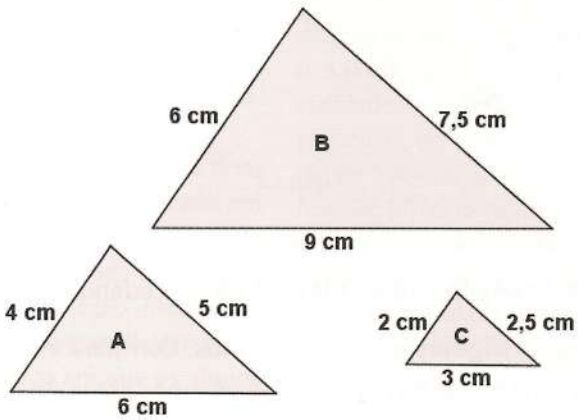


Figura 1

1.1 Verifica se o triângulo A é semelhante ao triângulo B procedendo da seguinte forma:

- **i.** Identifica em cada um dos triângulos o maior e o menor lado.
- **ii.** Verifica se os lados correspondentes entre os dois triângulos são diretamente proporcionais.
- **iii.** Compara a amplitude dos ângulos do triângulo **A** com a amplitude dos ângulos correspondentes do triângulo **B** utilizando o triângulo modelo que te foi entregue.

Podes concluir que os triângulos **A** e **B** são semelhantes?

1.2 Verifica se o triângulo **A** é semelhante ao triângulo **C** procedendo da mesma forma que em **1.1.**

Podes concluir que os triângulos **A** e **C** são semelhantes? Porquê?

Verifica-se que basta analisar a proporcionalidade entre lados correspondentes de dois triângulos para estabelecer a sua semelhança.

CRITÉRIO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Tendo em conta os **lados dos triângulos**, dois triângulos são semelhantes se os comprimentos dos lados de um são diretamente proporcionais aos comprimentos dos lados do outro.

1.3 Agora, tendo em conta os **ângulos dos triângulos**, enuncia outro critério para a semelhança de triângulos.

2. Observa os triângulos A, B e C da figura 2.

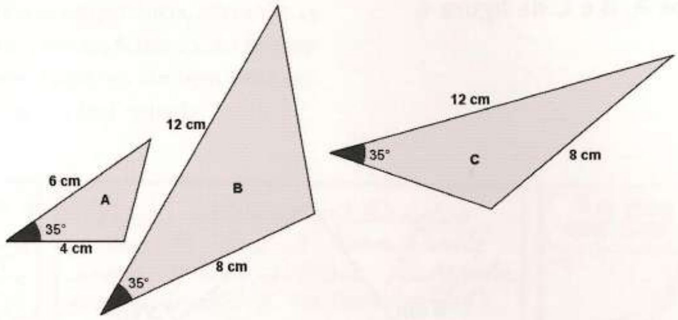


Figura 2

2.1 Verifica se o triângulo **A** é semelhante ao triângulo **B** procedendo da seguinte forma:

2.1.1 Repara que um ângulo é igual nos dois triângulos. Compara a amplitude dos restantes ângulos do triângulo **A** com a amplitude dos ângulos correspondentes do triângulo **B**, utilizando o triângulo modelo que te foi entregue.
Utilizando os critérios que já conheces, podes concluir que os triângulos **A** e **B** são semelhantes?

2.1.2 Verifica se entre os dois triângulos os lados cujos comprimentos são apresentados são proporcionais

2.2 Verifica se o triângulo **C** é semelhante ao triângulo **A** procedendo da mesma forma que em **2.1.**.

Tendo em conta os **lados** e os **ângulos dos triângulos**, enuncia outro critério para a semelhança de triângulos.

Lesson study – Melhorar a aprendizagem dos alunos através da prática profissional colaborativa dos professores

INTRODUÇÃO

Com origem no Japão, onde é uma atividade comum às comunidades de professores que lecionam os primeiros 6 anos de escolaridade, a *lesson study* é considerada uma prática poderosa de desenvolvimento profissional e está fortemente implantada em vários países asiáticos. Na última década, como resultado de projetos e parcerias com instituições universitárias e/ou organismos de decisão educativa tem emergido em outros países, em particular nos E.U.A. e na Inglaterra, como meio para melhorar a qualidade da aprendizagem dos alunos. Em 2011 contactámos pela primeira vez com a investigação sobre a *lesson study* (35.ª Conferência Internacional *Psychology of Mathematics Education*) e, desde então temos procurado divulgar esta prática junto dos grupos de professores com quem trabalhamos.

Este artigo apresenta uma parte de um projeto realizado no âmbito da prática supervisionada do Mestrado em Ensino da Matemática, num agrupamento de escolas na região de Lisboa, que emergiu da necessidade sentida por um grupo de professoras, umas em formação inicial e outras em formação contínua, em analisar e melhorar a prática no ensino num tópico matemático em que os alunos geralmente apresentam dificuldades - Equações do 1.º Grau (Silvestre, Nunes & Jacinto, 2012). Assim, este estudo tem um duplo propósito: enquanto visa proporcionar experiências de aprendizagem em que a compreensão das noções de incógnita, equação e solução é mediada pela utilização de materiais manipuláveis, é suportada por um tipo de trabalho colaborativo entre professores, com características muito particulares.

A ABORDAGEM *LESSON STUDY*

A *lesson study* é uma prática poderosa para apoiar o desenvolvimento profissional dos professores, visando melhorar o ensino e a aprendizagem dos alunos num determinado tópico, desenvolvida em contexto escolar, frequentemente com um número pequeno de professores e cuja identidade está na sua natureza investigativa, reflexiva e colaborativa (Perry & Lewis, 2009; Takahashi, 2010). As suas potencialidades residem na colaboração entre os professores, em particular, no momento de planeamento da aula, e no ciclo de trabalho que são chamados a desenvolver: (i) planificação; (ii) lecionação e observação; (iii) análise e reflexão; e (iv) revisão da planificação. Embora atualmente não seja prática corrente no Japão, alguns estudos mostram como a aula reformulada pode ser lecionada novamente (Dudley, 2011; Fernandez & Yoshida, 2004, citado por Fujii, 2016). A abordagem *lesson study* diferencia-se de outras que partilham o mesmo âmbito de desenvolvimento profissional pelo facto do seu foco ser a *aprendizagem* em contexto escolar (Figura 1), com especial enfâse no estudo de "como" é que os alunos aprendem.

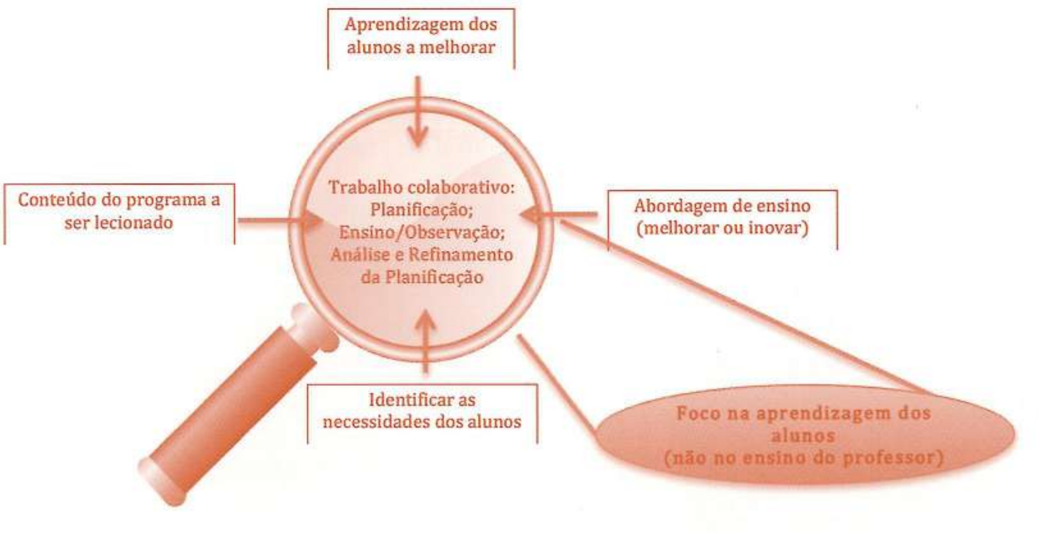


Figura 1. Aspetos do ciclo da *lesson study* com foco na aprendizagem dos alunos (Dudley, 2011)

As experiências baseadas em *lesson study* têm um impacto significativo na qualidade da aprendizagem matemática dos alunos, bem como no âmbito do desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. Contudo, a literatura também identifica dificuldades na sua implementação devido à tradição de trabalho individual dos professores na cultura ocidental e à falta de compreensão sobre a natureza da *lesson study* (Fujii, 2016; Yoshida, 2012).

METODOLOGIA

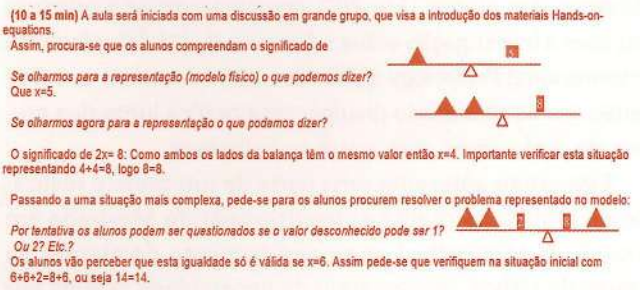
Neste estudo seguimos uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa. As participantes, duas professoras com profissionalização e duas alunas da formação inicial de professores, encontravam-se a lecionar no Agrupamento de Escolas de Fernando Pessoa (Olivais). Os dados recolhidos ao longo das várias etapas do ciclo *lesson study* incluíram a gravação vídeo das sessões de trabalho colaborativo das professoras, bem como das aulas lecionadas. Foram também recolhidos diversos documentos de trabalho, como planificações, tarefas, produções dos alunos, reflexões e notas pessoais das docentes. Os dados apresentados neste artigo referem-se ao primeiro ciclo da *lesson study* em que a aula foi leccionada por uma das docentes em formação contínua, que também era professora cooperante. Neste artigo reportamos o caso deste ciclo de *lesson study*, que se constitui como o catalisador de aprendizagem tanto para os alunos como para o grupo de professores.

CICLO *LESSON STUDY*

Preparação da Aula. No âmbito do tópico "Equações do 1° grau", no 7° ano de escolaridade, as professoras planearam a primeira aula de abordagem ao tema. Definiram o objetivo da aula, a forma de apresentar a tarefa e os materiais a usar (Hands-on Equations®), o trabalho dos alunos, o momento da discussão e a síntese final. Para além destes momentos da aula, foram antecipadas dificuldades dos alunos neste tópico (Rojano & Martínez, 2009) e definido o questionamento do professor com o objetivo de os ajudar a superá-las. Deste modo, as professoras começaram por simular a aula, recorrendo aos materiais disponíveis para o professor (Figura 2), explorando o momento da apresentação da tarefa e a negociação de significados de "incógnita", "equação" e "solução". Na figura, um dos dados representa 3 unidades e o outro o seu simétrico, um dos pinos representa a incógnita e o outro o seu simétrico.

Figura 2. Exploração do material Hands-On Equations®

Em paralelo com a exploração física do material, as professoras foram aperfeiçoando o plano de aula, registando possíveis questões a colocar aos alunos e fazendo o registo pictórico do que seria escrito no quadro (Figura 3).



(10 a 15 min) A aula será iniciada com uma discussão em grande grupo, que visa a introdução dos materiais Hands-on-equations.
Assim, procura-se que os alunos compreendam o significado de

Se olharmos para a representação (modelo físico) o que podemos dizer?
Que x=5.

Se olharmos agora para a representação o que podemos dizer?

O significado de 2x= 8: Como ambos os lados da balança têm o mesmo valor então x=4. Importante verificar esta situação representando 4+4=8, logo 8=8.

Passando a uma situação mais complexa, pede-se para os alunos procurem resolver o problema representado no modelo:

Por tentativa os alunos podem ser questionados se o valor desconhecido pode ser 1? Ou 2? Etc.?
Os alunos vão perceber que esta igualdade só é válida se x=6. Assim pede-se que verifiquem na situação inicial com 6+6+2=8+6, ou seja 14=14.

Figura 3. Planificação da negociação de significados

Nesta aula o trabalho dos alunos consistia na resolução de quatro equações do primeiro grau recorrendo ao material manipulável, fazendo a representação pictórica das diferentes fases de resolução de cada equação e, por fim, verificando se o valor obtido era ou não solução da equação substituindo o valor da incógnita na expressão inicial.
Na planificação as professoras anteciparam possíveis dificuldades dos alunos bem como formas de os ajudar a ultrapassá-las (Figura 4).

Pergunta 4
Das seguintes figuras encontra o valor desconhecido para cada uma das situações e verifica se é válido:

Dificuldades: Logo na pergunta 4, vão aparecer incógnitas nos dois membros. Colocar a questão: *Se retirarmos a ambos os membros uma peça desconhecida, há alteração na igualdade?* O objetivo é munir os alunos de uma estratégia que permite obter uma equação equivalente e facilita encontrar o valor da incógnita. Caso haja algum aluno que avance com esta hipótese pedir para ele justificar a sua estratégia.

Figura 4. Excerto do enunciado da pergunta 4 e da planificação referente à antecipação das dificuldades dos alunos.

A aula. A aula foi dada pela professora cooperante e observada pelas restantes professoras, que aproveitaram para fazer registos do que foram observando, nomeadamente, das dificuldades apresentadas pelos alunos que não foram previstas inicialmente e das interações entre alunos e a professora. A professora começou por apresentar o material Hands-On Equations® para introduzir o conceito de equação e negociar os diferentes significados. Logo de seguida os alunos passaram ao trabalho autónomo, procurando resolver as diferentes equações que lhes foram propostas, a pares (Figura 5).

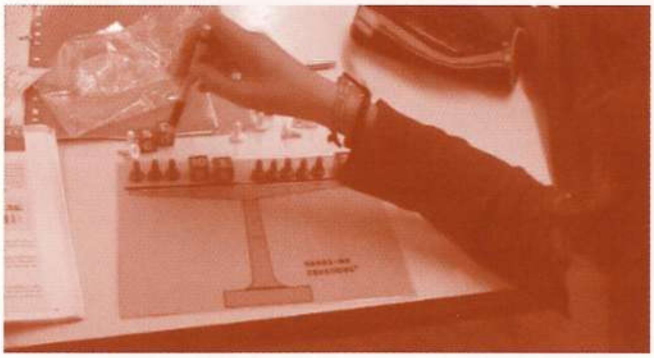


Figura 5. Os alunos resolvem a tarefa usando o material Hands-On Equations® (trabalho a pares).

Através da manipulação do material, os alunos revelaram compreender o significado da igualdade e de incógnita, tal como se observa no diálogo seguinte:

Aluno: Eu tenho três pinos azuis deste lado [1º membro] e cinco do outro lado [2º membro]. Se tirar três de cada lado, a balança mantém-se igual.

Professora: Porquê?

Aluno: Porque cada pino azul representa a mesma quantidade que eu desconheço qual é, mas são todas iguais... cada peça azul. [Aula 1].

Justificação idêntica foi usada pelo par de alunos, que apresentou e discutiu a sua resolução com a turma (Figura 6).

Tal como foi previsto na planificação da aula, os alunos fizeram as representações pictórica e algébrica em paralelo. A utilização da representação pictórica parece estabelecer a ligação entre a manipulação física dos materiais e a correspondente escrita algébrica, possibilitando a construção do significado de expressões equivalentes (Figura 7).

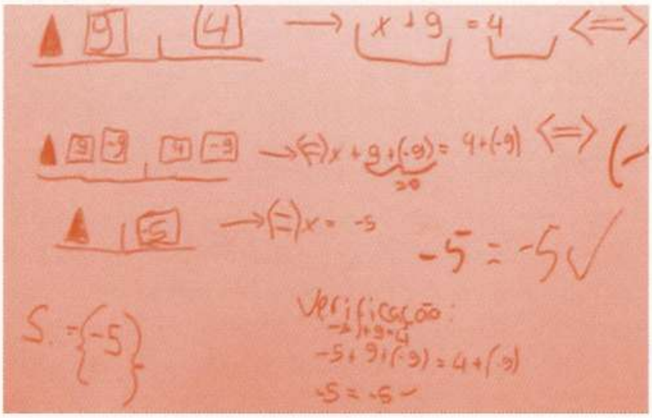


Figura 7. Passagem da representação pictórica para a representação algébrica.

Revisão da aula e preparação da aula seguinte. Após a aula, as professoras reuniram com o objetivo de refletir sobre o que observaram na aula, tendo como ponto de partida os seus registos. Da reflexão conjunta, as professoras concluíram que tal como esperado, a exploração intuitiva da noção de equação com o Hands-On Equations® foi bem sucedida, pois os alunos apropriaram-se com facilidade do material e resolveram equações simples intuitivamente, e desenvolveram o significado de igualdade entre duas expressões. Porém, foi também possível verificar situações inesperadas, nomeadamente, quando os alunos questionaram a existência de incógnitas e constantes em ambos os membros de uma dada equação, e discutiram se era possível "ler" a equação da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

Figura 6. Par de alunos apresenta a sua resolução à turma.

Essa discussão, que não tinha sido antecipada pelas professoras, contribuiu para uma melhor compreensão da noção de igualdade entre duas expressões.

Considerando os aspetos apontados, as restantes professoras do grupo decidiram seguir o mesmo plano de aula, nos seguintes ciclos de *lesson study* mas incluíram uma discussão sobre a questão inesperada mencionada acima. No caso dos alunos não comentarem a possibilidade de "ler" a equação das duas formas, a questão seria lançada pelas professoras a fim de provocar essa discussão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste ciclo *lesson study* constituiu-se como uma oportunidade de as professoras refletirem sobre a sua própria experiência e aprofundarem o seu conhecimento matemático e didático. O trabalho colaborativo das professoras centrou-se no modo como planificam a aula, interagem com os alunos, e como refletem sobre esses aspetos. A exploração do material e a antecipação do trabalho dos alunos permitiu que as professoras, em particular as estagiárias, se sentissem confortáveis em usar uma abordagem inovadora no estudo das equações do 1º grau. A reflexão sobre a prática, em particular sobre o trabalho colaborativo, foi essencial na integração/desenvolvimento profissional das duas alunas da formação inicial.

Os resultados mostram também a importância dos modelos concretos para a apropriação de conceitos abstratos, quando essa transição é planeada de forma detalhada pelo professor e, em particular, quando são usadas tarefas adequadas aos materiais manipuláveis. Nesta aula, os alunos não só negociaram o significado de incógnita, equação e solução, como utilizaram de forma intuitiva o 1.º princípio de equivalência para resolver equações do 1.º grau. A utilização em simultâneo de vários tipos de representações permite dar sentido à escrita simbólica caraterística deste tópico matemático.

Em suma, com o desenvolvimento da *lesson study* foram criados meios que permitiram: i) um trabalho de formação contínua, cujo foco foi decidido pelas professoras, não se limitando a um conjunto de ações esporádicas e descontextualizadas; ii) um trabalho integrado na prática docente das intervenientes; e iii) assente num trabalho colaborativo autêntico, onde a situação em que o "formador dá vs. o formando recebe" não se verifica. Tão importante quanto o conteúdo da formação parece ter sido o contexto em que esta se realizou. Esta perspetiva encerra uma forma muito rica de ver o desenvolvimento profissional dos professores, responsabilizando-os pela sua formação, e alterando grandemente o papel do formador, que de transmissor de conhecimentos é transformado em organizador e dinamizador de atividades, o que nesta área da formação em matemática propriamente dita é invulgar. As sessões de formação podem ser transformadas em espaços de trabalho colaborativo entre professores (Boavida & Ponte, 2002), numa lógica de poder e saber partilhados, partindo do princípio que a formação contínua depende, em grande medida, dos professores e da forma como estes encaram o seu desenvolvimento profissional.

Referências

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp 43-55). Lisboa: APM.

Dudley, P. (2011). *Lesson study: a handbook*. Acedido a 20 de Janeiro de 2012 em http://lessonstudy.co.uk/wp- content/uploads/2012/03/Lesson_Study_Handbook_-_011011-1.pdf.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM Mathematics Education*. *48*(4), 411-423.

Nunes, C. C., Silvestre, A., & Jacinto, H. (2012). A Abordagem Lesson Study no ensino de equações do 1.º grau: Um caso de desenvolvimento profissional. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, & C. Nunes (Eds.), Atas do XXIII SIEM (pp. 797- 800). Coimbra: APM.

Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the US?. *Journal of Educational Change, 10,* 365-391.

Rojano, T., & Martínez, M. (2009). From concrete modeling to algebraic syntax: Learning to solve linear equations with a virtual balance. In S. L Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.) *Proceedings of the 31st PME-NA*. Atlanta, GA: Georgia State University.

Takahashi, A. & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. *ZDM Mathematics Education*. *48*(4), 513–526.

Yoshida, M. (2012). Mathematics lesson study in the United States: Current status and ideas for conducting high quality and effective lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1, 140 – 152.

CLÁUDIA CANHA NUNES
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE FERNANDO PESSOA, OLIVAIS
UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO DO INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

ANA ISABEL SILVESTRE
ESCOLA BÁSICA D. PEDRO VARELA, MONTIJO
UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO DO INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

HÉLIA JACINTO
ESCOLA SECUNDÁRIA JORGE PEIXINHO, MONTIJO
UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO DO INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

Uma surpreendente viagem ao Japão

Marisa Quaresma

Cristina Morais

A ideia da viagem ao Japão surgiu em dezembro de 2015 quando, através de uma pesquisa, descobrimos o Lesson Study Immersion Program 2016, do Projeto IMPULS. Este projeto tem como objetivo divulgar o processo de desenvolvimento profissional dos professores japoneses, designado em português por Estudo de Aula (cujos aspetos principais resumimos na caixa da página seguinte e que é importante ter presente na leitura deste nosso relato), a profissionais de educação fora do Japão. Isso pressupunha não só conhecer o processo em termos teóricos mas também vê-lo em ação. Assim, a Marisa foi movida pelo interesse em termos de investigação e a Cristina pela vontade de conhecer a "sala de aula" japonesa.

Ao longo dos seis meses que antecederam a viagem, muitas questões nos foram surgindo sobre a educação e cultura deste país. Cheias de expectativas, e com enorme curiosidade, em junho de 2016 partimos para Tóquio à procura de algumas respostas.

A nossa experiência no Japão respeita a Estudos de Aula de diversas modalidades. Assim, o que aqui contamos tem subjacente os princípios e ideias desse processo. Alguns dos aspetos que partilhamos poderão refletir o dia-a-dia na escola, outros poderão ser específicos deste tipo de prática. Contudo, a distinção não nos parece fácil nem pertinente no nosso relato, uma vez que o nosso propósito não é caracterizar este processo ou a cultura, mas apenas destacar elementos que nos suscitaram interesse e curiosidade.

A escola

As diferenças culturais são muitas e a entrada na escola mostrou-nos isso mesmo: não se entra com os sapatos de rua. Por isso, os visitantes podem levar uns sapatos limpos ou então calçam chinelos disponibilizados pela escola. Para a comunidade escolar, o ritual é semelhante já que podemos ver inúmeras filas de armários onde os sapatos dos alunos ficam a aguardar o final do dia. Não podemos deixar de partilhar a agradável sensação de andar de chinelos pela escola que, só pelo facto de nos desprovermos da formalidade dos nossos sapatos, torna a escola um espaço mais próximo.

De chinelos calçados, apresentaram-nos os diferentes espaços escolares. Como na maior parte das nossas escolas do 1.° ciclo, também no Japão, ao caminharmos pelos corredores podemos ver expostos diferentes trabalhos realizados pelos alunos. Algo que nos despertou a atenção foi a recorrente exposição de caracteres em *kanji*, um dos três "alfabetos" japoneses. Mais tarde, percebemos que esta atividade se reveste de grande importância e utilidade, dado o elevado número de caracteres que os alunos têm de aprender. Para se perceber quão complexa é a aprendizagem da leitura e escrita da língua, foi-nos dito que, no final do 1.° ciclo (6.° ano), os alunos conhecem cerca de 1000 caracteres, o que não é suficiente para lerem o jornal.

De seguida, tivemos oportunidade de conhecer as salas de aula. À primeira vista, não reconhecemos grandes diferenças na organização geral da sala. Passámos por salas onde os alunos estavam organizados em pequenos grupos ou em pares, existindo um armário com as mochilas dos alunos no fundo da sala, e a secretária do professor posicionada igualmente junto ao quadro. Contudo, tivemos oportunidade de conhecer algumas particularidades. Um dos aspetos que a sociedade japonesa, e consequentemente a escola, valoriza bastante é a promoção da autonomia e responsabilidade dos cidadãos desde tenra idade. Para nós isto foi bastante visível em, pelo menos, três aspetos: (i) cada aluno é responsável por cuidar de uma planta ao longo do ano (incluindo interrupções letivas, momentos em que os alunos levam as plantas para casa); (ii) na hora do almoço, uma equipa de alunos juntamente com o professor são responsáveis por servir a refeição na sala de aula, onde o professor almoça com os alunos, pois este momento é também encarado como um momento de formação; e (iii) desde o 1.° ano, os alunos têm de ir sozinhos para a escola, mesmo que para isso tenham que percorrer trilhos complicados de comboio ou metro.

Ainda tivemos oportunidade de visitar a sala de professores onde todos têm a sua própria secretária, estando organizadas por anos de escolaridade de modo a permitir o trabalho colaborativo entre docentes do mesmo ano. No Japão, o 1.° ciclo do Ensino Básico estende-se até ao 6.° ano em regime de monodocência. Relativamente à disciplina de Matemática, o número de horas semanal, no Ensino Básico, varia entre 3 e 5 horas (o 1.° ano tem 4 horas, do 2.° ao 6.° ano têm 5 horas; o 7.° ano tem 4 horas; o 8.° ano tem 3 horas e o 9.° ano volta a ter 4 horas).

A aula (de investigação)

Ao longo de uma semana, tivemos oportunidade de observar sete aulas de investigação, e as respetivas discussões pós-aula, quatro em Tóquio e três em Yamanashi, a pouco mais de 100 km de distância. Estas aulas percorreram diversos temas e anos de escolaridade: subtração de números inteiros (1.° ano), divisão de números inteiros (4.° ano), volume de figuras compostas por prismas retangulares (5.° ano), divisão de frações e área de figuras curvas (6.° ano), leitura, interpretação e construção de gráficos (7.° ano) e análise de dados e amostra aleatória (9.° ano). Todas as aulas tinham também como objetivo o desenvolvimento das capacidades transversais de comunicação e raciocínio.

Nas aulas de investigação participaram os alunos das turmas, que variaram entre 24 e 36 alunos (sendo que cada turma pode ter no máximo 40 alunos), os professores que lecionaram essas aulas e, como observadores, os elementos da equipa que planeou a aula (cerca de 4 professores), os diretores das escolas, os professores de outros anos de escolaridade, professores de Educação Matemática da universidade e os participantes do projeto IMPULS (cerca de 40). Feitas as contas, estavam aproximadamente 80 pessoas na sala (geralmente a sala de música ou o espaço da biblioteca) sendo que metade eram observadores. No en-

tanto, por parte dos alunos e professores, esta situação pareceu perfeitamente natural.

Algumas das aulas observadas ocorreram em tempo letivo, e neste caso os alunos dos professores observadores ficaram sozinhos na sala de aula, em regime de trabalho autónomo, ou acompanhados por um funcionário da escola. Outras realizaram-se em tempo não letivo, concretamente ao sábado de manhã, quando habitualmente os alunos não têm aulas.

A ideia mais forte que tínhamos em relação ao Japão em geral e à sala de aula em particular, era a de uma sociedade muito formal, de níveis hierárquicos bem definidos, o que nos remetia também para a expectativa de um ensino muito tradicional onde todos os alunos iriam estar nos seus lugares, trabalhando individualmente, a ouvir o professor, com um papel sobretudo passivo. Esta expectativa confirmou-se em duas situações. O início da aula é marcado por um ritual onde os alunos, em coro, cumprimentam o professor, se comprometem a empenhar-se na aula e finalizam com uma vénia. O mesmo acontece no final da aula, onde os alunos, com uma nova vénia, agradecem o momento de aprendizagem proporcionado pelo professor. No entanto, esta formalidade que associamos aos povos asiáticos rapidamente se transforma num ambiente de proximidade, não tão silencioso como imaginámos e que varia com os diferentes momentos da aula.

O início da aula dá-se com a introdução da tarefa (em japonês, *hatsumon*), em coletivo. Sem um enunciado explícito da tarefa, o professor coloca um conjunto de questões relacionadas com a tarefa para suscitar o interesse dos alunos, culminando com a questão chave que orienta o trabalho dos alunos na aula. Este conjunto de questões, bem como a tarefa, são cuidadosamente pensados no plano da aula. Apesar da maior parte das tarefas que vimos serem provenientes dos manuais escolares, surpreendeu-nos a forma como são adaptadas e usadas na aula pelos professores. Os manuais escolares, tal como alguns manuais portugueses, apresentam tarefas abertas, que envolvem números ou figuras cuidadosamente pensados, acompanhadas de sugestões de exploração detalhadas que os professores usam no planeamento das aulas como apoio na antecipação das estratégias dos alunos e no modo como as podem fazer emergir. Embora a exploração apresentada no manual seja seguida ou adaptada pelo professor, os alunos não usam o manual para que tenham oportunidade de explorar a tarefa sem influência do conteúdo apresentado.

Uma vez apresentada a tarefa, que assume um cunho desafiante, o professor começa por dar tempo para que os alunos se envolvam na sua realização (*kikan-shido*). Primeiro individualmente onde, num ambiente silencioso, é esperado que os alunos definam, pelo menos, uma estratégia de resolução. De seguida, a pares ou em grupos, os alunos têm liberdade para discutir as estratégias encontradas individualmente. Num verdadeiro ambiente de vida e entusiamo, sendo simplesmente crianças, os alunos estão envolvidos nas tarefas mas conversam, riem, "brincam". Afinal de contas, a sala de aula japonesa não é assim tão diferente das que já conhecemos, pelo menos até se ouvirem as "palavras mágicas" do professor: "Pousem os lápis". Com apenas estas palavras, o professor capta rapidamente a atenção dos alunos para a discussão coletiva (*neriage*), retomando o silêncio. Neste momento, os alunos são encorajados a envolver-se tanto na partilha das suas resoluções como na discussão das dos colegas. Particularmente curiosa é a grande utilização de materiais manipuláveis, especialmente magnéticos, que os professores elaboram com papel e íman para apoiar a discussão.

A síntese da aula (*matome*) é feita em duas partes. Primeiro, individualmente, os alunos registam as ideias principais, tanto em termos de conteúdos matemáticos como da dinâmica da aula e das relações interpessoais. De seguida, em coletivo, os alunos partilham as suas reflexões e o professor, gerindo as participações e, de acordo com o objetivo da tarefa definido, regista no quadro as ideias matemáticas que emergiram da aula.

Outro elemento que corresponde à nossa expectativa inicial de uma cultura altamente organizada, verifica-se na ordenação extremamente cuidadosa que o professor faz do quadro, tanto no planeamento como no decorrer da aula. Muitas vezes, no plano de aula, é apresentado um esboço da organização do quadro, no que diz respeito à apresentação da tarefa, encadeamento das estratégias dos alunos e síntese. Desta forma, os professores fazem um grande investimento para que, no final, o quadro reflita o trabalho desenvolvido em coletivo durante toda a aula, o que nos pareceu uma mais-valia tanto para o estabelecimento de conexões entre as várias resoluções, como para a elaboração da síntese.

À medida que fomos observando as aulas, percebemos que o comportamento dos alunos transitava com bastante fluidez entre os vários momentos de concentração e silêncio, participação organizada nos momentos coletivos e momentos de interação, bastante ruidosa, quando trabalhavam a pares ou em grupo. Em nenhum destes momentos, vimos ações de gestão do comportamento por parte dos professores. Ficámos então a saber que esta situação é mais um reflexo da cultura japonesa que tenta promover a autonomia e responsabilidade dos alunos pela própria aprendizagem e comportamento. Esta situação e o "caos organizado" do trabalho em pequenos grupos foram surpreendentes, uma vez que não esperávamos tanta agitação dentro de uma sala de aula, numa cultura que imaginávamos austera.

Discussão e reflexão pós-aula

Logo após a aula de investigação, todos os envolvidos reúnem-se para discutir e refletir sobre os acontecimentos da aula, tendo por base uma recolha de dados muito detalhada durante a fase de observação. Neste momento, todos os professores parecem sentir-se à-vontade para analisar, questionar e refletir, não só sobre a aprendizagem dos alunos mas também sobre a prática do professor que lecionou a aula e as opções tomadas no plano. A liberdade para discutir as práticas baseia-se na conceção de que a discussão "is not about the teacher, it's about the teaching", ou seja, não é sobre o professor, enquanto pessoa, mas sim sobre o ensino. O que à primeira vista é por vezes entendido como algo demasiado intrusivo, nesta cultura é visto como essencial ao crescimento profissional. Numa perspetiva diferente, esta discussão é ainda enriquecida pelos comentários do professor de Educação Matemática da universidade que, sem fazer uma crítica explícita à aula, problematiza e contextualiza o ensino e aprendizagem do tema da aula, trazendo para a escola também um pouco de investigação.

Após esta discussão, e tendo por base as reflexões desse momento, os professores continuam a trabalhar colaborativamente no desenvolvimento do percurso de aprendizagem dos alunos. Muitas vezes, este processo culmina com a elaboração de um relatório onde incluem o plano de aula e as reflexões emergentes de todo o processo, que a escola publica como forma de divulgação de conhecimento baseado na prática.

A concluir

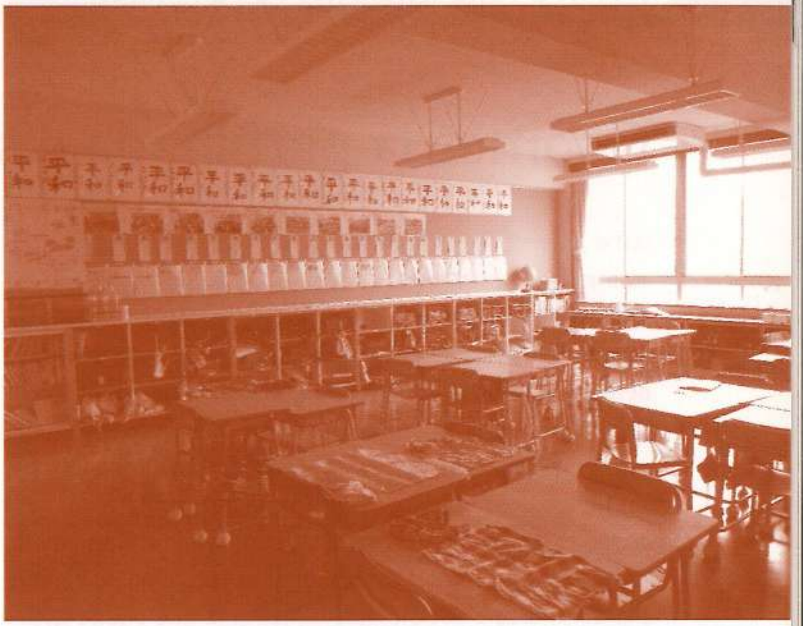
Em jeito de balanço final, podemos afirmar que vivemos uma experiência altamente enriquecedora, tanto na perspetiva de professoras como de investigadoras. Obviamente, muito mais havia a salientar, no entanto, do que aqui relatámos, gostávamos de destacar dois aspetos. Por um lado, a forma como a estrutura da aula, nos seus quatro momentos, que também nós procuramos desenvolver, já está tão enraizada na cultura de sala de aula, o que nos parece ser muito benéfico para a aprendizagem dos alunos. Por outro lado, retomando as nossas expectativas iniciais sobre a cultura japonesa que prevíamos rígida, pouco livre e talvez obsessivamente organizada, foi fantástico perceber o ambiente afetuoso e livre que se vive na sala de aula.

Apesar de termos sido surpreendidas pela informalidade desta cultura na sala de aula, a verdade é que nada do que vimos por lá foi completamente novo. Pois num passado muito recente, tivemos em Portugal o Programa de

Matemática do Ensino Básico de 2007 e um programa de acompanhamento e formação contínua que preconizava esta estrutura de aulas e este tipo de tarefas, cujo efeito já se começava a sentir nas escolas. Independentemente dos programas curriculares em vigor, poderá o Estudo de Aula ser integrado na cultura profissional de professores de Matemática de modo a dar continuidade a essas práticas? O que será então necessário fazer para que os professores se unam num trabalho colaborativo e reflexivo desta natureza dentro das próprias escolas?

Marisa Quaresma
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Cristina Morais
Externato da Luz
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa



ESTUDO DE AULA

O **Estudo de Aula**, ou *Jugyou Kenkyuu* em japonês, ou ainda *Lesson Study* em inglês, é um processo de desenvolvimento profissional originário do Japão, onde se pratica há cerca de 120 anos;

Tal como nos foi dito várias vezes, a prática do Estudo de Aula tem por base a crença de que não se nasce bom professor, mas ganha-se competência ao longo da vida profissional, ou seja, o diploma de formação inicial permite-nos ser professores, mas temos que trabalhar arduamente para sermos bons professores. Por este motivo, um professor é considerado iniciante até ter, pelo menos, 10 anos de prática;

As **diferentes modalidades** do Estudo de Aula seguem uma estrutura comum onde podemos considerar quatro fases distintas: (i) organizados por anos de escolaridade, os professores começam por, colaborativamente, definir objetivos de estudo tendo em conta as dificuldades de aprendizagem dos alunos; (ii) planeiam uma aula centrada nos objetivos definidos; (iii) um dos professores leciona essa aula (chamada aula de investigação) que é observada pelo grupo responsável pelo planeamento, professores dos restantes anos de escolaridade, diretor e um professor de Educação Matemática da universidade, que observam e registam elementos relativos ao trabalho dos alunos; e (iv) todos os envolvidos na fase anterior reúnem-se após a aula (discussão pós-aula) para refletir sobre as aprendizagens dos alunos e a adequação das estratégias definidas para superar as suas dificuldades;

O Estudo de Aula pode ter diferentes modalidades, pode ser realizado com professores de uma só escola, com professores de diferentes escolas do mesmo distrito ou até com professores de escolas de distritos diferentes. Nesta última modalidade, a aula de investigação ocorre em modo *open-house*, ou seja, professores daquele distrito e de distritos vizinhos assistem à aula de investigação e participam na discussão pós-aula;

Os professores participam num Estudo de Aula todos os anos e, dependendo do número de elementos do grupo, são responsáveis por lecionar a aula de investigação a cada 3 ou 4 anos. Para o efeito, o horário dos professores contempla momentos para o trabalho colaborativo no Estudo de Aula;

Apesar de estar maioritariamente divulgado na área de Matemática, no Japão o Estudo de Aula é realizado em todas as áreas disciplinares e mesmo não disciplinares, como por exemplo natação e acompanhamento do almoço.

Geometria partilhada e socialmente construída (4)

Quantos caminhos há para ensinar geometria nos primeiros anos? Por onde começar? E depois de uma atividade bem sucedida que outra tarefa escolher? Claro que depende dos objetivos estabelecidos. Considero que a aprendizagem da geometria permite várias abordagens e muitos caminhos possíveis. As experiências que tenho feito, bem como as que tenho acompanhado, mostram isso mesmo. É por isso que aprecio especialmente esta ideia de geometria partilhada e socialmente construída que ocorre quando se dá espaço aos alunos para pensar e para mostrar e discutir como pensam, construindo assim ideias matemáticas abstratas de modo significativo.

Gosto de pensar na ideia de que o professor pode ir registando e organizando, ao longo da sua vida profissional, uma série de sinais de alerta verdes, isto é, boas ideias que vêm dos alunos e que lhe dão pistas potencialmente ricas para desenvolver o trabalho. Um desses sinais está presente no diálogo apresentado pela professora Graça Pereira (Pereira & Serrazina, 2015, 40-41) na descrição de uma experiência que fez com os seus alunos do 4° ano, com recurso ao GeoGebra para a resolução da maioria das tarefas propostas. Apresento um recorte de um dos muitos diálogos apresentados nesse artigo.

"Professora — *Fizeram diferente? Então vamos olhar para ali e vamos ver se há algum repetido.*

Maria — *Sim há. Há dois meios trapézios ...*

Professora — *Há dois quê?!*

Maria — *Aqueles que são metade do trapézio.*

Professora — *Metade do trapézio! Explica lá isso. O que é isso de meio trapézio? Explica lá.*

Maria — *É assim professora. É metade do trapézio.* (Maria foi mostrar o trapézio ao quadro)

Maria — *Este é o meio trapézio [Maria apontava o trapézio retângulo]*

Professora — *Porque é que dizes que é um meio trapézio?*

Luísa — *Porque se nós fizermos outro ao lado, forma um trapézio.* [Completou a Luísa]"

Como descreve a professora, a aluna desenhou a outra metade e obteve um trapézio isósceles. Há aqui um destaque significativo feito pela professora ao compreender o modo como estas duas alunas estavam a ver o trapézio retângulo, do qual não sabiam o nome, relacionando-o com o trapézio isósceles que já conheciam. Mas o diálogo continua com uma outra intervenção.

"Outro — *Professora eu cheguei à conclusão que não existe "meio-trapézio".*

Professora — *Tu achas que não existe "meio-trapézio"?!*

Outro — *É trapézio ou não trapézio.*

Luísa — *Nelson, nós estamos a chamar "meio-trapézio" porque se nós o partirmos em metade* [referia-se ao trapézio isósceles] *ficava como este* [referia-se ao trapézio retângulo] *e nós sabemos como se chama este."*

No artigo em referência, as autoras desenvolvem a análise dos trabalhos e diálogos focando-se na visualização, nas imagens prototípicas e nas propriedades dos quadriláteros. Para mim é um excelente artigo em que estão bem evidenciados e sustentados os raciocínios dos alunos e o modo como podem ir construindo a classificação hierárquica de quadriláteros. Sei que este episódio do "*meio trapézio*" foi muito significativo para a professora pois já conversámos sobre ele. Foi um sinal de alerta verde.

Estas alunas, que sentiam liberdade para pensar sobre as figuras e para dizer o que pensavam sobre elas, dão-nos uma pista muito interessante para refletir sobre os nomes das figuras geométricas e das relações que podem estar escondidas nas designações. Dão-nos também ideias para propor novas tarefas.

> *Porque razão um triângulo com um ângulo reto se chama triângulo retângulo? Há alguma relação entre um triângulo retângulo e um retângulo?*

Um triângulo retângulo não é um meio-retângulo, no sentido que estas alunas deram ao meio trapézio. E isto acontece porque a diagonal do retângulo só é eixo de simetria na situação particular do retângulo ser quadrado. Porém, é muito comum ser afirmado que a diagonal de um retângulo é um eixo de simetria (Fig. 1). A este propósito uma tarefa exploratória que pode ser produtiva é partir de um triângulo qualquer e explorar quais são as figuras que se obtém por reflexão de um dos lados do triângulo. É obviamente uma tarefa para ser realizada com o recurso a um AGD e em que se deve pedir sempre para que o aluno preveja o que vai acontecer antes de experimentar. A percentagem de previsões de obtenção de um retângulo quando o eixo de reflexão for o lado maior do triângulo será enorme.

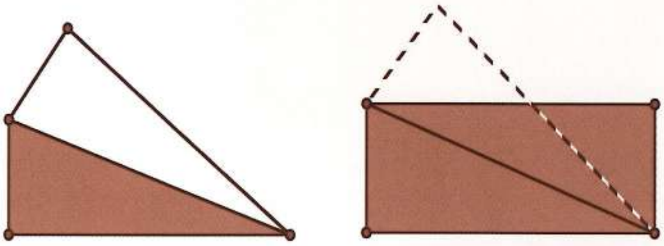


Figura 1

> *Porque razão um trapézio com um eixo de simetria se chama trapézio isósceles? Há alguma relação com o triângulo isósceles?*
>
> *Porque razão um trapézio com um lado perpendicular aos dois lados paralelos se chama trapézio retângulo?*

Uma tarefa exploratória que pode ajudar a compreender as razões destes nomes é partir de um triângulo qualquer e fazer um corte paralelo a um dos lados. Que figuras se podem obter, tendo em conta as caraterísticas do triângulo de partida? (Fig. 2)

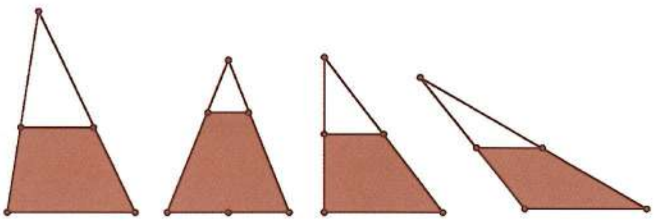


Figura 2

Na sequência de triângulos e quadriláteros da figura 2 faz sentido considerar todos os quadriláteros como trapézios porque têm um par de lados paralelos. No entanto, encarando o último quadrilátero isolado (Fig. 3) poucos alunos, e mesmo alguns professores, o identificarão como trapézio pois não encaixa bem na imagem prototípica que temos de um trapézio.

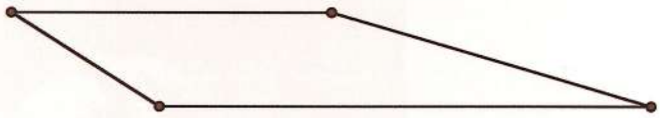


Figura 3

Como muito bem ilustra o trabalho da Graça Pereira, o trapézio é a classe dos quadriláteros menos intuitiva para os alunos considerarem como inclusiva para o paralelogramo. Por isso, ao longo da escolaridade, faz sentido que os alunos trabalhem com trapézios em atividades que se complementem.

Esta discussão sobre os nomes das figuras e as relações qu eles sugerem está ligada às questões linguísticas. Bartolini Bussi e Baccaglini-Frank (2015), discutem a relação entre retângulos e quadrados como o exemplo paradigmático do conflito entre a experiência percetual e as exigências teóricas da definição matemática. A propósito desta situação fazem uma referência ao modo como os chineses representam, em ideogramas, "quadrado" e "retângulo", mostrando que o "quadrado" é visto como "uma forma com lados iguais" e o retângulo como "a mesma forma com lados mais longos" (p. 392). Estas investigadoras evidenciam assim que para as crianças chinesas as duas formas linguísticas explicitam claramente uma relação entre as formas que facilita o entendimento da relação inclusiva entre as duas classes.

Vale a pena dar espaço aos alunos para falarem sobre as figuras que constroem. Descobriremos certamente designações claramente marcadas pelas suas experiências percetuais.

Referências Bibliográficas

Bartolini Bussi, Maria G. & Baccaglini-Frank, Anna (2015). Geometry in early years: sowing seeds for mathematical definition of squares and retangles. ZDM Mathematics Education (2015) 47:391–405. DOI 10.1007/s11858-014-0636-5

Pereira, Mª da Graça B. & Serrazina, Mª de Lurdes. (2015). Propriedades e relações entre quadriláteros: contributos do geoplano e do GeoGebra. *Quadrante*, *XXIV*(1), 30-57.

Figura 1. Auto-retrato aos 26 anos

Uma curva de cada vez...

O caracol de Pascal

Eduardo Veloso

Albrecht Dürer (1471-1525, fig. 1), pintor e geómetra alemão do Renascimento, foi o primeiro a estudar esta curva. Num interessante texto explica como desenhar o tipo de curva a que chama "em forma de aranha, porque parece uma aranha depois de desenhada":

Consigo desenhar esta curva por um procedimento duplo. Em primeiro lugar traço uma linha vertical *AB* que se prolonga numa outra linha terminando em *C*, ao passo que a linha *AB* acaba em *A*. Faço rodar a extremidade *B* no sentido [horário] em torno do ponto central *A*, e marco cada posição do ponto *B*, como mostra a [fig. 2]. Mas em seguida, a partir de cada ponto *B*, traço uma nova linha *BC*, partindo do novo ponto *B* mas [em cada caso fazendo com a nova linha *AB* o mesmo ângulo que esta linha faz com a primeira linha *AB*]. [...]. Chamo cada ponto assim criado *C* e ligo estes pontos. A curva resultante está desenhada na [fig. 2]. [1]

Seguindo o método de Dürer, utilize o seguinte procedimento no *Geometer's Sketchpad* (fig. 3):

• construa dois segmentos, *b* e *c*, sobre uma mesma semi-recta, de modo que seja possível alterar os seus comprimentos;

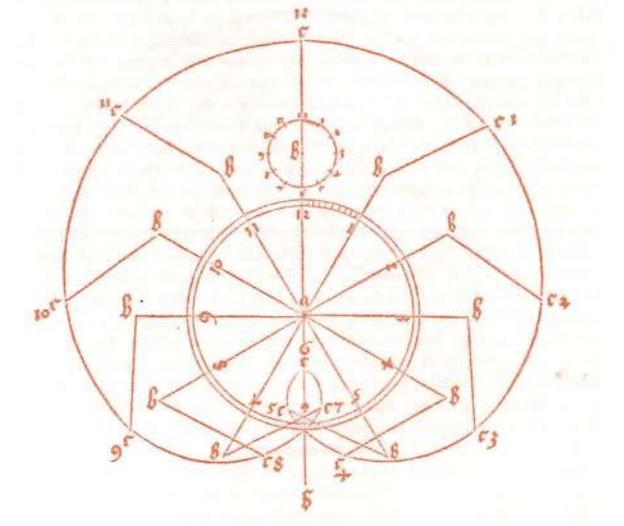


Figura 2

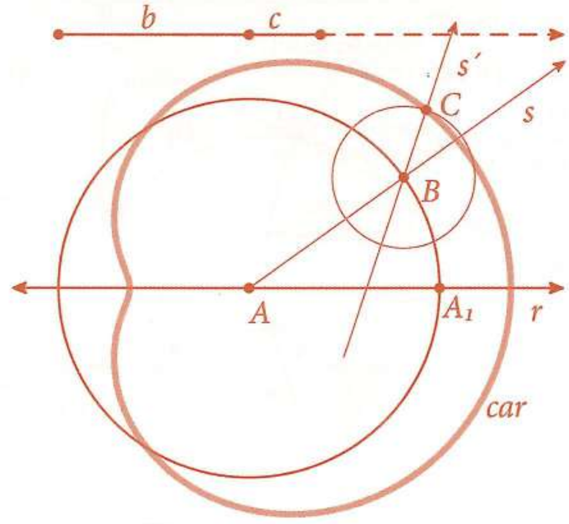


Figura 3

• numa recta horizontal *r* marque um ponto *A*, construa a circunferência *c* de centro *A* e raio *b* e seja A_1 uma das suas intersecções com *r*;
• seja *B* um ponto de *c* e meça o $\angle A_1AB$;
• construa a recta *s*=*AB* e seja *s´* a imagem de *s* pela rotação de $\angle A_1AB$ e centro *B*;
• designe por *C* a intersecção de *s´* com a circunferência de centro *B* e raio *c*;
• seleccione *B* e *C* e peça o comando *Construct:Locus*;
• verá surgir a curva *car*, que depois de apelidada de aranha por Dürer viria a chamar-se *caracol de Pascal* .

Naturalmente, a forma do caracol dependerá dos segmentos *b* e *c* de que partimos e da relação entre os dois. O leitor poderá, na construção que desejavelmente fez no *Sketchpad* ou num outro programa de geometria dinâmica, fazer variar *b* e *c* e obter os resultados da figura 4.

Para c = 0, obtemos uma *circunferência*; para $c < b/2$, a forma habitual do *caracol genérico*; para $c = b/2$, uma *cardióide* (um ponto de reversão); para $b/2 < c < b$, um *loop* ou laço; para $c = b$, o *caracol trissector*! No próximo ponto, veremos de que caracol se trata...

O caracol foi estudado, depois de Dürer, por muitos geómetras, entre eles Étienne Pascal (1588-1651), pai do mais conhecido Blaise Pascal. Mais tarde, Gilles de Roberva (1602-1675) apelidou a curva de *caracol de Pascal*.

A trissecção do ângulo

Dividir um ângulo em duas partes iguais, utilizando régua não graduada e compasso, era um problema trivial para os matemáticos gregos, como agora o é para nós ... Trace o leitor duas semi-rectas *OA* e *OB* e coloque a si próprio

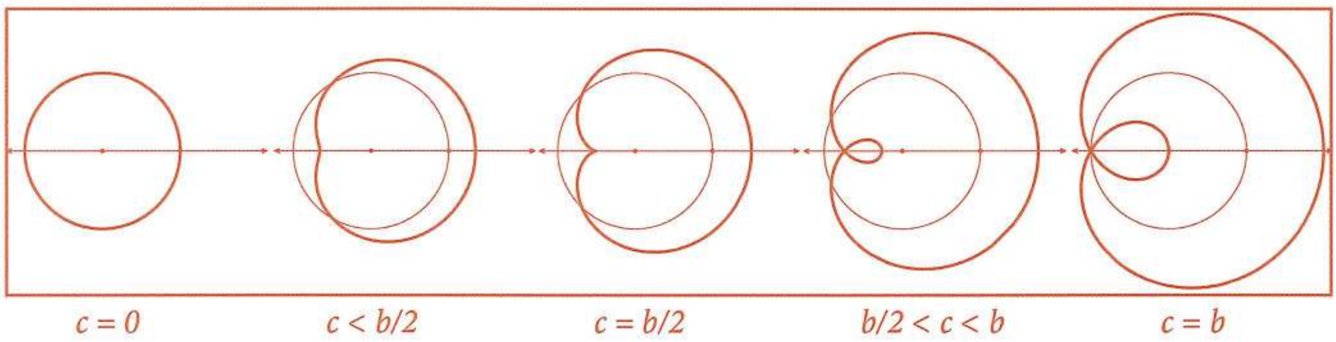


Figura 4

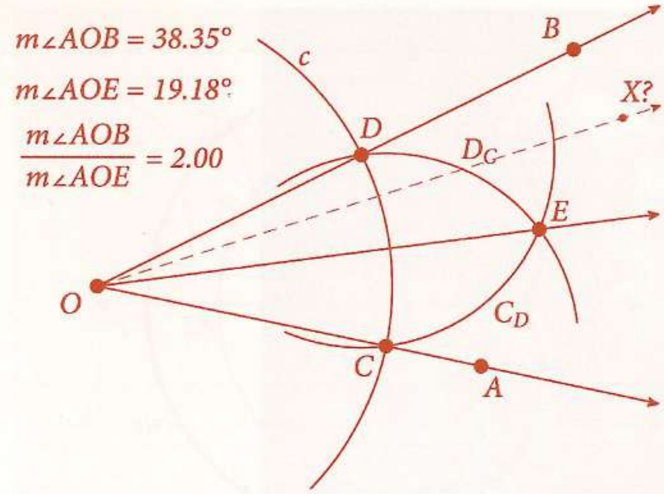


Figura 5

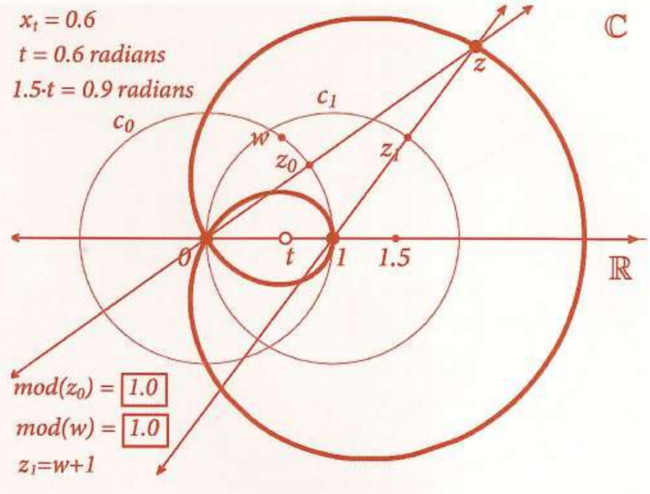


Figura 6

o problema de encontrar um ponto X tal que a semi-recta OX seja a bissectriz do $\angle AOB$, (fig. 5). Nada mais simples... Trace uma circunferência c de centro O e raio qualquer e sejam C e D os pontos de intersecção de c com OA e com OB, respectivamente. Construa as duas circunferências DC (centro C e passando por D) e CD e encontre uma das suas intersecções, E. A semi-recta OE é bissectriz do $\angle AOB$ (desafio o leitor a completar esta demonstração; para a demonstração do próprio Euclides, veja o livro I dos Elementos, proposição 9)[2]. Se o leitor está a ler este artigo acompanhado do seu computador e do Sketchpad (ou de outro programa de geometria dinâmica), como aconselho, poderá fazer a seguinte experiência: determine as medidas $m\angle AOB$ e $m\angle AOE$ (menu Measure:Angle), e divida (menu Number:Calculate) a primeira pela segunda. Encontrará o resultado 2.

Se em seguida, dado que está num programa de geometria dinâmica, mover um (ou mais) dos pontos O, A e B, verá que tudo muda menos o resultado 2, como seria de esperar!

Quanto ao problema análogo da trissecção do ângulo, não sabemos quantos aprendizes de geometria tentaram, nestes mais de dois mil anos que nos separam de Euclides, encontrar uma solução com régua graduada e compasso... mas desde 1837 que não vale a pena... Nessa data o matemático francês Pierre Wantzel (1814-1848) publicou um artigo sobre ... "o processo pelo qual temos a certeza de que um determinado problema geométrico pode (ou não) ser resolvido com régua não graduada e compasso" e sabemos desde então que a trisecção do ângulo não tem solução por meio de régua não graduada e compasso.[3] Os matemáticos gregos já desconfiavam que assim era, e apresentaram outras soluções, por exemplo colocando marcas numa régua ou utilizando curvas especiais com esse fim, por exemplo a conchóide de Nicomedes ou a espiral de Arquimedes. Também um caracol de Pascal especial, caso $c=b$ da figura 4, nos pode ajudar nesse problema clássico.

O caracol trissector

Existem numerosos métodos para traçar o caracol de Pascal (de que, como vimos, existem diferentes tipos). Para mostrar como *um certo tipo de caracol de Pascal* resolve o problema da trissecção, iremos propor a sua construção no plano complexo. Para isso construímos um documento no *GSP* que representa o plano complexo. Na versão mais simples, é visível a *recta real*, representando o corpo P , e os pontos do plano constituem o corpo X dos números complexos.[4]

Note que nesse documento *GSP* estão incluídas ferramentas (*tools*) que nos permitem realizar todas as operações elementares relativas aos números complexos, como por exemplo:

- marcado um ponto qualquer no plano – que é portanto um número complexo z –, obter o seu módulo e o seu argumento;
- inversamente, dados um módulo e um argumento, marcar o correspondente número complexo no ecrã;
- seleccionada (na lista das ferramentas) a operação aritmética (adição, multiplicação, etc.) pretendida e seleccionados dois pontos (números complexos) no ecrã, obter o ponto (número complexo) correspondente ao resultado dessa operação.

A figura 6 mostra um método de construção, no plano complexo, do caracol trissector:

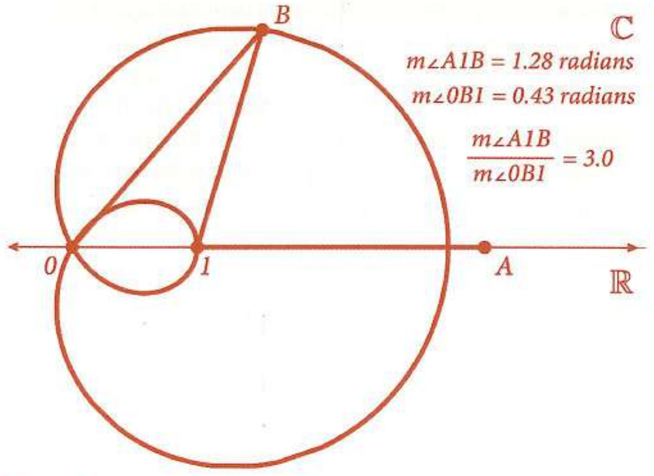


Figura 7

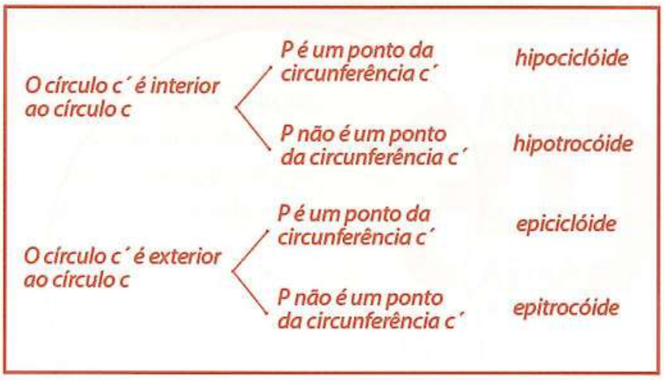


Figura 8

(1) Considere duas circunferências c_0 e c_1 de raio 1 e centradas respectivamente nos pontos *0* e *1*. Seja *t* um parâmetro real no intervalo $[0,2\pi]$ – 2π não está visível na figura – e multiplique *t* por *1* radiano (menu *Number:Calculate*), obtendo o valor (no caso da figura) $t = 0.6$ *radianos*.

(2) Construa o complexo z_0 de módulo 1 e argumento t. Está obviamente sobre a circunferência c_0.

(3) Construa a recta r_0 passando por *0* e z_0. Se arrastar *t*, verá o ponto z_0 a rodar em torno de *0*. Marque o ponto *1.5* sobre a recta, e construa o complexo *w* de módulo *1* e argumento *1.5t* radianos (no caso da figura, *.9* radianos. O ponto *w* está sobre c_0. Para o transformar num ponto a rodar em torno do ponto *1*, calcule *w+1* (ferramenta da adição), obtendo $z_1 = w+1$. Trace a recta r_1 passando por *1* e por z_1.

(4) Construa a intersecção *z* de r_0 com r_1. Se arrastar o parâmetro *t*, verá as duas rectas a rodarem e o ponto *z* a descrever um certo lugar geométrico. Para obter a curva descrita pelo complexo *z*, seleccione *t* e *z* e *Construct:Locus*. Notará que obteve deste modo – mas seria necessária uma demonstração que não incluiremos aqui – um caracol de Pascal correspondente ao caso *c=b* da figura *4*.

No seu documento *GSP* pode fazer a experiência seguinte, que mostra como podemos utilizar este caracol para a trissecção de um ângulo (v. fig. 6, em que deixamos apenas o caracol e escondemos todas as construções):

(1) Construa um ponto *A* na recta real, para a direita do caracol, e um ponto *B* no laço exterior da curva.

(2) Meça os ângulos *A*1*B* e 0*B*1 (menu *Measure: Angle*, no caso do *GSP*), e depois divida $m\angle A1B$ por $m\angle 0B1$. Obterá como resultado *3*.

(3) Arraste o ponto *t* e verá modificarem-se as medidas dos ângulos mas manter-se fixo o seu quociente *3*...

Deixamos ao leitor a explicação deste facto, naturalmente relacionado com o factor 1.5 que utilizámos. Note que o $m\angle A1B$ é igual a $1.5 \times m\angle AOB$ e que $\angle AOB$ é um ângulo externo do triângulo 01*B*.

Ainda outro processo de gerar o caracol de Pascal

Existem múltiplos processos de gerar o caracol de Pascal, além dos dois que já apresentámos. Iremos apenas mostrar aqui que o caracol de Pascal é uma *epitrocóide*.

Consideremos num plano dois círculos, *c* e *c´*, sendo *c* fixo no plano e c´ rolando sem escorregar sobre c. Seja ainda *P* um ponto *rigidamente ligado* a *c´*. *Hipociclóides, hipotrocóides, epiciclóides* e *epitrocóides* são os nomes dados a quatro tipos de curvas geradas por *P* conforme explicitado na figura 8. Poderá encontrar ampla informação sobre curvas planas, em particular sobre as epitrocóides, nos três *sites* que lhe indicamos na nota 5.

Nesta construção do caracol, iremos situar-nos num plano dotado de um sistema de coordenadas polares. No *Sketchpad*, servimo-nos do comando *Graph: Define Coordinate System, Graph:Polar* e *Graph: Grid:Hide*; para detalhes sobre a construção que vamos fazer, veja nota 4). A figura 9 mostra a construção que deverá fazer:

- nas preferências do *Sketchpad*, escolha radianos para medida dos ângulos;
- na recta R, assinale os pontos *0* e *1* e construa o segmento $[0,2\pi]$ (o ponto 2π não está visível);

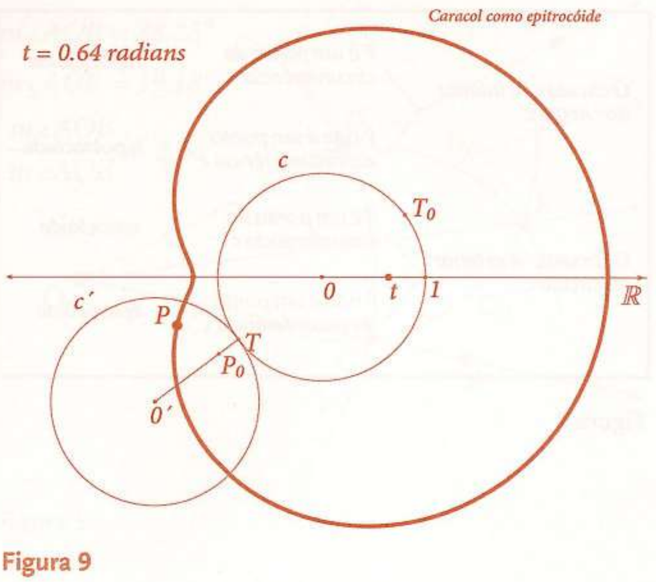


Figura 9

[3] Sobre os três problemas cássicos e a demonstração da sua impossibilidade pode ver o meu artigo *O triunfo da Álgebra*, publicado no nº 85 (Nov-Dez 2005) da *Educação e Matemática*.Para biografias de matemáticos, como Wantzel, recorra à melhor fonte possível, o *site* da Universidade de St. Andrews, *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Wantzel.html*

[4] Sobre a utilização dos números complexos e das coordenadas polares no traçado de curvas planas, e sobre a utilização do *Geometer's Sketchpad* para isso, encontrará instruções completas no *website http://www.apm.pt/textosGTG/plano.complexo*, de apoio ao livro *Conexões da Geometria/O plano complexo*, que em breve será publicado pela APM.

[5] *http://www.mathcurve.com*
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html; http://www.2dcurves.com

[6] *http://www.mmlab.unimore.it/site/home/gruppo-di-ricerca.html*

- construa um parâmetro *t* no segmento $[0,2\pi]$ e, como anteriormente, exprima o valor de *t* em radianos (na figura, 0.64 radianos);
- trace a circunferência *c* (centro *o* e raio *1*) por meio dos comandos geométricos do *Sketchpad;*
- marque o ponto $T_0(1,t)$ (módulo *1* e argumento *t* radianos);
- efectue uma meia-volta de T_0 de centro o, obtendo *T* ;
- efectue uma meia-volta de *c* e de *o* de centro *T*, obtendo c´ e o´;
- construa o segmento *To´* e escolha um ponto P_0 no interior do segmento;
- obtenha *P* como imagem da rotação de P_0 de ângulo *t* radianos; arraste t no intervalo $[0,2\pi]$ e observe os movimentos de *c´* e de *P*;
- seleccione *t* e *P* e o comando *Construct:Locus* e verá aparecer um lugar geométrico que é um *caracol genérico de Pascal* traçado na figura.

Eduardo Veloso

Desafios ao leitor:

1. Consegue, escolhendo outras posições para *Po*, obter outras formas do caracol de Pascal (apresentadas na fig. 4?
2. A cardióide é ainda uma epitrocóide?
3. Encontre, nos *sites* que lhe apresentamos na nota 5, demonstrações e mais informação sobre esta curva.

Notas

[1] Dürer, Albrecht. *Instruction sur la manière de mésurer.* Trad. do alemão. Paris: Flammarion, 1996.

[2] Para os *Elementos* de Euclides, recorra ao magnífico *site* de David Joyce, *http://alepho.clarku.edu/˜djoyce/java/elements/elements.html*

Nesta secção dos 30 anos da APM, continuamos a dar voz aos ex-presidentes da direção. Neste número, Arsélio Martins e Elsa Barbosa dão-nos o seu testemunho da forma como "sentiram a APM", o seu papel como dirigentes de uma grande associação de professores, em períodos difíceis para o movimento associativo e de como vivenciaram e procuraram responder aos desafios e dilemas que enfrentaram, muitos deles oriundos das mudanças de políticas educativas.

Quando...

Estudante ainda, era associativo e, por ser activista do movimento associativo estudantil, fui dirigente eleito da alegal Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, no início da década de 70 do século passado. Ainda antes do 25 de Abril passei a professor do ensino liceal. Por ser professor e, já em liberdade, fui activista sindical e sócio de sindicatos de professores e, por isso, quando foi preciso fui dirigente sindical eleito e eleito fui para o conselho nacional da FENPROF, cumprindo os mandatos.

Por ser professor de Matemática, em 1977 e no Porto, aceitei integrar a direção regional do norte na comissão instaladora da Sociedade Portuguesa de Matemática e, muito mais tarde, em 1990, fui eleito vice-presidente da direcção, tendo cumprido o mandato e coordenado a organização do encontro nacional em Aveiro onde se discutiu a experiência e aplicação dos programas de Matemática e se aprovou uma resolução sobre o assunto, para além de participar no "fórum permanente sobre o ensino" aberto no Boletim da SPM. E conheço professores de Matemática de todos os graus de ensino e de todas as opiniões.

Finalmente, pelas mesmas razões associativas e de profissão, em 1987, me faço sócio da Associação de Professores de Matemática. Os meus primeiros contactos com dirigentes da APM foram realizados como dirigente da SPM, uma tentativa para uma posição conjunta sobre o ensino não superior e uma representação da SPM num painel sobre programas em discussão num encontro nacional (ProfMat de Viana do Castelo? 1989?) onde conheço e convivo com professores empenhados em mudanças curriculares e a trabalhar nelas.

Depois disso, vivi os processos de ajustamentos, revisão curricular participada e concepção de programas, formação e acompanhamentos com muitos professores (activistas e dirigentes na APM também), como parceiros num grande movimento de renovação. Grandes e pequenos encontros da APM foram então os empurrões necessários para aferir da compreensão, aceitação ou rejeição, de detalhes das medidas propostas e das orientações gerais.

Alguns professores, sócios da APM, que me conheciam desse envolvimento e movimento, sugeriram e depois propuseram que eu fosse candidato à direcção associativa. Do meu ponto de vista, como associativo, fui eleito Presidente da Direcção da Associação de Professores de Matemática em Elvas, para um mandato de dois anos, de Setembro de 2008 a Setembro de 2010.

Os que me propuseram e os que me elegeram sabiam bem que eu não tinha qualquer conhecimento de detalhe da sua estrutura e administração.

Pelos Estatutos, que em cada acto eleitoral não previam renovação da totalidade dos dirigentes, eu estava em parte protegido de problemas de administração. Mas consciente da possível perplexidade ou preocupação com a eleição de um sócio (sim, desde 87, então há mais de 20 anos) que não conheciam do activismo interno e muitos naturalmente com posições diferentes das minhas. Para mim, divergências não prejudicam e antes beneficiam o movimento associativo, interna e externamente.

De 2008 a 2010, os professores e o seu movimento associativo estavam já a ser castigados; o sistema degradava a animação dos professores no país e nas escolas, dando início a cortes nos planos de acção e de formação dos professores, reduzindo as vendas de materiais de interesse pedagógico e educativo e tolhendo, por falta de financiamento, a formação independente dos professores que as associações asseguravam. Uma parte da acção directiva foi ocupada a manter a actividade imprescindível ao funcionamento e manutenção dos postos de trabalho, acrescentada por reduzir ao mínimo as despesas de direcção. Para ter uma frente unida, procurámos reforçar as relações dentro do SIAP com as associações de professores, ao mesmo tempo que procurámos regular as relações com a Ciência Viva, SPM e Ludus, em particular no que respeita aos Campeonatos de Jogos. Também mantivemos e apoiámos representações independentes e autónomas, consultivas junto das diversas organizações na esfera do governo, a começar pelo GAVE. Foi acrescentada alguma concertação com a SPM, as faculdades e departamentos de Matemática, o que permitiu a participação da APM, na altura como observadora, em reunião do grupo português da União Internacional de Matemática.

Os núcleos locais e os grupos de trabalho associativos activos mantiveram a sua actividade regular e a direcção reuniu com diversos núcleos e estudou as situações que mereceram atenção especial. Os encontros locais, da matemática dos primeiros anos e os ProfMat2009 de Viana do Castelo e ProfMat2010 de Aveiro mantiveram uma dimensão que cria o clima especial de vida associativa dos professores de Matemática. A "Educação & Matemática" e a "Quadrante" continuaram a ser feitas pelos grupos respectivos e merecer a nossa admiração por isso. E há uma lista imensa de desejados não feitos ao lado da lista de outros que mal se mantiveram de pé, sem vergar e na esperança de vencer a crise.

Finalmente, resta-me referir um facto que a muita gente passou despercebido: uma das posições ou pareceres da Associação de Professores de Matemática em resposta a um pedido do governo foi composta não só por uma posição da direcção, mas por várias posições diferentes que sectores da APM exprimiram e que, por não serem disparatadas, abrem espaço a melhores decisões e representam o que sempre pensei possível e desejável no movimento associativo. Voltando a fazer o que experimentara com felicidade no movimento associativo estudantil, voltei a ver felicidade feita de coisas simples e, quem mais, além de uma associação como a APM, pode dar-se ao luxo de admitir um complexo de ideias simples?

Os educadores e professores são muito especiais e a APM permitiu que eu tenha confirmado isso mesmo, pela construção de compromissos que só podem ser obtidos por pessoas excepcionalmente livres e responsáveis de que divergimos radicalmente em alguns aspectos sem que isso as cegue ao ponto de não darmos por convergências radicais no que sobra e que é, muitas vezes, o mais importante. Quando nos sabemos nesta paz negociada ou batalhada o mandato chega ao seu termo. Assim foi.

Arsélio Martins
Presidente da Direção da APM em 2008/2010

30 anos, e agora?

Presidente?! Quando me perguntaram o que eu achava da ideia, confesso que fiquei muito surpreendida e um pouco aflita, era um cargo de muita responsabilidade. Tinha a plena convicção de que seria um grande desafio... estaria à altura? Conseguir um grupo de amigas, da minha total confiança, que partilhavam dos mesmos ideais e que vinham da mesma "escola" fez-me avançar!

Enquanto presidente senti o peso da idade, não pela idade em si, mas porque pertencia, tal como todos os elementos da direção que me acompanharam, a uma geração que não esteve na génese, nem próximo, da associação. Por um lado era como se nos faltasse alguma história, por outro tínhamos uma nova forma de estar e até de ver a associação. E apesar de sermos muito diferentes, revíamo-nos uns nos outros, queríamos uma APM com um espírito renovado, voltada para o futuro, com uma linguagem mais atual, que conseguisse captar novos sócios, novas ideias, mas sem perder de vista os fundamentos que nos têm regido.

Foram anos difíceis, a APM tinha entrado numa crise financeira sem precedentes, a crise instalada no país, a imagem dos professores que vinha a ser denegrida, a carreira congelada, levou a um grande mal-estar nos professores e consequentemente a um desinvestimento na carreira. O contexto social e profissional levou a um agravamento na diminuição do número de sócios, já tendência nos últimos anos. Na realidade além do já anteriormente referido, a concorrência era muita, a APM já não era a única organização em Portugal a editar publicações no âmbito da educação matemática, a organizar encontros de professores e investigadores, a disponibilizar materiais educativos para utilização dos professores, entre outros. Além disso, o desânimo dos professores de matemática era enorme, a mudança política ocorrida trouxe medidas desastrosas para a Educação no geral, mas extremamente gravosas para a Educação Matemática. Não obstante, muito trabalho foi feito, enquanto direção fomos obrigados a tomar algumas decisões pouco consensuais mas, na nossa opinião, relevantes para a continuidade da APM, como a revitalização do Centro de Formação, a captação de novos patrocinadores, com a formação de um novo grupo de trabalho *Casio+*. Conseguimos ainda estreitar a comunicação com os sócios e também com a população em geral, ao fazer-se uma maior divulgação da associação, dando voz às nossas opiniões e inquietações em diferentes órgãos de comunicação social. Os quais solicitaram frequentemente a opinião da Direção sobre questões relacionadas com a Educação Matemática que foram esclarecidas de modo a elucidar o público em geral. Desenvolveram-se também várias parcerias no âmbito da promoção de atividades de carácter científico, pedagógico e cultural. Revitalizámos alguns núcleos regionais, estruturas que considero fundamentais para o desenvolvimento e expansão da APM. Os núcleos têm um papel de proximidade, que pode facilitar a comunicação entre os professores e a APM e vice-versa, conseguindo-se assim apoiar um maior número de professores de matemática na sua prática letiva, oferecendo-lhes um maior número de oportunidades de estimular o seu desenvolvimento profissional. Os núcleos tornam assim possível um dos objetivos da associação, tornar-se mais próxima dos professores, o que em última instância poderá permitir a recuperação de antigos e/ou a captação de novos sócios.

E agora?! A APM já chegou à idade adulta, 30 anos, mas ainda mantém algumas inseguranças da juventude. Atualmente atravessa um período de grande fragilidade, o que na minha opinião não só é normal como, se bem utilizado, pode ser até positivo. Somos uma associação com professores de todos os níveis de ensino, do pré-escolar ao Ensino Superior, com faixas etárias e vivências muito distintas, de norte a sul do país, o que é excelente e muito nos orgulha, mas também nos traz algumas dificuldades. Como a Rita Bastos refere na revista nº 137, "Existem dentro da APM posições individuais de todos os tipos." E o difícil é conviver com "essa pluralidade de posições" e ao mesmo tempo definir o rumo que a associação pretende seguir. Qual é o seu caminho futuro? Onde se deve posicionar nas grandes questões sobre educação? Qual o papel que a APM deve desempenhar futuramente? Além das reflexões de fundo é ainda essencial continuar o trabalho diário, perspetivando novas formas de organização, novos projetos a desenvolver, novas ideias.

Tenho a mais plena convicção que a APM se saberá (re) encontrar enquanto associação, (re)definindo o seu papel na sociedade atual, indo de encontro aos novos professores e pensando numa nova Escola.

Apesar das diferenças, estamos (todos os sócios) de parabéns, Parabéns APM!

Elsa Barbosa
Presidente da Direção da APM em 2010/2012

Atropelados pela tecnologia?

Todos os dias recebemos notícias de novas tecnologias disponíveis para o grande público assim como de novas utilizações educacionais dessas tecnologias. Antigas tecnologias vão-se renovando e tornam-se mais sofisticadas nas suas utilizações. Das primeiras podemos citar os novos óculos da GOOGLE conectados à internet ou o "casamento" milagroso entre os telemóveis e os computadores que nos trouxeram os computadores sensíveis ao tato ou à voz. Das segundas cito por exemplo a utilização que Margarida Oliveira faz na sua tese "***Da modelação matemática à simulação computacional - A experimentação matemática no ensino***" das possibilidades das folhas de cálculo que lhe permitem concluir que "a ênfase nas aplicações e a integração das novas tecnologias nas aulas de matemática é uma prática que deve ser implementada em todos os níveis de ensino, do básico ao superior"[1]. No mesmo sentido posso também citar as novas roupagens de linguagens de programação educacionais do tipo do LOGO como é o caso do SCRATCH.

Cada vez mais observamos utilizações novas e profundas da tecnologia, desde a surpreendente precisão matemática das viagens espaciais (como é possível que a nave espacial Juno entrasse em órbita em volta de Júpiter, exatamente como previsto, após uma viagem espacial solitária de 5 anos?) até à combinação da tecnologia móvel com acompanhamento humano à distância nomeadamente na área da Medicina.

Surpreendentemente, ou não, todos os dias encontramos resistências ao uso da Tecnologia em muitos níveis, incluindo o escolar. Notícias recentes sobre um estudo da OCDE (*Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico*), usando dados do estudo PISA (*Programme for International Student Assessment*), sobre o uso das TIC nas escolas levaram a títulos alarmantes como "**Estudo surpreendente da OCDE conclui que computadores não melhoram aproveitamento dos alunos - Estudo da OCDE desmonta relação entre acesso a tecnologias e melhores desempenhos escolares**" (Jornal de Notícias, 15-9-2015), ou "**Mais computadores não significam melhores resultados na escola**" (TSF, 15-9-2015). Estes títulos parecem indicar que o uso dos computadores nas escolas é negativo, quando de facto o estudo da OCDE conclui que "a realidade nas escolas está muito atrás das promessas da tecnologia" e que "a tecnologia não tem contribuído para colmatar o fosso de competências que separa os estudantes com posses daqueles com menor poder económico". Efetivamente o estudo indica de forma categórica que "a tecnologia é o único caminho para alargar dramaticamente o acesso ao conhecimento" e questiona, por exemplo, várias opções atuais como "porque devem os estudantes estar limitados por um manual escolar que foi impresso dois anos antes, e talvez planeado dez anos antes, quando poderiam ter acesso ao manual escolar melhor e mais atualizado do mundo?" Claro que os resultados não são automáticos e muitas vezes a utilização inadequada da tecnologia cria mais problemas do que os que resolve.

O muito badalado estudo PISA da OCDE já incorpora regularmente calculadoras científicas nas suas avaliações. Desde o início que nos estudos do PISA a calculadora era permitida num país, se tal fosse consistente com as políticas nacionais do país em causa. Contudo, as questões dos primeiros estudos do PISA foram construídas demodo a serem "neutrais" relativamente ao uso de calculadoras.

A situação mudou no estudo PISA de 2012 pois nalgumas questões o uso da calculadora seria vantajoso para o estudante que a usasse. A partir de 2015 as questões passaram a incluir uma calculadora em linha em algumas questões, visto que os estudantes passaram a usar um computador para receber os enunciados e elaborar as respostas. A política da OCDE mudou porque o PISA entende que o uso do computador permite usar um espectro mais alargado de ferramentas matemáticas, embora para permitir o máximo de comparabilidade com o estudo de 2012, em 2015 só foi usada uma calculadora científica em linha[2]. Como será o estudo PISA de 2018?

Atualmente é possível fazer cursos totalmente em linha, integrados ou não em programas de estudo formais, estando já disponíveis centenas (talvez milhares) de cursos, na sua maioria de utilização gratuita. A Universidade de Coimbra tem oferecido alguns desses cursos, embora sujeitos a pagamento. Mais recentemente está a desenvolver um curso gratuito em linha chamado **ReM@t**, para apoio na área da Matemática, na transição do secundário ao superior[3].

A Dinamarca já desde 2009 que autoriza o uso da internet nalguns exames, visto que entende que a competência de pesquisa de informação na internet é essencial para os futuros cidadãos. Os responsáveis dinamarqueses são constantemente questionados sobre o "copianço" e o "plágio" nos exames, problema que, confessam, não resolveram totalmente mas, contrapõem, esse é um problema muito antigo; e citam os diários de Hans Christian Andersen para provar que o "copianço" existe pelo menos desde 1823: Andersen não era muito bom a Matemática mas era bom a Dinamarquês enquanto que um amigo dele era exatamente o contrário; então trocavam pequenas notas em papel para se entreajudarem nos "momentos difíceis" quando o professor virava as costas.

A Finlândia começou em 2016 a usar exclusivamente computadores ligados via internet ao Ministério da Educação para fazer os exames finais do Ensino Secundário. Assim, os alunos terão acesso a uma série de ferramentas informáticas (mas não têm acesso livre à internet) que permite que os enunciados dos exames contenham, por exemplo, vídeos, e, no caso da Matemática, acesso a software como o *Geogebra* ou aos emuladores de calculadoras gráficas com CAS.

Assim as salas de exame na Finlândia passaram a ter um aspeto muito diferente do habitual (Figura 1):

Figura 1. Foto de DIGABI.FI

O mundo mudou inexoravelmente. O mundo da internet até nos oferece novas palavras correspondentes a novas atividades. ***GOOGLAR*** (ler **gu'glar**) já é uma palavra portuguesa presente no dicionário (pelo menos nos mais atualizados):

> *googlar* in Dicionário da Língua Portuguesa com Acordo Ortográfico [em linha]. Porto: Porto Editora, 2003-2016. [consult. 2016-07-18 11:48:27]. Disponível na Internet: http://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/googlar

No futuro, para não sermos **atropelados** pela tecnologia teremos de ter respostas claras a questões como esta: qual o conhecimento e capacidades importantes no século XXI quando temos acesso a tantas fontes de informação? Como mudará a prática das disciplinas com a generalização das TIC? Se as TIC são usadas regularmente nas aulas, porque não podem ser usadas nos exames? Se saber tirar partido do acesso à internet (por exemplo googlar, usar bases de dados ou interpretar infografias) faz parte das capacidades essenciais para o século XXI, como incluir nas aulas atividades que as desenvolvam e como testar essas competências nos exames?

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Notas

[1] Oliveira, M. "Da modelação matemática à simulação computacional - A experimentação matemática no ensino", Tese de doutoramento, Universidade do Minho, 2015.

[2] OECD (2010), Draft PISA 2012 Mathematics Framework. OECD publishing, http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf

[3] Salvador, T.; Carvalho e Silva, J.; Albuquerque, H.; Marques, J.; Mendes, A.J. (2016) ReM@t - Recuperar a Matemática a Distância: Ano Zero. XVIII Simpósio Internacional de Informática Educativa, SIIE 2016. Universidade de Salamanca, Espanha.

O concurso DESAFIOS e o desenvolvimento da criatividade

Dina Tavares

Hélia Pinto

Marina Rodrigues

Recentes investigações sugerem que a aprendizagem da Matemática através da exploração de tarefas desafiantes, nomeadamente a resolução e/ou formulação de problemas, promove nos alunos o desenvolvimento do seu potencial criativo (e.g. Gontijo, 2015; Vale, 2015). Neste sentido, apresentam-se alguns resultados de um estudo mais alargado que procura analisar e compreender a criatividade de alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico no âmbito do concurso DESAFIOS, uma iniciativa da secção de Matemática da Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria.

Assim, foi analisada uma tarefa de análise de dados que constava da prova final do concurso DESAFIOS 2016, relativo ao 1.º CEB, com o objetivo de compreender a criatividade dos alunos do 4.º ano na sua resolução.

Segue-se uma breve fundamentação sobre as temáticas envolvidas no estudo, nomeadamente as relativas à criatividade e à análise de dados. Posteriormente, surge a metodologia adotada, a apresentação dos resultados e por último, algumas considerações finais.

Análise de dados e Criatividade

Numa sociedade em que os desafios sociais, tecnológicos, culturais e mesmo económicos valorizam cada vez mais o pensamento divergente, a criatividade surge-nos como uma capacidade fundamentada em comportamentos flexíveis e inovadores, conducente à criação e não à mera reprodução. Deste modo, nesta era da informação, se queremos compreender o mundo que nos rodeia, é essencial ter conhecimentos que permitam gerir a informação e tomar decisões de forma crítica e informada (NCTM, 2007; Reading, 2011). Nesse sentido, Martins e Ponte (2010) indicam que "o objetivo do ensino da Estatística, a nível elementar, é, antes de mais, promover a literacia estatística" (p. 7), que definem como a capacidade que nos permite interpretar a informação, avaliar a sua credibilidade e produzir nova informação. Também Gal (2002) associa a literacia estatística à capacidade para interpretar e avaliar de forma crítica informação estatística, discutindo-a e comunicando-a. Assim, somos conduzidos aos três níveis de leitura e compreensão de tabelas definidos por Curcio (1989), nomeadamente, Nível 1: Ler os dados – leitura direta sem qualquer interpretação, atendendo apenas a factos representados explicitamente; Nível 2: Ler entre os dados – leitura que requer um nível de comparação, o conhecimento de conceitos e habilidades matemáticas, que permitem a identificação de relações matemáticas; Nível 3: Ler além dos dados – Leitura com ampliação dos conceitos, a predição, a inferência em função de dados que não se refletem diretamente na tabela/gráfico; e ainda, sugerido por Shaughnessy (2007), o Nível 4: Ler por detrás dos dados – quando são feitas conexões entre os dados e o contexto.

Por outro lado, recentes investigações realizadas em Portugal (Pinheiro & Vale, 2013; Carreira & Amaral, 2013; Vale & Pimentel, 2015), têm vindo a mostrar como a educação matemática e a criatividade podem andar de mãos dadas e que a última depende mais das experiências educativas e das interações que estas proporcionam, do que dos conteúdos envolvidos (Vale & Pimentel, 2015). Estamos, assim, a falar de uma capacidade transversal que, apesar de ainda pouco valorizada nas aulas de matemática, pode ser ensinada e aprendida. Na realidade, Gontijo (2015) refere que apesar de reconhecida como uma importante capacidade transversal, a criatividade não tem merecido, ainda, o desenvolvimento que o autor considera fundamental para que a sua manifestação seja uma presença consistente na sala de aula.

No entanto, tão ou mais importante que o papel do professor neste caminho de desenvolvimento da criatividade, é o do aluno. Para Gontijo (2015) são várias as condições centradas no aluno, que contribuem para o desenvolvimento da sua criatividade. Destacamos o conhecimento matemático, pois *a bagagem de conhecimentos* sobre a área em estudo é essencial e determinante no processo criativo, bem como o envolvimento na tarefa, uma vez que a criatividade está diretamente ligada à vontade e ao entusiasmo com que o aluno reage e se empenha na realização da proposta. Estamos, portanto, na presença de uma atividade que associa aspetos cognitivos à afetividade (Gortijo, 2015).

Porém desenvolver a criatividade, de acordo com Silver (1997), requer o desenvolvimento de quatro componentes: (i) fluência, relacionada com a capacidade de produzir um grande número de resoluções ou ideias para uma mesma tarefa; (ii) flexibilidade, relativa à capacidade de apresentar diferentes categorias de respostas, ou seja, de mostrar pensamentos e ideias divergentes exprimindo-os ou justificando-os; (iii) originalidade, que envolve a capacidade de ser diferente, produzindo ideias não usuais e não convencionais; e (iv) elaboração, relacionada com a capacidade de apresentar um grande número de particularidades relativas a uma ideia. Sintetizando, a criatividade compreende a capacidade de ser inovador perante diferentes ideias, recorrendo a vivências anteriores e aplicando-as a novas situações de modo original e diversificado (Duffy, 2004, citado por Vieira, (2015)).

Na aula de matemática a criatividade surge normalmente associada à resolução e/ou à formulação de problemas. De acordo com Pinheiro (2015), a atividade de formulação de problemas permite inovar criando, facilitando o aprofundamento de ideias e conceitos, promovendo a construção de aprendizagens significativas. Já Polya (2003) salientava que a resolução de problemas que permita a utilização de variadas estratégias de resolução, associada à formulação de problemas, deve ser uma dimensão sempre presente na educação matemática. Na mesma linha de pensamento, Silver (1997) alerta para a importância da resolução de problemas e da formulação de problemas, como indutores da criatividade.

Diremos então, que são estes dois processos (resolução e formulação de problemas) que levam à compreensão das ideias fundamentais em matemática, estimulando a flexibilidade e a originalidade, componentes estruturantes da criatividade (Vale, 2015).

No entanto, a seleção dos contextos a partir dos quais se formulam ou resolvem problemas não é aleatória. Os problemas devem permitir que os alunos tomem decisões, definam estratégias diferentes e variadas, apresentem soluções/formulações distintas, pelo que deverão ser privilegiados os problemas abertos no sentido que lhes é dado por Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008).

Deste modo, contextos de concursos e/ou desafios fora da sala de aula, que promovam a resolução de problemas, selecionados de modo a provocarem a curiosidade, o raciocínio e a comunicação, permitindo aos alunos liberdade para construírem as suas resoluções, constituem-se como uma ocasião potenciadora da criatividade. Este tipo de concursos, associando a dimensão cognitiva à afetiva, permite, de acordo com Freimar e Lirett (2013, citados por Carreira e Amaral (2013)), o desenvolvimento do poder matemático dos alunos em circunstâncias diferentes das da sala de aula, facilitando, igualmente, a construção de uma imagem da matemática muito para além das técnicas, regras e procedimentos. Tal como referem Carreira e Amaral (2013), "as competições matemáticas surgem como parceiros da escola, ou seja, como promotores de uma aprendizagem paralela e complementar daquela que é intencionada pelo currículo escolar" (p. 497) e por conseguinte, constituem-se como potenciadores da criatividade dos alunos.

O concurso DESAFIOS

O concurso DESAFIOS é um concurso de resolução de problemas, promovido anualmente pela Escola Superior de Educação e Ciências Sociais (ESECS) do IPLeiria, em parceria com a Associação de Professores de Matemática (APM), e surgiu em 2000, no âmbito das comemorações do Ano Internacional da Matemática. Este concurso tem como principais objetivos estimular os alunos para a aprendizagem da Matemática de forma informal, valorizando a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, bem como promover o espírito de iniciativa e de competição.

O concurso dirige-se a alunos do distrito de Leiria e, atualmente, envolve duas iniciativas: *Desafios 1.º ciclo* dirigido a alunos do *4.º ano de escolaridade* e desde 2015, *Desafios 2.º ciclo*, que abrange alunos dos 5.º e 6.º anos de escolaridade.

Ambas as iniciativas decorrem em duas fases: a Fase Eliminatória e a Fase Final. Na Fase Eliminatória, que se realiza em março nas escolas que procedam à inscrição online no site do concurso http://sites.ipleiria.pt/desafiosmatematica/, todos os alunos têm de resolver, individualmente, um conjunto de quatro problemas matemáticos. Desta fase são apurados os alunos que obtiverem melhores resultados e ainda o melhor aluno de cada concelho, no caso do 1.º ciclo, ou o melhor de cada escola, no caso do 2.º ciclo. Após esta fase de seleção, os alunos finalistas têm a oportunidade de participar na Fase Final, que se realiza em maio na ESECS-IPLeiria, e que consiste novamente na resolução de quatro problemas matemáticos diferenciados. Depois de avaliadas e classificadas as resoluções dos alunos, são apurados e premiados os três vencedores de cada iniciativa.

A conceção dos problemas é feita de acordo com as orientações curriculares de cada ciclo, privilegiando-se problemas contextualizados e estimulantes, de modo a que os alunos mobilizem conceitos, procedimentos e formas de raciocínio e de comunicação matemática, bem como um gosto especial por fazer Matemática.

No ano letivo de 2015/2016, este concurso contou com a participação de cerca de 2600 crianças provenientes de 92 escolas do distrito de Leiria: 1365 crianças participantes na XVII edição dos Desafios 1.º ciclo e 1247 crianças participantes na II edição dos Desafios 2.º ciclo. Para a Fase Final, que se realizou no dia 04 de maio de 2016 na ESECS, foram selecionados, de acordo com os critérios anteriormente definidos, 54 alunos na categoria Desafios 1.º ciclo e 53 alunos na categoria Desafios 2.º ciclo.

O contexto de estudo

No contexto da participação dos alunos no concurso DESAFIOS e de modo a atingir o objetivo do estudo, adotou-se uma metodologia qualitativa de cariz interpretativo, uma vez que se pretende analisar e compreender um fenómeno em contexto natural: a criatividade emergente na resolução e formulação de problemas em contexto extra-aula. Assim, surge a pertinência de analisar detalhadamente alguns procedimentos, interpretações e dificuldades dos alunos, bem como as suas competências criativas no âmbito da resolução de problemas. Desta forma, foi escolhida a alínea b) de uma tarefa da Fase Final dos Desafios 1.º ciclo, do ano letivo 2015/2016, intitulada "Horas de sono" (Figura 1).

3. Horas de sono

A diretora de turma do Antônio fez um questionário no qual perguntava quantas horas, aproximadamente, os alunos costumam dormir por dia. Todos os alunos da turma responderam ao questionário.

A tabela seguinte mostra os resultados obtidos.

Número de horas	Rapazes	Raparigas
8	5	2
9	1	4
10	7	9

a) O gráfico de barras seguinte não está completo. Completa-o de acordo com a informação apresentada na tabela.

b) Produz uma notícia para o jornal escolar que descreva os hábitos de sono da turma do Antônio.

Figura 1. Tarefa da prova da fase final dos DESAFIOS 1º CEB

Esta tarefa exigia aos alunos conhecimentos ao nível do tópico de Organização e Tratamento de Dados, nomeadamente, no que concerne à análise, interpretação e representação de dados, bem como a elaboração de uma notícia acerca do tema horas de sono. Assim, a análise das produções apresentadas pelos 53 alunos teve em conta quer os níveis de criatividade definidos por Silver (1077), quer os quatro níveis de leitura e compreensão de gráficos/tabelas definidos por Curcio (1989) e Shaughnessy (2007). Nesta fase, participaram 53 alunos do 4.º ano de escolaridade, uma vez que dos 54 alunos apurados na fase eliminatória, um aluno faltou.

Resultados

Uma análise das 53 produções apresentadas pelos alunos na resolução da tarefa em estudo, mostra que apenas 1 não respondeu e 3 apresentaram respostas erradas. Porém, verificou-se que a maioria dos alunos, 35, se limitou a descrever os dados apresentados na tabela (e.g. Figura 2), ou seja, a uma leitura direta sem qualquer interpretação, atendendo apenas aos factos representados.

Na turma do António existem cinco rapazes que só dormem oito horas, um rapaz que dorme nove horas e sete rapazes que dormem dez horas.
Quanto às raparigas duas dormem oito horas, quatro nove horas e nove dez horas.

Figura 2. Produção de nível 1

Assim, estes alunos parecem encontrar-se no nível 1 de leitura e compreensão de tabelas definido por Curcio (1989) e por conseguinte, evidenciam um parco desenvolvimento de qualquer uma das componentes da criatividade consideradas por Silver (1997).

Ainda dos 53 alunos, 5 parecem estabelecer conexões entre os resultados apresentados e outros conteúdos matemáticos (e. g. Figuras 3 e 4), ou seja, realizam uma leitura que requer um nível de comparação, o conhecimento de conceitos e habilidades matemáticas, que permitem a identificação de relações matemáticas.

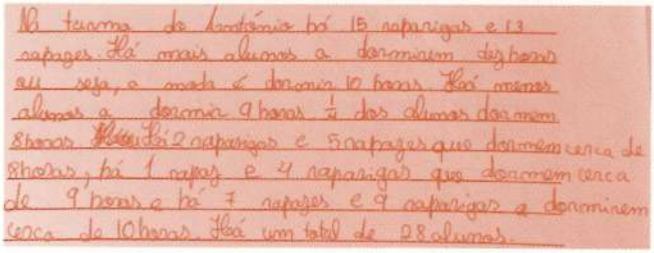


Figura 3. Produção de nível 2

Deste modo, estes alunos parecem encontrar-se no nível 2 de leitura e compreensão de tabelas definido por Curcio (1989). No entanto, ao recorrerem aos números racionais e medidas estatísticas (Figura 3), bem como à frequência relativa (Figura 4), apresentam alguma diversidade de pormenores para a mesma ideia, pelo que revelam algum grau de elaboração, uma das componentes da criatividade consideradas por Silver (1997).

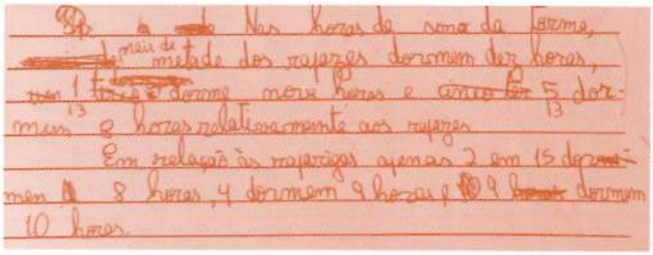


Figura 4. Produção de nível 2

A outro nível surgem ainda 9 produções, onde os alunos parecem ter feito uma conexão entre os dados e o seu contexto. Assim, 5 destes alunos, de modo distinto, apresentam uma reflexão sobre as horas de sono apresentadas e o que consideram ser as adequadas para as suas idades (e. g. Figura 5).

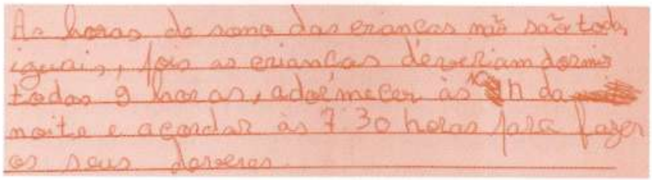


Figura 5. Produção de nível 4

Outros 3 alunos, também de forma diversa, relacionam as horas de sono apresentadas, com implicações nos seus comportamentos e atitudes (e. g. Figura 6).

Figura 6. Produção de nível 4

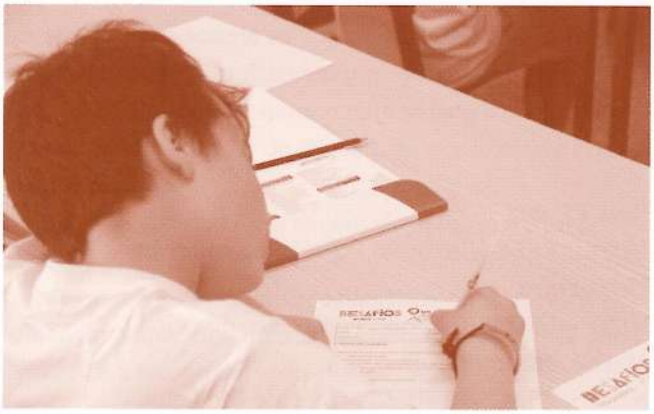
Por último, 1 aluno parece relacionar os dados apresentados com um contexto de muitas horas de sono e por conseguinte, alvo privilegiado de um mercado de produtos relacionados com o ato de dormir (Figura 7).

Figura 7. Produção de nível 4

Deste modo, estes 9 alunos parecem conseguir ler por detrás dos dados, na medida em que fazem conexões entre os dados e o contexto, pelo que parecem encontrar-se no nível 4 de leitura e compreensão de tabelas definido Shaughnessy (2007).

Estas produções revelam ainda alguma criatividade, nomeadamente no que concerne à componente da originalidade, que envolve a capacidade de ser diferente, produzindo ideias não usuais e não convencionais, conforme definida por Silver (1997). Porém, não será alheia à sua criatividade o facto de estes alunos revelarem um maior conhecimento estatístico, na medida em que não se limitam a uma análise numérica da tabela, procurando realizar alguma reflexão crítica a partir da informação.

Assim, a análise feita às 53 produções sugere alguma conexão entre os conhecimentos dos alunos e a criatividade, conforme sugerido por Gontijo (2015), uma vez que à medida que aumenta o nível de leitura e compreensão de tabelas definido por Curcio (1989) e Shaughnessy (2007), parece aumentar o potencial criativo.



Considerações finais

A análise dos dados deste estudo sugere que o conhecimento dos alunos ao nível da leitura e compreensão de tabelas se situa maioritariamente nos níveis mais elementares definidos por Curcio (1989). Destes, apenas os 5 alunos que atingiram o nível 2, apresentaram alguma diversidade de pormenores para a mesma ideia, revelando algum grau de elaboração, uma das componentes da criatividade consideradas por Silver (1997).

Porém, existe um grupo de 9 alunos, que atingiu o nível 4 de leitura e compreensão de tabelas, definido por Shaughnessy (2007). Estes alunos produziram ideias diferentes, não convencionais, pelo que revelaram alguma originalidade nas suas produções, outra das componentes da criatividade definida por Silver (1997).

Por conseguinte, a análise feita às 53 produções sugere que o conhecimento sobre a área em estudo é essencial e determinante no processo criativo, corroborando as ideias de Gontijo (2015). Porém, a par dos aspetos cognitivos, o autor também enfatiza os aspetos afetivos, considerando que a criatividade associa estes dois aspetos. Assim, no contexto estudado, os aspetos afetivos parecem inerentes ao mesmo, na medida em que este tipo de concurso associa a dimensão cognitiva à afetiva (Freimar & Lirett, 2013, citados por Carreira e Amaral (2013)).

Apesar do anteriormente exposto, os resultados obtidos sugerem um parco desenvolvimento da capacidade criativa dos alunos, já que a maioria se limitou a apresentar um resumo dos dados que constavam na tabela de frequências.

Muitos são os fatores que podem ter contribuído para estes resultados, porém não serão alheios aos mesmos, a pouca valorização da criatividade nas salas de aula de matemática. Porém, sendo este um assunto que apenas recentemente tem merecido o interesse e a apropriação por parte da investigação em Educação Matemática em Portugal, poderá significar que os estudos já realizados neste domínio não tiveram ainda o impacto desejado na aula de matemática, quer ao nível da importância que lhes é dado pelos professores, quer ao nível da integração que os alunos fazem deste assunto, nas suas produções matemáticas. Assim, esta é uma temática para a qual se sugere mais investigação.

Dina Tavares
NIDE – ESECS/Instituto Politécnico de Leiria
Hélia Pinto
NIDE – ESECS/Instituto Politécnico de Leiria
Marina Rodrigues
NIDE – ESECS/Instituto Politécnico de Leiria

Bibliografia

Amaral, N. e Carreira, S. (2013). Criatividade matemática e flexibilidade na resolução de problemas para além da sala de aula. In Fernandes, J. A. , Martinho, M.H., Tinoco, J & Viseu, F (org) . *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga. APM &CIEd da Universidade do Minho (495-511)

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension: Elementary and middle school activities*. Reston: NCTM.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, componentes, responsabilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gontijo, C. (2015). Técnicas de criatividade para estimular o pensamento matemática. *Educação e Matemática nº 135 (16-20)*

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e Tratamento de Dados*. Lisboa: ME.

Morais, M. (2015). Criatividade: Conceitos e desafios. *Educação e Matemática nº 135 (5-7)*

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Pinheiro, S e Vale, I(2013). Formulação de problemas e Criatividade na aula de matemática. In Fernandes, J. A., Martinho, M.H., Tinoco, J & Viseu, F (org) . *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga. APM &CIEd da Universidade do Minho (481-494)

Polya, G. (2003). Como resolver problemas. Lisboa: Gradiva

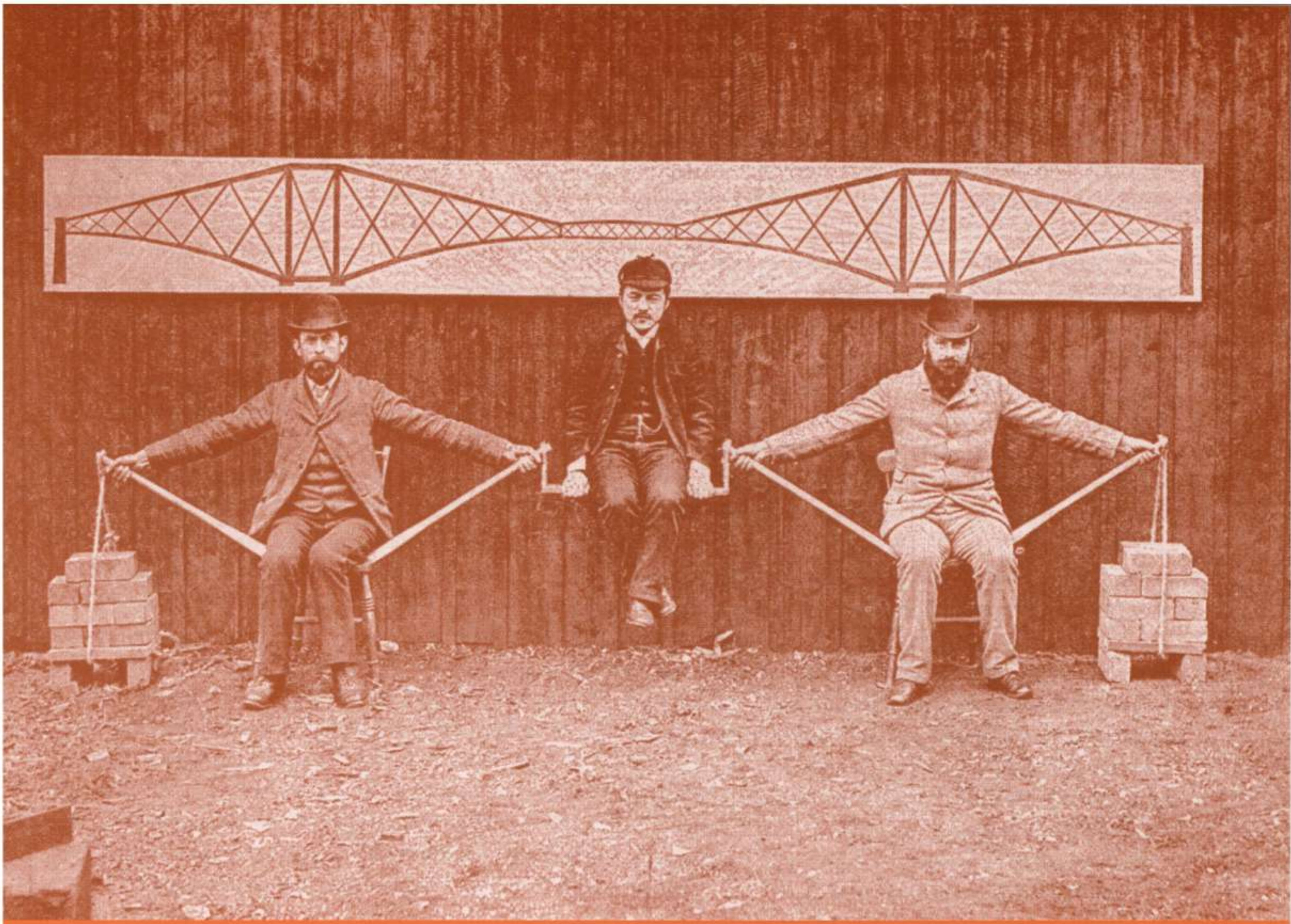
Reading, Chris. (2011). *Fundamentals for teaching statistics*. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.),*Teaching statistics in school mathematics.-Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 53-56). New York: Springer.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 29*(3), 75-80.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. k. Lester (Eds.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 957-1006). Greenwich: NCTM.

Vale, I. (2015). A criatividade nas (re)soluções visuais de problemas. *Educação e Matemática nº 135 (9-15)*

Vieira, C. (2015). Da resolução de problemas à criatividade num contexto pré-escolar. *Educação e Matemática nº 135 (31-36)*



Para além de Eureka: a demonstração em Matemática

António M. Fernandes

Este artigo constitui uma extensão de uma conferência proferida no ProfMat2016 sob o mesmo título. O objectivo da conferência (e do artigo) é o de identificar o papel da demonstração na metodologia matemática, de a caracterizar e, por fim, discutir a sua relevância num contexto pedagógico. Importa desde já notar o óbvio: quaisquer considerações sobre estes temas não são relevantes senão relativamente a uma certa concepção do Ensino, da sua função e do respectivo método.

De modo a tornar úteis as considerações que aqui farei, e sabendo que quaisquer considerações reflectirão inevitavelmente um certo compromisso filosófico, tentarei restringir-me aos aspectos mais objectivos que possam servir de ponto de partida a um qualquer posicionamento mais particular.

As origens

Não é possível, de um ponto de vista historiográfico, identificar *Matemática* com *demonstração*. Seguramente, as primeiras considerações matemáticas não foram do tipo dedutivo, tampouco este corpo evolutivo de conhecimento matemático se foi edificando alicerçado em demonstrações.

Correndo o risco de alguma especulação, pode dizer-se que o primeiro artefacto matemático conhecido foi produzido no Paleolítico Superior, mais precisamente, cerca de 20 000 a.C. Trata-se do *osso de Ishango*, contendo uma série de entalhes que sugerem a possibilidade de se tratar de um instrumento de contagem.[1]

Avançando 15 000 anos, já é possível considerar exemplos de um conhecimento matemático não negligenciável, primeiro entre os *Sumérios* e posteriormente entre os *Babilónios*.[2]

A civilização egípcia revela-se igualmente uma produtora de conhecimento matemático: o *papiro de Rhind*, escrito cerca de 1650 a.C., consiste numa espécie de manual de aritmética e geometria. Embora não contenha demonstrações de factos matemáticos revela um grande conhecimento acerca dos algoritmos aritméticos, números compostos e números primos, médias geométricas e harmónicas bem como, conhecimento acerca da resolução de certos tipos simples de equações.

Ambos os casos indicam a existência de uma actividade matemática criativa mas não dedutiva.

O salto conceptual necessário à transformação da Matemática numa actividade dedutiva foi dado pelos gregos. Isso começou a acontecer, muito provavelmente, logo a partir de Tales de Mileto (c. 624 a.C.–c. 546 a.C), de quem se diz ter estado na origem da filosofia especulativa. Quando Euclides (fl. 300 a.C.) escreve os seus *Elementos* já a noção de demonstração ocupa nos trabalhos matemáticos, neste em particular, um lugar central.

Para Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.) o conhecimento é dedutivo, i.e. obtém-se através da demonstração (*apodeixis*) possuindo uma forma bem determinada: a inferência silogística. Deste modo a demonstração assenta firmemente num formalismo lógico: a lógica silogística. Dado que a estrutura de um silogismo é reconhecível de forma objectiva, a demonstração assegura, de modo absoluto, que a verdade se transmite das hipóteses às conclusões.

Contudo, qualquer sistema dedutivo necessita de um ponto de partida, obtido através da incorporação de primeiros princípios (*archê*), princípios estes, indemonstráveis. Aristóteles sabia-o bem e nos *Analíticos Posteriores* tenta caracterizar o processo através do qual estes primeiros princípios são isolados (um processo mental envolvendo percepção sensorial, memória e experiência).

O silogismo (na realidade algumas formas silogísticas) são, por assim dizer, arquétipos formais de um argumento ideal. Contudo, a importância teórica que lhe é conferida por Aristóteles não tem correspondência na sua própria prática. Mesmo os *Elementos*, não contêm um único argumento silogístico. Isto, apesar de estruturalmente, constituírem um edifício axiomático-dedutivo nos termos descritos por Aristóteles.

Claro que a natureza da própria lógica aristotélica, que não é uma lógica proposicional como aquela que hoje usamos, levanta dificuldades à redução de argumentos, ainda que válidos, à forma silogística. Muito naturalmente, os argumentos eram preferencialmente descritos numa outra forma, mais natural. Contudo, é possível que tal como hoje a sua validação correspondesse ao reconhecimento mais ou menos intuitivo de que, em cada caso, uma tal redução era possível.

A lógica como hoje a conhecemos é uma evolução operada a partir da lógica aristotélica e, ainda mais directamente, operada a partir da lógica dos estóicos (essa sim uma lógica proposicional). Paralelamente, a noção de *demonstração*, também ela sofreu uma evolução.

Permanecem, apesar destas mudanças, os objectivos fundamentais enunciados em Aristóteles: assegurar de forma absolutamente correcta a transmissão da verdade.[3]

A demonstração e o seu papel em Matemática

A Matemática constitui um domínio do conhecimento que é peculiar e em larga medida singular. A natureza de cada um dos seus objectos, independentemente do seu estatuto ontológico, é altamente abstracto e a Matemática identificada com o seu método só é possível graças a este facto.

O início do século 20 foi marcado por grandes esforços fundacionais. Uma das preocupações de Hilbert era fornecer uma demonstração finitária da *consistência da Matemática*. Entre as componentes essenciais à realização de um tal propósito, ocupando um lugar central, surgia o *método axiomático* e, em particular, a noção de *demonstração*. De acordo com o próprio Hilbert uma demonstração (formal) de uma proposição φ consiste numa sequência finita de proposições $\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$ onde $\xi_n = \varphi$ e cada ξ_i ou é um axioma lógico ou então resulta da aplicação de uma *regra dedutiva* a proposições que precedem ξ_i na sequência.[4]

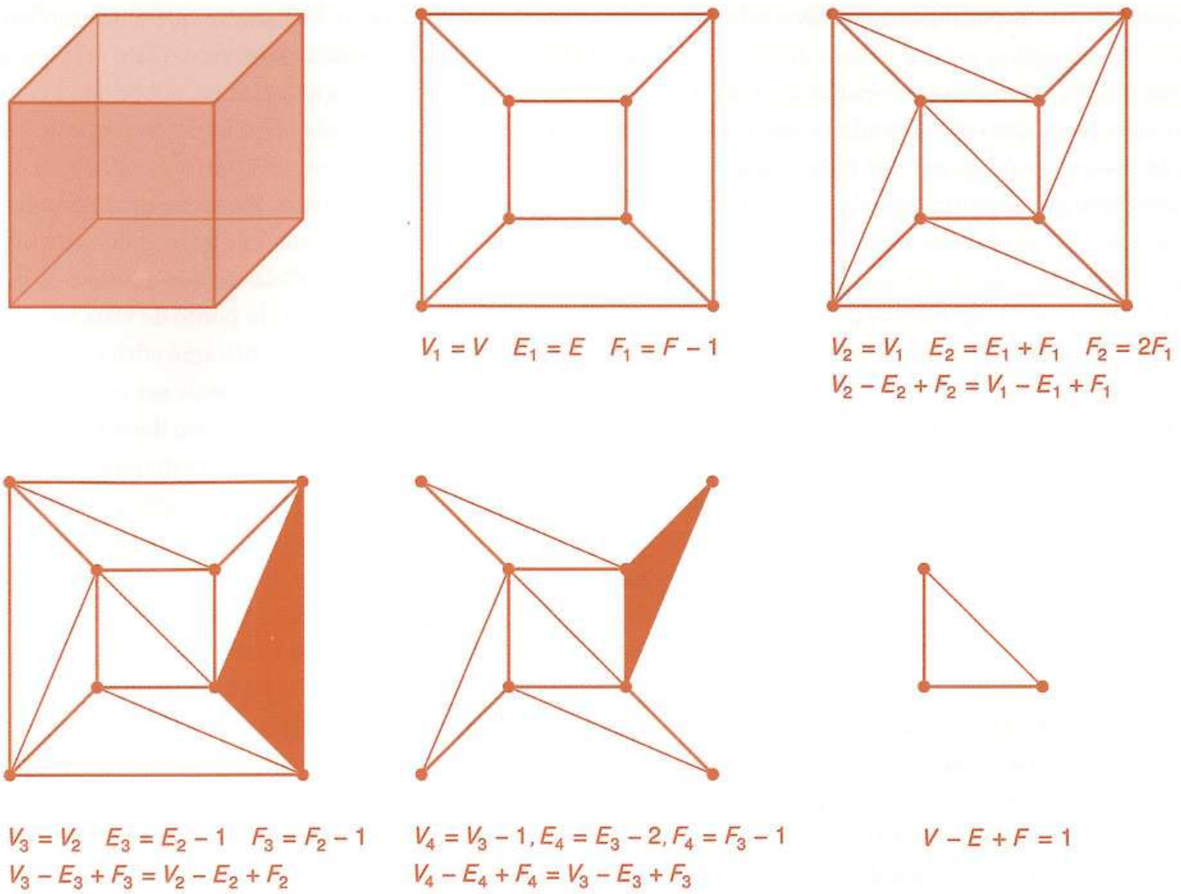


Figura 1. A construção de Cauchy no caso de um cubo

Se Γ é um conjunto de axiomas e se existe uma demonstração de φ que recorre aos axiomas de Γ escrevemos $\Gamma \vdash \varphi$ (e dizemos que Γ *demonstra* φ).

Desde que as proposições sejam expressas numa inguagem formal, a verificação de que uma dada sequência $\langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \rangle$ é uma demonstração de ξ_n constitui um procedimento mecânico, ausente de qualquer tipo de subjectividade.

Estamos perante uma noção moderna que, embora permita encarar as demonstrações como objectos matemáticos, exclui desta categoria argumentos baseados em construções e procedimentos como o são todas as construções com régua e compasso que surgem nos *Elementos* de Euclides, ou como a famosa *demonstração* que Cauchy forneceu para a igualdade de Euler (supostamente válida para todos os poliedros): $V - E + F = 2$ onde (V é o número de vértices, E é o número de arestas e F é o número de faces). A *demonstração* de Cauchy consiste num procedimento[5] que visa reduzir o poliedro original a um objecto mais simples onde a verificação da igualdade é trivial. O procedimento é tal que a relação se conserva ao longo do processo. Consiste no seguinte: (1) remover uma das faces e projectar a figura resultante no plano (na figura projectada, o número de faces (projectadas) decresce uma unidade, i.e., $V_1 = V$, $E_1 = E$ e $F_1 = F - 1$); (2) Triangular cada face; (3) Remover os triângulos um a um até restar apenas um triângulo. (O valor da expressão $V - E + F$ permanece inalterado desde a figura projectada até ao triângulo final e, neste último caso é fácil determinar o seu valor que é 1.) Como na figura projectada o número de faces é menos uma unidade que no poliedro, mantendo-se V e E inalterados, tem-se $V - E + F = 2$ para o poliedro. Na figura 1 descrevem-se graficamente as diferentes etapas deste processo, tomando um cubo como ponto de partida.[6]

É fácil verificar que este tipo de argumento não passa no crivo de Hilbert e por diversas razões. Desde logo não é um argumento estritamente lógico, ele depende de uma certa intuição visual que evidentemente se encontra confinada à informação proporcionada por um número limitado de visualizações, incompatível com a universalidade do resultado.

Devido à sua génese uma prova no sentido de Hilbert não possui lacunas. Neste caso elas abundam, não é claro que este tipo de procedimento possa ser feito conduzido em todos os casos nem que, sendo possível com diferentes opções, elas conduzam a um mesmo desfecho.

Finalmente a demonstração de uma proposição nos termos de Hilbert corresponde a um objecto definitivo. Neste caso estamos perante uma receita que deve ser aplicada a cada caso particular para produzir uma demonstração concreta para esse caso. De qualquer forma, é humanamente impossível, a menos que se recorra a um certo tipo de generalização, verificar uma quantidade infinita de casos.

Num ensaio, em 1945, C. G. Hempel[7] afirmava que «o método da Matemática é a demonstração». Ainda que, como o próprio reconhecia, «os sistemas matemáticos assentam em axiomas que, em si mesmos, não se podem justificar através da dedução.»

Tomada à letra, esta opinião, conjugada com a concepção hilbertiana de *demonstração*, desqualificaria uma parte muito significativa da Matemática produzida até ao século 20. De resto, nem Hempel nem ninguém que reconheça o papel decisivo da demonstração na metodologia matemática, poderá sustentar uma tão radical concepção. Para continuar a mencionar Hempel, no seu *Philosophy of Natural Science* (1966), ele conclui que a dedução não pode ser o único método da Matemática: a dedução permite verificar a validade de um argumento nas não fornece meios para o encontrar, tampouco fornece uma forma de identificar as proposições que são interessantes ou relevantes para o desenvolvimento de um certo domínio matemático.

Uma demonstração é pois um *dispositivo* que permite assegurar de forma segura que a verdade se propaga das premissas às conclusões e, deste ponto de vista, a demonstração hilbertiana constitui um paradigma da capacidade de assegurar essa segurança. De qualquer forma, o simples exercício de consultar a literatura matemática, revelará que nelas não se encontram demonstrações formais (excepção óbvia quando o tema é a Lógica Matemática, onde estas demonstrações são tratadas como objectos matemáticos, para serem estudados matematicamente). As razões para este facto são várias. Em muitos casos, a formalização estrita de uma proposição matemática seria impossível na prática e, mesmo que essa formalização pudesse ser terminada, a quantidade de símbolos envolvida seria de tal forma grande que os recursos necessários para a sua validação não estariam disponíveis. Por outro lado, uma vez que as demonstrações são interpretadas por humanos, são habitualmente descritas numa linguagem que é um melhor canal entre as ideias envolvidas e o cérebro. Claro está que a estrutura de uma demonstração à Hilbert, sobretudo a concepção segundo a qual em cada etapa as novas proposições são acrescentadas, exclusivamente através da utilização de regras lógicas deve ser respeitada. De facto, uma demonstração informal (i.e., não descrita em termos de uma linguagem formal) é válida na medida em que a cadeia de inferências não fica comprometida do ponto de vista lógico.

A demonstração é assim uma verificação eficiente e esse é o seu único papel. Não deixa por isso de ser essencial: a actividade matemática tem como objectivo demonstrar resultados matemáticos. Mas a actividade matemática não se resume, evidentemente, ao cumprimento desse objectivo. Em particular, uma demonstração não é, em geral, em si mesma, fonte de entendimento. No entanto, sem ela esse entendimento não existiria. A existência de uma demonstração legitima a consideração de certos modelos (necessariamente objectos particulares) e passamos entender o fenómeno geral através da análise desses modelos concretos.[8]

Aspectos pedagógicos

Devem ensinar-se demonstrações? A resposta a esta questão depende dos objectivos do ensino da Matemática. Se esse ensino corresponder de algum modo a um apetrechamento, capaz de dotar o indivíduo de ferramentas que lhe proporcionem a resolução de problemas práticos então, diria que o ensino da demonstração pode (talvez até deva) ser dispensado. Contudo, se existe na actividade matemática capacidade para promover certo tipo de desenvolvimento cognitivo que, tendo em conta o carácter peculiar da Matemática, se promoveria necessariamente através dessa actividade então, devem ensinar-se demonstrações.

Plutarco defendeu a ideia de que «a educação é como o atear de uma chama e não como o encher de um vaso». Concordo com ele em absoluto. E é por isso que não posso deixar de me inquietar com o facto de o ensino da demonstração poder constituir um desastre, como certamente o configuraria a sua redução a um mero exercício de reprodução acrítica. É importante não perder de vista que aquilo que pode ser importante do ponto de vista pedagógico não é a demonstração *per se*, mas antes a actividade de demonstrar. (Parece-me claro que *investigar para demonstrar* constitui uma actividade mais rica do ponto de vista cognitivo que o *investigar para utilizar* ou o ainda mais pobre *aprender a usar*.)

A demonstração corresponde ao culminar de um processo que é, como já se referiu, do ponto de vista cogni-

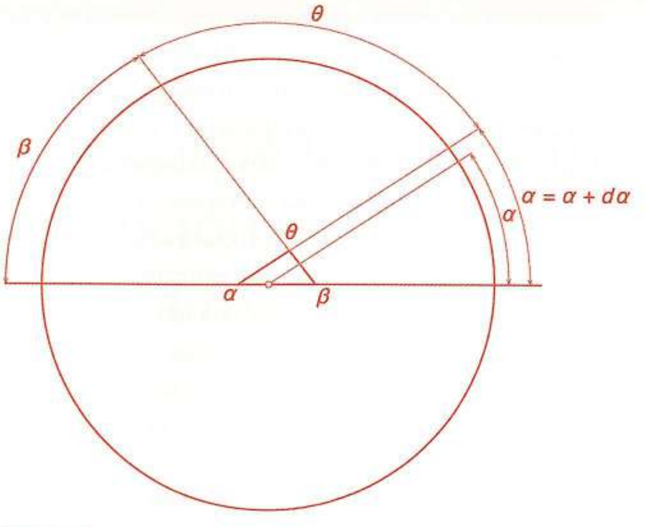


Figura 2

tivo, riquíssimo. Não apenas por envolver raciocínio lógico-matemático intenso, mas também por ser um processo criativo e imaginativo. É ainda um processo dinâmico, onde frequentemente não apenas as abordagens e estratégias mudam mas, também, os próprios conceitos são re-inventados e as noções fundamentais afinadas, ou até substituídas. Existe toda uma lógica da descoberta que não coincide com a lógica da transmissão da verdade, mas que tal como esta, vale a pena conhecer e interiorizar.

À primeira vista pode parecer estranho que a Matemática se possa desenvolver sem uma adesão estrita ao rigor lógico. Em última análise não pode. Mas, percorrendo, ainda que superficialmente, a história da Matemática, constatam-se largos períodos de actividade em que esse rigor foi relegado para um plano secundário. Foram (e serão) períodos de grande criatividade, impulsionados sobretudo pela força das ideias, impondo-se sobre as nossas mentes. Antes da *análise rigorosa* proporcionada pelo cálculo $\epsilon - \delta$ de Cauchy, o cálculo diferencial e integral já tinha sido enormemente desenvolvido pelos impulsionadores do cálculo infinitesimal.[9] Os infinitesimais surgem misturados com os números ordinários, mas as suas propriedades correspondem mais a um certo tipo de intuição que às leis de uma álgebra rigorosamente estabelecida: se dx e dy são infinitesimais, então $dx = dy = 0$ contudo, dx/dy pode ser um número inclusive não nulo e diferente de 1. Usando este tipo de especulação, sempre que a é um número ordinário e dx é um infinitesimal tem-se $a + dx = a$. Posto isto, é fácil concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo infinitesimal é π (ver a figura 2). Explorando este facto e, contraindo continuamente um triângulo arbitrário até obter um triângulo infinitesimal, Schumacher estabelecia que para qualquer triângulo, a soma dos respectivos ângulos internos é π (figura 3). Este exemplo corresponde, evidentemente, a uma utilização não essencial destas ideias, uma vez que este resultado já surge demonstrado nos *Elementos*. Apesar disso, serve para ilustrar a elegância dos argumentos. É claro que, o rigor é outra coisa.

O facto é que absoluto rigor e criatividade nem sempre caminharam lado a lado, mesmo em Matemática. E, num processo que conduz à demonstração de um resultado matemático, existem períodos criativos, imaginativos, e especulativos, eventualmente menos rigorosos, como é típico das actividades exploratórias em território desconhecido.

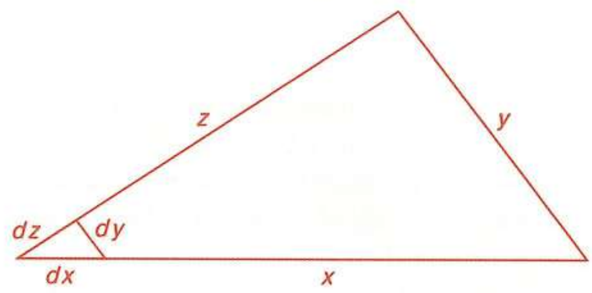


Figura 3

Mas é precisamente esta actividade que permite identificar aquelas relações e propriedades que persistem na observação de um fenómeno, e cuja articulação haverá de constituir o esboço que culminará numa verdadeira demonstração. É este tipo de actividade que o *ensino da demonstração* deve aperfeiçoar em cada aluno.

Como se imagina, um processo deste tipo não corresponde a um percurso pré-determinado, muito menos será útil condicioná-lo excessivamente. Requer por isso tempo. Seguramente muito mais tempo que aquele que os actuais currículos proporcionam. Por outro lado, é preciso ter em conta que a necessidade de uma demonstração não se impõe facilmente a um qualquer espírito. A grande maioria das pessoas estará disposta a confiar num grau de evidência suficiente, ou em soluções empíricas satisfatórias que, evidentemente não contribuem nada para a compreensão de um dado fenómeno.

Existe, portanto, uma segunda dificuldade que importa considerar: a de estimular a necessidade de demonstrar. Perante problemas que em muitos casos terão que ser simples será necessário que, estrategicamente, se *enfraqueça* a evidência, algo que só será possível através da habilidosa introdução de uma certa *tensão cognitiva*.

Já se vê que fica reservado ao professor um papel essencial, papel esse que não poderá desempenhar satisfatoriamente sem que possua um profundo conhecimento da génese das noções envolvidas, por um lado, e uma capacidade para gerir toda a dinâmica deste processo exploratório, por outro.

Um ensino significativo da demonstração, necessita de condições que não estão criadas. Os próprios moldes em que deve ocorrer exigem, antes de serem implementados, uma profunda reflexão multidisciplinar. A este respeito, nenhuma decisão irreflectida ou simplista poderá ser benéfica e é, por isso, mais prudente seguir o conselho de Victor Hugo: «A linha recta é uma respeitável ilusão de óptica que conduziu muitos Homens à desgraça.»[10]

Notas

1 Vladimir Pletser, sugere até que o instrumento revela conhecimentos de representação na base 12 e nas *subbases* 3 e 4. (Ver: *Does the Ishango bone indicate knowledge of the base 12? An interpretation of a prehistoric discovery, the first mathematical tool of humankind*, http://arxiv.org/pdf/1204.1019.pdf)

2 Para vários exemplos muito significativos ver: Jöran Friberg. *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts—Manuscripts in the Schøyen Collection*, Springer, 2007.

3 Esta ideia do *rigor absoluto* tem sido contestada. A contestação é justa se dirigida a uma interpretação rígida da expressão *rigor absoluto*. Diremos mais acerca desta questão na secção seguinte.

4 Uma *regra dedutiva* pode ser vista como um tipo de *operação* que associa a uma sequência $\langle \theta_1,..., \theta_k \rangle$ de proposições (as premissas) uma proposição θ (a conclusão). Podemos enunciar a regra da seguinte forma: $\theta_1,..., \theta_k \vdash \theta$. Um exemplo consiste na regra de *modus ponens* que, tendo em conta a observação precedente se pode escrever $\phi, \phi \Rightarrow \psi \vdash \psi$.

5 Lakatos descreve-a como uma experiência mental. (Ver: Imre Lakatos. *Proofs and Refutations—The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, 1976.)

6 De facto o argumento não é válido em geral. Para uma análise histórico-filosófica da história da relação de Euler ver Imre Lakatos *op. cit.*

7 Carl Gustav Hempel (1905–1997) foi um filósofo alemão e figura proeminente num movimento da Filosofia da Ciência designado de *Empiricismo Lógico*.

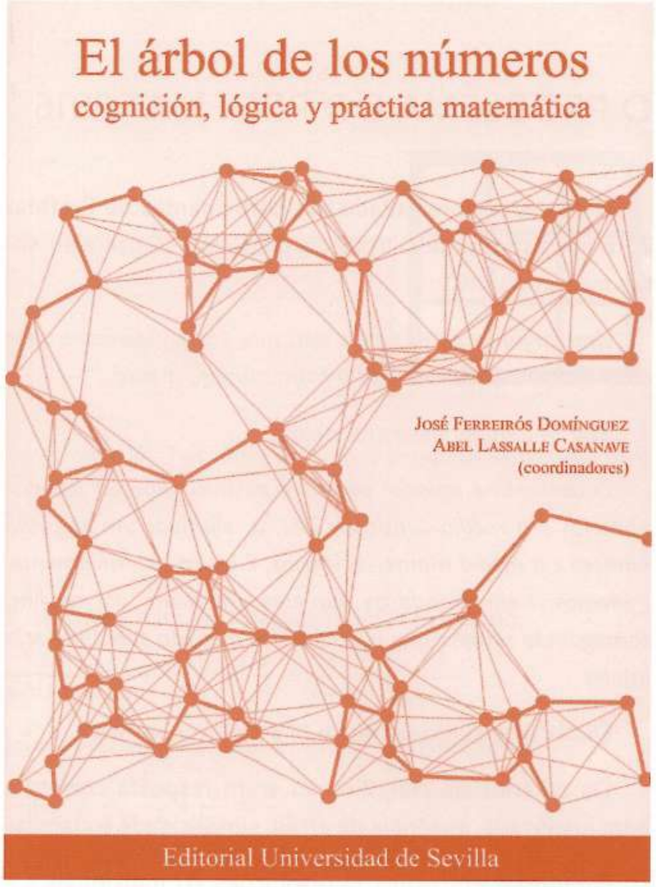
8. A natureza não explicativa das demonstrações matemáticas está na origem de um debate importante acerca da certeza do conhecimento matemático que ocorrido no século 17, a famosa *Quaestio de certitudine mathematicarum*. A questão tem origem numa distinção que passou a ter alguma proeminência, (sobretudo a partir de Averroes) entre dois tipos de demonstração silogística, respectivamente a *demonstratio quia* (demonstração do facto) e a *demonstratio propter quid* (demonstração das razões para o facto) e, ainda a *demonstratio potissima*. No primeiro caso a causa é inferida a partir do efeito, no segundo é o efeito que se infere a partir da causa. A demonstratio potissima é um combinação das duas, isto é, o termo médio que relaciona a hipótese e a conclusão deve descrever a causa próxima do efeito de modo essencialmente único (algo que, deve dizer-se, não fazia sentido na concepção aristotélica).
A visão segundo a qual a Matemática constitui a forma mais perfeita de conhecimento, com base na ideia de que recorria à forma mais poderosa de demonstração foi contestada por Alessandro Piccolomini (1508–1578) que defendeu a tese segundo a qual as demonstrações em Matemática não podem ser *potissimae*. (Piccolomini defendeu simultaneamente a ideia de que o conhecimento matemático era do tipo mais certo, devido à natureza dos seus objectos.)
Por exemplo, a demonstração que consta dos Elementos de Euclides de que a soma dos ângulos internos de um triângulo corresponde a dois ângulos rectos, assenta numa construção geométrica em que certos lados são prolongados, estes prolongamentos dificilmente podem ser visto como a causa essencial da conclusão, antes pelo contrário constituem um mero acidente a partir do qual, no entanto, a conclusão pode ser derivada. Ainda assim constituem uma causa remota, pelo que a demonstração não pode ser considerada *potissima*.
Deve referir-se que esta polémica adquiriu grande importância tendo tido ecos em Portugal, onde foi alvo da atenção dos Conimbricenses.

9 Note-se que nem mesmo Cauchy, que finalmente colocou a *análise* a salvo das críticas do bispo Berkeley, abandonou o poder heurístico dos infinitesimais. A simples leitura do seu *Cours d'analyse*, revelará as inúmeras ocasiões em que os infinitesimais desempenham um papel significativo na sua argumentação.

10 Victor Hugo, *Os Miseráveis*.

António M. Fernandes
Dep. de Matemática, IST-UL
amfern@math.tecnico.ul.pt

El árbol de los números: cognición, lógica y prática matemática



José Ferreirós Domínguez
Abel Lassale Casanave
(coordenadores) Editorial Universidad de Sevilla2016

Nesta publicação (em língua castelhana) reúnem-se uma série de textos de diversos autores, procurando dar conta das mais recentes inovações na análise filosófica da Matemática e da sua prática, concentrando-se especialmente na análise cognitiva da noção de *número*. Algumas ideias tradicionais são colocadas sob revisão, através da contribuição de domínios distintos como as ciências da cognição e as neurociências, entre outros. Embora os artigos assumam, ocasionalmente, um carácter técnico incontornável, a linguagem é acessível o que torna a sua leitura útil a todos aqueles interessados nestas questões fundamentais.

O livro está dividido em três partes: *Cognição*, *Lógica* e *Prática Matemática*. A primeira parte (*Cognição*) contém três contribuições: *Onde situar os fundamentos cognitivos da Matemática?* de Valeria Giardino; *A cognição dos inteiros: uma nova proposta*, de Tatiana Arrigoni e Bruno Caprile; *Filosofia da biopsicologia do número*, de Hourya Benis Sinaceur.

Quanto à segunda parte (Lógica), ela compõe-se de quatro artigos: *Números enquanto propriedades de segunda ordem*, de Oswaldo Chateaubriand; *Relações euclidianas de equinumerosidade*, de Frank Thomas Sautter; *Gödel* versus *Hilbert e as suas concepções simbólicas de conhecimento matemático*, de Sérgio Shultz; *Às voltas com a intuição e o conhecimento matemático*, de Concha Martínez Vidal.

Finalmente, na terceira parte (*Prática matemática*) encontram-se três contribuições: *A certeza da aritmética*, de José Ferreirós; *Conhecimento simbólico e aritmética em Hilbert*, de Abel Lassale Casanave; *Números e proposições numéricas nas formalizações da aritmética de Peano, Gödel e Whitehead-Russell*, de José M. Sagüillo.

A publicação em apreço, contendo análises no âmbito da Filosofia da Matemática não interessa apenas ao filósofo. Pelo contrário, as temáticas analisadas interessam a todos aqueles a quem é útil conhecer a forma como o processo matemático se desenvolve e é apreendido pelo cérebro humano e, entre estes, claro está, todos aqueles de alguma forma envolvidos no Ensino da Matemática. (A título meramente exemplificativo menciona-se a questão da elucidação do conceito de *número*, do respectivo estatuto ontológico bem como a epistemologia do conhecimento numérico.)

Muitas das temáticas aqui abordadas são antigas, alguma tão antigas como a própria filosofia mas, como já se disse, são reapreciadas à luz de nova informação, em muitos casos, com origem pluridisciplinar, reflectindo a sua complexidade. É sob essa luz que novas soluções são propostas mas, não se pense, que a riqueza da publicação se esgota nessas propostas. Muitas reflexões são suscitadas envolvendo a natureza da intuição, da estrutura do conhecimento matemático e do modo como os processos cognitivos se interligam com questões linguísticas e de carácter lógico.

No que interessa particularmente aos leitores da *Educação e Matemática*, são em muitos casos reflexões com impacto pedagógico, directo ou indirecto que, provindo da via analítica, proporcionam ferramentas de reflexão nem sempre acessíveis da forma que esta colecção de ensaios o é.

António M. Fernandes
Dep. Matemática,
Instituto Superior Técnico-Universidade de Lisboa

O PROBLEMA DO PROFMAT 2016

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2016 consistiu na resolução do problema "Onze elementos num conjunto":

Um conjunto de números naturais, todos diferentes, tem onze elementos e a sua média é um número inteiro.

Seja M o maior desses números.

O conjunto é especial porque é possível eliminar um dos números e a média continuar inteira, eliminar um segundo número e a média manter-se inteira. E assim sucessivamente. Podemos ir eliminando os números um a um até ao fim, conseguindo sempre que a média dos que vão sobrando seja inteira.

Qual é o conjunto em que o M é o menor possível?

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Foram-nos entregues 15 resoluções (11 individuais e 4 em grupo).

Vários concorrentes começaram por testar a hipótese de os elementos do conjunto serem os primeiros onze números naturais, cuja soma é 66, um múltiplo de 11. Para retirar um elemento e a média ser inteira, é preciso que a soma dos que ficam seja múltipla de 10 e por isso só é possível eliminar o 6 (a soma dos restantes é 60). Só que a seguir, para nove elementos, era preciso tirar o 6 (que já saiu) ou o 15 (que não faz parte do conjunto). Impossível.

Então, os onze números somarão pelo menos 77.

Só a Filipa seguiu a ordem sugerida no enunciado. Imaginou um conjunto com onze números desconhecidos em que a sua soma é 77. Depois foi descobrindo que elementos lá teriam de estar, testando todas as possibilidades. O trabalho foi enorme mas chegou à solução.

Quase todas as outras resoluções construíram o conjunto do fim para o princípio, isto é, começando apenas com um elemento e acrescentando um novo número natural de cada vez, até chegar aos onze elementos. O novo elemento a acrescentar em cada etapa deve ser o menor possível e garantindo sempre que a média se mantém inteira.
A sequência de passos é a que se mostra no quadro seguinte.

N	Conjunto	Soma	Média
1	{1}	1	1
2	{1,3}	4	2
3	{1,3,2}	6	2
4	{1,3,2,6}	12	3
5	{1,3,2,6,8}	20	4
6	{1,3,2,6,8,4}	24	4
7	{1,3,2,6,8,4,11}	35	5
8	{1,3,2,6,8,4,11,5}	40	5
9	{1,3,2,6,8,4,11,5,14}	54	6
10	{1,3,2,6,8,4,11,5,14,16}	70	7
11	{1,3,2,6,8,4,11,5,14,16,7}	77	7

Logo, M=16.

A maioria dos concorrentes ficou por aqui, mas era preciso mostrar mais qualquer coisa: que M não pode ser inferior a 16. Foi o que fizeram o Fausto e o grupo de Guimarães. Demos a palavra ao Fausto:

Mas calma lá...

Existem muitos conjuntos de números naturais, todos diferentes, em que a soma é 77 e o maior deles é inferior a 16.

(...) Então, retiramos o 7 para dar 70 (e ser divisível por 10). Depois, era necessário retirar o 7 (que já lá não está) ou o 16 (que não faz parte do conjunto).

Nota: caso o 7 não fizesse parte destes conjuntos, nem conseguíamos o passo anterior porque seria necessário retirar 17 para a média ser inteira com os dez elementos restantes.

Conclusão, o conjunto é {1,2,3,4 5,6,7,8,11,14,16}, com M=16.

PREMIADOS E PRÉMIOS

1º (*Unidade TI-Nspire Cx, oferta Texas Instruments*)
- Fausto Barros Silva

2º (*Jogo "Dominó Triangular"*)
- Célia Lobo, Manuel Lage, Mário Roque (Guimarães)

3º (*Livro "Desafios", J. P. Viana*)
- Filipa Freire

Os prémios devem ser levantados até 31 de Dezembro de 2016. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt *ou* 217163690).

Outros concorrentes – Ana Paula Jardim, Carolina Moreira, Catarina Ferreira, Helena Almeida, Luís Bernardino, Luís Reis, Paula Barros, Pedro Alves, Rafaela Martins, e os grupos: Catarina Gonçalves & Marta Ascenção; Grupo Camões (Adelina Precatado, Anabela Teixeira, Pilar Mansos, Teresa Moreira, Tiago Teo & João Jaime Pires); Sandra, Sofia & Daniel Castanho.

Quadrado multiplicativo

Num quadrado de 3x3, colocar nove números naturais diferentes de modo que:
— os três produtos horizontais e os três produtos verticais sejam todos iguais,
— o maior dos números seja o menor possível.

(Respostas até 31 de dezembro, para zepaulo46@gmail.com)

FRAÇÕES HARMÓNICAS

O problema proposto no número 136 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Uma das séries mais famosas é a harmónica:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

A série, embora cresça cada vez mais lentamente, é divergente, isto é, ultrapassa qualquer valor que se queira e o seu limite é $+\infty$.

Vamos usar apenas alguns elementos desta série, não obrigatoriamente consecutivos, de modo que a sua soma seja exatamente igual a 3.

Qual é o número mínimo de frações que temos de usar?

Recebemos dez respostas: Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias, Graça Braga da Cruz (Ovar), Graciano Martins & Alice Martins (Torres Novas), Mário Roque (Guimarães), Laura Almeida, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), da turma do 11ºB da Escola Básica e Secundária Artur Gonçalves (Torres Novas), de um grupo de professores da Escola Básica Carlos Gargaté (Charneca da Caparica), e de outro grupo de quatro professores da EB 2/3 Dr. Pedrosa Veríssimo (Paião): Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

Não é fácil arranjar uma estratégia eficiente para abordar este problema.

O Mário começou por constatar:

Sendo $u_n = \frac{1}{n}$ decrescente, a soma dos seus primeiros 10 termos inferior a 3 e a soma dos seus primeiros 11 termos superior a 3, o número mínimo de frações a usar não poderá ser inferior a 11...

A Graça e a Laura partiram deste resultado:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

para obter algumas somas que podem ser úteis:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{6}+\frac{1}{30}=\frac{1}{5},$$

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{6},\quad \frac{1}{8}+\frac{1}{56}=\frac{1}{7},\ \text{etc.}$$

Para os professores da Escola da Charneca da Caparica, *o grande problema desta soma prende-se com as dízimas infinitas. No entanto, com alguma paciência conseguimos "complementá-las":*

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{140}=\frac{3}{20}\quad\text{ou}\quad \frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{1}{8}\quad\text{ou}\quad \frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{1}{4}.$$

Pedrosa Santos partiu de um resultado conhecido: *a soma dos inversos dos divisores dos números perfeitos (6, 28, 496, ...) é sempre igual a 2*, completando com frações não utilizadas antes, enquanto o Carlos usou apenas a soma dos inversos dos divisores de 120. Com isto, chegaram à soma 3 usando 15 e 16 frações, respetivamente.

Todos os restantes leitores encontraram soluções com 13 parcelas. Apareceram várias demonstrações de que, com onze, é impossível, mas nenhuma para doze.

A resolução mais interessante será a de Graciano Martins & Alice Martins, não só por ser aquela que usa o conjunto mais "baixo" de denominadores (o maior deles é 28), mas também por seguir uma estratégia muito curiosa, como se pode verificar a seguir.

Usar denominadores que produzam dízimas finitas:

A) $1 + 1/2 + 1/4 + 1/5 + 1/8 = 2{,}075$

Usar dízimas infinitas cuja soma produza dízimas finitas com denominadores múltiplos de 3:

B) $1/3 + 1/6 = 0{,}5$

C) $1/9 + 1/12 + 1/18 = 0{,}25$

Idem, com denominadores múltiplos de 7:

D) $1/7 + 1/14 + 1/28 = 0{,}25$

Conjugando estes quatro resultados, a soma é 3,075
Retirando 1/8, fica 2,95.
Juntando 1/20 obtém-se 3:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{28}=3$$

Exposições

A APM tem 11 Exposições interativas/itinerantes que cede às escolas, mediante o pagamento de uma certa quantia. Essa cedência é feita por um período máximo de três semanas e as escolas interessadas, deverão enviar o seu pedido por e-mail.
Para conhecer as Exposições, visite o nosso site, onde disponibilizamos descrições e imagens dos vários módulos, permitindo assim planear o seu aproveitamento didático.

- Jogos do Mundo
- Matemática e Natureza
- Escher
- Aventura Matemática
- À Medida do Tempo
- A Matemática é de Todos
- Polya
- Sempre Houve Problemas
- Livros de Texto
- A Festa da Água
- José Sebastião e Silva

APM 2016 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @-sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e cinco modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

* A partir de 2016 a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma nova modalidade de associado aos professores do 1.º ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indeferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.º de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Quotas anuais para 2016

A quota tem efeitos de janeiro a dezembro de cada ano civil.

Modalidades de associado individual	
Professor no ativo (sócio regular)	50,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Associado residente no estrangeiro	60,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.º CEB)	50,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade I [1 exemplar da E&M]	60,00 €
Modalidade II [2 exemplares da E&M]	80,00 €
Modalidade III [1 exemplar da E&M + *Quadrante*]	85,00 €
Modalidade IV [2 exemplares da E&M + *Quadrante*]	100,00 €
Instituição no estrangeiro [1 exemplar da E&M + *Quadrante*]	120,00 €

Assinaturas das revistas *Educação e Matemática* e *Quadrante* para 2016

		Educação e Matemática (5 números/ano)	*Quadrante* (2 números/ano)
Associado individual	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Não associado individual	Portugal	47,00 €	35,00 €
	Estrangeiro	67,00 €	45,00 €
Não associado institucional	Portugal	75,00 €	50,00 €
	Estrangeiro	95,00 €	60,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções