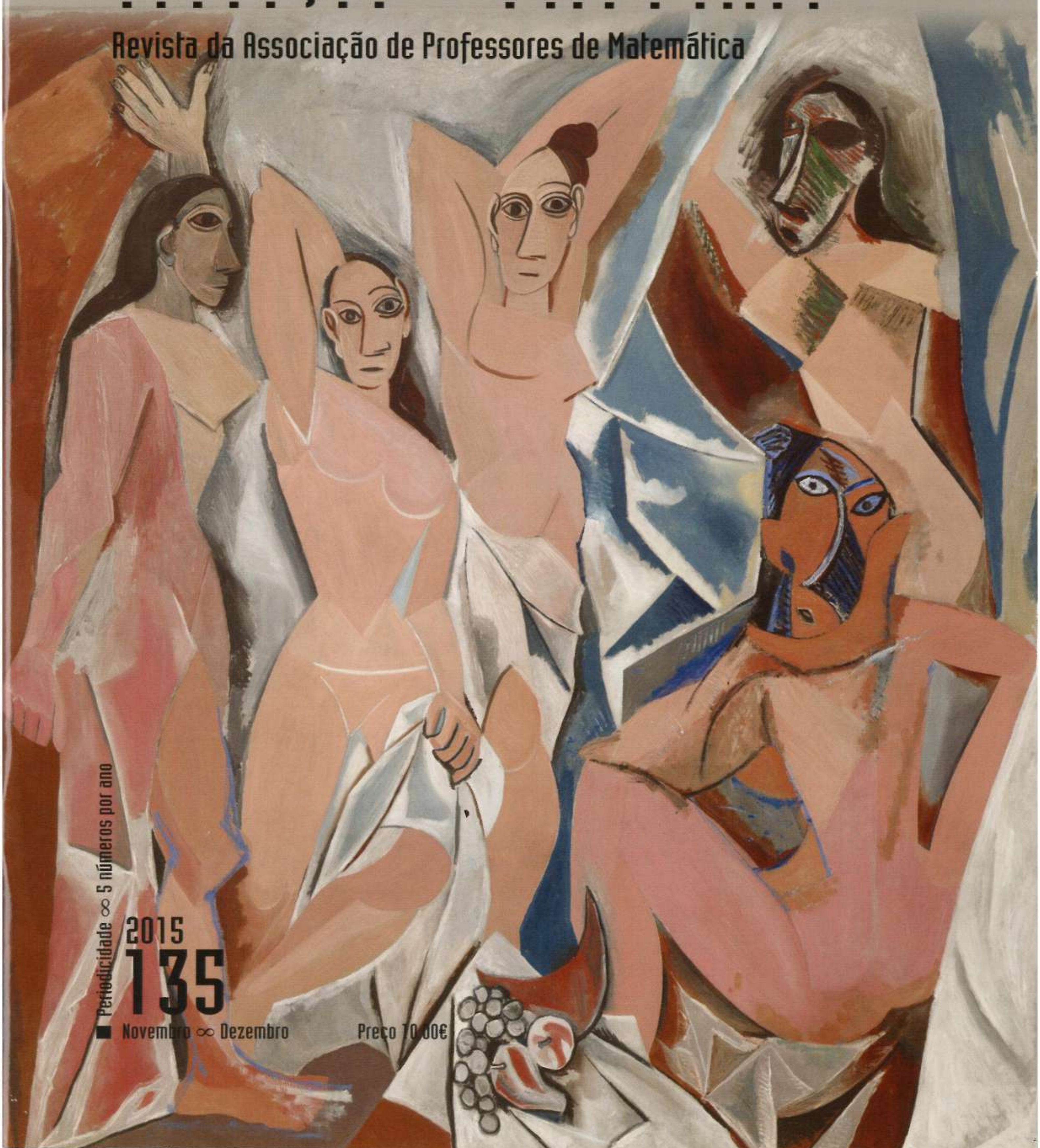
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2015

135

Novembro ∞ Dezembro

Preço 10,00€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Lina Brunheira
Subdiretora Helena Rocha
Redação António Fernandes
Cristina Cruchinho
Cristina Tudella
Helena Amaral
Irene Segurado
Isabel Rocha
Manuela Pires
Paulo Alvega
Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Dezembro 2015
Tiragem 1500 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.º 8
Casal da Espinheira
2560–401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre o número temático

Este número temático é dedicado à Criatividade Matemática, tema que a redação da revista considerou de todo o interesse ser abordado, até na sequência da revista temática de 2014 dedicada à resolução de problemas. No entanto é nossa estratégia que a discussão de um tema se faça em simultâneo com a identificação de quem, na nossa comunidade, se tem interessado pelo mesmo e desenvolvido trabalho nesse âmbito pois, sem editores com esse conhecimento e experiência, a conceção da revista temática seria tarefa extremamente difícil, senão impossível. Não necessitámos de ser muito «criativos» para identificarmos as editoras que queríamos convidar para este número: Isabel Vale e Teresa Pimentel.

Queremos aqui deixar o nosso agradecimento por terem aceite o convite e pela enorme dedicação e empenho com que se envolveram em todas as fases da construção da revista desde a sua conceção até ao produto final que agora nos chega às mãos, indo além do seu papel de editoras, o que facilitou o trabalho de toda a equipa.

Sobre a capa

A capa deste número da EeM que aborta o tema *criatividade matemática* reproduz o famoso quadro *Demoiselles D'Avignon* (1907), de Pablo Picasso. Esta pintura, que marca o início do movimento cubista, é muito interessante de uma variedade de pontos de vista, um deles residindo no facto de a noção de quarta dimensão, que começava a ser assimilada pela Física e, evidentemente, pela Matemática, se revelar aqui um instrumento conceptual interessante. Diferentes perspectivas de um mesmo tema podiam ser dispostas recorrendo a esta quarta dimensão e projectadas numa representação final. Um exemplo de como a criatividade matemática extravasa o seu próprio domínio, potenciando a criatividade noutros domínios.

António M. Fernandes

Neste número colaboraram

Alexandre Tolentino de Carvalho, Ana Aparício, Ana Barbosa, Artur Coelho, Cleyton Hércules Gontijo, Conceição Vieira, Fátima Morais, Gonçalo Paulo, Isabel Cabrita, Isabel Vale, Jaime Carvalho e Silva, Lina Fonseca, Manuela Pires, Mateus Pinheiro de Farias, Renata Carvalho, Rosa Antónia Ferreira, Sandra Pinheiro, Teresa Pimentel.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

Criatividade matemática individual e coletiva

Neste número da revista Educação e Matemática o tema é a criatividade matemática. A criatividade surge com uma abordagem que conduz a uma nova descoberta. Somos criativos ao estabelecer novas conexões mentais, ou ao ver conexões já existentes mas que estavam ocultas. Isto realça a natureza sintética da criatividade, que logra juntar ideias previamente separadas para a criação de um novo conceito. No entanto, a intuição, por si só, não é suficiente: é necessária uma análise consciente, uma compreensão de como as coisas funcionam, mesmo que não se conheçam todas as regras do jogo. Assim, a criatividade resulta duma combinação entre o pensamento sintético e o analítico.

A expressão *criatividade matemática* surgiu pela primeira vez em 1902 num texto de Poincaré. Passado um século, começam a aparecer investigações no âmbito da educação matemática que demonstram o interesse neste tópico.

Os artigos apresentados neste número, tratados de diferentes formas, dão-nos conta da importância do desenvolvimento da criatividade no ensino e aprendizagem da matemática. O texto de Fátima Morais é de natureza teórica e pretende fazer um enquadramento no âmbito da Psicologia, discutindo o conceito e desconstruindo alguns mitos sobre o tema comuns na sociedade.

Procuramos dar a conhecer alguns trabalhos ligados à criatividade matemática desde o pré-escolar até ao secundário, passando pela formação de professores. Assim, em artigos de caráter essencialmente empírico, a criatividade é explorada dentro da sala de aula, valorizando o papel das tarefas, o trabalho de projeto, a influência das tecnologias. Estes trabalhos demonstram que a criatividade pode ser desenvolvida em diferentes níveis e em ligação a conteúdos matemáticos muito díspares, que vão desde as grandezas e medidas aos racionais passando por isometrias, fractais e outros. Mas, embora na maioria dos casos centrada nos alunos, não podemos esquecer que o desenvolvimento da criatividade não depende apenas do que os alunos fazem mas essencialmente do modo como nós, como professores, atuamos. Neste sentido, o texto de Gontijo apresenta algumas estratégias de criatividade a utilizar na sala de aula para promover o pensamento matemático.

Damos também realce a contextos não formais fora da sala de aula, com a descrição de duas iniciativas nesse âmbito: os congressos matemáticos, realizados fora da sala de aula mas na escola, e destinados a toda a comunidade escolar; e os trilhos matemáticos, cuja realização acontece no meio envolvente, normalmente fora da escola. Na sequência, dois textos, que resultaram de entrevistas, pretendem dar uma visão da criatividade quer numa perspetiva histórica quer do ponto de vista de matemáticos profissionais. E ainda se levantam algumas questões eventualmente polémicas com textos de opinião.

A criação de um ambiente de aprendizagem que encoraje a diversidade, apoie as interações e permita alguma instabilidade pode fazer surgir a criatividade mesmo quando não planeado. A criatividade é uma capacidade transversal que depende menos dos conteúdos a explorar que da metodologia, das experiências, da cultura de interação na sala de aula. E este último aspeto conduz-nos a uma nova questão. De modo geral a criatividade é encarada como uma capacidade individual. No entanto, levantamos a ponta do véu para outra realidade: a criatividade coletiva. Esta ocorre quando as interações sociais entre indivíduos dão origem a novas interpretações que cada pessoa, por si só, não tinha conseguido (Levenson, 2011).

Numa investigação conduzida num importante instituto científico europeu sobre condições para o desenvolvimento da criatividade, Neumann (2007) obteve de todos os cientistas entrevistados a opinião de que o aspeto mais crítico para a emergência da criatividade é estar num ambiente interativo. Os entrevistados consideram que é quase impossível não haver inovação quando há exposição a perspetivas diferentes, que o traço essencial de um cientista criativo é procurar estímulo na interação com colegas, e que o indivíduo depende largamente da inspiração que os outros lhe proporcionam para gerar ideias.

O mesmo se passa dentro da sala de aula. Quando estamos a trabalhar em conjunto, o primeiro faz uma afirmação, o segundo acrescenta algo, o terceiro elabora sobre o que foi dito anteriormente, e assim sucessivamente. Pode então pôr-se a questão: quem teve o pensamento original?

Cada pessoa construiu o seu pensamento sobre uma ideia prévia. Nesse caso foi o primeiro a falar que teve o pensamento original? Certamente se não houvesse equipa a elaborar e a desenvolver a ideia esta não teria chegado tão longe. Ou eventualmente o primeiro não seria suficientemente persistente a ponto de avançar sozinho. E então podemos dizer que estamos perante um caso de criatividade coletiva.

Os textos presentes neste número da revista não falam em criatividade coletiva, mas implicitamente ela está presente em muitos deles, nos quais se realça a importância da discussão e interação, durante a resolução de tarefas, com os diferentes intervenientes, por forma a encontrar soluções interessantes e originais.

Referências

Levenson, E. (2011). Exploring colective mathematical creativity in elementar school. *Journal of Creative Behavior, 45*(3), 215–233.

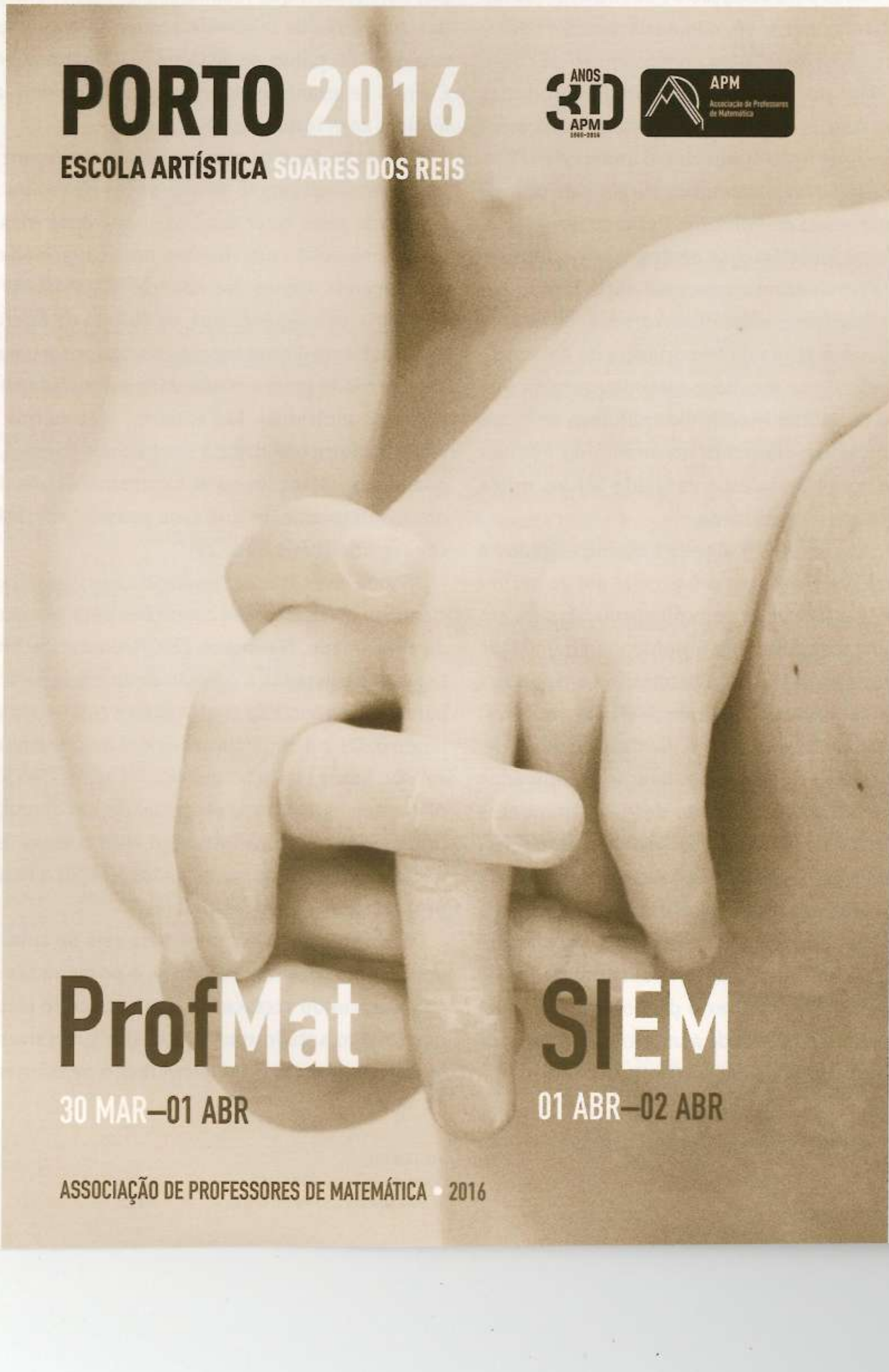
Neumann, C. (2007). Fostering creativity. A model for developing a culture of collective creativity in science. Retirado, em 10 de novembro, de http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1808036/

Isabel Vale

Escola Superior de Educação do IPVC

Teresa Pimentel

Agrupamento de Escolas de Santa Maria Maior



Criatividade: Conceito e desafios[1]

MARIA DE FÁTIMA MORAIS

O futuro será caracterizado cada vez mais pela mudança, rapidez e imprevisibilidade. Resolver problemas de forma apenas lógica será então insuficiente face aos novos desafios, sendo as competências criativas de resolução de problemas necessárias à inovação exigida. Estas competências são mesmo encaradas como necessidade de quase sobrevivência futura (Starko, 2010). A Educação deve assim estar particularmente atenta a tal necessidade neste início de século.

Contudo, falar de criatividade é difícil, pois envolve múltiplas definições (Runco, 2007) Porém, mais útil do que a pergunta normativa face a algo que foge por essência à norma — o que é criatividade — parece ser a preocupação sobre o que criatividade *requer*. Vários autores apostam nestes esquemas mais latos, como é o caso do esquema 4P's[2] já considerado universal há anos (El Murad & Weist, 2004) ou a ideia de Co-incidência de Feist (2006). Expor-se-á então uma possibilidade organizadora face ao conceito de criatividade, esclarecendo os seus requisitos principais, e alguns dos desafios que ainda resistem na sua investigação.

O conceito: Criatividade ou uma feliz co-incidência

Na confrontação com a necessidade de compreender criatividade, não se querendo inovar mais definições, pode-se aproveitar a ideia de Feldman (1988) de que criatividade é algo raro porque muito exigente e é muito exigente por ser um fenómeno exigente de co-incidência. Isto é, para ocorrer criatividade têm de estar simultaneamente presente diferentes dimensões na interação de quem cria com o cenário em que o produto é criado.

Por um lado, ser criativo implica aptidões. Cada um de nós demonstraria um perfil específico em testes de aptidões e, obviamente, se alguém tiver uma capacidade figurativa elevada, por exemplo, é provável que venha a ser criativo quando desenha, pinta ou planifica uma decoração; já se for enfatizada uma capacidade verbal, é mais provável que se venha a ser criativo escrevendo. As aptidões refletem-se então nos contornos dos nossos esforços criativos, não só na alta criatividade, mas também na manifestação criativa quotidiana.

Ser criativo é também possuir, ou ser possuído por, uma elevada motivação. É consensual que só se cria quando se está comprometido com o que se faz. Criar é imensamente mais exigente do que reproduzir: é colocar algo do único e irrepetível que cada um de nós é no que se cria e sem paixão isso não acontece. Mesmo se atualmente a motivação extrínseca também cabe na explicação de criatividade, se este tipo de motivação *pode* estar presente quando se cria, a perceção de motivos intrínsecos *tem* necessariamente de fazer parte do processo criativo (Jesus, Rus, Lens, & Imaginário, 2013).

Ser criativo é ainda dominar conhecimentos. A imagem da lâmpada na cabeça frequentemente usada como ilustrativa de criatividade é perigosa porque simplista. Criatividade exige associações remotas da informação (Dineen, 2006), ou seja, ligações entre informações que a maioria das pessoas não considera porque tais informações pertencem a contextos longínquos. Ora, para fazer associações de informação, é necessário possuí-la. Para criar é então importante não só um conhecimento aprofundado acerca do domínio em que se cria, mas também um conhecimento multidisciplinar — e isto não só considerando a alta criatividade, como também a criação no dia-a-dia. Habituamo-nos, por vezes, a associar o *insight*, o surgimento de uma ideia solucionadora súbita à criatividade (cf. Sternberg & Lubart, 2003), mas tal *insight* não é sinónimo de inspiração súbita, inexplicável e ocasional: só acontece após intenso trabalho e persistência face ao conhecimento que se vai integrando.

Por seu lado, ser-se criativo não é alheio à dimensão da personalidade (Cropley, 2009). Desde a década de 60 que estão identificadas características de personalidade típicas das pessoas criativas. Claro que ter personalidade não garante ser criativo. O contrário, porém, afirma-se como verdadeiro: ser criativo implica ter características como autonomia, auto-confiança, tolerância à ambiguidade ou persistência. Não há criatividade sem autonomia, pois esta permite a individualidade, a singularidade do projecto e as pessoas criativas normalmente acreditam mais em si mesmas, sendo a auto-confiança um protetor para riscos que rasgos criativos podem implicar. Por sua vez, a tolerância à ambiguidade permite resistir à pressão natural e íntima para fechar tarefas que prolongam a angústia de um problema aparentemente sem solução, permite manter tais problemas em aberto mais tempo e, assim, as soluções podem ser menos banais, potencialmente mais criativas. Já a persistência aparece como competência fulcral para a resolução de problemas em geral e a criativa em particular num mundo atual em que tudo parece tão complexo e sofisticado, mas tudo também parece demasiadamente fácil no que respeita à busca de informação.

Ser criativo associa-se ainda a processos cognitivos. Há formas de pensar, de processar mentalmente a informação também típicas, mais facilmente executáveis, tomando as pessoas criativas (Zeng, Protector & Salvendy, 2011). Estas pessoas são, por exemplo, mais flexíveis a percepcionar visualmente o que as rodeia. Face a estímulos visuais, retiram deles mais facilmente sentidos alternativos, fazendo diferentes sínteses percetivas (Smith & Amnér, 1997). As pessoas criativas usam mais a imagética, podendo esta facilitar processos de comparação, de síntese ou de evocação da informação, assim como a concretização de conceitos abstratos ou a previsão de consequências (Ward, Smith & Finke, 1999). Há nelas também maior facilidade para a formulação de analogias ou de metáforas, o que potencia o desenvolvimento e a comunicação de ideias (Sternberg & Lubart, 2003). Às pessoas criativas não lhes é ainda suficiente o envolvimento no *problem solving*, procurando também a dimensão do *problem finding*. Face a problemas já existentes mas não óbvios, têm a sagacidade de descobri-los e formulam novos problemas (Starko, 2010).

Por último, não se pode esquecer que criatividade é uma atribuição. Falar de criatividade é falar numa dimensão irritantemente presente (porque subjetiva) e inultrapassável nesse conceito: a influência de um olhar de outrem. Há então o condicionamento do que se cria pela valoração de alguém que pode ser o professor avaliando o trabalho dos alunos, o crítico de arte ou o próprio momento sócio-histórico que vai filtrando o que é e não é criativo (Cropley, 2009).

Criatividade é então esta co-incidência, esta co-existência necessária de fatores que implicam, na sua maioria, a relação do indivíduo com o meio e que podem ser mutáveis nesse indivíduo (talvez com as exceções das aptidões e do olhar de outro). Porém, deseja-se ainda fazer a sistematização de algumas preocupações sobre o conceito acabado de expor, refletir desafios que são transversais a qualquer contexto profissional ou pessoal, que interpelam qualquer um de nós.

Desafios do conceito: Controvérsias teóricas com implicações práticas

Há duas controvérsias marcantes no percurso de investigação sobre criatividade com consequências pertinentes para a prática, frequentemente referidas (Craft, Jeffrey, & Leibling, 2007). Por um lado, problematiza-se a distribuição populacional da criatividade. De uma forma prática pode colocar-se a questão da seguinte forma: quando se fala em Mozart ou em Einstein, fala-se essencialmente do mesmo tipo de requisitos (emocionais e cognitivos) que quando se fala do nosso aluno ou do nosso colega criativo? Ou estão em causa, nestes casos, dimensões *radicalmente* diferentes? Nas décadas de 60 a 80, autores como Torrance (1967) defendiam um potencial criativo universal, uma distribuição normal da criatividade, uma não diferença radical na *essência* das ferramentas criativas seja para quem for. Contudo, autores como, por exemplo, Vernon (1989), não suportavam, nessas décadas, que a *Big C* (criatividade reconhecida socialmente) fosse tomada como equivalente à *little c* (criatividade no quotidiano) e que esta última pudesse representar o *verdadeiro* conceito de criatividade. Vernon (1989, p. 95) ironizou mesmo dizendo «não queiram que a criatividade de Da Vinci esteja na continuidade da do meu jardineiro...». Ora, continuam a afirmar-se trabalhos cujo centro de interesse é inequivocamente indivíduos criativos que mudam paradigmas (Gardner, 2011) e reafirma-se mesmo uma distribuição assimétrica para este conceito (Feist, 2006), na qual muito poucos indivíduos manifestariam muita criatividade e muitos indivíduos manifestariam pouca. Por seu lado, vemos autores continuando a investir num potencial universal a promover em qualquer contexto do quotidiano (Runco, 2007).

Esta é uma questão que não serve apenas o prazer de discussão teórica: tem consequências fortes nas opções face à aposta de mudar pessoas que nos rodeiam. Como no mundo da educação podem ser privilegiadas investigações e intervenções para o desenvolvimento de competências criativas, acreditando que estas são essencialmente atribuíveis a uma pequena parte da poupulação? E a controvérsia, a ambiguidade, resistindo há décadas, mina a conceção de criatividade e vai servindo pragmaticamente apostas e discursos interventivos diferentes.

Outra importante ambiguidade tem a ver com questão: quando se é criativo, tendencialmente manifesta-se criatividade nas várias exigências com que somos confrontados? Tendemos a pintar tudo de *ouro* como se fossemos um Rei Midas, independentemente dos domínios de realização? Criatividade afirma-se assim como sendo um fenómeno essencialmente genérico? Ou, pelo contrário, é-se tendencialmente criativo numa ou noutra área, podendo não sê-lo nada nas restantes? Criatividade afirma-se assim como sendo um fenómeno essencialmente específico? Esta é uma das mais duradouras controvérsias no estudo da criatividade. Autores como Martindale (1989) dizem há anos que há algo de irremediavelmente global na criatividade, tendo afirmado que «um Físico e um Poeta criativos são mais parecidos entre si do que um Físico criativo e outro não criativo e do que um Poeta criativo e outro não criativo» (p. 212); também trabalhos como o de Bernstein e Bernstein (2006) mostram semelhanças cognitivas e de personalidade entre diferentes domínios como as ciências e as artes, parecendo emergir mais similaridades do que diferenças. Por outro lado, autores como Kaufman e Baer (2006) mostraram empiricamente que as especificidades do domínio em que tentamos ser criativos condicionam grandemente a probabilidade de o sermos, sendo particularmente importante no fator conhecimento.

Ora, também esta controvérsia alimenta as nossas práticas. Os indivíduos que investem na criatividade de outros e se orientam pela globalidade tentarão trabalhá-la mais ou menos independentemente dos contextos (por exemplo, disciplinares) em que se movem; os que apostam na especificidade aproveitarão os contornos de cada contexto e problematizarão mais o *transfer* do treino criativo. Apesar da especificidade parecer ganhar terreno actualmente, a discussão mantem-se acesa.

Desafios do conceito: a resistência de alguns mitos

Mitos são crenças erradas sobre algo difícil de conhecer ou de compreender. Relembrando a complexidade do conceito de criatividade, não é estranho constatar a subsistência de mitos sobre ele durante décadas, resistindo mesmo a evidências empíricas que os contradizem. Serão ilustrados então alguns desses mitos que, apesar de serem antigos, perturbam ainda o estudo e a prática de criatividade.

Voltemos à imagem perigosa da lâmpada que súbita e inexplicavelmente se acende no cérebro para ilustrar criatividade. Não está em causa que poderá restar sempre algo por esclarecer no processo criativo, que poderá restar por explicar uma centelha que faz a diferença entre o que é simplesmente conhecer, compreender, reproduzir, e o que é inovação, provocadora da pergunta fascinada «mas porque não me lembrei eu disto?!». Talvez resista sempre esse 1% *de inspiração*, parafraseando Edison, que tem a ver com a condição solitária e extraordinária de todos sermos únicos e de criatividade requerer tal singularidade. Contudo, sobram os 99% de *transpiração*. O *insight* — ou os mini-*insights* sucessivos e consequentes — existem. Obras como a de Weisberg (1987) ilustraram isso magnificamente. Contudo, ilustraram também que para esse(s) momento(s) de descoberta súbita e inexplicável surgir(em), um lento percurso de trabalho, de conhecimento, de persistência, de reavaliações e de manutenção teimosa num sentido de objectivo tiveram de ir acontecendo. Explicavelmente. Quer para um Guernica ou para uma Teoria da Evolução das Espécies, quer para um criativo projeto na sala de aula ou para um spot publicitário. A criatividade é assim na atualidade algo *pesquisável*, ideia que o mito da inspiração súbita e inexplicável não deve insistir em perturbar.

Por seu lado, quando se pergunta o que é criatividade, frequentemente surgem as palavras novidade, raridade, diferença. Há então uma duplicidade, consensualmente admitida na difícil definição de criatividade que é esquecida muitas vezes no quotidiano: criatividade não é só originalidade, criatividade não é só diferença. Originalidade assume-se como pura diferença estatística e ser original é banal demais. Ser criativo é um requisito bem mais rico e complexo. Criatividade implica originalidade, mas o inverso não é verdadeiro. Criatividade acontece na duplicidade exigente da originalidade com a eficácia, isto é, com a lógica, a utilidade, o sentido que a ideia diferente pode ter: a diferença terá de servir tal eficácia (Runco, 2007). No quotidiano actual em que são frequentes mensagens publicitárias e sociais de apelo à diferença e à originalidade por si, há então que combater equívocos e reafirmar que criatividade só pode ser inovação se também for associada a essa utilidade valorizadora da ideia original.

Um outro mito com particular importância para a prática é o da associação privilegiada da criatividade ao contexto artistico (Craft *et al.*, 2007). Esta associação priviligiada da manifestação criativa às artes veicula um esquecimento ou uma incompreensão face à criatividade que reveste a investigação científica, a invenção, as ciências humanas e sociais, o desporto ou a liderança. Assim, sendo esta mensagem mítica divulgada mais explícita ou implicitamente, é fácil perceber consequências nos contextos de investigação e de intervenção. A identificação e a promoção de criatividade devem acontecer em diferentes áreas de conhecimento, no desenho e no aproveitamento dos próprios curriculos escolares, por exemplo.

Por último, um mito frequentemente referido e com particular incidência no contexto educativo é a associação de criatividade a desviância ou indisciplina. Já Torrance, em 1963, referia que os professores preferiam os alunos delicados, pontuais, obedientes e aceitantes das regras. Também autores como Westby e Dawson (1995) mostraram que os professores tendem a não escolher como preferidos os alunos por eles previamente classificados como tendo características criativas. Ora, apesar deste assunto não ser linear, porque há estudos com dados opostos, muitos educadores correrão o risco de sentirem desconforto com a autonomia, o gosto pelo risco, a curiosidade, o humor, o questionamento ou a divergência típicos do educando criativo. E entre o que os educadores dizem valorizar inequivocamente face à criatividade dos seus educandos e a gestão da sua prática, pode ir uma grande distância, acabando eventualmente por vencer o receio de que a criatividade lhes pode trazer perturbação. Porém, como afirma Cropley (2009), criatividade pode ser um catalizador de energia, nomeadamente de pessoas que poderiam ser potencialmente perturbadoras. Criatividade, contrariamente ao mito, pode aumentar a probabilidade de comportamentos sadios e adaptados.

Concluindo

Faz sentido terminar como se começou: dizendo que falar de criatividade é difícil. Porém, faz sentido também sublinhar que com todos os paradoxos, resistências, e esperanças também, com que o conceito se foi aqui revestindo, este texto foi suscitado para que houvesse um momento de reflexão, por educadores, acerca de criatividade. Esperemos então que estas palavras possam reforçar não só o estudo, mas também a aplicação intencional, fundamentada e sistemática de atitudes, comportamentos e mesmo estratégias que promovam seres humanos flexíveis, críticos e autónomos, isto é, com competências criativas que permitam o que o futuro lhes exige: inovação e não simples reprodução.

Notas

[1] Texto que reproduz sinteticamente parte de capítulo publicado em Psychology of Creativity, editado pela Nova-Publishers (New York)

[2] Esquema concetual que organiza investigações/teorizações acerca da criatividade nas categorias Pessoa criativa, Processo criativo, Produto criativo e Press (influência social)

Referências

Berstein, R. & Bernstein, M. R (2006). Artistic scientists and scientific artists: the link between polymathy and creativity. In R. Sternberg, E. Grigorenko & J. L. Singer (Eds.), *Creativity —from potential to realization* (pp. 127–152). Washington DC: APA.

Craft, B. Jeffrey, & M. Leibling (Eds.),(2007). *Creativity in education*. London: Continuum.

Cropley, A. (2009). *Creativity in education and learning — a guide for teachers and educators*. New York: Routledge Falmer.

Dineen, R. (2006). Views from the chalk face: lecturer's and student's perspectives on the development of creativity in art and design. In N. Jackson, M. Oliver, M. Shaw & J. Wisdom (Eds.), *Developing creativity in higher education* (pp. 109–117). New York: Routledge.

El-Murad, J. & West, D. C. (2004). The definition and measurement of creativity: What do we know? *Journal of Advertising Research, 44*(2), 188–201.

Feist, G. J. (2006). The evolved fluid specificity of human creative talent. In R. Sternberg, E. Grigorenko & J. L. Singer (Eds.), *Creativity — from potential to realization* (pp. 57–82). Washington DC: APA.

Feldman, D. H. (1988). Creativity: Dreams, insights and transformations. In .R Sterberg (Ed.), *The nature of creativity*. Cambridge, NY: Cambridge University Press.

Gardner, H. (2011). *Creating minds: An anatomy of creativity seen through the lives of Freud, Einstein, Picasso, Stravinsky, Eliot, Graham, and Gandhi.* London: Basic Books.

Kaufman, J. C. & Baer, J. (2006). Hawking's Haiku, Madonna's math: Why it is hard to be creative on every room of the house? In R. Sternberg, E. Grigorenko & J. L. Singer (Eds.), *Creativity —from potential to realization* (pp. 3–20). Washington DC: APA.

Jesus, S. N., Rus, C., Lens, W., & Imaginário, S. (2013). Creativity and intrinsic motivation: A meta-analysis of the studies between 1990–2010. *Creativity Research Journal, 25*(1), 80–84.

Martindale, C. (1989). Personality, situation and creativity. In J. A. Glover, R. R. Ronning & C. R. Reynolds (Eds.), *Handbook of creativity* (pp. 211–232). New York: Plenum.

Runco, M. A. (2007). *Creativity: theories and themes, research, development and practice.* London: Elsevier Academic Press.

Smith, G. J. & Amnér, G. (1997). Creativity and perception. In M. Runco (Ed.), *Creativity research book*. Cresskill, NJ: Hampton Press.

Starko, A. J. (2010). *Creativity in the classroom — schools of curious delight.* New York: Routledge.

Sternberg, R. J. & Lubart, T. (2003). The role of intelligence in creativity. In M. Runco (Ed.) *Creative critical processes.* Cresskill, NJ: Hampton Pres

Torrance, E. P. (1963). The creative personality and the ideal pupil. *Teacher's College Record, 65*, 220–227.

Torrance, E. P. (1967). The Minnesota studies of creative behavior: National and international extensions. *Journal of Creative Behavior, 1*(2), 137–154.

Vernon, P. E. (1989). The nature-nurture problem in creativity. In J. A. Glover, R. R. Ronning & C. R. Reynolds (Eds.), *Handbook of creativity — Perspectives on individual differences* (pp. 93–110). New York: Plenum.

Ward, T. B., Smith, S. M., & Finke, R. A. (1999). Creative cognition. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 189–212). New York: Cambridge University Press.

Weisberg, R. W. (1987). *Creatividad: El genio y otros mitos.*Barcelona: Editorial Labor.

Westby, E. L. & Dawson, V. L. (1995). Creativity: Asset or burden in the classroom? *Creativity Research Journal, 8*(1), 1–10.

Zeng, L., Proctor, R, & Salvendy, G. (2011). Can traditional divergent-thinking tests be trusted in measuring an predicting real-world creativity? *Creativity Research Journal, 23*(1), 24–37.

Maria de Fátima Morais

Instituto de Educação, Universidade do Minho

Criatividade com estes programas?

A criatividade em Matemática desenvolve-se proporcionando aos alunos momentos de discussão e reflexão em torno da resolução e formulação de problemas que permitam abordar diferentes interpretações e soluções (Silver, 1997). Mas antes de desenvolver a criatividade dos seus alunos o professor deve, ele próprio, ser criativo. Atualmente necessita de uma criatividade redobrada, não só para encontrar no Programa de Matemática de 2013 referências à importância do desenvolvimento da criatividade em Matemática ou de aspetos relacionados, como a formulação de problemas, mas também para conseguir promover discussões matemáticas na sala de aula que desenvolvam a capacidade argumentativa dos alunos. A par de tudo isto, tem de atender a algumas centenas de descritores. São mais de 300 no 1.º e 3.º ciclos e de 200 no 2.º ciclo.

O desenvolvimento de capacidades transversais, a que o Programa de 2007 deu grande relevo, é no Programa de 2013 referido na frase: «a Comunicação ou o Raciocínio matemático referem-se a capacidades estruturais indispensáveis ao cumprimento dos objetivos elencados, estando contemplados neste documento de forma explícita ou implícita em todos os descritores» (p. 2). No entanto, não é possível identificar uma única referência a estas capacidades transversais ou à formulação de problemas, por parte dos alunos, nem nos conteúdos programáticos nem nos descritores.

As metas curriculares enfatizam essencialmente o «identificar», o «designar», o «estender», o «reconhecer» e o «saber» esquecendo por completo a importância do «compreender», do «formular» ou do «relacionar». A aprendizagem da Matemática ao nível do ensino básico parece estar a resumir-se à definição de conceitos, à «utilização de designações», ao «conhecer de resultados» sem que seja «exigida qualquer justificação ou verificação correta», ao «apresentar [de] uma demonstração matemática» (pp. 3–4) entre outras. Esta é uma visão da aprendizagem da Matemática baseada na memorização e replicação de definições e procedimentos, onde dificilmente haverá espaço para o desenvolvimento da criatividade dos alunos. Saber Matemática não é sinónimo de saber apenas aplicar um conjunto de procedimentos e demonstrações. É antes saber usar conhecimentos matemáticos (não só o conhecimento procedimental mas sobretudo o concetual) de forma criativa, com compreensão, na resolução e formulação de problemas, sem que estes sejam reduzidos a problemas de um, dois ou três passos. É saber comunicar matematicamente e relacionar aprendizagens. Como podem os alunos justificar e argumentar matematicamente sem experienciarem o desafio de discussões na sala de aula onde diferentes ideias e perspetivas são confrontadas?

O desafio é fazer um *zoom in* para dentro da nossa sala de aula na tentativa de procurar as oportunidades que damos aos alunos para serem matematicamente criativos, para depois fazer um *zoom out* para refletirmos acerca da Matemática que estamos a ensinar.

Que Matemática devem os alunos aprender ao longo do ensino básico? Não merecem os alunos uma matemática mais criativa onde possam ser também criativos?

Referências

Ministério da Educação e Ciência — DGE. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa. (retirado de http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=17 em 04/09/2013).

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity though instruction rich mathematical problem solving and problem posing. *International Reviews on Mathematical Education, 29,* 75–80.

Renata Carvalho
Escola Básica e Secundária Joaquim Inácio da Cruz Sobral

A criatividade nas (re)soluções visuais de problemas

Isabel Vale

O repertório visual de cada um de nós pode proveitosamente ser posto ao serviço da resolução de problemas e inspirar resoluções criativas.
Abraham Arcavi, 1999

Com o presente artigo pretende-se destacar o potencial das (re)soluções visuais de problemas sobretudo pela simplicidade e criatividade que estas propostas podem apresentar. Depois de uma breve referência teórica sobre alguns conceitos ligados com criatividade, resolução de problemas e visualização apresentam-se alguns exemplos de tarefas, que podem ser destinadas a vários anos de escolaridade, para ilustrar a força e o poder dos processos visuais utilizados como estratégia criativa na resolução de problemas.

A criatividade na aula de matemática

A criatividade em matemática é um tema muitas vezes negligenciado e considerado impossível de prosseguir nas aulas de matemática; contudo, a criatividade não é um processo misterioso e inobservável nem uma capacidade inata e não passível de aprendizagem. É, em vez disso, um conjunto de capacidades que podem ser ensinadas e aprendidas pelos alunos. Assim, a criatividade pode ser desenvolvida nos estudantes se os professores lhes proporcionarem um ambiente de aprendizagem adequado, resolvendo determinadas tarefas matemáticas de modo a influenciar algumas das componentes da criatividade matemática.

Definir criatividade matemática é uma tarefa muito complexa. Argumenta-se que ela começa com curiosidade e envolve os alunos na exploração e experimentação usando imaginação e originalidade. Quando falamos na criatividade de jovens estudantes, não nos referimos à mesma criatividade de pessoas célebres que deram contribuições significativas para a sociedade (também conhecida como criatividade com C-maiúsculo). Em vez disso, estamos preocupados com a criatividade de todos os dias (criatividade com c-minúsculo) que pode acontecer e se manifesta na sala de aula.

Nesse contexto, o pensamento criativo dos alunos surge com a resolução de problemas e a formulação de problemas que levam à compreensão de conceitos matemáticos estruturais e estimulam as dimensões essenciais de fluência, flexibilidade e originalidade da criatividade (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1997). Deste modo, os professores devem proporcionar tarefas que suscitem a curiosidade e o envolvimento; por outro lado, devem escolher-se tarefas com múltiplas (re)soluções e que proporcionem da parte dos alunos o fluxo de ideias matemáticas, a flexibilidade de pensamento e originalidade nas respostas (Vale, Pimentel, Barbosa, Cabrita & Fonseca, 2012). Na maioria das vezes temos de os incentivar na busca de ideias em lugares incomuns, improváveis, de acarinhar ideias aparentemente absurdas, como pontes para ideias práticas e eficientes.

Dimensões da criatividade

O conceito de criatividade é multifacetado, pelo que têm surgido diferentes caracterizações, em particular em relação à criatividade em matemática. Esta está na maior parte das vezes relacionada com o pensamento divergente, caracterizando-se por possuir três dimensões principais: *fluência, flexibilidade* e *originalidade*, que representam três das componentes relacionadas com a resolução de problemas.

A *fluência* é a capacidade de produzir um grande número de resoluções para a mesma tarefa. Esta capacidade adquire-se ao conseguir o maior número possível de ideias diferentes. As ideias surgem às vezes associadas e quanto mais se trabalhar um tema, mais fluente a pessoa se torna. Silver (1997) afirma que a utilização de tarefas mal estruturadas e abertas durante o processo de ensino pode incentivar os alunos a gerar várias resoluções contribuindo para o desenvolvimento da fluência. Esta pode ser medida pelo número de respostas corretas que se podem obter na resolução de uma mesma tarefa (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1997).

A *flexibilidade* é a capacidade para pensar de modos diferentes, para produzir uma variedade de ideias diferentes sobre o mesmo problema, sendo deste modo um fator importante na resolução de problemas. No âmbito da psicologia, considera-se a flexibilidade cognitiva como a capacidade de reestruturar o conhecimento, em resposta adaptativa para mudar as exigências da situação. No âmbito da educação matemática, Krutetskii (1969) considera a reversibilidade, a capacidade de inverter uma operação mental, como um aspeto da flexibilidade de pensamento. Está associada a uma mudança na compreensão e interpretação das tarefas, a uma mudança de ideias e de estratégia quando se está a resolver um problema para encontrar outras resoluções ou para optar pela solução ótima. Silver (1997) refere que a flexibilidade na resolução e na formulação de problemas identifica-se pelo número de diferentes modos que o aluno utiliza para resolver, exprimir ou justificar um problema. Um bom solucionador de problemas possui várias abordagens para resolver um determinado problema. Os alunos que mudam o modo de atacar um problema, mostrando versatilidade, são, normalmente, os melhores a resolver corretamente esse problema. O pensamento flexível está em contraponto com a fixação. Na resolução de problemas, a fixação é relacionada com a rigidez mental (Haylock, 1997). A flexibilidade surge quando se supera a fixação ou rompe com estereótipos. Haylock diferencia entre fixação de conteúdo e fixação algorítmica. Superar o primeiro tipo de fixação exige que o aluno considere um conjunto mais amplo de possibilidades do que à primeira vista parece óbvio, e amplie o leque de possibilidades adequadas à situação. O segundo tipo de fixação refere-se à situação em que o aluno utiliza um algoritmo com o qual é bem sucedido, mesmo quando este não é o método mais apropriado. A flexibilidade pode ser medida pelo número de diferentes modos de produção de respostas na resolução de um problema, organizados em diversas categorias. Leikin (2009) propõe avaliar a flexibilidade através da análise de diferentes resoluções que recorram a estratégias com base em diferentes representações, propriedades ou conteúdos matemáticos.

A *originalidade* é a capacidade de pensar de forma não usual, produzindo ideias novas e únicas (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1997). É pensar fora do óbvio ou ter uma ideia rara. De acordo com Silver (1997), a originalidade na sala de aula pode ser manifestada quando um aluno, face a um problema, analisa várias resoluções, métodos e respostas e consegue criar outra que seja válida mas diferente. Esta caraterística pode ser medida em comparação com a percentagem de alunos num determinado grupo que pode obter a mesma solução. Quando numa turma há respostas não usuais, não convencionais, outros professores podem ajudar a confirmar a seleção de uma solução original de acordo, por exemplo, com as expetativas de resolução para o nível dos alunos em causa. Os termos originalidade e novidade são muitas vezes considerados sinónimos apesar de serem diferentes. Em termos simples podemos dizer que a novidade refere-se ao «novo» enquanto que a originalidade refere-se ao «diferente da norma». Numa sala de aula uma ideia pode ser nova para um aluno, mas se outros alunos tiverem a mesma ideia, já não será original.

A *elaboração* é outra caraterística da criatividade também considerada nalgumas situações, apesar de não a considerarmos no nosso trabalho. É a capacidade de apresentar grande quantidade de detalhes de uma ideia. Ou seja, é a capacidade do aluno de ter um pensamento cuidadoso sobre aspectos particulares de um problema ou situação, mudando um ou mais destes aspetos, substituindo, combinando, adaptando, alterando, expandindo, eliminando, rearranjando ou voltando atrás, e então especular sobre como essa única mudança teria um efeito cascata sobre outros aspectos do problema ou situação. Refere-se ao número de detalhes utilizados para ampliar ou melhorar uma (re)solução. Contudo, vários autores (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1997) não utilizam esta dimensão da elaboração quando analisam a criatividade matemática dos alunos. Uma das razões prende-se com a dificuldade em determinar diferentes níveis de elaboração nas resoluções apresentadas pelos alunos em muitas tarefas.

É a combinação destas dimensões que nos pode permitir caraterizar a criatividade dos alunos em matemática escolar e ajudar a desenhar tarefas e estratégias a utilizar no processo de ensino e aprendizagem.

A arte de *ver*

Para Leonardo da Vinci, *saper vedere*, isto é, saber ver, ou a arte para ver, era a chave para desvendar os segredos do mundo visível. *Saper vedere* incluía uma capacidade sensorial intuitiva precisa, bem como imaginação, que estavam na raiz da inventividade e criatividade de Leonardo.

Também na Matemática «ver» é uma componente importante para explorar em direção à compreensão, e essa capacidade só pode ser desenvolvida através de experiências que requerem esse tipo de pensamento (e.g. Vale *et al.*, 2012). Damos especial atenção às tarefas em contextos figurativos devido à importância que têm em toda a atividade matemática, sendo uma componente de aprendizagem com muitas potencialidades e muitas vezes negligenciada na trajectória escolar dos alunos. Na resolução de problemas complexos a relação com o «ver» é tão importante como as capacidades relacionadas com o «fazer», verificando-se que a maior parte das vezes os alunos selecionam os métodos a utilizar na resolução de um problema baseados no que «veem» no seu enunciado.

As (re)soluções visuais de problemas, isto é, que recorrem a desenhos, esquemas ou a propriedades geométricas, nem sempre foram aceites como soluções matemáticas válidas; são muitas vezes chamadas resoluções sem palavras, que na história da matemática tiveram um forte desenvolvimento e depois retrocesso. Um exemplo clássico é a demonstração sem palavras, só recorrendo a desenhos geométricos, do teorema de Pitágoras. O início do recurso a esquemas visuais para resolver problemas e/ou efetuar provas poderá ser atribuído aos babilónios e gregos, que desenvolveram problemas sobretudo geométricos em contextos de natureza visual. Contudo, alguns autores (e.g. Rivera, 2011) falam no «declínio histórico da imagem» em geometria, que começou com a bem sucedida algebrização da geometria no século XVII através do trabalho de Descartes. O que se seguiu foram as poderosas invenções concetuais, no século XIX, de geometrias complexas que não podiam ser representadas visualmente, e a completa aceitação de sistemas dedutivos abstratos como resultado das geometrias não-euclidianas. Apesar desta visão histórica negativa, nas duas últimas décadas houve um renascer do interesse pelas representações visuais como ferramenta poderosa no raciocínio matemático, onde o visual possa proporcionar algo mais profundo em matemática do que fórmulas e, portanto, possa contribuir para uma visão mais ampla da matemática.

Nas últimas décadas aumentou o interesse pelas provas visuais. No entanto, os argumentos visuais devem ser rigorosos pois podem conduzir facilmente a más interpretações e, portanto, conduzir a inferências erradas. De qualquer modo, a sua importância é reconhecida pelo apoio na descoberta de novos resultados e na produção de provas mais formais, e sobretudo pelo seu papel no ensino e aprendizagem da matemática (e.g. Presmeg, 2014).

O uso da visualização tem sido frequentemente citado como um processo poderoso para resolver problemas, em particular no campo da matemática, argumentando-se que o uso de imagens visuais pode ser uma ajuda importante para todos os tipos de problemas, incluindo aqueles em que o visual não é evidente (e.g. Zimmerman & Cunningham, 1991).

Arcavi (1999) refere que, apesar da importância óbvia de imagens visuais em atividades cognitivas humanas, as representações visuais continuam a ser *cidadãos de segunda classe*, tanto na teoria como na prática da matemática. Refere ainda que continuamos a olhar de soslaio para as provas que fazem uso crucial de diagramas, gráficos ou outras formas não linguísticas de representação, e que passamos este desdém para os alunos, apesar de as formas visuais de representação serem elementos legítimos de provas matemáticas.

O papel da visualização na aprendizagem da matemática é um tema que tem sido ultimamente objeto de muita investigação (e.g. Arcavi, 1999; Presmeg, 2014). Parece haver um amplo acordo sobre a centralidade da visualização em aprender e fazer matemática. Esta centralidade decorre do facto de que a visualização não está apenas relacionada com a mera ilustração, mas é reconhecida também como uma componente do raciocínio, profundamente envolvida com o conceptual e não apenas com o percetual (Arcavi, 1999), com a resolução de problemas, e até mesmo com a prova. Na mesma linha está Presmeg (2014) quando refere a utilidade de meios visuais de resolução como não incluindo apenas representações na forma de imagens, mas também representações mais abstratas como sejam gráficos e padrões. E assim a visualização, ao serviço da resolução de problemas, poderá desempenhar um papel central para inspirar uma resolução completa, e não ter apenas um papel meramente processual.

Segundo Zimmermann e Cunningham (1991) a visualização é o processo de formar imagens (mentalmente, com papel e lápis ou com apoio da tecnologia) e usar tais imagens eficazmente na descoberta e compreensão matemática. De acordo com Fujita e Jones (2002) é essencial ter *olho geométrico* — o poder de ver propriedades geométricas a separar-se de uma figura — ferramenta essencial para a construção da intuição geométrica. Este poder, por um lado, é desenvolvido com a realização de tarefas práticas tais como desenhar e fazer medições em figuras geométricas. Por outro lado, a intuição geométrica ou espacial é poderosa não só em temas geométricos mas também noutros que o não são, considerando-se a intuição como a compreensão súbita de qualquer coisa, uma experiência *aha!* depois de um período a tentar, sem sucesso, resolver um problema. A visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de ver novas relações produzindo assim o corte em fixações mentais que possibilita o pensamento criativo (Haylock, 1987).

Podem considerar-se de acordo, com Krutetski (1976), dois tipos de pensamento, lógico-verbal e visual-pictórico, e é o equilíbrio entre estes dois modos de pensamento que determina como se operam num indivíduo as ideias matemáticas. Perante a resolução de um problema há os alunos *analíticos*, que são os que preferem utilizar modos lógico-verbais de pensamento, mesmo nos problemas em que é relativamente mais simples resolvê-los através de uma abordagem visual; e os *geométricos*, aqueles que preferem usar esquemas visual-pictóricos mesmo quando os problemas são mais facilmente resolvidos com meios analíticos. Presmeg (2014) chama *visuais* aos alunos que têm esta preferência, ou seja, que recorrem a métodos visuais para resolver um problema matemático que possa ser resolvido quer por métodos visuais quer não-visuais; e por fim os *harmónicos*, aqueles que não têm preferência específica nem pelo pensamento lógico-verbal nem pelo visual-pictórico, ou também chamados de *integradores* (Borromeo, 2012) pois combinam pensamentos de natureza analítica e visual.

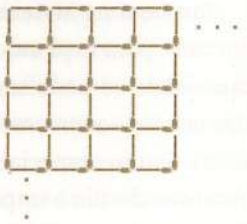
Exemplos de tarefas

Na perspectiva de estimular a criatividade deve pedir-se aos alunos para resolver as tarefas de tantas maneiras diferentes quantas consigam. Por outro lado permite-lhes compreender que um problema pode ser abordado de muitos modos diferentes e, muitas vezes, só depois de resolver o problema é que o aluno, voltando atrás, descobre outro processo de resolução mais simples. Como refere Krutetskii (1976), uma característica dos alunos matematicamente competentes é serem capazes de empenhar-se em procurar uma (re)solução clara, simples, curta e, portanto, «elegante», para um problema. Vemos potencialidades em estimular os alunos a apresentarem várias resoluções; este procedimento contraria a ideia corrente nos alunos de que o importante é conseguir uma resposta correta, não importando se existe outra maneira mais simples ou mais interessante de abordar o problema.

As propostas de tarefas que se apresentam admitem resoluções visuais e não visuais. Contudo, são problemas que podem ser classificados como problemas «visuais» (Presmeg, 2014), devido ao contexto, ou pela apresentação, ou ainda porque a resolução visual é bastante potente. São tarefas que podem ser utilizadas a partir do ensino básico.

Tarefa 1

Quantos fósforos são necessários para construir o quadrado $n \times n$? Descubra o maior número de modos distintos de o fazer.



Esta tarefa permite diferentes abordagens e múltiplas resoluções, quer numéricas quer visuais, o que estimula capacidades criativas dos alunos quanto à fluência, flexibilidade e originalidade. A maioria das abordagens de resolução desta tarefa são visuais mas diferem na sua natureza (Arcavi, 1999). Analisam-se de seguida estes aspetos, não contemplando as estratégias puramente numéricas.

1. Uma das abordagens mais comuns é procurar uma estratégia de contagem a partir da figura dada, recorrendo a uma decomposição do quadrado formado pelo conjunto de fósforos, e a partir daí identificar unidades facilmente contáveis. Por exemplo, podem ser identificados: um quadrado Q, Us e Ls, que vão permitir decompor o quadrado, e daí chega-se a uma generalização (Figura 1).

A análise da Figura 1 permite fazer uma generalização baseada na visualização: $1Q + 2(n-1)Us + (n-1)^2Ls$, o que permite obter sucessivamente para o número de fósforos: $4 + 2 \times [(n-1) \times 3] + (n-1)^2 \times 2 = 2n(n+1)$. Os alunos podem identificar outras formas de decomposição que conduzirão a expressões mais simples ou mais complexas. Para alunos mais novos não se deve considerar numa primeira abordagem o quadrado $n \times n$. Os alunos que utilizem esta estratégia mas que identifiquem diferentes decomposições mostram fluência na resolução da tarefa. Importa depois mostrar que todas as expressões gerais encontradas são equivalentes.

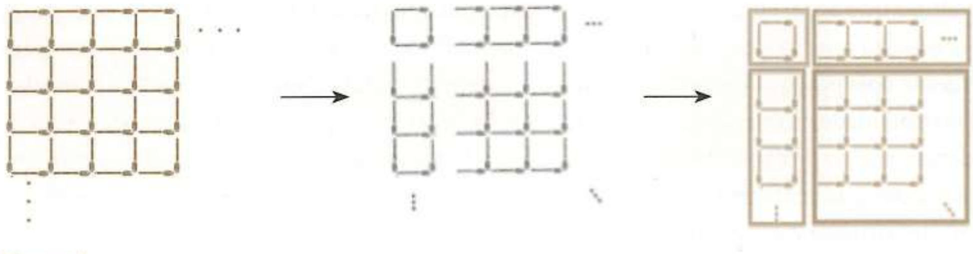


Figura 1

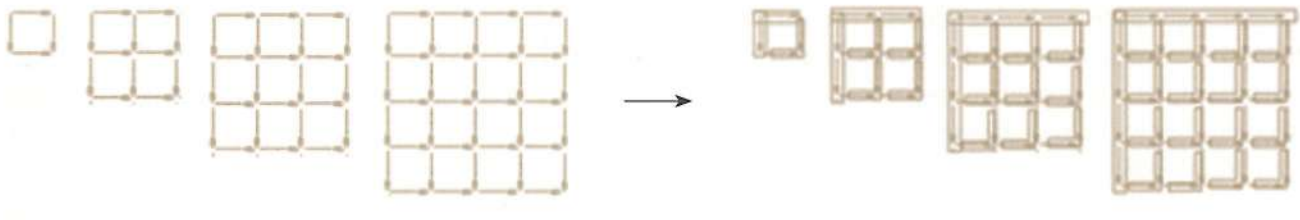


Figura 2

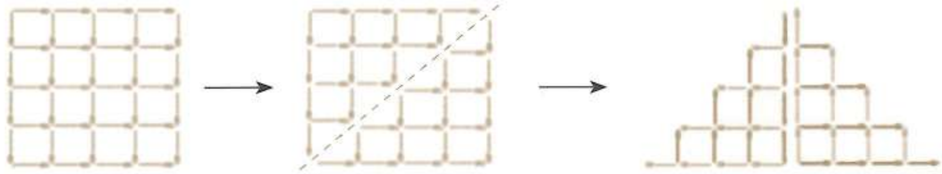


Figura 3

2. Alternativamente poderá recorrer-se à estratégia de reduzir a um problema mais simples como forma de facilitar a chegada à generalização distante através de um raciocínio funcional. A análise sucessiva dos quadrados 1×1, 2×2, 3×3, ..., conduz à descoberta do padrão desta sequência de figuras (Figura 2). Esta estratégia dificilmente será utilizada por alunos que não tenham conhecimento de diferentes estratégias de resolução de problemas e não tenham trabalhado com padrões em sequências de crescimento. Em qualquer das abordagens utilizadas recorre-se a uma decomposição do quadrado formado pelo conjunto de fósforos e a partir dai identificam-se unidades facilmente contáveis. Depois identificam-se, como no caso anterior, diferentes unidades de fósforos facilmente contáveis. Por exemplo podem ser identificados: Is e Ls.

Preenchendo uma tabela que relacione o número da figura com o número de palitos obtidos nos diferentes quadrados identificando os Is e Ls, facilmente se faz uma generalização distante que permita obter o número de fósforos de um quadrado de qualquer dimensão.

Os alunos que utilizem esta estratégia mas que identifiquem diferentes decomposições mostram também fluência na resolução da tarefa.

3. Outra estratégia visual consiste em modificar o todo num novo todo em que seja mais fácil identificar padrões para o resolver.

O quadrado é «cortado» ao longo de uma diagonal e as duas metades são colocadas lado a lado. Cada uma destas metades são vistas como sendo uma escada de linhas e colunas, a partir de um fósforo no topo ate n fósforos na base. Em cada metade temos $(1+2+3+\ldots+n)$ fósforos em coluna e o mesmo número em linha. Na outra metade acontece o mesmo (Figura 3).

Logo, temos no total $2 \times [2 \times (1+2+3+\ldots+n)]$ e facilmente se chega à expressão $2n(n+1)$.

As resoluções apresentadas são apenas exemplos das várias resoluções que se podem obter. O processo visual utilizado nas resoluções anteriores inclui uma nova forma de olhar para a situação de modo a chegar à generalização, e constitui uma explicação de «como» a generalização é

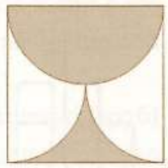
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	...	Fig. n
2Is + 1L	$2 \times (2\text{Is}) + 2^2\text{Ls}$	$2 \times (3\text{Is}) + 3^2\text{Ls}$	$2 \times (4\text{Is}) + 4^2\text{Ls}$		$2 \times (n\text{Is}) + n^2\text{Ls}$
$2+2$	$2 \times 2 + 2^2 \times 2$	$2 \times 3 + 3^2 \times 2$	$2 \times 4 + 4^2 \times 2$		$2n + n^2 \times 2$

estabelecida. Por outro lado, um aluno que apresenta, por exemplo, estas três hipóteses de resolução mostra flexibilidade através do pensamento divergente pois procurou alternativas de resolução diferentes. A originalidade da resolução apresentada será analisada atendendo aos conhecimentos do aluno e em relação com as resoluções que tenham surgido na aula. A infrequência com que surgem e a sua eficácia permitem classificá-las de originais. Por exemplo, a última abordagem apresentada acima normalmente não é frequente, o que pode conduzir a que seja considerada uma resolução original no conjunto dos alunos de uma turma.

Nos exemplos que se seguem apenas se analisam as estratégias de resolução baseadas em «ver» o modo mais fácil de chegar à solução.

Tarefa 2

A figura representa um quadrado de lado unitário. As linhas curvas são arcos de circunferência. Qual é a área da região sombreada?
Descobre mais do que um processo de chegar à solução.



Este problema pode suscitar várias resoluções que envolvem as propriedades das figuras presentes, quadrado e circunferência. Os alunos que tentem uma resolução recorrendo a fórmulas aplicadas a diferentes partes da figura poderão considerar que este é um problema difícil, especialmente se o quadrado não é mostrado, embora possam mostrar fluência e flexibilidade através das resoluções mais convencionais. No entanto, se os alunos tiverem capacidade de «ver» podem descobrir uma resolução visual dinâmica, isto é, onde mentalmente fazem deslizar as duas partes que compõem o «pé» do «cálice» para a parte de cima formando um retângulo. Depois disso é fácil concluir que o «cálice» tem área igual a metade do quadrado, ou seja, 1/2 unidade de área (Figura 4).

Figura 4

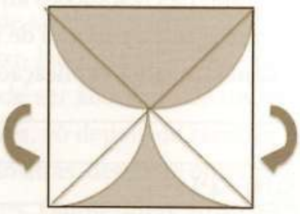


Figura 5

O que faz com que uma tal resolução seja criativa é, conforme sugere Presmeg (2014), o facto de ser necessário quebrar o esquema mental que sugere o uso de fórmulas quando a palavra «área» é apresentada, de modo a procurar um método de resolução visual mais frutífero e simples.

Outra resolução dinâmica poderia ser a apresentada na Figura 5, em que, depois de se traçar as diagonais do quadrado, se vê facilmente que a área do «cálice» corresponde a 2/4 da área do quadrado.

Tarefa 3

Na figura estão dois quadrados, um inscrito e outro circunscrito ao círculo. Qual a razão entre as áreas do quadrado menor e do quadrado maior?
Descobre mais do que um processo de resolução.

Este problema envolve um pensamento idêntico ao anterior, ou seja, envolve também uma resolução visual dinâmica que torna a resolução deste problema muito mais fácil do que qualquer outra que se possa utilizar. Para isso basta efetuar uma rotação do quadrado menor em torno do cento de 45°. Em seguida é fácil concluir que a razão das áreas dos quadrados é de 1:2 (Figura 6).

Conclusão

A aula de matemática deve incluir práticas que conduzam os alunos a ser criativos de modo a melhorarem as suas capacidades matemáticas. Uma das estratégias consiste em conduzir os alunos a pensar visualmente e a desenvolver essa capacidade através de experiências que requeiram tal forma de pensamento. Uma estratégia visual pode ser um modo diferente de encarar um problema complexo e de obter uma solução mais simples, além de que tarefas com características visuais podem ajudar os alunos a ultrapassar algumas dificuldades com conceitos e procedimentos matemáticos, resolvendo com sucesso uma dada situação problemática.

A literatura refere que a atividade de «ver» não é um processo evidente e inato, mas algo que se pode criar, desenvolver, aprender e ensinar (e.g. Whiteley, 2004). Deste modo, é importante ensinar os alunos a «ver», pelo que é necessário propor-lhes um conjunto de tarefas desafiantes em que o ponto de partida da sua exploração seja a intuição e a visualização — podendo abrir caminhos para a explicação e a prova — e, simultaneamente, contribuir para o desenvolvimento da criatividade em matemática.

Figura 6

Referências

Arcavi, A. (1999). *The role of visual representations in the learning of mathematics*. Retirado em 5 de março de 2015 de www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/pdf/26.pdf

Borromeo Ferri, R. (2012). *Mathematical thinking styles and their influence on teaching and learning mathematics*. Retirado em 5 de março 2015 de http://www.icme12.org/upload/submission/1905_F.pdf

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. International Reviews on Mathematical Education, *Essence of Mathematics*, 29(3), 68–74.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, University of Chicago Press.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. (pp. 129–145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. (2014). Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto, (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in mathematical problem solving* (pp. 156–167). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Rivera, F. (2011). *Toward a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum*. New York: Springer

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, (29)3, 75–80.

Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., Barbosa, A. & Fonseca, L. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 171–178). Taipei, Taiwan: PME.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America.

Whitley, W. (2004). *Visualization in Mathematics: Claims and Questions towards a Research Program*. Retirado em 23 de fevereiro de 2015 de http://www.math.yorku.ca/~whiteley/Visualization.pdf

Isabel Vale

Escola Superior de Educação do IPVC

Técnicas de criatividade para estimular o pensamento matemático

CLEYTON HÉRCULES GONTIJO

INTRODUÇÃO

Em diversos países as políticas educacionais têm orientado a formulação de um currículo escolar preocupado com o desenvolvimento do potencial criativo dos estudantes, considerando que a criatividade é fundamental para explorar os desafios sociais e tecnológicos que estão emergindo na atualidade e que o desenvolvimento de habilidades criativas pode favorecer aos estudantes condições para apresentarem soluções inovadoras para os problemas encontrados.

Apesar do reconhecimento da importância de se estimular as habilidades criativas, pouco tem sido feito para favorecer seu desenvolvimento e sua manifestação. Isso se deve, em grande parte, à falta de informações por parte dos professores acerca das estratégias e atividades promotoras do potencial criativo.

Ressaltamos que o processo criativo não ocorre de maneira sistemática e organizada do começo ao fim. Assim, algumas condições são necessárias para que ele possa ocorrer, entre elas, deve-se levar em consideração a disponibilidade de tempo e recursos para o desenvolvimento das atividades. Não podemos deixar de mencionar o importante papel que a motivação intrínseca desempenha, pois, se o estudante não estiver envolvido e não desejar participar de uma determinada atividade, a sua produção criativa poderá ser afetada, visto que no processo criativo observa-se a conjugação de aspectos afetivos e cognitivos. Além disso, destacamos que a bagagem de conhecimento sobre a área investigada é essencial para o desenvolvimento e para a implementação de novas idéias (Alencar& Fleith, 2003).

Cropley (1997) identificou alguns comportamentos dos professores que promovem a criatividade: (a) incentivar os estudantes a aprender de forma independente; (b) ter um estilo de ensino cooperativo e socialmente integrador; (c) motivar seus estudantes a dominar o conhecimento factual para que eles tenham uma base sólida para o pensamento divergente; (d) não julgar as idéias dos estudantes até que elas tenham sido cuidadosamente trabalhadas e claramente formuladas; (e) incentivar o pensamento flexível; (f) promover a auto-avaliação pelos estudantes; (g) oferecer oportunidades para os estudantes trabalharem com uma ampla variedade de materiais e sob diferentes condições e; (h) auxiliar os estudantes a aprender a lidar com a frustração e fracasso para que eles tenham a coragem para experimentar o novo e o incomum.

No campo da Matemática, as discussões acerca de estratégias de ensino que podem favorecer o desenvolvimento da criatividade são, infelizmente, escassas, apesar desta área do conhecimento desempenhar um importante papel na formação dos indivíduos. Possivelmente, a forma como o ensino de Matemática tem sido conduzido nas escolas não tem estimulado professores e estudantes a pensar outras maneiras para organizar o trabalho pedagógico com a Matemática. Essa realidade tem gerado desinteresse e indiferença em relação a este componente curricular, produzindo ao longo da história escolar dos estudantes um sentimento de fracasso e incapacidade para compreender e resolver problemas matemáticos.

Criatividade em Matemática

Quando o tema em discussão é a criatividade em Matemática, não encontramos consenso sobre o que caracteriza este tipo de criatividade (Mann, 2005). Entretanto, pontos comuns são encontrados, especialmente no que diz respeito às estratégias que favorecem o seu desenvolvimento nesta área e estas envolvem especialmente ações de resolver e de elaborar problemas. Em nossos trabalhos, nos referimos à criatividade em Matemática como

> a capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de solução apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns (originalidade), tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma seqüência de ações (Gontijo, 2007, p. 37).

Ressaltamos que a capacidade criativa em Matemática também deve ser caracterizada pela abundância ou quantidade de idéias diferentes produzidas sobre um mesmo assunto (fluência), pela capacidade de alterar o pensamento ou conceber diferentes categorias de respostas (flexibilidade), por apresentar respostas infreqüentes ou incomuns (originalidade) e por apresentar grande quantidade de detalhes em uma idéia (elaboração). Assim, para estimular o desenvolvimento da criatividade, deve-se criar um clima que permita aos alunos apresentar fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração em seus trabalhos (Alencar, 1990).

O desenvolvimento da criatividade em Matemática poderá ser potencializado quando são utilizados problemas que não podem ser resolvidos a partir da aplicação mecânica e direta de conhecimentos apreendidos anteriormente; em outras palavras, a apresentação ou surgimento de um verdadeiro problema implica que o sujeito não tenha acesso imediato à resposta somente pela sua memória, mas que está obrigado a pensar, a raciocinar, para encontrar os conhecimentos necessários que levam à resposta ou, em termos mais amplos, à solução do problema.

Enfatizamos que o uso da metodologia de resolução de problemas é fundamental para o desenvolvimento da criatividade em Matemática, especialmente quando são utilizados problemas abertos, isto é, problemas que admitem muitas possibilidades de respostas e que podem ser obtidas por meio de múltiplos métodos de solução, incluindo-se aqueles criados pelos estudantes no momento da resolução (Sarduy, 1987).

Na resolução de problemas abertos, os estudantes devem ser os responsáveis pelas tomadas de decisão, não confiando esta responsabilidade ao professor ou às regras e modelos apresentados nos livros didáticos. A decisão de que tipo de método e/ou procedimento a ser utilizado poderá ser tomada a partir dos conhecimentos e experiências anteriores que os alunos apresentam, especialmente decorrentes do trabalho já desenvolvido para resolver problemas similares ou que tiveram contato. Salientamos a necessidade de propiciar aos alunos a oportunidade de construírem os seus próprios modelos, testá-los, para então chegar à solução. Será necessário também construir uma estratégia para comunicar para os colegas e para o professor a sua experiência de resolver o problema, explicando o processo mental utilizado e a forma como revisou as estratégias selecionadas para chegar à solução. O sucesso deste último momento, o da comunicação, vai depender da profundidade com a qual o estudante compreendeu o problema, porém, possibilitará refletir a respeito dos métodos de solução selecionados e, ao mesmo tempo, como utilizá-los em outros problemas e áreas da Matemática.

As técnicas de criatividade visam estimular os estudantes a resolverem problemas favorecendo a criação de soluções originais; regras, princípios e generalizações; novos algoritmos; novas questões e problemas e novos modelos matemáticos. Algumas técnicas possibilitam, também, uma profunda compreensão das concepções matemáticas enquanto os estudantes investigam um problema. Essas técnicas foram classificadas em categorias que, em algum momento, apresentam características semelhantes. Além disso, o uso de técnicas de criatividade pode ser uma maneira muito eficaz para os alunos desenvolverem uma paixão pela aprendizagem da Matemática. Sheffield (2003) propõe uma heurística para o desenvolvimento da criatividade em Matemática que compreende o uso de um conjunto de técnicas, organizadas em categorias conforme as suas finalidades. As categorias propostas pela autora são:

Apreciação. São técnicas usadas para fazer conhecer um ou mais aspectos ou atributos de uma situação, produto ou problema que está sendo considerado. Essas técnicas podem ser usadas para auxiliar os alunos a focalizar características importantes do problema, perceber padrões e traçar uma variedade de possíveis soluções. Exemplos de técnicas desta categoria: *brainstorming, checklist* e lista de atributos. Animação. As técnicas relacionadas a esta categoria podem ser usadas em atividades para envolver os estudantes de forma interativa com os problemas, situações ou produtos. A modelagem e a dramatização são duas técnicas que podem ser utilizadas nesta categoria.

Associação. O uso de técnicas de associação pode favorecer os estudantes na realização de comparações e no estabelecimento de conexões entre um problema que de forma imediata não se tem um método para resolve-lo com conceitos, algoritmos e estratégias já conhecidas. Exemplos de técnicas desta categoria: sugestão-ajuste, análise morfológica e sinética.

Alteração. Com as técnicas de alteração, os estudantes mudam sistematicamente partes de um produto, situação ou problema. Questões do tipo «e se...» estão presentes na maioria das investigações e dos *insights* matemáticos. Estas técnicas possibilitam um aprofundamento nas concepções matemáticas a partir de modificações sistemáticas em partes do problema ou de sua solução, levando a novas e interessantes questões ou problemas para serem explorados. Técnicas como o SCAMPER[1] e *Fazendo e desfazendo* são exemplos desta categoria.

Abdicação. As técnicas de abdicação têm por objetivo permitir ao subconsciente refletir sobre o problema quando não se está ativamente trabalhando sobre ele. Exemplos de técnicas desta categoria: relaxamento e visualização.

Neste trabalho, vamos apresentar exemplos de uma técnica pertencente à categoria apreciação: o *brainstorming.*

Brainstorming

A base do *Brainstorming* é a geração de muitas idéias em atividades grupais, de modo que não haja julgamentos *a priori*. Todos os alunos devem contribuir apresentando as idéias que tiverem acerca da atividade que está sendo desenvolvida. Em seguida, todos se envolvem no julgamento das idéias apresentadas buscando aquela que melhor possa levar à solução do problema. Essa técnica pode ser bastante útil quando desejamos favorecer o desenvolvimento da habilidade de pensar livremente para gerar muitas ideias.

Para aplicar esta técnica em sala de aula, faz-se necessário, inicialmente, que todos conheçam as seguintes regras (Dacey & Conklin, 2013): (a) não critique as idéias de outro. Isso quebra o fluxo de pensamento criativo; (b) tenha tantas ideias quanto você puder; (c) não fique elaborando as suas idéias. Registre-as da forma como elas lhe vieram à mente; (d) idéias malucas, engraçadas, ou mesmo muito simples são bem vindas. Às vezes, essas idéias são as melhores; (e) inspire-se nas ideias dos seus colegas. Muitas vezes, as sugestões de outras pessoas podem nos ajudar a ter ideias interessantes; (f) mantenha um registro de suas idéias. Você pode querer voltar para o que você estava pensando e, (g) comece a julgar as suas sugestões somente quando você não conseguir pensar em mais ideias.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de situações que podem ser exploradas com o uso do *brainstorming.*

Exemplo 1

A situação descrita neste exemplo pode ser desenvolvida com alunos no início do processo de escolarização, a fim de estimulá-los a pensar nas diversas formas de representação de uma determinada quantidade. Esta situação foi proposta por Dacey e Conklin (2013) para estimular a geração de ideias por parte dos estudantes, isto é, para estimular a sua fluência.

O professor registra um número qualquer no quadro negro e em seguida, distribui alguns materiais sobre as mesas dos estudantes (por exemplo: tiras de papel, lápis e uma variedade de materiais manipuláveis de Matemática). Em seguida, pergunta aos estudantes quantas maneiras eles podem mostrar esse número utilizando os materiais manipuláveis. Peça que compartilhem suas respostas em voz alta e as escrevam em pequenas tiras de cartões para apresentá-las para toda a turma. Depois de alguns minutos, diga aos estudantes que agora eles irão julgar as idéias. Peça para afixarem as tiras no quadro-negro, classificando-as nas seguintes categorias: «bom», «melhor», «excelente». Repita esta atividade usando outro número, mas dessa vez os estudantes trabalharão individualmente e apenas registrarão as suas ideias nos cartões. Em seguida, agrupe-os em pares para compartilhar suas idéias com os parceiros e registrar as novas idéias da forma como elas lhes vierem à mente. Uma vez que o tempo está finalizado, os estudantes deverão categorizar suas idéias em bom, melhor, excelente. Finalmente, os estudantes compartilham suas melhores idéias com a classe e poderão trocar os seus cartões de categorias, caso julguem necessário, de modo que ao final, apenas uma ou duas ideias permaneçam na categoria excelente. Após essa atividade, peça para que os estudantes apresentem as ideais que eles consideram mais úteis entre as classificadas como excelentes e, por fim, a solução pode ser escolhida.

Exemplo 2

O exemplo que será apresentado a seguir foi proposto por Sternberg e Grigorenko (2003) para estimular os estudantes a questionar, a levantar dúvidas e analisar suposições. Trata-se de uma atividade que pode ser desenvolvida com crianças que já trabalharam com o sistema de numeração decimal e serve para que possam consolidar as aprendizagens desenvolvidas para o uso desse sistema.

Assim, os professores podem encorajar os estudantes a considerarem determinadas características do campo matemático, questionando-as. Nesse sentido, pode-se propor a realização de uma pesquisa com o objetivo de analisar a razão pela qual o sistema de numeração utilizado é o de base 10, solicitando, ainda, que busquem imaginar como seriam as atividades que desenvolvemos caso passássemos a utilizar outra base.

Para desenvolver esta atividade, pode-se inicialmente realizar um *brainstorming* com os estudantes para levantar as suas suposições antes de um trabalho de pesquisa e reflexão. As ideias geradas também poderão ser categorizadas como «bom», «melhor» e «excelente». Os estudantes compartilham suas melhores idéias com a classe e poderão trocar os seus cartões de categorias, caso julguem necessário, de modo que ao final, apenas uma ou duas ideias permaneçam na categoria excelente. Posteriormente à atividade de pesquisa, novamente pode-se realizar um novo *brainstorming*, por meio do qual os estudantes além de apresentarem oralmente as suas ideias, também poderão registrá-las no quadro negro, indicando as melhores explicações para o uso da base 10 e as implicações de utilizar outra base no trabalho com números e operações.

Exemplo 3

Este exemplo trata-se de um item de um teste de criatividade em Matemática elaborado por Haylock (1985, 1986) e também pode ser utilizado com estudantes da escola primária. Em sala de aula, este exemplo poderá ser trabalhado com o uso da técnica do *brainstorming* para estimular a geração de ideias e, ao final da atividade, para escolher aquela que pode ser considerada a mais original entre todas e não a melhor solução.

O professor deve solicitar aos estudantes que considerem os números inteiros de 2 a 16 (inclusive o 2 e o 16) e que registrem os diversos subconjuntos que puderem estabelecer envolvendo estes números, indicando a regra para a formação de cada um deles, isto é, indicando as características que os números possuem e que fazem com que possam estar em um mesmo subconjunto.

Neste caso, ao invés de categorizar as ideias apresentadas como «bom», «melhor» ou «excelente», o professor poderá estimular os estudantes a criar outros tipos de classificação. Consideramos oportuno chamar a atenção dos estudantes para categorias que englobam os subconjuntos em função das suas características comuns, porexemplo:subconjuntos com divisores, subconjuntos com múltiplos, subconjuntos com números pares, subconjuntos com números ímpares e etc.

Exemplo 4

O exemplo que será apresentado a seguir foi elaborado por Sharma (2014) e faz parte de um conjunto de itens de um teste de criatividade em Matemática. No contexto da sala de aula, esta atividade visa estimular os estudantes a perceber regularidades na composição dos números e, após identificá-las, gerar muitos exemplos semelhantes aos que foram apresentados.

O professor pode registrar no quadro negro os seguintes números: 3902 — 51062 — 7250. Em seguida, solicita aos estudantes que listem todas as características comuns dos números apresentados. Depois, pede para que escrevam tantos números quanto puderem que tenham características comuns às dos números apresentados.

O *brainstorming* pode favorecer a instalação de um clima de confiança e segurança para que os estudantes trabalhem em suas ideias, criando números com as características solicitadas a partir da inspiração nas ideias dos seus colegas. Além disso, o momento do *brainstorming* pode ser uma oportunidade interessante para que os estudantes desenvolverem a sua capacidade de persuadir, convencer, argumentar e defender as suas ideias.

Exemplo 5

Esta atividade tem por finalidade estimular o desenvolvimento de habilidades para fazer estimativas. A atividade pode ser iniciada apresentando a estratégia, dizendo: «A estratégia que eu vou usar hoje é estimativa. Nós iremos utilizá-la para... Ela é útil porque... Quando nós estimamos, nós...».

Em seguida, o professor solicita aos estudantes que estimem o número de lápis que existe em uma escola. Peça que compartilhem suas respostas em voz alta e as escrevam em pequenas tiras de cartões para apresentá-las para toda a turma. Depois de alguns minutos, diga aos estudantes que eles agora irão julgar as idéias. Peça para eles afixarem as tiras no quadro-negro, classificando-as nas seguintes categorias: «bom», «melhor», «excelente». Caso eles encontrem dificuldades para apresentar sugestões, provoque-os a pensar em estratégias de estimativa, começando por estimar o número de estudantes por série/ano escolar, até chegar a um número considerado razoável. Estimule-os a considerar que outras pessoas, além dos estudantes, também estão na escola (professores, diretores etc.). Também devem incluir uma média de lápis por pessoa, caso considerem que cada um tem mais do que um lápis.

O *brainstorming*, nessa atividade, pode favorecer a imaginação, a suposição, a invenção, a descoberta e a formulação de hipóteses.

Outros problemas interessantes (Sternberg & Grigorenko, 2003) para serem analisados a partir da técnica de *brainstorming*:

(a) Os professores podem, por exemplo, estimular os estudantes a imaginarem usos da Matemática nos esportes.

(b) Os professores podem incentivar os estudantes a contemplarem quais seriam os efeitos sobre a sociedade se a Matemática subitamente desaparecesse do cenário contemporâneo.

(c) Os professores podem pedir aos estudantes que digam quais seriam os efeitos sobre a sociedade se todas as pessoas começassem a utilizar somente números romanos em qualquer cálculo matemático.

Considerações finais

Além do uso do *brainstorming*, outras técnicas de criatividade poderão ser utilizadas e criadas. Ressalta-se que o emprego destas técnicas não garante por si só o desenvolvimento da criatividade, sendo necessário criar um ambiente de confiança e de aceitação de idéias para que os estudantes se sintam motivados a se envolvam com as tarefas propostas.

Para estimular a criatividade devemos estar atentos às experiências que os estudantes já vivenciaram, buscando identificar fatores que provocaram estímulos positivos e negativos em relação à Matemática e como estes agem na construção de uma representação positiva da mesma. Devemos investigar o currículo a fim de examinarmos se sua estruturação faz um apelo à criatividade matemática e se sua forma de organização privilegia os processos criativos ou os de memorização. Devemos ainda, investir na formação dos professores para que também possam desenvolver a sua criatividade, para então, estimular o desenvolvimento da criatividade em seus estudantes.

Para finalizar, citamos Polya (1994), que nos diz que «o problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e colocar em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta» (p. V).

Nota

[1] O nome da técnica é um acrônimo originado das iniciais de sete operadores que a compõem: Substituir, Combinar, Adaptar, Modificar, Procurar outros usos, Eliminar e Rearrumar, visando explorar de diferentes maneiras a transformação de um objeto, sistema ou processo.

Referências

Alencar, E. M. L. S. (1990). *Como desenvolver o potencial criador: uma guia para a liberação da criatividade em sala de aula.* Petrópolis: Vozes.

Alencar, E. M. L. S.; Fleith, D. S. (2003). *Criatividade: múltiplas perspectivas* (2.ª ed.). Brasília: Editora da Universidade de Brasília.

Cropley, A. J. (1997). Fostering creativity in the classroom: General principles. In M.A. Runco (Ed.) *Creativity research handbook* (Vol. 1, pp.83–114). Cresskill, N. J.: Hampton Press.

Dacey, J& Conklin, W.(2013). *Creativity and the standards.* Huntington Beach: Shell Education.

Gontijo, C. H. (2007). *Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática de alunos do ensino médio.* Tese de Doutorado. Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília.

Haylock, D. W. (1985). Conflicts in the assessment and encouragement of mathematical creativity in school children. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 16*, 547–553.

Haylock, D. W. (1986). Mathematical creativity in school children. *The Journal of Creative Behavior, 21*, 48–59.

Mann, E. L. (2005). *Mathematical creativity and school mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle schools students.* Tese de Doutorado, University of Connecticut, Storrs.

Polya, G. (1994). *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático.* Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2.ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência.

Sarduy, A. F. L. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana: Editorial Pueblo e Educación.

Sheffield, L. J. (2003). Using creativity techniques to add depth and complexity to the mathematics curricula. Disponível em http://euler.math.ecnu.edu.cn/earcome3/sym1/ EARCOME3_Sheffield_Linda_Sym1.doc.

Sternberg, R. J. & Grigorenko, E. L. (2004). *Inteligência plena: ensinando e incentivando a aprendizagem e a realização dos alunos.* Porto Alegre: Artmed.

Sharma, Y. (2014). The Effects of Strategy and Mathematics Anxiety on Mathematical Creativity of School Students. *Mathematics Education*, 9(1), 25–37.

Cleyton Hércules Gontijo
Universidade de Brasília – Brasil

Viagem pela criatividade

com Jaime Carvalho e Silva

Nesta viagem pela criatividade vamos conhecer a opinião do Professor Jaime Carvalho e Silva, do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, sobre a criatividade matemática ao longo da História, perspetivando implicações para a formação de professores.

Entrevista conduzida por Lina Fonseca (LF)

LF: *A associação da matemática com a criatividade não é natural aos olhos do cidadão comum. No entanto qualquer pessoa a associa facilmente, por exemplo, com a literatura, a pintura, a música ou a dança. Que razões podem sustentar esta situação?*

JCS: Infelizmente a resposta é fácil. Existe uma ideia errónea, generalizada e por vezes mesmo tenebrosa sobre a própria Matemática, associada à «Ciência dos Números e do Cálculo» que se reconhece ser uma área difícil e exigindo muito trabalho, mas fornecendo poucas coisas novas atualmente, pois praticamente «já foi tudo inventado». Paul Halmos (1916–2006) queixava-se de as pessoas que encontrava não fazerem ideia do que fazia um matemático; diz de uma pessoa que certo dia viajava junto a si num avião: «Se eu lhe digo que sou um matemático, a sua resposta mais provável é que ele próprio nunca conseguiu acertar as contas do seu livro de cheques, e que deve ser divertido ser especialista em matemática. Se o meu vizinho for um cientista (...) ele pensa que eu passo o meu tempo (ou deveria passar) a converter diferentes ordens de grandeza, comparar coeficientes binomiais e potências de 2, ou resolver equações envolvendo taxas de reação.»

Ultimamente muitos matemáticos têm-se desdobrado em iniciativas para desmistificar ideias simplistas sobre a ciência Matemática como os Medalhas Fields Artur Ávila (o primeiro Medalha Fields brasileiro, de 2014) e Cédric Villani (francês, medalhado em 2010). Recentemente Artur Ávila participou numa Feira Literária no Brasil como «uma oportunidade para diminuir o medo que a matéria provoca no público em geral» (FLIP, Paraty, 2015). Numa das entrevistas que concedeu afirma claramente: «A matemática é uma atividade criativa assim como outras expressões artísticas como a música, a literatura e a dança» (entrevista à Agência Brasil, 4/7/2015) e «As partes mais difíceis de um trabalho matemático são as que envolvem a criatividade, que o levam a fazer uma descoberta que está fora, obviamente, das regras básicas.» (entrevista à REVISTA FAPESP, ed. 223, 2014). Cédric Villani tem-se desdobrado em intervenções públicas e tem uma página na internet extremamente rica e com muito para ler e refletir — http://cedricvillani.org/.

No texto «Plant your math and let it grow», o autor defende que o trabalho de um matemático «não é apenas de provar coisas; mais geralmente é o de fornecer uma melhor compreensão, e isto pode também depender de um novo ponto de vista» e «é sempre (ou quase sempre) bom ser curioso». Numa intervenção na RSA (Royal Society for the encouragement of Arts, Manufactures and Commerce) intitulada «Where does creativity come from?» aponta claramente que «ninguém realmente sabe como aparece uma ideia», mas que existem condições que favorecem o aparecimento de ideias, tendo uma importância determinante a motivação, ao mesmo tempo que chama a atenção para um problema muito grave: «As pessoas que pensam que a falta de motivação é a maior ameaça para a Ciência na Europa», trazendo assim para a arena pública os problemas da falta de motivação dos jovens pelas atividades científicas. Também chama a atenção para a ideia linear errada que o público tem da ciência, sendo esta na realidade um processo «very messy, very tricky» e «crazily complicated».

Já o grande matemático e pedagogo português José Sebastião e Silva (1920–1972), para contrariar a ideia de que «ciência e poesia são dois polos contrários» citava Antero de Quental com o seguinte e significativo extrato, transcrito no seu modelar «Guia para a utilização do Compêndio de Matemática»:

«O chão sobre que assenta a *certeza* de hoje, formou-se pelas aluviões sucessivas da *intuição* antiga. O que é ciência foi já poesia: o sábio foi já cantor, o legislador poeta; e a evidência uma adivinhação, um admirável *palpite*, cujas profundas conclusões são ainda o espanto, e porventura o desespero das mais rigorosas filosofias. E, se nadamos hoje em plena luz da razão, foi entretanto a poesia, foi essa doce mão que nos guiou por entre o pálido crepúsculo dos velhos sonhos. Velhos? Não: sonhos eternos» (Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2°–3° vol., ed. GEP, p. 127).

LF: *Se a matemática é criativa, que evidências da criatividade apresenta a história da matemática?*

JCS: Aqui temos de nos entender sobre o que significa ser criativo. Para mim a criatividade tem a ver com os novos caminhos na resolução de problemas matemáticos ou na criação de estruturas matemáticas que saiam dos métodos e técnicas antes conhecidos. Uma resolução de um problema, por muito difícil e trabalhoso que seja, que consista na mera aplicação direta de uma técnica conhecida, não envolve criatividade; uma resolução de um problema onde nenhuma técnica conhecida permita obter uma solução e em que é preciso encontrar um caminho novo, uma técnica nova, uma formulação nova do próprio problema, isso revela criatividade. Assim, todas as descobertas da História da Matemática revelam criatividade. Arquimedes foi criativo ao tentar calcular o valor aproximado de PI através do enquadramento da medida da área do círculo entre as medidas das áreas de dois polígonos com um número suficientemente grande de lados concluindo que PI está entre 3 1/7 e 3 10/71. Pedro Nunes foi criativo ao inventar o Nónio para melhorar a exatidão das medições com instrumentos. Scipione del Ferro foi criativo ao ser o primeiro a obter uma fórmula resolvente para certas equações polinomiais do terceiro grau. Al-Khwarizmi foi criativo ao encontrar métodos aproximados para resolver todas as equações polinomiais do terceiro grau com soluções reais. Cantor foi criativo ao criar uma abordagem nova da contagem do número de elementos de um conjunto infinito quando tentava resolver um outro problema. E poderia continuar longas horas a enumerar exemplos.

LF: *Há ramos da matemática mais criativos? Por que razão(ões) isso acontece? A criatividade em matemática tem sido uma constante ao longo da história da humanidade ou houve períodos de maior criatividade?*

JCS: A análise dos momentos ou áreas de maior ou menor criatividade já é mais difícil de fazer. Não creio até que a criatividade dependa das diversas áreas da Matemática ou do tipo de problemas abordados, mas antes do estado de desenvolvimento dessas áreas e dos estímulos que recebe do exterior. Por exemplo, a Teoria dos Números (a área da matemática que estuda os números inteiros e suas propriedades) sempre despertou interesse dos matemáticos ao longo da história, desde Euclides que provou que há uma infinidade de números primos, até à atualidade em que os códigos criptográficos baseados nas propriedades dos números primos são a base das comunicações secretas modernas. Mas não podemos dizer que o interesse pela área tenha sido constante. Surpreendentemente, em muitos cursos superiores hoje nem sequer existe uma disciplina de Teoria de Números. Quando existe um estímulo específico, aparecem mais descobertas, sendo exemplo a instituição da Casa da Sabedoria em Bagdade entre os séculos IX e XIII, ou a criação de institutos de investigação como o brasileiro IMPA do Rio de Janeiro, onde estudou o Medalha Fields Artur Ávila. É sempre imprevisível o momento de resolução de um novo problema (como o célebre último Teorema de Fermat que demorou 300 anos a ser resolvido) ou a criação de uma nova área (como a Geometria Fractal, que esteve mais de 100 anos a germinar desde exemplos como o Floco de Neve de von Koch até ao estudo do conjunto de Mandelbrot que levou este último matemático a criar a Geometria Fractal). Mas um estímulo à Ciência e à Investigação produz sempre frutos de consequências por vezes retumbantes. E a sua ausência pode ser nefasta, como sabiamente escrevia Sebastião e Silva: «Um ensino das ciências, que não seja acompanhado de uma boa educação estética e que não fale à imaginação dos alunos, está condenado a priori pela sua própria aridez, a afastar muitos dos melhores talentos. Por isso acontece, especialmente entre nós, que muitos se voltam para outros interesses» (ibidem, p. 129).

LF: *Pensando nas ideias matemáticas e no modo como podem surgir — descobertas defendem uns, obviamente inventadas dirão outros — que papel estaria destinado à criatividade em cada uma destas correntes filosóficas? Numa perspetiva absolutista da matemática parece difícil encontrar lugar para a criatividade ...*

JCS: Não me parece que o platonismo, o logicismo (formalismo) ou o intuicionismo (construtivismo) sejam perspetivas absolutistas ou não reconheçam a criatividade; o mal está em transcrições apressadas do platonismo, do logicismo ou de qualquer outra teoria filosófica para a sala de aula, sugerindo que primeiro se deve dominar «tudo» o que é conhecido antes de se começar a tentar «descobrir» o que não é conhecido, esquecendo-se que a própria Matemática não evoluiu desse modo. Philip Davis e Reuben Hersh até comentam que «o matemático típico é tanto um platonista como um formalista — um platonista secreto que põe uma máscara de formalista quando é caso disso». (A experiência Matemática, Gradiva, 1995, p. 302)

O medalha Fields Artur Ávila contraria mesmo radicalmente essa ideia ao dizer que «Em matemática, é possível avançar sem ter um conhecimento mais profundo da literatura. É mais importante ter uma compreensão bem precisa das coisas fundamentais» ou ainda que «Conheço bastante coisa porque já resolvi muitos problemas. Muitas vezes começo a trabalhar numa área já fazendo pesquisa antes mesmo de estudar essa área. Antes de estudar, tento resolver um problema» (entrevista à Agência Brasil, 4/7/2015).

Se um programa escolar valorizar a resolução de problemas, como em quase todos os países do mundo (uma das estranhas exceções é Portugal), então está-se a valorizar o caminho do conhecido para o desconhecido, seguindo-se essencialmente o caminho que o matemático George Polya tornou claro: «Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Tais experiências, numa idade susceptível, poderão criar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, uma marca indelével na mente e no carácter» (Como resolver Problemas, Gradiva, 2003).

LF: *Parecendo a criatividade essencial para a matemática e tendo a quase totalidade dos cidadãos frequentado a escola e estudado matemática, como se pode explicar então o facto de não se associar a criatividade também à matemática?*

JCS: A criatividade está efetivamente praticamente ausente da aula de Matemática em Portugal e noutros países e esta é uma das causas da má imagem da própria Ciência Matemática. Se se acha normal que um estudante brilhante possa produzir uma obra literária premiada, mesmo no Ensino Básico, já o estímulo à investigação em Matemática está ausente de muitos programas escolares, sendo mesmo excluída nalguns como é o caso das atuais Metas de Matemática em Portugal. Quando existe uma perspetiva tão redutora da Matemática, não nos podemos admirar de a ciência ser tão pouco valorizada. Se é verdade que atualmente já se estimula mais um pouco a atividade Matemática dos estudantes do que há 50 anos atrás, com a visibilidade que têm competições como as Olimpíadas de Matemática, também é verdade que os concursos de cálculo mental têm mais visibilidade do que, por exemplo, o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos onde a criatividade na descoberta de estratégias ganhadoras é muito mais determinante para se ser vencedor.

Estamos de qualquer modo muito distantes de um ensino que proporcione «uma primeira ideia de como se pode fazer investigação, que proporciona a aventura do espírito e a conhecer as emoções — alegrias e desenganos», como Sebastião e Silva refere a propósito de um aluno do ano final do Ensino Secundário, do então Liceu D. João de Castro, que foi encorajado a prosseguir as suas próprias investigações (ibidem, p. 147).

LF: *Este aspeto leva-nos à formação de professores que ensinam matemática. A criatividade não devia ser aspeto a realçar durante a formação (inicial, contínua ou pós-graduada)? E é? Por que razão isto acontece?*

JCS: Efetivamente, um professor que não seja minimamente criativo não irá conseguir estimular a criatividade em terceiros. Um dos problemas atuais tem a ver com o estudo algo redutor das principais áreas da Matemática (Álgebra, Análise e Geometria) na formação inicial de professores onde se estudam as teorias tal como estão estruturadas hoje, não como foram sendo estruturadas ao longo de tempo ou que problemas foram tentando resolver. Como muito bem assinalava Sebastião e Silva:

«na logificação da análise, perde-se um elemento precioso, sem o qual é impossível qualquer progresso na ciência: *o dinamismo da intuição criadora*. Por isso mesma, é de toda a conveniência que, *na fase inicial da investigação*, bem como na fase *heurística do* *ensino*, e nas *aplicações concretas*, se continue a usar a linguagem intuitiva, embora contraditória, dos infinitésimos, como se pode ver claramente a propósito dos integrais. Se não se proceder assim, corre-se o grave risco de criar sucessivas gerações deformadas mentalmente, inibidas de criar, por uma preocupação intempestiva de rigor lógico.» (ibidem, p. 70).

Ou seja, falta mais História da Matemática , faltam mais Seminários de Investigação e Resolução de Problemas, falta o Desenvolvimento de Projetos Aplicados e Computacionais em Matemática. Ensina-se muito sobre a estrutura atual, mas não se ensina como se chegar a essa estrutura nem as técnicas que permitem melhorar essa estrutura, muito menos os avanços e recuos que permitiram chegar onde se está hoje. E, pior, não se estimula a imaginação criadora, como também muito bem assinalava Sebastião e Silva no livro já citado: «uma das graves deficiências do ensino tradicional, sobretudo entre nós, é a de não falar à imaginação dos alunos» (ibidem, p. 149).

LF: *A formação remete para outro aspeto que é o de saber se se pode ensinar alguém a ser criativo.*

Nasce-se criativo ou pode aprender-se a ser criativo? Se se aprende, em que ambientes pode ocorrer essa aprendizagem? Como é que a criatividade pode entrar na sala de aula? Como se espera que professores que ensinam matemática possam desenvolver a capacidade criativa dos seus alunos, já que hoje em dia se procura criatividade e inovação? Como podem manifestar-se se não forem desenvolvidas?

JCS: A Ciência Neurológica está sempre a descobrir aspetos novos do funcionamento do nosso cérebro, sendo difícil dizer o que é inato e o que não é. O próprio trajeto de vida dos Matemáticos e outros Cientistas é tão díspar que não podemos dizer com certeza como se forma um Matemático ou um Cientista. Mas podemos observar que os estímulos externos têm uma influência grande e que a ausência de estímulo positivo faz com as atividades mudem de rumo, por vezes de forma dramática. Citando mais uma vez Sebastião e Silva: «A criação científica tal como a criação artística, não obedece a regras.» (ibidem, p. 134). Cédric Villani, na conferência já citada, enumera 7 condições necessárias para favorecer o aparecimento de ideias novas:

1) documentação (acesso ao conhecimento já estabelecido)
2) motivação (para resolver problemas novos)
3) ambiente (que estimule a criatividade)
4) comunicação (com outros criativos)
5) restrições (que forçam a ultrapassar o obstáculo)
6) mistura de inspiração e trabalho meticuloso
7) mistura de sorte e tenacidade

Podemos dizer que estas 7 condições deverão também ser contempladas em ambiente educativo se pretendemos estimular a criatividade; aliás Cédric Villani dá um exemplo de um grupo de crianças de 10 anos, juntamente com alguns investigadores seniores, que viram o seu trabalho publicado numa revista científica e que viram «quão motivador e divertido isto é».

Termino chamando a atenção para um projeto que decorre em França há já bastante anos chamado «Math.en.jeans» (Matemática em jeans) cujo lema é «Ne subissez pas les maths, vivez-les !» (Não sofram a matemática, vivam-na!). Os seus objetivos são os de criar condições para e apoiar a «geminação entre um matemático e estabelecimentos escolares, a fim de colocar os jovens em situações de investigação, permitir que os alunos e também os seus pais criem uma outra imagem da matemática que não a de disciplina seletiva ou campo científico estrito e acabado.» No fim de um ano letivo todos os jovens apresentam os seus trabalhos num congresso e são incitados a redigir esses trabalhos sob forma de publicação que são colocados em linha na página da associação:

http://www.mathenjeans.fr/Congres

Os títulos dos trabalhos dos alunos são significativos: «Decomposição de polígonos com a mesma área», «Poliedros regulares», «Brincar com as velas», «Partilha de um bolo», «Número de ocorrências de triângulos em mosaicos», «Triângulos equilibrados», «As 7 figuras mágicas», «Tabuleiro de xadrez igualitário de Hadamard», «atchoum ou blabla», «Questão de vida ou de morte: autómato celular», etc., etc., etc..

Porque não em Portugal?

Notas

[1] George Polya assinala, acertadamente que «a matemática em criação apresenta-se como uma ciência indutiva, experimental».

[2] Sebastião e Silva escreveu, algo profeticamente: «Na verdade, a uso dos computadores tem vindo a acentuar a importância do método experimental na investigação matemática, permitindo aperfeiçoar processos ou mesmo abrir caminhos inteiramente novos» (ibidem, p. 90).

Entrevista conduzida por Lina Fonseca
Escola Superior de Educação do IPVC

Alunos em ação no Congresso Matemático: Relato de uma experiência

Teresa Pimentel

Introdução

Os desafios não são uma ideia nova em matemática. A construção e organização do conhecimento matemático e a exploração de novos conceitos baseia-se na descoberta de padrões e consequente emergência de novos desafios ao talento. Este processo de aquisição de conhecimento pode ocorrer de muitas formas, dentro e fora da sala de aula. Alguns ambientes de aprendizagem da matemática fora da sala de aula são defendidos como motivadores e desafiantes para alunos com especial talento, que de outro modo ficaria desconhecido ou mesmo desapareceria, mas também dando a oportunidade de apreciar a matemática a alunos que, por vários factores, não se sentem particularmente motivados para a disciplina e nunca puderam sentir a sua beleza (Kenderov *et al.*, 2009). Lançar desafios aos alunos em qualquer nível de desenvolvimento pode evitar emoções negativas em relação à matemática (Hannula, 2004) mas é também importante para desenvolver a capacidade de resolução de problemas e a criatividade (Protasov *et al.*, 2009; Silver, 1997).

Neste sentido, há já alguns anos foi lançado, na Escola Secundária de Santa Maria Maior em Viana do Castelo, o projeto denominado Congresso Matemático, que pretende, entre outros, criar um espaço lúdico de encontro informal ligado à aprendizagem da matemática, promover a capacidade de argumentação e comunicação matemática dos alunos, aprofundar o conhecimento sobre processos e tópicos matemáticos através da necessidade de exprimir raciocínios e de seguir linhas de raciocínio, desenvolver a criatividade na resolução e formulação de problemas, valorizar e apreciar o trabalho dos alunos e desenvolver a autonomia. É uma iniciativa aberta a toda a comunidade escolar, que se realiza atualmente três vezes por ano em tardes em que não há aulas, reservadas para trabalho colaborativo e atividades com alunos para além da sala de aula.

O Congresso Matemático consiste essencialmente em apresentações orais feitas por alunos ou grupos de alunos da sua resolução de problemas previamente conhecidos, mas permite outras intervenções. Nos seus princípios está estabelecido que esta iniciativa, mais do que dirigida aos alunos, deve ser construída pelos alunos. Temos procurado, ao longo da experiência, dar resposta às questões sobre o formato, as tarefas e as atitudes dos professores que melhor podem motivar a participação dos alunos e desenvolver capacidades de resolução de problemas e de comunicação matemática.

Criatividade e comunicação

Silver (1997) argumenta que a Matemática é uma das áreas do pensamento humano em que a criatividade mais se manifesta, mas defende que, contrariamente à visão tradicional, ela não é apenas caraterística inata de alunos especialmente talentosos ou génios. A criatividade pode ser experimentada e ensinada a todos, o que poderá ser realizado através de um ensino rico em tarefas de resolução e formulação de problemas. Nesse percurso, que começa com a curiosidade, o aluno envolve-se e, usando a imaginação, pode gerar diferentes formulações ou resoluções. É de realçar (Presmeg, 2014) a importância da necessidade de períodos de concentração e incubação antes do momento «Aha!» que dá a sensação de certeza de descoberta de um caminho para a solução.

Procuramos ter em vista as três componentes fundamentais da criatividade: fluência, flexibilidade e originalidade (ver artigo desta revista nas pp. 10–11) na seleção das tarefas a propor aos alunos com vista à sua apresentação no Congresso Matemático.

Aqui a questão da comunicação é essencial. Através da comunicação, os alunos refletem, clarificam e expandem as ideias e compreensão das relações matemáticas e argumentos matemáticos (e.g. Smith & Stein, 2011). A comunicação é um processo fundamental na aprendizagem da matemática. Mas a comunicação não surge naturalmente; é necessário os professores ajudarem os alunos a aprender como fazê-lo. E se é necessário comunicar fora da sala de aula, como no Congresso Matemático, ainda se torna mais imperiosa a necessidade de se fazer compreender e captar a atenção da audiência. O aluno precisa de: (a) organizar ideias e refinar ou rever estratégias; (b) usar recursos orais, visuais ou outros — tecnologias, materiais concretos. Para isso, tem de usar a criatividade quer na apresentação quer na resolução dos problemas.

O Congresso

O projeto Congresso Matemático, dirigido a todos os alunos da escola, dura há 6 anos e já teve 21 edições. A equipa envolve todos os professores de Matemática da escola, que procuram incentivar os seus próprios alunos à participação. O formato do evento foi sofrendo alterações ao longo do tempo para melhor dar resposta aos interesses e necessidades dos participantes. Procura-se sempre uma maior participação e envolvimento dos alunos. Os professores estão presentes no congresso mas normalmente não intervêm. Ultimamente, antes de cada congresso e mediante interesse demonstrado pelos próprios alunos, um grupo de 6–8 alunos é convidado para dinamizar o congresso, e, com esse propósito, reúnem-se com a professora coordenadora para organizar e discutir os pormenores. Estes alunos encarregam-se de apresentar a sessão, desenvolvendo um pouco o seu tema; apresentar os colegas ou grupos de colegas que farão a apresentação oral dos seus trabalhos; propor outros desafios mais curtos a serem resolvidos durante o congresso de forma a gerar maior interação entre os participantes; e contar algumas piadas ou adivinhas matemáticas para aligeirar um pouco entre apresentações. Para além deste grupo, o congresso conta sempre com uma equipa técnica, formada por cerca de 4 alunos, que estão encarregados de apoiar o funcionamento de computadores, projeção, som e luz. Esta opção, para além do objetivo imediato, tem o interesse de envolver alunos que à partida não se sentiriam muito motivados a ir ao congresso mas que gostam destas tarefas.

No quadrado inicial, de lado 1, está marcado o ponto médio do lado inferior. Qual é a área do papagaio?

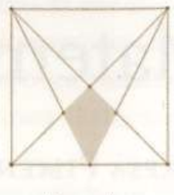


Figura 1. Problema principal do congresso alargado

Recentemente a escola entrou em agrupamento. Surgiu um projeto denominado *Conexões 1–12* com o objetivo de promover uma articulação curricular vertical desde o 1.º ao 12.º ano. Integrada nesse projeto realizou-se uma ação de formação para professores de matemática do agrupamento.

Houve assim oportunidade de lançar e organizar em conjunto um congresso alargado a todos os alunos do agrupamento. Nesse sentido era necessário selecionar tarefas adequadas para esse efeito. Explorou-se então um problema que foi escolhido de modo a ser suficientemente rico e flexível para permitir a sua abordagem por alunos de diferentes níveis etários.

Apresentamos, na Figura 1, o problema principal do congresso alargado e de seguida algumas resoluções, na sua maioria apresentadas no congresso pelos seus autores.

A resolução do 1.º ciclo, apresentada por alunos do 2.º ano, foi preparada com o apoio dos respetivos professores, que decidiram em conjunto adaptar o quadrado a uma grelha de 6×6 de forma a tornar o problema acessível a alunos tão pequenos (Figura 2).

Os alunos tiveram oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos como propriedades de figuras geométri-

Figura 2. Resolução com apoio de grelha (2.° ano)

cas, os números racionais, áreas de figuras. Depois duma exploração aprofundada que incluiu a decomposição do papagaio em triângulos e a comparação de áreas descobriram por fim que o papagaio ocupava o equivalente a 3 quadradinhos em 36.

Um grupo do 7.° ano[1] fez uma abordagem através da instalação do quadrado numa grelha de 12×12 que pode ver-se na Figura 3.

Estabeleceram relações entre áreas e, aceitando visualmente que a altura do triângulo assinalada na figura é de 4/12, calcularam a sua área através da fórmula, o que lhes permitiu de seguida concluir sobre a área do papagaio.

Um grupo do 8.° ano[2] recorreu à semelhança de triângulos, como é ilustrado na Figura 4.

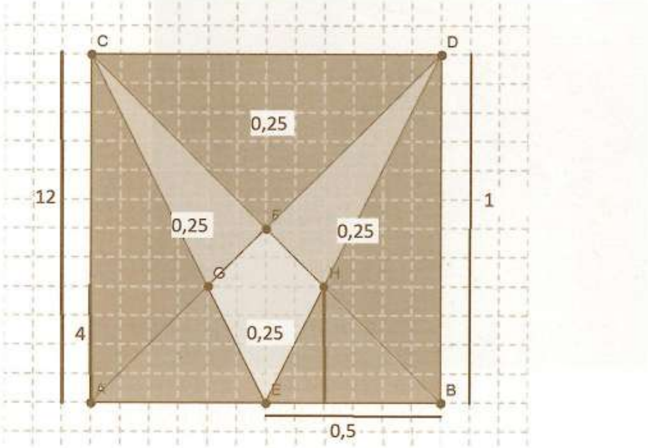


Figura 3. Resolução com apoio de grelha (7.° ano)

Realçaram o facto de a diagonal do quadrado estar contida na bissetriz do ângulo reto para concluir que a distância de um ponto da diagonal a cada lado do quadrado é a mesma. Depois da determinação do valor de x já lhes foi fácil calcular a área do papagaio, em que marcaram as diagonais.

Outra resolução, esta de alunos do 9.° ano[3], recorreu à geometria analítica (Figura 5).

Determinaram uma expressão analítica das funções afins f e g, que definiram à partida, tendo feito em seguida a in-

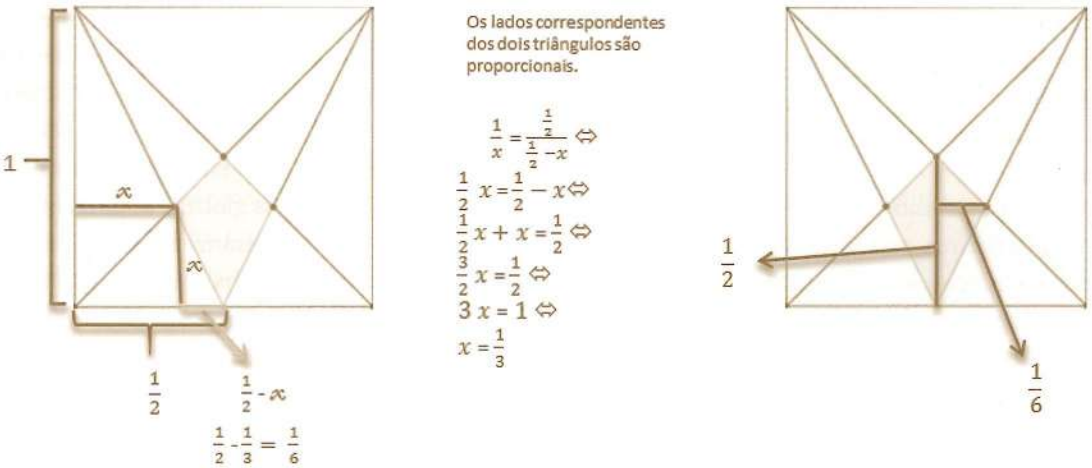


Figura 4. Resolução por semelhança de triângulos (8.° ano)

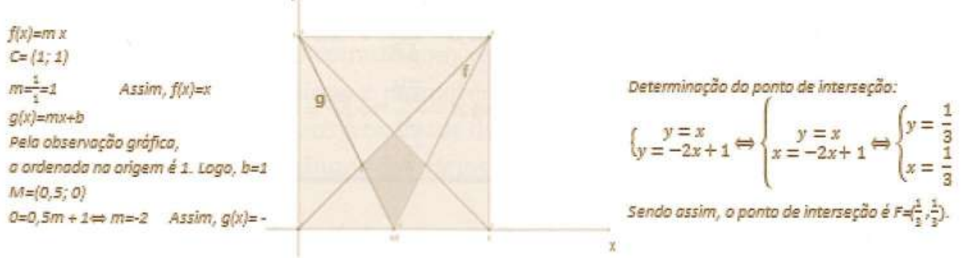


Figura 5. Resolução com geometria analítica (9.° ano)

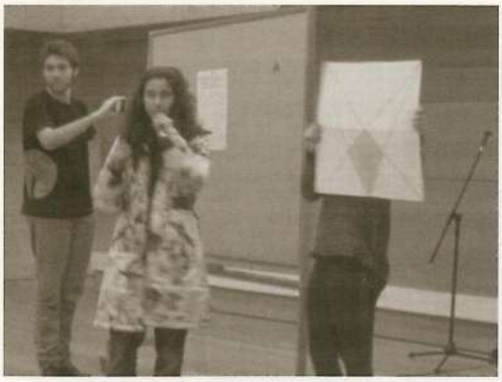


Figura 6. Resolução através de dobragens (10.° ano)

terseção das retas correspondentes para obter as coordenadas do ponto F. A partir daqui determinaram a área do papagaio por decomposição em dois triângulos através da diagonal vertical.

Duas alunas do 10.° ano utilizaram uma cartolina, como se ilustra na Figura 6, para mostrar como tinham raciocinado com base na instalação do quadrado em papel ponteado e dobragem do papel.

Uma aluna do 11.° ano[4] fez questão de usar trigonometria, uma vez que era um tema que tinha aprendido nesse ano e que lhe parecia muito poderoso (Figura 7). Baseou-se no facto de as diagonais do quadrado serem perpendiculares considerando os triângulos retângulos [BDM] e [BEF], o que lhe permitiu, através do cálculo do comprimento de [EF], chegar à área do papagaio.

Apresentam-se de seguida duas resoluções visuais, muito elegantes e originais.

Na primeira, um aluno do 11.° ano[5], utilizando diretamente o conceito de medida de área, procurou saber quantas vezes o papagaio cabia no quadrado (Figura 8).

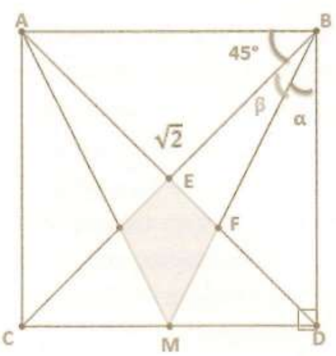
Na outra resolução, o aluno, do 10.° ano[6], «viu» o triângulo formado pelas duas semi-diagonais superiores a refletir-se sobre o lado do quadrado originando um novo papagaio que é uma ampliação do primeiro (Figura 9). Usando o conhecimento de que figuras semelhantes têm os lados proporcionais, estabeleceu a proporção que lhe permitiu tirar o comprimento da diagonal horizontal do papagaio para poder determinar a sua área.

Houve ainda, neste evento, a apresentação pelos dinamizadores (8 alunos do 12.° ano) de pequenos problemas de algibeira e de um puzzle para ser resolvido *in loco* por grupos de voluntários e que teve direito a prémios, uma exibição com material manipulável sobre a tira de Möbius e ainda uma apresentação de uma turma convidada do 8.° ano de uma escola vizinha. Estiveram presentes cerca de 200 pessoas.

Notas finais

Na sua maioria, estas resoluções foram apresentadas pelos seus criadores nas respetivas turmas antes do congresso. Em face das resoluções propostas de antemão pelos alunos é feita uma seleção criteriosa, para evitar, por exemplo, repetição de abordagens, e são ordenadas de acordo com as ferramentas matemáticas utilizadas, e por níveis progressivos de abstração e rigor, em consonância com o modelo proposto por Smith e Stein (2011), com vista à apresentação no congresso. Verificamos que um único problema tem potencial para ser explorado de uma grande variedade de modos diferentes, e é acessível a alunos de diferentes níveis etários e de conhecimento. Os participantes no congresso puderam contatar com diferentes abordagens e representações do mesmo problema, desenvolvendo assim a capacidade de fazer conexões entre grandes ideias, o que proporciona uma visão mais global e abrangente da matemática. As conexões, que surgiram em número elevado e com grande força, implicam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos em jogo (Hiebert & Carpenter, 1992).

A fluência e a flexibilidade podem ser desenvolvidas, em cada aluno, não só pelas tentativas de resolução do proble-



Seja α o ângulo MBD e β o ângulo CBM, tem-se:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{MD}}{\overline{BD}} \;;\; \overline{MD} = \frac{1}{2} \;\; e \;\; \overline{BD} = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\beta = 45° - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\tan\beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}} \;\; e \;\; \overline{EB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\beta = \frac{\overline{EF}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan\beta$$

Figura 7. Resolução com trigonometria (11.° ano)

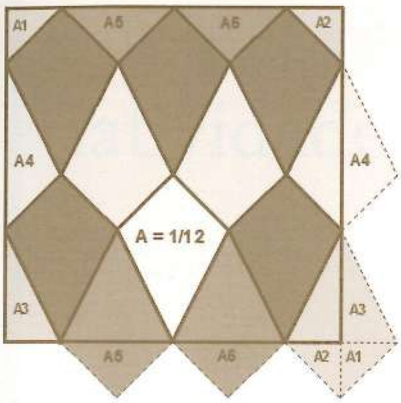


Figura 8. Resolução utilizando o conceito de medida (11.º ano)

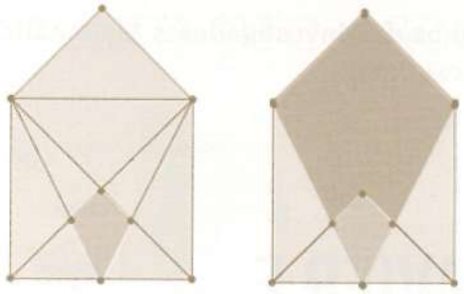


Figura 9. Resolução visual transformando a figura inicial (10.º ano)

ma mas também por apreciação das diferentes estratégias de resolução e múltiplas representações apresentadas, correspondendo a outros tantos modos de pensar. A originalidade é patente quer na descoberta de resoluções únicas quer também nos modos escolhidos para apresentação pública dos trabalhos. Sobretudo as duas últimas resoluções apresentadas acima têm um grau de originalidade muito elevado, facto que foi corroborado por todos os professores de matemática envolvidos. De facto, nenhuma destas resoluções era expectável, nem mesmo no espaço-solução dos professores.

Os alunos sentem-se bem no congresso, e esta conclusão é suportada pela grande afluência livre em tardes em que não há aulas. A responsabilidade por uma apresentação pública no congresso matemático fá-los sentir orgulhosos das suas capacidades, quer matemáticas quer comunicacionais. Inquéritos e entrevistas que têm vindo a ser realizados mostram que os alunos consideram o congresso matemático como uma das atividades interessantes em que têm participado na escola, que pode prepará-los para futuros desafios, e que deixa(rá) uma marca positiva que recordarão depois de sair da escola.

Em suma, esta iniciativa do Congresso Matemático tem revelado potencial para promover a motivação dos alunos para a matemática; desenvolver formas criativas de pensar matematicamente, a fim de encontrar estratégias de resolução diferentes e originais; desenvolver capacidades de comunicação; cultivar o sentido de agrupamento, juntando muitos alunos num projeto comum com vontade de partilhar descobertas matemáticas; e promover a articulação vertical, materializada na transversalidade da resolução de um mesmo problema por alunos dos vários níveis do ensino básico e secundário.

Notas

[1] Rui Dantas, Pedro Forte e Rúben Ribeiro.
[2] Ana Afonso e Paloma Wolfango.
[3] André Neto, Catarina Alcobaça e Pedro Maciel.
[4] Rita Martins.
[5] Ricardo Teles.
[6] Gonçalo Carvalhido.

Referências

Hannula, M. (2004). *Affect in mathematical thinking and learning.* Turku: Turun Yliopisto.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York: Mcmillan.

Kenderov, P., Rejali, A., Bartolini Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom — Sources and Organizational Issues. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom — New ICMI Study Series 12* (pp. 53–96). Springer.

Presmeg, N. (2014). Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving* (pp. 156–167). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Protasov, V., Applebaum, M., Karp, A., Kašuba, R., Sossinsky, A., Barbeau, E. & Taylor, P. (2009). Challenging Problems: Mathematical Contents and Sources. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom — New ICMI Study Series 12* (pp. 11–52). Springer.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3*, 75–80.

Smith, M. & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Teresa Pimentel

Agrupamento de Escolas de Santa Maria Maior

Publicações APM

XAVIER e o Clube dos Investigadores Matemáticos
Paulo Afonso (APM, 2015)

Divulga a APM na tua escola, junto dos colegas de matemática.
Torna a tua escola sócia da APM. Vê as condições no site da APM (www.apm.pt)
ou na contracapa desta revista.

Da resolução de problemas à criatividade num contexto pré-escolar

Conceição Vieira

Introdução

É inegável a importância que a resolução de problemas matemáticos assume em vários setores da nossa sociedade e é uma temática já muito explorada no meio escolar, como essencial para o desenvolvimento integral do aluno. Todavia na educação pré-escolar existe ainda uma «visão equivocada» de que as crianças nesta faixa etária não têm acesso ao «verdadeiro conhecimento matemático por este implicar um elevado nível de abstração» (Miguéis & Azevedo, 2007, p. 13) e por se negligenciar também o facto de as aprendizagens estarem associadas às atitudes que as crianças têm em relação à mesma. A investigação tem mostrado que o desenvolvimento matemático nos primeiros anos é fundamental e o sucesso das aprendizagens futuras está intimamente ligado à qualidade das experiências proporcionadas às crianças (Castro & Rodrigues, 2008). Tem mostrado também que as crianças pequenas revelam «capacidades surpreendentes» (Baroody, 2002, p. 338) no modo como exploram e nas estratégias que mobilizam nas suas experiências matemáticas e que é nesta idade que se deve fomentar a construção de uma atitude positiva em relação a este domínio.

A resolução de problemas faz parte das nossas vidas desde a primeira infância, quando a criança, com a curiosidade que a caracteriza, começa a questionar o mundo e a mobilizar os seus conhecimentos e capacidades e a pensar em estratégias para resolver os problemas do seu quotidiano de um modo criativo. A este propósito, as Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (OCEPE) salientam a transversalidade da resolução de problemas como um meio de construção de conhecimentos e por isso deve ser entendida como um processo presente nas experiências a desenvolver com as crianças. Não se considera a resolução de problemas como um objetivo para chegar a soluções corretas, mas, essencialmente, como um processo no qual a criança aprende a pensar para chegar às suas conclusões, mobilizando para isso várias estratégias, criando várias representações e empenhando-se em processos metacognitivos, para comunicar as suas ideias e o seu pensamento. Neste processo é necessário dar tempo e liberdade à criança para que ela pense nas suas próprias estratégias e as teste. Neste sentido, é oportuno contextualizar a criatividade matemática no âmbito da resolução de problemas. Ao encorajarmos a criatividade, estamos a promover a capacidade que a criança possui de explorar e compreender o seu mundo e de reagir e representar as suas perceções. Estamos a aumentar as oportunidades que tem de estabelecer novas relações, alcançar novos entendimentos e criar novos significados. O processo criativo ajuda as crianças a resolver problemas e a assumir o comando dos mesmos e isso promove a autonomia em termos intelectuais e a autoestima. Crê-se que a aprendizagem da matemática sustentada num ambiente onde se promove a resolução de problemas desenvolve a criatividade, onde as representações são valorizadas, como uma poderosa ferramenta de comunicação, as quais dão sentido e significado às ideias das crianças e ao seu raciocínio. Este texto é suportado na experiência profissional da educadora de infância e no estudo de dois casos (duas crianças) de natureza qualitativa, desenvolvido em interação com um grupo/turma (vinte e duas crianças de 5/6 anos). O seu principal objetivo era analisar e compreender, em contexto natural, a reação e o desempenho das crianças da educação pré-escolar na resolução de problemas matemáticos e as suas relações no desenvolvimento da criatividade.

Resolução de problemas e criatividade

Como refere Duffy (2004) «a criatividade não ocorre no vazio», ou seja, todo o pensamento criativo tem fontes externas, que podem ser remotas ou recentes, conscientes ou inconscientes sendo que a criatividade consiste em «relacionar e reorganizar a informação oriunda destas fontes (...) de uma forma que seja nova e que faça sentido para o indivíduo em questão» (p. 133). Neste seguimento, a mesma autora refere que a criatividade envolve: a capacidade de ver as coisas de uma nova forma; aprender com experiências passadas e aplicar esta aprendizagem a novas situações; resolver problemas recorrendo a abordagens não tradicionais; ir mais além do que a informação que nos foi concedida; criar algo único e original. Muitas coisas que as crianças descobrem e criam passam-nos despercebidas porque não são originais para a sociedade. Esquecemo-nos porém que, apesar de já terem sido criadas e descobertas anteriormente, para as crianças pequenas são factos novos. As crianças estão a ser criativas quando estabelecem uma relação que para elas é nova, quando descobrem abordagens novas ou invulgares aos materiais ou ao problema que estão a investigar, quando correm riscos e estabelecem novas relações.

Não há uma única definição de criatividade mas é consensualmente aceite por muitos autores que a criatividade envolve resolução de problemas, está relacionada com a capacidade de produzir novas ideias e começa com a curiosidade e o envolvimento.

A investigação tem mostrado que há uma relação muito próxima e recíproca entre a resolução e formulação de problemas, principalmente as que envolvem tarefas abertas, e a criatividade (Barbeau & Taylor, 2005; Conway, 1999; Silver, 1997; Vale, 2012).

As tarefas de cunho aberto apelam à exploração e investigação autónoma e à curiosidade permitindo um pensamento divergente, proporcionando processos mentais de ordem superior. Este tipo de pensamento, segundo vários autores (e.g. Conway, 1999; Silver, 1997; Vale & Pimentel, 2011) está na base da criatividade matemática e está associado a três dimensões chave: a fluência, a flexibilidade e a originalidade. Os conceitos teóricos ligados às dimensões da criatividade seguem de perto o texto apresentado nas pp. 10–11 desta revista.

Silver (1997) remete para o professor um papel importante na promoção de um ambiente de sala de aula, que dê oportunidades para pensar através de tarefas desafiantes, abolindo atividades rotineiras e aborrecidas, pois a criatividade só acontece se nos sentirmos atraídos e desafiados pelas situações que nos propõem.

Resolvendo problemas

As tarefas propostas pela educadora no âmbito da resolução de problemas favoreciam comportamentos de maior atenção, mais tempo de empenhamento e raciocínio mais coerente e consistente. Houve a preocupação de as contextualizar com os interesses e motivações das crianças, enquadrando-as nas temáticas e projetos que estavam a ser desenvolvidos, para que não se constituíssem como um elemento intruso, sem significado, mas sim como uma tarefa matemática que promovia a integração curricular e ia ao encontro das suas vivências. A opção por desenvolver as tarefas em grupos mais pequenos tornou-se profícua, pois notava-se um maior investimento e motivação por parte de todas as crianças. O facto de a educadora estar mais atenta a todas, desafiando, incentivando e questionando, fazia com que todas se sentissem mais confortáveis, mais seguras, mais atentas e envolvidas. Também a motivação de algumas crianças era um fator de contágio para as outras. Neste aspeto, também são de realçar as interações criadas entre as crianças, que foram importantes no desenrolar das tarefas, na aquisição de conhecimentos e capacidades e no desenvolvimento de conceitos e processos matemáticos e da linguagem. Mesmo as crianças com mais dificuldades

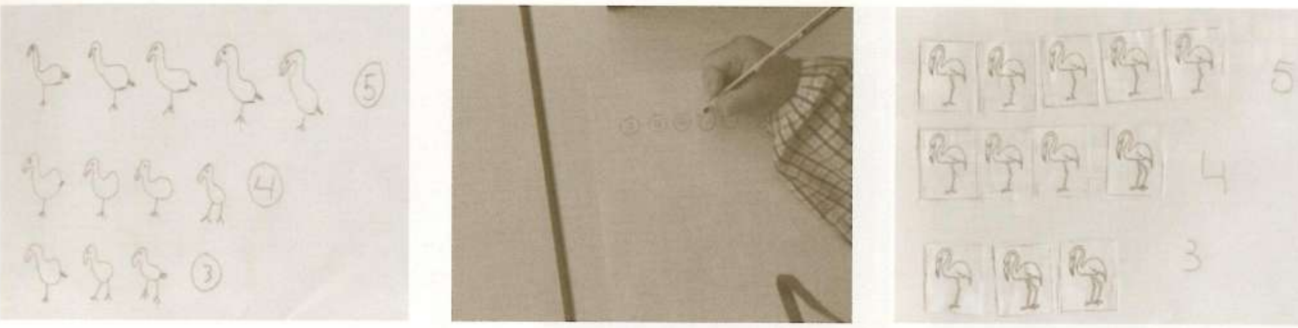


Figura 1.— Representações utilizadas pela Ana na resolução da tarefa «Os flamingos»

se mostravam confiantes, pois as trocas colaborativas faziam com que todos se sentissem importantes no processo de procura e descoberta das soluções. Muitas vezes o erro de umas, apoiado nas questões do «como» e do «porquê», era a alavanca para mudar de lógica e estratégia que levava à procura de soluções mais plausíveis e que melhor satisfizesse as questões. No desenvolvimento das tarefas, pôde-se verificar que as crianças mobilizaram os seus conhecimentos prévios, que muitas vezes foram facilitadores das resoluções e, ao mesmo tempo, o ponto de partida para a apropriação de novos conhecimentos.

Tendo em conta a classificação proposta pelo Grupo de investigação em Resolução de Problemas, GIRP (Fernandes, Lester, Borralho & Vale, 1997), as tarefas apresentadas a seguir enquadraram-se na categoria de problemas de processo, sendo que algumas envolviam o trabalho com padrões. Todas as tarefas seguiram a mesma sequência proposta por Pólya (2003) — compreender o problema; estabelecer um plano; executar o plano; e verificar — que funcionou como fio condutor no decorrer de cada tarefa. Antes de propor a tarefa era destinado um tempo para que as crianças pudessem explorar o material livremente. A apresentação da tarefa era feita oralmente, com o recurso a imagens e/ou ao material. Durante a resolução das mesmas procurou-se estar atenta a todas as crianças, ouvindo atentamente todas as suas ideias e sugestões, questionando, promovendo as representações e desafiando para a extensão do problema a outras situações mais exigentes. Na fase final era promovida a discussão de modo a sintetizar as soluções.

Algumas resoluções da Ana[1]

A tarefa *Os flamingos*

Durante um passeio pelo estuário do rio Tejo pude observar uma família de flamingos. Q1 — Eu contei 5 patas. Quantos flamingos poderiam lá estar? Q2 — E se eu visse 6 patas, quantos flamingos poderiam lá estar?

Nesta tarefa o pensamento flexível foi evidenciado pelas diferentes abordagens que a Ana fez à tarefa, mudando de ideias no processo de busca e resposta ao desafio. Começou por desenhar, tendo interrompido o desenho para dramatizar a situação. Depois, retomou o desenho tendo interrompido novamente para simular a situação com um registo iconográfico (pequenos círculos que representavam os flamingos e algarismos 1 e 2 que representavam o número de patas), que por ser mais rápido (e também mais abstrato) facilitava a comunicação das suas ideias. Esta última foi considerada a solução mais original por não ter sido referida por mais nenhuma criança do grupo. Finalmente acabou o seu desenho tendo representado as três hipóteses possíveis da Q1 (figura 1). Em resposta à Q2, a Ana mobilizou ainda o material disponível para a simulação (imagens de flamingos) apresentando assim, as respostas possíveis da Q2.

A tarefa «Os amigos dão abraços»

Cinco amigos vão-se abraçar uns aos outros, mas cada menino só pode tocar uma vez em cada amigo. Q1 — Quantos abraços vão dar? Q2 — Se fossem 6 amigos quantos abraços dariam?

Nesta tarefa, o pensamento flexível da Ana foi evidenciado pelos diferentes modos de abordar a situação, mostrando que ia mudando de ideias à medida que o seu raciocínio se ia também construindo. Neste processo a Ana sugeriu a dramatização, primeiro numa abordagem de tentativa e erro, tendo depois recorrido à estratégia de simplificação (começar por uma situação mais simples), registou os dados no quadro em lista organizada (tipo tabela), registou no papel fazendo um esquema e uma lista organizada, tendo descoberto que o resultado do termo seguinte se construía com a soma dos dados do termo anterior (meninos e abraços) (e outras particularidades, como por exemplo que cada menino tinha dado quatro abraços). Considera-se este último modo de solucionar o problema original pois não foi dado por mais nenhuma criança do grupo. Também a fluência

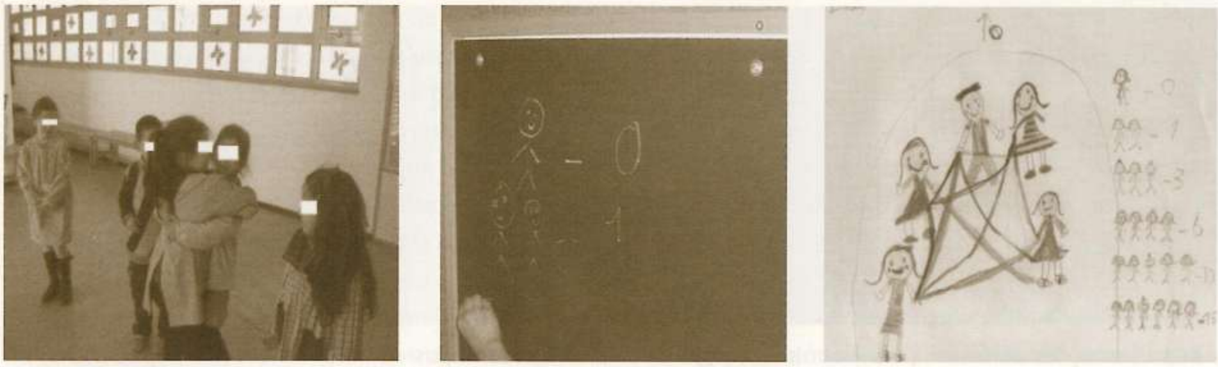


Figura 2.— Representações mobilizadas pela Ana na tarefa «Os amigos dão abraços

foi visível pelo número de respostas diferentes apoiadas em diferentes representações (figura 2).

Algumas resoluções da Maria[2]

A tarefa *Vamos pôr a roupa a secar*

A Joana quis ajudar a sua mãe a pôr a roupa a secar. A mãe deu-lhe seis panos de cozinha para ela estender na corda e pediu-lhe que não gastasse muitas molas. Então, a Joana num pano usou duas molas, mas em dois panos ela usou três molas. Q1 — Quantas molas usou a Joana para os seis panos? Q2 — E para 7? Q3 — E para 10? Q4 — De que outros modos a Joana poderia pôr a roupa a secar?

Nesta tarefa, a Maria, através da simulação da situação com o material, chegou facilmente à solução da Q1, descobrindo o padrão implícito na sequência (mais um) e fazendo uma generalização distante, pelo menos para a sequência numérica sua conhecida. Em resposta à Q2 mobilizou várias abordagens tendo apresentado dois modos diferentes de pôr os panos a secar. Num deles, formulou uma sequência em que o padrão implícito era «mais dois», numa sequência de números ímpares, tendo sido uma resposta apenas dada por si, considerada incomum e, por isso, considerada muito original. No outro, apresentou um padrão de repetição no qual dispôs, alternadamente, os panos na vertical e na horizontal, contando depois o número de molas usadas. Esta solução também foi dada apenas pela Maria. Também nesta tarefa as diferentes abordagens que fez, as tentativas para formular problemas e os solucionar e o número de respostas dadas apoiadas em diferentes representações evidenciam, respetivamente, a flexibilidade e a fluência na resolução desta tarefa (figura 3).

A tarefa *Paus e quadrados*

Com quatro paus iguais consigo fazer um quadrado. Se tiver sete paus consigo fazer dois quadrados. Q1 — Quantos pauzinhos serão precisos para fazer a figura seguinte (ou 3ª)? Q2 — Quantos pauzinhos serão necessários para construir a 4ª? E a 5ª figura?

As várias abordagens reunidas e combinadas pela Maria, na resolução desta tarefa, levaram-na a descobrir o padrão implícito na construção do termo seguinte da sequência, mostrando também a flexibilidade do seu pensamento. Tal como as outras crianças do grupo, também a Maria come-

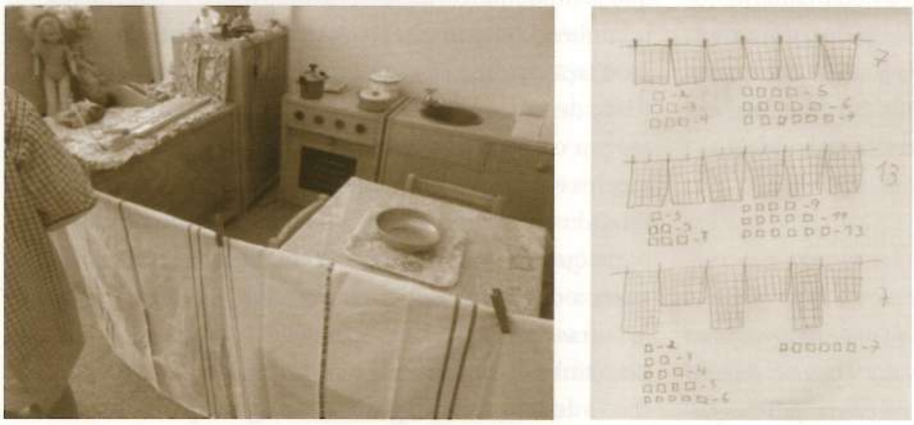


Figura 3.— Representações mobilizadas pela Maria na tarefa «Vamos pôr a roupa a secar»

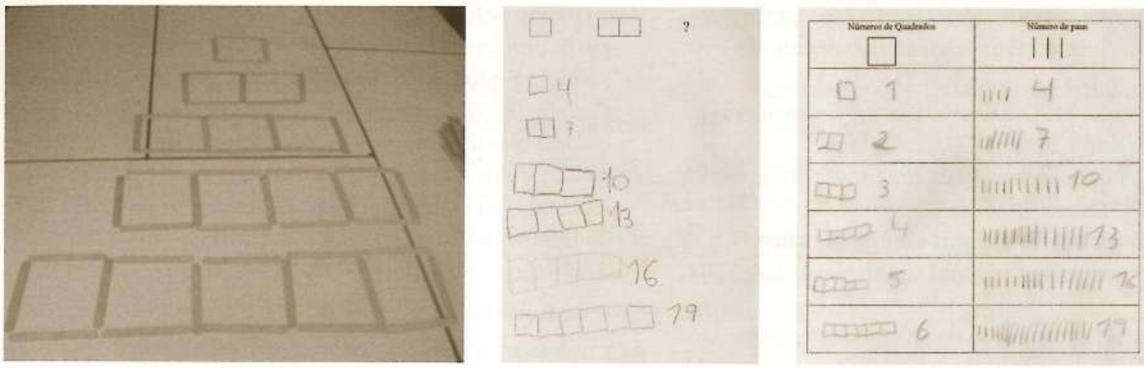


Figura 4.— Representações mobilizadas pela Maria na tarefa «paus e quadrados»

çou a construir o 3.° termo da sequência, deixando de visualizar os termos anteriores. Depois, através da manipulação do material e dos desafios emergentes, a Maria resolveu construir os termos anteriores, facilitando assim a visualização que foi fundamental na construção dos termos seguintes e na descoberta do padrão, quer para si quer para as outras crianças do grupo. Optou por representar a solução através do desenho e de uma tabela o que demonstra a flexibilidade na resolução desta tarefa (figura 4).

Concluindo

As crianças mostraram-se sempre motivadas, interessadas e envolvidas nas tarefas, evidenciando uma relação positiva com a matemática e com a resolução de problemas. As interações em pequeno grupo favoreceram o envolvimento, a comunicação de raciocínios, a persistência e a responsabilização pessoal na resolução das tarefas.

O material foi imprescindível para motivar as crianças, apoiar a estruturação e a comunicação dos seus raciocínios, facilitar a compreensão de processos e a elaboração das representações escritas. Os conhecimentos matemáticos mobilizados pelas crianças constituíram-se como determinantes e fundamentais no modo como exploraram as tarefas. O gosto por atividades que envolviam os padrões foi claramente evidenciado, pois as crianças envolveram-se na procura de regularidades e relações e chegaram mesmo a generalizações e à formulação de problemas.

As tarefas revelaram-se também «motores» potencialmente favoráveis ao desenvolvimento do pensamento criativo. A flexibilidade foi a dimensão que foi mais visível e evidenciada pelas crianças, pois abordaram cada tarefa de modos diferentes, mudando de direção à medida que o seu raciocínio se ia organizando. Usaram um conjunto de ferramentas, combinando algumas na mesma tarefa. A fluência foi uma dimensão também evidenciada através do número de ideias e respostas diferentes conseguidas na resolução de uma mesma tarefa e, à medida que se iam envolvendo em várias tarefas, foram crescendo as suas capacidades, quer em relação às estratégias, quer aos conhecimentos matemáticas. A originalidade também foi evidenciada por algumas crianças, ainda que tenham tido como referenciais de comparação apenas as resoluções do grupo. Muitas das suas respostas às tarefas foram originais porque foram pensadas e elaboradas apenas por elas.

Na educação pré-escolar é possível e pertinente implementar a resolução de problemas como veículo essencial à aprendizagem da matemática e como uma ferramenta poderosa no desenvolvimento do pensamento criativo.

Notas

[1] A Ana e a Maria são crianças-caso do estudo «A resolução de problemas e a criatividade em matemática: Um estudo em contexto de educação pré-escolar», no âmbito do Mestrado em Educação, Especialidade em Didática da Matemática e das Ciências, IPVC-ESE, realizado por Vieira, (2012).

Referências

Baroody, A. (2002). Incentivar a aprendizagem matemática das crianças. In B. Spodek (Org.), *Manual de investigação em educação de infância* (pp. 333–390). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Castro, J. & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e organização de dados.* Textos de apoio para educadores de infância. Lisboa: ME-DGIDC.

Conway, K. (1999). Assessing open-ended problems. *Mathematics teaching in the Middle School, 4*, 8, 510–514.

Duffy, B. (2004). Encorajando o desenvolvimento da criatividade. In I. Siraj- Blatchford (Coord.), *Manual de desenvolvimento curricular para a educação de infância* (pp. 130–143) Lisboa: Texto Editora.

Fernandes, D., Lester, F., Borralho, A. & Vale, I. (Coords) (1997). *Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas.* Aveiro: GIRP.

ME-DEB (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar.* Lisboa: Ministério da Educação -Departamento de Educação Básica.

Migueis, M. & Azevedo, M. G. (2007). *Educação matemática na infância.* Abordagens e desafios. Gaia: Gailivro.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas* (tradução portuguesa do original de 1973). Lisboa: Gradiva.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 3, 75–80.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrão na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos [em linha]. *Interações Web site*, 20, 181–207. Acedido maio 5, 2012, em http://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/

Vale, I. & Pimentel, T. (2011). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática — Práticas de Ensino da Matemática* (pp.347–359). Portalegre: SPIEM.

Vieira, C. (2012). *A resolução de problemas e a criatividade em matemática: Um estudo em contexto de educação pré-escolar.* Tese de mestrado. Viana do Castelo: ESE-IPVC.

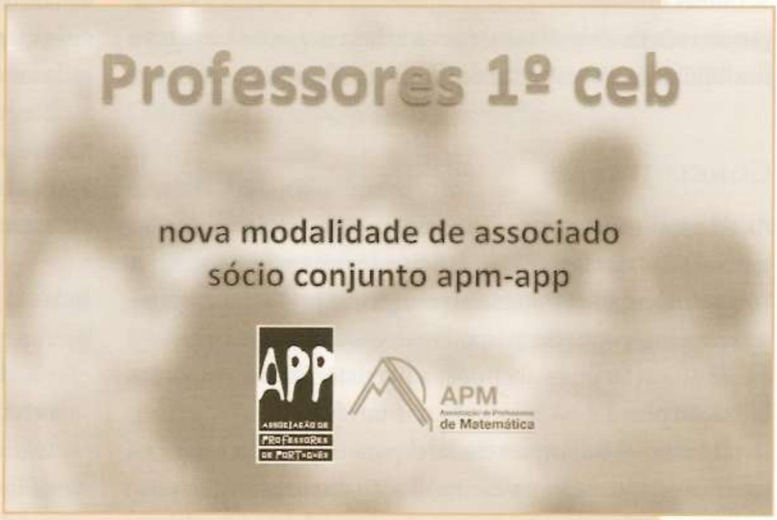
Conceição Vieira
Agrupamento de Escolas de Monte da Ola
JI de Vila Nova de Anha

Sócio conjunto APM-APP

A partir de 2016 a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma nova modalidade de associado aos **professores do 1.º ciclo do ensino básico**: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM.

Pode inscrever-se indeferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.º de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Faça-se sócio. Consulte as informações em apm.pt.



Formulação de problemas numa turma do 10.º ano

A ideia da criatividade em matemática está relacionada com a formulação de problemas. Este é um processo através do qual os alunos, baseados na sua experiência matemática, constroem interpretações pessoais de situações concretas formulando, à custa delas, problemas significativos. E, por isso, esta componente importantíssima do processo de resolução de problemas deve ser abordada nas aulas.

Apresentam-se duas situações que se prestam à formulação de problemas por alunos do ensino secundário. Ambas são situações pouco estruturadas e, como tal, é possível colocar com base nelas vários problemas.

A primeira é mais indicada para o 10.º ano, uma vez que se baseia na função quadrática; a segunda poderá ser usada com vantagem a partir do 11.º ano, para possibilitar o uso da trigonometria.

Damos conta de uma experiência de sala de aula em que se usou a primeira.

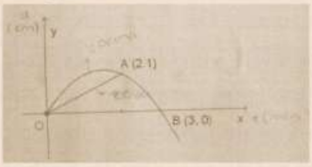
Apesar de ambas as turmas terem Física e Química, os resultados foram muito díspares. Na turma que trabalhou em grupo, oito dos nove grupos apresentaram um contexto real. O que não o fez criou uma questão envolvendo conjuntos definidos por condições e cálculo vetorial. Só dois grupos inventaram dois problemas completamente distintos, mas a maioria dos grupos criou, dentro do mesmo problema, várias questões. Verifica-se a utilização de várias formulações de problemas de altura ou distância em função do tempo, mas esses aspetos não são explicitados no enunciado. A interpretação dada parece ser óbvia para os alunos e não carecer de explicação.

Na turma em que trabalharam individualmente aparece apenas uma formulação ligada a um fenómeno real, o lançamento de uma bola. Todas as outras são puramente matemáticas, embora haja algumas interessantes, por exemplo a consideração de uma parábola simétrica da dada em relação à reta de equação $x=3$, ou, no caso de outro aluno, em relação ao eixo Ox. Contudo, na maioria dos casos pede-se a expressão analítica da parábola ou as coordenadas do seu vértice (sem fazer intervir a reta), a área ou o perímetro do triângulo [OAB], ou ainda a condição correspondente a uma região sombreada. Embora na primeira turma os alunos sejam mais participativos e naturalmente se envolvam mais nas atividades, pode concluir-se que o trabalho em grupo foi mais motivador, e deu mais segurança aos alunos, na busca de formulações criativas.

Da análise das produções dos alunos resultaram duas categorias principais. A categoria A reúne as formulações mais diretamente ligadas aos conhecimentos adquiridos sobre a função quadrática, refletindo o tipo de questões clássicas sobre essa matéria (na maior parte dos casos exercícios) que é possível encontrar em manuais escolares e provas. A categoria B engloba formulações mais originais, que, tendo embora em conta a experiência matemática recente, extrapolaram para níveis mais imaginativos e deram origem na maior parte dos casos a verdadeiros problemas. Apresentam-se apenas algumas das produções, evitando repetições ou exemplos muito semelhantes. Nalguns casos o problema gerado envolve todos os dados da figura. Vejam-se as formulações 1, 3 e 4[1] da Categoria B. Noutros, como no caso 2 da Categoria B, embora a história contada no enunciado se baseie na imagem, na resposta às questões colocadas quase não é necessário usar os dados.

<table>
<tr><td rowspan="2">Categoria A</td><td>Formulação 1
a) Escreve a condição da parábola.
b) Qual é o perímetro do triângulo [OAB]?</td><td>Formulação 3
Defina por uma condição a zona sombreada.</td></tr>
<tr><td>Formulação 2
Uma parábola (g) é definida pela origem, o ponto A (2, 1) e o ponto B (3, 0). A pertence à função f que é uma função diretamente proporcional.
Imagina agora uma parábola simétrica (h) à de g pela reta de condição $x=3$. Determina agora a interseção de f com h. Caso não haja interseção, mostra todas as etapas da resolução.</td><td>Formulação 4
1. Determina uma condição da região sombreada [OAB].
a) Determina a área do triângulo [HFC].
b) Determina a expressão analítica da parábola.
c) Determina o vértice da parábola.
2.
a) Determina as coordenadas do vetor OA.
b) Determina as coordenadas do vetor OB+OA.
Nota: H e F são pontos de interseção da reta $y=-2$ com o eixo Oy e a reta AB respetivamente.</td></tr>
</table>

[1] A numeração atribuída tem o único objetivo de identificar as produções.

Categoria B	Formulação 1 A Joana saiu da escola de carro em direção a casa. Pelo caminho lembrou-se que tinha que regressar. No regresso, encontrou uma amiga, Zeza, quando o seu relógio marcava 2 minutos desde que tinha saído da escola. Quando finalmente chegou à escola tinham passado 3 minutos desde a hora inicial. O percurso de ambas está representado no gráfico seguinte.  a) Calcula a velocidade da Zeza em Km/h. b) Passado quanto tempo voltou a Joana para trás? A que distância estava ela da escola? A que distância estava a Zeza da escola quando a Joana voltou para trás?	Formulação 3 Na quinta do Tobias faz-se reprodução de abelhas. O Ambrósio, vizinho do Tobias, não gostava dos insetos e decidiu colocar um inseticida nas colmeias, de modo a diminuir o n.º destas. Passado 3 meses do início do projeto do Tobias, a população de abelhas extinguiu-se. Ao mesmo tempo que ele reproduzia as abelhas vendia uma parte, que é representada (esta venda) pela função g e a reprodução pela função f. A produção de abelhas iniciou-se no mês de fevereiro. a) Em que mês é que foi colocado o inseticida? b) Qual foi o máximo de abelhas que o Tobias conseguiu produzir? c) Em que mês é que o Tobias deixou de vender as abelhas porque já não tinha lucro? d) Passado 1 mês, quantas abelhas o Tobias tinha na quinta após a venda?
	Formulação 2 Uma guerra que dura há 300 anos dois povos confrontam-se até à morte. Num ato de desumanidade um dos povos ataca com uma catapulta uma aldeia indefesa que se encontra a 300m, como se vê no gráfico. Um pássaro à medida que a catapulta é disparada descola em trajetória retilínea do mesmo ponto onde a catapulta se encontrava. O pássaro embate na pedra disparada no ponto (2,1). a) A que distância se encontra o pássaro em relação à catapulta no momento do embate. b) Qual é o ângulo de descolagem do pássaro.	Formulação 4 Num campo de golfe encontrava-se um aluno a dar umas tacadas. O objetivo era enquanto o aluno lançava a bola de golfe, outro aluno praticava a pontaria e tentava rebentar com a bola de golfe em movimento. O gráfico representa uma dessas tentativas. Sabendo que a trajetória da bola é representada pela parábola, determine: a) A expressão analítica da parábola. b) A altura máxima que a bola de golfe atinge. c) Sabendo que a bola rebentou no ponto A, determine: i) A expressão analítica da função t (tiro). ii) A área do triângulo [AOB].

Em relação às três principais caraterísticas da criatividade pode afirmar-se que os alunos, na sua maioria, foram fluentes, ao colocarem muitas questões para o mesmo problema. Constata-se também que mostraram flexibilidade, pois procuraram mobilizar e relacionar todos os conhecimentos que tinham sobre o tema. Algumas formulações mostraram originalidade.

Depois da experiência considera-se esta atividade de formulação de problemas muito rica e com potencial para mobilizar vários conteúdos e representações matemáticas, mas salienta-se o aspeto da resolução; o pedido de resolução do problema formulado é fundamental. Todos os alunos resolveram os problemas que propuseram, o que se considera muito positivo pelos seguintes motivos: (a) permitiu mobilizar conhecimentos prévios; (b) fê-los adotar uma atitude realista, não lhes permitindo inventar enunciados que, embora pudessem ser imaginativos, não seriam viáveis; e (c) possibilitou a correção de formulações incorretas que provavelmente não seriam detetadas sem a resolução. As maiores incorreções nos enunciados são de linguagem, ou então surgem na adaptação dos números exibidos no gráfico às situações reais criadas. Por exemplo, uma bola que demorou 3 minutos a chegar ao chão depois de ter sido lançada.

O facto de não terem criado mais problemas também se relaciona com o tempo disponível, que foi apenas de 90 minutos. Construir formulações para além das óbvias, testar, resolver e reformular essas mesmas questões requer tempo. Contudo, os alunos, de modo geral, mostraram empenho na resolução da tarefa e vontade de criar problemas diferentes dos que habitualmente encontram, designadamente com a criação de um enredo realista que dê importância e significado ao conteúdo matemático estudado.

Teresa Pimentel
Agrupamento de Escolas de Santa Maria Maior

O QUE TE SUGERE ESTA IMAGEM?

Apresentam-se duas situações que se prestam à formulação de problemas por alunos do ensino secundário. Ambas são situações pouco estruturadas e, como tal, é possível colocar com base nelas vários problemas.

A primeira é mais indicada para o 10.º ano, uma vez que se baseia na função quadrática; a segunda poderá ser usada com vantagem a partir do 11.º ano, para possibilitar o uso da trigonometria.

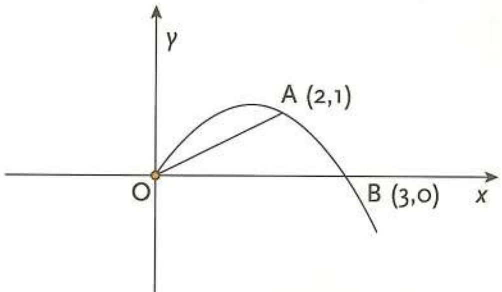
Damos conta de uma experiência de sala de aula em que se usou a primeira.

1)

A imagem mostra parte de uma parábola que passa na origem, passa no ponto A (2, 1) e atravessa novamente Ox em B (3, 0).

Inventa para esta imagem tantos problemas quantos consigas.

Resolve-os.



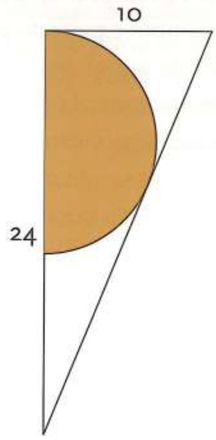
2)

A figura representa um semicírculo inscrito num triângulo retângulo.

Inventa tantos problemas quantos consigas com base na figura.

Resolve-os.

Podes usar um programa de geometria dinâmica para fazeres algumas explorações.



Será que a criatividade é só para génios?

Quando se fala em criatividade a maior parte das pessoas associam-na a imaginação, novo, original, fora do comum, génio, único, lunático, sendo comum ligá-la a áreas como: escrever ou representar peças de teatro, esculpir, pintar, escrever, compor e executar peças musicais, etc.. Mas também é associada a grandes descobertas científicas em diferentes campos como Medicina, Física, Biologia. Esta perspetiva traduz uma visão estereotipada e redutora da pessoa criativa como sendo um génio louco, um artista incompreendido, ou então uma criança, pois estas são sempre criativas. Estes mitos não correspondem à realidade já que não é necessário ser génio, louco ou criança para ser criativo. Por outro lado, é limitativo associar a criatividade apenas com a pintura, a música, a escrita ou outra arte pois a criatividade pode ser encontrada em qualquer atividade humana, desde as ciências, aos negócios, à educação, e todas necessitam de pessoas criativas para progredir. Saliente-se ainda que há pessoas que acreditam que a criatividade surge de uma fonte sobre a qual o indivíduo não tem controlo. Esta é uma conceção que desencoraja as pessoas de uma discussão sobre como usam a sua criatividade e como é que se pode desenvolver. Esta caraterística existe em todas as pessoas (com diferentes níveis e estilos) e é uma capacidade transversal a todas as áreas de conhecimento. O desafio é aprender a compreendê-la e usá-la.

Há quem afirme que a riqueza de um país reside mais na capacidade inovadora e criativa dos seus habitantes, do que nos seus recursos naturais. Acreditando nesta ideia, cabe à escola proporcionar mecanismos que estimulem o potencial criativo dos seus alunos, e que mantenham esse potencial, de modo a desenvolver a sua imaginação e produzir novas ideias que lhes venham a ser úteis pessoalmente e à sociedade. Na escola, a matemática é, de acordo com alguns autores, uma das disciplinas que mais pode promover o desenvolvimento do pensamento criativo (Gontijo, 2007).

A visão clássica de que a criatividade é só para génios, e os atos criativos proezas mentais raras, produzidas por indivíduos extraordinários que, rapidamente e sem esforço, usam processos de pensamento excecionais, sugere que esta não é susceptível de ser fortemente influenciada pelo ensino e que o trabalho criativo é mais uma questão de rajadas ocasionais de *insight, Aha!*, do que um processo contínuo e progressivo a ser valorizado e desenvolvido na escola. Como consequência desta perspectiva, as tentativas de aplicar os conhecimentos sobre criatividade à educação de todos os estudantes têm sido limitadas.

Mas este ponto de vista sobre a criatividade tem sido questionado na investigação mais recente. A visão contemporânea está em nítido contraste com a anterior perspetiva de génio. A investigação associada a esta visão sugere que a criatividade está intimamente relacionada com o conhecimento profundo e flexível dos conteúdos de diferentes domínios. É frequentemente mais associada com longos períodos de trabalho e reflexão do que com *insights* rápidos e excecionais, e é sensível às influências dos processos e experiências de ensino adequados. Esta visão emergente de criatividade fornece uma base muito mais forte sobre a qual construir recomendações educacionais, que poderão ser apropriadas para uma vasta faixa de estudantes e não apenas para alguns com características especiais.

Estas duas visões, clássica e contemporânea, da criatividade, apesar de diferirem nalguns aspetos, concordam no entanto com o facto de que a formulação de problemas e a resolução de problemas são centrais para a disciplina de matemática, são características da atividade criativa. A ligação com a criatividade não está tanto na formulação de problemas *per se*, mas sim na interação entre a formulação e a resolução de problemas. É nessa interação de formulação, tentativa de resolução e reformulação que surge a atividade criativa. Tanto os processos como os produtos desta atividade podem ser avaliados de modo a determinar até que ponto é evidente a criatividade (Silver, 1997).

Não há uma única descrição de criatividade, mas pode-se afirmar que começa com a curiosidade e envolve os estudantes na exploração e experimentação com base na sua imaginação e originalidade.

Que mudanças serão necessárias na matemática escolar no século XXI de modo a que os estudantes sejam imaginativos e criativos?

Que práticas na sala de aula fazem emergir o potencial criativo de alunos e de professores possibilitando uma matemática com sentido, lúdica, desafiadora e útil?

Haverá tópicos de conteúdo matemático mais promotores de criatividade?

Pense nisto!

Referências

Gontijo, C. (2007). *Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática em alunos do ensino médio*. Tese de doutoramento. Universidade de Brasília, Brasília.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *3*, 75–80.

Isabel Vale
Escola Superior de Educação do IPVC

Unir os doze pontos da figura com exatamente cinco retas sem levantar o lápis. Descobrir mais do que um processo.

Torradas com manteiga

ou como a maneira de cortar o pão influencia a quantidade de manteiga que nele se pode colocar

Não há só uma maneira de cortar o pão para torradas e por isso a quantidade de manteiga pode ser diferente conforme a maneira de fazer o corte e de barrar com manteiga. Nesta discussão, o que nos vai interessar não são as calorias a mais que estão envolvidas, mas sim as questões matemáticas que podemos formular sobre esta situação e, consequentemente, os problemas que podemos resolver e as respostas que encontramos. O desafio aqui está na complexidade crescente das questões. Os problemas podem começar por ser muito simples, mas a sua resolução pode conduzir à formulação de novas questões mais elaboradas. Façamos um percurso.

Para iniciar pensemos neste pão como um paralelepípedo cujas dimensões são $2 \times 2 \times 3$ (fig. 1).

Há duas maneiras de cortar o pão. Em ambas a espessura das torradas é igual.

Para facilitar designamos o corte A por longitudinal e o B por corte transversal.

O corte longitudinal permite obter apenas 2 torradas, isto é, 2 faces que podem ser barradas de manteiga. O corte transversal permite obter várias torradas, dependente da dimensão do pão e da opção de colocar manteiga em mais do que uma face.

Neste caso, o corte B dá 3 torradas e a do meio pode ser barrada com manteiga em duas faces, é por isso que temos duas possibilidades de barrar para o corte B. Vamos fazer uma tabela (tabela 1) com todas as possibilidades para a situação da fig 1.

Podemos notar que para os dois cortes uma das possibilidades origina valores iguais. Esta situação levou-nos a formular uma questão. Haverá outros formatos do pão em que o resultado seja exatamente igual? Para simplificar, vamos passar a considerar que só barramos as torradas numa das faces.

Se o pão for um cubo é indiferente a maneira de cortar o pão.

Se experimentarmos com as dimensões $2 \times 3 \times 4$ (fig. 2) obtemos a mesma área para os 2 cortes (tabela 2). E se o pão for um pouco mais comprido, $2 \times 3 \times 6$ por exemplo, o que acontece?

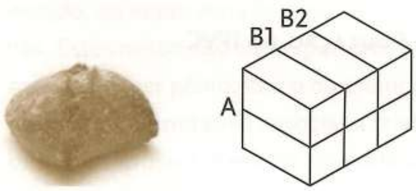


Figura 1

	área da face da torrada	nº de faces da torrada a barrar de manteiga	total da área barrada com manteiga
corte A	2×3	2	$2 \times (2 \times 3) = 12$
corte B	2×2	3	$3 \times (2 \times 2) = 12$
		4	$4 \times (2 \times 2) = 16$

Tabela 1

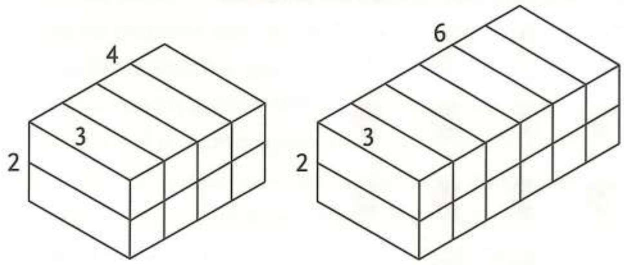


Figura 2

	área da face da torrada	nº de faces da torrada a barrar de manteiga	total da área barrada com manteiga
corte A	3×4	2	$2 \times (3 \times 4) = 24$
corte B	2×3	4	$4 \times (2 \times 3) = 24$
corte A	3×6	2	$2 \times (3 \times 6) = 36$
corte B	2×3	6	$6 \times (2 \times 3) = 36$

Tabela 2

A tabela 2 mostra-nos que o resultado é o mesmo para os dois tipos de corte.

Será que vai acontecer sempre esta igualdade? Como podemos ter a certeza disso?

Se tivermos em que conta que há uma relação entre o valor de k e as dimensões c e a para conseguir que as torradas tenham todas a mesma espessura e que essa relação é $k = c/(a/2)$ que é equivalente a ter $c = k \times (a/2)$, podemos verificar que são iguais os dois valores da área barrada:

$$2bc = 2b \times (k \times (a/2) = k \times ab$$

Quando formulei e resolvi este problema não tive em atenção que para o corte B as torradas só deviam ser barradas de um lado e, por isso, obtive valores diferentes para os dois tipos de cortes. Por essa razão avancei com um outro tipo de questão para a situação em que as torradas centrais são barradas dos dois lados.

Qual é a percentagem de aumento de manteiga necessária para barrar as torradas, isto é, qual é a percentagem de aumento da área a barrar?

Ficamos por aqui, a generalização para o caso abc fica ao cuidado do leitor mais interessado. E fica também o desafio para encontrar uma dimensão de pão que permita obter o dobro da área a barrar de manteiga, isto é, um aumento de 100%.

Um dos aspetos que destaco neste percurso é que começámos por uma situação muito simples que nos levou progressivamente à formulação de problemas mais elaborados e nos permitiu fazer uma generalização, com uma entrada muito significativa pela álgebra. Um outro aspeto foi a necessidade de simplificar o modelo geométrico, neste caso recorrendo a um paralelepípedo e de colocar cuidadosamente as condições de formulação do problema. Neste caso, barrar apenas de um lado ou dos dois faz uma grande diferença matemática. Para concluir, faltou o chá ou o café com leite.

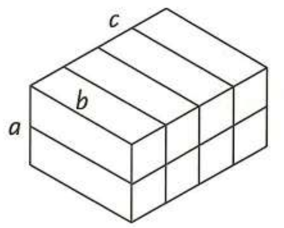


Figura 3

	área da face da torrada	nº de faces da torrada a barrar de manteiga	total da área barrada com manteiga
corte A	$b \times c$	2	$2 \times (b \times x)$
corte B	$a \times x$	k	$k \times (a \times b)$

Tabela 3

dimensões do paralelepípedo	corte A	corte B	aumento da área	percentagem de variação da área a barrar
$2 \times 2 \times 4$	12	$4 \times (2 \times 2) = 16$	4	+ 33,3%
$2 \times 3 \times 4$	24	$6 \times (2 \times 3) = 36$	12	+ 50%
$2 \times 3 \times 6$	36	$10 \times (2 \times 3) = 60$	24	+ 66,6%

Tabela 4

Ambientes tecnológicos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática em contextos exploratórios

ARTUR COELHO, ISABEL CABRITA

INTRODUÇÃO

A criatividade, como capacidade transversal a todas as áreas do conhecimento, tem sido sistematicamente cerceada pelos sistemas educativos do mundo industrializado (Amabile & Pillemer, 2012). Por outro lado, diversas investigações sustentam que a Matemática continua a ser ensinada à revelia de um modelo exploratório (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008), não se dando oportunidade aos alunos de realizar e discutir tarefas matemáticas desafiantes que promovam, designadamente, o raciocínio matemático, a comunicação e a criatividade.

Relativamente às Tecnologias da Comunicação, não obstante as vantagens que se lhes reconhecem, não se observou, ainda, uma transformação assinalável ao nível da sala de aula designadamente porque pode perturbar o processo educativo e/ou dificultar a sua gestão (Galluch & Thatcher, 2011).

Neste contexto, um *Classroom Management System* [CMS], ao permitir gerir as atividades desenvolvidas, colaborativamente, por recurso a dispositivos tecnológicos contribui positivamente para a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática. Em particular, pode ser um instrumento de desenvolvimento da criatividade (Zagalo & Branco, 2015) e promover atitudes mais favoráveis em relação à Matemática.

APONTAMENTOS TEÓRICOS

Como se explicita em Coelho (2013; 2015), muitos ainda veem a criatividade associada à genialidade e ao talento individual raro e inato de uns quantos indivíduos excecionais, pelo que não poderia ser ensinada. Numa visão contrastante, defende-se que está associada a um conhecimento profundo e flexível dos conteúdos, implicando grande trabalho e reflexão e constituindo-se uma característica dinâmica do desenvolvimento pessoal. Tais entendimentos responsabilizam as instituições de ensino em geral e os seus professores em particular, pelo seu desenvolvimento. Um elemento comum nas diferentes conceções é o aparecimento de algo novo, ou a reelaboração de produtos ou ideias já existentes.

Relativamente à criatividade em Matemática, diversos autores (e.g. Leikin, 2009) consideram que se caracteriza por: fluência — que traduz a quantidade de ideias distintas produzidas sobre um mesmo assunto; flexibilidade — indicador da habilidade para alterar o pensamento ou conceber diferentes categorias de respostas; originalidade — que representa o carácter pouco frequente ou incomum de uma dada resposta e elaboração — que espelha a quantidade de detalhes de uma determinada ideia. A flexibilidade é determinante no sucesso em Matemática e esta dimensão permite aos alunos a utilização de diferentes abordagens na resolução de um problema. Por outras palavras, permite pensar de maneiras diferentes com vista a encontrar formas diferenciadas, incomuns, de resolver problemas e encontrar diferentes resoluções originais ou ótimas. A capacidade de produzir um grande número de ideias diferentes — fluência — sobre um mesmo assunto matemático carece da utilização de conhecimentos básicos sólidos e da habilidade para se estabelecerem múltiplas associações e para se realizar conexões entre os diferentes assuntos e áreas. A originalidade espelha a capacidade de pensar de forma única, produzindo ideias novas, singulares, ou radicalmente diferentes.

Para se potenciar a expressão da creatividade, é fundamental: fortalecer traços de personalidade dos alunos — autoconfiança, curiosidade, persistência, independência de pensamento, coragem para explorar situações novas e lidar com o desconhecido; ajudar a desfazer bloqueios emocionais — o medo de errar e ser criticado, insegurança e complexo de inferioridade e implementar atividades desafiantes que criem oportunidades de atuação criativa. Assim, a resolução e a formulação de problemas em Matemática estão profundamente relacionadas com a criatividade e o seu desenvolvimento passa pela criação de um ambiente de sala de aula que permita aos alunos integrarem as dimensões da criatividade nos seus trabalhos e questionarem, refletirem, mudarem e recriarem. É ainda necessário encorajar o risco e aceitar o erro e recompensar as ideias e produtos criativos.

A criatividade pode ser avaliada a partir da medição das quatro dimensões referidas por Sternberg (2012). A fluência pode ser medida através do número de soluções obtidas pelo aluno para uma determinada tarefa; a flexibilidade, pelo número de abordagens diferentes que o aluno concretiza; a originalidade, por comparação com o número de alunos, no grupo, que poderia produzir essa mesma solução; e a elaboração, através dos pormenores na resolução de tarefas e nível da discussão matemática.

A grande importância que se atribui ao desenvolvimento da criatividade, em particular na matemática, parece não ter correspondência com uma mudança nas práticas educativas fruto, designadamente, de um conhecimento insuficiente dos professores sobre abordagens favoráveis à sua promoção. Em oposição à tradicional prática pedagógica diretiva, mecanizada e processual, surge o conceito de ensino exploratório (Stein *et al.*, 2008). Centrado nas aprendizagens, favorece a interação dos alunos com o conhecimento no âmbito de uma atividade matemática durante a qual levantam questões, formulam, exploram, testam e discutem diferentes conjeturas, a partir das suas experiências prévias, e negoceiam novos significados. Esse ensino mais conceptual, de cariz exploratório e de inquirição matemática, admite quatro fases: (1) «lançamento» de tarefas desafiantes e diversificadas; (2) exploração pelos alunos da tarefa e das suas resoluções substituindo-se a «exposição» pelo diálogo e pela descoberta; (3) apresentação e discussão das mesmas; e (4) síntese que maximize a atividade matemática e a compreensão dos alunos.

A constituição de ambientes propícios ao ensino exploratório na sala de aula de Matemática exige que o professor reflita sobre como explorar o potencial intrínseco de cada uma das tarefas criteriosamente selecionadas e/ou (re)criadas e implemente e gira estratégias didáticas que incentivem os alunos a procurar resoluções e respostas incomuns e originais para tais tarefas. Finalmente, deve gerir adequadamente o momento de apresentação e discussão das diversas (re)soluções. Se os momentos de confronto e discussão constituem excelentes oportunidades para os alunos, são extremamente desafiadores para o professor, que deve gerir todo o processo de forma expedita e equilibrada.

Se este ambiente contiver elementos tecnológicos, como o defendem diversos autores (Castells, 2007), sustentados nas mais recentes perspetivas de aprendizagem, então esta gestão torna-se mais complexa.

No caso particular da abordagem da Geometria, começa a ser vulgarizada a integração de Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica (ADGD's), como por exemplo o GeoGebra, ao qual se reconhece imensas potencialidades (Cabrita, Neto, Breda & Santos, 2013).

Paralelamente ao discurso relativo aos benefícios da utilização da tecnologia no processo educativo, surgem preocupações com utilizações perniciosas que podem perturbar gravemente o processo educativo (Galluch & Thatcher, 2011). De facto, diferentes aulas decorrem em laboratórios TIC com diversos terminais ligados em rede e à Internet ou com acesso a dispositivos *mobile* e quadros interativos, difíceis de controlar.

Para não se comprometer a imprescindível comunicação entre todos os intervenientes, principalmente num contexto de ensino e de aprendizagem exploratórios de resolução de tarefas matemáticas desafiantes com recurso a ferramentas tecnológicas, deverá ser utilizado um CMS como ferramenta de mediação do processo educativo. A sua utilização torna possível: i) aumentar o grau de envolvimento dos alunos nas tarefas; ii) aumentar o grau de colaboração, cooperação e partilha; (iii) manter os alunos focados nas tarefas e iv) acompanhar, de forma simples e eficaz o trabalho desenvolvido.

Uma alternativa *open source*, e por isso gratuita, é o iTALC — *Intelligent Teaching And Learning with Computers* que permite ao professor monitorizar, a partir do seu próprio posto, qualquer estação de trabalho da sua rede. Permite ainda demonstrações e controlo remoto dos terminais na rede local e até mesmo dos computadores de alunos em suas casas.

UM ESTUDO DE CASO EM AMBIENTE TECNOLÓGICO NUM CONTEXTO EXPLORATÓRIO

Desenvolveu-se, recentemente (Coelho, 2013), um estudo que perseguiu como principal finalidade analisar a influência da imersão em ambientes tecnológicos (aliando o GeoGebra, instrumentos tradicionais e o iTALC) num contexto de ensino e aprendizagem exploratórios, no desenvolvimento de competências matemáticas, tecnológicas e da criatividade.

Envolveu uma turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico e, em particular, três grupos de alunos: G1, constituído por Catarina; G2, constituído por Tiago e Luísa e G3, composto por Gabriela e Francisca[1]. O professor/investigador, coautor deste artigo conduziu todos os acontecimentos relacionados com a investigação.

Foi estruturada uma sequência de tarefas de complexidade, matemática e técnica, crescente, com carácter exploratório, testadas e validadas previamente, sobre o tópico Reflexão, rotação e translação, no âmbito do tema Geometria e Medida. A sua resolução apelava ao uso do GeoGebra e de instrumentos tradicionais como régua, esquadro e compasso.

Tais tarefas foram implementadas de acordo com as fases identificadas no contexto do ensino exploratório. No âmbito da 2.ª fase, os alunos, no geral organizados em pequenos grupos, realizavam as tarefas de forma autónoma mas monitorizados pelo professor, que os acompanhava «diretamente» nas atividades em ambiente de *papel e lápis*, ou através do iTALC, quando usavam o computador. O ecrã da estação de trabalho do professor, que continha o *master* desse CMS, estava a ser permanentemente projetado no quadro interativo de modo a que todos os alunos pudessem seguir, em tempo real, as ações que decorriam em todos os computadores da sala (figura 1).

Na 3.ª fase da aula, os alunos apresentavam os resultados das suas explorações num exercício de confronto e discussão coletiva. Em relação às tarefas executadas no computador, a comunicação era mediada pelo iTALC que permitia a projeção, para toda a turma, do ecrã da estação de trabalho de cada grupo de alunos, no quadro interativo. Estes partilhavam as suas ideias e os seus pontos de vista e recebiam o feedback de colegas e do professor.

PRINCIPAIS RESULTADOS

No âmbito deste artigo, os resultados apresentados focam-se na criatividade. Os resultados recolhidos permitem constatar a importância que os alunos atribuíram à abordagem tecnológica do tópico, à natureza das tarefas e à forma como foram resolvidas e discutidas, que consideraram determinantes para o desenvolvimento da criatividade.

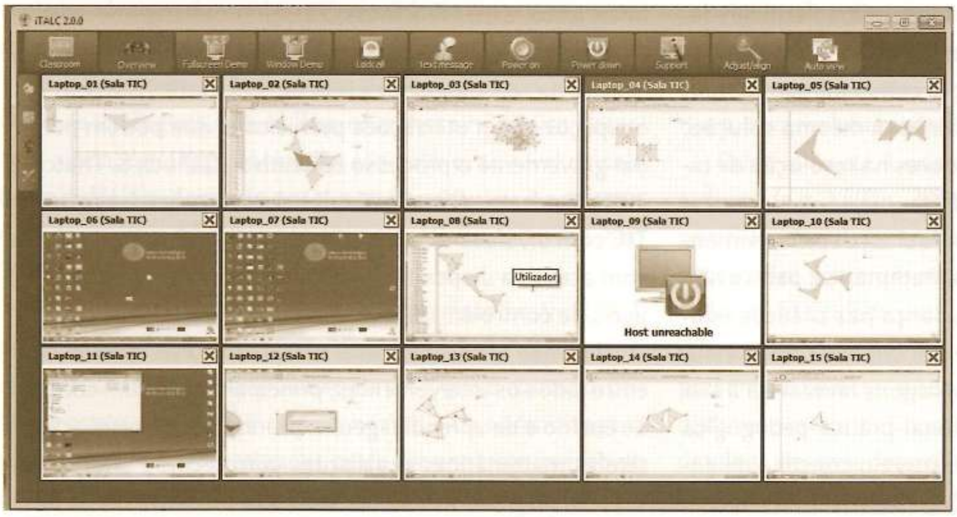


Figura 1.—O *master* do iTALC no desktop do terminal do professor

Tarefa III: No GeoGebra, cria uma composição a teu gosto, aplicando diferentes rotações.

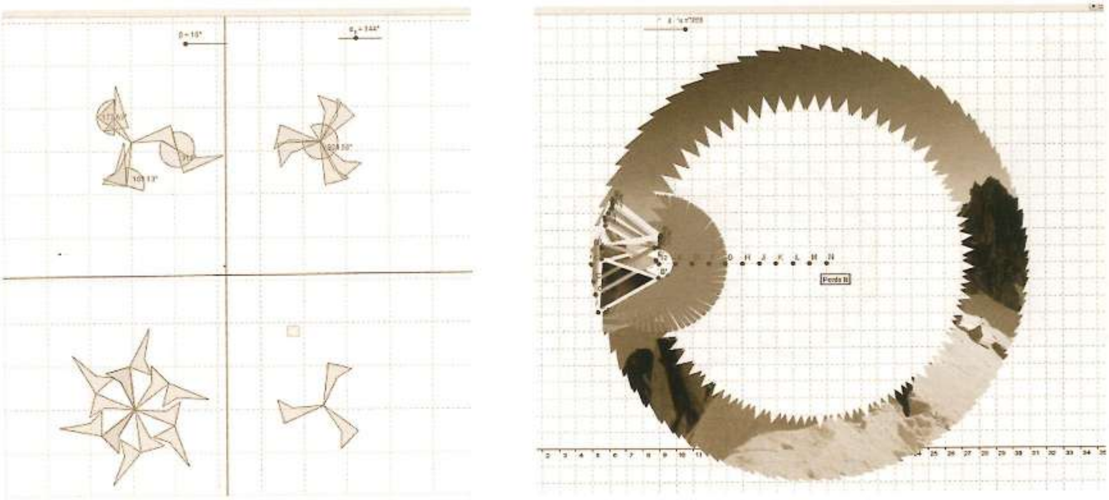


Figura 2.—Diferentes abordagens da Catarina à tarefa III (construção inicial à esquerda e final à direita)

Tarefa IV: Ainda no GeoGebra, e utilizando translações, cria uma construção a teu gosto.

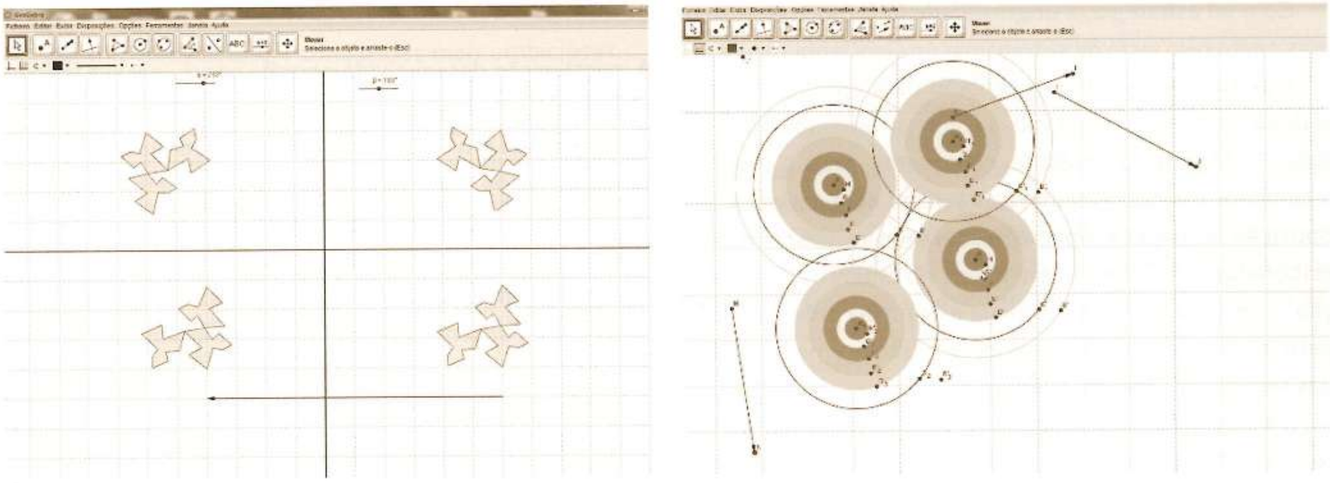


Figura 3.—Resposta do Tiago e da Luísa à terceira questão da tarefa IV

Um dos fatores que se revelou decisivo foi o ambiente de sala de aula que se constituiu um espaço de liberdade, livre da crítica destrutiva — «A Luísa parecia agora mais confiante, pois «arriscava» participar ativamente na aula de forma mais frequente. Algumas manifestações de ansiedade foram sendo cada vez menos frequentes ao longo da implementação da sequência didática».

O iTALC ajudou a construir tal ambiente, instigando a que os alunos, espontânea e naturalmente, partilhassem os seus conhecimentos e descobertas e comentassem os trabalhos dos colegas, num verdadeiro espírito de entreajuda, bem aceite por todos — «Estes alunos revelaram grande abertura e recetividade às ideias e sugestões propostas por colegas (...)».

Por outro lado, ao permitir o visionamento em tempo real de trabalhos de outros colegas, motivava-os a apresentarem produções mais criativas — «A exibição deste trabalho causou assombro nos colegas que se sentiram motivados a procurar «outros caminhos» e, dependendo dos casos, fizeram-no com maior ou menor sucesso». Note-se como a Catarina e os alunos do G2, depois de observarem trabalhos de outros alunos, readaptaram os processos de resolução de tarefas propostas, de modo a elaborarem uma construção original, que incorporou elementos novos (figuras 2 e 3).

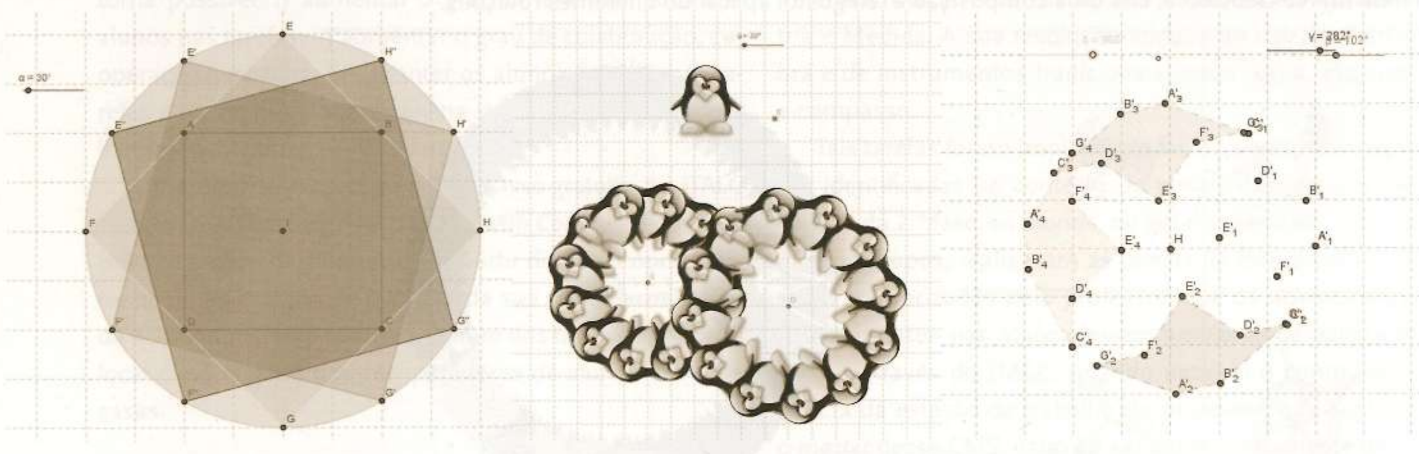


Figura 4.—Produções originais dos casos, em diferentes tarefas abertas, com recurso ao GeoGebra

Com tal estratégia, a originalidade foi sendo reforçada, mas muito pelo facto de se trabalhar no GeoGebra (figura 4). Este *software* também contribuiu para produções mais elaboradas do que as realizadas com instrumentos tradicionais — «O grupo 2 sentia-se, claramente, mais à vontade e confiante quando executava as tarefas no GeoGebra por oposição ao papel e lápis, apresentando respostas muito elaboradas». A Catarina revelou-se, no entanto, uma exceção — recorria espontaneamente e de forma prévia ao «papel e lápis» para ensaiar resoluções muito pormenorizadas das tarefas no GeoGebra (figura 5).

A este propósito, constatou-se que, na maior parte dos casos, a transposição do papel para o ADGD decorria de forma natural e sem constrangimentos. O inverso não era verdade. O G2 sentiu especiais dificuldades nesta transição.

No que diz respeito à fluência, verificou-se que os alunos tendiam a apresentar um maior número de respostas às tarefas propostas. Também utilizaram várias abordagens, recorrendo a diferentes procedimentos na construção de soluções alternativas para o mesmo problema que, numa provável manifestação de flexibilidade, conjugavam e adaptavam aos seus objetivos. Assim, verificou-se incrementos nas várias dimensões da criatividade consideradas. O *software* libertava os alunos da pesada mecânica procedimental, o que conduzia a melhorias na criatividade dos seus trabalhos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação desenvolvida permite concluir que a utilização de ADGD's facilitou o desenvolvimento de produções mais criativas em Geometria, na medida em permite uma «manipulação» mais fluida e flexível dos objetos geométricos, possibilitando a exploração de mais processos e resoluções. Por outro lado, os resultados apontam para dificuldades experimentadas por alguns alunos nas transições para o *papel e lápis*, observando-se constrangimentos não apenas circunscritos ao uso de instrumentação diversa mas também relacionados com aspetos conceptuais e formais. Daqui resulta a perceção dos benefícios da utilização de uma abordagem complementar que conjugue os dois ambientes, aspeto que deve ser mais profundamente investigado.

Mas o desenvolvimento da criatividade dos alunos envolvidos no estudo também se ficou a dever grandemente à utilização do iTALC. Principalmente o clima de colaboração que se gerou, o contacto constante com as diversas resoluções dos vários grupos que o CMS permitiu no âmbito da 2.ª fase do contexto exploratório de ensino e de aprendizagem (Stein *et al.*, 2008) e a apresentação e discussão coletiva no decurso da 3.ª fase do referido contexto instigaram a que os alunos se ‹ultrapassem› a si próprios e aos colegas, num espírito de salutar competitividade. Apesar da criação dessa *atmosfera social* parecer suscitar incrementos nas dimensões da criatividade, as limitações deste estudo

Tarefa: No GeoGebra, utilizando livremente as isometrias que já conheces, e sem atravessar as linhas pretas, desloca o Tux da posição (A) para a posição (B).

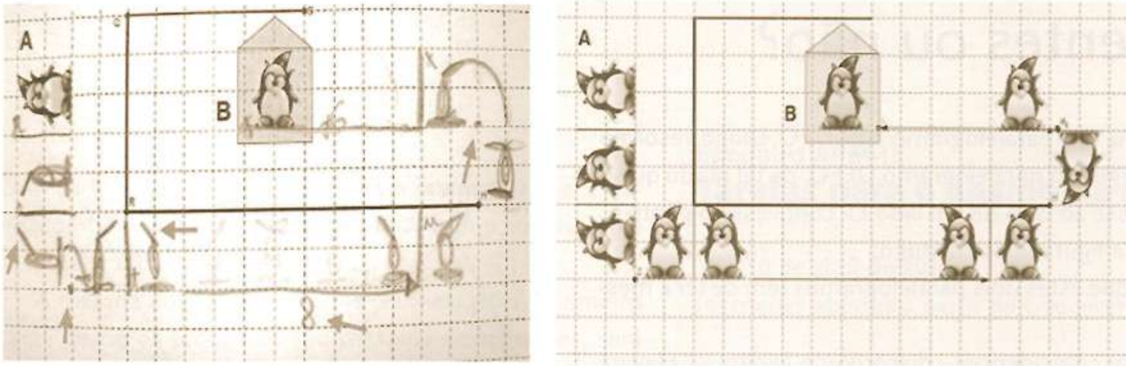


Figura 5.—Ensaio prévio da Catarina em ambiente de papel e lápis

e a natureza extraordinariamente complexa do fenómeno não permitem estabelecer conclusões mais ambiciosas.

Finalmente, constatou-se que uma adequada utilização de CMS's em abordagens exploratórias e que recorrem ao uso de computadores permite manter os alunos mais focados nas tarefas e facilita uma melhor gestão disciplinar e de todo o trabalho desenvolvido na aula. No entanto, uma compreensão mais profunda e alargada dos benefícios de tais ambientes e a identificação de potenciais contextos decrementais carecem de mais estudos.

Nota

[1] De modo a preservar a identidade dos alunos, todos os nomes utilizados são fictícios.

Referências

Amabile, T. M., & Pillemer, J. (2012). Perspectives on the social psychology of creativity. *Journal of Creative Behavior, 46*(1), 3–15.

Cabrita, I., Neto, T., Breda, A. e Santos, J. (eds.) (2013). GeoGebra em múltiplos contextos educativos — passado, presente e futuro. *Revista Indagatio Didatica, 5*(1).

Castells, M. (2007). *A Galáxia Internet, Reflexões sobre a Internet, Negócios e Sociedade* (2.ª Ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Coelho, A. (2013). GeoGebra e iTALC numa abordagem criativa das isometrias. Aveiro: Universidade de Aveiro (dissertação de Mestrado)

Coelho, A. (2015). Mediação tecnológica e desenvolvimento da criatividade em contextos matemáticos exploratórios. Aveiro: Universidade de Aveiro (Projeto de Doutoramento)

Galluch, P. S., & Thatcher, J. (2011). Maladaptive vs . Faithful Use of Internet Applications in the Classroom: An Empirical Examination. *Journal of Information Technology Theory and Application, 12*(1), 5–22.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Sternberg, R. J. (2012). The Assessment of Creativity: An Investment-Based Approach. *Creativity Research Journal, 24*(1), 3–12.

Zagalo, N., & Branco, P. (2015). The Creative Revolution That is Changing the World. In N. Zagalo & P. Branco (Eds.), *Creativity in the Digital Age* (pp. 3–15). London: Springer.

Artur Coelho
Agrupamento de Escolas de Almeida

Isabel Cabrita
Centro de Investigação Didática e Tecnologia
na Formação de Formadores
Dep. de Educação da Universidade de Aveiro

Equivalentes ou não?

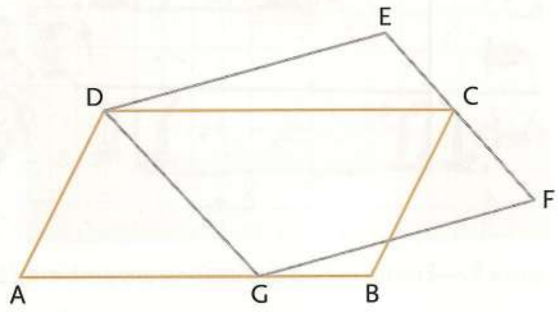
O Hugo desenhou um paralelogramo ABCD. O Diogo resolveu acrescentar um segundo paralelogramo DEFG, de tal modo que o ponto G pertencesse ao lado AB e o lado EF contivesse o ponto C.

Olhando para a figura, disse o Hugo:

— Parece-me que estes dois paralelogramos têm de ter a mesma área.

— Só se for por coincidência – discordou o Diogo. — Haverá casos em que a área do segundo é maior e outros em que é menor.

Quem tem razão?

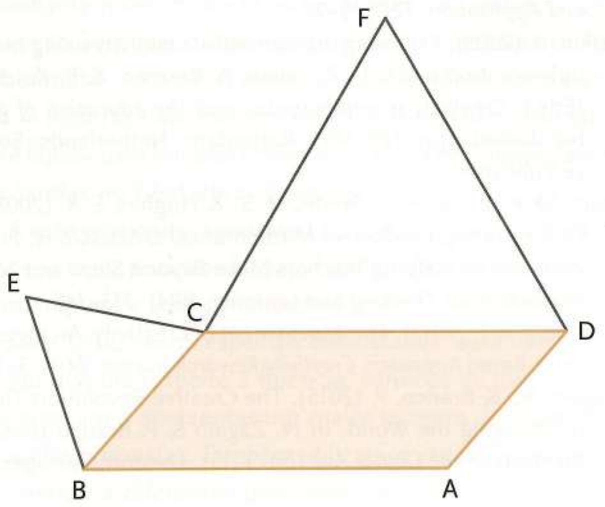


(Respostas até 19 de fevereiro para zepaulo46@gmail.com)

PARALELOGRAMO E TRIÂNGULOS

O problema proposto no número 133 de *Educação e Matemática* foi este:

A partir do paralelogramo ABCD, construíram-se, para o seu exterior, os triângulos equiláteros BCE e CDF.



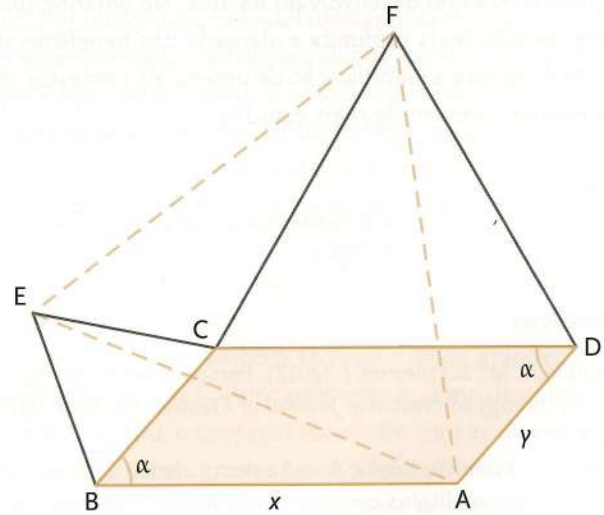
O Eduardo garante que as distâncias AE, AF e EF são iguais. Terá razão?

Prolongamento: E se os triângulos equiláteros forem construídos na direção do interior do paralelogramo?

Recebemos 15 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Andreia Hall, Carlos Dias, Edgar Martins (Queluz), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Ilca Cruz, João Pereira (São Martinho do Porto), Laura Almeida, Luís Bernardino, Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Renato Agostinho (em colaboração com professores da Associação de Escolas Carlos Gargaté) e de um grupo de quatro professores da EB 2/3 Dr. Pedrosa Veríssimo de Paião: Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

Praticamente todas as respostas seguiram a mesma via de resolução para a primeira parte do problema.

Demos a palavra ao Alberto Canelas.



Os triângulos AFD, ABE e ECF são iguais pois têm dois lados iguais e os ângulos por eles formados iguais.

De facto:

$AB = FD = FC = x$

$EB = AD = EC = y$

$\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABE = 60^\circ + \alpha$

$\sphericalangle ECF = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 180^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha$

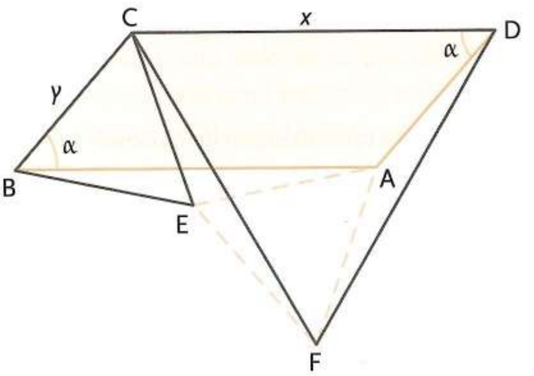
Portanto, $AE = FA = FE$.

Prolongamento

Com os triângulos equiláteros para o interior, era necessário, como muito bem notou o Luís Bernardino, analisar três casos: $\alpha < 60°$, $\alpha = 60°$ e $\alpha > 60°$.

A maioria dos leitores apenas resolveu para o primeiro caso. Como os processos são bastante semelhantes, será esse apenas que apresentaremos aqui.

Seja $\alpha < 60°$



Temos $180° - \alpha > 120°$.

Os três triângulos, analisados na primeira parte, estão agora invertidos. Consideraremos então os triângulos ABE, AFD e CEF e mostremos que eles são iguais.

Temos novamente:

$AB = FD = FC = x$

$EB = AD = EC = y$

E ainda:

$\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABE = 60° - \alpha$

$\sphericalangle ECF = 180° - \alpha - 60° - 60° = 60° - \alpha$

Pelo critério de igualdade de triângulos (LAL) conclui-se que os três triângulos são iguais, donde resulta $AE = FA = FE$.

À descoberta da criatividade na aula de Matemática

Sandra Pinheiro

Este texto tem por base uma investigação mais vasta realizada no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática, centrando-se na criatividade associada à resolução e formulação de problemas ao nível do 2.° ciclo. Neste estudo, desenvolveu-se uma experiência didática para a qual foram criteriosamente selecionadas tarefas quer de resolução de problemas quer de formulação de problemas, que proporcionaram diferentes produções, representativas de diversas e criativas formas de pensar das díades, estimulando o seu potencial e dando a liberdade de comunicarem criativamente. A aplicação de problemas com múltiplas resoluções permitiu concluir que estes promovem o potencial criativo nos alunos, criando nos mesmos o gosto pela descoberta e por marcarem a diferença nas suas opções.

A resolução e formulação de problemas e a criatividade

De acordo com o NCTM (2007) as boas tarefas permitem a introdução de noções matemáticas cruciais, constituindo deste modo um repto aos alunos, permitindo-lhes diferentes abordagens. Neste sentido, a resolução de problemas é parte integrante e fundamental em toda a aprendizagem matemática. Por outro lado, os problemas mais estimulantes, que desafiam os alunos, necessitam de um ponto de vista diferente, que proporcione um pensamento mais rico, diferente, complexo e, ao mesmo tempo, mais produtivo. O uso da resolução de problemas como capacidade transversal no processo de ensino-aprendizagem da matemática dá origem a diferentes formas de pensar e a práticas de perseverança e curiosidade, promovendo a confiança ao enfrentar situações novas. Esta capacidade revela-se extremamente importante quer no contexto extra sala de aula, quer no próprio cotidiano de cada aluno.

Polya (2003) refere que numa aula de matemática a resolução de problemas fica empobrecida se não se articular com a formulação de problemas. Incorporar as tarefas de formulação de problemas no processo de ensino/aprendizagem da matemática beneficia os alunos pois permite aprofundar os conceitos matemáticos envolvidos assim como possibilita a compreensão dos processos resultantes da sua resolução (Boavida *et al.*, 2008).

Na disciplina de matemática, a criatividade deriva da ligação entre a formulação e a resolução de problemas. A atividade criativa vê-se no jogo de formular, na tentativa de resolver, reformulando e eventualmente, resolvendo um problema (Silver, 1997). Ao trabalharem a formulação de problemas, os estudantes estão a inovar e a criar, participando ativamente na sua aprendizagem.

Na atualidade, qualquer sistema educacional deve permitir o desenvolvimento de estudantes criativos capazes de enfrentar situações inesperadas e de realizar escolhas criteriosas, particularmente de modos incomuns (Conway, 1999; Gontijo, 2007).

A Matemática surge como um contexto apropriado para o desenvolvimento da criatividade, apesar de o sistema de ensino nem sempre o valorizar (Silver, 1997). «Todos nascemos com enormes capacidades criativas. Mas essas capacidades têm de ser desenvolvidas» (Robinson, 2010, p. 64).

No entanto, segundo Vale e Pimentel (2012), a criatividade tem estado ausente da aula de matemática, muitas vezes por os professores não terem conhecimento sobre o tema e/ou ainda não terem perceção da sua pertinência em matemática e no ensino da matemática.

A criatividade não é apenas própria de alunos sobredotados ou excecionais, mas pode ser promovida amplamente na população escolar em geral através da realização de tarefas de formulação e resolução de problemas (Silver, 1997). Para Sriraman (2004) «a criatividade matemática é o procedimento que resulta em resoluções invulgares e perspicazes para um determinado problema, independentemente do nível» (p. 51).

Alguns autores (e.g. Conway, 1999) consideram que as produções dos alunos em resolução de problemas devem ser analisadas contemplando três dimensões da criatividade: fluência, flexibilidade e originalidade (ver artigo desta revista nas pp. 10–11).

Diferentes investigadores assumem que as tarefas de formulação de problemas podem ser uma ferramenta na avaliação da matemática criativa. Em relação a estas tarefas, Leikin, Koichu e Berman (2009), afirmam que *fluência* corresponde ao número de problemas levantados que se ajustam aos requisitos da tarefa; *flexibilidade* corresponde ao número de diferentes tipos de problemas colocados; *originalidade* corresponde ao facto de os problemas colocados serem únicos ou raros. Foi seguido este modelo para a análise ao nível da formulação de problemas, considerando-se raros, aqueles que foram apresentados por um máximo de duas díades.

Uma experiência em díade

A experiência didática subjacente a esta investigação decorreu, ao longo das aulas de matemática, no 5.° ano de escolaridade, numa turma de vinte e um alunos, entre os nove e os onze anos. Inicialmente, foram exploradas diferentes estratégias de resolução de problemas, dotando os alunos de ferramentas que facilitassem a realização das tarefas. A turma foi organizada em díades, às quais a cada aula foi distribuída uma tarefa de resolução de problemas e uma tarefa de formulação de problemas. Cada díade apresentava apenas um registo da resolução de cada uma das tarefas. As díades que foram objeto deste estudo foram os *Matmasters* e os *Resolucionistas*, nomes estes escolhidos pelos elementos das próprias díades.

Nesta experiência didática a professora elencou previamente algumas resoluções expectáveis para cada um dos problemas, acompanhou o trabalho realizado pelas díades, selecionou os alunos para a apresentação do seu trabalho à turma, organizou os trabalhos e promoveu discussões com a turma evidenciando as conexões entre as resoluções e as ideias matemáticas.

A experiência ocorreu no tópico *Números racionais não negativos*. Na recolha dos dados incluem-se as observações na sala de aula, questionário, notas de campo, entrevistas e produções escritas dos alunos.

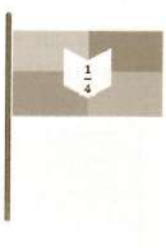
O despontar da criatividade

As tarefas de resolução de problemas e de formulação de problemas aplicadas eram de diferentes contextos de modo a promover diferentes interpretações, ideias e problemas. Foram aplicadas diversas tarefas quer de resolução quer de formulação de problemas, das quais são apresentadas algumas das duas tipologias.

Resolução de problemas

Uma das primeiras tarefas propostas no âmbito da resolução de problemas é a que se segue:

A professora Ana decidiu fazer com os seus alunos bandeirinhas para enfeitar a festa da vila. Propôs alguns materiais para a construção: folhas de papel retangular brancas; marcadores ou lápis de cor; cola; régua; palitos ou palhinhas e instruções para a sua construção. Cada aluno teria de dividir a folha em partes geometricamente iguais, tantas quantas conseguisse, de acordo com o país dos «meios» 1/2; país dos «terços» 1/3; país dos «quartos» 1/4. Depois de dividir o papel teriam de colorir cada uma das partes com diferentes cores e construir noutro papel um dístico com o nome do país.



Apresenta diferentes possibilidades de construir as bandeiras do país dos «meios», dos «terços» e dos «quartos».

Nesta tarefa, as duas díades do estudo apresentaram resoluções dentro das expectativas, como é possível observar na Figura 1.

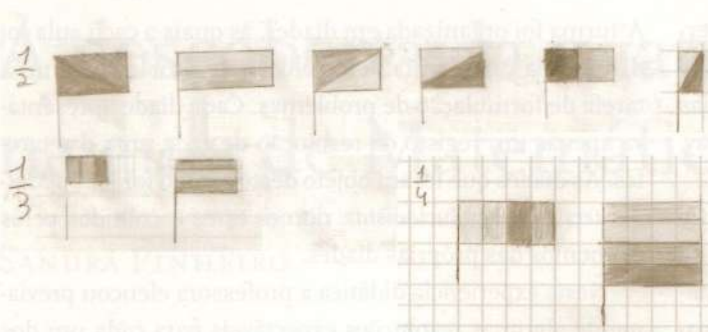


Figura 1.— Resoluções expectáveis

Surgiram ainda resoluções raras ou até mesmo únicas, em diferentes díades, no «país dos quartos», possíveis de observar na Figura 2.

Numa díade, surgiu um solução única para o país dos meios, como é possível observar na Figura 3.

Esta díade, quando questionada pela professora relativamente à estratégia utilizada para desenhar esta bandeira, apresentou a seguinte justificação:

Prof – Como chegaram a esta bandeira do país dos meios?

Aluno V – Pegamos na diagonal do retângulo e andamos [parou por momentos]

Aluno D – Uma quadrícula...

Aluno V – Sim... andamos uma quadrícula para a direita na parte de cima do retângulo. [Com os dedos na figura] depois andamos também uma quadrícula para a esquerda na parte de baixo do retângulo.

Aluno D – E ficamos com duas partes iguais!

Prof – Que figuras obtiveram?

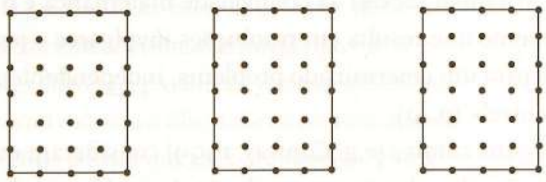
Aluno D – Foram dois quadriláteros!

Segue-se uma das últimas tarefas aplicadas na resolução de problemas:

Imagina que és um pintor muito famoso. Para o teu próximos quadro, decidiste que ele deverá estar dividido em diferentes partes. Cada parte do quadro deverá representar uma das frações 1/3, 1/4, 1/6, 1/8, 1/12, 1/24, do quadro.

Imagina que o retângulo de fundo ponteado representa uma tela. Descobre o modo de representar as diferentes frações e pinta cada uma delas de cores diferentes.

Consegues representar as frações de outros modos diferentes? Se sim, apresenta cada um desses modos nas seguintes telas:



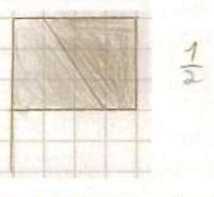


Figura 3.— Resolução única

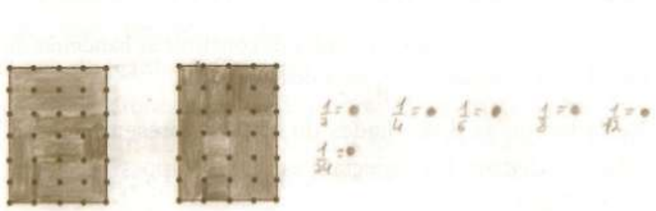


Figura 4.— Resolução mais comum

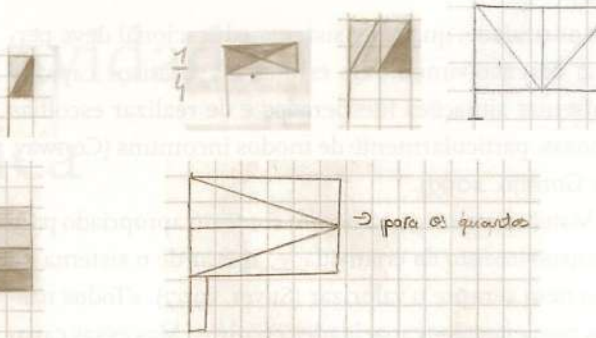


Figura 2.— Resoluções raras e/ou únicas

Esta foi uma das últimas tarefas aplicadas devido à sua complexidade. Era expectável que os alunos representassem as frações em «bloco», como é observável na Figura 4, realizada pelos *Matmasters*.

Esta díade apresentou uma outra solução onde separa as peças de cada «bloco» em pequenas porções de cada fração — Figura 5 — solução apresentada por outras díades, mas em pequeno número. Mas esta díade, de modo inesperado, apresentou ainda as soluções presentes na Figura 6, onde divide cada quadrícula em duas e quatro partes, afirmando ainda que existiam mais soluções.

Figura 5.— Resolução pouco vulgar

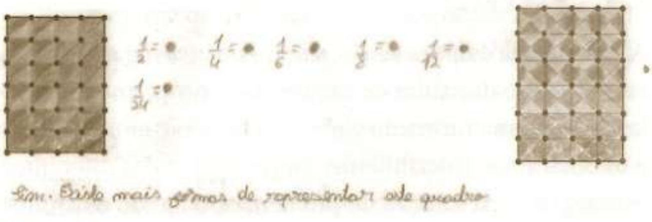


Figura 6.— Resoluções únicas

Uma das primeiras tarefas de formulação de problemas aplicadas foi a seguinte:

Observa a imagem e inventa dois problemas relacionados com a mesma. Dá largas à tua imaginação. Sê criativo!

No final resolve-os.

Tratava-se de uma tarefa completamente aberta, sem qualquer restrição. Surgiram diferentes resoluções, algumas bastante básicas para o nível de ensino e/ou com enunciados incompletos, como é possível observar pela Figura 7.

Uma outra resolução é a apresentada na Figura 8 — que, apesar de ter um nível mais elevado e de ser uma resolução real, não é realista. Esta foi considerada uma resolução original no contexto da turma.

Uma das últimas tarefas de formulação propostas Foi:

Observa os dois quadrados representados nas duas figuras

Consegues criar um problema que utilize a informação das duas

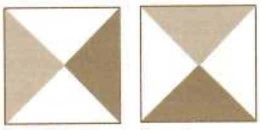


Figura 1 Figura 2

figuras? Consegues inventar outro?

Resolve os problemas que criaste.

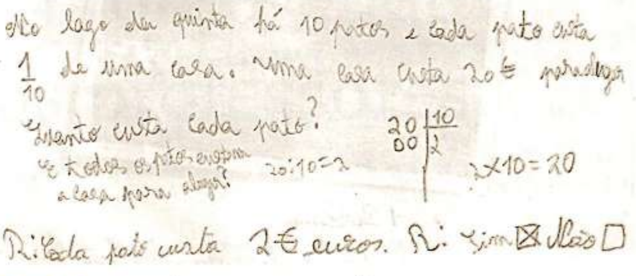


Figura 8.— Resolução mais complexa

A Figura 9 apresenta uma produção original para esta tarefa, já que nenhuma outra exibiu um problema deste tipo.

Este problema é compreensível, apesar de apresentar um enunciado desorganizado em termos da linguagem. A díade contextualiza o problema, a fim de trabalhar um padrão de repetição, que é um tema em que os alunos, de um modo geral, estão pouco à vontade.

A criatividade das resoluções apresentadas pelos *Matmasters* e *Resolucionistas* foi analisada nas três dimensões da criatividade — fluência, flexibilidade, originalidade — em relação, quer à resolução quer à formulação de problemas. Em cada tarefa foram atribuídos pontos para cada uma das dimensões: fluência, um ponto para cada solução ou resolução correta; flexibilidade, um ponto para cada solução ou resolução de uma natureza diferente; originalidade, um ponto para cada solução única ou resolução original. Considera-se como original se no máximo de duas díades apresentar a mesma solução e/ou resolução. Para as outras díades da turma, foi utilizado o mesmo processo de atribuição de pontos.

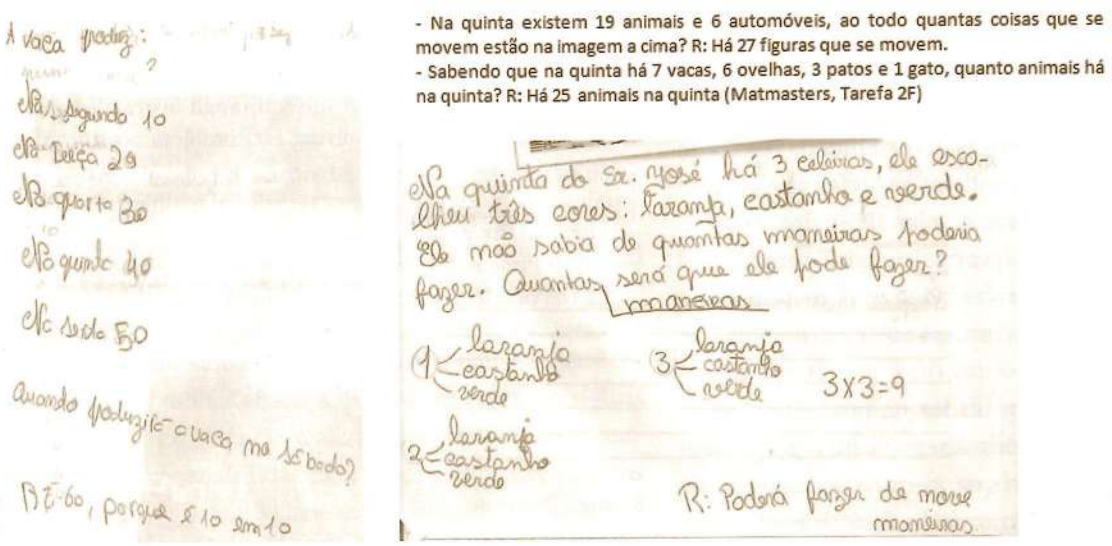


Figura 7.— Resoluções apresentadas para a tarefa

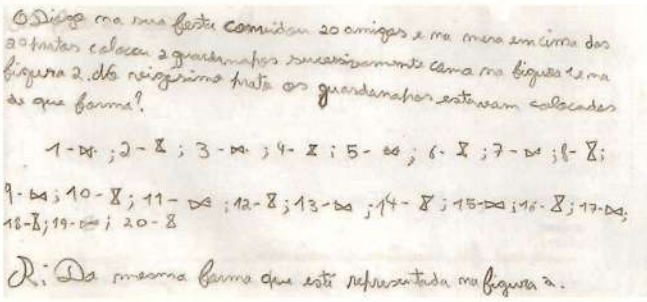


Figura 9.— Formulação e resolução do problema criado

Analisado de forma minuciosa todo o trabalho realizado pelas díades segundo as dimensões da criatividade e comparando o seu desempenho foi possível verificar que existiram variações. No entanto, a díade que globalmente apresentou melhor desempenho na resolução de problemas ao nível das dimensões da criatividade foi os *Matmasters*.

Em relação ao desempenho dos alunos na formulação de problemas, contabilizou-se o número de situações propostas para formularem problemas, num total de oito, a que foram atribuídos pontos ao nível das dimensões: fluência, um ponto por cada problema criado, de acordo com a situação proposta e com possibilidade de resolução; flexibilidade, um ponto por cada problema criado de diferente tipologia, de acordo com a situação proposta e com possibilidade de resolução; originalidade, um ponto por cada problema criado único ou raro, de acordo com a situação proposta e com possibilidade de resolução. Todo o trabalho realizado pelas díades na formulação de problemas segundo as dimensões da criatividade e comparando o seu desempenho mostrou que as díades, *Matmasters* e *Resolucionistas* apresentaram melhor desempenho no geral e em relação à turma.

Algumas notas finais

Na aprendizagem em contexto escolar devem surgir explorações matematicamente ricas decorrentes da resolução de situações problemáticas, onde os próprios alunos concebem e partilham ideias e raciocínios (Pinheiro, 2013). É fundamental abandonar práticas tradicionais de ensino permitindo aos alunos explorar verdadeiramente as suas capacidades, indo simultaneamente ao encontro das suas expectativas (Robinson, 2010).

Se os alunos forem estimulados na procura de mais, melhores e diferentes soluções desenvolvem o pensamento divergente, possibilitando que, perante uma tarefa, sejam capazes de utilizar as ferramentas das quais estão munidos. O desenvolvimento da experiência didática em díade revelou-se bastante motivador para os alunos e simultaneamente eficaz no que respeita ao seu desempenho.

A formulação de problemas não pode dissociar-se da resolução de problemas porque elas formam um todo (Pinheiro, 2013). Todo o trabalho desenvolvido proporcionou aos alunos experiências diversificadas, bastante ricas e simultaneamente desafiantes, permitindo a utilização das capacidades dos alunos, desde a resolução de problemas até à comunicação, quer verbal quer escrita.

Em forma de conclusão, salienta-se um comentário redigido por alunos que participaram nesta experiência: «a criatividade não é só arte mas sim a nossa forma (capacidade) de pensar».

Referências bibliográficas

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico — Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Conway, K. (1999). Assessing Open-Ended Problems. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*, 510–514.

Gontijo, C. (2007). *Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática em alunos do ensino médio*. Tese de doutoramento. Universidade de Brasília, Brasília.

Leikin, R., Koichu, B., & Berman, A. (2009). Mathematical giftedness as a quality of problem-solving acts. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu Eds.), *Creativity in Mathematics and Education of Gifted Students* (pp. 115–128). Rotterdam: Sense Publishers.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (1.ª edição ed.). (M.Melo, Trad.) Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).

Pinheiro, S. (2013). *A criatividade na resolução e formulação de problemas: Uma experiência didática numa turma de 5.° ano de escolaridade* (Tese de Mestrado). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas* (1.ª ed.). (L. Moreira, Trad.) Lisboa (Trabalho original publicado em 1945): Gradiva.

Robinson, K. (2010). *O Elemento*. Porto: Porto Editora.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3*, 75–80.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator, 14*(1), 19–34.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática — Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 347–360). Lisboa: SPIEM.

Sandra Pinheiro
Escola Básica dos 2.° e 3.° Ciclos Frei João de Vila do Conde

Trilhos matemáticos: promovendo a criatividade de futuros professores

Ana Barbosa
Isabel Vale
Rosa Antónia Tomás Ferreira

Neste artigo partilhamos alguns aspetos de uma experiência levada a cabo em duas instituições de ensino superior, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo (ESEVC) e Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP), ao nível da formação inicial de professores que ensinam matemática (desde o 1.° ciclo do ensino básico ao ensino secundário), em que desafiámos os futuros professores a construir trilhos matemáticos. Depois de explicar o que entendemos por trilhos matemáticos, apresentamos alguns resultados da experiência realizada, focando a nossa análise nas tarefas construídas para esses trilhos e em alguns aspetos relativos à criatividade matemática dos futuros professores evidenciada nos seus trabalhos.

Da motivação à criatividade: Os trilhos matemáticos

O ambiente afetivo é um fator preponderante nas expectativas e nas motivações iniciais dos alunos no que se refere à aprendizagem da matemática. Pode dizer-se ainda que a motivação para aprender (matemática) é claramente influenciada pelas interações que ocorrem entre pares e com o professor, bem como pelas tarefas desenvolvidas (e.g., Middleton & Spanias, 1999; Pintrich, 2003). É, por isso, fundamental que o professor procure utilizar diferentes abordagens para que os alunos compreendam o sentido estético, o prazer lúdico e a utilidade da matemática, visando simultaneamente o desenvolvimento de capacidades cognitivas de ordem superior, como a resolução de problemas, a comunicação, o raciocínio e a criatividade. No entanto, muitas vezes, os alunos evidenciam dificuldades no desenvolvimento de capacidades desta natureza, mostrando-se incapazes de estabelecer conexões entre diferentes tópicos matemáticos ou até mesmo de usar um raciocínio flexível, facto que se pode atribuir, frequentemente, a abordagens tradicionais utilizadas pelos professores (e.g., Middleton & Spanias, 1999).

Os alunos devem ser confrontados com desafios que motivem a emergência de atitudes positivas face à matemática. Entende-se aqui *desafio* como uma questão colocada deliberadamente para motivar uma tentativa de resolução, e que procura ao mesmo tempo que os alunos aprofundem o conhecimento e a compreensão de determinados tópicos (Barbeau, 2009). Em particular, um *problema matemático desafiante* envolve curiosidade, imaginação e criatividade, tornando-se interessante e agradável de resolver, embora possa não ser de compreensão ou de resolução fácil (Freiman *et al.*, 2009). Deste modo, a aprendizagem da matemática deve ir além da exploração de tarefas rotineiras, sendo enriquecida com tarefas desafiantes.

Muitos autores defendem que a criatividade pode ser desenvolvida através da resolução e da formulação de problemas (e.g. Freiman *et al.*, 2009). De facto, a resolução de problemas desafiantes que, em particular, possibilitam múltiplas (re)soluções, bem como o processo de criação de problemas, contribuem para que os alunos se envolvam de forma mais eficaz em atividade matemática rica, se mostrem mais motivados para realizar tarefas cognitivamente mais exigentes e pensem de forma divergente, desenvolvendo, desta forma, o seu potencial criativo (e.g. Silver, 1997).

Bolden, Harries e Newton (2010) consideram importante discutir com (futuros) professores as suas perspetivas acerca da criatividade em matemática, tentando compreender o modo como estas ideias têm impacto nas suas práticas. Neste sentido, não é suficiente que os professores conheçam o significado geral de criatividade, mas percebam que as suas dimensões (e.g. fluência, flexibilidade e originalidade) podem variar de acordo com a disciplina e o contexto que estão a abordar (Vale, Barbosa & Pimentel, 2014). Os professores têm um papel crucial no desenvolvimento do potencial criativo dos alunos, proporcionando-lhes experiências de aprendizagem adequadas. É, por isso, importante que os professores desenvolvam também o seu poder criativo para que melhor possam trabalhar a criatividade com os seus alunos. Este potencial criativo não se desenvolve apenas dentro da sala de aula, podendo este trabalho ser complementado em outros ambientes educativos, como os contextos de aprendizagem não formais.

De acordo com Kenderov e colegas (2009), a sala de aula é apenas uma das «casas» onde a educação tem lugar. Neste sentido, é importante salientar que o processo de aquisição de conhecimento matemático pode assumir diferentes formas, podendo ocorrer tanto dentro como fora da sala de aula. Por exemplo, o recurso ao meio envolvente como ambiente educativo pode promover nos alunos atitudes positivas e uma motivação adicional para o estudo da matemática, permitindo-lhes compreender a sua aplicabilidade, mas também desenvolver capacidades e conhecimentos matemáticos associados a todos os temas do currículo.

Embora haja muitas formas de aprendizagem fora da sala de aula (por exemplo, participação em competições, realização de visitas de estudo), há elementos que se distinguem como sendo traços comuns. Todas proporcionam experiências diretas com o meio envolvente, são cenários de aprendizagem em contexto real que dão significado aos conceitos aprendidos na sala de aula, implicam uma aprendizagem ativa envolvendo os alunos em tarefas de exploração e descoberta (Moffett, 2011). Neste contexto surgem os trilhos matemáticos.

Um *trilho matemático* consiste numa «sequência de paragens ao longo de um percurso pré-planeado, no qual os alunos estudam matemática no ambiente que os rodeia» (Cross, 1997, p. 38) e oferece experiências concretas de aprendizagem para qualquer um dos conceitos matemáticos ensinados no currículo da matemática escolar. Através da realização de um trilho, os alunos usam e aplicam, em contexto real, a matemática que aprenderam na sala de aula, podendo mobilizar também conhecimentos informais do dia-a-dia. Por outro lado, também poderão servir de ponto de partida para a exploração de determinados conceitos na sala de aula. Trata-se assim de um meio de proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem reais e significativas, ajudando-os a apreciar a importância da matemática como uma parte integrante do quotidiano. Uma vez que se realiza fora da sala de aula, um trilho matemático cria uma atmosfera de aventura e exploração, dando aos alunos a oportunidade de, entre outras tarefas, resolver problemas (em contexto real), bem como de formular problemas. A realização de um trilho matemático contribui ainda para o estabelecimento de conexões matemáticas de ordem diversa (entre conceitos e/ou procedimentos matemáticos, entre a matemática e outras áreas do saber, entre a matemática e o real), para a compreensão da utilidade da matemática no mundo e também para o desenvolvimento do pensamento criativo. Em particular, os trilhos

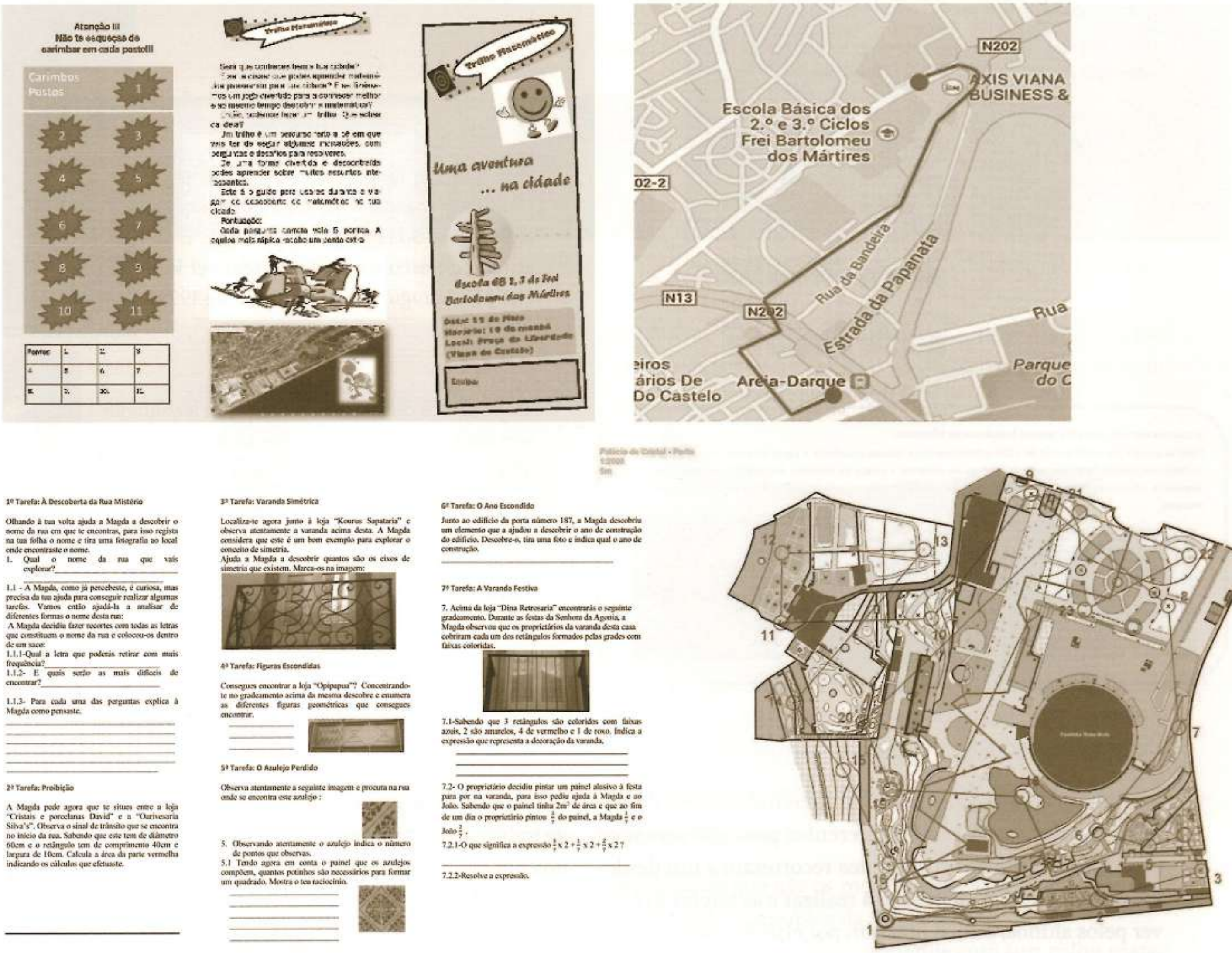


Figura 1.— Exemplos de estruturas dos trilhos matemáticos construídos.

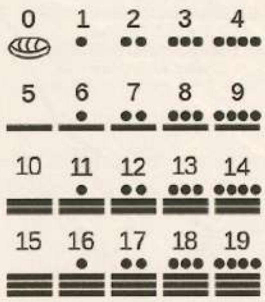
podem também contribuir para, a par da matemática, explorar outras áreas curriculares, como por exemplo as ciências naturais, e promover o conhecimento arquitetónico, paisagístico e histórico, entre outros, de uma cidade ou vila (Vale *et al.*, 2008).

Os trilhos matemáticos na formação inicial de professores

Tomando como referência as ideias que explicitámos anteriormente, e considerando o papel determinante que os professores têm no processo de ensino e aprendizagem, desenvolvemos um trabalho com dois grupos de futuros professores do ensino básico e do ensino secundário, um da ESEVC (60 estudantes) e outro da FCUP (18 estudantes). Propusemos a estes estudantes que, em pares ou pequenos grupos, construíssem um trilho matemático na respetiva cidade, formulando tarefas matemáticas inspiradas em elementos do meio local e direcionadas a alunos do ensino básico. Os futuros professores começaram por selecionar livremente uma artéria e/ou zona da respetiva cidade, recolhendo fotografias de elementos característicos do meio local e com potencial para inspirar a construção de tarefas matemáticas (por exemplo, janelas, edifícios, monumentos, jardins, portas, ferro forjado, azulejos, sinais de trânsito, arruamentos, pavimentos). No seio de cada grupo, os futuros professores tiveram a oportunidade de partilhar as tarefas que desenharam, obtendo assim *feedback* do seu trabalho da nossa parte, como formadoras, e por parte dos seus pares. O produto final foi apresentado sob a forma de um trilho matemático, com um ponto de partida e um ponto de chegada, destacando paragens no percurso escolhido onde as tarefas matemáticas eram propostas. Apresentamos a seguir uma breve análise inicial dos trabalhos destes estudantes.

V. **Quinto cruzamento**

Tens duas hipóteses, seguir pela direita ou em frente. Se descobrires o padrão existente na numeração Maia, saberás qual delas escolher.



O que encontraste agora é a famosa Sequência de Fibonacci.
Fibonacci surge por volta do ano de 1200 estabelecendo a famosa sequência, a partir de observações feitas na evolução da população de um casal de coelhos. Ao observar a beleza da natureza, descobriu a presença dessa sequência em várias plantas, como por exemplo, a espiral da folha de uma bromélia, e em vários fenómenos naturais.

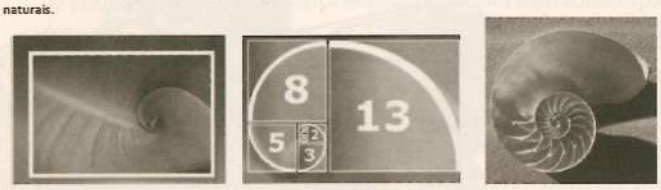


Figura 2.— Exemplos de charadas e curiosidades matemáticas incluídas nos trilhos matemáticos.

Esta Estátua, feita de bronze, representa uma mulher a dar as boas vindas aos visitantes da cidade que vêm do mar. É da autoria do escultor vianense Manuel Rocha e foi inaugurada em outubro de 1999.

Os bordados de Viana do Castelo são inconfundíveis nos trajes típicos e noutros artefactos (p.e. toalhas, chinelas). Usam materiais da região, como tiras de algodão azul e vermelho, bordados em tecido branco ou cru, usando diferentes tipos de pontos (cruz, formiga, pé de flor, cadeia). A sua composição é inspirada em flores, folhas, animais domésticos, elementos geométricos e símbolos, sendo o mais caraterístico o coração.

Figura 3.— Exemplos da introdução de algumas tarefas.

Em ambas as instituições, os diferentes grupos de trabalho escolheram formatos diferentes para apresentar os seus trilhos matemáticos. Muitos recorreram a um desdobrável, que incluía o percurso a realizar e as tarefas a resolver pelos alunos; outros optaram por elaborar uma espécie de *booklet* e outros escolheram o formato de uma ficha de trabalho usual. Em alguns casos, os trilhos incluíam mapas da cidade para leitura e interpretação, abordando assim, implicitamente, um conteúdo programático do ensino básico (Figura 1).

Alguns trilhos incluíram também charadas e perguntas sobre curiosidades matemáticas para que os alunos conseguissem descobrir o percurso a seguir sempre que se encontravam num cruzamento de vias (Figura 2).

Muitas das tarefas apresentadas, quando inspiradas em elementos com alguma relevância arquitetónica, histórica ou cultural, incluíam um pequeno texto introdutório como se pode observar nos exemplos apresentados na figura 3.

Foram ainda apresentados trilhos noutros suportes, que consideramos serem mais originais. A título de exemplo, na figura 4, observa-se um mapa do tesouro, um livro na forma de coração de Viana, e um livro com adivinhas que conduziam à descoberta dos elementos que os alunos deviam identificar. Estas estruturas mais originais ocorreram apenas nos grupos da ESEVC. Os grupos da FCUP optaram por formatos mais convencionais, sobretudo as fichas de trabalho, deixando normalmente espaço para que os alunos pudessem responder no enunciado do trilho.

Alguns dos grupos, como apoio à realização do seu trilho matemático, organizaram um *kit* de materiais (Figura 5) para ser usado ao longo do percurso (por exemplo, régua, fita métrica, corda, lápis, borracha, caderno de notas, calculadora, horário dos comboios). Mais uma vez, este tipo de materiais apenas surgiu nos trilhos elaborados por estudantes da ESEVC.

As tarefas criadas para os trilhos, inspiradas em elementos do meio local, foram organizadas e sequenciadas de modo a permitir que os alunos do ensino básico que percorressem o trilho pudessem resolvê-las no contexto. Que queremos nós dizer com *resolver uma tarefa no contexto?* Queremos realçar que considerar os elementos do meio local usados no *design* da tarefa é importante para a sua resolução. Deste modo, para poderem resolver algumas das tarefas dos trilhos, os alunos necessitam recolher informação *in loco*; no entanto, isto não acontece necessariamente com todas as tarefas dos trilhos: noutras tarefas, a informação necessária para a sua resolução, que deve estar em estreita relação com o(s) elemento(s) do ambiente local considerados no *design* da tarefa, já se encontra disponível no enunciado da própria tarefa. As tarefas formu-

Figura 4.— Exemplos mais originais de estruturas dos trilhos matemáticos.

Figura 5.— Exemplos de *kits* de apoio aos trilhos.

Os três amigos decidiram terminar o seu percurso no Jardim do Morro em Vila Nova de Gaia; para isso teriam de atravessar a Ponte D. Luís I. A Maria começou a pensar quantos metros teria de percorrer para completar a travessia da ponte. O João, conhecendo o comprimento da ponte, decidiu auxiliar a sua amiga propondo-lhe as seguintes equações:

A) $x^2 - 370x = 5775$

B) $x^2 + 335x = 11346$

C) $x(x + 150) = -5000$

Apenas uma delas apresenta a solução do comprimento da ponte; ajuda a Maria a encontrá-la.

Um pato mergulha na água para apanhar peixe seguindo a trajetória da equação abaixo, que nos dá, com o decorrer do tempo (t, em segundos), a profundidade (p, em metros):

Sabendo a equação determine:

a) A que profundidade mergulha o pato?

b) Quanto tempo está o pato dentro de água?

Figura 6.— Exemplos de exercícios disfarçados de problemas propostos nos trilhos.

ladas para os trilhos matemáticos, no caso dos estudantes da ESEVC, foram maioritariamente problemas, envolvendo conceitos matemáticos do currículo do 1° e 2° ciclos. No caso dos estudantes da FCUP, as tarefas formuladas distribuíram-se essencialmente por problemas e exercícios, com predominância destes últimos. Aliás, encontramos, com alguma frequência, exercícios *disfarçados* de problemas como os da figura 6. Apesar da maioria das tarefas serem grandemente apoiadas em aspetos visíveis, como sugerido, surgiram algumas que não os mobilizaram, como se pode constatar num dos exemplos da figura 6.

Ao contrário do que se pretende com um trilho matemático, tal como o definimos, foram incluídas algumas tarefas para as quais o contexto real, (supostamente) inspirador da tarefa, se revelou irrelevante (isto é, não era preciso estar no local para resolver a tarefa) ou mesmo irrealista, tal como ilustrado pelas tarefas da figura 7.

Do tempo que o semáforo dura na cor amarela sabemos que:

- O quadrado da diferença entre o tempo e três não excede nem é igual à diferença entre o seu quadrado e três;
- O quadrado da soma da raiz do tempo com 2 é menor do que 4 vezes a soma da raiz com 2.

Determine então em unidades quanto tempo em segundos é que o semáforo permanece na cor amarela.

Olha à tua direita e atenta a esta casa:

Considera que acima da varanda cada piso tem 3 janelas.

1. Completa:
   1° piso: 3 janelas
   2° piso:
   3° piso:
   50° piso:
2. Pode existir um piso com 98 janelas? Porquê?
3. Quantas janelas terá a sequência de ordem n?

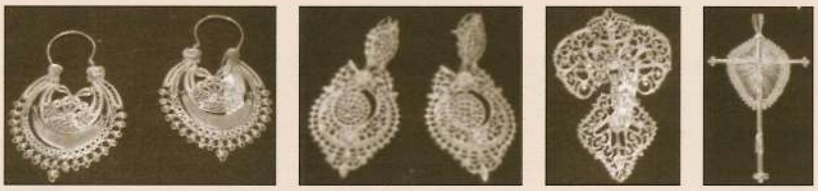
Figura 7.— Exemplos de tarefas com contexto irrelevante ou irrealista.

Dirige-te à *Praça da República*. Lá encontras um chafariz.

1. Sabendo que a menina que está na beirada do chafariz tem 1,55m de altura, estima a altura da fonte.
2. Como poderás medir o seu perímetro? Explica como pensaste

Se olhares para a vitrine da «Ourivesaria Venâncio Sousa» podes ver exposta uma peça chamada «Coração de Viana».

1. Nessa peça observas 10 esferas. Quantos polígonos diferentes podes obter unindo as esferas como se fossem pontos?
2. O preço inicial desta peça de ouro é 400€, mas a loja faz um desconto de 10%. Qual será o preço final?
3. A Sra. Martins comprou esta peça, outros dois pendentes e ainda dois pares de brincos. Sabendo que ela quer usar um colar com um pendente juntamente com uns brincos, de quantas maneiras diferentes pode fazer estas combinações?

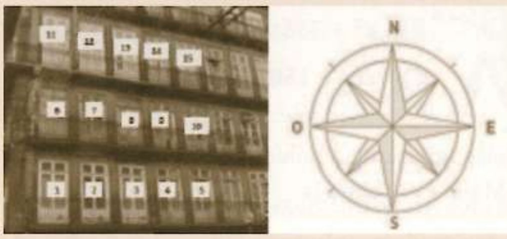


O João está cheio de fome e decidem fazer uma pausa para almoçar na Taberna do Infante.

1. Fotografa a ementa disponível;
2. Para a refeição, os três amigos decidiram que só podiam escolher 1 sopa, 1 prato de carne e 1 sobremesa de fruta.

A Maria avisou logo os colegas que não gosta de salada de fruta e o chefe do restaurante informou-os que não tinha costeletas de borrego. Sabendo que cada adolescente só tem disponível para o almoço 18€, ajuda-os a descobrir quantas opções têm para o seu almoço.

Ajuda a Maria a descobrir em que janela do edifício Navarro está o Paulo. A Maria sabe que:



— não tem ninguém no seu andar e a sua janela localiza-se o mais a este possível;
— a sua amiga Inês está no mesmo andar do Renato, e duas janelas os separam;
— O Renato está numa janela do segundo andar, exatamente abaixo do de Maria;
— O Paulo e o Guilherme estão no andar mais baixo, não estão ao lado um do outro e não estão debaixo de uma janela ocupada.

Se o Guilherme está a sudoeste da Inês, a janela do Paulo pode ser: a)1 ou 3; b) 1 ou 4; c) 3 ou 4; d) 3 ou 5; e) 4 ou 5.

Figura 8.— Alguns exemplos de problemas formulados.

Apesar destes aspetos menos felizes na conceção dos trilhos matemáticos, os futuros professores foram capazes de elaborar tarefas matematicamente interessantes e que foram ao encontro do espírito dos trilhos matemáticos. Na figura 8 apresentamos alguns exemplos destas tarefas.

Em jeito de reflexão...

Em geral, os futuros professores reagiram com motivação ao desafio que lhes foi proposto. Empenharam-se na realização dos trilhos matemáticos e conseguiram construir propostas globalmente interessantes e adequadas aos níveis de ensino e conteúdos temáticos por eles escolhidos. Criar tarefas inspiradas nas fotografias que ilustravam as paragens selecionadas, e para as quais fizesse sentido estar fisicamente no local para as poder resolver, foi talvez a maior dificuldade encontrada na construção dos trilhos, bem como diversificar os conteúdos implicados nas tarefas.

Refletindo sobre como se poderia articular um trilho matemático com a atividade usual de sala de aula, pode dizer-se que, na maioria, os futuros professores encaram este trabalho como uma oportunidade de os alunos aplicarem, de alguma forma, os conhecimentos adquiridos em sala de aula: «O trilho é uma atividade mais descontraída que pode servir para aprofundar e treinar a matéria dada ao longo de um trimestre na formalidade da sala de aula, por exemplo, e depois da atividade o trilho pode ser corrigido e podem ser esclarecidas as dúvidas de volta na sala de aula». Mas houve também quem perspetivasse o trilho matemático como uma forma de abordar conteúdos matemáticos — «Uma vez introduzido o conteúdo de forma 'divertida', informal e mais perto do real, pode-se formalizar e aprofundar o conteúdo através do trabalho em sala de aula» — indo além da nossa conceção inicial desta atividade fora da sala de aula. Apesar das potencialidades do uso de um trilho matemático em contexto escolar, os futuros professores anteciparam alguns constrangimentos na sua concretização, sobretudo ligados a aspetos de gestão (falta de tempo, necessidade de envolver outros docentes e de trocar horários, necessidade de obter autorizações dos encarregados de educação, eventuais custos adicionais associados, etc.).

Com esta atividade de construção de trilhos matemáticos, os futuros professores perspetivaram a matemática e a sua aprendizagem de uma forma mais dinâmica e motivadora em relação às suas próprias experiências como alunos: «Nunca tinha tido a ideia ou sequer pensado que a Matemática podia ser tão aplicável ao meio que nos rodeia. Além disso os alunos, em geral, gostam de fazer visitas de estudo e nunca pensam nesse tipo de atividades na disciplina de Matemática e portanto uma atividade como os trilhos dá mais interesse e é uma maneira mais divertida de ensinar/aprender a matéria». Inovação, diversão e motivação foram precisamente os aspetos destacados por estes estudantes como pontos fortes dos trilhos matemáticos relativamente aos alunos do ensino básico ou secundário. Além disso, os trilhos «obrigaram-nos [a eles, futuros professores] a pensar na matemática de uma forma menos formal e mais criativa». Os futuros professores tornaram-se gradualmente mais conscientes e mais atentos à matemática que os rodeia no dia-a-dia, tendo servido este trabalho para que desenvolvessem o seu «olho matemático», tecendo comentários como «nunca olharei da mesma maneira para uma janela ou para o pavimento» ou até mesmo «gostaria de ter aprendido este tipo de matemática».

Em termos de criatividade matemática, os estudantes das duas instituições evidenciaram grande *fluência* pois conseguiram formular um grande número de tarefas. Identificou-se alguma *flexibilidade*, apesar de se terem centrado bastante na temática da geometria e medida. Embora sem termos feito uma análise aprofundada, globalmente, os estudantes da ESEVC evidenciaram maior flexibilidade do que os seus colegas da FCUP; de facto, estes últimos detiveram-se bastante em tarefas menos exigentes cognitivamente, algo repetitivas e apelando muito mais a procedimentos de cálculo do que a processos mais ricos matematicamente, como a resolução de problemas ou o raciocínio. Encontrámos alguns traços de *originalidade* nas produções dos futuros professores sobretudo na proposta de tarefas sobre temas que não são usualmente muito trabalhados nos níveis de escolaridade a que se destinam (por exemplo, organização e tratamento de dados, topologia) e no grau de elaboração apresentadas. A originalidade manifestou-se também na forma como alguns trilhos foram apresentados, como referimos anteriormente.

A experiência realizada na ESEVC e na FCUP mostrou-se promissora no sentido de ter potencial para ajudar a trabalhar, com os futuros professores, várias questões importantes para a sua formação inicial. Nelas se inclui a temática da formulação de problemas (em associação com a reflexão sobre diferentes tipos de tarefas matemáticas e sobre o papel dos contextos) e a criatividade matemática, esta última tanto ao nível dos (futuros) professores (por exemplo na criação de tarefas matematicamente ricas), como ao nível dos alunos (por exemplo, na criação/seleção de tarefas que potenciem nos alunos o desenvolvimento da sua criatividade matemática). Esperamos voltar a ter uma oportunidade para repetir a experiência, refinando alguns contornos da sua implementação de forma a dar mais atenção à formulação de problemas e à criatividade matemática, e também a ir ao encontro das sugestões que nos foram chegando dos próprios futuros professores.

Referências

Barbeau, E. J., & Taylor, P. J. (2005). ICMI study 16: Challenging mathematics in and beyond the classroom. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 125–139.

Bolden, D., Harries, & Newton, D. (2010). Preservice primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 73*(2), 143–157.

Cross, R. (1997). Developing Math Trails. *Mathematics Teaching, 158*, 38–39.

Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdnyakov, S., & Stedøy, I. (2009). Technological environments beyond the classroom. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), Challenging mathematics in and beyond the classroom. *The 16th ICMI Study* (pp. 97–131). New York, NY: Springer.

Kenderov, P., Rejali, A., Bartolini Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom — Sources and Organizational Issues. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom — New ICMI Study Series 12* (pp. 53–96). Springer.

Middleton, J. A. & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 1, 65–88.

Moffett, P. (2011). Outdoor Mathematics Trails: an evaluation of one training partnership. Education 3-13: *International Journal of Primary, Elementary and Early Years Education, 39*(3), 277–287.

Pintrich, P. R. (2003). A motivational science perspective on the role of student motivation in learning and teaching contexts. *Journal of Educational Psychology, 95*, 667–686.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3*, 75–80.

Vale, I., Barbosa, A., Portela, J., Fonseca, L., Dias, N. & Pimentel, T. (2008). *A Matemática e a Cidade — Um roteiro por Viana do Castelo*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação — Projecto MatCid.

Vale, I., Barbosa, A. & Pimentel, T. (2014). Teaching and learning mathematics for creativity through challenging tasks. In S., Carreira, N., Amado, K., Jones, & H., Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving*, p. 335. Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Ana Barbosa e Isabel Vale
Escola Superior de Educação do IPVC

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

30 ANOS APM
1986–2016

Em 2016 a Associação de Professores de Matemática comemora 30 anos de existência. Este será um ano em que celebraremos, recordaremos mas, sobretudo, procuraremos, na fidelidade à origem, um novo compromisso com o presente, digno dos desafios do futuro.

A direção da APM convida os sócios, neste ano de aniversário especial, à participação e à divulgação das iniciativas associativas e, em especial, ao esforço de alargar este espaço de pertença e debate a muitos colegas que connosco podem contribuir para a melhoria do ensino da Matemática no nosso país e para o crescimento da nossa APM.

Bom ano de 30.° aniversário!

Lurdes Figueiral
Presidente da Direção

Estratégias para trabalhar com grandezas e medidas que favorecem a criatividade em Matemática

Alexandre Tolentino de Carvalho
Mateus Pinheiro de Farias
Cleyton Hércules Gontijo

Introdução

A história da humanidade testemunha que os diferentes povos criaram estratégias para medir os objetos que utilizavam e os espaços que ocupavam. Cada um deles possuía suas próprias unidades-padrão. Com o surgimento das cidades e o desenvolvimento das relações comerciais, as trocas de produtos ficaram cada vez mais difíceis, pois não existia um sistema padrão que permitisse comparar tantas medidas diferentes. Para favorecer o estabelecimento de regras comerciais claras e, ao mesmo tempo, permitir comparações e replicações de experiências no campo das ciências, tornou-se necessário a adoção de um padrão de medida único para cada tipo de grandeza. O trabalho com Medidas, no espaço escolar, deveria, em certo grau, possibilitar aos estudantes que vivenciassem atividades semelhantes às dos nossos antepassados para que pudessem compreender e criar diferentes formas para medir as grandezas e perceber a necessidade de uma medida padrão.

Nesse sentido, consideremos que os estudantes, desde muito cedo, têm experiências com as marcações do tempo (dia, noite, mês, hoje, amanhã, hora do almoço, hora da escola) e com as medidas de comprimento, massa, capacidade, temperatura, etc., e isso lhes dá um grande repertório para desenvolver atividades de estimativa, levantamento de hipóteses e análises. Assim, desde a tenra idade, as crianças vivenciam experiências nas quais comparam tamanhos e larguras de objetos, participam de brincadeiras nas quais precisam utilizar partes do corpo para realizar medições, percebem qual o maior pedaço de um bolo, qual copo possui mais refrigerante, etc. Tais vivências podem contribuir com a personalização da informação (Mitjáns Martínez, 2012) no processo de aprendizagem matemática, pois há — integração de experiências de vida ao processo de produção de conhecimento — realizando uma aprendizagem que supera a mera reprodução ou compreensão de conceitos.

Podemos levar em conta ainda, que o trabalho com Medidas aponta um papel articulador dos outros temas matemáticos, o que permite compreender a matemática como um todo coerente. O aluno pode perceber a matemática como sendo «constituída por uma complexa rede de relações que lhe confere uma unidade muito particular» (ME, 2013, p. 5).

O presente estudo pretendeu dar um passo em direção à compreensão do trabalho com Medidas como espaço de aprendizagem matemática criativa, almejando construir estratégias que possam estimular a criatividade nessa área do conhecimento. Além disso, objetivou-se analisar as soluções apresentadas pelos alunos aos problemas matemáticos com o intuito de compreender quais os elementos caracterizadores da aprendizagem criativa no campo da Matemática foram manifestados em suas produções.

Estratégias para o desenvolvimento da criatividade matemática: pressupostos de partida

Aprender criativamente, conforme Mitjáns Martínez (2012), denota um tipo de aprendizagem que se distancia da aprendizagem memorística e da aprendizagem compreensiva, comumente encontradas no ambiente escolar, se expressando:

a) Na personalização da informação (transformação, a partir dos conhecimentos que o aluno já possui, de informações recebidas que se articulam com os conceitos ainda não sistematizados do indivíduo passando a fazer parte de seu arcabouço de conhecimentos);
b) Na confrontação com o dado (transgressão da informação, não a aceitando como verdade intransponível — o aluno percebe falhas, lacunas e contradições, favorecendo a produção e geração de ideias);
c) Na produção e geração de ideias próprias e novas. Uma aprendizagem criativa caracteriza-se pela apresentação de novidades que transcendem a compreensão da informação fornecida.

Desse modo, as estratégias aqui desenvolvidas levaram em conta uma aprendizagem criativa realizada por meio de atividades nas quais: a) os alunos possam expressar suas histórias de vida realizando a personalização da informação; b) os alunos possam exercer seu senso crítico, confrontando as informações recebidas e percebendo lacunas e falhas que podem ser superadas por meio de sua ação criativa; c) os alunos possam gerar ideias próprias e novas superando a mera reprodução e compreensão dos conteúdos; d) as tarefas possibilitem ações sociorrelacionais apresentando situações solucionáveis em colaboração com os pares; e) os problemas representem situações desafiadoras que motivem os alunos na busca de soluções criativas.

Analisando o trabalho desenvolvido

Tais estratégias foram realizadas no ano de 2014 com um grupo de alunos brasileiros de 8 e 9 anos de idade matriculados no 3.° ano do 1.° ciclo do Ensino Básico. Identificaremos os alunos por meio da letra inicial de seus nomes.

As estratégias foram se constituindo no decorrer do desenvolvimento dos conhecimentos sobre Medidas, sendo cada estratégia decorrente dos dados coletados na estratégia anterior. Assim, foram desenvolvidas em três momentos distintos, sendo que cada momento ocorreu em uma sessão de três horas realizadas durante as aulas dos alunos. De tal forma, para cada estratégia foi concebido um instrumento:

a) Conhecendo as experiências de vida dos alunos

Essa estratégia possibilita ao professor coletar informações sobre os conhecimentos prévios que os alunos possuem em relação ao assunto estudado e permitem reconhecer algumas configurações sobre o meio social no qual os alunos estão inseridos. Com essas informações, o docente pode organizar o desenvolvimento do conhecimento auxiliando os alunos na personalização da informação aproximando o aprendiz do conhecimento trabalhado.

Instrumento: Soltando a Língua

Questionário composto por doze perguntas para coletar, de forma lúdica, informações quanto ao cotidiano dos alunos, quanto às ideias que apresentam sobre Medidas e quanto às expectativas em torno de tal aprendizagem. Há um cartaz no qual são dispostas figuras de sapos. Na língua de cada sapo existe uma pergunta orientadora e os alunos desenrolam a língua dos sapos, leem as perguntas e são orientados a respondê-las levando em conta suas histórias de vida.

Como exemplos de itens pode-se citar: O que é medir? Em que situações as pessoas medem em casa, no mercado, na feira? O que utilizamos para medir? Como eu posso saber quem é mais rápido em uma corrida?

O questionário, realizado com a turma coletivamente e de uma forma mais descontraída, possibilitou um maior conhecimento sobre os alunos, uma caracterização, mesmo que não tão aprofundada das preferências e experiências prévias com Medidas.

Foi uma etapa importante para colher elementos que dariam base para a elaboração das estratégias seguintes.

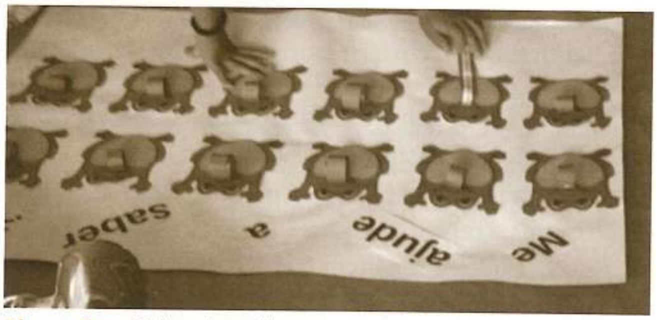


Figura 1.— Soltando a Língua

Os alunos eram orientados a falar aquilo que sabiam sobre o tema e pensar coisas diferentes dos demais colegas.

Ao responderem à primeira questão (O que é medir?) os alunos demonstraram um conhecimento bastante restrito, emitindo respostas que estavam ligadas somente a medidas de comprimento, como na fala de J que se posicionou: «medir é quando pega uma fita métrica e coloca em um objeto para medir o tamanho» e na fala de G «é pegar um lápis e riscar a parede para ver o tamanho da pessoa ou da criança». Essa compreensão restrita ficou evidente durante todo o processo de desenvolvimento do questionário. Haylock (1997) chama essa compreensão reduzida como fixação de conteúdo universal e Krutetskii (1976) a denomina de auto-restrição. O pensamento do aluno sobre um problema matemático é restrito desnecessariamente a uma gama insuficiente de elementos.

A intervenção da professora e dos pesquisadores foi, então, ampliando o conhecimento a respeito das Medidas. A fala de E, «medimos também as bebidas», marca o momento em que os alunos passam a perceber um campo mais amplo no qual se utilizam Medidas. A partir de então, falas como a de P dizendo que sabemos a quantidade de refrigerante olhando o número e a letra L, símbolo reconhecido pelos alunos como a unidade «litro» e a fala de G dizendo que os refrigerantes pequenos apresentam as letras ML (mililitro), ou ainda a fala de J de que medimos a carne colocando na balança, apontam uma compreensão ampliada.

Essa ampliação de perspectiva em relação às Medidas permite surgir, além das informações a respeito dos conhecimentos e interesses dos alunos, algumas configurações criativas apontadas na fala dos estudantes. Destaca-se entre essas configurações algumas respostas de certa forma «transgressoras» do conhecimento que até então os alunos apresentavam, ao serem questionados sobre o que utilizamos para medir. Enquanto a maioria dos alunos recordava-se de instrumentos anteriormente citados, como fita métrica, balança, régua, o calendário, o relógio, o aluno L citou o uso da mão como instrumento para medir os músculos do braço de uma pessoa. A resposta do aluno provocou risos e estranheza, no entanto, ao demonstrar e comprovar sua hipótese, os outros alunos concordaram e validaram essa resposta.

A participação do aluno P foi surpreendente ao responder que utilizamos os óculos como instrumento de medida. Ele é filho de uma dona de clínica oftalmológica e, devido a sua experiência de vida, P utilizou as informações até aquele momento recebidas e realizou uma verdadeira personalização da informação confrontando as ideias predominantes entre os alunos e gerando ideias próprias e novas. O aluno estava se referindo ao *refrator de greens*, um aparelho utilizado para medir o grau de cada lente dos óculos. A escuta atenciosa à resposta do aluno e o conhecimento de sua vida extraescolar por parte da professora foram essenciais para que essa resposta original, subversiva dos conhecimentos até então constituídos na sala de aula e, portanto, criativa, não passasse despercebida ou não fosse interpretada como manifestação de indisciplina do aluno.

b) Ampliando conhecimento por meio de resolução criativa de problemas abertos

São utilizadas as informações coletadas na etapa anterior para proporcionar a ampliação do repertório de conhecimento dos alunos por meio de problemas abertos. Esse tipo de problemas não requer dos alunos a busca por uma resposta determinada pela professora a priori, mas permite que o solucionador recorra ao repertório de conhecimentos que possui para criar estratégias de soluções apropriadas. Segundo Carvalho (2015): «Os problemas abertos, ao contrário dos problemas fechados que apresentam soluções únicas, possibilitam ao solucionador aventurar-se no mundo da imaginação, na medida em que o indivíduo sabe não estar preso a processos e a resultados pré-determinados» (p. 73). Tal liberdade favorece o surgimento de respostas originais ao problema dado.

Instrumento: Caderno de Atividades Exploratórias

Foi elaborado levando-se em conta as informações coletadas por meio do questionário «Soltando a Língua» e tem como objetivo integrar as experiências de vida dos alunos ao conhecimento escolar, possibilitando-os superar as informações presentes no instrumento e apresentar ideias próprias por meio do pensamento intuitivo, imaginativo e especulativo. O instrumento se constitui por três atividades realizadas individualmente das quais apresentamos a ilustrada a seguir.

Na segunda sessão, as atividades componentes do Caderno de Atividades Exploratórias suscitaram uma boa dose de imaginação e de originalidade na solução dos problemas, Bianca tirou a foto dos presentes que ganhou de aniversário. Do pai, ela ganhou um celular e da mãe ganhou um boneco.

Figura 2.— Problema aberto 1

- Quanto você acha que custa cada presente?
- Quem gastou mais dinheiro, o pai ou a mãe de Bianca? Quanto foi gasto a mais?
- Qual dos presentes é o mais caro? Por que esse presente é o mais caro?
- Se você pudesse melhorar o presente mais barato para que ele se tornasse o mais caro, que mudanças você faria? Pense em muitas mudanças possíveis. Quanto custaria esse presente após essas melhorias?

porém as ideias apresentadas circundaram em um campo comum de soluções. Assim, na atividade ilustrada anteriormente, por exemplo, ao serem solicitados a propor melhorias no brinquedo mais barato para que ele se tornasse o mais caro, as ideias apresentadas giraram em torno de sugestões de estampar o produto com imagens de personagens conhecidas, acrescentar acessórios e partes do boneco que pudessem ser trocados. No entanto, tal estratégia forneceu ricas informações apontando a necessidade de um trabalho mais voltado para o desenvolvimento do pensamento especulativo e imaginativo dos alunos em relação a esse aspecto.

c) Manipulando Medidas em atividades de grupo

Essa estratégia permite uma rica troca de informações e experiências entre os alunos ao passo em que são estimulados a utilizar o pensamento especulativo para encontrar Medidas convencionais e não convencionais para diversos objetos. Para tanto, lançam mão da construção coletiva de conhecimentos.

Instrumento: atividades manipulativas em grupo

Proporciona momentos de reflexão coletiva priorizando-se atividades-comunicação entre os alunos na busca da elaboração coletiva de estratégias de soluções utilizando materiais manipulativos. O instrumento é composto por duas atividades.

Atividade 1. Classificar três produtos com tamanhos e densidades diferentes (feijão, milho e biscoito) pela ordem decrescente de suas massas indicando as estratégias utilizadas na classificação em três etapas. Na primeira etapa os produtos são colocados em três sacos transparentes contendo Medidas diferentes de cada produto. Os pesos são confirmados em uma balança. Na segunda etapa os produtos são dispostos também em sacos transparentes, no entanto há a mesma quantidade de cada produto. E na terceira etapa, os produtos foram entregues em suas embalagens originais.

Atividade 2. Medir o comprimento de um corredor da escola. Ao invés de realizarem essa medição utilizando fita métrica, são disponibilizados os seguintes objetos como instrumentos de medida: um fio de telefone em espiral, uma barra de ferro, um cabo de vassoura e a alça de uma bolsa feita de couro. Observando esses objetos os alunos devem utilizar a estimativa e responder ao questionamento: A distância da porta da sala até o final do corredor mede quantos objetos iguais a esse? Em seguida, os alunos são orientados a confirmar suas estimativas elaborando estratégias criativas nas quais devem utilizar os objetos disponibilizados para medir o comprimento do corredor.

Nessa sessão, por meio das atividades manipulativas em grupo, os alunos apresentaram algumas soluções para os problemas propostos que transgrediram as formas comumente apresentadas para medir distâncias. Evidenciaremos a seguir os resultados encontrados na realização da Atividade 2, apesar de muitas respostas interessantes terem surgido também na Atividade 1.

A disponibilidade de objetos incomuns na medição de distâncias (cabo de vassoura, barra de ferro, cabo de telefone e alça de uma bolsa) levou os alunos a sentirem-se desafiados permitindo o uso da imaginação e da intuição na elaboração de estratégias de medida do comprimento do corredor da escola. As atividades manipulativas e a condição sociorrelacional na qual foram desenvolvidas possibilitaram a elaboração de estratégias criativas, pautadas pela personalização e transgressão da informação apreendida e geração de ideias novas e próprias. Esse resultado coincide com Muniz (2009) que compreende a atividade matemática como um ato solidário em que ocorre a atividade de troca, confronto, experimentação, validação, discórdia e argumentação.

Como exemplo, podemos citar o grupo que utilizou a alça de uma bolsa como instrumento de medida do comprimento do corredor. Ao invés de medirem a distância colocando o objeto no chão e contando a quantidade de objetos que couberam na distância (estratégia usada pela maioria dos grupos), eles decidiram esticar a alça encostando suas extremidades na barriga de duas crianças e foram girando e contando a quantidade de alças que couberam na distância medida. Com essa estratégia, por sinal criativa, o grupo foi capaz de apresentar uma solução válida e que despendeu menor esforço e menor tempo do que as outras soluções encontradas. Outra solução bastante original foi apresentada pelo grupo que utilizou o cabo de vassoura. Os alunos perceberam que o corredor era calçado por cerâmicas quadradas e que o cabo de vassoura media exatamente três cerâmicas. Assim, ao invés de medir a distância encostando o cabo de vassoura no chão, o grupo decidiu contar o total de azulejos e dividir esse total por três, resultando na quantidade exata de cabos de vassoura.

Conclusões

As análises realizadas elencaram elementos que reforçam o argumento de que a escola, por se constituir como um espaço sociorrelacional (Mitjáns Martínez, 2012) apresenta-se como um ambiente onde é possível desenvolver outras formas de aprendizagem que superem a reprodução e compreensão do aprendido. Não podemos afirmar que houve uma aprendizagem efetivamente criativa nesse curto espaço de tempo no qual foi desenvolvida a pesquisa. No entanto, muitos elementos evidenciados carregam características de uma aprendizagem na qual emergiram ideias novas, próprias e subversivas das informações iniciais apresentadas aos alunos. Podemos, assim, concluir apresentando um conjunto de elementos que se fazem evidentes em relação às estratégias desenvolvidas:

- A estratégia utilizada para coletar dados a respeito do cotidiano dos alunos e das ideias que apresentavam sobre Medidas possibilitou certo conhecimento a respeito da turma e foi essencial para elaborar as demais estratégias de desenvolvimento da criatividade nessa área, além de apresentar momentos de subversão de ideias dominantes no grupo pesquisado;
- A priorização de atividades cujo foco era o uso do pensamento especulativo, imaginativo e intuitivo em detrimento do pensamento algorítmico, possibilitou a expressão de ideias próprias e novas pelos alunos;
- As estratégias utilizadas permitiram uma superação das visões limitadas sobre Medidas, fato que possibilitou a emergência de soluções criativas para os problemas apresentados;
- A estruturação das estratégias por meio de atividades de comunicação, a escuta atenciosa à resposta do aluno e o conhecimento de sua vida extraescolar possibilitaram a construção de estratégias personalizadas de solução dos problemas propostos, a confrontação dos dados apresentados e sua subversão ao serem apresentadas ideias próprias e novas.

Por fim, gostaríamos de evidenciar a necessidade de uma maior atenção por parte dos educadores quanto ao desenvolvimento da aprendizagem criativa em matemática. Vivemos em uma sociedade trincheirada por complexos problemas de ordens diversas e a escola pode, por meio de um ensino que privilegie a criatividade, contribuir com a formação de cidadãos criativos e aptos para solucionar tais demandas urgentes. Lutemos por uma aprendizagem não só reprodutiva e compreensiva, mas também criativa das diversas matemáticas (D'Ambrósio, 2011) que são importantes para o desenvolvimento integral do ser humano.

Referências

Carvalho, A. T. (2015). *Relações entre criatividade, desempenho escolar e clima para criatividade nas aulas de matemática de estudantes do 5.° ano do ensino fundamental.* Dissertação (Dissertação de mestrado não publicada). Universidade de Brasília, Brasília.

D'ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática — elo entre as tradições e modernidade* (4.ª Ed). Belo Horizonte: Autêntica.

Haylock, D. (1997). Recognising Mathematical Creativity in Schoolchildren. *International Journal on Mathematics Education-ZDM*, 29), 68–74.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press.

ME (2013). Programa e Metas curriculares de Matemática. Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Mitjáns martínez, A. (2012). Aprendizagem criativa: desafios para a prática pedagógica. In: C. Nunes (Ed.), *Didática e formação de professores* (pp. 93–124) Ijuí: Unijuí.

Muniz, C. A. (2009). Diversidade dos Conceitos das Operações e suas Implicações nas Resoluções de Classes de Situações. In G. Guimarães e R. Borba (Eds.), *Reflexões sobre o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais de Escolarização* (pp. 101–118). Recife: SBEM.

Alexandre Tolentino de Carvalho
Mateus Pinheiro de Farias
Cleyton Hércules Gontijo
Universidade de Brasília

A atividade de projeto, a criatividade e a voz dos alunos

MANUELA PIRES

Habitualmente proponho aos alunos, durante o secundário, o desenvolvimento de, pelo menos, dois pequenos projetos num período alargado de tempo. Na planificação prevê-se um conjunto de aulas para a escolha do tema, preparação, desenvolvimento e apresentação do projeto, mas muito do trabalho é realizado fora da sala de aula. A atividade de projeto desempenha um papel no currículo que não pode ser substituído por outras tarefas que, podendo ter características comuns como a incerteza ou a complexidade, não permitem o grau de liberdade e autonomia que naturalmente se associam ao seu carácter prolongado e faseado. A envolvência que se gera pode incentivar a iniciativa, a autonomia, a responsabilidade e a persistência e os alunos têm possibilidade de desenvolver tanto as capacidades de pesquisar, selecionar e organizar, como a criatividade, o espírito crítico e a comunicação.

Há dois anos, na minha turma do 11.º ano, uma vez que alguns alunos queriam concorrer ao prémio Pedro Matos da ESTG/Instituto Politécnico de Leiria, cujo tema era «Matemática e Natureza», e não fazendo sentido duplicar esforços, propus que todos os projetos a realizar se enquadrassem nesse tema. A apresentação é realizada no 3.º período e os alunos vão mobilizando os conhecimentos já adquiridos e os conceitos que são trabalhados em simultâneo nas aulas, como é o caso do tema sucessões, lecionado nesse período. O processo e os resultados foram muito criativos. Um dos grupos, constituído pela Ana Aparício e o Gonçalo Paulo, foi particularmente criativo e realizou um árduo trabalho de investigação, que continuou no ano seguinte. São os trabalhos realizados pelos dois alunos que procuro descrever neste texto, apresentando alguns excertos e questionando os alunos sobre as aprendizagens que realizaram.

Desenvolvimento da realização dos projetos

O trabalho realizado pela Ana e pelo Gonçalo, intitulava-se «natureza fractal» e nele estudaram objetos fractais matemáticos, como a curva de Koch, curva de Peano e tapete de Sierpinski, e naturais, como a fronteira de Portugal continental, o feto ou a couve flor, trabalhando, em particular, a dimensão fractal e propuseram-se responder a questões como: será possível uma curva preencher o plano? Qual a dimensão de objetos fractais matemáticos e naturais? O produto final foi um trabalho escrito, um cartaz e uma parte interativa constituída por uma animação que contempla os processos de determinação das dimensões do feto e da fronteira portuguesa e um menu interativo, em *Processing*, onde o utilizador pode explorar oito fractais diferentes. Enquanto a Ana gosta de escrever e era colaboradora permanente do jornal da escola, o Gonçalo é autodidata em programação e para a construção deste menu e dos fractais, utilizou os trabalhos de Daniel Shiffman, nomeadamente o seu livro «Nature of Code», sobre simulação de sistemas naturais e o seu guia «Learning Processing»; para o efeito os alunos contataram o autor por mail e este incentivou-os a utilizarem os materiais.

Os alunos obtiveram o primeiro prémio do concurso e não sei se isso foi determinante, mas o facto é que ficaram tão entusiasmados, que se propuseram concorrer no ano seguinte, com um trabalho realizado extra-aula, subordinado ao tema «Matemática e Arte».

Relativamente ao segundo trabalho, pediram-me opinião sobre o que explorar. Incentivei-os a continuarem a explorar os fractais devido ao investimento que já tinham feito no seu estudo. Dado que o primeiro trabalho envolveu conteúdos ainda não lecionados na altura, como o conceito de logaritmo para estudar a dimensão fractal, lancei-lhes o desafio de construírem o conjunto de Mandelbrot, pois pensei que não os intimidaria antecipar o estudo do conceito de número complexo, apenas trabalhado no 3.º período do 12.º ano, nem abordar sucessões de pontos e vista não trabalhados na aula. Tinham acesso a uma boa bibliografia, mas ficou claro que certamente iriam aparecer conceitos e processos que também para mim podiam não ser familiares. Também lhes disse que a construção do conjunto de

Mandelbrot sempre me intimidou um pouco, mas estava confiante que eles o conseguissem fazer e que os conhecimentos de programação seriam preciosos para essa construção. Estava convicta que iria perceber a criação de um objeto tão belo e enigmático.

Nem pestanejaram; aceite o desafio, mãos à obra. No trabalho «Fract'Arte» propuseram-se responder às questões: poderão pequenas alterações em parâmetros gerar comportamentos muito diferentes e poderão simples regras matemáticas criar imagens belas?

Não vou fazer a descrição dos trabalhos, mas através de excertos dos dois trabalhos realizados procuro apresentar parte da experiência matemática que viveram.

Excertos dos dois projetos

Excerto 1: *Do projeto «Natureza fractal» apresenta-se o conceitos de dimensão fractal e, das dimensões calculadas, apresenta-se a da curva de Peano calculada teoricamente e a da dimensão do feto, calculada experimentalmente.*

Cálculo da Dimensão

O comprimento, a área e o volume de objetos que tenham um comportamento fractal, podem tornar-se difíceis de calcular e as suas medições são muitas vezes inconclusivas e difíceis de interpretar, como é o caso da medição do comprimento da costa de Portugal. Isto acontece devido ao facto destas três medidas poderem assumir valores infinitos ou nulos e da forma dos fractais ser irregular. Assim, será útil medir o grau de irregularidade e fragmentação de um conjunto geométrico ou objeto natural que represente o seu grau de ocupação do espaço — calcular a sua dimensão.

A definição intuitiva da dimensão de um objeto corresponde ao número de parâmetros independentes, a que damos o nome de coordenadas, necessários para descrever qualquer um dos seus pontos. (...)

Neste trabalho vamos calcular a dimensão (D) de objetos fractais, atendendo à autossemelhança: razão de semelhança (r) e número de partes que se obtém (N). (...) Todas as figuras autossemelhantes apresentam uma relação entre a razão de semelhança/fator de redução que permite obter as partes partindo do todo e o número de objetos que obtemos. Essa relação é traduzida pela expressão $D = \log_{1/r}(N)$.

(...) Quando, baseando-nos na autossemelhança, aplicamos a expressão a objetos fractais, verificamos que a dimensão pode assumir valores não inteiros.

Os objetos naturais são, quase sempre, mais irregulares do que os objetos fractais criados pelos matemáticos. Assim, para calcular a sua dimensão, nem sempre podemos aplicar diretamente a expressão deduzida acima. Como calcular a dimensão de objetos naturais como a fronteira de Portugal Continental, um feto ou uma couve-flor?

Medição da dimensão de um feto

Para medir a dimensão de um feto, utilizámos a fotografia de um feto que colhemos e aplicámos o método «box-counting» (que em português significa contagem de caixas), que consiste numa medição sistemática que se aplica a qualquer estrutura no plano, podendo também ser adaptada para objetos no espaço. O método é o seguinte:

Coloca-se uma grelha sobre o objeto e conta-se o número de quadrículas que contêm alguma parte da estrutura. Diminui-se progressivamente o tamanho da malha da grelha e conta-se de novo as quadrículas. A dimensão é obtida

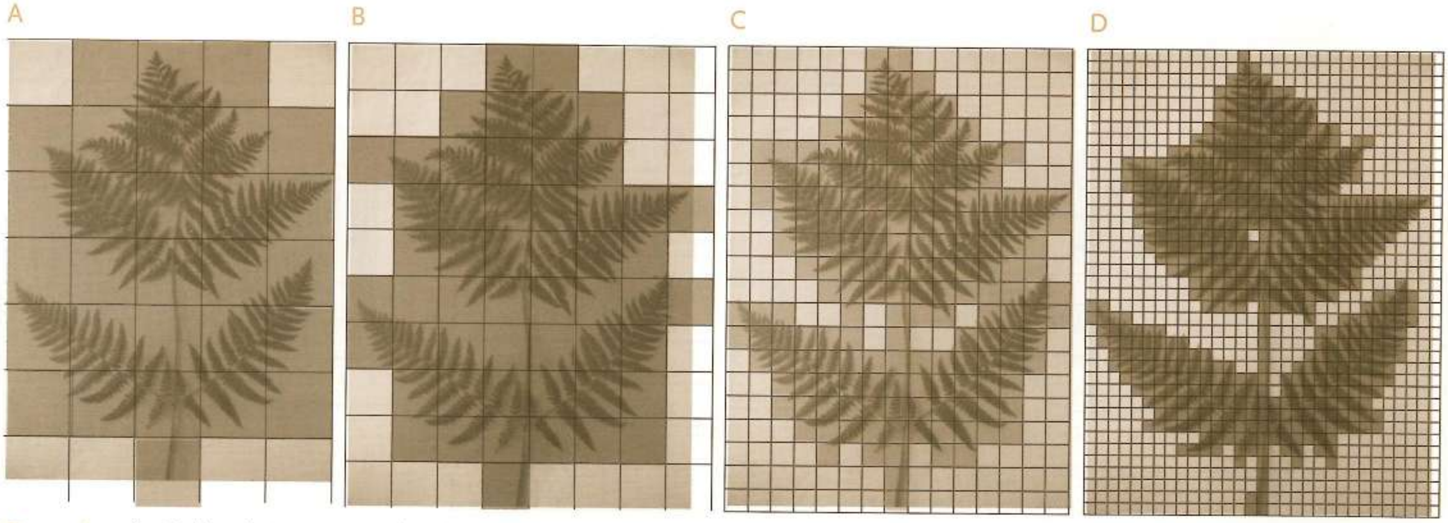


Figura 1.— A: Malha de 3 cm; B: Malha de 2 cm; C: Malha de 1 cm; D: Malha de 0,5 cm

Malha da grelha (cm)	Número de quadrículas (N)	Razão de semelhança (r)	Área (cm²)
3	28	1	252
2	52	2/3	208
1	174	1/3	174
0,5	560	1/6	140

Figura 2

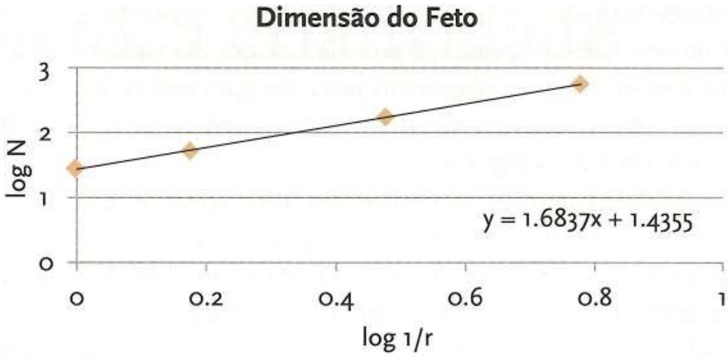


Figura 3

fazendo um gráfico $\log N / \log(1/r)$ e determinando o declive da reta que melhor se adequa aos pontos do gráfico.

Utilizando um editor de imagens, criámos quadrículas sobre a imagem do feto, com o objetivo de o cobrir na totalidade com quatro grelhas de diferentes malhas (3, 2, 1 e 0,5 cm) (figura 1). Em seguida, colorimos todas as quadrículas que continham alguma parte do feto e contámo-las (N). Repetimos o processo para as 4 grelhas (figura 2). A razão de semelhança (r) corresponde ao fator de redução das quadrículas mais pequenas em relação à maior (3 cm). Traçámos o gráfico $\log N / \log(1/r)$ em Excel (figura 3). A dimensão do feto é aproximadamente 1,68.

Excerto 2: *Do projeto «Fract' Arte» apresenta-se o comportamento da sucessão logística, quando variam os parâmetros e algumas das concretizações que fizeram.*

O conjunto de Mandelbrot e o Conjunto de Julia são dois dos fractais mais conhecidos e mais fascinantes do ponto de vista matemático e artístico. Para melhor compreender as suas propriedades e o conceito de caos, vamos começar por analisar um conjunto de sucessões denominado Mapa Logístico.

Mapa Logístico

A sucessão $x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$, foi inicialmente descrita pelo biólogo Robert May como modelo populacional para insetos, sendo a taxa de crescimento da população e o número de indivíduos da n-ésima geração ($0 \leq x_0 \leq 1$). O estudo desta equação é particularmente interessante devido à sua dinâmica: diferentes valores de fazem com que a sucessão tenha comportamentos diferentes, independentemente do valor inicial (x_0). Quando $n \to +\infty$ os valores de x_n:

- Nunca se repetem – comportamento caótico;
- Variam entre P valores – comportamento periódico.
- Tendem para 0 ou $+\infty$

Nas sucessões com comportamento periódico, chamamos a P o período.

Comecemos por analisar o que acontece em algumas sucessões com os dois últimos comportamentos, caos (figura 6) e períodos 1 e 3 (figuras 4 e 5).

$x_{n+1} = 2,99\, x_n (1 - x_n)$

x_0	0,2
x_1	0,4784
x_2	0,746105
x_3	0,566403
x_{1135}	0,665551
x_{1136}	0,665552
x_{1137}	0,665551
x_{1138}	0,665552
x_{1139}	0,665552
x_{1140}	0,665552

P = 1

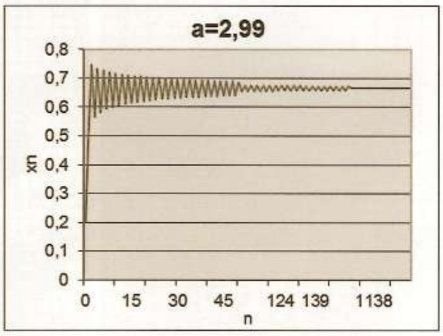


Figura 4

$x_{n+1} = 3,83\, x_n (1 - x_n)$

x_0	0,2
x_1	0,6128
x_2	0,908768
x_3	0,317541
x_{210}	0,156149
x_{211}	0,504666
x_{212}	0,957417
x_{213}	0,156149
x_{214}	0,504666
x_{215}	0,957417

P = 3

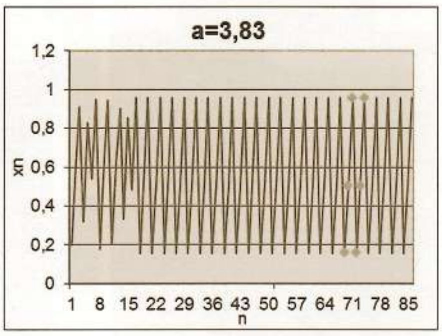


Figura 5

$x_{n+1} = 3,82\, x_n(1 - x_n)$

x_0	0,2
x_1	0,6112
x_2	0,907764
x_3	0,319843
x_{366}	0,72619
x_{367}	0,759562
x_{368}	0,697637
x_{369}	0,805789
x_{370}	0,597804
x_{371}	0,918459
x_{372}	0,286087
x_{373}	0,780202

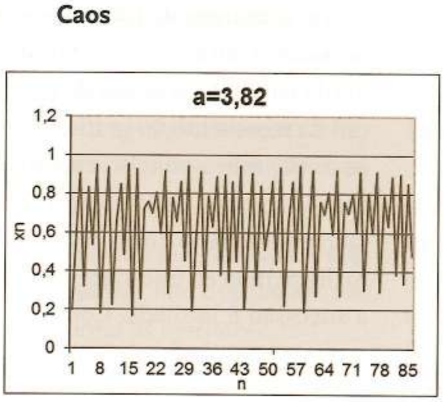


Figura 6

a	x_n ; P
−2,1	$x_n \rightarrow +\infty$
4,1	$x_n \rightarrow -\infty$
0,9	$x_n \rightarrow 0$
−0,9	$x_n \rightarrow 0$
2	P = 1, $x_n \rightarrow$ 0,5
2,99	P = 1, $x_n \rightarrow$ 0,665552
3,03	P = 2
3,47	P = 4
3,55	P = 8
3,83	P = 3

Figura 7

Nestes últimos dois casos (figuras 5 e 6), é evidente uma das propriedades dos sistemas caóticos: a sensibilidade às condições iniciais. A variação do valor de a em uma centésima alterou o comportamento da sucessão de periódico para caótico e sem regularidade.

No trabalho, os alunos apresentaram os cálculos e gráficos para outras concretizações de a (figura 7).

As sucessões que tendem para zero são aquelas cujo a está compreendido entre −1 e 1. As que tendem para infinito são aquelas cujo $a < -2$ ou $a > 4$.

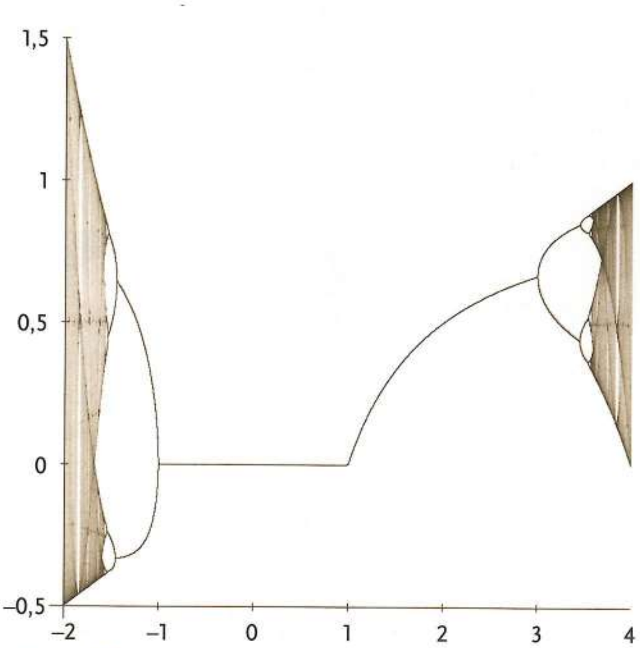


Figura 8

Diagrama de Bifurcação

Esta representação gráfica sintetiza todos os casos que estudámos antes. Permite-nos saber o comportamento da sucessão para cada valor de a: caótico, onde há um número muito elevado de pontos, criando um emaranhado de linhas, ou periódico, onde se distinguem os valores dos períodos, bem como a sua quantidade (figura 8).

Se fôssemos diminuindo a escala do diagrama, veríamos que as bifurcações se vão repetindo. Podemos dizer, por isso, que o diagrama de bifurcação é autossemelhante.

Nesta representação vemos ainda outra propriedade desta família de sucessões: no mar de caos existem ilhas de estabilidade. Nas zonas onde as sucessões têm um comportamento caótico, surgem algumas com comportamento periódico. O mesmo não sucede em zonas ondes as sucessões têm comportamentos periódicos.

Excerto 3: *Do projeto «Fract' Arte» apresentam-se os conjuntos de Julia e Mandelbrot.*

A família de polinómios de grau dois que está por detrás dos conjuntos de Julia e de Mandelbrot tem características semelhantes ao mapa logístico, de tal forma que podemos estudá-la com o auxílio de diagramas de bifurcação e cobweb.

Esta família pode ser escrita pela expressão: $z_{n+1} = z_n^2 + c$, onde c e z_n são números complexos.

Gaston Julia, matemático francês, foi pioneiro no estudo desta família de sucessões. A cada conjunto de Julia corresponde um valor de c. Os pontos que pertencem a esse conjunto de Julia são todos os z_0 para os quais a sucessão z_{n+1} é limitada, ou seja, não tende para o infinito. Analisemos um caso concreto. Quando $c = 0$, temos que

$$z_{n+1} = z_n^2 + 0 \Leftrightarrow z_{n+1} = z_n^2.$$

Ao elevar ao quadrado qualquer número complexo, elevamos o seu módulo ao quadrado e duplicamos o argumento. A representação gráfica deste conjunto é um círculo com centro na origem do referencial e raio 1, uma vez que todos os valores que estão neste círculo têm módulo compreendido entre 0 e 1, pelo que, quando submetidos à iteração, nunca vão para o infinito (o módulo vai diminuindo). Esta é das poucas representações gráficas de conjuntos de Julia que é simples.

O facto de existirem infinitos conjuntos de Julia (já que existem infinitos valores de c) levou a que só com o avanço da tecnologia fosse possível estudar mais aprofundadamente estas figuras. Um ano após a morte de Gaston Julia, Benôit Mandelbrot criou um dos mais conhecidos fractais: conjunto de Mandelbrot. Os pontos que pertencem a este conjunto correspondem aos valores de c para os quais a sucessão $z_{n+1} = z_n^2 + c$, é limitada, sendo $z_0 = 0$. Podemos também definir este conjunto como sendo o conjunto dos pontos c a que correspondem conjuntos de Julia conectados.

Os conjuntos de Julia podem ser conectados ou desconectados, conforme consigamos unir quaisquer dois pontos do conjunto sem sair do conjunto ou não. Por observação da representação gráfica, nem sempre é fácil perceber se o conjunto é ou não conectado, uma vez que estas figuras são fractais. Para que um conjunto de Julia seja conectado é necessário que o ponto 0 lhe pertença. Se esse ponto lhe pertencer, isso significa que para aquele c, se $z_0 = 0$ a sucessão é limitada. Como no conjunto de Mandelbrot z_0 é sempre 0, concluímos que esse c pertence ao gráfico de Mandelbrot, o que garante que o conjunto de Julia é conectado.

A voz dos alunos

Para finalizar, levaremos os autores a falar sobre a experiência e sobre o significado que tiveram a realização e apresentação destes dois trabalhos, em que aprofundaram um tema matemático e uma linguagem de programação, num período prolongado de tempo. Estão ambos no primeiro ano do ensino superior, respetivamente em Medicina, em Coimbra e Engenharia Biomédica e Biofísica, em Lisboa. Em época de exames, e distantes no espaço, a Ana Aparício (AA) e Gonçalo Paulo (GP), disponibilizaram-se de imedia-

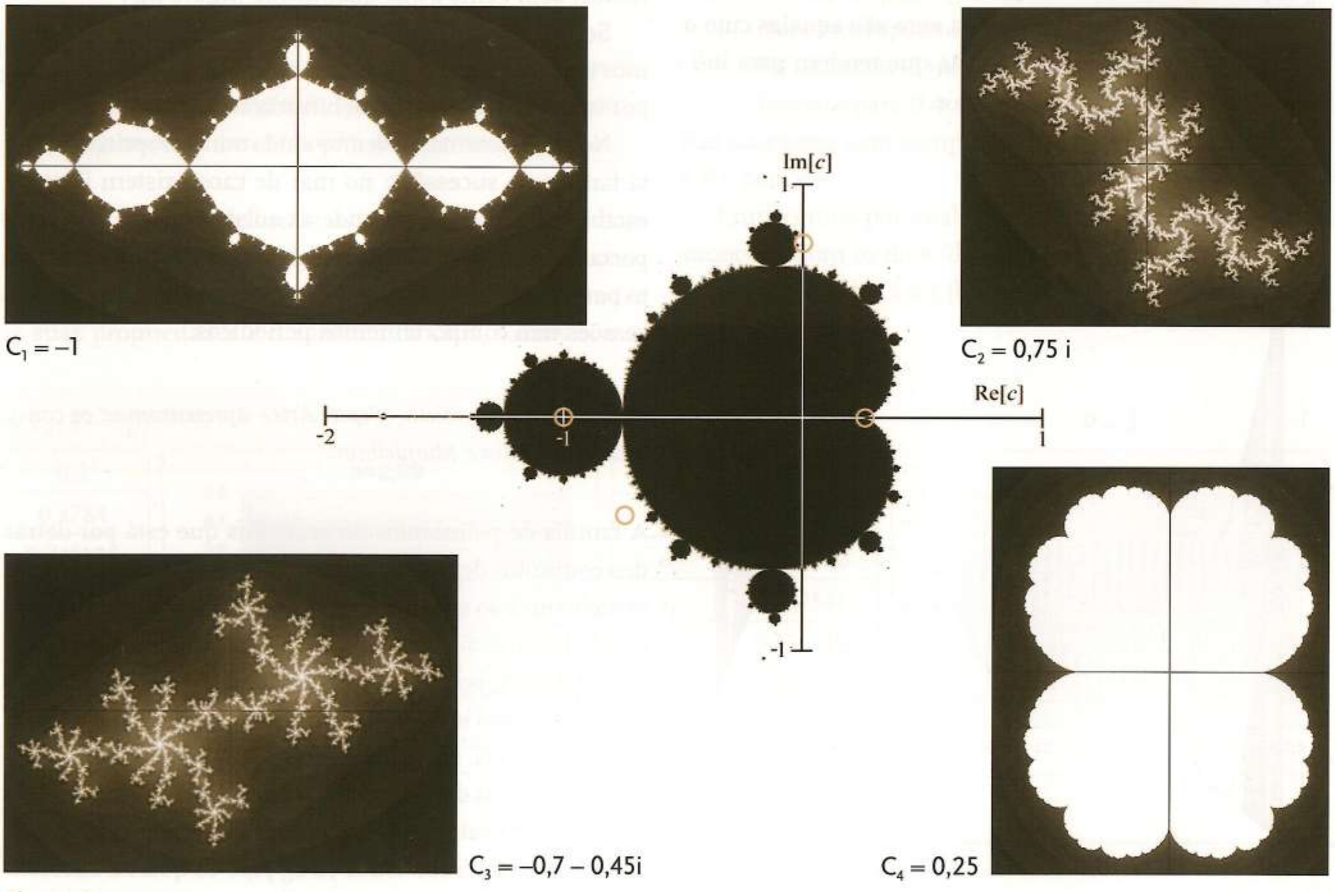


Figura 9

to para responderem por mail às minhas perguntas e ainda para adaptar a programação dos fractais construídos, de forma a poderem abrir online no site www.apm.pt/.

Assim, termino este texto com a voz dos alunos na forma de entrevista e agradeço-lhes os momentos entusiasmantes de descoberta que também vivi.

Manuela Pires (MP): *nos dois trabalhos que realizaram tiveram que estudar conceitos matemáticos não trabalhados nas aulas. O que podem dizer desta forma de aprender?*

AA: Confesso que no início é assustador porque não estamos habituados a descobrir por nossa conta, ainda que com a orientação da professora Manuela. Mas a verdade é que no final é altamente compensador! Ver que o trabalho árduo, desde pesquisa em artigos, livros, vídeos, horas de discussão e escrita e programação, etc., dá frutos faz com que fiquemos com sentimento de dever cumprido. Esta é, na minha opinião, a melhor forma de aprender.

MP: *calcularam teoricamente a dimensão fractal em objetos matemáticos e experimentalmente em objetos naturais. Que capacidades acham que desenvolveram nos dois processos?*

AA: Por vezes, enquanto alunos, sentimos que a matemática é muito abstrata e não tem aplicação na vida real, ainda para mais quando se trata de uma coisa tão complexa como os fractais. Para além dos conhecimentos matemáticos que adquiri, transpor a dimensão fractal para o mundo real fez-me perceber que a matemática está em todo o lado! Também senti que o meu espirito crítico ficou mais apurado porque em processos como estes é necessário discernir o que faz ou não sentido.

GP: Penso que desenvolvemos pouco esta capacidade de transpor os conhecimentos para o mundo real, muitas vezes porque os conceitos que aprendemos são tão abstratos ainda para nós que é difícil ver «quando é que vou usar isto na vida real». Por isso ter agarrado em algo que é do mais abstrato possível e vê-lo aplicado ao mundo real é sem duvida algo bastante agradável. Acho que uma das coisas bastante importantes que aprendemos foi que sempre que trabalhamos com o infinito temos que explorar os conceitos mais profundamente, porque poucas vezes conseguimos perceber as verdadeiras implicações do infinito. Nunca pensaríamos que a fronteira de Portugal podia ser infinita quando pensamos nisso pela primeira vez. O conceito de dimensão fractal é deveras assustador. Existem inúmeras maneiras diferentes para olhar para a dimensão de um objeto matemático e isso fez com que nós não entrássemos tanto nesse tema.

MP: *no final do segundo trabalho afirmam «O estudo da matemática envolvida nesta investigação foi longo e o processo criativo e de programação com muitas etapas, avanços e recuos. Os registos em papel e lápis no caderno foram uma constante e este uma companhia permanente nos últimos meses». Falam em criatividade. Que aspetos pensam ter desenvolvido?*

AA: A «criatividade é o processo de tornar-se sensível a problemas, deficiências, lacunas no conhecimento, desarmonia; identificar a dificuldade, buscar soluções, formulando hipóteses a respeito das deficiências; testar e retestar estas hipóteses; e, finalmente, comunicar os resultados» (Torrance, 1965). A criatividade foi uma constante nos dois trabalhos. Tivemos de ser criativos para perceber que perguntas estão por responder, como podemos respondê-las e ultrapassar os entraves à sua resolução, de que forma podemos confirmar a resposta e qual a melhor forma de transmitir o conhecimento que adquirimos.

MP: *Para mim, um dos momentos mais marcantes, foi quando o Gonçalo apareceu com o caderno cheio de esboços e a dizer, acho que já percebo o papel do parâmetro c e consigo desenhar alguns pontos dos conjunto Julia e Mandelbrot. Descrevam lá como foi esse processo de descoberta.*

GP: Quando comecei a conseguir esboçar partes do trabalho e finalmente percebi como funcionavam os conjuntos senti que realmente estava a avançar. Até então estava a sentir que estava a ficar para trás e que não estava realmente a ajudar a Ana, e não estávamos a avançar no trabalho. Depois senti que finalmente podíamos começar a construir os dois fractais.

Sem dúvida que andar com o caderno foi algo novo para mim, mas é algo que eu agora faço. Para além disso, desenvolvi bastante as minhas capacidades de programação, que para além de uma atividade lógica é uma atividade de criatividade. No geral, todo este trabalho desenvolveu capacidades que eu quase não tinha trabalhado até aí.

MP: *tecnologia e papel de lápis. Que papel tiveram no vosso trabalho?*

AA: O papel e o lápis são a base e ponto de partida de todo o processo, sem os quais não teríamos matéria-prima com que trabalhar. A tecnologia é a ferramenta essencial para perceber e responder às perguntas e transmitir as nossas conclusões. Em ambos os trabalhos percebemos que através dos programas desenvolvidos conseguíamos captar a atenção das pessoas e fazer com que se interessassem pelo tema.

GP: É bastante interessante considerar que os pensadores de grande parte destes fractais tinham toda a sua teoria em papel mas que não tiveram acesso à tecnologia para verdadeiramente ver o que criaram. Até Mandelbrot nunca se tinha verdadeiramente visto um conjunto de Julia, o que é algo que nos deixa a pensar, por ser tão fácil de ver um agora.

Acho que não tinha acreditado no que tinha lido sobre os fractais que estudámos até ter visto os comportamentos deles, tanto no excel como nos programas. Quando, juntamente com a Ana, estive à caça de períodos no excel senti realmente a natureza caótica de certas partes da matemática.

MP: *Este trabalho podia existir, mas não seria o mesmo sem a programação. Gonçalo, peço-te que fales nesta tua experiência, sendo um autodidata.*

GP: Como já referi antes de começar o trabalho não tinha começado a programar, apesar de ser o meu desejo já há algum tempo. Aprendi uma nova linguagem de raiz e atualmente continuo a usar muito do que aprendi, na universidade por exemplo, como o pensamento lógico e como passar um problema para um programa. Na realidade ser um autodidata é atualmente bastante fácil porque existem recursos online que permitem aprender quase qualquer coisa.

MP: *nestes trabalhos tiveram uma motivação extra que foi o concurso ao prémio Pedro Matos e esmeraram-se. Mas, o primeiro trabalho também foi para avaliação interna. Como sentiram estas motivações, a intrínseca pelo prazer do trabalho realizado e as extrínsecas, avaliação interna e concurso aos prémios?*

AA: Para ser sincera não houve uma motivação intrínseca, a avaliação interna e o concurso foram as verdadeiras motivações, sem as quais nunca teria partido nesta aventura. O prazer do trabalho realizado foi o prémio, a cereja no topo do bolo, que só percebi que existia no final e o mais importante desta experiência.

GP: Para mim penso que foi realmente o oposto, a vontade de conhecer fractais existia e a possibilidade de poder realmente aprofundar o conhecimento em algo que eu desejava, enquanto estava a ser avaliado, mais o bónus de poder receber um prémio foram premissas que eu não pude recusar.

MP: *Atendendo a que têm características, saberes e interesses comuns, mas também diferentes, de que forma isso foi uma mais valia para o trabalho comum?*

AA: Na minha opinião nenhum de nós conseguiria fazer qualquer um dos trabalhos sozinho. Arrisco-me a dizer que aquilo em que um trabalha melhor é o calcanhar de Aquiles do outro por isso resultou muito bem! Claro está que as opiniões são muitas vezes diferentes, mas essa é outra capacidade que levo destes trabalhos: saber trabalhar em grupo e aceitar que a opinião do outro é tão válida como a minha.

GP: Eu sou bastante analítico e consigo mais facilmente ver o essencial de um problema bastante rapidamente, enquanto que a Ana consegue mais facilmente resolvê-los. Tenho muito pouco jeito para escrever, enquanto que a Ana é esplêndida a compilar o que dizia e a trabalhar as ideias.

MP: *Do acompanhamento que fiz no desenvolvimento do projeto, o que acharam mais relevante? Que críticas e sugestões podem fazer relativamente ao lançamento e acompanhamento dos projetos?*

AA: Julgo que propor este tipo de trabalhos aos alunos é uma ótima iniciativa e fomenta o espírito criativo e a aprendizagem fora da sala de aula. Quanto ao acompanhamento que fez de ambos os trabalhos, foi essencial! Desde a grande maioria da bibliografia, às críticas e sugestões, passando pela disponibilidade que sempre teve para rever, discutir e corrigir. No entanto, o que considero mais importante foi o facto de nos ter sempre transmitido a ideia de que eramos capaz de superar todos os obstáculos e dificuldade e chegar ao produto final que queríamos.

GP: Penso que o mais importante para alguém a acompanhar um projeto é sem dúvida a sua dedicação e o empenho e que se interesse no trabalho o suficiente para conseguir «desempancar» quando o projeto está preso nalgum ponto.

Conclusão

Na realização destes dois projectos, os alunos desenvolveram dimensões da criatividade.

A criatividade manifesta-se pela sua *originalidade*, uma vez que o trabalho de projeto implica muitas vezes a abordagem de assuntos e conteúdos que não é possível fazer noutro tipo de tarefas matemáticas e, estes alunos em particular, aprofundaram conceitos e temáticas tão complexos como a dimensão fractal e a construção relacionada dos fractais de Julia e Mandelbrot; pela *flexibilidade* que os alunos demonstraram na escolha de exemplos tão diferentes de fractais matemáticos e naturais, abordando conteúdos diversificados, alguns deles novos; na *fluência* que adquiriram na exploração dos vários conceitos, como o comportamento das sucessões, com a variação dos parâmetros e na *elaboração* conseguida com a programação dos objectos fractais.

Pela voz da Ana, «nenhum de nós conseguiria fazer qualquer um dos trabalhos sozinho», podemos dizer que este é um exemplo de criatividade coletiva, ideia presente neste número temático.

Manuela Pires
Agrupamento de Escolas Marinha Grande Poente

A criatividade na perspetiva de (alguns) matemáticos

Rosa Antónia Tomás Ferreira

Num número temático da *Educação e Matemática* subordinado ao tema da criatividade matemática, faz todo o sentido procurar indagar o que os matemáticos de profissão pensam sobre o assunto. Respondendo ao desafio que me foi colocado pelas editoras convidadas deste número da revista, resolvi meter mãos à obra.

Ficou logo claro para mim que teria de ir à *fonte* procurar as respostas (possíveis) que pretendia. A *fonte* que me ficou mais à mão foi o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, onde eu trabalho. Bem gostaria de ter colhido opiniões e ideias de todos os meus colegas de departamento bem como de vários colegas de outras instituições mas percebi logo que isso seria impossível no curto espaço de tempo que eu tinha disponível. Assim, a minha amostra de matemáticos, necessariamente de conveniência, foi reduzida a seis profissionais, espalhados por áreas diversas da matemática, como a matemática fundamental, matemática aplicada (interações com a biologia), combinatória, estruturas e variedades algébricas, teoria dos números, teoria dos autómatos finitos e criptografia.

Na impossibilidade de os entrevistar, resolvi colocar-lhes duas perguntas, por *email*, sobre a criatividade na profissão de matemático: 1) *Considera-se criativo na sua profissão de matemático(a)? O que é ser criativo em matemática?* e 2) *A criatividade em matemática é inata ou é uma capacidade que se pode desenvolver? Neste caso, como?* Pedi aos meus colegas (de quem decidi manter o anonimato, usando como pseudónimos nomes próprios de matemáticos portugueses) que respondessem às questões colocadas com as primeiras ideias que lhes viessem à cabeça porque era precisamente das perspetivas deles, no imediato, que eu andava à procura. Partilho aqui as respostas que obtive, dando um pequeno vislumbre das ideias que o tema da criatividade em matemática fez emergir junto de quem vive a profissão de matemático.

A CRIATIVIDADE NA PROFISSÃO DE MATEMÁTICO

Na generalidade, os matemáticos inquiridos consideram-se criativos no trabalho que realizam e associam a criatividade à capacidade de gerar questões pertinentes e de relacionar assuntos. «*Ser criativo em matemática é ser capaz de formular questões interessantes e de estabelecer novas relações e conexões que permitam obter perspetivas inovadoras e generalizações de outros resultados*» (Francisco). Para estes matemáticos, é preciso ser criativo «*para encontrar soluções para os problemas*» (Sebastião) que encontram pela frente e também «*para se conseguir formular novas questões, relacionar temas diferentes, combinar ideias e formular conjeturas plausíveis*» (Pilar).

Embora não tenham respondido diretamente à questão que lhes foi colocada, José e Bento enfatizam aspetos um pouco diferentes em relação aos restantes colegas inquiridos e que vale a pena partilhar aqui. Por exemplo, José defende que ser criativo em matemática «*é completamente análogo a ser criativo em outras áreas, como a literatura, a pintura ou a música, por exemplo: é perceber relações e descobrir modos de exprimir ideias novas, é criar ferramentas que nos permitam descobrir e explorar o desconhecido, assim como entender coisas de um modo mais profundo*». Este conhecimento profundo das coisas não se restringe ao que usualmente designamos por matemática pura mas alarga-se ao que também comummente chamamos de matemática aplicada. Nesta área, o conhecimento profundo das coisas, segundo Bento, está associado a «*um trabalho que não corresponde à criatividade matemática entendida no seu sentido usual (descoberta de novas teorias, novos teoremas, novos conceitos). Exige outro tipo de criatividade, mais próxima do sentido que a Física lhe dá, talvez mais intuição e perceção mecanista*». A ideia de intuição surge, assim, em associação à criatividade matemática.

Ser-se criativo é importante para fazer a matemática avançar, mas os matemáticos inquiridos deixam claro que «*a criatividade não é único ingrediente no processo de descoberta de resultados matemáticos. Também é preciso conhecimento técnico e trabalho*» (Sebastião). A estes três ingredientes (criatividade, conhecimento e trabalho), junta-se a colaboração com outros matemáticos como mais um elemento essencial ao trabalho de um matemático. De facto, na opinião de Sebastião, «*algumas das melhores ideias surgem fruto da interação com outros matemáticos*».

CRIATIVIDADE: NASCEMOS COM ELA OU PODEMOS DESENVOLVÊ-LA?

Tal como José apontou, a pergunta que foi colocada é um pouco enviesada: ser inato e ser desenvolvido não são coisas necessariamente opostas «*pois, mesmo que algo seja inato, tal não implica que não se possa desenvolver*». De qualquer forma, a pergunta é suficientemente provocatória para suscitar algumas reflexões interessantes e que nos poderão fazer pensar também.

De um modo geral, a preferência de resposta dos matemáticos inquiridos vai no sentido de a criatividade ser uma capacidade que pode ser desenvolvida, associando a criatividade inata a uma maior propensão natural de algumas pessoas para fazerem matemática ou à ideia de génio, «*que só está ao alcance de alguns*» (Bento). A relação entre criatividade e talento particular para a matemática surge em algumas respostas de modo mais explícito: «*São bem conhecidos exemplos dos chamados ‹génios matemáticos›, pessoas com especial talento, por vezes muito novas e sem conhecerem os instrumentos matemáticos, capazes de resolver problemas difíceis*» (Maria).

Mas também há quem rejeite a ideia de a criatividade ser uma capacidade inata: «*Estou convencido de que nenhuma capacidade criadora é inata. Simplesmente não há no DNA ‹espaço› suficiente, em termos de capacidade de informação, para tais capacidades estarem inscritas nos nossos genes (temos 50% de genes em comum com as bananas, 75% com as moscas, 80% com as vacas, 90% com os gatos, 98,8% com os chimpanzés e 99,9% com um outro ser humano qualquer — essencialmente, todos nascemos com, basicamente, o mesmo ‹hardware› e ‹software› muito semelhante), além de que não houve ainda tempo suficiente para capacidades como ‹talento para a matemática›, ou para a música, ou para a literatura, terem sido filtrados por seleção natural*» (José).

Que é então preciso para desenvolver a criatividade em matemática? São vários os aspetos indicados pelos matemáticos, uns mais relacionados com a sua atividade matemática profissional, outros diretamente relacionados com a atividade de ensinar matemática. Um denominador mais ou menos comum às respostas recebidas diz respeito à importância do trabalho, esforço e persistência para o desenvolvimento da criatividade. «*A criatividade pode desenvolver-se com o conhecimento e esforço aprofundados, que permitem adquirir alguma experiência e um primeiro conjunto de ferramentas*» (Francisco) e «*pela persistência na busca da compreensão profunda de um tema, das suas diversas abordagens e métodos*» (Maria).

Para além de aspetos de natureza mais cognitiva, são também destacados aspetos de natureza afetiva, em particular a motivação. Sebastião reforça que *«sem interesse e gosto pela matemática é difícil desenvolver as capacidades para a matemática e, em especial, a criatividade»*. Nesta linha, José destaca que a intensidade do trabalho que é preciso para desenvolver a criatividade, tal como acontece com outras capacidades do ser humano, *«implica uma forte motivação. Essa motivação depende certamente de imensos fatores, a maior parte dos quais (...) permanecerá um mistério... Uma análise histórica cuidadosa (...) evidencia que os ‹grandes génios› são pessoas que se apaixonaram a certa altura por um assunto e que, em consequência, nele trabalharam intensamente (só que o trabalho apaixonado pode dar tanta satisfação que muitos não lhe chamariam ‹trabalho›). O que exatamente faz uma pessoa apaixonar-se por um assunto e outra não? É aqui que reside o mistério...»* A paixão pelo trabalho matemático deve ainda encontrar eco na atividade de ensino (da matemática): *«Aquilo que seria desejável seria que todos os seres humanos, em particular, nas suas fases de desenvolvimento cognitivo mais intenso, da infância à adolescência, fossem expostos aos mais diversos ramos do conhecimento e das artes, de uma forma apaixonada e muito bem pensada e cuidada, deixando clara a necessidade e o prazer de trabalhar bem e com perfeição»* (José). Assim, a paixão, a par com um trabalho criterioso de ensino parecem ser elementos chave na promoção da criatividade.

Reconhecendo que é difícil ensinar alguém a ser criativo e que até *«seja muito mais fácil desencorajar a criatividade nos estudantes do que desenvolvê-la»*, Sebastião sugere que, para *«estimular os estudantes a serem mais criativos (...) é importante não reduzir o ensino ao treino de competências técnicas e resolução de problemas padronizados (embora este aspeto seja também necessário). Uma forma de encorajar a criatividade é ouvir e dialogar com os estudantes, e apresentar-lhes novos desafios e pontos de vista estimulantes»*. Esta necessidade de desafiar os alunos com tarefas que fogem aos rotineiros exercícios e às tarefas padrão foi também destacada, de modo muito explícito, por Pilar: *«A criatividade é uma propriedade dinâmica da mente humana que pode, sim, ser desenvolvida. A nível escolar, resoluções não standard, diferentes daquela feita pelo professor, devem ser incentivadas e discutidas com todos os alunos»*.

Aliás, no depoimento acima, é visível a importância da atividade de resolução de problemas na promoção da criatividade mas Pilar refere ainda uma outra atividade, fortemente relacionada com esta, e com potencial no desenvolvimento da criatividade dos estudantes — a formulação de problemas, realçando igualmente o papel do ambiente de aprendizagem nesse mesmo desenvolvimento: *«A resolução de problemas leva muitas vezes a pensar noutros. Seria importante trabalhar também [com os alunos] na formulação desses novos problemas. A promoção da liberdade de pensamento e o respeito pelas ideias dos alunos (mesmo no caso em que são desadequadas) é fundamental para propiciar um clima de à vontade e desinibição essencial ao desenvolvimento da criatividade»* (Pilar). Estes depoimentos sugerem uma visão do ensino da matemática (ao nível da matemática escolar, na minha interpretação) que se distancia de uma visão transmissiva, privilegiando o trabalho em torno de tarefas diversificadas e desafiantes para os alunos e um ambiente de aprendizagem pautado por uma comunicação dialógica professor-alunos, em que o erro é um trampolim para a aprendizagem.

Mais relacionada com o desenvolvimento da criatividade na própria profissão de matemático surge a colaboração. São vários os depoimentos que focam este aspeto, importante não só para o avançar da ciência em si mesma mas também para o desenvolver da criatividade. A *«colaboração com matemáticos vindos de outras áreas»* (Francisco) é *«outro ingrediente fundamental (...) o diálogo com colegas e colaboradores»* (Sebastião). A partilha e discussão de ideias, trazendo para a berlinda diferentes pontos de vista e envolvendo agentes com conhecimentos (matemáticos) diversificados, aparece assim, em relação ao trabalho de um matemático profissional, em paralelo com um ambiente de aprendizagem (da matemática escolar) caracterizado pela troca e discussão de ideias e processos.

RELEMBRANDO PÓLYA

Em 2011, a *Educação e Matemática* publicava uma entrevista de Jeremy Kilpatrick a George Pólya em que o assunto da criatividade veio também à baila. Pólya acreditava que já se nasce com a capacidade de ser criativo, defendendo uma predisposição genética para a criatividade. Em vez de falar em como desenvolver a criatividade, este matemático utilizava o termo *despertar* a criatividade. Neste sentido, na visão de Pólya, o professor desempenha um papel crucial nesse processo de despertar da criatividade nos alunos. Em particular, destaca a importância do professor na escolha das tarefas e da abordagem ao ensino da matemática. As tarefas devem ser desafiantes, divertidas e próximas dos próprios alunos para que melhor suscitem o seu interesse e melhor os possam motivar; a abordagem ao ensino da matemática deve apresentar esta ciência aos alunos como uma ciência viva e dinâmica, como uma construção histórica da humanidade, em que a colaboração entre os estudantes e a discussão de uma pluralidade de ideias (independentemente da sua correção) baseiam a construção do conhecimento matemático.

Aparentemente, os matemáticos que inquiri têm uma visão diferente da de Pólya acerca de a criatividade ser ou não uma capacidade inata, uma vez que tendem a vê-la como uma capacidade que se pode promover e desenvolver. Mas todos concordam com Pólya no que diz respeito ao papel do professor, independentemente de verem este papel como procurando despertar ou desenvolver a criatividade. As tarefas desafiantes e um ambiente de aprendizagem de partilha e discussão são aspetos relacionados com o papel do professor que todos, mais ou menos explicitamente, referem. Além disso, é referida a necessidade de suscitar, nos alunos, o interesse e a motivação, algo que Pólya, tal como os matemáticos inquiridos, também defendia. Um outro ponto de contacto entre as ideias de Pólya e dos seis matemáticos que responderam às questões que lhes coloquei diz respeito à colaboração. Despertar ou desenvolver a criatividade passa por ser um processo coletivo.

Desta breve reflexão, que ilações podem ser retiradas para a nossa prática letiva? Seja qual for o nosso ponto de vista — se a criatividade matemática é inata ou não — há alguns aspetos que me parece importante realçar. O professor deve procurar envolver os alunos em tarefas desafiantes e que *lhes digam alguma coisa*, ou seja, que sejam próximas das vidas deles e, por isso, lhes suscitem interesse. As tarefas desafiantes prestam-se a abordagens diversificadas e, por isso, funcionam como trampolins para discussões matemáticas produtivas, em que, para além da partilha de abordagens, se procura estabelecer pontes entre elas e suscitar o espírito crítico dos alunos, na argumentação e contra-argumentação de estratégias e representações. A colaboração entre os alunos — na resolução de tarefas desafiantes e também na discussão de abordagens seguidas — bem como a colaboração entre professores — na seleção ou criação de tarefas desafiantes ou na preparação de aulas em que a criatividade matemática se constitui num objetivo educacional — são igualmente ingredientes importantes no que toca à promoção ou despertar da criatividade matemática.

Neste sentido, a resolução de problemas é uma atividade privilegiada para trabalhar a criatividade matemática. É uma atividade cognitivamente exigente, que se presta a lidar, de forma natural, com contextos familiares aos alunos e que os motivem, que se adequa ao trabalho em pequenos grupos e que proporciona as condições para um ambiente de trabalho em sala de aula pautado pela partilha e discussão de estratégias e representações. A resolução de problemas, bem como a atividade associada de formulação de problemas são, assim, atividades matemáticas com um forte potencial para promover ou despertar a criatividade matemática.

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Departamento de Matemática da Faculdade
de Ciências da Universidade do Porto

APM 2016 — sócios

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece sete modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @-sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro
- sócio conjunto APM-APP*

e cinco modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

* A partir de 2016 a Associação de Professores de Matemática (APM) e a Associação de Professores de Português (APP) oferecem uma nova modalidade de associado aos professores do 1.° ciclo do ensino básico: sócio conjunto APM-APP que, através do pagamento de uma única quota no valor de 50,00€, lhes confere o estatuto de associado da APP e de @-sócio da APM. Pode inscrever-se indeferentemente (e pagar) na página da APM ou da APP; as respetivas associações dar-lhe-ão um n.° de sócio para cada associação. A partir daí pode usufruir das vantagens de sócio da APP e da APM.

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados no portal da APM, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Quotas anuais para 2016

A quota tem efeitos de janeiro a dezembro de cada ano civil.

Modalidades de associado individual	
Professor no ativo (sócio regular)	50,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Associado residente no estrangeiro	60,00 €
Sócio conjunto APM-APP (só para professores do 1.° CEB)	50,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade I [1 exemplar da E&M]	60,00 €
Modalidade II [2 exemplares da E&M]	80,00 €
Modalidade III [1 exemplar da E&M + *Quadrante*]	85,00 €
Modalidade IV [2 exemplares da E&M + *Quadrante*]	100,00 €
Instituição no estrangeiro [1 exemplar da E&M + *Quadrante*]	120,00 €

Assinaturas das revistas *Educação e Matemática* e *Quadrante* para 2016

		Educação e Matemática (5 números/ano)	*Quadrante* (2 números/ano)
Associado individual	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Não associado individual	Portugal	47,00 €	35,00 €
	Estrangeiro	67,00 €	45,00 €
Não associado institucional	Portugal	75,00 €	50,00 €
	Estrangeiro	95,00 €	60,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções