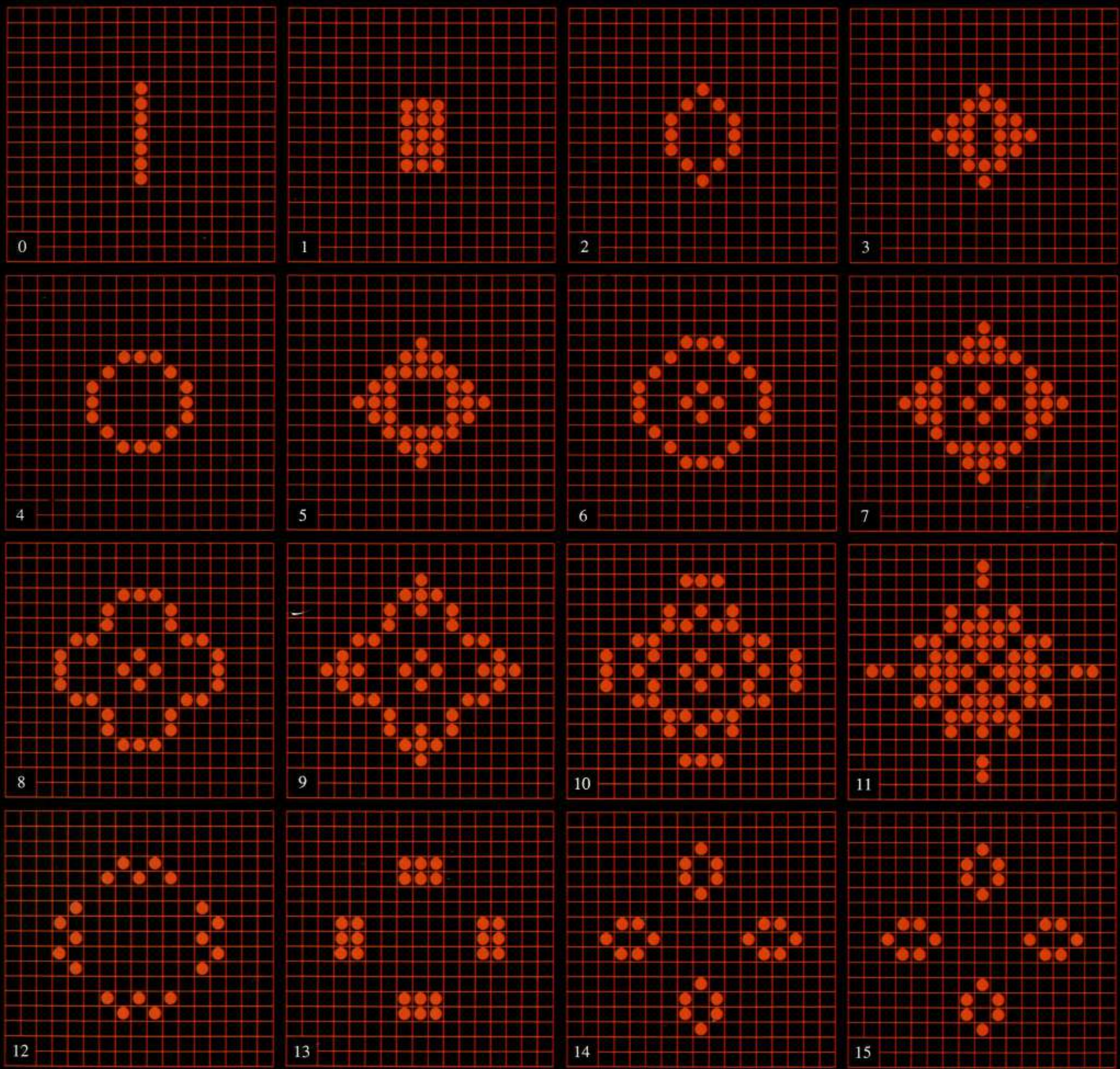
Educação e Matemática

N.º 12 4.º trimestre de 1989



Vida e morte em 15 tempos...

Revista da Associação de Professores de Matemática

A capa deste número:
Trata-se da sequência das 14 primeiras gerações de configuração vertical de sete elementos (geração 0), obtida com o programa LAZ.Life em computador Macintosh. A configuração adquire estabilidade permanecendo eternamente com a forma da 14.ª geração (ver a este propósito o artigo «Modelos, aplicações da Matemática e computadores, o exemplo dos autómatos celulares», neste número).

FICHA TÉCNICA

Título da publicação:

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 12, 4.º trimestre de 1989

Directora: Leonor Moreira

Redacção:

António Bernardes
Eduardo Veloso
Henrique Guimarães
José Paulo Viana
Paulo Abrantes
Pedro Esteves

Colaboraram neste número:

Alberto Canelas, Alzira Rebelo, Ana Lopes, António Bernardes, Eduardo Veloso, Graça Mota, Graça Pereira, Henrique Guimarães, Isabel Amorim, João Filipe Matos, José Carlos Frias, José Manuel Varandas, José Paulo Viana, Leonor Moreira, Paula Teixeira, Paulo Abrantes, Pedro Esteves, Pedro Pimentel, Rita Vieira.

Capa: concebida e executada por Eduardo Veloso e João Filipe Matos

Entidade Proprietária:

Associação de Professores de Matemática

Periodicidade: Trimestral

Tiragem: 2000 exemplares

Fotocomposição:

Execução e oferta da
Texto Editora, Lda.

Montagem e impressão:

Costa e Valério

N.º de Registo: 112807

Correspondência:

Associação de Professores de Matemática
a/c de Leonor Moreira
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

NOTA: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

«As gerações e os campos»

Quando, no fim do ano lectivo passado, perguntei à Raquel — aluna do 7.º ano da Esc. Sec. D. Pedro V — quais eram as partes do programa de Matemática de que tinha gostado mais, ela respondeu sem hesitar: «As gerações e os campos»; referia-se assim a dois projectos envolvendo aplicações da Matemática(1).

Está claro, dirão alguns. O que é preciso é partir do interesse imediato dos alunos, das suas preocupações, das suas vivências. Eles gostam da Matemática quando ela se *aplica* a qualquer coisa de útil, de concreto. Certo? Errado, penso eu, ou pelo menos muito insuficiente e secundário. Saber como tem evoluído o número de filhos dos portugueses nos últimos 80 anos não tem nada que ver com o interesse imediato dos alunos e é coisa que nunca os preocupou até lhes ter sido proposto este projecto... e quanto aos campos de desporto foi até necessário negociar o projecto com alguns alunos «futebolistas», pois estes viam ameaçado o «estádio» de que se sentiam proprietários. Além disso, o grande interesse que os alunos demonstraram ao trabalhar nesses projectos foi em certa medida análogo àquele que evidenciaram quando se dedicaram a trabalhos tão «úteis» como descobrir de quantos modos diferentes podiam cortar ao meio um tetraedro ou qual era o menor número natural com 5 divisores...

Outros dirão: gostem os alunos ou não, o que é certo é que a Matemática tem hoje cada vez mais aplicações, e a maior parte dos actuais alunos, nos seus futuros empregos, necessita de conhecimentos matemáticos. Por isso é importante «dar» exemplos de aplicações da Matemática, para os preparar para o futuro. Certo? Errado, julgo eu. É verdade que a Matemática tem relações cada vez mais largas e profundas com os mais variados domínios da actividade humana, mas essa é mais uma das razões que torna absurdo pretender «dar» no Ensino Básico a Matemática que os alunos na sua actividade futura vão necessitar. Além disso, uma educação geral em Matemática *não pode ter por fim* a transmissão de técnicas que grande número de alunos nunca mais vai utilizar e que os outros aprenderão rapidamente, quando se tornar evidente a sua necessidade.

Mas então porque se fala tanto na importância de incluir no Ensino Básico projectos que envolvam aplicações da Matemática? E porque gostam os alunos desses projectos, tal como a Raquel gostou do trabalho das «gerações e dos campos»?

Em primeiro lugar, os projectos de trabalho escolar envolvendo aplicações da Matemática agradam aos alunos porque se torna fácil encontrar aí um sentido para a Matemática que estão a fazer, porque o seu trabalho matemático tem significado: existe uma situação a compreender, um conjunto de dados a explorar com o fim de investigar certa relação ou tentar confirmar conjecturas. De resto, esse mesmo sentido pode também ser encontrado em situações problemáticas dentro da própria Matemática, como numa exploração em geometria ou nos números naturais; aí, o sentido é dado pelo desafio intelectual, e a Matemática não é menos significativa, embora não esteja agora ligada à realidade física ou social. Assim, uma condição fundamental para que os alunos tenham gosto pelas actividades de Matemática é que elas, envolvam ou não aplicações, sejam significativas por si próprias, não sejam meros expedientes para treinar técnicas ou adquirir conhecimentos para o futuro. Acresce ainda, no caso dos projectos, que o tipo de trabalho que lhes está naturalmente associado — em grupo, dentro e fora da aula, variado — é particularmente agradável e estimulante para os alunos.

Por outro lado, realizar no Ensino Básico projectos e actividades envolvendo aplicações da Matemática é importante se aceitamos que a finalidade fundamental do seu ensino é procurar que todos os alunos adquiram uma atitude positiva perante a Matemática e que compreendam o seu papel e a sua importância cultural, historicamente e no momento presente. Mas isto só se pode conseguir com actividades de tipos muito variados, umas envolvendo aplicações e outras não, mas todas com significado claro para os alunos.

Assim, muito provavelmente, o esforço principal que temos que desenvolver consiste em imaginar actividades matemáticas interessantes e com significado para os nossos alunos. Sabemos que isso não é fácil, mas ao menos temos um critério fácil e imediato para avaliarmos o nosso progresso: estão os alunos a ter prazer nessas actividades?

Eduardo Veloso

(1) Trata-se de dois projectos que duas turmas do 7.º ano daquela escola, no âmbito de um projecto de inovação e desenvolvimento curricular em Matemática, realizaram no ano passado. «As gerações» referem-se a um estudo sobre a evolução do número de filhos nas últimas três gerações (ver Margarida C. Silva, «Estatística na aulas do 7.º ano de escolaridade», Ed. e Mat. N.º 9) e «os campos» a outro projecto sobre a utilização de um terreno vago na Escola para a prática de vários desportos (Ver Paulo Abrantes, «Matemática, realidade e trabalho de projecto na escola secundária», neste número de Ed. e Mat.).

Matemática, realidade e trabalho de projecto na escola secundária

Paulo Abrantes, Faculdade de Ciências de Lisboa

Durante o ano lectivo de 1988/89, em duas turmas do 7.º ano de escolaridade integradas num projecto de inovação curricular em Matemática[1], foram desenvolvidas diversas actividades envolvendo as relações da Matemática com a realidade. No conjunto, o tempo dedicado às aplicações da Matemática foi uma *novidade* relativamente às práticas usuais na nossa disciplina. Contudo, mais do que o tempo que lhes foi reservado, os objectivos e os métodos de trabalho terão constituído os aspectos mais inovadores desta *presença forte* das aplicações no currículo de Matemática.

No essencial, as formas de trabalho adoptadas no que diz respeito às actividades envolvendo aplicações da Matemática, podem agrupar-se em três tipos: (a) situações problemáticas; (b) trabalho prático; (c) trabalho de projecto. Numa comunicação apresentada no último Profmat, essas actividades foram já genericamente descritas e analisadas[2]. Além disso, num artigo publicado no n.º 9 de *Educação e Matemática*, foram focadas com algum pormenor aquelas que diziam respeito à Estatística[3]. No presente texto, limitar-me-ei por isso a descrever um dos projectos desenvolvidos pelos alunos na parte final do ano lectivo e a discutir algumas das suas implicações educativas.

A Matemática ajuda a intervir na escola

Na Escola Secundária onde tudo se passou existe um espaço asfaltado com umas velhas balizas onde os alunos costumam jogar à bola. Em conversa com um professor de Educação Física, ficámos a saber que o aproveitamento desse espaço para a prática de várias modalidades seria útil à escola, uma vez que o pavilhão desportivo é insuficiente para o número de turmas existentes. Assim nasceu a ideia: estudar uma forma adequada de se fazerem marcações nesse terreno para que ele se convertesse num campo de jogos polivalente.

Desenvolver esta ideia exigia a realização de um trabalho que... foi proposto aos alunos das duas turmas do 7.º ano como um projecto para o último mês de aulas.

Na aula, foi discutida a sequência de passos a dar:

(a) medir o terreno;
(b) obter dados sobre as dimensões de campos para várias modalidades;
(c) fazer plantas à escala e ensaiar hipóteses;
(d) consultar professores de Educação Física;
(e) elaborar uma proposta formal;
(f) apresentar a proposta ao Conselho Directivo.

Como se desenvolveu o trabalho

Uma das dificuldades que surgiu (para nós, professores!) foi com a organização. Na *vida real*, um projecto como este seria realizado por um (pequeno) grupo de pessoas e não por duas turmas de 25 alunos cada. Nós não queríamos transformar o projecto num *conjunto de exercícios* e, portanto, não íamos obrigar todos os alunos a fazerem tudo — mesmo aquilo que já estaria feito por outros...

Decidimos que os alunos deveriam continuar organizados, em cada turma, nos seus grupos de trabalho habituais. Com um elemento de cada grupo formámos uma equipa para efectuar as medições que foram depois comunicadas à turma. Fornecemos a todos os alunos dados oficiais sobre os campos das várias modalidades desportivas, sob a forma de fotocópias de uma brochura da Direcção Geral dos Desportos. Cada grupo deveria preparar a *sua* proposta, depois de construir plantas e fazer com elas os ensaios que achasse necessários. As diversas propostas seriam discutidas numa *reunião geral* com a presença de professores de Educação Física até se chegar a uma única proposta final.

Com as medições do terreno surgiram diversos problemas (inesperadamente?) interessantes: Como medir um terreno *tão grande*? Como garantir que estamos a considerar a largura perpendicular ao comprimento? Quantas medições devem ser feitas e que grau de aproximação é desejável? Ninguém tinha, à partida, respostas para estas e outras questões (nem mesmo os professores...) mas todos tinham ideias que valia a pena discutir (até mesmo os alunos...).

Durante a fase seguinte, os alunos trabalharam nos seus grupos, fora das aulas e com um apoio muito discreto dos professores. Todos os grupos fizeram correctamente as suas plantas, tendo surgido naturalmente propostas muito diversas, um pouco ao sabor da imaginação e dos gostos pessoais dos elementos de cada grupo. As várias propostas foram então apresentadas a dois professores de Educação Física (o delegado de grupo e a professora das turmas) para que as estudassem.

A reunião entre os alunos e aqueles dois professores foi um acontecimento inesquecível. A atitude dos alunos nessa reunião — o seu envolvimento, a forma como justificavam as suas propostas e ouviam os argumentos de outros alunos e dos professores — ultrapassou as nossas melhores expectativas. Parecia uma reunião da CEE, comentámos entre nós...

Foi o momento de atender a aspectos *extra-matemáticos* do projecto: não vale a pena considerar as dimensões do campo de mini-basquete, dadas as idades da maioria dos alunos de uma escola secundária; o campo de badminton parece uma boa ideia no papel mas trata-se de um desporto que não é conveniente jogar no *exterior* por causa do vento; marcações para um campo de ténis... parece uma boa ideia. E se a maior parte destes aspectos era de natureza desportiva, alguns tinham a ver com decisões *políticas*: propor a marcação de um campo de basquete ao comprimento do terreno implica propor que se comprem tabelas móveis que são muito mais caras, embora a escola devesse tê-las...

Chegou-se finalmente a uma proposta. A bola voltou então para a sala de aula: havia que dar à proposta uma forma *apresentável*. Os alunos dividiram tarefas, tendo alguns ficado responsáveis pelo desenho das plantas numa escala que se acordou na aula, enquanto outros prepararam o texto da proposta com a colaboração da professora de Português. Por razões de prudência, decidiu-se apresentar duas alternativas: uma delas previa a aquisição de tabelas móveis de basquete (era a que todos preferíamos), a outra era mais modesta...

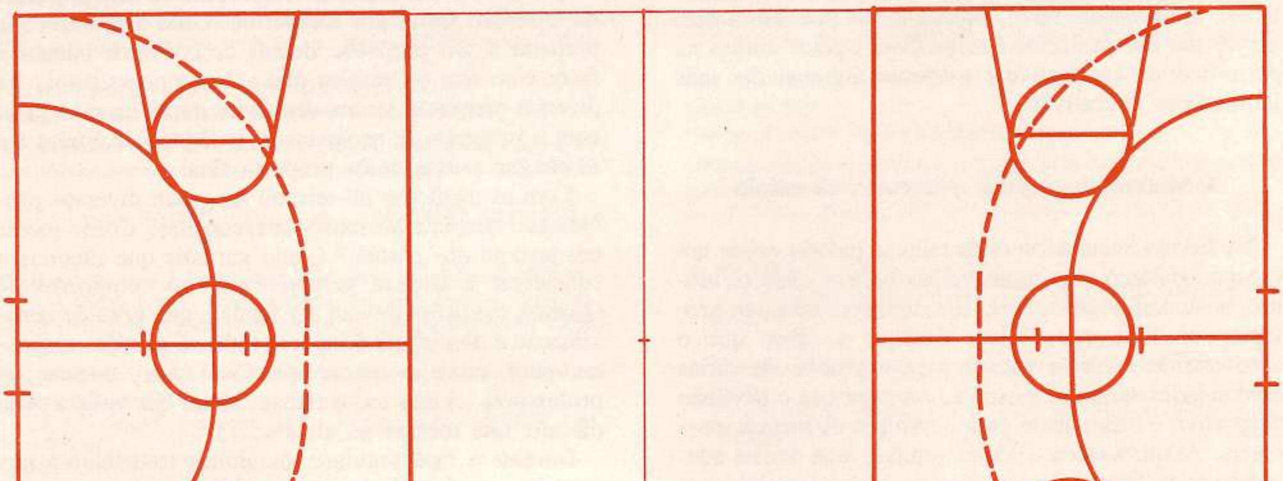
A proposta foi então apresentada à presidente do Conselho Directivo em nova *reunião geral*. Foi um momento mais formal que os anteriores mas nem por isso menos interessante. O Conselho Directivo prometeu todo o apoio. Estávamos em fins de Junho, por isso o material para as marcações dos campos seria comprado mas o trabalho prático seria executado já no ano lectivo seguinte com a participação (e *supervisão*) dos alunos.

Infelizmente, durante quase todo o 1.º período de 1989/90, a chuva não parou. Mas, ainda este ano, os campos serão marcados.

Como reagiram os alunos

Durante todas as fases deste projecto, todos os alunos participaram com interesse e muitos deles revelaram uma grande motivação e empenhamento, incluindo alguns dos menos *entusiastas* pela Matemática. Esta apreciação foi confirmada quando no fim do ano lectivo fizemos entrevistas individuais aos cerca de 50 alunos das duas turmas sobre tudo o que se havia passado na disciplina de Matemática: num grande número de casos, as primeiras preferências iam para o *trabalho das gerações* (um projecto de Estatística desenvolvido em Janeiro) e para o *trabalho dos campos*.

Claro que os temas dos projectos, sendo susceptíveis de interessar os alunos, desempenharam algum papel. Mas deve notar-se que esses temas não resultaram do interesse imediato e espontâneo dos alunos, foram propostos pelos professores — no caso dos campos, foi mesmo preciso convencer alguns alunos de que não perderiam o seu direito de jogar futebol. De facto, mais do que aos temas, as preferências dos alunos parecem



Uma das propostas elaboradas pelos alunos para a transformação de um terreno existente na escola num campo de jogos polivalente.

A entrega da proposta final dos alunos à Presidente do Conselho Directivo foi o momento mais formal do projecto mas nem por isso deixou de ser interessante e significativo.

dever-se ao *estilo* de trabalho e aos *objectivos* associados aos projectos. Procura-se investigar uma situação ou construir uma coisa nova, e para isso recorre-se a formas variadas de trabalho (trabalho prático, consultas, discussões em grupo) num ambiente marcado por uma razoável *dose* de liberdade mas também pelo sentido das responsabilidades. E se existe uma boa relação com os professores (e, obviamente, se a situação interessa ou *acaba por interessar* os alunos) o resultado pode ser um grande envolvimento pessoal de todos.

E esse envolvimento, essa motivação, é muito... Mas não é tudo. Por isso, tentemos ir um pouco mais longe.

Matemática, Realidade...

Que se aprende afinal com um trabalho como aquele que foi aqui descrito?

Aprende-se que a Matemática se relaciona de várias formas com tantas coisas que nos rodeiam. E que ela pode ajudar-nos a compreender como é que essas coisas *funcionam*.

Aprende-se que a Matemática é por vezes necessária para representarmos uma situação real. E que ela pode ser muito útil quando queremos intervir sobre essa *realidade*.

Aprende-se que há milhares, milhões, de coisas novas que são interessantes e que, no entanto, nunca ninguém fez. E que em muitas delas teremos que ser nós a descobrir que Matemática usar e como fazê-lo.

E aprende-se também que efectuar cálculos ou resolver equações será uma coisa *exacta* mas medir perpendiculares num terreno pode ser feito de várias maneiras e poderá ter muitas *soluções* — que não se encontram nas últimas páginas do manual nem na manga do professor. E que as opções a fazer podem ser apoiadas por argumentos matemáticos mas dependem geralmente de factores extra-matemáticos. E que, ao usarmos a Matemática numa situação real, temos que olhar não só para os métodos matemáticos que usamos mas também para aspectos extra-matemáticos dessa situação e sobretudo para o *processo de relacionar* uns com os outros.

E aprende-se a preparar uma reunião e a actuar/argumentar durante os debates. E a escrever uma proposta e a organizar um relatório.

Bom, e aprende-se também a determinar dimensões em várias escalas, calcular valores proporcionais a outros, etc.

... e Trabalho de Projecto...

A expressão «aprende-se», usada atrás, não deve tomar-se no sentido que (infelizmente) se lhe atribui com muita frequência: fica-se a saber de uma vez por todas. Talvez devesse dizer-se «vive-se uma experiência em que». Mas não será sempre este, afinal, o significado da expressão?

Se pensarmos nas várias *aprendizagens* atrás indicadas, verificamos que quase todas elas (à excepção da última) seriam inviáveis, ou no mínimo largamente *prejudicadas*, se o trabalho realizado pelos alunos não tivesse assumido a forma do *desenvolvimento de um projecto*. E o mesmo se pode afirmar, em graus variáveis, se nós tivéssemos saltado algumas fases desse projecto qualquer que fosse o argumento invocado — falta de tempo, desejo de centrar o trabalho nos conceitos matemáticos envolvidos,...

A parte *puramente matemática* do trabalho consistiu afinal no cálculo de uns quantos valores proporcionais a outros dados e na sua aplicação ao desenho de certas figuras geométricas (rectângulos, trapézios, arcos de circunferência, etc.) numa determinada escala. Mas ninguém no seu perfeito juízo defenderia que um conjunto de exercícios desse tipo seria *equivalente* (como experiência de aprendizagem) àquilo que os alunos fizeram. E também parece claro que, deste ponto de vista, não *adiantaria* muito dar a esse eventual conjunto de exercícios uma *fachada* de Matemática aplicada — qualquer coisa como «sendo *tais* e *tais* as dimensões de um campo *disto* ou *daquilo*, construir plantas numa certa escala para ocupar um terreno...»

Pois bem, na minha perspectiva:

[1] Acrescentar mais alguns *condimentos* realistas ao tal conjunto de exercícios continuaria a não adiantar muito, ou pelo menos não adiantaria o *suficiente*.

[2] Mesmo que mantivéssemos os objectivos originais do projecto, se *dispensássemos* os alunos de algumas fases — por exemplo, a medição do terreno ou a reunião com os professores de Educação Física ou a elaboração da proposta final — estaríamos a impedir os alunos de viverem momentos significativos de aprendizagem, com consequências difíceis de prever na sua totalidade.

[3] Mais ainda: essas consequências dizem respeito não só à formação geral dos alunos mas também, especificamente, ao desenvolvimento da sua educação matemática.

Por outras palavras: o trabalho de projecto não é aqui um *meio* (no sentido de *táctica*) substituível por outros que possam ser igualmente motivadores, é uma forma de trabalho essencial na aprendizagem da Matemática, designadamente quando se trata de desenvolver a compreensão sobre as formas como a Matemática se relaciona com a realidade.

O trabalho de grupo e o trabalho prático são componentes importantes da realização de um projecto.

... na Escola Secundária

Há quem defenda que estes projectos, pela sua natureza, deveriam ser deixados para uma área interdisciplinar, fora dos currículos específicos das várias disciplinas. Seria quase desnecessário, nesta altura, explicar por que razão não concordo com essa perspectiva. Em poucas palavras: claro que é desejável que haja projectos interessantes para desenvolver numa área «não disciplinar»; mas o trabalho de projecto deve fazer parte das experiências a proporcionar *obrigatoriamente* aos alunos na disciplina de Matemática porque tem a ver com aspectos essenciais da natureza específica da educação matemática.

A nossa experiência mostra que, embora a organização da escola não facilite a realização de projectos na disciplina de Matemática (o tamanho das turmas, os horários,...), essa realização é possível e pode contar-se com o empenhamento dos alunos, com a colaboração de (alguns) outros professores e, por vezes, com o apoio dos órgãos directivos. Os programas em vigor serão um obstáculo mas talvez não sejam um *impedimento* — principalmente quando já ninguém parece gostar deles...

Ao longo do ano lectivo 1988/89, como já referi, desenvolvemos com os alunos duas experiências concretas daquilo a que podemos chamar trabalho de projecto. Cada uma delas ocupou três a quatro semanas mas o número de aulas *gastas* nem sequer foi muito significativo pois a maior parte do trabalho foi realizado fora das aulas.

E é preciso que sejamos, de facto, realistas... O tempo faz falta para muitas coisas. Nem as relações com a realidade constituem o único aspecto essencial da Matemática nem o trabalho de projecto é o único método *obrigatório* na aprendizagem da Matemática. Os alunos devem viver igualmente experiências de trabalho prático, de exploração de problemas, de investigação e estudo pessoal, de discussão em grupo e na turma.

E talvez seja afinal no contacto com facetas diversas da Matemática e na combinação de diversas formas de trabalho que resida a maior riqueza da educação matemática, desde que se dê tempo e se criem condições para se irem estabelecendo relações e se irem amadurecendo ideias.

Agora, o que não se pode fazer é amputar alguns órgãos essenciais e pretender que está tudo na mesma. Ou por outra, pode-se fazer isso mas os resultados estão à vista.

Notas:

[1] Trata-se do Projecto MAT789. Para uma informação global sobre o projecto, ver o texto «MAT789 — uma esperiência de inovação curricular em Matemática» (Eduardo Veloso, Leonor Cunha Leal, Margarida Silva e Paulo Abrantes), a publicar no *Profmat n.º 5* (APM, Actas do Profmat-89).

[2] Ver «Matemática e Realidade nas aulas do 7.º ano num ambiente de inovação curricular» (Paulo Abrantes), a publicar no *Profmat n.º 5* (APM, Actas do Profmat-89).

[3] Ver «Estatística nas aulas do 7.º ano» (Margarida Silva), em *Educação e Matemática n.º 9*.

Vamos resolver problemas da vida real

Graça Mota, Esc. Sec. Madeira Torres
Pedro Pimentel, Esc. Prep. de São Gonçalo

Uma perspectiva de trabalho

Se ser professor é difícil, sê-lo sem se preocupar com o que ensina, como ensina e para quem ensina ainda é mais.

Dentro deste contexto pareceu-nos ser importante fazer a ligação dos conteúdos matemáticos com a realidade, através de situações não fictícias.

Desde o ensino preparatório, muitos alunos já se sentem vocacionados para uma profissão e interessam-se por tudo o que esteja directamente relacionado com ela.

Pensar em situações problemáticas do dia a dia é tarefa árdua, já que, limitados ao espaço Escola, passam-nos ao lado muitas situações que as pessoas têm de resolver na sua actividade profissional.

Resolvemos assim contactar o jornal regional «BADALADAS» de Torres Vedras que nos abriu as suas portas com entusiasmo. A ideia era tornar mais fácil a nossa ligação a situações do dia a dia, através de um possivel contacto com pessoas que se dispusessem a colaborar connosco.

O que é um problema da vida real?

Durante as nossas sessões de trabalho fomos várias vezes confrontados com interrogações do tipo: Este problema é de facto da vida real? ou é um problema fictício? ou ainda, uma simples adivinha?

Por exemplo:

«De um rectângulo, sabe-se que o comprimento é o dobro da largura e que o perímetro é igual a 4,20m. Quais são as dimensões do rectângulo?»

Na análise que fizemos deste problema (muito comum nos manuais escolares) considerámos estranho haver tanta informação sobre o rectângulo e não se saber as suas dimensões. Isto não significa que não existam situações reais em que o modelo matemático utilizado nas suas resoluções seja o mesmo.

Talvez a situação seguinte seja um exemplo:

«Para a sua sala de 3 por 6 metros, o senhor Júlio precisa de construir uma mesa que deverá, por uma questão de estética, ser rectangular e estar de acordo com as proporções da sala, isto é, de dois para um.

À volta da mesa, pretende colocar um aro de madeira exótica que já possui e tem 4,2 metros de comprimento.

Quais deverão ser as dimensões da mesa?»

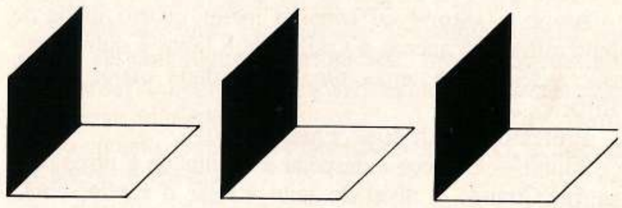
Foi-nos surgindo assim a ideia de que um PROBLEMA DA VIDA REAL é algo que surge às pessoas no seu dia a dia e que têm de resolver/ultrapassar para executar as suas tarefas profissionais, nem que para isso usem apenas o raciocínio lógico.

Apresentamos agora um problema para ilustrar a nossa ideia:

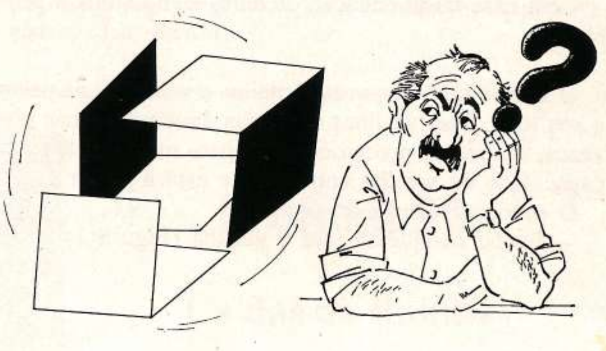
O Senhor Rui, serralheiro mecânico, recebeu uma encomenda de construção de um depósito cúbico com a capacidade de 1 m^3.

Resolveu comprar 3 chapas rectangulares de 2 por 1 metros (2 metros de comprimento e 1 metro de largura). Pegando em cada chapa, quinou-as ao meio, de modo a formar um ângulo recto.

Obteve assim as três peças seguintes.



Mas na montagem não conseguia encaixar a terceira peça!



Desenhos de J.P.

Onde se teria enganado o Senhor Rui?

Surpresas atrás de surpresas

Os problemas apresentados no jornal, foram elaborados:

A — por leitores que colaboraram connosco;
B — por adaptação de outros problemas já nossos conhecidos e que se ajustam à nossa ideia de situação da vida real;
C — com base na nossa experiência como professores;
D — mas sobretudo com base na experiência de familiares nossos, ligados a vários sectores profissionais.

O problema das vasilhas
(como exemplo do indicado em C)

Um dia, foi apresentado numa aula de Matemática, o problema:

«O senhor Rui tem 3 vasilhas: uma de 8 litros, outra de 5 e outra de 3 litros. A vasilha de 8 litros está cheia de leite e ele pretende distribui-lo em partes iguais, por duas das três vasilhas. Que operações deverá ele fazer, utilizando apenas as três vasilhas?»

Passado algum tempo um aluno tem a seguinte intervenção:

Aluno — «Stor»! eu consigo medir quatro litros de leite utilizando apenas a vasilha de 8 litros e outra qualquer, desde que tenha uma capacidade maior que 4 litros.

Professor — Ah sim? Então como?

Aluno — Começo a despejar a vasilha de 8 litros para outra. Quando o nível do leite atingir o fundo, então a quantidade de leite que está na vasilha de 8 litros é igual à quantidade de leite que foi despejado, ou seja, 4 litros.

O professor, um pouco surpreso, tendo referido que esse processo não se podia utilizar em todos os recipientes, voltou à resolução do problema da forma que tinha programado.

Com base nesta situação de aula, elaborámos o problema:

O senhor Júlio tem vacas leiteiras e vende diariamente o seu leite. Tem vasilhas de várias dimensões, mas por vezes, utiliza um processo só seu para medir metade da capacidade da vasilha com que se está a servir.

O processo consta do seguinte:

— Enche completamente a vasilha (Figura 1)

FIG. 1

— Começa depois, lentamente, a vazar o leite para outro depósito (Figura 2)

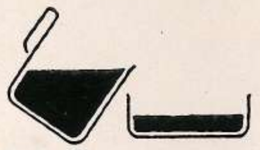


FIG. 2

— Quando o nível do leite começar a atingir o fundo, então a quantidade de leite que está dentro da vasilha é igual à quantidade de leite vazado para o depósito, ou seja, metade da capacidade da vasilha (Figura 3).

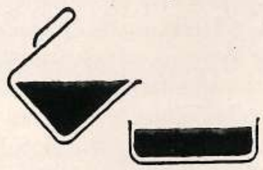
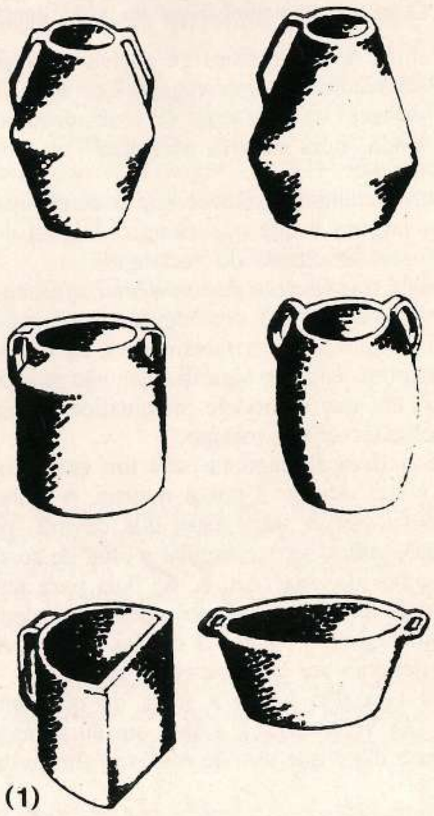


FIG. 3

Dos recipientes seguintes, diga em quais se pode utilizar o processo do senhor Júlio, para medir metade da sua capacidade.



(1)

Ilustração de A.V.

O problema do pomar (como exemplo do indicado em D)

Um dos problemas apresentados no jornal, foi o seguinte:

«O senhor João tem um terreno rectangular com 106 metros de comprimento e 86 metros de largura. Pretende plantar pessegueiros nas seguintes condições:

— a distância entre duas filas de árvores deverá ser de 4 metros;

— em cada fila, a distância entre duas árvores será de 2,5 m;

— à volta do terreno haverá uma margem de 3 metros sem árvores, destinada à passagem das máquinas agrícolas.

Quantos pessegueiros deverá o senhor João encomendar?»

Ao resolver este problema concluímos que eram necessárias 858 árvores, uma vez que considerámos as filas de árvore no«sentido» da largura.

Este foi um dos problemas que nós seleccionámos para a nossa sessão prática«Vamos Resolver Problemas da Vida Real» em Viana do Castelo.

Ora, qual não foi a nossa surpresa quando uma das colegas nos apresentou como solução, 861 árvores. Verificada a exactidão dos cálculos, perguntámo-nos:

«Como é possivel colocar no mesmo espaço e nas mesmas condições, maior número de árvores?»

Passado o primeiro momento, começámos a compreender a situação:

A colega colocou as filas de árvores na direcção do comprimento do terreno, tendo obtido:

20 espaços entre filas, ou seja 21 filas

40 espaços entre árvores, ou seja 41 árvores em cada fila

Enquanto que nós tinhamos obtido:

25 espaços entre filas, ou seja 26 filas

32 espaços entre árvores, ou seja 33 árvores em cada fila

Se multiplicarmos 25 por 32 (= 800), verificamos que o produto é o mesmo que 20 × 40 (= 800) uma vez que o espaço utilizável do terreno é o mesmo e portanto, igual ao número de rectângulos de 4m por 2,5m.

Mas adicionando uma unidade a cada um dos factores, os produtos obtidos já não são os mesmos:

$(25+1) \quad (32+1) \quad (20+1) \quad (40+1)$

Generalizando este facto, verificamos ainda que a diferença do número de árvores colocadas em filas na direcção da largura é de 15% × (c−1) considerando terrenos cujos comprimentos (c) e larguras (1), subtraídos de 6 unidades, sejam «múltiplos»[2] de 4m e de 2,5m.

À laia de conclusão

Começamos por apresentar o seguinte exercício:

- Calcula os seguintes produtos:

$35\times20=$	$30\times 30=$	$12\times15=$
$50\times14=$	$9\times100=$	$9\times20=$

- Adiciona agora uma unidade a cada um dos factores e calcula novamente os produtos:

$36\times21=$	$31\times 31=$	$13\times16=$
$51\times15=$	$10\times101=$	$10\times21=$

- Que podes concluir?
- Considerando dois produtos iguais, ab=cd, que condições deves colocar a a e b, para que o produto (a+1) (b+1) seja maior que (c+1) (d+1)?

Se colocássemos esta questão aos alunos, apesar de poder suscitar alguma curiosidade, provavelmente ela não causaria a surpresa e a perplexidade causadas pelo problema do pomar.

No entanto, o modelo matemático em causa, é, na sua essência, o mesmo.

Notas:

(1) Esta vasilha é designada na nossa zona por canabarro e destina-se a retirar completamente o mosto dum recipiente.

(2) A falta de outro termo, utilizámos a expressão «múltiplo de 2,5», apesar da noção de múltiplo não ser aplicável a números não inteiros.

Profmat 90

Caldas da Rainha

Escola Secundária
Rafael Bordalo Pinheiro

7 a 10 de Novembro

Por uma visão não instrumentalista da Matemática

Henrique M. Guimarães, Faculdade de Ciências de Lisboa

A Matemática, apesar das elevadas taxas de reprovação ou, de uma forma mais lata, do insucesso que existe nessa disciplina, mesmo nos alunos com *aproveitamento*, e da fonte de insatisfação, desprazer ou frustação que constitui, em geral, a sua aprendizagem (e ensino!), tem sempre ocupado um lugar de relevo no currículo das nossas escolas. Haverá, por certo, razões de vária ordem que justificam uma situação como esta. *Sempre* se ensinou Matemática, poderemos dizer. Na verdade, esta disciplina é considerada como uma das mais antigas ciências e, como matéria ensinada, faz parte dos *currículos* escolares, se lhes podemos chamar assim, desde há mais de dois mil anos, tendo aí ocupado sempre um lugar privilegiado (Stone, 1961). O *peso* da tradição, no entanto, se dá um motivo para a permanência da Matemática nos currículos, esclarece pouco as razões do privilégio que se lhe atribui.

A crença nos efeitos disciplinadores do estudo da Matemática parece constituir uma outra ordem de razões que justificam a sua apredizagem: «ensina a pensar», «desenvolve o raciocínio», «ensina a distinguir o verdadeiro do falso», «o correcto do incorrecto», «o certo do errado».

Segundo Douglas Quadling (1983), no entanto, se é verdade que a actividade matemática proporciona, entre outras coisas, o «hábito de analisar o significado de um enunciado», «de estabelecer demonstrações» ou de distinguir o essencial do acessório numa dada situação, o mesmo se pode dizer no caso do estudo de outras disciplinas. Este autor acrescenta mesmo que, sendo a Matemática, eventualmente, uma das formas mais puras do raciocínio, este facto, «do ponto de vista educativo, poderá ser considerado tanto uma fraqueza como uma força» (Quadling, 1983, p.449).

Razões de uma outra natureza, são as que se relacionam com a importância desde sempre atribuída à Matemática, quer para o *dia-a-dia* das pessoas e para a sua vida profissional, quer para o desenvolvimento das outras ciências, das técnicas e outros ramos da actividade humana. Continuando a citar Quadling (1983), a Matemática do *dia-a-dia* — a Matemática da «vida corrente» como ele lhe chama — independentemente da sua real importância é, naquilo que existe de comum na vida das pessoas, cada vez mais aprendida fora da escola (e, porque não, antes da escola), do mesmo modo que aprendemos outros conhecimentos que nos são essenciais. Além disso, o desenvolvimento da tecnologia tem vindo a proporcionar máquinas e instrumentos que nos libertam da necessidade de dominar determinadas técnicas e algoritmos matemáticos outrora considerados indispensáveis, mesmo para a vida quotidiana. Por outro lado, ensinar a Matemática necessária à prática profissional futura de cada um, obrigaria, ao nível da escolaridade básica, ou a um *currículo mínimo* constituído pela Matemática comum às várias profissões (que dificilmente justificaria uma escolaridade longa em Matemática), ou a uma sobrecarga excessiva e em muitos casos inútil, nos programas da disciplina. Isto, se não quiséssemos antecipar as opções profissionais, o que, a acontecer, contrariaria o princípio de uma escolaridade básica geral.

No que diz respeito à relação da Matemática com a realidade e, em particular, com as outras ciências, do ponto de vista do seu ensino, pressupõe-se, em geral, que é preciso aprender primeiro Matemática para depois a aplicar no estudo dessa realidade, na aprendizagem dessas ciências. Esta perspectiva traduz uma concepção segundo a qual a Matemática é vista como uma *ferramenta* de que as outras ciências se socorrem no estudo a que se dedicam. Aprende-se Matemática *apenas* porque ela é precisa para o estudo em outras áreas científicas. Reserva-se-lhe, assim, um papel meramente instrumental, encarando-se essa disciplina como a *linguagem* das ciências ou como um conjunto de técnicas de que estas necessitam para o desenvolvimento o que, não só não esgota todas as suas possibilidades enquanto instrumento ao serviço dessas ciências, como levanta obstáculos à concretização de todas as suas potencialidades educativas enquanto disciplina curricular.

A Matemática é uma ciência antiga, disse-se já, e, desde sempre, em constante crescimento, quer no que diz respeito ao seu próprio património (em termos de conceitos, métodos e organização), quer nos domínios a que se aplica. Diz-se mesmo que nos anos mais recentes se tem descoberto mais Matemática que durante toda a sua história (Dieudonné, 1982; Davis e Hersh, 1981). Nos últimos cem anos, diz-nos também André Lichnerowicz (1966), as matemáticas «explodiram»: «explosão interna, no seu dominio próprio, explosão externa também, conquistadora pela criação dos métodos aplicáveis a novos domínios do concreto» (p.393). Este crescimento do conhecimento matemático deve-se, por um lado a forças internas da própria Matemática e, por outro às necessidades e possibilidades colocadas pelo desenvolvimento científico e tecnológico. Há assim relações de mútua fecundidade entre a Matemática e os outros domínios da actividade humana.

O conhecimento científico alargou-se e diversificou-se e, em cada uma das áreas a que se aplica é reconhecida a importância da Matemática. Nas ciências da vida, da terra, ou da matéria, como por vezes são chamadas — Biologia, Geologia, Física, por exemplo — nas ciências humanas e sociais — Psicologia, Economia, Sociologia — e em outras áreas como a História ou a Linguística, a Matemática tem vindo a desempenhar, com contribuições diferentes, um papel cada vez mais importante. Esta importância crescente advém-lhe, sem dúvida, do facto de constituir um *instrumento* eficaz no trabalho científico. Todavia, esse seu carácter instrumental não se caracteriza, exclusivamente, pela possibilidade que a Matemática oferece de fornecer linguagem e técnicas necessárias ao estudo dos vários problemas científicos, mas também pela sua capacidade de descrição e previsão de fenónemos e de situações, permitindo-nos interpretar melhor a realidade de que fazemos parte, e melhor compreender, e resolver, os problemas que se nos deparam. Hoje, vai-se mesmo mais *longe* e, por exemplo, referindo-nos de novo a André Lichnerowicz (1966), segundo este autor, em determinadas áreas científicas como a teoria da gravitação e a mecânica quântica, as matemáticas não são já meros instrumentos do trabalho do cientista, mas constituem «o próprio pensamento do criador» (p.400).

Deste modo, uma concepção *instrumentalista* da Matemática não revela todos os aspectos das relações da Matemática com a realidade e com as ciências. Apresentar a realidade (e portanto também as ciências) apenas como domínio de aplicação do conhecimento matemático, esconde que muito desse conhecimento teve origem no estudo dessa realidade e na procura de respostas aos problemas colocados pela ciência e pela tecnologia, bem como o papel criador da Matemática no trabalho dos cientistas. Além disso, favorece um ensino em que a Matemática aparece, por um lado, *desligada* de qualquer contexto, e por outro, reduzida a um conjunto de símbolos, fórmulas, regras, ou técnicas que, na maior parte dos casos, surgem, aos olhos dos alunos, sem grande significado. Nesta situação, não só a aprendizagem da Matemática se torna difícil, como, sobretudo, dificilmente se realiza a intenção sempre adiada: a aplicação da Matemática entendida como a sua utilização nos estudos das outras ciências, na previsão e interpretação de fenónemos, na descrição e compreensão de situações. Com isto, o correspondente *duplo* insucesso (na aprendizagem da Matemática, na aprendizagem das ciências), as atitudes negativas face à Matemática, e a visão *distorcida* daquela ciência por parte dos alunos.

A Matemática é, essencialmente, uma actividade criativa. A formulação e a resolução de problemas constituem os elementos fundamentais da actividade matemática — sem resolver, e sem formular, problemas, não se *faz* Matemática — e é isso que lhe confere esse carácter criativo. Por outro lado, fruto do desenvolvimento interno e autónomo da Matemática ou suscitados por necessidades e exigências que lhe são exteriores, esses problemas, a sua formulação e resolução, constituem a contribuição mais importante da Matemática nas suas relações com as diversas ciências e outras actividades humanas. Além disto, ao nível do ensino da Matemática, considera-se que situações de carácter problemático favorecem a criação de ambientes de aprendizagem ricos e estimulantes. Aqui, situação problemática não é encarada, apenas, como uma situação não rotineira de que não se dispõe, à partida, de uma estratégia para encontrar a sua solução. Num sentido mais amplo, é entendida como uma situação que coloca um desafio ao aluno, proporcionando-lhe oportunidade para analisar, interpretar, conjecturar ou fazer prognósticos, definir uma estratégia, tomar decisões, avaliar os resultados que obteve. Assim se justifica a importância que vem sendo dada à resolução de problemas no ensino da Matemática que, não sendo dos dias de hoje, assume maior expressão a partir dos fins da década de 70 (NCTM, 1980; APM, 1988).

Muito possivelmente, as regras e técnicas matemáticas bem como os aspectos simbólicos da Matemática, terão que ser sempre contemplados, de uma forma ou de outra, no ensino dessa disciplina. Não são, no entanto os únicos nem, certamente, os mais importantes. O desenvolvimento da tecnologia, em particular a existência dos computadores e das calculadoras e a sua cada vez maior versatilidade e acessibilidade, dão hoje mais razão, e proporcionam mais e melhores meios, para que a ênfase no ensino incida nos aspectos mais conceptuais da Matemática em detrimento dos seus aspectos mais mecânicos. Os conceitos, as formas de raciocínio e os vários tipos de actividade matemática (demonstração, modelização, resolução de problemas), devem ser assumidos, todos eles, como conteúdos de ensino em Matemática, constituindo mesmo o seu núcleo essencial. Em particular, a resolução de problemas deve ser vista como ingrediente fundamental em educação matemática, e não

continua na pág. 40

Uma corrida de 400 metros

Isabel Amorim e Alzira Rebelo, Esc. Sec. D. Pedro V
Graça Pereira, Esc. Sec. Santa Maria do Olival (Tomar)

No Ano lectivo de 88/89 realizámos um trabalho com alunos do 8.º ano, da Escola Secundária de Sebastião e Silva, que consistiu na elaboração da planta (e respectiva maquete) de uma pista de atletismo com campo de futebol. Esse trabalho constituiu pretexto para uma comunicação (inserida no Grupo de Trabalho «Aplicações da Matemática»), no Encontro Nacional PROFMAT 89, cujo conteúdo será brevemente publicado nas Actas do referido encontro.

O presente artigo surge na sequência dessa comunicação e nele iremos explorar a questão das chamadas «décalages». Antes, porém, abordaremos sumariamente o processo matemático envolvido no traçado e construção de uma pista de atletismo e do respectivo campo de futebol.

Traçado de um campo de futebol

Depois de se conhecerem as dimensões do rectângulo (por exemplo, as internacionais mínimas são: 100 x 64), é necessário escolher uma escala adequada tendo em conta o espaço onde se irá elaborar a planta.

Na marcação dos diferentes elementos que compõem um campo de futebol (meio campo, grande área, pequena área, local das balizas, etc.) estão envolvidos conceitos da geometria elementar: rectas paralelas, rectas perpendiculares, diagonais de um rectângulo, perímetros, etc.; os cálculos a efectuar não são mais do que simples proporções (directas).

Traçado de uma pista de corridas

Uma pista de corridas é habitualmente constituída por 8 corredores, medindo cada um deles 1,22 m de largura. A pista tem 400 m de comprimento que se medem no 1.º corredor 0,30m além da corda, isto é, do limite interior da pista.

Cada corredor é constituído por duas partes curvas (semicircunferências) e duas partes rectas. Assim, para o seu traçado há que determinar o comprimento de cada uma dessas partes (que não é 100 m como se poderia supor).

Dadas as dimensões **A** × **B** do rectângulo que constitui o campo de futebol, os cálculos a efectuar resumem-se à determinação do raio **R** das semicircunferências e do comprimento **L** de cada uma das rectas.

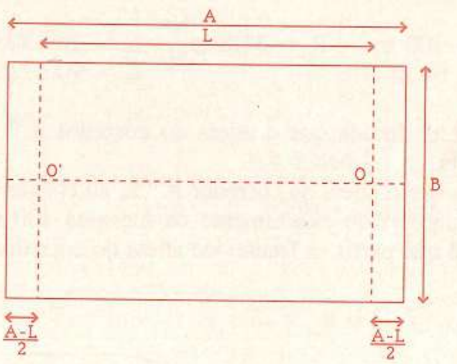
Assim, **R** será a soma de metade da largura do campo com a largura **f** da sua faixa de segurança (que pode variar entre 1,5 e 2,5 m) com 0,30 m ; ou seja:

$$R = B/2 + f + 0{,}30$$

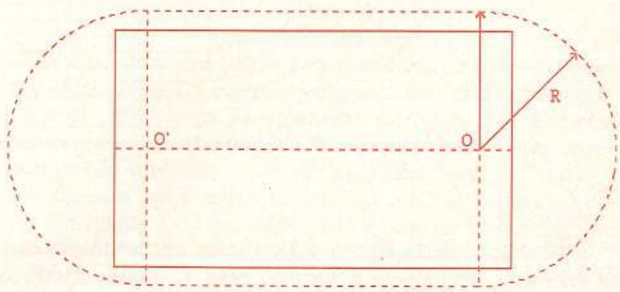
Então, o comprimento C de uma parte curva será: $C = \pi R$

Como $400 = 2L + 2C$, vem: $L = 200 - R$

Quanto à marcação no terreno, há que saber onde se situa exactamente o centro **O** de cada uma das semicircunferências: este ponto terá que se encontrar sobre o eixo, longitudinal que passa pelo centro do terreno; para determinar qual o sítio exacto nesse eixo, calcula-se a diferença A – L e divide-se por 2 (ver figura).



Finalmente, traçam-se as partes curvas da pista com centro nos pontos O e O' e as respectivas partes rectas (ver figura).



A linha assim obtida (linha a tracejado na figura acima) deverá medir 400 m certos.

Uma vez que esta linha se situa 0,30 m além da corda, para traçar a parte interior do 1.º corredor (corda) tem que se utilizar um raio de comprimento R – 0,30 m e, para os restantes corredores vai-se aumentando sucessivamente 1,22 m a partir de R – 0,30 m (pois a largura de cada corredor mede 1,22 m).

Décalages

Após a marcação no terreno dos corredores da pista, surge a questão das chamadas «décalages», isto é, como marcar em cada corredor o local de partida para cada atleta numa corrida de 400 m (como é óbvio, se partissem todos da linha da meta, o atleta do corredor no 1 percorreria esses 400 m, mas o «desgraçado» do corredor n.º 8 ...).

Com vista a facilitar a apresentação dos cálculos necessários para determinar as «décalages», efectuá-los-emos com os valores de um caso particular: suponhamos que o campo de futebol possui as medidas internacionais mínimas → 100 × 64. Assim,

A = 100 m	R = 34.8 m	C = 109.323733 m
B = 64 m		L = 90.67267 m

Não há dúvida que o atleta do corredor n.º 1 parte da meta.

Para que o atleta do corredor n.º 2, ao chegar à meta, tenha percorrido exactamente os mesmos 400 metros, ele terá que partir «à frente» do atleta do corredor n.º 1.

Antes de prosseguirmos, duas notas:

1) para abreviar a escrita, a partir daqui, chamaremos a_n ao atleta do corredor número n, $n = 1, 2, \ldots, 8$;

2) nos corredores número 2, 3, ..., 8, os 400 metros medem-se a 0.20 m da fronteira interior do corredor (e não a 0.30 m como no corredor n.º 1[(1)]).

Para determinarmos o local exacto de onde a_2 deverá partir, faremos a contagem dos metros que ele percorre (NÃO ESQUECER que, de acordo com a nota acima, esta contagem deverá ser feita sobre uma linha a 0.20m da fronteira interior do seu corredor) até chegar à meta, «no sentido contrário ao da sua corrida», isto é, começamos por contar os 90.67267m que ele corre na recta da meta; depois, os 112.84601m (ver cálculos auxiliares) da 2.ª curva que a_2 descreve; depois, os 90.67267 da 1.ª recta onde ele corre; e finalmente, o número de metros que ele corre na 1.ª curva desde que parte até que entra na 1.ª recta:

$$400 - (90.67267 + 112.84601 + 90.67267) = \\ = 105.80865\text{m}$$

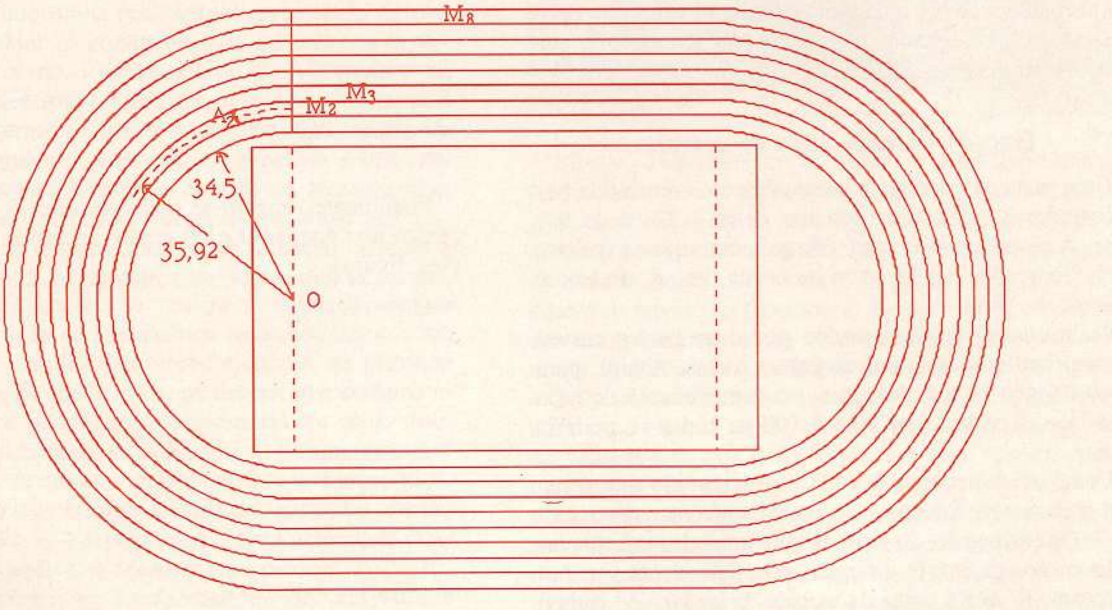
Cálculos auxiliares

$R_1 = 34.8\text{m}$

$R_2 = (34.8 - 0.3) + 1.22 + 0.2 = \\ = 35.92\text{m}$

$C_2 = \pi R_2 \simeq 112.84601\text{m}$

Consideremos, agora, a seguinte figura:



O objectivo desta figura é auxiliar a apresentação dos cálculos com vista a clarificá-los; por isso mesmo, esta não se encontra desenhada à escala, pois se assim fosse, os corredores ficariam demasiado estreitos.

De um ponto de vista prático, o que se pretende é desenhar uma linha no corredor, atrás da qual se deverá encontrar o atleta antes da partida.

Neste momento, apenas sabemos que desde o ponto A_2 até à meta M_2 (no sentido da corrida do atleta) contam-se 400m; portanto, a tal linha terá que passar pelo ponto A_2. Mas, só com este dado, ainda não é possível desenhá-la.

Como fazer?

Determinemos a sua inclinação (a inclinação e um ponto, já são dados suficientes para a desenhar):

i) comprimento do arco M_2A_2 (seja x_2):

$x_2 = C_2 -$ n.º de metros que a_2 corre na 1.ª curva =
$= 112.84601 - 105.80865$
$= 7.03736m$

ii) amplitude do arco M_2A_2 — ou do ângulo do centro M_2OA_2 (seja α_2):

$$\frac{2\pi R_2}{360} = \frac{x_2}{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{180x_2}{\pi R_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{180 \times 7.03736}{\pi \times 35.92} \simeq 11.225251^\circ$$

iii) a referida linha terá uma inclinação de 11.225251º relativamente à linha da meta.

Em vez de efectuarmos cálculos análogos a estes para cada um dos restantes corredores, tentaremos deduzir uma fórmula que, por substituição directa, nos dê logo o valor do ângulo desejado.

Analisemos como chegámos ao valor α_2 e generalizemos:

$$\alpha_2 = \frac{180x_2}{\pi R_2}$$

- Como chegámos a R_2?

. $R_1 = B/2 + 2.5 + 0.3 = 32 + 2.5 + 0.3 = 34.8m$

. $R_2 = (R_1 - 0.3) + 1.22 + 0.2 =$
$= 34.5 + 1.22 + 0.2 =$
$= 34.7 + 1.22$

. $R_3 = R_2 + 1.22 = 34.5 + 1.22 + 0.22 + 1.22 =$
$= 34.5 + 0.2 + 2 \times 1.22 =$
$= 34.7 + 2 \times 1.22$

. $R_4 = R_3 + 1.22 = 34.7 + 2 \times 1.22 - 1.22 =$
$= 34.7 + 3 \times 1.22$

. etc.

De onde se conclui que:

. $\boxed{R_n = 34.7 + (n-1) \times 1.22}$

- Como chegámos a x_2?
comprimento que a_2 corre na 1.ª curva:

$105.80865 =$
$= 400 - (90.67267 + \underbrace{112.84601}_{\pi R_2} + 90.67267)$
$= 400 - (2 \times 90.67267 + \pi R_2)$
$= 218.65466 - \pi R_2$

. $x_2 = 7.03736 = 112.84601 - 105.80865$
$= \pi R_2 - (218.65466 - \pi R_2)$
$= 2\pi R_2 - 218.65466$

De onde se conclui que:

$$\boxed{x_n = 2\pi R_n - 218.65466}$$

(em que x_n representa o comprimento do arco M_nA_n; $n \in \{2, 3, ..., 8\}$)

- Então:

$$\alpha_2 = \frac{180x_2}{\pi R_2} = \frac{180\,(2\pi R_2 - 218.65466)}{\pi R_2}$$
$$= 180\left(2 - \frac{218.65466}{\pi R_2}\right)$$

- Finalmente,

$$\boxed{\alpha_n = 180\left(2 - \frac{218.65466}{\pi R_n}\right)}$$

onde

$\boxed{R_n = 34.7 + (n-1) \times 1.22}$, $n \in \{2, 3, ..., 8\}$

Sugestão

Segundo nos afirmou o professor Eduardo Cunha(2) (e nós tivémos oportunidade de o confirmar aquando duma visita ao Estádio Nacional) a distância entre o 8.º e o 7.º atleta, à partida, é menor do que a distância entre o 2.º e o 1.º; ou, por outras palavras, à medida que n aumenta ($n \in \mathbb{N}$), os atletas n.º n+1 e n.º n partem cada vez mais perto um do outro, o que nos leva a imaginar que:

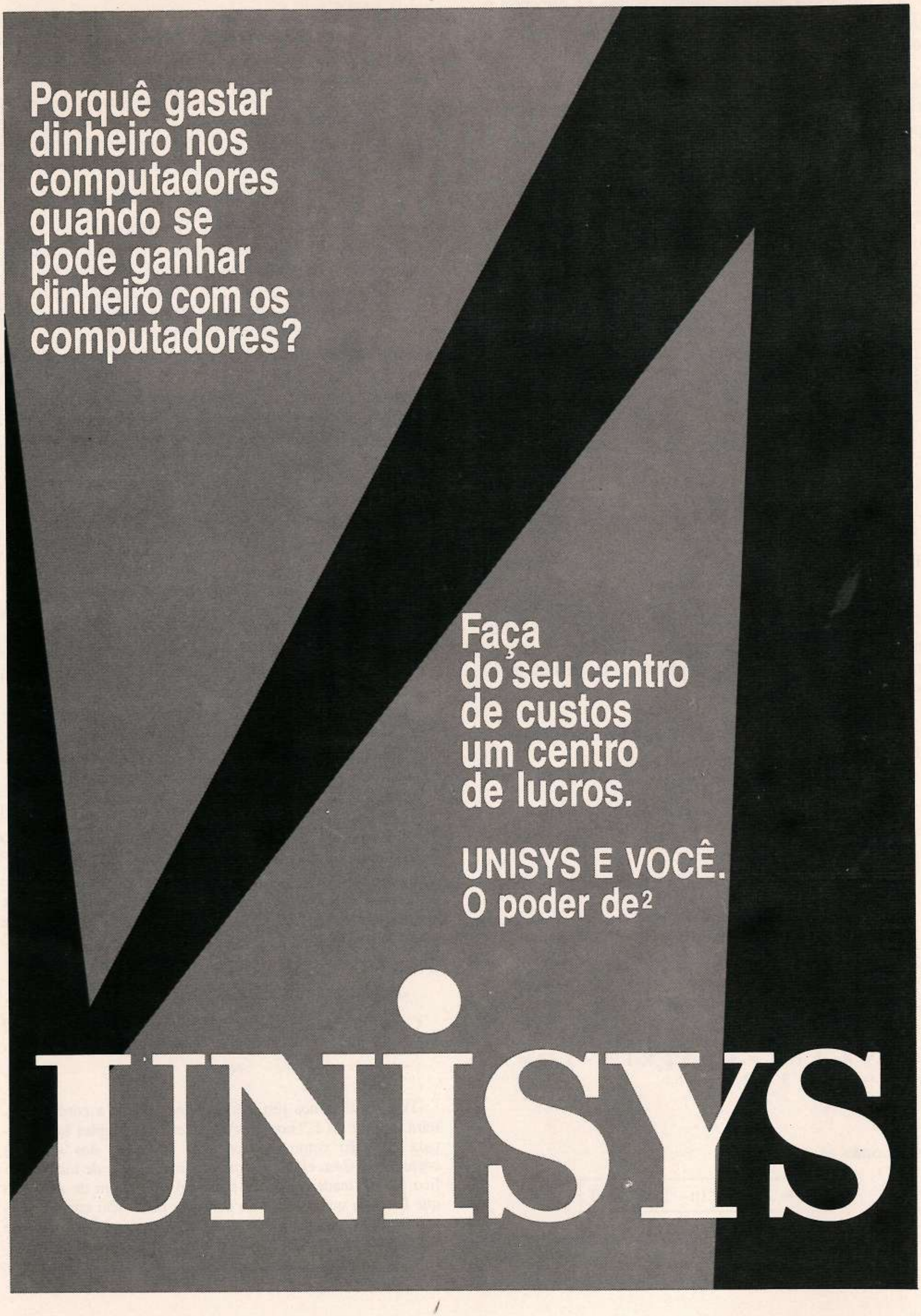
«No infinito, os atletas partiriam lado a lado.»

Como demonstrar, matematicamente, esta afirmação?

Notas

(1) Esta diferença justifica-se pelo facto de a corda (fronteira interior do 1.º corredor) não ser uma simples faixa pintada no chão como as fronteiras interiores dos restantes corredores. Com efeito, a corda é uma espécie de tubo metálico (ou de madeira, ou de cimento) com 5 cm de altura, o que faz com que o atleta do corredor n.º 1 não consiga correr tão próximo da fronteira interior (porque há o perigo de se magoar) como um atleta de um dos outros corredores.

(2) Treinador de atletismo no Sporting.


Porquê gastar
dinheiro nos
computadores
quando se
pode ganhar
dinheiro com os
computadores?
Faça
do seu centro
de custos
um centro
de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

Modelos, aplicações da Matemática e computadores: o exemplo dos autómatos celulares

João Filipe Matos*
Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa

Tem vindo a ser reconhecido por numerosos educadores que as Aplicações da Matemática devem constituir uma das vertentes da actividade dos alunos naquela disciplina. Naturalmente que ao pensar naquilo a que se tem vindo a chamar de Aplicações da Matemática, não se limita esta componente a uma mera ideia de aplicabilidade no sentido estrito do termo. As aplicações da Matemática envolvem implicitamente criatividade e esta não consiste na simples aplicação de princípios conhecidos mas na descoberta e construção, frequentemente por via intuitiva, de novos algoritmos, novas relações, novos conceitos, em última análise, nova Matemática. Um exemplo interessante e real desta aplicação é apresentado por Feynman (1986).

Quando esses novos elementos são reconhecidos como válidos e incorporados no esquema coerente que caracteriza a Matemática, a sua aplicação torna-se num processo previsível, eventualmente rotineiro, e por isso mesmo preferencialmente realizado com o auxílio de meios automáticos, nomeadamente de computadores.

Neste artigo pretende-se aflorar a problemática das Aplicações da Matemática na educação sob a perspectiva da construção e exploração de modelos matemáticos simples em computador. São apresentados dois exemplos de simulações de processos dinâmicos através de modelos implementados em autómatos celulares.

A Construção de Modelos e os Computadores

Se a aprendizagem passa por proporcionar aos alunos ambientes favoráveis a uma situação em que eles sejam construtores activos das suas estruturas conceptuais, os processos de modelação e exploração de modelos podem contribuir para esse objectivo na medida em que encorajam os alunos a generalizar relações e processos, a definir as suas ideias de forma precisa, e a testar os seus próprios modelos detectando e corrigindo inconsistências. A vantagem de ter a possibilidade de interpretar e tornar externos os modelo «internos» será a de tender a conferir forma concreta a ideias abstractas. Acresce a isto a possibilidade de fazer coexistir representações múltiplas de um mesmo modelo (Fey, 1988).

Os exemplos que são apresentados neste artigo constituem modelos de sistemas dinâmicos. De facto, muitos dos processos naturais que podemos estudar através de modelos matemáticos têm um carácter dinâmico, isto é, a sua evolução tem que ver com o tempo, existindo assim automaticamente uma variável independente definida à partida. A simulação de processos deste tipo através de computador permite ensaiar, em segundos, fenómenos que durariam anos ou mesmo que é impossível realizar em situação real (por exemplo em projecções para o futuro). Naturalmente que existem muitos modelos interessantes que permitem uma larga exploração sem necessidade de computadores como por exemplo a chamada Geometria do Táxi (Krause, 1975).

Mas os computadores abrem a possibilidade de proporcionar aos alunos ambientes de aprendizagem em que as representações das ideias são flexíveis e que simultaneamente lhes permitem obter *feedback* imediato do computador a partir das suas experiências. Na terminologia de Papert (1980) os computadores constituem objectos com os quais se pode estabelecer uma relação que não pode ser reduzida a termos puramente cognitivos. Assim, os computadores podem constituir um meio em que os modelos podem ser facilmente manipulados, encorajando os alunos a expressarem os seus próprios modelos do mundo real, testá-los e avaliá-los, e voltando de novo à situação real num processo circular que pode ou não ter origem numa situação já definida e simplificada (Kerr & Maki, 1979). E a questão pode igualmente ser equacionada no contexto do trabalho dos professores (ver por exemplo Rubin e Rosebery, 1988).

Os programas de simulação de sistemas dinâmicos são talvez os instrumentos de modelação mais conhecidos, amplamente usados em actividades científicas e susceptíveis de serem utilizados na educação (para uma análise detalhada de diversos tipos de actividades de modelação ver por exemplo Webb e Hassel, 1988).

A construção de modelos dinâmicos em computador pode ser realizada através de diversos instrumentos desde que mantendo um grau adequado de fidelidade ao fenómeno real (a este propósito ver por exemplo Levin & Waugh, 1988). Para além das linguagens de programação relativamente acessíveis e de utilização genérica, como o Logo ou o BASIC, existe actualmente uma larga gama de programas vocacionados para a construção de modelos em computador. A simples Folha de Cálculo constitui um instrumento que permite a modelação de diversas situações e a formulação e exploração de problemas. No entanto têm vindo cada vez mais a surgir programas destinados específicamente à modelação, com diversos graus de complexidade na sua manipulação, como por exemplo o DYNAMO (Roberts, 1981) que consiste numa verdadeira linguagem de programação para a construção de modelos. Um dos exemplos que podemos situar na gama dos programas com interface mais amigável é o STELLA (para uma breve descrição deste programa ver por exemplo Whitfield, 1988) em que toda a construção do modelo é realizada através da manipulação de símbolos icónicos representativos das variáveis em jogo, e que são ligados directamente no ecrã de acordo com a relação de dependência entre os diversos factores intervenientes no processo.

A construção de modelos referida pressupõe o conhecimento das leis que regem o fenómeno de um ponto de vista global, o que poderá significar que é necessário conhecer exactamente as equações correspondentes ao processo dinâmico ou pelo menos alguma relação funcional mesmo que traduzida em termos gráficos pelo utilizador. Existem no entanto processos em que a definição das leis é estritamente local, isto é, realizada sobre cada elemento de modo uniforme mas individual. Nestes processos conhecem-se as leis «locais» do seu funcionamento mas o seu desenvolvimento global é muitas vezes extremamente difícil de prever. Naturalmente que estas duas classes de modelos não são disjuntas uma vez que certos fenómenos podem ser vistos quer de um ponto de vista local quer de um ponto de vista global e estas duas perspectivas podem ser complementares.

Ogborn (1990) distingue como particularmente interessante a modelação semi-quantitativa quando se dispõe de poucos dados para construir um modelo quantitativo exacto. Assim, a modelação semi-quantitativa consistirá na construção de diagramas causais cujas variáveis seriam representadas de forma icónica e relacionadas através do traçado de setas definidoras de dependência directa ou inversa entre elas.

Vamos analisar em pormenor dois exemplos de modelos matemáticos em que a definição local assume aspecto relevante.

Os Autómatos Celulares

Os autómatos auto-reprodutores de John Von Neumann são modelos formulados em termos matemáticos e baseados num conjunto de condições ou regras reconhecidas como necessárias para a auto-organização dos seus elementos. Uma característica dos autómatos de Von Neumann é a sua capacidade de auto-reprodução. Segundo Eigen e Winkler (1989) o primeiro deste tipo de modelos foi concebido em 1950 de uma forma muito realista mas com êxito precário. A máquina imaginada deslocar-se-ia para trás e para diante num grande armazém de peças, retirando os elementos necessários à sua própria construção. E a questão mais delicada é que os seus «descendentes» deveriam ter a mesma capacidade de se auto-reproduzir, num processo recursivo, capacidade esta que deveria portanto fazer parte do seu programa de construção. Poderia imaginar-se que, por meio de um dado tipo de modificação selectiva do programa de construção, seria teoricamente possível obter uma melhoria contínua da máquina, com extensão e aperfeiçoamento das suas capacidades no sentido da evolução darwiniana.

Em termos teóricos, as ideias de Von Neumann (Kac & Ulman, 1968) encontram exemplos interessantes, nomeadamente através da exploração dos chamados autómatos celulares. Pense-se no plano dividido em células tal como se se tratasse de um infinito tabuleiro de xadrez. A cada célula, isto é, cada casa desse tabuleiro, pode atribuir-se um número finito de estados, como por exemplo, estar vazio, ocupado ou ocupado por um determinado tipo ou classe de elementos, etc. Para cada célula pode ainda ser definida uma dada vizinhança. Por exemplo, poderíamos definir para cada célula A da figura 1 um tipo de vizinhança constituída pelas células numeradas de 1 a 8.

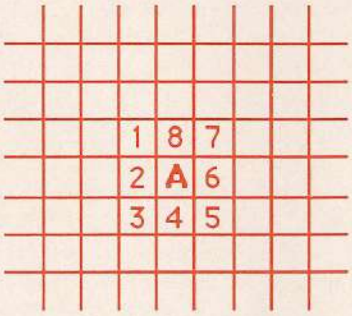


Fig. 1
Exemplo de vizinhança de uma célula A

Para que este pequeno mundo adquira uma dinâmica de «vida» podem ser definidas regras de transformação simultânea para cada célula. Isto significa que estas regras são aplicadas instantaneamente a todas as células deste espaço. Von Neumann conseguiu demonstrar que uma configuração de cerca de 200.000 células, cada uma com 29 estados possíveis e uma vizinhança de quatro casas ortogonais (no caso da figura 1, as casas 2, 4, 6 e 8), reúne todas as condições necessárias aos autómatos auto-reprodutores, podendo teoricamente realizar qualquer operação matemática (Eigen & Winkler, 1989).

Um exemplo interessante de um universo de autómatos celulares é conhecido por «jogo da vida». Desenvolvido no início dos anos setenta, pelo matemático inglês John Conway quando trabalhava intensamente em dois dos seus temas favoritos: as teorias dos números transfinitos e os jogos (ver por exemplo Conway, 1976). Na construção de um universo dinâmico de autómatos celulares — capaz de ser simultaneamente simples e interessante mas de resultados praticamente imprevisíveis — Conway investigou com os seus estudantes dezenas de hipóteses, ensaiando universos de texturas hexagonais e triangulares com as mais variadas regras de transformação. Um dos resultados deste estudo foi uma proposta extremamente simples: o jogo da vida, como lhe chamou, embora na sua essência não constitua um verdadeiro jogo.

Neste universo, a vizinhança de cada célula é constituida pelas oito células descritas na figura 1. O jogo decorre em fases sucessivas que são designadas habitualmente por gerações. Em cada geração, as regras são aplicadas simultaneamente em todas as células. Como regra base, uma célula deve estar sempre ou ocupada ou livre, isto é, só existem dois estados: célula ocupada (viva) ou vazia (morta). As regras deste verdadeiro micromundo são as seguintes:

1. **Sobrevivência**: Uma célula sobrevive e passa à geração seguinte se 2 ou 3 células vizinhas estiverem também vivas (isto é, ocupadas). A célula permanece portanto ocupada, isto é, viva.

2. **Morte**: Uma célula morre (isto é, passa de ocupada a vazia) se mais de 3 ou menos de 2 células da sua vizinhança estão vivas. No primeiro caso poderíamos dizer que o sistema estaria sobrepovoado e no segundo que o indivíduo está demasiado isolado.

3. **Nascimento**: Uma célula nasce (isto é, passa de vazia a ocupada) se 3 e só 3 células vizinhas já estiverem vivas.

Em cada geração, cada célula sofre uma transformação determinada por aquelas três regras.

Atente-se no desenvolvimento da evolução da configuração inicial da figura 2.

Naturalmente que este processo implementado em computador permite com grande rapidez apreciar o desenvolvimento de uma configuração inicial após dezenas ou centenas de gerações.

É possível desenvolver a simulação deste processo com o auxílio de diversos programas, existindo diversas implementações realisadas sobre diferentes suportes, como é o caso do programa LAZLife desenvolvido por Larry Hutchinson para os computadores MacIntosh.

As questões que se colocam podem permitir explorações extremamente interessantes. Haverá configurações iniciais que desaparecem, ou que se tornam estáveis, ou que alternam entre diferentes estados numa ou outra forma de estabilidade, ou que se desenvolvem e criam «colónias» que por sua vez se desenvolvem também, etc. Há por exemplo as chamadas configurações móveis (ver figura 3). Quais serão as características deste tipo de configurações? Que classes de configurações móveis podem existir? Quais são estáveis, após um número finito de gerações?

Existem configurações cujo crescimento é infinito? Haverá possibilidade de obter todo o tipo de configuração? Se não, porque não? Que leis é possível conjecturar acerca de determinadas categorias de configurações de vida limitada (isto é, que desaparecem ao fim de um número finito de gerações)?

E o que dizer do jogo da vida em três ou mais dimensões?

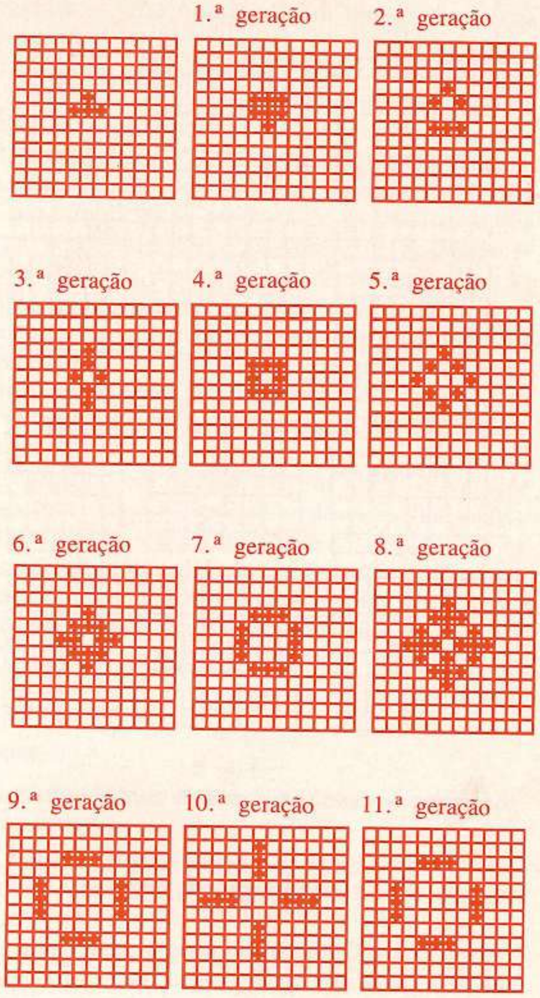


Fig. 2
Evolução de uma configuração que adquire «estabilidade alternante» na 10.ª geração

O entusiasmo e a atracção que o jogo da vida despertou em certos meios tem que ver naturalmente com a sua simplicidade, pelo facto de ser totalmente previsível, célula por célula, mas a evolução em larga escala desafiar tremendamente a intuição.

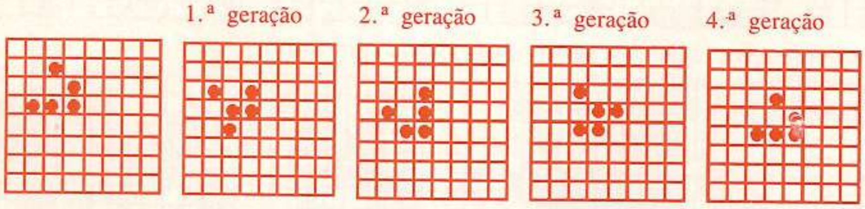


Fig. 3
Exemplo de uma configuração móvel. Ao fim de quatro gerações ela regressa à configuração inicial mas deslocada uma célula para a direita e para baixo. A sucessão de sequências como esta provoca o deslocamenteo rectilíneo da configuração.

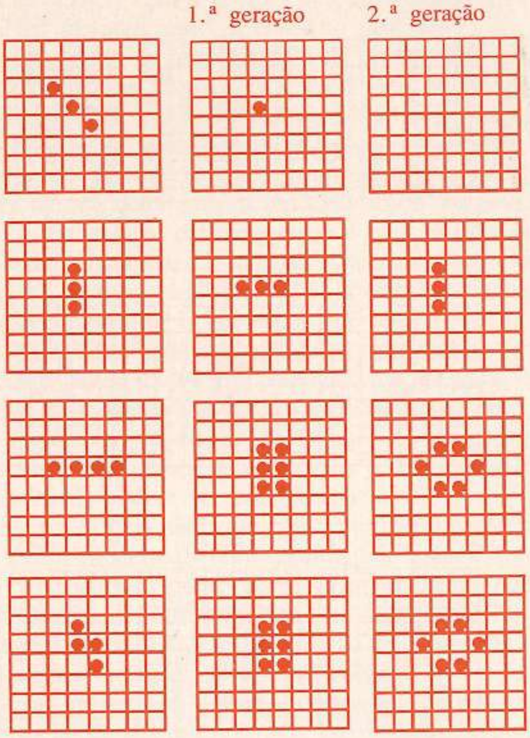


Fig. 4
Exemplos de desenvolvimento de configurações estáveis

Simulação de fogos

Quando em Outubro me dirigia para Viana do Castelo para participar no Encontro da APM — pensando em exemplos sugestivos de simulações para realizar em Logo — deparei com um enorme incêndio naquelas maravilhosas terras. Apesar de a realidade ser muito mais dramática do que a minha preocupação com as simulações, pensei que seria um exemplo bem interessante simular o desenvolvimento de um foco de incêndio. Penso mesmo que esta ideia já existia a propósito do estudo da natureza matemática de certas formas características de fenómenos naturais (ver por exemplo Marx, 1987 e Peterson, 1988) e de uma ideia que persigo há cerca de um ano e que envolve o estudo dos chamados triângulos de Sierpinsky.

Imagine-se um universo celular — ou um sistema de partículas interactivas, na terminologia de alguns matemáticos (Durret, 1988) — em que cada célula pode assumir, em cada fase, um e só um de três estados: 1, i e 0. Neste modelo, cada célula representa uma árvore e os três estados referidos correspondem respectivamente a uma árvore sã, ardendo e já ardida. As regras de transformação são óbvias. O problema torna-se mais aliciante, do ponto de vista matemático, através da utilização de valores de probabilidades. As regras poderiam ser as seguintes:

1. Todas as árvores são inicialmente verdes, excepto uma (o foco de incêndio).
2. Uma árvore ardida mantém-se ardida.
3. Uma árvore ardendo pode transmitir esse estado a uma árvore sã vizinha. Este facto depende do valor definido para a probabilidade de transmissão (podendo eventualmente variar ao longo do processo).
4. Uma árvore permanece ardendo durante uma geração (isto é, uma unidade de tempo).

O estado do processo num dado momento **m** é uma função E_m:

$$E_m: Z^2 \rightarrow \{1,i,0\}$$

Durret (1988) descreve a dinâmica deste processo em termos de probabilidades da seguinte forma:

Se $E_m(x) = 0$, então $E_{m+1}(x) = 0$
(correspondente a 2.)

Se $E_m(x) = i$, então $E_{m+1}(x) = 0$
(correspondente a 4.)

Se $E_m(x) = 1$, então
$P(E_{m+1}(x) = 1) = (1 - p)^k$
$P(E_{m+1}(x) = i) = 1 - P(E_{m+1}(x) = 1)$
(correspondentes a 3.)

sendo **k** o número de vizinhos em estado i, P representado o valor da probalidade e **p** um parâmetro definido no intervalo [01]. A condição inicial poderia ser

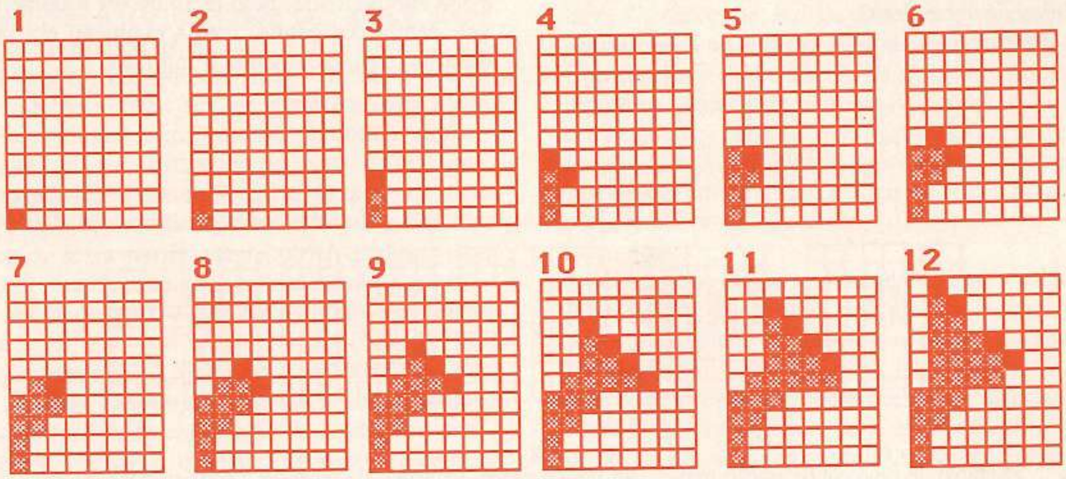


Fig. 5
Início do desenvolvimento de um foco de incêndio de acordo com o modelo apresentado.

$E_m((0,0)) = i$, isto é, a célula (0,0) seria o foco de incêndio.

A simulação deste processso em computador poderá eventualmente ser implementada com o auxílio de diferentes tipos de instrumentos. O recurso à programação poderá permitir tornar mais flexível a utilização da simulação. Usando procedimentos elementares em LOGO pode realizar-se uma primeira aproximação a este problema. Na secção Logo.Mat deste número da revista é explorada de forma resumida uma possivel implementação deste processo.

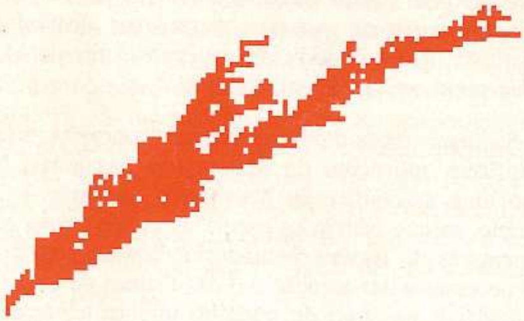


Fig. 6

Facilmente se pode generalizar aquele conjunto de procedimentos a outros casos introduzindo novos factores de probabilidade e utilizando os oito vizinhos de cada célula. Através deste tipo de modelo matemático podem realizar-se experiências interessantes, ensaiando técnicas de contra-fogo, estudando a influência da variação da humidade do solo, do vento, de barreiras de segurança, etc, na propagação do fogo. Todos estes elementos são simulados através da definição de valores para as probabilidades de propagação aos vizinhos imediatos ou a outros, e de interacção entre estes factores. Além disso, a base do modelo pode ser constituída por uma distribuição aleatória de árvores (células) em vez de um recticulado perfeito como é o caso do exemplo apresentado.

Conclusão

Os exemplos apresentados pertencem a um campo ainda relativamente pouco explorado da Matemática e muito pouco trabalhado em termos de educação matemática. Pareceu-me que tal escolha poderia constituir uma forma de sugerir uma perspectiva de trabalho no domínio das Aplicações da Matemática que dá ênfase à elaboração e exloração de modelos em relação aos quais não é necessário conhecer um conjunto de equações complexas, mas que permitem uma investigação interessante.

Era igualmente objectivo deste artigo valorizar as aplicações como uma componente importante do ensino da Matemática no sentido em que podem constituir elas próprias elementos de estudo e de trabalho através da construção e exploração de modelos. Esta vertente, que deverá estar implícita na proposta do envolvimento dos alunos em actividades sobre as Aplicações da Matemática, pode tornar-se mais saliente através da utilização de computadores. Embora as linguagens de programação, e nomeadamente o Logo, constituam instrumentos disponíveis para este trabalho, os programas vocacionados para actividades de modelação constituem sem dúvida os instrumentos privilegiados para este tipo de actividade.

Num momento em que se buscam linhas orientadoras gerais para o que poderá ser a educação matemática básica dos alunos, e por outro lado se vislumbram os contornos dos futuros currículos, é importante tomar em consideração o que poderá ser uma vertente interessante da utilização da tecnologia nos currículos.

Referências

Conway, John (1976). *On Numbers and Games*. London: Academic Press.

Durret, Richard (1988). Crabgrass, Mcasles, and Gypsy Moths: An Introduction to Interacting Particle Systems. *The Mathematical Intelligencer*, 10 (2), 37-47.

Eigen, Manfred & Winkler, Ruthild. (1989). *O Jogo*. Lisboa: Gradiva.

Fey, James (1988). *Technology and Mathematics Education: A Survey of Recent Developments and Important Problems*. Comunicação apresentada no Sixth International Congress on Mathematical Education, Budapest.

Feynman, Richard (1986). *Surely you're joking Mr. Feynman!*. New York: Bantam.

Kac, Mark. & Ulam, Stanislaw. (1968). *Mathematics and Logic*. New York: Penguin Books.

Kerr, Donald & Maki, Daniel (1979). Mathematical Models to Provide. Applications in the Classroom. In Sharron, Sidney & Reys, Robert (Ed.) *Applications in School Mathematics*. Reston: NCTM.

Krause, Eugene (1975). *Taxicab Geometry: an Adventure in Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover.

Levin, James & Waugh, Michael (1988). Educational Simulations, Tools, Games and Microworlds: Computer-based Environments for Learning. *International Journal of Educational Research*, 12, pp. 71-81.

Marx, G. (1987). Chaos in Education. *Proceedings of the International Workshop on teaching non-linear phenomena at schools and universities*. Veszprém: National Center for Educational Technology.

continua na pág. seguinte

Aplicações na Matemática escolar em discussão no Profmat-89

No Profmat-89, realizado em Outubro passado em Viana do Castelo, um dos grupos de trabalho foi dedicado ao tema «Aplicações na Matemática escolar». Um relatório sobre o que foram os três dias de trabalho desse grupo será publicado no *Profmat n.º 5* (Actas do Encontro) tal como sucederá com todos os outros grupos. No entanto, uma vez que este número de Educação e Matemática é dedicado ao mesmo tema, parece oportuno transcrever a parte final desse relatório que se refere aos pontos focados no último dia dos trabalhos.

[...]

• Embora o professor goze sempre de alguma liberdade, os programas actuais não são propícios ao trabalho com aplicações da Matemática sobretudo por causa da natureza dos objectivos subjacentes a esses programas.

• Actividades concretas sobre aplicações da Matemática poderão naturalmente agradar mais a alguns alunos do que a outros mas, de um modo geral, permitem dar sentido a muitas noções com que os alunos trabalham. Além disso, poderão proporcionar actividades diversificadas que tenham em conta o contexto social da escola e dos alunos (neste aspecto, a Matemática poderá ser *diferente* de região para região). Um exemplo concreto, apresentado por uma professora da Marinha Grande, mostrou a relevância de noções de Trigonometria para alunos do 9.º ano, em relação à indústria dos moldes e em particular às necessidades profissionais dos fresadores.

• As actividades envolvendo relações da Matemática com a realidade ou com outras disciplinas requerem muitas vezes trabalho de grupo entre professores de Matemática e/ou colaboração entre professores de várias disciplinas.

• Por vezes, o desenvolvimento de projectos envolvendo aplicações da Matemática exige que o professor dê atenção a questões diversas de natureza não matemática e não proceda a simplificações *exageradas* da situação em estudo; esta exigência reforça a necessidade do trabalho em equipa e chama a atenção para a importância de existirem materiais e recursos disponíveis, aspecto em que a Associação de Professores de Matemática pode ter um papel decisivo.

• São necessárias mais experiências concretas em que se utilizem aplicações da Matemática nas aulas, bem como uma diversificação dos níveis escolares — por exemplo, seriam benvindas experiências nos cursos complementares do Ensino Secundário. Um aspecto a que será necessário dar atenção é o das formas de avaliação adequadas a um tipo de trabalho que incluirá muitas vezes trabalho de grupo, realização de projectos, relações interdisciplinares, etc.

• Deveriam ser criadas condições favoráveis para grupos de professores que apresentem, na sua escola, propostas relevantes para o desenvolvimento de projectos envolvendo aplicações da Matemática. Essas condições poderiam incluir o reconhecimento, no horário dos professores respectivos, de algumas horas semanais dedicadas ao desenvolvimento de materiais, apoio às actividades dos alunos, etc.

[Extraído do relatório do GT9 do Profmat-89, elaborado por Ana Vieira e Paulo Abrantes em Outubro de 1989]

Modelos... (conclusão)

Ogborn, Jon (1990). Modelação com o computador: Possibilidades e prespectivas. In Teodoro, V. (Ed.) *Novas Tecnologias de Informação como Instrumento da Educação: um Manual para Professores*. (No prelo).

Papert, Seymour. (1980). *Logo, Computadores e Educação*. S. Paulo: Editora Brasiliense.

Peterson, Ivars (1988). *The Mathematical Tourist*. New York: Freeman.

Roberts, Nancy (1981). Introducing Computer Simulation into the Hogh School: an applied Mathematics Curriculum. *Mathematics Teacher*, 74 (8), pp. 647-652.

Rubin, Andee & Rosebery, Ann (1988). *Teachers Misunderstandings in Stastical Reasoning: Evidence from a Field Test of Innovative Materials*. Comunicação apresentada no International Stastistics Institute Round Table Conference «Training Teachers to Teach Statistics», Budapeste.

Webb, M. & Hassell, David (1988). Opportunities for Computer Based Modelling and Simulation in Secondary Education. In Lovis, F. & Tagg, E. (Eds.) *Computers in Education*. North-Holland: Elsevier.

Whitfield, A. (1988). STELLA and its Impact on the Teaching of Mathematical Modelling. In Lovis, F. & Tagg, E. (Eds.) *Computers in Education*. North-Holland: Elsevier.

---

* Bolseiro do INIC — Instituto Nacional de Investigação Científica

Códigos e mensagens

José Carlos Frias, Escola Secundária das Telheiras

Sétimo ano unificado, Fevereiro ou Março. O «material» começa a mostrar fadiga. Vem aí a Primavera, os primeiros dias bonitos... As negativas do 1.º Período ameaçam tornar-se crónicas...

«Aplicações injectivas, 'subjectivas'...?! Então, como é que se sabe que o domínio é aquele?!»

A seguir ponho à consideração dos colegas algum material, testado em várias turmas, para a Unidade do 7.º ano Unificado «APLICAÇÕES». A sua aplicação durará várias aulas e a decisão da sua exploração será particularmente útil em turmas com a «moral» em baixo ou com problemas de relacionamento entre alunos. Se numa turma ou em relação a alunos atentos, estudiosos, enfim, «certinhos», esta actividade resulta interessante para eles, mas não passa de mais um jogo, no caso de «alunos-problema» a possibilidade de redigir as próprias mensagens e escolher o destinatário bem como o desafio que é descodificar as mensagens alheias constituem atractivos poderosos.

Depois de ter leccionado os assuntos «Aplicações» e «Classificação de Aplicações» (1) o professor desafiará a turma a descodificar uma *mensagem*, por exemplo:

JZ ZJITGZLZQ AZ DBOLAO GDQOJ BOQHPTBDL
BOQ BOATVOJ JZBLZIOJ,

fazendo desde logo as convenções que eu indico a seguir (ou outras): a cada uma das 23 letras do alfabeto corresponde outra letra dessas 23, aos espaços entre as palavras correspondem espaços, respeita-se a pontuação e os parágrafos mas não se grafam os acentos (isto é, A, Ã, À, Á, Â representam-se por A).

Ninguém conseguirá... mas o desafio apenas começou.

Depois, o professor porá no quadro a frase descodificada, pedindo que descubram o *código* utilizado:

JZ ZJITGZLZQ AZ DBOLAO GDQOJ BOQHPTBDL
BOQ BOATVOJ JZBLZIOJ.

SE ESTIVEREM DE ACORDO VAMOS COMUNICAR
COM CODIGOS SECRETOS.

Com mais ou menos demora, os alunos obterão o código que o professor poderá sugerir colocar na forma de *tabela* de uma aplicação:

A B C D E F G H I J L M N O P Q R S T U V X Z
D C B A Z X V U T S R Q P O N M L J I H G F E

Neste momento estará já claro que a comunicação com código se destina a esconder de terceiros o conteúdo da mensagem; e que emissor e receptor devem ambos conhecer o código e poder aplicá-lo à mensagem sem ambiguidades. Será proveitoso estudar a questão: «Que qualidade(s) deverá ter esta tabela? Representará uma aplicação? Bijectiva?»

— Deverá, ou não, ser *aplicação*?

E forneça-se aos alunos a frase: «A ESCOLA VAI MUDAR» pedindo-lhes que usem, em dois exercícios diferentes, as seguintes tabelas:

a) A A B C D E E F G H I J J L M N O O P Q R S T U U V X Z
Z X V U T S R Q P O N M L J I H G F E D C B A Z X V U T

b) A B C D G H I J P Z
L M N O P Q R S T U

— A aplicação deverá, ou não, ser *sobrejectiva* e *injectiva*? (As duas qualidades andam ligadas, dado tratar-se de um conjunto finito de símbolos.)

c) frase: «BEBE MAIS UM COPO»
tabela:

A B C D E F G H I J L M N O P Q R S T U V X Z
B C D B C D B C D B C D B C D B C D B C D B C

— Conclusão: a *aplicação* deverá ser *bijectiva*.

Não se querendo enveredar pelo extra-curricular, ficar-se-á por aqui — com atenção à necessidade de multiplicar os exemplos, os TPC de mensagens (com códigos conhecidos), utilizando o potencial valor relacional e afectivo destes «jogos» para melhorar o clima da aula ou para outro fim relevante.

Se se pretender pode-se colaborar com a disciplina de Português (as mensagens poderão ser textos de autores escolhidos...) e, sobretudo, a aplicação prática desta actividade mostrar-vos-á como nem só os professores de Português poderão ajudar a corrigir a ortografia.

Pode-se colaborar com a disciplina de Práticas Administrativas (ou, pelo menos, dispor de uma máquina de escrever). Conselho prático: previnam-se a tempo com vários conjuntos de etiquetas autocolantes (já alfabetizadas); e pensem que vão ter de deixar a(s) máquina(s) com as teclas como estavam dantes. Máquinas de escrever, para quê? Para treinar dactilografia? Não só, acima de tudo permite tornar mais atractiva e menos confusa a tarefa de codificar ou descodificar, principalmente se a mensagem for longa. Escrever à mão pode aumentar a confusão que os alunos (neste caso, na codificação ou na descodificação) sempre sentem: «*Setor*, é do domínio para o contradomínio ou vice-versa?» Utilizando máquina de escrever (2) essa questão pode ser discutida e ficar materialmente determinada *antes* de iniciada a actividade.

(Nota: reparem que, a menos que o código seja simétrico (isto é, A-Z; B-X; ...; X-B; Z-A), tem de se colar etiquetas para codificar e outras etiquetas para descodificar.)

Se se pretender dar resposta completa à questão inicial («sem código, descodifiquem esta mensagem») terá de se enveredar pela estatística (enfim, o estudo das permutações possíveis dissuadirá os jovens de procurarem por tentativa e erro).

O professor porá no quadro uma mensagem ou pedirá a um aluno ou a um grupo para lá escrever uma mensagem redigida por ele, sem que seja revelado o código (há uma condição prévia, que a mensagem tenha um comprimento, isto é, um número de letras já razoável. Digamos, no mínimo 200 letras).

Colocado assim o desafio diz-me a experiência que tem de ser o professor a fornecer a estratégia (enfim, a melhor estratégia): comparar a frequência relativa das letras da mensagem com a frequência relativa com que as letras do alfabeto português (se a mensagem for nesta língua) aparecem.

A determinação da frequência relativa das letras na língua portuguesa (melhor: na linguagem escrita ou, melhor ainda, numa prosa próxima daquela que enforma a mensagem), pode passar pela contagem, num texto suficientemente longo (no mínimo uma página), dos AA, dos BB, etc... Os alunos podem fazer esta contagem na aula ou em casa, dividindo o trabalho. Alternativamente, o professor pode fornecer o resultado de uma contagem já realizada, ou fornecer a lista ordenada das letras, segundo a frequência com que aparecem: A, E, O, S, R,... (Atenção: as letras menos frequentes podem trocar entre si de posição, em contagens em textos diferentes). Pode ainda fazer utilizar (na aula, num cantinho, enquanto a maior parte da turma trabalha noutra coisa) um programa de computador para essa contagem (3).

Acabei de referir, no parágrafo anterior, o problema do tamanho do texto, que se relaciona com a possível diferente colocação na lista A; E; O;... das letras menos frequentes, conforme os textos utilizados (em particular, no texto que nos serviu de padrão e no texto da mensagem). Esta dificuldade tem de ser resolvida apelando às evidências linguísticas: há um número limitado de terminações possíveis para as palavras; só existem 3 palavras («a menos de um acento») com uma única letra: «a», «o» e «e»; etc...

Uma outra dificuldade é a má ortografia do emissor: um erro é o suficiente para destruir parcialmente o sentido que a descodificação levava. Não devemos desperdiçar a ocasião — e, aliás, os alunos são os primeiros, imaginem! — a preocupar-se com a correcção!

Apresento a seguir um programa para ajudar a descodificar a mensagem, trocando letra por letra:

```
  6 PRINT «Escreva a mensagem, sem ultrapassar o ecran cheio (20 linhas).»: PAUSE 90
  8 CLS
 10 INPUT a$
 12 PRINT a$
 13 PRINT
 15 LET b=LEN a$
 17 INPUT «Trocar ...»; b$ «por ...»; c$
 20 FOR i=1 TO b
 30 IF a$(i)=b$ THEN LET a$(i)=c$
 35 PRINT a$(i);
 40 NEXT i
 50 INPUT «Quer mais trocas? (S/N)»; d$
 60 IF d$=«s» OR d$=«S» THEN GO TO 90
 70 IF d$< >«s» OR d$< >«S» THEN STOP
 90 PRINT « »
100 INPUT «Trocar ...»; b$; «por ...»; c$
105 GO TO 20
```

Este programa permite, dada uma mensagem, trocar letra por letra. Exemplo: se a mensagem é D PDXHPDXMFD H R TZH HVXD D GDU e se, por comparação das frequências relativas ou por intuição (ou por conhecermos o código), quisermos trocar o D por A, faremos:

«Trocar ...» D «por ...» A

e no «écran» aparecerá: A PAXHPAXMFA H R TZH HVXA A GAU e assim sucessivamente trocaremos as letras até, na melhor das hipóteses, obtermos a mensagem descodificada, que no caso se tratava de «A MATEMÁTICA É O QUE ESTÁ A DAR». Era quase impossível decifrá-la, dado o curto tamanho da mensagem, a menos que reparássemos numa regularidade própria ao código. (Atenção: assim como está, este programa distingue minúsculas de maiúsculas.)

Quando o código é desconhecido e a comparação das frequências relativas e a intuição parecem não ser suficientes, levanta-se a dúvida: «terei feito as trocas correctas?» Por exemplo: seja a palavra codificada DVVRFMDFDR e suponham-se as sucessivas alterações:

AVVRFMAFAR
AVVEFMAFAE.

Como proceder para anular a troca do R inicial pelo E, e em seguida trocar R por O? ...Exactamente, E por O; e aqui está uma ocasião para falar de composição de aplicações.

(Nota: uma dificuldade, que requer concentração, surge em casos como: tendo feito sucessivamente

DVVRFMDFDR
AVVRFMAFAR

se troque V por R: vai haver RR de duas proveniências...)

Em cada turma muito poucos alunos se tornam peritos em descodificação, mas é garantido: a troca de mensagens (de códigos desconhecidos) entusiasma a turma toda.

continua na pág. 34

Dia-a-dia com a Matemática

Depois de uma interrupção na revista n.º 11, *Dia-a-Dia com a Matemática* reaparece neste número com novos colaboradores e alguns desafios para os leitores de «Educação e Matemática».

A intenção com que esta secção foi criada era a de proporcionar um espaço para quem gosta de Matemática, para quem gosta de problemas, curiosidades e jogos. Não se pretendia que ela se limitasse apenas à apresentação de problemas, mas também à sua exploração e resolução. Muitos problemas foram aqui «lançados para a mesa», assim como na recente publicação da APM, «Dia-a-Dia com a Matemática, Agenda do Professor 89/90». É altura de «pegarmos» nesses problemas e começarmos a resolvê-los. Para isso contamos com a vossa colaboração.

Para dar o exemplo, neste número começamos nós.

Cálculos para quê?

«Sabendo que a medida da área do hexágono inscrito é 3, qual é a medida do hexágono maior?»

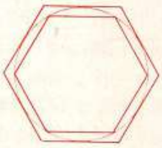


Fig. 1

«Qual é a razão entre a área do quadrado circunscrito e a área do quadrado inscrito no mesmo círculo?»

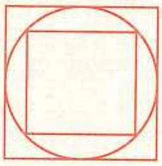


Fig. 2

Estes dois problemas das revistas 5 e 6 têm em comum a forma simples e elegante como podem ser resolvidos. Sem cálculos!

Começemos pelo problema dos hexágonos. Em vez de inscrever o hexágono como mostra a figura 1, gire-o até atingir a posição da figura 3. É possível então dividir o hexágono maior em 24 triângulos iguais, 18 dos quais formam o hexágono menor.

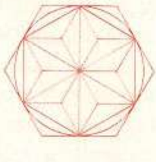


Fig. 3

A razão entre as medidas das áreas dos dois hexágonos é 18/24=3/4. Logo a medida da área do hexágono maior é 4.

No problema dos quadrados passa-se algo semelhante.

Fig. 4

Só que neste caso a razão entre as medidas das áreas é 1/2.

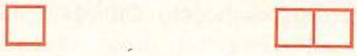
Será possível adoptar o mesmo tipo de exploração para outros polígonos regulares?

O Mundo dos Poliminós

Três semanas da Agenda do Professor 89/90 são dedicadas aos poliminós. Os jogos têm um papel importante na actividade matemática e os poliminós são um mundo de desafios. Propomo-nos desvendá-lo um pouco.

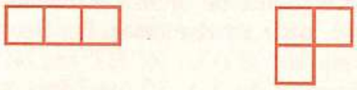
Os poliminós são figuras formadas a partir da união de quadrados unitários, agrupados em subconjuntos particulares, de acordo com o núnero de unidades envolvidas. A invenção dos poliminós é atribuída a Solomon Golomb que fala deles pela primeira vez em 1953.

Existe apenas uma maneira de construir um monominó ou um dominó:

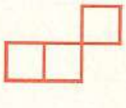


Com três quadrados é possivel obter duas formas diferentes.

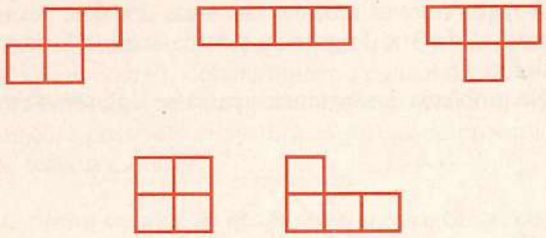
Existem dois triminós:



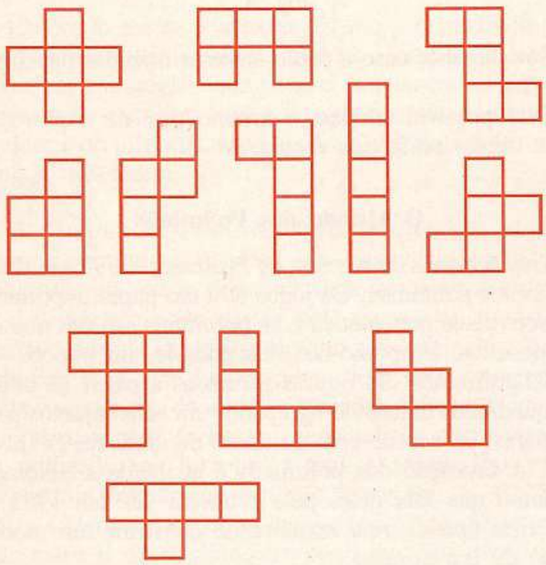
Repare que a união é sempre feita segundo as arestas. Esta figura, por exemplo, não é um triminó:



Com quatro quadrados pode construir cinco poliminós diferentes — os tetraminós:



E finalmente o pentaminós:



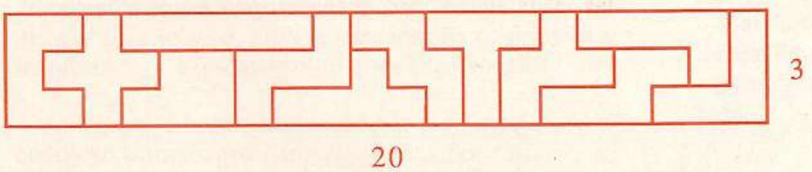
Estas doze figuras podem dar-nos muito em que pensar.

Para começar, já reparou com certeza que todos os pentaminós têm a mesma área. Mas nem todos tem o mesmo perímetro. Há uma excepção. Qual será?

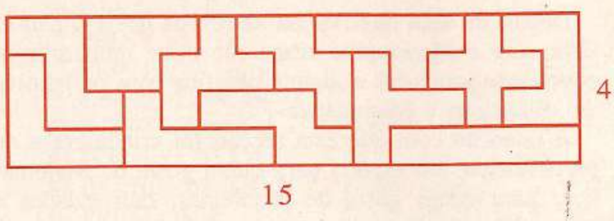
E já experimentou construir outras figuras a partir da combinação dos vários pentaminós?

Descobrir, por exemplo, todos os rectângulos com medida de área igual a 60, é uma actividade que, além de interessante, pode ser esgotante. Por isso vamos dar-lhe uma ajuda.

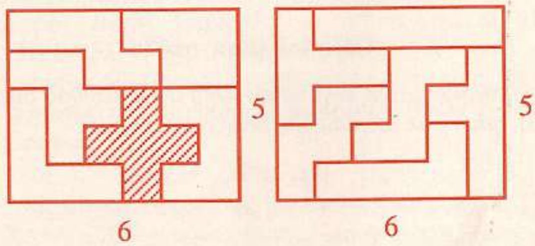
Para rectângulos de 3 × 20 tem duas soluções. A figura mostra uma delas, com a particularidade de poder ser separada em duas partes com a mesma forma.



Para rectângulos de 4 × 15 já temos 368 soluções diferentes. Eis uma delas:



Para rectângulos de 5 × 12 existem 1010 soluções. Na «Agenda» era proposta a construção de um rectângulo deste tipo, com a peça X numa posição determinada:



Esta solução tem a particularidade de poder ser separada em dois rectângulos de 5 × 6 que podem dar origem a um rectângulo de 6 × 10. Já agora, rectângulos de 6 × 10 são 2339.

Muito mais se pode dizer sobre pentaminós e, de um modo geral sobre poliminós. Agora é a sua vez. Para começar, pode tentar descobrir os 35 hexaminós, os 108 heptaminós, os...

Referências:

Guigo, D. (1980). *Les pentaminos. Jeux et Stratégie*, n.° 6, Dezembro 1980, p. 75-81.

Hollingsworth, C. (1984). *Perplexed by Hexed.* Mathematics Teacher, Outubro 1984, p. 560-562.

Mottershead, L. (1977). *Sources of Mathematical discovery.* Oxford: Basil Blackwell.

Ana Vieira Lopes
António Bernardes
José Manuel Varandas

PROBLEMA DO TRIMESTRE

Uma resposta sobre os dois últimos problemas

Sobre a resolução do n.º 10 apresentada no **E e M** n.º 11, oferece-se-me tecer alguns comentários:

a) Não seria necessário recorrer à base binária para resolver o problema. Mesmo na linguagem «vulgar» o tipo de pergunta seria do mesmo tipo. Para um número natural até 100 a pergunta seria, por exemplo: É maior do que 50? No caso afirmativo a pergunta seguinte seria, obviamente: É maior do que 75? E assim sucessivamente.

b) Não está definido, na pergunta, qual o universo dos números com que se está a trabalhar. No caso de estarmos a trabalhar com números naturais a resposta seria 2^{20} e não $2^{20} - 1$. Com efeito, um número natural até 2 (2^1) pode adivinhar-se com 1 pergunta, até 4 (2^2) com 2 perguntas, até 8 (2^3) com 3 perguntas, até 2^{20} com 20 perguntas.

c) Parece-me, no entanto, qualquer dos raciocínios nada prova relativamente à questão que é posta. Apenas dão solução à questão: Qual o maior número (inteiro não negativo ou natural, consoante os casos) que o primeiro jogador pode adivinhar, com uma sequência de 20 perguntas, em que através das respostas **sim** e **não** se estabelece uma dicotomia **equitativa**, isto é, cada conjunto de números a ser questionado é, necessariamente, dividido em duas partes iguais? Por outras palavras, a dicotomia gerada pelas respostas poderá não ser equitativa. Há uma «infinidade» de «modos de perguntar». Poder-se-ia perguntar, utilizando o conjunto de números referidos em a): «A raiz quadrada do número é maior (menor) do que 5?» (dividia o conjunto de números em dois subconjuntos não equicardinais); ou «O logaritmo decimal do número é maior (menor) do que 1?»; ou «É múltiplo de 3?», etc. Não está provado que este tipo de perguntas não conduza a números mais elevados que obedeçam às condições do problema.

Quanto ao problema n.º 11, resolve-se facilmente recorrendo a uma máquina de calcular, segundo o esquema:

Número	Raiz quadrada	Número inteiro seguinte (N)	N^2
1989	44,60	45	2025
19890	141,03	142	20164
198900	445,98	446	198916

Portanto o número seria 446.

Outro processo seria utilizando o computador. Por exemplo, em GW-BASIC (admitindo que o quadrado do número requerido seria, provavelmente, inferior a 1990×10^3), o programa poderia ser do tipo:

```
10 For X=0 TO 9
15 LET A=SQR(19890+X)
20 IF A=INT(A) THEN GOTO 100
25 NEXT X
30 FOR X=0 TO 9: FOR Y=0 TO 9
35 LET A=SQR(198900!+10*X+Y)
40 IF A=INT(A) THEN GOTO 100
45 NEXT Y: NEXT X
50 FOR X=0 TP 9: FOR Y=0 TO 9: FOR Z=0 TO 9
55 LET A=SQR(1989000!+100*X+10*Y+Z)
60 IF.A=INT(A) THEN GOTO 100
65 NEXT Z: NEXT Y: NEXT X
100 PRINT A
```

O resultado é, igualmente, 446.

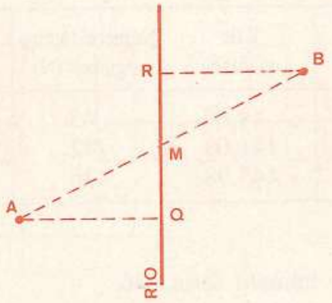
Alberto Canelas

Materiais para a aula de Matemática

Quase sempre, os problemas apresentados nas aulas de Matemática têm um método de resolução que leva a um resultado exacto. Ora, muitos dos problemas reais não têm um processo que conduza directamente à solução. É preciso ir por tentativas e aproximações e o resultado final nunca é exacto, embora se possa obter uma aproximação tão grande quanto se queira ou quanto os métodos de cálculo o permitam.

A actividade proposta é deste tipo. Corresponde, esquematicamente, a uma situação real e consegue-se chegar à solução por aproximações sucessivas. A quantidade de cálculos exigida é grande e a apresentação deste problema só faz sentido se os alunos estiverem habituados a trabalhar com calculadoras.

É conveniente que a turma se organize em grupos de 2 a 4 elementos. Cada grupo trabalhará com um valor diferente de K (relação entre os preços das duas zonas). Os valores de K propostos terão de ser maiores que um (é mais caro construir na zona pantanosa) e poderão variar, por exemplo, entre 1,5 e 4.



Depois de iniciados os trabalhos, será conveniente que o professor percorra os grupos discutindo as metodologias adoptadas: Que ponto do rio escolheram para origem? (Normalmente, será R ou Q). Se K=1, como seria a linha de caminho de ferro? Como K>1, valerá a pena investigar abaixo do ponto M ou pode-se concluir que aí é de certeza mais caro? E acima do ponto R?

Rapidamente os grupos compreenderão que terão de investigar a zona entre os pontos R e M. Alguns terão tendência a concluir à priori que o trajecto mais barato é ARB mas essa hipótese será abandonada logo que se teste um ponto intermédio.

As estratégias adoptadas para descobrir o ponto «ideal» variarão de grupo para grupo mas, de um modo geral, todos conseguem lá chegar sem dificuldade de maior.

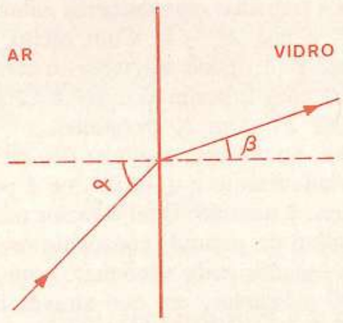
Pela nossa experiência, são precisas duas horas para esta 1.ª parte. É aconselhável que o professor peça a cada grupo que entregue a tabela com os resultados de todos os pontos testados.

Para a 2.ª parte será necessária uma hora, sendo conveniente logo no início pôr no quadro, para toda a turma, a lista dos valores de K (por ordem crescente) e os respectivos valores de **d**, obtidos na aula anterior.

A relação a descobrir é $\operatorname{sen} \alpha / \operatorname{sen} \beta = K$ ou $\operatorname{sen} \alpha = K \cdot \operatorname{sen} \beta$.

No final pode-se fazer uma discussão geral sobre o problema. Se o K for muito grande, isto é, se for muito caro construir em terreno pantanoso, a solução aproxima-se do ponto R. Por outro lado, se K tender para zero, ou seja, se for muito barato construir do lado direito do rio, então a ponte irá ficar cada vez mais próxima do ponto Q.

Por fim, um dos aspectos mais interessantes deste problema é que o trajecto mais económico para a construção do caminho de ferro é exactamente o mesmo que se obtém na refracção de um raio luminoso que passa de um meio óptico para outro com um índice de refracção K. Com efeito, um raio de luz, ao passar, por exemplo, do ar para o vidro muda de direcção. O ângulo que faz com a perpendicular à superfície do vidro (ângulo de incidência) é diferente com o ângulo que faz depois de entrar no vidro (ângulo de refracção). A luz não atravessa o vidro com a mesma facilidade com que atravessa o ar e à razão entre estes dois graus de «dificuldade» dá-se o nome de índice de refracção relativo K. No vidro, a luz anda mais devagar que no ar (anda com mais «dificuldade») e a razão entre as duas velocidades é justamente K.



Ora os ângulos de incidência e refracção estão relacionados pela expressão $\operatorname{sen} \alpha = K \cdot \operatorname{sen} \beta$, isto é, a luz refracta-se de modo a que o raio luminoso siga o trajecto mais «económico» entre dois pontos.

Como se pode ver, estamos perante duas situações, a construção de um caminho de ferro e a refracção da luz, que à partida pareciam nada ter a ver uma com a outra mas às quais se aplica o mesmo modelo matemático.

José Paulo Viana

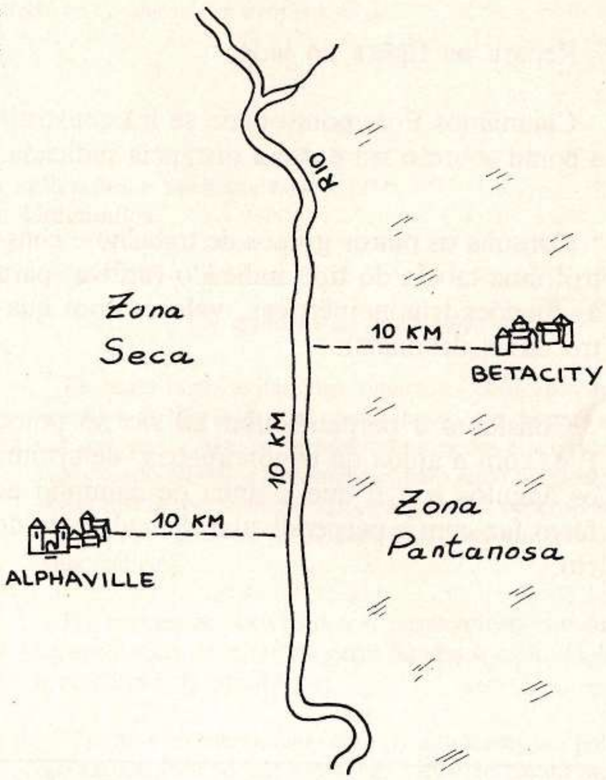
Um Caminho de Ferro Económico — 1.ª Parte

Um certo rio atravessa uma região em que de um dos lados o terreno é seco enquanto que do outro é pantanoso. Existem na zona duas cidades situadas conforme se indica no mapa ao lado.

Pretende-se construir uma linha de caminho de ferro desde Alphaville até Betacity. O preço de cada quilómetro de via em terreno seco é de 1000 contos, mas na zona pantanosa a construção é **K** vezes mais cara.

Descobre (com aproximação à centésima) em que local a linha deve atravessar o rio de modo que o preço total da obra seja o mais baixo possível.

(Para o teu grupo, o valor de **K** é ...).



Sugestões:

— Vai escolhendo sucessivas posições para a ponte e, para cada uma delas, calcula o preço do caminho de ferro.

— Organiza uma tabela com os resultados obtidos.

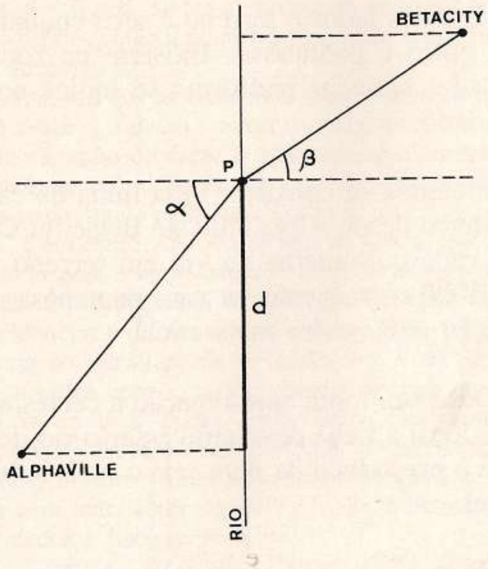
Um Caminho de Ferro Económico
— 2.ª Parte

Repara na figura ao lado.

Chamámos P ao ponto onde se irá construir a ponte sobre o rio e **d** é a distância indicada.

Consulta os outros grupos de trabalho e constrói uma tabela do tipo indicado (utiliza, para as funções trigonométricas, valores com quatro casas decimais).

Considera a perpendicular ao rio no ponto P e, com a ajuda da trigonometria, determina os ângulos α e β que a linha de caminho de ferro faz com a perpendicular de cada lado do rio.



GRUPO	k	d	α	β	sen α	sen β	cos α	cos β	tg α	tg β

Tenta descobrir uma relação entre K e uma das funções trigonométricas dos ângulos α e β. Que relação é essa?

Para este número seleccionámos...

O texto que se segue é a tradução de uma parte do artigo de Mogens Niss, intitulado **Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula**, *que corresponde a uma conferência plenária realizada em 1987 em Kassel (RFA) na III Conferência Internacional sobre o Ensino de Modelos e Aplicações da Matemática (ICTMA-3).*

Mogens Niss é Professor na Universidade de Roskilde (na Dinamarca). Personalidade destacada na área da Educação Matemática, é autor de numerosas publicações, membro do Comité Executivo do ICMI, e foi o presidente da Organização do ICTMA-4 realizado em 1989 na sua Universidade.

No presente artigo, Niss discute três questões relativas ao lugar das aplicações e modelos matemáticos nos currículos da nossa disciplina: porquê, o quê e como. A tradução diz respeito à secção dedicada à abordagem da primeira daquelas questões da qual dependem as respostas às outras, como admite o próprio Niss.

Segue-se o texto de Mogens Niss (1987) intitulado:

Finalidades e alcance das aplicações e modelos nos currículos de Matemática

Entre as muitas questões que merecem atenção ao discutirem-se as finalidades e o alcance da inclusão de aplicações e modelos na educação matemática, as seguintes são fundamentais:

(1) A questão de «porquê?». Para um dado nível educacional, aplicações e modelos devem fazer parte do currículo de Matemática? Se sim, porquê?

(2) A questão de «o quê?». Que conteúdos, produtos e processos relativos a aplicações e modelos devem ser objecto de estudo, ensino e actividades?

(3) A questão de «como?». Que meios (em termos de organização curricular, formas de aprendizagem e de ensino, material e outros recursos) são apropriados para actividades de aplicações e de modelação, e quais estão de facto à disposição de estudantes e professores?

Espera-se que a resposta a cada uma destas questões esteja dependente do segmento do sistema educativo que se está a considerar. Concordemos — aqui, não necessariamente noutros contextos — em distinguir entre três tipos de educação matemática dizendo respeito aos três seguintes níveis educacionais:

(i) A educação matemática geral para toda a população — predominantemente a cargo do sistema escolar — que deve preparar os estudantes para a sua vida pessoal e social como indivíduos e como cidadãos.

(ii) A educação matemática daqueles que se preparam para profissões que não são, num sentido específico, matemáticas, mas para as quais a Matemática tem importantes serviços a oferecer. Chamar-lhes-emos utilizadores da Matemática em profissões extra-matemáticas.

(iii) A educação matemática daqueles que se dirigem a profissões matemáticas, como investigadores, «aplicadores» da Matemática, ou professores de Matemática em níveis pós-elementares (isto é, a partir da escola secundária).

[...]

A questão de «porquê?»

Os mais importantes argumentos — conforme apresentados na literatura, em conferências, em debates educativos, etc — para se incluirem aplicações e actividades envolvendo modelos matemáticos num dado currículo da nossa disciplina parecem ser os seguintes, ordenados de acordo com uma especificidade crescente em relação à Matemática:

[1] promover actividades e desenvolver atitudes e competências de natureza geral ligadas à criatividade e à resolução de problemas;

[2] gerar e desenvolver entre os estudantes um potencial crítico face ao uso (correcto e incorrecto) da Matemática em contextos extra-matemáticos;

[3] preparar os estudantes para serem capazes de utilizar a Matemática e os seus modelos: em outras disciplinas; como indivíduos ou cidadãos, no presente ou no futuro; ou nas suas futuras profissões;

[4] estabelecer uma visão representativa e equilibrada da Matemática, da sua natureza e do seu papel no mundo, a qual deve incluir todos os aspectos essenciais da Matemática, sendo a aplicação da Matemática e de modelos matemáticos noutras áreas um desses aspectos;

[5] contribuir para a aquisição e compreensão de conceitos, noções, métodos, resultados e tópicos matemáticos, para lhes dar mais consistência ou para proporcionar motivação para o estudo de certos ramos da Matemática.

O carácter e estatuto destes cinco argumentos não são os mesmos. Os argumentos [1] e [5] dizem respeito, antes do mais, à táctica educacional. O argumento [1] dirige-se a aspectos formativos da educação geral e do desenvolvimento pessoal dos alunos, não a matérias específicas da Matemática. A Matemática e as aplicações e modelos são tomadas como um veículo para uma finalidade geral, mais do que por terem interesse próprio. Em princípio, qualquer veículo, seja ou não matemático, que sirva para a mesma finalidade deveria ser relevante para o currículo.

Pretendendo facilitar ou melhorar o ensino da Matemática, o argumento [5] está relacionado com a táctica de ensino de assuntos específicos. Aqui, as aplicações e modelos formam um veículo para este fim, substituível em princípio por qualquer veículo considerado efectivo para o mesmo fim. Por outro lado, o argumento não faria sentido se a Matemática fosse, ela própria, dispensada do currículo.

Perseguindo o propósito de preparar os estudantes para aspectos da vida exteriores ao ensino da Matemática, os argumentos [2] e [3] têm a ver com a estratégia educativa geral. Em ambos os argumentos, pretende-se que os estudantes comecem a lidar com a utilização real da Matemática no mundo; no argumento [2] de um modo analítico mas possivelmente passivo, no argumento [3] de um modo activo e construtivo mas possivelmente não-reflexivo. Para ambos os argumentos, a Matemática e as aplicações e modelos são componentes essenciais e não veículos substituíveis.

O argumento [4] pode ser encarado como a contrapartida estratégica (sobre assuntos específicos) do argumento táctico [5]. Diz respeito à percepção pelos alunos da Matemática como uma entidade, levantando questões de natureza epistemológica e, em parte, questões de natureza sociológica também. Comparando com os argumentos de estratégia geral [2] e [3] que olham para o mundo exterior à Matemática e vêem a Matemática como um factor nesse mundo, o argumento [4] olha para a Matemática, embora também na sua globalidade. Por isso, no argumento [4] a Matemática e o seu aspecto «aplicações e modelos» não podem ser substituídos por qualquer outra coisa.

Todos estes argumentos podem ser encontrados em discussões sobre cada um dos três níveis educacionais identificados no início deste texto. No entanto, para um dado nível, alguns argumentos parecem surgir com um maior peso no debate didáctico do que outros.

Uma forma breve de resumir isto consiste em preencher a coluna «porquê?» da matriz atrás apresentada:

	argumentos para «porquê?»
Formação geral promovida pela escola	[1], [3], [5]
Formação de utilizadores da Mat. em profissões extra-matemáticas	[3], [5]
Formação de matemáticos	[3], [4], [5]

Se isto constitui um resumo justo do debate relativamente à questão «porquê?», parece que os argumentos [2] e [4] não têm merecido muita atenção. (Embora o argumento [1] surja apenas uma vez, tal como o [4], representa uma atenção muito maior visto que diz respeito ao nível mais geral da Matemática escolar).

Na minha perspectiva, esta prioridade não é satisfatória. Tentarei explicar porquê e estabelecer uma prioridade alternativa. Mas é necessária uma base para o fazer. A decisão de incluir estudos e actividades envolvendo aplicações e modelos no currículo de Matemática de um dado nível educacional deve resultar de uma consideração dos objectivos globais da educação matemática para esse nível. Portanto, para cada um dos três níveis discutidos no presente texto, a análise começa por uma breve discussão do papel da Matemática e da educação matemática nesse nível. Claro que uma tal análise não pode evitar o envolvimento de valores socio-culturais; a que se segue reflecte os meus.

Primeiro a educação matemática geral. Várias razões para proporcionar à população em geral uma formação matemática, para além da aritmética elementar, têm sido apontadas através dos tempos. Com mais frequência, os contributos utilitários da Matemática como um instrumento para responder a necessidades relevantes para a sociedade têm justificado a presença da Matemática pós-elementar no currículo escolar. Por vezes, a educação matemática tem sido vista como um veículo para formar e desenvolver capacidades intelectuais (como o raciocínio lógico), ou como um meio para actividades criativas e mesmo recriativas. Algumas vezes, a Matemática tem sido encarada como uma fonte de experiências estéticas, ou como um testemunho do património cultural da humanidade.

Geralmente, aquilo que constitui a justificação da Matemática escolar é uma combinação destas (e outras) razões.

Para mim, a razão última para que a população em geral tenha acesso a uma educação matemática substancial é o facto de a Matemática estar a ser usada extensivamente e de forma crescente na sociedade, para o melhor e para o pior, de um tal modo que as profissões e as vidas das pessoas como indivíduos e como cidadãos são fortemente influenciadas por ela. O propósito principal da educação matemática é ajudá-las a tornarem-se indivíduos competentes e independentes, e não vítimas, em todos os aspectos das suas vidas que se relacionam com a Matemática na sociedade. Este raciocínio reconhece o interesse dual em criar uma força de trabalho com boa formação e em promover um desenvolvimento democrático da sociedade.

As outras razões atrás referidas também poderiam justificar uma posição da Matemática no currículo escolar mas numa escala muito menor do que aquela que a Matemática de facto e merecidamente ocupa.

Então, se a educação matemática dada na escola deve corresponder ao objectivo aqui considerado prioritário ela deverá proporcionar aos estudantes pré-requisitos para compreenderem, avaliarem e manejarem aspectos da utilização da Matemática noutras áreas. A utilização da Matemática concretiza-se através da construção e aplicação de modelos matemáticos, ainda que o processo de modelação nem sempre seja explícito. Se concordarmos que os pré-requisitos mencionados não são gerados automaticamente por um ensino focado apenas em conceitos, resultados e tópicos puramente matemáticos, somos levados a concluir que as aplicações e a modelação deviam fazer parte do currículo da Matemática escolar. Em termos dos argumentos previamente considerados estaremos a invocar os argumentos [2] e [3].

Isto não implica que os argumentos [1], [4] e [5] não tenham aqui um papel a desempenhar mas eles são argumentos derivados de segunda ordem, ao passo que os argumentos [2] e [3] consideram a importância das aplicações e da modelação como tais. No argumento [1], actividades de aplicação e de modelação constituem um veículo para um objectivo geral formativo. Por isso, só se quisermos perseguir este objectivo e estivermos convencidos que tais actividades são o único meio disponível para isso é que o argumento [1] tornará as aplicações e os modelos uma parte indispensável do currículo da Matemática escolar. Quanto ao argumento [4], a sua posição lógica neste contexto parece ser a seguinte: se a razão última para se dar uma educação matemática a todos os alunos na escola é o facto de a Matemática ser usada em diferentes situações na sociedade, o argumento [4] — que considera as aplicações e os modelos uma faceta importante da imagem da Matemática — nada acrescenta de novo e independente à argumentação. O mesmo se aplica ao argumento [5] que foca o papel das aplicações e modelos para apoiar a aquisição de conceitos, resultados e teorias matemáticas.

A razão básica para se proporcionar educação matemática a futuros utilizadores da Matemática numa dada profissão extra-matemática é, claro, o facto de a Matemática ser aplicada — ou aplicável — na preparação para ou na prática dessa profissão. Por isso, a Matemática é muitas vezes classificada como uma «disciplina de serviço» para tais profissões e para estudos que conduzem a elas.

O termo «profissão» deve ser tomado no seu sentido mais lato, indo desde negócios e vocações em que o papel da Matemática é modesto (embora esteja presente) até actividades académicas em áreas de investigação e desenvolvimento para as quais o envolvimento da Matemática é crucial.

À primeira vista parece fácil estabelecer que as aplicações e os modelos devem ser incluídos no currículo de Matemática que prepare para estas profissões simplesmente por causa do argumento [3]. Contudo, eu gostaria de acrescentar o argumento [2] pelas razões que se seguem.

Quando consideramos o leque de áreas para as quais a Matemática é uma disciplina de serviço, é importante ter presente que o papel que a Matemática desempenha em diferentes áreas varia muito de umas para outras. Estamos perante não só uma variação em grau e extensão mas também uma variação em carácter.

Em áreas como a Física, Astronomia, Química Teórica, partes da Economia Teórica, e muitos ramos de Engenharia, a Matemática integra-se na própria formação dos conceitos e teorias científicos de base, muitos dos quais não podem sequer ser formulados sem a Matemática. Por isso, para estas áreas a Matemática não é um mero meio, entre outros, de formular conceitos e teorias, não se pode simplesmente passar sem a Matemática. Além deste envolvimento integrativo da Matemática, há o papel altamente complexo que a Matemática desempenha nestas áreas na procura de soluções para problemas e para se estabelecerem resultados, etc. Uma característica geral nestas áreas é o facto de a Matemática ser necessária para se procurarem respostas tão exactas quanto possível, e na medida em que não se possam obter respostas exactas pretendem-se estimativas exactas dos erros.

Para disciplnas como Biologia, muitos ramos da Economia, etc., a Matemática é, embora altamente relevante e útil, não essencial no sentido em que o era para o grupo de disciplinas atrás citadas. Em Biologia e Economia, há muitas teorias e resultados que fazem sentido e podem ser formulados em termos qualitativos sem o uso da Matemática, mas podendo beneficiar fortemente de uma formulação matemática. Outra grande diferença entre a Física e, digamos, a Macro-Economia é que as teorias físicas são estabelecidas através de uma inter-relação muito elaborada entre a experimentação/observação e os modelos matemáticos teóricos, enquanto em Macro-Economia as experiências não são geralmebnte possíveis. Portanto, em Macro-Economia, só muito raramente se pretendem formulações quantitativas estabelecidas de forma matemática para serem exactas, antes se esperam formulações qualitativas. O mesmo se aplica à Biologia, ainda que a experimentação em Biologia seja muitas vezes possível. Em geral, seria demais esperar formulações quantitativas exactas, principalmente por que os seres vivos têm comportamentos muito mais complexos do que os sistemas físicos «mortos».

Se o papel desempenhado pela Matemática noutras áreas tem uma grande variação em carácter no que diz respeito às disciplinas académicas, a variação torna-se ainda maior quando se considera todo o leque de profissões extra-matemáticas. Isto indica que a aplicação da Matemática em contextos extra-matemáticos é uma questão problemática e não trivial. As aplicações e os modelos envolvem complicações práticas, técnicas, científicas, filosóficas e mesmo políticas que merecem uma atenção cuidadosa e crítica. Portanto, a inclusão das aplicações e modelos no currículo de Matemática para utilizadores em profissões extra-matemáticas de todos os tipos deve também assentar no argumento [2]. Quanto aos argumentos [1], [4] e [5] o seu lugar neste contexto é quase idêntico ao que tem no contexto escolar, pelo que não se acrescentarão agora novos comentários.

Se, finalmente, nos voltarmos para a educação matemática de matemáticos profissionais encontramos uma situação algo diferente. Para estes profissionais e para as suas funções, o papel da Matemática não pode ser reduzido à aplicação a outras áreas, ainda que sejam as aplicações que constituem o interesse último do sistema que os emprega. São matemáticos, seja em investigação pura, em aplicações gerais ou no ensino (para além do nível da aritmética elementar). Por definição, a Matemática é uma componente crucial e indispensável no seu trabalho. Na minha opinião, contudo, é importante que obtenham uma perspectiva representativa e equilibrada da Matemática em todos os seus aspectos, incluindo as aplicações e modelos. Não se tornam só investigadores, «aplicadores» ou professores de Matemática mais competentes se a sua perspectiva da Matemática for mais lata do que aqueles que apenas têm no seu campo de visão a Matemática como um edifício teórico. Também as suas funções sociais como cidadãos especializados ganham em cultura, e portanto em qualidade, se forem formados para se tornarem profissionais com um espírito aberto e sentido crítico e não apenas especialistas colocados como rodas num enorme sistema social de cujo modo de funcionamento não têm consciência.

Por isso, invocarei primeiro o argumento [4] e, em segundo lugar — referindo o raciocínio anterior relativo ao carácter variável do papel da Matemática em diferentes áreas — o argumento [2] para justificar a inclusão de estudos sobre aplicações e modelos no currículo para futuros matemáticos profissionais. Uma vez mais, alguns dos restantes argumentos desempenham igualmente algum papel, excepto talvez o argumento [1]. O argumento [3] é derivado dos argumentos [4] e [2]: se os estudantes devem obter uma perspectiva genuina e substancial da aplicação da Matemática, devem preparar-se como se tivessem que praticá-la — pelo menos em pequena escala. (Estará ainda presente uma razão pragmática, a da preparação dos estudantes para um leque mais largo de possibilidades profissionais). Finalmente, o argumento [5] é relevante na preparação de futuros matemáticos na medida em que aplicações e modelos contribuem de facto para a motivação ou para apoiar a aquisição e compreensão de conceitos, métodos, resultados e tópicos de Matemática que fazem parte do respectivo nível educacional.

Resumindo as minhas respostas à questão «porquê?»:

	argumentos para «porquê?»
Formação geral promovida pela escola	[2], [3]
Formação de utilizadores da Mat. em profissões extra-matemáticas	[2], [3]
Formação de matemáticos	[2], [4]

Embora já implicíto na discussão anterior deve ficar explícito que estas respostas implicam, para todos os níveis educacionais, a resposta «sim!» à questão «Devem as aplicações e modelos fazer parte do currículo de Matemática para um dado nível educacional?».

Selecção e tradução de Paulo Abrantes

Códigos e mensagens (conclusão)

Post-Scriptum

1) Já depois de passada a escrito a minha experiência com os *códigos e mensagens* encontrei, por acaso, uma experiência ficcionada no livro «UMA AVENTURA NO SUPERMERCADO» de Ana Maria Magalhães e Isabel Alçada. (Da colecção «Uma Aventura...» da Editorial «Caminho».)

Tudo começa com uma inocente pasta de dentes e, depois, o João (e o seu cão Faial) e os amigos (Chico, Pedro e as gémeas Luísa e Teresa), de aventura em aventura, acabam por descobrir e neutralizar um bando de contrabandistas de diamantes.

Ora, a certa altura, os nossos amigos interceptaram uma mensagem codificada trocada entre elementos do bando e tiveram de puxar pela cabeça até descobrirem o código. (Era assim: ao A correspondia o C e assim sucessivamente, adiantando sempre duas letras.) Curiosamente as estratégias de escrita da mensagem (pelos contrabandistas) e de decifração (pelos jovens) não são diferentes das usadas por mim com os meus estudantes. (Por exemplo, não são grafados os acentos.) Juro que não ensinei os contrabandistas ... e os jovens também não!

2) Alguns dos nossos colegas do Ensino Preparatório, ao exemplificarem «pares ordenados», referem, estas trocas de letras.

3) «*Last but not least*»

As actividades que aqui relatei foram desenvolvidas ao longo de vários anos lectivos, em turmas do 7.º unificado.

Não posso já precisar qual a origem da ideia. Mas certamente que a referência, num artigo do Raúl Carvalho («Estatísticas, Português e computadores», publicado no «PROFMAT» n.º 2, Set. 86, pp. 82/89), a uma actividade semelhante, veio, na altura, encorajar-me a prosseguir.

É assim: a comunicação aos outros do que nós vamos produzindo é apenas um dos meios, mas essenciais, de participar no movimento pela renovação do ensino da matemática.

Uma aplicação do processamento de listas

Uma das aplicações do Logo pode consistir na implementação de modelos simples relativos a fenónemos reais. Nesta aplicação será sempre aconselhável começar por um modelo bastante simples de implementar e progressivamente refinar o modelo através da incorporação de mais elementos, e portanto mais parâmetros, no conjunto de procedimentos que o concretiza.

Existe um processo vulgarmente utilizado em Logo quando se pretende aplicar um mesmo conjunto de operações a cada um dos elementos de uma lista. Este processo geral consiste em tomar a lista, retirar o primeiro elemento, aplicar-lhe as operações e continuar o processo com os restantes elementos da lista até esta se esgotar.

Repare-se no seguinte exemplo: pretende-se escrever no ecrã cada uma das letras da lista **K=[A B C]**. A instrução **PRINT** destina-se a escrever no ecrã o input correspondente. Este input é o primeiro elemento da lista **K** (isto é, **FIRST :K**). E o processo deverá continuar com a nova lista que se obtém retirando esse elemento à anterior (isto é, a lista **BF :K**). Este processo repetir-se-á até que a lista em processamento seja totalmente esvaziada. O procedimento **ESCREVER** resolve a questão:

```
TO ESCREVER :K
IF EMPTY? :K [STOP]
PRINT FIRST :K
ESCREVER BF :K
END
```

A execução do procedimento **ESCREVER** tem a seguinte estrutura:

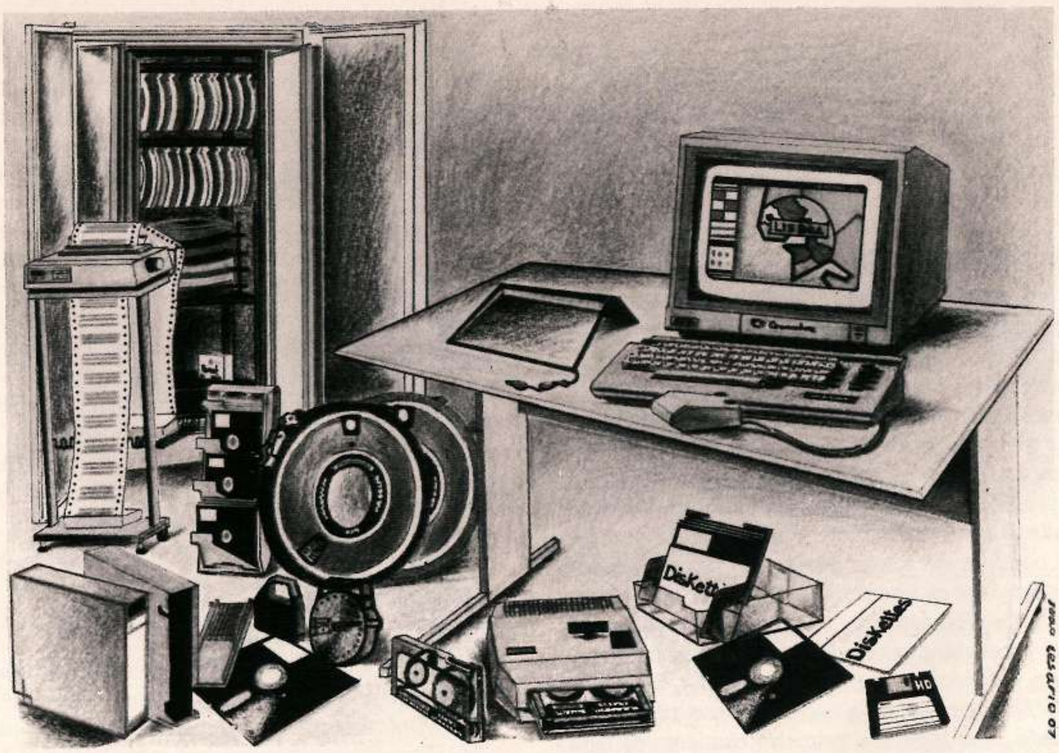
ESCREVER	EMPTY?	FIRST:K	PRINT	BF:K
1.º [A B C]	não	A	A	[B C]
2º [B C]	não	B	B	[C]
3º [C]	não	C	C	[]
4º []	sim	—	—	—

Uma aplicação interessante deste processo de aplicação de um conjunto de operações de certo tipo a todos os elementos de uma lista é a concretização de um modelo simples do processo de desenvolvimento de um foco de incêndio (apresentado nesta mesma revista no artigo sobre Modelos e Aplicações).

O fogo inicia-se no canto inferior esquerdo de um recticulado e desenvolve-se para cima e para a direita de acordo com o modelo.

```
TO FOGO :M
CT CG HT
MAKE "L [[0 0]]
MAKE "P :M
EXECUTAR
END


TO EXECUTAR
PINTAR :L
MAKE "LI :L
MAKE "L [ ]
IF EMPTY? :LI [PRINT [FOGO EXTINTO!] STOPALL]
PEGAR :LI
EXECUTAR
END


TO PEGAR :LL
IF EMPTY? :LL [STOP]
MAKE "PO FIRST :LL
IF PRO [MAKE "NOVO LIST FIRST :PO 1+LAST :PO ACTUALIZAR]
IF PRO [MAKE "NOVO LIST 1+FIRST :PO LAST :PO ACTUALIZAR]
PEGAR BF :LL
END


TO ACTUALIZAR
IF AND NOT MEMBER? :NOVO :LI NOT MEMBER? :NOVO :L [MAKE
"L LPUT :NOVO :L]
END


TO PINTAR :K
IF EMPTY? :K [STOP]
PU
SETPOS FIRST :K
PD
FD 0
PU
PINTAR BF :K
END


TO PRO
IF :P > RANDOM 100 [OUTPUT "TRUE]
OUTPUT "FALSE
END
```

continua na pág. 38

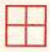


VAMOS JOGAR

Hoje vamos jogar ao «Jogo Topológico de Black». Este jogo foi inventado por Black, matemático americano.

N.º de jogadores: 2

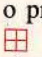
Material: 1 tabuleiro 4×4
16 peças de dupla face:



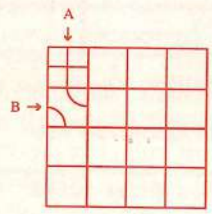
numa face

na outra face

Regras:

Depois de escolher quem é o primeiro jogador, este coloca uma peça com a face  virada para cima na casa do canto superior esquerdo do tabuleiro. O 2.º jogador escolhe um dos dois caminhos possíveis e prolonga-o com outra peça com a face que quiser,  ou  virada para cima.

Exemplo:



O 2.º jogador escolheu o caminho A e colocou a sua peça com a face  virada para cima.

A seguir cada jogador irá colocar, na sua vez de jogar, uma nova peça da maneira que quiser, mas sempre de modo a prolongar o caminho escolhdo. O objectivo do jogo é fazer um caminho ininterrupto que ligue o canto superior esquerdo ao canto inferior direito do tabuleiro.

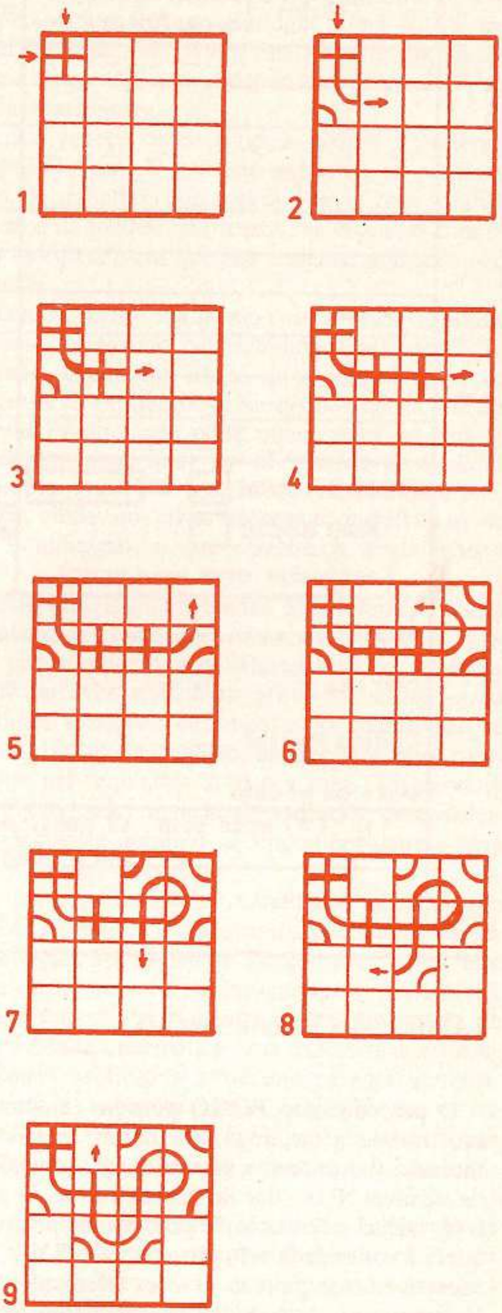
Durante o jogo o jogador que levar o caminho até algum dos limites do tabuleiro, perde.

Nota: Também se pode jogar num tabuleiro 5×5 com 25 peças ou num tabuleiro 6×6 com 36 peças.

Adaptado de: Guik, E. (1989) — Jogos Lógicos, Editora Mir.

Informação: Existe no mercado o jogo de estratégia TRAX (Fournier Vitoria Espanha) que utilizando o mesmo tipo de peças de Black tem outros objectivos também com interesse.

Exemplo de uma partida de Black:



O 2.º jogador perde porque qualquer que seja a sua jogada a curva alcançará o limite do tabuleiro.

Rita Vieira
Paula Teixeira
José Paulo Viana

PUBLICAÇÕES – ENVIO PELO CORREIO

Envie fotocópia da ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para

Henrique M. Guimarães
Faculdade de Ciências
Av. 24 de Julho, 134, 4.º 1300 LISBOA

Títulos publicações ou software	nº de ex.	preço unitário (*)	custo publicações	custo software
SÓCIO DA APM ☐ Nº	subtotais →			
NÃO SÓCIO ☐ (assinalar com uma cruz)	portes do correio	pub. 15%	+	
		software fixo 120$00		+
		totais parciais	(1)	(2)
		valor total ((1) + (2)) →		

Nome ....

Morada ....

Código Postal ....

Data do pedido ....

Para uso da APM — Pedido recebido em

ass.: — Respondido em

(*) note bem: as publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM

LOGO.MAT (conclusão)

O procedimento **FOGO** permite (a) limpar o ecrã, escondendo a tartaruga, (b) definir o foco inicial do incêndio (neste caso a árvore (0,0)), (c) definir através da variável :P o valor da probabilidade de propagação, e (d) iniciar a execução do processo de propagação. Esta tarefa é comandada pelo procedimento **EXECUTAR** que sucessivamente pinta as árvores (elementos da lista **:L**) já queimadas (através do procedimento **PINTAR**). A seguir, guarda a identificação das árvores em estado i (incendiadas) na lista **:LI**, e redefine a lista **:L** de novo em vazio e permite a «continuação» do fogo (através do procedimento **PEGAR**). Este procedimento **PEGAR** utiliza o resultado do procedimento **PRO** destinado a gerar valores experimentais da probabilidade (com a função **RANDOM**) e compará-los com o valor da variável **:P** previamente definida. **PEGAR** define uma nova célula através da variável **:NOVO** que é colocada no estado i no caso de não se encontrar nesse estado ou no estado 0 (isto é, ardida). Este processo é realizado a partir de todas as árvores que estão a arder. Só após esta fase elas são pintadas no ecrã através do procedimento **PINTAR** no processo recursivo do procedimento **EXECUTAR**.

Os procedimentos **PEGAR** E **PINTAR** têm a estrutura recursiva comum que permite aplicar sistematicamente um dado conjunto de instruções aos elementos das listas **:LL** e **:K**, respectivamente.

João Filipe Matos

PENSE NISTO:

No ano lectivo findo, foram introduzidas algumas modificações ao regime de acesso ao ensino superior. Assim, suprimiu-se o exame de aferição do 12.° ano, criou-se uma prova geral de acesso (PGA), da responsabilidade do Ministério da Educação, que é suposta avaliar o desenvolvimento intelectual dos candidatos, o seu domínio da língua portuguesa e a sua maturidade cultural. Finalmente, as escolas de ensino superior, que assim o entenderam, sujeitaram os cadidatos a provas, ditas específicas, da responsabilidade dos docentes da próprias escolas.

No processo de candidatura, implementou-se, ainda, um sistema de bonificações que privilegiava, decrescentemente, as três primeiras escolhas dos candidatos.

Curiosamente, em todos os 22 cursos disponibilizados pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, a única prova específica exigida foi a de Matemática e isto, quer se tratasse de um curso de Matemática, quer se tratasse de um curso de Biologia Vegetal ou de Recursos Faunísticos e Ambiente. Também os candidatos aos cursos de Biologia Marinha e Pescas ou de Hortifruticultura, oferecidos pela Universidade do Algarve, tiveram de realizar, única e exclusivamente, uma prova de Matemática.

Não é, então, preciso saber Química para prosseguir estudos num curso de Química Aplicada? Não interessa possuir conhecimentos de Biologia para vir a especializar-se em Biologia Vegetal?

Precisará um candidato às licenciaturas em Hortifruticultura ou em Recursos Faunísticos da mesma bagagem matemática que um outro que pretende prosseguir estudos em Matemática?

Não se põe em causa que todos precisem de saber raciocinar logicamente, que todos sejam capazes de afrontar uma situação problemática e identificar os parâmetros que a definem, que todos saibam seleccionar e procurar a informação necessária à resolução do problema, entretanto identificado, que todos tenham desenvolvido uma atitude investigativa, que todos saibam argumentar a favor ou contra hipóteses formuladas, ..., aliás capacidades necessárias a quaquer cidadão interveniente na sociedade actual.

Não me parece é que, para compreender as estruturas biológicas seja necessário conhecer as propriedades que diferenciam as estruturas algébricas; não me parece é que um licenciado em Química Aplicada tenha que dominar os mistérios das entidades trigonométricas!

Os resultados, tornados públicos na primeira semana de Janeiro, revelam alguns aspectos surpreendentes. Nestes não se incluem, porém, os 15 000 candidatos que viram fechadas as portas do ensino superior, sem que, porém, tenham outras alternativas válidas para além de um mercado de trabalho saturado e para o qual não têm preparação específica.

O que é surpreendente é que as médias de acesso aos diferentes cursos da Faculdade de Ciências e da Faculdade de Ciências e Tecnologia, ambas em Lisboa, se situem, na sua grande maioria, abaixo dos 50%! O que nos preocupa é que a média de acesso à opção Ensino seja, quase sempre (excepto em Geologia), inferior à da área respectiva: 67,9% em Biologia conta 46,6% em Ensino da Biologia; 64,5% em Física *versus* 36,6% em Ensino da Física; 47,2% em Matemática contra 29% em Ensino da Matemática.

Uma coisa parece certa: a opção ensino é preterida pelos nossos jovens. E nós que sofremos as péssimas condições de trabalho, que sobrevivemos com salários muito abaixo da média, que temos, no trabalho com os jovens, o único estímulo que nos acalenta, podemos perceber porquê.

Especulemos, agora, um pouco com a média de acesso para o curso de Ensino da Matemática, os tais 29%! Suponhamos, então, um aluno que, nem se esforçou muito, nem teve explicações. Nestas condições, 10 é a média geral mínima que pôde obter, quer no fim do curso complementar, quer no 12.° ano e é, ainda, a média mínima possível a Matemática neste último ano. Admitamos, ainda, que os candidatos não usufruiram de qualquer bonificação, o que extremaria ainda mais a situação.

Atendendo aos pesos atribuídos às diferentes médias e quer analisemos as situações extremas — 40% na PGA e 0% na prova específica de Matemática ou, inversamente, 0% na PGA e 40% na prova específica — ou as diferenntes situações intermédias, o quadro não se altera muito, isto é, o candidato, em nenhum caso, mostra deter os pré-requisitos a Matemática, em nenhum caso, revela possuir maturidade cultural, desenvolvimento intelectual e domínio da língua portuguesa para ingressar numa Universidade.

Mas, afinal, quem são os candidatos ao curso de Ensino da Matemática? Para quantos candidatos é essa a primeira opção? Para quantos não constitui, antes, este curso uma opção de recurso que garante a sua entrada nas Universidades? Para quantos destes jovens é, de facto, a actividade matemática uma experiência estimulante? Quantos sentirão a ansiedade perante um problema, quantos experimentarão o júbilo de o ter resolvido? Quantos conduziram, já, uma pequena investigação, quantos argumentaram em defesa de uma conjectura?

Não acreditando que a frequência da Universidade contribua, por si só, para o desenvolvimento intelectual dos alunos, para aumentar a sua cultura geral e para lhes proporcionar o domínio da língua portuguesa, não tendo grandes expectativas quanto à influência da Universidade na modificação das atitudes dos alunos face à Matemática e à sua aprendizagem, pergunto: que vivências se espera que estes futuros professores proporcionem aos seus jovens alunos?

Que futuro para a educação matemática neste país? Pense nisto!

Leonor Moreira

Encontros Internacionais sobre Educação Matemática em 90

PME-14 no México

A 14.ª conferência do PME (International group for the psychology of mathematics education) realiza-se no México, em Oaxtepec, Estado de Morelos (a 100 Km da Cidade do México), de 15 a 20 de Julho.

Contactar: Teresa N. de Mendicut, Bosque de Montezuma, N.º 98, La Herradura, Naucalpan, 53920 México.

CIEAEM-42 na Polónia

O 42.º Encontro da CIEAEM (*Comission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*) decorrerá na Polónia, em Bielsko Biala (perto de Cracóvia), de 23 a 30 de Julho e será dedicado à memória de Anna Zofia Krygowska.

O tema do Encontro é «o professor de Matemática num mundo em mudança». As línguas de trabalho são o inglês e o francês.

O custo da inscrição é de 50 $US (35 $US para acompanhantes);

O custo total (inscrição, alojamento, refeições, actas e excursão) será de cerca de 275 $US, desde que o alojamento seja em residências universitárias.

Contactar: Rijkje Dekker, ISOR University of Utrecht PO BOX 80140, 3508 TC Utrecht, The Netherlands.

I-CIBEM em Sevilha

O I Congresso Iberoamericano de Educação Matemática decorrerá na Universidade de Sevilha, de 24 a 29 de Setembro. Organizado pela Sociedad Andaluza de Educacion Matematica «Thales», conta com o apoio de diversas associações entre as quais a APM. As línguas oficiais são o português e o espanhol.

Os sócios das associações espanholas e da APM portuguesa, e ainda os participantes latinoamericanos, beneficiam de um preço especial de inscrição.

Contactar: I-CIBEM, SAEM «Thales», Facultad de Matematicas, Apartado 1.1.60, 41080 Sevilla, España.

A Direcção da APM enviou a todos os seus sócios informação pormenorizada sobre este Congresso.

Por uma visão... (conclusão)

como algo *separado* que se faz, eventualmente no final de alguns capítulos como aplicação dos assuntos matemáticos que até então foram aprendidos. Resolver problemas deve ser encarado como um objectivo de ensino, como um conteúdo a trabalhar com os alunos, como uma via educativa tendo em vista a aquisição de conhecimentos em Matemática (no seu sentido mais amplo), o desenvolvimento de capacidades necessárias ao desenvolvimento do aluno enquanto pessoa, ao estudo da Matemática e das outras ciências, a uma efectiva participação crítica e interventiva na sociedade.

Deste modo, poderão ser concretizadas as principais potencialidades formativas da Matemática e, digamos, a que parece ser a sua *vocação* principal que é a de constituir um meio indispensável para a interpretação da realidade, para a «compreensão das estruturas do universo». Estas são, aliás, palavras de Joan Hall (NCTM, 1987, p.iii) numa formulação particularmente feliz a respeito, podemos dizer, do papel da Matemática: «O estudo da Matemática deve estimular e incrementar a nossa curiosidade de modo a que formulemos e resolvamos problemas que alarguem a nossa compreensão e apreciação das estruturas subjacentes ao universo. Neste processo, experimentamos o prazer de um desafio, a excitação do sucesso, e o desenvolvimento de uma boa imagem de nós próprios».

Nota: Este artigo integrou o texto «Reflexões para o ensino das Ciências no 3.º ciclo do Ensino Básico» publicado na revista *Ciência, Tecnologia e Sociedade*, n.º 7/8 de Janeiro/Junho de 1989.

Referências

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Davis P. e R. Hersh (1981). *The mathematical experience*. Boston: Birkauser.

Dieudonné, J. (1982). Mathématiques vides et significatives. In *Penser les mathématiques*. Paris: Seuil.

Lichnerowicz, A. (1966). Notas sobre as Matemáticas e a realidade. In J. Piaget (org.) *Lógica e conhecimento científico*. Porto: Livraria Civilização.

NCTM (1980). Agenda para acção: *recomendações para o ensino da Matemática nos anos 80* (tradução portuguesa). Lisboa: APM.

NCTM (1987). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Quadling, D. (1983) De l'importance des mathématiques dans l'énseignement. *Prespectives*, vol. XII, No. 4, 445-454.

Stone, M. (1961). La réforme des études de mathématiques. In *Mathématiques Nouvelles*. Paris: OECE.

Texto Editora

89-90

Adoptar um bom manual é combater o insucesso escolar

PUBLICAÇÕES EM DESTAQUE

MATEMÁTICA 89/90

MATEMATICANDO
5.º ANO

MATEMATICANDO
6.º ANO

• MATEMATICANDO PROBLEMAS

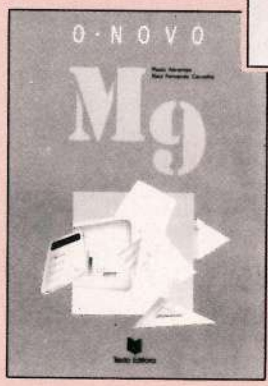
Isabel Moura
Cristina Loureiro
M.ª José Correia de Oliveira
Maria José Delgado

MATEMÁTICA 5
Leonor Filipe
Leonor Moreira

Leonor Filipe
Leonor Moreira
MATEMÁTICA 6

O NOVO M 7

O NOVO M 8



O NOVO M 9
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

EXERCÍCIOS
M 7, M 8 e M 9
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

- **M 10 e M 11**
  Paulo Abrantes
  Raul Fernando de Carvalho
- **M 12**
  Armando Machado
  Paulo Abrantes
  Raul Fernando de Carvalho
- **EXERCÍCIOS**
  M 10, M 11 e M 12
  Inês dos Santos
  Judite Barros
  Paulo Abrantes
  Raul Fernando de Carvalho

MATERIAL DIDÁCTICO PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Colecções de transparências — 7.º, 8.º e 9.º anos
Software — Equações/Núm. int. relativos — 7.º ano
Utilidades I — 7.º ano
Geometria Analítica — 10.º ano
Gráficos de funções — 10.º/11.º anos

CONHEÇA AS NOSSAS PUBLICAÇÕES — CONSULTE O NOSSO CATÁLOGO

RIGOR E QUALIDADE... Texto A TEXTO

ÍNDICE

SECÇÕES