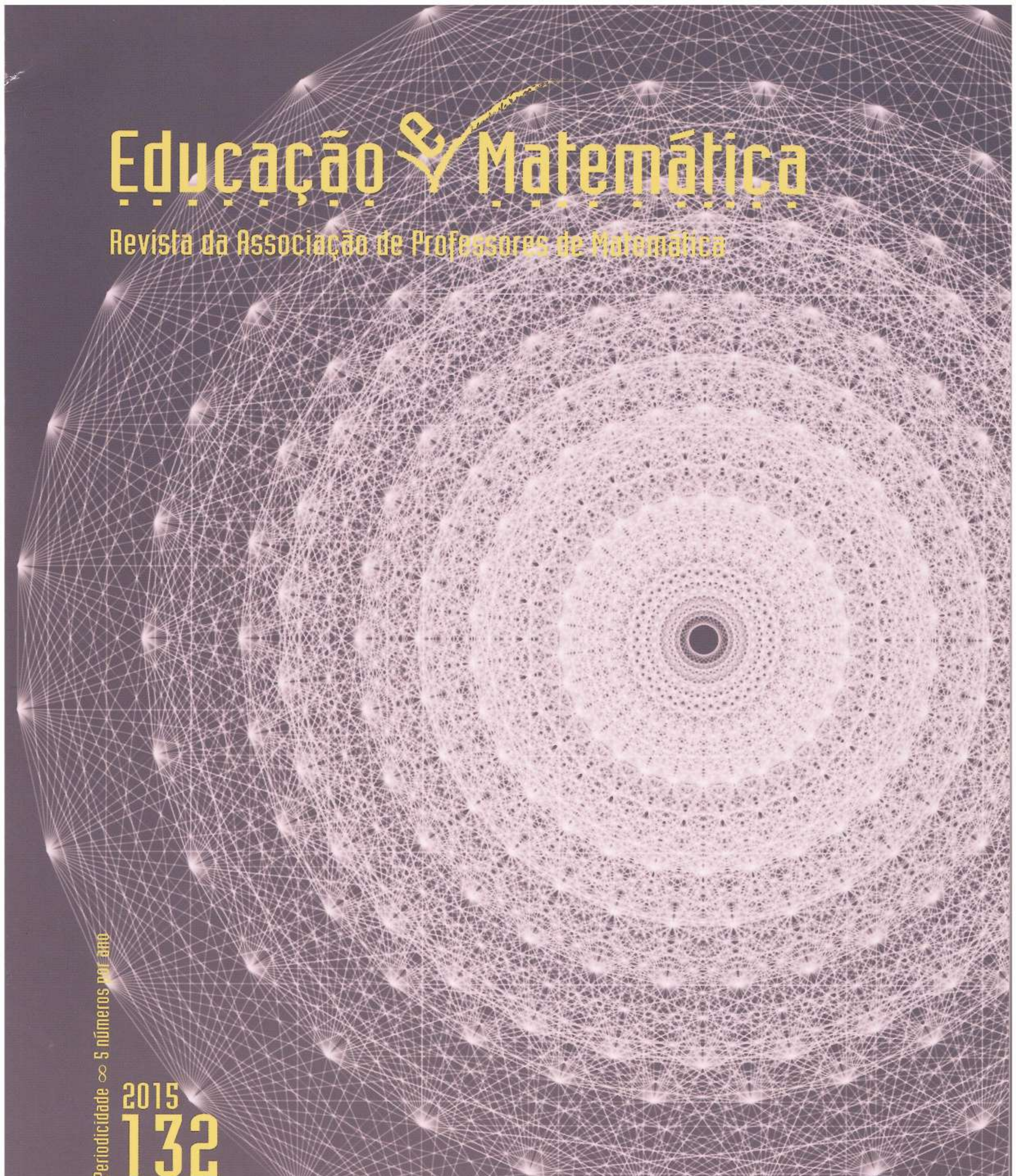
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



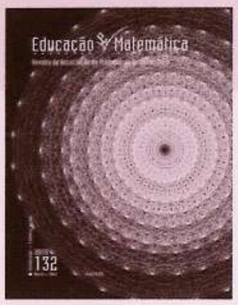
Periodicidade ∞ 5 números por ano

2015

132

Março ∞ Abril

Preço 5,75€



ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Cruchinho
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	Manuela Pires
	Paulo Alvega
	Rita Mestre
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2014
Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Abril 2015
Tiragem 1500 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.º 8
Casal da Espinheira
2560–401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre a capa

Na capa deste número surge uma das projecções planares do sistema de raízes associado a uma estrutura matemática importante—uma álgebra de Lie—conhecida como E8. Esse sistema de raízes «habita» um espaço de dimensão 8. Assim, uma determinada realidade matemática torna-se acessível através de diversas descrições. Uma mesma coisa pode, do ponto de vista matemático, revelar-se através de objectos matemáticos distintos e essa pluralidade favorece o entendimento—a coisa essencial. No fundo, a capa pretende solidarizar-se com o tom geral do editorial do presente número.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Boavida, Ana Isabel Silvestre, Cristina Tudella, Fernando Nunes, Helena Amaral, João Teodoro, José Pastore Mello, Luiz Freitas, Margarida Rodrigues, Patrícia Beites, Paula Serra, Ricardo Ferreira.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

Pensando sobre a Matemática para perspetivar o seu ensino

Muitas pessoas são vítimas de ideias mistificadoras sobre o que é e como progride a Matemática. Fruto de uma experiência matemática redutora, pensam em números, fórmulas, símbolos crípticos e cálculos descontextualizados que seguem regras impostas e que, amiúde, se associam a estranhas armadilhas técnicas. Atribuir sentido aos símbolos, compreender o significado e origem das fórmulas e o porquê dos procedimentos, não integram a sua imagem da Matemática.

Só que a Matemática não é sobre símbolos e cálculos. Estas são apenas as ferramentas do ofício. É sobre ideias e sua inter-relação. E as regras não são arbitrárias mas antes construídas com um propósito. Não é possível compreendê-la seguindo apenas regras e ignorando a sua razão de ser, em que se fundam e como evoluem. Em certa medida, o mesmo acontece com os símbolos. É um facto que o pensamento conceptual e abstrato, seja matemático ou não, manipula símbolos mas é essencial que se consiga descortinar as ideias que representam, sob pena de se cair na perversidade, típica da sociedade do espetáculo, de tomar o símbolo pela própria coisa. Em Matemática, o simbolismo é apenas a forma codificada, não a sua essência. Um ensino que negligencie a atribuição de significado aos símbolos até pode contribuir para os alunos desenvolverem comportamentos de *reflexo simbólico*, típicos de animais, mas dificultará a sua *iniciativa simbólica*, ou seja, que identifiquem símbolos para representar ideias, que os relacionem e que operem com eles pensando no que lhes está subjacente, o que é essencial para construírem, compreendendo, novo conhecimento.

Outra ideia bastante comum é que Matemática é um domínio de saber rigoroso no qual a validade dos enunciados deriva de fundamentos absolutos e autoevidentes através de encadeamentos de raciocínios dedutivos. Nesta concepção persegue-se a busca de uma linguagem artificial que afaste ambiguidades e o que se prova é considerado necessário e irrefutável. A validade e o carácter de necessidade são garantidos pelo formalismo da linguagem. Quem defende esta perspetiva considera, amiúde, que «o raciocínio matemático é, por excelência, o raciocínio hipotético-dedutivo» (MEC, 2013, p. 4).

Há alguns anos que se assiste a um forte questionamento desta visão destacando o seu carácter redutor. Kline (1989) refere que a criação matemática é, antes de mais, a obra de homens notáveis pela sua forte intuição. Foi, aliás, uma intuição muito apurada, baseada numa compreensão profunda dos conceitos, que permitiu a matemáticos do século XVIII obter importantes resultados embora não fossem guiados por definições rigorosas. É duvidoso, até, que tivessem sido capazes de chegar a vários deles se estivessem oprimidos pelos atuais padrões de rigor. Hersh (1997), assumindo uma posição filosófica que designa por humanista, indica que em Matemática o método é conjeturar e provar e que os problemas vêm em primeiro lugar. E Pólya defende que o raciocínio demonstrativo e o plausível são duas faces da mesma moeda que não se contradizem, mas antes se completam.

Situarmo-nos numa perspetiva filosófica humanista tem importantes repercussões para o ensino da Matemática. Ver a resolução de problemas apenas como campo de aplicação de «regras e procedimentos, previamente estudados e treinados» (MEC, 2013, p. 5), colocar uma ênfase prematura no rigor de definições, na formalização de conceitos e na manipulação simbólica, dar a primazia ao raciocínio hipotético-dedutivo remetendo para plano secundário processos intuitivos, observações indutivas, explicações, justificações e métodos informais de matematização, é caminhar em sentido contrário ao que fez progredir a Matemática, eliminando bases poderosas para a aprendizagem. É importante que em qualquer tópico matemático e no dia-a-dia da aula ocorram oportunidades para os alunos construírem sentido para a Matemática. E como esta ciência não cresce apenas por incrementos sucessivos, mas também por revoluções ocasionais, apenas se se aceitar a possibilidade de errar no presente se poderá esperar que o futuro traga melhorias significativas ao nosso conhecimento.

Referências

Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* Oxford: Oxford University Press.

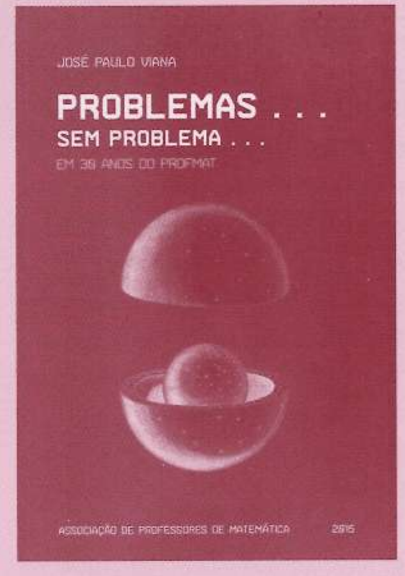
Kline, M. (1989). *Mathématiques: La fin de la certitude*. Paris: CBE.

MEC (2013). *Programa de Matemática Ensino Básico*. Lisboa: MEC.

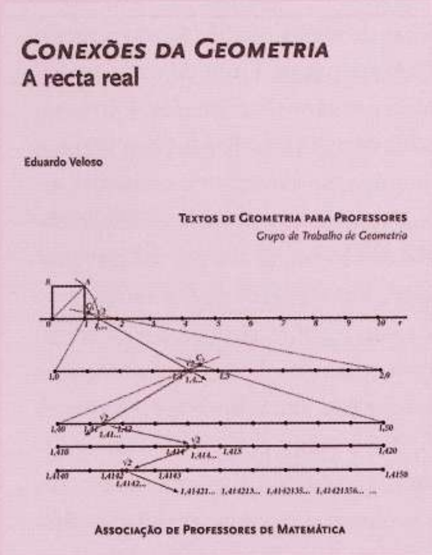
Ana Maria Roque Boavida
ESE-IPS/UIDEF

Publicações APM

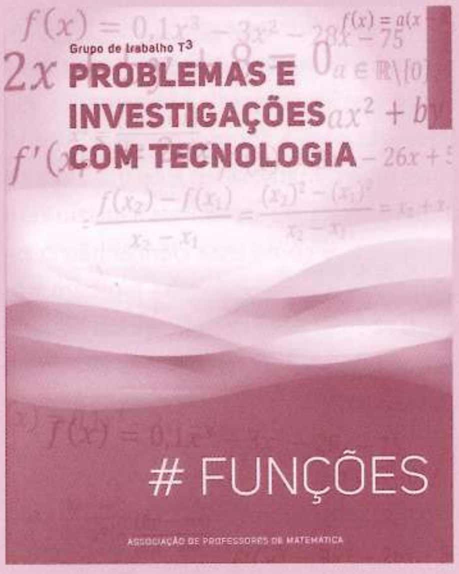
Problemas... Sem Problema...
Em 30 anos de ProfMat
José Paulo Viana (APM, 2015)



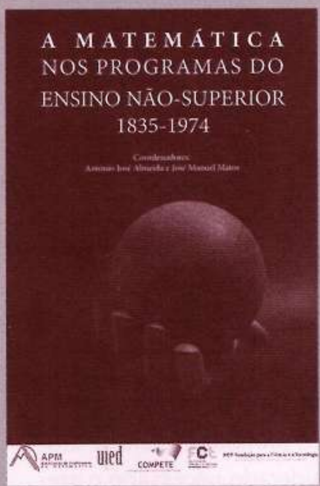
Conexões da Geometria
A recta real
Eduardo Veloso (APM, 2014)



Problemas e Investigações com Tecnologia
 # Funções
Grupo de Trabalho T3 (APM, 2014)



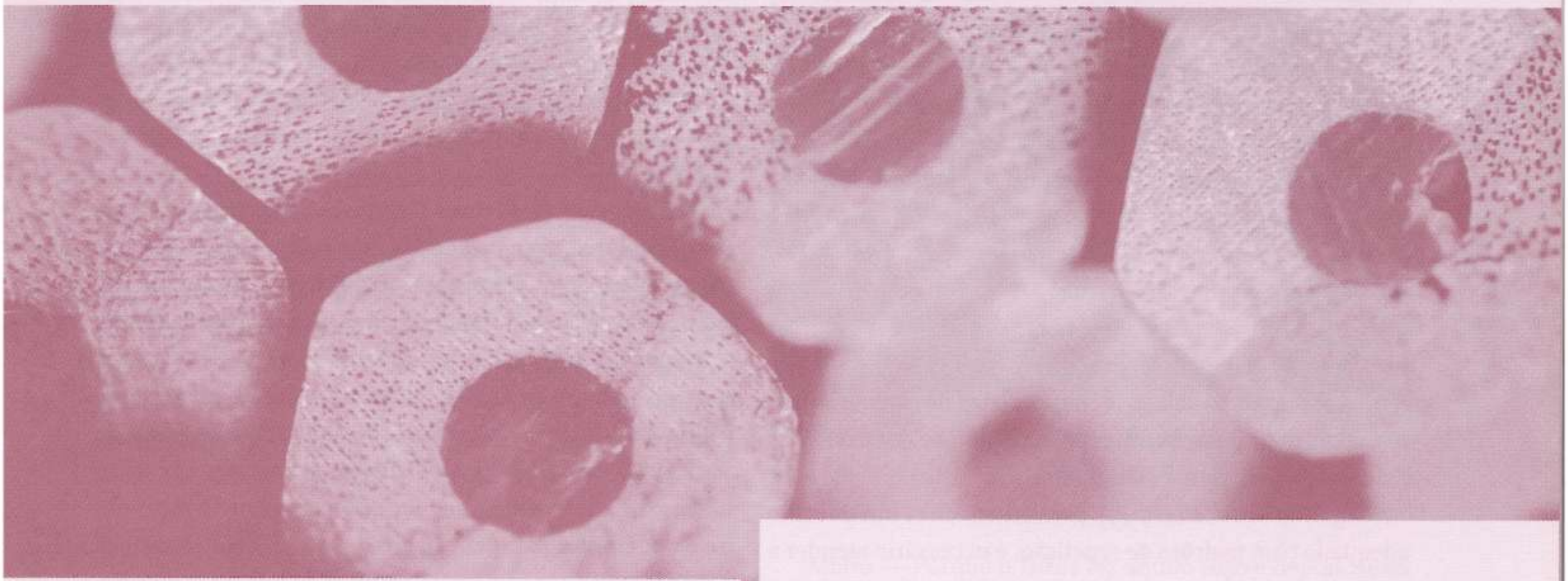
A Matemática nos Programas
do Ensino Não-Superior (1835–1974)
António Almeida e José M. Matos (Univ. Nova, 2014)



Divulga a APM na tua escola, junto dos colegas de matemática.
Torna a tua escola sócia da APM. Vê as condições no site da APM (www.apm.pt) ou na contracapa desta revista.

A emergência do pensamento algébrico num grupo de crianças de 4 anos — entre os livros infantis e os padrões de repetição

Paula Serra e Margarida Rodrigues



São vários os autores que referem a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais, nomeadamente desde o pré-escolar. Para Threlfall (1999), o estudo dos padrões constitui um veículo privilegiado para o fazer.

Neste artigo, apresentam-se algumas das tarefas que foram propostas a um grupo de crianças de 4 anos, centradas em padrões de repetição, num contexto de exploração da literatura infantil, tendo surgido na sequência das histórias «A lagartinha comilona» e «A casa da Mosca Fosca». Todas as tarefas foram iniciadas sempre com a leitura da história respetiva, em grande grupo. As tarefas foram realizadas no âmbito da tese de mestrado da primeira autora (Serra, 2014), educadora das crianças, sendo que os nomes das crianças aqui referidos são fictícios, de modo a garantir o seu anonimato.

Pensamento algébrico e padrões no pré-escolar

Segundo Kaput (2008), existem dois aspetos essenciais do pensamento algébrico: (a) a generalização e a formalização de padrões e (b) a manipulação simbólica. Blanton e Kaput (2011) definem o pensamento algébrico como uma atividade generalizante de ideias matemáticas, defendendo a sua aplicação e desenvolvimento em níveis cada vez mais elementares, designando essa mesma atividade por *early algebra*. Este é um tipo de atividade que prepara as crianças para o desenvolvimento de estruturas e de modos de generalização matemática e não para a mecanização de procedimentos. O que se procura é desenvolver o raciocínio algébrico de um modo que inclua a compreensão de estruturas matemáticas representadas pela linguagem e pelos gestos, utilizando materiais concretos e representações e não propriamente iniciar o estudo da álgebra mais cedo do que o habitual (Warren & Cooper, 2008).

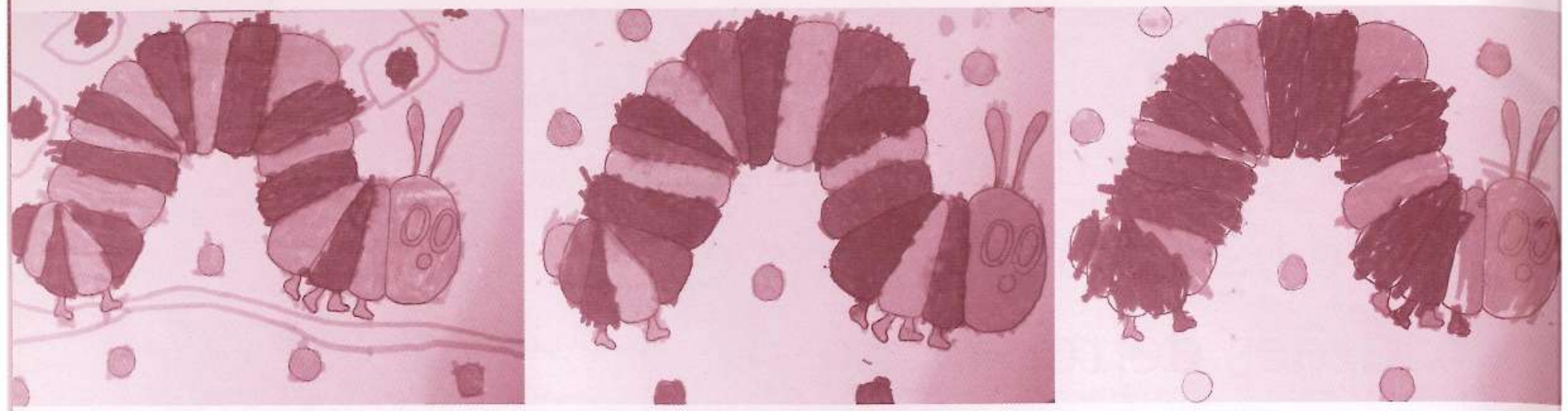


Figura 1.— Padrões de tipo AB, ABC e ABB

Threlfall (1999) refere que, para além do desenvolvimento do raciocínio lógico, a introdução de padrões, nomeadamente de repetição, no pré-escolar, é importante na aprendizagem futura da álgebra. Na mesma linha, Herbert e Brown (citados em Borralho, Cabrita, Palhares & Vale, 2007) sustentam que a *early algebra* deve iniciar-se pelo estudo de padrões logo desde o jardim-de-infância.

Papic, Mulligan e Mitchelmore (2011) consideram os padrões de repetição (onde figura uma estrutura que se repete) apropriados para o trabalho no pré-escolar. Deste modo, são muitas as crianças que, de uma forma espontânea, criam padrões de repetição simples, utilizando diferentes materiais da sala, tais como colares de conta e outros materiais manipuláveis, ou representando-os nos desenhos e decorações de roupa (Threlfall, 1999).

Segundo Threlfall (1999), para desenvolver um trabalho adequado com padrões de repetição, é necessário atender à sua complexidade e ao modo como as crianças veem esses padrões. O autor refere que padrões do tipo AB são mais simples do que os padrões com mais elementos na unidade de repetição e que os padrões com um único atributo são mais simples do que com mais do que um atributo.

É de salientar, ainda, a importância da consciência de que um padrão é um todo e que deve ser visto relacionando-o com a unidade de repetição (Threlfall, 1999). A forma como a unidade de repetição é identificada por parte das crianças, é referida por Vale *et al.* (2011), como essencial para se pensar no padrão como uma sucessão de termos que se repetem, de modo a conduzir à generalização. A identificação da unidade de repetição pode ocorrer de duas formas: por uma cantilena que enfatiza a unidade de repetição pela entoação utilizada ou por uma referência explícita à unidade de repetição (Threlfall, 1999).

É também fundamental a forma como se incentiva a observação de padrões e a utilização de diferentes materiais ou símbolos (letras ou números) de modo a levar as crianças a identificar que a estrutura dos diferentes padrões não depende do material utilizado (Vale *et al.*, 2011; Ziemba & Hoffman, 2006).

Algumas das tarefas propostas

Criando padrões

Na primeira tarefa, *Pintar a lagartinha*, foi pedido às crianças que colorissem, a seu gosto, uma lagartinha com 20 espaços, de modo a criarem um padrão. Este termo já tinha sido usado pela educadora, nas situações em que se encontravam na presença de um padrão de repetição. Daí que as crianças já tivessem, nesta altura, uma noção intuitiva de padrão. No decurso da tarefa, a educadora ia questionando as crianças com o intuito de perceber se conseguiam identificar o que se repetia e se identificavam semelhanças entre os diferentes padrões criados.

As lagartas apresentaram padrões de três tipos diferentes (figura 1). Algumas crianças usaram uma estratégia em que pensavam previamente nas cores a utilizar, o que facilitou o seu trabalho de criação de um padrão. Apenas duas das crianças colocaram, junto a si, as canetas necessárias para pintar a lagartinha, retirando-as da caixa, evidenciando já alguma noção da unidade de repetição. As crianças conseguiram criar padrões com duas cores (do tipo AB ou ABB) e com 3 cores (do tipo ABC).

As crianças, que não colocaram as canetas fora da caixa, utilizaram a estratégia de voltar ao início para verificar a ordem correta das cores a pintar. O Dinis usou uma abordagem simétrica, sendo que nos primeiros nove anéis, sensivelmente a meio da lagarta, utilizou a sequência de cores de roxo, vermelho e azul. A partir daí, inverteu a sequência das cores, colocando roxo, azul e vermelho. Trata-se de um padrão com componente de simetria, obtido provavelmente por o Dinis ter olhado para o que já tinha pintado, da esquerda para a direita, invertendo a sequência, e não para o início da lagarta, da cabeça para a sua extremidade.

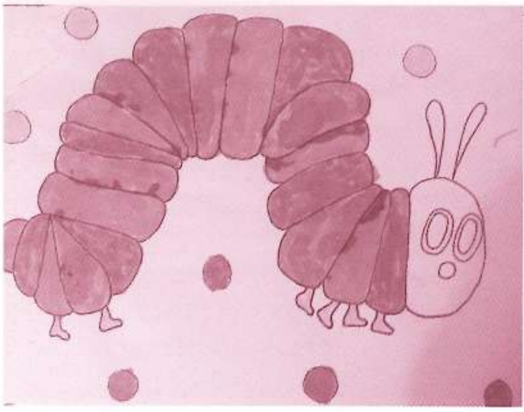


Figura 2.— A lagarta do Dinis

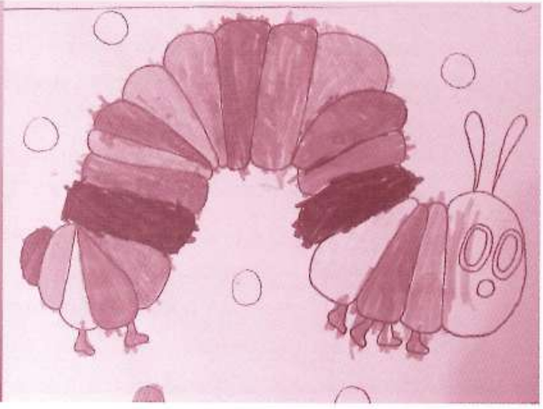


Figura 3.— A lagarta pintada pelo António

O António tentou criar um padrão utilizando todas as canetas da caixa, mas não foi capaz de manter uma repetição exata da unidade de repetição que, neste caso, conteria um elevado número de elementos. Assim, a estratégia do António residiu em usar uma grande diversidade de cores, dispondo-as primeiro sem repetir (nos primeiros nove anéis da lagarta) e a partir da repetição do cinzento, parece dispô-las aleatoriamente.

O grupo determinou que não se tratava de um padrão, mas não conseguiu explicar bem porquê; o argumento mais utilizado foi que «tem muitas cores e não se pode fazer um padrão com muitas cores». A lagarta pintada pelo António serviu de contraexemplo da noção de padrão. As crianças identificaram as dificuldades iniciais do António e procuraram depois não cometer o mesmo erro.

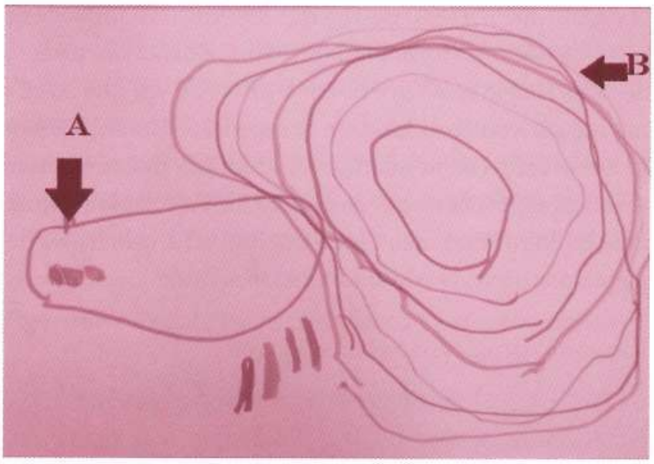


Figura 4.— Registos de controlo do padrão feitos pelo Frederico (A) e pelo David (B)

Lendo padrões

Quando foi pedido às crianças, em grande grupo, que lessem para os outros os padrões das suas lagartas, identifica-se a utilização pelas crianças de uma cantilena que enfatiza a unidade de repetição pela entoação utilizada, ou até gestos e movimentos de mão, permitindo identificar a sequência correta das cores e os erros cometidos. No caso da lagarta do Dinis (figura 2), o Mário fez o comentário seguinte:

Mário — Ah....fizeste diferente! (*faz gestos com a mão*) Que é roxo, vermelho, azul, roxo, vermelho, azul.... e depois no final é ... depois do roxo é o azul parece diferente (*fala com entoação*)

Educadora — Está diferente? Como é que tu achas que está diferente?

Mário — Porque tem o roxo com o vermelho ao pé do azul, então o azul mudou ao pé do roxo então o vermelho mudou ao pé do azul. (*faz gestos com as mãos e com os dedos aos saltinhos de três*)

Educadora — Queres vir aqui mostrar à Paula o que estás a dizer?

Mário — Porque o Dinis fez aqui o roxo e depois nesta partiu e pôs aqui o roxo, o azul, o vermelho.

O Frederico sugeriu uma forma de o Dinis não se enganar e registou-a numa folha:

Frederico — Ah já sei! Fazemos uns quadradinhos para nós não enganarmos.

Mário — Já sei. Podemos fazer um padrão que o Dinis não se engana, pomos aqui à frente o papel e ele já sabe.

Frederico — Eu vou tirar as canetas que ele usou. Encarnado, roxo, azul.

O Frederico tirou também da caixa uma caneta verde com a qual desenhou uma linha fechada dentro da qual fez «quadradinhos», de acordo com a unidade de repetição utilizada pelo Dinis: roxo, encarnado e azul. O David sugeriu logo outra maneira e desenhou um «círculo» verde no centro rodeado de outras linhas circulares de cores idênticas às da lagarta do Dinis:

David — Um verde círculo grande...azul, castanho...

António — Roxo, é roxo, a lagartinha começa por aqui!

David — Posso fazer à volta, a primeira é uma volta, agora a outra...

Luísa — São muitas voltas!

António — Primeiro era o verde?

David — Porque era a...isto era um círculo que estava a segurar as cores, depois o Dinis vinha aqui ver qual era a cor primeira. Era esta, depois esta e depois esta.

O registo do Frederico mostra que identificou a unidade de repetição de uma forma independente quanto ao número de itens (Papic *et al.*, 2011). Foi a primeira vez que surgiu um registo icónico da unidade de repetição. Este registo surge como forma de as crianças obterem um maior controlo relativamente à correção do padrão durante o processo de criação do mesmo, não tendo existido uma solicitação explícita por parte da educadora nesse sentido.

Reproduzindo padrões com gestos

Na tarefa, *Ler a lagartinha por gestos*, em grande grupo, cada criança tinha de reproduzir o padrão inicial da sua lagarta com gestos, tocando em alguma parte do corpo, e ensiná-lo ao grupo que o reproduzia também por gestos. Verificou-se que todas as crianças conseguiram reproduzir por gestos os padrões anteriormente feitos nas lagartas, identificando com facilidade a equivalência de gestos e cores. Ao mesmo tempo que tocavam nas diversas partes do corpo, estas eram verbalizadas:

David — Cabeça pés pés, cabeça pés pés, cabeça pés pés.

Educadora — Qual é a cor da cabeça? (...)

David — Vermelha.

Educadora — E quando tocas no pés, qual é a cor que estás a dizer?

David — Azul.

Educadora — E porque é que tocas duas vezes nos pés?

David — Porque são dois azuis.

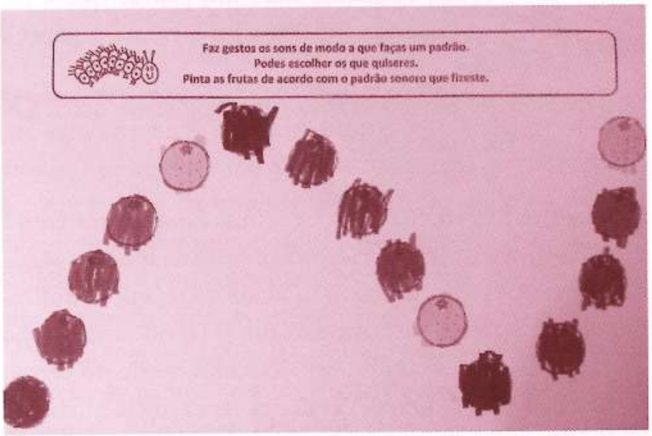
A educadora reforçou a ideia de repetição e que era apenas necessário fazer uma «unidade» de gestos para ensinar o padrão aos amigos, e não a totalidade do que tinham pintado. Também reforçou que, se continuassem a fazer os gestos, podiam ficar ali indefinidamente.

As crianças que se seguiram apenas referiram, gestual e oralmente, a unidade de repetição do seu padrão e ensinavam apenas isso ao grupo que a utilizava para reproduzir o padrão e dar-lhe continuidade.

Criando padrões com gestos

Numa outra tarefa, era pedido a todas as crianças para criarem padrões gestuais, verbalizando as partes do corpo em que tocavam e ensinarem-nos ao grande grupo. Tal como antes, ensinavam ao grupo apenas a unidade de repetição que era usada por todos para reproduzir gestualmente os padrões inventados, reproduzindo a unidade de repetição e a repetição da mesma. Fizeram-no, de seguida, e um de cada vez, sabendo que cada um deveria memorizar o seu próprio padrão inventado para o reproduzir pictoricamente depois.

Após a criação dos padrões gestuais, cada um dirigiu-se à mesa de trabalho para reproduzir o seu padrão na pintura da sequência das laranjas. Os padrões evoluíram para uma forma mais complexa, tendo sido registados, nas sequências das laranjas, padrões de complexidade diversa: AB (4), ABC (4), ABB (1), ABCDE (2), ABBCD (1), ABCC (1). Verificou-se que conseguiram associar um gesto a uma cor



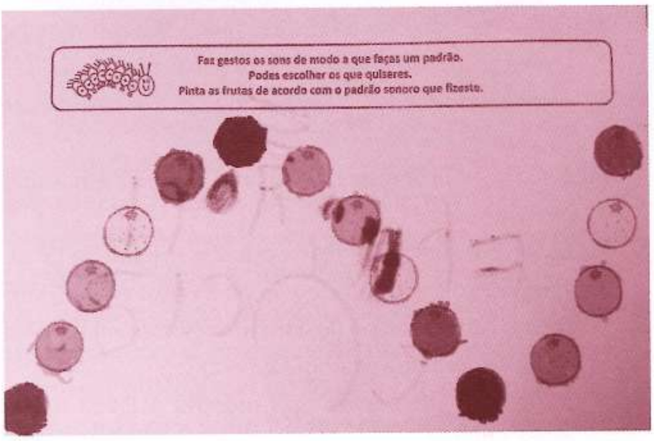


Figura 4.— Os padrões do Mário e do Fernando, respetivamente

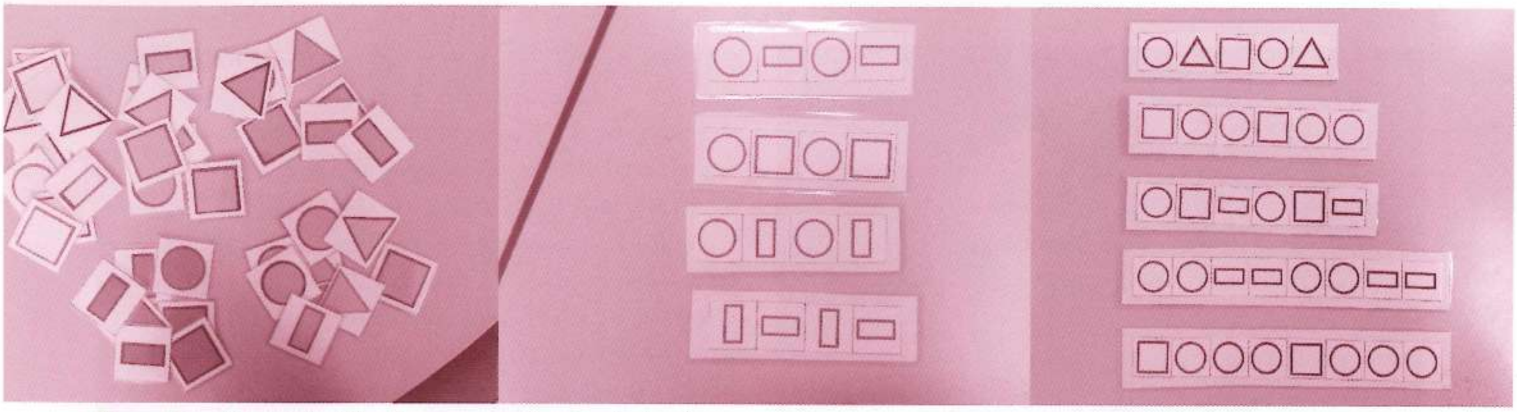


Figura 5.— Material utilizado para a realização da tarefa

e que quase todos se lembraram dos padrões gestuais criados, tendo sido oito as crianças que fizeram corresponder exatamente o padrão gestual ao que coloriram.

Na figura 4, podemos observar os padrões do Mário e do Fernando com as laranjas. O Mário verbalizou «olhos nariz nariz boca pés ombro» mas correspondeu-o a um padrão figurativo do tipo ABBCD, ambos complexos. O Fernando fez corresponder o padrão figurativo do tipo ABCDE ao seu padrão gestual de «cabeça pés braço mão barriga». O Mário foi o sexto a criar o seu padrão e o Fernando o segundo. Apesar da maior distância temporal entre o momento de invenção do padrão gestual e a concretização da reprodução na pintura das laranjas, o Fernando conseguiu criar um padrão complexo, memorizá-lo e reproduzi-lo adequadamente.

Estas duas últimas tarefas permitiram que as crianças desenvolvessem o seu sentido de unidade de repetição, conseguindo transferir o mesmo padrão para diferentes modos ou materiais, do figurativo para o gestual, e do gestual para o figurativo.

Reproduzindo e continuando padrões

Uma outra tarefa, *Enfeito a casa da Mosca Fosca com padrões coloridos*, teve como ponto de partida a história «A casa da Mosca Fosca», tendo-se pedido às crianças que realizassem padrões para enfeitar a casa para a festa que a Mosca Fosca ia dar. Cada criança tinha um conjunto de cartões com formas diferentes mas da mesma cor, com os quais copiaria e continuaria padrões, apresentados em tiras, com variação do atributo forma ou do atributo posição. A maioria das crianças não apresentou dificuldade em copiar e continuar os padrões apresentados.

Anteriormente a esta tarefa, a educadora começou a incentivar as crianças para a identificação da estrutura dos padrões, primeiro através da utilização de números («Se o teu padrão fosse números, como é que tu lias o teu padrão?», tendo a Matilde respondido, para um padrão do tipo ABC, «1...2....3; 1 2 3, 1 2 3»), e depois através de letras para que as crianças não confundissem com o número de vezes que a unidade de repetição se repete numa dada representação de um padrão, como poderia acontecer no caso da utilização dos números.

A necessidade de atribuir uma designação à unidade de repetição acabou por surgir de forma espontânea numa situação em que lhes foi pedido para realizarem colares com

Figura 5.— Registo e colagem dos padrões e dos códigos

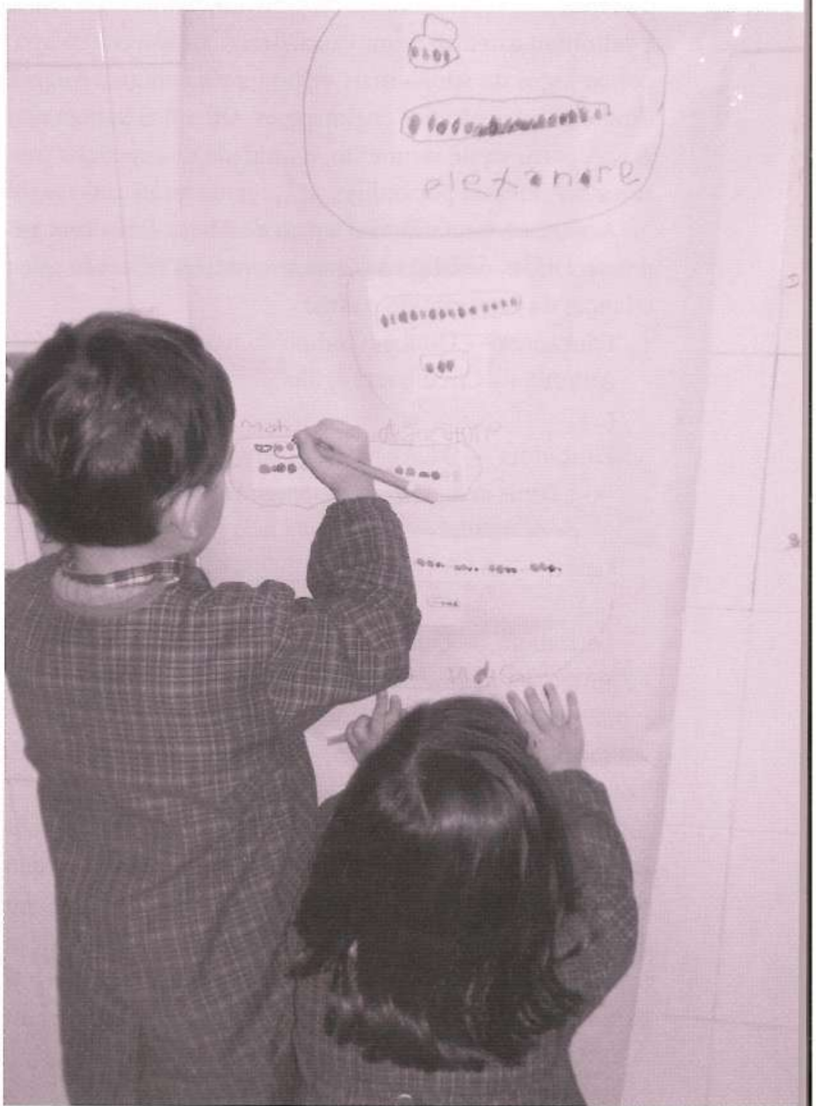


Figura 6.— Luísa identificando a unidade de repetição e Tatiana identificando e contando a unidade de repetição, respetivamente

fios de conta, identificarem o que se repetia e registar as descobertas numa folha. O Dinis, ao identificar a unidade de repetição, representou a respetiva sequência das cores e delimitou-a dentro duma caixa, designando-a por código, por os jogos do irmão mais velho terem códigos, e explicando: «É para não nos enganarmos. Olhamos para o *código*». A partir deste momento, a unidade de repetição passou a ser referida por código.

Assim, na tarefa *Enfeito a casa da Mosca Fosca com padrões coloridos*, o código facilitou a consciencialização pelas crianças da estrutura do padrão:

Educadora — Qual é o código do teu padrão António?
António — Círculo retângulo.
(...)
Educadora — Qual é o vosso código? Aquele nome que o Dinis inventou? (*Luísa mostra com as mãos a unidade de repetição e com a mão toda faz barreira*).
Luísa — ABABAB.
(...)
Educadora — Quantas vezes é que o código se repete no teu padrão?
(...)
Tatiana — (*com dois dedos*) Um dois três.

Enquanto o António verbalizou apenas a unidade de repetição («Círculo retângulo»), a Luísa leu todos os elementos que tinha construído, representando-os pelas letras AB. O facto de a Luísa ter separado gestualmente a unidade de repetição revela a consciência da mesma, tendo usado esse processo para a identificar. Tal como se verificou com a Tatiana, um número elevado de crianças conseguiu contabilizar o número de vezes que a unidade de repetição se repete.

Considerações finais

As tarefas aqui apresentadas iniciaram-se com a criação de padrões e não com o copiar e continuar modelos fornecidos pelos adultos. Segundo Threlfall (1999), é mais importante que as crianças criem os seus próprios padrões do que copiem modelos preestabelecidos.

Após a implementação das tarefas, pode afirmar-se que a maioria do grupo domina o conceito de padrão e consegue criar padrões de repetição. Foi ainda evidente a evolução das crianças ao nível da complexidade dos padrões criados, sendo que iniciaram padrões com unidades de repetição com um número de elementos até 3 (Vale *et al.*, 2011), tendo depois criado padrões com unidades de repetição com um maior número de elementos (até 5).

As crianças também conseguem identificar erros na construção do padrão quando realizam uma leitura em voz alta, em grande parte devido à entoação. A estratégia de isolar as canetas necessárias para pintar o padrão e as estratégias para ajudarem os amigos a não se enganarem no padrão foram potenciadoras da identificação da unidade de repetição, bem como a ênfase colocada na unidade ao entoarem a cantilena da leitura do padrão (Threlfall, 1999). Também foi importante a solicitação da educadora para que ensinassem os padrões gestuais aos amigos, fazendo apenas os gestos correspondentes à unidade de repetição. Os movimentos físicos não só facilitam a representação do padrão como também a perceção da unidade de repetição (Threlfall, 1999).

A evolução ao nível da complexidade dos padrões criados decorreu do desenvolvimento progressivo das crianças relativamente à consciência da estrutura do padrão, traduzida, muitas vezes, na forma como as mesmas usaram e verbalizaram o ‹código›. A identificação da unidade de repetição aparece de forma distinta nos diálogos das crianças, quando passam a utilizar a palavra ‹código› inventada por Dinis e que depressa assume um caráter facilitador da compreensão da estrutura de um padrão. A utilização de letras para codificar os padrões permitiu que reconhecessem as diferentes estruturas dos padrões de repetição, e que elas não estavam dependentes do material utilizado (Vale *et al.*, 2011).

Referências

Blanton, M., & Kaput, J (2011). Funtional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5–23). Berlin: Springer.

Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra* (pp. 193–211). Lisboa: SEM-SPCE.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Palhares, P., & Mamede, E. (2002). Os padrões na matemática do pré-escolar. *Educare-Educere, 10*(1), 107–123.

Papic, M., Mulligan, T., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the developing of preescholers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237–268.

Serra, P. (2014). *Lendo e explorando histórias: A emergência do pensamento algébrico em crianças de 4 anos* (Tese de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa). Online in http://repositorio.ipl.pt/handle/10400.21/3906

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18–30). London: Cassell.

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Borralho, A., Cabrita, I., & Fonseca, L. (2011). *Padrões em matemática. Uma proposta didática do novo programa para o ensino básico.* Lisboa: Texto Editores.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171–185.

Ziemba, E., & Hoffman, J. (2006). Sorting and patterning in Kindergarten: From activities to assessment. *Teaching Children Mathematics*, 236–241.

PAULA SERRA
EXTERNATO «O POETA»

MARGARIDA RODRIGUES
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA E UIDEF, UNIVERSIDADE DE LISBOA

Anúncio

NÚMERO TEMÁTICO DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Como habitualmente, o último número do ano da *Educação e Matemática*, a sair em novembro/dezembro, será temático.

Desta vez o tema escolhido foi a Criatividade.

Assim, neste número temático da E&M serão discutidos e refletidos diferentes aspetos do desenvolvimento desta capacidade em Matemática, dando também uma perspetiva do que se tem feito neste domínio em Portugal e noutros países. Um dos objetivos principais é a clarificação desta capacidade no domínio da educação matemática e a discussão sobre a sua integração nas aulas de matemática e o modo de a desenvolver nos nossos alunos.

Aqui fica o convite a todos os interessados em escrever e/ou partilhar ideias ou reflexões sobre este tema, para que nos façam chegar os vossos contributos — artigo, relato de sala de aula, pontos de vista, etc..

As propostas de contribuição deverão ser enviadas até 31 de agosto.

Batalha Geométrica

Quatro amigos meus descobriram o jogo *Batalha Geométrica* e resolveram fazer um campeonato entre eles, com atribuição final de medalhas de ouro, prata e bronze para os três primeiros classificados.

Quando os voltei a encontrar perguntei-lhes qual tinha sido a classificação final. Eis o que me disseram:

Manuela: «Fiquei à frente do Eduardo. A Florinda ficou atrás de mim.»

Rita: «Fiquei em primeiro. O Eduardo não teve nenhuma medalha.»

Florinda: «Nem a Manuela nem o Eduardo receberam a medalha de ouro. Quem ficou em primeiro fui eu.»

O Eduardo manteve-se calado.

Descobri depois que não houve empates na classificação final e que, das duas frases ditas por cada um, uma era verdadeira e a outra falsa.

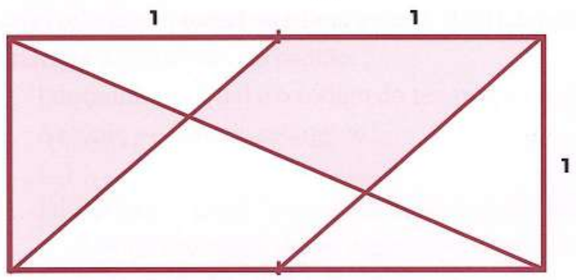
A quem foram atribuídas as medalhas?

(Respostas até 18 de julho, para zepaulo46@gmail.com)

UM PROBLEMA NO PROBLEMA

O problema proposto no número 130 de *Educação e Matemática* fez parte de um dos concursos Canguru Matemático. Foi-me apresentado pela Teresa Pimentel (Viana do Castelo) como exemplo de um problema que pode ser resolvido por muitos processos. Ei-lo:

A professora Teresa projetou no quadro o seguinte enunciado: Qual é a área da zona sombreada desta figura?



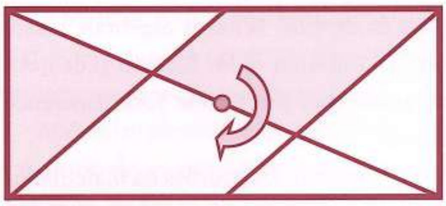
Depois, disse aos seus alunos:

— Quero que cada um de vocês resolva este problema por dois métodos diferentes.

Podem os leitores da Educação e Matemática ajudar estes alunos com duas maneiras distintas de chegar à solução?

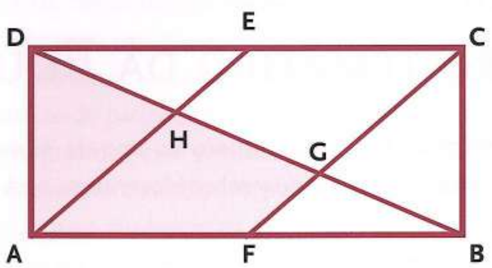
Recebemos 16 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Farias e seus alunos (Covilhã), Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva, João Pereira, José Paulo Coelho (Moura), Mário Roque (Guimarães), Pedro Miguel Resende (Ovar), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e do Grupo de Trabalho de Geometria (Eduardo, Florinda, Manuela & Rita). Além destes, José Carlos Pereira e José Luís Freitas discutiram e resolveram o problema no facebook.

Foram muitos os métodos e processos de chegar à solução. Alguns deles eram pequenas variações de outros. Vamos mostrar os principais métodos geométricos.



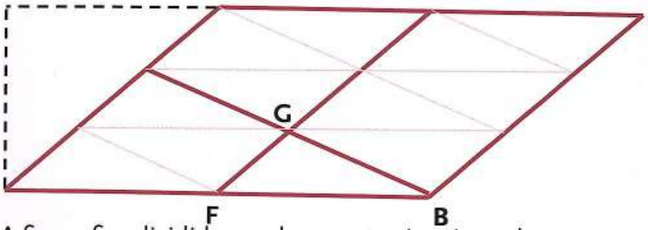
1.º Método

Rodar o quadrilátero sombreado em torno do centro da figura.
Área pedida = $A_{ADB} - A_{BFG}$



Fazer a translação do ΔADE segundo o vetor $\vec{AB}$.

Traçar as linhas auxiliares indicadas.



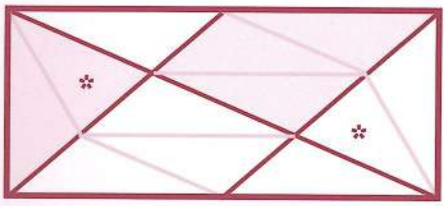
A figura fica dividida em doze partes iguais, cada uma com área 1/6.

$$\text{Área pedida} = A_{ADB} - A_{BFG} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

2.º Método

Fazer a partição do retângulo conforme se mostra na figura.

O retângulo fica dividido em doze triângulos. Dez deles são

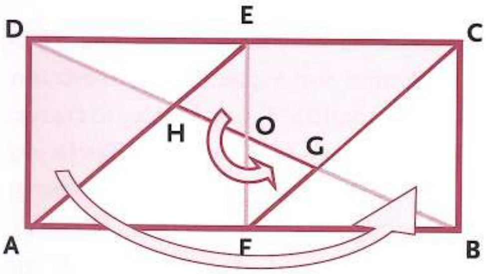


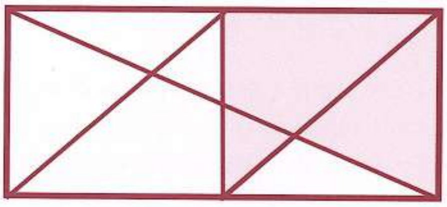
congruentes. Os outros dois, assinalados com asterisco, são diferentes dos anteriores mas são equivalentes (todos têm a mesma área). Assim, a área pedida é 5/12 da área total.

$$\text{Área sombreada} = 2 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$

3.º Método

Rodar os triângulos EOH e ADH de 180 graus em torno do centro O da figura.





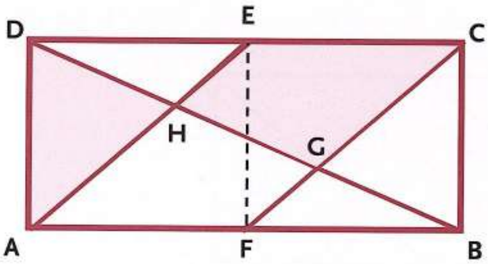
$$\text{Área}_{BFG} = \frac{1}{6} \quad \text{(como se viu no 1.º Método)}$$

$$\text{Área pedida} = A_{BCEF} - A_{BFG} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

4.º Método

A área da zona sombreada é a soma de duas subáreas: a do triângulo ADH com a do trapézio CEHG.

O retângulo pode ser dividido em quatro triângulos retân-



gulos de áreas iguais a 1/2. O paralelogramo central, que é constituído por dois desses triângulos, tem área igual a 1. Como esse paralelogramo é também constituído por dois trapézios iguais, concluímos que a área de GCEH é 1/2.

Por outro lado, aplicando, por exemplo, o teorema de Thales, concluímos que os segmentos de reta DH, HG e GB são iguais, medindo cada um deles um terço da diagonal do retângulo. As suas projeções sobre o lado maior do retângulo são também iguais, medindo cada uma delas 2/3. Logo, a altura do triângulo ADH relativa ao lado AD é 2/3, pelo que a sua área é de 1/3.

$$\text{Área sombreada} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

5.º Método

Representemos por X a área sombreada.

Observando a figura do método anterior, constata-se que a área do retângulo é a soma de duas áreas sombreadas com duas vezes a área do triângulo menor BFG (que representaremos por **Y**), ou seja:

$$2X + 2Y = 2 \qquad \text{(i)}$$

Por outro lado o triângulo ABH é semelhante ao triângulo BFG, sendo a razão de semelhança igual a 2, pelo que a área do triângulo ABH é 4 vezes a área do triângulo BFG, ou seja, é igual a 4Y.

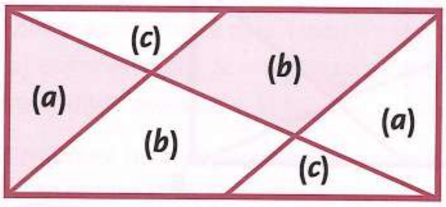
Se representarmos a área de ADH por Z, podemos escrever:

$$Z + Y = 1/2$$
$$Z + 4Y = 1$$

Resolvendo este sistema, vem $Y = 1/6$.

Substituindo em (i) conclui-se que $X = 5/6$ unidades de superfície.

6.º Método



Área pedida $= a + b$

$a + b + c = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 - c$

$2b = 1 \Leftrightarrow b = 0{,}5$

O triângulo formado por (b)+(c) é semelhante ao triângulo (c). A razão de semelhança é 2, porque a base do maior é o dobro da do menor.

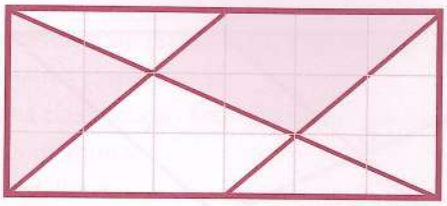
$b + c = 4c \Leftrightarrow b = 3c$

Então, $0{,}5 = 3c \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{6}$

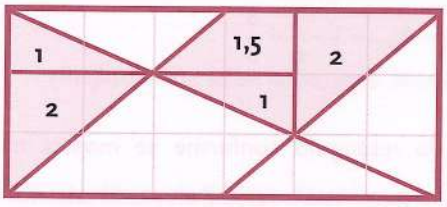
Logo, $a + b = \dfrac{5}{6}$

7.º Método

A figura dada tem simetria central. Essa simetria e o teorema de Thales garantem que a diagonal fica dividida em três partes iguais. Divida-se cada uma dessas partes ao meio e tracem-se paralelas e perpendiculares aos lados do retângulo.



O retângulo fica dividido em 18 quadrados iguais, dos quais 7,5 são sombreados.



A área de cada quadrado é 2/18.

Área sombreada $= 7{,}5 \times \dfrac{2}{18} = \dfrac{5}{6}$

Considerações finais

Apareceram ainda mais métodos, uns usando apenas a geometria analítica, outros combinando-a com a geometria tradicional. São, no entanto, mais pesados e visualmente menos apelativos. Optámos por não os incluir aqui.

O confronto do PMEB2007 com o PMEB2013 nas vizinhanças da demonstração

Patrícia Damas Beites

O Programa de Matemática do Ensino Básico que vigorou desde 2008/2009 e que termina a sua aplicação em 2014/2015 no 9.° ano (PMEB2007) foi, até há pouco tempo, adjetivado como novo por apenas recentemente se ter generalizado a todos os anos de escolaridade. A partir de 2013/2014 começou a ser substituído pelo atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB2013), cujos descritores surgiram, com data de criação anterior, nas Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (MCMEB2012).

As diferenças entre o substituto e o predecessor surgem logo, na estrutura organizacional. Em primeiro lugar, para um dado ano de escolaridade do Ensino Básico, não resulta prática a consulta do PMEB2013 e das MCMEB2012, mesmo com um só ficheiro pdf resultante da mera junção dos dois documentos. Seria mais cómodo ter um só documento sem a duplicação de informação no que concerne aos significados dos verbos que explicitam os desempenhos a evidenciar pelos alunos, com os respetivos descritores próximos de cada conteúdo. Em segundo lugar, o PMEB2007,

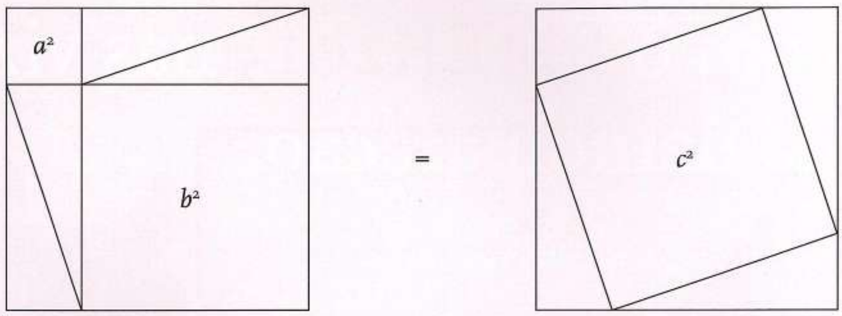


Figura 1.— Decomposições de um quadrado para uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

para além de possuir essa boa caraterística de ter os objetivos próximos dos tópicos a que correspondem, é rico em notas complementares que visavam esclarecer o alcance dos primeiros e apresentar sugestões metodológicas, o que não sucede no PMEB2013. Precipitadamente, tal pode ser justificado pela existência de cadernos de apoio às MCMEB2012, mais um documento a consultar por ciclo, mas os mesmos revelam explicações com muitas palavras, o que não se traduz em muitas ideias, e são de leitura nem sempre fácil.

O que se poderá dizer no âmbito da demonstração?

Tomando o clássico Teorema de Pitágoras como ponto de partida, após traçar uma altura de um triângulo retângulo, os passos de uma demonstração recorrendo à semelhança de triângulos são elencados nas MCMEB2012. Uma sugestão de demonstração do teorema no PMEB2007 é por decomposição de quadrados, continuidade natural da exploração da decomposição de figuras. Esta continuidade não surge no PMEB2013 sob o pretexto aparente (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012c) de evitar propriedades da noção de área, pela complexidade concetual de uma teoria rigorosa da medida de área.

Mas considerando a Figura 1, o rigor consegue-se pela fundamentação seguinte: na parte esquerda da figura, após decomposição do quadrado em dois quadrados e dois retângulos, estes decompostos em triângulos, há que justificar que os quatro triângulos obtidos são retângulos e congruentes; na parte direita da figura, há que justificar que, aplicando o caso LAL, os quatro triângulos desenhados são congruentes entre si e congruentes com os que estão na parte esquerda da figura e ainda que a parte central obtida com o referido desenho, por análise dos ângulos dos triângulos, é um quadrado.

No PMEB2013 e documentos associados há preocupações inegavelmente científicas, que se voltam a notar com a referência à não validade do Teorema de Pitágoras em geometrias não Euclideanas, mas não abundam as de outra índole. Em contrapartida, na Brochura de apoio ao PMEB2007 para o ensino da Geometria e Medida encontram-se várias demonstrações do teorema, acompanhadas de considerações históricas e didáticas, que proporcionam diversidade de opções e de completação de abordagens.

Antes de mais alguns cotejos no âmbito da demonstração, convém ter presentes as funções da demonstração e o tratamento desta, sem a redução ao Teorema de Pitágoras, nos mencionados documentos oficiais.

A demonstração na Matemática e no Ensino

Não se pode fazer Matemática, como Ciência, sem demonstrar! A demonstração, na qual o raciocínio matemático marca sempre presença, é essencial para compreender, estabelecer e comunicar o conhecimento matemático. No ensino da Matemática, enquanto disciplina escolar, o papel fundamental da demonstração é a promoção da compreensão (Hanna, 2000), devendo convencer através da razão e não pela autoridade (Lima, 1999).

Mas, o que é uma demonstração? Não havendo a pretensão de discutir aqui as muitas definições de demonstração existentes, uma deve-se a Keith Devlin. Por razões por este apontadas a definição de que é um argumento que convence um matemático da verdade de um certo enunciado, traduz o que os matemáticos fazem (Devlin, 2003), Devlin questiona quando é que se está perante uma demonstração, o que remete para uma conceptualização. Consequentemente há que pensar nos elementos que devem estar presentes numa demonstração, como os listados por Stylianides (2007): fundamentos (definições, lemas,...); argumentação (como se desenvolve; por exemplo, inferindo com *modus ponens*); representação (como se expressa; com linguagem algébrica, natural ou pictórica); dimensão social (aceitação na comunidade matemática em que se cria).

Em contexto escolar, no que se refere à dimensão social, a comunidade matemática é substituída pela comunidade da aula de que fazem parte o professor e os alunos. Os fundamentos, a argumentação e a representação devem ser os adequados ao nível de escolaridade dos alunos que a integram. Há ainda a realçar que, apesar do raciocínio marcadamente dedutivo na elaboração de uma demonstração, os alunos devem experienciar outras formas de raciocínio que, frequentemente e previamente, um matemático utiliza na sua investigação. Em particular, o raciocínio indutivo, após a construção de exemplos, manifesta-se através da formulação de conjeturas, estas posteriormente testadas mediante exemplos e contraexemplos.

A título ilustrativo, em Stylianides (2007), analisa-se um episódio de aula em que um aluno, do 3.° ano do 1.° Ciclo do Ensino Básico, utilizou a linguagem natural num argumento dedutivo para demonstrar que a soma de dois números naturais ímpares é um número par. Previamente ao mencionado raciocínio dedutivo, os alunos experimentaram casos particulares e formularam, com a mediação da professora, uma conjetura. Esta surgiu perante a tarefa de investigação, de acordo com a tipificação de Ponte (2005), norteada pela questão de saber a paridade da soma de dois números naturais ímpares. Trata-se de um tipo de tarefa, aberta e com desafio elevado, que é indispensável «para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática» (Ponte, 2005, p. 26).

A demonstração no PMEB2007

O PMEB2007 refere-se à demonstração a propósito dos objetivos gerais, das capacidades transversais no âmbito do raciocínio matemático e das orientações metodológicas.

No mencionado documento oficial, enquanto capacidade transversal aos três ciclos, a demonstração goza de uma perspetiva de continuidade e de evolução, como fica claro na pretensão: «À medida que os alunos progridem nos diversos ciclos de ensino as suas justificações devem ser mais gerais, distinguindo entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objetos.» (Ponte *et al.*, 2007, p. 5).

Reflexo da posição descrita, seguindo a terminologia usada por Costa e Tadeu (2006) no âmbito de uma análise transversal de programas de Matemática anteriores a 2007, no PMEB2007 há, por um lado, referências explícitas e, por outro lado, referências implícitas à demonstração. Estas últimas referências presenciam-se através de expressões indicadoras da preocupação com o desenvolvimento das capacidades de raciocinar, de argumentar e de demonstrar em Matemática.

Pertencentes ao conjunto das referências implícitas, a título de exemplo, em Ponte *et al.* (2007) têm-se: no 1.° Ciclo, «Explicar ideias e processos e justificar resultados matemáticos» e «Formular e testar conjeturas relativas a situações matemáticas simples» (p. 31); no 2.° Ciclo, «Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contra-exemplos» e «Formular e testar conjecturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais» (p. 47); no 3.° Ciclo, «justificação de estratégias» e «argumentação apoiada em procedimentos, propriedades e conceitos matemáticos.» (p. 63).

Naturalmente, não se encontram referências explícitas no 1.° Ciclo e no 2.° Ciclo. No que diz respeito ao 3.° Ciclo, no PMEB2007, nota-se uma solicitação evolutiva da argumentação para a demonstração, esta também referida em conexão com outra capacidade:

> O Raciocínio matemático é outra capacidade fundamental, envolvendo a formulação e teste de conjecturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Os alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo. Além disso, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos Números, da Álgebra e da Geometria. No fim do 3.° ciclo, os alunos devem ser capazes de distinguir entre raciocínio indutivo e dedutivo e reconhecer diferentes métodos de demonstração. (Ponte *et al.*, 2007, p. 8).

No 3.° Ciclo, entre diversas referências explícitas à demonstração, surgem no PMEB2007 em Ponte *et al.* (2007): «Demonstrar o Teorema de Pitágoras» (p. 54); «oportunidade para os alunos com melhor desempenho matemático demonstrarem algebricamente a fórmula resolvente» (p. 57); «Propor a exploração de casos particulares de modo a induzir a regra da potência da potência. Os alunos com melhor desempenho matemático podem demonstrar esta regra.» (p. 49); «Os alunos com melhor desempenho matemático podem ter um primeiro contacto com a demonstração, por redução ao absurdo, da irracionalidade da $\sqrt{2}$.» (p. 50); «Desenvolver nos alunos (...) a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração» e «compreender a noção de demonstração e ser capazes de fazer raciocínios dedutivos» (p. 51).

No entanto, com exceção essencialmente do tema Geometria, dirigem-se a alunos com melhor desempenho matemático. O referido tema é considerado como o mais propício para os alunos se familiarizarem com o processo de demonstração, em sintonia com o que tem sido documentado em diversos estudos (ver Hanna (2000) e referências aí citadas). Neste âmbito, refere-se ainda que

Na resolução de problemas geométricos, como nas tarefas exploratórias e de investigação, é importante que os alunos tenham um tempo apropriado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjecturas, descrever processos e justificá-los com rigor progressivo. Ao elaborarem justificações, produzindo pequenas cadeias dedutivas, familiarizam-se com o processo de demonstração e iniciam o raciocínio geométrico dedutivo. Os alunos devem recorrer a software de Geometria Dinâmica. (Ponte *et al.*, 2007, p. 51).

O PMEB2007 parece marcar uma mudança, valorizando o raciocínio matemático de forma explícita e a demonstração em particular.

A demonstração no PMEB2013

Entre muitas, a primeira referência à demonstração no PMEB2013 surge numa das três finalidades do ensino da Matemática, sob a designação de «A estruturação do pensamento» (Bivar *et al.*, 2013, p. 2). Notam-se aí referências implícitas à demonstração, nomeadamente, nas expressões ‹argumentar› e ‹justificar› e ‹raciocínio hipotético-dedutivo›».

Mais adiante, embora se refira que o raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, reconhece-se o papel do raciocínio indutivo na, paradoxalmente, única página do PMEB2013 em que se presencia a palavra conjetura:

Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas (...) após a análise (...) de situações particulares. Deverão saber, no entanto, que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades, e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras (...) devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las (Bivar *et al.*, 2013, p. 4).

Apesar de esta ser também a única página do PMEB2013 onde se encontra a expressão raciocínio matemático, a palavra raciocínio surge, no âmbito dos objetivos, associada à comunicação matemática. Refere-se que «os alunos devem ser incentivados a redigir convenientemente as suas respostas, explicando adequadamente o seu raciocínio» (Bivar *et al.*, 2013, p. 5). No entanto, a mencionada palavra nas MCMEB2012, com exceção de «raciocínio circular» (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012d, p. 72), surge sempre com o adjetivo «dedutivo».

A intenção da solicitação evolutiva da demonstração nos objetivos do PMEB2013 fica patente nos desempenhos, a evidenciar pelos alunos, que os traduzem. Neste sentido, nas MCMEB2012, os autores alertam para diferenças no significado preciso de verbos empregues no início de alguns descritores, explicando que estas se devem aos distintos ciclos a que dizem respeito. O desempenho denominado por «Reconhecer», que se refere a um certo resultado e que constitui uma referência implícita à demonstração, surge em (Bivar *et al.*, 2013):

[1.° Ciclo] reconhecer intuitivamente a veracidade do enunciado em causa em exemplos concretos. Em casos muito simples, poderá apresentar argumentos que envolvam outros resultados já estudados e que expliquem a validade do enunciado.... [2.° Ciclo] conhecer o resultado e saber justificá-lo, eventualmente de modo informal ou recorrendo a casos particulares. No caso das propriedades mais complexas, deve apenas saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados pelo professor para as deduzir, bem como saber ilustrá-las utilizando exemplos concretos. No caso das propriedades mais simples, poderá ser chamado a apresentar de forma autónoma uma justificação geral. ... [3.° Ciclo] apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos (...) nessa explicação. (p. 3).

Assim, em cada ciclo, o verbo reconhecer, através de uma repetição textual das MCMEB2012, reveste-se de um significado mais forte do que no ciclo anterior. Há ainda a registar, na página seguinte à citada do PMEB2013 e nas MCMEB2012, uma variante do referido verbo, «Reconhecer, dado», a qual pretende indicar a justificação de casos concretos de um enunciado mas sem exigência de prova geral. A título de exemplo, tem-se: «4. Reconhecer, dado um número racional q, que $-(-q) = q$.» (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012d, p. 38).

Com caráter menos exigente do que o atribuído ao verbo reconhecer, surge o verbo «Justificar» na página 47 das MCMEB2012. Este, que aparece com a descrição de significado igual à que consta na página 4 do PMEB2013, prende-se com uma justificação simples de um enunciado, que o aluno deve dar, recorrendo a uma propriedade conhecida. De realçar que tal se reduz ao 3.° Ciclo, aparecendo só, indiretamente, nos outros ciclos através do verbo reconhecer. De modo consentâneo, o verbo justificar só consta dos níveis de desempenho esperados no 3.° Ciclo.

Observações semelhantes às do verbo reconhecer, ao longo do Ensino Básico, podem ser feitas para os desempenhos «Identificar/designar» e «Estender» no PMEB2013. A diferença entre ciclos nota-se sobretudo no último verbo, pois este é empregue, no 3.° Ciclo, no sentido de estender uma definição e/ou uma propriedade a um universo mais vasto e, nos ciclos anteriores, para utilizar a designação e para conseguir definir a noção com esse nome, reconhecendo que se trata de uma generalização. Novamente, as palavras utilizadas são as empregues nas MCMEB2012. Surge ainda o verbo «Verificar», tenuemente com uma só ocorrência nos descritores, para a validade da relação de Euler em poliedros convexos.

No 3.° Ciclo, mas só neste, encontram-se referências explícitas à demonstração, nomeadamente a que consta no desempenho designado por «Provar/Demonstrar». Refere-se que «O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.» (Bivar *et al.*, 2013, p. 4; Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012d, p. 47). Ainda na citada penúltima página, no contexto do raciocínio matemático, volta a vincar-se a importância do raciocínio hipotético-dedutivo como sendo o meio para chegar à elaboração de demonstrações, mesmo que pequenas. Em complemento, nos preliminares dos conteúdos no PMEB2013, diz-se ser essencial que os alunos comecem a utilizar corretamente termos, como definição e teorema, e processos demonstrativos específicos da Matemática.

Apesar das referências explícitas à demonstração serem abundantes nos vários domínios de conteúdo do PMEB2013 com exceção de Organização e Tratamento de Dados, aquele que é considerado como o mais favorável para a sua abordagem é Geometria e Medida. Neste sentido, destaca-se a apresentação de teoremas fundamentais como o de Tales e, um seu corolário, o de Pitágoras. Salienta-se ainda, mais uma vez, o raciocínio hipotético-dedutivo: «Um objetivo geral dedicado à axiomática da geometria permite enquadrar historicamente toda esta progressão e constitui um terreno propício ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos.» (Bivar *et al.*, 2013, p. 19).

Coadunando-se com a mencionada consideração da Geometria e Medida no PMEB2013, há a realçar o subdomínio «Axiomatização das teorias Matemáticas», referente ao 9.° ano. Os objetivos gerais no mencionado subdomínio das MCMEB2012, associados a descritores que começam com os verbos «Identificar», «Reconhecer», «Designar», «Saber», visam a utilização correta de vocabulário do método axiomático e o conhecimento de factos da axiomatização no âmbito da Geometria. No sentido descrito, também já mencionado a respeito do PMEB2013, surgem as noções de teoria, definição, axioma, proposição, lema, teorema, hipótese e tese, condição necessária e condição suficiente, corolário e demonstração. Os autores destacam ainda o perigo do raciocínio circular ao escreverem:

> Reconhecer, no âmbito de uma teoria, que para não se incorrer em raciocínio circular ou numa cadeia de deduções sem fim, é necessário fixar alguns objetos («objetos primitivos»), algumas relações entre objetos que não se definem a partir de outras («relações primitivas»), e algumas proposições que se consideram verdadeiras sem as deduzir de outras («axiomas»). (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012d, p. 72).

As referências explícitas à demonstração aparecem ainda na secção do PMEB2013 dedicada aos níveis de desempenho, os quais são considerados nos descritores das MCMEB2012. Concretamente, as mesmas surgem para se atingirem níveis de desempenho avançados, referindo-se a propriedades que devem ser demonstradas mas não se exigem à generalidade dos alunos, embora todos devam conhecer o enunciado e estar aptos a aplicá-las.

Considerações finais sobre PMEB2007 versus PMEB2013

Indiscutivelmente, nos diferentes níveis de ensino, as demonstrações e suas formas precursoras devem ser apresentadas, pedidas e trabalhadas. No PMEB2007 e no PMEB2013, através de referências implícitas e de referências explícitas, o papel da demonstração é reconhecido, com ênfase exagerada no PMEB2013 e documentos associados. À semelhança do que ocorria no PMEB2007, no PMEB2013 continua a considerar-se a Geometria e Medida como o domínio mais propício para os alunos se familiarizarem com a demonstração. Contudo, não só neste domínio, o PMEB2013 e as MCMEB2012 parecem assentar na excessiva preocupação com a axiomatização, transmitindo a valorização da formalização pela formalização.

Há a realçar que a atividade de justificar é desvalorizada nos documentos que substituem o PMEB2007. A mesma, no PMEB2013, surge nas finalidades e nos desempenhos correspondentes aos verbos «Reconhecer» e «Reconhecer, dado». Podem efetivamente encontrar-se diversas ocorrências da palavra justificar nas MCMEB2012, mas parece que a atividade associada só começa a ser realmente importante no 3.° Ciclo do Ensino Básico. De facto, só na «Leitura das Metas Curriculares do 3.° ciclo» aparece o verbo «Justificar», o qual traduz a justificação de enunciados evocando propriedades conhecidas dos alunos. Mas esta é uma atividade acessível a alunos dos ciclos anteriores! No 2.° Ciclo, a atividade de justificar constitui um subalterno do desempenho «Reconhecer» e o mesmo, em menor escala, sucede no 1.° Ciclo, no qual não surge, ininteligivelmente, qualquer referência à necessidade de justificação de ideias matemáticas.

Reconhece-se, em todos os documentos anteriormente referidos, a ligação da demonstração com o raciocínio matemático, mas no PMEB2013 destaca-se excessivamente o de tipo dedutivo. Em particular, no domínio de conteúdo Geometria e Medida não se refere diretamente o raciocínio indutivo, nomeadamente a formulação de conjeturas, mas antes o raciocínio hipotético-dedutivo através dos desempenhos associados aos verbos «Provar/Demonstrar». De um modo mais geral, por um lado, a palavra conjetura não aparece nas MCMEB2012. Por outro lado, esta só surge fugazmente num parágrafo de uma página do PMEB2013, mas não se indo além da sua menção no âmbito do papel fundamental do raciocínio indutivo e dos perigos deste poder levar a conclusões erradas.

O produto final das atividades de um matemático são as desejadas demonstrações com raciocínio dedutivo. Mas, precedendo-o, há atividades matemáticas fundamentais que envolvem outros tipos de raciocínio com forte presença no PMEB2007. Nomeadamente, a formulação e o teste de conjeturas, que são indissociáveis de exemplos e de contraexemplos. A convivência entre os raciocínios indutivo e dedutivo no PMEB2007 começa por traduzir-se no 1.° Ciclo nas atividades de conjeturar e de justificar e, mais tarde, nos processos mentais mais complexos que poderão conduzir a uma demonstração. Não transparecendo claramente a possibilidade de aprender a raciocinar indutivamente no PMEB2013, parecem eliminar-se as oportunidades de aprender a conjeturar e a compreender, por um lado, o significado e o papel dos contraexemplos na Matemática, e, por outro lado, a necessidade e a relevância de demonstrar..

Referências Bibliográficas

Beites, P. D. (2013). *A demonstração na Matemática e no Ensino*, Notas de uma Sessão inserida num Curso de Formação em Matemática organizado pelo Núcleo Regional da Covilhã da APM.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012c). *Caderno de Apoio às Metas Curriculares de Matemática — Ensino Básico, 3.° Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012d). *Metas Curriculares de Matemática — Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Brochura de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) para o ensino da Geometria e Medida*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Costa, C., & Tadeu, P. (2006). A demonstração nos programas de Matemática: Uma análise transversal. In J. P. da Ponte, L. Serrazina, A. Guerreiro, C. Ribeiro, L. Veia (Eds.), *Actas do EIEM 2006* (pp. 1–7). Lisboa: SPCE.

Devlin, K. (2003). When is a proof?. *Devlin's Angle*. Consultado em janeiro, 2015, de http://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_06_03.html

Filipe, M. (2013). *Resolução de Tarefas no Tema Números e Operações no 3.° Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário*. Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.° Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, Universidade da Beira Interior.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5–23.

Lima, E. L. (1999). Conceituação, manipulação e aplicações. *Revista do Professor de Matemática, 41*, 1–6.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., *et al.* (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 1–20.

Patrícia Damas Beites
Universidade da Beira Interior

A Matemática nos Primeiros Anos de Escolaridade em Singapura : Reflexão

ANA ISABEL SILVESTRE

INTRODUÇÃO

O bom desempenho dos alunos de Singapura nos testes internacionais TIMSS[1] e PISA[2], em Matemática, deu notoriedade ao pequeno país do sudeste asiático e despertou o interesse da comunidade internacional de investigadores, professores e decisores políticos. Além disso, o elevado nível de aprovações nos exames nacionais, como por exemplo, no exame final do ensino primário (6.º ano), foi seguido de perto por outros países. Foi esse interesse que me levou a participar no *workshop* dinamizado pela Professora Koay Phong Lee[3], na Conferência Children's Mathematical Education — CME2014. Este artigo resulta da minha reflexão sobre essa experiência.

A explicação dos resultados dos alunos de Singapura envolve múltiplas dimensões, de diferente natureza, como a história recente, a política, a economia emergente e as expectativas sociais e familiares (Jensen, 2012). No entanto, é de salientar o impacto da política educativa na orientação do desenvolvimento curricular, nos diferentes programas oferecidos, na investigação educacional, na formação inicial e contínua dos professores, nos materiais didáticos e, sobretudo, nas medidas de acompanhamento individualizado aos alunos durante o ensino obrigatório (entre os 6 e os 15 anos).

CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ‹ENSINO PRIMÁRIO›

Desenvolvido pelo *Curriculum Planning and Development Institute*, o currículo de Matemática do ensino primário tem várias teorias edificadoras que lhe conferem a estrutura e orientação. Por um lado, o currículo de Matemática usa a abordagem CPA — concreto, pictórico e abstrato — que emerge na teoria das representações das ideias matemáticas de Bruner, psicólogo americano, que defende que a memorização de factos não deve ser o centro do ensino e encoraja a resolução de problemas, o desenvolvimento do raciocínio matemático e da comunicação. Uma outra teoria edificadora do currículo é a do educador matemático húngaro Zoltan Dienes, autor dos blocos lógicos, em particular, os seus princípios da variabilidade matemática e percetiva que indicam respetivamente, que os conceitos que envolvam variáveis devem ser aprendidos através de experiências que incluam o maior número possível de variáveis e que, tendo em consideração as variações individuais dos alunos, devem estes ter várias experiências com a mesma estrutura concetual, durante a formação dos conceitos. Dos princípios da variabilidade emergem indicações como a necessidade de se usar vários exemplos na aprendizagem de um conceito assim como múltiplas representações. Nesse sentido, os manuais de Matemática de Singapura apresentam, de forma sistemática, vários contextos e representações do mesmo conceito para que os alunos compreendem o que estão a aprender. Dienes realizou experiências de ensino, em vários países, onde procurou criar na sala de aula um espaço de construção e descoberta, usando materiais didáticos por ele construídos. A terceira teoria edificadora é a de Skemp, matemático e psicólogo inglês, que distingue a compreensão instrumental (procedimentos) que envolve a aprendizagem de uma regra/método/algoritmo da compreensão relacional, mais poderosa e que permite ao aluno estabelecer e compreender as relações matemáticas e a sua estrutura. Para Skemp a compreensão relacional é fundamental para mudar a conceção das crianças sobre a Matemática, alterando a ideia enraizada de que esta é um conjunto de regras arbitrárias. Além disso, os alunos beneficiam, a longo prazo, de um conhecimento duradouro.

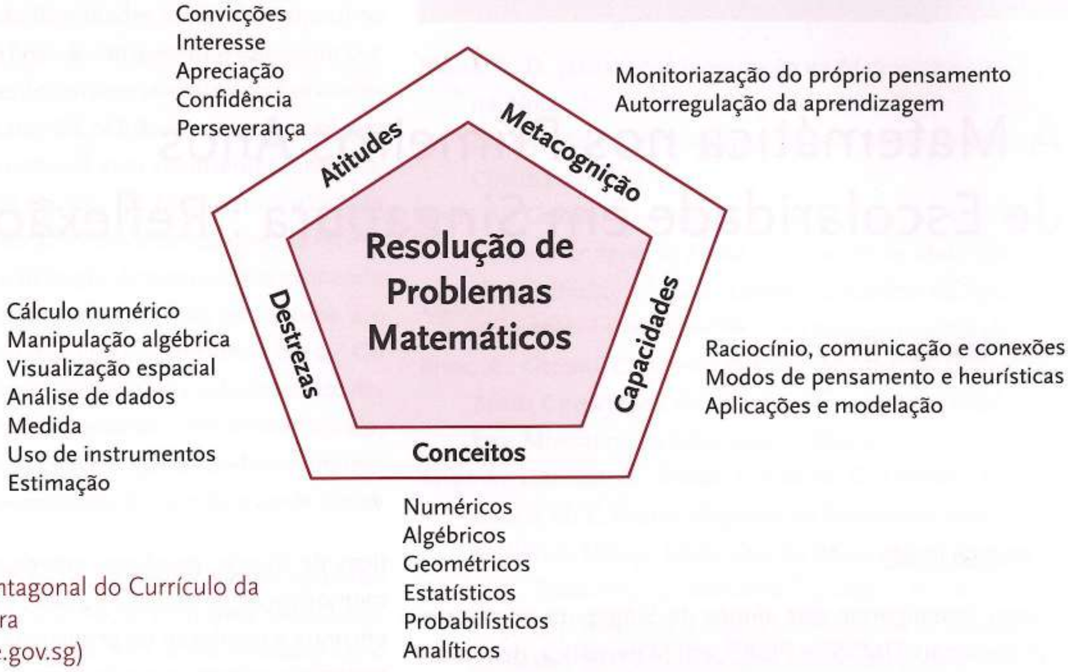


Figura. 1.— Modelo pentagonal do Currículo da Matemática de Singapura
(Fonte: http://www.moe.gov.sg)

O quadro conceptual do Currículo de Matemática de Singapura, também conhecido como modelo pentagonal (figura 1), foi publicado em 1990 mas tem sido refinado desde essa data. A Professora Lee referiu que as alterações pontuais aos programas dos diferentes anos de escolaridade ocorrem após a realização de várias experiências, acompanhadas em contexto escolar pelos responsáveis do Ministério da Educação. Este modelo é ainda hoje o guia do ensino-aprendizagem em todas as escolas e vai além da enumeração de um conjunto de conteúdos matemáticos, ao enfatizar os aspetos que devem estar presentes na aprendizagem da Matemática.

A resolução de problemas ocupa o centro deste modelo, que está dependente de cinco componentes relacionados entre si: os conceitos, as capacidades (*processes*), a metacognição, as atitudes e as destrezas (*skills*). O modelo indica ainda os aspetos a considerar em cada um dos componentes.

MÉTODO DA BARRA

O método da barra também designado na literatura como método do modelo e desenho do modelo é o aspeto mais conhecido do currículo de Singapura. Este método é amplamente usado pelos professores e pelos alunos do ensino primário e foi introduzido em 1983 pelo Professor Kho Tek Hong e a sua equipa como uma forma de melhorar a capacidade de resolução de problemas dos alunos, pois é necessário ajudar os alunos a visualizar as relações matemáticas abstratas e as diferentes estruturas dos problemas através de uma representação pictórica. Contudo, o reconhecimento do método da barra só se tornou evidente quando os alunos do ensino primário começaram a resolver problemas que tradicionalmente estavam associados ao ensino secundário (Cheong, 2002; Ng & Lim, 2001). De facto, este é basicamente um método pré-algébrico em que são usadas representações retagulares (Dindyal, 2006), que ilustram os fenómenos descritos nos problemas.

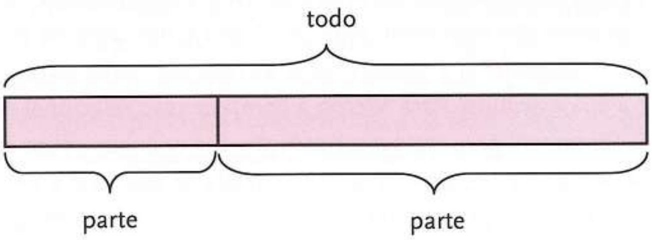


Figura 2.— Método da barra: parte-todo (com partes diferentes)

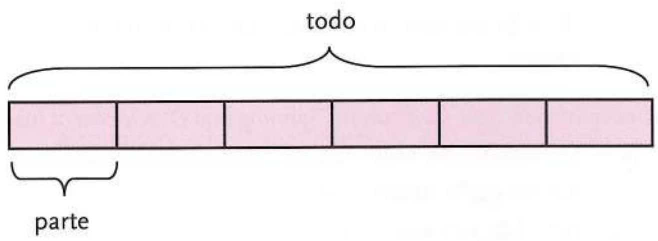


Figura 3.— Método da barra: parte-todo (com partes iguais)

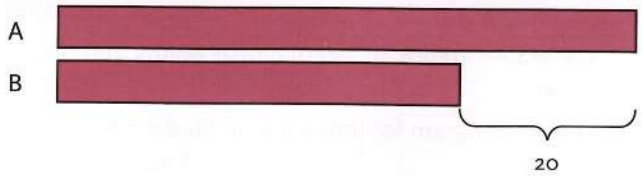


Figura 4.— Método da barra: comparação (versão 1)

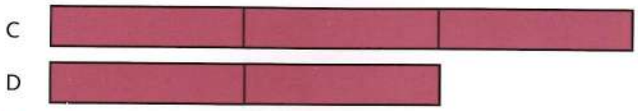


Figura 5.— Método da barra: comparação (versão 2)

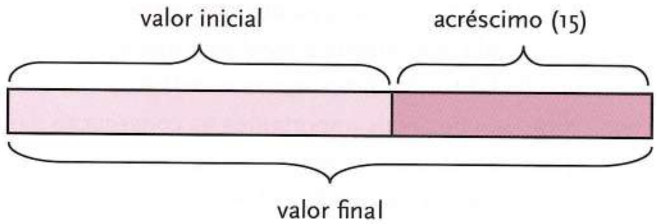


Figura 6.— Método da barra: acréscimo de 15 unidades

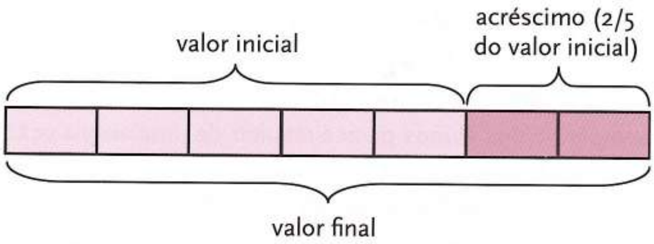


Figura 7.— Método da barra: acréscimo de 2/5 do valor inicial

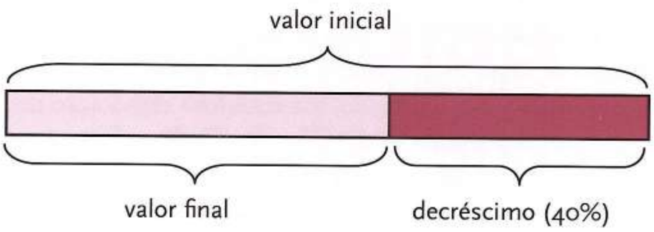


Figura 8.— Método da barra: decréscimo de 40%

Segundo Kho (1987), o método da barra estimula a resolução de problemas desafiadores e leva os alunos a estabelecer um plano durante esse processo de resolução. O método da barra envolve a utilização das representações «parte-todo», de comparação e de mudança na resolução de problemas.

A representação «parte-todo» (figura 2), também conhecida por «parte-parte-todo» representa as partes que constituem um todo.

A barra está dividida em duas partes. Quando as duas partes são dadas, pode-se calcular o todo através da adição. Quando são conhecidos o todo e uma das partes pode-se determinar a outra parte através da subtração.

Na representação «parte-todo», o todo pode ser dividido em mais do que duas partes. Quando a barra é dividida em partes iguais (figura 3) pode-se determinar o todo através da multiplicação de uma parte pelo número de partes. E, inversamente, conhecendo o todo, através da divisão pode-se determinar a parte ou o número de partes.

No método da barra a comparação mostra duas quantidades comparáveis e a diferença entre duas quantidades como mostra a figura 4:

A quantidade A é a quantidade B mais vinte e a quantidade B é a quantidade A menos 20. Este modelo também pode ser usado para ilustrar a comparação de quantidades através da razão (figura 5).

C é 3/2 de D e D é 2/3 de C. Isto é, a razão ente C e D é 3:2.

O método da barra de mudança mostra a relação entre os valores inicial e final de uma quantidade, depois de um aumento ou decréscimo (ver as figuras 6, 7 e 8). Este pode ser representado na forma de numeral decimal, fração ou percentagem.

As três representações anteriores podem ser mais ou menos elaboradas dependendo da complexidade do problema e são consideradas como fundamentais no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas dos alunos. No entanto, o desenho da barra adequada também apresenta algumas dificuldades para alguns alunos e exige tempo para que estes a usem de forma flexível.

DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES AOS MANUAIS ESCOLARES

A investigação revelou outros fatores que contribuem para o sucesso dos alunos. Entre eles, os que têm merecido mais atenção em Singapura são a formação de professores do ensino primário e os manuais escolares. Durante a formação inicial de professores, no domínio da Matemática, grande parte do trabalho é centrado no currículo do ensino primário. Isto é, procura-se que os futuros professores compreendam as teorias edificadoras do currículo, o modelo pentagonal e ainda aprofundem o seu conhecimento matemático e didático.

A construção de manuais escolares é atualmente uma atividade privada, mas sujeita a regulação meticulosa pelo Ministério da Educação. Estes recursos didáticos são indicados como um dos mais importantes na consecução das orientações curriculares, devendo colocar a resolução de problemas no centro da atividade dos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora o método da barra possa ser a face mais conhecida do Currículo de Matemática do ensino primário, frequentemente referido como ‹método de Singapura›, o bom desempenho dos alunos parece resultar de uma ampla ação concertada que tem lugar em várias frentes. Estas envolvem o refinamento do currículo de matemática, resultante de uma reflexão ponderada sobre a sua implementação em contexto escolar, sem alterações profundas ou controversas, e com a intervenção de equipas de especialistas em Matemática e Educação Matemática; a formação de professores, especialmente dirigida ao aprofundamento da integração de saber matemático e didático, tendo por base as especificidades do currículo; e a criteriosa elaboração dos manuais escolares de acordo com as orientações do currículo e rigorosa certificação por parte do Ministério da Educação. Em especial, a articulação entre estas várias frentes sobressai como um processo que decorre num clima de consenso e respeito pelos vários intervenientes e seus papéis, tendo como máximo interesse a qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos.

Notas

[1] TIMMS — Trends in International Maths and Science Study.

[2] PISA — Program for International Student Assessment (OCDE).

[3] Department of Mathematics & Mathematics Education of National Institute of Education (Singapore).

Referências

Cheong, N. P. (2002). The teaching of primary matematics and the moder approch to problem solving. *Mathematics Newsletter*, (Issue No. 4). Singapore: Ministry of Education.

Dindyal, J. (2006). The Singaporean Mathematics Curriculum: Connections to TIMMS. *Proceedings of 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 179–186. Adelaide, Australia: MERGA.

Jensen, B. (2012). *Cathing Up: Learning from the Best School Systems in East Asia.* Melbourbe: Grattan Institute.

Kho, T. H. (1987). Mathematical models for solving arithmetic problems. *Proceedings of the Fourth Southeast Asian Conference on Mathematics Education* (ICMI-SEAMS), 345–351. Singapore: Institute of Education.

Ministry of Education, Singapore. (2009) *The Singapore Model Method for Learning Mathematics.* Singapore: EPB Pan Pacific.

Ng, C. H. & Lim, K. H. (2001). *A handbook for mathematics teachers in primary school.* Singapore: Federal Publications.

Ana Isabel Silvestre
Escola Básica 2,3 Gaspar Correia, Portela
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

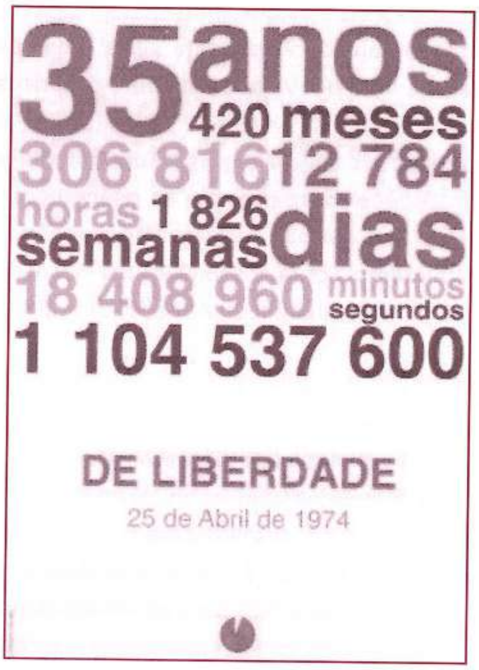
MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Os materiais que propomos pretendem abordar a temática dos grandes números atribuindo significado a esses números e manipulando-os de forma algo criativa. A atividade é sugerida na brochura 3.º Ano — Números e Operações: Números naturais, Operações com números naturais, Números racionais não negativos, da autoria de Fátima Mendes, Joana Brocardo, Catarina Delgado e Fátima Gonçalves que se encontra disponível no sítio da DGE.

Helena Amaral

NÚMEROS GRANDES

No âmbito das comemorações do aniversário do 25 de Abril realizava-se anualmente um concurso de cartazes (Informação em http://www.dgidc.min-edu.pt/PressReleases/Paginas/Concursodedesign25ABRIL.aspx — retirado em 16/04/2010). Em 2009, assinalando o 35.° aniversário do 25 de Abril, o aluno Alexandre Croner Afonso venceu este concurso com o seguinte ao lado



Observa atentamente o cartaz e explica como é que foram obtidos os números 12 784 e 306 816.

Consegues explicar como se obtiveram os restantes números?

Usando o mesmo tipo de ideia de Alexandre Croner Afonso elabora um cartaz para comemorar o teu próximo aniversário.

Podes ainda elaborar um cartaz atualizado comemorativo dos 41 anos do 25 de Abril.

Se elaborares um cartaz para comemorar o próximo aniversário de um teu avô, que aspeto terá?

Esta é a madrugada que eu esperava
o dia inicial inteiro e limpo
Onde emergimos da noite e do silêncio
E livres habitamos a substância do tempo

Sophia de Mello Breyner Andersen
in *O Nome das Coisas*, 1977

Exemplos e contra exemplos para construir o conceito de classe

O episódio que apresento ocorreu numa aula de 3.º ano. A discussão coletiva com toda a turma da qual o retirei aconteceu depois dos alunos terem construído quadrados e retângulos. É interessante notar que construíram alguns paralelogramos pensando que eram retângulos e esses contra exemplos foram decisivos para gerar uma controvérsia favorável a uma boa discussão sobre propriedades de quadriláteros.

O quadrilátero da figura (fig. 1) foi um dos vários exemplares construídos como exemplo de retângulo. De fato é um paralelogramo que não é retângulo e constitui um excelente contra-exemplo para despoletar uma discussão significativa que permita identificar propriedades relevantes do retângulo.

Muitos alunos olhavam para o quadrilátero e diziam que era um retângulo, outros afirmavam que não era. Instalou-se assim um motivo de discussão. Como decidir se é ou não um retângulo? A olho nu ele parece mesmo ser retângulo. Um raciocínio possível para ter a certeza de que não é baseia-se no recurso à estrutura ponteada que o suporta, o que não é muito fácil para quem não domina o raciocínio geométrico. Outra possibilidade será recorrer a um instrumento de medida simples, o «detetor de ângulos retos». Mas vamos ver como decorreu a discussão até chegar à utilização deste instrumento.

Para alimentar a discussão foi destacado como elemento de comparação um retângulo, também construído pelos alunos, e numa posição «inclinada» como a do paralelogramo controverso (fig. 2). Uma boa maneira de forçar os alunos a defenderem uma opção errada é transmitir-lhes a sensação de que o professor defende essa opção. De certa maneira isso dá-lhes confiança.

Professor — *Quem quer dizer o que está a pensar de uma maneira que seja boa para todos ficarem convencidos de que a figura da direita também é retângulo? Vem cá a Rosa.*

Rosa — *Porque este se nós o pusermos assim em pé.*

A aluna, confiante, aproxima-se do quadrilátero exposto e ilustra com gestos o seu argumento (figs. 3 e 4).

Perante a sua dificuldade em verbalizar o que está a pensar, a aluna é incentivada pela professora a mudar a posição da figura. Ao fazê-lo fica com dúvidas.

Rosa — *Se colocasse assim era* [e aponta para os lados]. *Como está ao contrário ...*

É interessante procurar compreender o raciocínio desta aluna. No seu gesto inicial ela aponta para os vértices e por isso parece dar a ideia de conseguir decompor a figura em componentes e de estabelecer relações entre elas. Estaria assim ao nível de uma estruturação geométrica. No entanto, ao precisar de mudar a posição à figura mostra-nos claramente a sua necessidade de a ver como um todo. Para esta aluna a ideia mais forte para identificar um retângulo é uma imagem numa posição comum, «ao alto». A aluna precisa de mostrar que está a tentar vê-la como tal para justificar que é retângulo. Os gestos que faz, com as mãos e com a cabeça, e a sua afirmação dizem-nos que ela defen-

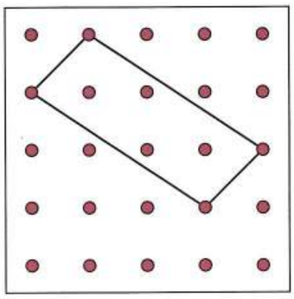


Figura 1

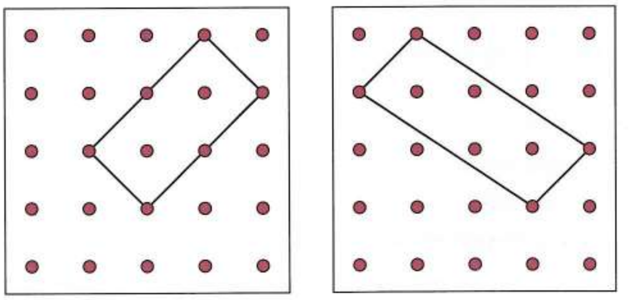


Figura 2

Figura 3

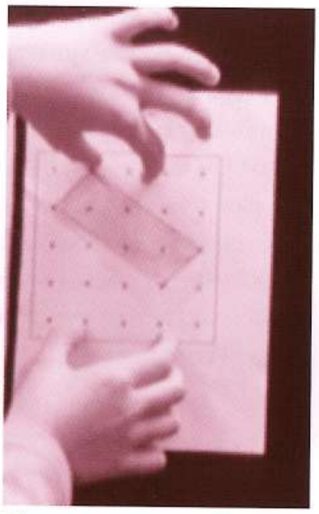


Figura 4

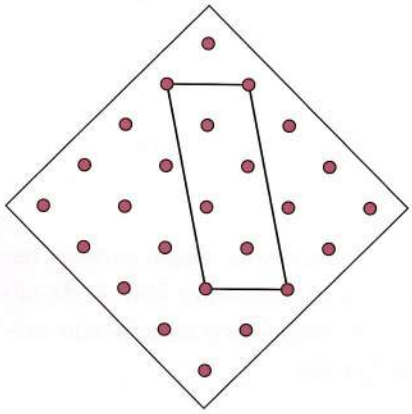


Figura 5

de que é um retângulo porque está a conseguir vê-lo mentalmente como um retângulo. No entanto, ao colocar efetivamente a figura na posição «ao alto» a aluna fica com dúvidas (fig. 5). A ilusão da perpendicularidade dos lados perde-se ao mudar a posição. A aluna não consegue decidir, simultaneamente parece que é e que não é.

Esta aluna, e todos o que estiverem a pensar como ela, precisam ainda de desenvolver a capacidade de raciocínio baseada na estruturação espacial. Isto é, precisam de ser capazes de destacar elementos no retângulo, neste caso os ângulos, para passar a reconhecer e usar uma propriedade que distingue claramente o retângulo dos outros paralelogramos. Esta propriedade é ter 4 ângulos retos. É uma propriedade inclusiva que facilita a construção da relação da classe dos retângulos como uma parte da classe dos paralelogramos.

A introdução de um instrumento de medida muito simples para reconhecer os ângulos retos permitiu aos alunos destacar visualmente os ângulos e passar a usar a propriedade de ter 4 ângulos retos como caraterística da classe dos retângulos. O recurso a contra-exemplos é indispensável para construir a ideia de classe. Uma classe de quadriláteros constitui-se a partir da identificação de invariantes num conjunto alargado de exemplares dessa classe. O conceito de invariante só pode ser bem compreendido se forem analisados também exemplares que não pertencem à classe, como o paralelogramo sobre o qual discutimos.

Esta discussão teve por base figuras construídas pelos alunos e isso confere-lhe muito mais valor e significado. Assim como surgiram paralelogramos não retângulos como exemplos de retângulos poderiam ter surgido losangos não quadrados como exemplares de quadrados. Porém tal não aconteceu, nenhum aluno construiu um losango com dois pares de lados diferentes pensando que poderia ser um quadrado. Mais à frente, no desenrolar da discussão, esse contra-exemplo teve de ser apresentado pela professora, uma possibilidade que é sempre um recurso do professor quando pretende construir a ideia da classe dos losangos inclusiva para os quadrados.

Penso que não seria capaz de refletir sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico nesta perspetiva de estruturação se não tivesse trabalhado com estes miúdos e vivido estas estimulantes discussões a partir das dezenas de figuras que construíram. A leitura desta nota pode ser complementada com as notas 7 a 9 das revistas *Educação & Matemática* 116 a 118, e da nota 20 da revista 131.

Compreensão vs apenas memorização

Um dia destes uma amiga pediu-me para dar uma ajuda ao seu filho, aluno do 6.º ano, que estava com algumas dificuldades a Matemática. Na escola ele estava a trabalhar a grandeza volume. Para fazer um primeiro diagnóstico das suas dificuldades propus-lhe uma tarefa que consistia na construção de três paralelepípedos com 12 cubinhos cada. Dei-lhe os 36 cubinhos e ele construiu os sólidos que se veem na figura 1.

Olhando para os sólidos, e antes de passar à questão seguinte, afirmou, sem que eu lhe tivesse perguntado nada, que o sólido A era aquele que tinha maior volume e o C o menor.

Em seguida resolveu corretamente, e sem a menor hesitação, o exercício da figura 2, aplicando a fórmula de cálculo do volume de um paralelepípedo e ao resultado subtraiu o valor do volume do cubo.

Fiquei admirada! (Ou talvez nem tanto...) Este aluno não compreende verdadeiramente a noção de volume, no entanto, consegue facilmente efetuar o cálculo de volumes de um sólido que pode ser decomposto em dois prismas.

Será que noutra situação em que o cálculo do volume não esteja explícito, este aluno irá reconhecer a necessidade de mobilizar o conceito? Será que o identifica no seu quotidiano? Ou mesmo quando, em contexto escolar, já estiverem para trás as aulas sobre este assunto? Sobre este conteúdo quais serão afinal as aprendizagens que um aluno do 2.º ciclo deverá fazer? Fará sentido aprender fórmulas pela memorização, sem que exista uma compreensão dos conceitos? Pense nisto!

Cristina Tudella

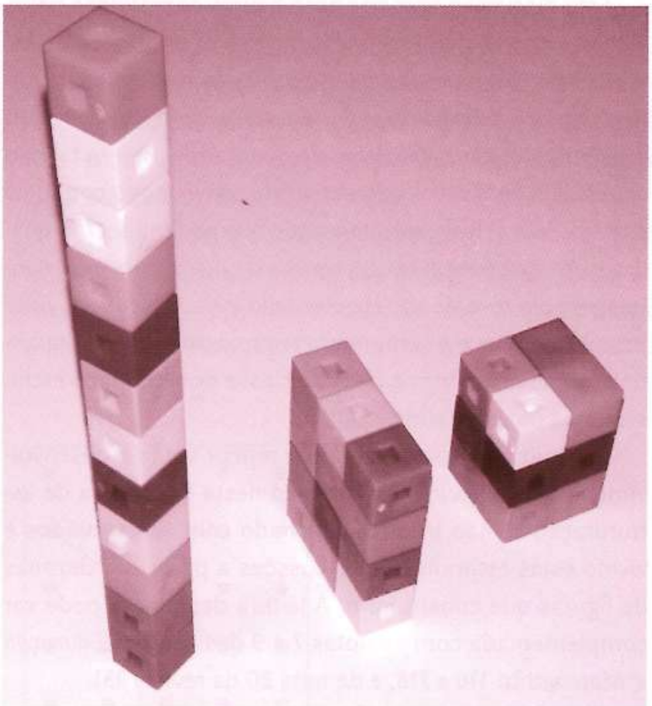


Figura 1.— Sólidos A, B e C (por esta ordem)

A figura representa um prisma do qual foi retirado um cubo com 3 cm de aresta. Calcula o volume do sólido obtido.

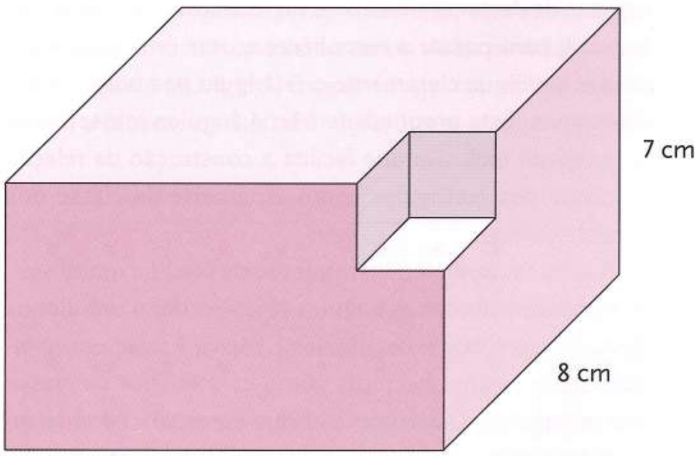


Figura 2

Uma apresentação de «Principles to Actions Ensuring Mathematical Success for All»

FERNANDO NUNES

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) iniciou em 1989 a publicação de obras abrangentes relacionadas com as normas a que deveriam obedecer o ensino e a aprendizagem da matemática, com a edição de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. A APM publicou em 1991 a tradução dessa obra (*Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*), a primeira tradução para uma língua diferente da do original. Seguiram-se nessa linha as «*Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*», as «*Normas para a Avaliação em Matemática Escolar*» e os «*Princípios e Normas para a Matemática Escolar*» (esta última com original de 2000 e tradução portuguesa de 2007), todas elas traduzidas e editadas pela APM, sozinha ou em parceria. O último elo deste percurso foi apresentado ao público em 2014 e tem por título «*Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*» (*Princípios para as Ações: Assegurar o Sucesso em Matemática Para Todos*).

Uma comparação, mesmo que sumária, desta última obra da saga das «*Normas*» com as publicações anteriores revela com facilidade algumas semelhanças e diferenças.

A obra continua a ser marcadamente norte americana, expondo preocupações e visões decorrentes da visão que os autores têm sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. É dirigida a quem tem responsabilidades no processo do ensino, incluindo legisladores, políticos, administradores e gestores escolares, mas o público alvo mais considerado continua a ser o conjunto de professores dos níveis básico e secundário. Desta feita, a sequência dos anos de escolaridade não é um organizador principal da publicação, como acontecia com as primeiras «*Normas*» de 1989/1991 e nos «*Princípios*» de 2000/2007, o mesmo acontecendo com os temas de conteúdo matemático. No entanto, tanto os anos de escolaridade como os conteúdos matemáticos estão presentes no texto, utilizados quando são parte integrante dos episódios apresentados, ilustrações e exemplos concretos, integrando o contexto que está a ser discutido.

Princípios Orientadores para a Matemática Escolar

Todo a obra está subordinada a seis princípios, apresentados logo no início do livro e referentes a áreas identificadas, que devem guiar a matemática escolar:

1. **Ensino e Aprendizagem.** *Um programa de matemática que seja de excelência exige um ensino efetivo que envolva os alunos numa aprendizagem significativa através de experiências individuais e colaborativas que promovam a sua capacidade para verem o sentido das ideias matemáticas e raciocinarem matematicamente.*

2. **Acesso e Equidade.** *Um programa de matemática que seja de excelência exige que todos os alunos tenham acesso a um currículo matemático de grande qualidade, ensino e aprendizagem eficazes, altas expectativas e o apoio e recursos necessários para maximizar o seu potencial de aprendizagem.*

3. Currículo. *Um programa de matemática que seja de excelência inclui um currículo que desenvolva uma matemática rica e segundo uma progressão coerente da aprendizagem, que estabeleça conexões entre áreas do estudo da matemática e entre a matemática e o mundo real.*

4. Ferramentas e Tecnologia. *Um programa de matemática que seja de excelência integra o uso de ferramentas matemáticas e de tecnologia como recursos essenciais para ajudar os alunos a aprender e perceber as ideias matemáticas, raciocinar matematicamente e comunicar o seu raciocínio.*

5. Avaliação. *Um programa de matemática que seja de excelência assegura que a avaliação seja uma parte integrante do processo de ensino, fornecendo evidências sobre a competência em conteúdos e práticas matemáticas importantes, utilizando uma diversidade de estratégias e de fontes de dados, que irão informar o retorno para os alunos, as decisões sobre o ensino e a melhoria de programas.*

6. Profissionalismo. *Num programa de matemática que seja de excelência, os educadores assumem que eles e os seus colegas são responsáveis pelo sucesso matemático de todos os alunos e pelo crescimento profissional, pessoal e coletivo, em prol de um ensino e de uma aprendizagem da matemática que sejam eficazes.*

Quem conhece os «*Princípios e Normas*» de 2000/2007 reparará que cinco dos seis princípios agora considerados correspondem aos que são tratados naquela publicação, com a adição do princípio relativo ao profissionalismo.

O tratamento do princípio do ensino e aprendizagem ocupa quase metade do livro, com a apresentação e discussão de oito práticas do ensino da matemática que são recorrentes em toda a obra. Essas práticas são consideradas um conjunto organizado de temas, aspetos e atitudes nucleares e poderosas a ter em conta, quando se pretende ensinar matemática de modo a atingir uma compreensão profunda.

Práticas do Ensino da Matemática

Estabelecer metas matemáticas para enfatizar a aprendizagem. *Um ensino eficaz estabelece metas claras para a aprendizagem dos alunos na matemática, situa-as na progressão da aprendizagem e usa-as para guiar a tomada de decisão.*

Propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas. *Um ensino eficaz envolve os alunos em atividades de resolução e de discussão que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas, além de permitirem diferentes abordagens e várias estratégias.*

Usar e relacionar representações matemáticas. *Um ensino eficaz envolve os alunos no estabelecimento de conexões entre representações matemáticas, no sentido de aprofundar a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos e assumindo-as como ferramentas para a resolução de problemas.*

Facilitar um discurso matemático com significado. *Um ensino eficaz facilita o discurso entre alunos de modo a construírem uma compreensão partilhada das ideias matemáticas recorrendo à análise e comparação das suas abordagens e dos seus argumentos.*

Colocar questões pertinentes. *Um ensino eficaz utiliza questões pertinentes para avaliar e incrementar o raciocínio e a criação de sentido dos alunos acerca das ideias e relações matemáticas.*

Chegar à fluência processual, a partir da compreensão conceptual. *Um ensino eficaz permite chegar à fluência na realização de procedimentos a partir de uma base de compreensão conceptual, de modo que os alunos, ao longo do tempo, se tornem competentes no uso de procedimentos de modo flexível aquando da resolução de problemas contextuais e matemáticos.*

Favorecer o esforço consequente na aprendizagem da matemática. *Um ensino eficaz proporciona consistentemente oportunidades aos alunos, individual e coletivamente, favorecendo o seu envolvimento num esforço consequente enquanto se debatem com as ideias e as relação matemáticas.*

Explicitar e utilizar o pensamento dos alunos. *Um ensino eficaz usa evidências do pensamento dos alunos para avaliar o progresso no sentido da compreensão matemática e para ajustar continuamente o ensino de modo a apoiar e ampliar a aprendizagem.*

A estrutura das partes referentes a cada um dos princípios é semelhante, o que evidentemente não impede que se trate especificamente cada um dos aspetos considerados relevantes para o princípio em questão.

O princípio é apresentado e introduzido, pretendendo-se uma clarificação do tema e a identificação de aspetos específicos que sejam considerados relevantes. Em seguida apresentam-se os obstáculos percebidos à aplicação do princípio e uma listagem das crenças consideradas produtivas e não produtivas. Estas crenças não são apresentadas como boas ou más, mas sim como favorecendo ou dificultando a realização dos princípios.

A tabela seguinte apresenta a primeira e a última crença listadas para cada um dos princípios (Ensino e Aprendizagem, Acesso e Equidade, Currículo, Ferramentas e Tecnologia, Avaliação, Profissionalismo).

Tabela 1

Crenças não produtivas	Crenças produtivas
(1) *A aprendizagem deve centrar-se em treino de procedimentos e na memorização de factos numéricos básicos.*	*A aprendizagem deve centrar-se no desenvolvimento da compreensão dos conceitos e procedimentos, através da resolução de problemas, raciocínio e discurso.*
(1) *Um professor eficaz torna a matemática fácil para os alunos, guiando-os passo a passo na resolução de problemas para assegurar que não ficam frustrados nem confusos.*	*Um professor eficaz proporciona desafios apropriados, encoraja a perseverança na resolução de problemas e favorece um esforço consequente na aprendizagem da matemática.*
(2) *Os alunos têm níveis inatos diferentes de capacidade matemática, facto que não pode ser alterado pelo ensino. Alguns grupos ou indivíduos são capazes, outros não.*	*A competência matemática é função da oportunidade, experiência e esforço, e não de uma inteligência inata. O ensino e a aprendizagem da matemática cultivam as capacidades matemáticas. Todos os alunos são capazes de participar e ter sucesso em matemática e têm direito a serem apoiados para chegarem aos patamares mais altos.*
(2) *Só os alunos com bons resultados ou dotados podem raciocinar, perceber o sentido ou perseverar na resolução de problemas desafiantes.*	*Todos os alunos são capazes de compreender o sentido e perseverarem na resolução de problemas desafiantes, e deve ser esperado que o façam. Muitos mais alunos, independentemente do género, raça ou estatuto socioeconómico, devem ter o apoio, a confiança e as oportunidades para atingirem níveis superiores de sucesso e interesse pela matemática.*
(3) *Os conteúdos e a sequência dos tópicos num manual definem sempre o currículo. Tudo o que está incluído no manual é importante e deve ser tratado e o que não está no livro não é importante.*	*As normas devem informar as decisões sobre quais os tópicos que devem ser tratados e quais os que devem ser omitidos no currículo. O modo como o manual é utilizado depende da sua qualidade, isto é, o grau em que propicia um processo de ensino coerente e equilibrado, em conteúdos coerentes com as normas e permite lições que ajudem de modo consistente a implantação das Práticas de Ensino da Matemática.*
(3) *A disponibilidade de fontes acessíveis de materiais curriculares significa que qualquer professor deve conceber o seu próprio currículo ou o seu manual.*	*Os materiais curriculares de acesso livre devem ser estudados colaborativamente e utilizados no apoio à realização de progressões de aprendizagem, num programa de matemática coerente e efetivo.*
(4) *As calculadoras e outras ferramentas são, na melhor das hipóteses, um floreado ou um divertimento ou, na pior hipótese, uma muleta que impede os alunos de aprender matemática. Só devem usar este recurso depois de terem aprendido a fazer os procedimentos com papel e lápis.*	*A tecnologia é um facto inelutável da vida no mundo em que vivemos e deve ser agarrada como uma ferramenta poderosa para fazer matemática. A utilização da tecnologia pode auxiliar os alunos a visualizar e compreender conceitos matemáticos importantes e apoiar o raciocínio matemático e a resolução de problemas.*
(4) *Os vídeos de ensino online podem substituir o ensino na aula.*	*Os vídeos de ensino online devem ser judiciosamente adotados e usados para apoiar, ao contrário de substituir, um ensino efetivo.*
(5) *O principal objetivo da avaliação é a responsabilização dos alunos com a atribuição de níveis ou classificações.*	*O principal objetivo da avaliação é informar e melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática.*
(5) *Interromper o ensino para rever e realizar testes melhora o desempenho dos alunos em testes de alto risco.*	*Revisões regulares e prática frequente, integrantes do ensino efetivo, são estratégias produtivas para a preparação de testes.*
(6) *Os docentes chegam dos programas de formação inicial de professores prontos para serem eficazes.*	*Tornar-se perito, enquanto professor de matemática, é um processo que acompanha toda a carreira. A base de conhecimentos para o ensino e aprendizagem efetivos da matemática encontra-se em expansão contínua.*
(6) *O manual e os recursos digitais oferecem todos os planos de aula e atividades necessárias e, portanto, os professores não têm necessidade de se envolver em planificações detalhadas de unidades ou de aulas.*	*O ensino efetivo da matemática é consequência de uma planificação significativa. Professores de excelência colaboram na concepção de aulas de matemática detalhadas e em seguida refletem sobre a eficácia dessas planificações na aprendizagem dos alunos, num ciclo de aperfeiçoamento contínuo.*

A secção seguinte à apresentação das crenças é denominada «*Ultrapassagem dos obstáculos*» e segue esta listagem de crenças, com o objetivo de indicar formas de se poderem enfrentar as dificuldades. É também relatado um episódio exemplar retirado da prática, letiva ou outra, para ilustrar o que está a ser defendido para a realização do princípio.

Finalmente, o capítulo dedicado a cada princípio termina com uma justificação da importância da implementação do princípio, juntamente com exemplos de atitudes a tomar e sugestões de ações a desenvolver para que essa implementação possa ser atingida, chamando a atenção para as dificuldades que necessariamente encontrarão os que se lançarem na tarefa. O título dessa secção é «*Em direção à ação*».

A última parte dá pelo nome de «*Agir*». Integra um conjunto de recomendações, organizadas segundo os diversos princípios, dirigidas a líderes e responsáveis políticos, a diretores, formadores e especialistas, além de, evidentemente, aos professores. É neste final também que os autores reconhecem a limitação da obra, enquanto conjunto de «meras palavras», e onde se apela a quem acredita «*que existe uma necessidade inadiável de um mundo diferente*» em que seja obrigatória a existência de uma crença «*não negociável que nos diz ser imperioso desenvolver a compreensão e a autoconfiança em **todos** os alunos*».

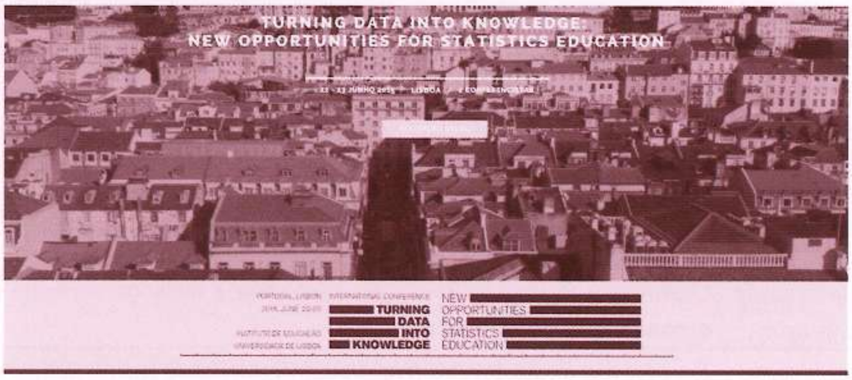
Este mote é uma das reivindicações mais fortes, ou mesmo a mais forte, de toda a obra, bem refletida no subtítulo do livro «*Assegurar o Sucesso em Matemática para Todos*». É também uma obra que assinala claramente pontos de vista diferentes, no que respeita ao ensino e à aprendizagem da matemática, chamando a atenção para as diferenças que também surgirão consoante for adotada esta ou aquela posição. Não me recordo que isso tenha sido feito de forma tão clara nas diversas obras das «Normas» que antecederam esta edição de 2014.

Em resumo, acho que existem muitas razões para se ler o livro, pesando e discutindo os pontos que se podem revelar mais polémicos, especialmente por aqueles que sentem e se interessam pelo universo do ensino e da aprendizagem da matemática.

Nota: As partes traduzidas são da responsabilidade do autor deste artigo.

FERNANDO NUNES

ENCONTROS



O projecto DSL (Developing Statistical Literacy: students learning and teacher education), vai organizar uma conferência internacional com o tema *Turning data into knowledge: new opportunities for statistics education*, nos dias 22 e 23 de junho, 2015, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Haverá duas linhas principais — raciocínio e literacia estatística — a que se juntam a formação de professores e a tecnologia, como temas transversais.

A APM vai ser uma instituição parceira desta iniciativa, os sócios vão ter um valor de inscrição reduzido (30 euros) face ao valor da inscrição normal (50 euros).

Para mais informações consultar o site da conferência http://www.statisteduc.ie.ulisboa.pt/

Paralelamente à Conferência haverá sessões práticas em português, destinadas a professores dos ensinos básico e secundário. Estas sessões foram já submetidas para acreditação ao CCFC, na modalidade de Curso de Formação (0,6 créditos).

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2015 consistiu na resolução do problema «Mármore na Praça»:

A autarquia de Évora pretende construir na Praça do Sertório uma zona retangular (não quadrada) pavimentada a mármore, à volta da qual serão depois colocados vários bancos de jardim e algumas árvores para fazer sombra.

Para isso, encomendou placas quadradas de mármore medindo um metro de lado. Um certo número de placas de mármore rosa formariam um retângulo mais pequeno e um número diferente de placas de mármore verde iriam criar uma cercadura de largura constante à volta da zona rosa.

Já a encomenda tinha sido entregue quando o presidente da câmara achou que ficaria mais bonito um retângulo central verde com uma cercadura rosa.

— Não faz mal — disse o técnico responsável depois de fazer uns cálculos. — Por coincidência, sem ter de cortar qualquer placa, é possível fazer uma cercadura rosa, um pouco mais larga que o previsto, à volta de um retângulo central verde. Mais ainda, esta é a zona pavimentada com menor área para a qual isto podia ter acontecido.

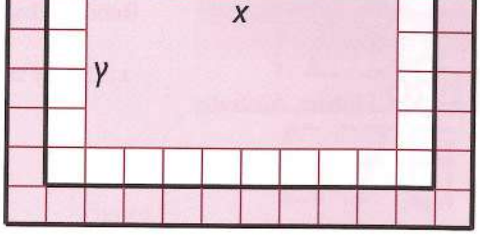
Qual é a área da zona retangular a pavimentar e quantas placas de cada cor serão usadas?

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Foram-nos entregues apenas cinco resoluções.

Três delas faziam uma procura sistemática e exaustiva das possíveis soluções, caso a caso, usando papel e lápis ou uma folha de cálculo. Esta metodologia implica a análise de uma grande quantidade de situações. As outras duas seguiram métodos analíticos tendo em conta as condições e restrições impostas no enunciado. Uma delas é da Isabel Viana. Demos-lhe a palavra.

Vamos primeiro ver o que acontece se, no projeto inicial, o friso de placas de mármore verde tivesse 1 metro de largura, e se, na versão final, a cercadura rosa ficasse com 2 metros de largura.



Sejam x e y as dimensões, em metros, do retângulo central verde que será construído, como exemplifica esta figura. Estes valores têm de ser números naturais, pois nenhuma placa é cortada.

A faixa verde (com um metro de largura), que inicialmente iria contornar o retângulo rosa, tem de ter a mesma área que o retângulo central verde que irá ser afinal construído, visto que utilizam o mesmo número de placas verdes. Ou seja,

$$x.y = (x+4) + (x+4) + (y+2) + (y+2)$$

Esta equação, resolvida em ordem a y, toma o aspeto

$$y = \frac{2x+12}{x-2}$$

Supondo que x é maior que y (não podem ser iguais pois a zona não é quadrada), as únicas soluções possíveis para x e y (números naturais) são:

- $x = 18$ e $y = 3$, correspondentes a uma área central com 54 quadrados de mármore verde, e um contorno com 100 quadrados de mármore rosa, totalizando 154 placas,

ou

- $x = 10$ e $y = 4$, correspondentes a uma área central com 40 quadrados de mármore verde, e um contorno com 72 quadrados de mármore rosa, totalizando 112 placas.

Assim, se no projeto inicial o friso de placas de mármore verde tiver 1 metro de largura e se a cercadura rosa da versão final ficar com 2 metros de largura, como temos de escolher a área menor possível, deverá ser $x = 10$ e $y = 4$ (solução provável).

Quanto maior for a largura da cercadura prevista inicialmente, maior terá de ser a área total a pavimentar. Com efeito, fazendo mais alguns cálculos, podemos deduzir que, para um friso previsto de placas de mármore verde com n metros de largura, e a cercadura final em rosa com n+1 metros, a relação entre x e y é

$$y = \frac{2nx + 4n^2 + 8n}{x - 2n}$$

Ou seja, quanto maior for o valor de n, maior terão de ser os valores de x e de y.

Vejamos, por exemplo, a possibilidade de, no plano inicial, o friso de placas de mármore verde ter 2 metros de largura e a cercadura rosa, no plano final, ter 3 metros de largura.

A equação agora seria:

$$x.y = 4(x+6) + 4(y+2) \text{ ou seja } y = \frac{4x+32}{x-4}.$$

As suas soluções são os pares (12, 10), (16, 8), (20, 7), (28, 6) e (52, 5).

A de menor área é $x = 12$ e $y = 10$. Mas neste caso a área total é 288 m^2 (muito superior a 112 m^2).

Assim, a resposta deste problema é:

A área da zona retangular a pavimentar é 112 m^2, e serão usadas 40 placas verdes e 72 placas rosa.

Premiados e Prémios

1º (*Unidade TI-Nspire Cx, oferta Texas Instruments*)

— Maria Isabel Viana

2ºs (*jogos diversos*)

— Pedro Freitas

— Sofia, Sandra & Daniel Castanho

— Fausto da Silva

— Catarina Ferreira

Os prémios devem ser levantados até 31 de Dezembro de 2015. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt ou 217163690).

ENCONTROS

UAlg FCT

12TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING

24-27 June, 2015 — Faro, Portugal

University of Algarve, Faculty of Sciences and Technology

A 12ª Conferência Internacional em Technology in Mathematics Teaching — ICTMT 12 é organizada pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. Terá lugar em Faro, Portugal, de 24 a 27 de Julho de 2015 (http://ictmt12.pt/index.html).

Esta conferência bienal é a décima segunda de uma série que teve início em Birmingham, UK, em 1993, sob a iniciativa do Professor Bert Waits da Universidade Ohio State. A última conferência teve lugar em Bari, Itália, em 2013. Em 2015 acontecerá de novo no sul da Europa, desta vez em Portugal, perto do Atlântico.

O ICTMT é uma conferência única já que pretende reunir professores, educadores, investigadores de educação matemática, especialistas em tecnologia e software educativo que se interessam pela melhoria do ensino e da aprendizagem pelo uso efetivo da tecnologia. Proporciona um espaço para investigadores e práticos nesta área discutirem e partilharem as melhores práticas, saberes teóricos, inovação e perspetivas sobre tecnologia educativa e o seu impacto no ensino e aprendizagem da matemática, bem como abordagens teóricas.

PME International Group for the Psychology of Mathematics Education

Conferência anual

A próxima Conferência Anual PME terá lugar em Hobart, Tasmania, Austrália entre 13 e 18 de Julho de 2015. Para mais informações, por favor, visite a página da conferência: http://www.pme39.com/.

Sistemas de numeração: dos egípcios à atualidade

Ricardo Ferreira

1. Introdução

Atualmente com 10 algarismos o Homem é capaz de escrever qualquer número e realizar um cálculo de forma rápida, contudo nem sempre foi assim. Há milhares de anos o modo de vida era muito diferente do atual. Os homens primitivos não tinham necessidade de contar. Com o passar dos anos, os costumes foram mudando e o homem passou a cultivar a terra, a criar animais, a construir casas e a comercializar. Com isso, surgiram várias civilizações e com estas apareceram alguns sistemas de numeração, que apresentavam limitações muitas vezes relacionadas com a aritmética. Dada a importância que os números começaram a ter para o desenvolvimento da humanidade, houve necessidade de se arranjar um sistema simples e «quase perfeito». Este artigo pretende mostrar alguns sistemas de numeração que existiram na nossa Era até ao sistema que utiliza os chamados símbolos árabes.

2. Numeração Egípcia (3400 a.C.)

O Egipto foi uma das primeiras e grandes civilizações da antiguidade. Os *Egípcios* inventaram um sistema de numeração baseada em pictogramas, isto é cada símbolo era a imagem de um objeto ou de um ser e representava um número. Os números 1, 10, 100, 1000 eram representados por símbolos especiais, cada símbolo podia ser repetido até nove vezes (figura 2).

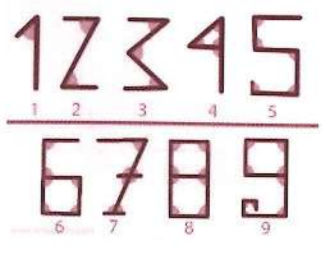


Figura 1

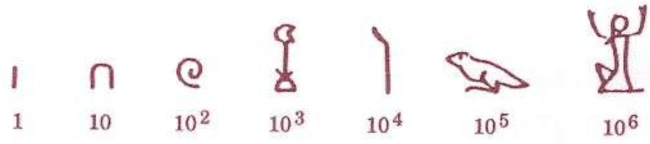


Figura 2

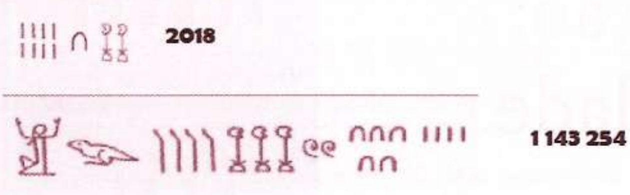


Figura 3

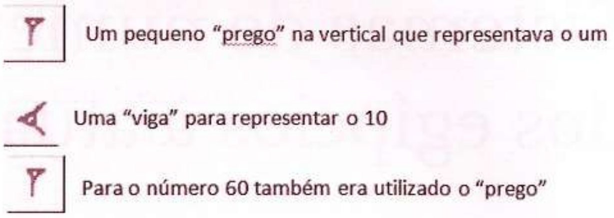


Figura 4

Alguns exemplos de representação de alguns números no sistema egípcio (figura 3).

É de salientar que este sistema de numeração era limitado e à medida que o número fosse maior a aritmética complicava-se.

3. Numeração babilónica

Os babilónicos viviam na Mesopotâmia, nos vales do Rio Tigre e Eufrates, na Ásia. Esta região é ocupada atualmente pelo Iraque. Escritos *Babilónicos* provam que esta civilização possuía grandes conhecimentos matemáticos. A numeração babilónica era sexagesimal, usavam o número 60 como base, pois este apresenta muitos divisores. Os símbolos numéricos eram esculpidos em pequenas placas de argila, que serviam de base de «impressão» da escrita cuneiforme. Eram usados pictogramas representados na figura 4.

A partir do símbolo da unidade representavam-se os nove primeiros números repetindo-se o pictograma da unidade tantas vezes quantas as necessárias. A partir do símbolo para a dezena representavam as 20 unidades, as 30 unidades, as 40 unidades e as 50 unidades, repetiam o número de vezes necessários o pictograma que exprimia a dezena. Assim construíram os números até 59. Para o 60 utilizavam novamente o «prego».

No início, os babilónios não dispunham de um símbolo para indicar o zero, e consequentemente os seus registos numéricos ficavam por vezes ambíguos (figura 5).

4. Numeração grega

A Grécia ocupa a parte sul da península dos Balcãs, região montanhosa com baixa pluviosidade e solo pouco fértil, com uma linha de costa escarpada. No decurso da sua história os gregos recorreram a dois sistemas de numeração distintos, um mais antigo, o Ático, no qual arranjavam os números por ordem e os agrupavam, e um posterior, mais erudito, o Jónico, sistema de numeração alfabético que apareceu pela primeira vez no séc. V a.C. Os gregos, contudo, não adotaram um sistema numérico posicional, facto que não deixa de ser surpreendente, no entanto utilizaram a base dez, a mesma dos seus vizinhos próximos, os egípcios e os fenícios. A numeração grega baseia-se no princípio aditivo.

Sistema de numeração grega (Ático) (figura 6)

Um exemplo (figura 7).

Podemos observar no quadro seguinte alguns exemplos onde se aplicou o Princípio multiplicativo, dando assim origem a uma representação reduzida de números mais elevados (figura 8).

Alguns exemplos (figura 9).

O sistema de numeração ático apresenta uma característica interessante: alicerçado numa base decimal, recorrendo ao princípio da adição, apresenta um símbolo particular para cada um dos números 1, 10, 100, 1 000, bem como para cada um dos números: 5, 50, 500, 5 000, e as-

Figura 7

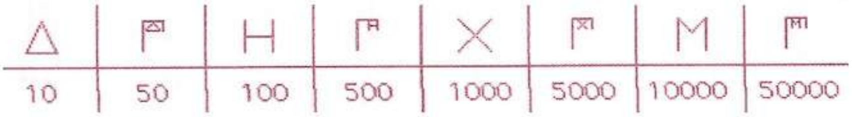
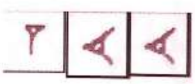


Figura 8

Figura 9



Este número é 21 ou 80?

Figura 5

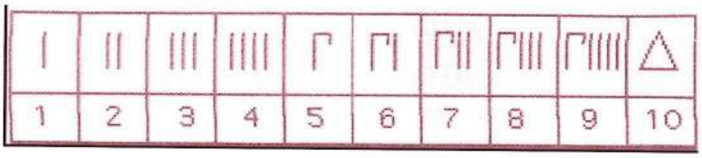


Figura 6

sim continuadamente. O sistema grego, ao contrário da nossa notação posicional, não era puramente posicional e o cálculo era bastante complicado porque requeria um uso enorme de símbolos, idênticos, mesmo após a introdução do princípio multiplicativo.

5. Numeração romana

Roma (capital da Itália) foi o centro de uma das mais notáveis civilizações da antiguidade. O sistema de numeração romana (ou números romanos) desenvolveu-se na Roma Antiga e utilizou-se em todo o seu Império. Neste sistema, as cifras escrevem-se com determinadas letras, que representam os números. As letras são sempre maiúsculas, já que no alfabeto romano não existem as minúsculas, as letras são I, V, X, L, C, D e M.

Repetindo cada símbolo duas ou três vezes (nunca mais que três) o número fica duas ou três vezes maior: Os símbolos V, L e D não se repetem

As letras I, X ou C colocam-se à esquerda de outras de maior valor para representar a diferença deles, obedecendo às seguintes regras:

- I só se coloca à esquerda de V ou de X;
- X só se coloca à esquerda de L ou de C;
- C só se coloca à esquerda de D ou de M.

Neste sistema de numeração as letras devem situar-se da ordem de maior valor para a de menor valor. Não se deve escrever mais de três I, ou três X, ou três C em qualquer número. Se estas letras se situam antes (à esquerda) de um V, um L, ou um D, subtrai-se o seu valor à cifra das ditas letras. Exemplo: IX, XC ou XL, que significam, 9, 90, 40 respetivamente (figura 10).

Ainda hoje utilizamos esse sistema de numeração em algumas situações, tais como:

- Designação de papas e reis;
- Designação de séculos e datas;
- Indicação de capítulos e volumes de livros;
- Mostradores de alguns relógios, etc.

6. Numeração Maia

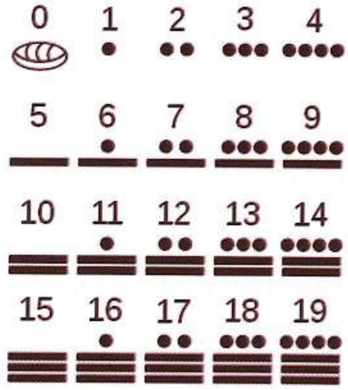
A civilização Maia foi uma das maiores civilizações do Ocidente. Ocupavam um território ao sul do México, Guatemala e a norte de Belize. No seu sistema de numeração tinham como base não a dezena, mas a vintena e as potências de vinte. No sistema de numeração Maia, os algarismos são baseados em símbolos. Os símbolos utilizados são o ponto e a barra horizontal, e no caso do zero, uma forma oval parecida com uma concha. A soma de cinco pontos constitui uma barra, dessa forma, se usarmos os símbolos maias para escrever o numeral oito, utilizaremos três pontos sobre uma barra horizontal (figura 11).

O vinte, eles escreviam como o zero e depois o 1 em cima, ou seja, uma «vintena» e nenhuma unidade. Qua-

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Figura 10

Figura 11



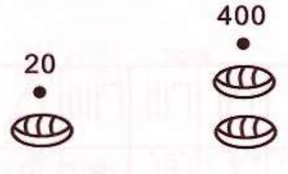


Figura 12

Figura 13

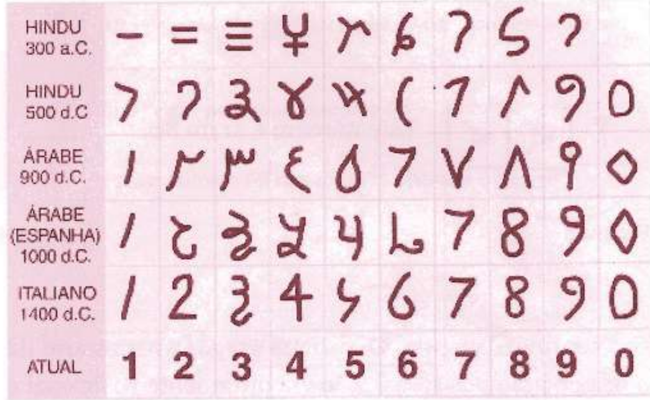


Figura 14

trocentos (20x20) é zero, depois zero e um, ou seja, uma «quatrocentena» , nenhuma «vintena» e nenhuma unidade (figura 12).

A numeração dos *Maias* dificilmente deveria prestar-se à prática das operações aritméticas e o sistema devia servir apenas para consignar os resultados de cálculos já efetuados.

7. Numeração Indo-Árabe

O sistema de numeração indo- árabe teve origem no «símbolos de brahmi» que era um sistema de numeração, de base decimal, que atribuía um símbolo a cada uma das unidades, das dezenas, das centenas, dos milhares, das dezenas de milhar, «seguindo o mesmo princípio da numeração grega» (figura 13).

Por volta do ano 600 d.C os hindus utilizando os «símbolos brahmi», recriaram um sistema decimal que se exprime na base 10 e posicional porque o valor dos algarismos é determinado pela sua posição na escrita dos números. A posição de um algarismo na representação do número determina o seu valor. Assim, o algarismo A colocado na posição *x* representa *a*.10*x*. Nasceu assim um sistema completo e coeso, detendo um conjunto de condições necessárias à construção de uma numeração aprovisionada das mesmas potencialidades do nosso sistema atual. O sistema de numeração hindu conseguiu alcançar um nível de perfeição que durante muitos séculos se procurou atingir. Al-Khowarizmi decidiu contar ao mundo as boas novas. Escreveu um livro chamado «Sobre a arte hindu de calcular», explicando com detalhes como funcionavam os dez símbolos hindus. Coube ao matemático italiano Leonardo de Piza (apelidado Fibonacci) a glória de ter trazido para a Europa a numeração indo-arábica que veio substituir o complicado sistema inventado pelos romanos. No entanto, a introdução dos numerais indo-árabes encontrou oposição do público, visto que estes símbolos dificultavam a leitura dos livros dos mercadores. A introdução dos dez símbolos na Europa Ocidental foi lenta. O primeiro manuscrito francês onde são encontrados data de 1275.

Podemos ver neste quadro a evolução dos números de brahmi até aos dias de hoje (figura 14).

Bibliografia

Conway, Jonh H. e GUY, Richard K. — *O Livro dos Números*, Col. Gradiva/Universidade de Aveiro, n.° 6, 1ª ed., Lisboa, Gradiva, 1999, ISBN 972-662-696-x.

Ifrah, Georges — *História Universal dos Algarismos. A Inteligência dos Homens contada pelos números e pelo cálculo*, vol. I, 2ª ed., Rio de Janeiro, Editora Nova Fronteira, S. A., 1997, ISBN 85-209-0841-1.

Masini, Giancarlo — *A Matemática. O Romance dos Números*, Col. História Ilustrada da Ciência, 2ª ed., Círculo de Leitores, 1979.

Mindtrap II, O Desafio Continua, Mindtrap Games Inc., Lisboa, Mattel Portugal, Ldª, 2000.

Parelman, Y — *Matemáticas recreativas*, 1ª ed., Lisboa, Editora Litexa, 1979, ISBN 972-578-016-7.

Pestana, Isabel — et alii — *Matemática 5*, 1ª ed., Carnaxide, Constância Editores, S.A., 2000, ISBN 972-761-111-7.

Salvado, Alda — et alii — *Desafios — Matemática 7° Ano*, 1ª ed., Carnaxide, Constância Editores, S.A., 1998, ISBN 972-8250-52-5.

Ricardo Ferreira

O centro desaparecido de uma circunferência

José Luiz Pastore Mello

Todo professor que costuma utilizar o compasso na lousa sabe que com alguma frequência a ponta seca escorrega e... pronto, está perdido o centro da circunferência! Recuperá-lo é uma tarefa simples se, além do compasso, temos uma régua em mãos, bastando para isso encontrar o ponto de intersecção das mediatrizes de dois segmentos secantes à circunferência. O fato inusitado é que, mesmo não dispondo de uma régua em mãos, também é possível recuperar o centro perdido da circunferência utilizando apenas o compasso, porém, essa é uma tarefa bem mais complexa. Você sabe como se faz isso?

Mais surpreendente do que saber que o problema de recuperar o centro perdido da circunferência tem solução usando apenas o compasso é o fato de que Lorenzo Mascheroni, poeta e matemático italiano do século XVII, demonstrou no livro *Geometria del Compasso*, publicado em 1797, que toda construção euclidiana que pode ser feita com régua e compasso, também pode ser realizada apenas com o compasso. Por essa descoberta Mascheroni recebeu várias honrarias da academia de ciência italiana. Curiosamente, em 1928, um estudante de matemática encontrou em uma livraria de Copenhague um velho livro, datado de 1672, de autoria de um obscuro matemático chamado Gerog Mohr, que continha a demonstração do resultado obtido por Mascheroni. Não podemos dizer que Mascheroni plagiou Mohr porque as demonstrações conduzidas por ambos são diferentes, porém, é possível cogitar que Mascheroni tenha tido algum contato com o livro de Mohr. Polêmica a parte, o resultado demonstrado por ambos os matemáticos é conhecido atualmente como teorema de Mohr-Mascheroni.

Inspirados pela discussão engendrada por esse teorema, estudos iniciados pelo matemático francês Jean Victor Poncelet, e concluídos pelo matemático suíço-alemão Jacob Steiner, deram conta de provar posteriormente que nem todas as construções euclidianas podem ser realizadas apenas com o uso de uma régua, porém, contando-se com uma circunferência e seu centro já traçados no plano da construção, a régua se torna suficiente para todas as construções, o que é conhecido como teorema de Poncelet-Steiner.

Voltando ao problema da localização do centro desaparecido da circunferência apenas com o uso do compasso, hoje em dia ele pode ser resolvido de forma relativamente simples utilizando-se o recurso de uma transformação geométrica denominada inversão. Tal recurso foge do contexto da matemática escolar básica, porém, isso não inviabiliza a busca de uma solução, ainda que complexa, com recursos elementares de desenho geométrico, o que será apresentado a seguir. Antes de mergulharmos na resolução do problema, fica a recomendação para o leitor: você irá apreciar melhor a demonstração se utilizar um compasso e uma folha de rascunho para investigar cada passagem descrita a seguir.

As linhas traçadas nas figuras são apenas representações para facilitar a compreensão da demonstração. Nossa regra proíbe o uso da régua, e permite o uso do compasso apenas no traçado de circunferências centradas em pontos já construídos e passando por pontos já construídos.

Dada a circunferência λ_1 de centro desconhecido (figura 1), comece marcando dois pontos quaisquer X e Y sobre ela. Em seguida, com o compasso marque os pontos A e B na

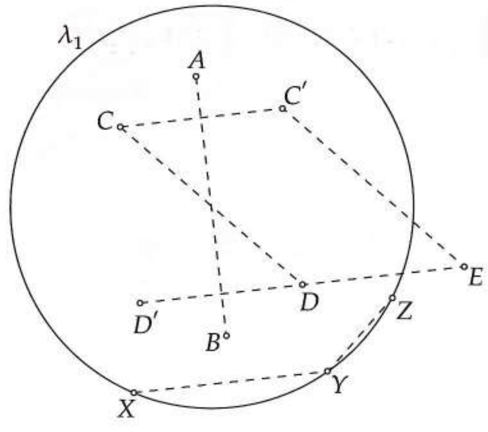


Figura 1

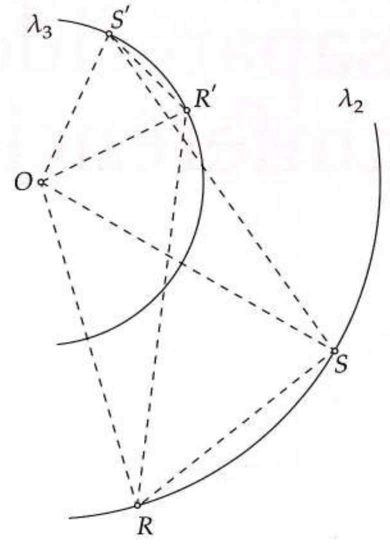


Figura 2

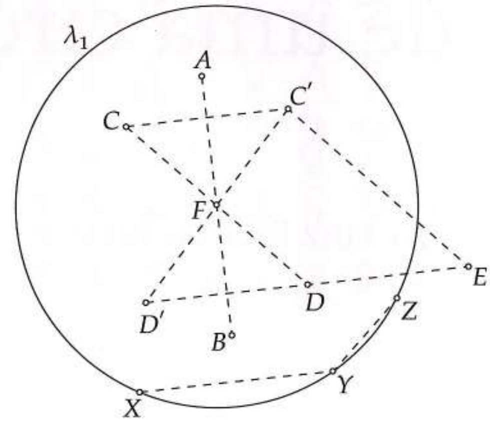


Figura 3

mediatriz de $\overline{XY}$ (é possível fazer isso usando apenas o compasso). Marque um ponto Z em λ_1, o que definirá $\overline{YZ}$. Marque os pontos C e D na mediatriz de $\overline{YZ}$. Trace os simétricos de C e D em relação à $\overline{AB}$, nomeando-os de C' e D', respectivamente (isso também pode ser feito só com o compasso, tente!). Construa o ponto E, que deve ser vértice de um paralelogramo $DCC'E$. Como $\overline{DE}$ e $\overline{DD'}$ são paralelos à $\overline{CC'}$, segue que D', D e E são colineares (figura 1). Por ora deixe em suspenso essa construção para obter, em outra figura, a quarta proporcional entre $\overline{D'E}$, $\overline{D'D}$ e $\overline{C'E}$, que será nomeada de K, e obtida por .

$$\frac{D'D}{D'E} = \frac{k}{C'E}.$$

Construa as circunferências concêntricas λ_2 e λ_3 de raios congruentes à $\overline{D'E}$ e $\overline{D'D}$, denotando o centro por O (figura 2). Sobre λ_2 marque os pontos R e S de forma que $\overline{RS}$ seja congruente à $\overline{C'E}$. Escolha uma abertura no compasso que permita traçar os pontos R' e S' em λ_3 de forma que $\overline{RR'}$ e $\overline{SS'}$ sejam congruentes. Tal construção garante que os triângulos ORR' e OSS' sejam congruentes. Como $m(\angle ROR') = m(\angle SOS')$, segue que $m(\angle SOR) = m(\angle S'OR')$. Os triângulos SOR e $S'OR'$ são isósceles, com $m(\angle SOR) = m(\angle S'OR')$, o que permite concluir que são semelhantes, pelo caso LAL de semelhança. Segue que

$$\frac{OS'}{OS} = \frac{R'S'}{RS}$$

ou, de forma análoga, que

$$\frac{D'D}{D'E} = \frac{R'S'}{C'E},$$

o que implica dizer que $R'S' = k$.

De volta à λ_1, com o compasso centrado em D e depois em D', e raio de medida k, trace o ponto F na intersecção das duas circunferências (figura 3). Uma vez que

$$\frac{D'D}{D'E} = \frac{k}{C'E},$$

segue que D', F e C' estão alinhados (conseqüência do fato de que os triângulos $D'C'E$ e $D'FD$ são semelhantes com razão de semelhança k). Uma vez que F está nas mediatrizes de $\overline{XY}$ e de $\overline{YZ}$, ele será o centro perdido de λ_1 (figura 3).

Em tempos que o desenho geométrico tem sido tão pouco explorado na escola, o problema apresentado costuma mobilizar intensamente o interesse dos alunos.

José Luiz Pastore Mello
Colégio Santa Cruz, em São Paulo, Brasil

Dominó Algébrico: o algoritmo da divisão de uma forma lúdica

João Vitor Teodoro
Luiz Fernando de Souza Freitas

INTRODUÇÃO

O presente texto tem como principal objetivo apresentar mais uma importante ferramenta lúdica de se ensinar, o jogo Dominó Algébrico. Após a apresentação de suas regras e relações com a matemática, especificamente a divisão no conjunto dos inteiros que faz referência ao Algoritmo da Divisão e seus conceitos, alguns problemas são propostos. O conceito pode ser estendido para uma linguagem mais aprofundada que trata sobre relações de equivalência, mais especificamente a congruência. Espera-se que o texto facilite tanto no desempenho do jogador como na compreensão dos conceitos trabalhados.

O DOMINÓ ALGÉBRICO

O *Dominó Algébrico* é composto por peças similares às do dominó convencional, porém, os pontos marcados variam de zero (lado branco) a onze e, dado que cada pedra possui duas dessas numerações e não há peças repetidas, temos um número de peças igual a setenta e oito, além de seis peças especiais, que serão comentadas a seguir, totalizando oitenta e quatro peças (figura 1).

Podem jogar duas, três, quatro, seis ou oito pessoas, individualmente ou em duplas quando possível, sorteando e dividindo as peças entre elas, sem que possa restar alguma. Devem-se jogar várias partidas somando pontos e o jogador ou a dupla que acumular primeiramente seis vitórias, vence o jogo.

O objetivo do jogador é eliminar suas peças antes de qualquer oponente ou trancar o jogo, ou seja, criar uma situação onde ninguém tenha peças a serem jogadas, obtendo soma dos valores das peças não especiais do dominó em mãos inferior às dos oponentes.

Inicia o jogo quem obtiver a peça especial com inscrição Z_{12} que será colocada em jogo, após isso, o próximo a jogar será o da direita do jogador que iniciou e, assim, sucessivamente. Caso o jogador não tenha peça disponível para a situação de jogo, ele passa sua vez para o próximo jogador.

As peças especiais podem ser inseridas a qualquer momento, qualquer peça pode ser ligada às peças especiais e para que se entenda o procedimento das ligações restantes, o conceito de *Algoritmo da Divisão* será apresentado.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
3	4	5	6	7	8	9	10	11	3	4	5
3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
6	7	8	9	10	11	4	5	6	7	8	9
4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6
10	11	5	6	7	8	9	10	11	6	7	8
6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8
9	10	11	7	8	9	10	11	8	9	10	11
9	9	9	10	10	11	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_6	Z_{12}
9	10	11	10	11	11	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_6	Z_{12}

Figura 1.— Peças do Dominó Algébrico

Sabemos da *Álgebra* que, nos inteiros, a divisão de um número por outro nem sempre é possível, porém, é possível efetuar uma divisão com resto definido por meio do *Algoritmo da Divisão* (Domingues & Iezzi, 2003; Gonçalves, 1999).

Algoritmo da Divisão (Divisão Euclidiana): Sejam a e b dois números inteiros com $a > 0$. Então, sempre, podem-se encontrar dois números inteiros q e r tais que:

$$b = a \times q + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a.$$

Nessas condições, q e r são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão de b por a.

No jogo, considerando as peças numeradas, cada valor b_1 de uma peça poderá ser ligado a um valor b_2 de outra peça se dada a última peça especial Z_a colocada em jogo, então as divisões euclidianas entre b_1 e b_2, ambos por a, obtiverem restos iguais, ou seja:

$$b_1 = a \times q_1 + r_1 \text{ e } b_2 = a \times q_2 + r_2, \text{ de forma que } r_1 = r_2$$

É importante salientar, antes de apresentar o *Algoritmo da Divisão* aos alunos, que essa teoria é necessária ao entendimento do funcionamento do jogo, ou seja, que é parte fundamental das regras.

Um exemplo de partida do *Dominó Algébrico* é apresentado:

Exemplo: Considerando quatro jogadores jogando individualmente, cada um receberá dezoito peças. Quem tiver a peça Z_{12} inicia a partida, assim, pode-se ligar qualquer peça a Z_{12}, e o jogo será jogado como de maneira tradicional até que se coloque outra peça especial, pois, cada valor quando dividido por 12 terá resto único, ou seja, nenhum outro número de 0 a 11, ao ser dividido por 12, terá resto igual (tabela 1).

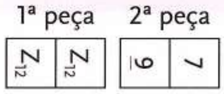


Figura 2.— Segunda peça

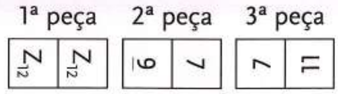


Figura 3.— Terceira peça

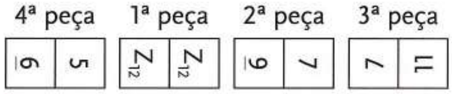


Figura 4.— Quarta peça

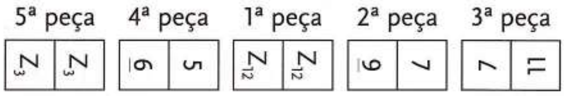


Figura 5.— Quinta peça

Assim, o próximo jogador, que colocará a *2ª peça*, pode ligar qualquer peça a Z_{12}, pois, ela é especial (figura 2).

O próximo a jogar, colocará a *3ª peça*, que poderá ser qualquer se ligada à Z_{12}. Se preferir, poderá ligar ao lado 7 também uma peça com valor 7 (como foi visto nas divisões anteriores). Ou uma peça especial em qualquer lado (figura 3).

O jogador que colocará a *4ª peça* poderá ligar à Z_{12} qualquer peça, ligar uma peça que contenha valor 11 à *3ª peça* ou uma peça especial em qualquer lado (figura 4).

O jogador que colocará a *5ª peça* poderá ligar uma outra que contenha valor 6 em um dos lados à *4ª peça*, uma que tenha valor 11 em um dos lados à *3ª peça* ou uma peça especial em qualquer lado (figura 5).

Tabela 1.— Os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 como produto de 12 mais resto.

$0 = 12 \times 0 + \mathbf{0}$
$1 = 12 \times 0 + \mathbf{1}$
$2 = 12 \times 0 + \mathbf{2}$
$3 = 12 \times 0 + \mathbf{3}$
$4 = 12 \times 0 + \mathbf{4}$
$5 = 12 \times 0 + \mathbf{5}$
$6 = 12 \times 0 + \mathbf{6}$
$7 = 12 \times 0 + \mathbf{7}$
$8 = 12 \times 0 + \mathbf{8}$
$9 = 12 \times 0 + \mathbf{9}$
$10 = 12 \times 0 + \mathbf{10}$
$11 = 12 \times 0 + \mathbf{11}$

Tabela 2.— Os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 como produto de 3 mais resto

$0 = 3 \times 0 + \mathbf{0}$
$1 = 3 \times 0 + \mathbf{1}$
$2 = 3 \times 0 + \mathbf{2}$
$3 = 3 \times 1 + \mathbf{0}$
$4 = 3 \times 1 + \mathbf{1}$
$5 = 3 \times 1 + \mathbf{2}$
$6 = 3 \times 2 + \mathbf{0}$
$7 = 3 \times 2 + \mathbf{1}$
$8 = 3 \times 2 + \mathbf{2}$
$9 = 3 \times 3 + \mathbf{0}$
$10 = 3 \times 3 + \mathbf{1}$
$11 = 3 \times 3 + \mathbf{2}$

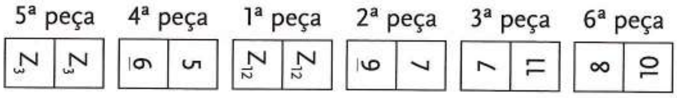


Figura 6.— Sexta peça

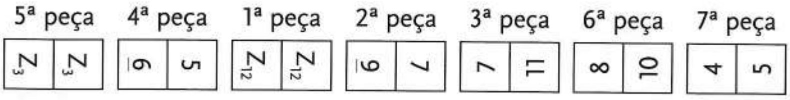


Figura 7.— Sétima peça

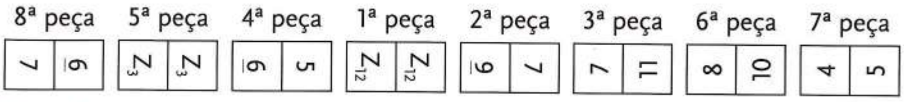


Figura 8.— Oitava peça

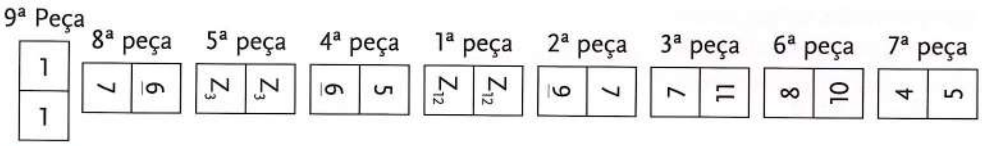


Figura 9.— Nona peça

Como uma peça especial foi colocada em jogo, o *a* em questão será 3, ou seja, ambos os valores das peças a serem ligadas devem ter restos iguais quando divididos por 3. Dessa forma, o jogador seguinte pode ligar qualquer peça à Z_3, ligar uma peça com resto 2 na divisão por 3, que pode ser visto na tabela 2, ao lado 11 da *3ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado (figura 6).

O jogador seguinte pode ligar qualquer peça à Z_3, ligar uma peça com lado de resto 1 na divisão por 3 ao lado 10 da *6ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado (figura 7).

O próximo a jogar pode ligar qualquer peça à Z_3, ligar uma peça com lado de resto 2 na divisão por 3 ao lado 5 da *7ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado (figura 8).

A peça a ser colocada agora, pelo próximo jogador, deve ter lado com resto 1 quando dividido por 3 se ligada à *8ª peça*, lado com resto 2 na divisão por 3 ao lado 5 da *7ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado (figura 9).

O jogo terminará quando um jogador eliminar suas peças ou todos não tiverem peças a serem colocadas.

Além da própria problematização oferecida diretamente no ato de jogar, alguns problemas extras podem, também, ser oferecidos como forma de aplicação direta e formal da teoria. Seguem alguns problemas que podem ser abordados:

Problema 1. Quando o jogo é iniciado, ou seja, a peça especial Z_{12} é inserida, quais valores podem ser ligados?

Solução. Nesse caso, deveremos ligar valores que tenham mesmo resto quando divididos por 12. Assim, como descrito na tabela 1, valores inteiros entre 0 e 11 quando divididos por 12, só quando forem iguais, coincidem os valores do resto.

Problema 2. Quando a peça especial Z_2 é colocada em jogo, quais valores poderão ser ligados?

Solução. Os valores a serem ligados devem ter restos iguais quando divididos por 2. Dessa forma, como todos os números pares têm resto 0 na divisão por 2 e os ímpares, resto 1 na divisão por 2, então, poderão ligar entre si valores pares e poderão ligar entre si valores ímpares. Em particular se ligarão os valores oferecidos no jogo.

Problema 3. Quando a peça especial Z_3 é colocada em jogo, quais valores poderão ser ligados?

Solução. Os valores a serem ligados devem ter restos iguais quando divididos por 3. Dessa forma, como expresso na tabela 2, poderão ligar entre si 0, 3, 6 e 9, também poderão ligar entre si 1, 4, 7 e 10 e poderão ser ligados entre si também os valores 2, 5, 8 e 11.

Problema 4. Quais peças especiais fazem com que os valores 2 e 4 possam ser ligados?

Solução. As peças especiais que permitem a ligação entre 2 e 4 são:

$$Z_1, \text{ pois, } 2 = 1 \times 2 + \mathbf{0} \quad \text{e} \quad 4 = 1 \times 4 + \mathbf{0};$$
$$Z_2, \text{ pois, } 2 = 2 \times 1 + \mathbf{0} \quad \text{e} \quad 4 = 2 \times 2 + \mathbf{0}.$$

Problema 5. Qual peça especial permite que quaisquer valores possam se ligar até que outra peça especial seja colocada?

Solução. Somente a peça especial Z_1. Vejamos.

Vale para Z_1, pois, $b = 1 \times b + \mathbf{0}$ e $b' = 1 \times b' + \mathbf{0}$ para quaisquer b e b'.

Não vale para nenhum outro $Z_a \neq Z_1$, pois, sendo $a > 1$, dada a divisão euclidiana de b por a, então:

$$b = a \times q + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a.$$

Fazendo também a divisão euclidiana de $b + 1$ por a, então:

$$b + 1 = a \times q' + r', \quad \text{com } 0 \leq r' < a.$$

Assim,

- Se $0 \leq r + 1 < a$, então $r' = r + 1$ e $q' = q$, ficando:

  $$b + 1 = a \times q + (r + 1), \quad \text{com } 0 \leq (r + 1) < a,$$

  Desse modo, b e $b + 1$ não poderão ser ligados.
- Se $r + 1 = a$, então $r' = 0$, pois:

  $$b + 1 = a \times q + r + 1 = a \times q + a = a \times (q + 1) + 0$$

  Desse modo, $0 = r' \neq r = a - 1$, pois $a - 1 \neq 0$, já que $a > 1$.

  O que nos diz que b e $b + 1$ não poderão ser ligados.

Problema 6. Se, em meio a um jogo, liga-se o valor 5 ao 7 e, posteriormente o valor 7 ao 10, qual Z_a foi inserido por último no jogo?

Solução. Os valores 5 e 7 se ligarão quando for inserido Z_1 ou Z_2. E, os valores 7 e 10 se ligarão quando for inserido Z_1 ou Z_3. Dessa forma, para que ambas as ligações ocorram, a peça especial a ser inserida por último deve ser Z_1.

Problema 7. Por que não se pode ter a peça especial Z_0?

Solução. Pelo algoritmo da divisão

$$b = a \times q + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a$$

Se houvesse a peça especial Z_0, então, $a = 0$ e, portanto,

$$b = r, \quad \text{com } 0 \leq r < 0,$$

o que é um absurdo.

Problema 8. Quais peças especiais fazem com que os valores 7 e 10 possam ser ligados?

Solução. As peças especiais que permitem a ligação entre 7 e 10 são:

$$Z_1, \text{ pois, } 7 = 1 \times 7 + \mathbf{0} \quad \text{e} \quad 10 = 1 \times 7 + \mathbf{0};$$
$$Z_3, \text{ pois, } 7 = 3 \times 2 + \mathbf{1} \quad \text{e} \quad 10 = 3 \times 3 + \mathbf{1}.$$

Problema 9. Para o caso em que a peça Z_a esteja valendo no jogo. Quais valores terão resto 0?

Solução. Pelo algoritmo da divisão

$$b = a \times q + r, \text{ com } 0 \leq r < a$$

Se $r = 0$, então,

$$b = a \times q, \text{ com } 0 < a,$$

ou seja, para valores múltiplos de a.

Problema 10. Mostre que os valores b e b' podem ser ligados quando a última peça especial colocada em jogo for Z_a se, e somente se, $b - b' = a \times k$, para algum k inteiro.

Solução.

($\Longrightarrow$) Como b e b' podem ser ligados, então:

$$b = a \times q + r \quad \text{e} \quad b' = a \times q' + r$$

Fazendo $b - b'$ obtemos:

$$b - b' = a \times q + r - (a \times q' + r) =$$
$$= a \times q + r - a \times q' - r = a \times q - a \times q'$$

Colocando a em evidência:

$$b - b' = a \times (q - q')$$

Como q e q' são inteiros, então, $q - q' = k$, onde k é inteiro. Portanto,

$$b - b' = ak.$$

($\Leftarrow$) Se $b - b' = ak$ e, como b e b' podem ser expressos através do algoritmo da divisão na divisão por a:

$$b = a \times q + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a$$

e

$$b' = a \times q' + r', \text{com } 0 \leq r' < a$$

Fazendo $b - b'$:

$$b - b' = a \times q + r - (a \times q' + r') = ak \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \times q + r - a \times q' - r' = ak$$

Colocando a em evidência:

$$a \times (q - q') + r - r' = ak$$

Mas, como ak é inteiro para a e k inteiros, então, $(q - q') = k$ e $r - r' = 0$, logo, $r - r'$ e, assim, b e b' podem ser ligados.

A noção estabelecida anteriormente pode ser estendida através de conceitos introduzidos pela *Álgebra Abstrata*. Tais conceitos são, geralmente, oferecidos no nível superior. Todos os problemas resolvidos utilizando o *Algoritmo da Divisão* podem ser resolvidos utilizando a notação de *Relação de Equivalência*, e o jogo pode ser jogado utilizando ambas as linguagens apresentadas.

RELATO DE UMA APLICAÇÃO

O *Dominó Algébrico* foi aplicado em uma oficina a nove alunos matriculados nos primeiro e quarto anos em um curso de licenciatura em matemática. Partes dessa aplicação foram registradas em vídeo e, posteriormente, avaliadas.

Em geral, o jogo foi bem aceito, todos os participantes jogaram corretamente e, aparentemente, divertiram-se, produzindo entre os jogadores o desenvolvimento de um conteúdo matemático de forma descontraída e lúdica.

Essa aplicação permitiu a elaboração de alguns dos problemas que não estavam no material, principalmente o *Problema 7*, que foi motivado por indagações por parte de alunos do primeiro ano, e o *Problema 5* que havia sido deixado em aberto, principalmente sobre a possibilidade da resposta ser Z_0, ocasionando uma suposta divisão por zero.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A problemática oferecida pelo jogo exige do aluno o domínio teórico e estratégico envolvendo conceitos matemáticos. Para jogar, é necessário entender e respeitar as regras e, para isso, é preciso dominar o conhecimento matemático que, aprimorado, melhora o desempenho e aumenta as chances de sucesso do jogador.

O jogo começa a ser tratado como coisa séria e os professores enxergam nele uma forma construtivista de ensinar, além de tornar o ato de jogar ou brincar uma forma divertida de aprender, resultando numa aula mais rica e descontraída. «Jogar não é estudar nem trabalhar, porque jogando, o aluno aprende, sobretudo, a conhecer e compreender o mundo social que o rodeia.» (Groenwald & Timm, 2000, p. 21).

Referências

Domingues, H. & Iezzi, G. (2003). *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual.

Gonçalves, A. (1999). *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro: Impa.

Groenwald, C. & Timm, U. (2000). Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula. *Educação Matemática em Revista*. São Paulo.

João Vitor Teodoro
Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil

Luiz Fernando de Souza Freitas
Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Um inventário para a análise de tarefas que envolvem recursos tecnológicos[1]

PAULA CRISTINA TEIXEIRA, ANTÓNIO DOMINGOS

As tarefas que envolvem tecnologia são um recurso didático com alguma representatividade nos manuais escolares. Neste número apresentamos uma ferramenta que apoia o professor na seleção e adaptação destas tarefas, em particular, na tomada de decisão na adequação do recurso tecnológico à situação matemática e à aprendizagem.

A natureza das tarefas pode ser estudada com a atenção focada em aspetos diferentes das suas características. Pepin (2012) atendendo aos diferentes focos de análise das características de uma tarefa, apresentados por vários autores, criou um inventário que resulta da compilação dessas propostas.

Este inventário faz parte de uma ferramenta que Pepin (2012) denominou de *catalítica* uma vez que funciona, para os professores, como catalisador da análise sobre as tarefas e a configuração que propõe parece vantajosa. No final do inventário o professor obtém como retorno (*feedback*) a caracterização da tarefa que se propôs analisar. A análise desse retorno permite a reflexão e a tomada de decisões sobre a tarefa inicialmente inventariada.

O *retorno* são as informações fornecidas, oralmente ou por escrito, a um aluno por um agente (por exemplo, um professor, um colega, um livro, os materiais curriculares, pelo próprio, por uma experiência) sobre aspetos da sua aprendizagem, do seu desempenho ou da sua compreensão (Hattie & Timperley, 2007). Esta definição de retorno sustenta as informações que o professor obtem do seu trabalho com a ferramenta catalítica.

As componentes que fazem parte do inventário para a análise da tarefa são, além do nível e o ano de ensino, os conteúdos, os processos, e o tipo de tarefa.

Nos conteúdos são propostos dois aspetos: o domínio e a conexão na matemática. O domínio prende-se com os tópicos curriculares e pode ser: os números, a álgebra, a geometria, a medida e a estatística e probabilidade. A conexão na matemática pode ser dentro da matemática ou através de outros temas.

Os processos podem ser por: representação, análise-raciocínio, análise-processual, interpretação e comunicação oral. No que se refere aos processos é feita uma subdivisão denominada por fluência processual e está dividida nos passos a realizar.

O tipo de tarefa está dividida em: familiaridade, contexto, compreensão concetual, exigência cognitiva, representação matemática e ferramentas. A familiaridade, por sua vez, está subdividida em seguimento do programa, com alguns aspetos novos ou uma situação não conhecida anteriormente. O contexto pode ser puro, artificial ou autêntico. A compreensão concetual pode ser: implícita, explícita ou subordinada. A exigência cognitiva está subdividida em: conhecimento (escrever, lista, nome), compreensão (descrição, sumário), aplicação (usar, resolver, aplicar), análise (comparar, analisar), síntese (planear, inventar, desenvolver) e avaliação (criticar, justificar).

A representação matemática é separada em analógico, pictórico (por exemplo, com gráficos), simbólico e numérico.

Por último, as ferramentas podem ser tecnológicas (a calculadora, o computador) ou outras, como por exemplo ferramentas de geometria (compasso, transferidor).

O trabalho do professor com a ferramenta passa a ser entendido como um processo que ocorre para além do que acontece na aula, incluindo a análise e a seleção de materiais curriculares como parte da planificação e reflexão. A investigação tem mostrado que o investimento em melhorar as planificações e reflexões representa um grande potencial para melhorar a qualidade do ensino (Ball & Cohen, 1999; Fernandez, 2002; Hiebert *et al.*, 2003). Para além disto, é consensual que, para que o desenvolvimento profissional tenha lugar, é necessário criar oportunidades para os professores trabalharem juntos, na análise e discussão dos materiais curriculares em ligação com a sua prática.

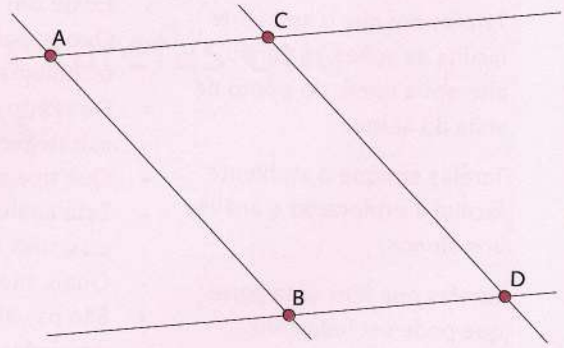
Quadro 1.— Inventário para a análise de uma tarefa com um recurso tecnológico para as ações em aula (Teixeira, 2015).

Tipo de tarefa	Questões a monitorizar na fase de seleção da tarefa
Tarefas em que o ambiente facilita as ações, mas não alteram a tarefa do ponto de vista do aluno. Tarefas em que o ambiente facilita a exploração e análise aos alunos. Tarefas que têm uma parte que pode ser feita com papel e lápis, mas pode ser resolvida de forma diferente no ambiente tecnológico. Tarefas que não podem ser resolvidas sem a mediação do ambiente tecnológico.	• Existe um problema real para ser resolvido? • Que tipo de conhecimento matemático exige a resolução da tarefa com a tecnologia? • Do ponto de vista do conhecimento matemático a que se destina a tarefa, é a estratégia mais eficiente para a resolução do problema no ambiente tecnológico? • Que tipo de aprendizagem pode promover a tarefa? • Esta análise deve ser feita tendo em conta os conhecimentos prévios dos alunos e as suas conceções? • Quais são os meios de ação previstos no ambiente para resolver a tarefa? • São os valores das variáveis da tarefa escolhida que promovem as estratégias desejadas? • Existe retorno do ambiente para inviabilizar estratégias erradas? • O que sabem os alunos sobre como usar o ambiente para resolver a tarefa? • Será que o conhecimento matemático dos alunos lhes permite resolver a tarefa usando ferramentas do ambiente com as quais não estão familiarizados ou, inversamente, pode construir-se uma nova estratégia de resolução capitalizando a sua familiaridade com o ambiente?
Em aula	**Ações a monitorizar durante a fase da orquestração instrumental com os alunos**
Para manter a exigência cognitiva da tarefa	• Apoiar o pensamento e raciocínio do aluno. • Dar aos alunos os meios para avaliar o seu próprio progresso. • O professor ou alguns alunos devem exemplificar desempenhos de nível elevado. • O professor deve estimular justificações, explicações e significados através de questões, comentários e retornos. • As tarefas devem ter atenção ao conhecimento prévio dos alunos. • O professor deve estabelecer frequentemente conexões concetuais. • Deve ser dado tempo suficiente para explorar as tarefas, nem de menos nem de mais.
Para evitar o declínio da exigência da tarefa	• Aspetos problemáticos da tarefa não devem tornar-se rotineiros. • O professor não pode tomar conta do pensamento e raciocínio e dizer aos alunos como resolver o problema. • O professor não pode mudar a ênfase dos significados, conceitos ou compreensão para a correção ou perfeição das respostas. • Não ser dado tempo suficiente para lidar com aspetos exigentes da tarefa, ou ser dado demasiado tempo. • Os alunos não serem responsabilizados pelos resultados ou processos. • Dar a impressão aos alunos que o seu trabalho não será tido em consideração para a avaliação.

Pepin (2012) pretende, com o seu trabalho, melhorar a compreensão e teorizar o conceito de *retorno* em ligação com as ferramentas didáticas. Neste contexto, as ferramentas são uma forma de comunicação, que transmitem informação sobre as operações de uso e as suas consequências. Nos atuais contextos culturais, esses objetos ligam-se com as intenções, empregos e propósitos, têm uma voz expressiva e assumem um papel novo na investigação como uma ligação poderosa à aprendizagem do professor.

No seguimento do anteriormente apresentado, e tentando completar o guião proposto por Pepin (2012), o Quadro 1. (Teixeira, 2015) apresenta uma proposta de inventário para a análise de uma tarefa (por exemplo: uma ficha de trabalho, um guião para uma apliqueta de um recurso tecnológico, um guião de utilização de um *software* específico para auxiliar a aprendizagem dos alunos) para ser aplicada com os alunos com um recurso tecnológico. Na fase de produção da tarefa pretende-se apoiar o professor na reflexão sobre a adequação do recurso tecnológico e da tarefa à situação

TAREFA DE INVESTIGAÇÃO — PROPRIEDADES DO PARALELOGRAMO



1. Abre o programa *The Geometer's Sketchpad*. Traça uma reta AB. A seguir, marca um ponto C fora da reta. Traça a reta paralela a AB e que passa pelo ponto C.
2. Traça a reta AC. Depois, traça a reta paralela a AC e que passa pelo ponto B. Marca o ponto D na intersecção das duas retas conforme indicado na figura.
3. O quadrilátero assim construído é um paralelogramo. Arrasta o ponto A e confirma que os lados opostos do paralelogramo são sempre paralelos.
4. Mede o comprimento do lado [AB] (distância entre A e B) e o comprimento do lado [CD]. Arrasta o ponto A (para ver vários paralelogramos) e observa esses dois valores. O que podes concluir? Podes concluir o mesmo para os lados [AC] e [BD]?
5. Mede a amplitude dos ângulos CAB e CDB. Arrasta novamente o ponto A. O que podes concluir? Podes concluir o mesmo sobre os ângulos ACD e ABD? Para medir a amplitude do ângulo CAB: Seleciona os pontos C, A e B (por essa ordem). Depois em *Measure*, escolhe *Angle*.
6. Usando a calculadora (em *Measure* seguido de *Calculate*...), calcula a soma das amplitudes de dois ângulos consecutivos, por exemplo, os ângulos CAB e ACD. O que observas?
7. Traça as duas diagonais do paralelogramo. Marca o ponto O na sua intersecção. Mede o comprimento dos segmentos [OA], [OB], [OC] e [OD]. Arrasta o ponto A e observa esses quatro valores. O que podes concluir?
8. Completa: Um paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.
   Propriedades dos paralelogramos:
   - Os lados opostos...
   - Os ângulos opostos...
   - Dois ângulos consecutivos...
   - As duas diagonais...

(Em Câmara, A., Marques, M., Ferreira, P., Dias, C., Lagoa, J., & Lenadro, S. (2006). Matemática Sem Limites. 7.º ano — CD do professor)

matemática. Ou seja, ajudar o professor a refletir nas vantagens e desvantagens da utilização do recurso tecnológico como mediador da aprendizagem do aluno numa determinada situação matemática. Na fase da aula, pretende-se, em particular, alertar o professor para as ações a que deve estar atento na aplicação da tarefa para que o seu grau de exigência não se altere durante a orquestração instrumental (Bussi & Mariotti, 2008) com os alunos.

Este inventário assume, na primeira parte, a forma de perguntas que funcionam com a mesma finalidade das componentes que integram a ferramenta catalítica de Pepin (2012). O professor, no seu trabalho autónomo ou em pares utiliza a ferramenta com uma dupla funcionalidade, a de obter o *retorno* da utilização da ferramenta, assim como das suas reações ao *retorno*. As reações ao retorno podem ir no sentido de aplicar ou rejeitar a tarefa em análise.

O inventário pode ser usado em dois momentos: durante a construção da tarefa a propor aos alunos e após a sua concretização, suportando a reflexão sobre pormenores da aula, em especial, das orquestrações com os alunos. As ações que o professor deve monitorizar durante a aula servem também como agentes reguladores dos tipos de orquestrações aluno-aluno e professor-aluno a que importa estar atento no sentido de não alterar o grau de exigência da tarefa.

Os inventários apresentados podem desempenhar um papel importante, no trabalho documental do professor, na fase de seleção e preparação de uma tarefa. Não se pretende que estes inventários neutralizem os esquemas sociais que o professor assimilou nos seus contextos, mas pretende-se, antes, que com o trabalho sobre os retornos, os professores, individualmente ou coletivamente, elaborem ferramentas que permitam uma integração profícua dos recursos tecnológicos na aula de matemática.

APLICAÇÃO DOS INVENTÁRIOS À TAREFA

A tarefa no que se refere ao conteúdo é do domínio da Geometria e a conexão é dentro da matemática. O processo é de análise-processual, os alunos vão realizar os passos 1 a 8 previstos na proposta da tarefa. Em relação ao tipo de familiaridade, se os alunos estiverem habituados a utilizar recursos tecnológicos, trata-se de uma tarefa no seguimento do programa, caso contrário, será uma situação não conhecida anteriormente, por causa da introdução do programa de geometria dinâmica. O contexto é artificial, a compreensão concetual é implícita e a exigência cognitiva é de compreensão, os alunos vão descrever um conjunto de observações e sumariar as propriedades do paralelogramo, a representação matemática é analógica e as ferramentas é o computador.

O ambiente do programa de geometria dinâmica facilita a exploração e análise dos alunos, em particular, através da função de arrastamento. A escolha deste ambiente tecnológico é uma estratégia adequada ao conhecimento matemático a que se destina a tarefa. Os conhecimentos matemáticos requeridos são os conceitos de retas paralelas e diagonais de um quadrilátero. A aprendizagem que se pretende promover são as propriedades do paralelogramo. No enunciado da tarefa estão previstos os meios de ação dos alunos no ambiente tecnológico. Será o conhecimento matemático dos alunos que lhes permitirá resolver a tarefa usando as ferramentas do ambiente tecnológico, mesmo nos casos em que não estão familiarizados com o programa de geometria dinâmica.

As ações a monitorizar pelo professor durante a fase da orquestração instrumental com os alunos revestem-se de alguma análise prévia. O professor deve preparar-se para algumas questões que os alunos lhe vão colocar no decorrer da sua atividade. As dificuldades expectáveis são nos domínios seguintes: da realização de generalizações a partir da observação e comparação de figuras, da comunicação matemática oral e escrita, da autonomia dos alunos.

Será ainda de prever ritmos diferentes de realização da tarefa. Nesse sentido, pode ser solicitado aos alunos dos grupos que terminem mais depressa a resolução da tarefa, que ajudem os colegas mais atrasados a ultrapassar as suas dificuldades. A esses alunos serão dadas orientações para que não forneçam as respostas aos colegas.

A atividade envolve a entrega do enunciado da tarefa de investigação preenchido, para ser avaliado pelo professor.

EM RESUMO

A análise do *retorno* obtido fornece informações que permitem concluir a adequação da tarefa à situação matemática e à aprendizagem que se pretende, mediada pelo ambiente tecnológico escolhido.

A ferramenta proposta de análise da tarefa apoia a tomada de decisão do professor na seleção ou adequação da tarefa e no papel do ambiente tecnológico para a aprendizagem dos alunos. As questões para monitorizar a tarefa na sua fase de construção conduzem a reflexão do professor no sentido de potenciar as características do ambiente tecnológico e na definição de estratégias de remediação das restrições do mesmo. Questões como: quais são os meios de ação previstos no ambiente para resolver a tarefa? São os valores das variáveis da tarefa escolhida que promovem as estratégias desejadas? Existe retorno do ambiente tecnológico para inviabilizar estratégias erradas? São determinantes para a avaliação da adequação de um determinado ambiente tecnológico, à resolução da tarefa e à aprendizagem dos alunos.

Nota

[1] Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Promover o Sucesso em Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/121774/2010)

Referências

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practioners: Towards a practice-based theory of professional education. Em L. Darling-hammond e G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession* (pp. 3–31). San Francisco: Jossey-Bass.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Em L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 750–787). Mahwah, NJ: LEA.

Câmara, A., Marques, M., Ferreira, P., Dias, C., Lagoa, J., & Lenadro, S. (2006). Matemática Sem Limites. 7.º ano. Santillana.

Fernandez, C. (2002). Learning from Japanese approaches to professional development — The case of lesson study. *Journal of Teacher Education, 53* (5), 393–405.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81–112.

Hierbert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A. M., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., & Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 VideoStudy*. NCES (2003-013). U. S. Department of Education. Washington DC: National Center for Education Statistics.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (eds.) (2001). *Adding it up- Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Pepin, B. (2012). Task Analysis as «Catalytic Tool» for Feedback and Teacher Learning: Working with Teachers on Mathematics Curriculum Materials. Em G. Gueudet, B. Pepin, e L. Trouche (Eds.), *From text to ‹lived› resources: mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 123–142). New York/Berlin: Springer.

Teixeira, P. (2015). Construindo novas ferramentas didáticas em matemática: professores, aula e recursos tecnológicos. Tese de doutoramento não publicada. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

PAULA CRISTINA TEIXEIRA
Agrupamento de Escolas João de Barros
Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

ANTÓNIO DOMINGOS
Departamento de Matemática da FCTUNL / UIED

ENCONTROS

GEOMETRIAS & GRAPHICA 2015
TENDÊNCIAS NO PENSAMENTO GRÁFICO

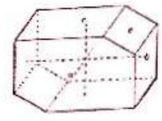
III Conferência Internacional da Aproged
XI International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design

A Conferência *Geometrias & Graphica* 2015 realizar-se-á entre os dias 1, 2 e 3 de outubro de 2015, na Universidade Lusíada de Lisboa.

Do esforço conjunto entre a ABEG (Associação Brasileira de Expressão Gráfica) e a APROGED (Associação dos Professores de Desenho e de Geometria Descritiva) nasce a *Geometrias & Graphica* 2015 — uma conferência em que pesquisadores, professores, profissionais e alunos que se dedicam à prática e investigação das áreas da especialidade relacionadas com o pensamento gráfico, considerando o «estado da arte» internacional, terão a oportunidade de partilhar os seus conhecimentos e os resultados das suas pesquisas.

Para mais informações consultar: http://www.aproged.pt/geometriasegraphica2015.html

CIEMELP 2015



Conferência Internacional

CiEMeLP marcada para outubro de 2015.

A Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa (CiEMeLP), configurada como uma Conferência Regional da ICMI. A CiEMeLP desenvolve-se no âmbito das linhas de ação do EMeLP, entre os países e comunidades de língua portuguesa, e será sediada alternadamente nos países associados. A primeira edição da CiEMeLP está prevista para 28 a 31 de outubro de 2015 em Coimbra, Portugal. (http://www.mat.uc.pt/~emelp/index.html#)

O Espaço Matemático em Língua Portuguesa — EmeLP é uma organização internacional, filiada à International Commission on Mathematical Instruction — ICMI, congrega os países e comunidades de língua portuguesa, e visa ao intercâmbio de projetos, ações e iniciativas em ensino de matemática, matemática interdisciplinar, divulgação da matemática, manifestações culturais matemáticas.

APM – 2015

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2015

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento (@-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	60,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	60,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	80,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	75,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	100,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2015

		Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Instituições	Portugal	47,00 €	28,00 €
	Estrangeiro		32,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções