

# Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

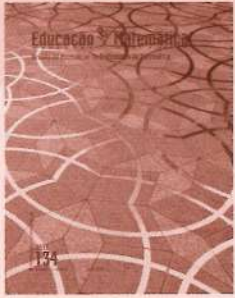
Periódicidade ∞ 5 números por ano

2015

134

Setembro ∞ Outubro

Preço 5,75€



## EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

**Diretora** Lina Brunheira  
**Subdiretora** Helena Rocha  
**Redação** António Fernandes  
Cristina Cruchinho  
Cristina Tudella  
Helena Amaral  
Irene Segurado  
Isabel Rocha  
Manuela Pires  
Paulo Alvega  
Sílvia Zuzarte

### Colaboradores Permanentes

António Domingos *Tecnologias na Educação Matemática*  
Cristina Loureiro *Caderno de Apontamentos de Geometria*  
Grupo de Trabalho de Investigação da APM *Espaço GTI*  
José Paulo Viana *O problema deste número*

**Capa** António M. Fernandes

**Paginação** Gabinete de Edição da APM

### Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática  
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

**Data da publicação** Outubro 2015

**Tiragem** 1500 exemplares

### Periodicidade

Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

### Impressão

Colorpoint, Unipessoal Lda  
Urbanização Vale Azul, n.º 8  
Casal da Espinheira  
2560-401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871-7222

Porte Pago

### Sobre a capa

Pavimentação de Penrose utilizada como motivo decorativo.  
(Instituto Matemático, Universidade de Oxford.)

António M. Fernandes

### Neste número colaboraram

Adelaide Freitas, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja,  
Célia Mestre, Eduarda Moura, Helena Rocha, João Carlos Terroso,  
José Luiz Pastore Mello, Leonor Santos, Lina Brunheira,  
Luis Fabián Gutiérrez Fallas, Mária Cristina Almeida,  
Maria da Graça Bruno Pereira, Maria José Carvalho  
e Paulo Alvega.

### Correspondência

Associação de Professores de Matemática  
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A, 1500-236 Lisboa  
Tel: (351) 21 716 36 90  
Fax: (351) 21 716 64 24  
E-mail: revista@apm.pt

### Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores,  
não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação  
da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não  
obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

# Tecnologia, para que te quero?

No Natal passado, eu e a minha filha Inês quisemos trocar de telemóvel. Fomos a uma loja, ela pediu o telemóvel e eu acrescentei «Para mim é um igual». É claro que temos perfis de utilizador diferentes, mas esta opção tinha uma vantagem irresistível: qualquer dúvida que pudesse ter com o telemóvel, sabia quem me esclareceria no imediato. Não é que tenha qualquer complexo com a tecnologia, mas bastanos prestar alguma atenção à forma como os jovens e até as crianças de hoje lidam com todo o tipo de *software*, para perceber que a forma como aprendem a trabalhar com todo o tipo de aplicações, como interagem com as ferramentas ou como pesquisam informação, é muito diferente e provavelmente mais eficiente do que a da maioria dos adultos.

A tecnologia está por todo o lado, em quantidade e diversidade: há computadores ou *tablets* na grande maioria dos lares onde há crianças e jovens, *smartphones* que os acompanham constantemente e locais que favorecem a sua utilização com rede *wireless* aberta.

E na escola, como estamos de tecnologia? Há alguns anos, muitas escolas foram apetrechadas com muitos mais computadores, vários quadros interativos e projetores. Entretanto, o número de recursos educativos também aumentou. Há mais *software* educativo com qualidade e, nalguns casos, gratuito; há novidades nas calculadoras gráficas, com modelos mais modernos e com mais capacidades; existem comunidades de professores e investigadores que partilham os seus trabalhos e, ao nível da investigação em educação, sabe-se muito mais sobre as formas de melhor tirar proveito da tecnologia nas aprendizagens.

Mas será que na escola estamos a aproveitar o que a tecnologia tem para nos oferecer em matéria de aprendizagens? Apesar de as escolas terem hoje mais salas com computadores, na esmagadora maioria nunca se instalou uma cultura em que fosse habitual (e natural) serem usadas para aulas de Matemática. Os quadros interativos são normalmente utilizados como tela de projeção e o que neles é projetado também nos merece alguma reflexão. Não há dúvida que a possibilidade de expor o manual do aluno (que nem sempre todos têm) num ecrã, alguns diapositivos para sistematização de ideias ou uma animação para iniciar uma discussão, são certamente vantagens. Não há dúvida que a qualidade das imagens ou diagramas, supera os esboços que fazemos no quadro. No entanto, isso não

significa que estas apresentações possam substituir o trabalho dos alunos, por muito cativantes ou claras que possam parecer. É preciso não perder de vista que a aprendizagem dos alunos decorre essencialmente da atividade em que se envolvem de forma significativa, e é aí que a tecnologia tem ainda muito para nos oferecer. A tecnologia permite-nos alargar o espectro de questões que estudamos, aceder a diferentes representações do mesmo problema ou conceito, simular, testar, visualizar, investigar...

E voltamos à calculadora gráfica. Ao contrário do que acontece com os computadores, em Portugal e nos últimos 20 anos, as calculadoras entraram claramente na aula de Matemática, muito por força dos programas anteriores que a consideram indispensável, mas também do entusiasmo e do investimento profissional de muitos professores. O Programa e Metas Curriculares (PMC) de Matemática A considera que a calculadora gráfica «deve ser utilizada em sala de aula e conseqüentemente em certos instrumentos de avaliação» (p. 29), apesar de todos os alertas que faz sobre os seus perigos. Além disso, perspetiva a calculadora muito mais como instrumento de teste e confirmação, depois de todo o tratamento analítico estar realizado. Mas então onde se enquadra a modelação e a simulação de situações reais? E o estudo experimental de famílias de funções que nos leva à compreensão dos seus parâmetros? E a articulação entre métodos algébricos e gráficos?

Os PMC de Matemática do Ensino Básico e o de Matemática A têm, infelizmente, muito pouco a dizer sobre o interesse da tecnologia. Apesar da declarada liberdade metodológica, a natureza de alguns tópicos, a própria extensão do programa e as avaliações externas, acabam por veicular um tipo de trabalho e de ritmo que não facilita a realização de atividades mais extensas, algumas delas com recurso à tecnologia. Há portanto obstáculos, é verdade. Mas não tem sido sempre assim? Não será sempre assim? E não será também verdade que já muitos obstáculos foram ultrapassados pelos professores? Estaremos disponíveis para perder o que conquistámos?

O mundo de hoje é muito diferente com tecnologia. E a sala de aula, é assim tão diferente?

**LINA BRUNHEIRA**

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

EDITORIAL  
Lina Brunheira

SETEMBRO :: OUTUBRO

#134

1

**A MATEMÁTICA NOS PRIMEIROS ANOS**  
Pré, 1.º e 2.º Ciclos

XVIII ENCONTRO NACIONAL

LEIRIA  
06 E 07  
NOVEMBRO  
2015

[http://www.apm.pt/encontro/encontro\\_dos\\_primeiros\\_anos\\_2015.php](http://www.apm.pt/encontro/encontro_dos_primeiros_anos_2015.php)

Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Leiria

IPL APM apei

**ENCONTRO DOS PRIMEIROS ANOS**

O encontro dedicado ao ensino e aprendizagem da Matemática nos primeiros anos nasceu, essencialmente, para dar mais visibilidade à Educação Matemática nos primeiros anos, constituindo-se como um espaço para divulgação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados por professores e investigadores. Este ano, o Encontro decorrerá nos dias 6 e 7 de novembro e será acolhido pela Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria. As inscrições podem ser realizadas (sem agravação de preço) até dia 3 de novembro através do *site* da APM.

**ICME13**

No próximo ano terá lugar o ICME13 – Congresso Internacional de Educação Matemática, um dos mais prestigiados encontros nesta área, que é realizado sob os auspícios da Comissão Internacional de Instrução Matemática (*International Commission on Mathematical Instruction* — ICMI). Este congresso, que apenas se realiza de quatro em quatro anos e reúne professores e investigadores de todo mundo, volta desta vez à Europa, mais precisamente à cidade de Hamburgo, onde terá lugar de 24 a 31 de julho de 2016. Todas as informações estão disponíveis em <http://www.icme13.org>.

**ICME13**  
Hamburgo 2016

13o Congresso Internacional de Educação Matemática  
24 a 31 de Julho de 2016 em Hamburgo / Alemanha

# Contributos do Geogebra para a compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros

Um estudo com alunos do 4.º ano

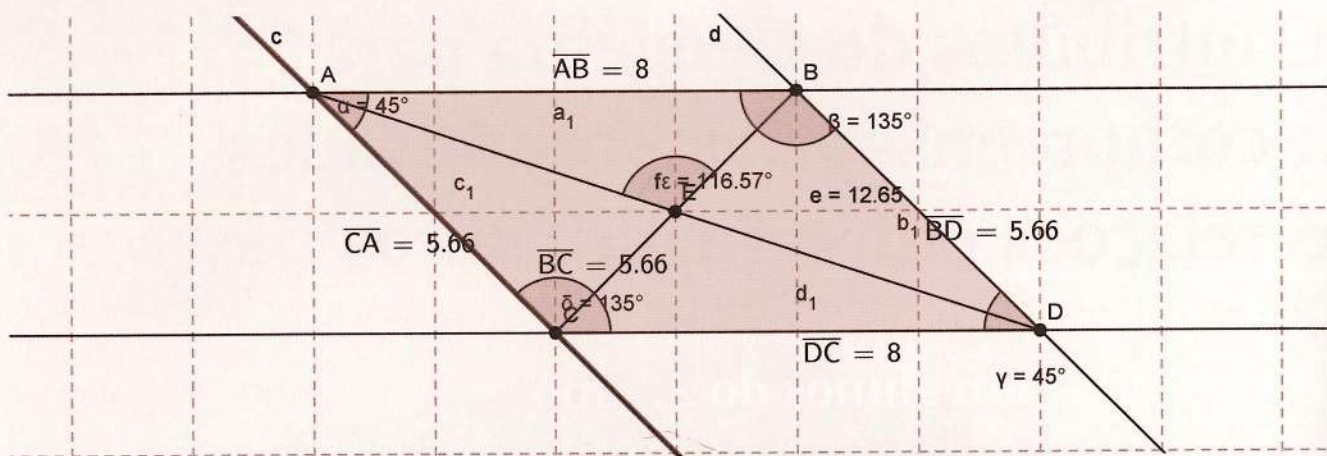
MARIA DA GRAÇA BRUNO PEREIRA

São várias as referências à importância da tecnologia no ensino e aprendizagem da matemática. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) refere nos seus princípios, especificamente no *Princípio para a Tecnologia* — (NCTM, 2007) que «A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos» (p. 26). No mesmo documento, sobre normas que dizem respeito à geometria, pode ainda ler-se: «Através da utilização de modelos concretos, desenhos e programas de geometria dinâmica, os alunos poderão envolver-se ativamente com conceitos geométricos (...) formular e explorar conjecturas e poderão aprender a raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas» (p. 44).

Também Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que «estas ferramentas computacionais (*Cabri-Geomètre*, *Geometer's Sketchpad*, *GeoGebra*, etc.) são geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria, pois permitem a construção e manipulação de objetos ge-

ométricos e a descoberta de novas propriedades desses objetos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes» (p. 68).

Este artigo resulta de uma investigação mais ampla que teve como objetivo compreender qual o contributo do Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), *GeoGebra*, e do material manipulável (geoplano) na identificação das propriedades e relações entre quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado, com alunos do 4.º ano de escolaridade (Pereira, 2012). Mais concretamente, foram delineados os seguintes objetivos: (a) implementar uma sequência de tarefas promotoras da construção de quadriláteros e identificação das suas propriedades; (b) compreender se e como os alunos estabeleciam relações entre os quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, quadrado e losango; (c) compreender quais as vantagens e/ou limitações do *Geogebra* e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre os quadriláteros. Para isso produziu-se, implementou-se e analisou-se um conjunto



**Figura 1.**— Representação do paralelogramo realizada com o *Geogebra*, pelas alunas Maria e Luísa, seguindo o protocolo de construção

de tarefas desenvolvidas no *GeoGebra* e com o geoplano, salientando o papel das representações e da visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros acima referidos.

Este artigo centra-se num dos pares de alunas que seguiu ao longo do estudo, a Maria e a Luísa e na forma como responderam às tarefas propostas, utilizando o AGD, *Geogebra*.

### A EXPERIÊNCIA DE ENSINO

O uso do computador em sala de aula era habitual (uma vez por semana) desde o 1.º ano de escolaridade embora o AGD, *GeoGebra*, tenha sido usado apenas no 3.º ano, para trabalhar o tópico «retas paralelas e perpendiculares» e o conceito de «ângulo». No 4.º ano, para concretizar os objetivos estabelecidos, foram elaboradas 18 tarefas (22 aulas) de acordo com a seguinte ordem: as cinco primeiras resolvidas no geoplano e/ou no papel pontilhado, duas para explorar o *GeoGebra*, oito para resolver no *GeoGebra*, duas em que usaram os dois recursos e a última, uma tarefa de papel e lápis. As tarefas incidiram na investigação de figuras planas podendo os alunos descobrir e explorar um grande número de propriedades e conexões. Foram realizadas de forma sequencial englobando três momentos: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, em pares, e discussão coletiva com toda a turma. As tarefas desenvolvidas com o *GeoGebra* envolveram o desenho e a construção de figuras com o *software* e a análise de construções já prontas de modo que, através da função «arrastar», os alunos identificassem as propriedades presentes em cada figura.

### ALGUMAS TAREFAS

#### CONSTRUÇÃO DE UM PARALELOGRAMO A PARTIR DO PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DADO

Apesar de seguirem, corretamente, o plano de construção dado pela professora, as alunas representaram as figuras conforme a imagem mental que delas tinham. Foi o caso do paralelogramo (Figura 1), pois quando desenharam o terceiro ponto (C), colocaram-no de modo a obter uma linha oblíqua, representando a imagem que têm de paralelogramo (figura sem ângulos retos e com dois lados paralelos na horizontal maiores que os restantes).

O trabalho no *GeoGebra* possibilitou que as características visuais das representações, nomeadamente as medidas, sobressaíssem, o que parece ter facilitado a reflexão das alunas sobre o reconhecimento das propriedades:

*Luísa:* Sou eu que vou medir os ângulos. 45, o mesmo, é igual, 135 é igual. São inteiros os números!

*Maria:* Vou medir os lados.

*Luísa:* Nós não queremos o perímetro.

*Maria:* Já vai, Luísa, já vai!

*Luísa:* Estou a dizer ao *Geogebra*.

*Maria:* Eu sei. Ok. Eu já vou apagar o perímetro.

*Luísa:* Olha! Tem os ângulos iguais dois a dois.

Para responder à segunda parte da tarefa «Construção de um paralelogramo no *Geogebra*» (Figura 1), onde se pretendia que as alunas identificassem as propriedades dos paralelogramos, o par fez uma descrição de tudo o que observou (Figura 2), mencionando características desnecessárias como é o caso da soma dos ângulos internos e outras rara-

### Regista as características do paralelogramo?

Quadrilátero:	Ângulos :	Lados :	Diagonais:
paralelogramo	<ul style="list-style-type: none"> <li>2 ângulos = 2 obtusos.</li> <li>os opostos são iguais 2 a 2.</li> <li>a soma dos ângulos internos consecutivos é de <math>180^\circ</math>.</li> <li>a soma da medida de todos os ângulos internos é de <math>360^\circ</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>a medida dos lados opostos é igual 2 a 2</li> <li>os lados opostos são paralelos 2 a 2.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>a medida das diagonais é diferente</li> <li>os ângulos formados pelas diagonais são 2 agudos e 2 obtusos</li> </ul>

Figura 2.— Listagem das características do paralelogramo

#### > quadrado;

O que se manteve?	O que se alterou?
<ul style="list-style-type: none"> <li>os lados opostos são paralelos 2 a 2.</li> <li>a medida dos lados opostos é igual 2 a 2.</li> <li>a soma dos ângulos internos consecutivos é de <math>180^\circ</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>os ângulos formados pelas diagonais = 4 retos.</li> <li>os ângulos = 4 retos</li> <li>a medida das diagonais é igual.</li> </ul>

quadrado - manteve: a soma da medida de todos os ângulos internos é de  $360^\circ$ .  
 os ângulos opostos são iguais 2 a 2.

O que podes concluir? Concluímos que tem quase todas as alterações e que se todas as características mantidas

#### > losango.

O que se manteve?	O que se alterou?
todas exceto $\rightarrow$	os ângulos formados pelas diagonais - as diagonais são perpendiculares

O que podes concluir? Concluímos que só falta 1 para ter todas as características.

Figura 3.— Registo de alterações e invariantes para o quadrado, o losango e o paralelogramo

mente referidas como a soma da medida dos ângulos internos consecutivos, tal como se pode verificar no registo feito.

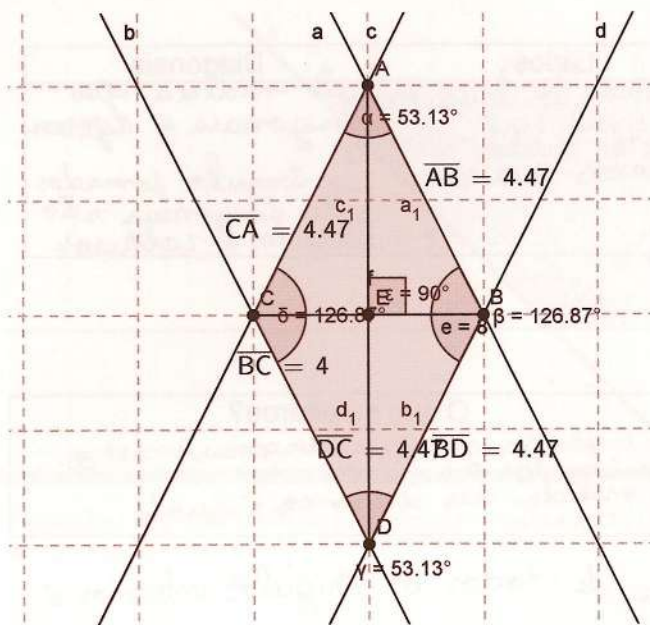
É de salientar que o par teve sempre presente a representação visual das figuras pretendidas e foi com base nela que identificou as suas propriedades. Focou a atenção no observado no ecrã do computador, nomeadamente, as medidas dos lados, ângulos e diagonais, mas também no que fizeram, por exemplo, quando referiram «lados opostos são paralelos 2 a 2», já que era condição dada no plano de construção do paralelogramo.

O recurso às características dinâmicas do software facilitou a visualização das propriedades da figura que se mantêm e que se alteram. Nota-se que as alunas analisaram as representações dinâmicas fazendo uma comparação rigorosa dos invariantes e das alterações observadas, levando

as a concluir que as figuras partilham muitas características, o que aparenta que compreenderam as regularidades entre as representações (Figura 3).

O par movimentou os pontos da construção feita (paralelogramo oblíquângulo) até obter um losango. Recorrem às ferramentas do GeoGebra e exibiram o quadriculado na folha de trabalho para mais facilmente arrastarem o paralelogramo para a forma de retângulo, quadrado ou losango. O recurso ao quadriculado para, através do arrastamento, obterem as representações pretendidas parece indiciar a importância da imagem mental e a sua interação com o conhecimento de conceitos e propriedades.

As alunas arrastaram a construção até obterem a representação mental do retângulo, do quadrado e do losango (Figura 4), tendo presente o conhecimento das respetivas



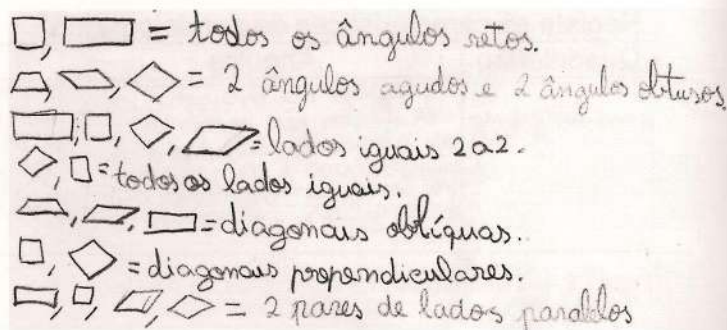
**Figura 4.**— Representação do losango realizada pelas alunas, no *GeoGebra*, após arrastarem os pontos do paralelogramo obliquângulo

propriedades, pois o arrastamento dos pontos e transformação da construção num retângulo pressupõe o conhecimento de que este tem os ângulos retos, ou em relação ao quadrado que este tem os lados congruentes, ou em relação ao losango, que tem os lados congruentes mas não (necessariamente) os ângulos retos.

#### REPRESENTAÇÃO DO LOSANGO ATRAVÉS DO ARRASTAMENTO DA CONSTRUÇÃO DO PARALELOGRAMO

A utilização da geometria dinâmica permitiu a experimentação, exploração e análise dos invariantes, ajudando as alunas a estabelecer conexões entre as propriedades dos paralelogramos. Quando arrastaram os pontos e transformaram a construção do paralelogramo obliquângulo num retângulo e depois num quadrado, verificaram que as características que se mantiveram e as que se alteraram foram, nos dois casos, «quase as mesmas».

Como referido acima, Luísa e Maria fizeram uma listagem de tudo o que observaram na representação do paralelogramo e foi com base nas propriedades em que se focaram que estabeleceram a comparação entre as suas propriedades e as do losango, daí a conclusão registada pelas alunas «Concluimos que só falta 1 para ter todas as características» (Figura 3). Consideraram que o losango tinha todas as características do paralelogramo exceto uma: «as diagonais são perpendiculares». Esta conclusão parece indicar que as alunas compreendem que os atributos essenciais do parale-



**Figura 5.**— Características comuns ao quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango

logramo estão incluídos nos atributos essenciais do losango, aspeto importante na compreensão de uma classificação inclusiva. É de salientar que as alunas listaram todas as propriedades observadas no ecrã do computador e referiram, em todas as representações, o paralelismo dos lados, condição com que construíram o paralelogramo.

#### CLASSIFICAR QUADRILÁTEROS: EMERGIRAM AS PROPRIEDADES COMUNS

A interação com a representação dinâmica, nomeadamente a observação da sua deformação, fez emergir as propriedades comuns e contribuiu para a construção de uma imagem mais clara das propriedades das figuras, facilitando a compreensão dessas propriedades e das relações entre as formas.

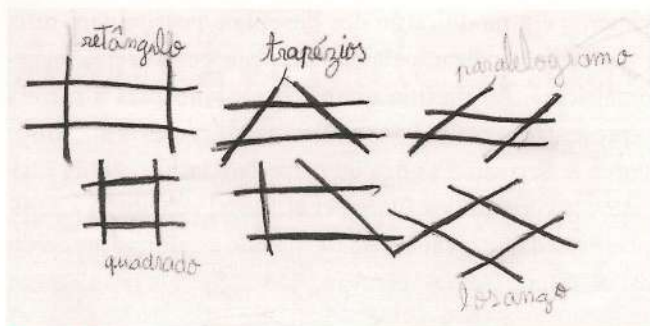
A imagem mental das figuras fez sobressair as propriedades comuns tendo facilitado a classificação dos quadriláteros optando, o par, por uma classificação inclusiva (Figura 6).

Nesta representação, que se revelou facilitadora da classificação que as alunas fizeram, foi dado a conhecer o conceito que Maria tem de paralelismo, mais associado a retas do que a segmentos de reta. Isto talvez porque a representação do paralelismo está muito relacionada com retas que não se cruzam e, como tal, as alunas prolongaram os segmentos de reta para justificarem que são paralelos pois, mesmo prolongando-os, não se cruzam (Figura 6). Também se poderá pensar na influência do *GeoGebra* no estudo do paralelismo, uma vez que ao usarem a ferramenta *reta paralela*, representam retas e não segmentos de reta. De qualquer modo, parece que as alunas já abstraíram a propriedade de paralelismo comum a estes quadriláteros e usaram as representações para tornar esse conceito mais concreto.

#### CLASSIFICAÇÃO APRESENTADA PELO PAR MARIA E LUÍSA

O par acabou por fazer uma classificação inclusiva a nível dos paralelogramos, porém excluíram estes dos trapézios. Esta exclusão poderá dever-se, além do exigido na tarefa





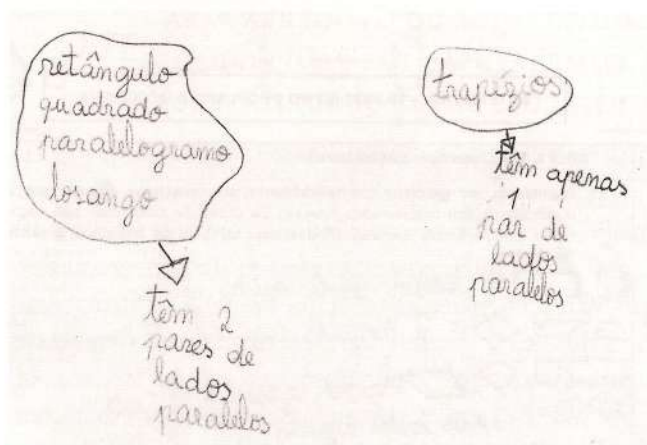
**Figura 6.**— Representação dos quadriláteros para serem classificados

(fazer grupos pressupõe, à partida, mais do que um grupo), à representação que fizeram, onde sobressaem as características com que agruparam: «dois pares de lados paralelos» e «apenas 1 par de lados paralelos».

A classificação apresentada pelo par revela mais do que um agrupamento baseado no visual, pois além de agruparem atendendo às propriedades, aparenta a compreensão da inclusão de classes, já que fizeram uma classificação inclusiva (Figura 7).

De igual modo, numa última tarefa, onde foi apresentada uma classificação hierárquica, adaptada de Van de Walle (2004), o par identificou o critério presente em cada um dos grupos, evidenciando compreender uma classificação hierárquica (Figura 8).

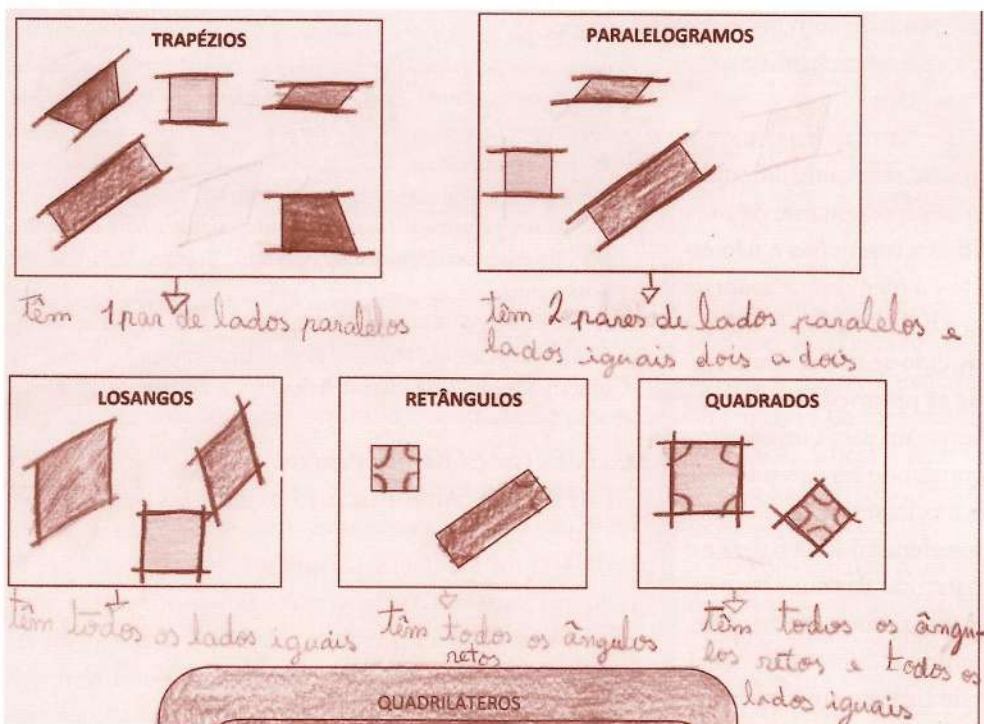
Maria e Luísa identificaram corretamente as propriedades dos quadriláteros e estabeleceram relações entre as fi-



**Figura 7.**— Classificação dos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado

guras revelando compreensão da inclusão de classes, como evidenciado na justificação da concordância com a classificação apresentada: «Sim, concordamos com esta classificação porque faz sentido pois consegue-se perceber bem os grupos. Ex.: Os quadrados estão nos grupos: retângulos, losangos, paralelogramos, trapézios e quadriláteros».

À semelhança do evidenciado na tarefa, «Classificar quadriláteros» (Figuras 5, 6 e 7) parece que as alunas tiveram necessidade de prolongar os lados das figuras para identificarem o paralelismo. Na sua classificação excluíram os paralelogramos dos trapézios, contudo ao analisarem a classificação dada (Figura 8) e da forma como redigiram o critério «têm 1 par de lados paralelos», incluíram os paralelogramos nos trapézios.



**Figura 8.**— Registo do critério de classificação usado em cada grupo

## CONTRIBUTOS DO GEOGEBRA PARA A COMPREENSÃO DAS PROPRIEDADES E RELAÇÕES ENTRE QUADRILÁTEROS

O *Geogebra* permitiu: construir facilmente figuras e calcular rapidamente medidas; movimentar os desenhos totalmente ou em partes, contribuindo para a descoberta das propriedades que se mantêm e/ou se alteram; gravar e reproduzir sequências de ações que ajudaram a formar imagens dinâmicas; representar de forma precisa e variada as figuras geométricas o que, associada às características dinâmicas do *software*, fornecendo diferentes representações, facilitou a identificação de propriedades dos quadriláteros, possibilitou estabelecer relações entre eles e contribuiu para a correta representação mental dos conceitos.

Porém e, apesar de todas as vantagens que podem advir da utilização desta ferramenta, não significa, de maneira alguma, que não surjam constrangimentos a que o professor deverá estar atento. Neste estudo, destaco alguns: a impossibilidade de pronta resposta às solicitações de todos os alunos de modo a estimular a sua curiosidade e a incentivar o aprofundamento das investigações; o impedimento de maior reflexão sobre o que estava a acontecer, de modo a conseguirem interpretar a informação extraída do *feedback* dado pelo computador; a dificuldade em manter presente o propósito das tarefas, provocada pelo fascínio das propriedades dinâmicas do *software* como o «rodar», o «ampliar» e o «arrastar». Os alunos focavam-se no «movimento» que acontecia no ecrã do computador, esquecendo o propósito da tarefa. Para ultrapassar estes constrangimentos, muito contribuiu a necessidade de registo das observações no guião da tarefa e a apresentação/discussão no coletivo da turma.

Inicialmente, o par tinha tendência para listar tudo o que observava no ecrã do computador, revelando dificuldade em considerar uma figura como representante de uma classe e em distinguir entre atributos essenciais e não essenciais de uma figura. No entanto e à medida que avançou na experiência de ensino, passou a desvalorizar medidas e características desnecessárias, focando-se nos atributos essenciais da figura e verificando se as propriedades de uma representação particular se confirmavam para outras representações do mesmo conceito, avançando no entendimento da figura como representativa da classe.

O recurso ao arrastamento dos elementos da figura e o movimento possibilitaram a constatação das suas propriedades através da observação dos invariantes geométricos, permitindo estabelecer relações entre os diferentes quadriláteros, confirmando o que defende Laborde (1993): «o mo-

vimento e a modificação dos desenhos possibilitam uma mais fácil visualização das propriedades e das relações geométricas». Ao mesmo tempo, contribuiu para a correta representação mental dos conceitos (Abrantes *et al.*, 1999; Ponte & Serrazina 2000) ou correção/clarificação de conceitos já construídos (Wong *et al.*, 2011) e facilitou a compreensão da inclusão de classes, tendo as alunas progredido no seu raciocínio relativamente às figuras geométricas e respetivas propriedades.

Pode, assim, dizer-se que o AGD, *GeoGebra*, pela versatilidade que oferece no movimento e comportamento das figuras, foi uma mais-valia na concretização da experiência de ensino deste estudo. A possibilidade de visualizar uma mesma construção de diversas formas, juntamente com a reflexão surgida por meio da discussão no grupo turma, possibilitou, às alunas, o avanço no raciocínio geométrico tendo ido além do nível visual. Desenvolveram uma compreensão mais avançada de quadriláteros pois identificaram os seus atributos, reconheceram relações entre eles e construíram e aperfeiçoaram conceitos geométricos.

### Referências bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.
- Laborde, C. (1993). The Computer as part of the Learning Environment; the case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. Berlin: Springer-Verlag.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Pereira, M. G. B. (2012). *Contributos de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros*. Dissertação de mestrado. Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa.
- Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Van de Walle, J. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (5th ed.). Boston, MA: Pearson Education.
- Wong, W.-K., Yin, S.-K., Yang, H.-H., & Cheng, Y.-H. (2011). Using Computer-Assisted Multiple Representations in Learning Geometry Proofs. *Educational Technology & Society*, 14 (3), 43-54.

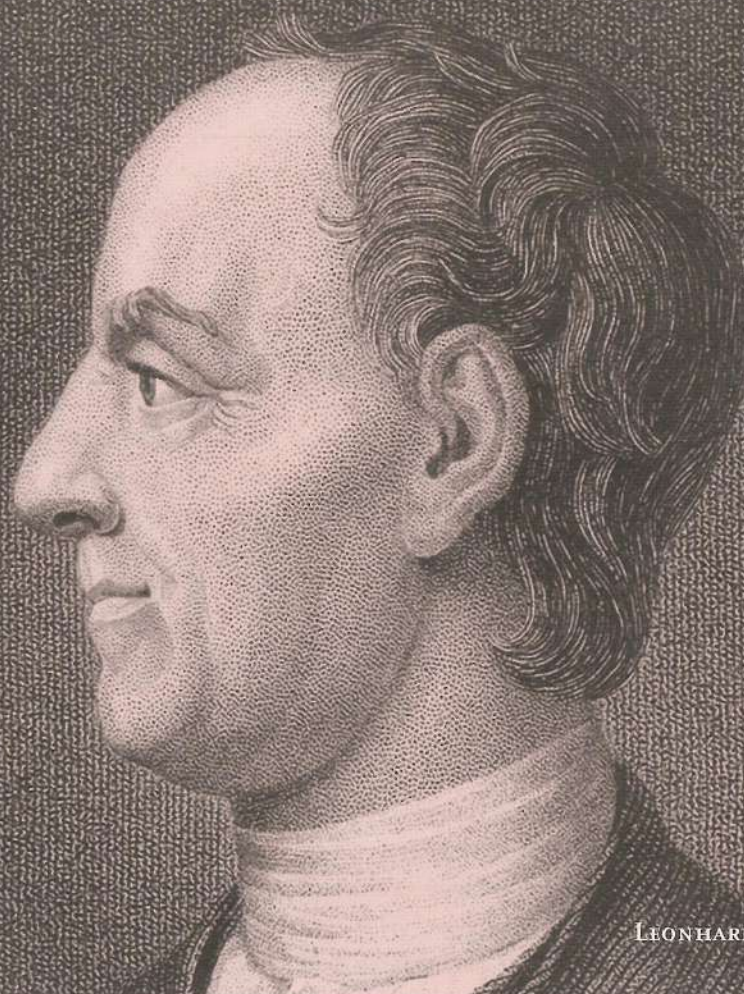
MARIA DA GRAÇA BRUNO PEREIRA

EB1 DE BICESSE, AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE ALAPRAIA

# A notável identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

CARLOS EDUARDO DE SOUZA CAMPOS GRANJA



LEONHARD EULER (1707-1783)

## INTRODUÇÃO

Pergunte a um matemático qual é a fórmula mais bonita que ele conhece e provavelmente você ouvirá como resposta a «fórmula de Euler», ou seja,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ .

Essa fórmula costuma ser muito lembrada não apenas pela sua importância no Cálculo Diferencial e Integral, mas também pelo encantador resultado que produz quando fazemos  $\theta = \pi$ . Nesse caso, como  $\cos \pi = -1$  e  $\operatorname{sen} \pi = 0$ , segue que a fórmula implicará na identidade  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , uma surpreendente reunião de cinco dos mais importantes números da matemática:  $\pi$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $1$  e  $0$ . Se você preferir que nela apareça um número negativo, nada impede que seja escrita como  $e^{i\pi} = -1$ .

A demonstração completa da fórmula de Euler envolve o uso de ferramentas de Cálculo Diferencial e Integral, porém, é possível explorar o resultado por ela apresentado por meio da matemática escolar do final do ensino médio<sup>[1]</sup>. Aos leitores interessados nessa abordagem recomendamos o artigo [1] do Prof. José Paulo Carneiro, indicado na bibliografia.

De nossa parte, resolvemos encampar o desafio de explorar a beleza da identidade  $e^{i\pi} + 1 = 0$  utilizando recursos da matemática escolar. Nesse caso, a abordagem demandará conhecimentos elementares a respeito das fórmulas de multiplicação e potenciação de números complexos, bem

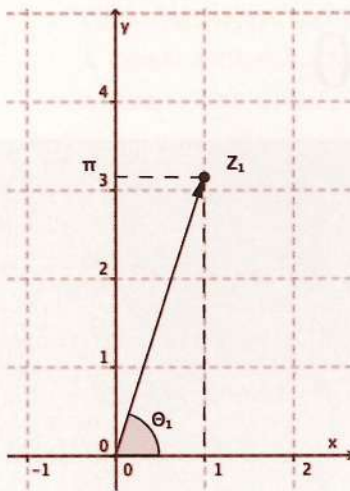


Figura 1

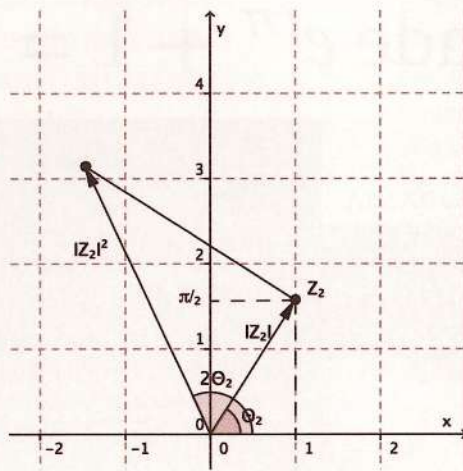


Figura 2

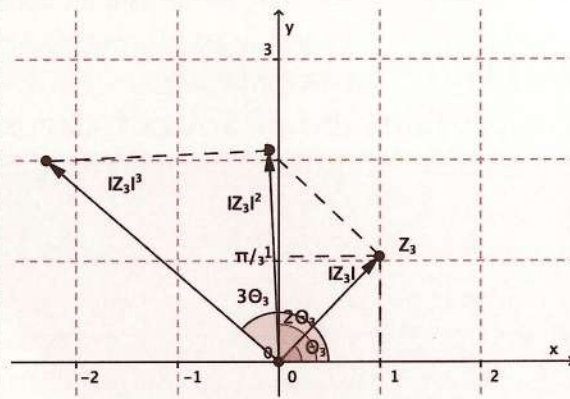


Figura 3

como da representação geométrica dessas operações no plano Argand-Gauss. A respeito deste segundo tema, o da representação geométrica dos complexos, também sugerimos uma indicação bibliográfica no final do artigo [2].

### VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE $e^{i\pi} = -1$

O número  $e$ , que aparece na identidade de Euler quando  $\theta = \pi$ , é o limite de  $(1 + \frac{1}{n})^n$  quando  $n$  tende para o infinito. Com manipulações simples de limites, que podem ser encontradas em livros de Cálculo [3], é possível deduzir que  $e^x$  é o limite de  $(1 + \frac{x}{n})^n$  quando  $n$  tende para o infinito. Outro resultado que também se demonstra em matemática superior, e que aqui apenas assumiremos como válido, é o de que a definição de  $e^x$  como limite também é válida quando  $x$  é um número complexo [4].

Se  $x$  é o número complexo  $i\pi$ , então, para valores cada vez maiores de  $n$  a expressão  $(1 + \frac{i\pi}{n})^n$  tende a  $e^{i\pi}$ . Usando esse resultado, e tomando a identidade de Euler  $e^{i\pi} = -1$ , concluímos que para valores cada vez maiores de  $n$ , a expressão  $(1 + \frac{i\pi}{n})^n$  se aproxima cada vez mais, e tanto quanto se queira, de  $-1$ . A seguir ilustraremos esse resultado geometricamente.

O que acabamos de indicar aponta para o fato de que os termos da sequência  $(1 + i\pi)$ ,  $(1 + \frac{i\pi}{2})^2$ ,  $(1 + \frac{i\pi}{3})^3$ ,  $(1 + \frac{i\pi}{4})^4$ , ... são cada vez mais próximos do inteiro  $-1$ . Sendo  $(1 + \frac{i\pi}{n})^n$  o  $n$ -ésimo termo dessa sequência, investigaremos geometricamente a representação de  $(1 + \frac{i\pi}{n})^1$ ,  $(1 + \frac{i\pi}{n})^2$ ,  $(1 + \frac{i\pi}{n})^3$ , ...,  $(1 + \frac{i\pi}{n})^n$  no plano Argand-Gauss.

Recordemos que a forma trigonométrica (ou polar) do complexo  $z = a + bi$  é  $|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , e da potência  $z^n$

é  $|z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ ; esta segunda usualmente chamada de 1.ª fórmula de Moivre. Do ponto de vista geométrico, a representação dos complexos  $z$ ,  $z^2$ ,  $z^3$ , ... nada mais é do que uma sequência de vetores no plano Argand-Gauss de origem no par ordenado  $(0, 0)$ , módulos respectivamente iguais a  $|z|$ ,  $|z|^2$ ,  $|z|^3$ , ..., e argumentos respectivamente iguais a  $\theta$ ,  $2\theta$ ,  $3\theta$ , ...

Voltando à sequência cujos termos estávamos interessados em representar geometricamente, para  $n = 1$ , chamaremos  $1 + i\pi$  de  $z_1$  e sua representação encontra-se na figura 1.

Para  $n = 2$ , chamaremos  $1 + \frac{i\pi}{2}$  de  $z_2$  e representaremos, no mesmo plano Argand-Gauss, os complexos  $1 + \frac{i\pi}{2}$  e  $(1 + \frac{i\pi}{2})^2$  (figura 2).

Para  $n = 3$ , chamaremos  $1 + \frac{i\pi}{3}$  de  $z_3$  e representaremos os complexos  $1 + \frac{i\pi}{3}$ ,  $(1 + \frac{i\pi}{3})^2$  e  $(1 + \frac{i\pi}{3})^3$  (figura 3).

Estendendo essa investigação para um valor muito grande de  $n$  teremos  $|z|$  muito próximo de 1, e os  $n$  vetores no plano irão «percorrer um semicírculo» com par ordenado mais à esquerda tendendo para  $(-1, 0)$ , conforme ilustramos a seguir para o caso de  $n = 4$ ,  $n = 5$ ,  $n = 6$  e  $n = 25$  (figura 4).

Portanto,  $e^{i\pi} = -1$  equivale a dizer que para valores muito grandes de  $n$ , a representação dos complexos  $(1 + \frac{i\pi}{n})^1$ ,  $(1 + \frac{i\pi}{n})^2$ ,  $(1 + \frac{i\pi}{n})^3$ , ...,  $(1 + \frac{i\pi}{n})^n$  no plano Argand-Gauss se aproxima de um semicírculo de centro  $(0, 0)$  e raio 1, com o par ordenado mais à esquerda da representação tendendo para  $(-1, 0)$ . Do ponto de vista geométrico, é notável o surgimento de um semicírculo. Não é a toa que o número  $\pi$  está presente na identidade de Euler!

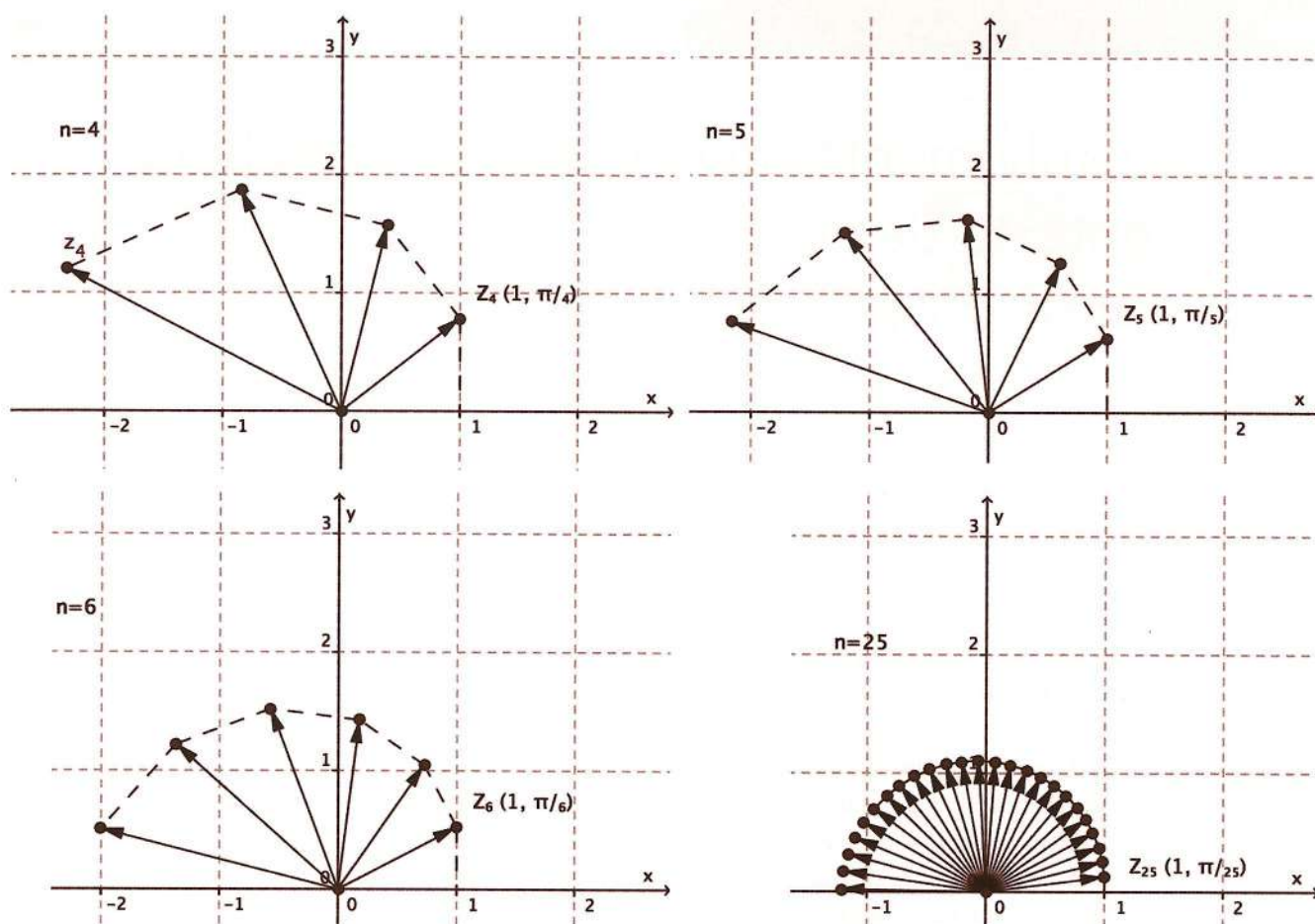


Figura 4

As ideias aqui apresentadas podem ser discutidas e exploradas com nossos alunos de forma dinâmica por meio do *software* Geogebra, o que torna a aula mais rica de significados e possibilidades. Fica nossa sugestão.

#### Nota

[1] No Brasil, Ensino Médio corresponde aos três anos que antecedem ao término da escolarização básica, normalmente dos 15 aos 17 anos de idade.

#### Bibliografia

- [1] CARNEIRO, J. P. *Por que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sen \theta$ ?* Revista do Professor de Matemática (n.º 77). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [2] CARNEIRO, J. P. *A geometria e o ensino dos números complexos.* Revista do Professor de Matemática (n.º 55). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [3] SIMMONS, G. S. *Cálculo com geometria analítica, volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[4] HÖNING, C. S. *Introdução às funções de uma variável complexa.* São Paulo: IME-USP, 1971.

[5] PROVIDÊNCIA, N. B. *Matemática ou mesas, cadeiras e canecas de cerveja.* Lisboa: Coleção O Prazer da Matemática, Gradiva, 2000.

JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

COLÉGIO SANTA CRUZ, EM SÃO PAULO, BRASIL

CARLOS EDUARDO DE SOUZA CAMPOS GRANJA

COLÉGIO SANTA CRUZ, EM SÃO PAULO, BRASIL

# O desenvolvimento do pensamento algébrico num contexto de ensino exploratório: Um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade

CÉLIA MESTRE

Tradicionalmente, na escola de 1.º ciclo, a aritmética ocupa um papel predominante no currículo da Matemática. Muitas vezes os números e os cálculos algorítmicos têm primazia em detrimento da exploração de capacidades de pensamento de nível superior, como a generalização (Kaput, Carraher & Blanton, 2008). Esta capacidade é considerada por Kaput (1999) como intrínseca à atividade e pensamento matemáticos e, em particular, como aspeto central para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. A generalização pode ser representada de diversas formas: inicialmente, os alunos podem expressar as generalizações que observam no mundo com palavras e, gradualmente, usar formas mais simbólicas (Blanton, 2008).

A recente abordagem de investigação denominada *Early Algebra* promoveu uma nova visão da relação aritmética-álgebra, revelando o caráter algébrico da aritmética e questionando a prática corrente de ensinar primeiro aritmética e depois álgebra (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2003). Isso não significa introduzir a álgebra mais cedo na escolaridade. Em vez disso, trata-se de uma abordagem que perspetiva a construção dos conceitos algébricos a partir dos tópicos já existentes no currículo da Matemática elementar, introduzindo-os através de problemas contextualizados e onde a notação formal é trabalhada gradualmente (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2007). Trata-se, assim, de algebrizar os conteúdos já existentes do currículo matemático, fazendo com que os conteúdos aritméticos se tornem mais algébricos à medida que a generalização é construída (Kaput, 2008).

O pensamento algébrico pode ser entendido como um «processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, es-

tabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade» (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). De acordo com esta definição, Blanton (2008) identifica as duas vertentes que considera essenciais para uma compreensão mais abrangente desse conceito: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. Enquanto a primeira se prende com a utilização da aritmética para desenvolver e expressar generalizações, a segunda consiste na identificação de padrões numéricos e pictóricos para descrever relações funcionais.

## ENSINO EXPLORATÓRIO

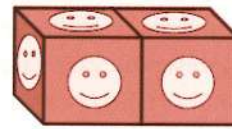
A principal característica do ensino exploratório é que promove nos alunos a descoberta e a construção do conhecimento (Ponte, 2005). Para tal, a exploração de tarefas abertas e a sua gestão na aula proporcionando aos alunos momentos de discussão coletiva são oportunidades fundamentais para a construção do conhecimento.

A aprendizagem que os alunos fazem está dependente da atividade que realizam e da reflexão que fazem sobre a mesma (Ponte, 2005) e, deste modo, a seleção das tarefas que são trabalhadas em sala de aula deve ter em conta o tipo de atividade que podem proporcionar aos alunos. Assim, tarefas que conduzem a procedimentos rotineiros são diferentes de tarefas que exigem aos alunos pensar conceitualmente e que os estimulam a estabelecer conexões (Stein & Smith, 1998). De acordo com *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1994), as tarefas matematicamente válidas devem respeitar as seguintes características: apelar à inteligência dos alunos, desenvolver a compreensão e a

### Tarefas "Cubos com autocolantes"

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa nas construções seguintes e explica como pensaste.
  - 1.1. Três cubos.
  - 1.2. Quatro cubos.
  - 1.3. Dez cubos.
  - 1.4. Cinquenta e dois cubos.
2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 1.— Enunciado da tarefa «Cubos com autocolantes»<sup>[1]</sup>

organizando a aula em quatro fases distintas: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. Destes diferentes momentos, destaca-se o papel preponderante que assumiram as discussões coletivas. As aulas foram conduzidas por mim, no papel simultâneo de professora e investigadora.

Em seguida apresentam-se alguns momentos da discussão coletiva de uma das tarefas desenvolvidas na experiência de ensino — tarefa «Cubos com autocolantes». Com esta apresentação pretende-se refletir como a metodologia de ensino-aprendizagem exploratória adotada contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, mais concretamente no que respeita à importância que assumiram os momentos de discussão coletiva.

### A DISCUSSÃO COLETIVA DA TAREFA «CUBOS COM AUTOCOLANTES»

A tarefa «Cubos com autocolantes», explorada numa fase final da experiência de ensino, apresentava uma sequência pictórica crescente com uma construção tridimensional envolvendo diferentes números de cubos interligados onde se colavam autocolantes nas faces visíveis. Pretendia-se que os alunos expressassem a relação entre o número de cubos de uma construção qualquer e o respetivo número de autocolantes, de forma a generalizar essa relação.

Na apresentação da tarefa, a situação foi modelada com o recurso a materiais concretos, elaborando-se conjuntamente com os alunos a construção apresentada no enunciado.

aptidão matemática, estimular os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático, promover a comunicação sobre a matemática, mostrar a matemática como uma atividade humana permanente, ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos e promover o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer matemática. As tarefas são «um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos» (Ponte, 2005, p. 23).

Baxter e Williams (1996, cit. Baxter & Williams, 2010) propõem a designação de «ensino orientado pelo discurso» (*discourse-oriented teaching*, no original) para descrever as ações do professor que promovem a construção do conhecimento matemático através da comunicação entre os alunos. Os mesmos autores descrevem o ambiente de sala de aula que promove este tipo de ensino de acordo com a estrutura seguinte: (1) as tarefas matemáticas são apresentadas aos alunos; (2) os alunos trabalham na tarefa a pares ou em pequenos grupos, enquanto o professor circula pelos grupos encorajando-os, desafiando-os, questionando-os e dando-lhes sugestões, se necessário; (3) os alunos apresentam as suas resoluções à turma; (4) o professor sistematiza as apresentações. Conscientes da dificuldade inerente à implementação desta estrutura de sala de aula, os autores referem que o professor deverá promover suportes sociais que ajudem os alunos a trabalhar em conjunto. Por exemplo, os alunos devem ser encorajados a explicar as suas formas de pensamento e a esforçarem-se a compreender as explicações dos colegas. As regras que conduzem a esta forma de comunicação devem ser explicitamente identificadas e postas em prática até fazerem parte da cultura de sala de aula. À medida que os alunos interiorizam essas regras, assumem um papel de maior responsabilidade no discurso matemático de sala de aula. Baxter e Williams (2010) concluem que, em salas de aula onde existe esta prática de ensino, os professores falam menos e os alunos mais do que o que seria esperado numa sala de aula de ensino mais tradicional, pois o tempo de aula é organizado de forma que sejam dadas mais oportunidades de comunicação aos alunos, tanto em pequeno grupo como durante a discussão coletiva com toda a turma.

De acordo com estas perspetivas foi conduzida uma experiência de ensino, ao longo de um ano letivo, com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico de alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade. O estudo foi desenvolvido num contexto de ensino-aprendizagem exploratório,

Durante o trabalho autônomo foram distribuídas aos diferentes grupos construções com dois e três cubos, com os autocolantes colados.

Após o momento de trabalho autônomo, seguiu-se a discussão coletiva. Um dos pares que apresentou a sua forma de resolução à turma era formado pelos alunos Carolina e Daniel. Este par apresentou várias representações diferentes: linguagem natural, tabelar e escrita simbólica.

O momento que se apresenta em seguida centra-se na discussão sobre a tabela apresentada pelo par. Esta tinha duas colunas, número de cubos e número de autocolantes, e era completada com diferentes exemplos. Na exploração dessa tabela, o par apresenta tanto uma leitura recursiva ao indicar a variação do número de autocolantes linha a linha como uma leitura que relaciona diretamente o número de cubos com o número de autocolantes. Na apresentação à turma, a investigadora solicita ao par que explique a tabela que construíram. Isso conduz a uma discussão sobre a diferença entre o número de autocolantes nos termos consecutivos da sequência e o valor constante que é adicionado.

Carolina — Nós pensámos, como no outro dia o grupo do Fábio fez uma tabela, assim mais ou menos como esta, e então pensámos que também podíamos fa-

zer uma. E vimos a relação. Então fizemos duas colunas: uma com o número de cubos e outra com o total de autocolantes. O número de cubos é 9, 10, 11, 12, 13 e a relação é de um. No total de autocolantes a relação é de quatro. Aqui era de quatro, mas aqui estava sempre a fazer dois, também era de quatro.

Fábio — Essa parte não percebi.. era de dois e depois era de quatro?

Carolina — Sim, aqui era de quatro e aqui está sempre a ser dois...

Gonçalo — Não, simplesmente porque ali é vezes quatro...

Carolina — Sim, porque aqui está sempre dois, por isso é de quatro... se fizeres assim, sem o dois, assim nove vezes quatro é 36, e depois 10 vezes quatro dá 40, 42...

Gonçalo — Não, mas isso é só a tabuada do quatro. Nove vezes quatro era 36...

Rita — Vezes quatro é 36, juntando mais dois, como em todos junta mais dois, por isso é que dá mais quatro.

Gonçalo — Se tirares o mais dois é a tabuada do quatro.

Carolina começa por referir uma característica interessante que foi sendo identificada ao longo da experiência de ensino: o facto de os alunos se apropriarem dos tipos de representação usados por outros grupos, procurando reproduzi-los nas tarefas seguintes. Assim, Carolina começa por referir que está a usar uma tabela como outro grupo já o tinha feito em uma tarefa anterior. Por outro lado, neste extracto destaca-se ainda o nível de pormenor com que esta aluna procura apresentar a forma de resolução do seu grupo, identificando os procedimentos usados e as conclusões a que chegaram. Para além disso, é evidente a forma como outros colegas interpelam Carolina, procurando perceber a sua forma de resolução.

Nesta fase da discussão, a investigadora procura que os alunos justifiquem o porquê das regularidades identificadas através da exploração da tabela. Conduz, nesse sentido, a discussão coletiva na turma.

Investigadora — Porque é que é sempre mais quatro?

Fábio — Porque se faz sempre vezes quatro...

Investigadora — Mas porquê?

Carolina — Porque nove vezes quatro dá 36, depois com o dois, 38; 10 vezes quatro, 40, junta-se o dois, 42, é o dois que está a fazer isto...

Investigadora — O dois está a fazer isto. Mas porque é que tu dizes ali, vocês têm ali as setinhas, mais quatro, mas porquê mais quatro e não outra coisa qualquer?

Carolina — Porque a diferença é de quatro.

Investigadora — Mas porquê?

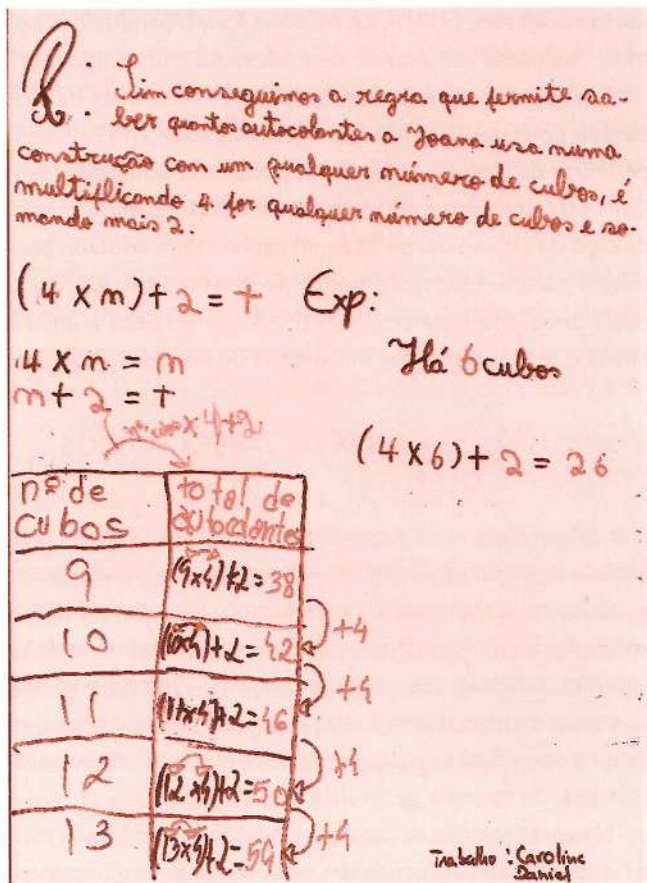
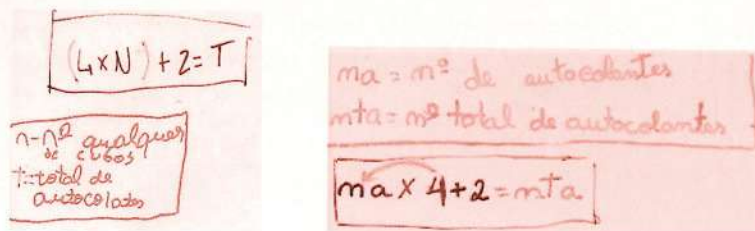


Figura 2.— Resolução do par Carolina e Daniel.





**Figura 3.**— Comparação entre as resoluções do grupo do André, Gonçalo e Joana e do grupo da Rita, Diogo e Beatriz.

Rita — Porque foi assim, eles fizeram nove vezes quatro, é 36 e o 36 faz parte da tabuada do quatro, mas eles puseram mais dois, se eles no próximo metessem mais três já não seria mais quatro... porque é sempre o mesmo número.

Investigadora — Mas eles fizeram e fizeram corretamente... A minha pergunta é porque é que neste problema, nesta situação...

Rita — Porque há quatro lados nos cubos.

(...)

João V. — Porque tem quatro lados.

Investigadora — O que é que tem quatro lados?

João V. — Sim, quatro faces.

Investigadora — Mas o cubo tem quatro faces?

Vários alunos — Não, tem seis...

João V. — Mas é menos uma que fica tapada e depois é menos a outra do outro que também fica tapada.

Neste excerto é evidente como o questionamento da investigadora procura levar os alunos a justificarem as regularidades que identificaram na situação, como é o caso de multiplicarem sempre por quatro. Em conjunto, os alunos conseguiram concluir que isso se devia ao facto de terem sempre quatro faces visíveis de cada cubo com autocolantes.

Em seguida, dois grupos apresentam as suas resoluções. Estes dois grupos apresentavam a escrita da regra em linguagem simbólica e de forma muito semelhante. No entanto, o primeiro considerava o número de cubos como a variável independente e o segundo considerava ser o número de autocolantes essa variável. Esse facto suscita uma interessante discussão na turma, que se apresenta em seguida.

Gonçalo — No nosso está a dizer que é um número qualquer de cubos e o dela é um número qualquer de autocolantes... Mas vai dar ao mesmo... Saber o número qualquer de autocolantes ou o número qualquer de cubos é a mesma coisa...

Investigadora — É?

Gonçalo — Então é assim: aqui há três cubos e os *smiles* de cima... então estes são os *smiles* de cima e são três cubos e três *smiles*. Tínhamos falado que os *smiles* é três vezes quatro, viste os *smiles* de cima, mas

se souberes os três cubos também vai ser três vezes quatro.

Investigadora — Mas o número de autocolantes dessa construção é igual ao número de cubos?

Gonçalo — Não professora, mas só que a Rita estava a dizer que só contava os de cima, que era os de cima vezes quatro, então os de cima são três e há três cubos, então os três autocolantes de cima é a mesma coisa que os três cubos.

(...)

João V. — É a mesma coisa.

Investigadora — É a mesma coisa... mas...

João V. — Só que explicado de maneiras diferentes...

Investigadora — É a mesma coisa, mas acho que temos de ter um cuidadinho aí...

Carolina — Eu acho que o da Rita e o do Gonçalo são a mesma coisa... porque se soubéssemos o número de autocolantes tínhamos de contar o número de cubos e se soubéssemos o número de cubos tínhamos de contar o número de autocolantes...

(...)

Investigadora — Agora eu acho que... há um cuidado quando nós usamos ali um número qualquer de autocolantes, acho que temos de ter um cuidado especial ali...

Gonçalo — Ali ela falou que era o de cima, mas se for o da frente também são três autocolantes e três cubos.

João V. — Tanto faz.

Investigadora — Ok, e se for o número total de autocolantes?... Não é também o número de autocolantes?

Vários alunos — É.

Investigadora — Então, o que falta dizer ali? Número de autocolantes...

João V. — E cubos.

Fábio — Não, número de autocolantes de cima.

Investigadora — De cima, de uma face...

Neste excerto os alunos começam por não reconhecer a diferença entre as duas representações simbólicas que usaram para expressar a relação entre o número de autocolantes e um número qualquer de cubos. Ao longo desta discussão,

a investigadora conduz os alunos a perceberem as diferenças entre as duas representações, impelindo-os ainda a reconhecerem a necessidade de serem claros na forma como identificam as diferentes variáveis.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelos pequenos excertos apresentados pode constatar-se que os alunos participaram na discussão coletiva, assumindo um papel ativo tanto na explicação das suas formas de resolução como na compreensão das explicações dos colegas (Baxter & Williams, 2010). Desta forma, os momentos de discussão coletiva permitiram a construção de aspetos pertinentes para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Importa referir que tarefas como a apresentada, com a exploração de sequências pictóricas crescentes, podem ser muito significativas para a promoção do pensamento algébrico dos alunos, nomeadamente na vertente do pensamento funcional por facilitarem a identificação da relação entre as variáveis. O contexto pictórico visual permitiu atribuir sentido às diferentes variáveis e tornar mais explícitas as relações entre elas, para além de, no caso concreto desta tarefa, permitir distinguir o que era constante e o que variava na sequência. Estes aspetos são importantes para a construção da compreensão das relações funcionais, que podem emergir desta forma neste nível de ensino.

No entanto, é pela sua exploração em sala de aula e pela atividade que os alunos realizam e a reflexão que produzem que poderemos considerar as aprendizagens dos alunos (Ponte, 2005). Para tal, e no respeitante ao desenvolvimento do pensamento algébrico, é importante que os professores desenvolvam olhos e ouvidos algébricos (Blanton & Kaput, 2005) para que integrem natural e espontaneamente a abordagem dos conteúdos e procedimentos algébricos na sala de aula, durante um período de tempo significativo que permita a sua maturação gradual.

Assumindo a complexidade inerente a todo este processo, é razoável conceber que o que se apresenta neste texto apenas reflete parcialmente o ambiente de aprendizagem vivido em sala de aula. De facto, as situações de construção de aprendizagens são demasiado ricas para se compactarem em tão limitada imagem, pois todos os momentos da aula são entendidos como oportunidades para a construção do conhecimento matemático, numa perspetiva dialógica. No entanto, pelas opções tomadas enquanto professora-investigadora e pela forma como os alunos reagem a esta prática de ensino, pode considerar-se que os resulta-

dos de uma vivência tão intensa contribuirão não só para uma construção da identidade matemática de cada aluno, como para a evolução do seu desenvolvimento integral enquanto cidadãos.

## Nota

- [1] Tarefa adaptada de Moss, J., Beaty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2005).

## Referências

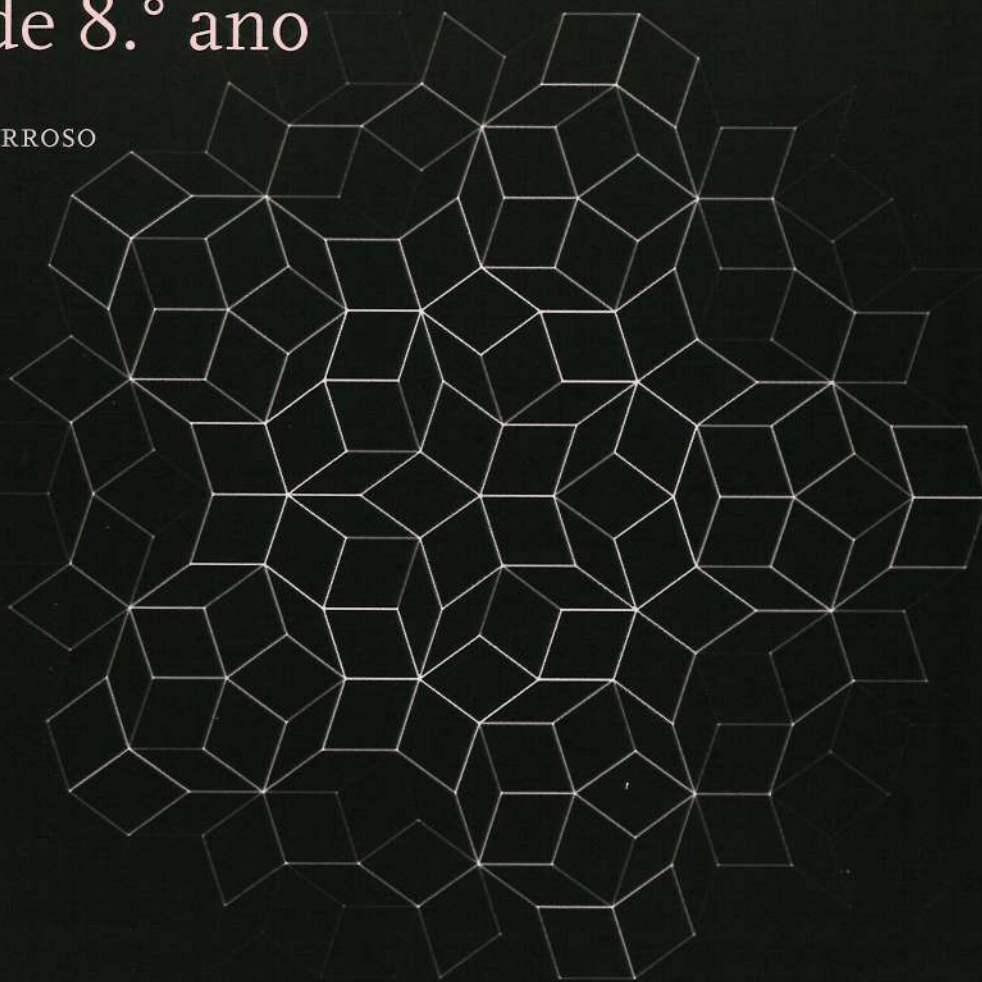
- Baxter, J. A. & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education*, 13, 7–26.
- Blanton, M. L. (2008). Algebra and the elementary classroom. *Transforming thinking, Transforming Practice*. Heinemann: Portsmouth, NH.
- Blanton, M. & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.
- Carraher, D.W., Schliemann, A.D. & Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ, Erlbaum, pp. 235–272.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades* (pp. xvii–xxi). New York: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.
- Moss, J., Beaty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2005). The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in Mathematics. <http://www.brookings.edu/gs/brown/algebraicreasoning.htm>.
- National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.
- Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B. (2003). Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice. *Studies in Mathematical Thinking and Learning Series*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268–275.

CÉLIA MESTRE

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ROMEU CORREIA, ALMADA

# A exploração de isometrias nas Pavimentações de Penrose numa turma de 8.º ano

JOÃO CARLOS TERROSO



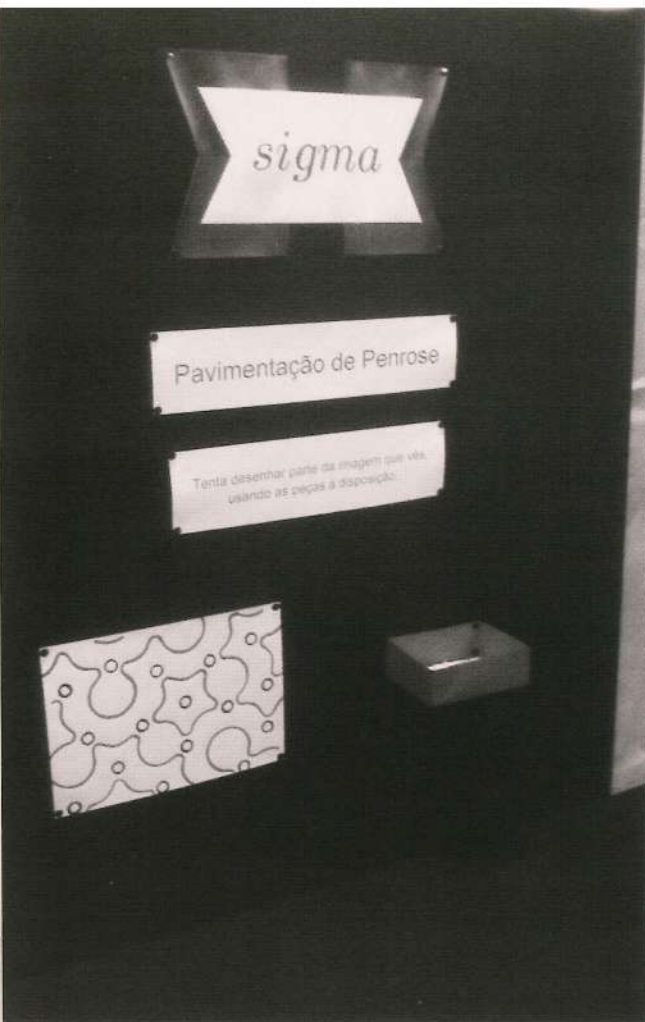
## UTILIZAÇÃO DA MATEMÁTICA RECREATIVA PARA A CONSOLIDAÇÃO DE CONHECIMENTOS

A matemática recreativa é um ramo desta ciência responsável pela resolução e desenvolvimento de puzzles e jogos matemáticos muito apreciados por todo o Mundo.

Roger Penrose, físico que atualmente leciona na Universidade de Oxford, desenvolveu, na década de 70, uma interessante e extensa investigação à volta de Pavimentações não periódicas (pavimentações que, quando submetidas a uma translação em qualquer direção ou sentido, nunca poderão coincidir com a pavimentação original). As pavimentações descobertas por Roger Penrose ficaram conhecidas por Pavimentações de Penrose.

A atividade aqui proposta desenvolveu-se na Escola Secundária Filipa de Vilhena, no âmbito da unidade curricular Iniciação à Prática Profissional<sup>[1]</sup> (IPP), no passado ano letivo. Numa primeira fase, o assunto foi alvo de divulgação científica através de um painel de matemática exposto à comunidade escolar: o «Sigma» (figura 1). Já numa segunda fase, decidimos promover uma atividade junto de uma das turmas da escola, a turma C do 8.º ano.

Neste artigo apresenta-se uma descrição de todas as etapas do projeto como forma de incentivo à sua futura recriação para os docentes desta disciplina.

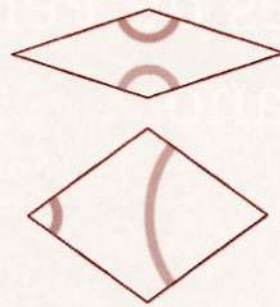


**Figura 1.**— O painel «Sigma» da Escola Secundária Filipa de Vilhena.

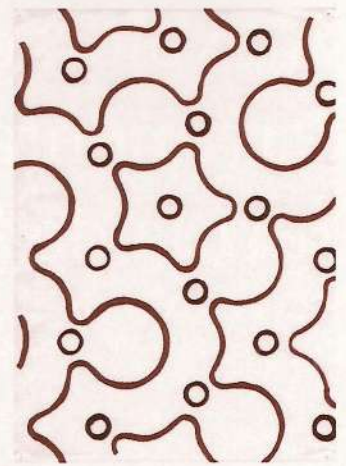
### O PAINEL «SIGMA»

O principal objetivo do painel «Sigma» é a divulgação e a promoção da matemática através do incentivo à resolução de problemas. Para tal, são propostas algumas tarefas interessantes e criativas, num dos principais locais de maior acessibilidade por parte da comunidade escolar, o átrio da entrada da escola.

O segundo desafio proposto no painel (cujo enunciado se apresenta mais à frente neste artigo), consistiu na reconstrução de uma pavimentação de Penrose, utilizando um par de protoladrilhos quadriláteros (figuras geométricas que permitem formar uma determinada pavimentação; Figura 2). Como, desta vez, foi colocada uma mesa junto ao painel, onde os alunos poderiam recriar esta pavimentação, conseguimos perceber que houve uma grande adesão por parte de toda a comunidade escolar. Surpreendentemente, todos os dias eram deixadas resoluções do desafio em cima dessa mesa, o que evidenciou o enorme sucesso desta atividade.



**Figura 2.**— Protoladrilhos da pavimentação de Penrose em estudo.



**Figura 3.**— Pavimentação de Penrose utilizada para a resolução da tarefa.

Aproveitando as potencialidades matemáticas da atividade desenvolvida, com a colaboração dos professores de matemática da escola, decidiu-se construir uma tarefa que tivesse como base o problema deste segundo painel «Sigma». Visto tratar-se de uma pavimentação, nada melhor do que integrá-la na evolução dos conhecimentos dos alunos do 8.º ano, contextualizando a tarefa no tema «Vetores, translações e isometrias», previsto no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.

### A CONSTRUÇÃO DA TAREFA «PAVIMENTAÇÃO DE PENROSE»

A tarefa foi idealizada tendo como base a exploração da pavimentação de Penrose do ponto de vista matemático e geométrico. O seu guião (figura 4) é constituído por uma pequena biografia introdutória de Roger Penrose e por 4 questões, às quais os alunos tiveram de responder, usando como recurso um par de protoladrilhos que constituem a pavimentação (figura 2 e 3).

Assim sendo, o material necessário para a aula (para além do material de escrita) foi: material de construção geométrica (régua, esquadros de geometria, etc.); 6 conjuntos de dois protoladrilhos base para a construção da pavimentação de Penrose; a pavimentação de Penrose recriada numa folha para ser exposta à turma; folhas de papel A4 brancas; colas; lápis de cor/marcadores/canetas coloridas; o guião da tarefa «Pavimentação de Penrose».

## TAREFA «PAVIMENTAÇÃO DE PENROSE»

**Roger Penrose**, nascido a 8 de agosto de 1931, é um físico matemático da Universidade de Oxford (uma das mais consagradas universidades do Mundo).

Para além de se dedicar ao estudo da Física, Penrose sente uma forte atração pela **matemática recreativa** (área da matemática dedicada à resolução de quebra cabeças e jogos matemáticos) que se estende ao longo da sua carreira.

As **pavimentações de Penrose** são **pavimentações do plano não periódicas** (ou seja, pavimentações em que se for realizada uma translação, segundo qualquer direção ou sentido, nunca será possível obter a pavimentação original).

Estas pavimentações foram alvo de estudo por parte de Penrose na década de 1970.

O objetivo do seu estudo foi sempre o de tentar encontrar pavimentações não periódicas com o menor número de peças base possível. Ora, o investigador foi, ao longo da sua carreira, descobrindo pavimentações não periódicas construídas à base de um número de mosaicos cada vez mais reduzido.

A pavimentação que consegues observar no painel «Sigma» é uma das pavimentações de Penrose e tem por base apenas dois mosaicos com a forma de quadriláteros losangos.

Com ajuda do teu grupo de trabalho, responde às seguintes questões, tendo por base a pavimentação de Penrose que vês representada.

**Questão 1:** Recorrendo às peças que te foram fornecidas, recria, numa folha A4 branca, a pavimentação de Penrose que consegues observar no painel «Sigma».

**Questão 2:** Com recurso a um lápis de cor, marcador ou caneta **verde**, pinta da mesma cor um par de peças que se podem obter, uma a partir da outra, através da realização de uma rotação.

Não te esqueças de identificar o centro de rotação e, com ajuda de um transferidor, medir o ângulo associado.

**Questão 3:** Com recurso a um lápis de cor, marcador ou caneta **vermelha**, pinta da mesma cor um par de peças que se podem obter, uma a partir da outra, através da realização de uma reflexão.

Não te esqueças de identificar o eixo de reflexão associado.

**Questão 4:** Com recurso a um lápis de cor, marcador ou caneta **azul**, pinta da mesma cor um par de peças que se podem obter, uma a partir da outra, através da realização de uma **translação**.

Desenha, na própria folha A4, o vetor associado a essa translação. De seguida, caracteriza esse vetor quanto à direção, sentido e comprimento (considera como unidade o centímetro).

**Figura 4.**— Tarefa «Pavimentação de Penrose» que foi aplicada na aula do 8.º ano da escola.

## DESENVOLVIMENTO DA AULA

A turma do 8.º C da Escola Secundária Filipa de Vilhena era composta por 27 alunos, sendo uma turma caracterizada pela existência de alunos com diversos tipos de desempenho escolar (desde alunos com maior desempenho escolar, passando por alunos medianos, até alunos com algumas dificuldades de desempenho) e cujas aulas de matemática se caracterizavam pelo método de ensino expositivo.

Assim, a aula que se descreve no presente artigo trata-se de um primeiro contacto dos alunos desta turma com o tipo de ensino exploratório em contexto de sala de aula.

Na primeira parte da aula, o professor apresentou Roger Penrose à turma e discutiu com os alunos alguns fac-

tos sobre a sua biografia e sobre os estudos desenvolvidos pelo físico sobre pavimentações. Com grande curiosidade, os alunos escutaram atentamente a exposição feita pelo docente, fizeram questões (nomeadamente deu-se destaque ao despertar da curiosidade dos alunos sobre a definição e conceito de pavimentações não periódicas) e participaram ativamente, quando assim solicitados. Desta forma, estava instalado o ambiente para uma aula bem produtiva e interessante a todos os níveis.

De seguida, levou-se a cabo uma pequena exploração conjunta dos protoladrilhos da pavimentação de Penrose em estudo. Os alunos, com recurso aos dois protoladrilhos que originam a pavimentação, fizeram uma pequena carac-

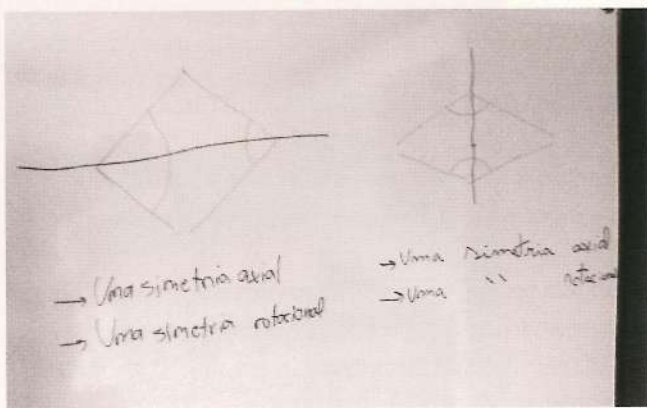


Figura 5.— Registos efetuados pelos alunos no quadro.

terização das simetrias axiais e rotacionais das duas figuras planas, com a elaboração do respetivo registo de alguns apontamentos no quadro pelos próprios alunos (figura 5).

Estando a pavimentação e protoladrilhos que a constituem bem estudados, os alunos prosseguiram para o desenvolvimento da atividade matemática. Organizando-se em 6 grupos de trabalho, com 4 a 6 elementos, foi proposto aos alunos lerem com bastante atenção as questões da tarefa, analisarem o que era pedido e responderem às questões com recurso aos materiais fornecidos.

Ao longo da aula, os três professores presentes na sala prestaram assistência, esclareceram as dúvidas que foram surgindo (nomeadamente, em relação à interpretação das questões colocadas, montagem da pavimentação, dúvidas matemáticas em relação a cada uma das isometrias em estudo e no manuseamento do material geométrico utilizado, entre outras) e verificaram todo o trabalho que se desenvolveu dentro dos grupos de trabalho.

De uma forma bastante positiva, todos os grupos trabalharam de forma agradável e recetiva, sendo a comunicação matemática uma constante dentro dos grupos, onde havia uma ideia bastante clara no delinear de estratégias de resolução das questões propostas. «Não! Esta peça não cabe aí!» exclamou a certa altura um dos alunos. «Mas então como recuperar desse erro?» perguntava um dos professores.

Dou especial destaque à diversidade de estratégias (ou não estratégias) que os grupos decidiram adotar para a resolução da questão 1. Um conjunto de grupos optaram por começar por juntar peças aleatoriamente, enquanto que outros optaram por se debruçar numa área específica de referência da pavimentação.

Alguns conseguiram ser bem sucedidos na sua abordagem inicial. No entanto, os outros grupos, chegando a uma situação de impasse, optaram todos pela mesma estratégia de recurso: «... podemos começar por aquela estrela que se vê no centro da pavimentação».

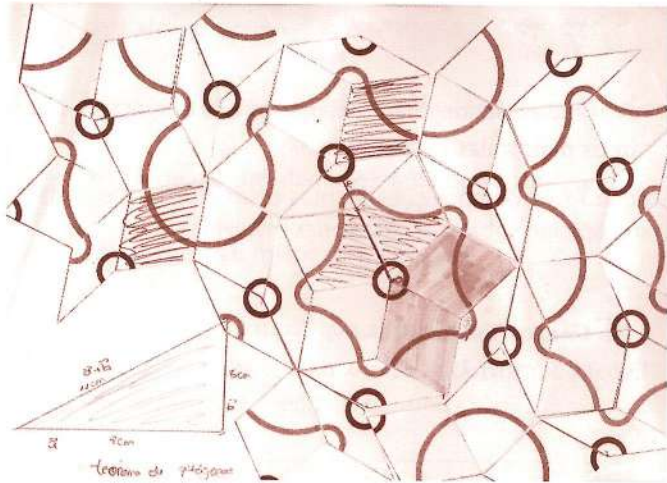
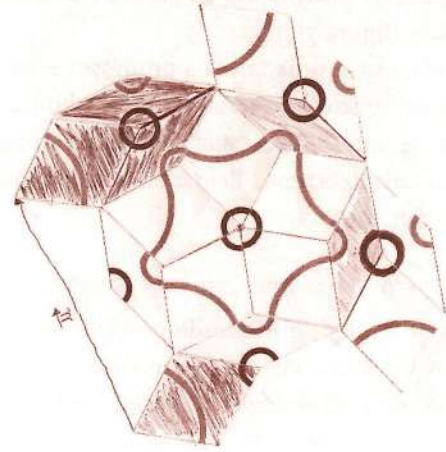
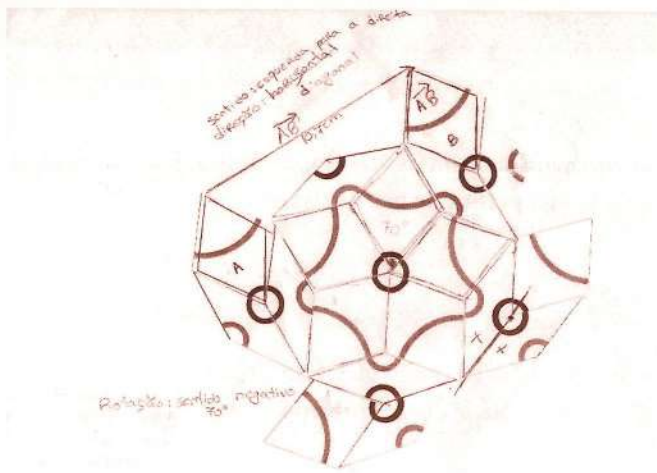
Num contínuo desenvolvimento do trabalho de grupo, os professores assistiram a interações ricas entre os alunos do ponto de vista da evolução do seu pensamento matemático, geométrico e estratégico na recriação do puzzle e resposta às questões colocadas:

- Alguns alunos não se lembraram de como se media a amplitude de um ângulo para a caracterização das rotações pelos grupos identificadas. Com ajuda dos professores, mas principalmente dos membros dos grupos, esta dificuldade foi ultrapassada.
- Nas translações, para identificar a medida do comprimento do vetor associado à translação, um dos grupos recorreu ao Teorema de Pitágoras. Desta forma, os alunos revelaram engenho e destreza, criando-se um momento de interessante discussão matemática.

Chegados à fase de discussão, o professor lançou um desafio à turma. Sem qualquer tipo de pré-preparação ou ensaio, os alunos foram convidados a apresentar os seus trabalhos e ideias aos restantes grupos. Claro está que tal desafio foi aceite com grande ânimo e entusiasmo.

Nas fase de apresentações, foi bastante interessante a envolvimento demonstrada por todos os alunos no trabalho que se estava a desenvolver. Os dois grupos convidados a apresentar foram muito bem sucedidos nesta tarefa. Responderam às questões que lhes foram colocadas na tarefa e apresentaram a sua folha de resposta, onde tinham recriado a pavimentação de Penrose. Os restantes alunos, que escutavam e assistiam com bastante atenção, no final das apresentações, participaram com questões e comentários que complementaram as ideias matemáticas e respostas dos dois grupos escolhidos. É de destacar que o último grupo a apresentar, solicitado por um dos professores, chegou mesmo a encontrar uma reflexão deslizante entre os protoladrilhos da pavimentação, o que a todos agradou e surpreendeu.

Como a tarefa foi bem agarrada e todos os intervenientes ficaram bastante entusiasmados com esta exploração, os alunos queriam continuar a aula com apresentações dos restantes grupos, o que não foi possível devido à falta de tempo. No final da aula, foram recolhidos alguns trabalhos que se encontram digitalizados neste artigo e que julgo serem interessantes para análise do leitor (figura 6).



**Figura 6.**— Folhas de resposta dos grupos de trabalho.

Também é importante esclarecer que esta turma não possui o hábito de realizar aulas exploratórias. Tendo em conta o quão bem os alunos trabalharam e interagiram durante a atividade matemática desenvolvida, fiquei surpreendido com toda a reação que tiveram a este tipo de trabalho em sala de aula.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de problemas e de desafios exploratórios, em contexto de sala de aula, torna-se numa atividade crucial a ser desenvolvida na disciplina de Matemática.

Com a aplicação desta tarefa, os objetivos específicos da aula foram:

- Desenvolver a cultura matemática dos alunos. A exploração da cultura e história da matemática foi um dos objetivos cruciais na construção desta tarefa, sendo mais tarde vivenciada a aquisição por parte dos alunos dos conhecimentos explorados.

- Desenvolver os conhecimentos geométricos dos alunos relativamente às isometrias no plano. De uma forma indireta e recorrendo a conexões matemáticas, os alunos conseguiram explorar eficazmente as isometrias em figuras planas, sem que o tópico se tornasse aborrecido.
- Rever os conhecimentos mobilizados pelos alunos no tema «Vetores, translações e isometrias» já estudado no 1.º período do presente ano letivo. Com esta tarefa foi possível rever o tema referido, servindo a tarefa também como revisão da matéria, o que a todos agradou.

De facto, com a realização desta tarefa, vários episódios aconteceram em que, na minha perspetiva, fica claro que promover a atividade investigativa e exploratória nos alunos coloca-os no papel de principais agentes e dinamizadores da atividade desenvolvida em sala de aula, para além

de promover o desenvolvimento do gosto pessoal pela disciplina «papão» (figura 7).

Sem dúvida, esta é uma tarefa a promover novamente junto dos meus futuros alunos ao longo da minha futura carreira docente, que espero estar perto de se iniciar. Assim será, com toda a certeza... Pelo menos, esperança e sonhos não me faltam.

#### Nota

[1] Unidade curricular do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo e Ensino Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

#### Referências

- Santos, M. R. (2006). *Pavimentações do Plano: Um estudo com professores de Matemática e Arte* (Dissertação de Mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, São Paulo.
- Grunbaum, B. (1987). *Tilings and Patterns*. New York: Freeman.

É uma atividade interessante e dinâmica. É um bom exercício para a prática de isometrias.

«É uma atividade interessante e dinâmica. É um bom exercício para a prática de isometrias.»

Gostei muito, foi muito divertido, foi a melhor aula da minha vida, excepto da que preferia estar na aula.

«Gostei muito, foi muito divertido. Foi a melhor aula da minha vida. Naquele dia até preferia estar na aula...»

Foi uma atividade diferente, interativa e engraçada. Esperamos mais aulas iguais a esta.

«Foi uma atividade diferente, interativa e engraçada. Esperamos mais aulas iguais a esta.»

**Figura 7.**— Composições escritas pelos alunos acerca da sua opinião sobre a atividade desenvolvida.

**JOÃO CARLOS TERROSO**

ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA, PORTO

## MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

### Desporto no verão

A tarefa apresentada foi selecionada e adaptada de um conjunto de tarefas desenvolvidas, discutidas e aplicadas por um grupo de professores-acompanhantes no âmbito da formação do Plano da Matemática (2006–2012). Foi pensada para os alunos do oitavo ano, depois de terem estudado anteriormente os conceitos de moda, média e mediana, com o objetivo de trabalharem as medidas com sentido. Tendo em conta as vantagens da discussão dos cenários pedidos, considera-se a tarefa oportuna para trabalho de grupo (de

pares ou pequenos grupos) com discussão coletiva final. Pode ser integrada com outras tarefas estatísticas, nomeadamente recorrendo ao site PORDATA KIDS (cf. sugerimos nas páginas 24 e 25 deste número da revista).

**PAULO ALVEGA**

EBS PADRE ALBERTO NETO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS



## DESPORTO NO VERÃO

Sete colegas decidiram fazer desporto juntos no mês de agosto, tendo tomado nota do número de horas que cada um praticou.

A MÉDIA DO TOTAL DE HORAS DE DESPORTO PRATICADO PELOS SETE COLEGAS FOI DE 21 HORAS.

- a) Escrevam um número possível para as horas de desporto que cada um pode ser praticado e inscrevam-no na tabela abaixo.
- b) Imaginem outros cenários para o número possível de horas de desporto que cada um pode ter praticado, em que:
- b1) A média dos dados é maior que a mediana.
- b2) A média é maior que a moda.
- b3) A moda é maior que a mediana.
- b4) A média, a mediana e a moda são iguais.

Ana	Bruno	Carlos	Diniz	Edgar	Filipe	Guida

# Vamos à cidade?...

PAULO ALVEGA

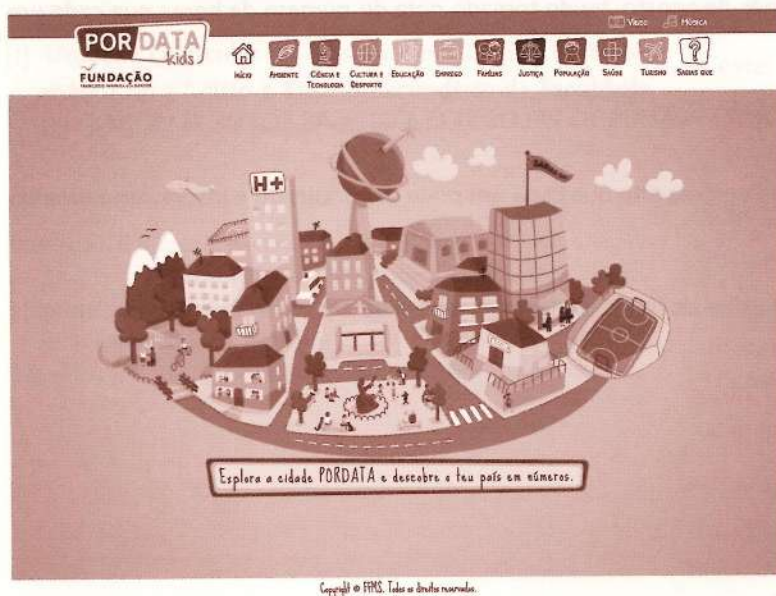


Figura 1.—Imagem de entrada do site PORDATA Kids.

Há mais homens ou mulheres a praticar desporto em Portugal? Um palpite? Serão mais homens. Mas qual a diferença entre o número de homens e de mulheres que praticam desporto? E como evoluiu? Em 2014 estavam inscritos em desportos federados 404623 homens e 141725 mulheres. Mais 262898 homens, cerca de 3 vezes mais, conclui-se. E quantos clubes desportivos existem em Portugal? São 26. Destes quantos têm futebol? E atletismo? Quantas medalhas Portugal ganhou no desporto? E quantas em provas (para)olímpicas? Quantos são os praticantes de desporto até ao escalão júnior? E júnior? E sénior? Sabe quantas amostras de doping são recolhidas durante as provas? E fora delas? Quantas pessoas em Portugal praticam ténis? E futebol? E natação? Consegue estimar quantas pessoas estão a preparar-se para serem treinadores? E para serem árbitros e juizes? Se gostaria, não só de saber as respostas a estas perguntas, mas também de saber como evoluíram os números nos últimos anos pode ir agora à cidade PORDATA Kids ([www.pordatakids.pt](http://www.pordatakids.pt), figura 1), portal do projeto com o mesmo nome, lançado pelo projeto PORDATA<sup>[1]</sup>. Com o lema «Explora a cidade PORDATA e descobre o teu país em números» este site destina-se a jovens entre os 8 e 12 anos. Num pequeno vídeo introdutório, somos conduzidos pela cidade por Rita, uma menina que se mudou para Portugal, tem um meio-irmão e quer

ser advogada. A informação está organizada nos seguintes temas: Ambiente; Ciências e Tecnologia; Cultura e Desporto; Educação; Emprego; Famílias; Justiça; População; Saúde e Turismo. As perguntas sobre desporto apresentadas acima estão incluídas no tema Cultura e Desporto, e subtema Desporto Federado. Além deste, há mais cinco subtemas: Bibliotecas e Livros (com 5 perguntas); Cinema (6); Espectáculos ao vivo (8); Jornais e Revistas (3), e Parques e Espaços de Exposição (7), num total de 43 perguntas relacionadas com o tema. As respostas são apresentadas de modo apelativo para o nível etário-alvo, por exemplo, em animações de tabelas e gráficos que mostram a evolução nas últimas décadas (ver como exemplo a figura 2). É possível parar as animações para saber os números relativos a determinado ano. Quer saber o que acontece no seu município, clique no botão indicado. Há ainda um outro pequeno (e inofensivo) botão, *Mais Info*. Experimente e passe a um novo separador, desta vez do projeto PORDATA. Há informação mais detalhada em tabelas e gráficos, *Metainformação* sobre os dados e a simbologia, *Opções* para ver os gráficos estáticos ou dinâmicos, e a possibilidade de *Exportar* e imprimir, claro. Pode clicar em *Mais opções e dados*, e abrir-se-á outro mundo para explorar taxas de variação e médias, ou utilizar filtros vários. Já saiu da cidade PORDATA Kids, obviamente.

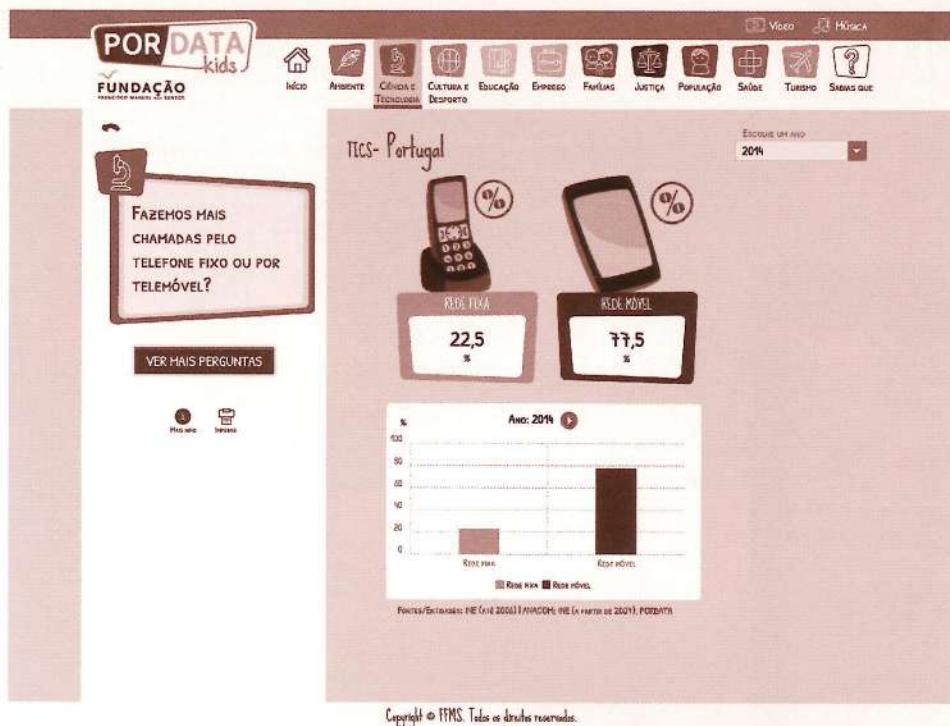


Figura 2.—Resultados da questão «Fazemos mais chamadas por telefone fixo ou por telemóvel?» apresentados num gráfico dinâmico.

Os objetivos deste projeto são claros: se as crianças devem aprender a ler, a escrever e a contar, então devem também aprender a ler, a usar e a partilhar os números. A Estatística como um alfabeto do futuro. A informação apresentada é atrativa e credível, estimulando a curiosidade através de uma grande quantidade, cerca de 300, e variedade de perguntas. De acordo com a responsável pela PORDATA, Maria João Valente Rosa: «A PORDATA Kids vai ao encontro dos mais novos, contando com a sua curiosidade natural para explorarem as estatísticas sobre o país em que vivem. A PORDATA Kids poderá também vir a ser uma importante ferramenta pedagógica e um auxiliar precioso de interesse partilhado entre as crianças e os adultos, os pais, os professores ou os educadores».

Numa primeira abordagem basta escolher um tema na barra horizontal superior do menu inicial, ou sobrevoar a cidade e clicar sobre uma imagem, por exemplo, Ambiente. Surgirão cinco subtemas: Água; Energia; Lixo e Reciclagem; Poluição e Clima; Proteção do Ambiente. Dez temas, uma multidão de questões, portanto. Navegar pelos subtemas, parar para olhar os gráficos e as tabelas. Parar para relê-los e para pensar um pouco. Comparar com as nossas expectativas. As expectativas dos outros. Com as estimativas. Já vamos por níveis de abordagem mais complexos. Podemos prosseguir. O que se passa no nosso município? E na nossa escola/na nossa turma? Como medi-lo? É possível comparar as diferentes realidades? Podemos fechar e abrir a lente de observação. Podemos aproveitar a vontade dos alunos e continuar a explorar. Podemos criar contextos

reais de aprendizagem e tarefas matemáticas ou pluridisciplinares. Esta cidade é um espaço ideal também para trabalhar em grupo e para discussões enriquecedoras. A riqueza das nossas diferenças. Da praça principal podemos sempre viajar até à Europa (quando foi a última vez que visitou o Eurostat? Pense nisso...) e voltar à nossa turma. Não voltaremos a casa os mesmos.

No mapa da cidade, agita-se uma pequena bandeira, *Sabias que...?*, o décimo segundo ícone do menu inicial. Todos os dias é acrescentada uma questão, uma resposta e um comentário (há possibilidade de recuar/avançar no calendário). No dia do lançamento, 22 de setembro de 2015, podemos ler: Sabias que em Portugal existem cerca de 20 milhões de telemóveis? Sabendo que os bebés não falam ao telefone, isso dá praticamente dois telemóveis por pessoa! (dados relativos a 2013).

#### Nota

[1] PORDATA, Base de Dados Portugal Contemporâneo, projeto organizado pela Fundação Francisco Manuel dos Santos, foi lançado ao público em 2010 e inclui estatísticas oficiais e certificadas sobre o país e a Europa. Toda a informação provém de entidades oficiais como o Instituto Nacional de Estatística e o Eurostat.

PAULO ALVEGA

EBS PADRE ALBERTO NETO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

António Domingos

SETEMBRO :: OUTUBRO

#134

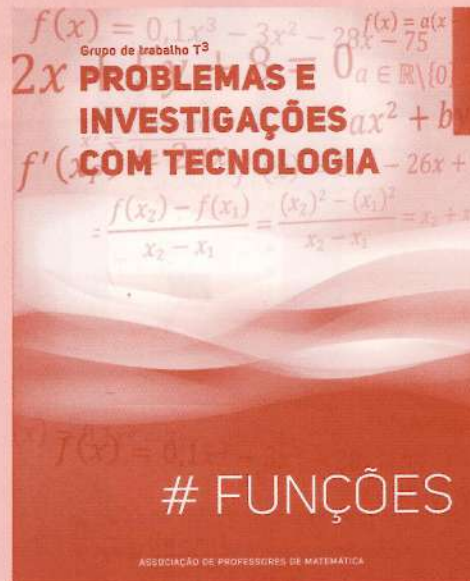
25

**Agenda do Professor 2015–2016**  
**dia-a-dia com a Matemática**  
Núcleo de Coimbra (APM, 2015)



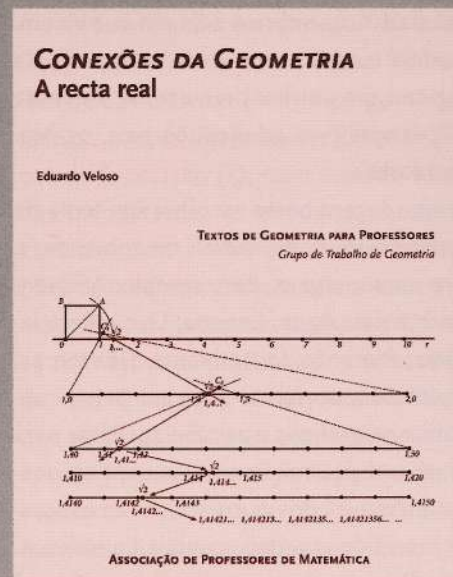
**Problemas e Investigações com Tecnologia**  
**# Funções**

Grupo de Trabalho T3 (APM, 2014)



**Conexões da Geometria**  
**A recta real**

Eduardo Veloso (APM, 2014)



Divulga a APM na tua escola, junto dos colegas de matemática.  
Torna a tua escola sócia da APM. Vê as condições no site da APM ([www.apm.pt](http://www.apm.pt))  
ou na contracapa desta revista.

# Acontecimentos independentes ou incompatíveis?

## Vamos clarificar os conceitos!

ADELAIDE FREITAS, MARIA JOSÉ CARVALHO

### INTRODUÇÃO

Em Portugal, o tema «Probabilidades e Combinatória» consta do currículo atual do 12.º ano de escolaridade. Entre os tópicos inseridos nesse tema estão acontecimentos incompatíveis e acontecimentos independentes. Na generalidade dos manuais escolares de Matemática, o conceito de independência de acontecimentos é trabalhado mas não é realçada a importância do sentido probabilístico desse conceito. Por outro lado, também é conhecido, da prática docente e vários estudos na área da Educação Matemática o têm revelado (por exemplo, Cunha, 2010; Díaz e de la Fuente, 2005; Sobreiro, 2011), que os conceitos de acontecimentos independentes e de acontecimentos incompatíveis suscitam dúvidas de interpretação e de raciocínio entre muitos alunos. A análise de um caso de estudo recentemente implementada por nós, que envolveu um grupo de 43 alunos do 12.º ano de duas escolas secundárias do distrito do Porto, confirmou essa realidade (Carvalho, 2013; Carvalho e Freitas, 2015). Da análise das respostas dadas pelos alunos a um conjunto de questões foi possível diagnosticar aplicações

intuitivas e conexões erradas entre as noções de acontecimentos independentes e de acontecimentos incompatíveis por parte dos alunos.

Uma das formas de colmatar e dissipar falhas (frequentes ou não) nos alunos, reside em identificar os pontos-chaves de conflitos e difundi-los pelo maior número de professores. Alertado para o ponto que origina o conflito, o professor estará melhor preparado para desenvolver, em sala de aula, estratégias dirigidas aos seus alunos com vista a eliminar previsíveis confusões e assim melhor clarificar os conceitos.

O nosso objetivo neste documento é realçar um dos pontos de conflito fulcral que identificámos na análise às respostas dadas pelos 43 alunos, abrangidos no caso de estudo que foi levado a cabo, nas questões envolvendo os conceitos de acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis. Esperamos que esta divulgação de resultados seja útil a muitos docentes em futura lecionação daqueles dois conceitos.

## EXPERIÊNCIA

Colaboraram neste estudo os alunos do 12.º ano de duas turmas do Ensino Regular do Curso de Ciências e Tecnologias e de uma turma do Ensino Profissional, num total de 43 alunos de duas escolas secundárias do distrito do Porto, e imediatamente após estes alunos terem concluído o estudo do tema «Probabilidades e Combinatória».

Os 43 alunos em estudo responderam a uma prova de avaliação contendo oito questões com um total de 12 alíneas sobre probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis. A seguir destacamos uma das questões (contendo 4 alíneas), com a respetiva resolução, envolvendo os conceitos de acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis.

### QUESTÃO E RESPECTIVA RESOLUÇÃO:

Um certo estudo numa maternidade revelou que a probabilidade de nascimento, naquela maternidade, de um menino varão é 0,55. Um casal com três filhos, todos nascidos naquela maternidade, é selecionado ao acaso. Admita que o sexo de uma criança é independente do sexo dos irmãos. Considere os acontecimentos:

A: «O casal ter no máximo uma rapariga»

B: «O casal ter filhos de ambos os sexos»

C: «O casal só ter rapazes»

Nos arredondamentos que efetuar tome 3 casas decimais.

a) Calcule a probabilidade de cada um dos acontecimentos.

*Resolução:* Defina-se o acontecimento

M: «Bebé nascido na maternidade ser menino».

Do enunciado, resulta:

$$P(\text{«Um filho do casal ser do sexo masculino»}) = P(M) = 0,55$$

e, consequentemente, para o acontecimento complementar,

M<sup>c</sup>: «Bebé nascido na maternidade ser menina»,

tem-se:  $P(M^c) = 0,45$ . Dado um casal com 3 filhos, o espaço de resultados possíveis associado aos géneros dos três filhos (na sequência dos nascimentos) é:

$$\Omega = \{MMM, MMM^c, MM^cM, MM^cM^c, M^cMM, M^cMM^c, M^cM^cM, M^cM^cM^c\}$$

Uma vez que  $P(M) \neq P(M^c)$ , os acontecimentos M e M<sup>c</sup> não são equiprováveis. Logo, os 8 acontecimentos elementares em  $\Omega$  não são equiprováveis. As probabilidades pedidas,

porque existe independência no sexo entre irmãos, são então calculadas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} * P(A) &= P(MMM \cup MMM^c \cup MM^cM \cup M^cMM) = \\ &= P(MMM) + P(MMM^c) + P(MM^cM) + P(M^cMM) = \\ &= P(M) P(M) P(M) + P(M) P(M) P(M^c) + \\ &\quad + P(M) P(M^c) P(M) + P(M^c) P(M) P(M) = \\ &= 0,55^3 + 3 \times 0,55^2 \times 0,45 = 0,575 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * P(B) &= P(MMM^c \cup MM^cM \cup M^cMM \cup MM^cM^c \cup \\ &\quad \cup M^cMM^c \cup M^cM^cM) = \\ &= 1 - [P(MMM) + P(M^cM^cM^c)] = \\ &= 1 - [(P(M) P(M) P(M) + P(M^c) P(M^c) P(M^c))] = \\ &= 1 - (0,55^3 + 0,45^3) = 0,743 \end{aligned}$$

$$* P(C) = P(MMM) = 0,55^3 = 0,166$$

b) Os acontecimentos A e B são independentes? Justifique.

*Resolução:*

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(MMM^c \cup MM^cM \cup M^cMM) = \\ &= P(MMM^c) + P(MM^cM) + P(M^cMM) = \\ &= 3 \times (0,55^2 \times 0,45) = 0,408 \\ P(A)P(B) &= 0,575 \times 0,743 = 0,427 \end{aligned}$$

Como,  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ , A e B não são independentes.

c) Mostre que os acontecimentos A  $\cap$  B e C são incompatíveis.

*Resolução:* Uma vez que

$$(A \cap B) \cap C = \{MMM^c, MM^cM, M^cMM\} \cap \{MMM\} = \{ \},$$

então os acontecimentos A  $\cap$  B e C são incompatíveis.

*Outra resolução:* (A  $\cap$  B) e C são incompatíveis, uma vez que é impossível um casal de 3 filhos ter filhos de ambos os sexos, com apenas uma menina, e simultaneamente serem todos rapazes.

d) Tendo em conta as alíneas anteriores, justifique que os acontecimentos A  $\cap$  B e C não podem ser independentes e apresente uma situação (com outras condições de enunciado) em que o poderiam ser.

*Resolução:* Como A  $\cap$  B e C são incompatíveis então,  $P((A \cap B) \cap C) = 0$ .

Mas,  $P(A \cap B)P(C) = 0,408 \times 0,166 \neq P((A \cap B) \cap C)$ . Logo, A  $\cap$  B e C não são independentes.

Uma situação hipotética em que poderiam ser independentes era admitir que um dos acontecimentos, A  $\cap$  B ou C, tivesse probabilidade nula de ocorrência. Por exemplo, admitir que só se consideram casais com 3 filhos tendo pelo menos 1 menina. Assim,  $P(C) = 0$ .

Adaptações deste enunciado podem ser realizadas originando novos problemas com esquema de raciocínio análogo.

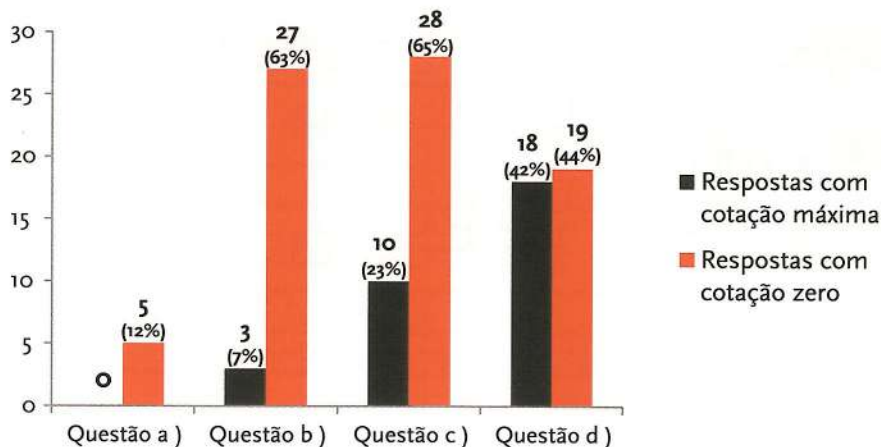


Figura 1.— Frequências das respostas dos alunos às questões apresentadas.

## ANÁLISE DAS RESPOSTAS

As respostas escritas obtidas pelos 43 alunos foram analisadas e avaliadas. Na Figura 1 encontram-se graficamente sumariadas as contabilizações de respostas corretas (cotação máxima) e de respostas com cotação zero (resposta deixada em branco ou nada do que estava escrito se aproveitava) atribuída a cada uma das 4 alíneas da questão.

As questões diretas sobre acontecimentos independentes e incompatíveis, questões b) e c), surgem como sendo as questões com maior percentagem com cotação nula. A questão a) envolvendo diversos conceitos como a reunião de acontecimentos incompatíveis e a independência de acontecimentos foi respondida corretamente por apenas 5 alunos dos 43 alunos. Um dos principais erros residiu na não observação da não equiprobabilidade dos resultados elementares. Uma vez que essa alínea a) envolvia o cálculo da probabilidade de três acontecimentos distintos, contabili-

zamos também quantos alunos responderam corretamente a cada um dos três acontecimentos pedidos. A Figura 2 ilustra a distribuição das contagens de respostas corretas efetuadas. Observa-se que dos acontecimentos pedidos, A, B e C, o acontecimento C é aquele que se regista um maior número de respostas corretas (14) no cálculo da sua probabilidade. Nota-se que dos três, é o evento C que se descreve de forma mais simples, envolvendo um número menor de resultados elementares. Assim, não é só na não equiprobabilidade dos resultados elementares que residem as dificuldades de cálculo mas também na definição dos resultados elementares que originam o acontecimento e/ou no cálculo da reunião de resultados elementares.

Ainda nas respostas às questões b) e c), verificámos interpretações erradas e o uso incorreto de propriedades associadas às noções de independência e incompatibilidade. Nas Figuras 3–5 transcrevemos exemplos dos tipos de erros mais frequentes e que pretendemos alertar neste documento.

Analisando as respostas incorretas à questão da alínea b) sobre acontecimentos independentes, dois tipos de conflitos se destacaram, ambos derivados do estabelecimento de conexões erróneas com o conceito de acontecimentos incompatíveis, um entre as suas designações e outro com a interpretação. Para ambos os tipos registaram-se cerca de 30% dos alunos com pelo menos uma resposta nessas condições. Na Figura 3 apresentam-se três respostas incorretas. No primeiro caso, observa-se a mistura das designações *independência* e *incompatibilidade* talvez devida a alguma similaridade (sonora inicial) dos termos. Nas outras duas respostas, na Figura 3, evidencia-se a falta de referência à noção probabilística associada ao conceito de independência, o que revela confusão de interpretação desse conceito com o de incompatibilidade.

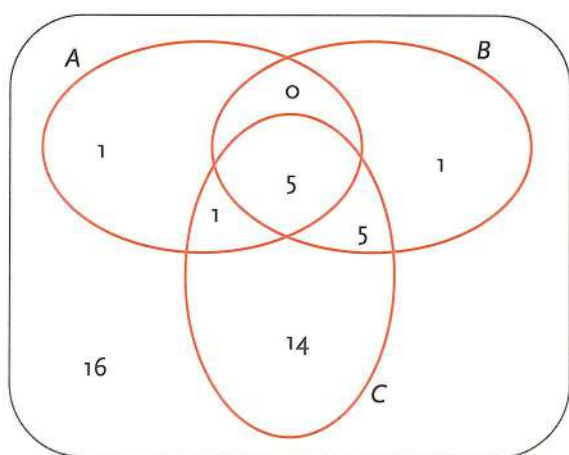


Figura 2.— Número de resultados corretos nos cálculos da probabilidade dos acontecimentos A, B e C.

b) Se forem incompatíveis:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Como esta igualdade não se verifica, estes dois acontecimentos não são independentes.

b) Sim, os acontecimentos A e B não independentes visto que o nascimento de um filho vai interferir com o nascimento do outro.

b) Não são independentes porque no acontecimento A diz-se "O casal ter no máximo uma rapariga" e no B "O casal ter filhos de ambos os sexos", logo nos 2 casos vai haver os 2 sexos, masculino e feminino, por isso não são independentes.

Figura 3.— Respostas dadas com conflitos na noção de independência.

Na realidade, sabemos que

A e B são independentes sse  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

Mas, dado dois acontecimentos com probabilidades positivas, a forma melhor de interpretar o significado de independência desses acontecimentos é recorrendo ao facto de:

A e B são independentes sse  $P(A|B) = P(A)$ ,  
quando  $P(B) > 0$ .

O que se observou é que os alunos tendem a interpretar a igualdade  $P(A|B) = P(A)$  como se fosse  $A \cap B = \emptyset$  referindo apenas que a ocorrência de B não interfere na ocorrência de A, não clarificando o termo «interfere». Saliente-se que dizer «ocorrência de um acontecimento» corresponde a fazer referência apenas ao conjunto de elementos do espaço amostral que fazem parte do conjunto B, nada informando sobre a sua probabilidade de ocorrência. Assim, para justificar que A e B são independentes, tendo em conta que um dos acontecimentos, seja B, tem probabilidade positiva de ocorrência, deverá ser explicitado que a ocorrência de B não interfere, em termos probabilísticos, na ocorrência de A.

Relativamente à noção de incompatibilidade, as resoluções às questões c) e d) revelaram que, em geral, os alunos compreendem o conceito de acontecimentos incompatíveis e justificam a incompatibilidade recorrendo, não à definição, mas à condição necessária da probabilidade da inter-

seção de acontecimentos incompatíveis ser nula. Na verdade, por definição,

A e B são incompatíveis sse  $A \cap B = \emptyset$ .

Assim,

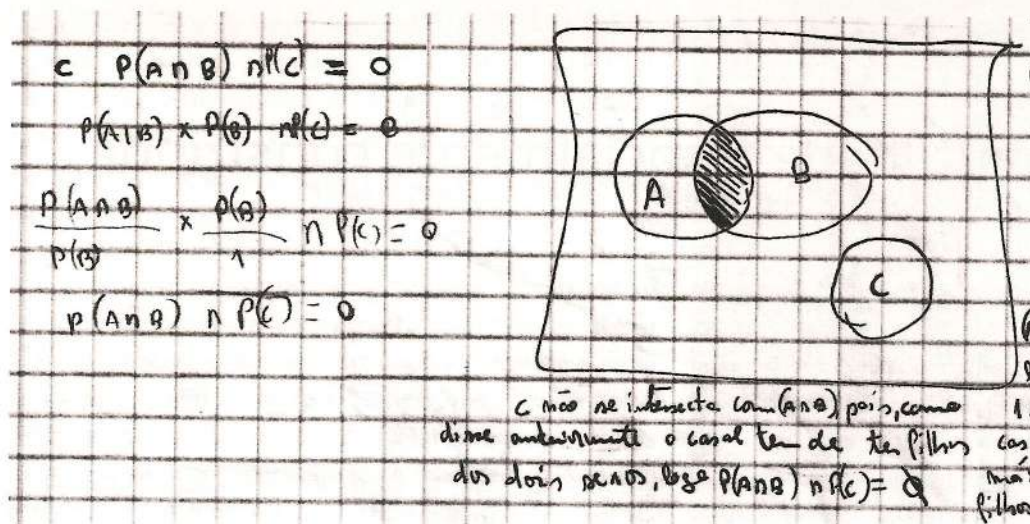
se A e B são incompatíveis então  $P(A \cap B) = 0$ . (1)

Portanto,  $P(A \cap B) = 0$  é condição necessária para que A e B sejam incompatíveis. A verificação, apenas, desta condição necessária não é garantia dos acontecimentos serem incompatíveis. Já a sua não verificação é garantia dos acontecimentos não serem incompatíveis. De facto, da negação de (1), temos

se  $P(A \cap B) \neq 0$  então A e B não são incompatíveis.

Creemos que este jogo de raciocínio lógico envolvendo a condição  $P(A \cap B) = 0$ , que é apenas condição necessária mas não suficiente de incompatibilidade, leva à existência de conflitos na noção de incompatibilidade. Contabilizaram-se cerca de 20% dos alunos com pelo menos uma resposta com este tipo de conflito. Na Figura 4 estão dois exemplos de respostas observadas usando esse tipo de argumento, um que recorre ao cálculo da probabilidade da interseção para concluir a incompatibilidade, e o segundo que confunde o numeral zero com o conjunto vazio (acontecimento impossível).





$$\begin{aligned}
 c) \quad P((A \cap B) \cap C) &= P((A \cap B) \cap (B \cap C)) \\
 &= P(A \cap B \cap C) \\
 &= \emptyset \quad \downarrow
 \end{aligned}$$

é incompatível, uma vez que a intersecção de  $C$  com  $A$  e  $B$  não faz sentido  $\rightarrow$  logo, é incompatível.

Figura 4.— Respostas dadas com conflitos na noção de incompatibilidade.

## CONCLUSÃO

A análise das respostas dadas pelos 43 alunos sugere a existência de conflitos na noção de independência e na noção de incompatibilidade. A existência destas classes de conflitos revela a necessidade de se aprofundar tais conceitos em contexto escolar. As recomendações emergentes do estudo apontam para uma maior ênfase no carácter probabilístico associado à noção de independência em oposição à noção de incompatibilidade.

Nota final: Por questões legais e éticas foi previamente solicitada autorização para a realização da experiência, a recolha dos dados e a publicitação dos resultados às direções das escolas participantes e aos Encarregados de Educação dos alunos envolvidos no estudo.

## Referências bibliográficas

Carvalho, M. J. (2013). *Ensino e aprendizagem de probabilidade condicionada e independência* (Dissertação de Mestrado não publicada). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal. Recuperada de: <http://hdl.handle.net/10773/12044>.

- Carvalho, M. J., e Freitas, A. (2015), Nível de conhecimento em probabilidade condicionada e independência: um caso de estudo no Ensino Secundário português. *Relime* (aceite para publicação).
- Cunha, M. C. (2010). *A influência do ensino nos raciocínios de alunos do 12.º ano de escolaridade em probabilidade* (Dissertação de Mestrado não publicada). Universidade do Minho, Braga, Portugal. Recuperada de: <http://hdl.handle.net/1822/10945>.
- Díaz, C., e de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245–260. Recuperada de: <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/>
- Sobreiro, D. (2011). *Probabilidade condicionada: um estudo com alunos do ensino secundário* (Dissertação de Mestrado não publicada). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal. Recuperada de: <http://hdl.handle.net/10773/8547>.

ADELAIDE FREITAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E CIDMA,  
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

MARIA JOSÉ CARVALHO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ANTÓNIO SÉRGIO,  
VILA NOVA DE GAIA

# Geometria partilhada e socialmente construída

Os pequenos artigos deste *Caderno de apontamentos* são aparentemente uma miscelânea de ideias resultantes da investigação que venho a fazer há alguns anos sobre o ensino e a aprendizagem da geometria. Esta aparente miscelânea decorre da multiplicidade de investigações, contributos teóricos e ideias a que acedi, dos dados que fui recolhendo e da reflexão que venho fazendo sobre eles. Os meus escritos constituem destaques de aspetos que considero relevantes, que são muitos e de natureza muito diversa, elaborados nestes artigos com o objetivo de serem úteis e interessantes para outros professores.

Na vastíssima e complexa rede de conhecimentos produzidos pela investigação em educação matemática, a compreensão da perspetiva sócio construtivista da aprendizagem é aquela que me suscita neste momento maior interesse. Este interesse advém da importância que passei a dar aos momentos de discussão coletiva na realização de tarefas de geometria e de ter escolhido os contributos teóricos do sócio construtivismo para estudar, analisar e compreender esses momentos. Na linha de investigação do sócio construtivismo considero fundamental o trabalho de Cobb, Yackel e Wood de que destaco o artigo «*A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education*» de 1992. Embora já com alguns anos, este artigo é recorrentemente citado desde essa data em quase todos os trabalhos de investigação nesta área.

Deste artigo destaco as três dimensões de referência do conhecimento matemático: (1) as formas de conhecimento

matemático individuais de cada aluno; (2) as práticas matemáticas partilhadas da comunidade de sala de aula; (3) as práticas matemáticas partilhadas reconhecidas e aceites pela sociedade em geral. Gosto particularmente de encarar e representar estas três dimensões e o processo de aprendizagem da matemática por um esquema evolutivo (fig. 1). Os processos de ensino terão assim como objetivo aproximar estes três níveis como procuro ilustrar no esquema. Propositadamente no esquema, a matemática válida não desce de nível e são as outras duas dimensões que sobem e se aproximam.

Na análise dos momentos coletivos vividos na experiência de ensino que realizei, tenho procurado identificar e compreender estes três níveis bem como as relações entre eles, a sua complementaridade e a evolução que o processo de ensino pode permitir realizar. Há dois exemplos que considero interessantes para discutir.

O primeiro exemplo diz respeito ao conceito de ângulo reto. O reconhecimento de um ângulo reto em qualquer posição, isolado ou como elemento que faz parte de uma figura geométrica, é uma competência comum na matemática. Nas experiências realizadas e que têm sido referidas nestas notas (E&M n.ºs 116, 118, 131, 132, 133), esta necessidade esteve presente para decidir se determinados paralelogramos eram ou não retângulos. Nas discussões que ocorreram houve uma sobreposição da matemática partilhada com a matemática dos alunos, a partir das figuras feitas por eles e que constituem a sua matemática. Destaco a heterogeneidade na matemática dos alunos, com diferenças

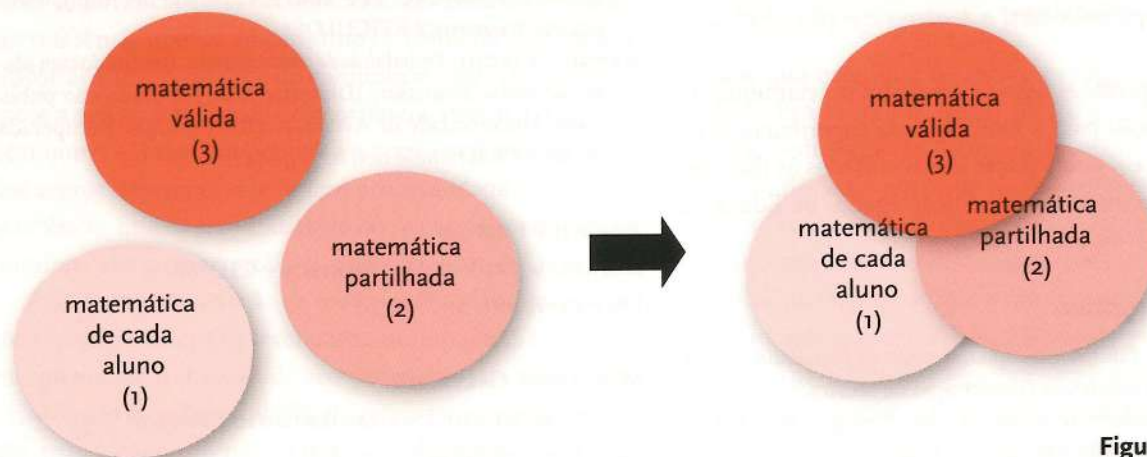


Figura 1

significativas entre a matemática de cada aluno, e o modo como este ponto de partida permitiu encontrar patamares comuns para a matemática partilhada e socialmente construída. Alguns alunos já eram capazes de identificar corretamente os ângulos retos sem serem capazes de verbalizar as justificações, outros ainda tinham dificuldade em destacar os ângulos como elementos de uma figura. Na experiência realizada, a introdução do detetor de ângulos retos e a sua utilização significativa por todos os alunos constituiu a meu ver uma boa aproximação à matemática socialmente aceite — a utilização de um objeto que permite identificar e medir ângulos, o transferidor. Mas mais do que disso, este objeto é uma eficaz representação do ângulo reto como um quarto de volta. Este aspeto valoriza-o ainda mais pois permite construir o conceito de ângulo reto totalmente independente do sistema de unidades de medida (fig. 2).

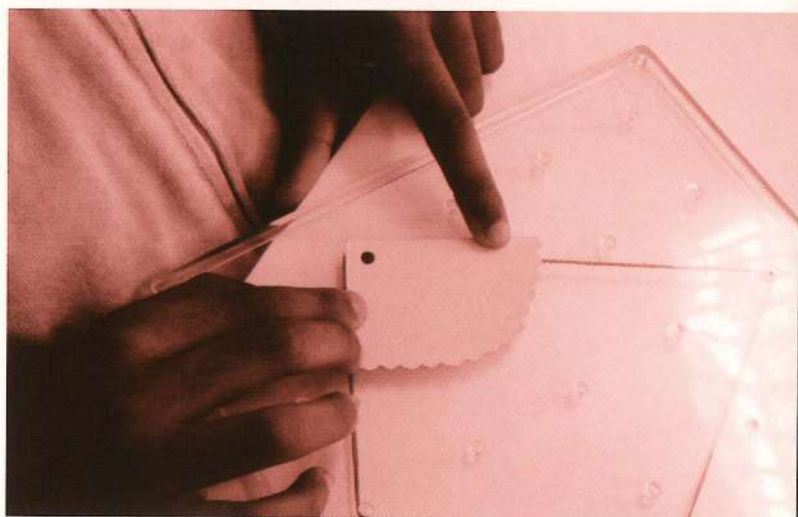


Figura 2

É muito comum ouvirmos definir ângulo reto com um ângulo que mede  $90^\circ$ . Esta definição não é a mais correta porque não é intuitiva, nem independente da noção de medida e de sistema de unidades de medida. O ângulo reto é o ângulo de um quarto de volta ou de metade de uma meia volta. Esta ideia, realmente intuitiva e poderosa, valoriza este objeto porque justapondo dois detetores de ângulos retos obtemos um ângulo raso (fig. 3).

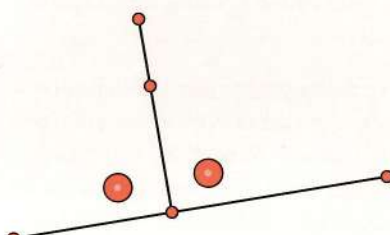


Figura 3

Com esta justaposição de dois detetores discuto um outro aspeto relevante da matemática partilhada que vivemos nesta experiência. Os alunos construíram naturalmente quadriláteros com ângulos agudos, retos e obtusos que passaram a identificar com facilidade. Quando a aproximação a um reto era grande, e isso aconteceu muitas vezes, aprenderam a recorrer ao instrumento de comparação, o detetor de ângulos retos. Entre os quadriláteros construídos pelos alunos, surgiram naturalmente alguns que não eram convexos e por isso com ângulos maiores do que um raso. Este tipo de ângulo teve de passar a ter um nome, chamámo-lhes «super obtuso». Para mim constitui um bom conceito da matemática partilhada pois foi bem aceite pelos alunos, com significado e com a possibilidade de verificação a partir da justaposição de dois detetores de ângulos retos (fig. 3). Mas será este conceito da matemática partilhada uma boa aproximação à matemática socialmente aceite?

Nos livros de matemática portugueses, um ângulo maior do que um raso é designado por côncavo. No entanto, em livros americanos, este tipo de ângulo é considerado como ângulo reflexo (reflex angle). Considero que nesta perspectiva assume-se uma classificação mais coerente dos ângulos: agudo, reto, obtuso, raso e reflexo (Musser, Burger & Peterson, 2006). Estes autores, ao introduzirem esta classificação e nomenclatura, associam-na ao objetivo de que

os alunos selecionem e apliquem técnicas e instrumentos para obter com precisão a medida de um ângulo.

Destaco esta diferença interna à própria matemática socialmente aceite. Parece-me uma reflexão útil para a compreensão dos três níveis que apresentei no início. O uso de classificações e designações diferentes na matemática não acontece apenas na geometria. Há outras situações em que vale a pena os professores refletirem sobre este conceito de matemática socialmente aceite e terem consciência das diferenças entre comunidades de ensino da matemática distintas. A decisão de escrever sobre o ângulo reflexo decorreu de duas apresentações públicas que fiz deste trabalho e em que a designação de «super-obtuso» foi questionada por alguns professores. Defendo que passemos a utilizar o conceito de ângulo reflexo. Espero que este texto seja esclarecedor e útil.

#### Referências Bibliográficas

- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2–33.
- Musser, G. L., Burger, W. F., & Peterson, B. E. (2006). *Mathematics for elementary teachers — a contemporary approach*. John Wiley & Sons.

# Crónicas de outros tempos

## Um aperto de mão

MÁRIA CRISTINA ALMEIDA

O professor de matemática António Nicodemos de Sousa Pereira<sup>[1]</sup> foi, segundo os seus colegas, «uma interessantíssima figura de professor»<sup>[2]</sup>.

... uma personalidade que se destacava por um carácter impetuoso, um desassombro intemerato, o mais inveterado respeito pela verdade, pela dignidade, pelo trabalho. Rebelde até à irreverência em face de tudo aquilo que julgava erro, adversário contumaz das instituições que considerava inúteis, falhadas ou desajustadas<sup>[3]</sup>...

Nesta crónica relatamos um episódio onde o temperamento de Nicodemos Pereira se manifesta. Em junho de 1929 José Joaquim Ferreira, então vogal da Comissão Orientadora do Ensino Secundário e também vogal do Conselho Superior da Instrução Pública, visita o Liceu de D. João de Castro em Lisboa. Nicodemos Pereira está presente e recusa apertar-lhe a mão. No artigo intitulado «Orientação e fiscalização do ensino secundário», publicado na revista *Labor* no ano de 1929, tinha escrito que as duas funções eram incompatíveis e a situação era imoral e injurídica.

Como consequência da recusa em apertar a mão e por determinação do Ministro da Instrução Pública, Nicodemos Pereira vai ser penalizado com uma repreensão verbal (2 de Julho de 1929), tendo mais tarde sido suspenso. Não concordando com a penalização, recorre para o Supremo Tribunal de Justiça. No acórdão<sup>[4]</sup> do referido Tribunal podemos ler:

Nenhuma pragmática da República portuguesa impõe o aperto de mão como cumprimento oficial. Basta a continência entre oficiais, a simples vénia para os civis.

Há pessoas a quem repugna o aperto de mão, ligas mesmo contra essa cerimónia antiquada da expansibilidade e da polidez latinas.

O vogal da comissão orientadora sabia pelo reitor que, pelo menos, um professor do Liceu de D. João de Castro era seu inimigo pessoal. Para cumprir a sua missão era inútil a exigência da apresentação pessoal dos professores, com o tradicional aperto de mão.

É certo que também não amesquinhava moralmente ao recorrente o banal aperto de mão que trocasse com a pessoa que podia melindrar-se com a sua campanha pelo que se lhe afigurava a moralidade das funções e o direito.

É certo porém que a recusa de aperto de mão não fundamenta essa pena disciplinar.

Embora lhe tenha sido dado provimento e anulado o despacho de suspensão, Nicodemos vê a penalidade anteriormente sofrida — *repreensão verbal*, segundo o §2 do art. n.º 248<sup>[5]</sup> ser agravada de acordo com o §4 do mesmo art. — *multa de 15 dias de vencimento*. Assim era o ambiente nesse tempo.

### Notas

- [1] Nasceu em 15 de Setembro de 1892 na Ribeira Brava, Madeira e faleceu em 28 de Outubro de 1956, em Lisboa.
- [2] Tavares, J. (1956). Dr. António Nicodemos de Sousa Pereira. *Labor, Revista de Ensino Liceal*, 21(162), 276–277.
- [3] Idem, (1956). Dr. António Nicodemos de Sousa Pereira. *Labor, Revista de Ensino Liceal*, 21(162), 276–277.
- [4] Acordam do supremo tribunal de Justiça, Lisboa, 10 de Fevereiro de 1930.
- [5] Decreto n.º 7 558, 18 de junho de 1921.

MÁRIA CRISTINA ALMEIDA

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CASQUILHOS, BARREIRO  
UIED-FCT, UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA  
GTHMEMAT

# O questionamento oral na sala de aula de Matemática

## Um elemento propiciador de avaliação formativa?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - x} = \frac{1^2 - 5 \cdot 1 + 4}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{x(x-1)} = \frac{x-4}{x} = 1$$
$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^k$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

LUIS FABIÁN GUTIÉRREZ FALLAS, LEONOR SANTOS

### INTRODUÇÃO

A comunicação oral é reconhecida como um elemento fundamental das práticas letivas dos professores, não obstante as ações que incentivam a comunicação nem sempre estarem suficientemente refletidas pelos professores, nem tão pouco suficientemente estudadas pela investigação. Em Portugal, só nos últimos 20 anos é que a comunicação na prática docente passou a fazer parte da agenda da investigação em Educação Matemática (Menezes, Tomás-Ferreira, Martinho, & Guerreiro, 2014). Contudo, os resultados de que já dispomos da investigação realizada em Portugal permitem-nos afirmar que este tipo de prática tende a não ser desenvolvida de forma a promover a aprendizagem dos alunos (Menezes *et al.*, 2014; Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013; Semana & Santos, 2012).

A comunicação oral é uma dimensão importante da avaliação formativa (Semana & Santos, 2013). Cabe ao professor usá-la de modo a obter informação sobre a aprendizagem dos alunos. Deste modo, «é importante que as discussões sejam intencionais e tenham um objetivo bem definido e aceite por todos, se centrem em conteúdos ou processos matemáticos, incluam contribuições efetivas dos alunos e decorram de forma interativa» (Semana & Santos, 2012, p. 308). Um dos elementos da comunicação oral que propicia a avaliação formativa é o questionamento oral, já que esta estratégia tem potencialidades para o professor incentivar os alunos a envolverem-se nas discussões da sala de aula e a encorajá-los a explicarem, justificarem e avaliarem publicamente as suas ideias e as dos seus colegas. Entendemos, assim, o questionamento oral como um ato intencional de comunicação do docente para promover a aprendizagem dos alunos.

Embora o questionamento oral seja um meio orientador das discussões coletivas na sala de aula de Matemática e propiciador da aprendizagem dos alunos, colocar perguntas não é tão simples como parece (Santos & Pinto, 2008). Assim, este trabalho foca a atenção na complexidade do questionamento oral na prática dos professores. Procuramos responder à seguinte questão: Como se caracteriza e é usado pelo professor o questionamento oral nas discussões coletivas da sala de aula de Matemática?

O estudo decorreu no âmbito do curso de Mestrado em Ensino da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. A professora participante era uma mestrande do 2.º ano deste curso, Teresa, o que remete este estudo para um contexto de formação inicial de professores. Os dados foram recolhidos através da observação não participante de uma aula do 11.º ano de uma Escola Secundária de Lisboa, acompanhada de registo áudio, completada com notas de campo. Os dados, após a transcrição da gravação áudio, foram analisados de acordo com as ações do professor: *convidar*, *informar/sugerir*, *apoiar/guiar* e *desafiar* (Ponte *et al.*, 2013) e a partir das três dimensões de análise da comunicação na sala de aula de Matemática propostas por Santos e Pinto (2008): a *dinâmica da interação*, o *foco* e o *significado*. De modo a salvaguardar questões de ordem ética, foi dado a conhecer os objetivos deste trabalho a Teresa e pedida a sua concordância. Os nomes dos alunos são fictícios, bem como da futura professora.

### BREVE DESCRIÇÃO DA AULA

A aula deu continuidade à lição anterior, onde se trabalhou o tópico: *a derivada de uma função*. O sumário escrito por Teresa no quadro indicava: «Sínteses das regras de derivação e resolução de exercícios».

Os alunos estavam organizados em pares por mesa de trabalho. Para além dos alunos e de Teresa, estavam ainda presentes a professora titular da turma e uma docente do ensino superior que acompanhava a prática de ensino supervisionada.

De acordo com o desenvolvimento da aula, identificaram-se cinco partes:

- i) *Introdução*: a professora expõe o sumário da aula e dá instruções para o trabalho a realizar;
- ii) *Continuação da aula anterior*: esclarecimento de questões levantadas por alguns alunos sobre a aula anterior;
- iii) *Novas questões*: através da revisão de tarefas surgem novas questões em relação às regras de derivação para a função afim e para a função quadrática;

- iv) *Institucionalização*: a professora sintetiza as regras de derivação discutidas através da exposição oral e introduz um pequeno resumo da história da derivada;
- v) *Resolução de exercícios*: os alunos resolvem exercícios do manual. A professora desloca-se pela sala de aula apoiando o trabalho dos alunos. Alguns alunos são selecionados pela professora para escreverem no quadro a resposta obtida e discutirem coletivamente a sua resolução.

### O QUESTIONAMENTO ORAL DE TERESA

Foi objeto de estudo o questionamento oral que decorreu no episódio 1 (continuação da aula anterior) e no episódio 2 (novas questões). As três restantes partes não foram consideradas por não apresentarem momentos significativos de comunicação entre os participantes, justificado pela especificidade dos seus objetivos.

#### Episódio 1: Continuação da aula anterior

Como o objetivo desta parte da aula era esclarecer questões que foram levantadas por alguns alunos na aula anterior, as ações de Teresa são: *informar/sugerir* e *apoiar/guiar*. Informar na medida em que Teresa presta informação adicional, como seja, propriedades ou definições; sugerir, quando propõe distintas representações dos objetos e estabelece conexões com conhecimentos prévios para conseguir o seu objetivo:

*Teresa*: Se eu tiver aqui uma qualquer função, eu estou a estudar a derivada num ponto de abcissa  $x_0$ , que é o declive desta reta tangente. Estou a estudá-la nesta vizinhança, ou seja eu quero o declive da reta tangente que passa na abcissa, que passa neste ponto da função e se nesta tangente comparo a função em qualquer outro ponto, e foi levantada a questão de ser secante, o que eu estou a estudar é a vizinhança deste ponto. Se eu quiser estudar o que é que se passa aqui vou ter uma outra tangente com um outro declive (figura 1).

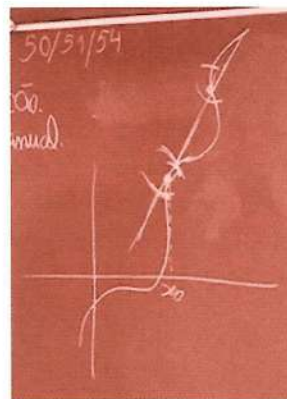


Figura 1.— Complemento visual da explicação da professora

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Figura 2.— Validação da resposta dos alunos

Função afim	Derivada função afim
$f(x) = 0,5x + b$	$f'(x) = 0,5$
$g(x) = \frac{x}{5} + b$	$g'(x) = \frac{1}{5}$
$\sigma(x) = x$	$\sigma'(x) = 1$
$w(x) = mx + b$	$w'(x) = m$
$m(x) = b$	$m'(x) = 0$
$i(x) = 0$	$i'(x) = 0$

Derivada de uma função afim é uma função constante.

$f(x) = 100x + b$   
 $f'(x) = 100$

Figura 3.— Exercícios: regra de derivação da função afim

Guia as intervenções dos alunos principalmente mediante a formulação de perguntas focadas dirigidas à turma, com o fim de comprovar o domínio dos conhecimentos em questão e apoia as verbalizações dos alunos escrevendo no quadro o foco da questão levantada:

*Teresa:* Está bem assim? Algebricamente, como é que por definição, como é que eu encontro a derivada de um ponto? É o quê?

*Vários estudantes:* O limite quando...

*Teresa escreve e repete em voz alta enquanto os alunos recitam a definição algébrica:* O limite quando  $h$  tende para zero, Luís, consegues? Algebricamente é isto, OK. Representação geométrica, o que é que representa?

O declive da reta tangente que passa neste ponto (figura 2).

Nesta parte da aula, Teresa produz interação dirigida à turma durante sete ocasiões e em nove intervenções dirige-se a um aluno específico. Mas também, há um momento no qual a interação é dirigida para a professora por parte de um aluno, Luís, que a questiona (fala 2). Perante a pergunta, Teresa reencaminha a questão para a turma (fala 3) e de seguida para um aluno particular, o Pedro. Pedro responde (fala 4), o que leva Luís a questionar o Pedro (fala 5) que o esclarece. É assim criado um momento de interação entre dois alunos:

- Teresa:* OK. Isto leva-nos a outra situação. Chegamos à conclusão então que a derivada de uma função afim era uma função constante... Luís.
- Luís:* A professora pode definir derivada?
- Teresa:* Definir derivada. Décimo primeiro ano, quem é que ajuda ao Luís a definir o que é que é  $f'(x)$  ... Pedro.
- Pedro:* A derivada de um ponto é o declive da reta tangente nesse ponto.
- Luís:* A derivada é o declive?
- Teresa:* Pedro, alto com força.
- Pedro:* A derivada de um ponto é o declive da reta tangente nesse ponto.

Ao longo deste episódio, Teresa pretende relacionar o conceito de derivada de uma função num ponto com o declive da reta tangente que passa por esse ponto. O seu foco centra-se na *conceptualização*. O sentido pedagógico das suas intervenções baseia-se no *questionar* e no *responder*. Questionar quando remete a validação para outro aluno e quando pede uma definição para comprovar o conhecimento dos alunos. Contudo, produz na maior parte das situações falsos questionamentos, uma vez que formula questões durante a sua explicação que são respondidas na hora por si. Responde quando corrige e explica.

### Episódio 2: Novas questões

Neste momento da aula, as ações de Teresa continuam a ser predominantemente de *informar/sugerir* e *apoiar/guiar*. Informa no sentido de validar as respostas do aluno (falas 4 e 12), sugere proporcionando informação complementar (falas 6 e 8), e apoia e guia a participação dos alunos, tudo mediante principalmente perguntas de confirmação (falas 6 e 10):

- Teresa:* Muito bem, agora ... Turma, vamos fazer a questão 4.1 da tarefa.
- Todos estão a ver o quadro? Sim?  $f(x) = 0,5x + b$  a minha derivada vale quanto?, ou seja o declive da reta tangente que passa num ponto.
- Vários estudantes:* 0,5 (figura 3).
- Teresa:* 0,5.  $g(x) = \frac{x}{5}$ .  $g'(x)$  é quanto?
- Vários estudantes:*  $\frac{1}{5}$ .
- Teresa:*  $u(x) = b$ ,  $b$  uma constante pertence a  $\mathbb{R}$ , vale 2, vale 3, vale 4. Quanto é  $u'(x)$ ?
- Vários estudantes:* zero.
- Teresa:* O que é que eu estou a dizer aqui?  $u'(x) = 0$ .
- Vários estudantes:* O declive é zero.
- Teresa:* Que o declive é zero. Certo? Muito bem.  $i(x) = 0$  e  $i'(x)$  igual a o quê?
- Vários estudantes:* zero.

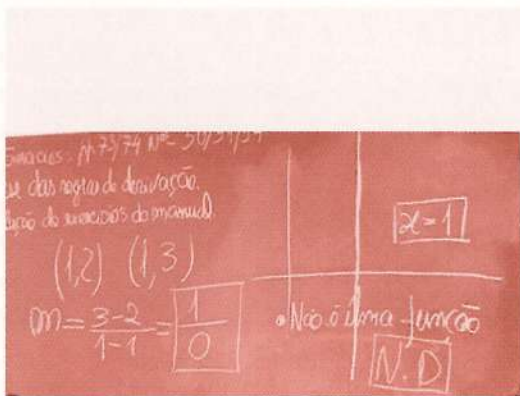


Figura 4.— Discussão sobre o declive de uma reta vertical

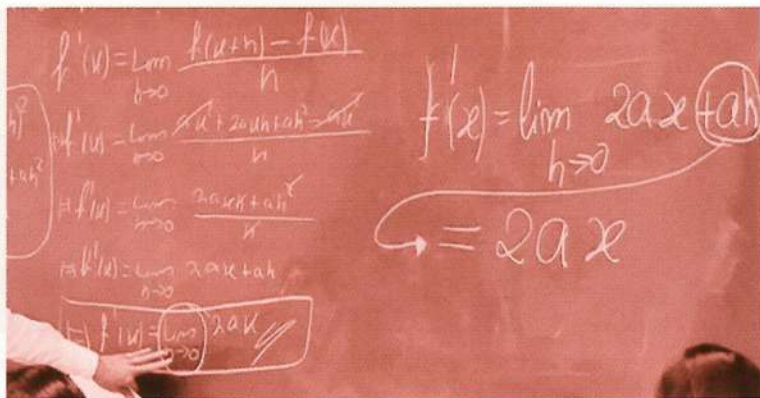


Figura 5.— Solução do João

12. *Teresa*: Dúvidas? ... O que é que nós podemos concluir desta questão? A derivada de uma função afim é uma função constante... Primeira regra de derivação: Se  $f(x) = mx + b$  então eu tenho  $f'(x) = m$ .

Ao longo de todo este episódio, observa-se o predomínio das intervenções em que Teresa se dirige à turma (27 ocasiões) e a um aluno específico (13 vezes), em menor quantidade um aluno coloca uma questão à professora (7 vezes) e só numa situação, um aluno se dirige a outro aluno. A interação de Teresa dirigida à turma foca-se no *produto*, pois a sua intencionalidade é a de *questionar* para pedir e verificar o resultado a que os alunos chegaram. Não obstante, a dinâmica mudou durante a discussão em duas situações (figura 4).

1. *Teresa*: Se nós temos que encontrar o declive daquela reta sendo dados dois pontos dessa reta. Dois quaisquer.
2. *Ana*: (1, 2) e (1, 3)
3. *Teresa*: Como é que eu acho o declive desta reta?
4. *Vários estudantes*: 3 menos 2...
5. *Teresa escreve no quadro enquanto os alunos respondem*.
6. *Teresa*: 3 - 2 dividido 1 - 1 que dá?
7. *Vários estudantes*: 1/0.
8. *Pedro*: Temos ali um problema.
9. *Gonçalo*: O declive não pode ser mais infinito ou menos infinito?
10. *Teresa*: Porque é que não pode ser mais infinito ou menos infinito? O declive é um número real, ou seja, quando eu tenho uma reta, eu estou atribuir o declive, certo? Estou a dizer que esse declive vale 3, vale 4, vale -8, vale um número real. Se eu disser que o declive é mais infinito o que é para ti um declive mais infinito? Não é específico, não é objetivo.

Se eu te disser: João traça uma reta com um declive menos infinito, como é que tu vais marcar essa reta? É complicado, certo? Regressemos. Vocês conseguem definir isto.

11. *Vários estudantes*: Não.

12. *Teresa*: Não. Portanto nós dizemos que não está definido.

Ao concluir esta discussão, Teresa solicita um aluno, o João, para que escreva a solução da seguinte tarefa: «Encontre a derivada da função definida por  $f(x) = ax^2$ ». O aluno resolveu a derivada recorrendo à definição:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

chegando à expressão  $2ax + 2h$ . A seguir Teresa corrige alguns erros da solução do João e encoraja o aluno a explicar o que fez. João dirige-se aos seus colegas e alguns deles participam na discussão, sendo assim o único momento neste episódio em que se produz interação aluno-aluno.

A partir da explicação do aluno, Teresa coloca questões à turma centradas na conceptualização da derivada em relação com o declive da reta tangente (falas 2 e 4), mas surge uma interação em que uma aluna levanta duas questões à professora (falas 7 e 9). Perante esta situação, Teresa responde justificando o contexto de aprendizagem, corrigindo e fazendo uma explicação, apoiada na solução que o aluno fez no quadro e usando referências de outras representações do objeto em questão (fala 10):

1. *Teresa*: O João esteve a calcular a derivada do ponto  $x$  da função  $f$  por definição, ou seja, ele aplicou a derivada por definição. João podes explicar o que é que fizeste?  
(...)



2. *Teresa*: E o que nós estamos a encontrar é a derivada desta função e chegamos à conclusão que era  $2ax$ , e isto representa o quê?
3. *Vários estudantes*: A derivada.
4. *Teresa*: E a derivada é o quê?
5. *Vários estudantes*: É o declive.
6. *Teresa*: É o declive da reta tangente que passa neste ponto da função.
7. *Maria*: Se eu tiver  $\frac{5}{h}$ ?
8. *Teresa*: Se tu tiveres  $\frac{5}{h}$  esta expressão não te vai aparecer no 11.º ano. Esta expressão aparece assim no 12.º ano e tu no 12.º ano vais saber resolver isto e vais saber o que é que é isto.
9. *Maria*: OK. Eu não estou a perceber bem no caso que nós substituímos por zero. O que é que faço com  $h$ ? Desapareceu?
10. *Teresa*: Certo, desapareceu porquê? Porque o intervalo estava cada vez mais pequeno e eu considerei em limite que aquele pontinho da secante se aproximava do ponto que eu estava a estudar. Em limite esse intervalo valia zero. Foi por isso que o  $h$  desapareceu e foi por isso que nós deixamos de colocar limite quando  $h$  tende para zero e chegamos a uma expressão de um número real.

dantes mediante o uso do questionamento focalizado no produto. A seguir, no sentido de dar mais oportunidades de participação aos alunos, Teresa formula questões centradas na conceptualização dos objetos.

## CONCLUSÕES

A dinâmica da comunicação da sala de aula caracteriza-se, em ambos os episódios, pelo predomínio das interações que foram produzidas por Teresa (70% e 83% respetivamente, figuras 6 e 7), quer dirigidas à turma (40% e 27%, respetivamente), quer para um dado aluno (30% e 56%, respetivamente). Este tipo de comunicação, controlada pela professora com a intenção de transmitir uma mensagem para os alunos, é definido como *transmissão de informação* (Menezes *et al.*, 2014). Tal facto é coerente com as ações observadas de Teresa ao longo dos episódios, informar/sugerir e apoiar/guiar, assim como com uma prática que caracteriza o discurso de Teresa: realizar uma pequena síntese no final da discussão de cada questão. Com a preocupação de esclarecer dúvidas, deixando clara e explícita a informação respetiva, Teresa procura resumir a mensagem, focalizando no conceito, na propriedade matemática em que gira a discussão ou no processo.

A ação de *desafiar* foi encontrada apenas uma vez nos episódios analisados, decorrente de ações de sugerir e apoiar (Ponte *et al.*, 2013). O facto de Teresa estar ainda a formar-se profissionalmente, e portanto não ter experiência pro-

Durante este episódio podem identificar-se dois tipos de discussões: primeiramente uma discussão em que Teresa procura verificar o conhecimento adquirido pelos estu-

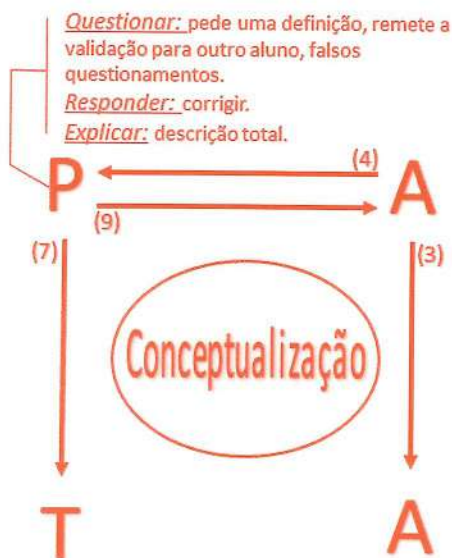


Figura 6.— Dimensões de análise do Episódio 1

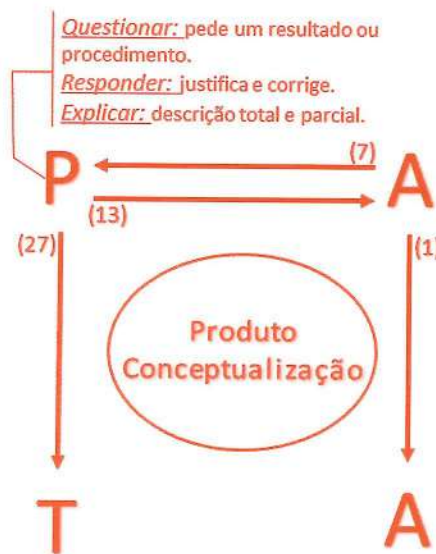


Figura 7.— Dimensões de análise do Episódio 2

fissional, poderá ser uma possível explicação para a escassa frequência com que esta ação ocorreu nos episódios analisados tendo em conta o nível de dificuldade desta ação.

Em ambos os episódios, o objetivo pedagógico foi o esclarecimento de dúvidas, compreendendo-se que o principal foco seja a conceptualização do ente matemático: a derivação de uma função. Contudo, no episódio 3, foi acrescentado um novo objetivo, o de verificar o domínio geral dos conceitos e procedimentos em questão. Daí o foco neste episódio ser não só a conceptualização, mas também o produto (figuras 6 e 7), isto é o resultado ao qual chegaram os alunos ao aplicar as regras de derivação.

A natureza das interações produzidas pela professora foi predominantemente de dois tipos: *questionar*, solicitando informação para comprovar o alcance dos objetivos por parte dos alunos; ou *explicar*, mediante a descrição das definições ou procedimentos em questão, formulando exemplos, recorrendo a diferentes representações dos objetos matemáticos e estabelecendo conexões entre os conhecimentos prévios e o novo conhecimento. *Responder* surge com menor frequência uma vez que em poucas ocasiões Teresa foi questionada por algum aluno. Quando tal acontece, traduz-se no ato de corrigir ou justificar.

Muito embora o questionar possa ser potenciador de aprendizagem, no caso dos episódios analisados as questões formuladas foram diretas e fechadas (Santos & Pinto, 2008) para além de, em diversas situações, ter sido a própria professora a responder. Não se pense, contudo, que esta situação se deve ao facto de Teresa estar ainda em formação inicial. A investigação evidencia de forma muito clara que esta prática é muito generalizável e difícil de alterar, levando tempo e criando «momentos mortos antinaturais» (por ex. Black, Harrison, Marshall, & Wiliam, 2003; Pinto & Santos, 2010).

Em síntese, apesar de Teresa procurar envolver os alunos na discussão que promove e de se mostrar consciente do que pretende, revela algumas dificuldades no desem-

penho do seu papel no sentido de uma efetiva regulação e aprofundamento das aprendizagens.

## Referências

- Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning. Putting into practice*. London: Open University Press.
- Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135–161). Instituto de Educação: Lisboa.
- Pinto, F., & Santos, L. (2010). A comunicação em sala de aula no desenvolvimento de uma tarefa exploratória. In J. M. Matos, A. Domingos, C. Carvalho, & P. Teixeira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática, Comunicação no Ensino e na aula de Matemática* (pp. 87–101). Lisboa: SPIEM.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), 55–81.
- Santos, L., & Pinto, J. (2008). *Teacher's oral feedback and learning*. Topic Study Group 36, ICME11 (acessível em <http://tsg.icme11.org/document/get/688>).
- Semana, S., & Santos, L. (2012). A comunicação oral numa discussão matemática em grupo-turma: o papel da professora. In A. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática, Práticas de ensino da Matemática* (pp. 307–320). Lisboa: SPIEM.
- Semana, S., & Santos, L. (2013). Responder aos alunos em discussões coletivas: Oportunidades para a autorregulação da aprendizagem em Matemática. In Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 359–371). Braga: APM & CIEEd da Universidade do Minho.

**LUIS FABIÁN GUTIÉRREZ FALLAS**

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA  
UNIVERSIDADE DA COSTA RICA

**LEONOR SANTOS**

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

# Números e mais números

biblioteca

**Nº de jogadores:** 4

**Nível de ensino:** 2.º ciclo

## Material necessário

Um baralho de 24 cartas com os números de 1 a 24, outro baralho de cartas com a indicação dos números admissíveis (por exemplo: números pares maiores que 9; números primos; divisores de 100; múltiplos de 3; números ímpares menores que 20; números com o algarismo das unidades maior que 6; números inteiros entre 2,3 e 5,1; números com o algarismo das unidades diferente de 4).

## Objetivo do jogo

Identificar os números que verificam as diferentes condições para conseguir ser o primeiro jogador a ficar sem cartas.

## Preparação do jogo

Baralhar e distribuir as 24 cartas com números entre os jogadores. Baralhar igualmente o outro baralho e colocá-lo no centro da mesa, virado para cima.

## Modo de jogar

Os jogadores observam a carta no cimo do baralho no centro da mesa e escolhem, de entre as suas cartas, uma com um número que respeite a condição imposta pela carta da mesa. Em simultâneo, todos colocam na mesa a carta escolhida. Se algum jogador considerar que não tem nenhuma carta com um número adequado à carta da mesa, deverá abster-se de jogar.

De seguida todos os jogadores devem verificar se as cartas jogadas pelos adversários são adequadas. Caso se venha a verificar que alguma carta não é adequada, quem

a jogou deve retirá-la da mesa e juntá-la às cartas que tem em seu poder. Como penalidade, esse jogador deverá ficar uma vez sem jogar.

Terminada a verificação da validade das jogadas, cada jogador escolhe uma das suas cartas para passar ao jogador que se encontra à sua direita.

Finalmente, são recolhidas da mesa as cartas jogadas e a carta no cimo do baralho no centro da mesa, para que seja possível dar início a uma nova jogada.

## Fim do jogo

O jogo termina quando algum dos jogadores não tiver qualquer carta para passar ao adversário sentado à sua direita. Esse jogador será o vencedor.

## Comentários

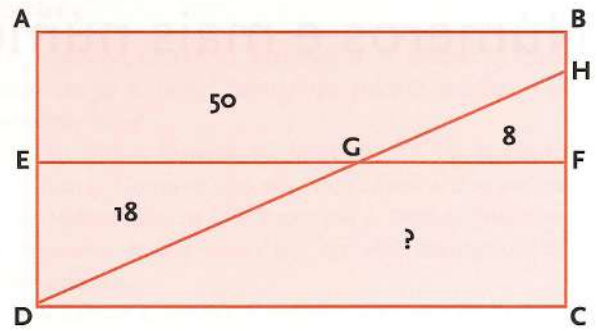
Este é um jogo muito simples, que pode ser utilizado para ajudar os alunos a aprofundar os seus conhecimentos sobre determinados números. O baralho da mesa tem, como facilmente se percebe, um papel central no jogo. É importante que a carta central permita que vários números possam ser jogados, mas algum caso em que isso não aconteça pode ser muito útil para ajudar os alunos a perceber/conhecer melhor esses números. A este nível uma análise pós-jogo das opções dos alunos, nomeadamente relativamente à carta que escolhem passar, poderá constituir uma boa oportunidade para enriquecimento das aprendizagens.

## HELENA ROCHA

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

# Área perdida

A Ana Filipa desenhou um retângulo ABCD. Depois, traçou o segmento EF, paralelo ao lado AB, e o segmento DH, tal como se vê na figura. Depois, começou a medir as áreas das várias regiões em que o retângulo ficou dividido. O pentágono ABHGE tinha  $50 \text{ cm}^2$ , o triângulo DEG media  $18 \text{ cm}^2$ , e o FGH  $8 \text{ cm}^2$ . Faltava-lhe calcular a última quando a interromperam. Qual é então a área do trapézio CDGF?



(Respostas até 31 de dezembro para zepaulo46@gmail.com)

## BATALHA GEOMÉTRICA

O problema proposto no número 132 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

*Quatro amigos meus descobriram o jogo Batalha Geométrica e resolveram fazer um campeonato entre eles, com atribuição final de medalhas de ouro, prata e bronze para os três primeiros classificados. Quando os voltei a encontrar perguntei-lhes qual tinha sido a classificação final. Eis o que me disseram:*

*Manuela: «Fiquei à frente do Eduardo. A Florinda ficou atrás de mim.»*

*Rita: «Fiquei em primeiro. O Eduardo não teve nenhuma medalha.»*

*Florinda: «Nem a Manuela nem o Eduardo receberam a medalha de ouro. Quem ficou em primeiro fui eu.»*

*O Eduardo manteve-se calado.*

*Descobri depois que não houve empates na classificação final e que, das duas frases ditas por cada um, uma era verdadeira e a outra falsa. A quem foram atribuídas as medalhas?*

Recebemos 13 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alexandre Azevedo (Guimarães), Alice Martins (Torres Novas), Ana Filipa Gonçalves, Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva, Ilca Cruz, Mário Roque (Guimarães), Pedro Resende (Ovar), e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Existem muitas maneiras de chegar à solução e uma delas é pensar que temos oito casos possíveis porque, para cada uma das quatro personagens, há duas possibilidades: primeira frase verdadeira e segunda falsa, ou vice-versa. Pode então fazer-se uma tabela de verdade e eliminar os casos em que há contradições. Foi o que fizeram o Alberto Canelas e, parcialmente, a Ilca Cruz e o Hugo Silva.

Outra resolução começaria por listar todas as classificações possíveis (mas são 24...) e ver qual delas levaria a que cada personagem dissesse uma verdade e uma men-

tira. Foi, simplificando um pouco, o caminho seguido pelo Pedro Resende.

Mas podemos tentar ir tirando conclusões a partir das frases ditas. Acompanhem os raciocínios dos nossos leitores.

Alexandre Azevedo: *Tendo como foco as afirmações da Florinda (Nem a Manuela nem o Eduardo receberam a medalha de ouro. Quem ficou em primeiro fui eu.) concluímos que a segunda afirmação não pode ser verdadeira porque se o fosse a outra seria necessariamente verdadeira também, logo concluímos que é verdadeiro «Nem a Manuela nem o Eduardo receberam a medalha de ouro» e que é falso «Quem ficou em primeiro fui eu (Florinda)».* Logo, resta-nos a Rita para ocupar esse primeiro posto.

Ana Filipa Gonçalves: *Independentemente de qual for a frase verdadeira da Manuela, ela nunca fica em último lugar e recebe sempre uma medalha, pois ou fica à frente do Eduardo ou a Florinda fica atrás dela.*

Graça Braga da Cruz: *Das frases da Rita, a segunda tem de ser a falsa; logo o Eduardo foi um dos medalhados e, como a Rita ficou com o 1.º lugar, o Eduardo ficou em 2.º ou em 3.º.*

Carlos Dias: *A Manuela diz: «Fiquei à frente do Eduardo. A Florinda ficou atrás de mim.» Se a primeira proposição fosse verdadeira, a segunda teria de ser falsa e portanto teríamos que ter a Florinda à frente da Manuela e esta à frente do Eduardo. Isto faria com que o Eduardo fosse o 4.º, o que contraria uma das conclusões anteriores. Logo, a primeira proposição é falsa e a segunda verdadeira. Ou seja a Manuela ficou depois do Eduardo e a Florinda depois da Manuela.*

Temos então a seguinte classificação: 1.º Rita; 2.º Eduardo; 3.º Manuela; 4.º Florinda.

Finalmente, o derradeiro comentário do Mário Roque: *Percebe-se aliás agora melhor que, depois de ouvir a Manuela mas, sobretudo, a Rita, o Eduardo tenha amuado e ficado por isso calado até ao fim deste problema...*

O PROBLEMA DESTA NÚMERO

José Paulo Viana

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

# O problema do Baltazar

EDUARDA MOURA

O problema de Baltazar vem a propósito de um problema de um professor de matemática chamado Brian Bolt. É um problema tipo puzzle, onde quase nada ajuda a resolvê-lo. Para o resolver é necessário, segundo a escola tradicional do pensamento escolar, ter uma inspiração, uma sorte de génio. Neste artigo explicaremos como não é bem assim. Um misto de metacognição e reflexão abstrativa são os ingredientes necessários, para além da exploração usual que se faz para resolver um problema de matemática.

Uma formulação para o problema 41 do Bolt (1996, p. 54) poderá ser:

Dada uma rede quadrada  $6 \times 6$ , colorir 12 dos 36 quadrados com:

1. só 2 quadrados em cada linha;
2. só 2 quadrados em cada coluna; e,
3. menos de 3 quadrados em cada diagonal.

Que problema interessante! Mas sem ir ver a solução o desafio é enorme! Não se consegue encontrar facilmente uma solução. E o Polya e suas recomendações? No meio de tentativas que resultam em erro ficamos a pensar que não servem para nada!

Neste artigo discutiremos como um problema que parece intransponível pode ser levado para a sala de aula de-

pois de adaptado e pensadas as ações que podem levar os alunos a interessar-se por este problema.

## O QUE É ENTÃO UMA PROBLEMA DE MATEMÁTICA?

Ora o 41 do Bolt parece ser um problema intransponível. Se não vejamos: qual o obstáculo de peso a ultrapassar? Não é o de 2 casas coloridas em cada linha e em cada coluna mas que só dois quadrados possam ser coloridos *em cada uma* das diagonais. Se experimentarmos tentando produzir uma solução em que as três condições são satisfeitas chegamos à conclusão que as duas primeiras soluções são muito facilmente satisfeitas, enquanto que a terceira condição não é trivialmente satisfeita. Um exemplo dessas pseudo-soluções encontra-se representado na figura 1.

E são essas pseudo-soluções as que temos para pensar ao continuar a resolver o problema. Ah! Cá está o Polya! Pensar sobre o que obtivemos colocando as pseudo-soluções em perspetiva. Na tentativa de baixar o número de diagonais com 3 quadrados coloridos conseguimos todas as diagonais exceto duas (ver figura 2).

Ora é muito interessante mas não chega, podemos, no entanto, formular um outro problema, ou seja, a terceira

V	O	O	O	O	V
V	O	O	V	O	O
O	O	V	O	V	O
O	V	O	O	O	V
O	O	V	O	V	O
O	V	O	V	O	O

**Figura 1.**— Não mais de 3 quadrados coloridos em cada diagonal.

O	V	O	O	<u>V</u>	O
V	O	O	<u>V</u>	O	O
O	O	O	<u>V</u>	O	V
O	<u>V</u>	<u>V</u>	O	O	O
O	O	V	O	V	O
<u>V</u>	O	O	O	O	V

**Figura 2.**— Todas as diagonais exceto duas satisfazem a terceira condição.

1	3	3	2	2	1
<u>2</u>	1	2	3	1	3
3	<u>2</u>	1	1	3	2
3	1	<u>2</u>	3	2	1
1	3	1	<u>2</u>	3	2
2	2	3	1	1	3

Figura 3.— Quatro quadrados de cor 2 ficam coloridos.

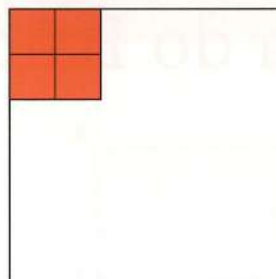


Figura 4.— Coloração que leva a uma diagonal com mais de 3 quadrados coloridos.

condição passa a ser: cada diagonal pode ficar com até 3 casas coloridas. Mas adicionamos uma quarta condição:

4. encontrar 3 soluções disjuntas no mesmo quadrado  $6 \times 6$ .

Assim, teremos 12 casas coloridas de uma cor, 12 casas coloridas de outra cor, e as últimas 12 casas de uma outra cor. Tudo numa só rede de 36 quadrados.

Este é, de facto, um problema porque podemos encontrar, por exemplo, duas soluções disjuntas, mas não três (figura 3).

Não conseguimos uma solução do problema dado que para a cor número 2, temos 4 casas coloridas numa diagonal.

A ideia das soluções disjuntas aparece como resultado da estratégia de eliminar quadrados a colorir na procura de uma solução. Ficamos então com um problema com muitas soluções, a que eu chamei *o problema do Baltazar*, dada uma história que li há muito tempo de um menino que gostava de ir à pesca juntamente com a sua irmã. Tinha a sorte de apanhar mais peixes do que ela porque era muito sossegado e ficava em silêncio durante horas sem se mexer com a rede submersa em água, apanhando assim os inadvertidos peixes.

Formulamos então um novo problema e podemos começar a interrogarmo-nos sobre os seus limites. Podemos também diminuir a quantidade de casas de 12 para 10 voltando a uma só cor e temos ainda um outro problema, este muito mais fácil que o inicial.

### METACOGNIÇÃO E REFLEXÃO ABSTRATIVA

Passamos, então, da situação de não termos qualquer conhecimento sobre um problema, a ter na ideia pequenos factos que nos fazem sentir que já sabemos alguma coisa sobre ele. Por exemplo, ajudou:

1. eliminar casas em diagonais;
2. não acumular quadrados coloridos, como no quadrado da figura 4, por exemplo;
3. dividir o quadrado em duas partes pela diagonal e

distribuir a coloração abaixo e acima da diagonal principal; ou,

4. traçar todas as diagonais numa direção colorindo só dois quadrados em cada diagonal, e coordenando depois com as soluções das diagonais da outra direção e verificando linhas e colunas por último.

Todos estes factos, para nossa vantagem, ou desvantagem — pois podem não estar de todo relacionados com a solução do problema — fazem parte do conhecimento que levaremos connosco quando resolvemos outros problemas similares. Chama-se metacognição (Schoenfeld, 1992) e neste caso também frustração passaria a fazer parte do nosso conhecimento se não seguissemos o conselho de Polya de aproveitarmos o que nos aparece durante as tentativas de resolução, e levantássemos questões sobre o problema para que outros pequenos problemas nos surjam e nos possam ajudar. Neste caso tivemos sorte e conseguimos um outro problema: o problema do Baltazar!

Mas o problema inicial não ficou ainda resolvido e é necessário voltar a pensar nele ou pareceria que formulámos um outro problema e nada mais. É aqui que se fica muito surpreso, quando ao voltar ao problema, uns dias mais tarde, encontramos uma solução, e depois outra e depois mais outra ainda!

Terá sido reflexão abstrativa? Primeiro, será de notar que se logo víssemos as soluções do Bolt teríamos provavelmente seguido outro caminho. Na história da resolução deste problema, formulámos um problema mais fácil, mas não antes de termos ganho uma experiência considerável. Temos alguma razão para pensar que foi esta experiência que levou a que ao voltar a pensar no problema, o víssemos de forma diferente. Novamente nada na experiência que ocorreu poderia ter delineado o caminho para que de repente as soluções comesçassem a aparecer. A aprendizagem e respetivo conhecimento foi instrumental numa primeira fase, no sentido de von Glasersfeld (1989, p. 10).

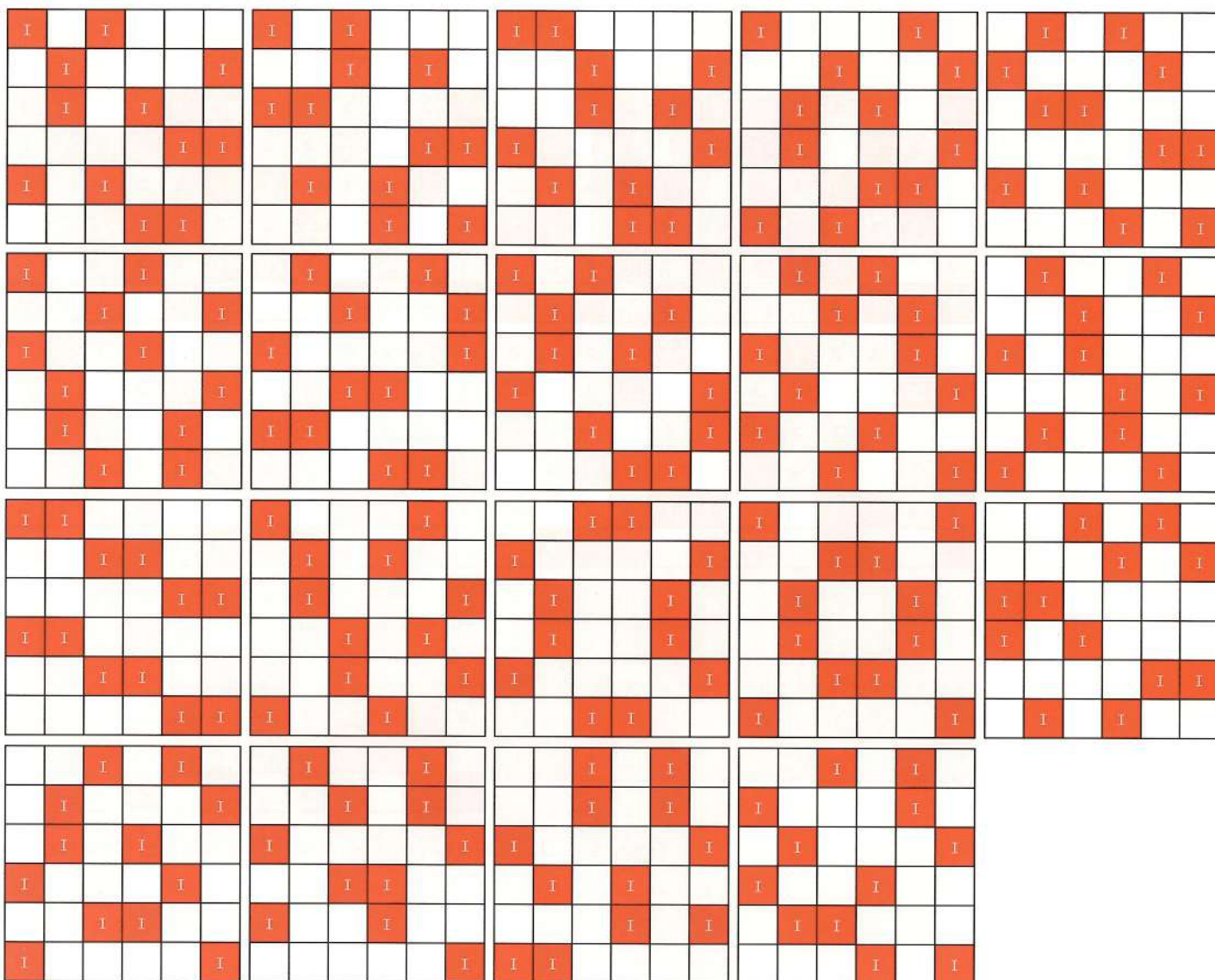


Figura 5.— Algumas soluções do problema 41, incluindo as duas dadas pelo Bolt.

Na segunda fase de resolução, reflexão abstrativa, isto é, novos esquemas e formas de operar, foram explicitamente instrumentais: quando voltamos ao problema outro tipo de organização da distribuição dos quadrados pelas casas, juntamente com a experiência acumulada em estratégias, foi colocada em ação e uma das soluções foi encontrada. E depois outra, e mais outra, porque em primeiro lugar o problema tornou-se possível e, em segundo lugar, a tentativa-erro uma atividade dirigida.

Concluimos, então, que alguma aprendizagem foi conseguida para além da aprendizagem que ocorreu ao nível geral da resolução de problemas (mais um tipo de problema passou a fazer parte da experiência dos problemas resolvidos), nomeadamente:

- Estratégias em que passamos a confiar;
- Soluções parciais;
- Mais que uma solução e logo uma nova perspectiva sobre o problema;
- Um outro problema mais fácil que formulámos;
- Um problema que passamos agora a conseguir resolver;
- Tudo o que passaremos a conseguir fazer com tudo isto na resolução de outros problemas.

Mas ainda não acabou! Começa agora! A primeira questão a que já nos referimos antes é: Quantas soluções tem o problema? Ou, como vamos saber que as temos todas?

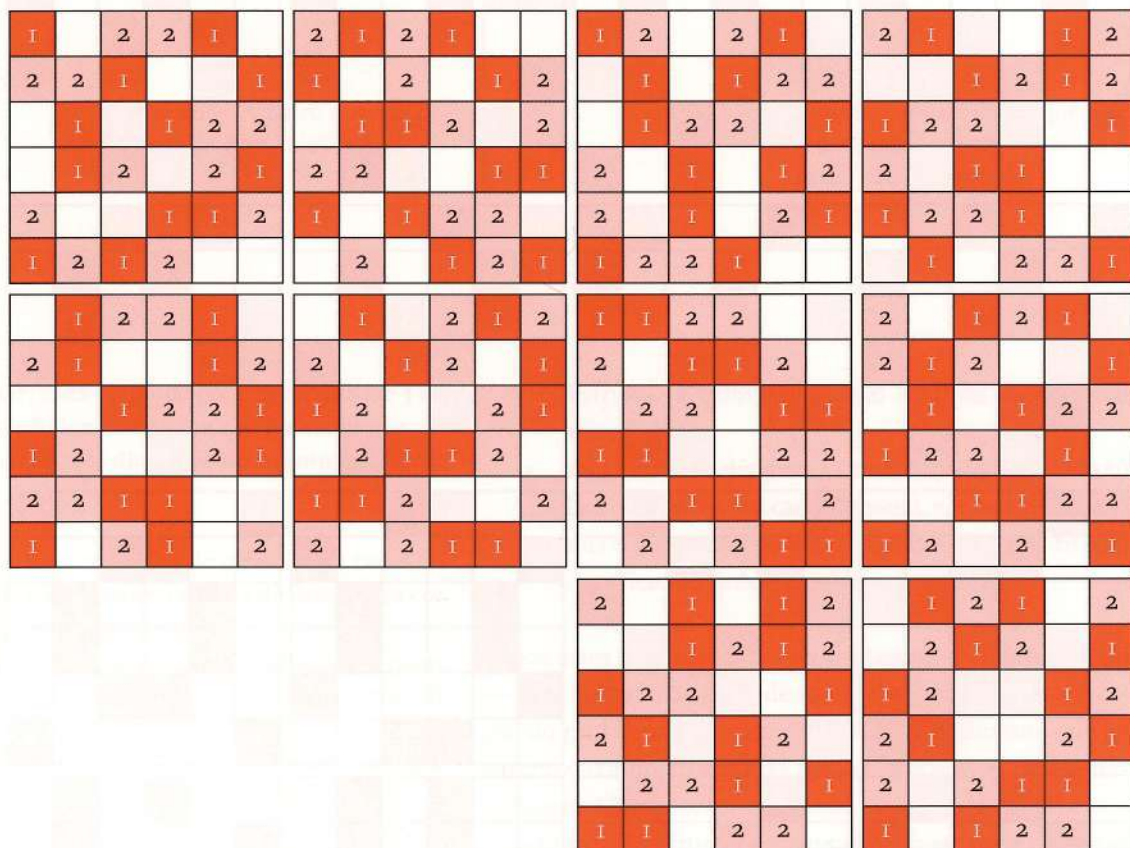


Figura 6.— Duas soluções disjuntas mas não 3 soluções disjuntas.

## A INVESTIGAÇÃO CONTINUA

O problema fica, então, muito mais interessante e uma das soluções no fim do livro, diferente de qualquer uma das encontradas, levou ainda a uma outra investigação.

Das inovações que fizemos com a formulação do problema do Baltazar, a de colorir toda a rede com 3 soluções disjuntas, pode ser transportada para o problema inicial estendendo a investigação. Ora ver as soluções do Bolt, duas ao todo, teve todo o proveito nesta altura pois continuando a encontrar soluções disjuntas temos casos em que temos duas soluções, mas não três soluções. A investigação foi produtiva como podemos ver na figura 6.

E não são só quatro as soluções! São muitas mais!

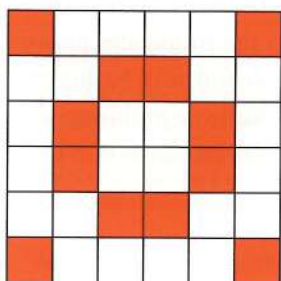
Uma das soluções do livro para o problema 41 do Bolt é muito particular porque é simétrica (figura 7).

E para surpresa nossa, a partir dela conseguimos 3 soluções disjuntas (figura 8).

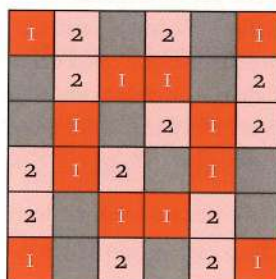
E até agora não encontrei nenhuma outra configuração, simétrica ou não simétrica, que conduza a 3 soluções disjuntas, enquanto que para a solução do Bolt encontramos algumas (figura 9).

O problema começa a ficar cansativo, especialmente porque é aborrecido fazer todas as verificações necessárias, bem como ter a certeza que todas as soluções foram encontradas, mas lá produtivo é, e parece ser o problema com mais soluções no mundo inteiro! Passamos então à fase de demonstração que sai fora do âmbito deste artigo. No entanto, passamos a sentir que estamos no fim da resolução do problema. Tentando ver se todas as soluções tinham sido encontradas, chega-se à conclusão que talvez seja necessário um algoritmo para termos a certeza de as ter encontrado todas, e ficamos no domínio da demonstração por computador, a braços com uma demonstração por método exaustivo. E agora! A demonstração produz o algoritmo ou o algo-

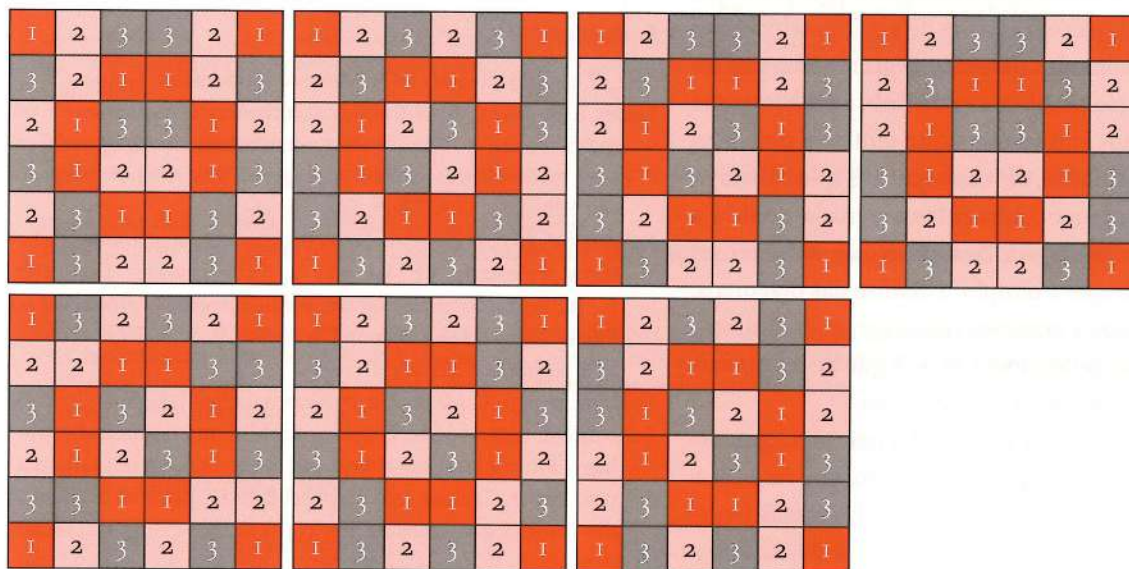




**Figura 7.**— Solução dada ao problema por Bolt (1996, p. 207).



**Figura 8.**— Três soluções disjuntas.



**Figura 9.**— Mais sete soluções disjuntas a partir da solução simétrica do Bolt

ritmo é necessário para a demonstração? Neste caso fica-se um pouco confuso, mas parece ser a demonstração que produz o algoritmo! Um problema para a discussão filosófica sobre a atividade de resolução de problemas. De acrescentar que na nova formulação a solução simétrica dada pelo Bolt (para o problema 41) pede para que em cada diagonal principal fiquem 2 casas de uma cor, 2 casas de outra cor e as restantes da última cor e logo constituiu um ponto de partida para a procura de três soluções disjuntas.

Este tipo de problema tem outras versões como, por

exemplo, colorir os quadrados de um tabuleiro de xadrez dois a dois, ficando por colorir 8, e de tal maneira que destes restantes 8 não fiquem 3 quadrados em diagonal. Ter resolvido o problema 41 do Bolt vai ajudar a resolver este, que por acaso também é do Bolt, mas o 71:

«Desenhe um tabuleiro quadrado 8x8 onde se ajustem as suas peças de dominó, de tal modo que cada peça de dominó cubra exatamente 2 casas. Os 28 dominós de um conjunto normal podem ser colocados de modo a cobrir todas as casas à exceção de 8. Há ainda diversas distribuições possíveis. Pode-se ver na figura

uma forma que deixa a descoberto uma casa em cada linha e outra em cada coluna do tabuleiro<sup>[1]</sup>. Como o leitor poderá verificar, se experimentar, uma tal distribuição pode ser conseguida de diversas maneiras, mas o verdadeiro desafio é encontrar uma maneira tal que, além disso, não surjam três centros de casas desocupadas perfeitamente alinhados. A distribuição de dominós da solução que se vê na figura falha em duas linhas, indicadas pelas rectas que atravessam os centros dos quadrados em falta.» (p. 85).

Um problema igualmente divertido e para o qual se tem muitas estratégias na mão, agora, claro está, e não antes de resolver o 41 do Bolt!

## COMENTÁRIO FINAL

Tudo isto em resultado de formularmos um outro problema relacionado com o dado! Mas toda esta experiência foi muito particular e pessoal. Para Thompson (1985) ser um resolvedor de problemas é ser capaz de agir operativamente sobre que possibilidades devemos seguir — deverei fazer isto, ou aquilo? No problema 41 do Bolt, ao iniciar a sua resolução, não temos muito mais que tentativa erro sem muitas opções informadas, daí começarmos a subdividir a rede, a experimentar preenchimentos ordenadamente e a distribuir os quadrados na rede de formas que nos parecem estratégicas levando, por exemplo, à análise das diagonais. Quando encontramos a primeira solução e prosseguimos, a atividade tornou-se generativa e a resolução de problemas pode neste sentido considerar-se operativa.

A experiência em resolução de problemas varia grandemente e a respetiva metacognição também, por isso mesmo Lester (1985) considera o modelo de Polya insuficiente, sendo necessário examinar as componentes da metacognição e as ações que as guiam. Mais ainda, comparando o conhecimento feito por alunos e matemáticos, ou educadores matemáticos, pesquisadores chegaram à conclusão que são conhecimentos muito diferentes e logo a ideia de ensinar estratégias não é, em geral, conseguida. Daí que a construção do currículo com base no ensino de estratégias não contribui significativamente para uma atividade que é generativa e reflexiva, como o é a atividade de resolução de problemas.

A componente cognitiva do currículo pode assim ser satisfeita pela atividade de resolução de problemas tendo cuidado o professor de não recontextualizar<sup>[2]</sup> a sua expe-

riência na resolução de problemas nas salas de aula com os seus alunos (Palhares, 1995). Uma questão a investigar, que pode partir deste problema e outros semelhantes, é como podem os professores criar oportunidades para os seus alunos que levem à atividade de formulação dos problemas que contribuem para a resolução do problema a resolver. Ou seja, o que caracteriza esta atividade e em que ambientes se torna operativa.

## Notas

- [1] Na figura referida é apresentada uma outra solução que poderia reformular o problema de forma análoga à do Problema do Baltazar, ou seja, com mais de 3 quadrados por diagonal, por colorir.
- [2] Palavra utilizada aqui com um sentido diferente do usado pelo autor no trabalho referido.

## Referências

- Bolt, B. (1996). *A caixa de Pandora da Matemática*. Gradiva.
- Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem solving instruction. *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale: LEA Silver, E. A.: p. 41-70.
- Palhares, P. (1995). Histórias com problemas construídos por futuros professores de Matemática. Em Fernandes, D., Lester, F., Jr., Borralho, A., & Vale, I. (ed) *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: múltiplos contextos e perspectivas*. Lisboa: Gráffis.
- Polya, G. (1985). *Como resolver problemas*. (2.ª ed.). Lisboa: Gradiva.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. Em D. Grouws (ed) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370) New York: MacMillan
- Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving and learning mathematics: considerations in developing mathematics curricula. Em Edward A. Silver (ed) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale: LEA Silver, E. A.: p. 189-233.
- von Glasersfeld, E. (1989). Cognition, the construction of knowledge and teaching. *Synthese* 80 (1):121-140.

EDUARDA MOURA

# APM 2015 — sócios

## Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

## Modalidades de associado e seus direitos

### Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece seis modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @-sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro

e cinco modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

### Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo *APMinformação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

### Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

### Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

### Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

## Quotas anuais para 2015

Modalidades de associado individual		Modalidade de associado institucional	
Professor no ativo (sócio regular)	50,00 €	Modalidade I [1 exemplar da E&M]	60,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio)	15,00 €	Modalidade II [2 exemplares da E&M]	80,00 €
Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular)	38,50 €	Modalidade III [1 exemplar da E&M + <i>Quadrante</i> ]	75,00 €
Professor aposentado	38,50 €	Modalidade IV [2 exemplares da E&M + <i>Quadrante</i> ]	100,00 €
@-sócio	38,50 €	Instituição no estrangeiro	\$150,00 (USA) ou 120,00 €
Sócio residente no estrangeiro	60,00 €		

## Assinaturas das revistas para 2015

		<i>Educação e Matemática</i> (5 números/ano)	<i>Quadrante</i> (2 números/ano)
Associados individuais	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Não associados individuais	Portugal	47,00 €	35,00 €
	Estrangeiro	65,00 €	45,00 €
Não associados individuais	Portugal	75,00 €	50,00 €
	Estrangeiro	85,00 €	60,00 €

## Editorial

- 01 **Tecnologia para que te quero**  
Lina Brunheira

## Artigos

- 03 **Contributos da Geometria para a compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros**  
Marta da Graça Bruno Pereira
- 09 **A notável identidade  $e^n + 1 = 0$**   
José Luiz Pastore Mello, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja
- 17 **A exploração de isometrias nas Pavimentações de Penrose numa turma de 8.º ano**  
João Carlos Terroso
- 27 **Acontecimentos independentes ou incompatíveis? Vamos clarificar os conceitos!**  
Adelaide Freitas, Maria José Carvalho
- 34 **Crónicas de outros tempos**  
Mária Cristina Almeida
- 35 **O questionamento oral na sala de aula de Matemática: um elemento propiciador de avaliação formativa?**  
Luis Fabián Cortiérrez Fallas, Leonor Santos
- 43 **O problema do Balazar**  
Eduarda Moura

## Secções

- 42 **O problema deste número** José Paulo Viana  
Área Perdida
- 24 **Tecnologias na Educação Matemática** António Domingos  
Vamos à cidade?... Paulo Alvega
- 23 **Materiais para a aula de Matemática**  
Desporto no verão, Paulo Alvega
- 32 **Caderno de Apontamentos de Geometria** Cristina Loureiro  
Geometria partilhada e socialmente construída
- 12 **Espaço GTI**  
O desenvolvimento do pensamento algébrico num contexto de ensino exploratório: Um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade  
Célia Mestre
- 41 **Vamos jogar** Helena Rocha  
Números e mais números
- 02 **Encontros**