Educação √ Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2016

137

Abril ∞ Maio ∞ Junho

Preço 7.50€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Catarina Delgado
	Cristina Cruchinho
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	Manuela Pires
	Paulo Alvega
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número
Mário Baía Edição gráfica

Capa Mário Baía
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Junho 2016
Tiragem 1250 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev/Mar, Abr/Mai/Jun, Jul/Ago/Set e Out/Nov/Dez

Impressão
Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.º 8
Casal da Espinheira
2560–401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre a capa

Suspensos por um curto período de tempo, por motivo de incêndio, retomaram a sua função permitindo novos desafios através de percursos acidentados, difíceis, envolvendo-nos num ambiente agreste, mas também belo e, por vezes, espetacular.
O parágrafo anterior podia ser associado ao debate mais recente sobre a educação em Portugal, mas refere-se, apenas, aos *Passadiços do Paiva* que ilustram a capa deste número.
(Foto dos *Passadiços do Paiva* da autoria de Ana Matos)

Mário Baía

Neste número colaboraram

Catarina Ferreira, Cristina Cruchinho, Elsa Barbosa, Filipa Machado, Gisela Araújo, Grupo de Trabalho de Geometria, Henrique Manuel Guimarães, Inês Santos, Joana Brocardo, Joana Mata-Pereira, João Almiro, João Carlos Terroso, João Pedro da Ponte, Joaquim Félix, Nadia Ferreira, Rita Bastos, Sofia Delgadinho.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

E agora?

Não há memória de uma tal desorganização e pobreza ao nível dos documentos curriculares oficiais. Não temos Currículo Nacional e os Programas constituem tristes legados de um ministro e de uma equipa profundamente ignorantes do modo como se aprende Matemática e até, do que é a Matemática. Temos um conjunto de indicações curriculares que perspetivam para os nossos alunos uma experiência matemática pobre, centrada no domínio de técnicas e no uso de simbologia.

E agora? O que fazer? Uma via que me parece fazer sempre sentido é a de continuar a afirmar que estes Programas têm de mudar. No entanto, urge igualmente perspetivar o que podemos fazer aqui e agora, com estes Programas, com esta avaliação externa e com os alunos que temos. Infelizmente não há ‹toques› de magia que possam facilitar esta tarefa complexa. Mas, felizmente há possibilidades de intervenção nas aulas de Matemática reais, que os documentos curriculares oficiais não nos podem impedir de fazer.

A minha proposta, os meus *agora*, situam-se a três níveis. Num primeiro, o *agora 1*, penso que devemos ter sempre presente uma perspetiva global clara que permita definir opções locais, nela enquadradas. Globalmente considero que importa que a aprendizagem da Matemática garanta a todos os estudantes o acesso ao poder do raciocínio matemático e à aplicação da sua compreensão matemática de maneira criativa e eficiente. Isto significa que as opções locais não se podem limitar à aquisição e uso de técnicas matemáticas que se aprendem repetitivamente e se aplicam na resolução de exercícios tipo, ou seja, não se situam na concretização de (quase) nenhuma das metas atualmente em vigor. No entanto, esta mesma perspetiva global está referida nos Programas, embora de uma forma mesmo muito difusa. A minha proposta, o meu *agora 1*, é colocá-la em primeiro plano.

Num segundo nível, o *agora 2*, proponho uma real flexibilidade curricular. Penso que importa ter um currículo flexível, que trabalhe as competências matemáticas fundamentais, mas que inclua o estudo de temas diversos, escolhidos pela escola e pelos professores e trabalhados de acordo com o ritmo e dinâmica de cada turma. Sei que até agora temos tido uma experiência reduzida de flexibilidade curricular, mas todos os estudos destacam as suas potencialidades. O meu *agora 2* propõe que se retomem os trilhos ensaiados no Currículo Nacional de 2000 e se aprofunde a flexibilidade curricular.

O *agora 3* incide nas tarefas e realça a ideia de que os estudantes devem poder explorar vários tipos de tarefas matemáticas incluindo as que envolvem a escolha de estratégias e aquelas para as quais existe uma estratégia ideal; aquelas em que há várias soluções possíveis e aquelas que têm uma única resposta correta; aquelas que envolvem o desenvolvimento e utilização de modelos matemáticos; aquelas que incorporam ideias através de sequências de conteúdo; e aquelas que envolvem pensar em mais do que uma disciplina. Isto quer, sobretudo, dizer que as tarefas a propor na aula de Matemática devem ser de natureza diferente e que não podemos, como indicam os Programas, restringir a atividade matemática dos alunos à resolução de exercícios e de problemas de processo.

Sei que os *agora* que proponho são muito gerais e que há todo um caminho árduo a fazer para os podermos concretizar. Mas, e *agora*? Perdemos as oportunidades diárias que temos de apoiar uma aprendizagem da Matemática significativa ou de propor tarefas relevantes ao nível da Matemática que envolvem e que sabemos que podem entusiasmar os alunos? De facto, operacionalizar os *agora* 1, 2 e 3 não é fácil. No entanto, se pensarmos bem, eles provavelmente resumem-se ao que já muitos sempre temos feito. ‹Basta› saber analisar criticamente os materiais oficiais e estruturar alternativas potentes. E isso, foi sempre o que nós professores, com este ou com outro Programa, fomos fazendo. *Agora* também o podemos fazer! Só que *agora*, talvez dê mais trabalho pois os materiais oficiais são mesmo muito maus e, por isso, temos um enorme desafio a enfrentar. Mas será bom começar e *agora*!

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação
do Instituto Politécnico de Setúbal

Publicidade APM

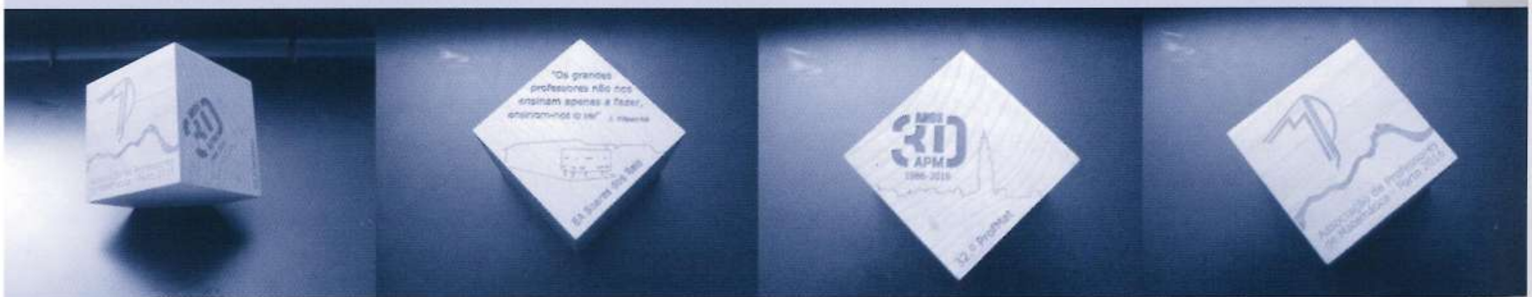
NOVIDADE!

A Associação de Professores de Matemática, respondendo a um convite da Editorial do Ministério da Educação, junta-se a esta iniciativa propondo um conjunto de resoluções de provas de avaliação externa do 3.° ciclo e de provas de exame e testes intermédios de Matemática A. Desta forma, a APM quer continuar a colaborar e apoiar a tarefa dos professores nas suas escolas e o estudo dos alunos neste aspeto particular das suas aprendizagens.

Resolução completa e devidamente justificada — incluindo os itens de resposta múltipla — de todas as provas de avaliação externa de Matemática do 3.° ciclo e exames de Matemática A, desde 2010 até 2015.

Em **2016** celebramos os 30 anos da APM. É importante revisitar a memória da origem, e do percurso que já fizemos, recordando que *vamos à origem sempre que nos perguntamos pela nossa identidade mais profunda, procurando ler nos começos a ideia forte que uniu as pessoas e mobilizou as vontades.*

30 ANOS APM 1986–2016



Cubo comemorativo dos 30 anos da APM

E sabemos também que a fidelidade às origens só é fecunda se for fidelidade ao tempo presente, criando assim, em cada hoje, o amanhã.

O ano de 2016 é assim um ano que queremos cuidar de forma especial. Começámos no ProfMat do Porto com um espaço privilegiado para esta celebração, mas vamos continuar.

Para já, podem adquirir o cubo comemorativo lançado no Porto, durante o ProfMat. Está agora ao vosso dispor na sede. O cubo, por 15€.

Revisitando José Sebastião e Silva

— a colaboração na *Gazeta de Matemática**

Henrique Manuel Guimarães

Para nós e para muitos é indiscutível que a Matemática deve desempenhar no ensino liceal um papel essencialmente formativo. Pouco interessa que o aluno fique a conhecer muitos teoremas e os processos de resolução de muitas classes de problemas: o que importa, acima de tudo (...) é que tenha adquirido o hábito de pensar *matematicamente*.

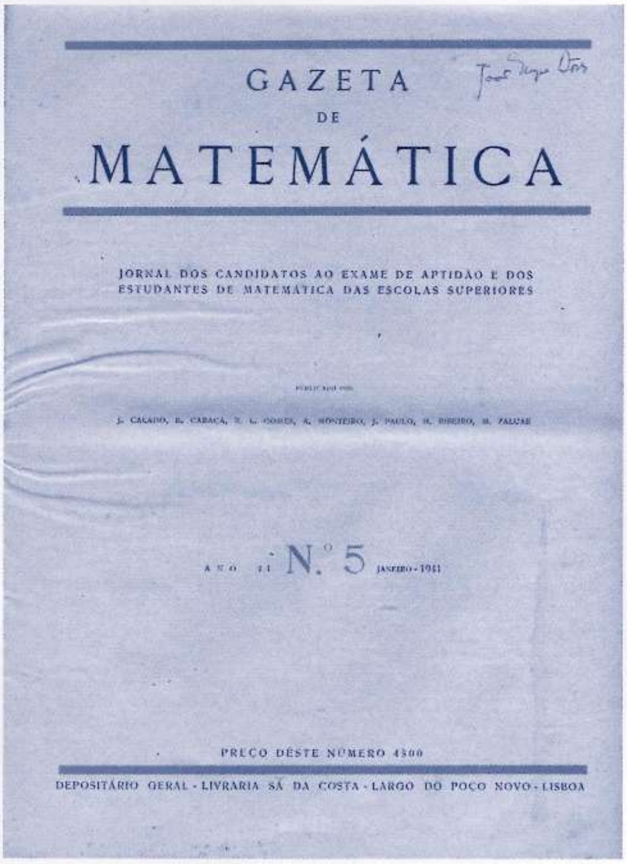
S. Silva, in *Gazeta da Matemática* 12, 1942

A *Gazeta de Matemática* foi criada por um grupo de matemáticos — António Aniceto Monteiro, Bento de Jesus Caraça, Hugo Ribeiro, José Silva Paulo e Manuel Zaluar Nunes — que assumiram a sua publicação iniciada em 1940. Subtitulada como «Jornal dos candidatos ao exame de aptidão e dos estudantes de Matemática das escolas superiores», o seu primeiro número saiu com data de Janeiro desse ano, tendo como editor José da Silva Paulo, autor do texto de apresentação que abre o número, e onde são apontadas as linhas principais da orientação editorial da revista — a *Gazeta* propunha-se ser «um instrumento de trabalho e um guia» para esses estudantes, como é dito na referida apresentação, mas também dar espaço a questões sobre o ensino em outros níveis, publicando «artigos de carácter didáctico» sobre temas matemáticos diversos (GM1 p. 1, 1940).

José Sebastião e Silva (1914–1972), matemático de grande notoriedade internacional, de que recentemente se comemorou o centenário do seu nascimento, é reconhecido no nosso país como estando entre os mais notáveis matemáticos portugueses do século XX, tendo-se igualmente distinguido pelo grande investimento no ensino da Matemática e pelo seu envolvimento na melhoria e modernização desse ensino nos diversos níveis.

Sebastião e Silva (S. e Silva) iniciou a sua colaboração na *Gazeta de Matemática* muito cedo, um ano após a sua criação, e publicou com regularidade na revista ao longo de duas décadas, com textos sobre diversos assuntos e de natureza muito variada, em que é patente o seu grande interesse pelo ensino da Matemática e onde se evidenciam as suas preocupações pedagógicas e didácticas. Entre os textos publicados estão também textos de divulgação, nomeadamente sobre matemáticos da época e sobre o ensino da Matemática em outros países, e também textos de carácter noticioso sobre o movimento matemático internacional relacionado com o ensino desta disciplina.

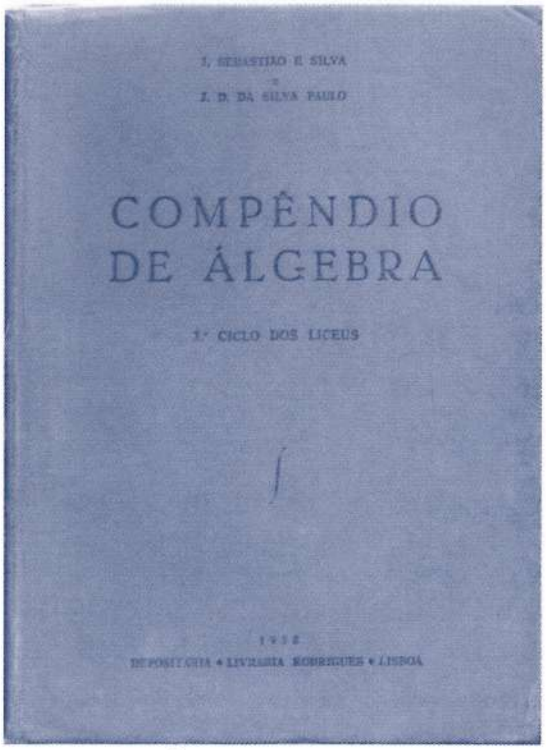
O primeiro texto de S. e Silva na *Gazeta* foi um extenso artigo sobre a lógica matemática e o ensino médio, iniciado no n.° 5 e que se prolongou por três números[1], orientado pela ideia, como diz o autor, «de mostrar, ainda que modestamente, até que ponto chegam, tanto neste [assunto, Geometria] como em outros domínios de aplicação, *as possibilidades didácticas* de Lógica matemática» (itálico meu, GM5 p. 1, 1941). Seguiram-se, ao longo de vários anos, outros textos versando assuntos matemáticos muito diversos que mostram claramente a sua atenção a assuntos de maior actualidade na época e também as suas intenções didácticas e pedagógicas. Por exemplo, o texto «O que é uma axiomática?» publicado no n.° 54 da *Gazeta*, inaugura uma nova secção na revista — «Consultório» — criada,



GM5 (1941) — primeiro artigo de S. e Silva na *Gazeta*

como diz S. e Silva, para responder a perguntas dos leitores, com a preocupação de proporcionar melhor esclarecimento sobre os assuntos em causa e responder a dificuldades evidenciadas (GM54, 1953).

O grande interesse de S. e Silva pelo ensino da Matemática em Portugal e as preocupações que lhe causava o estado em que o via, exprimiram-se sobretudo nos textos em que de forma explícita abordava questões e problemas que identificava nesse ensino. E encontramos isto logo muito cedo, no que escreveu numa polémica com Bento de Jesus Caraça sobre o ensino dos logaritmos nos liceus que se prolongou por três números, na secção da revista sobre Pedagogia dirigida por este matemático[2]. Estes textos, onde em muitos momentos talvez não sejam muito díspares as posições dos dois matemáticos (não cabe agora aqui alongar-me sobre esta questão), e outros sobre o ensino da Matemática, dão a conhecer alguns dos aspectos que caracterizam o pensamento didáctico de S. e Silva. «Para nós e para muitos», dizia numa das réplicas a Bento Caraça colocada como epígrafe a este artigo, «é indiscutível que a Matemática deve desempenhar no ensino liceal um papel essencialmente formativo», e acrescenta: «Pouco interessa que o aluno fique a conhecer muitos teoremas e os processos de



Compêndio de Álgebra (Silva, S. e Paulo, S. 1958, 1.ª edição)

CAPÍTULO I — EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO 61

Só em fins do século passado, principalmente por obra dos matemáticos alemães DEDEKIND *e* CANTOR, *se pôde construir uma teoria rigorosa dos números reais, independente da geometria e da física.*

Note-se que, no estudo dos números, interessa muito menos ao matemático a maneira de efectuar os cálculos, do que o conjunto das propriedades gerais das operações. São estas propriedades que formam a essência da álgebra.

Para efectuar cálculos numéricos, o homem civilizado recorre cada vez mais a máquinas de calcular, das quais o tipo mais perfeito é o das calculadoras electrónicas, *verdadeiro prodígio da técnica moderna. Entre outras coisas, são estas máquinas capazes de efectuar, em brevíssimo tempo, sucessões imensas de cálculos, que lhes sejam prèviamente impostas; podem mesmo, se disso forem incumbidas de início, escolher, em dado momento, entre duas ou mais sucessões de cálculos, aquela que convém, de acordo com resultados obtidos.*

Aspecto exterior duma calculadora electrónica

Sobre as calculadoras electrónicas na Nota histórica do Compêndio de Álgebra (1958)

resolução de muitas classes de problemas: o que importa, acima de tudo (...) é que tenha adquirido o hábito de pensar *matematicamente* (...).» (GM12 p. 10, 1942). Ainda na mesma réplica, em discreta nota de rodapé, diz S. e Silva:

É absolutamente necessário que o aluno adquira a suficiente confiança em si, para que não se sinta mais como um estranho, um tímido visitante, um espectador inerte e mudo, no imenso domínio da Ciência. (p.10)

A *Nota* a uma tradução de um relatório dos Estados Unidos[3] que S. e Silva publicou na *Gazeta* (GM32, pp. 3–4) sobre a «nova maravilha de velocidade electrónica», a calculadora Eniac, mostra bem a sua atenção aos desenvolvimentos tecnológicos da época. Considerando-a «uma daquelas prodigiosas criações humanas que tocam as raias do inverosímil», S. e Silva sublinha as virtualidades e potencialidades da nova calculadora electrónica, e as suas implicações em particular para a Matemática. Valerá a pena aqui lembrar que S. e Silva, no seu Compêndio de Álgebra de 1958 (com Silva Paulo, 1.ª edição), veio a referir-se às calculadoras no capítulo sobre a evolução do conceito de número, numa nas «Notas Históricas» incluídas nesse compêndio. Chamando a atenção que no estudo dos números «interessa muito menos ao matemático a maneira de efectuar os cálculos do que o conjunto das propriedades gerais das operações» e que são estas «a essência da Álgebra», diz-se ainda que, «para efectuar cálculos numéricos, o homem civilizado recorre cada vez mais a máquinas de calcular, dos quais o tipo mais perfeito é o das calculadoras electrónicas, verdadeiro prodígio da técnica moderna» (Silva & Paulo, 1958, p. 51).

Nos comentários que S. e Silva escreveu na *Nota* a propósito do texto sobre a calculadora Eniac sublinha o contributo que a calculadora electrónica pode dar na resolução de problemas com origem em diversos domínios da ciência e da técnica. «Na época em que vivemos», diz S. e Silva, «a Técnica está pondo à Matemática problemas cada vez mais difíceis que obrigam a um desenvolvimento contínuo, a uma incessante renovação de métodos e a imprevistas ampliações de domínios» (GM32 p. 3, 1947). E continua:

Parece ultrapassada aquela fase da Matemática característica do século passado — a fase dos belos teoremas, das *belas* propriedades, das *elegantes* demonstrações (itálicos do autor) (...). Hoje as necessidades são outras, e o homem não tem já tempo para se deter em locubrações platónicas, voltando costas à realidade. De resto, é sobretudo tornando-se útil que a Ciência se torna bela. (p. 3)

Ainda na *Nota*, S. e Silva refere casos[4] em que a investigação matemática «é apreciada não somente do ponto de vista da *veracidade ou falsidade*, mas sobretudo do ponto de vista do seu *maior ou menor valor efectivo*, em relação a nós, homens, que criámos os símbolos para que eles nos sirvam, e não para que eles se tornem fins em si mesmos» (p. 4). E depois da sua elaboração, finaliza assim:

> Uma última conclusão nos parece lícito tirar daqui: a necessidade premente de arejar os nossos métodos e programas de ensino, tornando-os adequados ao espírito da época. (p. 4)

Tendo embora chamado a atenção, na nota que tenho estado a referir, que não queria dizer que a investigação matemática fundamental, a actividade especulativa pura, devesse cessar, S. e Silva vem contudo ‹retratar-se› no número seguinte da *Gazeta*, dirigindo-se também ao ensino e ao professor: «O sentimento estético será ainda e sempre um poderoso guia para a investigação; e uma das principais preocupações do professor deve ser, precisamente, a de estimular nos seus alunos esse sentimento, fazendo-os aperceberem-se da beleza de certas proposições e da *elegância* de certos raciocínios (itálicos do autor, GM33 p. 9, 1947). Temperando assim o «excesso de vigor», como ele considerou, a que tinha recorrido na defesa do seu ponto de vista, S. e Silva, todavia não deixa de dizer, concluindo o texto:

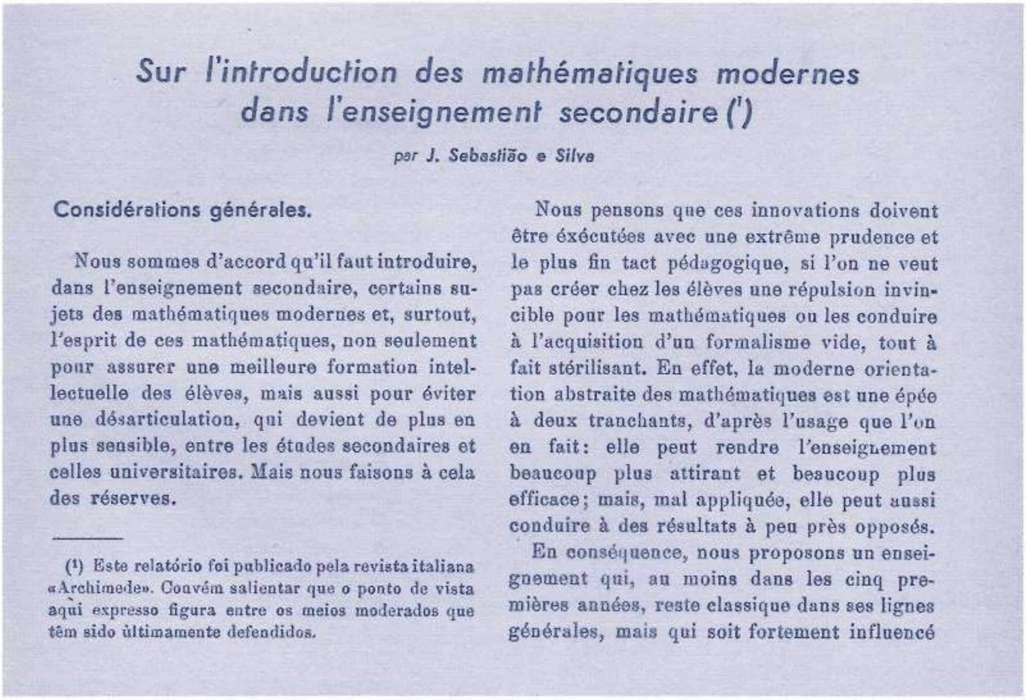
> Mas tal não basta, ou melhor: *tal é uma condição necessária, mas não suficiente, para que o ensino resulte eficaz* (itálicos do autor). Porque a matemática não é apenas a ‹música da razão›... (p. 9)

Sebastião e Silva, entre outros textos que publicou sobre o ensino da Matemática, publicou um sobre o ensino da análise infinitesimal no ensino secundário (GM49, 1951), e dois outros, um sobre o ensino da Matemática na Alemanha (GM55, 1953) e outro sobre o ensino da Matemática em Itália (GM57, 1954), ambos exemplos do seu grande interesse em conhecer e divulgar esse ensino em outros países. No primeiro destes dois textos, sem deixar de chamar a atenção para a inexistência de sistemas de ensino «que convenham indiferentemente a todas as épocas e a todos os povos», e para a «prudência» que deve ser usada em «transplantar» ideias pedagógicas de um local para outro, condena também a postura de quem se recusa a ver o que acontece em outros locais, vendo nisso uma atitude «própria das pessoas que têm medo excessivo das correntes de ar (GM55 p. 8, 1953). É assim que S. e Silva nos diz que nos liceus alemães o principal objectivo do ensino da Matemática «é *desenvolver no aluno aptidão para o pensamento autónomo*» (itálico do autor), esclarecendo que ‹autónomo› é a tradução de ‹*selvständig*› no sentido de não mecanizado (p. 9). Diz-nos também que para isso, o ensino alemão é orientado não apenas «no sentido da clara formação dos conceitos, da expressão exacta e da dedução lógica, mas ainda [para] habituar o aluno a fazer uso inteligente do método matemático na interpretação do mundo físico» (p. 9).

No texto sobre o ensino da Matemática em Itália, S. e Silva diz-nos que a pedagogia e a didáctica e os problemas do ensino desta disciplina, «incluindo os da Escola Primária», mereceram sempre grande interesse e atenção por parte de cientistas e pensadores italianos, mesmo em relação aos «aparentemente mais humildes» (GM57 p. 6, 1954). E é ao conhecido geómetra italiano Federigo Enriques (comparando-o a Félix Klein nas suas ideias) que dá a palavra para dizer que em Itália se adoptou «o ensino intuitivo nos primeiros anos da escola média como fase preparatória do estudo racional», e que, entre os professores italianos, «talvez pela educação lógica que encontraram nas faculdades universitárias», se manifestaram dificuldades na receptividade a este espírito Kleiniano, intuitivo, «a que é inerente um certo inacabamento e um modo de raciocinar significativo, mas deliberadamente imperfeito» (p. 7). E, de novo com as palavras de Enriques, diz-nos ainda:

> Mais do que as diferenças dos métodos ou as indicações dos programas influi sobre a eficácia do ensino o valor dos que ensinam: a sua mentalidade, o calor comunicativo, a paixão que dedicam ás coisas ensinadas, a largueza de interesses que os torna capazes de se colocarem no lugar dos alunos e de se sentirem como estes. Na medida em que tais dotes possam ser adquiridos, é necessário para tanto cuidar sobretudo da preparação universitária e, depois disso, criar aos professores condições de vida que deixem suficiente liberdade para manter e desenvolver a sua própria cultura. (p. 7)

Prolongou-se por duas décadas, como já disse, a colaboração de S. e Silva na *Gazeta*, onde publicou uma trintena de textos dos quais quis atrás, para alguns, dar alguma nota. S. e Silva escreveu também sobre matemáticos seus contemporâneos, em dois deles dando notícia da vinda desses matemáticos a Lisboa[5], e teve outras colaborações na secção de pedagogia da revista, de que saliento a tradução parcial do texto de Emma Castelnuovo «Um método activo no ensino da Geometria intuitiva», um texto à época claramente inovador no ensino da Matemática (GM33 pp. 9–13, 1947). Escreveu ainda sobre o movimento internacional, na matemática e no seu ensino, com textos informativos e noticiosos, sobretudo sobre congressos e outros encontros em diversos países. Dá notícia, por exemplo, da participação de Portugal na primeira Assembleia Geral da União Matemática Internacional (IMU) que teve lugar em Roma, onde foi enviado como observador (GM52 p. 11, 1952) e da adesão de Portugal a esta organização, «aprovada por unanimida-



Sur l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire (¹)

par J. Sebastião e Silva

Considérations générales.

Nous sommes d'accord qu'il faut introduire, dans l'enseignement secondaire, certains sujets des mathématiques modernes et, surtout, l'esprit de ces mathématiques, non seulement pour assurer une meilleure formation intellectuelle des élèves, mais aussi pour éviter une désarticulation, qui devient de plus en plus sensible, entre les études secondaires et celles universitaires. Mais nous faisons à cela des réserves.

(¹) Este relatório foi publicado pela revista italiana «Archimede». Convém salientar que o ponto de vista aqui expresso figura entre os meios moderados que têm sido ùltimamente defendidos.

Nous pensons que ces innovations doivent être éxécutées avec une extrême prudence et le plus fin tact pédagogique, si l'on ne veut pas créer chez les élèves une répulsion invincible pour les mathématiques ou les conduire à l'acquisition d'un formalisme vide, tout à fait stérilisant. En effet, la moderne orientation abstraite des mathématiques est une épée à deux tranchants, d'après l'usage que l'on en fait: elle peut rendre l'enseignement beaucoup plus attirant et beaucoup plus efficace; mais, mal appliquée, elle peut aussi conduire à des résultats à peu près opposés.

En conséquence, nous proposons un enseignement qui, au moins dans les cinq premières années, reste classique dans ses lignes générales, mais qui soit fortement influencé

Último texto de S. e Silva na Gazeta da Matemática (GM 88-89, 1962)

de», na reunião de Haia (GM59 pp. 12–14, 1954). Anuncia também a constituição, pelo Instituto de Alta Cultura (IAC), da Comissão nacional de matemáticos que ele próprio integrou[6] e a nomeação pelo mesmo Instituto da subcomissão portuguesa da CIEM (Comissão Internacional do Ensino da Matemática) de que fazia parte[7], e dá-nos um relato de uma importante reunião da Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques sobre o tema «O papel do concreto no ensino da Matemática», realizada em Madrid, em 1957, destacando intervenções de alguns dos conferencistas de que respigou: «a necessidade urgente de remodelar não só os programas, mas ainda os métodos de ensino desta disciplina [Matemática], desde a escola primária até à universidade», e que este ensino «deverá, muito mais do que até hoje, assentar numa base intuitiva, concreta, heurística»[8].

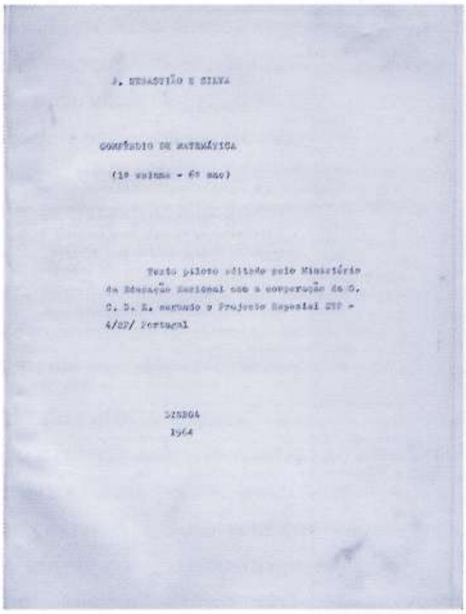
Prenunciavam-se já as grandes mudanças curriculares trazidas pelo movimento da Matemática Moderna que dentro de poucos anos iria iniciar-se e estender-se a muitos países da Europa e do Continente Americano, e que chegou a Portugal alargando-se a todo o país, com o concurso empenhado de S. e Silva e de outros que o acompanharam.

Sebastião e Silva escreve o seu último texto na *Gazeta* em 1962, justamente sobre a introdução da matemática moderna no ensino secundário[9], um assunto que pouco tempo depois o iria ocupar durante vários anos.

Esse texto, em que S. e Silva começa por afirmar o seu acordo com a necessidade da introdução no ensino secundário de conteúdos das matemáticas modernas, como se lhes refere, e sobretudo, como sublinha, do «espírito dessas matemáticas», espelha o sentido de equilíbrio, o cuidado e a moderação, com que encarava essa introdução e evidencia algumas das recomendações para o ensino da Matemática que por diversas vezes veio a reafirmar:

> Pensamos que estas inovações [da Matemática Moderna] devem ser executadas com extrema prudência e como o mais fino tacto pedagógico, se não desejarmos criar nos alunos uma repulsão inamovível pela matemática ou conduzi-los à aquisição de um formalismo vazio, a todos os títulos esterilizador. (...)
>
> Para esta introdução [das ideias, dos métodos e da linguagem da Matemática Moderna], será essencial partir de numerosos exemplos muito concretos e familiares, bastante sugestivos e mesmo divertidos, e ter cuidado em não introduzir formalismos antes de estarmos seguros que o aluno apreendeu realmente as ideias que eles escondem. (GM88-89 pp. 25–26, 1962)

Um ano depois, e nos anos que se seguiram, S. e Silva envolveu-se mais profundamente ainda no esforço de modernização do ensino da matemática em Portugal: preside à *Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática no 3.° ciclo dos liceus* criada em Julho de 1963 pelo então Ministro da Educação Nacional Inocêncio Galvão Telles[10]; redige os programas da experiência no ensino

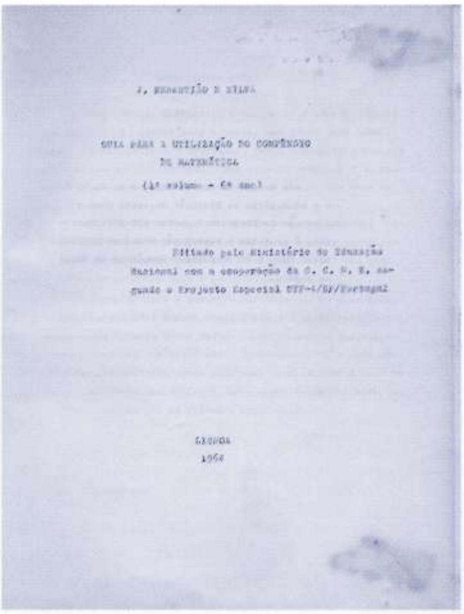

J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

(1º volume – 6º ano)

Texto piloto editado pelo Ministério da Educação Nacional com a cooperação da O. C. D. E. segundo o Projecto Especial STP – 4/SP/ Portugal

LISBOA
1964


J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO
DE MATEMÁTICA

(1º volume – 6º ano)

Editado pelo Ministério da Educação Nacional com a cooperação da O. C. D. E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal

LISBOA
1964

Compêndio de Matemática, 1.º vol. 6.º ano e Guia 1.º vol. 6.º ano (1964; 1965–66), folhas de rosto

secundário que se seguiu e os textos de apoio para professores e alunos, os famosos ‹Guias› e ‹Compêndios de Matemática›[11]; lecciona nos cursos de actualização de professores para as ‹turmas-piloto› dessa experiência; participa em fóruns diversos e publica textos sobre o processo de modernização do ensino da Matemática por que pugnava.

Encerro esta exposição sobre a colaboração de S. e Silva na *Gazeta*, com um extracto de um outro texto seu publicado na revista, onde disserta sobre «desentendimentos» e «divérbios» entre (alguns) filósofos e matemáticos e sobre as posições racionalistas e empiristas, de pendor lógico ou intuicionista, realista ou idealista. Um breve trecho que ilustra bem a sua profunda propensão humanista:

> O universo não é apenas máquina — é também vida, é também evolução; não é apenas causalidade, é também finalidade. Ao estudar o mundo empírico, o homem esqueceu-se de um pormenor essencial, irredutível a formas matemáticas — que é *ele mesmo, homem*, com tudo o que nele se contém de infinito. Não se mecaniza a vida, não se logifica o sentimento, não se automatiza o espírito livre e criador (GM46, p. 5, 1950).

Notas

* Este artigo, texto base de uma conferência realizada no 28.° Seminário Nacional de História da Matemática (Mértola, 2015), está também publicado na secção de História da Matemática do Boletim da SPM de Junho de 2016.

[1] «A lógica matemática e o ensino médio» (1941, GM5 pp. 1–4; GM6 pp. 3–7; GM7 pp. 3–4).

[2] GM11, 1942; GM12, 1942; GM13, 1943.

[3] «A máquina calculadora electrónica» (texto de T. R. Kennedy, 1947, GM32).

[4] O exemplo de que S. e Silva fala é o «Instituto per la Applicazioni del Calcolo» de Roma criado pelo prof, Picone, através do qual teve acesso ao relatório sobre o Eniac que publicou na *Gazeta* em tradução.

[5] Um obituário a propósito do falecimento de Guido Castelnuovo (GM52, 1952) e textos breves sobre Gottefried Köthe (GM57, 1954; GM68–69, 1957) e Lawrent Schwartz (GM66–67, 1957).

[6] Esta comissão integrou também Peixoto Queirós, Vicente Gonçalves e Pacheco Amorim (GM59 p. 12–14, 1954).

[7] Eram também membros desta sub-comissão Vicente Gonçalves, Jorge Calado e Silva Paulo, sendo que S. e Silva e J. Calado foram designados delegados junto da CIEM (GM60–61 p. 33, 1955).

[8] S. e Silva integrou a delegação portuguesa a esta reunião de que também fizeram parte J. Jorge Calado, J. Furtado Leote e A. Santos Heitor (GM60–61 p. 33, 1955).

[9] Texto de um relatório previamente publicado na revista italiana *Archimede* (GM88–89 pp. 25–29, 1962).

[10] Pertenceram também a esta comissão António Augusto Lopes, Jaime Furtado Leote e Manuel Augusto da Silva.

[11] Os textos de apoio surgiram a partir de 1964 em edições policopiadas distribuídas em fascículos Silva, S. (1964; 1965–66a) e Silva, S. (1965–66b), tendo sido editados em livro em meados dos anos 70, pelo Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Compêndio de Matemática 1.º vol. 1.º tomo e Guia 1.º vol., edição GEP (1975)

Fontes e bibliografia

Guimarães, H. M. (2011). A «modernização» do ensino da matemática em Portugal: Sebastião e Silva e as perspectivas metodológicas de Royaumont (1959). In Gitirana et al. (Ed.), *Actas do XIII CIAEM*, Recife.

OECE (1961). *Mathématiques Nouvelles*. Paris: OECE.

Silva, J. S. e Paulo, J. S. (1958). *Compêndio de Álgebra, 3.º ciclo dos liceus*. Livr. Rodrigues: Lisboa.

Silva, J. S. (1964; 1965–66a). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (1.º vol. – 6.º ano; vols. II e III – 7.º ano)*. Lisboa: MNE.

Silva, J. S. (1964; 1965–66b). *Compêndio de Matemática (1.º vol. – 6.º ano; 2.º e 3.º vols. – 7.º ano)*. Lisboa: MNE.

Silva, J. S. (1969). *Projecto de modernização do ensino da Matemática no 3.º ciclo dos liceus portugueses* (cópia de documento dactilografado, assinado pelo autor).

Textos de S. e Silva na Gazeta de Matemática

A teoria dos logaritmos no ensino liceal (GM 12, 1942)

Nota (a propósito de um art. de T.R. Kennedy Jr.) (GM 32, 1947)

A propósito de uma Nota (GM 33, 1947)

Filósofos e matemáticos (GM 46, 1950)

União Matemática Internacional (GM 52, 1952)

Sobre o ensino da Matemática na Alemanha (GM 55, 1953)

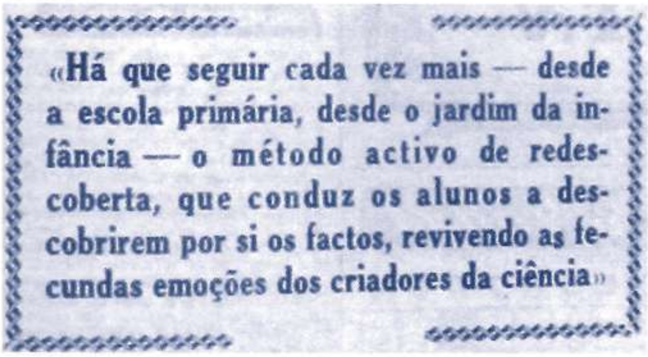
Sobre o ensino do Matemática em Itália (GM 57, 1954)

União Matemática International — Adesão de Portugal (GM 59, 1954)

Comissão Internacional do Ensino da Matemática — Sub-Comissão Portuguesa (GM 60–61, 1955)

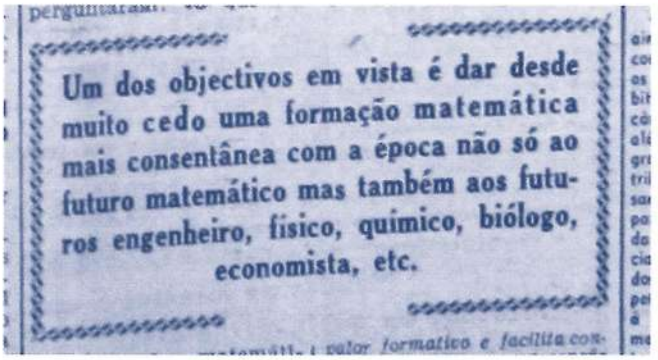
XI Reunião da Comissão Internacional para o Estudo e Melhoramento do Ensino da Matemática (GM 66-67, 1957)

Sur l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire (GM, 88–89, 1962)



«Há que seguir cada vez mais — desde a escola primária, desde o jardim da infância — o método activo de redescoberta, que conduz os alunos a descobrirem por si os factos, revivendo as fecundas emoções dos criadores da ciência»

In Diário Popular, 23 de julho de 1965



Um dos objectivos em vista é dar desde muito cedo uma formação matemática mais consentânea com a época não só ao futuro matemático mas também aos futuros engenheiro, físico, químico, biólogo, economista, etc.

Henrique Manuel Guimarães
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

A Lei de Titius-Bode

Será possível usar uma expressão matemática para determinar a distância entre os planetas do sistema solar?
Há uns séculos atrás pensou-se que sim, até que...

A Lei de Titius-Bode foi estabelecida no século XVIII, tratando-se de uma expressão matemática que reproduz com alta precisão as distâncias ao Sol dos planetas conhecidos naquela altura (Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno).

A ideia original da existência de uma regularidade nas distâncias entre os planetas surge com Johannes Kepler (1571–1630), grande astrónomo alemão. Numa das suas obras mais conhecidas, «Mysterium Cosmographium», Kepler expressa a ideia de que a posição dos planetas no sistema solar conduzia a uma regularidade matemática. Apesar dos seus esforços para tentar demonstrar a sua teoria, este acabou por não conseguir chegar a nenhuma conclusão.

Já no século XVIII, Johann Titius (1729–1796) professor universitário de Física, inicia a tradução para alemão de uma obra do filósofo Charles Bonnet.

Na sua tradução, surge um pequeno texto que indica que as distâncias entre os planetas ao Sol são dadas, numa certa escala, pela seguinte expressão matemática:

$$4 + 3 \times 2^n$$

em que n é um número inteiro maior ou igual a 0, sendo:

$n = 0 \rightarrow$ Vénus $\quad n = 1 \rightarrow$ Terra $\quad n = 2 \rightarrow$ Marte

$n = 3 \rightarrow$ Ceres $\quad n = 4 \rightarrow$ Júpiter $\quad n = 5 \rightarrow$ Saturno

E Mercúrio? A distância de Mercúrio ao Sol corresponde ao valor da expressão dada quando n tem um valor negativo cada vez menor, ou seja, assume o valor de 4.

A escala da expressão é definida da seguinte forma: uma unidade de medida corresponde a 1/10 da distância real da Terra ao Sol (150 000 000 km).

Assim, se quisermos a distância de Vénus ao Sol (108 000 000 km) na unidade de medida da expressão:

$$\frac{108\,000\,000}{15\,000\,000} \approx 7.2$$

Não deixa de ser fantástico como uma expressão matemática se adequa tão bem às distâncias de cada Planeta na nova escala. Para a época, esta descoberta foi muito importante.

A Lei de Titius-Bode foi reforçada com a descoberta de Ceres que tem correspondência com $n = 3$ e com a descoberta de Úrano, o $n = 6$ na Lei de Titius-Bode.

Na tabela seguinte, estão retratadas as distâncias reais e as distâncias na respetiva unidade de medida da Lei de Titius-Bode:

Planeta	n	Distância Real do Planeta ao Sol (km)	Distâncias de cada Planeta na Nova Escala	$4 + 3 \times 2^n$
Mercúrio	—	58 500 000	3,9	4
Vénus	0	108 000 000	7,2	7
Terra	1	150 000 000	10,0	10
Marte	2	228 000 000	15,2	16
Ceres	3	415 500 000	27,7	28
Júpiter	4	780 000 000	52,0	52
Saturno	5	1 432 500 000	95,5	100
Úrano	6	2 880 000 000	192	196

Em 1846, o astrónomo inglês Johann Gottfried Galle (1812–1910) descobre a existência de Neptuno. A distância real deste planeta ao Sol destrona a Lei de Titius-Bode. Isto porque Neptuno encontra-se a uma distância do Sol de 4 513 500 000 km, ou seja, a 300.9 unidades na nova escala. A Lei de Titius-Bode previa que para $n = 7$, a expressão dava 388 unidades.

Nunca a Lei de Titius-Bode esteve tão longe da previsão!

Desafio

De facto, toda estas ideias vêm convergir na ideia de que a Matemática é uma ciência transdisciplinar que se poderá relacionar com as outras ciências. A exploração destes pequenos episódios históricos em sala de aula com os alunos permite que estes desenvolvam conexões não só dentro da própria Matemática (com a exploração da História da Matemática e os seus conteúdos mais específicos como as sequências e sucessões, números e medida, entre outros) mas também dentro de outras disciplinas e ciências do conhecimento (como é o caso da Física e Química). Aqui fica o meu desafio.

Referências bibliográficas:
http://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/H34bode.htm
http://www.astropt.org/2011/07/29/lei-de-titius-bode/

João Carlos Terroso

Matemática A — 10.° ano

Ideias para uma possível planificação

João Almiro

Há vários anos que faço parte do Grupo de Trabalho do Secundário da APM. Durante estes anos temos discutido as questões relativas a este nível de ensino, tendo colaborado com as várias direções da APM no sentido de apresentar propostas de cariz curricular tanto junto dos sócios como do Ministério da Educação. Entre outras tarefas deste grupo inclui-se também a análise e a resolução dos vários instrumentos de avaliação externa da responsabilidade da tutela e que no final de cada ano letivo são apresentados aos nossos alunos.

Claro que, com a alteração do programa de Matemática A e com a inevitabilidade da sua implementação no 10.° ano em 2015/2016, realizámos várias reuniões de discussão e análise do programa, estando, como muitos professores de matemática, realmente preocupados: o que vamos fazer com este documento? Que matemática vamos ensinar aos nossos alunos? Que liberdade metodológica é que ainda temos? Qual o nosso papel na interpretação deste programa?

O programa e as metas

Todos estávamos de acordo com o que o Jaime Carvalho e Silva (2014) escreveu sobre o programa de Matemática A para o Ensino Secundário na revista Educação e Matemática: «Esta proposta é claramente demasiado abstrata, demasiado extensa, contém conteúdos inadequados para este ciclo» (p. 6); e ainda, «A extensão do programa é assustadora, não se percebendo qual possa ter sido a ideia para a sua concretização prática nas escolas» (p. 7).

Assim, mesmo sabendo que tínhamos que lecionar um programa não exequível para o tempo que tínhamos disponível e com conteúdos quanto a nós desadequados para os alunos com esta idade, fomos analisar, com todo o cuidado, o que o programa de Matemática A (MEC, 2013) referia relativamente a orientações metodológicas e encontrámos, temos que confessar com alguma surpresa, a defesa inequívoca da autonomia pedagógica e liberdade dos professores:

> As escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares.
>
> A experiência acumulada das escolas e dos professores constitui um elemento fundamental no sucesso de qualquer projeto educativo, não se pretendendo, por isso, espartilhar e diminuir a sua liberdade pedagógica nem condicionar a sua prática letiva. Pelo contrário, o presente Programa reconhece e valoriza a autonomia das escolas e dos professores, não impondo portanto metodologias específicas. (p. 28)

Sobre a possível sequência dos vários conteúdos também o documento das metas curriculares (MEC, 2013) é explícito, indicando que não se exige o seu tratamento de uma forma sequencial, levantando a possibilidade de algumas metas serem tratadas em simultâneo, mesmo fazendo parte de objetivos gerais e de conteúdos diferentes:

> De um modo mais geral, as Metas Curriculares não devem ser entendidas como um sumário sequencial dos conteúdos a lecionar, podendo em particular ser proveitoso o tratamento em simultâneo de descritores pertencentes a objetivos gerais ou mesmo a domínios distintos. (p. 1)

Em relação ao estudo do domínio Lógica e Teoria dos Conjuntos, o programa (MEC, 2013) advoga que este pode ser tratado de uma forma integrada no estudo de outros domínios ou em revisões de conteúdos de anos anteriores e não necessariamente como um capítulo à parte:

De acordo com os princípios gerais de interpretação das Metas Curriculares, tal como estão enunciados na respetiva introdução, este estudo pode, naturalmente, ser integrado no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios assim como em revisões de conteúdos de anos anteriores. (p. 9)

Assim, percebemos que tínhamos liberdade para elaborar uma sequência dos conteúdos diferente da que estava no Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013), podendo dar maior ou menor ênfase a alguns domínios, tornando as aprendizagens mais significativas para os alunos e valorizando os itens do programa que considerávamos mais importantes.

Ideias para uma planificação

Depois de uma discussão acesa, onde surgiram várias opiniões e onde foi clarificado o que era realmente relevante ensinar aos nossos alunos, foram estabelecidas as seguintes orientações que de algum modo nortearam as planificações que viriam a ser realizadas posteriormente:

- Dar o destaque adequado à Lógica, espalhando-a por vários capítulos no decorrer do ano
- Contextualizar o estudo dos radicais com problemas de geometria
- Aproveitar todo o trabalho já realizado nas funções como um contributo para o estudo dos polinómios
- Utilizar a tecnologia sempre que se revele essencial para a compreensão dos conceitos.

Na medida em que os elementos do Grupo de Trabalho do Secundário residem em várias zonas do país, foi com alguma dificuldade que conseguimos reunir para fazer a planificação a longo prazo que mais tarde iríamos concretizar com mais pormenor nas nossas escolas, com os nossos colegas. Em traços muito gerais a sequência de conteúdos que saiu dessas reuniões foi a seguinte:

- Problemas de geometria com radicais
- Radicais e Potências de expoente racional
- Lógica — proposições
- Geometria Analítica no plano e no espaço
- Lógica — condições e conjuntos
- Cálculo vetorial no plano e no espaço
- Funções reais de variável real (e Lógica ainda não abordada)
- Polinómios
- Estatística.

Tendo em conta esta sequência, foi construído outro documento, mais pormenorizado, em que se fez uma planificação a longo prazo, distribuindo as várias metas curriculares ao longo do ano, salvaguardando a ideia de que todas seriam abordadas.

Na minha escola

Depois de elaborada esta proposta reuni com os professores da minha escola que iriam lecionar o 10.º ano, este ano letivo. Apresentei as ideias que estavam em causa, bem como a sequência de conteúdos proposta, que foi discutida com todo o cuidado. Depois de algum debate, e de serem analisados os prós e os contras desta proposta, decidimos que seria esta a sequência que iríamos utilizar na nossa escola.

No nosso departamento é habitual trabalharmos muito em conjunto. Semanalmente os professores, que estão a ensinar o mesmo ano, encontram-se para discutir os assuntos que estão a lecionar, planificando ao pormenor as tarefas que vão propor aos alunos e o modo como vão explorar o manual, construindo materiais quando necessário, bem como os instrumentos de avaliação que são, no essencial, semelhantes ou iguais em todas as turmas do mesmo ano.

Considero que esta forma de trabalho nos deu uma segurança muito grande para gerir este novo programa e metas agora a implementar, pois aquilo que decidíssemos fazer iria ser feito por todos, evitando diferenças significativas entre as várias turmas da escola, acautelando, assim, problemas junto dos alunos e dos encarregados de educação.

Quando decidimos esta sequência acreditámos que deste modo poderíamos valorizar o que realmente é importante em Matemática, dando uma grande ênfase à resolução de problemas, utilizando formalismos só quando houvesse necessidade.

Percebemos também que estávamos a tentar apresentar logo no 1.º período uma matemática atrativa e interessante, que não levasse à desmotivação dos alunos. Por outro lado, abria a possibilidade de construir instrumentos de avaliação, que percorressem assuntos diversos e não somente Lógica e Teoria dos Conjuntos e Álgebra, colocando a Lógica no seu devido lugar, espalhada ao longo do ano, não a valorizando, quanto a nós, de uma forma desadequada.

Acreditámos ainda que a utilização da tecnologia seria essencial no estudo de alguns temas, em especial no capítulo das funções. Considerámos também, que estudar os polinómios depois das funções poderia ser uma mais-valia, na medida em que já seria possível, neste capítulo, concretizar uma abordagem gráfica. Esta perspetiva poderia ajudar os alunos a estabelecerem conexões entre os vários conteúdos e a enriquecerem e compreenderem mais profundamente o estudo dos polinómios que, a ser lecionado anteriormente, teria somente uma abordagem algébrica. Na secção «Materiais para a sala de aula» desta revista, encontra-se uma das tarefas que vamos utilizar nas aulas, *Descobrindo Curvas*, quanto a nós um exemplo muito interessante do que se pode propor aos nossos alunos. Com essa tarefa pretende-se estimular, através da representação gráfica de alguns polinómios, a compreensão de algumas das suas propriedades.

No entanto, não tivemos dúvidas ou ilusões de que, tal como todos os colegas que iriam seguir a sequência proposta nas Metas Curriculares e no Programa, também nós iríamos ter problemas de tempo, vendo a nossa liberdade metodológica restringida, sentindo o que afirmam o Joaquim Félix e o Paulo Correia (2014) na Educação e Matemática:

> A liberdade pretendida pelo atual programa fica altamente condicionada pela extensão da lista de conteúdos, que irá, certamente, pressupor uma lógica de trabalho de sala de aula que não permitirá opções pedagógicas assentes em atividades de investigação, trabalhos de grupo, atividades de modelação, resolução de problemas, ou outras metodologias consensualmente recomendadas e promotoras de melhores aprendizagens. (...) A questão do tempo é central. Sem tempo não há liberdade. (p. 12)

Constrangimentos e papel do professor

Compreendemos também que optar por esta sequência nos poderia trazer alguns constrangimentos ou dificuldades na seleção dos materiais que iríamos utilizar em sala de aula.

Em primeiro lugar, a exploração do manual não iria ser sequencial, pois teríamos de saltar para a frente e para trás, mudando de capítulos e, nalgumas situações, até de livros (parte I e parte II). No entanto, já tínhamos vivido uma experiência semelhante de 2008 a 2011 quando lecionámos turmas-piloto, aplicando o programa do ensino básico de 2007, com alunos ainda mais novos, e essa gestão do manual não tinha sido difícil.

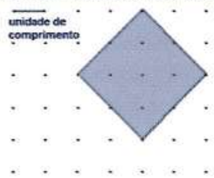
Em segundo lugar, poderíamos ter que construir algumas propostas de trabalho para os alunos, na medida em que os manuais adotados não interligavam os conteúdos tendo em conta a sequência que tínhamos definido. Construímos, por exemplo, uma tarefa para lecionar os radicais a partir de problemas de geometria. Na figura 1, encontra-se essa tarefa que foi elaborada a partir de diversas fontes, pelo grupo de colegas que está a lecionar o 10.° ano de matemática A na minha escola.

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

10.° Ano **Setembro 2015**

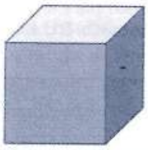
Ficha de trabalho – Radicais e problemas de geometria

1. Determina o valor exacto da área e do perímetro de cada uma das figuras seguintes.
   1.1. Triângulo rectângulo cujos catetos medem $\sqrt{5}\,dm$ e $\sqrt{3}\,dm$
   1.2. Quadrado de lado $\sqrt{7}\,cm$
   1.3. Quadrado de lado $(1+\sqrt{3})\,cm$
   1.4. Quadrado de lado $(\sqrt{5}+\sqrt{6})\,cm$
   1.5. Retângulo de dimensões $\sqrt{20}\,cm$ por $\sqrt{30}\,cm$
2. Tomando para unidade o comprimento assinalado na figura, determina a área do quadrado.

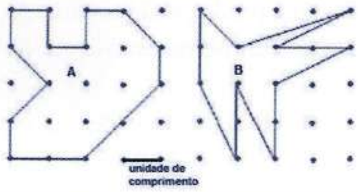


3.
   3.1. Tomando para unidade o comprimento assinalado na figura, desenha, utilizando o ponteado, três quadrados cujas áreas meçam 2, 5 e 10

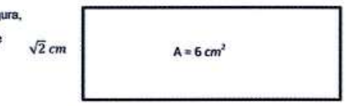
   3.2. Quais são as medidas dos lados desses quadrados?
   3.3. E quais são as medidas dos perímetros?
4. Na figura encontra-se representado um cubo.
   Determina o comprimento da aresta do cubo, quando se considera que:



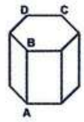
   4.1. O seu volume é $64\,cm^3$
   4.2. O seu volume é $250\,cm^3$
   4.3. A sua superfície total tem $42\,cm^2$ de área.
5. Tomando para unidade o comprimento assinalado na figura, calcula a área e o perímetro das figuras A e B.



   De todos os valores obtidos para a área e para o perímetro das figuras indica aqueles que são racionais e aqueles que são irracionais.
6. A diagonal espacial de um cubo mede $15\,cm$.
   Determina o comprimento da aresta do cubo.
7. Considera dois cubos A e B, cujos volumes são $1875\,cm^3$ e $120\,cm^3$, respectivamente.
   A aresta do cubo A é quantas vezes maior que a aresta do cubo B?
   (A) $2{,}5$ **(B)** $3{,}95$ **(C)** $15{,}625$ **(D)** 125
8. Um monumento, feito em granito, tem a forma de uma pirâmide quadrangular. Desse monumento construiu-se uma miniatura. Sabe-se que o volume do monumento é $24\,m^3$ e o volume da miniatura é $0{,}5\,m^3$.
   Sabendo que a altura do monumento é $2\,m$, determina a altura da miniatura.
9. Determina o valor exato do perímetro da figura, sabendo que a área do rectângulo é $6\,cm^2$ e que tem $\sqrt{2}\,cm$ de largura.



10. Na figura encontra-se representado um prisma hexagonal regular, sendo A, B, C e D quatro dos seus vértices.



   Sabe-se que $\overline{AB} = 6\sqrt{3}\,cm$ e que a área de cada face lateral é $72\,cm^2$
   10.1. Mostra que $\overline{CD} = 4\sqrt{3}\,cm$
   10.2. Calcula a área da base do prisma.

Sol.: 1.1. $A = \frac{\sqrt{15}}{2}$ e $P = \sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{8}$; 1.2. $A = 7$ e $P = 4\sqrt{7}$; 1.3. $A = 4+2\sqrt{3}$ e $P = 4+4\sqrt{3}$;
1.4. $A = 11+2\sqrt{30}$ e $P = 4\sqrt{5}+4\sqrt{6}$; 1.5. $A = 10\sqrt{6}$ e $P = 4\sqrt{5}+2\sqrt{30}$;
2. $A = 8$; 3.2. $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$; 3.3. $4\sqrt{2}, 4\sqrt{5}, 4\sqrt{10}$;
4.1. $a = 4$; 4.2. $a = 5\sqrt[3]{2}$; 4.3. $a = \sqrt{7}$;
5. Fig.A: $A = 11{,}5$ e $P = 10+5\sqrt{2}$; Fig.B: $A = 6$ e $P = 8+\sqrt{2}+4\sqrt{5}+\sqrt{10}$;
6. $a = 5\sqrt{3}$; 7. (A); 8. $h = \frac{\sqrt[3]{36}}{6}$; 9. $P = 8\sqrt{2}$; 10.2. $A = 72\sqrt{3}$

Figura 1

Em terceiro lugar, e tão importante como as anteriores, a gestão do próprio manual, não só a sequência dos vários temas, mas o próprio conteúdo, ou seja as tarefas, os problemas, os exercícios e os exemplos escolhidos para estudo dos vários assuntos. A escrita de um manual pressupõe decisões da parte dos seus autores, relativamente ao que é relevante e ao nível de aprofundamento dos vários conceitos. Ora quando exploramos um manual não temos que estar de acordo com estas decisões. Cabe ao professor decidir o que realmente é importante, selecionar quais as tarefas que vai propor aos seus alunos e como vai explorá-las, escolher quais os temas que merecem um estudo mais aprofundado, decidir qual a tecnologia e onde será indispensável para a aprendizagem. E todas essas escolhas são decisivas para a Matemática que os alunos irão aprender. Não podemos, nem devemos deixar essas escolhas somente para os autores dos manuais.

O professor tem mais do que nunca um papel essencial na gestão/desenvolvimento/construção do currículo. É importante que tenha uma ação esclarecida e interveniente, de modo que para cada situação possua opiniões fundamentadas, cabendo-lhe por isso uma responsabilidade acrescida nas opções, decisões e estratégias relativas ao currículo, na seleção crítica e na produção de materiais curriculares. Os professores não são meros executores de orientações superiores.

Gimeno (2000) realça que o professor, ao desenvolver uma prática concreta de acordo com determinados objetivos, desempenha um papel decisivo no desenvolvimento do currículo, na medida em que decide o tipo de atividades que os alunos vão realizar, a sequência das tarefas, o seu espaçamento e duração, a forma como realiza a avaliação, os materiais que escolhe, as estratégias de ensino, a ponderação dos conteúdos, entre muitos outros aspetos. Este autor afirma que «por muito controlada, rigidamente estruturada, ou por muito tecnicista que uma proposta de currículo seja, o professor é o último árbitro da sua aplicação nas aulas» (p. 175).

Escolher e decidir

Mas, por vezes, ter a liberdade e o poder de decidir não é fácil. Para um professor isolado numa escola não é fácil decidir que tarefas deve selecionar e propor aos seus alunos, nem ultrapassar os medos quando leciona coisas novas e vencer as dificuldades que encontra na gestão das suas aulas. Quando temos que lecionar um programa novo e o estudamos com atenção surgem-nos sempre dúvidas, nomeadamente sobre o tempo a dedicar a cada tópico e a profundidade com que se devem abordar os vários temas.

Para ultrapassar estas dificuldades é essencial a criação de espaços de trabalho colaborativo, como os que possuímos na minha escola. Só assim, conseguimos minimizar a insegurança, as angústias e todas as incertezas que vivemos quando estamos a lecionar um programa novo. A pedra chave é sem dúvida o trabalho colaborativo entre os colegas, sendo a discussão e a troca de ideias essenciais para a melhoria da qualidade educativa.

Neste artigo divulga-se uma possível sequência de conteúdos para lecionar o 10.° ano do novo programa de Matemática A. Como esta, outras se poderiam fazer, estando implícitas, com certeza, muitas escolhas e decisões. No entanto, qualquer que seja a planificação que venhamos a construir, não nos podemos esquecer: todos temos responsabilidades na implementação deste programa e os professores têm um papel determinante nessa implementação.

Se temos autonomia pedagógica e liberdade para escolher as metodologias e os recursos, temos o dever de utilizar essa autonomia e essa liberdade. É essencial que os professores trabalhem de forma colaborativa nas suas escolas, escolhendo e decidindo sempre que o podem fazer, tendo em vista a transformação deste programa numa oportunidade para os nossos alunos aprenderem uma Matemática significativa e de qualidade.

Referências Bibliográficas

Félix, J. e Correia, P. (2014). A falta que nos faz(ia) um novo programa de Matemática A. *Educação e Matemática, 127*, 9–13.

Gimeno Sacristán, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática* (3.ª ed.). Porto Alegre: Artmed.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares — Matemática A. Ensino Secundário. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Silva, J. C. (1990). Sobre a proposta de um «novo» programa de Matemática A para o Ensino Secundário. *Educação e Matemática, 126*, 6–7.

João Almiro
Agrupamento de Escolas de Tondela Tomaz Ribeiro

Crónica de uma professora de visita à Finlândia

Nadia Ferreira

Quando me sugeriram que escrevesse um artigo sobre a minha estadia na Finlândia questionei-me sobre o que poderia interessar a outras pessoas a experiência vivida. O que poderia contar? O que era importante saber sobre este sistema educativo? E sobre o ensino da Matemática? Demorei algum tempo a chegar a um formato e lembrei-me de alguns comentários que fui fazendo para os amigos no Facebook. Decidi então escrever um texto em jeito de crónica, com elementos que recolhi a partir de conversas e da consulta de documentos.

Quando recebi o convite para visitar a Finlândia, e passar dois meses na Universidade de Helsínquia, fiquei muito entusiasmada. O meu instinto de professora emergiu imediatamente! A primeira pergunta que fiz foi se podia visitar escolas... Tinha um enorme desejo de conhecer o sistema finlandês por dentro. Queria falar com professores e observar as dinâmicas educativas no ensino básico e na formação de professores. Para mim, a Finlândia era (e é) a Meca da Educação!

Alguns elementos sobre o sistema de ensino

Como sempre, quando chego a um país estrangeiro, dirigime a uma grande livraria/papelaria e procurei pelos manuais escolares de Matemática. Lá encontrei uma estante, apenas uma, onde se liam títulos que terminavam com a palavra Matemática (1, 2, 3...). Abri um numerado com um 6... Sistemas de equações... E pensei para mim própria: É impossível... Eles não ensinam sistemas no 6.° ano! Lembrei-me, então, que estava num país nórdico, onde o sistema educativo e social tem capacidades há muito desejadas por nós... Como tal, este era um manual para o ensino secundário e não existem manuais para o ensino elementar à venda, pois são oferecidos a todos os alunos até ao 9.° ano, assim como a alimentação, o material escolar e o transporte para a escola. Para além destes benefícios é importante sublinhar que o ensino é 100% público e gerido pelo poder local (político e cívico). Mais importante ainda, há 40 anos mudou-se o paradigma na educação e desde então mantêm-se as principais ideias! Como devem calcular não são ideias consentâneas com um ensino tradicional, expositivo e elitista.

A Finlândia é um país independente desde 1917 e tem três línguas oficiais. Mantêm o Sueco, como vestígio do passado, oficializaram o Finlandês, passando-o do registo oral ao escrito, sublinhando a sua independência, e o Suomi, por respeito às minorias étnicas ancestrais. Os Finlandeses, como povo pragmático que é, usa o inglês como língua de trabalho, numa resposta à globalização, pelo que é «óbvio» que existam escolas cujo currículo é todo ensinado nessa língua. Assim, têm um currículo, uma nação e quatro línguas para comunicar! Importa dizer que os exames podem ser realizados, por opção pessoal, numa destas várias línguas. Ainda relativamente aos exames, foi interessante perceber que o fazem apenas no 12.° ano. No 9.° ano fazem testes de acesso a cada escola secundária. Estas oferecem opções mais gerais e mais especializadas, organizando-se a região de modo a não se repetirem as ofertas educativas, evidenciando simultaneamente liberdade e racionalidade.

O ambiente

Quando entramos num jardim de infância, escola básica ou secundária o silêncio é algo inesperado. A comunicação entre os finlandeses é comedida e «convivem muito bem com o silêncio. Se não temos nenhuma questão ou se não temos nada de relevante para dizer fazemos silêncio.» Para mim silêncio é intimidade mas para os finlandeses é racionalidade e naturalidade. Quando os alunos estão a trabalhar em grupo e o professor quer interromper o trabalho não levanta a voz dizendo «oh meninos», simplesmente levanta o polegar e os alunos quando estão prontos a ouvir correspondem com o mesmo gesto. Pensei que em Portugal, país latino e mediterrânico, estas estratégias não funcionassem mas a verdade é que partilhei a novidade e alguns professores conseguiram autênticos milagres.

As crianças e jovens vivem os espaços comuns, dentro das instalações, com grande liberdade e comodidade. Não seria de esperar outra coisa de um país que tem um inverno longo e rigoroso. Quando chegamos a uma escola elementar, as botas são substituídas por meias ou crocs, e nos vários recantos dos corredores encontramos sofás que convidam a boas conversas. As aulas têm um horário interessante, das 8h às 16h e os alunos devem estar dentro da sala 15 minutos antes do professor. O professor deve organizar a sua aula de modo a sair da sala, exatamente, à hora marcada. Esta rotina impera entre os adultos e portanto se temos uma reunião apresentamo-nos 15 minutos antes e a reunião termina na hora marcada independentemente de «tudo». Alunos e professores são tratados pelo primeiro nome e toda a sociedade tem muita confiança e respeito pelos docentes.

Neste momento as tecnologias têm um papel importante nas dinâmicas educativas, sendo ferramentas essenciais em sala de aula, quer durante os momentos de aprendizagem, quer nos momentos de avaliação sumativa. Sim, os finlandeses já estão a preparar os seus alunos para uma avaliação em ambiente virtual, uma vez que existe a informação de que os testes PISA, num futuro próximo, vão ser realizados em ambiente virtual. Aliás, esta era uma das grandes preocupações dos professores de Matemática com quem conversei. Colocavam-se questões de como explorar determinados conceitos em ambiente virtual e que tarefas seriam adequadas, neste ambiente, para se constituírem como instrumentos de avaliação sumativa. Em Portugal não oiço nada sobre esta realidade próxima e questiono-me se também os nossos alunos terão de responder ao PISA nas mesmas condições...

Os professores têm um estatuto social e profissional elevado, todos têm formação pós graduada (mestrado) e são selecionados entre os muitos que anseiam pela carreira docente (apenas 10% dos candidatos são aceites, ou seja, os melhores do sistema a par dos médicos). Como tal, tarefas de conceção de respostas a problemas da comunidade são vistas como «normais e adequadas» para qualquer profissional.

Assim, os problemas identificados pela comunidade educativa de cada «Agrupamento de Escolas» são levados aos professores pelo diretor que, enquanto mediador, constitui equipas de professores que propõem soluções. As soluções encontradas são levadas, pelo diretor como representante das equipas, a discussão na comunidade. E, claro que os professores têm confiança nas soluções encontradas porque se veem como profissionais críticos e confiantes do seu conhecimento. É de sublinhar que os professores trabalham nestas tarefas, extra letivas, no início do ano letivo porque as várias interrupções letivas, que são quatro... (sim quatro!) Tal como me foi dito, estas servem para «alunos e professores descansarem e ganharem um novo fôlego para a fase seguinte».

A reforma em curso

Uma das razões que me levou a ficar muito entusiasmada com a visita à Finlândia, neste preciso momento da sua história da Educação, foi o facto de se estar a preparar uma reforma educativa. Esta reforma foi discutida durante três anos e estiveram envolvidos todos os sectores da sociedade. Quando questionei como tinha sido o processo, foram-me descritas particularidades muito interessantes tendo-me ficado na memória duas. Um dos aspetos que considerei interessante é que quem propõe e gere o processo de discussão na reforma curricular é o Conselho Nacional de Educação. Ao governo cabe definir e gerir os recursos humanos que o país tem e pode ter. Assim, no Conselho Nacional de Educação, estão representados os diferentes intervenientes do sistema, a saber: antigos ministros, associação de Pais e Encarregados de Educação, associações profissionais e investigadores, entre outras personalidades convidadas. A cada um cabe apresentar a sua perspetiva, depois de se colocarem questões que se consideram pertinentes para a reforma de um sistema. Na introdução do novo currículo é-nos dada essa informação. Assim, as questões colocadas foram: «O que significa educar para o futuro? Que tipo de competências serão necessárias? Que tipo de práticas melhor produzem o que se deve aprender?»*.

Em setembro, o novo currículo nacional, na sua versão completa, ainda não estava disponível em Inglês, mas partes dele sim. Fui ver as conclusões resultantes de três anos de discussão, e que estariam inscritas no documento... Devia ser algo muito inovador! Assim, podemos ler: «Promover equidade, empreendedorismo (entenda-se cívico e não empresarial) e capacidades para o mundo laboral promovendo o espírito democrático, ‹empowerment› e o ‹saber ser e estar›»*. Quando li este excerto imediatamente voltei a Portugal e a 2001... Pelos vistos o currículo inovador da Finlândia estava muito próximo do currículo revogado pelo Ministério de Nuno Crato... E tal aconteceu no mesmo espaço temporal... Não é incrível?!

Mas será que o documento apenas prescreve um grande desígnio? De facto, não. Na introdução podemos ler que para cumprir este grande propósito é importante que as «Práticas de sala de aula [sejam] de natureza colaborativa onde os estudantes podem trabalhar com vários professores simultaneamente, durante determinados períodos, focados em projetos de natureza interventiva.» Para tal, enunciam-se sete capacidades fundamentais e gerais, algumas surpreendentes e outras nem tanto, a saber: a) Pensar e aprender; b) Competência cultural, interação e expressão; c) Ser capaz de tomar conta de si próprio, gerindo o quotidiano autonomamente e em segurança; d) Multi-literacia; e) Competências de Inovação-Conhecimento-Tecnologia; f) Competências de aprendizagem ao longo da vida e de empreendedorismo; g) Participação, responsabilidade e «empowerment».

E a Matemática?

Além das questões que orientam globalmente o currículo e que referi anteriormente, segundo investigadores da Universidade de Helsínquia em Educação Matemática, houve questões específicas em cada área do conhecimento. Na Matemática uma questão muito interessante: O que retirar do currículo de Matemática de modo a que haja tempo para o mais importante... O desenvolvimento de capacidades transversais da Matemática...? Ou seja, a ideia não era colocar mais conteúdos no currículo, mas sim tratar o essencial de modo a dar resposta ao mais importante, dar resposta aos desígnios definidos para o futuro... Um dos aspetos que perante evidências científicas se decidiu retirar do programa do ensino elementar (correspondente aos primeiros 6 anos) foi o algoritmo da divisão. Não, não se deixa de ensinar e aprender a divisão, continua-se a dar ênfase ao cálculo mental e à compreensão dos diferentes significados da divisão. No entanto, abandonam o algoritmo tradicional que consideram muito complexo para o nível de desenvolvimento cognitivo de crianças de 10–11 anos e sem utilidade para o quotidiano da vida adulta ou para a matemática avançada. Neste sentido, a palavra dos investigadores e a racionalidade das evidências científicas tiveram um peso muito grande. Ou seja, a sociedade finlandesa tem confiança nos resultados das ciências da educação.

Do ponto de vista do ensino e aprendizagem da Matemática, e se estivesse em Portugal em 2009, não encontraria grandes diferenças nas preocupações de professores e educadores matemáticos e nas orientações curriculares relativas ao ensino e aprendizagem desta disciplina, mas como estamos em 2016 as diferenças são grandes. Na Finlândia, de modo geral, defende-se um ensino onde a resolução de problemas é central na atividade de aprendizagem. Os alunos devem desenvolver a comunicação matemática e o raciocínio estabelecendo conexões entre temas matemáticos e não matemáticos. É interessante constatar que o novo programa finlandês, para além de incluir uma lista de conteúdos, tem indicações claras sobre as relações entre tópicos e entre temas matemáticos, valorizando a aprendizagem dos conceitos com compreensão. Claro que é «óbvio» que os professores são livres de tomar decisões sobre as abordagens a seguir e portanto existem nuances dependentes das opções de cada docente. Aliás, a autonomia e respeito pelo conhecimento especializado dos professores é uma característica muito forte do sistema educativo, o que fica evidenciado pelo modo como o novo currículo interpela os docentes... No final darei conta disso...

O que vi e ouvi na Finlândia deixou-me satisfeita com os passos que já foram dados em Portugal e preocupada com o caminho dos últimos anos... Pude compreender que a Finlândia tem feito, nos últimos 50 anos, um caminho progressivo e sem grandes roturas... E que o mais importante é que, como me foi dito pelo professor Markku Hannula, «as dificuldades de aprendizagem não são um problema do aluno, são um problema nosso... Este é o espírito do sistema finlandês!»...

A título de despedida não resisto a mostrar o modo como o currículo finlandês interpela os professores, ilustrando como a sociedade confia e respeita estes profissionais. Assim, transcrevo quatro frases do Currículo Nacional Finlandês* que me fizeram pensar...

Se quer promover **curiosidade**, permita o **questionamento**.

Se quer desenvolver a capacidade de **resolução de problemas**, interligue o conhecimento escolar com os problemas do quotidiano e encoraje os alunos a **trabalhar juntos para encontrarem as soluções** para os problemas.

Se quer promover a **compreensão, combine conhecimento** e capacidades sobre diferentes assuntos.

Se quer **educar cidadãos** que irão desenvolver a sociedade promova a **inclusão e participação** para fazer a diferença e facilite positivamente, e não negativamente, o **pensamento crítico**.

Se quer fortalecer a **auto-confiança** e **motivação** dos seus alunos para a aprendizagem dê ***feedback* honesto e construtivo.** Nunca humilhe ou seja depreciativo com quem está a aprender.

Nota

* tradução livre da autora.

Esta visita foi financiada por fundos nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída à autora (referência SFRH/BD/99258/2013).

NADIA FERREIRA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

DESCOBRINDO CURVAS

Esta tarefa destina-se aos alunos do décimo ano de Matemática A do Ensino Secundário, mas adapta-se também aos alunos de Matemática B. Desde que os alunos tenham estabelecido os primeiros contactos com a calculadora gráfica, nomeadamente saibam editar funções e organizar a janela adequada para visualizarem a representação gráfica pretendida, podem realizar a tarefa. Porém, o momento que nos parece mais adequado, é na altura que se termina a lecionação da função quadrática e se pretende partir para a exploração de mais funções polinomiais,

O trabalho e a discussão que esta tarefa propicia, permitem:

— rever as operações com polinómios que os alunos conhecem do Ensino Básico;
— revisitar as funções afins e quadráticas;
— contactar com novas funções, nomeadamente a função cúbica e outras funções polinomiais de grau n (n pertencente aos números naturais);
— factorizar polinómios
— empreender na divisão inteira de polinómios;
— conhecer raízes de polinómios com grau de multiplicidade superior a um.

A tarefa foi adaptada pelo Grupo de Trabalho do Secundário da APM, de Jorge, Ana; Alves, Conceição; Fonseca, Graziela e Barbedo, Judite — *Infinito 10* — Areal Editores (2001) e pressupõe que, na planificação, se opta por apresentar aos alunos a álgebra dos polinómios a par do estudo das funções polinomiais.

CRISTINA CRUCHINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA

DESCOBRINDO CURVAS[1]

Usa a tua calculadora gráfica para explorar e investigar curvas que são gráficos de funções. Alguns gráficos já são teus conhecidos, mas outros serão novidade para ti e pretende-se que os descubras, registes e analises com base nas questões que te são colocadas. Bom trabalho.

I.

1. Utiliza a calculadora gráfica e analisa os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$ por:
   $f_1(x) = x + 1$
   $f_2(x) = (x+1)(x+2)$
   $f_3(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$
   $f_4(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
2. Escreve $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ na forma de polinómio reduzido, introduz as expressões na calculadora e compara os gráficos com os que obtiveste em 1.
3. Em relação a cada uma das funções anteriores, haverá funções definidas por outras expressões polinomiais do mesmo grau que intersetem o eixo $0x$ nos mesmos pontos?

II. Dadas as funções

$g_1(x) = 2(x+1)$
$g_2(x) = 5(x+1)(x+2)$
$g_3(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x+2)(x+3)$
$g_4(x) = -2(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

1. Compara os gráficos de g_1 com f_1, de g_2 com f_2, de g_3 com f_3 e de g_4 com f_4 e diz como podem ser obtidos os gráficos das funções g_1, g_2, g_3 e g_4 a partir dos de f_1, f_2, f_3 e f_4, respetivamente. Qual parece ser a influência dos coeficientes?
2. Haverá funções definidas por expressões polinomiais de graus diferentes que intersectem o eixo $0x$ nos mesmos pontos, respetivamente, e só nestes?

III.

1. Utiliza a calculadora gráfica para construir os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$ por:
   $h_1(x) = (x+1)^2$
   $h_2(x) = (x+1)^3$
   $h_3(x) = (x+1)^4$
   $h_4(x) = (x+1)(x+2)^2$
   $h_5(x) = (x+1)^2(x+2)^2$
   $h_6(x) = (x+1)^3(x+2)^2$
2. Escreve $h_1(x)$, $h_2(x)$ e $h_3(x)$ na forma de polinómios reduzidos e indica o respetivo grau. Quais são os zeros destas funções? E os de h_4, h_5 e h_6?
3. Estuda o sinal das funções para valores *muito próximos* de -1, à esquerda e à direita, e relaciona-o com o expoente do fator $x + 1$.
4. Haverá funções definidas por expressões polinomiais de graus diferentes que intersetem o eixo $0x$ nos mesmos pontos e só nestes?

IV.

1. Utiliza a calculadora e representa
   $t_1(x) = (x+1)(x^2+1)$
   $t_2(x) = (x+1)(x^2+1)(x^2+4)$
2. O que têm de comum os fatores x^2+1 e x^2+4? Haverá polinómios de grau diferente que apresentem a mesma característica?

V.

1. Representa, na calculadora, as funções definidas em $\mathbb{R}$ por:
   $s_1(x) = (x+1)^2(x+2)$
   $s_2(x) = (x+1)^2(x+2)^2$
   $s_3(x) = (x+1)^3(x+2)$
2. Observa atentamente os gráficos obtidos e tenta detetar regularidades existentes.

VI.

Comenta cada uma das seguintes afirmações:

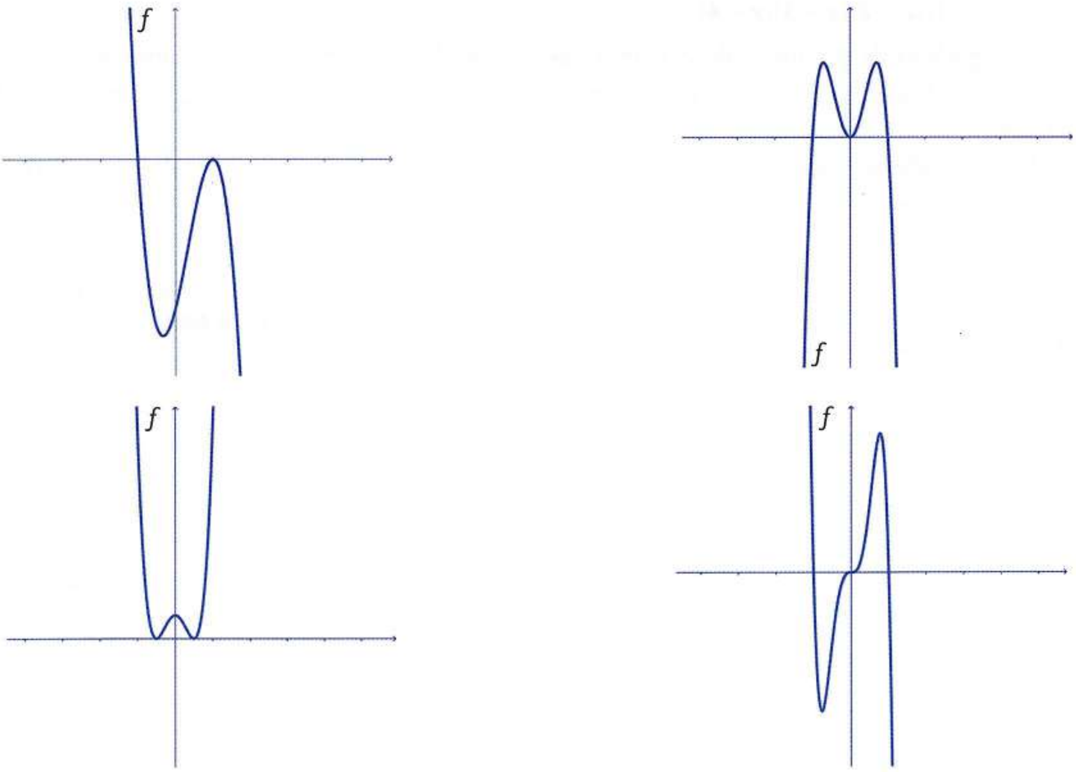
1. Dados dois números reais, há pelo menos uma função que os admite como zeros.
2. Conhecer o número de zeros reais de uma função polinomial permite-nos escrever um polinómio com o menor grau possível que pode definir a função.
3. Dados dois números reais, há polinómios de qualquer grau superior a 2 que os admitem como únicos zeros reais.

VII. À procura das funções

Seguem-se os gráficos de funções polinomiais de grau inferior a 6.

Utiliza a calculadora e procura encontrar expressões polinomiais que correspondam a cada uma das funções que a seguir se representam pelos seus gráficos.

Explica, em cada caso, o teu raciocínio, regista cada tentativa que fizeres bem como o esboço do gráfico encontrado e, no caso de ele não coincidir com o gráfico dado, procura encontrar uma explicação.



[1] A adaptado de: Jorge, A. M. B., Alves, C. B., Fonseca, G. & Barbedo, J. (2001). *Infinito 10*. Areal Editores.

Caros leitores

Neste número damos conta de uma das muitas plataformas existentes na Web, com o objetivo de envolver os pais, alunos e professores no processo de ensino e aprendizagem da matemática com recurso à tecnologia.

Partindo de um banco de questões resolúveis por um processo de escolha múltipla e organizadas por nível de dificuldade crescente, os alunos são confrontados com o seu desempenho em tópicos específicos do currículo de matemática, podendo recorrer a explicações (dicas) sempre que considerem necessário. Esta plataforma apresenta ainda a particularidade de estar a ser desenvolvida em interação com um Agrupamento de Escolas do ensino público português, proporcionando uma abordagem atualizada dos temas do currículo nos anos de escolaridade que pretende integrar.

Esperamos contribuir desta forma para manter os leitores informados acerca das várias dimensões que o uso das tecnologias tem vindo a assumir, podendo realizar abordagens e escolhas mais informadas e consentâneas com as formas de aprendizagem que as tecnologias preconizam.

António Domingos
amdd@fct.unl.pt
UIED, Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade NOVA de Lisboa

MATHVOLUTION
Nova Plataforma Online — Matemática

O MATHVOLUTION é uma nova plataforma *online* com mais de 1200 exercícios organizados por tema e por nível de dificuldade, permitindo uma evolução de cada aluno ao seu próprio ritmo. Professores e pais podem também registar-se na plataforma e acompanhar o desempenho dos seus alunos, identificando as suas dificuldades.

A plataforma está disponível para o 6.º ano de escolaridade desde o final de setembro de 2015 e a partir de setembro de 2016 estará disponível também para os 5.º e 7.º anos de escolaridade.

Em apenas seis meses, o MATHVOLUTION conquistou 3500 utilizadores e os alunos registados já responderam a mais 175 000 exercícios.

COMO FUNCIONA O MATHVOLUTION?

Existem dois tipos de perfil no MATHVOLUTION: aluno e tutor.

O perfil de *aluno*, como a própria designação indica, é direcionado para alunos. O MATHVOLUTION permite que estes pratiquem exercícios organizados por tema e por nível de dificuldade. Sendo a matemática uma disciplina em que a existência de bases sólidas é essencial, a plataforma garante que um aluno apenas acede a exercícios complexos depois de completar exercícios mais simples. Cada exercício tem sempre duas dicas disponíveis cujo objetivo é induzir o raciocínio do aluno. Caso as dicas não sejam suficientes para a resolução do exercício, o aluno pode ainda consultar a resposta final. As dicas e a resposta final funcionam como ferramentas de aprendizagem dos conceitos matemáticos em questão. Depois de consultar as dicas e a resposta final de um exercício, espera-se que o aluno seja capaz de resolver exercícios semelhantes. A Figura 1 ilustra a área de trabalho, interface, onde o aluno pratica exercícios.

Para completar um nível, o aluno terá de responder corretamente a três exercícios sucessivos sem utilizar dicas. No caso de utilizar dicas ou de responder incorretamente a alguns exercícios, a sua progressão ao longo do nível será mais lenta. Como consequência, o MATHVOLUTION permite que alunos com mais dificuldade num determinado conceito resolvam mais exercícios do que os que revelam mais facilidade.

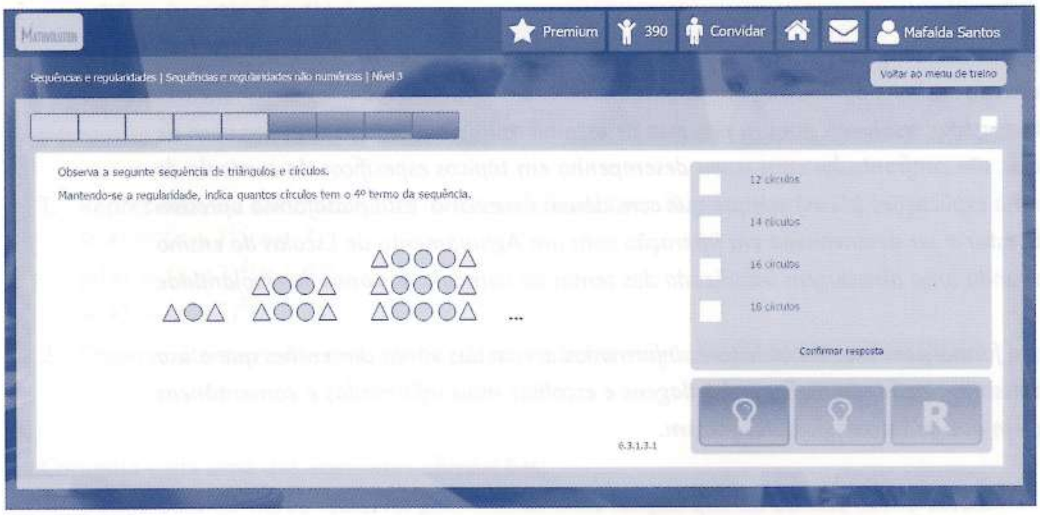


Figura 1.—Perfil Aluno — Área de Trabalho

Figura 2.—Perfil Aluno — Exercícios *versus* Desempenho

A organização de exercícios por nível de dificuldade e a existência de dicas vem dar um maior grau de autonomia aos alunos. Estes podem agora evoluir ao seu próprio ritmo uma vez que os exercícios estão adaptados ao seu nível.

No MATHVOLUTION os alunos podem consultar o seu desempenho nos diferentes temas e nomeadamente identificar os conceitos em que têm mais dificuldades. Esta funcionalidade é muito importante como ferramenta de autoavaliação de cada aluno. Os alunos podem também a qualquer momento rever um exercício a que já tenham respondido.

A Figura 2 ilustra as funcionalidades principais do MATHVOLUTION para o aluno — praticar exercícios e consultar o seu desempenho.

Cada aluno pode também estar associado a um conjunto de tutores, que podem ser professores ou pais, ou alguém que o acompanhe regularmente na disciplina de matemática. Os tutores têm acesso à evolução do aluno e às suas dificuldades, permitindo uma intervenção mais focada.

Responder a exercícios e completar níveis no MATHVOLUTION permite conquistar pontos. Os alunos podem ainda convidar os seus amigos para uma liga onde poderão competir com base na pontuação de cada um.

O perfil de *tutor* é direcionado para professores, pais ou alguém que acompanhe alunos na disciplina de matemática.

Os tutores podem consultar os mais de 1200 exercícios disponíveis no MATHVOLUTION incluindo as opções de resposta, as dicas e a resposta final.

Os tutores podem também associar-se aos seus alunos, através de convites, e acompanhar o seu desempenho, identificando os conceitos específicos onde estes têm mais dificuldades. Os tutores conseguem assim ter acesso, em tempo real, ao desempenho dos seus alunos, permitindo uma intervenção mais focada.

Os tutores, no caso de serem professores, podem agrupar os alunos em turmas e consultar o desempenho da turma como um todo, ou de um aluno individualmente. A funcionalidade de consultar o desempenho global da turma está mais orientada para professores, enquanto que a funcionalidade de consultar o desempenho de um aluno individualmente está mais orientada para pais ou alguém que o acompanhe individualmente.

APLICABILIDADE DO MATHVOLUTION ENQUANTO PROFESSOR

1. Avaliar a aprendizagem dos conceitos lecionados numa determinada aula ou aulas através de TPC's no MATHVOLUTION

O MATHVOLUTION pode ser utilizado como ferramenta para avaliar a aprendizagem, por parte dos alunos, dos conceitos lecionados numa determinada aula ou aulas. Depois de concluir um determinado conceito em aula, o professor pode recomendar aos seus alunos que acedam ao MATHVOLUTION e completem os níveis referentes aos conceitos em causa. Esta pode ser uma atividade realizada no âmbito de trabalhos de casa. Em tempo real, o professor terá acesso ao desempenho dos seus alunos nesses conceitos incluindo as áreas onde existem mais dificuldades. Esta é uma forma expedita de validar se os novos conceitos foram bem apreendidos. Com base nesta informação, o professor poderá então decidir se os alunos estão preparados para aprender novos conceitos ou se será necessário rever os conceitos anteriores.

2. Utilizar o MATHVOLUTION como ferramenta em aulas de apoio

O MATHVOLUTION está neste momento a ser usado em algumas escolas em aulas de apoio, com grupos de cerca de 10 alunos. Cada aluno está no seu computador, enquanto o professor dá apoio sempre que solicitado. O MATHVOLUTION permite ao aluno ter acesso a exercícios adaptados ao seu nível de dificuldade e a dicas em caso de dificuldade. O aluno fica assim menos dependente do professor e mais autónomo. O professor poderá prestar apoio individual aos alunos que estiverem com dificuldade num determinado conceito.

O facto de cada aluno ter acesso, em tempo real, à sua evolução e desempenho, funciona como importante fator motivacional. Ao completarem níveis, fazem pequenas conquistas que são também essenciais à motivação.

3. Integrar o MATHVOLUTION em sala de aula

O MATHVOLUTION tem sido também utilizado em sala de aula. O professor pode registar-se como aluno, e projetar o MATHVOLUTION. Assim, a turma poderá responder em conjunto aos exercícios do MATHVOLUTION e evoluir ao longo dos vários níveis de dificuldade.

Parceria com o Agrupamento de Escolas de Carcavelos

O MATHVOLUTION tem vindo a ser desenvolvido em colaboração com o Agrupamento de Escolas de Carcavelos.

Deste o início da conceção que estão envolvidos professores de Matemática, alunos e pais. O objetivo foi sempre que o MATHVOLUTION se adaptasse às necessidades de todos estes intervenientes.

Ao longo dos dois últimos anos foram realizadas várias experiências piloto com os alunos de 5.° e 6.° anos de escolaridade. A versão do MATHVOLUTION disponibilizada atualmente é o resultado de interações sucessivas com a comunidade escolar deste Agrupamento.

Os 225 alunos e os 6 professores de 6.° ano do Agrupamento estão desde outubro de 2015 a utilizar o MATHVOLUTION.

Como aceder ao MATHVOLUTION

Para utilizar o MATHVOLUTION, basta aceder a

www.mathvolution.com

e efetuar o registo como tutor ou aluno.

MATHVOLUTION | a evolução na Matemática

INÊS SANTOS

COORDENADORA PEDAGÓGICA DO MATHVOLUTION

Nesta secção concluímos a publicação do texto de Richard Skemp, cuja primeira parte foi publicada na revista *Educação e Matemática* n.º 136.

Compreensão relacional e compreensão instrumental[*]

RICHARD R. SKEMP

ADVOGADO DO DIABO

Dado que tantos professores ensinam Matemática instrumental, será que isto acontece porque efetivamente isso tem certas vantagens? Tenho sido capaz de pensar acerca de três vantagens (distintas de motivos circunstanciais para ensinar desta forma, que serão discutidos mais à frente).

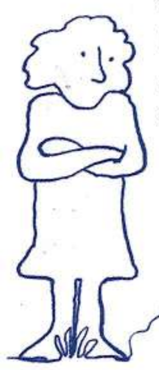
1. No seu próprio contexto, a Matemática instrumental é usualmente mais fácil de compreender; por vezes muito mais fácil. Alguns tópicos, tais como a multiplicação de dois números negativos, ou a divisão por um número fracionário, são difíceis de compreender de forma relacional. «Menos por menos dá mais» e «para dividir por uma fração deves invertê-la e multiplicar» são regras facilmente memorizáveis. Se aquilo que é pretendido é uma página de respostas corretas, a Matemática instrumental pode fornecer este resultado mais rápida e facilmente.
2. Por isso as recompensas são mais imediatas, e mais visíveis. É agradável obter uma página de respostas corretas, e não devemos menosprezar a importância do sentimento de sucesso que os alunos assim obtêm. Recentemente visitei uma escola onde algumas crianças se descreviam a si próprias como «*thickos*». Os seus professores usavam também esse termo. Estas crianças necessitam de sucesso para restaurarem a sua autoconfiança, e pode ser argumentado que podem alcançar este objetivo mais rápida e facilmente na Matemática instrumental que na relacional.
3. Apenas porque menos conhecimento se encontra envolvido, podemos frequentemente obter a resposta correta mais rapidamente, e de modo confiável, através do pensamento instrumental do que pelo relacional. Esta diferença é tão acentuada que até os matemáticos relacionais frequentemente usam o pensamento instrumental. Esta é uma questão de grande interesse teórico, que eu espero discutir mais aprofundadamente numa ocasião futura.

O exposto pode não fazer justiça absoluta à Matemática instrumental. Ficarei satisfeito de saber mais algumas vantagens que pode ter.

Existem quatro vantagens (pelo menos) na Matemática relacional.

1. *É mais adaptável a novas tarefas.* Recentemente estava a tentar ajudar um rapaz que tinha aprendido a multiplicar dois números decimais ignorando a vírgula, multiplicando como os números naturais, e reinserindo a vírgula de forma a dar o mesmo número to-

[*] Traduzido e reimpresso a partir de Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9–15 com a autorização do National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, USA. Todos os direitos reservados. O NCTM não se responsabiliza pela exatidão ou qualidade da tradução.
Tradução dos alunos do Mestrado em Didática da Matemática de 2015/16 do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa: Dinashavari Lacmane, Margarida Carvalho, Marisa Pedro, Marisa Silva, Ricardo Cardoso, Vânia Santiago e revisão de João Pedro da Ponte e Lina Brunheira.



tal de dígitos depois da vírgula como estava antes. Este é um método prático se se souber porque funciona. Embora isso não fosse imputável a si próprio, esta criança não sabia; de modo razoável aplicou-o também à divisão de números decimais. Por este método 4,8 : 0,6 resulta em 0,08. O mesmo aluno tinha também aprendido que se forem conhecidos dois ângulos de um triângulo, é possível determinar o terceiro adicionando os dois ângulos dados e subtraindo este resultado a 180°. Ele obteve dez respostas corretas desta forma (o seu professor acreditava na abundância da prática), e prosseguiu utilizando o mesmo método para encontrar os ângulos externos. Por isso ele obteve as cinco respostas seguintes erradas.

Não penso que ele estava a ser pouco inteligente em nenhum destes casos. Ele estava simplesmente a extrapolar a partir do que já conhecia. Mas a compreensão relacional, conhecendo não somente que método funciona mas porquê, tê-lo-ia capacitado a relacionar o método com o problema, e possivelmente a adaptar o método a problemas novos. A compreensão instrumental requer a memorização dos problemas nos quais um método é aplicável e de quais não é, e também implica aprender um método diferente para cada nova classe de problemas. Então a primeira vantagem da Matemática relacional conduz a:

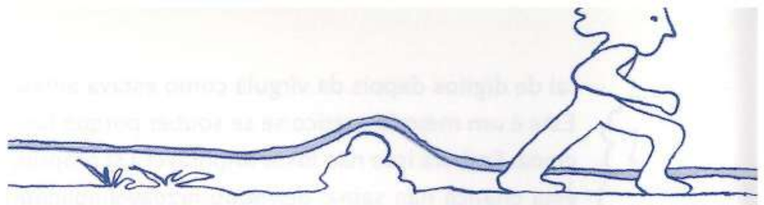
2. *É mais fácil de recordar.* Existe aqui um paradoxo aparente, pois a Matemática relacional é certamente mais difícil de aprender. É certamente mais fácil para os alunos aprender que «área de um triângulo = 1/2 × base × altura» do que aprender porque é que é assim. Mas depois têm que aprender regras diferentes para triângulos, retângulos, paralelogramos, trapézios; enquanto a compreensão relacional consiste parcialmente em observar tudo isto em relação à área de um retângulo. Ainda assim é desejável conhecer as regras separadas; não queremos ter que derivá-las de novo a todo o momento. Mas conhecendo também como elas estão interrelacionadas capacita a relembrá-las como partes de um todo conectado, o que se torna mais simples.

Existe mais para aprender — as conexões assim como as regras separadas — mas o resultado, uma vez aprendido, é mais duradouro. Consequentemente existe uma menor reaprendizagem a realizar, e a longo prazo o tempo despendido pode muito bem acabar por ser menor.

Ensinar para a compreensão relacional pode também envolver conteúdos mais atuais. Outrora, uma explicação instrumental estava cotada como conduzindo à afirmação: perímetro = πd. Para a compreensão relacional desta igualdade, a ideia de uma proporção teria que ser ensinada primeiro (entre outras), o que tornaria o trabalho muito mais longo do que simplesmente ensinar as regras como apresentado. Mas a proporcionalidade tem um leque de aplicações tão amplo que vale a pena ensinar nestes moldes. Na Matemática relacional isto acontece com muita frequência. As ideias requeridas para compreender um tópico particular tornam-se básicas para compreender muitos outros tópicos também. Conjuntos, aplicações e equivalência são tais ideias. Infelizmente, os benefícios que poderiam advir do seu ensino são muitas vezes perdidos pelo seu ensino como tópicos distintos, mais do que como conceitos fundamentais através dos quais todas as áreas da Matemática podem ser interrelacionadas.

3. *O conhecimento relacional pode ser eficaz como um objetivo a atingir em si mesmo.* Isto é um facto empírico, baseado na evidência a partir de experiências controladas usando material não matemático. A necessidade de recompensas externas e punições é amplamente reduzida, tornando o que muitas vezes é apelidado de lado motivacional da função do professor bastante mais fácil. Isto está relacionado com:

4. *Os esquemas relacionais são orgânicos em qualidade.* Esta é a melhor forma de que eu tenho sido capaz de formular uma qualidade pela qual eles parecem atuar como um agente do seu próprio crescimento. A conexão com 3 é que se as pessoas obtêm satisfação a partir da compreensão relacional, elas podem não somente tentar compreender novo material de forma relacional que é colocado perante si, mas também procurarem ativamente novo material e explorarem novas áreas, de forma muito parecida com uma árvore a estender as suas raízes ou um animal a explorar um novo território em busca de alimento. O desenvolvimento desta ideia para além do nível de uma analogia é algo que está para além do âmbito deste artigo, mas é demasiado importante para omitir.



Se o exposto puder ser considerado como uma apresentação justa da argumentação a favor dos dois lados, constatar-se-ia que, enquanto possa existir um argumento para a Matemática instrumental, a curto prazo e no seio de um contexto limitado, a longo prazo e no contexto da educação global de uma criança isso não se verifica.

Então porque é ensinada a tantas crianças unicamente a Matemática instrumental ao longo dos seus percursos escolares? Se não conseguirmos responder a esta questão, existe pouca esperança de melhorar a situação.

O professor pode fazer uma escolha fundamentada optando pela compreensão instrumental por um ou mais dos seguintes motivos.

1. Porque a compreensão relacional demoraria muito tempo a ser alcançada e porque os alunos só irão precisar de usar uma técnica específica.
2. Porque a compreensão relacional de um determinado tópico é muito difícil, mas os alunos continuam a precisar dela por causa dos exames.
3. Porque uma habilidade pode ser necessária para outra disciplina (por exemplo, Ciências) antes de ser totalmente compreendida relacionalmente com os esquemas de que o aluno dispõe naquele momento.
4. Porque se trata de um professor pouco experiente que trabalhe numa escola onde a Matemática ensinada é instrumental.

Todos estes motivos implicam que, tal como a expressão «escolha fundamentada» sugere, o professor é capaz de considerar os objetivos alternativos da compreensão instrumental e relacional com base nas suas vantagens e em relação a uma situação específica. Fazer uma escolha informada deste tipo significa estar consciente da diferença e da compreensão relacional da própria Matemática. Assim, só a compreensão relacional pode ser considerada adequada para o professor. No entanto, é preciso estar consciente de que isto não acontece com muitos professores. Provavelmente com a maior parte dos professores.

Fatores situacionais que contribuem para esta dificuldade incluem:

1. *O efeito negativo dos exames.* Tendo em conta a importância determinante dos exames com vista à empregabilidade no futuro, não podemos culpar os alunos pelo facto de o seu principal objetivo ser o sucesso. O modo como os alunos trabalham não pode ser influenciado pelo objetivo pelo qual trabalham, ou seja, responder corretamente a um número suficiente de perguntas.
2. *Programas demasiado extensos.* Parte do problema prende-se com a grande concentração do conteúdo de informação em Matemática. Uma afirmação matemática pode estar condensada numa só linha, enquanto noutra disciplina é necessário usar um ou dois parágrafos. Como os matemáticos estão habituados a lidar com ideias tão concentradas não se apercebem disto (razão pela qual muitas vezes avançam depressa demais na matéria). Os que não são matemáticos não se apercebem desta situação de todo. Independentemente da razão, quase todos os programas seriam muito melhores se fossem menos extensos, deixando assim mais tempo para ensinar melhor os seus conteúdos.
3. *Dificuldade na avaliação* se a pessoa compreende de forma relacional ou instrumentalmente. Pelas notas que o aluno faz no papel é muito difícil inferir quais os processos mentais que ele utilizou para chegar àquelas notas; daí a dificuldade de avaliação segura em Matemática. Numa situação de ensino, falar com o aluno é certamente a melhor forma de o perceber; mas numa turma de mais de 30 alunos pode ser difícil arranjar tempo para o fazer com todos.
4. *A grande dificuldade em termos psicológicos de os professores reestruturarem os seus esquemas já existentes e de longa data*, mesmo para aquela minoria que sabe que precisa, que o quer fazer, e que tem tempo para estudar.

Retirei os três parágrafos seguintes (no original não estão seguidos) de um artigo recente de Sir Hermann Bondi em que discute o valor prático, intelectual e cultural de uma educação matemática (e não tenho dúvida de que se refere a Matemática relacional!).

Até agora a minha homenagem prestada à Matemática deixou de parte um ponto fundamental: a rejeição de muitos face à Matemática, uma rejeição que, em muitos casos, se transforma em pavor.

A atitude negativa face à Matemática, infelizmente tão comum, mesmo entre os mais letrados, é definitivamente a melhor medida da nossa falha e um perigo real para a nossa sociedade.

Esta é provavelmente a indicação mais clara de que algo está mal, mesmo muito mal, com esta situação. Não é difícil atribuir uma quota-parte da responsabilidade à educação; é mais difícil identificar a culpa, e ainda mais difícil sugerir novas soluções.

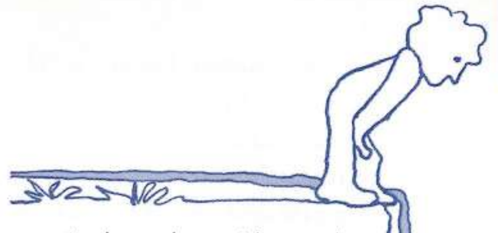
Se em vez de «culpa» dissermos «causa», não há dúvida de que a falha generalizada em ensinar Matemática relacional pode ser identificada como a principal causa — uma falha que acontece na educação primária, secundária e superior, bem como nos cursos «modernos» e «tradicionais». É de facto difícil sugerir novas soluções, mas espera-se que o diagnóstico seja um passo importante para a cura. Outro passo será apresentado na secção seguinte.

UMA FORMULAÇÃO TEÓRICA

Não há nada tão poderoso como uma boa teoria para dirigir a nossa ação numa situação complexa, e para coordenar os nossos esforços com os esforços de outros. Todos os bons professores constroem as suas próprias provisões de conhecimentos empíricos e abstraíram destes conhecimentos alguns princípios gerais nos quais confiam para se guiarem. Mas enquanto o seu conhecimento permanece nesta forma, está ainda em grande medida ao nível intuitivo nos indivíduos e não pode ser comunicado, tanto por esta razão, como porque não há uma estrutura conceptual partilhada (esquemas mentais) em termos que possa ser formulado. Fosse isto possível, os esforços individuais poderiam ser integrados num corpo unificado de conhecimento que estaria disponível para ser usado pelos recém-chegados à profissão. Presentemente, a maioria dos professores tem que aprender com os seus próprios erros.

Por algum tempo, a minha própria compreensão sobre a diferença entre os dois tipos de aprendizagem, direcionada respetivamente à Matemática relacional e instrumental, permaneceu ao nível intuitivo, apesar de eu estar pessoalmente consciente que a diferença era de grande importância, e esta visão era partilhada pela maioria daqueles com quem eu a discutia. A consciência da necessidade de uma formulação explícita tornou-se forçosa para mim no decorrer de dois projetos de investigação paralelos; uma revelação (*insight*) surgiu, bem de repente, durante uma recente conferência. Depois de vista parece bastante simples e pergunto-me como não pensei nisso antes. Mas há dois tipos de simplicidade: a da ingenuidade; e aquela que, por penetrar além de diferenças superficiais, traz a simplicidade pela unificação. É o segundo tipo que uma boa teoria tem para oferecer e que é mais difícil de alcançar.

É necessário um exemplo concreto com o qual começar. Quando fiquei numa certa cidade pela primeira vez, depressa aprendi vários caminhos particulares. Aprendi a deslocar-me entre o sítio onde ficava e o gabinete do colega com quem estava a trabalhar; entre o sítio onde ficava e o refeitório da universidade onde comia; entre o gabinete do meu amigo e o refeitório; e mais dois ou três. Em suma, aprendi um número limitado de planos fixos pelos quais me podia deslocar de localizações particulares de partida para localizações particulares de chegada.



Assim que tive algum tempo livre, comecei a explorar a cidade. Agora eu não pretendia chegar a algum lado específico, mas sim aprender o que havia em volta e, no processo, ver o que poderia encontrar que fosse do meu interesse. Nesta fase o meu objetivo era diferente: construir na minha cabeça um mapa cognitivo da cidade.

Estas duas atividades são bastante diferentes. Contudo, para um observador externo, são difíceis de distinguir. Quem me visse deslocar de A para B teria grande dificuldade em saber (sem me perguntar) em qual das duas eu estava envolvido. Mas o mais importante acerca de uma atividade é o seu objetivo. Num dos casos, o meu objetivo era chegar a B, que é uma localização física. No outro, era de alargar ou consolidar o meu mapa mental da cidade, que é um estado de conhecimento.

Uma pessoa com um conjunto fixo de planos pode encontrar o caminho entre um certo conjunto de pontos de partida e um certo conjunto de pontos de chegada. A característica de um plano é que diz à pessoa o que fazer em cada ponto específico: virar à direita ao passar da porta, continuar a direito ao passar a igreja, etc. Mas se em qualquer das etapas a pessoa comete um erro, vai-se perder; e vai continuar perdida se não for capaz de redefinir os passos e voltar ao caminho correto.

Em contraste, uma pessoa com um mapa mental da cidade tem algo com o qual pode produzir, quando necessário, um número quase infinito de planos pelos quais pode guiar os seus passos desde qualquer ponto de partida até qualquer ponto de chegada, desde que ambos possam ser imaginados no seu mapa mental. E se cometer um erro vai continuar a saber onde está e por conseguinte vai conseguir corrigir o erro sem se perder, pode até aprender com isso.

A analogia entre o acima exposto e a aprendizagem da Matemática é próxima. O tipo de aprendizagem que leva à Matemática instrumental consiste na aprendizagem de um crescente número de planos, pelos quais os alunos podem encontrar o seu caminho de pontos de partida particulares (os dados) até aos pontos de chegada requisitados (as respostas às questões). O plano diz-lhes o que fazer em cada etapa tal como no exemplo concreto. E, tal como no exemplo concreto, o que tem que ser feito a seguir é puramente determinado pela situação atual. (Quando vires os correios, vira à esquerda. Depois de retirar parênteses, adiciona os fatores comuns.) Não há consciência da relação geral entre as etapas sucessivas e o objetivo final. E em ambos os casos quem aprende está dependente de orientação externa para aprender cada nova «maneira de chegar lá».

Em contraste, a aprendizagem da Matemática relacional consiste em construir uma estrutura conceptual (esquema) com a qual quem a possui pode (em princípio) produzir um número ilimitado de planos para chegar de qualquer ponto de partida, dentro do seu esquema, até qualquer ponto de chegada. (Eu digo «em princípio» porque está claro que alguns destes caminhos vão ser muito mais difíceis de construir que outros.)

Este tipo de aprendizagem difere em várias maneiras da aprendizagem instrumental.

1. Os meios tornam-se independentes dos objetivos particulares a serem atingidos desse modo.
2. A construção de um esquema dentro de uma dada área do conhecimento torna-se ela própria um objetivo intrinsecamente satisfatório.
3. Quanto mais completo for o esquema de um aluno, maior será o seu sentimento de confiança na sua própria habilidade de encontrar novas maneiras de «chegar lá» sem ajuda externa.
4. Mas um esquema nunca está completo. À medida que os nossos esquemas crescem, também a nossa perceção de possibilidades é, assim, alargada. Deste modo, muitas vezes o processo se torna auto contínuo e (em virtude do ponto 3) auto recompensador.

Tomando outra vez, por momentos, o papel de advogado do diabo, é justo perguntar se estamos de facto a falar de dois assuntos, Matemática relacional e Matemática instrumental, ou apenas de duas maneiras de pensar sobre a mesma disciplina. Usando a analogia concreta, os dois processos descritos podem ser vistos como duas maneiras diferentes de conhecer a mesma cidade; neste caso a distinção feita entre conhecimento relacional e instrumental seria válida, mas não entre Matemática instrumental e relacional.

Mas o que constitui a Matemática não é a matéria, mas um tipo particular de conhecimento sobre ela. A matéria da Matemática instrumental e relacional pode ser a mesma: carros viajando a velocidades uniformes entre duas cidades, torres cuja altura tem que ser encontrada, corpos caindo sob o efeito da gravidade, etc. etc. Mas os dois tipos de conhecimento são tão diferentes que eu penso haver fortes motivos para serem vistos como diferentes formas de Matemática. Se esta distinção é aceite, então a palavra «Matemática» é de facto, para muitas crianças, um falso amigo, como descobrirão à sua custa.

O PONTO DA SITUAÇÃO

Este artigo já vai longo, no entanto deixa muitos pontos a aguardar desenvolvimento no futuro. As aplicações da formulação teórica na última secção nos problemas educativos descritos nas duas primeiras não foram explicitados em pormenor. Uma destas é a relação entre os objetivos do professor e dos alunos. Outra consiste nas implicações para o currículo de Matemática.

No decurso da discussão destas ideias com professores e formadores de educação matemática, vários outros pontos interessantes foram levantados que não podem ser explorados aqui. Um destes é que o termo «Matemática» não deveria ser usado estritamente para Matemática relacional. Eu tenho muita simpatia por este ponto de vista, mas a questão não é assim tão simples como pode parecer.

Existem também investigações em progresso. Um estudo piloto com o objetivo de desenvolver um método (ou métodos) para avaliar a qualidade do pensamento matemático das crianças terminou e levou a um estudo mais profundo em colaboração com N.E.F.R. como parte da continuação do projeto TAMS. Uma tese na Universidade de Warwick está quase terminada, e um grupo de investigação do Departamento de Matemática na Universidade de Québec em Montreal está a investigar o problema com alunos do 1.º e do 4.º ano. Tudo isto, espero que seja relatado na devida altura.

O objetivo do presente artigo é duplo. Primeiro, tornar explícito o problema ao nível de pensamento empírico, e assim trazer para o primeiro plano da atenção aquilo que alguns de nós sabemos desde há muito tempo de modo intuitivo. Segundo, formular isto de tal modo que possa ser relacionado com algum conhecimento teórico existente sobre os processos de aprendizagem de Matemática e ser mais investigado a este nível, com a força e a generalidade que apenas a teoria pode fornecer.

Referências

R. R. Skemp: *Understanding Mathematics* (U.L.P.).

Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics.* Michigan: Penguin Books.

Bondi, H. (1976). The dangers of rejecting mathematics. *Times Higher Education Supplement*, 22, 8–9.

Richard R. Skemp
Departamento da Educação
Universidade de Warwick, Reino Unido

Às voltas com a sequência de Lucas

O Carlos começou a escrever os primeiros termos da sequência de Lucas, aquela que começa com os números 1 e 3 e, depois, cada termo é igual à soma dos dois anteriores:

1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

O Luís, que o estava a observar, desafiou-o:

— Descobre lá qual vai ser o algarismo das unidades do termo que ocupa a posição 2016.

O Carlos não se atrapalhou, fez uns cálculos e deu-lhe a resposta certa.

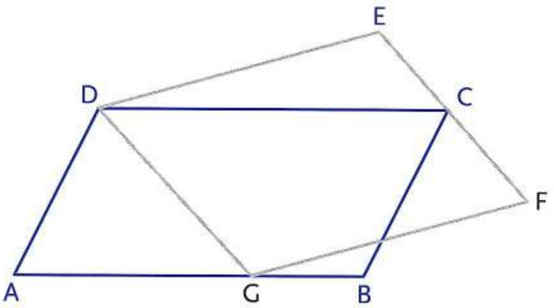
Que algarismo é esse?

(Respostas até 17 de setembro, para zepaulo46@gmail.com)

EQUIVALENTES OU NÃO?

O problema proposto no número 135 de Educação e Matemática foi este:

O Hugo desenhou um paralelogramo ABCD. O Diogo resolveu acrescentar um segundo paralelogramo DEFG, de tal modo que o ponto G pertencesse ao lado AB e o lado EF contivesse o ponto C.



Olhando para a figura, disse o Hugo:

— Parece-me que estes dois paralelogramos têm de ter a mesma área.

— Só se for por coincidência — discordou o Diogo. — Haverá casos em que a área do segundo é maior e outros em que é menor.

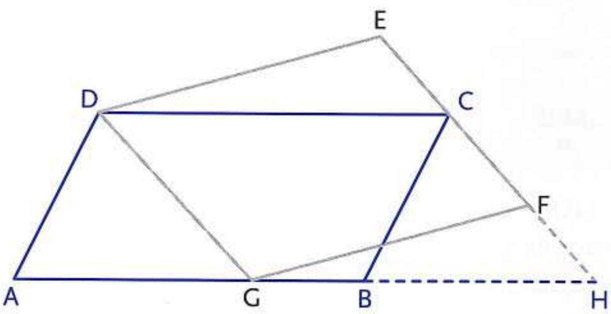
Quem tem razão?

Recebemos 10 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Catarina Ferreira (Viseu), Carlos Dias, Edgar Martins (Queluz), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Luís Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Mário Roque (Guimarães), Rita Bastos (Lisboa) e de um grupo de quatro professores da EB 2/3 Dr. Pedrosa Veríssimo, de Paião: Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

Todos concluíram que o Hugo tinha razão.

Houve quem usasse a trigonometria e vários começaram por experimentar num programa de geometria dinâmica. No entanto, a grande maioria usou apenas a geometria elementar.

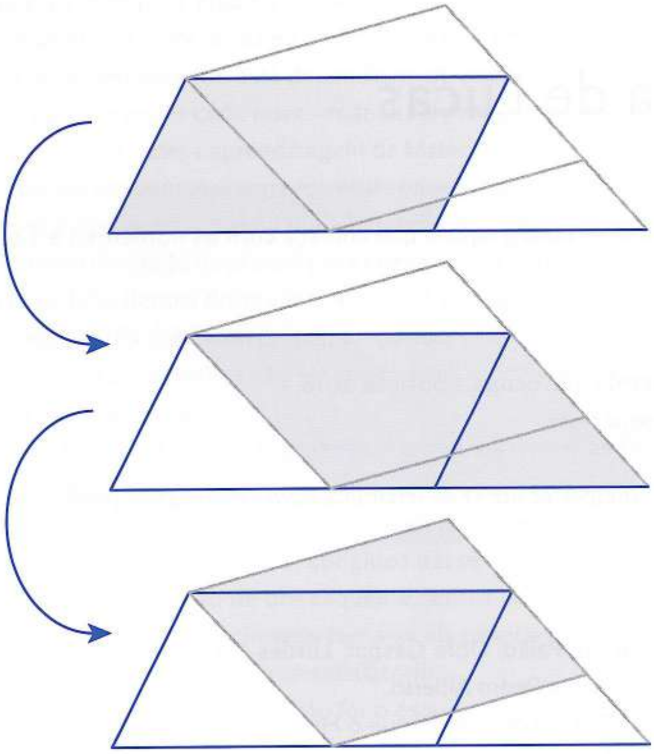
O método seguido pela Graça, Mário, Edgar, Carlos e Alberto foi prolongar os lados AB e EF até se encontrarem em H.



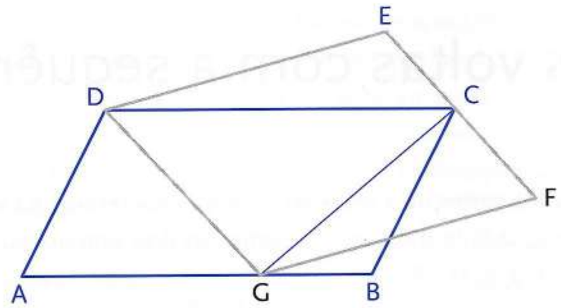
Os triângulos ADG e BCH são congruentes entre si (caso LAL), logo o paralelogramo ABCD tem a mesma área do paralelogramo DCHG.

Os triângulos CDE e GFH são congruentes entre si (caso ALA), logo o paralelogramo DEFG tem a mesma área do paralelogramo DCHG. Portanto, os paralelogramos ABCD e DEFG são congruentes.

O Mário mostra isto com as translações de triângulos.



Finalmente, A Rita seguiu um processo diferente e bem simples.



Para cada posição dos pontos G e F, a área do triângulo GCD é metade da área do paralelogramo ABCD (têm a mesma base e a mesma altura), e é também metade da área do paralelogramo DEFG, pelos mesmo motivos.

Logo, as áreas dos dois paralelogramos são iguais.

EIEM25

O Encontro de Investigação em Educação Matemática — EIEM — realiza a sua 25.ª edição este ano na Universidade de Évora. Este encontro, o EIEM 2016, promovido pela SPIEM, terá lugar nos dias 19 e 20 de novembro, e dedica-se ao tema «Recursos no ensino e na aprendizagem da Matemática».

Marque já na agenda e comece a pensar na sua contribuição — a submissão de comunicações e posters será até dia 15 de setembro. Informações detalhadas no site da SPIEM: http://www.spiem.pt/

ICME13

Entre 24 e 31 de julho de 2016 realiza-se o 13th International Congress on Mathematical Education (ICME). Este ano, terá lugar na Universidade de Hamburgo e no Centro de Congressos de Hamburgo.

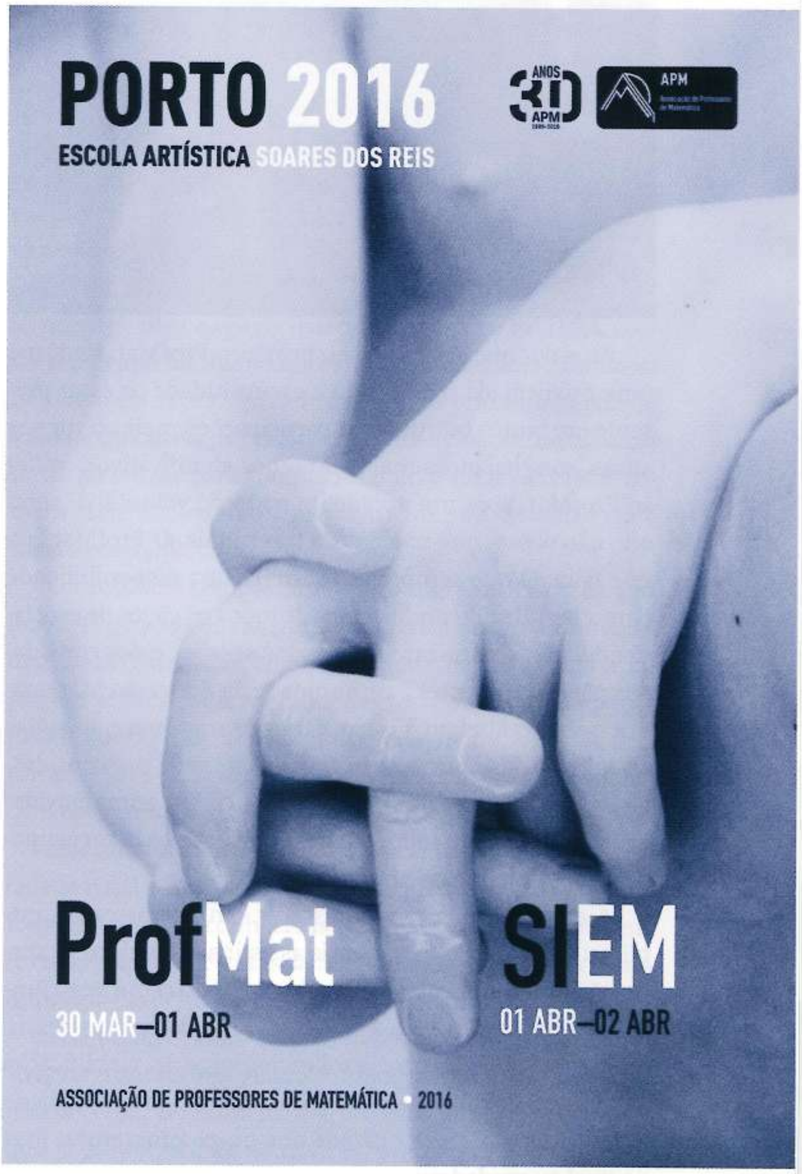
É um congresso sobre Educação Matemática no qual serão discutidas várias temáticas, tais como: argumentação e provas, ensino e aprendizagem de aplicações e modelagem, formação de professores, relação entre teoria e prática, a importância da visualização e dos modelos matemáticos, entre outras.

As datas de inscrição, o programa e outras informações úteis estão disponíveis no site:http://www.icme13.org/icmi_and_german_mathematics_education.html

ProfMat 2016

30 anos da APM

CATARINA FERREIRA E GISELA ARAÚJO



A APM e os ProfMat acompanham-me desde a minha formação inicial. A minha estreia nestes encontros foi em Leiria pelo ano de 1994, após ter terminado a minha licenciatura em Ensino da Matemática. O último foi há algumas semanas, na cidade do Porto. O ProfMat2016 concretizou-se nos dois últimos dias de março e 1 de abril — tempo de interrupção letiva. E é sobre este ProfMat que me desafiaram a escrever.

O vídeo com que nos presentearam na sessão de abertura permitiu-me contabilizá-los: estive presente em 19. Mas para mim este foi especial... Especial pelo conteúdo e pela forma.

Ao ser acolhida numa escola artística tive a oportunidade de ser surpreendida pela criação de quem ali estuda e estudou. Mas, para além das obras que surgem pelo espaço físico em que nos encontrámos, cruzei-me com a disponibilidade de quem ali trabalha e que contribuiu para que os três dias de encontro fossem vividos intensamente. Sim, três dias mas de tal modo preenchidos que dei por mim a referir-me a um episódio num passado que parecia mais longínquo e, afinal, tudo se tinha passado apenas «ontem». Repetir aqui o agradecimento à comissão organizadora (em especial, obrigada Lurdes Figueiral, a nossa presidente) e à comissão do programa (também em especial, o obrigada a Henrique Guimarães) e a todos aqueles que, para além do apoio logístico, resolviam os pequenos imprevistos e se despediam com o cumprimento simples «*Continuação!!!*» (com a deliciosa pronúncia do Norte).

Na sessão de abertura, momento solene de boas vindas e de discursos, fomos presenteados com o cubo comemorativo do aniversário da APM. Inspirado no *Cubo da Ribeira*, apoia-se sobre uma secção que «expõe» três faces gravadas, revelando o símbolo da APM, com o traçado do rio Douro, o símbolo dos 30 anos da APM e a homenagem a todos os professores com uma frase de J. Kilpatrick — «Os grandes professores não nos ensinam apenas a fazer, ensinam-nos a ser».

Sendo já muitas vezes referido como um lugar de encontros, este trouxe-me um inesperado: reencontrei uma cara amiga, que conheço de outros contextos, com mais anos de ensino que eu, e que estava no seu primeiro ProfMat. Cruzei-me com ela em sessões, observei como consultava o programa (gesto tão identitário de um *profmatista*) e como teve o à-vontade para questionar uma conferencista. No final do encontro, confidenciou-me ter gostado imenso e referiu com satisfação que ficava para o SIEM, pois poderia aproveitar um pouco mais.

Ao ouvir que estava no seu primeiro ProfMat, senti-me uma privilegiada por ter tido a oportunidade de estar presente em tantos outros, com participações mais ou menos ativas, com balanços mais ou menos significativos. Voltei ao ProfMat, após um ano de interrupção voluntária, senti que não posso, que não o devo fazer mais. O ProfMat faz-me falta. O que sempre encontrei? Uma disponibilidade para a partilha: de professores, de todos os ciclos de escolaridade, que dinamizam as diversas sessões e dos convidados não pertencentes à comunidade da Educação Matemática que nos ajudam a olhar para nós mesmos e a «agitar as águas»; das bancas com inúmeros materiais com destaque para a banca da APM, sempre com alguma novidade, mas, acima de tudo, encontro nele pessoas preocupadas com o Ensino da Matemática.

A escolha das sessões a assistir, em alguns casos, implicou fazer concessões: queria assistir a momentos de discussão das metas curriculares, buscando o aconchego junto dos meus pares para as dificuldades que estou a sentir, mas optei pela conferência sobre investigação, classificação e definição de quadriláteros, curiosamente numa linha de trabalho oposta à preconizada nos novos programas, mas na qual eu verdadeiramente acredito.

As publicações do NCTM têm sido referenciais no meu desenvolvimento profissional e não deixei de assistir à apresentação das novas «Normas», que estão a ser traduzidas e serão publicadas pela APM, que no seu subtítulo aparecerá algo como «Assegurar o sucesso matemático para todos».

Um dos convidados exteriores foi Simão Palmeirim Costa, da Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa, que nos apresentou uma faceta do trabalho de Almada Negreiros: a Geometria na sua obra plástica. A conexão da Matemática com a Arte foi também evidenciada pelo projeto apresentado pela Catalã, *Mequè Edó*, da Faculdade de Ciências da Educação da Universidade Autónoma de Barcelona, na mesa redonda intitulada «Matemática e Arte: caminhos que se cruzam na busca da beleza». Foi contagiante o modo entusiasta com que apresentou o projeto desenvolvido com crianças do pré-escolar em torno de uma escultura.

Numa outra mesa redonda, discutiram-se as Implicações do programa de Matemática A de 2013 no uso da tecnologia. Como podem as alterações curriculares colocar dúvidas na utilização da tecnologia? Coloca dúvidas a quem quiser contrariar o inevitável e ir contra todas as orientações da investigação, digo eu.

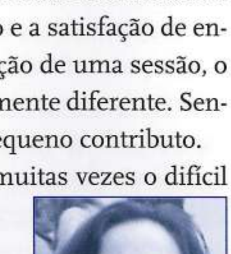
A última sessão plenária teve como convidada Maria do Céu Roldão da Faculdade de Educação e Psicologia da Universidade Católica Portuguesa do Porto, e registo um momento da sua intervenção como uma chamada à razão para o nosso papel como professores que, em tantos outros momentos, fomos tão ativos e com boa voz na rejeição de opções educativas tomadas e que são consideradas totalmente inapropriadas.

A referência feita a algumas sessões é claramente redutora e provavelmente injusta por deixar de fora, com certeza, outros momentos, outras sessões, mais marcantes para outros *profmatistas*. Assim chamo agora ao texto a minha colega de faculdade e de escola, que se tornou amiga e que me acompanhou neste ProfMat.

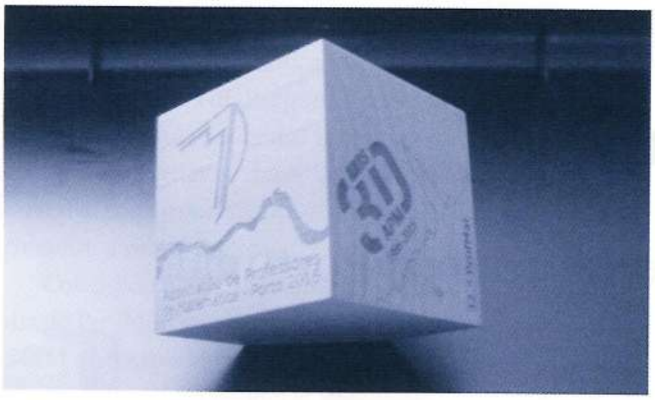
— «Gisela, que realças? Voltar à tua cidade natal, festejar o teu aniversário no jantar do encontro sem dúvida não ficará de fora... Conta-nos!»

Sim, são 30 anos de APM, e é decididamente uma vida de ProfMats para mim, nos meus cerca de 20 anos de carreira!

Comigo também começou no meu primeiro ano de trabalho. Estávamos em Évora, 1995, e nunca uma época de seca terminou com tanta chuva! «Foi preciso o ProfMat ir a Évora para acabar com a seca!», dizíamos com boa disposição debaixo dos guarda-chuvas... Este companheirismo, a excitação do desafio de apresentar uma sessão pela primeira vez, convencidas um pouco à força, mas depois, decididas a fazê-lo de corpo e alma. Fizemo-lo com muito nervosismo, mas sempre com o gosto e a satisfação de enfrentar desafios. A seguir à dinamização de uma sessão, o ProfMat ganha outro gosto completamente diferente. Sentimos que também demos o nosso pequeno contributo.



Tal como tu, Catarina, sinto que muitas vezes o difícil nos Profmats é escolher a que sessão assistir. Há sessões suficientemente boas para nos tirar cedo da cama depois do cansaço de dias muito preenchidos. Há toda uma variedade de sessões práticas e Workshops para quem, como eu, gosta de «por a mão na mas-



sa» e revisitar as carteiras da escola no papel do aluno. Há Grupos de Discussão, Conferências com Discussão e Mesas Redondas onde podemos ouvir diferentes perspetivas sobre um tema e partilhar ideias, várias Comunicações Orais, ou Apresentações onde podemos ficar a par das novidades e, claro, as Sessões Plenárias.

Neste ProfMat, revisitando os 30 anos de APM percebi que, apesar de ultimamente não o ter voltado a fazer, uma das componentes mais gratificantes para mim, e com a qual mais cresci como professora, foi quando trabalhei com outros professores para preparar a dinamização de uma sessão. O trabalho que fiz com a Rita Bastos sobre Geometria Dinâmica passou a fazer parte da minha maneira de pensar nas aulas. A apresentação que fiz com a Helena Paradinha sobre a evolução dos enunciados das tarefas que construíamos em conjunto, no início da minha carreira quando, graças à possibilidade de desdobrar as turmas e à criação de Laboratórios de Matemática, conseguimos lecionar capítulos inteiros com recurso aos computadores, são momentos em que «aprendi a ser».

Mas há também essa outra componente importantíssima para mim que já referiste, de podermos sentirmo-nos apoiados nas muitas discussões sobre alterações aos Currículos, Programas, Metas e acima de tudo esta infeliz necessidade que os governos têm de estar sempre a mudar as regras a meio do jogo.

Tudo isto polvilhado de reencontros com «velhos» colegas da faculdade e os colegas que fomos fazendo no ProfMat ao longo dos anos, em cada pequena pausa entre sessões, junto da banca da APM, nos *coffee-breaks* em que somos sempre tão bem recebidos, nos programas culturais...

É claro que não há bela sem senão! Uma das dificuldades continua a ser o facto de termos perdido a licença especial de formação e, por isso, o ProfMat não poder realizar-se fora das interrupções letivas. Estes períodos são essenciais para recuperar o fôlego, estando com a família, e poder preparar as aulas com mais tranquilidade. Abdicar disso não é nada fácil e deixa marcas. Os filhos carinhosamente exigem-nos esse tempo e nós também não queríamos abdicar dele! Talvez por isso sejamos menos a estar presente nos ProfMats e, ainda menos, os que partilham/dinamizam alguma sessão. Essa é sem dúvida uma das grandes perdas.

Mesmo assim, foi com satisfação que no BIP (Boletim Informativo do ProfMat) me deliciei com o testemunho de dois colegas. Um desses *profmatistas*, Catarina, tal como a tua colega referia que era a primeira vez, também ele estava a sentir este espírito familiar de camaradagem e partilha. O outro porque focava um aspeto que também tem sido determinante para eu participar tantas vezes no ProfMat, pois no seu grupo também existe um «organizador». Também no nosso ela existe. Quando ela lança o primeiro email, de uma longa cadeia de emails em que nos vamos desafiando umas às outras para ninguém faltar, o nosso ProfMat começa! Sem isto eu iria? Provavelmente sim. Mas não era a mesma coisa!!!

O ProfMat é sempre um dos pontos altos em cada ano letivo. Regresso com as minhas baterias matemáticas e pedagógicas carregadas, cheia de entusiasmo e de vontade de pôr em prática o que aprendi. Regressa-se com uma panóplia de tarefas e ideias para aplicar com os alunos. É tão gratificante ver a satisfação deles quando consigo contagiá-los com este entusiasmo!

Este ano foi especialmente marcante. Estava na minha cidade natal e fiz 45 anos no dia do jantar do encontro. Ver todas estas caras conhecidas a cantarem-me os parabéns foi muito agradável. Mas, acima de tudo, foi graças à extraordinária participação da Leonor Filipe, primeira presidente da APM, na Sessão Comemorativa dos 30 anos, que, nas suas referências à primeira mulher matemática, que se tinha de vestir de homem, e à primeira mulher professora que já pode vestir-se de mulher, embora de forma muito discreta, me lembrei das histórias que a minha mãe, professora primária, me contava em como só depois do 25 de abril pôde usar calças no trabalho e pôde votar nas eleições. Nesta altura, com a descrição de todos os avanços e recuos que existiram até à criação da APM, percebi que, tal como a Liberdade, a APM não é um direito adquirido. Foi difícil criá-la e é difícil mantê-la!

Que privilégio é ter uma associação profissional com este dinamismo que contribui de um modo tão significativo para a nossa visão sobre o que pode e deve ser o Ensino da Matemática e, em consequência, a nossa prática letiva. Encontramo-nos em 2017, em Viseu.

CATARINA FERREIRA E GISELA ARAÚJO
ESC. SEC. BRAAMCAMP FREIRE, PONTINHA

Seminário de Investigação em Educação Matemática

O presente da Educação Matemática em Portugal

Em 1993, João Pedro da Ponte escreve no artigo «A Educação Matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação», na revista *Quadrante* n.° 2, página 95: «*Falar da Educação Matemática em Portugal é fazer história, não do passado, mas do presente.*» Arriscamo-nos a dizer (com a devida licença) que atualmente falar em Educação Matemática é fazer história do passado, mas também do presente. Prova disso foi a realização de mais um Seminário de Investigação em Educação Matemática, nos dias 1 e 2 de abril do presente ano, promovido pelo Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática (GTI), no qual tivemos o prazer de participar.

Mais uma vez, o SIEM teve um dia simultâneo com o ProfMat. Tal permite o encontro, o convívio e a partilha de experiências entre os Professores de Matemática e Investigadores, sendo esta uma fonte de sucesso destes encontros.

De facto, a realização simultânea de ambos os eventos, só permite enriquecer a experiência a todos os participantes. Desde logo, pela quantidade de Conferências, Mesas Redondas e Workshops que levam a momentos de impasse na tomada de opções. Daí que a estratégia para resolver tal problema, seja a partilha de ideias nos corredores durante os intervalos dos diferentes acontecimentos.

No primeiro dia, tivemos o prazer de participar na Conferência Plenária «O que nos diz a investigação em Didática da Matemática?» onde o Professor João Pedro da Ponte (Instituto de Educação, Universidade de Lisboa) apresentou algumas ideias base dos principais temas/conhecimentos mais atuais na área da Didática da Matemática. Tal apresentação foi bastante interessante e rica a todos os níveis, pois permitiu dar a conhecer aos Docentes de Matemática, que têm menos contacto com a investigação na área da Educação Matemática, renovarem os seus conhecimentos e ficarem mais atualizados sobre aspetos que guiam a Investigação Nacional e Internacional.

De seguida, seguiu-se mais uma Conferência Plenária subordinada ao tema «A Educação Matemática de hoje pensando em amanhã» apresentada por Mequè Edo (Faculdade de Ciências da Educação da Universidade Autónoma de Barcelona). Foram apresentados alguns exemplos de estudos que, tal como descrito no guia do evento, permitiam refletir «sobre uma formação de excelência para os cidadãos do século XXI». A oradora transmitiu-nos a mensagem que pretendia (ou pelo menos, julgamos que essa mensagem nos chegou)... É necessário promover nos alunos atividades que sejam ricas a nível do desenvolvimento matemático, mas também das várias capacidades e competências transversais, desde do civismo à criatividade. Interessante palavra esta última, mas que daremos posteriormente mais destaque neste texto.

A seguir ao almoço, iniciaram-se as escolhas difíceis. Com um programa tão rico, não admira que tal tenha acontecido. Nesta parte do dia, desde da mesa redonda em que se refletiu acerca dos três anos passados com o «Programa e Metas Curriculares de Matemática» no Ensino Básico (e que excelente reflexão), passando pelas sempre interessantes Conferências com Discussão, até aos magníficos Workshops que se realizaram. Tudo era motivo de indecisão e de impasse. Mas, eventualmente, lá se conseguiu (a custo) chegar a um consenso com a nossa própria consciência docente/investigativa.

No término deste dia comum, tivemos a oportunidade de assistir ao Painel Plenário «Do currículo prescrito ao currículo aprendido: papel e importância do Professor», moderado por Ana Paula Canavarro (Universidade de Évora) e com participação de Adelina Precatado (Escola Secundária de Camões, Lisboa), Domingos Fernandes (Instituto de Educação, Universidade de Lisboa), Joana Brocardo (Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal) e Maria do Céu Roldão (Faculdade de Educação e Psicologia da Universidade Católica Portuguesa, Porto). Diríamos que as Comissões do Programa do ProfMat e Científica do SIEM conseguiram acertar no tema chave destes dois encontros e na palavra chave deste ProfMat/SIEM: o Currículo. Foi uma interessante discussão que nos levou a refletir sobre a nossa prática.

Concluído o Programa do primeiro dia de SIEM, último dia do ProfMat, foi possível ainda a quem estava inscrito no SIEM, participar num excelente jantar onde reinou a convivência e a partilha de ideias entre os participantes, em jeito de reflexão e conclusão do primeiro dia do Seminário.

Já no segundo dia e, mais uma vez, as indecisões voltaram. Vários Simpósios de Comunicações marcaram a manhã e apresentações de *Posters*... Note-se que existiram Simpósios e *Posters* relativos a vários temas, os quais passamos a enumerar: (i) História do ensino e epistemologia; (ii) Desafios na sala de aula; (iii) Ensino e Aprendizagem da Álgebra; (iv) Comunicação no ensino e aprendizagem; (v) Questões de aprendizagem; (vi) Contextos não formais de aprendizagem; (vii) Ensino e aprendizagem dos números; (viii) Conhecimento e práticas do professor. Mais uma vez, e na nossa perspetiva, abundou o espírito de partilha desta vez entre investigadores. Quer para quem assiste à apresentação dos diferentes projetos, quer para quem os apresenta, a experiência é muito interessante, motivadora e ficou-nos a ideia de querer fazer mais e melhor pela Educação Matemática e pela Investigação.

Para concluir, assistimos a mais uma Conferência Plenária. «Criatividade e Ensino Superior: do olhar atual dos alunos até desafios futuros» foi o tema que a todos agradou e interessou e em que a Professora Fátima Morais colocou todos os participantes a refletir acerca da falta de exploração do tema da Criatividade nas diferentes áreas do ensino e, nomeadamente, na Matemática.

Em jeito de conclusão do nosso testemunho que já vai longo, podemos dizer que, com este SIEM e dia comum com o ProfMat, ficaram duas ideias:

- A Educação Matemática está de ótima «saúde» em Portugal e recomenda-se. Temos excelentes investigadores, com excelentes ideias;
- A convivência entre Professores de Matemática e Investigadores é uma mais valia para aumentar a qualidade da nossa Investigação, assim como o reconhecimento da mesma por todos.

Assim, cabe à APM continuar a promover a boa relação entre as duas comunidades que lutam pelo mesmo objetivo: a promoção de uma Educação Matemática de excelência em Portugal.

Filipa Machado e João Carlos Terroso

Ainda sobre o ProfMat..., depoimento de um professor em início de carreira.

Escrevo com um grande sentimento de agradecimento por nestes dois anos me terem feito orgulhar-me de pertencer à nossa classe e mais especificamente à nossa associação, através da participação nestes dois ProfMat passados.

Escrevo que nem criança que anseia por mais. Mais conhecimento, mais informação, mais experiência, mais matemática, mais educação e mais educação e matemática.

Escrevo em nome próprio, mas com um sentimento de representação de uns quantos colegas que, tal como eu, não têm o prazer de estar a lecionar em virtude das circunstancias que a nossa classe profissional está a sofrer e, em particular, os docentes da disciplina a que pertenço, mas que sentem a paixão que nos reúne a todos.

Peço por favor que não desistam em meu nome e em nome dos meus colegas que são amadores nestas andanças de ensinar matemática. Queremos ouvir mais... Mais de todos vocês que constituem a Prata, o Ouro e o Diamante da nossa Associação. Lurdes Figueiral, João Pedro da Ponte, José Paula Viana, Domingos Fernandes, Lurdes Serrazina, Domingos Fernandes e tantos outros e outras que temos o prazer de escutar e de aprender. Apesar de não vos mencionar guardar-vos e vou guardar na minha memória profissional. Continuem a falar e a dar a vossa voz para que, tal como os nossos alunos, os recém-formados continuem com os sentidos bem despertos para a aprender mais e melhor com as vozes da experiência.

Queremos ser mais e melhor com vocês. Um dia, quando formos grandes, queremos ser como vocês...

Sei que é difícil, que os tempos não são os melhores e que existe pouca consideração pela nossa prestigiosa profissão. Mas continuem... Continuem a lutar pela nossa Educação, pela nossa tão querida Matemática, pelos nossos alunos, mas principalmente pela nossa Associação.

Como diz Pessoa... «Porque eu sou do tamanho do que vejo / E não, do tamanho da minha altura...»

Obrigado por mais um fantástico ProfMat e espero que venham mais 30 sempre convosco presentes para nos guiar neste nosso grande caminho que estamos a iniciar e que esperamos um dia caminhar ao vosso lado.

O meu sincero e muito obrigado a todos.

Um grande abraço, *João Carlos Terroso*

Geometria partilhada e socialmente construída (3)

Este apontamento tem por base um episódio ocorrido numa discussão coletiva numa sessão de formação de professores. O problema que lhe serve de mote surgiu a partir da identificação de questões de exploração e de desenvolvimento com base na análise de produções de alunos (fig. 1). Destaco este episódio porque eu própria não esperava o interesse da discussão vivida nem o seu efeito formativo.

Haverá algum quadrilátero com 3 ângulos obtusos?
Se sim é preciso construir um exemplo, se não é preciso demonstrar a impossibilidade da construção.

Estávamos a pensar sobre as possibilidades de exploração do conjunto de produções de alunos apresentado na figura 1, em que os exemplos tinham precisamente os ângulos retos destacados e pintados a vermelho. A discussão aconteceu a partir da sugestão de explorar ao máximo aquele conjunto de figuras.

Isabel — *A partir desse conjunto de quadriláteros podemos pedir aos alunos que assinalem os ângulos obtusos a amarelo e os agudos a verde.*

Manuela — *Já repararam se há algum em que o ângulo reto esteja mal marcado? Se isso acontecer temos um intruso neste conjunto de quadriláteros com pelo menos um ângulo reto.*

Luísa — *E já viram que os alunos vão ser confrontados com um ângulo sobre o qual não sabem que cor usar. É um ângulo côncavo.*

Isabel — *Pode ser, mas é uma espécie de ângulo obtuso. É um ângulo maior do que dois retos.*

Clara — *Eu a essa categoria de ângulos prefiro chamar ângulo superobtuso precisamente por ser maior do que dois retos. Decidimos dar esse nome numa turma em que ele surgiu numa atividade como esta.*

Dora — *É engraçado que é o desafio de descobrirem quadriláteros com condições, vários quadriláteros diferentes, e o estímulo da concorrência com os colegas que pode levar os alunos a serem criativos e a fazerem a figuras que habitualmente não lhes aparecem.*

Luísa — *Mas chama-se mesmo superobtuso? Nunca vi esse nome. Não está no programa.*

Manuela — *A designação formal é ângulo reflexo. Já tinha conversado sobre isso com a Clara. Lemos no «Caderno de apontamentos de geometria» da Educação Matemática n.º 134 em que se explica a razão de ser desse nome.*

Isabel — *Eu gosto dessa designação. Já repararam como ela é significativa para os alunos? E afinal há tantos quadriláteros que podem ter um ângulo destes.*

Esta discussão ajudou a reforçar o interesse na tarefa. É uma situação tão simples que parece pobre. Porém, a discussão faz-nos descobrir o seu potencial para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e leva-nos a pensar que, na geometria elementar, há características, propriedades e classificações dos quadriláteros que podem ser muito estimulantes para proporcionar situações de aprendizagem.

Luísa — *Outra ideia para pedir aos alunos era a organização desses quadriláteros em famílias a partir do número de ângulos retos.*

Isabel — *Sim, vão surgir 3 classes. Só com 1 ângulo reto, só com 2 ângulos retos e com 4 ângulos retos.*

Dora — *Dessa classificação salta logo a vontade de afirmar que não há nenhum exemplar para uma classe formada pelos que têm apenas 3 ângulos retos. E consequentemente a curiosidade de querer perceber porque é que isto acontece.*

Luísa — *O que eu gosto nesta organização em famílias é que podemos sempre tentar descobrir mais exemplares da mesma família.*

Manuela — *Concordo totalmente com a Luísa. É por isso que eu estou intrigada a tentar descobrir um quadrilátero com 3 ângulos obtusos. Neste conjunto não está nenhum. Será que é impossível de obter?*

Isabel — *Já repararam que o quadrilátero F quase que tem 3 ângulos obtusos. Mas talvez seja impossível. Quando uns ângulos do quadrilátero abrem mais os outros têm que fechar.*

Manuela — *Pois é, não podem abrir todos. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° e por isso não podem todos ser obtusos.*

Francisca — *E dá mesmo jeito sabermos que a soma é 360°. Estou desconfiada de que conseguimos obter um com 3 ângulos obtusos. Afinal 100 + 100 + 100 + 60 dá 360 e assim poderemos ter um exemplar com essa condição.*

Isabel — *Até parece que pode ser possível. Mas eu acho que não é. Estou aqui a experimentar construir um exemplo com barras articuladas. Quando abro mais os lados para ter os 3 ângulos obtusos fico a precisar de um quinto lado. Não se consegue. É mesmo impossível.*

Luísa — *Isto é mesmo desafiante. No geoplano não estamos a conseguir nenhum. Com as barras não estamos a conseguir e até pare-*

ce que estamos a mostrar a impossibilidade. Mas eu acho que os cálculos que a Francisca fez nos ajudam a duvidar. Vamos experimentar com papel, lápis, régua e transferidor.

Manuela — *Ora aqui está uma boa razão para eu ter que fazer uma construção rigorosa.*

Isabel — *Acabo de conseguir construir um com as barras articuladas.*

O geoplano e as barras articuladas são instrumentos limitados. A impossibilidade com estes recursos não garante a impossibilidade de existência de um exemplar com determinadas condições. No entanto, são suficientemente ricos para nos possibilitar um mundo bastante amplo de possibilidades. Para crianças pequenas, no 1.º ciclo, é desejável que estes materiais manipuláveis sejam usados na aprendizagem da geometria, mesmo quando começam também a usar programas de geometria dinâmica.

Manuela — *E já viram que há trapézios e quase-trapézios? Explorar os quase-trapézios é mesmo interessante pois leva-nos à discussão do que são retas paralelas e de como reconhecê-las. Li isso no «Caderno de apontamentos de geometria» da Educação e Matemática n.º 113.*

Isabel — *O trapézio N está numa posição pouco comum.*

Dora — *Este conjunto de figuras dá muito jeito. Vamos guardá-lo e para usar no próximo ano, tanto no 1.º como no 2.º ciclo.*

Luísa — *E também no 3.º ciclo. Os quadriláteros são um mundo. Tanta coisa interessante sobre eles que pode proporcionar aprendizagens significativas de geometria ao longo de toda a escolaridade. É realmente o raciocínio geométrico que podemos ajudar a desenvolver.*

Francisca — *E liga-se com outros assuntos. Agora apetece-me olhar para estes quadriláteros e descobrir se há alguns equivalentes.*

Isabel — *Aposto que sim. E já estou a retirar os que são congruentes.*

Francisca — *Parece-me que o C e o G têm a mesma área. E o J? E o G? E o P? Parecem todos ter o mesmo tamanho? Haverá algum com menor área que os outros?*

Manuela — *E também posso pensar em descobrir o que tem a maior área. Será o quadrilátero L?*

Clara — *E qual é o quadrilátero com a menor área que conseguimos construir no geoplano? Claro que é o quadrado de 1 por 1. E por isso mesmo é aquele que dá jeito escolher para unidade.*

Francisca — *Se escolhêssemos outro quadrilátero para unidade iríamos ter dificuldades na obtenção das áreas. A partir das áreas podemos entrar nos números racionais. Esta discussão pode ser interminável.*

Dora — *Temos ideias para todo os anos e para todo o ano. E estamos a conciliar aquisição de conhecimentos com desenvolvimento do raciocínio. Voltámos rapidamente ao programa do básico de 2007.*

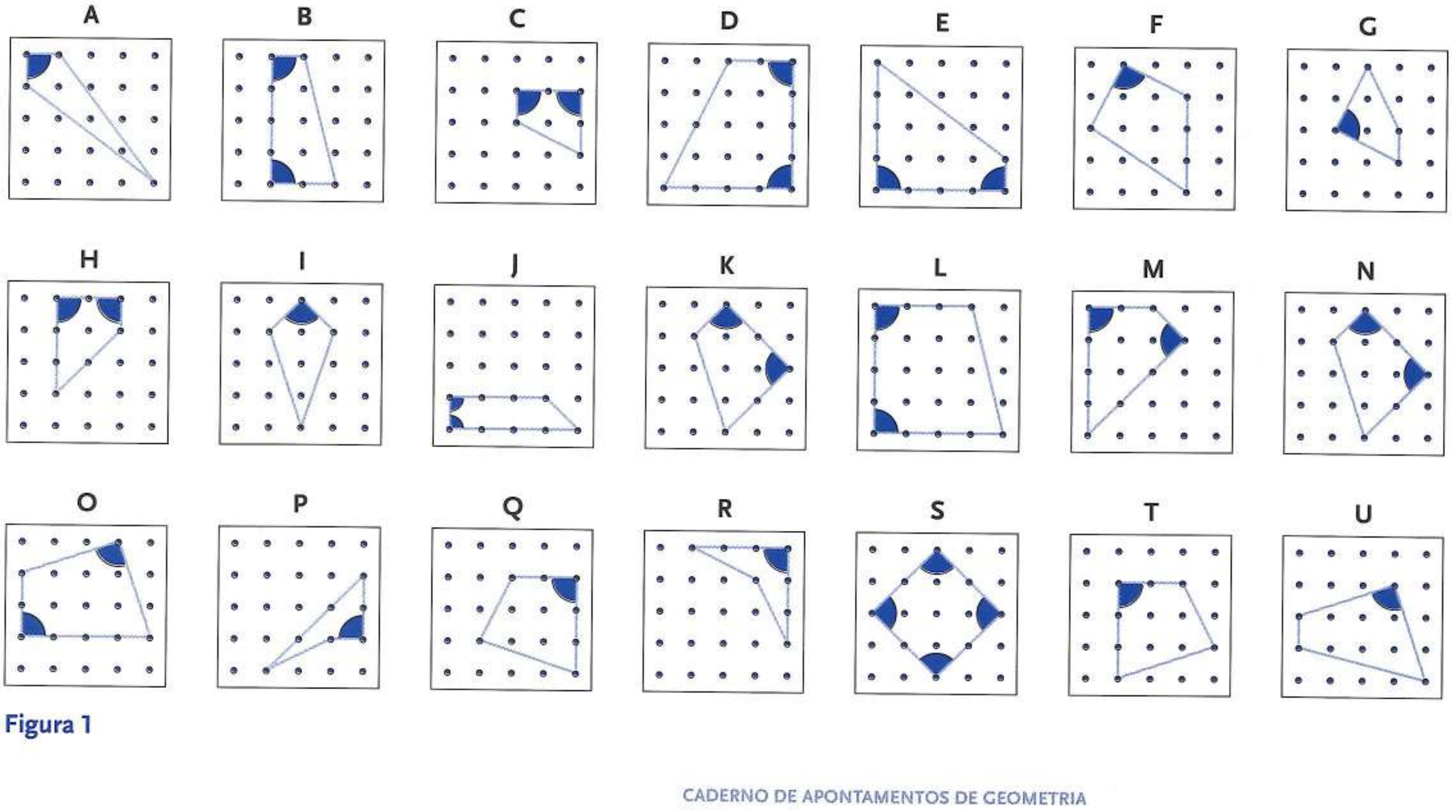


Figura 1

Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos

JOANA MATA-PEREIRA, JOÃO PEDRO DA PONTE

Um dos grandes objetivos da Matemática escolar é, sem grande margem para dúvidas, desenvolver o raciocínio matemático dos alunos. Contudo, o que podemos fazer para desenvolver o raciocínio matemático constitui uma questão bastante complexa e, paradoxalmente, pouco discutida.

Se pretendemos que os nossos alunos tenham uma visão da Matemática como uma disciplina lógica e coerente, temos de promover o raciocínio matemático ao longo do ano letivo, não limitando o trabalho com esta capacidade transversal a algumas aulas ou ao ensino de determinados tópicos matemáticos. Pelo contrário, desenvolver o raciocínio matemático dos alunos deve ser um processo contínuo, que ocorre em todas as aulas, em articulação com outros objetivos de aprendizagem. Para tal, é importante clarificar em que consiste o raciocínio matemático e saber quais os modos de o promover na sala de aula.

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Um ponto essencial para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos é compreender o que se entende por raciocinar matematicamente e que processos isso envolve. Raciocinar matematicamente é fazer inferências justificadas, ou seja, partir de informação existente para obter novas conclusões, de uma forma justificada, com base em ideias, propriedades ou definições matemáticas. O raciocínio matemático, numa perspetiva dedutiva, pode identificar-se com a inferência lógica, que se caracteriza pela existência de uma relação necessária entre premissas e conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões (Aliseda, 2003). Contudo, também se pode raciocinar de modo indutivo, identificando uma característica particular comum a diversos casos e formulando uma generalização (Pólya, 1945). E ainda se pode raciocinar de forma abdutiva, formulando uma generalização com base na perceção de uma relação entre diversos aspetos de uma determinada situação (Rivera & Becker, 2009). Assim, o raciocínio matemático pode ser de natureza diversa, nomeadamente, indutiva, abdutiva ou dedutiva, incluindo tanto a formulação de novas ideias como a elaboração e validação de novas conclusões (Silva, 2009).

Esta definição de raciocínio matemático, pela sua abrangência, inclui uma diversidade de processos de raciocínio, nomeadamente, a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas, a definição e aplicação de estratégias de resolução e a justificação. Tal como referem Lannin, Ellis e Elliot (2011), num livrinho publicado pelo NCTM, a generalização e a justificação destacam-se destes processos pelo seu papel central na Matemática. A generalização, por se pretender afirmar propriedades, conceitos e procedimentos gerais que se pretendem válidos para um conjunto abrangente de condições ou objetos matemáticos. A justificação, pelo rigor, lógica e coerência associados a esta ciência, onde se espera que as generalizações formuladas sejam justificadas e validadas com base em propriedades, procedimentos ou ideias matemáticas.

AÇÕES DO PROFESSOR PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Cabe ao professor propor aos seus alunos situações que os incitem a raciocinar matematicamente. Contudo, como refere Jo Boaler (2010, p. v), «seria desonesto fingir que as abordagens de ensino [que promovem o raciocínio matemático] são fáceis ou bem compreendidas».

O modo de trabalho na sala de aula é um dos aspetos centrais para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Em aulas de ensino expositivo, onde o professor apresenta os assuntos e propõe aos alunos que apliquem métodos de resolução de exercícios e problemas que ele próprio explicou, dificilmente surgem oportunidades para os alunos raciocinarem matematicamente. Já as aulas de ensino exploratório (Ponte, 2005), onde o professor propõe aos alunos a resolução de uma tarefa, os alunos trabalham autonomamente e, por fim, tem lugar uma discussão por toda a turma dessa tarefa, apresentam um maior potencial para que surjam situações que favorecem o surgimento de raciocínios matemáticos. Nestas aulas, os momentos de discussão coletiva surgem como particularmente potenciadores da aprendizagem dos alunos e, consequentemente, do desenvolvimento do raciocínio matemático. Para tal é importante que o professor incite a apresentação pelos alunos de uma variedade de respostas, que as articule e que oriente a discussão no sentido de uma compreensão mais aprofundada das ideias matemáticas envolvidas (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Num ensino desta natureza, o tipo de tarefas a propor desempenha um papel fundamental. Vários estudos identificam os problemas e as tarefas de natureza mais aberta, como as explorações e as investigações, como potenciadoras do desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos (e.g. Francisco & Maher, 2011).

No quadro do ensino exploratório, uma das ações do professor fundamental para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é o questionamento. O professor deve questionar os seus alunos com o intuito de apoiar o seu raciocínio e o seu trabalho. Com este objetivo, *deve acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações estritamente necessárias*, sem reduzir significativamente o desafio da tarefa proposta. Se o professor apresenta demasiadas indicações aos alunos e não os desafia, simplifica a resolução da tarefa e deixa de apoiar o raciocínio. O professor deve ainda incentivar os alunos a apresentar a explicação do *«porquê», dar sentido a justificações e pedir justificações alternativas.* É ainda importante destacar ou solicitar aos alunos que *identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que valida uma justificação.*

Para além do questionamento, o professor pode ainda empreender outras ações tendo em vista a aprendizagem e a partilha e compreensão de processos de raciocínio. Durante a discussão coletiva o professor deve *encorajar os alunos a partilhar as suas ideias e várias versões do seu raciocínio.* Como refere Karin Brodie (2010), é também importante que se *aceitem, valorizem e integrem as contribuições incorretas ou parciais dos alunos, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique.*

Visando processos de raciocínio mais formais, como a demonstração, uma das abordagens que pode ser estruturante é a justificação como atividade coletiva (Galbraith, 1995). Para que isso ocorra, o professor deve *propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos.* É ainda de destacar que o professor deve *desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões, quer pela formulação de generalizações.*

Este conjunto de ações (questionar, encorajar a partilha de ideias, valorizar contribuições parciais, propor demonstrações e desafiar a ir mais além) não esgotam as ações do professor que podem promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, mas são certamente muito importantes.

AÇÕES DO PROFESSOR NUMA AULA SOBRE SEQUÊNCIAS

Vejamos uma situação que ilustra grande parte das ações do professor anteriormente destacadas. Esta situação corresponde a parte do momento de discussão coletiva da primeira tarefa proposta a uma turma de alunos do 8.º ano na unidade Sequências. Apesar deste tópico ter sido abordado em anos anteriores, o momento de trabalho autónomo desta aula revelou que os alunos estavam pouco à vontade. A tarefa proposta aos alunos (Figura 1) tem uma natureza exploratória e tem por objetivo conduzi-los a obter o termo geral da sequência. Atendendo a que a turma tem alunos com ritmos de trabalho muito distintos, o momento de trabalho autónomo é realizado em pares e a professora não estabelece um tempo para a sua realização, procurando deixar que a maioria dos alunos termine a tarefa. A professora avança para a discussão coletiva quando verifica que todos os pares já pensaram na primeira questão da tarefa 1. Toma esta decisão porque, como diz, entende que «há alunos que [não chegam ao final da tarefa] ... E, ou eu estou ali com eles individualmente a tentar, ou avanço um bocadinho, não se justifica [mais tempo de trabalho em pares]».

No segmento da discussão referente à questão 1.3, a professora convida o par Duarte e Marisa a participar, encorajando a *partilha de ideias:*

Duarte: Nós fizemos 86, que é o número de pontos ... A dividir por 4, menos 1.

Professora: Assim [escreve no quadro $\frac{86-1}{4}$]? Só fala o Duarte.

Duarte: Foi. 86 menos 1 a dividir por 4.

A diferença entre o que Duarte apresenta e o que a professora escreve é discutida com a turma e, resolvida a situação, a professora retoma a estratégia do aluno:

Professora: Duarte, perdi-me, explica-me.

...

Duarte: Então, é o número de pontos que é 86... Depois subtraímos 1 que é o ponto do meio... E depois a dividir por 4, que é o que vai sempre aumentando.

Professora: Este 4 é sempre o que vão aumentando?

1. Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

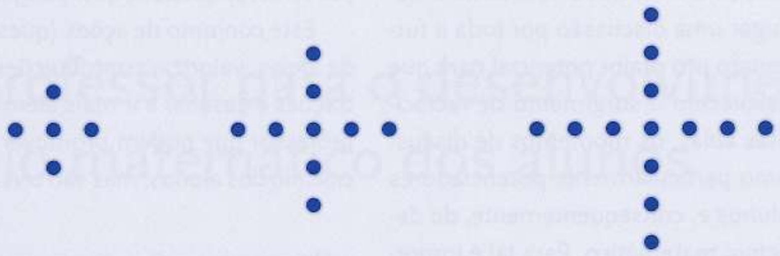


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

1.1. Indica o número total de pontos da figura 4.

1.2. Sem desenhar a figura, indica o número total de pontos da figura 8. Explica como obtiveste a tua resposta.

1.3. Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta

1.4. Qual o número da figura com 65 pontos? Explica como chegaste à tua resposta.

1.5. Escreve a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura n.

Figura 1.—Primeira tarefa proposta na unidade de sequências

Duarte: Não, é o número de lados.

Professora: Ah, o número de lados. Quanto é que deu Duarte?

Duarte: 21,25.

Atendendo a que Duarte dá a sua resposta por concluída, a professora questiona-o para que interprete a expressão que apresentou e, de seguida, guia o aluno na identificação de um erro dessa mesma interpretação, *acompanhando a resolução apresentada e dando apenas as indicações necessárias.*

Perante a resposta de Duarte, a professora continua a apoiar a sua intervenção, pedindo lhe uma interpretação do valor obtido e *levando-o a justificar* essa interpretação, *solicitando a explicação do porquê:*

Professora: E a minha pergunta para ti é, o que é que tu e a Marisa concluíram?

Duarte: Que não existe nenhuma.

Professora: Porquê?

Duarte: Porque o número da figura [ordem] é sempre um número inteiro.

Professora: Número inteiro. Este número não é inteiro.

A professora dá a intervenção de Duarte por terminada ao informar a turma de que o valor que o aluno obteve não é um número inteiro, interpretando e *validando a sua resposta.*

Depois de apresentada uma nova estratégia de outros alunos, a professora avança para a discussão da questão 1.4, onde um par de alunos apresenta e justifica a sua resolução, com o seu apoio. Joaquim tenta retomar a questão 1.3, o que é aceite pela professora, promovendo assim a *partilha de ideias:*

Joaquim: Na 1.3 nós chegámos à conclusão que não era, mas com outra resolução.

Professora: Então diz.

Joaquim: Nós fizemos... Nós justificámos que não era múltiplo de 4.

Professora: Agora, daí a importância da discussão, pergunta para a turma: O Joaquim e o Guilherme disseram assim 86 não faz parte da sequência porque não é múltiplo de 4. E agora vou fazer uma pergunta a um par que ainda não ouvi, que é a Bianca e a Ana. Pergunta para vocês: Se este argumento serve ou não para justificar. Uma de vocês que me explique, ou então as duas em coro.

Perante a proposta de resolução de Joaquim, a professora *desafia os alunos a avaliar a validade* desta resolução. Direciona a questão para a turma, mas depois questiona diretamente um par de alunas que ainda não tinha participado:

Bianca: Se eles dissessem que 85 não era múltiplo de 4 podiam fazer isso, mas... Porque, então, tem de ser, para ser múltiplo de 4 nós tiramos 1, que é o ponto central.

Professora: Sim ou não? Joaquim e Guilherme, perceberam ou não? Não? Ainda não perceberam. Bianca, explica tu.

Bianca dá a entender que a resposta dos colegas não é válida e justifica a sua opinião. Contudo, a sua justificação não é suficiente para Joaquim e Guilherme compreenderem que a resposta é inválida. Perante esta situação, a professora opta por *desafiar Bianca a reformular a sua justificação:*

Bianca: O número de pontos é 86, só que nós queremos tirar primeiro o ponto central, só depois é que podemos dividir por 4.

Professora: Porque é que só depois é que podemos dividir por 4?

Bianca: Porque se fizéssemos 86 a dividir por 4 menos 1 era aquilo que eles estavam a dizer que não dá certo.

Professora: Sim ou não, Guilherme?

Guilherme: Acho que sim, porque o do meio nunca... Era como se estivéssemos a cortar o do meio.

Professora: Aqui era como se estivessem a cortar o do meio... A soma destes 4 braços é que é múltiplo de 4, não é a soma dos 4 braços com o ponto central.

Apesar da validade da afirmação de Bianca, a professora desafia novamente a aluna a justificar parte dessa afirmação, *solicitando a explicitação do «porquê»*. Finalmente confirma, ainda, se Guilherme compreendeu a justificação e informa a turma da representação destacada pelo aluno.

A CONCLUIR

Tendo como ponto de partida tarefas de natureza exploratória e colocando questões desafiantes aos alunos, as ações do professor nos momentos de discussão coletiva podem ser as mais variadas. No segmento da discussão coletiva aqui apresentado, as ações da professora ilustram a grande maioria das ações propostas para o desenvolvimento do raciocínio matemático, o que leva à realização de justificações por parte dos alunos. No seguimento da discussão apresentada, com ações idênticas por parte da professora, os alunos obtêm também o termo geral da sequência, que corresponde à generalização pretendida com esta tarefa.

Ao longo desta discussão é possível observar que os desafios que são propostos aos alunos surgem como determinantes para incitar processos de raciocínio. Contudo, o professor não pode limitar as suas ações a desafiar, deve complementá-las com ações de guiar ou apoiar quando os alunos têm as ferramentas necessárias para avançar na discussão e com ações de informar ou de sugerir quando os alunos não têm essas ferramentas.

Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos não é um processo linear e, como tal, não existe uma «receita» das ações do professor que levam de forma garantida ao desenvolvimento desta capacidade. No entanto, ao estar consciente dos processos de raciocínio que pretende que os seus alunos alcancem em cada momento da aula e ao encadear as discussões coletivas com vista a desafiar os alunos para que realizem generalizações e justificações, o professor está certamente a contribuir para que o raciocínio matemático faça parte da sua aprendizagem.

Referências

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese, 134,* 25–44.

Boaler, J. (2010). The road to reasoning. In K. Brodie, *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms* (pp. v–vii). New York, NY: Springer.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* Doi:10.1007/978-0-387-09742-8

Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students' mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 49–66. Doi:10.1007/s10857-010-9144-x

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 412–417.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8.* Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. I). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School, 15*(4), 213–221.

Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática, 101,* 37–41.

Stein, M. K., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for help teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Joana Mata-Pereira
João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Nesta secção dos 30 anos da APM, a ex-presidente Rita Bastos, o Núcleo Regional de Évora e o Grupo de Trabalho de Geometria refletem sobre a história da associação, o papel de cada um dos órgãos no desenvolvimento profissional dos professores e no exercício da cidadania, bem como sobre política educativa. Mas, essa história, perpassa por muitos outros artigos, em que sócios, desde fundadores até aos mais recentes, nos dão conta das suas experiências e vivências, dos encontros em que participam e dos grupos em que trabalham, do trabalho nas escolas e da luta para continuar a melhorar a aprendizagem dos nossos alunos. As páginas da E *e* M são, por excelência, um meio de comunicação da nossa associação e de dar voz aos professores. Esperamos o teu contributo.

2006–2008: Tensões, contradições e dilemas

Fui eleita presidente da direção da APM, juntamente com outras quatro colegas, no ProfMat de Setúbal, em 2006, quando se celebraram os 20 anos da APM. Dez anos depois, é com muitas interrogações ainda que revisito aqueles anos de 2007 e 2008, em que estive à frente da direção.

Naquela altura havia um grande investimento no ensino da Matemática por parte do Ministério de Educação, designadamente o Plano de Ação da Matemática, em que a própria associação estava envolvida com representantes em várias comissões, sendo que muitas das medidas desse plano tinham surgido por propostas da APM ou por iniciativa de sócios da APM que trabalhavam em colaboração com o Ministério da Educação. Destas medidas destaco, pelo impacto positivo que tiveram, o programa de Formação de Professores dos 1.º e 2.º ciclos, que envolveu muitos associados nossos como formadores que foram trabalhar diretamente nas escolas, em sala de aula, com os formandos; e a medida Planos da Matemática, dirigida ao 3.º ciclo, que também contou com muitos sócios da associação, como acompanhantes do trabalho nas escolas, e com duas representantes da APM na Comissão de Acompanhamento do Plano da Matemática. Foi nessa altura também que foi constituída uma comissão para ajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico, que construiu um novo programa, com aspetos inovadores, como sejam a articulação vertical entre os três ciclos, uma vez que se tratava de um programa único, e também uma lógica de ciclo que promovia a autonomia das escolas na gestão do programa em cada um dos anos de escolaridade. Também esta comissão contava com sócios ativos e influentes da APM que estava, portanto, muito comprometida com todas estas medidas da tutela.

Mas este também foi o tempo em que a Ministra da Educação veio criar muitas tensões nas Escolas: alterou o Estatuto da Carreira Docente, criando a figura de professor titular e impondo um sistema de avaliação de professores, medidas estas que foram altamente contestadas pela classe; criou, também, a prova de acesso à carreira docente, que posteriormente viria a dar origem a muitos protestos e quis implicar as associações de professores tanto na construção dessa prova como num sistema de avaliação de manuais escolares, que poderia trazer conflitos de interesses dentro da associação. E todas estas medidas eram acompanhadas de uma projeção mediática, através de uma mobilização dos órgãos de comunicação social, onde a imagem dos professores foi muitas vezes mal tratada, o que teve como consequência grande mal-estar e contestação. Foi nesta altura que aconteceu a maior manifestação de professores alguma vez realizada em Portugal, contra medidas do Ministério da Educação.

Foi neste ambiente que a direção da associação teve que enfrentar vários dilemas e contradições, e acabámos por nos envolver em situações polémicas que não desejámos, e que chegaram a ocupar toda uma primeira página de um jornal nacional, mas não pelas melhores razões: em vez de promover a imagem da associação pelo seu trabalho pela melhoria do ensino da Matemática, os jornalistas preferiram sempre destacar e empolar os conflitos originados pelas tensões referidas.

O ano de 2007 foi também o primeiro ano em que o nosso Centro de Formação deixou de ter o financiamento do PRODEP, que durante vários anos tinha permitido uma grande projeção da associação junto dos professores, através de ações de formação em massa, que eram muito valorizadas pelos professores de Matemática em geral. Foi um novo desafio que tivemos que enfrentar: que futuro para o Centro de Formação? Quando foi criado, no início dos anos 90, tinham sido enunciados alguns princípios orientadores que valorizavam a formação em contexto escolar, na modalidade de projeto e que contavam com o trabalho voluntário dos formadores, como todos os trabalhos realizados por sócios na APM. Pretendia-se que os professores se responsabilizassem pelo seu próprio desenvolvimento profissional, criando projetos de formação a partir de problemas concretos sentidos nas escolas, e que procurassem o apoio do Centro de Formação da APM, que forneceria os formadores para orientar esses projetos. Mas no decorrer dos anos em que houve financiamento, criaram-se alguns hábitos: os professores habituaram-se a que a APM planeasse a sua formação, a necessidade de créditos para progressão na carreira criou outras motivações para fazer formação, e os formadores habituaram-se a ver o seu trabalho de formação remunerado, introduzindo assim algumas contradições entre os princípios enunciados e as práticas. Este é um problema que ainda não foi resolvido até hoje, sendo que o Centro de Formação tem lutado sempre com estas tensões que, em conjunto com outras condicionantes, voltam sistematicamente a ser objeto de debate no conselho nacional e em outras estruturas da associação.

Em novembro de 2007 realizou-se o ProfMat e o SIEM em Angra do Heroísmo, tendo o ProfMat uma participação bastante reduzida relativamente aos encontros anteriores, uma vez que, além de todos os constrangimentos financeiros e de tempo, associados também ao facto de se realizar numa ilha, pela primeira vez não foi autorizada a habitual dispensa especial de serviço aos participantes. Em consequência, em 2008, escolhemos os primeiros dias de setembro para realizar o encontro, em Elvas, sendo que também pela primeira vez o SIEM foi agendado para depois do ProfMat para possibilitar uma realização conjunta com a *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, em Badajoz. A partir daqui, o ProfMat nunca mais se realizou em época letiva, e nunca mais teve o grande número de participantes dos anos anteriores, muito provavelmente por dificuldades de conciliar os trabalhos nas escolas, cada vez mais exigentes em tempo, com a vida associativa, entre outros motivos.

Em setembro de 2007 a APM publicou a primeira edição do *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, tradução do original *Principles and Standards for School Mathematics*, da associação norte-americana *National Council of Teachers of Mathematics*. Este trabalho de tradução vinha a ser feito já há uns anos por um grupo de sócios e foi possível esta edição graças ao financiamento do Ministério da Educação, que adquiriu exemplares para todas as escolas, e viabilizou ainda uma segunda edição em junho de 2008.

Durante todo o mandato houve ainda alguns investimentos sem grande sucesso, entre os quais destaco a tentativa de fazer reanimar o Secretariado InterAssociações de Professores (SIAP), e algumas discussões internas que tinham como objetivo produzir documentos que representassem posições claras sobre temas relacionados com a educação: os exames nos ensinos básico e secundário, os pontos críticos dos programas do ensino básico, a avaliação dos professores. Quisemos que essas discussões fossem bastante participadas pelos sócios e nesse aspeto conseguimos alguma mobilização e debate. Mas, tanto no SIAP, como na APM, a tensão entre a busca de consensos e a natural e desejável pluralidade de posições/opiniões colocou sempre dilemas à direção, com os quais tentámos lidar da melhor maneira, mas que se revelaram complicados.

Em suma, e passados quase 10 anos sobre a minha eleição para presidente da direção, eu diria que a história da APM durante o meu mandato foi marcada por um conjunto de tensões, contradições e dilemas que sempre existem e existirão, mas que foram especialmente intensos naquela época. Destaco alguns que me parecem ser ainda relevantes nos tempos atuais, para a reflexão que se pretende sistemática sobre a vida associativa:

• A Associação de Professores de Matemática é uma entidade que se pretende autónoma e independente do poder político, mas que depende dele na medida em que é o Ministério da Educação que permite que alguns sócios trabalhem na associação a tempo inteiro, por mobilidade, e que financia até alguns dos nossos projetos. Por outro lado, a intervenção na política educativa, que está consagrada nos nossos estatutos como sendo um objetivo da associação, tem levado a compromissos com o ministério que nem sempre nos possibilitam a independência desejada. Além disso, ao fim de 20 ou 30 anos de existência da APM, muitos dos nossos sócios tornaram-se figuras públicas de relevo na Educação Matemática e muitas vezes assumem papéis que podem representar conflitos de interesse com o seu papel de associado e as posições tomadas pela direção. Sobre este assunto, que sentimos particularmente no meu mandato, eu e a Sónia Figueirinhas escrevemos numa reflexão em jeito de balanço, no APM*informação* n.º 89, de julho de 2008:

Como intervir na política educativa, como está escrito nos estatutos, e ao mesmo tempo garantir a nossa independência? Como exercer o nosso papel público e simultaneamente manter a dinâmica interna própria da associação? De certa maneira, sentimos que a APM transbordou e, como consequência, ficou um pouco vazia.

• Um dos aspetos que tem sido sempre enunciado como importante é a imagem pública da associação, nomeadamente junto de pais e encarregados de educação e do público em geral. É preciso, e julgo que nisso estaremos todos de acordo, que a associação tenha uma voz na comunicação social, para que o público compreenda a relevância do nosso trabalho e as posições que defendemos. No entanto, a comunicação social dá-nos especial relevo em questões que nos colocam em causa, como por exemplo os maus resultados nos exames de Matemática ou a saída da Comissão de Acompanhamento dos Planos da Matemática, e ignora as outras questões que queremos ver discutidas. Até hoje, este dilema continua por resolver e poucas têm sido as situações em que conseguimos levar o público a entender e a solidarizar-se com as nossas posições relativamente aos aspetos mais prementes das políticas educativas.

• Os sócios da APM são professores de todo o país, de todos os graus de ensino, de todas as proveniências, e temos orgulho nessa diversidade. Como é natural, existem dentro da APM posições individuais de todos os tipos. Como conviver com essa pluralidade de posições e, ao mesmo tempo, tomar posições públicas sobre as grandes questões da educação? Julgo ser por isso, e pela pluralidade que se verifica dentro das próprias equipas de direção, que até hoje nenhuma direção teve a coragem de publicar posições claras sobre exames, manuais escolares e outras questões que não deixam de ser importantes na formação matemática dos nossos jovens.

• A Associação de Professores de Matemática viveu muito, durante o seu tempo de crescimento, do trabalho voluntário de muitos sócios que criaram uma dinâmica excecional, reconhecida interna e externamente por todos. Atualmente, a vida dos professores tem vindo a complicar-se, quer no que respeita às colocações quer na quantidade de trabalho e na disponibilidade de tempo que lhes é exigido nas escolas. Não resta tempo nem ânimo para dedicar ao trabalho voluntário e isso é sentido como um dos grandes problemas da associação. Resta saber se há motivação e essa é outra reflexão que é importante fazer — qual deve ser o papel da APM no futuro? Porque é que os professores necessitam de uma associação profissional?

Quando começou, em 1985, a APM era a única organização em Portugal que produzia materiais para o ensino da Matemática, que editava publicações, organizava encontros de professores e investigadores de Matemática, que disponibilizava recursos educativos para utilização dos professores e durante muito tempo foi assim, e a APM cresceu muito. Hoje, há muitas instituições, públicas e privadas, dedicadas a essas atividades e muitos dos recursos de que necessitamos estão na internet, à distância de um clique. E agora, passados 30 anos, o que é a APM e que lugar ocupa, ou deve ocupar?

Rita Bastos, presidente da APM 2006/2008

Dos núcleos regionais: o caso de Évora

Pelo menos desde meados da década de 60 do século passado que na região de Évora um número significativo de professores de matemática criou o hábito de regularmente se juntarem para discutir do ponto de vista matemático e do ponto de vista didático-pedagógico pedagógico as suas práticas. Com a explosão da frequência escolar ocorrida após 25 de abril de 1974, chegam às escolas muitos docentes sem habilitação para lecionar, com diferentes níveis de distintas

PROBLEMATIZANDO

formações. A abertura em 1978 da Licenciatura em Ensino na Universidade de Évora faz com que alguns desses professores iniciem ou retomem aí a sua formação. É assim que se juntam, nas escolas e na Universidade, vários colegas, de diferentes gerações, que num cruzar de vivências entre mais velhos e mais novos, uns com vários anos de serviço e outros a iniciarem as suas carreiras, em regra bem acolhidos pelos «velhos» professores da década de 60, ávidos ainda por novos desafios e crentes nas mudanças que sabiam ter de ser feitas, que nasce um grupo de gente disposta a juntar professores dos vários níveis de ensino e refletir sobre temas transversais ao currículo — o primeiro foi a Geometria... Aventuram-se na publicação de uma revista para o ensino da matemática, a Evoluta, que rapidamente acolhe assinantes de vários pontos do País. Entretanto, um colega que havia concluído a sua profissionalização tendo como orientadores o Paulo Abrantes e o Raúl de Carvalho, regressa a Évora (o Adérito Araújo), traz vários boletins Inflexão e dá nota de que se prepara um encontro nacional de professores — o ProfMat — em Lisboa. E lá estão vários colegas de Évora. Em setembro de 1986 alguns deles (o José Tiago Filipe, o José Carlos Frias...) partem, cheios de ânimo e de vontade para Portalegre — nasce a APM — e o Zé Tiago integra a primeira Direção. Entretanto, para o Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora, na área da matemática, entram os primeiros formados pela própria U.E. (o António Borralho e o Manuel Borrões). As dinâmicas da formação inicial e a sua envolvência nas escolas potenciam não só a partilha de conhecimentos, a reflexão, novos olhares sobre as práticas, mas também trouxe um novo conjunto de sócios à APM, e em particular ao núcleo regional, que perduram até hoje e que têm continuado a dinâmica do núcleo. Nos ProfMats cada vez mais gente de Évora começa a participar. Em 1992, em Viseu, com um grande contingente eborense presente é tomada a decisão de se constituir um núcleo regional da APM em Évora, o que veio a acontecer. Em abril de 1993 realiza-se a sua primeira iniciativa — o I Encontro Regional na Escola Secundária Severim de Faria. Desde aí não mais se interrompeu essa iniciativa anual, à exceção dos anos em que se organizaram três Encontros Nacionais (1995, 2005 e 2015). O ProfMat de 1995 foi o que reuniu o maior número de participantes de todos os até aí realizados!

O concurso regional de resolução de problemas, o Problematizando, destinado a alunos do 3.º ciclo, realiza-se há 21 anos consecutivos, com a particularidade de em cada ano uma diferente escola do distrito assumir a sua coorganização e as escolas inscritas se espalharem por todo o Alentejo e mesmo por outras regiões.

É fácil perceber que Évora tem algumas particularidades interessantes, que acabam por caracterizar o núcleo regional e influenciar a sua dinâmica de funcionamento. Somos um núcleo com pessoas muito diferenciadas nas ideias que defendem, de gerações distintas, que se desafiam umas às outras, e entre as quais há um respeito mútuo e uma grande amizade. Assim, com o decorrer dos anos, é certo que com dias melhores e outros não, como é natural, a APM e a sua mensagem foi sendo disseminada pelas escolas, pelos docentes, pelos alunos. O núcleo tem um papel de proximidade, tornando-se um facilitador da comunicação entre os sócios locais e a APM e vice-versa, contribuindo desta forma para o desenvolvimento da associação, enquanto organização plural e inclusiva. É por isso que o trabalho dos núcleos regionais, quando feito nesse sentido, não é substituível. A passagem da informação, a construção de opinião partilhada, o conhecimento do pulsar das escolas nas suas sensibilidades regionalmente enraizadas, necessita de núcleos regionais ativos, fortes e motivados para as suas tarefas. Os núcleos regionais são muitas vezes os grandes impulsionadores de iniciativas inovadoras, que com o tempo passam de regionais a nacionais. A APM sem a força dos núcleos era certamente uma associação com menos expressão e uma menor capacidade de mobilização.

Sabemos que estamos num período de grande fragilidade, o que é normal acontecer nas grandes organizações, e não é necessariamente mau... Temos é de saber (re)encontrarmo-nos enquanto associação, por forma a conseguirmos readaptarmo-nos aos novos tempos, indo ao encontro dos novos professores, e às novas realidades da sociedade e das escolas sem nunca perdermos de vista os fundamentos que nos têm regido. E é aqui que na nossa opinião os núcleos (revitalizados), num trabalho estreito com a direção, podem fazer a diferença.

PELA COMISSÃO COORDENADORA,
ELSA BARBOSA, JOAQUIM FÉLIX, SOFIA DELGADINHO

A viagem do GTG (Grupo de trabalho de Geometria) pela *E e M*

O GTG foi criado em 1995, por iniciativa da direcção da APM, com vista a contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática e a apoiar a intervenção da APM na política educativa, no que diz respeito à Geometria e ao Ensino de Geometria. Desde sempre que alguns dos seus elementos têm alimentado a revista Educação e Matemática com artigos sobre Geometria a título pessoal.

Mas a partir de 2006, revista n.º 88, o grupo passou a colaborar na revista com a publicação de *Notas sobre o Ensino da Geometria*, que são artigos normalmente assinados por elementos do GTG, mas que abordam temas largamente debatidos no seio do grupo e têm o objectivo de partilhar e alargar o debate das suas ideias com outros professores de Matemática. Os temas que têm sido abordados não pretendem ser exaustivos nem têm uma organização sequencial, havendo notas sobre Transformações geométricas e Simetria, Curvas alinhavadas, secção de ouro, ...

Ao fim de 10 anos de colaboração, parece-nos valer a pena revisitar essas Notas. Espreitemo-las.

E e M n.º 88, SIMETRIA

De que é que estamos a falar quando falamos de simetria? Por exemplo, quando falamos das simetrias dos gráficos de algumas funções, dos eixos de simetria de algumas figuras ou dos centros de simetria de outras?

Sempre que falamos de simetria, estamos a referir-nos a uma figura, entendida como subconjunto de pontos do plano ou do espaço. Assim podemos falar de simetria, ou simetrias, de uma recta, de um rectângulo, de uma esfera ou de um dodecaedro rômbico, por exemplo, mas também de um desenho artístico ou de uma escultura, desde que entendidos como subconjunto de pontos do plano, no primeiro caso, ou do espaço, no segundo.

É dada uma definição matemática rigorosa de simetria de uma figura do plano — Isometria do plano que deixa a figura globalmente invariante — que permite classificar as figuras planas, sem ambiguidade, quanto às suas simetrias.

Que interesse poderá ter este conceito, de simetria, nos ensinos básico e secundário? Que actividades poderemos propor aos alunos, nos vários níveis, sobre simetria?

São múltiplos os exemplos dados, quer dentro da matemática, quer como ponto de partida para projectos interdisciplinares onde a matemática, em geral, e a geometria, em particular, assumem papéis importantes.

E e M n.º 94, TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Ao falarmos de Transformações Geométricas de que estamos a falar?

Claro de *isometrias:* translacções, rotações, reflexões e todas as compostas destas, assim como de *semelhanças*. Mas não só!

A projecção paralela da *família das afinidades*, ou transformações afins; a projecção central que com todas as afinidades pertence à *família das transformações projectivas*; a *inversão*.

Como explorar estas transformações geométricas?

De que propriedades gozam?

A estas e outras perguntas tais como:

- Como definir transformação geométrica?
- Qual a estrutura algébrica subjacente ao conjunto de todas as transformações geométricas do plano (ou do espaço) com a operação composição?

é aqui dada resposta, assim como é feita referência à unificação e classificação das geometrias, proposta por Félix Klein, no célebre Programa de Erlangen.

Por último são dadas algumas indicações para gerir, todas estas transformações geométricas ao longo de escolaridade, nos ensinos básico e secundário.

E e M n.º 109, A ARTE DE ALINHAVAR CURVAS [I]

Curvas há muitas, simples, belas, ricas de propriedades e aplicações, tais como: as cónicas, as ciclóides, as epiciclóides, as hipociclóides, ... que oferecem um vasto campo de estudo, passível de abordagem desde um nível muito elementar.

No Ensino Básico o programa apenas aborda a circunferência, no entanto, por exemplo, experiências como a simples dobragem de uma folha de papel vegetal, o corte de um cone por um plano podem conduzir à abordagem das cónicas!

Nesta Nota é apresentada outra maneira possível de abordar o estudo das curvas:

- A um nível elementar desenvolvendo um trabalho essencialmente manual. Marcando pontos igualmente espaçados ao longo de linhas rectas ou à volta de circunferências, numa folha de cartolina, unindo-os em seguida ordenadamente com agulha e linha, é possível obter bonitas figuras, e isso pode servir de pretexto para falar de geometria com os alunos;
- A um nível mais avançado a arte de alinhavar curvas pode ser encarada como uma actividade essencialmente matemática que nos leva a procurar resposta para perguntas tais como: porque razão surge uma parábola ao unir convenientemente pontos igualmente espaçados em cada um dos lados de um ângulo?, o que acontece se em vez de alinhavarmos os lados de um ângulo alinhavarmos duas rectas paralelas?

Neste artigo pode ainda encontrar múltiplos exemplos de figuras obtidas com a replicação da parábola e é deixado o desafio de construção de qualquer um dos modelos construídos, com recurso ao Sketchpad.

E e M n.º 119, A ARTE DE ALINHAVAR CURVAS [II]

Nesta Nota continuamos a alinhavar curvas tendo agora como base uma circunferência.

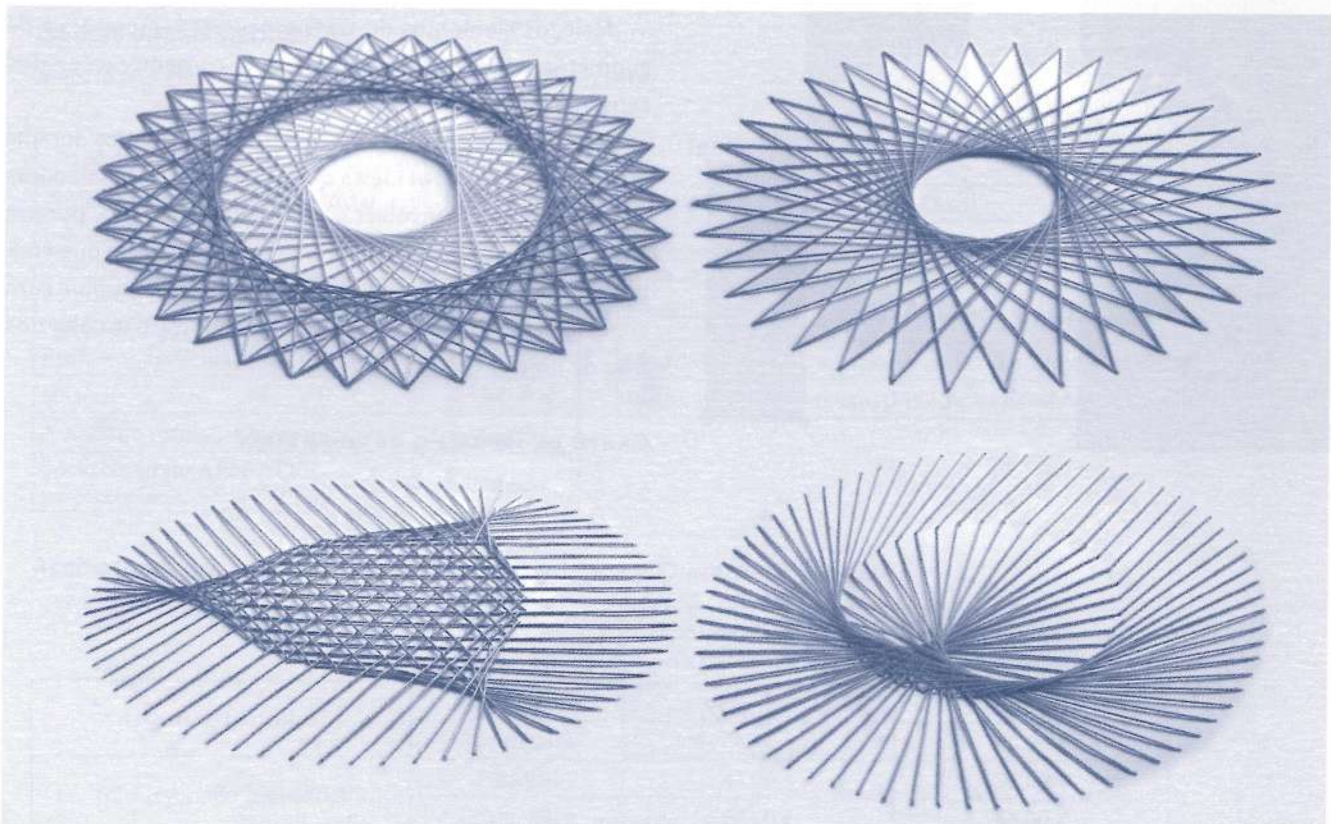
Partindo de:

- uma simples circunferência, obtêm-se uma circunferência e um par de circunferências concêntricas;
- duas circunferências concêntricas, obtêm-se outras curvas sem designação particular.

Como tirar partido destas construções?

Uma vez alinhavada a circunferência podem colocar-se várias questões:

- Como explicar que ao alinhavar cordas iguais de uma circunferência se obtenha outra circunferência?;



- Como fazer variar o comprimento das cordas de modo a que o raio da circunferência alinhavada aumente?;
- Se as cordas forem iguais ao raio, qual a razão entre os raios da circunferência de partida e da alinhavada?;
- E se as cordas forem iguais ao diâmetro, o que acontece?

Também aqui é deixado o desafio da construção de qualquer um dos modelos construídos, com recurso ao Sketchpad.

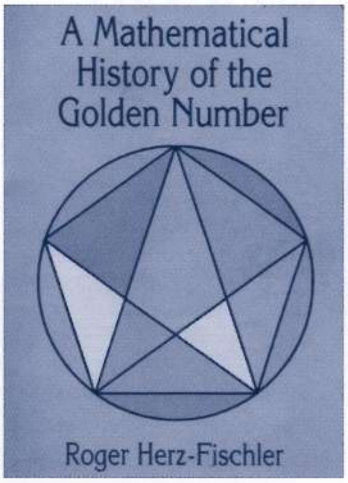
E *e* M n.º 121, A SECÇÃO DE OURO — PRIMEIROS PASSOS

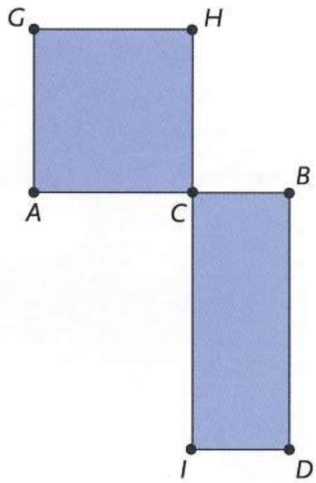
A *secção de ouro* é um termo inventado no sec XIX para designar a solução de um problema, proposto e resolvido por Euclides que podemos encontrar na *Proposição 11 do livro II*. O enunciado desta proposição é o seguinte:

Seccionar um segmento dado de tal modo que o rectângulo contido pelo todo e por um dos segmentos seja igual ao quadrado sobre o restante segmento.

Que significa para Euclides a palavra igual?

A resposta a esta pergunta é aqui dada, assim como é visto como Euclides determina o ponto pedido e demonstra que verifica as condições do enunciado da *Prop.II.11*.





Fica ainda no ar a questão seguinte: para que introduz Euclides, nos Elementos, a «secção de ouro»?

E *e* M n.º 122, DA SECÇÃO DE OURO AO PENTÁGONO REGULAR

O objectivo desta Nota é mostrar como Euclides se serve da razão de ouro para construir o pentágono regular. Embora nos mantenhamos no âmbito da geometria euclideana, os pressupostos e recursos utilizados não são os de Euclides ao escrever os *Elementos*.

Será lícita a utilização de tais recursos?

A resposta a esta pergunta é aqui dada, assim como é feita a construção do pentágono regular, indo do rectâgulo de ouro ao triângulo de ouro, e deste ao pentágono regular.

São também dadas indicações para a reconstituição de todas as proposições, definições e postulados de Euclides necessários para a construção do pentágono regular dos *Elementos*.

Para além destes temas muitos outros foram tratados entre 2006 e 20013. Quais? A resposta pode ser obtida com uma pesquisa de dados *online*. A partir de 2013 fizemos um pequeno interregno mas brevemente estaremos de volta.

Destacamos ainda o artigo saído na Revista n.º 91 — A Geometria na E *e* M.

Nele, os elementos do GTG procuraram a presença da geometria na Revista, no âmbito das comemorações dos seus vinte anos.

São então recordados alguns dos artigos escritos durante esses vinte anos, com ideias que podem ser potenciadoras de projectos a desenvolver com os alunos, dando, por um lado, relevo a muitas coisas que se escreveram e que continuam pertinentes e actuais e, por outro, contribuir com sugestões para serem trabalhadas no contexto escolar dos dias de hoje.

GRUPO DE TRABALHO DE GEOMETRIA

APM 2016 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @-sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e cinco modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

* A partir de 2016 a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma nova modalidade de associado aos professores do 1.° ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indeferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.° de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Quotas anuais para 2016

A quota tem efeitos de janeiro a dezembro de cada ano civil.

Modalidades de associado individual	
Professor no ativo (sócio regular)	50,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Associado residente no estrangeiro	60,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.° CEB)	50,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade I [1 exemplar da E&M]	60,00 €
Modalidade II [2 exemplares da E&M]	80,00 €
Modalidade III [1 exemplar da E&M + *Quadrante*]	85,00 €
Modalidade IV [2 exemplares da E&M + *Quadrante*]	100,00 €
Instituição no estrangeiro [1 exemplar da E&M + *Quadrante*]	120,00 €

Assinaturas das revistas *Educação e Matemática* e *Quadrante* para 2016

		Educação e Matemática (5 números/ano)	*Quadrante* (2 números/ano)
Associado individual	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Não associado individual	Portugal	47,00 €	35,00 €
	Estrangeiro	67,00 €	45,00 €
Não associado institucional	Portugal	75,00 €	50,00 €
	Estrangeiro	95,00 €	60,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções