# Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2015

133

Maio ∞ Junho

Preço 5,75€


# ficha técnica

**EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA**

Diretora: Lina Brunheira
Subdiretora: Helena Rocha
Redação: António Fernandes, Cristina Cruchinho, Cristina Tudella, Helena Amaral, Irene Segurado, Isabel Rocha, Manuela Pires, Paulo Alvega, Sílvia Zuzarte

**Colaboradores Permanentes**
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

**Capa** António M. Fernandes
**Paginação** Gabinete de Edição da APM

**Entidade Proprietária**
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
**Data da publicação** Junho 2015
**Tiragem** 1500 exemplares
**Periodicidade**
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

**Impressão**
Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.º 8
Casal da Espinheira
2560–401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

## Sobre a capa

A capa deste número reproduz a obra Deep Magenta Square (1978) da autoria de Richard Anuszkiewicz. O autor recorreu a objectos geométricos simples (linhas e um quadrado) para obter um efeito que transcende a mera coexistência desses objectos, o que se traduz na presença de profundidade e no aparecimento dos padrões moiré. De certo modo, Anuszkiewicz inverteu o processo de matematização, que tenta descrever uma realidade subtraindo os aspectos não essenciais.

António M. Fernandes

## Agradecimento

Cláudia Canha Nunes deixou de integrar a direção da revista *Educação e Matemática*. Pelo contributo que deu à revista enquanto permaneceu na redação, aqui fica o nosso agradecimento.

## Neste número também colaboraram

Ana Paula Canavarro, Ana Sofia R. Rézio, Daniela Reyes-Gasperini, Graciosa Veloso, Joana Galrinho, Joana Mata Pereira, João Pedro da Ponte, Lurdes Serrazina, Maria José Silva Sebastião, Marisa Quaresma, Neusa Branco, Sónia Barbosa, Valdeni Soliani Franco.

## Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

## Nota

# Exames no final do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, para quê?

Mais uma vez os nossos alunos do 4.º e 6.º anos realizaram os designados exames de final de ciclo a Matemática e Português. De novo na comunicação social fez-se eco da ansiedade sentida por muitos pais e alunos com a realização destas provas. Lemos e ouvimos sobre a perturbação que esta situação trouxe às escolas e às famílias, com alunos de outros anos de escolaridade a terem de ficar em casa, muitas vezes entregues a eles próprios, para que os colegas do 4.º e 6.º anos pudessem realizar as provas, com todas as regras e burocracias que chegam do Ministério da Educação e Ciência (MEC). Também os diretores dos agrupamentos manifestaram as suas preocupações pela perturbação no funcionamento das escolas que a realização dos exames traz anualmente, nomeadamente, alunos sem aulas nos dias das provas, outros que deixam de ter aulas para que os professores corretores possam corrigir as provas, etc., e tudo isto a meio do terceiro período letivo.

Pensando em termos de currículo de Matemática, os programas estabelecidos para o 4.º ou para o 6.º ano são, em muitas escolas, compactados nos dois primeiros períodos letivos, pois no 3.º período, a primeira parte é ocupada no treino para o exame e na segunda parte, o exame já se realizou e é muito difícil, por vezes impossível, passar outra mensagem do que aquela de que a escola acabou, já se realizou o exame. Com este panorama, a realização dos exames de Matemática nos dois primeiros ciclos do ensino básico, para além de não acrescentar nada à aprendizagem dos alunos, restringe dramaticamente o currículo praticado a estas duas disciplinas, em especial no 1.º ciclo, diminuindo o tempo para a aprendizagem dos alunos em Matemática, mas também nas outras áreas curriculares.

O argumento repetidamente afirmado pelos responsáveis do MEC de que a existência de exames finais do 1.º e 2.º ciclos aumenta o rigor e melhora as aprendizagens não tem qualquer fundamento. Que rigor é este que reduz os tempos de aprendizagem, prioriza as aprendizagens de rotina e aquelas que se espera venham a sair na prova? Em nome dos exames alunos são colocados semanas seguidas a responder a «provas modelo», focadas na avaliação sumativa ao invés de a ênfase ser a avaliação formativa como é recomendado para uma fase da aprendizagem onde a construção e sistematização dos conceitos elementares deve ser a prioridade.

Sabe-se hoje que as conceções que os alunos têm sobre a Matemática, bem como as atitudes acerca desta disciplina são formadas nos primeiros anos de contacto com esta e são muito difíceis de alterar em anos posteriores. A investigação também conclui que as experiências iniciais são fundamentais para desenvolver nos alunos atitudes positivas perante a Matemática e a sua aprendizagem, de modo a que sintam que são capazes de a aprender, reconheçam o seu valor e a sua utilidade no desenvolvimento do conhecimento e nas situações do dia a dia. Assim, nos primeiros anos espera-se que os alunos sejam envolvidos em experiências relevantes de resolução de problemas que constituam verdadeiros desafios. Espera-se dos professores que promovam o envolvimento dos alunos na reflexão sobre essas atividades de modo a que tenham uma autêntica experiência matemática e que conceitos fundamentais da Matemática sejam aprendidos.

Tendo em conta que avaliação e ensino devem estar interligados e a avaliação deve servir de base ao ensino, só acompanhando aquilo que cada aluno é capaz de fazer em Matemática, através de uma avaliação formativa que vá para além do certo e do errado, focando-se na forma como os alunos estão a pensar, como conseguem explicar e aplicar o conhecimento que já têm na resolução de tarefas, o ensino se torna eficaz.

Mas o que vemos nas nossas salas de aula de Matemática do 4.º e 6.º anos? Professores preocupados e «pressionados» para que os seus alunos tenham uma boa classificação no exame, para isso é necessário «treinar», utilizando todos os meios e todos os tempos. As tarefas usadas na avaliação veiculam uma mensagem para os alunos (e também para os professores) sobre que tipo de conhecimento matemático e de desempenho é valorizado. Será impossível fazer melhorias significativas no ensino da Matemática se a avaliação continuar a ser pouco inspiradora — exigindo o «ensinar para o exame» — e definida pelo que é medível e não pelo valor que tem em Matemática.

Um objetivo essencial da escola elementar deve ser o de introduzir as crianças à resolução de problemas, não para resolver esta ou aquela espécie de problemas, envolvendo cálculos mais ou menos complexos, mas desenvolvendo uma atitude positiva e bons hábitos de pensamento perante qualquer tipo de problema, traduzidos na disponibilidade e vontade de resolver problemas. Os resultados do PISA 2012 mostram que os alunos que estão despertos para a resolução de problemas em Matemática, sentem que podem lidar com muita informação, são rápidos a compreender informação disponibilizada de diferentes formas, procuram explicações para o que observam, podem facilmente ligar factos e gostam de resolver problemas complexos, têm melhores resultados em Matemática[1].

Ora o tipo de problemas e situações que aparecem nos exames não correspondem à ideia de problema no sentido abordado antes, não constituem desafios para os alunos, no sentido definido por Pólya. Por exemplo, a prova do 4.º ano contém problemas cuja resolução corresponde exatamente a uma mesma sequência de operações. Quem treinou aquele tipo de problemas pode vir a ter sucesso na sua resolução, mas dificilmente será um bom resolvedor de problemas no sentido abordado pelo PISA 2012 e que, na minha perspetiva deve ser um dos principais objetivos do ensino da Matemática no ensino básico.

**Nota**

[1] OECD (2014), *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems* (Volume V), PISA, OECD Publishing.

Maria de Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação de Lisboa

# Um ponto de encontro, em todos os sentidos . . .

Daniela Reyes-Gasperini

Um novo *Seminário em Investigação em Educação Matemática*, o vigésimo sexto para a comunidade portuguesa, o primeiro para mim que venho do outro lado do Atlântico. Évora reuniu colegas que são professores ou investigadores ou investigadores em formação, para dialogar — um *seminário*, na minha opinião, tem o espírito de diálogo e de progresso — sobre a direção e os avanços da investigação na área da educação matemática em Portugal. Como investigadora latino-americana em *Matemática Educativa* permito-me contar a minha experiência neste encontro.

No primeiro dia, recordo que o encontro foi partilhado entre ProfMat e SIEM. Dois eventos que se cruzam por um dia: professores e investigadores compartilham espaços, ideias, problemas, soluções... *um ponto de encontro*.

A primeira conferência *O desenvolvimento do pensamento algébrico numa perspetiva de integração curricular* foi proferida por uma doutora recém-graduada, Célia Mestre do Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada, o que me deu uma primeira indicação de que o evento reconhece os jovens que se unem à comunidade. Na minha lista de momentos importantes este é um deles (tornarei explícitos os seguintes momentos entre parênteses). A investigadora conta uma experiência de sala de aula, com uma turma de 4.° ano, sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico e contextos que permitem promovê-lo, suas relações com a aritmética a nível curricular e a generalização das ideias aritméticas. A partir dos seus dados, realiza a análise e faz uma interpretação científica. O público? Professores e investigadores e todas as combinações possíveis destas duas profissões. A abertura foi um exemplo claro de como a teoria e a prática poderiam viver e crescer em conjunto. Quer por métodos analíticos ou pela sua própria experiência, o público foi-se identificando com o que ia sendo relatado.

Em seguida ouvimos falar sobre um projeto colaborativo *Desenvolver a literacia estatística: contributos para uma reflexão em torno da educação estatística*. Um painel de cinco investigadoras, sim, mulheres (outro momento importante) e não é um detalhe menor: Hélia Oliveira e Ana Henriques do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa; Ana Paula Canavarro da Universidade de Évora; Cristina Roque da Escola Secundária Ferreira Dias e Raquel Santos do Instituto Politécnico de Santarém. A estatística é atualmente um tema de investigação em expansão, e a sua presença tem aumentado em publicações científicas. A partir da ideia de que a estatística é essencial para a formação do cidadão, o projeto elege como principal propósito a «literacia estatística»: isto reflete-se, por exemplo, em como um indivíduo raciocina com ideias estatísticas e atribui significados à informação; mas também como interpreta, avalia criticamente e expressa opiniões baseadas em dados. Este painel leva-nos a questionar que tipo de estudantes estamos a educar e, basicamente, que tipo de pessoas queremos que sejam no futuro: cidadãos críticos. O projeto apresentado dá conta dos benefícios do trabalho colaborativo, da reflexão sobre as responsabilidades e da estrutura da organização na realização de um projeto de investigação.

*Olhares sobre a aula de matemática: contributos da interação entre professores e investigadores*, assim se designavam os *workshops*, tornando explícito o ponto de encontro entre profissionais da educação matemática. Separados em pequenos grupos, vimos um vídeo de uma professora que leciona uma aula de sistemas de equações. Cada grupo tinha de dizer o que tinha observado naquela aula, fazendo emergir diferenças entre «o olhar do investigador» e «o olhar do professor». O que observamos, segundo a pele que vestimos? Os investigadores fazem reivindicações que os professores discutem e até mesmo vêm a negar; os professores fazem declarações que põem em dúvida, e podem até mesmo contradizer, resultados da investigação... e assim, só assim, no diálogo constante entre teoria e prática, estamos certos da viabilidade dos resultados da investigação, bem como os professores podem conhecer novas propostas de ação. Falar sobre o contexto dos resultados da investigação será uma questão a considerar. Este espaço, o encontro e o diálogo estreito entre profissionais de educação é sem dúvida um momento importante a ser reforçado (outro mais). Talvez, um dia, a questão deixe de ser «o que vemos, como professores ou investigadores» e passe a ser «o que vemos como uma comunidade».

*As políticas educacionais: Que políticas educativas para a renovação do ensino da matemática em Portugal?* Inúmeras intervenções foram feitas num formato novo para mim. Participações em vídeo de diretores, pais, estudantes, empresários e investigadores; juntamente com as intervenções dos três oradores que, pessoalmente, responderam às perguntas ao mesmo tempo que comentaram as intervenções: Henrique Manuel Guimarães, Professor e investigador em Educação Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa; Jorge Paulo Gonçalves, Professor de Matemática da Escola Secundária de Casquilhos e Pedro Abrantes, Sociólogo da Universidade Aberta. Esta dinâmica que é, para mim, um diálogo multifacetado, impede-me de falar sobre uma ideia geral, no entanto, vou destacar o aspeto que, enquanto investigadora e ouvinte de um debate sobre políticas educativas, o pode resumir: *a educação para todos e com todos*, que nos permite abandonar a ideia de que a escola foi criada para uma elite. Embora seja uma bandeira que há muitos anos é compartilhada por todos nós que buscamos transformações educacionais. O facto de este lema voltar ao nosso discurso, significa que ainda não o conseguimos enquanto sociedade (sempre voltar para o que ainda precisa voltar). As políticas educacionais têm a sua tarefa e nós, a nossa; mas devemos estar sempre unidos no diálogo. Uma história: uma professora bate palmas a um investigador que fala sobre educação. Nada como há alguns anos, quando os professores viam os investigadores como «aqueles que só falam atrás de uma secretária.» Poderá dar-se o caso de a lacuna entre teoria e prática ser cada vez menor? Está-se a desenhar *o ponto de encontro*.

Para encerrar o primeiro dia, três revistas em diálogo (momento muito importante): *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime*; *Quadrante* e *Journal of Mathematics Teacher Education, JMTE*. A tendência para *Open Access* e os fatores de impacto são questões atualmente muito discutidas entre editores. O objetivo das revistas científicas é promover a investigação para influenciar a melhoria educacional e continuar a contribuir para essa investigação. É hora de estabelecer relações, comunicar, fazer ligações porque a cooperação é o que nos vai permitir crescer.

Inevitável lembrar, como estrangeira, o momento cultural onde a música típica portuguesa «Cante Alentejano» coroou um fantástico jantar tradicional.

No dia seguinte, alguns momentos para fazer escolhas de acordo com as preferências pessoais ou de investigação. Por isso, vou tentar ilustrar a variedade de tópicos discutidos no SIEM, em vez de relatar a minha experiência pessoal. Foram propostos dois tipos de modalidades: comunicações e posters. Os posters, este ano, tinham um formato muito parecido com as comunicações, o que permitiu que os autores pudessem ver o trabalho de outros colegas e, ao mesmo tempo, retirou aos participantes a possibilidade de conhecer a totalidade dos posters. Prós e contras da inovação, que sem dúvida devem ser analisados. Quanto às comunicações, houve uma grande variedade de temas para escolher: tecnologias; tecnologias e raciocínio matemático; formação inicial de professores; desenvolvimento profissional; ensino da Matemática; aprendizagem da Matemática, resolução de problemas e programas de Matemática e tarefas no ensino de Matemática. Nestes casos, é relatado o progresso das investigações com o objetivo de gerar um debate que permita aos autores explicar as suas ideias e, se possível, levar uma boa questão para pensar em virtude das boas perguntas colocadas durante a interação.

Encerramos o encontro com a conferência *Lesson Study as... From Professional Development to Research in Math Education*, por Stéphane Clivaz do Lausanne Laboratory Lesson Study, University of Teacher Education, Suíça, que apresentou um tipo de trabalho realizado no Japão para a preparação do professor. Diz-nos que, atualmente, a participação num estudo de aula é importante na avaliação dos professores no Japão. Com uma visão geral, apresentou-nos esta linha de investigação que está a emergir internacionalmente e que, agora em Portugal, começa a ressoar com intensidade (outro momento mais: convidar especialistas em questões em que o país está inovando).

Então encerrava o SIEM, onde vivemos momentos diferentes a considerar: a investigação de vanguarda, projetos colaborativos de intervenção educativa, o diálogo compartilhado entre investigadores e professores, políticas educacionais e novas linhas de investigação para a comunidade portuguesa.

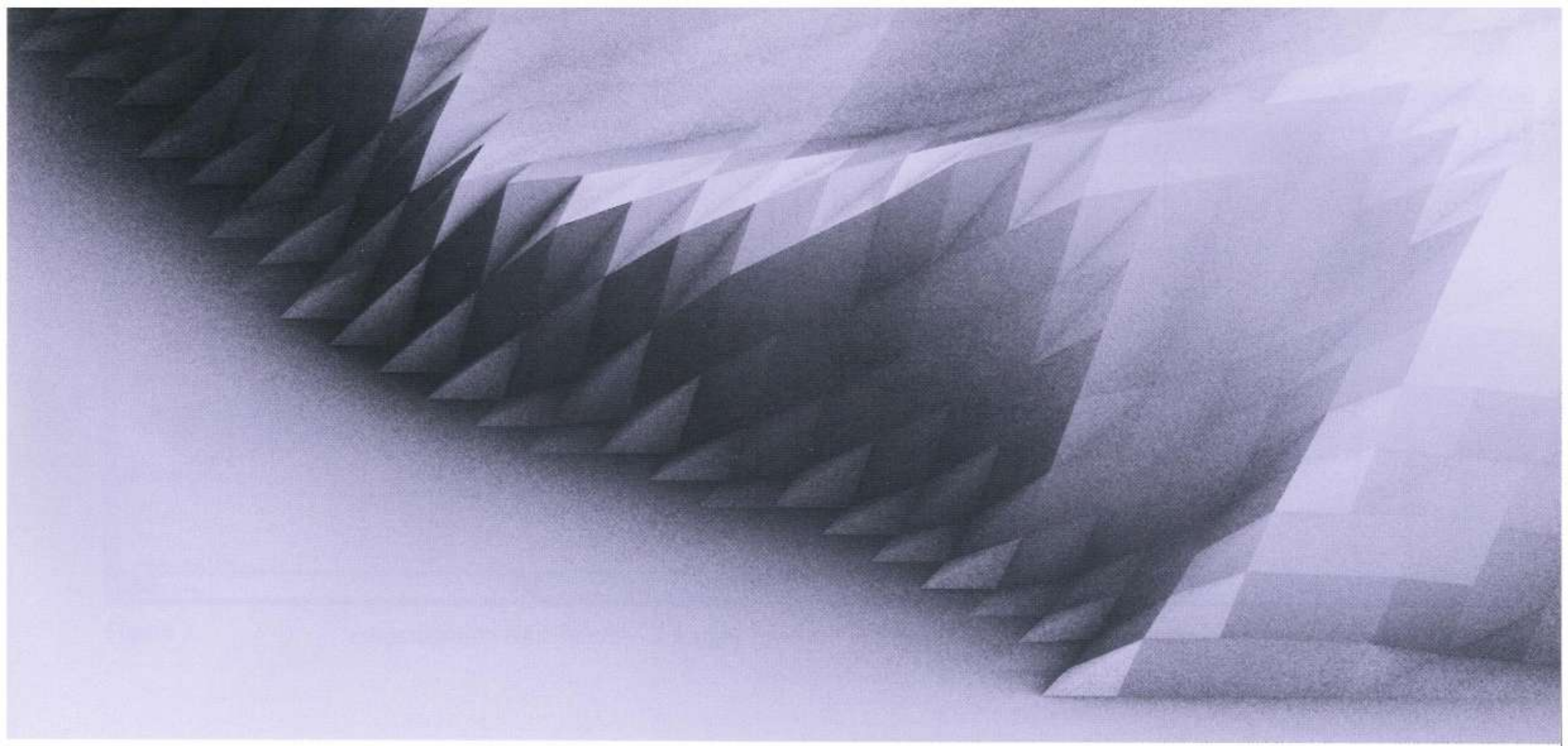
Para concluir, um olhar para o futuro. Embora desde 2011 os eventos ProfMat e SIEM se cruzem num ponto, isto é, compartilham um dia; este ano — apenas a minha primeira experiência — não só eles se cruzaram, mas também se encontraram. Um encontro entre profissionais da educação: professores e investigadores. Hoje podemos dizer que há um ponto de encontro. Cabe-nos agora olhar para o futuro e pensar sobre os lugares onde *o ponto de encontro* é também *um encontro de trabalho conjunto*: ser ouvido e colaborar mutuamente.

Encontro entre professores e investigadores, olhares entrelaçados, olhares que se contradizem e se encontram, olhares que se encontram e se reconhecem, sendo que somos porque compartilhamos um objetivo, somos porque compartilhamos um espaço de encontro. Como a presidente da direção da APM referiu no encerramento: *o todo é mais que a soma de suas partes.*

*Pensar* para si mesmo, *discutir* com o outro e *escrever* — *compartilhar* para todos.

Daniela Reyes-Gasperini
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN, México
«Nos faltan 43»[1]

[1] Os «43», eram estudantes para professores que queriam transformar a educação. Hoje, eles estão desaparecidos. Hoje, eles nos faltam. Para saber mais sobre este assunto, consulte: http://aristeguinoticias.com/tag/ayotzinapa/



# Explorando a Geometria no espaço com o GeoGebra 3D

VALDENI SOLIANI FRANCO
ANA PAULA CANAVARRO

Vivemos num mundo tridimensional, no qual nos situamos e movemos por entre objetos igualmente tridimensionais. No entanto, a nossa perceção deste nosso universo apresenta algumas limitações. De facto, para se poder abarcar visualmente tais objetos, por inteiro, a partir de um ponto de observação fixo, é necessário realizar algum movimento: ou se muda o ponto de vista de quem observa, ou se muda a posição no plano do objeto a ser observado. Quando as representações de um objeto tridimensional são apresentadas no plano (por exemplo, no papel ou no quadro da sala de aula), por meio de perspetivas ou projeções, a perceção visual completa do objeto representado também não é garantida — há que relacionar e transpor representações planas para o espaço tridimensional, tarefa complexa para a maioria das pessoas — incluindo alunos e professores.

O uso de um *software* tridimensional pode ser um grande contributo para minorar esta dificuldade. Ele permite infinitas possibilidades de pontos de observação do mesmo objeto, possibilitando uma melhor perceção visual deste e facilitando a compreensão da sua forma e de algumas suas propriedades. O objetivo principal deste texto, que se foca no Geogebra 3D[1], é apresentar brevemente as suas potencialidades, ilustrando-as com alguns exemplos de tarefas que poderão ser exploradas em sala de aula, com os alunos, no computador.

Inicialmente, mostraremos, para quem nunca utilizou o GeoGebra 3D[2], os primeiros passos para se poderem iniciar as tarefas propostas neste texto. Por uma questão de eficácia, de seguida será feita uma construção a gravar com o nome de *construção básica*, a qual pode ser usada sempre que for necessário iniciar uma nova tarefa.

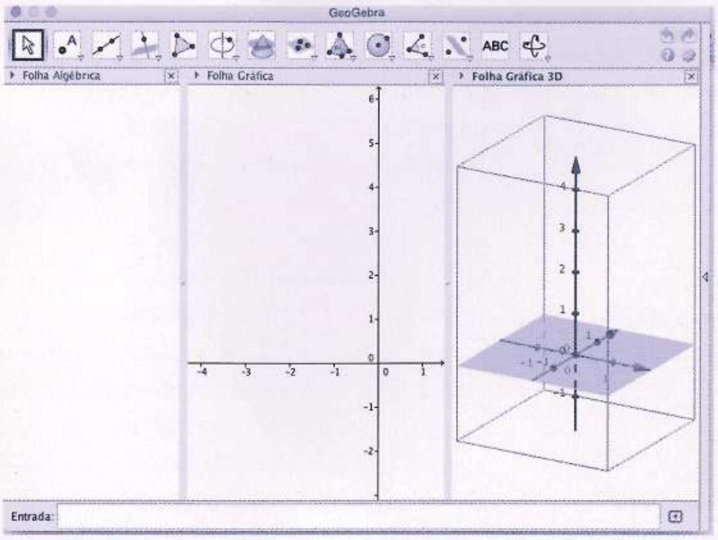



Figura 1.—Écran com a imagem 3D

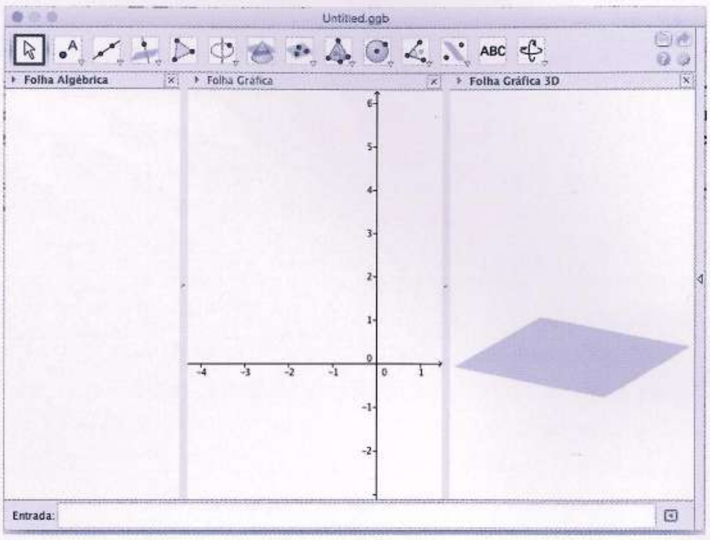



Figura 2.—Écran após configurações

Ao se abrir o GeoGebra, observa-se que a visualização 3D não aparece. Para que isso ocorra é necessário utilizar a ferramenta *Vista* e marcar a *Folha Gráfica 3D*. Após este comando, no écran fica configurado como na figura 1, na qual se observam três espaços discriminados como *Folha Algébrica, Folha Gráfica* e *Folha Gráfica 3D*. Nota-se que o espaço *Folha Gráfica* é constituído pelo *GeoGebra 2D*.

Vejamos então como obter a construção básica. Na ferramenta *Opções*, vá à *Rotulagem* e escolha *Apenas Pontos Novos*. Como o nome diz, os únicos objetos que serão nomeados são os pontos construídos, sendo objetivo que as figuras não fiquem muito sobrecarregadas com os nomes de todos os objetos. Quando for necessário, podem nomear-se outros objetos um a um. Ainda na ferramenta *Opções*, vá agora para *Avançado*, e escolha a ferramenta *Configurações-configurações* com a representação e marque a caixa *Mostrar Ajuda das Ferramentas*. A importância desta marcação é que o próprio *software* indicará, na barra superior, o que é necessário para utilização de qualquer ferramenta selecionada. Ainda em *Avançado*, vá para a ferramenta *Configurações-folha gráfica 3D*, com a representação e desmarque, em eixos, a opção *Mostrar Eixos* (os eixos desaparecerão) e desmarque, em recorte, a opção *Mostrar Recortes»* (o *paralelepípedo* não será mostrado). Deve manter ativa a opção *utilizar recorte*, pois se retirada, algumas figuras poderão não ser tão nítidas. O écran deverá ficar como mostra a figura 2.

É importante destacar que a aparente representação de um plano na cor cinza da figura 2, ainda não se constitui, no *software*, como um plano de facto. Para concluir a *construção básica*, faremos, a seguir, a construção de um plano.

Um dos postulados de Euclides garante que três pontos não colineares determinam um único plano, portanto, marcaremos três pontos com essa propriedade. Podemos fazer isso utilizando a folha gráfica 2D ou a folha gráfica 3D. Utilizando a ferramenta *Novo Ponto* marque três pontos não colineares em uma das duas folhas gráficas. Se utilizar a folha gráfica 2D, os pontos marcados não devem ficar muito longe da origem do sistema de coordenadas, para que esses apareçam na folha gráfica 3D.

Para construir o plano, clique na parte branca da folha gráfica 3D — na barra aparece a ferramenta *Plano (ponto, ponto, ponto)*, com a representação . Selecione esta ferramenta que pode ser utilizada de duas formas: clicando nos três pontos já construídos na folha gráfica 3D, ou nos três pontos presentes na folha algébrica. Alguns computadores só aceitam a segunda opção.

Observe agora a figura 3 que mostra o painel obtido após um clique com o botão direito do rato sobre o plano. Desmarque nele a opção *Plano* e o *software* reconhecerá o plano determinado pelos três pontos não colineares, a que chamaremos de $\pi$. Observe que a folha algébrica já contém a equação do plano construído. Esconda os pontos que o geraram, bastando, para isto, clicar nas marcas circulares atrás das respetivas referências na folha algébrica (as marcas ficam apenas brancas). A construção assim obtida, que mostramos na figura 4, corresponde à *construção básica* e deve ser gravada com esse nome para ser utilizada como ponto de partida nas diversas construções propostas neste artigo.

Outra construção importante é a de um ponto (por exemplo, P) que não esteja contido no plano $\pi$. Existem duas pos-


Figura 3.

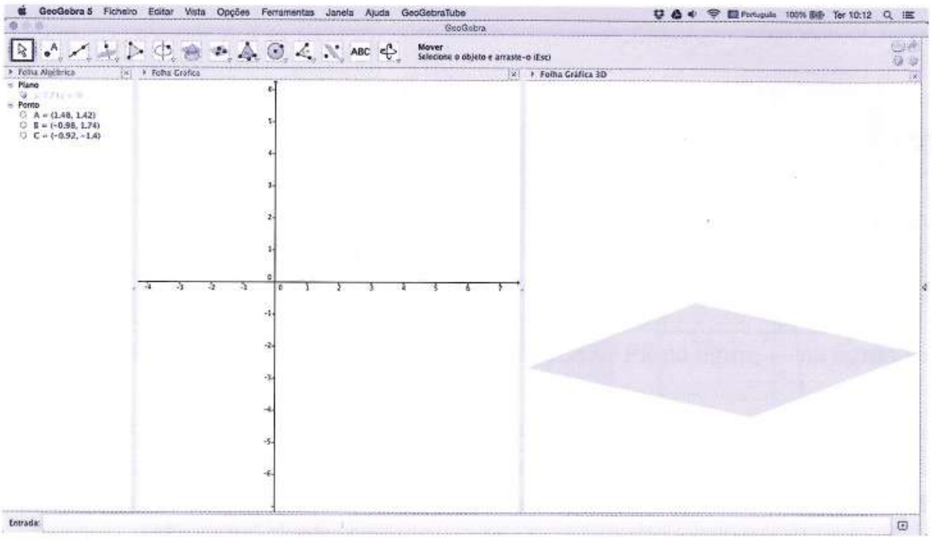



Figura 4.—Construção básica concluída

sibilidades: marcar o ponto P na folha 2D (que apareça na janela 3D) ou na folha 3D diretamente. Na primeira possibilidade, após a construção de P, selecione a ferramenta *Mover* representado por e, em seguida, clique sobre a representação de P na janela 3D. Ocorrem, dois casos, que podem comutar-se clicando no botão esquerdo do rato: setas que movem o ponto P sobre o plano $\pi$ (figura 5) e setas que retiram o ponto P do plano $\pi$, conforme indica a figura 6. Na segunda possibilidade, ao se marcar P diretamente na folha 3D, não aparecem diretamente as setas que retiram o ponto do plano (como na figura 6). Neste caso, deve proceder da seguinte forma: selecione a ferramenta *Ligar/Desligar Ponto*, representada por e, em seguida, clique no ponto P. Selecione depois a ferramenta *Mover* e terá agora acesso aos dois casos atrás referidos (figuras 5 e 6).

Uma possibilidade fundamental que o GeoGebra 3D tem é a de mudar o ponto de vista do observador. Para isso, basta segurar o botão direito do rato na folha gráfica 3D, e movimentá-lo. Outra opção é utilizar a ferramenta *Rodar a Vista 3D*, representado por .

Posto isto, estamos prontos para utilizar o GeoGebra 3D. De seguida propomos algumas tarefas em que se discutem alguns conceitos, resultados e aplicações.

Tarefa 1: *Como determinar a amplitude de um ângulo definido por duas retas não complanares?*

Podem-se construir duas retas *r* e *s* não complanares construindo, por exemplo, dois planos que se intersetam e construir depois duas retas concorrentes com a interseção, mas em pontos distintos — é claro, existem infinitas maneiras de construir tais retas, esta é apenas uma. No GeoGebra 3D, podemos partir da *construção básica*, e construir no plano $\pi$ a reta que será a interseção dos dois planos, usando a ferramenta *Reta (Dois Pontos)*, com a representação . Para se construir o segundo plano, podemos utilizar um ponto que não esteja em $\pi$, marcado como indicado anteriormen-

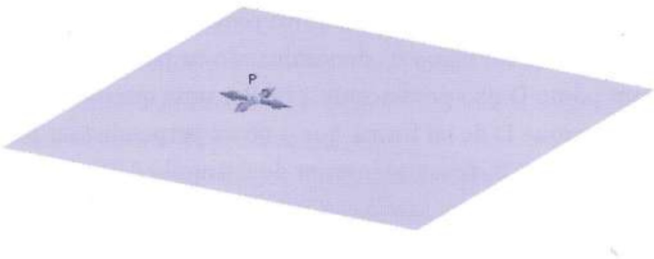



Figura 5.—Movimenta o ponto sobre $\pi$

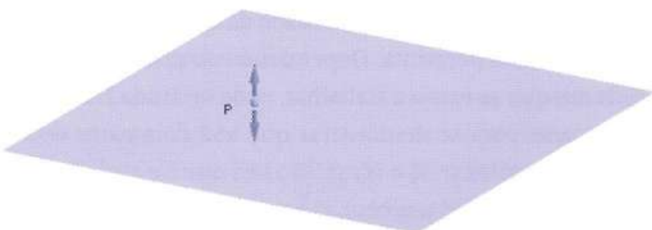



Figura 6.—Retira o ponto do plano $\pi$

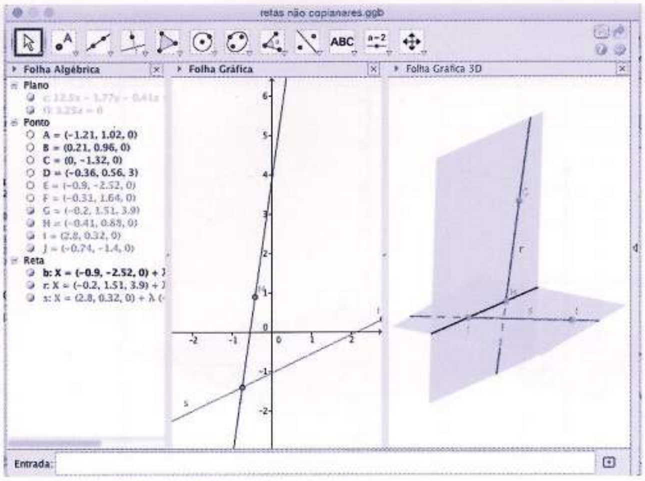



Figura 7.—Retas *r* e *s* não complanares

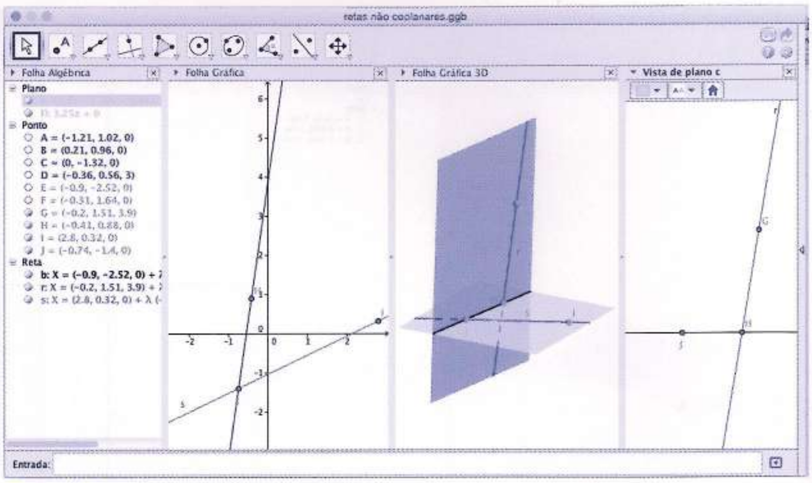



Figura 8.—Écran com a vista do plano que contém a reta *r* e a reta de interseção.

te, e utilizar a ferramenta *Plano*, representado por , escolhendo a reta construída e o ponto fora do plano. Agora basta construir as duas retas r e *s*, nos dois planos anteriores.O resultado pode ser como é visível na figura 7.

Voltaremos ao ângulo entre as retas mais à frente, mas antes mostraremos uma característica importante e bastante útil do GeoGebra 3D, que é podermos ter vistas distintas e específicas de cada um dos dois planos construídos. A figura 7 mostra, na folha gráfica 2D, o plano $\pi$ feito na construção básica. Para exibir o outro plano, clique com o botão direito do rato na equação do plano na folha algébrica e, em seguida, clique em *Criar Vista 2D*. O écran passará a incluir um espaço de *Vista de Plano*, como se observa na figura 8.

Podemos agora determinar a amplitude do ângulo formado por *r* e *s*. Para isso é necessário escolher um ponto arbitrário P em uma das retas, por exemplo, na reta *r*, e considerar por este ponto, uma reta *s'* e paralela à outra, a reta *s*, e o ângulo entre *r* e *s*, é definido como sendo o ângulo entre as duas retas *r* e *s'*. A pergunta natural é: se o ponto P é arbitrário, este ângulo será sempre o mesmo? Aqui, podemos aproveitar o recurso do *software* que permite obter a amplitude do ângulo entre *r* e *s'* (como no GeoGebra 2D) e mover o ponto P arbitrariamente sobre a reta *r*. Pode--se também aproveitar a arbitrariedade da escolha da reta e colocar a mesma pergunta. Dependendo do nível de escolaridade em que se esteja a trabalhar, pode-se ainda fazer uma construção para se demonstrar que «Se dois pares de retas concorrentes (*r*, s) e (*r'*, *s'*), são tais que *r* e *r'* são paralelas entre si, e *s* e *s'* também são paralelas entre si, então o ângulo formado por *r* e *s* é igual ao ângulo formado por *r'* e *s'*.»

Tarefa 2: *A, B, C e D são quatro pontos não complanares. M, N, P, Q, R e S são os pontos médios de AB, BC, AC, AD, BD e CD, respetivamente.*

*a) O que se pode dizer sobre o quadrilátero MNQS? Justifique.*

*b) Existe interseção entre os segmentos MS, NQ e PR? Justifique.*

Esta tarefa pode, naturalmente, ser resolvida sem o auxílio do *GeoGebra 3D*; porém, a utilização deste *software* pode facilitar a elaboração de conjeturas e o seu teste.

O item da alínea a) é um problema recorrente na Geometria Plana: tem-se um quadrilátero arbitrário no plano e pede--se para discutir qual é o quadrilátero formado ao se ligarem os pontos médios consecutivos do quadrilátero inicial. Mas aqui, temos um quadrilátero ABCD no espaço, que é designado por quadrilátero reverso, por não ter os quatro vértices complanares. Que características terá o quadrilátero MNQS?

Para resolver este problema, pode-se utilizar uma representação tridimensional no *GeoGebra 3D*, que será construída de seguida. Abrindo o arquivo *construção básica*, tome três pontos no plano $\pi$, denominando-os por A, B e C, e um ponto D não pertencente a $\pi$. Por uma questão prática, marque D de tal forma que o pé da perpendicular por D, no plano $\pi$, fique no interior do triângulo ABC. Utilize a ferramenta *Ponto Médio ou Centro*, representado por  e encontre os pontos M, N, Q e S, correspondentes aos pontos médios de AB, BC, AD e CD, respetivamente. Utilize a ferramenta *Polígono*, representado por , para construir o quadrilátero MNQS, e conjeturar sobre o que foi solici-

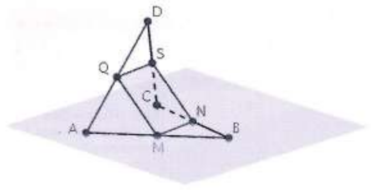



Figura 9.—O quadrilátero MNQS

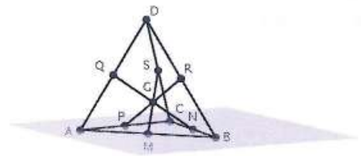



Figura 10.—Os segmentos MS, NQ e PR encontram-se em um único ponto G

tado no item da alínea a, a figura obtida deverá ser semelhante à que está na figura 9.

A partir dessa construção, deixe os alunos a vontade para poderem utilizar as várias possibilidades de estratégias que podem auxiliar a responder à questão. Na realidade, a solução do problema é análoga a do quadrilátero ABCD plano, pois basta observar que o segmento MN é paralelo à AC, tendo como medida a metade da medida de AC, bem como o segmento QS, que possui as mesmas propriedades. Assim, MN e QS são paralelos e congruentes, o que nos demonstra que MNQS é um paralelogramo.

Relativamente ao item da alínea b, sobre a interseção entre os segmentos MS, NQ e PR, pode-se apagar o quadrilátero construído no item da alínea a, e obter de forma análoga às anteriores, os pontos P e R que são os pontos médios de AC e BD, respetivamente.

Note que a princípio, pelo caráter aleatório dos pontos A, B, C e D, o resultado do item da alínea b pode ser surpreendente; porém com o auxílio da resposta do item da alínea a, fica fácil a demonstração do facto que os três segmentos se encontram e num único ponto, conforme pode ser observado na figura 10, já que os segmentos MS, NQ e PR são diagonais de três paralelogramos que possuem sempre lados comuns com um ou com outro. Como as diagonais de um paralelogramo se encontram nos seus respetivos pontos médios, esse ponto será único para as três diagonais possíveis MS, NQ e PR na figura — na figura 10, denominado por G.

Esta tarefa conduz-nos a descoberta de um resultado que, em princípio, será uma surpresa, como outros muitas vezes não esperados mas possíveis de obter por meio do *software*. E pode ser ampliada, pois o resultado aplica-se, naturalmente, a um tetraedro qualquer.

Tarefa 3: *Na figura 11, a reta é paralela ao plano?*

O professor faz antecipadamente a construção que se sugere na figura 11, a ser mostrada aos alunos no início da exploração da tarefa 3, sendo importante que a reta faça com o plano um ângulo muito pequeno, praticamente impercetível. Com a apresentação desta figura à turma fica pronto para lançar o desafio.

O objetivo aqui é que os alunos compreendam que as representações não mostram necessariamente a realidade e que é necessário utilizar conceitos e resultados para se confirmar o que se deseja demonstrar. Neste caso, basta, na primeira construção, (figura 11) considerar um ponto qualquer no plano e construir, por esse ponto, uma reta paralela à reta dada, verificando-se que esta nova reta interseta o plano. Aqui estamos utilizando o seguinte resultado: «Um plano $\alpha$ e uma reta $r$ não contida em $\alpha$ são paralelos se, e somente se, existe uma reta $s$ paralela a $r$ e contida em $\alpha$». Posteriormente, pode-se também girar a construção para

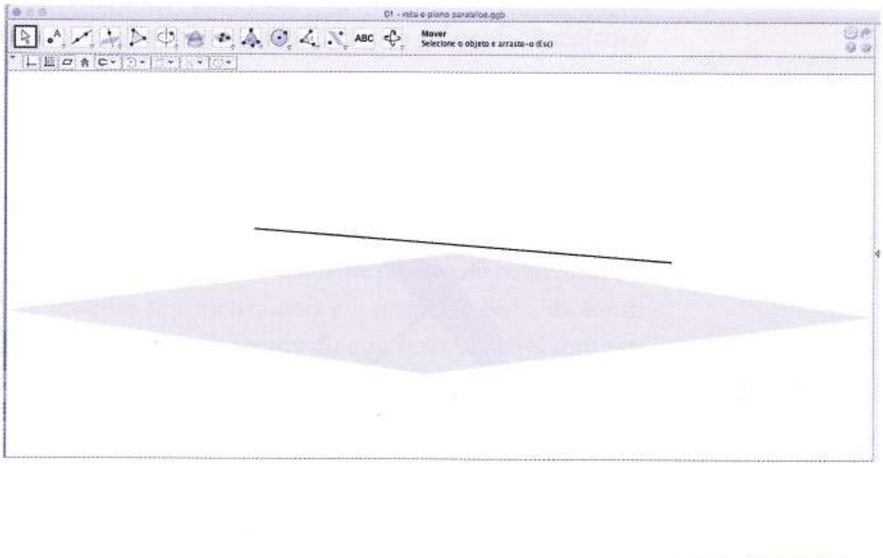
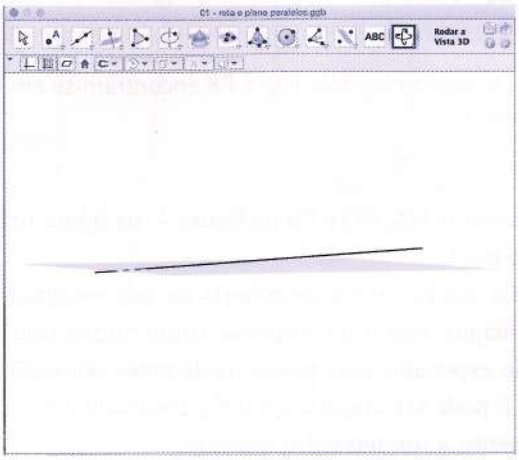



Figura 11.—Construção a apresentar no início da tarefa 3

Figura 12.—Construção anterior visualizando-se a interseção da reta com o plano



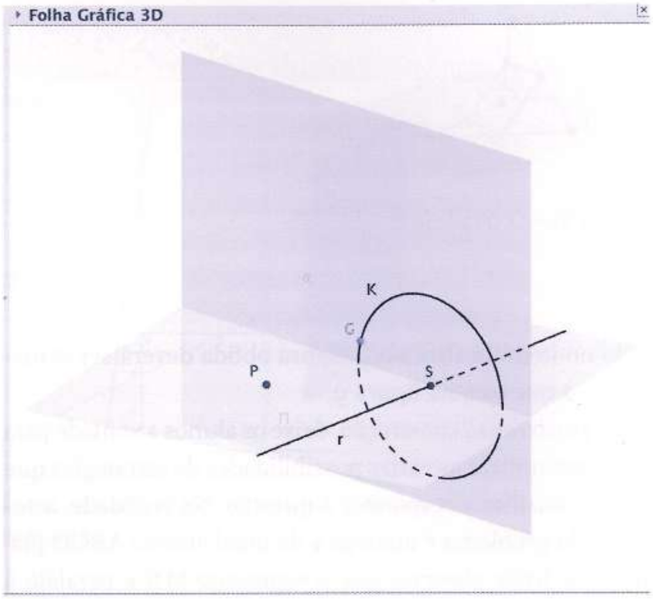



Figura 13.—Construções iniciais para a resolução da tarefa 4

permitir a sua visualização em diversas perspetivas, e diminuir as dimensões da construção (com o rato, basta rodar o *Scroll*, da sua parte central), de modo a que a interseção da reta com o plano fique visível, conforme se observa na figura 12.

**Tarefa 4**: Seja *r* uma reta do espaço e P um ponto que não pertence *r*. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares por P, aos planos que contêm *r*?

Esta é uma tarefa em que é muito grande a dificuldade de visualização. Neste caso, o GeoGebra 3D poderá contribuir significativamente para resolver o problema, por meio de uma construção que será descrita a seguir.

Construa uma reta *r* e um ponto P que não pertença à reta. Construa também, utilizando a ferramenta *Plano Perpendicular*, representado por , um plano $\alpha$ perpendicular à reta *r* (evite que este plano passe pelo ponto P). Construa a interseção S, de $\alpha$ com *r*, por meio da ferramenta *Interseção de dois Objetos*, representada por , caso esta ainda não apareça na sua construção. Utilize a folha gráfica 2D do plano $\alpha$ para construir uma circunferência K, com centro em S e raio arbitrário, mas que possa ser visualizada na folha gráfica 3D. Marque um ponto arbitrário G em K (cuidado, não utilize o ponto que foi utilizado para construção de K). Até aqui, a figura deve estar parecida com a figura 13.

Esconda os objetos de tal forma que na construção só fiquem visíveis os ponto P e G, e a reta *r*. Feche a janela do plano $\alpha$. Utilize a ferramenta *Plano* para construir o plano $\beta$ que passa pelo ponto G e pela reta *r*. Mude, se necessário, a visualização para que a folha 3D apresente uma figura parecida com a figura 14. Movimente o ponto G sobre K — alguns computadores permitem esse movimento diretamente na janela 3D, outros permitem este movimento apenas na janela 2D. No último caso, abra novamente a janela 2D do plano $\alpha$ e realize o movimento do ponto G. O que se observa na folha gráfica 3D? Esta construção permite a visualização de todos os planos que passam pela reta *r*.

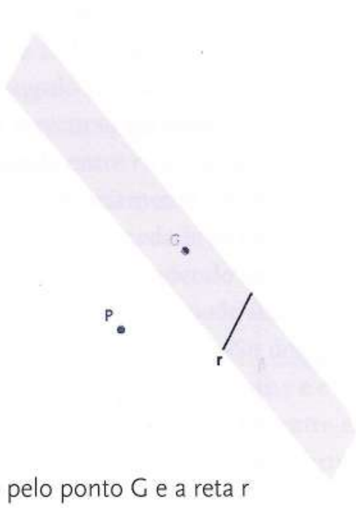



Figura 14.—Plano pelo ponto G e a reta r

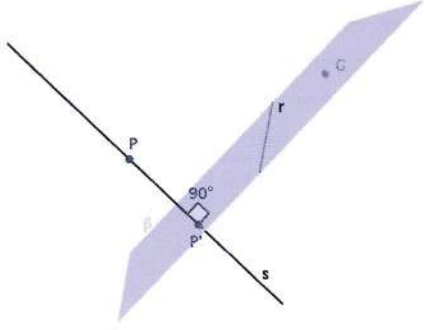



Figura 15.—P' é o pé da perpendicular a $\beta$ pelo ponto P

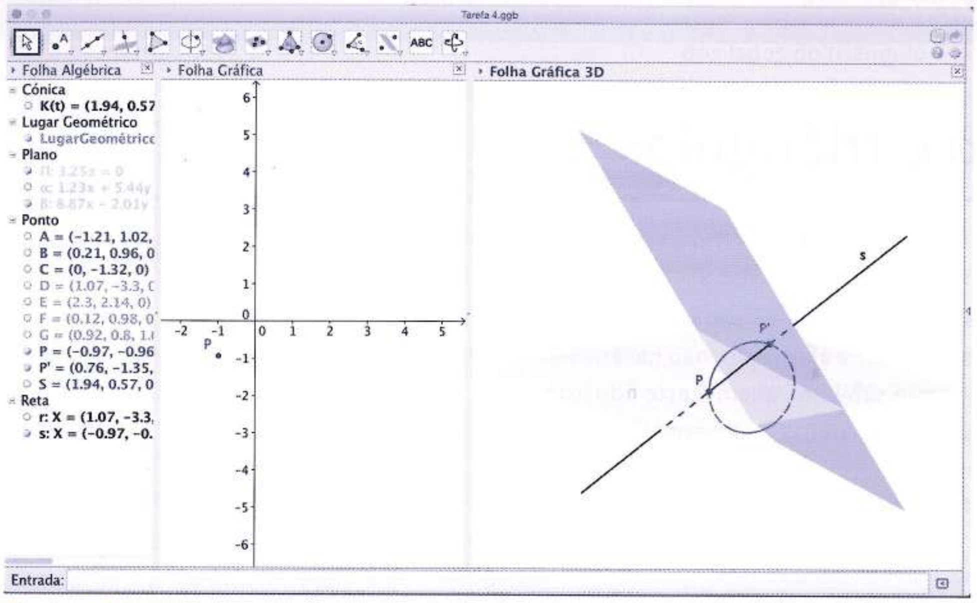



**Figura 16.**—Solução da tarefa 4

O próximo passo é construir a reta s, que passa por P e é perpendicular ao plano $\beta$, utilizando a ferramenta *Reta Perpendicular* representado por . Utilizando a ferramenta *Interseção de dois Objetos*, encontre a interseção P′, de $\beta$ com a reta *s*, ou seja, o pé da perpendicular pelo ponto P, no plano $\beta$ representado na figura 15.

Para concluir, escolha a ferramenta *Lugar Geométrico*, representada por , clicando em seguida no ponto P′ e no ponto G. A resposta é a solução da tarefa, pois o que o GeoGebra construiu foi o lugar geométrico de todos pés das perpendiculares pelo ponto G, que se obtém quando G percorre toda a circunferência K. Pela construção, quando G percorre K, obtemos todos os planos que passam pela reta *r*. Veja a solução na figura 16.

## A concluir

Apresentamos algumas tarefas em que as potencialidades do Geogebra 3D se evidenciam. Nesta síntese final, queremos sublinhar o poder que este *software* tem enquanto ferramenta de representação de objetos tridimensionais e da possibilidade de perceção visual segundo diferentes pontos de observação. Ao permitir diretamente a construção e a movimentação de objetos tridimensionais, contribui para a sua visualização por parte de qualquer utilizador. Esta vantagem facilita o estabelecimento de conjeturas sobre relações tridimensionais e o respetivo teste, de forma muito mais eficaz e segura do que seria possível sem esta ferramenta. No entanto, o Geogebra 3D proporciona igualmente oportunidade de dar valor ao conhecimento matemático abstrato, nomeadamente quando este é o recurso adequado para avaliar conjeturas aparentemente verdadeiras e nos permite concluir se são ou não válidas. Assim, o Geogebra 3D amplia para o espaço tridimensional importantes potencialidades na abordagem da Geometria com os alunos, apoiando a construção de conceitos geométricos, a compreensão de resultados ou demonstrações, bem como a resolução de problemas geométricos, contextualizados ou não. Aqui fica o incentivo à sua exploração em sala de aula e à partilha dessas experiências.

### Notas

1 A versão do GeoGebra utilizado neste texto foi a 5.0.82.0-3D de 30 de março de 2015 (idioma português de Portugal).

2 O texto está escrito para quem tem algum conhecimento sobre o GeoGebra 2D.


### Agradecimento

Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — CAPES, à possibilidade da parceria dos autores deste artigo.



Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

# Paralelogramo e triângulos

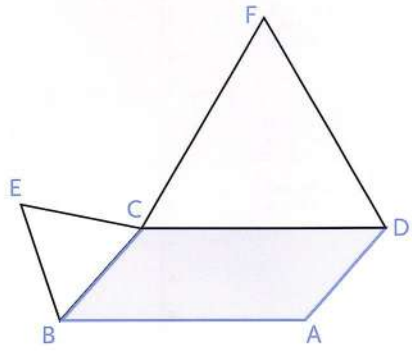
A partir do paralelogramo ABCD, construíram-se, para o seu exterior, os triângulos equiláteros BCE e CDF.

O Eduardo garante que as distâncias AE, AF e EF são iguais. Terá razão?

Nota: Se fosse o Eduardo Veloso a fazer a afirmação, não haveria dúvidas, era garantido. Mas a questão é que não sabemos quem é este Eduardo...

Prolongamento: E se os triângulos equiláteros forem construídos na direção do interior do paralelogramo??

*(Respostas até 15 de outubro para zepaulo46@gmail.com)*




## UM CUBO E MUITOS TRIÂNGULOS

O problema proposto no número 131 de Educação e Matemática foi o seguinte:

*Quantos triângulos retângulos se podem obter escolhendo três vértices de um cubo?*

*Pergunta adicional: Se escolhermos ao acaso três vértices de um cubo, qual é a probabilidade de eles formarem um triângulo retângulo?*

Recebemos 10 respostas, enviadas por Alexandre Azevedo (Guimarães), Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva e Diogo Santos (Amadora), Mário Roque (Guimarães), Pedro Resende (Ovar), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e de um grupo de quatro professores de Paião: Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

Os métodos de contagem de triângulos variaram.

O grupo de Paião e o Pedro Resende dividiram os possíveis triângulos retângulos em dois tipos.

Tipo 1 — Triângulos pertencentes a uma face do cubo

Em cada uma das faces do cubo, podem obter-se 4 triângulos, todos retângulos (como se ilustra na figura 1).

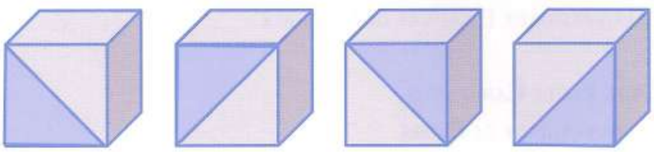


**Figura 1**

Logo, nas 6 faces do cubo podem obter-se 24 triângulos retângulos.

Tipo 2 — Triângulos com um lado coincidente com uma diagonal espacial do cubo

A partir de cada uma das diagonais espaciais do cubo, podem contar-se 6 triângulos, todos retângulos (como se mostra na figura 2).

Assim, a partir das 4 diagonais espaciais, podem obter-se 24 triângulos retângulos.

Pelo que, no total, podem obter-se 48 triângulos retângulos.

O Carlos Dias e a Graça consideraram três categorias de triângulos, consoante se verifique uma das seguintes condições (mutuamente exclusivas):

a) Os 3 vértices pertencem à mesma face do cubo (triângulos isósceles)
b) Uma (e só uma) aresta do cubo é também aresta do triângulo (triângulos escalenos)
c) Todos os 3 vértices pertencem a arestas diferentes (triângulos equiláteros)

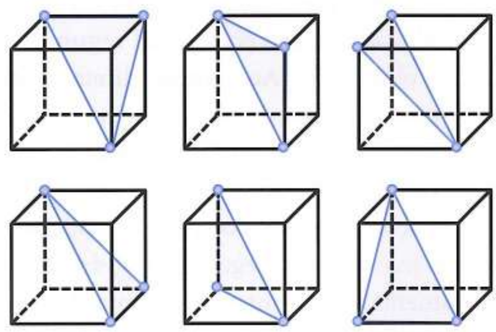


**Figura 2**

Nas categorias a) e b), cada uma tem 24 triângulos, todos eles retângulos.

Na categoria c) há oito triângulos que, obviamente, não são retângulos.

Já o Hugo e o Diogo seguiram esta via:

Ao escolher 3 vértices de um cubo, o triângulo será retângulo se as arestas do triângulo coincidirem em uma ou duas com as arestas do cubo. Definam-se os seguintes dois casos:

Caso A: o triângulo e o cubo têm uma aresta em comum.

Caso B: o triângulo e o cubo têm duas arestas em comum.

Há ainda um Caso C (o triângulo e o cubo não têm nenhuma aresta em comum) mas os 8 triângulos obtidos são equiláteros e portanto não podem ser retângulos.

Já o Mário avançou assim:

Uma primeira constatação: se dois dos vértices escolhidos pertencerem a uma mesma aresta [AB] do cubo, o triângulo em causa será necessariamente retângulo.

De facto, os «outros» seis vértices do cubo pertencerão então a faces perpendiculares a essa aresta, três numa face que contém o ponto A e os outros três numa face que contém o ponto B.

Como sabemos que uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas contidas nesse plano, escolhendo um «desses» seis vértices para «juntarmos» a A e a B teremos necessariamente um triângulo retângulo (em A ou em B).

«Resta-nos» então estudar as situações em que nenhum dos lados do triângulo é uma aresta do cubo. Ora isto obriga-nos a escolher 3 diagonais faciais de 3 faces concorrentes num vértice qualquer, formando assim um triângulo equilátero. Temos 8 triângulos (equiláteros) nestas condições, um em "torno" de cada um dos vértices.

A Catarina seguiu uma via ainda mais rápida:

Em cada vértice existem seis triângulos retângulos:

— três deles contendo duas arestas concorrentes nesse vértice e uma diagonal facial,

— outros três contendo uma aresta e a diagonal espacial, concorrentes também nesse vértice.

Como o cubo tem 8 vértices, logo o número de triângulos retângulos é $6 \times 8 = 48$.

O Alexandre, o Francisco e o Pedrosa, em vez de contar os triângulos retângulos, contaram os não retângulos.

**Conclusão:** há 48 triângulos retângulos.

**Pergunta adicional**

O número de casos possíveis são as combinações dos oito vértices, três a três, e os casos favoráveis são, como vimos anteriormente, 48.

$$P(\text{triângulo retângulo}) = \frac{48}{C_3^8} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$

## EIEM 2015, EM BRAGANÇA E EM OUTUBRO

O Encontro de Investigação em Educação Matemática 2015, organizado pela SPIEM, Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, realiza-se nos dias 24 e 25 de outubro de 2015, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, tendo como tema as Representações Matemáticas. Este encontro tem, como principais propósitos, refletir sobre o papel das representações matemáticas no ensino e na aprendizagem da Matemática, partilhar resultados de investigação e perspetivar e promover futuras investigações sobre o tema.

O EIEM 2015 destina-se a todos os investigadores, formadores ou professores que se interessem pela investigação em Educação Matemática e, em particular, sobre as representações matemáticas.

O encontro organiza-se em torno de três grupos de discussão (As representações e o ensino e a aprendizagem dos Números e da Álgebra; As representações e o ensino e a aprendizagem da Geometria; As representações e o ensino e a aprendizagem da Estatística e das Probabilidades) onde serão discutidos e analisados trabalhos de investigação, concluídos ou em curso, apresentados pelos participantes.

O envio do texto integral das propostas de comunicação oral ou de póster deve ser feito até 7 de setembro de 2015. Mais informações podem ser obtidas em http://eiem2015.spiem.pt, sítio virtual do EIEM 2015.

Esperamos por todos em Bragança e em outubro . . .

**A Comissão Organizadora do EIEM 2015**

# O grande Califa e os poderes mágicos da matemática

Sílvia Zuzarte

«Há algumas centenas de anos...» assim começa a história que inspirou este artigo.

Era verão e eu vasculhava os meus livros de problemas quando me deparei com esta história no livro «Mais Matemáticas Assassinas». A situação era a seguinte: um Califa de um país longínquo tinha 59 filhos cada um no seu quarto e tinha mais um quarto onde albergava um monstro. Ao longo dos anos belas raparigas tentaram, em vão, desposar os filhos do Califa. As jovens tinham de escolher um quarto selecionando números de um quadrado com estes dispostos «aleatoriamente». Acontece que o número que saía às jovens era sempre o do quarto do monstro e lá iam as jovens para a sua barriga, ficando o Califa mais rico com o dote oferecido.

Mas como entra aqui a matemática?

Vamos fazer a experiência a que as belas raparigas se sujeitaram, agora sem o monstro, o que é muito melhor!

Observemos o quadro 1.

**Quadro 1.**—Exemplificação do truque

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 4 | 6 | 3 |
| 4 | 7 | 6 | 8 | 5 |
| 0 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 8 | 11 | 10 | 12 | 9 |
| 10 | 13 | 12 | 14 | 11 |

Circunde um número qualquer do quadrado ao lado e elimine os restantes números da mesma linha e da mesma coluna, como no exemplo abaixo (mas escolha um número à sua vontade).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | ~~4~~ | 6 | 3 |
| 4 | 7 | ~~6~~ | 8 | 5 |
| ~~0~~ | ~~3~~ | 2 | ~~4~~ | ~~1~~ |
| 8 | 11 | ~~10~~ | 12 | 9 |
| 10 | 13 | ~~12~~ | 14 | 11 |

Circunde outro número não eliminado e elimine os restantes números da mesma linha e da mesma coluna.

- Repita o processo até que reste apenas um número.
- Circunde o número que resta.
- Por fim, adicione todos os números circundados.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 19 | | | |
| 3 | 0 | 1 | 4 | 2 |
| | 13 | | | |
| | 7 | | | |
| | 11 | | | |

Quadro 2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 19 | 20 | 23 | 21 |
| 3 | 0 | 1 | 4 | 2 |
| 16 | 13 | 14 | 17 | 15 |
| 10 | 7 | 8 | 11 | 9 |
| 14 | 11 | 12 | 15 | 13 |

Quadro 3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a+4$ | $a$ | $a+1$ | $a+3$ | $a+2$ |
| 4 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| $b+4$ | $b$ | $b+1$ | $b+3$ | $b+2$ |
| $c+4$ | $c$ | $c+1$ | $c+3$ | $c+2$ |
| $d+4$ | $d$ | $d+1$ | $d+3$ | $d+2$ |

Quadro 4

Obteve o número 34, não é o número que as donzelas obtinham. Será que só conseguimos construir quadrados para obter o número 34?

## O segredo

Vejamos como se constrói o quadrado. Por exemplo, se quisermos obter o número 60:

- Começamos por colocar numa linha qualquer os algarismos de 0 a 4 pela ordem que quisermos (quadro 2).
- Na coluna que tem o zero colocamos números, os que quisermos, com a condição da sua soma ser, neste caso, 50, ou seja, inferior em dez unidades ao número que pretendemos obter no final do truque, 60.
- Agora só temos que colocar os números consecutivos, obedecendo à mesma ordem com que estão colocados os algarismos da linha inicial. (Ver quadro 3.)

Se adicionarmos os números da coluna do zero obteremos o número 50, o que significa que após a experiência obteremos o número 60. Experimente!

Percebido? Já poderá fazer um brilharete! É só pôr a sua imaginação a funcionar e inventar uns truques mágicos com este quadro.

Pois bem! Porque será que isto funciona? Afinal temos a liberdade de escolher uma linha qualquer, colocar os algarismos de 0 a 4 pela ordem que quisermos e podemos obter o número que quisermos. Mas o que somos obrigados a fazer? Temos de ter uma linha com algarismos de 0 a 4; a soma dos números da coluna do zero com dez tem de dar o número que pretendemos obter no final do truque; os números nas linhas são consecutivos e estão ordenados respeitando a linha inicial e a partir da coluna inicial. Se ainda não descobriu porque funciona experimente agora antes de continuar a ler!

## O porquê

Então vou pedir ajuda à Algebra para explicar por que o truque funciona.

Chamemos $x$ ao número que é obtido com a adição dos números selecionados. Observemos o quadro 4 (explicação do truque).

O quadrado é preenchido de modo a que

- $a+b+c+d+10=x$
- $a$, $b$, $c$ e d estão na coluna do zero
- A linha do zero tem os algarismos de 0 a 4
- Os restantes números são consecutivos e estão ordenados respeitando a ordem da linha inicial
- No final fica selecionado apenas um número em cada linha e em cada coluna

Portanto, qualquer que sejam os números selecionados obteremos sempre

$$a+b+c+d+1+2+3+4=a+b+c+d+10$$

Claro que este truque funciona para qualquer quadrado $n \times n$ com $n \geq 2$.

Experimente! Pense como poderá usar este truque com os seus alunos!

**Referências**

Poskitt , Kjartan (2003). *Mais Matemáticas Assassinas*. Publicações Europa América.

Sílvia Zuzarte
Agrupamento de Escolas de Casquilhos

# A classe dos paralelogramos

O episódio que apresento foi o último de uma discussão coletiva realizada numa turma de 3.º ano. Ele ocorreu como culminar de um trabalho sobre a construção de quadrados e retângulos em que, na fase de discussão, foram sendo introduzidos paralelogramos não retângulos e losangos não quadrados. Os paralelogramos não retângulos foram construídos pelos alunos como exemplares de retângulos e os losangos foram introduzidos pela professora como contraexemplos de quadrados.

Alguns alunos, ao verem alguns paralelogramos como retângulos estavam a valorizar os pares de lados paralelos. É uma ideia forte e boa que ajuda a construir os paralelogramos como classe inclusiva para os retângulos. Estes quadriláteros são uma subclasse. Podemos dizer que os retângulos são paralelogramos com os quatro ângulos retos ou com os ângulos todos iguais.

A professora fez aparecer o losango para introduzir a necessidade de destacar os lados e encarar a relação entre a classe dos quadrados e a dos retângulos. A intenção da professora era fazer evidenciar a classe dos quadrados como uma classe muito especial que resulta da interseção de duas classes (Fig. 1).

O objetivo principal das tarefas realizadas até este momento era a compreensão de que os quadrados são simultaneamente retângulos especiais e losangos especiais. É importante notar que a ideia de classe ainda está a ser construída por estes alunos. O conceito de classe de figuras geométricas é bastante abstrato. Os alunos constroem e analisam exemplares de uma classe e só progressivamente os começam a ver como representantes de uma entidade abstrata, uma classe.

O desenrolar da discussão tinha deixado ficar expostos no quadro também os paralelogramos que não eram retângulos (Imagem 1 e Fig. 2). Esta exposição de figuras levou um aluno a intervir e dizer «São todos paralelogramos». Este aluno leva-nos a pensar que para ele a relação entre estas classes de quadriláteros (Fig. 3) já estava bem clara. Este aluno está a construir naturalmente a ideia da classe dos paralelogramos como inclusiva para as subclasses particulares dos retângulos e dos losangos. E por sua vez, com a inclusão especial da classe mais fina dos quadrados.

O caminho de construção da classe dos paralelogramos que aqui foi percorrido é distinto daquele que com maior frequência se apresenta aos alunos. É um caminho do particular para o geral. Vai-se consolidando a classe mais restrita e através da introdução de contraexemplos para esta classe constrói-se uma nova classe mais ampla. O que se evidencia aqui é que os paralelogramos que são quase retângulos ajudam-nos bastante a destacar a existência de dois pares de lados paralelos como uma propriedade caraterística dos paralelogramos. Foi isso que aconteceu durante esta experiência com os alunos que desenharam paralelogramos convencidos de que eram retângulos (E&M n.º 132).

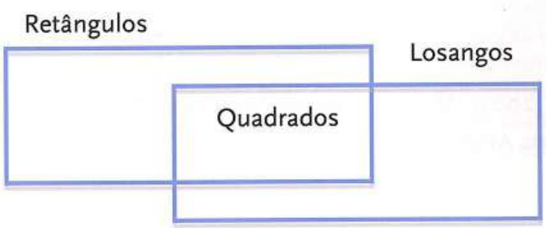



Figura 1

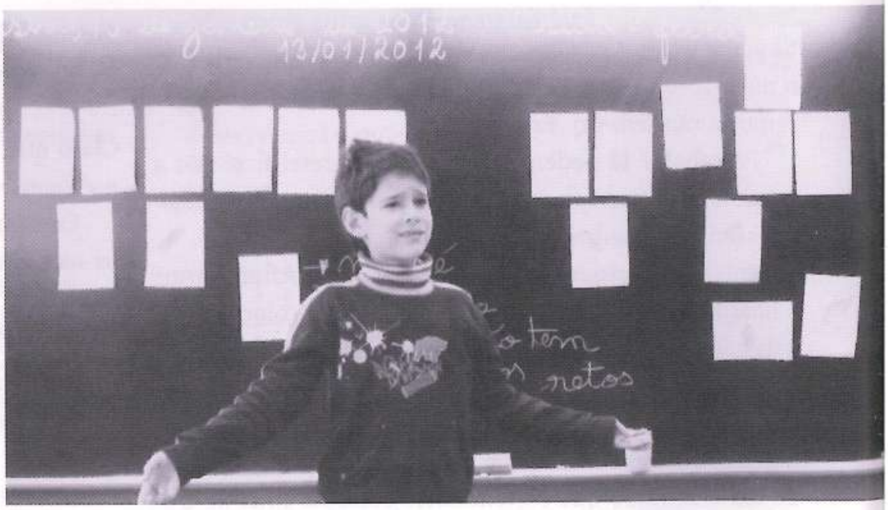


Imagem 1

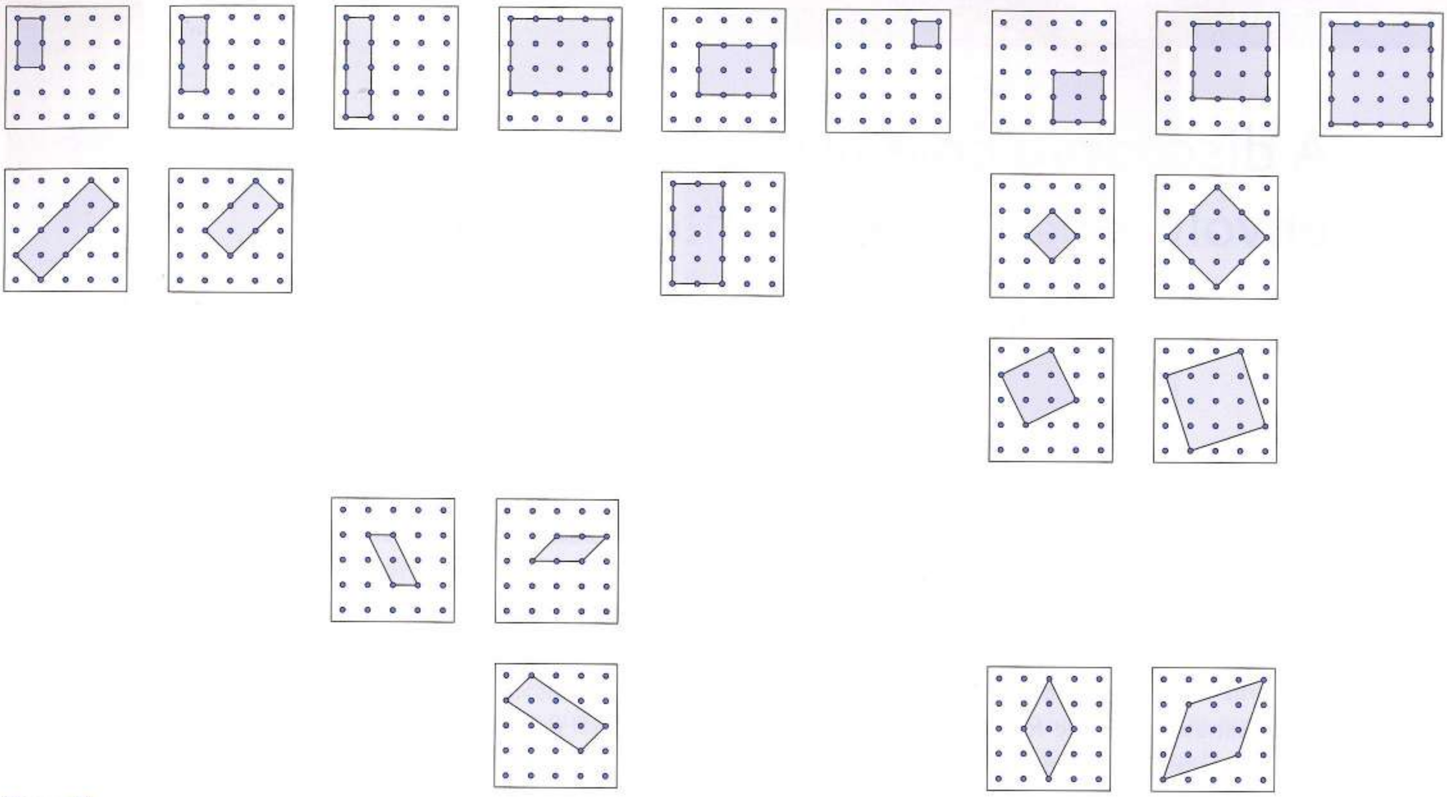


Figura 2

Este episódio inscreve-se na perspetiva de Battista (2008) que evidencia a importância de compreender como pode ser o movimento a partir das estruturações próprias dos alunos para estruturações geométricas formais poderosas. Segundo este investigador, este movimento não exige apenas o refinamento recursivo das estruturações espaciais informais dos alunos, mas também o acesso aos conceitos geométricos apropriados. Acesso que depende de uma estruturação e uma concetualização em níveis apropriados ao seu desenvolvimento e também das interações sociais vividas na sala de aula.

Este episódio está integrado numa experiência que incluiu a realização de várias tarefas com vista à construção progressiva do conceito de classe de quadriláteros e de algumas dessas classes. Ao longo deste trabalho ficou evidente que esta construção é lenta, muito diferenciada entre os alunos e exige a realização de várias tarefas que permitam o desenvolvimento da estruturação espacial e da estruturação geométrica de forma articulada. Numa mesma turma há alunos que já conseguem identificar as componentes de uma figura e relacioná-las, enquanto outros ainda olham para as figuras como um todo, guiando-se pela perceção global da figura. Neste caso ainda terão muitas dificuldades em conseguir compreender as relações entre os seus elementos e por isso não terão acesso à compreensão de uma classe de quadriláteros, por mais simples que ela seja. No entanto, o aluno que olhou para todas as figuras e foi capaz de identificá-las como elementos da classe dos paralelogramos revela já um nível de estruturação geométrica avançado.

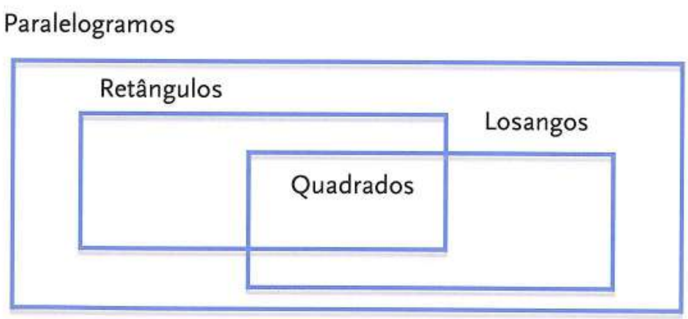



Figura 3

### Referências Bibliográficas

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In Glendon W. Blume & M. Kathleen Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 — Cases and Perspetives*, (pp. 131–156). NCTM & IAP.

# A discussão coletiva na resolução de problemas envolvendo números inteiros

JOANA GALRINHO, NEUSA BRANCO

## INTRODUÇÃO

A resolução de problemas é aqui considerada como uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Para isso torna-se necessário que estes compreendam que um problema matemático pode ser resolvido através de diferentes estratégias e que foquem a sua atenção na análise da sua resolução e apreciação dos resultados que obtêm (ME, 2007).

É privilegiada a abordagem de ensino exploratório da Matemática (Ponte, 2005), sendo contemplados os momentos de introdução da tarefa, da sua realização e da sua discussão com sistematização das ideias matemáticas. Nesta abordagem a escolha da tarefa é essencial de modo a possibilitar que «os alunos aprendam a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem de ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva» (Canavarro, 2011, p. 11). O momento de partilha e discussão de resoluções é também muito importante, sendo profícuo para a aprendizagem de novas estratégias e de novos conhecimentos matemáticos. O professor deve assumir um papel ativo neste momento, ajudando os alunos a justificar as suas ideias matemáticas, a analisar criticamente diversas estratégias e a confrontá-las com a sua, tendo possibilidade de aprender modos de resolução diferentes dos seus que podem utilizar em situações futuras (NCTM, 2007). A condução deste momento é essencial para a promoção das aprendizagens pelo que o professor deve considerar as cinco práticas para orquestração das discussões matemáticas referidas por Stein, Engle, Smith & Hughes (2008): antecipação, monitorização, seleção, ordenação e estabelecimento de conexões.

A situação de ensino-aprendizagem que apresentamos acontece numa turma de 6.° ano, em Matemática, no 3.° período e decorre de um estudo que visa identificar o contributo da resolução de problemas para a aprendizagem matemática dos alunos, no âmbito de uma abordagem de ensino exploratório. Aqui centramo-nos no momento de discussão da tarefa «O ascensorista», que visa iniciar o trabalho com operações com números inteiros:

O senhor Alberto é ascensorista num hotel e começou o seu dia de trabalho no piso –1. Os primeiros hóspedes pediram-lhe para os levar para três pisos acima. Neste piso, entraram mais hóspedes que subiram outros três pisos. Aqui, apanhou um casal de namorados que desceu oito pisos. No final do dia, para se desfardar, o senhor Alberto teve que subir quatro pisos e, por último para ir para casa teve que descer dois pisos. No final do dia o senhor Alberto estava no mesmo piso onde começou o dia pela manhã?

## A DISCUSSÃO COLETIVA

Após a apresentação da tarefa pela professora os alunos resolvem-na a pares. Durante esse trabalho autónomo dos alunos a professora monitoriza as suas resoluções, o que permite identificar estratégias e representações diferentes na turma. Decorrente essa monitorização, para a discussão seleciona quatro resoluções, tendo em conta a análise que os alunos fazem do problema, passo a passo ou global, e as representações que usam. Dessas são aqui apresentadas as três que mais se distinguem.

Em primeiro lugar apresentam a sua resolução os alunos A e B que fazem uma análise passo a passo (figura 1) e usam um esquema. Este par não explicita as operações, pois apoia-se no esquema para obter os resultados inter-

**Sim, o Senhor Alberto quando começou o seu trabalho estava no piso –1. Depois os hóspedes subiram 3 pisos. Foram parar ao piso 2. De seguida os hóspedes subiram os 3 pisos que foi parar no piso 5, depois um casal de namorados desceu 8 pisos que foi parar no piso –2. Para desfardar-se o Alberto teve de subir 2 pisos que foi dar ao piso 1. Por fim, desceu dois pisos que foi parar ao piso –1. Portanto o Senhor Alberto para no mesmo piso onde começa.**

Figura 1.— Descrição realizada pelos alunos A e B.


**Figura 2.**— Registo no quadro dos alunos A e B.

médios dos pisos, tal como a maioria dos pares da turma. Na sua resposta fazem ainda uma descrição dos movimentos realizados pelo elevador e dos pisos em que esteve o ascensorista ao longo do dia. No seu esquema, tal como registam no quadro (figura 2), apresentam os pisos ordenados na vertical e têm assinalados os pisos em que o ascensorista fica após cada movimento.

Durante a sua apresentação existem momentos de interação entre a professora e os alunos e entre os alunos. Essa discussão possibilita a clarificação de resultados intermédios obtidos, nomeadamente do resultado obtido quando a partir do piso 5 desce 8 pisos. Os alunos realizam a contagem da descida de oito pisos no seu esquema e a professora salienta que esse valor representa a distância entre os dois valores, 5 e −3.

*Aluno A:* Depois subiu três pisos e parou no 2. Depois subiu outros 3 pisos e foi para o 5 e depois desceu 8 pisos e foi para o −3.

*Professora:* Desceu 8 pisos desde onde?

*Aluno A:* Do 5.

*Professora:* O que é que isso quer dizer? Disseste que ele estava no piso 5, desceu 8 e foi parar ao −3. O que é que representa aquele 8?

*Aluno X:* Os pisos que ele desceu.

*Aluno Z:* O mais alto e o mais baixo que ele foi.

*Aluno Y:* Extremos.

*Professora:* Também, mas não é só isso. Ele estava no quinto piso e desceu quantos?

*Turma:* 8.

*Professora:* E ficou no...?

*Turma:* −3?

*Professora:* Então quantos pisos são desde o 5 ao −3?

*Turma:* 8.

*Professora:* Qual é a distância do 5 ao −3?

*Turma:* 8.

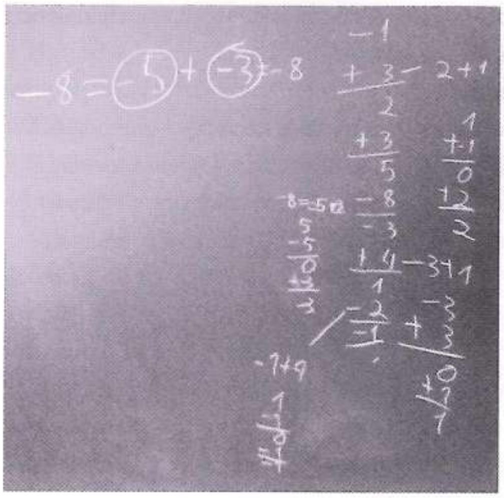


**Figura 3.**— Registo no quadro dos alunos E e F.

Posteriormente, é discutida a resolução dos alunos E e F que fazem igualmente uma análise do problema passo a passo mas utilizam uma representação simbólica (figura 3). É uma estratégia complexa e promove a introdução das operações com números inteiros como é objetivo da tarefa, pelo que este momento da discussão é mais longo.

O par apresenta o modo como procedeu e a sua resolução permite uma primeira abordagem às operações com números inteiros. A professora intervém para que expliquem de modo detalhado como obtiveram os resultados e para garantir que a turma acompanha e é crítica perante esta resolução. Assim, a discussão centra-se no modo como resolvem as operações, sem que qualquer indicação lhes tenha sido dada sobre como proceder. Os alunos já sabem o que são números simétricos e usam esse conhecimento para realizar as operações:

*Aluno E:* Eu comecei no piso −1 e depois como subiu é igual à soma. Adicionei o piso inicial e o que ele subiu, deu 2.

*Professora:* Todos concordam?

*Turma:* Sim.

*Professora:* Então −1 + 3 dá 2? Como é que fizeste isso?

*Aluno E:* Porque somando, o três fica 2 + 1. [−1 + 1 + 2] Somei aqui 1 deu 0 e depois mais os 2.

*Professora:* Escreve aí ao lado. O 3 é igual a quê? Decomponham o 3.

*Turma:* 2 + 1.

*Professora:* Explica lá.

*Aluno E:* O 1 + (−1) dá o 0 e depois mais 2 fica 2.

Os alunos centram-se agora na realização da adição algébrica que tem como parcelas um número positivo e um número negativo. Decompõem o número de maior valor absoluto de modo a obter nessa decomposição um valor simétrico ao valor da outra parcela. Assim, decompõem a parcela 3 como $2+1$, sendo o $(+1)$ o simétrico da parcela $(-1)$ e referem que a soma dos simétricos é zero pelo que o resultado da adição inicial é 2. Os restantes alunos da turma, que não usam a adição algébrica, acompanham o processo de cálculo apresentado por este par.

De seguida, explicam como realizam uma nova operação, $5-8$. Uma vez mais recorrem à decomposição da parcela de maior valor absoluto. O aluno E esclarece que decompõem o número $-8$, modelando novamente a situação por meio de uma adição algébrica, de modo a obter um número simétrico de 5, $5+(-8)=5+(-5)+(-3)$, para daí resultar uma soma igual a zero.

*Aluno E:* [Estava no piso 2] E depois subiu mais 3 pisos que é outra vez igual à soma e foi parar ao piso 5. Como depois desceu 8 pisos, decompus também o 8.

*Professora:* Tu dizes que $5-8$ é .$-3$ $5-8$ é $-3$?

*Alguns alunos:* Sim, é.

*Professora:* Porquê?

*Aluno Z:* Se tirarmos primeiro 5 fica no 0 e depois se tirarmos mais 3 fica no $-3$.

*Professora:* Mas ele não fez assim. Tu decompuseste o 8 ou o $-8$?

*Aluno E:* O $-8$ deu $-5+(-3)$. O 5 menos o 5 deu 0.

*Professora:* Porquê?

*Aluno E:* Anulam-se.

Em seguida, o aluno E escreve $0+3=3$. Com base neste erro a professora solicita-lhe que explique novamente como realiza a operação, retomando a decomposição de $(-8)$ onde revela dificuldades na representação simbólica. Para esclarecer a diferença entre fazer a adição de dois números negativos e a subtração de dois números negativos, a professora dá exemplos de duas situações contextualizadas para promover a compreensão dos alunos. Essa discussão envolve toda a *Turma:*

*Aluno E:* O $-8$ é igual a $-5-(-3)$ por isso $5-5$ dá o 0 e o 0 menos o $-3$ dá $-3$.

*Professora:* Todos concordam que $-8$ é $-5-(-3)$? Escreve lá isso. Ele diz que ter $-8$ é o mesmo que ter $-5-(-3)$. Quanto é $-5-(-3)$?

*Aluno A:* É $-2$.

*Professora:* Então como é?

*Aluno A:* É $-5+(-3)$.

*Professora:* Percebeste? Tu disseste que $-8$ é $-5-(-3)$. O que significa o $-$?

*Turma:* É uma subtração.

*Professora:* É uma diferença [a professora escreve no quadro]. Eu devo 5 euros e a professora Ana só deve 3 euros. O que é que isto representa?

*Turma:* Uma diferença.

*Professora:* Então qual é a diferença entre o que eu devo e o que a professora A deve?

*Turma:* 2.

*Professora:* 2 ou $-2$?

*Turma:* É $-2$.

*Professora:* E agora, vocês dizem que $-8$ é $-5+(-3)$, ou seja, no talho eu devo 5 euros e na mercearia eu devo 3. Quanto é que eu devo ao todo?

*Turma:* Devo 8.

*Professora:* Se eu devo...

*Turma:* É $-8$.

*Professora:* Vamos continuar, ele decompôs o $-8$ em $-5+(-3)$.

Após esta discussão o aluno E corrige no quadro a indicação da operação, $0-3=-3$ e continua a explicar as restantes operações. Decompõe, em seguida, o 4 para resolver a operação $-3+4$.

*Aluno E:* Depois, dava $-3$. Por isso, depois como ele subiu mais 4 pisos foi parar ao 1. Porque decompus outra vez, $3+1$.

*Professora:* Anulaste o três sobrou-te...

*Aluno E:* O 1.

*Professora:* E $-3-3$ é igual a 0 [referindo-se ao registo no quadro]. Todos concordam?

*Turma:* Sim.

Perante esse erro $(-3-3=0)$, a professora dá novo exemplo: «Eu devo 3 euros no talho e devo 3 euros na mercearia. Quanto é que eu devo?». Deste modo os alunos conseguem indicar o resultado correto dessa operação. Depois deste momento, o aluno E corrige o erro e continua a explicação da resolução das operações através da decomposição dos números com maior valor absoluto e conclui que no final obtém $-1$, valor que corresponde ao piso em que o ascensorista fica no final do dia, ou seja, o mesmo piso em que começa o dia.

Nesta sua resolução, o par apresenta à turma um modo de realizar adições com números inteiros em que as duas parcelas têm sinais contrários (por exemplo $-1+3$; $5+(-8)$; $-3+2$). A sua estratégia envolve a decomposição dos números de maior valor absoluto de modo a obter uma adição com números simétricos.

Por fim, apresentam a sua resolução os alunos G e H, que também recorrem à representação simbólica mas com uma abordagem global (figura 4).

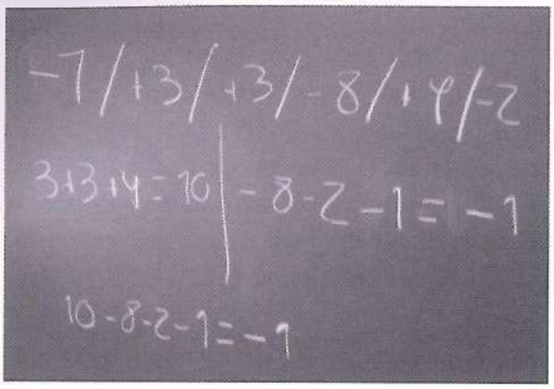



**Figura 4.**— Registo no quadro dos alunos G e H.

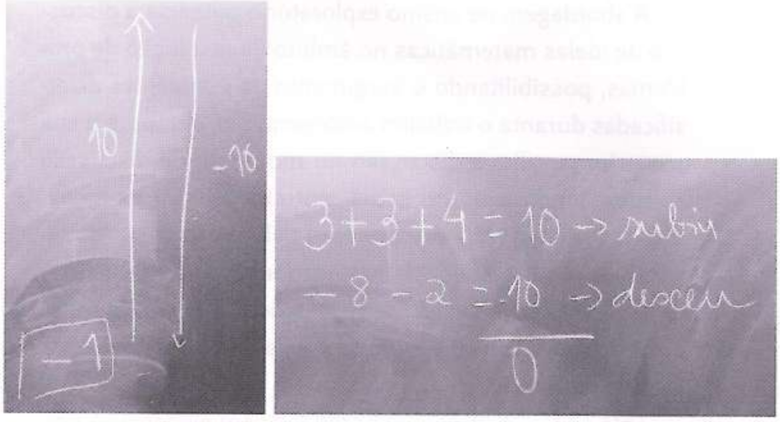



**Figura 5.**— Representações no quadro da análise global.

Este par representa por números positivos as subidas de pisos e por números negativos as descidas de pisos, incluindo a posição em que o ascensorista se encontra inicialmente (–1). Depois disso adicionam todos os números inteiros positivos e ao resultado adicionam todos os negativos. Contudo, fazem a representação de todas as operações erradamente numa única expressão (3+3+4=10–8–2–1=–1). A professora alerta a turma para essa situação e o aluno G escreve uma nova expressão, 10–8–2–1=–1.

Com base nesta análise global do problema a professora discute com a turma um outro modo de representar o total de subidas e o total de descidas de modo a se concluir acerca do piso em que o ascensorista fica no final do dia:

*Professora:* Dúvidas? Quem fez de maneira diferente? O senhor Alberto subiu quantos pisos no total?
*Turma:* 10.
*Professora:* E quantos é que ele desceu no total?
*Turma:* 11.
*Professora:* Quantos? Leiam o enunciado.
*Turma:* Desceu 10.
*Professora:* Como?
*Turma:* Primeiro desceu 8 e depois desceu 2.
*Professora:* Então ele subiu 10 e desceu 10.
*Turma:* Anulam-se.
*Professora:* E vai ficar no mesmo piso.

A professora faz o registo no quadro desta análise do problema (figura 5) em que os alunos concluem mais uma vez que o ascensorista no final fica no piso em que tinha iniciado o seu dia, o piso –1.

Durante essa discussão a professora solicita explicações das resoluções, justificações dos resultados obtidos e das representações utilizadas e estabelece conexões com outros contextos que visam a promoção da compreensão dos números inteiros e das operações. Este é o momento da aula que a professora considera como matematicamente mais significativo, uma vez que a turma se encontra envolvida na discussão de ideias matemáticas que surgem das suas resoluções e que são analisadas por todos, evidenciando relações numéricas e propriedades das operações.

## CONCLUSÃO

A abordagem de ensino exploratória permite que do trabalho autónomo dos alunos surjam diferentes representações e análises que são depois alvo de partilha e discussão. Nesta tarefa de introdução às operações com números inteiros os alunos realizam adições, utilizando esquemas e expressões numéricas. A discussão das várias resoluções permite aos alunos perceber que podem usar várias estratégias válidas para a resolução de um mesmo problema. A maioria dos alunos recorre a uma análise passo a passo do problema e usa um esquema. Outros utilizam uma análise passo a passo representada por expressões numéricas e um par usa uma análise global também com recurso a uma expressão numérica.

A discussão do processo que um par de alunos usa para o cálculo de adições com números inteiros contribui para a clarificação desse processo por parte desses alunos e também para a aprendizagem dos restantes colegas. Toda a turma é envolvida na análise crítica das expressões numéricas apresentadas e para os resultados das operações, tendo por base o seu conhecimento da decomposição dos números e da adição de números simétricos.

A abordagem de ensino exploratório potencia a discussão de ideias matemáticas no âmbito da resolução de problemas, possibilitando o surgimento de estratégias diversificadas durante o trabalho autónomo dos alunos, e a sua posterior partilha e discussão no momento de discussão coletiva, tendo aqui um papel central a seleção e ordenação das resoluções a discutir feita pela professora. A utilização de uma tarefa desta natureza tem o intuito de fazer emergir essa diversidade de resoluções, permitindo introduzir um novo tópico e explorar novas ideias com base nas ideias dos alunos.

Esta situação de ensino-aprendizagem evidencia a pertinência da resolução de problemas na introdução de conceitos e procedimentos, e do ensino exploratório para fazer emergir o conhecimento matemático na sala de aula a partir do trabalho dos alunos que é depois institucionalizado.

### Referências


Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11–17.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação — Direção-geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Stein, M, Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.



**Joana Galrinho**
Instituto Politécnico de Santarém
Escola Superior de Educação

**Neusa Branco**
Instituto Politécnico de Santarém,
Escola Superior de Educação
Unidade de Investigação do Instituto de Educação
Universidade de Lisboa (UIDEF)


# MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

### Um quadrado muito especial!

A tarefa aqui apresentada foi inspirada num texto publicado no livro de matemática recreativa «Mais Matemáticas Assassinas» de Poskitt Kjartan (2003). Esta tarefa foi pensada para alunos desde o 1.º ciclo ao ensino secundário com o objetivo de motivar os alunos e despertar a sua curiosidade para a explicação ou demonstração, consoante o nível de escolaridade dos alunos, da relação que conduz ao número obtido. Sugerimos a leitura do artigo «O grande Califa e os poderes mágicos da matemática» publicado neste número onde é feita a exploração para um quadrado $5\times5$. Para os alunos do ensino secundário o professor poderá começar logo com o quadrado $4\times4$ e para os alunos do 1.º ciclo poderá não passar do de $5\times5$, caberá ao professor perante as características dos seus alunos tomar esta decisão. Aconselha-se que esta tarefa seja realizada a pares ou em pequenos grupos e que haja uma discussão final sobre a razão da regularidade observada.


**Sílvia Zuzarte**
Agrupamento de Escolas de Casquilhos

## UM QUADRADO MUITO ESPECIAL!

1. O quadrado abaixo é muito especial!

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 5 |
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |

- Circunda um número qualquer do quadrado acima e elimina os restantes números da mesma linha e da mesma coluna.
- Circunda outro número não eliminado e elimina os restantes números da mesma linha e da mesma coluna.
- Por fim, circunda o número que resta.
- Adiciona todos os números circundados.
  Obtiveste o número 7? Como é que eu adivinhei?

Experimenta repetir o processo.

2. Procede do mesmo modo para o quadrado abaixo, até te restar só um número.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 5 | 3 |
| 6 | 4 | 7 | 5 |
| 7 | 5 | 8 | 6 |
| 2 | 0 | 3 | 1 |

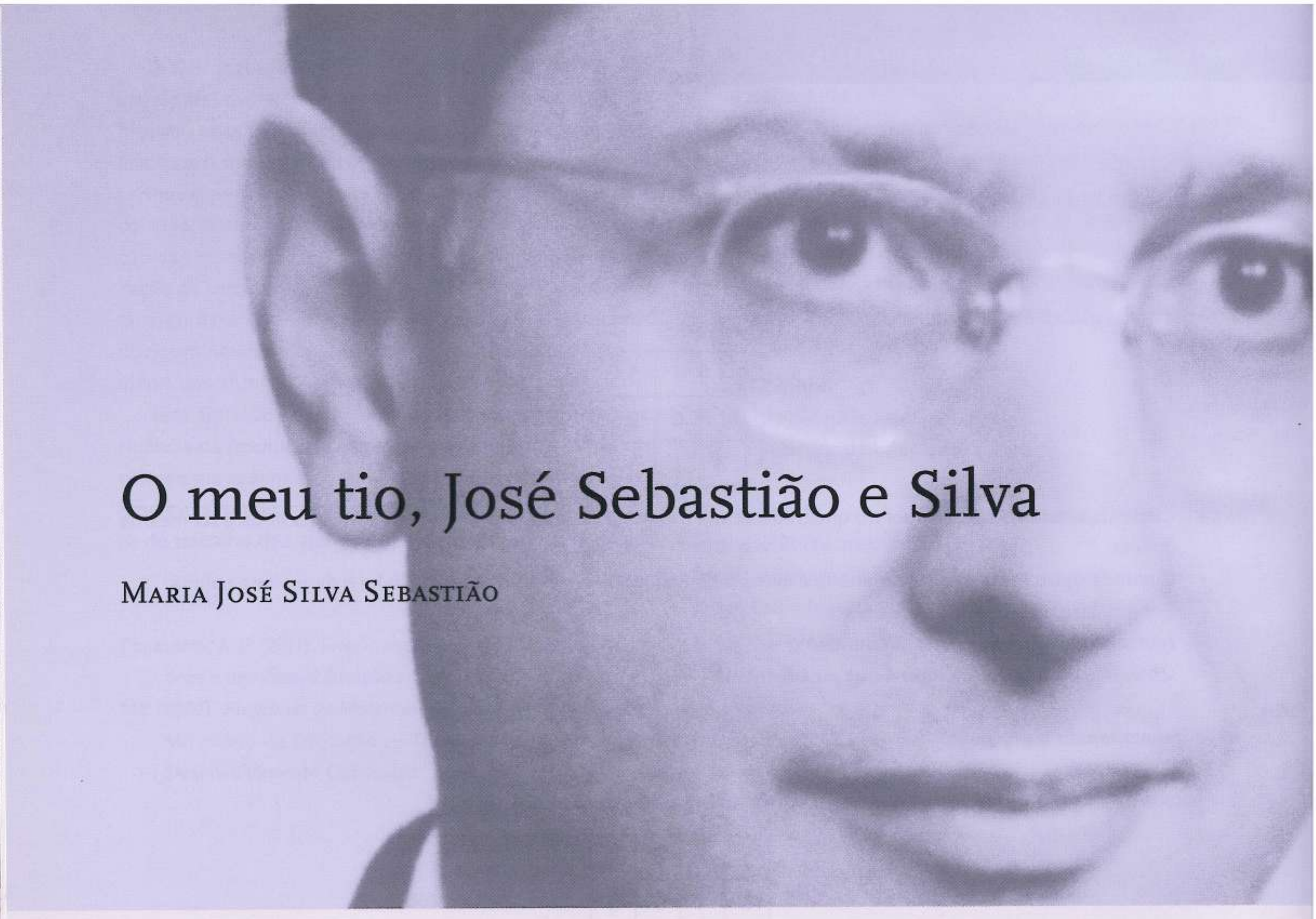
- Que número obtiveste? Compara o número que obtiveste com o que os teus colegas obtiveram.
  O que aconteceu?

3. Repete todo o procedimento para os vários quadrados abaixo e, para cada um deles compara o resultado obtido com o dos teus colegas.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 5 | 3 | 6 |
| 6 | 4 | 7 | 5 | 8 |
| 7 | 5 | 8 | 6 | 9 |
| 2 | 0 | 3 | 1 | 4 |
| 9 | 7 | 10 | 8 | 11 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 5 | 7 | 6 | 3 |
| 6 | 4 | 7 | 9 | 8 | 5 |
| 2 | 0 | 3 | 5 | 4 | 1 |
| 10 | 8 | 11 | 13 | 12 | 9 |
| 12 | 10 | 13 | 15 | 14 | 11 |
| 27 | 25 | 28 | 30 | 29 | 26 |

4. Porque será que se verificou o que observaste nas questões anteriores?



# O meu tio, José Sebastião e Silva

Maria José Silva Sebastião

Escrever sobre o meu tio, José Sebastião e Silva[1],é revisitar memórias envoltas em muita névoa, perdidas num tempo distante e passado longe de Portugal Continental.

Essas memórias foram sendo construídas através de raras vivências diretas com o meu tio, de episódios contados pelo meu pai, seu irmão mais novo, e por histórias chegadas até mim pelo meu irmão e pelos meus primos mais velhos, filhos da única irmã do meu tio.

Tive o privilégio de nascer em África e por lá viver (Angola e São Tomé e Príncipe) até vir para a faculdade. Pelo meio, umas vindas a Portugal Continental, nas férias do meu pai e durante 2 anos no Instituto de Odivelas[2].

Poucas vezes contactei com o meu tio. A sua morte prematura não me deu oportunidade de crescer e de com ele poder lidar já mais madura.

Lembro-me de ir à sua casa do Restelo, de o ver num escritório de paredes cobertas de estantes carregadas de livros, do som de música clássica e do seu ar austero, disciplinador.

O meu pai contava um episódio revelador desta faceta do meu tio:

Quando o meu pai veio para Lisboa preparar-se para fazer os exames de admissão à Academia Militar, ficou num quarto alugado com o meu tio. Um dia chegou a casa por volta das seis da manhã, depois de uma noite de divertimento.

O meu tio, com toda a naturalidade, interpelou-o dizendo qualquer coisa como:

«— Ainda bem que te levantaste tão cedo. Tens de estudar para os teus exames. Senta-te aqui, que vamos trabalhar». E o meu pai não teve outra alternativa se não sentar-se e estudar.

A faceta austera e disciplinadora permitiu que o meu tio transformasse o tempo de bolseiro, em Itália, em tempos de fruição de algum desafogo financeiro, apenas com as verbas disponibilizadas pela bolsa.[3]

Sei que se situava num ideário político de esquerda e que terá ficado muito dececionado, desde logo com o Pacto Germano-Soviético de 1939, e mais tarde, com as invasões da Hungria em 1956 e da Checoslováquia em 1968, mas não lhe conheço qualquer filiação partidária.

Lembro-me, vagamente, de o ir visitar ao IPO de Lisboa, já na fase terminal da sua doença. Retenho na memória a imagem de um homem muito magro, mesmo macilento.

Mais tarde, quando acabei o 5.° ano do Liceu, correspondente ao atual 9.° ano, tive de escolher uma área (alínea, como se designava) e optei pela alínea g), com acesso ao curso de Economia, por duas razões:

- tinha Matemática;
- o currículo de Matemática estava incluído na experiência de modernização do ensino da Matemática em Portugal, dirigido pelo meu tio, e realizada pelo Ministério da Educação Nacional, em colaboração com a OCDE. Livrava-me, assim, das explicações de Matemática do meu pai, porque, segundo ele, não percebia nada dessas «matemáticas modernas».

Sempre gostei muito de Matemática e não atribuo qualquer influência nesse gosto ao meu tio. Gostei! Gosto! A Matemática e a Física ajudavam-me a ultrapassar as «neuras» típicas da adolescência. O estudo e a descoberta de como resolver problemas faziam/fazem com que, rapidamente, a «má disposição» desaparecesse/desapareça.

Tive professoras de Matemática excelentes, quer no Instituto de Odivelas, quer no Liceu, em São Tomé e Príncipe: extremamente exigentes e rigorosas, mas muito perto dos alunos.

Reencontrei o meu tio enquanto professora[4]. Li atentamente o «Guia para utilização do compêndio de Matemática», Curso Complementar do Ensino Secundário, de 1975, nomeadamente as Normas Gerais, logo no início do 1.° volume. Aconselho vivamente a sua leitura atenta.

As minhas referências encontram-se nessas «Normas», nas palavras/exemplo do meu pai, as palavras proferidas em discursos oficiais, ou em família, o exemplo da sua vida, e no modelo que são as professoras de Matemática com as quais me cruzei.

Considero-me uma privilegiada por ter seguido o caminho que segui e sinto-me muito bem quando, no final do ano letivo, alunos de 11/12 anos me deixam mensagens escritas de reconhecimento pelo trabalho que fomos fazendo juntos e pela assunção de que o rigor, a exigência, o empenho, o trabalho, a disponibilidade para o outro são conquistas de hoje para a vida futura.

### Notas

[1] Logo no registo o meu tio foi predestinado a ser diferente: houve um engano e, em vez de Silva Sebastião, ficou registado como Sebastião e Silva.

[2] Aproveito para manifestar a minha profunda indignação pelo seu encerramento. O Instituto de Odivelas padecia de 2 «pecados»: ser um colégio de vertente militar e ser um colégio feminino. Os correspondentes colégios masculinos ainda sobrevivem, embora já numa vertente mista.

[3] A família mais próxima do meu tio (mãe, o meu avô paterno morreu muito cedo, quando o meu tio tinha 10 anos, e 4 filhos — 3 rapazes e uma rapariga) vivia com o ordenado da mãe, professora primária, por isso com constrangimentos financeiros muito fortes.

[4] Sou professora de Matemática, 2.° ciclo. Já acompanhei o mesmo grupo de alunos do 5.° ao 9.° anos

Maria José Silva Sebastião

# É mesmo necessário fazer planos de aula?

João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma, Joana Mata Pereira

Uma boa aula depende de muitos fatores — de uma boa preparação, de uma forte inspiração por parte do professor, e também do interesse e disponibilidade manifestados pelos alunos. A capacidade de improviso e de resposta a situações inesperadas por parte do professor é decisiva, levando-o a tomar decisões em cada momento, e perante as circunstâncias concretas que se vão colocando. No entanto, isso não diminui a importância de uma preparação adequada da aula, que proporcione os elementos fundamentais para o seu desenvolvimento, a serem depois ajustados de acordo com as necessidades ditadas pelo evoluir dos acontecimentos.

A elaboração de planos de aula tem vindo a conhecer grande interesse dado o papel central que a preparação, realização e análise de uma aula tem nos chamados «estudos de aula» de inspiração japonesa. Nesta atividade formativa desempenha um papel central a preparação de uma aula (a «*research lesson*») que é observada por um grupo de docentes e sujeita a uma análise detalhada com foco especial nas aprendizagens dos alunos. A aula a preparar corresponde, por isso, a um plano detalhado que envolve não só a descrição das atividades a realizar, como uma previsão dos acontecimentos que podem ter lugar e das respostas que lhes podem ser dadas pelo professor.

Neste artigo discutimos o modo de elaborar planos de aula, na perspetiva dos «estudos de aula». Começamos por rever o papel da planificação anual e da planificação da unidade didática, após o que apresentamos a fase preparatória do plano de aula e a elaboração do plano de aula propriamente dito. Ilustramos esta discussão com um exemplo de um plano de aula realizado em Portugal no âmbito de um estudo de aula com professores do 3.° ciclo.

## A planificação anual e da unidade didática

Uma aula insere-se, naturalmente, numa unidade de ensino e esta dentro de uma planificação anual de longo prazo. Nesta planificação e na preparação da unidade de ensino já foram assumidas necessariamente muitas opções, que têm a ver com as orientações curriculares, a preparação dos alunos e o seu interesse pelas aulas de Matemática, o tempo e os recursos disponíveis, e com muitos outros fatores do contexto escolar e social (Ponte, 2005).

As orientações curriculares estabelecem o quadro geral dos temas e tópicos a estudar, bem como as grandes finalidades e objetivos gerais de aprendizagem. A nível de cada unidade de ensino, estas orientações estabelecem os conceitos, representações, procedimentos, conexões e outros aspetos eventualmente relevantes. Para além dos aspetos específicos de cada tópico há a considerar os aspetos curriculares transversais relacionados com o raciocínio, a comunicação, a resolução de problemas, o uso de materiais e tecnologias, a relação com situações da realidade (modelação matemática), etc.. Há ainda que ter em atenção aspetos de natureza transversal de índole mais geral, como o desenvolvimento da autonomia, do espírito crítico, da cooperação, da solidariedade, do sentido de responsabilidade por parte dos alunos.

Ao preparar as suas unidades de ensino, o professor tem em conta os seus alunos, as suas capacidades, interesses e disposição para se envolverem no trabalho em Matemática. Não adianta preparar tarefas que já se sabe de antemão que não têm qualquer hipótese de acolhimento por parte dos alunos. É preciso ajustar o nível de profundidade dos assuntos e especialmente o modo de os abordar às caraterísticas específicas de cada turma, tendo em conta não só o seu nível médio, mas também a diversidade de alunos, tanto em termos de capacidades como de interesses. A este respeito, note-se que, por vezes, os professores são levados a subestimar as capacidades dos alunos, em especial a sua capacidade de reagir de forma positiva a uma questão mais desafiante, judiciosamente escolhida.

O tempo e os recursos disponíveis são, naturalmente, um fator importante a considerar. Muitas vezes estes existem nas escolas e na comunidade, não na forma que seria mais imediatamente utilizável, mas mesmo assim potencialmente muito úteis como quadros interativos, computadores e outros materiais, professores, encarregados de educação e outros membros da comunidade disponíveis para colaborar. Muito complicada é, cada vez mais, a gestão do tempo, dada a pressão de muitas atividades em simultâneo, a compressão dos horários escolares, e toda uma variedade de circunstâncias que afetam o desenvolvimento do ano letivo. Cabe ao professor definir prioridades e assumir o controlo do tempo sem se deixar condicionar completamente por ele.

As regras da escola e as condicionantes da avaliação são também fatores que o professor tem de ter em conta, naturalmente, na sua planificação anual e das unidades didáticas. A secção que se segue indica como pode ser feita a preparação de uma aula específica sobre um dado tópico de uma dada unidade de ensino. Assumimos que temos presentes estes dois níveis prévios de planificação (anual e da unidade) e descrevemos o trabalho a realizar em duas etapas, a fase preparatória e a fase da elaboração do plano de aula propriamente dito. Esta discussão será depois ilustrada com um plano de uma aula sobre proporcionalidade direta no 7.° ano.

## Fase preparatória do plano de aula

A fase preparatória envolve a definição do(s) objetivo(s) de aprendizagem para a aula, a seleção de tarefas que possam ser úteis para a consecução desses objetivos, a resolução das tarefas, a análise das suas potencialidades e das dificuldades previsíveis dos alunos.

Uma vertente essencial desta fase é a definição do objetivo de aprendizagem para a aula. Aqui é importante rever as orientações curriculares, em especial as que se referem ao ensino do tópico, bem como os aspetos matematicamente relevantes desse mesmo tópico — conceitos, procedimentos, representações e simbolismo, conexões importantes com outros tópicos matemáticos e com temas extra matemáticos. Note-se que uma aula pode ter vários objetivos de aprendizagem, mas é importante que tenha um objetivo principal bem definido. Isso mesmo é uma das principais sugestões do livro *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all* (NCTM, 2014), que enfatiza a importância de definição clara deste objetivo, tanto para o professor, para a condução da aula, como para os alunos que o devem compreender, de modo a servir de base à sua aprendizagem.

Uma outra vertente desta fase preparatória é a seleção preliminar de tarefas, sua resolução e análise. A identificação de possíveis tarefas a propor aos alunos e a análise das suas potencialidades é fundamental dado o papel chave que as tarefas assumem como ponto de partida para o trabalho dos alunos, tendo em vista a sua aprendizagem. As tarefas podem ter as mais diversas origens, incluindo os manuais usados pelos alunos, outros manuais porventura mais interessantes, outros materiais de apoio ao profes-

| Tarefas e atividades de aprendizagem (a) | Duração esperada (b) | Atividade dos alunos e possíveis dificuldades (c) | Respostas do professor e aspetos a ter em atenção (d) | Objetivos e avaliação (e) |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Tabela 1.**—Esquema para a elaboração de um plano de aula na tradição dos «Estudos de aula» japoneses.

sor, livros didáticos e sítios da Internet. A resolução destas tarefas permite uma identificação de níveis de dificuldade e potencialidades para a aprendizagem, preparando o terreno para a seleção final da tarefa ou tarefas a incluir no plano de aula. Os níveis de dificuldade das questões a propor devem estar, naturalmente, adaptados às caraterísticas dos alunos. Note-se, também, que as potencialidades para a aprendizagem de uma dada tarefa podem resultar de muitos fatores, incluindo a estrutura da própria tarefa, o contexto que lhe está subjacente, as conexões que faz com outros tópicos ou situações extra matemáticas conhecidas dos alunos, etc.

A definição do objetivo e a exploração de tarefas deve proporcionar condições para estabelecer um possível caminho na progressão dos alunos — aquilo que Estes, McDuffie e Tate (2014) chamam «progressão no tópico». Para isso será importante elencar os conhecimentos pré-requisitos que os alunos devem ter para aprenderem o tópico em questão bem como definir possíveis etapas no trabalho de modo a atingir o objetivo pretendido. Esta fase preparatória deve também permitir identificar as possíveis dificuldades dos alunos na aprendizagem do tópico. Essa identificação deve ser desde logo acompanhada da indicação de possíveis ações por parte do professor tendo em vista ajudar os alunos a ultrapassar essas dificuldades.

Finalmente, esta fase conclui-se com a seleção da tarefa e a definição, nas suas linhas gerais, do modo como os alunos irão trabalhar na tarefa (individual, pares, grupo, coletivo) e as diferentes etapas da aula. Estamos então em condições de começar a elaborar o plano de aula propriamente dito.

A importância da fase preparatória do plano da aula no caso dos estudos de aula é sublinhada por exemplo por Doig, Groves e Fujii (2011). Estes autores dão uma importância especial à formulação da tarefa que irá ser apresentada aos alunos, incluindo a escolha do contexto, a seleção de uma versão apropriada, bem como o texto do enunciado. Para isso, sugerem o recurso a materiais de ensino incluindo manuais e outros materiais curriculares, bem como a estudos que se debrucem sobre a compreensão dos alunos no tópico em questão.

## Elaboração do plano de aula

Para a elaboração do plano de aula existem muitas possibilidades, desde as relativamente simples às que envolvem grande sofisticação. Será avisado procurar seguir um modelo de plano de aula cuja elaboração não seja demasiado complexa mas que, ao mesmo tempo, contenha todos os elementos necessários para que possa ser um instrumento de trabalho efetivamente útil ao professor.

Num plano de aula podem distinguir-se dois aspetos principais — aquilo que é comum a toda a aula e a sucessão de atividades que se desenvolvem durante a aula. No que respeita a aspetos comuns a toda a aula podem considerar-se questões como:[1]

1. Objetivo(s) de aprendizagem para a aula (objetivo principal; objetivos complementares sobre o tópico e sobre os processos de raciocínio e comunicação)
2. Estratégia geral
3. Estrutura da aula (segmentos previstos, incluindo eventuais períodos de trabalho autónomo e de discussão coletiva);
4. Recursos a usar (por exemplo, fichas de trabalho, material manipulável, material de Geometria, *software*, etc.)

Relativamente à sucessão de atividades que têm lugar durante a aula, a tradição dos estudos de aula japoneses sugere a elaboração de um quadro com várias colunas. Apresentamos aqui (Tabela 1) uma versão que, embora aparentemente complexa, tem o mérito de ajudar de forma mais efetiva no planeamento da aula.[2]

Deste modo, eis o que se pode colocar nas diferentes colunas:

a) «Tarefas e atividades de aprendizagem» incluem, por exemplo, as tarefas selecionadas e os modos de trabalho dos alunos em cada segmento de realização dessas tarefas (individual, pares, grupo, coletivo), bem como a definição dos momentos para a discussão coletiva.

**Uma receita para o bolo de limão**

A Fernanda pretende fazer um bolo de limão para a sobremesa do jantar.

1. Que quantidade de açúcar é necessária para fazer um bolo para 3 pessoas? Explica como chegaste à tua resposta.

2. A Fernanda gastou 12 dl de leite. Fez um bolo para quantas pessoas? Explica como chegaste à tua resposta

3. Completa a seguinte tabela:

| N.° Pessoas | | | 6 | |
|---|---|---|---|---|
| Ovos | 1 | | | |
| Açúcar | | | | 360 |
| Leite | | 1,5 | 3 | |

4. Das expressões seguintes, indica as que podem traduzir uma relação entre a quantidade de açúcar e o número de pessoas.

[A] $n = a$ [B] $x = 40y$ [C] $y = \frac{x}{40}$
[D] $x \times y = 40$ [E] $n = 40a$ [F] $y = 40 + x$

5. Escreve uma expressão algébrica que traduza a relação entre:
A. O número de ovos e o número de pessoas.
B. A quantidade de leite e o número de pessoas

**Bolo de Limão**

Para 6 pessoas

6 ovos

240 g de açúcar

1 colher de chá de fermento

360 g de farinha

3 dl de leite

Limão raspado (q.b.)

Sumo de 2 limões

Figura 1.—Tarefa sobre proporcionalidade direta (7.° ano)

b) «Duração esperada» refere-se ao tempo de duração previsto para cada segmento.

c) «Atividade dos alunos e possíveis dificuldades» incluem a previsão do que os alunos irão fazer bem como as suas dificuldades e dúvidas na interpretação e compreensão das tarefas e durante a resolução da tarefa. Este ponto inclui também a previsão de diferentes estratégias que se podem esperar da parte dos alunos.

d) «Respostas do professor e aspetos a ter em atenção», incluem aspetos fundamentais que o professor deve ter em atenção em cada segmento em resposta às possíveis dificuldades dos alunos. Este ponto refere-se também à definição da estratégia para a discussão coletiva bem como à definição das questões a sublinhar na síntese final da aula.

e) Finalmente, «Objetivos e avaliação» incluem os aspetos específicos da avaliação dos alunos, a ter em atenção durante a aula. Este campo corresponde de algum modo a uma decomposição do objetivo definido para a aula em objetivos mais específicos, cuja verificação permitirá ir obtendo informação parcial relativamente ao progresso dos alunos. Estas informações parciais permitirão fazer uma avaliação da aula, ao mesmo tempo que produzirão elementos para a planificação das aulas seguintes.

## Um plano de aula para introduzir a função de proporcionalidade direta

Vejamos um exemplo de um plano de aula sobre proporcionalidade direta, para lecionar a uma turma do 7.° ano, como a primeira aula sobre o tópico. Assume-se que os alunos estudaram proporcionalidade direta no 6.° ano (como igualdade entre duas razões) e já estudaram equações no 7.° ano, mas ainda não iniciaram o estudo da proporcionalidade direta como função. Esta aula tem por base a tarefa que se encontra na Figura 1[3] e à qual corresponde o plano de aula na Tabela 2.

Tabela 2.—Plano de aula

*1. Aspetos gerais*

1. Objetivo de aprendizagem: Reconhecimento que uma relação de proporcionalidade direta entre duas variáveis pode ser representada por uma expressão algébrica de tipo $y = ax$, sendo $a$ a constante de proporcionalidade.
2. Estratégia geral: Proposta de uma tarefa com cinco questões.
3. Estrutura da aula: A estrutura da aula comporta nove segmentos: a introdução, a resolução de cada uma das cinco questões, duas discussões coletivas, uma depois da realização das questões 1, 2 e 3 e outra no final da realização da questões 4 e 5, terminando com a síntese final.
4. Recursos a usar: ficha de trabalho com a tarefa.

*2. Desenvolvimento da aula*

<table>
<tr><th>Tarefas e atividades de Aprendizagem<br>(a)</th><th>Duração Esperada<br>(b)</th><th>Atividade dos alunos e possíveis dificuldades<br>(c)</th><th>Respostas do professor e aspetos a ter em atenção<br>(d)</th><th>Objetivos e avaliação<br>(e)</th></tr>
<tr><td>1. Introdução (em coletivo)</td><td>5 min</td><td>• Os alunos podem colocar dúvidas sobre o enunciado das questões, quer em termos de linguagem, quer em termos do que é dado e do que é pedido.</td><td>• Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula.<br>• Ler o enunciado da questão 1.</td><td>• Perceber o que é dado e o que é pedido na questão 1 e na questão 2.</td></tr>
<tr><td>2. Resolução da questão 1 (trabalho autónomo)</td><td>5 min</td><td>• Identificar 3 como metade de 6 e procurar obter metade de 240.<br>• Uma possível dificuldade é os alunos não conseguirem estabelecer a relação entre 3 e 6.<br>• Os alunos podem também usar a regra de três simples ou estabelecer a proporção $\frac{6}{3} = \frac{240}{x}$ para resolver de modo a encontrar o valor de $x$.</td><td>Se os alunos não o fizerem, o professor deve introduzir a tabela<table><tr><td>6</td><td>240</td></tr><tr><td>3</td><td>?</td></tr></table>e incentivar os alunos a procurar fatores multiplicativos que permitam encontrar o valor em falta.</td><td>• Mostrar compreensão que para 3 pessoas (metade de 6) será preciso metade do açúcar (120 g).</td></tr>
<tr><td>3. Resolução da questão 2 (trabalho autónomo)</td><td>5 min</td><td>• Identificar 12 como o quádruplo de 3 e quadruplicar o número de pessoas da receita.<br>• Uma possível dificuldade é os alunos não conseguirem estabelecer a relação entre 12 e 3.<br>• Os alunos podem usar a regra de três simples ou estabelecer a proporção $\frac{6}{x} = \frac{3}{12}$ e resolver de modo a encontrar o valor de $x$.</td><td>Se os alunos não o fizerem, o professor deve introduzir a tabela<table><tr><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>?</td><td>12</td></tr></table>e incentivar os alunos a procurar fatores multiplicativos que permitam encontrar o valor em falta.</td><td>• Mostrar compreensão que para 4 vezes mais leite (12 dl) devemos ter 4 vezes mais pessoas.</td></tr>
<tr><td>4. Resolução da questão 3 (trabalho autónomo)</td><td>10 min</td><td>• Muitos alunos podem ter dificuldade em interpretar o enunciado e perceber o que é pedido para fazer.<br>• Os alunos terão de definir uma estratégia para completar a tabela usando os dados da receita</td><td>Se os alunos tiveram dificuldade em começar o professor pode sugerir que comecem pela coluna 3, seguida da coluna 2, depois da 1 e finalmente da 4.</td><td>• Perceber que da linha 1 para a linha 2 devem copiar os valores (ou, o que é o mesmo, multiplicar por 1), da linha 1 para a linha 3 devem multiplicar por 40, e da linha 1 para a linha 4 devem multiplicar por 0,5. Os valores a multiplicar, 1, 40 e 0,5 são os valores que se encontram na 2.ª coluna e que correspondem a um bolo para uma pessoa.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tarefas e atividades de Aprendizagem<br>(a)</th><th>Duração Esperada<br>(b)</th><th>Atividade dos alunos e possíveis dificuldades<br>(c)</th><th>Respostas do professor e aspetos a ter em atenção<br>(d)</th><th>Objetivos e avaliação<br>(e)</th></tr>
<tr><td>5. Discussão coletiva das questões 1, 2 e 3.</td><td>20</td><td>• Apresentar diferentes estratégias para resolver a questão 1.<br>• Apresentar diferentes estratégias para resolver a questão 2.<br>• Apresentar diferentes estratégias para resolver a questão 3.</td><td>• Se nenhum aluno o fizer, o professor deve fazer as tabelas<table><tr><td>6</td><td>240</td></tr><tr><td>3</td><td>?</td></tr></table><table><tr><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>?</td><td>12</td></tr></table>e incentivar os alunos a procurar fatores multiplicativos que permitam encontrar o valor em falta<br>• Introduzir a terminologia «razão unitária» e «constante de proporcionalidade» e discutir o respetivo significado</td><td>• Reconhecer que existe uma relação de proporcionalidade direta entre a primeira linha e as linhas 2, 3 e 4.<br>• Perceber que existe um valor que se multiplica pelo n.º de pessoas que vão comer o bolo e que esse valor (razão unitária) está na 2.ª coluna</td></tr>
<tr><td>6. Resolução da questão 4 (Analisar diversas expressões para ver quais satisfazem as condições dadas) (trabalho autónomo)</td><td>5 min</td><td>• Identificar a relação entre as duas variáveis.<br>• Ver, uma a uma, se as expressões podem representar a relação.<br>• Muitos alunos podem ter dificuldade na interpretação do enunciado, dado o seu caráter muito formal.<br>• Outra possível dificuldade é admitir que a relação em causa pode ser representada por mais do que uma expressão.<br>• É provável que a maioria dos alunos consiga perceber quais as expressões inapropriadas [A], [D], [F], mas alguns podem não reconhecer uma ou mais das expressões apropriadas [B, [C] e [E].<br>• Achar que a relação entre as variáveis pode ser aditiva e escolher a expressão [F].</td><td>• Perguntar o que podem representar na expressão [A] as variáveis $n$ e $a$, e na expressão [B] as variáveis $x$ e $y$, etc.<br>• Sugerir aos alunos que substituam os valores dados na tabela em cada uma das expressões algébricas.<br>• Verificar que as expressões [A], [D] e [F] não podem traduzir a relação em causa.<br>• Verificar que as expressões [B] e [C] são equivalentes.<br>• Verificar que as expressões [B] e [E] exprimem a mesma relação, apenas designando as variáveis de modo diferente.</td><td>• Reconhecer que as variáveis «quantidade de açúcar» e «número de pessoas» podem ser representadas por quaisquer letras.<br>• Reconhecer que expressões algébricas são compatíveis com uma relação de proporcionalidade direta dada numa tabela.</td></tr>
</table>

Tabela 2.—Plano de aula (cont.)

| Tarefas e atividades de Aprendizagem (a) | Duração Esperada (b) | Atividade dos alunos e possíveis dificuldades (c) | Respostas do professor e aspetos a ter em atenção (d) | Objetivos e avaliação (e) |
|---|---|---|---|---|
| 7. Resolução da questão 5 (Escrever uma expressão algébrica representando uma relação). (trabalho autónomo) | 5 min | • Os alunos podem ter dificuldade em representar a relação entre o número de ovos e o número de pessoas, dado ser 1 a constante de proporcionalidade. | • Sugerir aos alunos que comparem o que é pedido nesta questão e o que foi pedido na questão anterior e tenham em conta a constante de proporcionalidade | • Reconhecer que existe uma relação de proporcionalidade direta entre a primeira linha e as linhas 2, 3 e 4. • Perceber que existe um valor que se multiplica pelo n.º de pessoas que vão comer o bolo e que esse valor (razão unitária) está na 2.ª coluna |
| 8. Discussão coletiva das questões 4 e 5 e 9. Síntese final | 20 min | • Apresentar diferentes estratégias para resolver a questão 4. • Apresentar diferentes estratégias para resolver a questão 5. | | • Reconhecer que uma relação entre duas variáveis em que existe proporcionalidade direta se pode representar por uma expressão do tipo $y = ax$, $y = kx$ ou por outra expressão equivalente. |

O enquadramento curricular em que esta tarefa foi originalmente concebida é o do Programa de Matemática de 2007. Este programa indicava que o tópico de proporcionalidade direta como função poderia ser estudado neste nível a partir dos conhecimentos dos alunos sobre proporcionalidade aprendidos no 2.º ciclo. No entanto, esta tarefa adapta-se bem a outros enquadramentos curriculares, nomeadamente o que decorre do Programa de Matemática de 2013 que prevê o estudo da proporcionalidade em duas etapas principais, primeiro como igualdade entre duas razões, no 2.º ciclo, e depois como função, no 3.º ciclo.

O objetivo de aprendizagem para a aula é o reconhecimento, por parte dos alunos, que uma relação de proporcionalidade direta entre duas variáveis pode ser representada por uma expressão algébrica de tipo $y = kx$, sendo $k$ a constante de proporcionalidade. Como objetivos complementares, pretende-se que os alunos recordem o processo de resolver problemas de proporcionalidade direta e que desenvolvam a sua capacidade de interpretar expressões algébricas simples.

Os pré-requisitos, em termos de conhecimentos dos alunos, são a capacidade de resolver problemas simples de valor omisso envolvendo relações de proporcionalidade direta e a compreensão do significado de expressões como $y = 3x$ ou $y = 4x + 3$. A progressão no tópico envolve a passagem de (i) relações de proporcionalidade direta envolvendo três termos para (ii) relações de proporcionalidade direta entre duas variáveis representadas em tabelas, com um número indeterminado de termos, daí para (iii) relações de proporcionalidade direta representadas por uma expressão algébrica, até chegar ao reconhecimento que (iv) as relações de proporcionalidade direta têm a expressão geral $y = kx$.

A estratégia geral é a proposta de uma tarefa com cinco questões. Os alunos resolvem a pares as três primeiras questões, seguindo-se um momento de discussão coletiva. Depois os alunos resolvem as questões 4 e 5, seguindo-se outro momento de discussão coletiva. A aula termina com uma síntese final a cargo do professor, a realizar com a colaboração dos alunos. Deste modo a estrutura da aula comporta nove segmentos: a introdução, a resolução de cada uma das cinco questões, duas discussões coletivas, uma, sensivelmente, a meio da aula e outra no final da realização da questão 5, terminando com a síntese final.

O principal recurso a usar é a ficha de trabalho com a tarefa, sendo as resoluções dos alunos apresentadas no quadro.

As questões 1 e 2 da tarefa envolvem a resolução de problemas simples de proporcionalidade direta. Nestas questões o importante é que os alunos estabeleçam relações de modo intuitivo entre os valores dados, como ponto de partida para a resolução da questão 3. Se os alunos tiverem dificuldade em resolver estas questões, apesar dos valores apresentados serem relativamente simples, o professor deve ajudar introduzindo uma representação na forma de tabela procurando fatores multiplicativos que ajudem a encontrar o valor pretendido.

| | |
|---|---|
| 6 | 240 |
| 3 | ? |

| | |
|---|---|
| 6 | 3 |
| ? | 12 |

A introdução destas tabelas constitui um momento fundamental da aula, permitindo aos alunos um modo intuitivo de pensar de forma multiplicativa sobre as relações de proporcionalidade. Assim, o professor pode perguntar «por que número multiplicamos 6 para obter 3»? Perante a resposta que será $\frac{1}{2}$ ou 0,5 o professor pode continuar, «quanto obtemos multiplicando 240 por 0,5»?

Se algum aluno introduzir estas tabelas espontaneamente nas suas resoluções (o que é bastante provável), o professor deve tirar partido desse facto, levando-o a partilhar com a turma. Se algum aluno não fizer uma tabela explícita mas formular um raciocínio próximo, o professor pode reformulá-lo (ou «redizê-lo») na forma da tabela. Caso contrário, será o professor a introduzir esta representação, de forma tanto quanto possível natural, como um modo de registar os dados das questões 1 e 2 e de pensar sobre as relações entre esses dados.

Se os alunos resolverem estas questões usando métodos mais formais como a regra de três simples ou estabelecendo as proporções $\frac{6}{3} = \frac{240}{x}$ e $\frac{6}{x} = \frac{3}{12}$ o professor deve valorizar, naturalmente, essas resoluções. No entanto, mesmo nesses casos, será de propor a construção das tabelas acima indicadas pois elas servem de base a uma forma intuitiva de pensar que será muito importante na questão 3.

A questão 3, envolvendo o preenchimento de uma tabela com 4 linhas e 5 colunas, representa uma situação provavelmente nova para os alunos, que nunca devem ter trabalhado com tabelas tão complexas. Esta questão requer que os alunos entendam o que se pretende e sigam uma estratégia adequada, novamente encontrando fatores multiplicativos apropriados. É importante que percebam que da linha 1 para a linha 2 devem multiplicar por 1 (resulta em «copiar os valores»), da linha 1 para a linha 3 devem multiplicar por 40, e da linha 1 para a linha 4 devem multiplicar por 0,5. Os valores a multiplicar (1, 40 e 0,5) são os valores que se encontram na 2.ffi coluna, e são os valores que correspondem a um bolo para uma pessoa. Na discussão que se realiza a seguir o professor deve indicar que estes valores se chamam «razão unitária» ou «constante de proporcionalidade». A expetativa é que os alunos possam usar de novo estratégias informais para encontrar os fatores multiplicativos adequados.

Note-se que em nenhuma questão desta tarefa é feita menção explícita à noção de constante de proporcionalidade. A ideia que existe uma razão constante irá surgindo a pouco e pouco no trabalho dos alunos e deve ser explorada na discussão geral. Assim, tal como referido, os termos «razão unitária» e «constante de proporcionalidade» deverão ser introduzidos pelo professor, no momento oportuno, durante a discussão coletiva após a realização das três primeiras questões, devendo-se analisar então o respetivo significado.

As questões 4 e 5 apoiam-se na questão 3. Na questão 4 pretende-se que os alunos verifiquem quais das expressões são compatíveis com a relação entre «quantidade de açúcar» e «número de pessoas» dada na tabela (ou seja, as expressões [B], [C] e [E]). A interpretação das expressões pode causar algumas dificuldades aos alunos, aspeto a que o professor precisa de estar particularmente atento. Para ajudar os alunos nessa interpretação pode perguntar o que podem representar na expressão [A] as variáveis $n$ e $a$, e na expressão [B] as variáveis $x$ e $y$, etc. Uma vez essa interpretação feita, os alunos poderão substituir os valores numéricos dados na tabela em cada uma das expressões. É de esperar que a maioria dos alunos consiga perceber quais as expressões inapropriadas [A], [D], [F], mas alguns podem pensar que apenas uma das expressões estará correta e não reconhecer uma ou mais das expressões apropriadas.

Num segundo momento de discussão coletiva é abordado o significado das expressões algébricas, em relação com o contexto apresentado (receita do bolo), procurando ao mesmo tempo que os alunos reconheçam a ligação com o tópico das equações.

## Como foi elaborado este plano de aula

Este plano de aula constitui uma versão aperfeiçoada de um plano muito semelhante que orientou a realização de uma aula de 7.° ano durante um estudo de aula. Da realização desta tarefa na aula, tiram-se algumas ilações sobre os processos de raciocínio e dificuldades dos alunos. Assim, nas questões 1 e 2 os alunos usaram por vezes estratégias surpreendentes. Na questão 2, por exemplo, um aluno referiu que tinham feito «uma sequência», explicando «a nossa sequência foi uma sequência de pessoas e dos decilitros. Fizemos que 6 pessoas equivaliam a 3 dl, 12 pessoas equivaliam a 6 dl, 18 a 9 e 24 a 12». Na verdade o aluno fez um raciocínio aditivo tomando como base o par (6 pessoas, 3 dl). Verificamos portanto que as questões 1 e 2 permitem levar os alunos a recordar como se resolvem problemas simples envolvendo relações proporcionais, como base para o trabalho a realizar a seguir. No plano de aula reformulado estas duas questões têm exatamente a mesma formulação que no plano original.

Na realização da aula, a questão 3 levantou dificuldades a bastantes alunos em «perceber o que era para fazer» atendendo ao facto de ser uma tabela fora do comum, com várias linhas. Essa dificuldade foi ultrapassada, em muitos casos, com a ajuda da professora, chamando a atenção para uma coluna particular (e tendo em conta as condições da receita). A partir daí, o preenchimento da tabela de acordo com as condições dadas (relações de proporcionalidade direta entre diversas variáveis) foi feito sem grande dificuldade por alguns alunos, usando estratégias muito diversas (muitas das quais baseadas em procedimentos aditivos) e raramente tomando como ponto de partida a coluna correspondente a 6 pessoas. No plano de aula reformulado esta questão também não teve alterações.

A primeira alteração importante ao plano de aula é a introdução do primeiro momento de discussão coletiva a seguir à realização da questão 3, de modo a explorar oralmente com os alunos as diversas relações que existem nesta tabela, com especial atenção para a relação entre a quantidade de açúcar e o número de pessoas e, assim, preparar o terreno para a realização da questão 4.

Na aula, na questão 4, os alunos manifestaram também dificuldades, por vezes dando respostas ao acaso. Estas dificuldades têm origem na interpretação do enunciado que, pelo seu caráter muito formal, constitui uma barreira para os alunos que não estão habituados a este tipo de linguagem. Estas questões foram debatidas na discussão coletiva, sendo de notar que, já na fase final da discussão, houve alunos que reconheceram que a expressão geral das funções de proporcionalidade direta é $y = kx$.

Nas questões 4 e 5 não se registam alterações significativas no enunciado da versão original do plano para a versão aperfeiçoada, a não ser a eliminação de uma questão que propomos que seja abordada na discussão coletiva. Deste modo, as alterações mais significativas no plano de aula não se registam no enunciado das questões, mas no facto de se introduzirem dois momentos de discussão coletiva, em vez de se realizar apenas um momento. O primeiro momento de discussão coletiva tem em vista que todos alunos percebam as relações proporcionais constantes na tabela e permitir uma maior facilidade de compreensão da questão 4. Para além disso, a identificação das dificuldades registadas na realização das diversas questões permitem ao professor a preparação de um apoio mais efetivo aos alunos durante os momentos de trabalho autónomo na realização das questões.

## A concluir

A pergunta inevitável nesta fase é: «É preciso todo este trabalho para preparar cada aula?» A resposta é sim. Quanto mais detalhado for o plano de aula, quanto mais pensado e refletido for o trabalho de preparação, maior capacidade terá o professor de ajustar esse plano em função dos acontecimentos e mesmo de improvisar. O facto do professor ter refletido dá-lhe confiança para fazer diferente ao inicialmente pensado. Na prática quotidiana, este trabalho de planificação aqui feito de forma explícita e passo a passo é feito em grande medida de forma implícita e abreviada, saltando algumas etapas pois elas estão já apropriadas pelo professor.

Enfim, o importante é saber fazer planos de aula, de acordo com este processo ou um processo semelhante, e para isso é preciso fazer alguns planos deste tipo até compreender bem os diversos aspetos a ter em conta. A partir daí, a elaboração de planos de aula poderá ser feita no dia a dia profissional de modo mais informal, embora possa ser útil, participar por vezes em atividades como os «estudos de aula» que permitem aferir junto de outros professores como estamos a preparar as nossas aulas e que resultados isso traz para a aprendizagem dos nossos alunos.

**Notas**

[1] Alguns dos aspetos a seguir indicados podem dizer apenas respeito a uma parte da aula, caso em que transitam para a parte seguinte do plano, sob a forma de tabela com várias colunas (ver a Tabela 1).

[2] Esta tabela resulta de uma combinação de modelos apresentado em vários artigos, sendo a inspiração principal Roback, Chance, Legler e Moore (2006).

[3] Esta tarefa é a que foi usada (de forma ligeiramente diferente) num estudo de aula realizado numa turma do 7.° ano na Escola Secundária da Ramada em 2011. A experiência encontra-se descrita em Ponte, Baptista, Velez e Costa (2012). O plano de aula que aqui se apresenta corresponde à revisão do plano de aula original, tendo em conta a experiência então realizada.

### Referências

Doig, B., Groves, S., & Fujii, T. (2011). The critical role of task development in lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study, research and practice in mathematics education* (pp. 181–199). Dordrecht: Springer.

Estes, L. A., McDuffie, A. R., & Tate, C. (2014). Lesson planning with the Common Core. *Mathematics Teacher, 108*(3), 207–2011.

Meyer, R. D., & Wilkerson, T. L. (2011). Lesson study: The impact on teachers' knowledge for teaching mathematics. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study, research and practice in mathematics education* (pp. 15–26). Dordrecht: Springer.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Baptista, M., Velez, I., & Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores através dos estudos de aula. *Perspectivas da Educação Matemática, 5* (n. temático), 7–24.

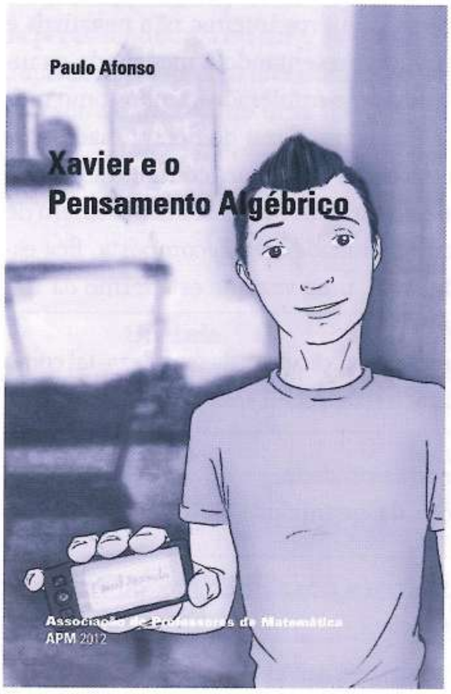
Roback, P., Chance, B., Legler, J., & Moore, T. (2006). Applying Japanese lesson study principles to an upper-level undergraduate statistics course. *Journal of Statistics Education, 14*(2), 1–23.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319–369). Greenwich, CT: Information Age.



João Pedro da Ponte
Marisa Quaresma
Joana Mata Pereira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa


## Conhece o Xavier?





**Xavier é um matemático que gosta de desafios ... é um desafiador!**

**Já desafiou o pensamento algébrico...**
**Já desafiou a magia matemática ...**

**e o Xavier vai voltar de novo como investigador ...**

**Procure o Xavier na nossa loja!**

# Para uma compreensão dos números inversos à luz do significado de medida de fração

Graciosa Veloso

Este artigo resultou de parte do trabalho desenvolvido, no ano letivo de 2013–14, com as duas turmas de Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º ciclos em Elementos de Álgebra e Análise, unidade curricular da componente Formação para a Área de Docência do plano de estudos do curso.

Proponho uma compreensão da relação existente entre números[1] inversos através da exploração do significado de medida de uma fração. Inicio o percurso com a medição da grandeza geométrica área, com unidades não convencionais, utilizando o Tangram, destacando a relação em estudo nos pares de peças adequados; prossigo para a grandeza comprimento, num contexto mais formal, o da representação de pontos num eixo orientado; finalmente, estabeleço uma conexão com o estudo funcional, explorando a relação de proporcionalidade inversa.

Pretendo, deste modo, destacar a importância formativa do entendimento concetual associado ao conhecimento procedimental na linha do que é proposto por Ma (2009). Espero também, de acordo com a literatura referente à formação inicial e ao desenvolvimento profissional, contribuir para ilustrar a especificidade do conhecimento necessário para ensinar Matemática (Albuquerque *et al.*, 2008; Ma, 2009; Ponte & Chapman, 2008; Veloso, 2015).

## Fração como medida de uma grandeza

Nesta secção vou discutir situações em que surgem, entre outros, números inversos como a medida de grandezas geométricas e inicio-a com a caracterização do significado de medida de uma fração. A fração $\frac{a}{b}$, em que as variáveis $a$ e $b$ representam números inteiros não negativos e $b \neq 0$, entende-se como representando a medida da quantidade $a$ de uma grandeza no numerador, tendo como unidade o valor $b$ (da mesma grandeza) do denominador. No contexto de medida trabalha-se sempre com números não negativos e como o denominador representa o número de partes iguais em que a unidade está decomposta, fica esclarecida a restrição $b \neq 0$, uma vez que este termo da fração tem de ser positivo.

Matematicamente, a medição de uma grandeza, tal como Caraça (2002) o caracteriza, inclui três passos distintos e interligados:

- a escolha de uma unidade
- a comparação da quantidade de grandeza com a unidade
- a expressão, através de um número, do resultado desta comparação.

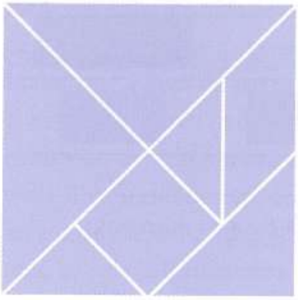


Figura 1.—Tangram

O *Tangram* é um *puzzle* chinês constituído por 7 peças:

2 triângulos grandes
2 triângulos pequenos
1 triângulo médio
1 quadrado
1 paralelogramo obliquângulo

Com apoio em material manipulável, passo a ilustrar este processo e a enquadrar o surgimento de números inversos na variação da medida de uma grandeza em função da variação da unidade considerada.

Considere-se a tarefa

Medir a área das cinco peças diferentes do *Tangram*, considerando como unidade, sucessivamente a:

- área do triângulo pequeno
- área do triângulo médio
- área do triângulo grande
- área do quadrado
- área do paralelogramo obliquângulo
- área do quadrado grande (correspondente à composição das 7 peças conforme a figura 1)

Por manipulação ou/e visualização estabelecem-se as relações que permitem obter as medidas da área registadas na tabela 1.

Em cada célula da tabela está registada a medida da área da peça identificada no cimo da coluna considerando como unidade a área da peça identificada no início da linha. O significado de medida de uma fração permite, por exemplo, encarar a fração 1/16, da primeira coluna da tabela 1, como exprimindo a medida da área do triângulo pequeno considerando como unidade a área do quadrado grande. O denominador — 16 — representa o número de partes iguais (triângulos pequenos) em que a unidade (quadrado grande) está dividida — e o numerador — 1 — indica quantas dessas 16 partes estão a ser medidas. Com este mesmo critério podem ser interpretados todos outros numerais desta tabela.

A tabela como meio organizado de registo de dados facilita a observação e comunicação de propriedades e outras relações importantes como passo a exemplificar:

- Em cada linha está registada a medida das (áreas das) diversas peças considerando como unidade a área da figura identificada no início da linha.
- Em cada coluna está registada a medida da área da peça identificada no seu início, considerando as seis unidades de medida.
- A medida da área é 1 quando a unidade é, ou a própria figura, ou uma figura equivalente àquela que está a ser medida.
- A medida é um número maior ou igual à unidade sempre que a unidade é menor ou igual à área a medir respetivamente; a medida é um número fracio-

| | Medida da área da peça | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Unidade (área da peça)** | Triângulo pequeno | Triângulo médio | Triângulo grande | Quadrado | Paralelogramo obliquângulo |
| Triângulo pequeno | 1 | 2 | 4 | 2 | 2 |
| Triângulo médio | 1/2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| Triângulo grande | 1/4 | 1/2 | 1 | 1/2 | 1/2 |
| Quadrado | 1/2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| Paralelogramo obliquângulo | 1/2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| Quadrado grande | 1/16 | 1/8 | 1/4 | 1/8 | 1/8 |

Tabela 1.—Medida da área das peças do Tangram com diferentes unidades

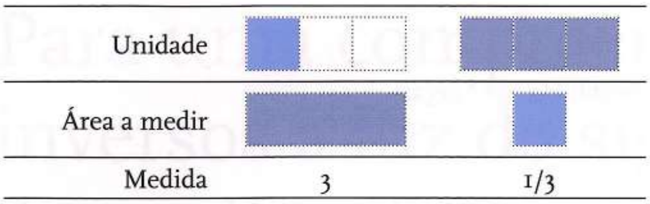



**Figura 2.**—Significado de medida para os números inversos 3 e 1/3

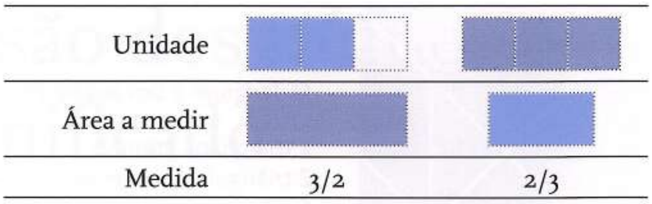



**Figura 3.**—Significado de medida para os números inversos 3/2 e 2/3

nário menor que 1 sempre que a unidade é maior que a área em medição.

- Há figuras não congruentes que são equivalentes (têm áreas iguais): paralelogramo obliquângulo, quadrado e triângulo médio.
- A grandeza (área) é invariante e a respetiva medida é variável.
- A medida da área varia com a variação da unidade.
- Existem dois pares de números inversos (2, 1/2) e (4, 1/4).

Considere-se o par de números inversos (2, 1/2). Como se pode ver na tabela 2, o numeral 2 representa a medida da área do triângulo médio quando a unidade considerada é a área do triângulo pequeno; reciprocamente, quando se considera como unidade a área do triângulo médio, 1/2 representa a medida da área do triângulo pequeno.

Em síntese, à troca de papéis entre as duas quantidades da grandeza área corresponderam os números inversos 2 e 1/2. Pode afirmar-se que:

- o inverso de 2 é 1/2.
- o inverso de 1/2 é 2 e representar-se esta relação por 1/(1/2)

Generalizando, em contextos de medida, pode afirmar-se que dadas duas quantidades da mesma grandeza e se mede cada uma delas considerando a outra como unidade, obtêm-se números inversos, representáveis por $i$ e $1/i$, com a variável $i$ positiva.

| Unidade | Medida da área da peça | |
|---|---|---|
| | Triângulo pequeno | Triângulo médio |
| Triângulo pequeno | 1 | 2 |
| Triângulo médio | 1/2 | 1 |

**Tabela 2.**—Números inversos como medida de área

## Números inversos como medida e unidade da mesma grandeza

Nesta secção, estendo as observações feitas anteriormente a outros exemplos de números inversos, concluindo com a generalização a quaisquer elementos do conjunto $Q^+$ — os números racionais positivos.

A tabela 1 apresenta dois pares de números inversos. Em cada par aparece uma fração unitária (numerador 1). Relativamente ao par (2, 1/2) pode observar-se o seguinte: 2 é a medida do triângulo médio, do quadrado ou do paralelogramo obliquângulo quando a unidade é a área do triângulo pequeno; ao inverter os papéis entre a unidade e a quantidade a ser medida, 1/2 representa a medida da área do triângulo pequeno quando qualquer uma das três figuras (equivalentes) é considerada unidade. Idêntica observação pode ser feita relativamente ao outro par (4, 1/4) de números inversos.

À luz do significado de medida de uma fração pode dar-se sentido à relação existente entre outros pares de números inversos, como passo a propor na figura 2 e na figura 3.

Como mostra a figura 2, quando a unidade é a área da peça de cima, esta cabe 3 vezes na área a medir, e portanto 3 é a medida desta; reciprocamente, quando a unidade é a área da peça que acabou de ser medida, é possível ver que a área a medir é 1 dos 3 pedaços iguais, afirmando assim que a fração 1/3 representa a medida da área menor.

Identicamente, pode ser analisado o exemplo dos números inversos representados por 3/2 e 2/3, com recurso, por exemplo a material Cuisenaire. Considerem-se as barras de cor vermelha e verde-claro equivalentes a 2 e a 3 barras brancas respetivamente. Qual é a medida da área da barra verde-claro, tomando como unidade a área da barra vermelha ou, de modo equivalente, quantas vezes cabe a unidade (barra vermelha) na barra verde-claro? A figura 3 ajuda a concluir que cabe uma vez e meia, ou seja, que a área da barra verde é 3/2 da área da unidade.

Passando à situação inversa, isto é, considerando como unidade a área da barra verde-claro e determinando a medida da área da barra encarnada, pode perguntar-se «quantas vezes cabe a unidade na área a medir?». A medida tem de ser menor que 1, pois a área tomada para unidade é maior que a área da barra vermelha; como se vê na figura 3, existe uma área (a da barra branca) que cabe um número inteiro de vezes tanto na unidade como na área a medir; a área unidade está decomposta em 3 partes iguais e a área a medir em 2 (das 3). A medida é assim 2/3. Em síntese, 2/3 e 3/2 traduzem a medida da área das duas barras, significando que cada um dos numerais representa a medida de uma das duas áreas quando a outra é considerada como unidade; 2/3 e 3/2 denominam-se números inversos, ou 2/3 é o inverso de 3/2 e reciprocamente. A fração 1/(2/3) representa a medida da unidade quando se usou a área 2/3 como nova unidade. A fração 1/(3/2) representa a medida da unidade quando se usou a área 3/2 como nova unidade. A expressão $3/2 \times 2/3 = 1$ traduz formalmente a relação entre os números inversos envolvidos.

Soltemo-nos agora da utilização do material manipulável, aproveitando a reflexão feita sobre a sua utilização em função do objetivo matemático em vista, para prosseguir no caminho da abstração e sua representação formal. Utilizando eixos orientados vamos representar o que foi discutido com o material.

Consideremos que, na figura 4, o segmento de reta *AB* representa a barra vermelha e que o segmento de reta *CD* representa a barra verde-claro.

Qual será a medida de $\overline{CD}$, considerando a unidade $\overline{AB}$?

O comprimento da barra branca mede simultaneamente os comprimentos de *AB* e de *CD*, podendo escrever-se que a unidade está dividida em 2 partes iguais e a barra a medir em três partes iguais, podendo ser afirmado o seguinte: «A unidade $\overline{AB}$ cabe 1 vez e meia em $\overline{CD}$ e portanto a medida é 3/2».

Identicamente se pode afirmar que: «A unidade $\overline{CD}$ não chega a caber uma vez em $\overline{AB}$, sendo a medida deste comprimento 2/3». A inversão de papéis entre os dois comprimentos é acompanhada da inversão do numerador com o denominador de uma das frações 3/2 ou 2/3.

Sistematizando, a exploração acabada de fazer procura responder compreensivamente à seguinte pergunta: O que é o inverso de um número não nulo? Na figura 4. estão representados dois eixos orientados em que tanto *A* como *C* correspondem a zero. Por um lado, quando se afirma que *B* corresponde a 2/3 toma-se por certo que *D* corresponde à unidade. Por outro lado, para se afirmar que D corresponde a 3/2 é preciso considerar que *B* corresponde à unidade, ou, de modo equivalente, $\overline{AB}$ é o inverso de $\overline{CD}$ quando $\overline{AB}$ é medido tomando $\overline{CD}$ por unidade. E $\overline{CD}$ é o inverso de $\overline{AB}$ quando $\overline{CD}$ é medido tomando $\overline{AB}$ por unidade.

A resposta, para qualquer número não nulo, pode assim ser formulada. O inverso de um número não nulo é o número de vezes que esse número cabe na unidade em que foi medido. Usando a variável *r*, não nula, definida no conjunto dos números racionais positivos, o inverso de *r* — $1/r$ — é o número de vezes que *r* cabe na unidade, ou seja, $1/r$, é a medida da unidade quando *r* é considerada unidade. A identidade $1 = r \times 1/r$, com $r \neq 0$ traduz formalmente a relação entre números inversos.

## Números inversos e proporcionalidade inversa

A secção anterior centrou a atenção na atribuição de significado à relação existente entre dois números inversos através da medida das grandezas área e comprimento. Houve, porém, outras relações identificadas que importa explorar. É possível agora passar à conexão com a proporcionalidade inversa, uma vez que acabou de ser explicitada a invariância existente na infinidade de pares de números inversos: produto unitário. Vem assim a propósito caracterizar a função que transforma cada número positivo no seu inverso. Considerem-se todos os pares de números inversos que apareceram neste artigo: (1, 1) (2, 1/2); (4, 1/4); (16, 1/16); (8, 1/8); ( 2/3, 3/2) e os pares inversos (1/2, 2), etc. Existe um invariante: o produto unitário de quaisquer dois números inversos. Esta invariância é traduzida pela expressão com uma variável positiva $1 = r \times 1/r$. Como pode ser confirmado pela análise da tabela 3, quando a variável r varia multiplicativamente com um fator $k \neq 0$, a variável $1/r$ correspondente varia também multiplicativamente com o fator $1/k$; por exemplo, considerando os pares ordenados (1/4, 4) e (1/2, 2) é claro que 1/2 é o dobro de 1/4; os valores correspondentes, 4 e 2 verificam a relação inversa, ou seja, 2 é metade de 4. Todas estas relações são traduzidas graficamente na figura 5 através do ramo da hipérbole definida pela equação $y = 1/r$, com *r* pertencente ao conjunto dos números racionais positivos.

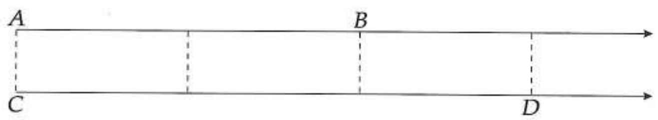



**Figura 4.**— $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ representam o comprimento da barra vermelha e da barra verde-claro respetivamente

| $r > 0$ | 1/4 | 1/2 | 3/2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1/r$ | 4 | 2 | 2/3 | 1/4 | 1/8 | 1/16 |
| Produto | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Tabela 3.— Números inversos positivos

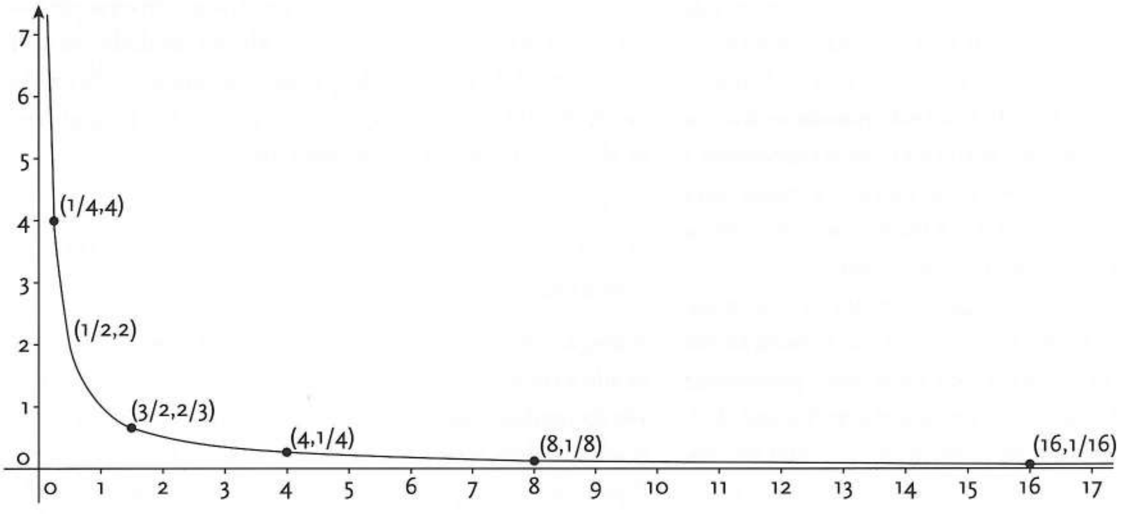



Figura 5.—Gráfico cartesiano da restrição a $Q^+$ da função definida por $y = 1/r$.

## Considerações finais

O conhecimento necessário ao ensino da Matemática nos primeiros anos requer uma complexa e contínua articulação entre a componente do conhecimento da e sobre a Matemática, do conhecimento didático e do conhecimento curricular, tanto na formação inicial como na formação contínua de professores. Este artigo, tal como escrevi no seu início, é centrado no desenvolvimento da compreensão e fundamentação da relação existente entre números inversos. Se for considerado um contributo para o desenvolvimento da compreensão que sustenta o ensino da Matemática no Ensino Básico, cumpriu o objetivo que me propus ao tê-lo colocado para discussão matemática e didática.

### Nota

[1] O conjunto dos números racionais não negativos, $Q_0^+$ é o universo numérico de referência deste artigo. As relações estabelecidas neste universo são extensíveis ao conjunto dos números reais não negativos.

### Referências


Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2008). *A Matemática na Formação Inicial de Professores.* Lisboa: APM e SPCE.

Caraça, B. J. (2002). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (4ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Ma. L. (2009). *Saber e Ensinar Matemática Elementar.* Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225–263). New York, NY: Routledge.

Veloso, G. (2015). *Conhecimento Matemático para ensinar Números Racionais no 1.º e no 2.º Ciclo de Ensino Básico: contributos para a formação inicial de professores* (Trabalho apresentado para obtenção de título de especialista). Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa.



Graciosa Veloso
Escola Superior de Educação de Lisboa

# Uma Visita de Estudo . . . Mágica!

ANA SOFIA RODRIGUES RÉZIO

Conforme previsto, naquela 3.ª feira entrámos (professores e alunos do 8.° ano) nas camionetas para dar cumprimento à nossa visita de estudo. Rumámos em direção ao Auditório para assitirmos a um Espetáculo de Ilusionismo. Íamo-nos divertir!

Chegada a hora prevista o Mágico surge no palco, vestido de preto dos pés à cabeça, e, com um ar descontraído, dirigiu-nos algumas palavras simpáticas.

Havia uma mesa branca que contrastava com um cenário de fundo preto, onde se avistava um grande relógio metálico. Em cima da mesa, uma cartola vermelha, um baralho de cartas, uma tesoura e, claro, um condão!

O mágico esticou os braços e sacudiu umas purpurinas douradas para cima da cartola. O que aconteceu?!.... a cartola começou a levitar, deixando um rasto dourado atrás de si! Como é possííiiiiivel?!... Provavelmente, está presa a algum fio — pensei. Mas, rapidamente, esta minha teoria caíu por água abaixo — o mágico passou as suas mãos por cima e por baixo da cartola e, num gesto, ordenou-lhe que descesse e pousasse novamente sobre a mesa.

Em seguida, pegou num grande pano preto, virou-o de um lado, do outro e segurou-o em frente à mesa, para nos ocultar a visão. Sacudiu-o três vezes e ... zás!...retirou-o. A cartola estava agora grudada na parte de baixo do tampo da mesa, virada ao contrário!

— Nossa! — exclamei — Até parece que a mesa é um espelho!

Voltou a colocar o pano à frente e, apontando para o grande relógio prateado que marcava 15:15, acrescentou em alto e bom som:

— Pelo poder da rotação conferido aos ponteiros do meu relógio mágico!.....

Com os olhos esbugalhados, quase a saltar das órbitas fixámo-nos nos ponteiros que vimos avançarem para as 15:45 e tchanammmm! O pano preto foi retirado e a cartola surgiu novamente em cima da mesa!

Fiquei superhipermegaintrigado: como teria o mágico conseguido tal feito? Será que havia alguma relação entre o truque e as posições dos ponteiros do relógio?... Porém, não tinha tempo, nessa altura, para pensar mais nisso, ficaria para depois, o espetáculo continuava e tinha que prestar atenção ao truque que se seguia.

O mágico pegou num baralho de cartas e com os seus longos e ágeis dedos baralhou, baralhou e baralhou. Que poderia eu esperar de um truque deste tipo, tão clássico, que ainda não tivesse visto? Retirou uma carta e colocou-a em cima da mesa. Em seguida, retirou mais uma, ficando com ela na mão e pousando o baralho de lado. Arregaçou as mangas, esticou os braços na nossa direção e mostrou-nos a carta em que delicadamente pegava com as pontas dos dedos da mão direita. Dobrou-a ao meio, rasgou-a e ficou com uma das metades, colocando a outra metade ao lado da primeira. Sacudiu-a muito rapidamente e, num ato mágico transformou-a no dobro do tamanho! Conseguiu transformar metade de uma carta numa carta do tamanho original. Bom, de qualquer modo, nada de tão impressionante assim — pensei.

Voltou a retirar mais uma carta do baralho, dobrou-a ao meio, rasgou-a, ficando com uma metade, voltou a dobrar esta metade ao meio, rasgou-a e ficou com uma nova metade na mão, colocando a respetiva metade ao lado da segunda.

— E agora? Para transformar esta carta numa de tamanho original preciso de saber quantas vezes tenho que a ampliar! Preciso da vossa ajuda para poder continuar! — pediu o mágico.

De entre o público, ouviu-se uma tímida voz, a da Sara (que por acaso nunca se ouvia nas aulas de Matemática) que, meio a gaguejar, disse: quaatrrooo..eu aachocho...

— É isso! Boa! – respondeu o mágico.

E... Tlim! Aquele pedaço de carta transformou-se numa carta do tamanho original.

E mais uma vez o mágico repetiu o processo. Retirou mais uma carta do baralho e dobrou, rasgou, dobrou, rasgou, dobrou, rasgou e ...

— Abracadabra, abracadabra, que se cumpra esta lei de formação macabra! — proferiu o mágico.

E...outra vez do tamanho original!

— E se eu continuasse ... se repetisse o processo 100 mil vezes, o que aconteceria? Que tamanho teria o pedaço de carta que iria colocar em cima da mesa? — perguntou.

Fez-se um silêncio profundo, ninguém se atreveu a arriscar uma resposta!

As restantes cartas do baralho continuavam seguras na sua mão esquerda. Passou as cartas muito rapidamente de uma mão para a outra uma série de vezes seguidas, como só os mágicos têm habilidade para o fazer. Pediu a colaboração de alguém do público e eu ... ofereci-me. Não resisti. Assim, pelo menos poderia ver mais de perto. Encerrou o baralhou nas suas duas mãos e pediu-me que enrolasse um cordel em volta delas.

— Quando eu disser as palavras mágicas, retiras o cordel, ok? — disse o mágico.

— Ok! — respondi eu.

Projetando a sua voz, continuou:

— Abracadabra! Que ao ser retirado o cordel, o limite se revele!

Eu retirei o cordel e quando o mágico abriu as mãos o baralho tinha desaparecido...

Não percebi a resposta... a suposta subentendida resposta. Foquei o meu olhar nos rostos de alguns dos meus colegas e mais parecia terem um ponto de interrogação escrito na testa!

Com um rasgado sorriso (pois se há coisa que deixa os mágicos felizes é conseguirem espantar o seu público) agradeceu-me, pediu-me que voltasse para o meu lugar e preparou-se para avançar para mais um truque.

— Vou agora precisar que alguém me ceda gentilmente o seu bilhete! — explicou o mágico.

Logo quatro ou cinco alunos ergueram os seus bilhetes numa das mãos.

— Hummmm, mas não pode ser um bilhete qualquer! Estou a ver que tu aí tens o bilhete n.° 65... tu, o n.° 72, ora...97! Exato! O bilhete número 97, por favor! — pediu.

Levantou-se a Filipa, corada, vermelha que nem um tomate! Ela nem queria acreditar! Caminhou até ao palco e entregou-o. O mágico pegou no seu bilhete retangular e, dobrando-o ao meio por uma das suas diagonais, rasgou-o, ficando com uma metade e entregando a outra à Filipa. Esticando os braços, mostrou ao público o seu pedaço de bilhete, agora triangular, e apontou para um dos lados do triângulo, observando em voz alta que era esse o lado com maior comprimento.

— Vou agora dobrar este triângulo perpendicularmente ao seu lado mais comprido de forma a obter dois novos triângulos. – adiantou.

Mais uma vez dobrou e rasgou, ficando com dois novos triângulos, que pegou com a sua mão esquerda, um mais pequeno e um maior. A sua mão direita pegou no condão e ouviu-se:

— Pelo poder mágico conferido a este condão, que se profece a redução!

E, ao tocar no triângulo que a Filipa segurava, este diminuíu de tamanho.

— Filipa, agora vê se o teu triângulo ficou igual a algum dos meus, por favor. — pediu-lhe.

E, de facto, a Filipa fê-lo coincidir com o triângulo maior que o mágico segurava na sua mão esquerda.

— E que a magia volte a acontecer! — disse o mágico, ao tocar novamente no triângulo da Filipa.

Ao vê-lo diminuir novamente, quando foi tentar fazê-lo coincidir com o triângulo mais pequeno do mágico... foi na perfeição! Ponto por ponto!

O aplauso foi geral, tendo ficado nós, alunos, a pensar se o truque também teria resultado caso o mágico tivesse inicialmente dobrado a sua metade triangular do bilhete da Filipa, de outra forma.

Outros truques se seguiram e, no final do espetáculo, regressámos à camioneta, rumo à escola.

Percebia-se no rosto da minha professora de Matemática a sua expectativa nas reações dos alunos.

— Então, digam-me, conseguiram ver alguma Matemática no deslocamento da cartola? — perguntou.

— Sim! – respondeu prontamente o José —- Como o deslocamento foi em linha reta, eu acho que podemos subentender uma translação... e o rasto era o vetor translação; certo, *stora*?

A professora sorriu.

— Então e quando a cartola surgiu debaixo da mesa virada ao contrário? — inquiriu a professora.

— Foi como se a mesa fosse um espelho, foi uma reflexão em que a mesa funcionou como eixo de reflexão! — expliquei eu.

— E o poder mágico dos ponteiros do relógio? Esta é mais dificil..... — disse a professora, à espera que alguém conseguisse continuar.

O Gonçalo levantou e baixou o braço várias vezes, indeciso com a resposta que temia avançar:

— O ponteiro dos minutos avançou 30 minutos, certo? Quer dizer, rodou 180°, que foi precisamente o que a cartola rodou de baixo para cima, ao voltar à sua posição inicial.

— Fantástico, Gonçalo! É isso mesmo! — retorquiu a professora.

Voltou-me à memória o momento em que eu tinha subido ao palco e ajudado no truque com as cartas, lembras-te? Eu retirei o cordel e, quando o mágico abriu as mãos, o baralho tinha desaparecido...

— *Stora*, o que é que o mágico quis dizer, fazendo desaparecer o baralho de cartas, ficando sem nada? — perguntei.

— Rui, lembras-te que em cada nova carta em que o mágico pegava a dobrava ao meio mais uma vez que a anterior, ficava no final com um pedaço cada vez mais pequeno que o anterior..... mais precisamente com metade do tamanho do pedaço anterior. Então, se ele continuasse esse processo, os pedaços que obtinha eram cada vez mais pequenos e, portanto, no limite ficaria com um pedaço de tamanho nulo, ou seja, nada! — explicou-me.

Depois falámos sobre a forma como a Filipa tinha sido escolhida e como pareceu o mágico ter feito umas contas. Perguntei aos meus colegas se tinham percebido de que contas se tratava. O Pitas (quer dizer, o Pedro, que por acertar todos os exercícios que fazíamos nas aulas sobre o Teorema de Pitágoras assim ficou baptizado por nós ) apressou-se logo:

— Meus, olhem lá, 65 ao quadrado mais 72 ao quadrado dá 9409 e a raiz quadrada de 9409 é 97! É um terno pitagórico!

— Ichh! Pois é! — balbuciei.

— Então e os triângulos? Se, quando o mágico fez as reduções, o triângulo da Filipa ficou a coincidir com os dele é porque tinham a mesma forma, verdade? — perguntou-nos a professora.

— Sim, *stora* — acrescentou mais uma vez o Pitas — têm a mesma forma é o mesmo que dizer são semelhantes. E são semelhantes porque, quando o mágico dobrou a sua metade triangular do bilhete da Filipa, pelo lado de maior comprimento, dividiu o triângulo pela altura referente à hipotenusa, e, como nós vimos nas aulas, dessa forma ficamos com dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes também ao triângulo original!

Esta foi, sem dúvida, uma experiência fora de portas marcante para todos nós!

Ana Sofia Rodrigues Rézio
(com a colaboração da aluna Catarina Neves Gonçalves)
Escola: EB2/3 D. Pedro IV
Agrupamento de Escolas Miguel Torga

# Eu Aluno/a, assumo o controlo da minha própria aprendizagem: Uma experiência no âmbito do projeto iTEC

SÓNIA BARBOSA

Como será a educação no futuro, será com certeza diferente do que é agora. A tecnologia está em constante evolução e cabe a nós, professores, recorrer a essa mesma tecnologia contextualizada numa metodologia que sirva às aprendizagens dos nossos alunos.

«Se ensinarmos hoje da mesma forma como ensinámos ontem, roubamos às nossas crianças o amanhã (Dewey , 1971)».

Um dos grandes objetivos da educação de hoje é também desenvolver, nos nossos alunos, competências para o século XXI, como por exemplo: criatividade, inovação, pensamento crítico, resolução de problemas, tomada de decisão, comunicação, colaboração, investigação e questionamento, flexibilidade e adaptabilidade, iniciativa e autonomia, etc.

Com vista à construção de uma sala de aula inovadora com recurso à utilização de tecnologia digital e à inovação pedagógica participei num projeto, o iTEC (Innovative Technologies for an Engaging Classroom, http://itec.eun.org), que pretendia a alteração das práticas pedagógicas. Assim, estas práticas estariam assentes em quatro princípios fundamentais: 1) articular tecnologias digitais e pedagogia para tornar a escola do futuro mais aliciante; 2) deslocar parte da ação pedagógica do professor para o aluno; 3) promover hábitos de aprendizagem que se prolonguem ao longo da vida; 4) desenvolver processos de ensino e aprendizagem que saiam da tradicional sala de aula.

O projeto que irei relatar realizou-se no último ciclo de pilotagem do iTEC, que teve a duração de 5 anos letivos (um ciclo por cada ano letivo).

O projeto foi desenvolvido numa turma do 7.º ano de escolaridade na Escola Básica 2.º e 3.º Ciclo de Álvaro Velho — Barreiro. O Cenário de Aprendizagem desenvolvido foi a «Utilização de Tecnologias para enriquecer os processos de ensino e aprendizagem», sendo a História de Aprendizagem aplicada, «Construção de um *website* relacionado com o currículo para apresentar à comunidade». Como o nome indica, uma História de Aprendizagem pretende ser o processo de ensino e aprendizagem levado a cabo pelos professores em contexto de aula. Para a operacionalização de todo o projeto selecionei o tópico Geometria.

Para a implementação da História de Aprendizagem foram desenvolvidas 9 atividades de aprendizagem que auxiliaram os alunos no percurso de todo o projeto.

## 1.ª ATIVIDADE SONHAR


Apresentei um resumo da História de Aprendizagem à turma, relacionei-a com o currículo e com o que se pretendia apresentar como resultado à comunidade, mas deixando margem para a interpretação e para o «sonho». Motivei os alunos para darem o seu melhor e falei-lhes acerca da liberdade que teriam relativamente ao projeto. Apresentei as diferentes Atividades de Aprendizagem e uma programação[1]. Negociei alguns critérios de avaliação com a turma[2]. Dei autonomia aos alunos para formarem grupos, mas supervisionei o processo. A partir de um *brainstorming*, promovi a discussão sobre o projeto e formas de conceção. Nesta fase os alunos começaram a idealizar o que poderiam fazer, quais os grandes objetivos a alcançar, quais as dificuldades que poderiam de antemão prever.... Pedi aos grupos para desenvolverem e sugerirem alterações ao resumo inicial, propus tarefas, metodologias de investigação, formas de exporem o produto final. A Tecnologia subjacente à atividade Sonhar foi o Prezi (www.prezi.com) — Ferramenta de apresentação; - Weebly (www.weebly.com) — construção de *websites*; TeamUp (http://teamup.aalto.fi) — Formação dos grupos.

## 2.ª ATIVIDADE EXPLORAR


Os alunos, em grupo, exploraram no contexto do seu projeto, observando e projetando práticas e ambientes relevantes, usando, para tal, câmaras digitais, computadores portáteis e *tablets*. Esta exploração foi complementada com a procura de trabalhos existentes relacionados com os seus projetos, desta forma recolheram exemplos importantes para o que pretendiam fazer. Os alunos construíram uma tabela onde registaram os cinco exemplos mais relevantes e para cada um deles indicaram o endereço/descrição/razão da seleção[3].

Como professora dei especial atenção à articulação entre o que queriam explorar, o público-alvo dos seus trabalhos e as possíveis formas de divulgação. Verifiquei se os grupos distribuíram bem os seus papéis e as tarefas. Tecnologia subjacente à atividade Explorar: Bing (https://www.bing.com) — pesquisa de *websites*; Google (https://www.google.com) — pesquisa de *websites*; — *office online*.

## 3.ª ATIVIDADE MAPEAR


Sob a minha supervisão, os grupos analisaram e organizaram as informações que recolheram, utilizando tecnologias de mapeamento mental. Com base nesse mapeamento, os grupos aperfeiçoaram a sua conceção, em particular os desafios colocados na realização do projeto, a exposição dos resultados e o público-alvo a quem se destinava o produto final. Tecnologia subjacente à atividade Mapear: Text2mindmap (https://www.text2mindmap.com/) — construção de mapas de ideias (figura 1).

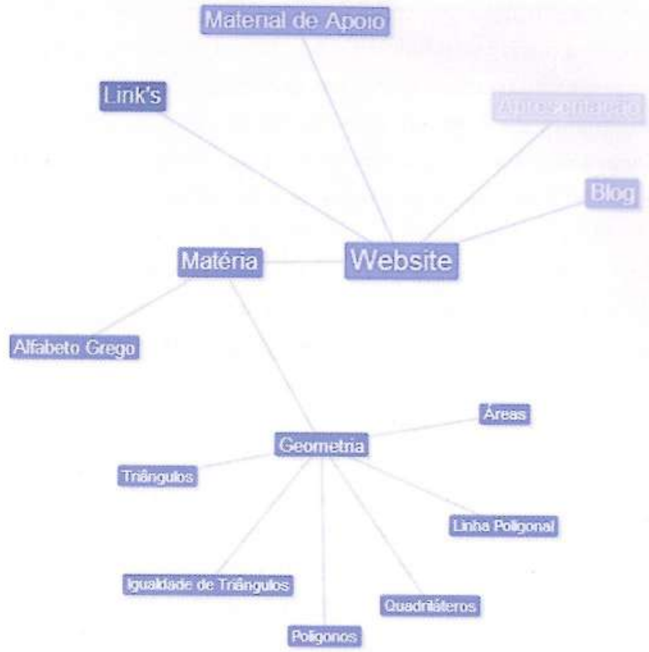



**Figura 1.**—Exemplo de um mapa de mental — páginas do *website*

## 4.ª ATIVIDADE FAZER


Os alunos iniciaram a construção de uma primeira versão do seu trabalho. Criaram um esboço, tendo atenção à forma como podiam ultrapassar os desafios e problemas encontrados.

Como professora foi importante orientar os meus alunos para as atividades de aprendizagem e para o processo de conceção, de modo a que não se perdesse o foco dos conteúdos curriculares. Para evitar uma repartição desigual do trabalho dentro do grupo, reforcei a importância de distribuir cuidadosamente as tarefas e os papéis de cada aluno dentro de cada grupo.

Para controlo das aprendizagens dos alunos, quando divulguei a calendarização das tarefas, previ momentos em que os grupos me faziam chegar a resolução de um conjunto de exercícios por mim indicados. No início do projeto, como eu estava à espera ,os alunos ao serem confrontados com exercícios de aplicação tentavam logo resolver sem antes aprenderem o conteúdo a aplicar. Como também seria de esperar não conseguiam interpretar as questões e não conseguiam resolver nenhum dos exercícios propostos. Este acabou por ser um alerta para os alunos que estavam a iniciar o trabalho do fim para o princípio, revendo assim as suas abordagens aos conteúdos. Claro que pontualmente esclareci dúvidas pertinentes que os alunos colocavam, no entanto tentei sempre dar pistas e fazer com que eles conseguissem chegar aos objetivos sozinhos.

Nesta fase também lancei alguns desafios para o uso de aplicações como o *Geogebra*, *Scratch*, *Poowton* entre outras. Assim, por exemplo, nos seus *websites* os alunos colocariam construções geométricas elaboradas por eles com recurso ao *Geogebra*, construiriam *quizzes* utilizando o Scratch e realizariam pequenas apresentações recorrendo à aplicação *Poowton*. Tecnologia subjacente à atividade Fazer: *Weebly* (www.weebly.com) — Para construir um *website*; *Geogebra online* (http://geogebraweb.appspot.com/app.html) — *Software* de geometria dinâmica; *Scratch 2.0* (http://scratch.mit.edu/) — Para programação; *GoAnimate* (http://goanimate.com/) — Para construir animações; *Powtoon* (http://www.powtoon.com/) — Para construir animações; *Widget Store* (http://wookie.eun.org/Store/) — Para visualizar e mostrar aplicações.

## 5.ª ATIVIDADE PERGUNTAR


Para esta atividade contactei parceiros exteriores à escola, especialistas, futuros utilizadores dos projetos ou outros interessados, nomeadamente uma *webdesigner*, uma professora de matemática e quatro dos seus alunos do 10.º ano, que também estavam a construir *websites*, o diretor do agrupamento e professores da escola, representante de pais, professora bibliotecária e professores da Escola. Os alunos apresentaram os protótipos dos seus *websites* com as suas ideias de conceção. Pediram aos presentes que analisassem e comentassem os pontos fortes e fracos dos seus *websites* e da conceção.

Esta atividade revelou-se de grande importância para os alunos uma vez que o processo de preparação da apresentação dos protótipos fez com que os alunos refletissem acerca dos seus trabalhos dando um salto significativo no seu desenvolvimento. A capacidade de comunicação com elementos exteriores à sala de aula foi outra grande mais-valia. Apesar do grande nervosismo inicial, foi interessante constatar que a meio das apresentações este já não era visível, pois os alunos aperceberam-se que apenas estavam a expor o que eles tinham construído e não a serem testados como se fosse um exame.

## 6.ª ATIVIDADE REFAZER


Depois dos alunos receberem comentários e sugestões, foi pertinente a reformulação de alguns campos da conceção do *website*.

Nesta fase houve grupos que quase iniciaram o trabalho por pensarem que conseguiriam fazer muito melhor e aproveitar as sugestões dadas. Por vezes, os alunos, ignoram os alertas dados por nós professores. Por exemplo, o facto dos grupos escolherem um grafismo de *website* todo cor de rosa, uma vez que o grupo era formado só por raparigas, ou um separador com o nome «matérias» ao invés de conteúdos, ou o *design* escolhido não ser apelativo aos conteúdos trabalhados, aspetos já por mim assinalados e ignorados pelos alunos. O *feedback* dado por alguém exterior à sala de aula referindo estes mesmos aspetos foi valorizado e teve um efeito muito positivo nos alunos e na qualidade dos *websites*.

## 7.ª ATIVIDADE MOSTRAR


Após a conclusão dos *websites* os alunos partilharam os seus trabalhos com os professores do conselho e turma e todos os encarregados de educação e pais numa sessão no auditório da escola. Foi visível o empenho dos alunos bem como a melhoria significativa das apresentações comparativamente com as realizadas na atividade Perguntar. Verificou-se um grande desenvolvimento nas competências de comunicação dos alunos.

Também se realizou uma partilha de experiências com todos os professores do agrupamento, apresentando eu o projeto. A partilha consistiu na divulgação de toda a metodologia e resultados finais do projeto.

Foi necessário nesta atividades os alunos pensarem na melhor forma de apresentação dos seus trabalhos. O objetivo desta atividade foi a transferência das aprendizagens e conclusões a que chegaram para que outros as pudessem ver, utilizar ou melhorar.

## 8.ª ATIVIDADE COLABORAR



Figura 2.—Aplicação *TeamUp* para realizar gravações

Esta atividade percorreu todo o projeto. Como a turma estava inserida no ciclo de pilotagem iTEC, foi criado um grupo fechado no Facebook onde os alunos mostravam os seus trabalhos a outras salas de aula envolvidas no projeto iTEC e partilhavam informação. Esta colaboração muitas vezes era efetuada dentro da sala de aula. Por vezes determinados grupos eram mais expeditos em determinada tecnologia que outros grupos revelavam dificuldades, assim existia uma colaboração entre os alunos onde os grupos auxiliavam-se quando surgiam dúvidas.

## 9.ª ATIVIDADE REFLETIR


Esta atividade foi transversal a todas as Atividades de Aprendizagem e poderá ser entendida como uma meta-atividade orientadora do trabalho dos alunos. Os alunos foram construindo paulatinamente um conjunto de formas de responder aos desafios que foram enfrentando. No final de todo o projeto estas reflexões deram uma visão geral de como os alunos reagiram nas diferentes atividades propostas.

É também de salientar que a reflexão permite que os alunos não cometam os mesmos erros uma vez que é dada a oportunidade de refletirem em conjunto, no grupo, sobre todo o processo.

Os alunos realizavam uma reflexão gravada com um minuto e publicavam num blogue que fazia parte do seu *website*, onde respondiam às questões: O que fizemos, o que vamos fazer e quais os problemas detetados. Tecnologia subjacente à atividade Refletir: *Weebly* (www.weebly.com) — construção de *websites*; *TeamUp* (http://teamup.aalto.fi) — Gravar a reflexão (figura 2).

Este foi o percurso para a operacionalização da nossa História de Aprendizagem. Os alunos revelaram um grande sentido de responsabilidade durante todo o processo, realizaram as suas aprendizagens autonomamente utilizando variadas tecnologias, facto que era essencial para o sucesso do projeto. O único recurso que senti mais dificuldade em gerir foi o *TeamUp* e as reflexões no blogue, este aspeto também passa muito pela idade dos alunos (12 anos), e pela falta de treino na reflexão das suas aprendizagens, quando é pedido para os alunos refletirem facilmente caem no «correu bem» ou «estivemos a trabalhar...» não refletindo sobre o que correu bem e qual a causa de ter corrido bem. Para contornar este aspeto realizei em sala de aula uma pequena discussão associada a um inquérito onde era pedido que os alunos refletissem acerca de todo o processo de ensino/aprendizagem. Assim, a maioria dos alunos referiu que o processo de aprendizagem ser por si controlado foi muito positivo, enriquecedor e divertido, afirmando que: «...foi diferente, sem ter a professora a dizer a matéria»; «...pois sou eu a procurar, pesquisar, perguntar...»; «...aprendendo sozinha é mais fácil de entender tudo»; «... consigo perceber o que escrevo no *site*...»; «...aprendemos muita coisa nova.»; «...nós é que fomos à descoberta.»; «... ao aprender sozinha fiquei a perceber melhor a matéria.»; «...dá-nos mais curiosidade sobre a matéria.»; «...aprendo autonomamente enquanto as outras turmas a matéria é dada pelo professor.»; «...permitiu que eu conseguisse testar a minha capacidade de aprendizagem.».

Em síntese: o uso das tecnologias foi sem dúvida essencial para a motivação dos alunos e para a elevada qualidade dos resultados finais apresentados. Esta geração é a geração das tecnologias e cabe a nós, professores, canalizar estas para as nossas salas de aula, permitindo assim aos alunos a sua utilização de forma criteriosa e com grande sucesso na aprendizagem dos alunos.

Na disciplina de Matemática verifiquei um melhor desempenho comparativamente com as turmas que não realizaram o projeto. Quando confrontados com os exercícios e problemas sobre a temática desenvolvida « Polígonos», os alunos envolvidos no projeto aplicaram diferentes estratégias de resolução enquanto os restantes alunos limitaram-se a aplicar as fórmulas dadas na aula e não mobilizaram o trabalho realizado nas atividades exploratórias.

Não, não sou especialista em tecnologia, nem pretendo ser, sou professora de Matemática e uso a tecnologia para dinamizar atividades que irão enriquecer os meus alunos e contribuir para a melhoria das suas aprendizagens.

Quando estou a preparar uma atividade, claro que tenho de ter alguns cuidados. Por exemplo, experimentar a tecnologia, em casa e na sala de aula, antes de a apresentar aos alunos, pois muitas vezes o que funciona perfeitamente nos nossos computadores pessoais/*tablets* não funciona da mesma forma em sala de aula. Após o domínio da tecnologia a aplicar não podemos ter receio dos nossos alunos saberem mais do que nós, até porque os alunos não percebem muito de tecnologia (mas eles julgam que sim). Também é verdade que depois de entenderem e perceberem como esta funciona são capazes de a explorar até à exaustão. Se tenho medo desse estágio... claro que não, pois aprendo muito com os meus alunos e fico muito feliz quando consigo que eles me ensinem qualquer coisa (cumpri um dos meus objetivos).

Os nossos alunos no futuro irão usar a tecnologia no seu dia à dia e é nas escolas que eles têm de aprender a dominá-la e a utilizá-la de uma forma correta para o seu desenvolvimento pessoal e profissional, e para os ajudar aqui estamos NÓS.

Como fonte de inspiração deixo o meu *website* que serviu de guião para os alunos por todo o projeto bem como os seis *websites* que os alunos criaram.

http://historiadeaprendizagemav7b.weebly.com/apresentaccedilatildeo.html

http://historiadeaprendizagemav7b.weebly.com/web-alunos.html

## Notas

[1] Calendarização disponível em http://historiadeaprendizagemav7b.weebly.com/calendarizaccedilatildeo.html

[2] Critérios de avaliação disponíveis em http://historiadeaprendizagemav7b.weebly.com/avaliaccedilatildeo.html

[3] Disponível em http://historiadeaprendizagemav7b.weebly.com/apoio-ao-explorar.html

## Referências

Dewey, J. (1971). *Experiência e Educação*. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional.

**Sónia Barbosa**
Agrupamento de Escolas de Álvaro Velho


Dezoito anos depois, eis-nos na cidade de Leiria onde tudo começou. O encontro dedicado ao ensino e aprendizagem da Matemática nos primeiros anos será, desta vez, acolhido pela Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria, instituição com 35 anos de experiência na formação inicial e contínua de Educadores de Infância e Professores dos primeiros anos.

Este Encontro nasceu, essencialmente, para dar mais visibilidade à Educação Matemática nos primeiros anos, constituindo-se como um espaço para divulgação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados por professores e investigadores.

Como afirma Tolentino de Mendonça «a vida de cada um de nós não se basta a si mesma: precisamos sempre do olhar do outro, o que é um olhar o outro, que nos mira de um outro ângulo (...). A vida só por intermitências se resolve individualmente, pois o seu sentido só se alcança com a partilha». É isto que nos move, partilhar experiências, discutir novas abordagens...

http://www.apm.pt/encontro/encontro_dos_primeiros_anos_2015.php?id=217497

Até Novembro em Leiria!

# APM 2015 — sócios

## Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

## Modalidades de associado e seus direitos

### Modalidades de associado

Atualmente a APM oferece seis modalidades de sócio individual:

- sócio regular
- sócio estudante regular
- sócio estudante @-sócio
- sócio aposentado
- @-sócio
- sócio residente no estrangeiro

e cinco modalidades para sócios institucionais, dependentes do tipo de produtos a que tem direito e que estão discriminadas na tabela abaixo.

### Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

### Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

### Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

### Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

## Quotas anuais para 2015

| Modalidades de associado individual | |
|---|---|
| Professor no ativo (sócio regular) | 50,00 € |
| Estudante s/vencimento (com regalias de @-sócio) | 15,00 € |
| Estudante s/vencimento (com regalias de sócio regular) | 38,50 € |
| Professor aposentado | 38,50 € |
| @-sócio | 38,50 € |
| Sócio residente no estrangeiro | 60,00 € |

| Modalidade de associado institucional | |
|---|---|
| Modalidade I [1 exemplar da E&M] | 60,00 € |
| Modalidade II [2 exemplares da E&M] | 80,00 € |
| Modalidade III [1 exemplar da E&M + *Quadrante*] | 75,00 € |
| Modalidade IV [2 exemplares da E&M + *Quadrante*] | 100,00 € |
| Instituição no estrangeiro | $150,00 (USA) ou 120,00 € |

## Assinaturas das revistas para 2015

| | | *Educação e Matemática* (5 números/ano) | *Quadrante* (2 números/ano) |
|---|---|---|---|
| Associados individuais | Portugal | | 15,00 € |
| | Estrangeiro | | 20,00 € |
| Não associados individuais | Portugal | 47,00 € | 35,00 € |
| | Estrangeiro | 65,00 € | 45,00 € |
| Não associados individuais | Portugal | 75,00 € | 50,00 € |
| | Estrangeiro | 85,00 € | 60,00 € |

índice