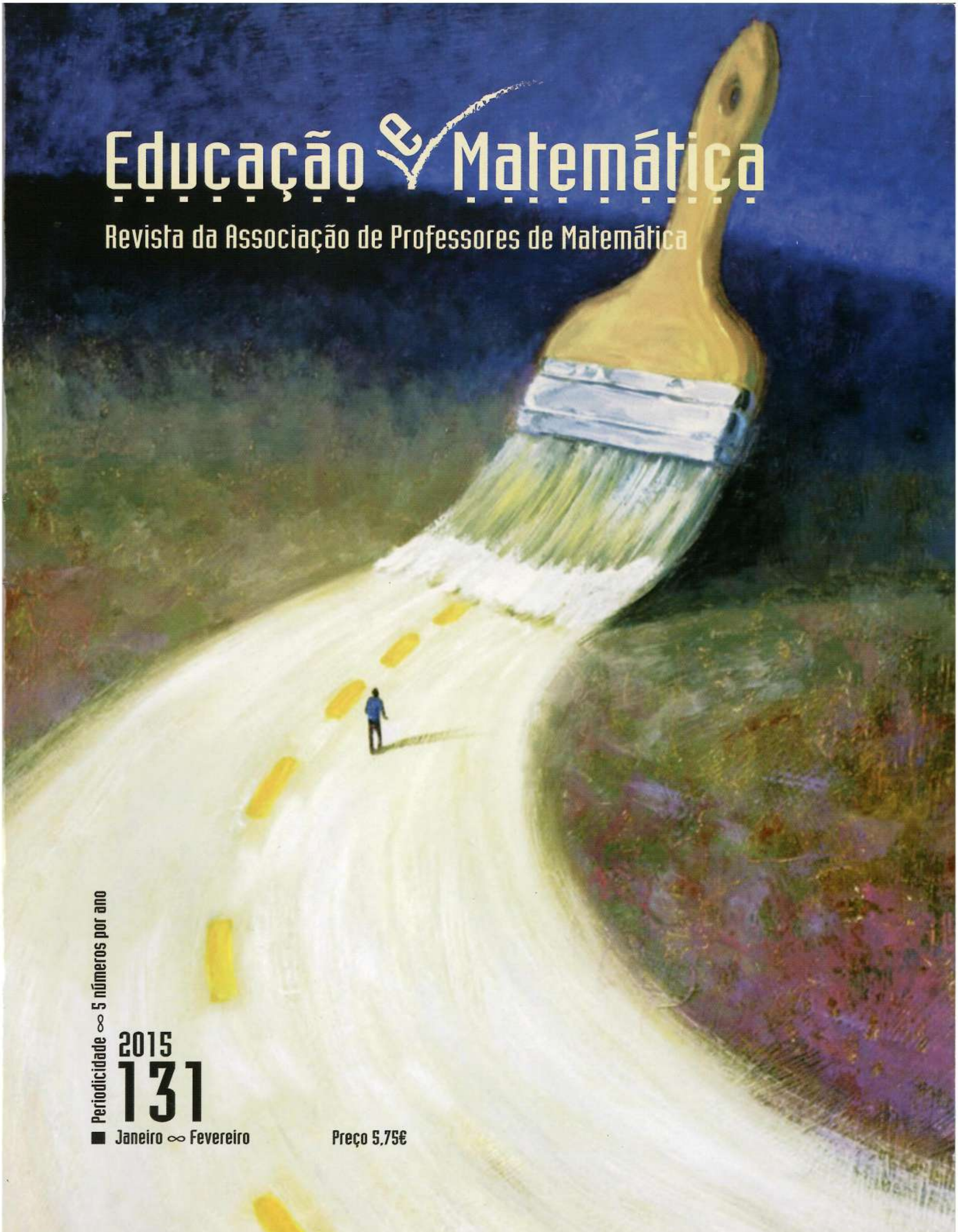
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2015

131

Janeiro ∞ Fevereiro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	Manuela Pires
	Paulo Alvega
	Rita Mestre
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2014
Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Fevereiro 2015
Tiragem 1500 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Colorpoint, Unipessoal Lda
Urbanização Vale Azul, n.º 8
Casal da Espinheira
2560–401 Silveira

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre a capa

Numa revista onde em mais que uma ocasião se refere o futuro, a união necessária para o abordar e a necessidade de o preparar devidamente, a capa reproduz uma pintura do artista canadiano Andrew Judd cujo título é precisamente *Paint the future*.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Cristina Tudella, António Guerreiro, António Lopes, Diogo Batista, Eduardo Veloso, Henrique Manuel Guimarães, Leonor Santos, Luísa Lopes, Mária Cristina Almeida, Maria da Conceição de Sousa Cipriano dos Santos, Maria Manuela Subtil Pedro, Paulo Correia, Raquel Santos.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

Ousemos de novo, não estamos sós!

Em Évora, cidade branca de todas as encruzilhadas, na primavera de 2015
(as partes em itálico são retiradas do texto de apresentação do ProfMat 2015)

Esta revista chegará aos sócios em Évora, durante o ProfMat, num momento em que estamos convidados a olhar para o tempo de primavera que é uma promessa das searas douradas para a colheita de verão e de pão na mesa que queríamos fosse de todos. Por isso, o mote para este editorial é-nos dado pelo texto de apresentação deste encontro, texto esse que recorda as dificuldades crescentes que temos vindo a sentir nas escolas e no ensino da Matemática em particular com os novos programas para o ensino básico e para o ensino secundário que em nome de um rigor desajustado assumem um formalismo exagerado, *com uma extensão e com uma rigidez de aplicação que parece ignorar que não pode haver aprendizagem sem compreensão dos conceitos*.

Oportunamente, para este ProfMat onde celebramos os 30 anos de encontros, escolheu-se a reflexão sobre a Matemática e o currículo escolar como tema central, um ano, como também é recordado, em que assinalamos *o centenário de José Sebastião e Silva que ousou sonhar, tal como nós, que era possível ensinar matemática com intuição, rigor e compreensão* e envolvimento e participação ativa dos alunos. É pois um momento privilegiado para nos voltarmos a debruçar sobre o nosso papel, enquanto professores, diante de políticas educativas sobre as quais a APM tem manifestado posições fortemente críticas. E não poderia ser de outra maneira.

Para não nos habituarmos a eles de uma forma resignada, vale sempre a pena recordarmos que os programas de Matemática impostos por esta legislatura governativa são maus programas de Matemática, desde a sua génese à configuração que tomaram — uma lista extensa de conteúdos matemáticos fragmentados, uma prescrição de abordagens unívocas, sem indicações metodológicas ou referências a formas e instrumentos de avaliação, claras e substantivas, que possam apoiar o trabalho do professor. Se a isto juntarmos uma política avaliativa (dos alunos, dos professores, das escolas) que, em nome da valorização do mérito, parece ter sido instaurada para criar hordas de gente amorfa, acrítica e obediente, percebemos que estes são tempos de um triste inverno.

Por isso, em Évora, nesta primavera, neste tempo e lugar de encruzilhadas, levantamos o branco sinal da resistência. Porque um professor, uma professora, tem que ser um não desistente. Porque um professor, uma professora, sabe ler os sinais que apontam para um amanhã que, com os alunos, se constrói hoje. Porque hoje *ousamos continuar a sonhar que é possível desejar aprender e desejar ensinar*. Não certamente recorrendo ao papaguear de receitas conhecidas ou à repetição até à exaustão de exercícios e cálculos rotineiros. Ensinar e aprender vão sempre juntos, acompanhando-se de diferentes maneiras: ninguém ensina se outro não aprende e, ao ensinarmos, aprendemos e aprendendo, ensinamos. A profissão docente deve ser sempre, para nós, aquele desafio permanente com que um dia sonhámos: não desistir de procurar os caminhos que levam os nossos alunos a ser capazes de experiências matemáticas significativas, a esse exercício da capacidade de ganhar confiança e de ser diante de si e dos outros, de intervir com pertinência, de procurar com desejo de saber, de ousar sem medo ao erro. É esta a nossa intencionalidade educativa e é desta forma que queremos contribuir para uma escola pública de qualidade para todos.

Uma sociedade que não valorize os professores, uma política que os esgote e os desgaste quase parecendo que se pode educar sem os professores ou, pior, apesar dos professores ou contra os professores, arruína um povo e hipoteca o futuro. A nossa resistência é um ato de coragem que passa pela lucidez da leitura dos sinais, pela inteligência da demonstração que uma outra forma é, não só possível, mas imprescindível, e pela estratégia de permanecermos unidos.

E nós, professores, continuamos investidos de um poder do qual não podemos abdicar, de uma autonomia que devemos defender, exercendo-a. Na sala de aula, olhos nos olhos com os nossos alunos, com maus ou bons programas, com avaliações que tendem a perverter a intencionalidade educativa do nosso trabalho, com o melhor recurso educativo que é o nosso saber, o nosso gostar e o nosso acreditar nesta tarefa, nós somos os pilares da educação. Ergamo-nos, pois, porque sabemos e podemos. E porque juntos somos mais que a soma de nós. Ousemos de novo, hoje, aqui.

Na APM estamos para *dizer de viva voz que não estamos sós!*

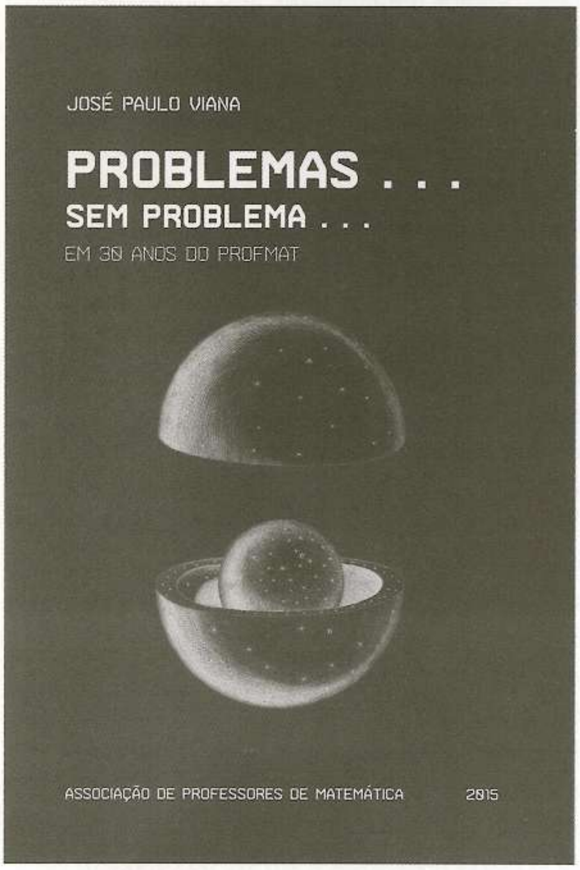
Nota: Esta direção termina aqui o seu mandato; dar voz às associadas e aos associados, convocar e reunir, escutar e propor, denunciar e animar foram algumas das nossas preocupações. Porque a APM vale a pena, porque na APM todos valemos a pena.

A nossa gratidão.

A Direção da APM

Problemas . . . sem problema . . . em 30 anos do ProfMat

José Paulo Viana



ESTATUTO EDITORIAL DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

A *Educação e Matemática* (EM) é uma publicação da Associação de Professores de Matemática (APM). É uma publicação periódica, sai cinco vezes por ano e um dos seus números anuais é temático. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro. Os principais objetivos da *Educação e Matemática* são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas atuais e importantes da educação; matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias .... A EM tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com caráter permanente. A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista. À semelhança das outras revistas informativas, a *Educação e Matemática* assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Diretora da *Educação e Matemática*

A Experiência Veiga Simão na Matemática nos terceiro e quarto anos (1972–1975)

Maria Manuela Subtil Pedro e Mária Cristina Almeida

Neste artigo descreve-se a experiência pedagógica na disciplina de Matemática nos 3° e 4° anos[1] do ensino básico[2], que se realizou de 1972 a 1975, em Portugal, integrada no lançamento da Reforma Veiga Simão, que se traduziu na Lei 5/73 — Lei de Bases do Sistema Educativo, que não foi regulamentada, não tendo entrado em vigor. Foi feita uma análise documental e de testemunhos de participantes recolhidos por entrevista.

A Reforma Veiga Simão preconizava uma modificação da estrutura do sistema educativo, visando nomeadamente a democratização do ensino, numa perspetiva meritocrata e o alargamento da escolaridade básica obrigatória de seis para oito anos, através da unificação dos dois primeiros anos do ensino secundário técnico com o 1° ciclo do ensino secundário liceal (3° e 4° anos). Nos anos 70, uma escolaridade de seis anos tornava-se insuficiente para um país, como Portugal, que necessitava de preparar pessoal qualificado para responder às exigências de uma economia (em vias de) industrialização, de modo a aproximar-se de outros países da Europa. Houve uma consciencialização de que a educação não se deve subordinar inteiramente à economia, mas que a ausência de progresso educacional contraria o desenvolvimento económico.

No ano letivo de 1968/69 deu-se a unificação dos dois primeiros anos do 1.° ciclo do ensino liceal e do ciclo preparatório do ensino técnico profissional, passando a designar-se por Ciclo Preparatório do Ensino Secundário — CPES. Essa unificação contou com inovações nos métodos e nos programas de ensino, que deveriam ter continuidade nos anos posteriores. Pretendia-se uma abordagem ao nível dos conteúdos, diferente do ensino liceal, visto como demasiado formal, mas mais abrangente do que a especialização pretendida pelo ensino técnico (Almeida e Candeias, 2014). Por outro lado, justificava-se a unificação do ensino técnico com o ensino liceal a fim de sanar situações discriminatórias, na medida em que o primeiro só era procurado pelos filhos das classes económicas desfavorecidas e o segundo era escolhido por quem podia ascender à universidade. Tratava-se de duas vias díspares na sua dignidade social, cultural e educativa (Pedro, 2013).

Veiga Simão vem propor uma escolaridade obrigatória de oito anos, constituída por um ensino primário de quatro anos e um ensino preparatório também de quatro anos, em vez de dois anos, como vigorava no sistema educativo da época. A intenção de Veiga Simão era retardar a escolha da via escolar ou profissional dos jovens. Nos penúltimos dois anos do ensino preparatório os alunos eram submetidos a um ciclo de observação onde se fazia o acompanhamento da sua evolução psicopedagógica e os últimos dois anos funcionavam como um ciclo de orientação, centrado no desenvolvimento de aptidões (Almeida e Candeias, 2014). Segundo Pedro (2013), neste contexto, foi implementada a experiência dos 3.° e 4.° anos que decorreu numa «primeira leva», nos anos letivos de 1972/73 e 1973/74 e numa «segunda leva» nos anos letivos de 1973/74 e 1974/75. Foi elaborado um novo currículo, que contou com a introdução de novos programas em todas as disciplinas. Foram feitas inovações nos programas, ao nível dos conteúdos, dos objetivos e didáticas de ensino.

No programa de Matemática, no qual a nossa investigação foi baseada, chamava-se a atenção, de que não se tratava de um programa com o objetivo de aquisição de técnicas de resolução de problemas previamente catalogados, do tipo estímulo-resposta, mas sim de, um programa em que o aluno através da concretização de certas tarefas, ao aferir as suas conclusões, pudesse chegar por si mesmo a certos conceitos matemáticos. Para isso tornava-se útil, que o aluno para a concretização dessas tarefas na sala de aula, e até mesmo em provas de avaliação, tivesse a possibilidade de utilizar a régua de cálculo, tabelas, formulários, gráficos e o compêndio (em alguns casos). Deste modo, o professor, em função das necessidades, tinha a liberdade de conduzir a aula, adotando uma atitude e metodologias que melhor se adequassem à situação, no sentido da prossecução de objetivos cognitivos, que o aluno pudesse atingir. Com o propósito de introduzir maior rigor na formulação dos objetivos, o programa recorre à taxonomia dos objetivos cognitivos de B.S. Bloom[3] na qual se propunha uma ordem para os sucessivos níveis a percorrer na aquisição dos conceitos. Foi indicado, dentro de parêntesis, o número que corresponde na taxonomia ao nível que se propunha, em cada objetivo.

Os alunos eram motivados pelos docentes, para desenvolverem as suas capacidades de aprendizagem, o raciocínio e a rapidez de pensamento, através de atividades de investigação em Matemática, fomentando-se o trabalho de grupo e a resolução de problemas. De acentuar a transformação da imagem do professor, que passou a ocupar o lugar de investigador e a sala de aula em algumas escolas, tornou-se um laboratório de Matemática bem equipado, na medida em que o Ministério da Educação disponibilizou verba própria para a experiência.

Indicações Didácticas

Um programa por si só não constitui garantia de alcance dos objectivos que propõe, conhecida como é a importância determinante das atitudes do professor perante os alunos e da metodologia que souber usar.

Nesse sentido se sugere que o professor considere os seguintes pontos:

1 — O uso preferente do método heurístico, salientando-se que a forma como a aprendizagem se processa é mais importante que o seu conteúdo.

2 — A aula deverá apoiar-se nas vivências dos alunos e a partir de situações concretas ou familiares, conduzir à matematização das mesmas, com especial relevância para o aspecto formativo desta aprendizagem.

3 — O trabalho poderá ser realizado em pequenos grupos que apresentarão as soluções a que chegarem para comparação e análise por toda a turma, permitindo que os alunos confiram os seus pontos de vista com os dos seus companheiros e estabelecendo hábitos de cooperação.

Figura 1.—Algumas Indicações Didáticas presentes nos Programas,1972, elaborados para a experiência.

O trabalho cooperativo que se desenvolveu com os professores de outras escolas foi uma metodologia que até ali não era normalmente utilizada. No caso da Matemática deveu-se ao facto de o programa não dar indicação da bibliografia, o que deu origem a proceder-se semanalmente à reformulação das fichas de trabalho do Ministério da Educação e ao intercâmbio de outras fichas de trabalho, entre as escolas.

A principal intenção do programa era conduzir os alunos à descoberta, ao trabalho de grupo, à interdisciplinaridade e à ligação entre os conteúdos teóricos e o real, com recurso a visitas de estudo ou saídas da sala de aula (figura 1).

Segundo os testemunhos de participantes na experiência e um relatório da OCDE, estas inovações fascinaram os professores e alunos da época. De referir, que nem todas as inovações foram bem aceites pelos professores, nomeadamente o uso da Taxonomia de Bloom, pois consideravam que um aluno é avaliado globalmente e não de uma forma compartimentada (Pedro, 2013).

Os testemunhos e a documentação consultada permitiram concluir que se tratou de uma experiência com êxito. No que concerne à disciplina de Matemática, o sucesso deveu-se sobretudo ao realce que se deu à investigação, à experimentação, à discussão, a relação entre esta disciplina e a realida-

Veiga Simão, em visita a uma exposição na Secção Feminina do Liceu durante o VI Congresso do Ensino Liceal 14 abril 1971

de, à interdisciplinaridade, ao trabalho de grupo, ao uso de meios audiovisuais, características inerentes ao Movimento da Matemática Moderna que foi disseminada a partir de 1968, com a criação do CPES (Pedro, 2013).

Uma outra conclusão a tirar do estudo desta experiência é, segundo Pedro (2013), que não são os Decreto-Lei, per si, que determinam as mudanças no ensino, mas sim o voluntarismo e cooperação daqueles que o dinamizam. Na opinião da mesma autora, que secundamos, para que as mudanças no ensino da matemática propostas em cada época sejam efetivas é imprescindível que se criem condições de trabalho que possibilitem a realização de reuniões propícias ao debate coletivo e aprofundamento de saberes e atitudes individuais.

No que concerne ao insucesso na disciplina de Matemática, entendemos que este pode ser atenuado pela incorporação de mudanças no processo de ensino aprendizagem, tal como aconteceu na experiência estudada, de modo a proporcionar uma maior empatia dos alunos relativamente à disciplina.

Notas

[1] Atuais 7.° e 8.° anos de escolaridade.

[2] A proposta reformadora de Veiga Simão compreendia um ensino básico, obrigatório (8 anos), que se desdobrava em duas fases, o ensino primário (4 anos), ministrado em escolas primárias, e o ensino preparatório (4 anos), em escolas preparatórias ou por via da Telescola (Almeida, 2013)

[3] É uma estrutura de organização hierárquica de objetivos educacionais. A classificação proposta por Bloom dividiu as possibilidades de aprendizagem em três grandes domínios: o **cognitivo**, abrangendo a aprendizagem intelectual; o **afetivo**, abrangendo os aspetos de sensibilização e gradação de valores; o **psicomotor**, abrangendo as habilidades de execução de tarefas que envolvem o organismo muscular. Cada um destes domínios tem diversos níveis de profundidade de aprendizagem. Por isso a classificação de Bloom é denominada hierarquia: cada nível é mais complexo e mais específico que o anterior.

Referências Bibliográficas

Almeida, Mária (2013). *Um olhar sobre o ensino da Matemática*, guiado por António Augusto Lopes. Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa

Almeida, M. C., e Candeias, R. (2014). Os programas de matemática do ensino primário, da Telescola e do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário. In A. Almeida e J. Matos (Eds.), *A matemática nos programas do ensino não-superior* (1835–1974). Caparica: UIED e APM.

Pedro, M. M. (2013), *A Experiência Pedagógica na Matemática nos terceiro e quarto anos* (1972–1975). Tese de Mestrado. Monte da Caparica: Universidade Nova de Lisboa.

Maria Manuela Subtil Pedro
Escola Básica 2°, 3° ciclos Fragata do Tejo, Moita
GTHMEMat

Mária Cristina Almeida
Agrupamento de Escolas de Casquilhos, Barreiro
UIED-FCT, Universidade Nova de Lisboa
GTHMEMat

Quais são as nossas referências?

Recentemente, num post do blogue da *American Mathemathical Society*[1], um professor discutia, com entusiasmo, a relevância do modelo de Ensino da Matemática da Hungria como uma referência para as mudanças curriculares em curso no seu país.

O modelo descrito assenta no papel central da resolução de problemas, no trabalho em grupo, na valorização da discussão e da comunicação em que os «bons erros» são entendidos como promotores da aprendizagem. O papel do professor é definido e assumido como um promotor da aprendizagem e não como o veículo do conhecimento

O objetivo traçado não é, assumidamente, o de formar futuros estudantes de matemática.

Não existem referências ao treino de algoritmos ou procedimentos, a memorização não é referida, e o desenvolvimento do pensamento lógico não resulta da explicitação do formalismo, mas da resolução de problemas com significado.

Por cá, no Programa de Matemática A aprovado em 2014 as opções têm seguido a mesma direção... mas em sentido oposto! Comparações com os currículos de outros países ditos «de referência» sugerem divergências como estas de forma sistemática.

Num programa que reclama ser «Alicerçado na análise de diferentes abordagens que têm sido adotadas para o ensino da Matemática neste nível de escolaridade (programas e avaliações nacionais e internacionais, literatura e investigação científica sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática)[2]», é difícil encontrar evidências de que as melhores práticas, ou as mais consensuais, tenham sido tomadas como referências.

Notas

[1] http://blogs.ams.org/matheducation/2015/01/10/the-hungarian-approach-and-how-it-fits-the-american-educational-landscape/

[2] Programa de Matemática A — p. 3

Paulo Correia
Agrupamento de Escolas n.º 1 de Alcácer do Sal
Esc. Sec. de Alcácer do Sal

CONFERÊNCIA INTERNACIONAL

TURNING DATA INTO KNOWLEDGE: NEW OPPORTUNITIES FOR STATISTICS EDUCATION

A Conferência Internacional ***Turning data into knowledge: New opportunities for statistics education*** é uma iniciativa do projeto de investigação DSL (*Developing statistical literacy: Student learning and teacher education*) com a participação da Universidade de Lisboa e da Universidade de Évora. Esta realizar-se-á no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, nos dias **22 e 23 de junho de 2015** e constitui uma oportunidade de reunir investigadores, formadores e professores interessados na educação estatística para partilharem experiências e apresentarem e discutirem investigações e projetos recentes ou em curso em torno de duas linhas temáticas: (i) **Literacia estatística** e (ii) **Raciocínio estatístico.**

Nas duas linhas, a aprendizagem e as práticas de ensino com recurso à tecnologia constituem focos possíveis da investigação e dos projetos a serem apresentados, assim como as investigações sobre a formação de professores e o desenvolvimento profissional, nomeadamente a investigação do professor sobre a sua prática.

Dani Ben-Zvi da Universidade de Haifa (Israel) e Janet Ainley da Universidade de Leicester (Reino Unido) são os oradores convidados para esta conferência.

É possível realizar a submissão de propostas de comunicações ou de pósteres até ao dia **30 de março.**

Paralelamente à conferência haverá sessões práticas, em português, destinadas a professores dos ensinos básico e secundário. Estas sessões serão submetidas para acreditação ao CCFC, na modalidade de Curso de Formação (0,6 créditos).

Para mais informação e realização da inscrição, consulte o sítio da conferência em www.statisteduc.ie.ulisboa.pt.

Contacto: statisteduc@ie.ulisboa.pt

Preparar o futuro...

Eduardo Veloso

A desgraçada situação em que se encontram os ensinos básico e secundário de matemática não precisa ser mais salientada e é natural o desânimo que tem despertado em muitos de nós, professores. Mas o que se deve esperar de uma associação com as tradições da APM é uma atitude forte de luta contra o que julgamos errado na presente situação da educação matemática. É um facto que a nossa associação tem de várias formas criticado os novos programas e outros aspectos muito negativos da recente acção governativa, mas penso no entanto que não estamos preparados para uma contribuição plena, que espero nos seja pedida dentro de pouco tempo, na construção de um futuro melhor para a experiência matemática dos alunos do básico e do secundário. Por vezes — por exemplo, quando se critica repetidamente que foram introduzidos novos programas sem terem chegado a ser avaliados os anteriores... — até parece que um simples voltar ao passado recente seria solução para os nossos problemas . É certo que a situação se degradou muitíssimo, no que diz respeito a programas, avaliação dos alunos e outros aspectos do sistema educativo, devido à acção do nosso «iluminado» ministro, mas isso não significa que o ponto de partida fosse aceitável — penso até, e julgo que não estarei sozinho, que os programas anteriores, sobretudo o do ensino básico, eram matematicamente pobres e que certas decisões sobre o sistema educativo de anteriores ministros da educação abriram caminho para os disparates do actual.

Preparar o futuro, portanto... Devemos ter coragem para enfrentar o trabalho imenso que está por fazer, estabelecer prioridades e depois convocar todos os apoios disponíveis para executar o plano que traçarmos...[1] Neste primeiro e breve artigo pretendo apenas chamar a atenção para alguns aspectos do pensamento pedagógico de Sebastião e Silva que podem abrir algumas pistas[2] e suscitar outras contribuições.

A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.[3]

Talvez a característica mais notável de Sebastião e Silva, como professor, consistisse no facto dos conteúdos matemáticos que eram objecto da sua exposição nunca aparecerem como pontos de partida a quem estava a ouvi-lo, mas como resultado de uma investigação — seja para resolver um problema com origem exterior à própria matemática ou pela necessidade de desenvolvimento interno da matemática, imaginando um novo conceito ou procurando demonstrar um novo teorema. A matemática não era assim «despejada» sobre nós, como «ouvintes», mas construída, na medida do possível, com a nossa participação activa.

Naturalmente, quando Sebastião e Silva expunha, no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, resultados das suas investigações, esse modo de proceder resultava de modo quase automático. Tratando-se de novos conceitos ou do desenvolvimento de uma teoria já existente, como por exemplo a axiomática das distribuições de Laurent Schwartz, o que nos era proposto era precisamente o acompanhamento crítico e participado da investigação que estava a ser feita. De resto, esta estratégia seguia a linha de uma conhecida proposta pedagógica de Henri Lebesgue — *o professor deve pensar diante dos seus alunos*. Laurent Schwartz era exemplar a este respeito: nos seminários que orientava em Paris, no início dos anos sessenta, a «matéria» de estudo era sempre alguma investigação que estivesse a iniciar, e as sessões semanais de trabalho consistiam na discussão, com a nossa participação, dos avanços e recuos que qualquer investigação comporta.

No entanto, numa cadeira como *Complementos de Álgebra*, quando se tratava de nos fazer conhecer por exemplo a teoria dos grupos, como fazer? Não seria com certeza «fingir» que se estava a «descobrir naquele momento» uma nova teoria matemática... A solução era recriar connosco os passos históricos da sua construção, atingindo dessa forma a mesma finalidade pedagógica. É significativo que a cadeira criada por Sebastião e Silva na licenciatura em Ciências Matemáticas se tivesse chamado precisamente *História do Pensamento Matemático*. O que revivíamos nas suas aulas era o pensamento matemático que tinha conduzido a novos conceitos, a novos resultados, ou a uma nova estrutura matemática.

Sabemos, pela nossa experiência universitária e também pelo que conhecemos da prática corrente do ensino da matemática no básico e no secundário, como são tão raros os exemplos concretos daquilo a que Sebastião e Silva apelidava *método activo*. Quando lemos com atenção as «metas» e os «programas» e de um modo geral os textos produzidos pela actual equipa ministerial — como o que citamos a seguir, dos Programas e Metas Curriculares, e os comparamos com textos de Sebastião e Silva sobre temas semelhantes (como aquele com que iniciamos este artigo), embora possam parecer «tudo verdades» ou «as banalidades do costume» sobre educação matemática, percebemos que o espírito pedagógico, por assim dizer, que perpassa nesses textos é totalmente divergente.... Os extensos conteúdos e o modo como as «Metas» e «Programas» estão redigidas e são associadas a uma avaliação consistindo em exames de duração limitada obrigam na prática os professores a adoptar o método expositivo tradicional e impedem que se «perca tempo» a estimular a imaginação dos alunos e a conduzi-los à redescoberta. Para Nuno Crato, Sebastião e Silva seria certamente um pedagogo «romântico»...

Com base em investigação recente sobre o ensino da Matemática, adota-se uma estrutura curricular sequencial, que se justifica atendendo a que a aquisição de certos conhecimentos e o desenvolvimento de certas capacidades depende de outros a adquirir e a desenvolver previamente. Promove-se desta forma uma aprendizagem progressiva, na qual se caminha etapa a etapa, respeitando a estrutura própria de uma disciplina cumulativa como a Matemática.[4]

—Programas e Metas Curriculares

Primado para a intuição e para a geometria

O professor não deve forçar a conclusão: deve deixá-la formar-se espontaneamente no espírito do aluno.[6]

(...) *dar ao ensino uma orientação de tal modo natural, que o aluno seja levado a aceitar os factos intuitivamente, e com uma força de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa desses factos.*[7]

Se não houver tempo — o que é bem provável — podem-se omitir as demonstrações. O que importa, por enquanto, são as intuições: essas de modo nenhum devem faltar.[8]

A introdução à teoria dos grupos feita na cadeira de *Complementos de Álgebra* era exemplar quanto ao primado dado à intuição e à geometria. Poderia parecer que numa cadeira de Álgebra, a estrutura de grupo deveria ser apresentada com recurso à álgebra ou aritmética elementares. No entanto, não era esse o caminho seguido nos *Complementos de Álgebra*. Como o que importa, de início, são as intuições... e como a intuição visual é um dos meios mais fortes que possuímos para aceder ao conhecimento, a geometria é o domínio mais apropriado para uma iniciação aos grupos — e daí um inesquecível primeiro contacto com as transformações geométricas e com o *programa de Erlangen* de Felix Klein. De resto, o uso de figuras, como recurso inicial no estudo de objectos matemáticos de carácter totalmente abstracto, era prática corrente em Sebastião e Silva. Recordo-me da surpresa que foi para mim, quando estudava a derivação em pontos fronteira nos espaços de Banach, ver o meu orientador desenhar subconjuntos e fronteiras para suportar essa investigação. Esta prática era mesmo recomendada: «Como recurso intuitivo, o leitor pode referir-se ao modelo euclidiano, imaginando os elementos dos espaços como vectores ou pontos do espaço ordinário. Mas é preciso não perder de vista que a categoria dos espaços de Banach é muito mais extensa, incluindo o espaço de Hilbert e muitos outros espaços funcionais que ocorrem nas aplicações.»[9]

Mas seria totalmente errado concluir, destas e doutras práticas e recomendações, que as intuições chegam, são suficientes. Como muito bem salienta J. Carvalho e Silva no já referido artigo na Gazeta de Matemática, Sebastião e Silva tinha ideias muito precisas sobre as finalidades do ensino de matemática para todos os alunos: «A meu ver são principalmente o sentido crítico e a autonomia mental as qualidades que um professor de matemática se deve esforçar por desenvolver nos seus alunos».[10] Em matemática, o sentido crítico e a autonomia mental adquirem-se através da prática crescente de explorações e investigações, do uso da intuição e da imaginação na construção de novos conceitos e ao mesmo tempo da verificação, através do uso da lógica dedutiva e da demonstração, do conteúdo real das definições dadas e dos resultados obtidos. Por isso, «se é muito importante estimular no aluno a intuição e a imaginação criadora, não menos importante é desenvolver nele o espírito crítico, o hábito da análise lógica e do raciocínio rigoroso.»[11]

Uma avaliação coerente com os métodos de ensino

O que é preciso é não confundir cultura com erudição e sobretudo com o enciclopedismo desconexo, imensa manta de retalhos mal cerzidos, que vão desde as guerras púnicas até ao sistema nervoso da mosca. É esse, a bem dizer, o tipo de cultura que tende a produzir o ensino tradicional, baseado num sistema de exames que só permite apreciar memorizações e automatismos superficiais.[12]

Sem querer tirar conclusões para além das afirmações conhecidas de Sebastião e Silva sobre o «sistema de exames» aqui referida, limitar-me-ei a relatar um episódio que se passou no exame final, no ano lectivo 1949–50, da cadeira *Complementos de Álgebra*. A prova começou de *manhã* e terminou *ao fim da tarde*, com intervalo para almoço... Não me lembro do número nem das questões apresentadas — eram poucas, três ou quatro —, mas estou certo que se tratava de propostas de exploração ou pequenas investigações, o que seria de esperar da parte de um professor que defendia um método activo de ensino como o que acabamos de indicar. Uma das propostas — julgo que se tratava de transformações geométricas — interessou-me de tal modo que estive *o dia inteiro* a trabalhar nela, esquecendo-me completamente de responder fosse o que fosse às outras... Foi a primeira investigação em matemática que fiz na vida. E Sebastião e Silva deu-me uma classificação na cadeira como se eu tivesse respondido a todas as questões propostas no exame...

Em jeito de conclusão...

Jaime Carvalho e Silva escreveu na Gazeta de Matemática o artigo — *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva: uma primeira abordagem* — pouco depois de terem passado 80 anos sobre o nascimento de Sebastião e Silva. Neste momento estamos a comemorar 100 anos do seu nascimento. Julgo que o melhor e mais significativo modo de terminar este artigo é simplesmente repetir uma das afirmações aí feitas: «os responsáveis pelo ensino da matemática em Portugal não têm dado qualquer atenção aos seus escritos, o que faz com que pareça estar sempre a começar-se tudo de novo.»

Comecemos portanto tudo de novo, e *preparemos assim um futuro melhor*, apoiados nas experiências anteriores e nas propostas pedagógicas de Sebastião e Silva. Discutamos, como fundamentos de um currículo a construir:

- objectivos de um ensino de matemática para todos,
- conteúdos matemáticos,
- métodos de ensino,
- processos de avaliação.

Notas

[1] Para ter uma ideia desse «trabalho imenso», leia o editorial do número temático da E&M de 2013, de Rita Bastos e Eduardo Veloso, «A cultura matemática como finalidade da educação obrigatória», a partir da frase «Como diria Luther King, nós temos um sonho...».

[2] O recurso a Sebastião e Silva como referência pedagógica para «preparar o futuro» tem por causa próxima as comemorações sobre o centenário do nascimento desse grande matemático e professor, que se iniciaram com a abertura da esplêndida exposição *O Homem, o Cientista, O Professor* na Reitoria da Universidade de Lisboa. Os recursos para este artigo resultam da minha experiência pessoal, que começou como seu aluno em Complementos de Álgebra, no ano lectivo 1948–49, e do magnífico artigo de Jaime Carvalho e Silva, publicado na Gazeta de Matemática, *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva: uma primeira abordagem*, de que recomendo a leitura (http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsilva.html).

[3] Silva, J. S. e., *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*, (1° vol). 1964, Lisboa: Min.Educação/OCDE.

[4] Ministério da Educação e Ciência, *Programas e Metas Curriculares, Matemática*, Ensino Básico. MEC: 2013.

[5] idem 3.

[6] idem 3.

[7] Silva, J. S. e, A teoria dos logaritmos no ensino liceal. Gazeta de Matemática, 1942. III(12): p. 10–13.

[8] Silva, J. S. e, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (2° e 3° vol). 1965–66, Lisboa: Min. Educação/OCDE.

[9] Silva, J. S. e, Bento de Jesus Caraça, in DL. 25/6/1968.

[10] idem 9.

[11] idem 8.

[12] idem 3.

Eduardo Veloso

Diferenciação pedagógica

Um estudo com alunos do 9.° ano de escolaridade

Ana Cristina Tudella, Leonor Santos

A massificação do ensino trouxe às nossas salas de aula uma maior diversidade de alunos, não só devido às suas diferenças culturais e/ou sociais mas, sobretudo, devido a diferentes formas de pensar, de interpretar, de compreender as ideias e, consequentemente, de aprender. Deste modo, a criação de momentos de diferenciação pedagógica tornou-se uma necessidade atual nas nossas salas de aula, se quisermos efetivamente aplicar o princípio da matemática para todos, matemática para cada um. Foi com este objetivo que surgiu a ideia para o estudo realizado, no ano letivo 2011/12, no âmbito do Mestrado em Didática da Matemática, no qual a professora, primeira autora deste artigo, desenvolveu uma experiência pedagógica com alunos do 9.° ano de escolaridade.

A investigação nacional e internacional tem mostrado que ensinar Matemática não pode ser encarado como a simples transmissão rigorosa de conhecimentos e procedimentos, mas sim a criação de situações que permitam ao aluno desenvolver a sua competência matemática. Tem mostrado que a aprendizagem não é resultante da reprodução correta de técnicas e procedimentos adquiridos através de uma prática repetitiva de exercícios, mas sim decorrente do envolvimento dos alunos em experiências matemáticas ricas e significativas. O NCTM (2007) salienta que os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e conhecimentos prévios. Os professores têm aqui um papel fundamental, quer na escolha de tarefas ricas, adequadas aos seus alunos, que proporcionem momentos de aprendizagem significativos, quer na forma de trabalhá-las de modo a ajudá-los a desenvolverem as suas capacidades, incentivando-os a explicarem e justificarem os seus raciocínios.

Partindo do pressuposto de que um aluno aprende a partir da atividade que realiza e da reflexão que faz sobre essa atividade (Ponte, 2005), então o *erro* cometido na realização de uma tarefa só será ultrapassado se for identificado pelo aluno e se o mesmo fizer uma reflexão sobre a sua ocorrência. É importante que o aluno seja capaz de compreender o erro para criar condições para o ultrapassar (Santos, 2002).

Quando o aluno conseguir identificar o erro e corrigi-lo acontece aprendizagem. Ao professor cabe o difícil papel de interpretar o significado do erro, formulando hipóteses sobre o modo como o aluno pensou e tentando encontrar estratégias que permitam ao aluno superá-lo. Santos (2002) apresenta-nos certos aspetos a que o professor deverá atender na orientação do trabalho dos alunos, tais como, não identificar o erro, nem tão pouco corrigi-lo, mas sim questionar ou apresentar pistas de orientação da ação a desenvolver pelo aluno que o leve à identificação e correção do erro. Vale (2010), por sua vez, salienta a importância dos professores promoverem uma cultura de sala de aula na qual o erro tenha um papel formativo na aprendizagem.

Com o objetivo de promover uma diferenciação pedagógica interna (Santos, 2009), na qual o erro desempenha um importante papel formativo, elaborámos um modelo de trabalho que aplicámos em todas as aulas onde realizámos esta experiência e procurámos perceber de que modo esta metodologia contribui para a aprendizagem dos alunos. Para atingir este objetivo procurámos respostas para as seguintes questões: Quais os principais factores que contribuem para a aprendizagem neste contexto? Quais as principais dificuldades que emergem neste contexto de trabalho? O contributo deste método varia com a tipologia de erros? Como reagem os alunos a esta forma de trabalhar?

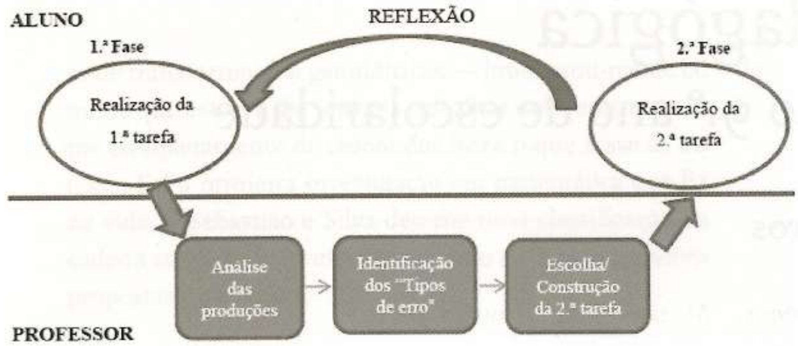


Figura 1.—Modelo esquemático da estratégia implementada

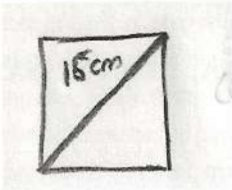


Figura 2.—Exemplo de *erro tipo I* (Resolução do Raúl)

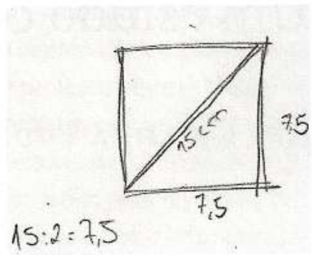


Figura 3.—Exemplo de *erro tipo II* (Resolução do Lourenço)

Este modelo consistiu em dois momentos de trabalho diferentes (figura 1).

Numa primeira fase, os alunos realizaram individualmente uma tarefa proposta pela professora. Em seguida, já fora da sala de aula, a professora analisou as produções com vista a identificar os *tipos de erro* cometidos e procurar hipóteses explicativas das razões da sua existência. Partindo desta análise, selecionámos, adaptámos e/ou construímos tarefas, que propusemos aos alunos numa segunda fase, agora realizada em grupo, com o objetivo de levá-los à superação de cada uma das dificuldades detetadas na fase anterior. Assim, numa aula posterior, os alunos realizaram uma tarefa que considerámos adequada ao(s) seu(s) *tipo(s) de erro*. Por fim, recolhemos as produções de cada grupo de trabalho e voltámos a analisá-las, agora com o intuito de perceber de que modo a realização das tarefas, utilizando esta metodologia, contribuiu para a aprendizagem dos alunos.

Na 1.ª fase não ajudámos os alunos na resolução das tarefas. Pretendemos que eles as resolvessem individualmente, sem que houvesse qualquer esclarecimento de dúvidas, nem troca de ideias entre pares. Na 2.ª fase, para além da natural partilha de ideias entre os alunos do respetivo grupo de trabalho, houve um acompanhamento diferente por parte da professora, que foi monitorizando o trabalho dos grupos, observando as suas ideias, esclarecendo as dúvidas que pudessem existir, mas tendo sempre o cuidado de não validar as suas resoluções, nem diminuir o nível cognitivo das tarefas propostas (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

As tarefas selecionadas para a 1.ª fase enquadravam-se nos temas matemáticos que estávamos a trabalhar e incluíam tópicos e objetivos curriculares do programa de Matemática do 3.° ciclo do ensino básico (PMEB, 2007). A maior parte das tarefas escolhidas para esta 1.ª fase foram problemas, sendo que uma delas era de natureza mais aberta, pelo que a classificámos como sendo uma exploração ou investigação. Mais uma vez, a escolha da natureza das tarefas foi intencional. Optámos apenas pela resolução de problemas e por tarefas de investigação, em vez de exercícios, porque com base nas produções escritas dos alunos conseguiríamos proporcionar um trabalho mais significativo na 2.ª fase. Salientamos aqui que os exercícios, por serem tarefas fechadas, em geral não são geradores de discussão entre os alunos nem potencializam o surgimento de diversas estratégias de resolução. Deste modo, não nos parece ser o tipo de tarefa mais adequada a esta metodologia de trabalho que procura tirar partido do trabalho em grupo.

Os erros cometidos pelos alunos na 1.ª fase do trabalho têm uma importância crucial na preparação da 2.ª fase. A ideia não foi simplesmente identificar os erros, nem tão pouco corrigi-los, mas sim questionar os alunos de modo a proporcionar-lhes pistas e momentos de reflexão que os levassem a descobri-los, em conjunto com os seus pares. Para este estudo realizámos várias tarefas usando esta metodologia de trabalho, no entanto, neste artigo apresentaremos apenas um exemplo.

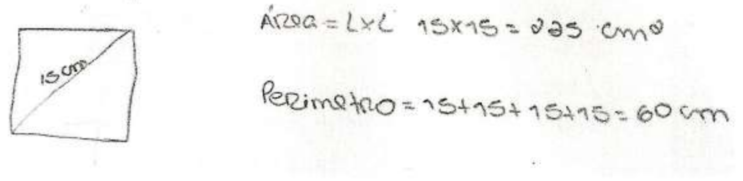


Figura 4.—Exemplo de *erro tipo III* (Resolução da Catarina)

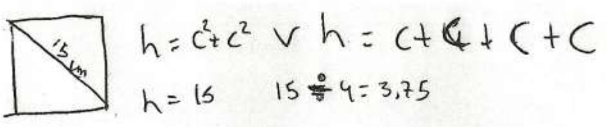


Figura 5.—Exemplo de *erro tipo IV* (Resolução do Ricardo)

A TAREFA «DIAGONAL DO QUADRADO»

Na 1.ª fase propusemos aos alunos a realização do seguinte problema: *A diagonal de um quadrado tem 15 cm de comprimento. Determina o valor exato da área e do perímetro deste quadrado. Apresenta o teu raciocínio.*

Este problema[1] foi colocado aos alunos no âmbito do trabalho com as equações do 2.° grau. Com esta tarefa pretendíamos promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, envolvendo o tópico das equações do 2.° grau, e estabelecer conexões com tópicos trabalhados anteriormente nos temas da Geometria e dos Números, nomeadamente, o Teorema de Pitágoras e as noções de área e de perímetro.

1.ª FASE E PREPARAÇÃO DA 2.ª FASE

Na 1.ª fase apenas um aluno resolveu corretamente o problema, tendo todos os outros cometido um ou mais erros na sua resolução. Parece-nos importante salientar que, apesar de ser um problema trabalhado durante o estudo do tópico das equações do 2.° grau, a grande maioria dos alunos não usou este tópico na sua estratégia de resolução.

Ao analisar as primeiras produções dos alunos apercebemo-nos que todos os alunos conseguiram interpretar o problema, ou parte dele, uma vez que, mesmo aqueles que não o conseguiram resolver fizeram uma representação pictórica de um quadrado, representando a sua diagonal e respetiva dimensão (figura 2).

Classificámos os erros cometidos pelos alunos na tarefa inicial, em duas categorias: Questões deixadas em branco, praticamente em branco ou incompreensíveis (erro tipo I) e erros por desconhecimento de tópicos matemáticos (erros tipo II,III e IV).

Um grande grupo de alunos da turma cometeu erros no cálculo da dimensão do lado do quadrado, por desconhecimento da relação existente entre os comprimentos da diagonal e do lado do quadrado. Existiram assim dois grandes erros deste tipo, que designaremos por *erro tipo II* e *erro tipo III*.

O *erro do tipo II* foi o mais frequentemente cometido pelos alunos. Neste caso, os alunos assumiram que a medida do comprimento do lado do quadrado era metade da medida do comprimento da diagonal (figura 3).

Outros alunos assumiram que a medida da diagonal do quadrado é igual à medida do comprimento do seu lado (figura 4). Designaremos este erro como *erro tipo III*.

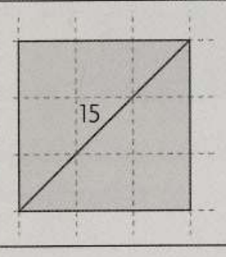
Dois alunos da turma reconheceram reconheceram a utilidade do Teorema de Pitágoras para a resolução do problema, e aplicaram-no para determinar a medida do lado do quadrado. No entanto, para além de se terem esquecido do quadrado da diagonal, usaram erradamente o conceito de potência de um número (figura 5).

Partindo desta análise, a turma foi dividida em 10 grupos e construímos/selecionámos três tarefas, com a intenção de proporcionar aos alunos a oportunidade de realizarem as aprendizagens que ainda não tinham sido conseguidas. Duas das tarefas foram criadas pela professora com base nas produções dos alunos e no que pretendíamos que aprendessem.

Para os alunos com os erros apresentados nas figuras

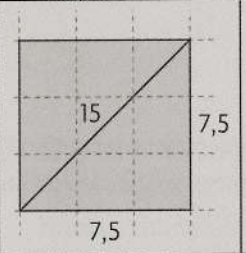
Tarefa 1: «1. A diagonal de um quadrado tem 15 cm de comprimento. Determina o valor exato da área e do perímetro deste quadrado. Apresenta o teu raciocínio.»
Para resolver este problema alguns alunos da turma usaram as seguintes estratégias:

Resolução 1:



O lado mede 15 cm, logo
$A_{\square} = 15 \times 15 = 225$
$P_{\square} = 15 + 15 + 15 + 15 = 60$
R: A área do quadrado é 225 cm^2 e o perímetro é de 60 cm

Resolução 2:



$15:2 = 7,5$
$A_{\square} = 7,5 \times 7,5 = 56,25$
$P_{\square} = 7,5 + 7,5 + 7,5 + 7,5 = 7,4 \times 4 = 30$
R: A área do quadrado é 56,25 cm^2 e o perímetro é de 30 cm

- O que há em comum nestas duas resoluções? E de diferente?
- Concordam com alguma delas? Porquê?

Figura 6.—Tarefa A (proposta na 2ª fase)

Tarefa 2: (Não se esqueçam de proceder aos registos das vossas experiências/observações)
Com o auxílio do Geogebra:

- Construam um quadrado com as dimensões que quiserem e meçam o comprimento do seu lado;
- Representem uma das suas diagonais e meçam-na;
- Comparem as medidas do lado, e da diagonal do vosso quadrado. O que observam?
- Alguma das relações, entre as medidas do lado e a medidas da diagonal, referidas na tarefa anterior parece-vos ser válida? Porquê?

Tarefa 3: Com a opção do Geogebra arrastem um dos vértices do quadrado e observem como variam estas duas medidas. Registem na seguinte tabela as vossas experiências e completem-na.

Medida do lado do quadrado (L)	Medida da diagonal (D)	L^2	D^2

Observem os valores da tabela. Que relações encontram entre eles?

Figura 7.—Continuação da tarefa A (propostas na 2ª fase).

2, 3 e 4, construímos a tarefa apresentada nas figuras 6 e 7. Na primeira questão desta tarefa (figura 6) pedimos aos alunos que comparassem duas resoluções realizadas pelos alunos da turma, correspondentes a erros cometidos. Salientamos que uma das resoluções era a do próprio grupo, pelo que os alunos seriam confrontados com outra, igualmente errada, para que refletissem sobre o que fizeram na sua produção individual.

As restantes questões desta tarefa (figura 7) foram realizadas com o auxílio do *software* de geometria dinâmica *Geogebra*, permitindo aos alunos, num curto espaço de tempo, fazer as experiências necessárias à formulação e verificação das suas conjeturas, constituindo assim, um importante suporte para a aprendizagem (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Para os alunos que não usaram corretamente o conceito de potência de um número, elaborámos uma tarefa onde pretendíamos que os alunos clarificassem este conceito.

Para os alunos que resolveram corretamente o problema, propusemos a tarefa *Quadrados e suas diagonais*, selecionada do projeto *1001 itens*, com um grau de dificuldade superior, pois para além de usar os mesmos conhecimentos trabalhados na tarefa inicial, apresenta uma situação num quadrado cujo lado é agora representado por uma variável.

2ª FASE

Na 2.ª fase houve dois grupos de trabalho que realizaram a tarefa proposta para os alunos que tinham deixado a questão praticamente em branco (*erro tipo I*). Analisando as produções destes dois grupos verificámos que, apesar dos alunos não encontrarem a relação entre a diagonal e o lado do quadrado nem reconhecerem o Teorema de Pitágoras, houve uma evolução nas produções de ambos os grupos.

Não concordamos com nenhuma resolução porque com ajuda de geogebra observamos que a diagnal é maior do que o comprimento do lado do quadrado e nunca igual mas tambem a diagnal não é o dobro do lado.

Figura 8.—2.ª fase (Grupo que cometeu *erro tipo II*)

com base nos valores da tabela concluimos que a diagnal ao quadrado é o dobro do lado do quadrado do quadrado, ou seja, $D^2 = L^2 \times 2$

Figura 9.—2ª fase (Grupo de alunos que tinha cometido o *erro tipo II*)

Um dos grupos concordou com a resolução 2, que também estava errada. Na sua opinião «se o 15 é a diagonal do quadrado não pode ser o comprimento do lado». O grupo caiu assim num outro *tipo de erro.*

O outro grupo, o grupo do Raúl (figura 2) não chegou a um consenso. Metade do grupo achava que nenhuma das resoluções estava correta, mas a outra metade achava que a resolução 2 estava correta. Como não chegaram a acordo deixaram isso registado na sua produção escrita.

Dos três grupos que cometeram o *erro tipo II*, isto é que consideraram que o comprimento do lado do quadrado era igual a metade do comprimento da diagonal (figura 3), apenas um grupo apresentou uma resposta onde afirma que nenhuma das resoluções está correta (figura 8). Na última tarefa este grupo acaba por elaborar uma conjetura (Figura 9).

Um dos grupos não supera a dificuldade, interpretando as resoluções apresentadas na tarefa 1 como se se tratassem de dois problemas distintos. Para estes alunos, a resolução 2 tem mais um dado do que a resolução 1 (o comprimento do lado).

Os dois grupos de alunos que tinham efetuado o *erro tipo III* (Figura 4), isto é, consideraram que o comprimento da diagonal era igual ao comprimento do lado, mudaram de ideias percebendo que tal não era possível. Um deles acabou por considerar que a resolução 2 estaria correta, caindo assim num outro tipo de erro. O outro grupo chegou à conclusão que nenhuma das respostas estaria correta chegando mesmo à relação $D^2 = 2L^2$.

Os alunos que tinham cometido o *erro tipo IV* (figura 5) reconheceram e superaram o erro, no entanto ao passarem do contexto aritmético para o algébrico, na nova tarefa proposta, cometem novamente o mesmo erro.

Alguns resultados do estudo

Para além da tarefa inicial, *A diagonal do quadrado*, apresentada neste artigo, baseámos o estudo em mais três tarefas iniciais e respetivas tarefas de 2. ª fase. Após a análise do desempenho dos alunos em ambas as fases criámos mais algumas tipologias de erro e tirámos algumas conclusões que aqui vos apresentamos.

Analisando a evolução dos alunos ao longo da experiência observámos que, na maioria dos casos, houve uma evolução dos alunos na 2.ª fase, sendo que, nalguns tipos de erros, essa evolução foi mais significativa do que noutros. De qualquer modo, em todas as categorias consideradas, os erros cometidos pelos alunos tiveram uma importância crucial na superação das suas dificuldades.

Na grande maioria dos casos, independentemente da classificação que atribuímos ao tipo de erro inicial, os alunos conseguiram superá-lo. No entanto, com frequência, acabaram por cair noutros erros, muitos dos quais pertencentes às outras categorias consideradas, o que vem sublinhar a ideia apresentada por Pinto e Santos (2006, p. 123) de que *não se passa da ignorância ao saber num «salto», mas através de aproximações sucessivas.*

Existiram erros para os quais o modelo implementado teve efeitos mais positivos nas aprendizagens matemáticas dos alunos do que noutros casos. De facto, os erros cometidos com base nas capacidades transversais — raciocínio e comunicação — foram mais facilmente superados e conduziram a uma maior evolução por parte dos alunos. As ideias iniciais erradas (propriedades, conjeturas, generalizações,...) constituíram um ponto de partida para a análise e discussão nos grupos de trabalho, durante a 2.ª fase, que levaram os alunos a superar a(s) dificuldade(s) demonstrada(s) inicialmente ou, quando não o fizeram na totalidade, a identificar e compreender o(s) erro(s) cometido(s). Os alunos que, na tarefa inicial, tinham cometido *erros no uso do raciocínio indutivo*, isto é, que tinham generalizado com base num pequeno número de casos, perceberam que não o poderiam fazer. Contudo, não conseguiram utilizar eficazmente os conhecimentos de Álgebra para justificarem as suas conclusões para um caso geral. De qualquer modo, apesar de não terem conseguido fazer uma demonstração simples, perceberam as limitações do raciocínio indutivo, bem como, a diferença entre o teste de uma conjetura e uma demonstração.

Os alunos que cometeram erros relativos ao desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, também conseguiram, em geral, superar as dificuldades iniciais sentidas, quer os que tiveram problemas de interpretação, quer os que manifestaram dificuldades em expressar o seu pensamento matemático. O próprio processo de resolução da tarefa da 2.ª fase contribuiu para o desenvolvimento desta capacidade, nomeadamente analisando e interpretando, agora em grupo, a informação que lhes foi transmitida. Os alunos que cometeram *erros com base na forma como expressam resultados, processos e ideias matemáticas*, acabaram por melhorar a sua comunicação escrita, tornando o seu texto mais claro e usando a linguagem matemática para expressar ideias matemáticas com mais precisão.

Para os alunos que cometeram *erros relativos ao desconhecimento de conteúdos matemáticos*, este modelo pedagógico já não foi eficaz em todos os casos. De facto houve situações muito positivas em que os alunos conseguiram perceber o(s) erro(s) cometido(s), aprenderam o tópico, e superaram a(s) suas dificuldade(s), mas houve um caso em que a ausência de compreensão do conceito levou a que os alunos não conseguissem evoluir. Alguns acabaram por conseguir resolver a tarefa, mas agora mais estruturada, ou seja, através de outra com um menor nível de exigência cognitivo.

Quando o erro que os alunos cometeram na 1.ª fase foi do tipo *Questões deixadas em branco, praticamente em branco ou incompreensíveis* houve uma evolução muito positiva no trabalho dos alunos durante a 2.ª fase, sendo que a maioria, superou o erro evidenciado no momento inicial. No entanto, a maior parte destes grupos acabou por cometer outro tipo de erros. Na nossa perspetiva, este problema não foi de todo inesperado, nem consideramos que seja um aspeto negativo na experiência. As questões em branco, praticamente em branco ou incompreensíveis, não dão informações sobre o que o aluno sabe, nem sobre o que não sabe. De facto, ao vermos este tipo de respostas, não sabemos se os alunos as deixaram em branco porque não compreenderam a questão, porque não têm conhecimentos matemáticos para a resolver ou por não saberem como começar. Nestes casos, a 2.ª fase permitiu-nos aceder ao modo como os alunos estavam a pensar e consequentemente conduziu a que estes explicitassem as suas dificuldades, bem como algumas formas erradas de raciocinar em matemática ou de comunicar as suas ideias. O facto de conseguirmos aceder aos seus raciocínios foi fundamental para conseguirmos perceber o que não compreendiam, permitindo-nos procurar estratégias para os levar a superar as dificuldades detetadas, quer no desenvolvimento do trabalho em pequenos grupos e no grupo-turma, quer posteriormente, nas abordagens utilizadas com a turma nas aulas seguintes.

Um outro aspeto a destacar, é que não houve nenhum aluno que tivesse deixado as tarefas da 1.ª e da 2.ª fase, simultaneamente, em branco. Isto contribui, quer para uma melhor relação afetiva dos alunos com a Matemática, quer para um aumento da sua autoconfiança perante os desafios propostos.

Podemos ainda afirmar que, nesta proposta pedagógica, as intervenções com a turma, pensadas de modo a superar os erros cometidos com cada aluno durante a construção do conhecimento, conduziram a uma aprendizagem mais significativa para os alunos, tal como já afirmado por Santos (2002): *Numa intervenção por parte do professor que acompanhe o próprio processo de aprendizagem, como a regulação interativa, é potencialmente mais promissora porque é uma regulação atempada e que se pode tornar mais significativa para o aluno.* (p. 78)

Os alunos, em geral, reagiram bem a esta forma de trabalhar. Estiveram na sua grande maioria empenhados na realização das tarefas propostas, quer na fase individual, quer na fase em grupo. Alguns alunos, com atitudes menos empenhadas noutras aulas, envolveram-se ativamente nas tarefas da 2.ª fase. O fator motivação, por trabalharem com colegas que cometeram os mesmos erros do que eles, e o facto de verem, nalguns casos, a sua resolução no enunciado da proposta de trabalho, foram aspetos que destacamos como possivelmente influenciadores desta sua mudança de atitude. O significado atribuído ao erro, não só nesta proposta pedagógica, como também no dia-a-dia da sala de aula, permitiu que os alunos os aceitassem e começassem a compreender a sua importância. De facto, nesta proposta pedagógica «o erro não constitui um estigma para quem o produz, mas antes um passo na construção do saber» (Pinto & Santos, 2006, p. 114).

Sentimos algumas dificuldades na realização desta experiência, nomeadamente na preparação das tarefas da 2.ª fase. Por vezes, não tínhamos muito tempo entre a realização das duas fases para identificar e agrupar os erros cometidos pelos alunos e construir as tarefas que considerávamos serem as mais adequadas, de modo a levar os alunos a superarem dificuldades. Este constrangimento poderá ser minimizado com a experiência profissional do professor. De facto, neste caso particular, o trabalho da professora da turma foi dificultado pelo facto de não lecionar o 9.° ano do ensino regular há mais de dez anos, pelo que já não se recordava das principais dificuldades sentidas pelos alunos. Além disso, esta turma não lhe tinha sido atribuída nos dois anos anteriores (7.° e 8.° anos), pelo que não tinha um conhecimento consistente sobre os desempenhos dos alunos.

Assim pensamos que, com o conhecimento crescente que vamos construindo sobre as formas como os alunos pensam no contexto de determinado tópico matemático ou tipo de tarefa poderemos com maior facilidade potencializar esta metodologia de trabalho. Concretamente, poderemos antecipar a construção de algumas tarefas para as 1.ª e 2.ª fases que proporcionem uma aprendizagem mais eficaz a *todos* os alunos.

Nota

[1] Problema retirado da 4.ª tarefa, da sequência de tarefas «Equações do 2.° grau a uma incógnita», para o 9.° ano disponibilizada no sítio da DGIDC (2009).

Referências

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM (Original em Inglês, publicado em 2000).

Pinto & Santos (2006). Modelos de avaliação das Aprendizagens. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: DGIDC, Ministério de Educação.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77–84). Lisboa: DEB, Ministério da Educação

Santos, L. (2009). Diferenciação pedagógica: Um desafio a enfrentar. *Noésis*, 79, 52–57.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.

Vale L. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.° ano do ensino básico.* (Dissertação de mestrado. Universidade de Lisboa).

Ana Cristina Tudella
Agrupamento de escolas Frei Gonçalo de Azevedo

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

V Dia GeoGebra Portugal
Geogebra 6+, Começando nos primeiros anos

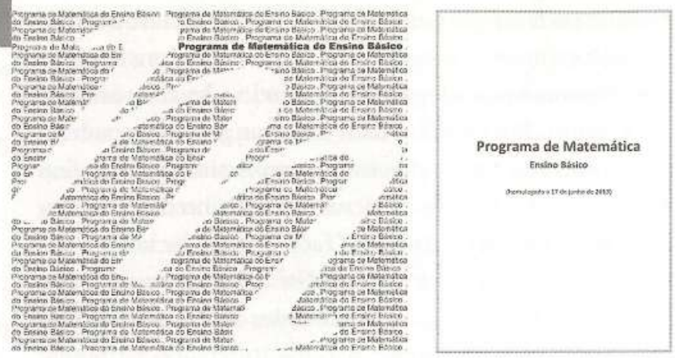
No próximo dia 9 de maio realizar-se-á o V Dia do GeoGebra Portugal. O encontro decorrerá na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa e conta com os apoios daquele instituto, do Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais da ESE/IPLisboa e do Instituto Geogebra Portugal.

Este ano, o Dia do Geogebra procurará dar um especial destaque à utilização deste ambiente com crianças a partir dos 6 anos. Assim, sob o lema *Geogebra* 6+, esta iniciativa procurará, entre outros objetivos, apresentar o *GeoGebra* como uma ferramenta potenciadora da aprendizagem da matemática em contextos diversificados e proporcionar espaços de discussão sobre o uso deste programa em contexto de educação e investigação matemática.

O encontro contemplará conferências plenárias, comunicações, sessões práticas e posters. À semelhança dos anos anteriores, Markus Hohenwarter, o autor do *Geogebra*, fará uma conferência via *skype*.

Informações sobre a inscrição e a receção de propostas para comunicações, posters e dinamização de sessões práticas em http://www.eselx.ipl.pt/ ou em http://www.geogebra.org.pt/

Descubra as diferenças



PMEB 2007

In *Objectivos gerais do ensino da Matemática*, pp. 5–6

Os alunos devem ser capazes de resolver problemas. Isto é, devem ser capazes de:

- compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas;
- apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam;
- monitorizar o seu trabalho e reflectir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes;
- formular problemas.

A resolução de problemas é uma actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Neste processo, os alunos devem compreender que um problema matemático, frequentemente, pode ser resolvido através de diferentes estratégias e dar atenção à análise retrospectiva da sua resolução e apreciação das soluções que obtêm.

PMEB 2013

In *Objectivos*, p. 5

A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais.

Assim, a resolução de problemas não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta que, podendo constituir estratégias de motivação, não se revelam adequadas à concretização efetiva de uma finalidade tão exigente. Embora os alunos possam começar por apresentar estratégias de resolução mais informais, recorrendo a esquemas, diagramas, tabelas ou outras representações, devem ser incentivados a recorrer progressivamente a métodos mais sistemáticos e formalizados. Em particular, no 1.º ciclo, solicita-se explicitamente que o número de passos necessários à resolução dos problemas vá aumentando de ano para ano. É fundamental que os alunos não terminem este ciclo de ensino conseguindo responder corretamente apenas a questões de resposta imediata.

Ainda para pensar: A propósito da utilização resolução de problemas no ensino da Matemática, os coordenadores das Metas Curriculares, apenssas ao PMEB 2013, na mensagem em resposta às reacções e críticas depois do período da sua consulta pública, dizem a certa altura (pp. 3–4): «A iniciação à matemática, estruturada a partir da resolução de problemas, *impede o trabalho necessário à aquisição de conhecimentos e de capacidades fundamentais a essa mesma resolução*», considerando, um pouco mais adiante, que «a resolução de problemas requer que o aluno *adquira e automatize, primeiramente*, conhecimentos, regras e procedimentos». «*Só depois disso*», acrescentam ainda, os poderá recuperar e usar em problemas complexos». A abordagem que as Metas propõem, dizem ainda, é uma «abordagem diretiva que *procura evitar os erros decorrentes da descoberta dos alunos* e que os ajudará a construir representações correctas dos problemas, evitando os desvios originados pelas falsas interpretações que tantas vezes ocorrem em todos os níveis de escolaridade.» (itálicos nossos)

Henrique Manuel Guimarães

Problematizando uma lengalenga

Maria da Conceição de Sousa Cipriano dos Santos

Problemas e histórias

É extremamente importante e vital em Matemática o efetivo envolvimento das crianças, logo desde cedo, na resolução de problemas, para que estas possam compreender e construir conhecimento matemático, dando-lhe significado. Nos primeiros anos, deverá valorizar-se o papel das interações entre os alunos e a leitura de histórias em matemática, como ferramentas facilitadoras da compreensão de diferentes linguagens que promovem o processo de ensino-aprendizagem e em especial a resolução de problemas. De acordo com McGrath (2014), as histórias oferecem uma abordagem lúdico-pedagógica que facilita o desenvolvimento do pensamento matemático das crianças pequenas. Desta forma, as crianças podem ser encorajadas a colocar e a resolver problemas matemáticos a partir do enredo da história.

Neste artigo, mostramos como as crianças pequenas podem construir conhecimento matemático e dar-lhe significado a partir de um problema convincente e envolvente que surgiu a partir da exploração de uma lengalenga. Salientamos, também, a importância de se incentivar as crianças a inventar os seus próprios procedimentos de resolução de problemas, em vez de lhes mostrar como os resolver (Kamii,1986). Partilhamos, assim, algumas produções das crianças de uma turma do 1.º ano, relativamente à problematização da lengalenga *Vamos bailar*.[1]

Dada a relevância desta temática, cada professor deve, de forma consciente e sistemática, criar oportunidades para que todos os alunos resolvam problemas com prazer, liberdade de pensamento, autonomia e confiança.

A experiência anterior ao problema

Sabendo que a organização do espaço da sala de aula pode influenciar os padrões de comunicação, as relações entre os alunos e até mesmo a sua motivação (Santos, 2010), antes de apresentar o problema foram criadas condições para que este proporcionasse, nos alunos, uma atitude positiva relativamente à exploração matemática que se pretendia.

Neste caso, como já foi referido, o problema nasce a partir da exploração da lengalenga *Vamos bailar*:

A lengalenga Vamos bailar

O baile vai começar.
Cada qual que arranje par.
6 meninos ali estão.
Quantos pares se formarão?
Ora vamos lá ver:
A Maria e o João.
A Carminho e o Tristão.
A Inês e o Romão.
3 pares. Tens toda a razão.

8 meninos ali estão.
Quantos pares se formarão?
Ora vamos lá ver:
A Cátia e a Mariana.
A Tónia e a Susana.
O Vítor e a Joana.
O António e a Alberta.
4 pares. – Resposta certa.

5 meninos ali estão.
Quantos pares se formarão?
A Sara e o Miguel.
O Chico e o Joel.
Oh! Mas pobre do Manuel!
Acho que ele está a chorar.
Não consegue arranjar par.

E chegam mais 12 meninos,
preparados p´ra dançar.
12? É tão fácil calcular!
6 pares se irão formar.

Mas, ao fundo do jardim,
Vejo o Artur e o Serafim,
O Vítor e o Delfim,
A Sandra, o Benjamim e o Joaquim.
Estão bem contentes, a rir.
7 meninos. E agora?
Alguém vai ficar de fora?
És tu quem vai descobrir.

Na camisola de cada aluno foi fixado um cartão com o nome de uma criança referida na lengalenga. Os cartões estavam propositadamente numerados de 1 a 5, sendo que uns eram quadrangulares, outros triangulares e outros circulares, distribuídos por quatro cores (amarelo, azul, verde e vermelho). Inicialmente, foram dadas indicações para os alunos formarem grupos tendo em conta a forma, a cor e o número do seu cartão. Leu-se a lengalenga, que em seguida foi *musicada*[2] e dançada livremente. Posteriormente, os alunos dançavam e ao ouvirem a letra da música formavam os pares que eram sugeridos (ex. Maria e João, Carminho e Tristão, Inês e Romão).

Ao longo da tarefa, em momentos específicos, as crianças foram questionadas sobre a forma como os grupos se iam configurando ao sabor da lengalenga, tendo como foco as relações entre o número de crianças e o número de pares e vice-versa. Na procura de relações e regularidades, entre outras, os alunos disseram que: «O número de crianças é sempre o dobro do número de pares formados. O número de pares formados é sempre metade do número de crianças do grupo.»

Após várias atividades a partir da mesma tarefa (exploração das formas, cores, números dos cartões, entre outras), surgiu o problema do grupo de amigas que ia ao cinema.

O problema a resolver

A lengalenga apresentada deu-nos a oportunidade de propor aos alunos uma abordagem criativa a um problema que lhes suscitava curiosidade e envolvimento intelectual. O problema estruturado, de acordo com Sternberg (2013, p.388), insere-se na categoria dos que «não possuem caminhos claros para soluções». Poder-se-á ainda incluí-lo na classificação de problemas matemáticos referida por Huete & Bravo (2006) como um problema recreativo, por apresentar uma situação que estimula a fantasia dos alunos e um raciocínio especial. Eis o problema apresentado aos alunos:

Um outro grupo de apenas seis meninas combinaram ir ao cinema, a Ana, a Joana, a Dina, a Rita, a Paula e a Isa. Quantos pares diferentes podem formar estas meninas?

Estratégias de resolução dos alunos

Numa primeira fase sugeriu-se que os alunos, individualmente, resolvessem o problema de todas as formas que fossem capazes e só depois discutissem as suas estratégias em equipa.

Resolvendo individualmente

A maioria dos alunos recorreu ao desenho para representar os pares que formavam com seis crianças, sem a preocupação de formar pares diferentes. Na figura 1, o aluno com recurso ao desenho indica que apenas é possível formar três pares diferentes.

Com esta e outras representações idênticas, os alunos apenas desenharam uma combinação de 3 pares com as 6 crianças indicadas. Em entrevista individual, os alunos disseram que pensavam que era para formar pares com aquelas seis crianças, apenas uma vez, o que pode dever-se ao trabalho desenvolvido com a lengalenga, onde era o que se pretendia. Nesta primeira resolução do problema, todos os alunos recorreram ao desenho para constituir os pares e, sozinhos, não encontraram todas as soluções. Embora os alunos tenham sido encorajados a usar o pensamento relacional, individualmente apenas desenharam três pares. Houve dois alunos que desenharam cinco pares.

Resolvendo em equipa

Após a resolução individual do problema, os alunos foram desafiados para, em equipas, compararem as suas estratégias individuais e as soluções. Esta situação levou-os a refletirem sobre questões que eles colocavam uns aos outros. As questões que foram suscitadas em equipa levaram-nos a refletirem em conjunto, percebendo, assim, que existem outros caminhos e várias soluções. Para estes alunos, o desafio não ficou apenas na resolução do problema, mas sim em experimentar outras formas de resolução. No final do

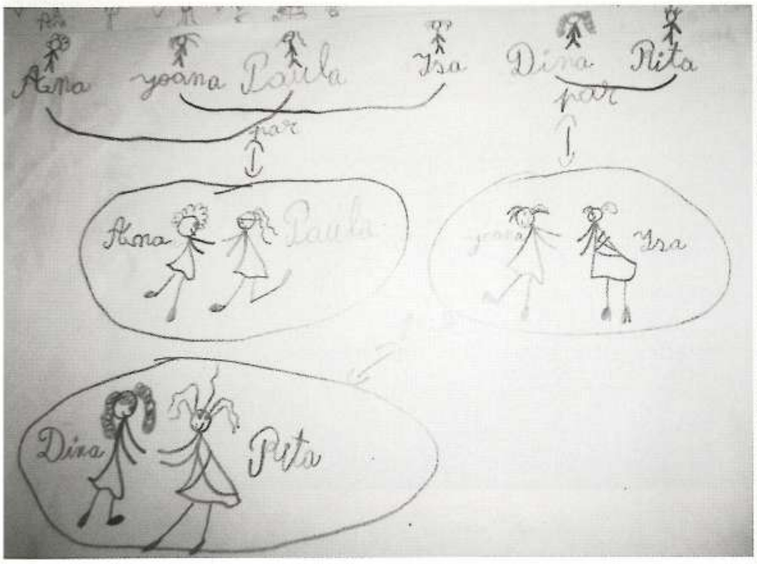


Figura 1.—Desenho com 3 pares.

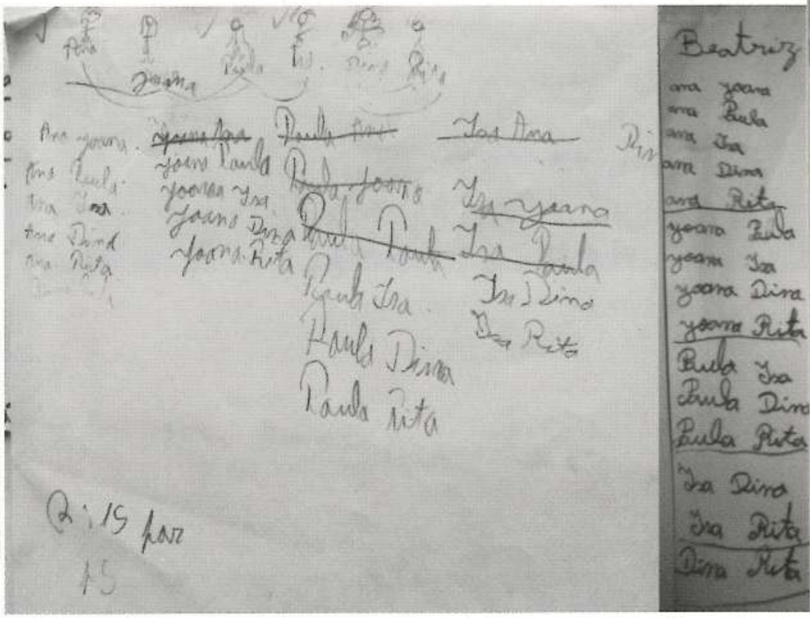


Figura 2.—Registo do nome dos pares de alunos.

trabalho conjunto, cada equipa comunicou o seu percurso, as suas ideias e as estratégias criadas com o contributo de cada um.

As ilustrações apresentadas mostram algumas representações que os alunos construíram, a partir da troca de diferentes pontos de vista. Iniciamos com a apresentação de uma resolução baseada na escrita dos nomes das crianças do problema e respetiva agregação de todos os pares possíveis (figura 2).

Nas situações apresentadas (figura 2), os alunos escreveram os nomes das crianças aos pares e no fim fizeram a respetiva verificação. Esta consciencialização da validação não tinha sido tida em conta na etapa em que o problema foi resolvido individualmente. Os próprios alunos só nesta etapa referiram a comutatividade: «Estar a Ana com a Joana é o mesmo do que estar a Joana com a Ana».

Segue-se uma ilustração muito utilizada no pré-escolar quando as crianças recorrem ao raciocínio combinatório e usam a *árvore das possibilidades* (figura 3, na página seguinte).

Nesta situação os alunos optaram por, numa linha, escrever o nome de todas a seis crianças, ligando cada nome a outro que seria o seu par. Ao verificar que havia pares repetidos, assinalaram-nos com uma cruz. Mais à frente já omitiram os pares repetidos, pois já os conseguiram visualizar mentalmente.

Por fim, apresenta-se a estratégia em que os alunos usaram uma tabela de dupla entrada (figura 4, na página seguinte) onde assinalaram com uma cruz os diferentes pares formados, o que permitiu a visualização de todas as possibilidades.

O registo em tabela requer um pensamento mais organizado pelo que, propositadamente, esta foi a última comunicação apresentada à turma. Na sua comunicação, os alunos partilharam que *contaram nas colunas, da esquerda para a direita, 0,1,2,3,4 e 5 cruzes respetivamente e que nas linhas, de baixo para cima observaram o mesmo padrão, 0,1,2,3,4 e 5 cruzes.* Esta observação levou outros alunos a descobrirem regularidades entre o número de diferentes pares formados, tendo em conta o número de crianças.
Partindo da observação de que havia 15 modos diferentes de formar pares e pela observação dos registos dos alunos: 0+1+2+3+4+5, através desta estratégia, encontraram o seu padrão de sequências. Aproveitou-se a oportunidade para colocar a seguinte questão: «*E se fossem 7 crianças, quanto pares diferentes se formariam?*»

Alguns alunos, para responder à referida questão necessitaram de acrescentar um nome em cada linha e em cada coluna, mas rapidamente responderam 21. Outros, apenas dois, disseram que era só somar mais 6. Dada a idade das crianças apenas se conjeturou para 8 crianças, levando-as a envolverem-se numa etapa de generalização.

Considerações finais

O tipo de problema que se apresenta aos alunos e a forma como se viabiliza a sua exploração na sala de aula para

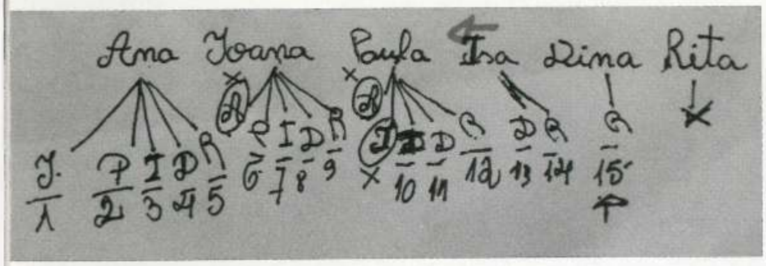


Figura 3.—Registo em árvore

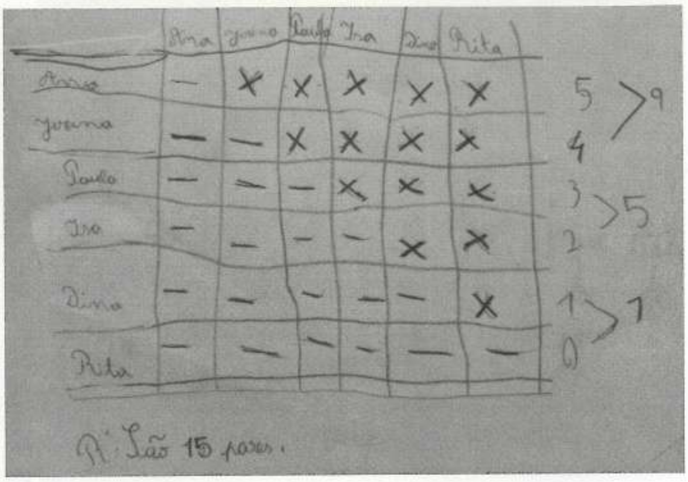


Figura 4.—Registo em tabela de dupla entrada com o nome de todos os pares formados.

que todos aprendam de forma prazerosa e autónoma são alguns dos fatores que podem ou não conduzir os alunos à construção do conhecimento matemático. Na situação apresentada, buscando caminhos próprios e gerindo diferentes percursos, os alunos envolveram-se no raciocínio algébrico ao descobrirem qual o número total de pares diferentes que se formam a partir do número de pessoas que existem. Em anos mais avançados, a partir deste problema ou de outro com o mesmo propósito, poder-se-á converter a relação entre o número de pessoas e o número de pares diferentes numa fórmula algébrica, passando-se à generalização.

Nos casos que analisamos, constatamos que na fase individual de resolução de problemas, a principal dificuldade dos alunos foi a interpretação do enunciado e a falta de motivação e persistência para procurar outras soluções para além das encontradas. O trabalho em equipa proporcionou aos alunos a criação de estratégias que os levaram a descobertas e ideias matemáticas mais significativas. Numa fase inicial, constatamos que esta partilha de ideias levou a que muitos alunos superassem as dificuldades de compreensão do enunciado, entre outras. Neste sentido, para Canavarro, Tudella e Pires (2009) é nos momentos coletivos que se proporcionam «aprendizagens muito mais sofisticadas e complexas que ultrapassam as baixas expectativas que muitos professores ainda têm sobre o que os seus alunos conseguem aprender» (p.1). De acordo com Isçik e Tarum (2009), a retenção a longo prazo das aprendizagens matemáticas é muito mais eficaz quando estas são realizadas em equipa, do que quando os alunos aprendem sozinhos. Neste sentido, acreditamos na eficácia de uma prática centrada na resolução de problemas através da qual os alunos, em equipa, aprendem a refletir, comunicar ideias com confiança, a ultrapassar obstáculos e a avançar a partir dos erros sem medos e receios.

Notas

1 Neves, C. (2013). Tantos animais e outras lengalengas de contar. Lisboa: Planeta Tangerina.

2 Arranjo musical de Fernando Júdice (músico).

Referências

Canavarro, A. Tudella, A. & Pires, F. (2009). Um novo programa de Matemática para o Ensino Básico. Os nossos alunos merecem! *Educação Matemática*,105, 1.

Huete, J. & Bravo, J. (2006) *O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas.* Porto Alegre: Artmed

Isçik, D. & Tarum, K. (2009). The effects of the cooperative learning method supported by multiple intelligence theory on Turkish elementary students´mathematics achievement. *Asia Pacific Education Review. Korea. Seoul National University*, (10) 465–474.

Kamii,C. (1986) . *A Criança e o número.* Campina: Papirus.

McGrath, C. (2014). *Teaching Mathematics Trough Story. A Creative approach for the early years.* NY: Routledge.

Neves, C. (2013). *Tantos animais e outras lengalengas de contar.* Lisboa: Planeta Tangerina.

Santos, M. & Gonçalves, J. A. (2010). «O Carpinteiro». Problema com várias soluções, desenvolvido num contexto de Aprendizagem Cooperativa. *Educação e Matemática*, 106, 27–33.

Sternberg, R. J. (2013). *Psicologia cognitiva.* 5.ª ed. São Paulo: Cengage Learning.

Maria da Conceição de Sousa Cipriano dos Santos
Docente do quadro de Agrupamento de Escolas de Montenegro/Instituto de Emprego e Formação Profissional, Areal Gordo

Ensino de investigações estatísticas na formação inicial de educadores e professores

RAQUEL SANTOS

Enquanto docente do ensino superior, preocupa-me a qualidade da formação inicial de educadores de infância e professores, especialmente na área da Matemática. Ainda mais preocupante é a qualidade do ensino que estes e outros futuros professores levam para as suas futuras salas de aula, particularmente numa altura de introdução do Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013).

Com a necessidade de tomar decisões baseadas em dados e em estudos estatísticos, a Estatística tem uma enorme importância no nosso dia a dia. Isso é consonante também com a ênfase dada a este tema em muitos documentos curriculares (e.g., ME, 1997, 2007, 2013; NCTM, 2000), logo desde os primeiros anos. No entanto, o seu ensino pode seguir duas grandes perspetivas (Ponte & Fonseca, 2001). Na primeira, o principal propósito é compreender os conceitos, representações e procedimentos estatísticos, por vezes com reduzida atenção aos contextos, o que vai ao encontro do proposto no programa de matemática em vigor (ME, 2013). Um exemplo desta perspetiva é o ensino dos conceitos estatísticos e a aplicação dos mesmos em exercícios e em investigações estatísticas. Na segunda perspetiva, as investigações estatísticas são um meio para desenvolver a literacia estatística e os conceitos são aprendidos em contexto. Não significa isto que estas duas perspetivas sejam incompatíveis, mas pode ser mais vantajoso para o aluno aprender os conceitos, representações e procedimentos estatísticos através da realização de investigações estatísticas e de um trabalho com dados contextualizados. Para tal acontecer, é necessário que esse tipo de trabalho com as investigações estatísticas tenham algum destaque, logo na formação inicial de educadores e professores.

O ENSINO DA ESTATÍSTICA ATRAVÉS DA REALIZAÇÃO DE INVESTIGAÇÕES ESTATÍSTICAS

Uma investigação estatística envolve diversas fases que Wild e Pfannkuch (1999) resumem como «problema, plano, dados, análise e conclusão». A primeira fase da investigação, a fase do problema, deve incluir uma questão inicial motivadora para os alunos, estar relacionada com os seus interesses e ter uma natureza desafiante, embora a nível alcançável (Makar & Fielding-Wells, 2011). Heaton e Mickelson (2002) acrescentam que as questões devem ser abertas, estatisticamente ricas, com conteúdo apropriado aos alunos e relacionadas com outras áreas do currículo. Segundo Wild & Pfannkuch (1999), durante a segunda fase, o planeamento, é necessário tomar decisões metodológicas apropriadas, tendo em conta a questão inicial a que se quer dar resposta. A terceira fase, a fase dos dados, inclui a recolha, controlo e «limpeza» dos dados e a fase da análise requer a exploração e análise de dados e a construção de hipóteses usando conceitos e ideias relacionadas com as representações gráfica e tabular e medidas estatísticas. Finalmente, a conclusão inclui a interpretação dos dados, a elaboração de conclusões, a formulação de novas ideias e a comunicação de resultados. É importante considerar se a questão inicial foi, de facto, respondida.

Para conduzir este trabalho, os professores necessitam de conhecimento estatístico sólido, assim como de conhecimento sobre o modo de realizar investigações estatísticas com alunos e de desenvolver o seu raciocínio sobre os dados. Num estudo com futuros professores do 1.° ciclo, ao planearem investigações estatísticas, estes demonstraram dificuldades em saber o que fazer e porquê, durante uma investigação estatística (Leavy, 2010), o que sublinha a importância de se estabelecerem fortes ligações entre a questão inicial, os dados e as conclusões (Fielding-Wells, 2010).

UM EXEMPLO PRÁTICO

Na unidade curricular da Licenciatura em Educação Básica em que se abordam conceitos de Estatística, tento usualmente incorporar várias investigações estatísticas, adequadas a diferentes níveis de ensino. Apresento de seguida, um exemplo de uma investigação estatística realizada numa das minhas turmas. Descrevo como foi introduzida em sala de aula e como foi realizada pelos futuros professores (o que fizeram, que decisões tomaram, onde tiveram dificuldades), ilustrando com o registo de dois grupos (Grupo A e B — Figuras 1 e 2).

A tarefa apresentada é adequada para o 2.° ciclo mas pode ser utilizada no 1.° ciclo. Trata-se de uma tarefa de natureza investigativa abordando uma situação sobre aviões de papel (adaptada de vários sites). Depois de uma breve introdução, informou-se os futuros professores que iriam ser engenheiros aeronáuticos da NASA por um dia e que teriam de criar o melhor avião de papel, justificando essa escolha o melhor que conseguissem. Esta investigação estatística tem ainda a vantagem de poder ser ligada a outras áreas como as Ciências.

A primeira fase, a do problema, iniciou-se com uma questão aberta uma vez que cada grupo de 3 ou 4 futuros professores teve de definir critérios diferentes para caracterizar o que entendia por «melhor» avião. Tentou motivar-se os futuros professores utilizando uma situação familiar como construir e fazer voar aviões de papel. Nesta fase, a maioria os grupos escolheu apenas um critério, tendencialmente a distância mais longa percorrida pelo avião ou o máximo de tempo de permanência no ar (Grupo A), mas também o menor número de voltas no ar ou o voo mais linear. Note-se que existiram ainda grupos que optaram por escolher mais do que um critério em simultâneo (e.g., distância e tempo — Grupo B).

Durante o estabelecimento do plano, os grupos tiveram novamente de tomar decisões de como escolher o melhor *design* de avião, tendo em conta o critério previamente estabelecido pelo grupo. Também esta parte da tarefa foi aberta, uma vez que os *designs* que escolheram criar foram diferentes, bem como o número de tentativas para cada avião (a variar entre 1 e 4) e os instrumentos de medida utilizados (fita métrica, cronómetro).

Durante a terceira fase da investigação estatística, os grupos procederam ao lançamento dos aviões e ao registo dos dados, numa tabela de dupla entrada (número do avião/nú-

Aviões da NASA

O nosso critério foi a duração do voo em segundos.

Ao identificar os aviões através de letras procedemos ao lançamento dos mesmos cronometrando cada lançamento dos elementos do grupo.

Posteriormente registámos o tempo de voo de cada avião lançado por cada colega, calculámos a média de cada avião, chegando à conclusão que o avião A foi o que se aguentou mais tempo no ar, sendo consagrado o vencedor.

Cálculos auxiliares

A: 1,63s + 1,50s + 3,30s + 3.15s = 9,64/4 = **2,41**

L: 1,40s + 2,28s + 1,36s + 2,56s + 7,6/4 = **1,9**

R: 2,06s + 1,59s + 2,62s + 3,00s + 9,27/4 = **2,32**

Figura 1.—Relatório do Grupo A

Concluímos que o avião vencedor, pela maior duração e maior distância, é o avião 1.

Resultados

Avião 1 — 2,81seg / 4,9 m

Avião 2 — 1,46seg / 1,1 m

Avião 3 — 1,50seg / 90 cm

Figura 2.—Relatório do Grupo B

mero da tentativa) ou em lista (Grupos A e B). Nesta fase, muitos grupos discutiram se deviam ou não mudar de lançador, ou de local de lançamento e se conseguiam ou não recolher os dados de algumas variáveis mais difíceis de avaliar, como o registo do tipo de voo, para se decidir qual o mais linear. Deste modo, podemos perceber que os grupos durante a recolha de dados foram tomando decisões para melhorar o planeamento realizado na fase anterior da investigação, sempre com a questão inicial em mente. Nesta fase podia-se ter realizado ainda uma discussão em grande grupo de forma a fomentar uma recolha de dados mais rigorosa e, principalmente, a necessidade de realizar mais do que um lançamento por avião para tomar decisões de uma forma mais fundamentada.

Na fase de análise observa-se, mais uma vez, o carácter aberto da tarefa, uma vez que nesta fase os grupos puderam optar por diferentes métodos estatísticos para analisar os dados recolhidos. Em sala de aula, os métodos utilizados e o rigor científico apresentado pelos alunos pode depender dos conceitos já trabalhados nos diferentes níveis de ensino. O que aconteceu com este grupo de futuros professores foi a utilização de apenas uma medida estatística, como o máximo, o mínimo ou a média dos valores (Grupo A), apesar de esta última medida ainda não ter sido mencionada até ao momento na unidade curricular lecionada e de se ter aproveitado o momento da discussão final para a introduzir em grande grupo. Nos grupos que fizeram apenas um lançamento (Grupo B), a resposta à questão inicial da investigação foi fundamentada apenas com base nesses dados, não tendo recorrido a qualquer medida estatística. A escolha de duas variáveis (tempo de voo e distância percorrida) pode tê-los levado a considerar que um lançamento era suficiente.

Na fase da conclusão, os grupos responderam à questão inicial com base nos seus dados e escreveram um pequeno relatório da atividade desenvolvida, incluindo as escolhas que fizeram, os dados que recolheram e a resposta final com a devida justificação. De destacar o facto de todos os grupos terem concluído a investigação dando uma resposta à questão inicial (ainda que pouco fundamentada ou não utilizando os melhores critérios ou métodos estatísticos). Assim, talvez pelo facto de a investigação ter sido fomentada por uma questão aberta e desafiante, os grupos mostraram uma forte ligação entre questão, dados e conclusão. No entanto, é notável alguma falta de rigor nas medições e, principalmente, na capacidade de tirar conclusões a partir de um número demasiado reduzido de dados, o que podia ter sido mais estimulado nas fases iniciais da investigação.

No final da realização da tarefa de investigação estatística e por falta de tempo, os grupos apenas entregaram o relatório e a discussão em grande grupo foi apenas realizada no dia seguinte. Nesta discussão, para além da apresentação do que alguns grupos decidiram e fizeram, discutiram-se também as consequências da escolha de cada um dos critérios, o que é necessário para tirar conclusões mais fundamentadas e conscientes, que medidas estatísticas poderíamos ter utilizado, o aparecimento ou não de *outliers* e, por último mas não menos importante, como desenvolver as diferentes fases da investigação estatística em sala de aula com crianças de diferentes níveis de ensino. Dependendo do ano de escolaridade, esta tarefa pode ser utilizada para introduzir novos conceitos, como a média ou até a mediana, onde estas medidas poderão surgir por necessidade para tomar uma decisão baseada em muitas medições (não muito rigorosas). Assim os conceitos surgem contextualizados e por necessidade de análise dos dados e não são apenas introduzidos e feita a sua aplicação em exercícios rotineiros.

CONCLUSÃO

A descrição e respetiva reflexão sobre a minha prática letiva pretende dar visibilidade ao trabalho que é necessário realizar nas salas de aula da formação inicial e que se pretende que tenham influência nas salas de aula da educação básica. Esta perspetiva é contrária à que utiliza as investigações estatísticas na aplicação de procedimentos ou conceitos já aprendidos. No caso da tarefa apresentada, podem utilizar-se esses contextos para fazer emergir conceitos estatísticos por necessidade de análise dos dados e assim desenvolver a compreensão do que o conceito realmente significa. Para que os futuros professores compreendam o que está envolvido numa investigação estatística é necessário que tenham oportunidades de realizar investigações estatísticas onde todas as etapas sejam igualmente valorizadas, da formulação do problema às conclusões, e que reflitam sobre o sentido geral desta atividade. Será necessário também que discutam o modo como podem envolver e apoiar os alunos ao longo de todo o processo de investigação. A par do conhecimento sobre Estatística e investigações estatísticas, é importante promover o desenvolvimento do conhecimento didático dos formandos sobre investigações estatísticas, através de outros meios, como por exemplo vídeos, observação de aulas e discussão de artigos sobre o tema.

Referências bibliográficas

Fielding-Wells, J. (2010). Linking problems, conclusion and evidence: Primary students' early experiences of planning statistical investigation. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics*. Liubliana, Eslovénia.

Heaton, R. M., & Mickelson, W. T. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 35–59.

Leavy, A. (2010). Teaching statistics at the primary level: Identifying obstacles and challenges in teacher preparation from looking at teaching. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics*. Liubliana, Eslovénia.

Makar, K., & Fielding-Wells, J. (2011). Teaching teachers to teach statistical investigations. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. New York, NY: Springer.

ME (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: DEB.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

ME (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da Estatística: Análise comparativa de três países. *Quadrante, 10*(1), 93–132.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223–265.

Raquel Santos
Escola Superior de Educação de Santarém

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

«Cortando» Curvas

A tarefa que aqui apresentamos foi adaptada de uma tarefa do Mathematics Assessment Project (http://map.mathshell.org/materials/index.php) da University of Nottingham & UC Berkeley, que disponibiliza um conjunto interessante de materiais para professores com propostas para a sala de aula e sugestões para a sua implementação. A tarefa que apresentamos foi pensada para os alunos do Ensino Secundário com o objetivo de modelar um problema da vida real. Os alunos deverão decidir que matemática podem usar para o resolver, interpretar os resultados que obtiverem no contexto da situação real, bem como testar a sua intuição. Apesar dos conteúdos envolvidos na sua resolução serem lecionados ao longo do Ensino Básico, o raciocínio envolvido sugere que seja aplicado a alunos um pouco mais velhos. Tal como propõem os autores do projeto, sugerimos que sejam discutidas coletivamente algumas das formas de resolução. Sugerimos ainda uma visita ao *site* referido para consulta de possíveis estratégias a seguir pelos alunos e a utilização do *link* http://tinyurl.com/BusTurning onde encontra um filme que poderá ser usado para introduzir a tarefa, atribuindo-lhe assim um maior significado.

«CORTANDO» CURVAS

Quando um autocarro dá uma curva, tem de ter um cuidado especial para que a roda traseira não suba o passeio ou, como mostra a figura 1, não entre na ciclovia.

Na figura 1, ao lado, vemos o autocarro a dar uma curva. A roda da frente está a pisar o risco que delimita a ciclovia, mas a roda traseira está dentro da ciclovia.

Na figura 2 apresentamos um esquema que traduz a situação.

A distância entre a roda da frente e a roda de trás chama-se *distância entre eixos e é representada por w*. O raio da linha externa que limita a ciclovia é representado por r. A distância marcada na figura com a letra x representa a parte da ciclovia que o autocarro «corta».

Figura 1

1. Usa o esquema da figura para mostrar que $x^2-2xr+w^2=0$.

2. Consideremos $w=3\text{m}$ e $r=5\text{m}$.
   a) Descobre quanto é que a roda do autocarro corta a ciclovia.
   b) Descobre a que distância deverá estar a roda dianteira da borda da ciclovia de modo que a roda traseira não pise o espaço destinado à ciclovia.
   Sugestão: Desenha um novo triângulo retângulo que se ajuste a esta situação.

3. O que acontece se o autocarro for mais comprido? E se a curva for mais apertada? Atribui outros valores a w e a r e investiga o que acontece.

Esta tarefa foi adaptada de *Mathematics Assessment Project*. University of Nottingham & UC Berkeley. http://map.mathshell.org/materials/lessons.php

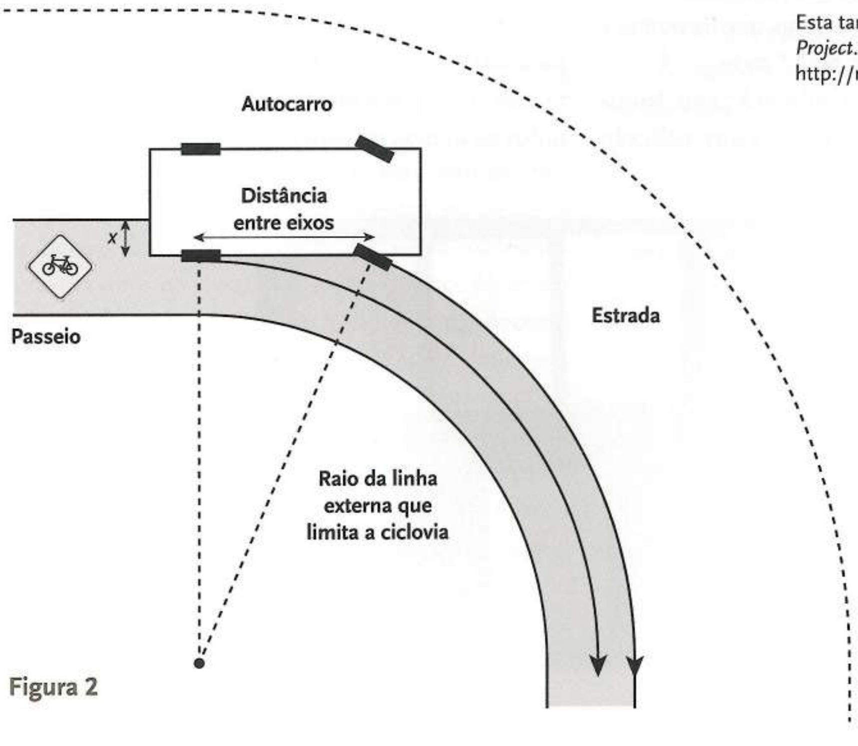


Figura 2

O «retângulo» que não é retângulo

Muitas das ideias que têm estado na base destas notas decorrem de um trabalho de investigação que tenho vindo a realizar há já algum tempo. Este trabalho teve uma componente muito forte de experiência em salas de aula do 1.º ciclo onde foram experimentadas muitas das tarefas que tenho idealizado. Decidi apresentar agora alguns breves episódios de ensino com comentários e enquadramento teórico. Esta opção marca uma alteração na orientação destas notas que passam assim a contar com trabalhos de sala de aula para alimentar a reflexão.

Há uma ideia prévia à apresentação destes episódios que quero evidenciar. Os ambientes de geometria dinâmica alteraram radicalmente o modo de trabalhar a geometria. Será por isso desejável que as crianças comecem a aprender geometria o mais cedo possível com recurso a estes ambientes. Isso é desejável e possível que se inicie logo no 1.º ciclo, como evidencia o trabalho realizado por Graça Pereira (Pereira, 2012). Apesar de defender esta ideia, optei por realizar uma investigação ainda apenas com suporte de papel e lápis e recurso a materiais manipuláveis. Registo no entanto que muito do trabalho que realizei e das ideias que desenvolvi usufruíram do facto de eu fazer sempre todas as explorações prévias com recurso a um AGD. Espero ainda um dia poder adaptar muitas das tarefas que desenhei à utilização deste recurso para alunos do 1.º ciclo.

O episódio que relato ocorre numa aula do 3.º ano. Numa aula anterior, alguns dias antes, os alunos tinham realizado duas tarefas seguidas. Nessas tarefas, individualmente cada aluno tinha que descobrir o máximo de quadrados diferentes e depois de retângulos, também diferentes, possíveis de construir num geoplano de 5 por 5. Durante a fase de trabalho individual nunca foi dito aos alunos se os exemplares que iam descobrindo estava corretos ou não. O que foi sendo pedido foi para passarem algum dos seus exemplos para um folha maior que permitisse depois integrar uma exposição para apoiar a discussão coletiva. Foram assim obtidos 8 quadrados diferentes e 8 retângulos diferentes. Esta orientação permitiu, também, que existissem exemplares de paralelogramos que duas das alunas tinham construído considerando que eram retângulos. Estes contra-exemplos permitiram a realização de uma discussão muito rica em grande grupo. Esta aula começou com a exposição dos trabalhos realizados pelos alunos (figura 1).

O paralelogramo apresentado na última folha da figura 1 e que destaco na figura 2 não estava inicialmente na exposição, mas é apresentado por uma aluna como mais um exemplar possível. Para a discussão que se seguiu foi muito importante ele ter sido colocado ao lado de dois retângulos em posições não prototípicas (os dois primeiros retângulos da segunda fila na figura 1). A aluna está contente e totalmente convencida de que descobriu mais um retângulo para além dos 8 descobertos pelos seus colegas, no entanto não consegue explicar porque acha que assim é. Quase todos os alunos reagem e dizem que não é, embora alguns

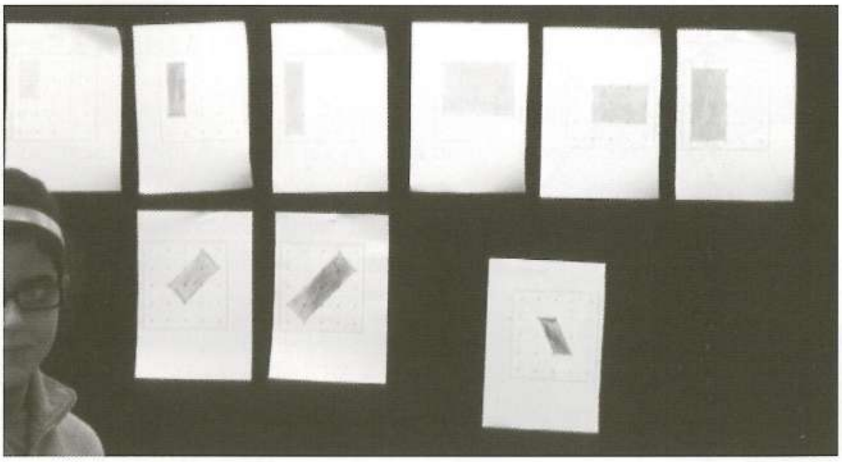


Figura 1

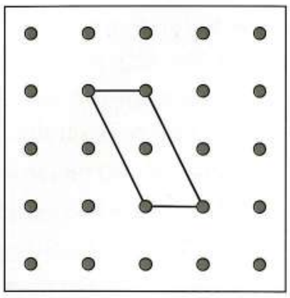


Figura 2

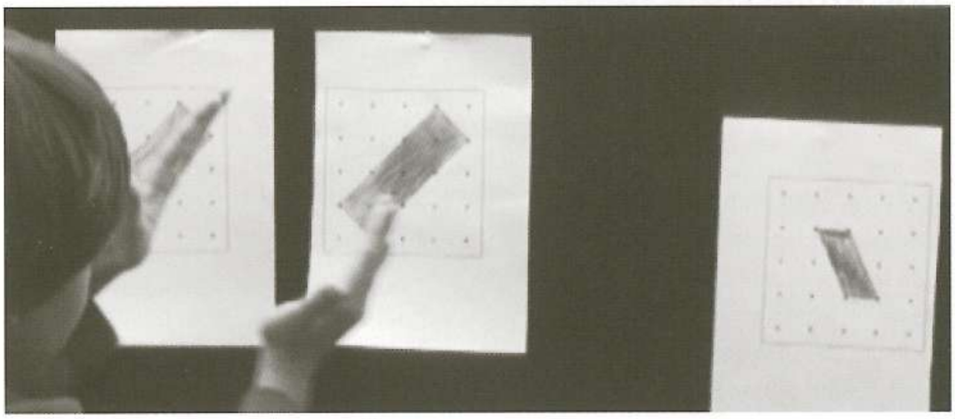


Figura 3

não consigam argumentar porque consideram que a figura não é um retângulo.

Hugo — *Não é porque tem assim 2 bicos para o lado.*

O Hugo vai ao quadro e contorna com os dedos os paralelogramos. Aponta dois lados opostos e diz que está inclinado por comparação com os retângulos em que considera que não está inclinado. O Hugo tem de recorrer à comparação com outra figura exposta, um retângulo em posição prototípica «ao alto», embora identifique elementos da figura importantes para esta decisão. Perante a dificuldade deste aluno em justificar o seu raciocínio, foi pedido a outro aluno, Duarte, que viesse apresentar aos colegas como tinha pensado.

Duarte — *Não é retângulo porque está torto. Em vez de ser assim está assim!*

O Duarte acompanha o que diz com gestos com as mãos (figura 3). No primeiro faz dois segmentos paralelos ao alto, ||, e depois faz dois segmentos paralelos inclinados, //, e contorna com os dedos o paralelogramo. Além disso, é capaz de fazer com as mãos a modificação necessária para que o paralelogramo ficasse retângulo, isto é, coloca as duas mãos de modo que dois lados consecutivos façam um ângulo reto. No entanto não é capaz de verbalizar esta relação entre os lados. Acompanha a sua justificação comparando também com um outro retângulo exposto mas em posição não prototípica isto é, «inclinado». Embora este aluno mostrasse que tinha ideias muito claras sobre a justificação geométrica correta não foi capaz de as verbalizar totalmente.

Esta discussão centrou-se na observação e análise de figuras e tornou evidente para nós a necessidade de trabalhar mais aspetos da estruturação espacial dos quadriláteros, necessários para a estruturação geométrica (Battista, 2008). Permitiu evidenciar a necessidade de dar atenção aos elementos que compõem uma figura, neste caso os ângulos e os lados. Permitiu também identificar as dificuldades em verbalizar o raciocínio, revelando que a maior parte das vezes as imagens mentais dos alunos estão corretas e são adequadas à sua argumentação.

A estruturação espacial e a estruturação geométrica são as ideias chave da análise deste episódio. Para mim são neste momento um referencial indispensável na análise e compreensão dos raciocínios dos alunos e por isso, na orientação do desenho das tarefas a propor-lhes e da sequenciação dessas tarefas. A leitura desta nota pode ser complementada com as notas 7 a 9 das revistas *Educação & Matemática* 116 a 118.

Referências

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In Glendon W. Blume, & M. Kathleen Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 — Cases and Perspectives*, (pp. 131–156). NCTM & IAP.

Pereira, M. G. (2012). Contributos de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra) e do geoplano na compreensão das propriedades e relações entre quadriláteros — um estudo com alunos do 4.º ano. Tese de mestrado. Repositório do IPL. http://hdl.handle.net/10400.21/2127

Práticas Profissionais dos Professores de Matemática

João Pedro da Ponte (org.)

Este livro[1] é um dos produtos finais de um projeto de investigação financiado pela FCT. Coordenado por João Pedro da Ponte, foi desenvolvido ao longo de três anos por uma larga equipa de investigadores e estudantes de pós-graduação. O tema do projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* deu-lhe o nome, abreviadamente designado por P3M, bem como o título do presente livro.

Não se pode afirmar que este tema, nem mesmo em Portugal, seja inédito ou que não houvesse já estudos sobre práticas profissionais de professores de Matemática. Mas então o que nos traz de novo este livro que mereça a nossa atenção? Passarei, de seguida, a enunciar, alguns aspetos que, em meu entender, o torna uma referência obrigatória para quem esteja interessado nesta temática.

Logo nas suas primeiras páginas encontramos a preocupação em discutir o significado do conceito de prática profissional e as diferentes abordagens com que podem ser estudadas. Para quem foi acompanhando o trabalho desenvolvido neste projeto, este cuidado em clarificar o significado de prática profissional foi uma constante, fazendo a diferença para o que era até então mais usual. Era como se todos partilhássemos de um mesmo significado não sendo como tal necessário defini-lo. Mas sabemos que tal não é assim em nenhuma área do saber, e não o é certamente em educação, em particular.

Este rigor acompanha todo o livro, alargando-se a outros conceitos chave. Contudo estas partes são sempre completadas com estudos empíricos bem evidenciados que nos permitem aceder às realidades do trabalho da sala de aula de Matemática, sobretudo dos 2.º e 3.º ciclos e com maior incidência nos tópicos dos Números e da Álgebra. Assim, o leitor pode optar pelas partes que mais lhe interessam, sem correr o risco de perda de coerência, podendo mais tarde retomar numa outra parte para aprofundamento.

Sabemos que as práticas profissionais incluem um campo imenso de dimensões. Haveria assim naturalmente que fazer opções. No caso deste livro deu-se particular destaque às tarefas matemáticas e à comunicação na sala de aula num contexto de ensino exploratório. A importância que, quer as tarefas, quer a forma como são exploradas, desempenham nas aprendizagens matemáticas dos alunos justificam e explicam as opções tomadas. Tomar como ponto de partida o ensino exploratório é não só apostar numa abordagem com potencialidades, como criar uma oportunidade para o aprofundar. Atender à forma como o desenvolvimento profissional do professor acontece de forma que a sua prática profissional se vá continuadamente melhorando não foi ignorada. A terceira parte deste livro é dedicada à formação inicial e contínua de professores. Nesta gostaria de destacar os casos multimédia ao serviço da formação de professores, aspeto inovador no que a Portugal diz respeito.

Este livro oferece ainda ao leitor diversas tarefas matemáticas, acompanhadas de extratos de diálogos e/ou resoluções produzidas por alunos portugueses. Por outras palavras, não são apenas apresentadas as propostas que se fizeram aos alunos, mas é feito um trabalho de análise em torno destas situações de sala de aula. Mas pergunta-se: será isto vantajoso para um professor de Matemática que não esteja interessado na investigação? Ou, por outras palavras, qual o público a que este livro se destina? Em meu entender, a um amplo leque de pessoas, a todos aqueles que se interessam pelo ensino e aprendizagem da Matemática. Aos professores, porque a reflexão que certamente alguns relatos de sala de aula lhes despoletará ajudá-los-á a atribuir novos significados ao que fazem e quem sabe dar-lhes vontade de experimentar, de fazer diferente. Aos formadores de professores pois têm neste livro um conjunto de novas ideias e concetualizações para a sua própria prática profissional. Aos que investigam em educação, por disporem de um conjunto alargado de artigos de qualidade e de discussões de natureza mais teórica sobre alguns conceitos.

É verdade que se trata de um livro longo, com cerca de 550 páginas. Mas a forma como está estruturado permite lê-lo de forma não sequencial. Vamos ao sabor da nossa curiosidade. Cabe ao leitor decidir o seu próprio trajeto a percorrer. Estou certa que, no final, me dirão «Valeu a pena!»

Nota [1]: O e-book encontra-se disponível em http://www.ie.ulisboa.pt/portal/page?_pageid=406,1852906&_dad=portal&_schema=PORTAL

Leonor Santos
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

A Educação e Matemática entrevista... José Paulo Viana

A resolução de problemas é uma das ideias mais fortes e com maior tradição na área da educação matemática e a revista Educação e Matemática tem procurado acompanhar a valorização desta atividade desde sempre, nomeadamente através da secção *O problema deste número*, uma das suas secções mais antigas. Quase tão antiga como a secção, é a colaboração de José Paulo Viana que, desde 1991, edita assiduamente um problema em cada número, desafiando também os leitores a enviarem as suas resoluções.

Na sessão especial da EeM realizada no ProfMat 2014, a nossa diretora, Lina Brunheira, entrevistou o José Paulo Viana. Ao longo da entrevista, percorreu três temas: o amante de problemas de matemática, o professor de matemática e o editor da secção da Educação e Matemática. O texto que se segue corresponde a uma versão mais reduzida dessa entrevista que o José Paulo Viana teve a amabilidade de reconstituir a nosso pedido.

A Redação da *Educação e Matemática*

Figura 1.—(Batalha de Hastings, Tapeçaria de Bayeux, sec. XI)

O AMANTE DOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

1. Quando é que sentiste que tinhas um gosto especial pelos problemas de matemática? (O que te fez perceber isso? Como é que eras como aluno em matemática?)

Acho que desde sempre (ou quase...). Da escola, não me lembro especialmente dos problemas mas recordo de passar muitas aulas de outras disciplinas que não me agradavam a resolver problemas. Não sei de onde eles vinham. Dos professores de Matemática? De casa? Dos amigos? Não sei.

Lembro-me, no correspondente ao atual 5.° ou 6.° ano, ter estado toda uma aula de História a calcular (à mão, claro, que não havia calculadoras) o valor de 2 elevado a 64 para saber a resposta a questão do inventor do jogo de xadrez que iria receber do rei do seu país um grão de trigo no primeiro quadradinho do tabuleiro, dois grãos no segundo, quatro no terceiro, oito no quarto, e assim sucessivamente.

Doutra vez, também por essas alturas, numa outra aula (que não de matemática...) tentei encontrar uma regra que desse a soma dos naturais até um certo número. Muito admirado fiquei quando, uns anos depois, reencontrei a fórmula ao estudar as sucessões.

Do que disse aqui atrás, dá para perceber que os meus resultados a Matemática eram bons.

No entanto, o grande salto, que me torna consciente do gosto pela resolução de problemas, dá-se uns anos depois, já perto do fim do ensino secundário. Um dia, o meu pai chegou a casa e entregou-me umas folhas datilografadas que tinha trazido do emprego: «Dá uma vista de olhos nisto, penso que vais gostar. Tens de mas devolver até segunda-feira».

Começava com o enunciado de três problemas e depois, separadas, as resoluções. Que problemas! Marcaram-me de tal maneira que nunca mais os esqueci. Naquela época, não havia fotocópias pelo que só copiei os enunciados, as resoluções eram muito longas (ou eu preguiçoso). Mas a folha desapareceu numa das muitas mudanças de casa.

Consegui chegar à solução dos dois primeiros. O último era o mais difícil e fui obrigado a ler o que lá estava. O que mais apreciei neles foi perceber a inteligência de quem os tinha inventado (ainda hoje, ao ler certos problemas ou ao ver a forma como se consegue resolvê-los, me maravilho e me admiro com a riqueza do raciocínio humano). Percebi nessa altura que havia uma outra qualidade de problemas, em que se ia mais além do que da aplicação direta dos conhecimentos matemáticos. Vale a pena recordá-los.

O primeiro que lá aparecia era um exemplo daquilo que os ingleses classificam de *alphametics* e os franceses de *cryptarithmes*. Não conheço a palavra portuguesa correspondente, por isso adoto a francesa escrita à nossa maneira.

O criptaritmo consiste numa igualdade numérica, envolvendo uma ou mais operações, onde os algarismos foram substituídos por letras. Cada letra corresponde a um só algarismo e cada algarismo é representado por uma única letra. Nenhum número pode começar por 0. O objetivo é descobrir o valor de cada letra.

O exemplo clássico dos criptaritmos é precisamente o que era proposto nessas folhas. Segundo descobri posteriormente, foi inventado por Henry Dudney, o famoso criador de puzzles inglês, e foi publicado em Julho de 1924 na revista *Strand Magazine*.

É uma soma simples, com oito letras diferentes:

$$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ +\text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$$

O que nos faz gostar dele é que quase tudo pode ser descoberto por deduções lógicas, sem necessidade de ir experimentando valores para as letras. Se nunca o resolveram, experimentem e vão ver que gostam!

O segundo era *A Batalha de Hastings* (figura 1):

Num antigo documento, encontrou-se este breve relato da batalha de Hastings:

Os exércitos normando e saxão postaram-se frente a frente, formados em quadrado. Os normandos estavam em inferioridade numérica pois tinham menos 512 soldados. No entanto, bateram-se com tal valentia e coragem que conseguiram desbaratar e pôr em fuga o inimigo. No final da terrível batalha, tinham morrido metade dos saxões mas do lado dos normandos os mortos foram poucos. Curiosamente, foi igual o número de sobreviventes em cada um dos lados.

Quantos soldados tinha cada um dos exércitos e quantos morreram na batalha?

O que nos intriga desde logo é como, com tão pouca informação, se poderá descobrir tanta coisa. Para o resolver, vai ser preciso levar à letra todos os dados do enunciado.

Do terceiro problema já não consigo refazer todo o enunciado. Numa sala, está uma mosca pousada a meio de uma parede e a um metro do teto. Na parede oposta, também a meio e a um metro do chão, estão oito aranhas que partem em direções diferentes e todas à mesma velocidade. As oito alcançam a mosca ao mesmo tempo. Sabe-se a distância que cada uma delas percorreu. Pede-se as três dimensões da sala.

De vez em quando, sobretudo com a ajuda de programas de Geometria Dinâmica, volto a pegar no problema mas não consigo resolvê-lo completamente...

Tenho encontrado versões mais simples mas nenhuma corresponde à que tenho na memória.

2. Fala-nos sobre um problema que te tenha marcado. (e porquê, ligar com o que é para ti um bom problema?)

Bem, não me é possível falar num só problema... Há, para já, aqueles três de que falei atrás.

Outro, bem marcante, foi «O Cão e o Prisioneiro», que o Manuel Saraiva propôs e analisou no número 8 da Educação e Matemática, do 4.° trimestre de 1988 (figura 2)

Um prisioneiro encontra-se no centro do pátio da prisão e é guardado por um cão que corre π vezes mais depressa que ele. O pátio é um quadrado com 200 metros de lado. O homem pode andar por onde quiser, em qualquer direção, mas o cão, que inicialmente está num dos vértices do quadrado, só se pode deslocar ao longo dos lados do pátio.

Conseguirá o prisioneiro escapar?

O Manuel terminava o artigo colocando nova questão:

Qual é a velocidade que o cão precisa de ter para que o homem não tenha hipóteses de fuga?

A resolução apresentada era bastante interessante e o prisioneiro teria de correr para um ponto que não era nenhum dos que, à partida, pareceriam mais eficientes. Contudo, esta pergunta final abria perspetivas completamente novas. Já não bastava pensar que o prisioneiro se limitaria à estratégia mais simples: «correr em frente a toda a velocidade». Por outro lado, era preciso pensar também nas opções que o cão poderia tomar para guardar o prisioneiro da forma mais eficaz. Pensar nestas hipóteses todas entusiasmou-me de tal maneira que me levou a escrever o meu primeiro artigo para a nossa revista...

Embora só me tenham pedido para falar num, há outros problemas que foram importantes para mim. Tenho

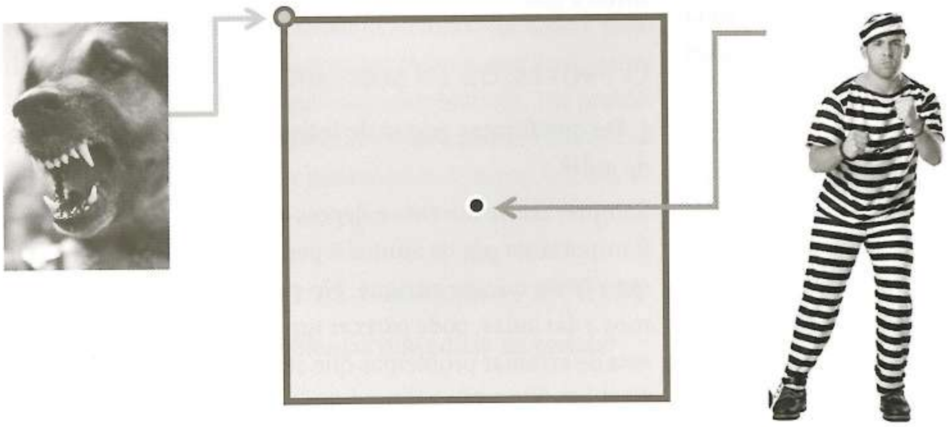


Figura 2

Figura 3

de referir aquele de que mais gostei nos últimos tempos, «Dois triângulos *quase* iguais»:

Qualquer triângulo tem seis elementos caraterísticos: três lados e três ângulos. Será possível que existam dois triângulos diferentes que tenham 5 desses 6 elementos iguais de um para o outro?

Quando lemos o enunciado, parece-nos impossível que tal possa acontecer: cinco elementos iguais de um triângulo para o outro e eles são diferentes? Mas, por outro lado, se o problema nos é apresentado, é porque tem solução. E é esta tensão entre a nossa intuição (que nos diz que é «impossível») e a nossa razão (que nos diz que, se ele ali está, é porque deve ser possível) que nos faz querer descobri a solução.

Além disso, depois de resolvido, vemos que podemos ir ainda mais longe, respondendo a novas questões que surgem quando chegamos à solução.

3. Esta pergunta tem a ver com cinema que nós sabemos ser outra paixão tua. Há uns anos vi um dos filmes da saga Die Hard com o Danny Glover e o Bruce Willis em que os dois têm de resolver um daqueles problemas conhecidos com garrafões de água para colocar exatamente 4 litros de água em cima de uma balança. Se errarem rebentam uma bomba... Alguma vez um filme te serviu de inspiração para um problema?

Só agora, ao ser colocada esta pergunta, me apercebi que não tenho estabelecido pontes significativas entre duas *artes* que tanto aprecio: cinema e matemática. Nos *Desafios* do jornal Público já coloquei uns três ou quatro problemas relacionados com o cinema mas com pouca matemática.

Como é de prever, quando estou a ver um filme, gosto sempre das referências à Matemática. Há alguns casos especiais. No filme «O Enigma de Fermat» (La Habitación de Fermat), de Luis Piedrahita e Rodrigo Sopeña, os personagens principais são quatro matemáticos cuja sobrevivência depende de serem capazes de resolver os sucessivos enigmas que lhes vão sendo colocados.

O meu favorito é o «Pequeno Dicionário Amoroso», de Sandra Werneck (figura 3). Tem uma personagem feminina secundária que gosta de muito de números e que, ao longo da história, vai introduzindo, com bastante humor, resultados estatísticos e curiosidades numéricas relacionadas com o que vai acontecendo.

4. Gostas mais de resolver problemas ou de inventar problemas?

O gosto pela resolução de problemas existiu sempre.

A invenção de problemas é muito mais difícil e surge muito mais tarde na minha vida. Ao princípio, quando o Eduardo e eu começámos com os *Desafios*, era bem complicado e sofria-se um bocado. Tivemos de recorrer várias vezes aos clássicos, aqueles problemas de que não se sabe a origem e que parece terem existido sempre ao longo dos tempos. Depois, fui ganhando experiência e adquirindo rotinas e agora já é mais fácil inventá-los. Mas acho que continuo a gostar mais de os resolver...

O PROFESSOR DE MATEMÁTICA

5. De que formas gostas de integrar os problemas na sala de aula?

Sempre: antes, durante e depois de uma unidade temática. É importante pôr os alunos a pensar, desafiá-los com qualquer coisa que os intrigue. No princípio, quando começamos a dar aulas, pode parecer uma tarefa quase impossível, esta de arranjar problemas que se integrem nos conteúdos. Com a prática, se estivermos conscientes da necessidade e importância dos problemas, as coisas tornam-se mais fáceis. Às vezes, uma pergunta curta mas desafiante é suficiente para obter o efeito desejado.

6. Da tua experiência, o que é mais determinante para o envolvimento dos alunos na resolução de problemas [As características do problema? As características do aluno? A forma como o professor desafia o aluno?]

Diz-me a experiência que praticamente todos os alunos gostam de resolver problemas. Claro que há sempre uns que se mostram contra, mas já vi muitos deles entusiasmarem-se quando lhes parece que o problema não tem nada a ver com matemática (ou melhor, com o cálculo).

Há também dois aspetos muito importantes. O primeiro tem a ver com caraterísticas próprias do problema. O enunciado tem de ser bastante claro e, de preferência, curto, deve criar uma alguma estranheza na mente do aluno, tem de levá-lo a interrogar-se: «Será possível?», tem de obrigar a pensar primeiro em possíveis estratégias, deve estar adaptado ao desenvolvimento do aluno e, claro, não pode ser demasiado difícil ou rebuscado.

O segundo é a forma como o problema é apresentado pelo professor. O entusiasmo com que se coloca o problema é contagiante e transmite-se facilmente aos alunos.

7. Os problemas podem motivar os alunos, podem desenvolver-lhes capacidades, podem ser um contexto para aprender conceitos... de todas estas vertentes, o que é mais importante para ti?

O principal efeito dos problemas é pôr as pessoas a pensar, a raciocinar e a relacionar aquilo que sabem. Há uma certa tendência para se transformar o ensino da Matemática na aprendizagem de regras de cálculo e de manipulação algébrica, de tal modo que muita gente julga que a Matemática é isso e só isso. Os problemas acrescentam uma dimensão nova, fazendo pontes entre os vários conhecimentos, obrigando a pensar na Matemática como um todo e pondo o cálculo e a manipulação algébrica no seu verdadeiro lugar, o de simples instrumentos matemáticos. Há problemas que são puramente abstratos mas existem muitos outros que mostram como a matemática se torna útil em situações concretas e reais.

O editor da secção de problemas da EeM

8. De onde surgem os problemas que editas na revista?

Os problemas da revista têm duas funções: por um lado, desafiar diretamente os professores e, por outro, servirem de inspiração para a sua utilização nas aulas. Além disso, tornam-se mais proveitosos se existirem diferentes processos de se chegar à solução. Nem sempre é fácil arranjá-los com estas caraterísticas. Ao ler e resolver os problemas que encontro em livros e revistas, vou tendo isso em consideração. Assim, se aparece um muito bom, apresento-o tal e qual, com a indicação da origem (mas tento que isto seja a exceção). Outras vezes, durante a resolução, encontro um que pode ser adaptado, alterado, transformado ou prolongado, dando origem a um novo problema que já pouco ou nada tem a ver com o original. Finalmente, às vezes consigo mesmo inventar um completamente (e fico todo contente...).

9. Ao longo do tempo e com todas as resoluções que tens recebido dos nossos leitores, o que tens percebido/aprendido a partir delas: [Tipos de problemas preferidos? Estilos de resolução mais habituais? Existe um perfil para quem te responde com mais assiduidade?...]

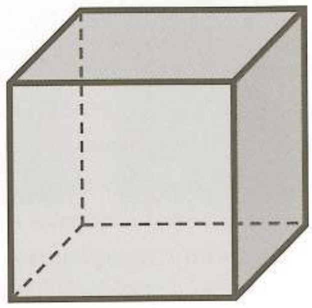
É muito rico, para mim, ter regularmente acesso às resoluções dos nossos colegas (e até de alunos). As estratégias e os processos seguidos são, muitas vezes, bem diferentes, mais simples ou melhores do que os que eu tinha descoberto. É fascinante como o pensamento humano pode ser tão diverso e imprevisível. É isto também que tentamos passar a quem lê nossa revista quando apresentamos a variedade de caminhos seguidos para chegar à solução.

Há um conjunto de leitores que responde regularmente aos problemas. Com o decorrer do tempo, começam a notar-se as preferências de cada um. Há os que tentam pôr tudo em equação, outros resolvem quase sempre com a folha de cálculo ou com programas de geometria dinâmica, outros tentam ir mais além, generalizando ou propondo prolongamentos. E já reparei que alguns deles ficam tristes quando não respondem ou não enviam a resolução.

10. Uma última pergunta que na verdade esperamos seja apenas retórica: ainda há problemas para publicar?

É uma pergunta de retórica, sem dúvida! A mente humana é incansável e não aceita limites. Não falta gente neste mundo com vontade e com capacidade para inventar problemas interessantes. Além disso, a Matemática e a sociedade evoluem sem cessar, dando origem a novas situações que vão gerar novos problemas. E nós cá estaremos para os resolver.

Um cubo e muitos triângulos



Quantos triângulos retângulos se podem obter escolhendo três vértices de um cubo?

Pergunta adicional: Se escolhermos ao acaso três vértices de um cubo, qual é a probabilidade de eles formarem um triângulo retângulo?

(Respostas até 5 de Abril, para zepaulo46@gmail.com)

DESISTÊNCIAS NO TORNEIO

O problema proposto no número 129 de *Educação e Matemática* é uma variante de um outro, que nos foi proposto por Delfim Guedes (V. N. Gaia):

Com a finalidade de treinar os alunos para o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, o professor desafiou a sua turma para se juntarem num sábado e fazerem um torneio de Hex, em que cada um jogaria com todos os outros.

Infelizmente, à última hora, alguns alunos tiveram de desistir e, por este motivo, disputaram-se menos 94 jogos do que os previstos inicialmente.

Quantos alunos tinha a turma e quantos desistiram?

Recebemos 12 respostas, enviadas por

Alberto Canelas (Queluz),
Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu),
Francisco de Matos Branco (Ovar),
Graça Braga da Cruz (Ovar),
Hugo Silva (Lisboa),
Luís Lopo, Manuel Marques & Lucas Marques (Lagos),
Mário Roque (Guimarães),
Pedrosa Santos (Caldas da Rainha),
Telma Carneiro (Santo Tirso)

e de um grupo de quatro professores de Paião:

Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

O *Hugo* começa com estas considerações:

Este problema é bastante conhecido e tem várias variantes. Uma poderá ser determinar quantos apertos de mão são dados por um conjunto de pessoas; outra o número de segmentos de reta que unem as arestas numa figura geométrica plana. Aqui trata-se o problema de quantos jogos existem num grupo de N alunos. Para determinar o número de jogos feitos por N alunos, podemos tratar este problema como um problema de combinatória (...).

Sendo então:
n = número de alunos da turma
d = número de desistentes
temos que:

— o número de jogos que seriam realizados com todos os alunos da turma é dado por

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2},$$

— o número de jogos realizados com os alunos que não desistiram é dado por

$$C_2^{n-d} = \frac{(n-d)(n-d-1)}{2}.$$

Como não se disputaram 94 jogos, sabemos que:

$$C_2^n - C_2^{n-d} = 94 \quad \text{(Equação 1)}$$

Praticamente todas as resoluções partiram desta equação mas, a partir daqui, as abordagens e os percursos divergem.

A *Catarina* simplifica a Eq. 1 obtendo

$$d^2 + (1-2n)d + 188 = 0.$$

O descriminante desta equação de segundo grau é

$$\Delta = (1-2n)^2 - 752$$

e tem de ser um quadrado perfeito. Numa folha de cálculo e até $n = 40$, isso só acontece para $\Delta = 1849 = 43^2$.

Vem $n = -25$ ou $n = 26$.

Logo, a turma tinha 26 alunos e faltaram 4.

O *quarteto de Paião* parte da Eq. 1 para chegar a

$$n = \frac{94}{d} + \frac{d+1}{2}.$$

Substituindo d por números naturais, só se obtêm valores inteiros de n para:

$d = 1$ e vem $n = 95$ (turma muito grande),

$d = 4$ e vem $n = 26$ (solução)

Manuel & Lucas também obtêm

$$n = \frac{94}{d} + \frac{d+1}{2}.$$

d tem de ser 1, 2, 4, 47 ou 94. Não pode ser 1 porque «alguns alunos tiveram de desistir» (e nenhum professor merece ter uma turma com 95 alunos). Não pode ser 2 nem 94 porque obter-se-ia um valor de n que não seria inteiro (e nenhum professor merece ter meio aluno). Não pode ser 47 porque obtém-se um valor de n inferior a 47, o que não faz sentido. Para $d = 4$, obtém-se $n = 26$.

Também o *Francisco* chegou às mesmas equação e conclusões. O *Carlos* e o *Alberto* obtiveram a equação $(n+d-1)(n-d) = 188$. Como $188 = 2 \times 2 \times 47$, terá de ser:

$n - d = 1$ ou 2 ou 4

$n + d - 1 = 188$ ou 94 ou 47

Resolvendo estes três sistemas, só o terceiro dá soluções inteiras: $d = 4$ e $n = 26$.

A *Graça* avança até

$$d(d+2k-1) = 188 \Leftrightarrow d(d+2k-1) = 2^2 \times 47,$$

em que k é o número de alunos que participaram no torneio. O resultado final é $d = 4 \Rightarrow k = 22$ e $d + k = 26$.

O *Hugo* e o *Mário* seguiram uma estratégia diferente. Numa folha de cálculo criaram uma coluna para os valores de C_2^n e outra para os de $C_2^n - 94$, procurando valores que aparecessem nas duas colunas.

Diz o Mário: *A 1ª solução que encontrei é plausível:*

$$C_2^{26} = 325 \text{ e } C_2^{22} = 231 = 325 - 94$$

A turma teria então 26 alunos, tendo 4 desistido do torneio. Por curiosidade procurei mais soluções ... para a frente. Encontrei outra, fora do contexto: $C_2^{94} = 4371 = C_2^{95} - 94$.

Arte Contemporânea no Ensino das Transformações Geométricas

Diogo Batista, António Guerreiro e António Lopes

Associamos a ideia de transformação geométrica ao movimento de um objeto no plano. No entanto, não se trata de uma deslocação, mas antes de uma repetição, não apenas do objeto, mas de todos os pontos do plano (Veloso, 2012). Por mais que o movimento seja um auxiliar valioso na imaginação de qualquer transformação geométrica e no desenvolvimento do sentido espacial, essencial na resolução de problemas geométricos, o facto é que o conhecimento das definições geométricas é imprescindível para a compreensão dos mesmos problemas.

Transformações Geométricas

Transformação geométrica é definida como uma «correspondência biunívoca entre os pontos do plano» (Bastos, 2007: 26), mais especificamente, «uma transformação geométrica T é uma correspondência que associa a cada ponto P de R^2 um e um só ponto P' de R^2, verificando as seguintes condições: (a) Se P e Q são dois pontos distintos, então os pontos correspondentes P' e Q' são também distintos; (b) se U é um ponto qualquer de R^2, então existe um ponto V de R^2 tal que o seu correspondente pela transformação geométrica T é U» (Veloso, 2012: 5).

Esta definição engloba as transformações por semelhança, que, apesar de não alterarem a razão da distância entre um par de pontos, *alteram* a distância entre os pontos. No 2.° ciclo do ensino básico, nível de ensino desta investigação, o estudo das transformações geométricas está reservada às que preservam a distância entre quaisquer dois pontos P e Q, ou seja, às isometrias. As transformações em causa são as seguintes:

Translação (figura 1). Definido pelo vetor $\vec{v}$, faz corresponder a cada ponto P, do plano, o ponto P', do plano, tal que, pela translação T do plano, o triângulo $[XYZ]$ é copiado para onde, e até onde, o vetor $\vec{v}$ *apontar* (Palhares, 2004; Veloso, 2012).

Reflexão (figura 2). Dado um eixo e, a reflexão R, faz corresponder a cada ponto P, do plano, o ponto P', do plano, onde $E=E'$ e o triângulo $[XYZ]$ é refletido sobre e (Palhares, 2004).

Rotação (figura 3). Sejam dados um ponto C e um ângulo orientado φ, a rotação R, faz corresponder o ponto P, do plano, ao pontoP', do plano, tal que a imagem de $C=C'$ e o ângulo $X'CY'$, formado na transformação do triângulo $[XYZ]$, é igual ao ângulo XCY (Veloso, 2012).

Quem leciona o tópico matemático das transformações geométricas estranhará o facto de não nos referimos às simetrias. Ainda que as simetrias correspondam a uma isometria, é uma isometria tal que qualquer ponto P', transformado de P, coincide com o ponto P, referindo-se assim à transformação de um conjunto de pontos que deixam a figura transformada invariante, isto é, o transformado do plano é o próprio plano (Bastos, 2006), assumindo, desta forma, a singularidade de casos particulares das isometrias apresentadas.

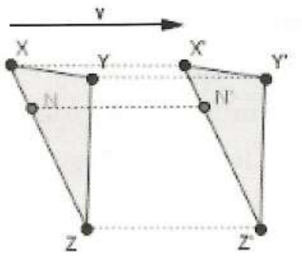


Figura 1.—Representação da translação T por $\vec{v}$

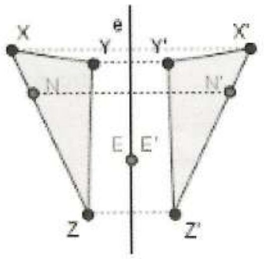


Figura 2.—Representação da reflexão R por e

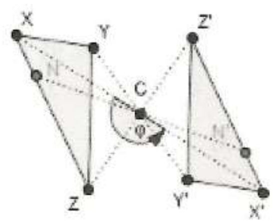


Figura 3.—Representação da rotação R com centro em C e amplitude φ

Figura 4.—Obras de Nassos Daphnis

Geometria em Nassos Daphnis

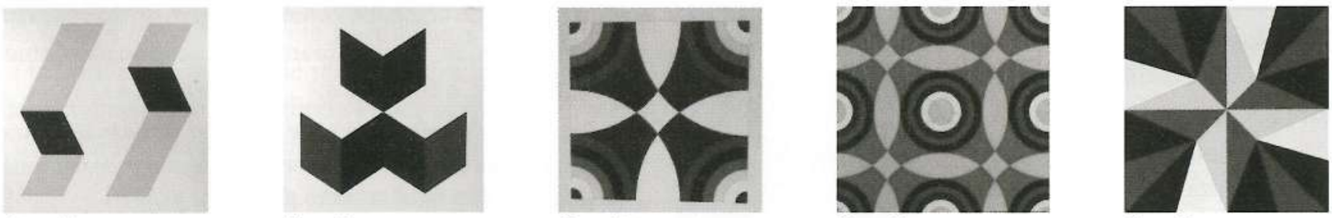
As obras de Nassos Daphnis (figura 4), nas quais ressalta uma combinação rígida, *nervosa* e dinâmica de diferentes formas geométricas, refletem o seu percurso de vida. Tendo desenhado, durante a Segunda Guerra Mundial, a camuflagem da campanha italiana, onde aprendeu a pintar com cores densas e opacas, e trabalhado na florista da família, onde adquiriu uma sensibilidade única para a cor e uma profunda compreensão de geometria natural, Daphnis acabou por desenvolver um traço duro e até mesmo preciso, em que o dinamismo depende da justaposição de cores primárias, arranjadas em triângulos, em retângulos, em linhas retas e curvas. Para Daphnis, o mais importante era colocar a cor no plano correto, pois dizia ser a única forma dela existir, pelo que foi referenciado pela crítica como um purista moderno preocupado com o diálogo das cores puras, presas em bandas regulares (Grimes, 2010).

Partindo do princípio de que a construção da matemática resulta de ligações livres com a realidade, a arte plástica, que labora com imagens de uma imaginação que raciocina — «imagens que provam» (Tavares, 2013: 33) —, oferece-se a nível pedagógico como uma ferramenta óbvia na exploração do plano e do espaço. Relacionando conceitos teóricos ao desenho geométrico, os alunos desenvolvem uma compreensão tão intelectual quanto física, possibilitando não só a exploração criativa dos objetos geométricos desenhados, como das transformações geométricas implícitas e inerentes ao próprio desenho (Tavares, 2013).

Design de Investigação e Intervenção em Sala de Aula

O *design* de investigação atende à compreensão das perspetivas dos participantes no estudo, procurando fazer luz sobre a dinâmica da atividade dos sujeitos, valorizando o significado da ação em resultado da observação participante no contexto de sala de aula. Esta intervenção educativa em sala de aula foi mediada pelo aluno/professor, primeiro autor deste artigo, em contexto de prática de ensino supervisionada, tendo por objeto de estudo os alunos do 2.° ciclo do ensino básico e por recurso a recolha de dados, a gravação áudio das aulas e as produções matemáticas dos alunos.

A recolha de dados decorreu durante o ano letivo 2013/2014, em três aulas do 6.° ano de escolaridade, numa turma com vinte e um alunos, na Escola Básica 2,3 Dr. Alberto Iria, em Olhão, no âmbito de uma investigação em educação matemática integrante do relatório de prática de ensino supervisionada do mestrado em Ensino do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico, Universidade do Algarve. Na primeira aula, dinamizou-se uma atividade de exploração de objetos geométricos, com base na *geometria visível* patente nas obras contemporâneas de Daphnis (figura 5). A segunda aula, antecipada pela clarificação dos conceitos relativos às transformações geométricas, foi marcada pela leitura da *geometria invisível*, isto é, pelas dinâmicas constitutivas das obras do pintor, em que cada aluno indicou e identificou as isometrias *escondidas*, aplicadas aos objetos geométricos, suporte das mesmas pinturas. Na terceira aula, de-



Obra Um | Obra Dois | Obra Três | Obra Quatro | Obra Cinco

Figura 5.—Obras analisadas pelos alunos

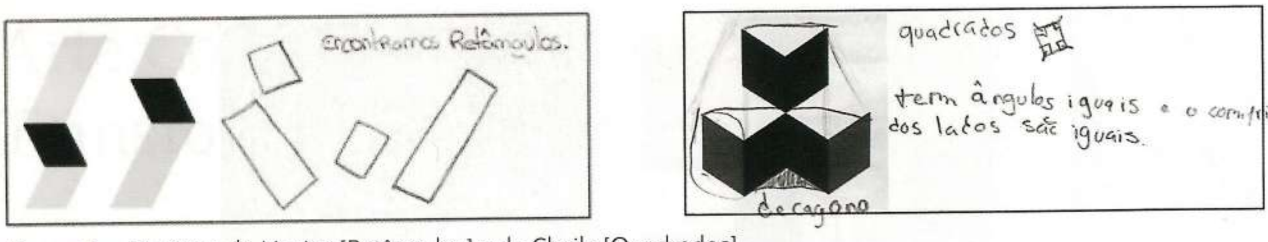


Figura 6.—Registos da Jéssica [Retângulos] e da Cheila [Quadrados]

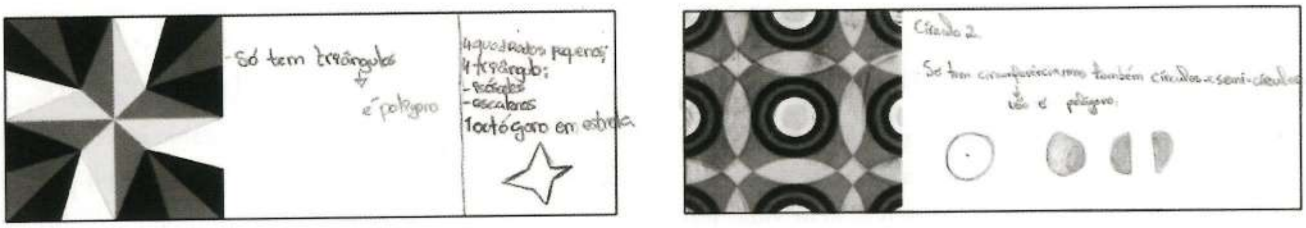


Figura 7.—Registos da Vanda [Triângulos] e da Beatriz [Círculos]

signada *geometria dos alunos*, estes recorreram a materiais de medição e de desenho e modificaram a expressão global das obras, procurando combinações de cores e transformações orgânicas das formas geométricas.

Arte Contemporânea e Transformações Geométricas

Geometria Visível. Na *geometria visível* analisa-se a resposta dos alunos à geometria que ocupa visivelmente espaço (Tavares, 2013). Os alunos estudam os objetos visíveis no plano, identificam e distinguem diferentes formas geométricas em obras do pintor.

Dos dados recolhidos junto dos alunos, fica a perceção de que o raciocínio geométrico assume um sentido visual ilusório ao identificarem na *obra um* e na *obra dois*, respetivamente, «retângulos e quadrados inclinados», atendendo essencialmente à medida dos lados das figuras geométricas (figura 6).

A relação das figuras geométricas com a amplitude dos ângulos parece inexistente, pois admitiram quadrados com lados inclinados e com ângulos agudos e obtusos ou com os lados dobrados. Embora tivessem distinguido triângulos isósceles de escalenos e descrito, em resultado dos arranjos dos desenhos (Veloso, 2012), octógonos, círculos, um decágono e três cubos em perspetiva, o silêncio quanto aos ângulos presume uma conceção errónea de conceitos, fragilizando a perceção das figuras e das transformações geométricas (figuras 7 e 8).

Questionados os alunos sobre a existência duma relação entre as obras ou duma faceta que lhes fosse comum, responderam que tal relação passava pela repetição harmoniosa duma figura geométrica sobre a rigidez dum mesmo esquema criativo. Foi o que os alunos tentaram repetir, quando afirmaram que as obras desenhavam «figuras paralelas»:

Diogo (acerca da obra três): — As figuras são paralelas, porque dá para cortar a imagem completa em quatro partes iguais. A figura é sempre a mesma... Só anda à roda.

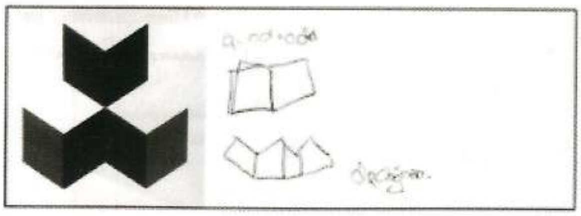
A ideia de transformação geométrica surge no «anda à roda» (rotação) e nas «figuras paralelas» (translação), apesar das dificuldades manifestadas pelos alunos na leitura das obras do artista, confundindo ideias geométricas fundamentais para a compreensão do universo espacial.

Geometria Invisível. Na *geometria invisível* analisa-se as respostas dos alunos à geometria que não preenche, mas orienta a ocupação visível do espaço. Os alunos exploram a forma como os objetos visíveis posicionam-se no plano e, em relação a si mesmos, identificam e descrevem as isometrias implícitas nas obras, suportadas pelos arranjos dos objetos.

Obra Um. O Hélder e a Vanda, devido à forma e ao aparente arranjo em espelho dos dois octógonos, depressa julgaram o segundo octógono como a imagem duma reflexão do plano. Contudo, muitos foram os alunos que não demoraram, também, a corrigi-los:

Catarina: — Não há reflexão, porque os octógonos estão ao contrário. Mas, há uma rotação... O [primeiro] octógono pode dar uma volta de 180° e ficar igual ao outro (figura 9).

Tiago: — Sim. Mas, a seguir, temos de fazer uma translação [do octógono], para ficarem [ambos] na mesma posição...



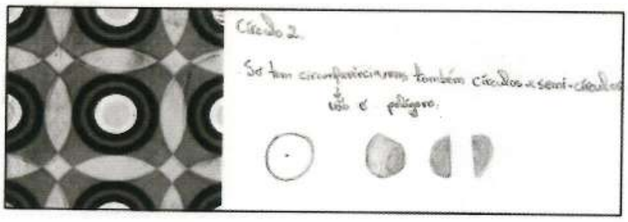


Figura 8.—Registos do Hélder [Decágono] e do David [Cubo]

Figura 9.—Registo da Catarina [Rotação]

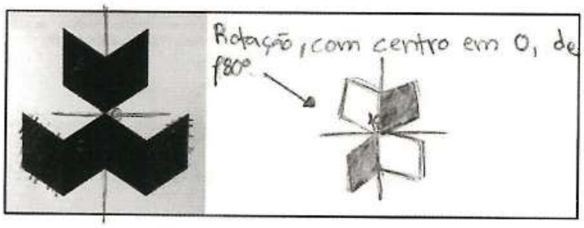


Figura 10.—Registos da Catarina [Rotação]

Catarina: — Não é preciso... [Os octógonos] ficam, logo, iguais.

Tiago: — Ficam iguais, mas temos de os juntar, não?

Catarina: — Já não estou a perceber nada...

Professor: — Esperem... Onde é que marcaste o centro da rotação, Catarina?

Catarina: — No meio!

Professor: — No meio do quê?

Catarina: — No meio da pintura toda...

A obra apresenta uma simetria de meia-volta (Veloso, 2012). Porém, nem todos os alunos reconheceram a isometria. Tal como o Tiago, outros referiram que o segundo octógono resultava duma rotação seguida duma translação do primeiro octógono. A maioria dos alunos isolou o primeiro octógono e tentou transformá-lo no segundo, porque era, como referiram, «mais fácil», refletindo a ilusão do arrasto das figuras geométricas.

Obra Dois. Assumindo o esquema criativo da *obra um*, o Tiago disse que a *obra dois* desenhava, à volta dum «eixo», uma mesma simetria de rotação. Contudo, não só não falamos de «eixo», mas de centro de rotação, como a *obra dois* é a única que não apresenta qualquer simetria de rotação, para além da rotação de 360°. Se bem que os losangos pretos e azuis coincidam, como identificou a Catarina (figura 10), ao fim da rotação de 180°, os vermelhos (em baixo, nos extremos esquerdo e direito) restringem-se à de 360°.

Os alunos dispararam numa outra direção:

Diogo: — Dá para fazer uma reflexão da pintura toda com um eixo vertical.

Professor: — Dá? Já fizeste com o papel vegetal?

Diogo: — Sim...

Carlos C.: — Fica igual... O Diogo tem razão.

Hélder: — Não fica não! As cores dos quadrados [que são realmente losangos] do meio não são iguais... Só os vermelhos é que são.

Diogo: — Pois é... O azul fica em cima do preto.

Carlos C.: — Está bem... Mas o que *conta* são as formas, não são as cores...

Não atribuindo relevância às cores, alguns referiram a existência de uma simetria de reflexão de eixo vertical, o que revela alguma compreensão do espaço e da própria transformação geométrica (Harris, 2000).

Obra Três. Os alunos demostraram menos dificuldades na análise da *obra três* por considerarem, como tinha sugerido o Diogo, um esquema criativo em rotação, em que a figura «anda à roda». No entanto, a análise da mesma não ficou por aí:

Diogo: — A pintura tem uma rotação de 90°... O motivo roda 90° à volta do quadrado (figura 11).

Daniel: — Então, [a pintura] tem quatro *rotações de 90°*. O motivo não roda só uma vez, roda quatro vezes.

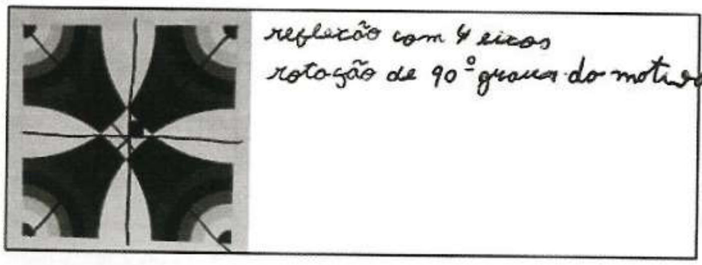


Figura 11.—Registos do Diogo [Reflexão e Rotação]

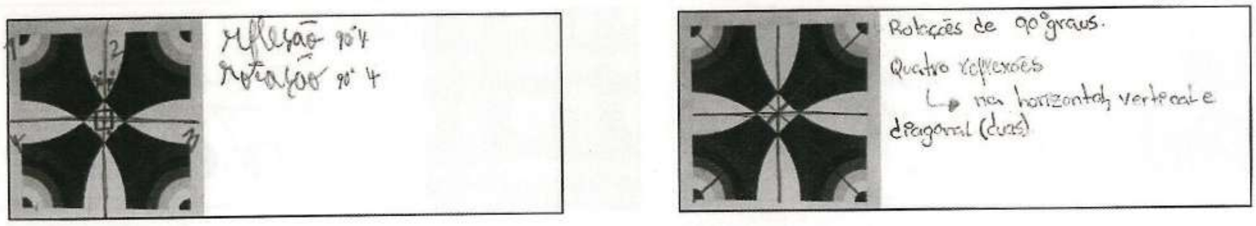


Figura 12.—Registos do Carlos G. e da Inês [Reflexão e Rotação]

Professor: — Exato! O motivo começa por rodar 90°... Mas, depois, roda mais 90°, que dá...

Daniel: — 180°.

Professor: — Sim, dá meia-volta. Roda outros 90° e a amplitude da rotação chega aos...

Daniel: — 270° e a quarta rotação fica com 360°. [O motivo] dá uma volta inteira.

Professor: — O motivo volta, assim, ao ponto inicial...

Carlos G.: — Mas, professor... A pintura, também, tem quatro *reflexões de 90°*.

Sublinhando a afirmação do Carlos G., que embora tenha traçado dois eixos de reflexão, está patente um conhecimento insuficiente ou aparente das transformações, ao misturar ideias próprias da rotação e da reflexão. Além disso, o Carlos G. observou, apenas, simetrias de eixo vertical e horizontal, parecendo existir uma certa dificuldade em identificar eixos diagonais, assinalados pela Inês (Figura 12).

Obra Quatro. A maioria dos alunos descreveu quatro simetrias de reflexão e, «pelo círculo pequeno do meio», outras tantas de rotação (figura 13).

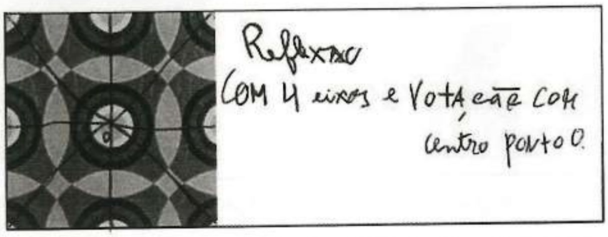


Figura 13.—Registos do Carlos C. [Reflexão e Rotação]

As rotações centradas em qualquer um dos «quadrados dobrados», como os chamaram os alunos, não foram exemplificadas. Alunos como o David e a Cheila mostraram que os «quadrados dobrados», bem como qualquer outro não polígono desenhado, sobrepunham-se através de translações (figura 14).

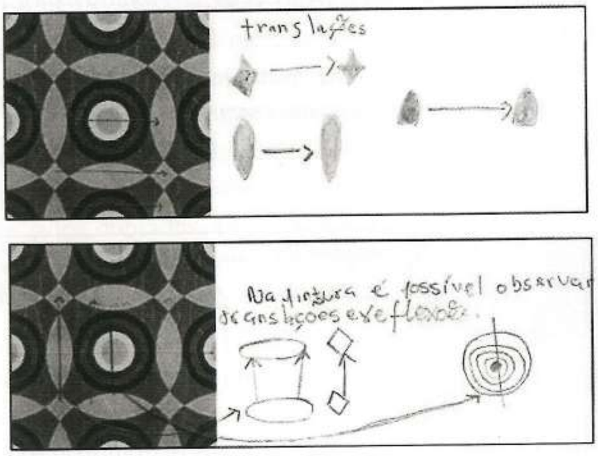


Figura 14.—Registos do David [Translação] e da Cheila [Translação e Reflexão]

Obra Cinco. A maioria dos alunos apontou quatro simetrias de rotação e de reflexão, no entanto, embora existam as quatro rotações, não existe qualquer simetria de reflexão, considerando o efeito cromático das cores. Revelaram alguma dificuldade em prever a sobreposição das figuras:

Hélder: — Há uma reflexão no eixo da diagonal... Os triângulos são iguais.

Andreia: — Só que as cores [dos triângulos] não são...

Hélder: — Na diagonal [as cores] ficam iguais...

Andreia: — Não ficam nada... Dá para ver pelos triângulos vermelhos e azuis... Os azuis ficam em cima dos vermelhos.

Hélder: — Mas, só esses... Os outros [triângulos] ficam todos iguais...

Professor: — Ficam? Achas, por exemplo, que os triângulos amarelos, ou a laranja, ficam iguais?

Hélder: — Sim!

Andreia: — Não! Nenhum fica...

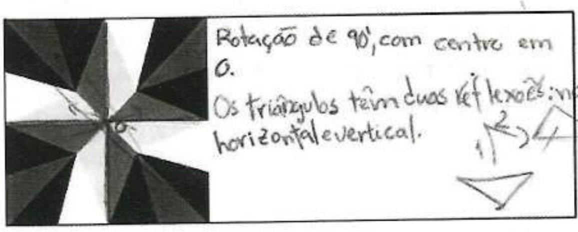


Figura 15.—Registos da Catarina [Rotação e Reflexão]

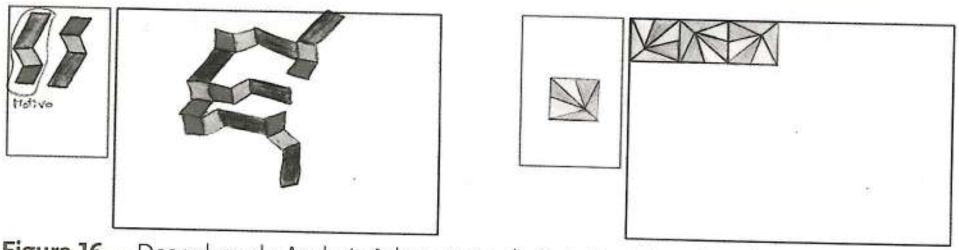


Figura 16.—Desenhos da Andreia [obra um] e da Catarina [obra cinco]

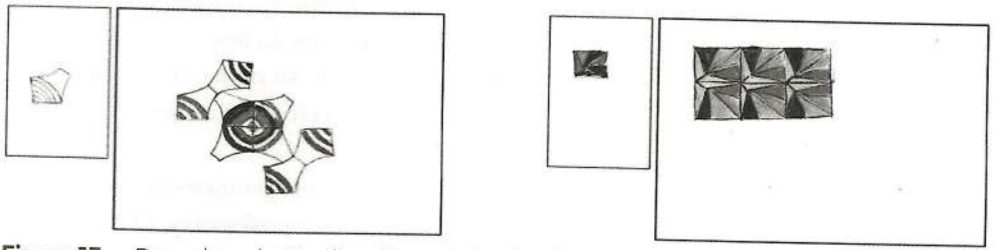


Figura 17.—Desenhos da Carolina [Rotação] e da Cheila [Translação]

Neste desacordo, que atesta a dificuldade na compreensão da posição dos objetos relativa a eixos de reflexão diagonais (Alves & Gomes, 2011), o Alexandre notou que os pares de triângulos geometricamente iguais trocavam de lugar, isto é, que, ao refletir o plano, cada triângulo mudava de posição com o seu par, pois onde devia ficar o triângulo azul fica o vermelho e onde devia estar o vermelho está o triângulo azul. Tal constatação levou a Catarina a uma outra descoberta:

Catarina: — Já sei! Fazemos duas reflexões...

Professor: — Duas reflexões?

Catarina: — Sim, porque... Como os triângulos [iguais] ficam trocados, dá para ficarem no lugar certo, se fizermos outra reflexão (figura 15).

Na impossibilidade de os fazer coincidir numa reflexão do plano, a Catarina demonstrou que os triângulos se sobrepunham na composição de duas reflexões, o que supõe experiência na visualização da transformação geométrica e sugere compreensão das dinâmicas de transformação do plano. Só a composição de duas reflexões é capaz de alterar a posição e inverter, uma e outra vez, a orientação dos objetos (Harris, 2000; Veloso, 2012).

Geometria dos alunos. Na realização do pensamento imaginativo, os alunos tentam representar algo de novo, refazendo as obras de modo criativo. Na *geometria dos alunos*, analisa-se as suas produções e a compreensão das isometrias, ou seja, se conseguem redesenhar as composições do pintor, reconstruindo novas abordagens na ocupação do espaço. Sobre os desenhos dos alunos sublinhamos o facto de terem optado, na sua grande maioria, pela reconstrução da *obra um* e da *obra cinco*, cujos motivos desenham figuras simples e com as quais conseguiriam concretizar as isometrias inseridas num esquema criativo.

A maioria dos alunos repetiu os motivos despreocupada em obedecer a uma qualquer simetria, porém consciente do aspeto global dos desenhos. Relativamente ao exemplo da Andreia (figura 16), há uma tentativa de *harmonia* na repetição dos motivos e uma intenção em construir uma figura, mais ou menos, equilibrada. No exemplo da Catarina (figura 16), constituindo um friso, existe uma compreensão da isometria, pois executa as sucessivas rotações de 90° do motivo da *obra cinco*.

Nos poucos desenhos que respeitaram um esquema simétrico, contam-se simetrias de rotação, sem considerar as diferenças cromáticas, e simetrias de translação (figura 17).

A *obra dois*, escolhida por três alunos, revelou uma maior inconsistência na recriação de isometrias, com exceção do Daniel, que apresenta três motivos em rotação (figura 18).

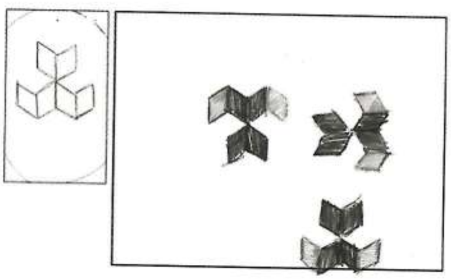


Figura 18.—Desenho do Daniel [Rotação]

O desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial dos alunos depende do tipo de experiências educativas (Breda *et al.*, 2012; Gomes, 2012). Neste sentido, o estudo realizado aponta para um conhecimento geométrico dos alunos muito centrado na perceção visual em detrimento da compreensão das propriedades matemáticas das figuras e das transformações geométricas, denotando um ensino da geometria baseado na representação figurativa sem conexão com as respetivas propriedades matemáticas, uma vez que os alunos chegaram a referir quadrados, em que os ângulos não eram retos, ou a traçar dois eixos de reflexão perpendiculares, designando-os erradamente como reflexões com ângulos de 90°. A identificação, interpretação e representação de transformações geométricas, através da manipulação da perceção física de um objeto e da operação com imagens (Rodrigues, 2011), permitiu que os alunos raciocinassem sobre as relações entre os objetos geométricos, de modo a explicar e resolver o problema com o qual se debateram, seguindo a sua própria compreensão geométrica das figuras e das transformações.

Considerações finais

Numa realidade que se pede um professor cada vez mais crítico, criativo, com um especial tato pedagógico e um sentido empreendedor único (Ponte, 1999), o estudo investigativo contribui para o cultivo de uma atitude interventiva e buscou tirar partido das muitas potencialidades de um ensino das transformações geométricas através da arte: uma interação benéfica entre o pensar, o sentir e o agir, que amplia as possibilidades de conhecimento dos alunos.

Analisando os esquemas criativos apresentados, os alunos conseguiram visualizar definições e conceitos geométricos. Os alunos demonstraram, inicialmente, um sentido espacial e geométrico mascarado por um acumular de significados e de fórmulas geométricas, prontas a serem usadas. Ao encararem as tarefas matemáticas propostas como problemas, os alunos testaram hipóteses e explicaram a forma como compreenderam a sua resolução. Os alunos começaram por tentar sobrepor cada figura, fazendo coincidir os objetos presentes nas obras com deslocamentos isolados, e terminaram a olhar para as obras como um todo.

Referências Bibliográficas

Alves, C. & Gomes, A. (2011). Uma avaliação diagnóstica sobre a perceção de relações espaciais. *In* Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Orgs.). *Atas do XXII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 345–358). Lisboa: APM.

Bastos, R. (2006). Notas sobre o ensino da geometria: simetrias. *Educação e Matemática*. N.° 88, 9–11.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H. & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *In* Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Orgs.). *Atas do XXIII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 233–244). Lisboa: APM.

Grimes, W. (2010). Nassos Daphnis, an artist of geometry, dies at 96. *New York Times*. Acedido de [http://www.nytimes.com/2010/12/13/arts/design/ 13daphnis.html] a [24/09/2014].

Harris, A. (2000). *Symmetry*. London: University of Cumbria.

Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*. Porto: Edições LIDEL.

Ponte, J. (1999). Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. *In* Tavares, J., Pereira, A., Pedro, A. & Sá, H. (Orgs.). *Atas do IV congresso da sociedade portuguesa de ciências da educação* (Vol. I, pp. 59–72). Porto: SPCE

Rodrigues, M. (2011). Ensino e aprendizagem da geometria. *In* Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Orgs.). *Atas do XXII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 339–344). Lisboa: APM.

Tavares, G. (2013). *Atlas do corpo e da imaginação*. Lisboa: Editorial Caminho.

Veloso, E. (2012). *Simetrias e transformações geométricas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Diogo Batista, António Guerreiro e António Lopes
Escola Superior de Educação e Comunicação,
Universidade do Algarve

A utilização da calculadora gráfica no currículo do Ensino Básico: uma experiência no 8.º ano

LUÍSA LOPES, ANTÓNIO DOMINGOS

A implementação das tecnologias no ensino da matemática tem merecido especial importância ao longo dos tempos. Nos últimos anos os currículos de Matemática têm sido alvo de modificações várias, refletindo decisões baseadas na investigação educacional realizada ou convicções pouco informadas da forma como se desenvolve o processo de ensino e aprendizagem, bem como da realidade escolar com que os professores são confrontados no seu dia a dia.

A calculadora gráfica foi introduzida como um recurso importante no Ensino Secundário desde a implementação do Programa Ajustado de Matemática, e o seu uso continuou a ser considerado indispensável, no Programa de Matemática A. No Ensino Básico também é recomendada a utilização da calculadora nomeadamente na resolução de problemas e na exploração de situações. Embora sejam referidas as calculadoras, não é explícito, neste ciclo de ensino, o uso da calculadora gráfica, no entanto, documentação oficial do Ministério da Educação e Ciência (IAVE) divulga informação relativa à Prova Final do 3.º Ciclo onde são mencionadas as características das calculadoras passíveis de serem utilizadas nas provas finais do Ensino Básico: «Calculadora — aquela com que trabalha habitualmente (gráfica ou não)».

Ao contrário do que se tem verificado para o Ensino Secundário, até ao momento, pouca investigação tem sido realizada de modo a compreender como é que a calculadora gráfica pode ser integrada na aprendizagem da Matemática ao nível do 3.º ciclo do Ensino Básico. Neste espaço pretendemos dar conta de uma experiência realizada numa turma do 8.º ano com recurso à calculadora gráfica *TI-Nspire* da Texas Instruments, no estudo do tópico relativo às Funções e Sistemas de Equações. Considera-se pertinente compreender como os alunos se apropriam desta ferramenta, de que modo a utilizam na execução de determinadas tarefas e qual a influência que esta pode ter na qualidade das aprendizagens realizadas.

Na experiência de ensino realizada os alunos da turma trabalharam pela primeira vez com a calculadora gráfica, tendo a professora recorrido a uma aula para a familiarização destes com o artefacto e apresentado exemplos de novas abordagens sempre que tal se tornou necessário. Todos os alunos tinham acesso a uma calculadora, embora por vezes a tivessem partilhado no trabalho em pequenos grupos. A apropriação da ferramenta revelou-se um processo rápido que se desenvolve na interação com a professora e entre os próprios alunos, sendo evidente que à medida que os alunos vão realizando as tarefas propostas o foco vai sendo dirigido para os processos matemáticos em detrimento dos aspectos técnicos envolvidos no manuseamento da máquina.

Apresentamos de seguida uma descrição de algumas das tarefas que foram propostas aos alunos (de entre um conjunto mais vasto de tarefas usadas na aula), onde a calculadora gráfica poderia ser usada a par dos restantes artefactos disponíveis (papel e lápis, manual, etc.). As três tarefas aqui analisadas procuram essencialmente evidenciar como os alunos se apropriaram da calculadora gráfica e de que modo a usaram na resolução das diferentes questões. Cada uma destas tarefas estava integrada num conjunto mais vasto de tarefas, que se dividiam em três grupos, tendo-se escolhido uma de cada grupo (Lopes, 2014). Desta forma podemos observar o desempenho dos alunos em três momentos diferentes do estudo, um inicial, um intermédio e o terceiro no final.

1. O Francisco quer instalar internet em sua casa e, por isso, consultou o preço de três empresas:
   - **Empresa A:** cobra uma mensalidade fixa de 30 euros.
   - **Empresa B:** cobra uma tarifa mensal de 5 euros com um acréscimo de 2 euros por cada hora de utilização.
   - **Empresa C:** cobra 3 euros por cada hora de utilização.

O Francisco fez uma estimativa do tempo que utilizaria a internet por mês e verificou que seriam cerca de 20 horas.

a) **Completa** a tabela, considerando o tarifário de cada uma das empresas.

		TEMPO (horas)				
		0	5	10	15	20
EMPRESA	A					
	B					
	C					

b) Qual o preço a pagar pelo Francisco, se pretender utilizar a internet durante 10 horas e meia, optando pela empresa A? E se optar pela empresa B? E pela empresa C?

c) Sabendo que o Francisco só tem 12 euros disponíveis para a utilização de internet, qual das empresas aconselharias?

d) **Escreve** uma expressão algébrica que represente cada uma das funções.

e) **Constrói**, no mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos representativos das mensalidades a pagar para cada uma das empresas.

f) Numa pequena composição, **explica** qual a empresa que disponibiliza as melhores condições.

Figura 1.—Problema do 1.° conjunto de tarefas

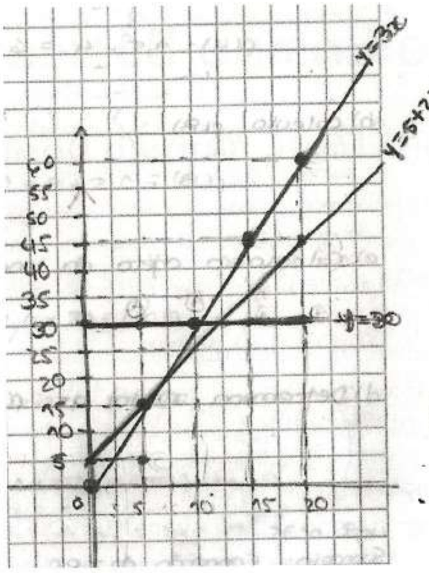


Figura 2.—Resposta do José à questão e) do 1.° conjunto de tarefas, sem recurso à calculadora gráfica

A primeira das tarefas foi adaptada do manual usado pelos alunos e centrava-se na resolução do problema real apresentado na figura 1.

Após indicação da metodologia de trabalho, em grupo, e distribuição da tarefa, os alunos começaram a sua leitura e resolução. Sem demonstrarem dificuldade, resolveram analiticamente as alíneas a), b), c) e d).

Para dar resposta à alínea e) os alunos realizaram em primeiro lugar a resolução com recurso ao lápis e papel de forma individual (caso do José na figura 2) e de seguida confirmaram a sua resolução através da calculadora gráfica (figura 3). A resposta à alínea f) foi fornecida a partir da análise desta última representação.

Na resolução desta tarefa os alunos encontravam-se ainda numa fase de conhecimento e apropriação da calculadora gráfica pelo que este artefacto só foi utilizado após a resolução analítica e representação gráfica em papel, essencialmente para confirmar resultados. É desta forma que os alunos vão dando significado à representação gráfica apresentada pela máquina. Rapidamente eles notam que o gráfico deixou de assumir uma forma estática e que é possível dar respostas a um conjunto mais vasto de questões (que vão para além do enunciado da tarefa) a partir da manipulação gráfica na calculadora.

A segunda tarefa, retirada do manual de Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11.° ano — Texto Editora (Longo & Branco, 2011), é de natureza aberta e considerada uma tarefa de investigação devido ao elevado desafio que apresenta, para alunos do 8.° ano de escolaridade (figura 4). Esta tarefa foi aplicada numa fase em que os alunos já dominavam o uso da calculadora de forma eficiente e a escolha da abordagem à tarefa foi feita por estes de modo autónomo.

Na resposta à alínea a) os alunos recorreram à observação dos dados da tabela, tendo respondido corretamente.

Para responder às alíneas b) e c) foi utilizada a calculadora gráfica sendo solicitado aos alunos que descrevessem os procedimentos que iriam utilizar. Nesse sentido eles elaboraram um pequeno relatório, como mostra o exemplo da resposta da Ana, (figura 5) onde são explicadas as várias etapas:

A abordagem apresentada na figura 5 ilustra a forma como os alunos nesta fase são capazes de recorrer à calculadora manipulando e encadeando diferentes representações do mesmo conceito. A sugestão da tarefa no sentido

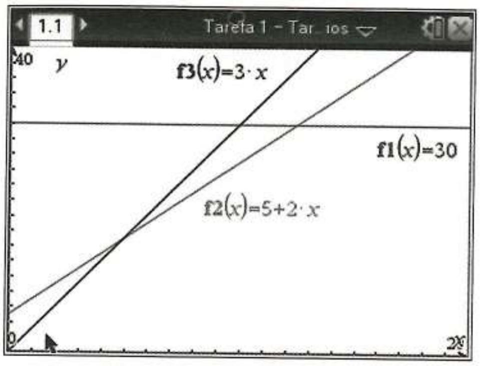


Figura 3.—Resposta do José à questão e) do 1.º conjunto de tarefas, com recurso à calculadora gráfica

Tarefa 4

Na tabela seguinte registou-se a contagem mensal do número de animais de uma certa espécie, existentes numa área reservada desde a sua criação:

Número de meses decorridos desde a criação da área reservada (x)	Número de animais existentes na área reservada (y)
0	10
1	12
2	13
3	16
4	18
5	24
6	25
7	30
8	36
9	42
10	45
11	50
12	54

a) **De acordo com a tabela, durante quanto tempo foi feita a recolha de dados?**

b) **Represente os dados da tabela através de uma nuvem de pontos.**

c) **Com o auxílio da calculadora gráfica, determine o modelo de regressão linear, de equação $y = ax + b$, que se ajuste à nuvem de pontos da alínea anterior. Indique os valores de *a* e *b* com aproximação às centésimas.**

d) **Segundo o modelo determinado, qual é a previsão para o número de animais existentes na reserva ao fim de 2 anos?**

Retirado do manual de Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11º ano- Texto Editora

Figura 4.—Tarefa 4 do 2.º conjunto de tarefas

de traçar a reta de regressão prendeu-se com o facto de a procura do melhor modelo ser ainda uma tarefa morosa, se realizada por processos algébricos. Ainda assim os alunos conseguiram interpretar o facto de a reta de regressão ser um bom modelo para descrever os dados apresentados e usaram com destreza o modelo na calculadora para fazer a previsão solicitada. O facto de o modelo não passar por todos os pontos colocou os alunos numa situação de aprendizagem complexa mas que foi rapidamente compreendida a partir das explicações solicitadas aos próprios alunos, mediadas pela professora. O uso da calculadora permitiu assim a exploração de tarefas que envolveram uma varieda-

abrimos a página de excell e passamos os valores
da tabela pela página. Abrimos uma página de dados e esta-
tistica e identificamos as variaveis, como na horizontal x
e na vertical y e obtivemos o grafico e fomos ao menu e
depois ao analisar e no fim regressão linear (y=mx+b)
e depois apareceu a função.

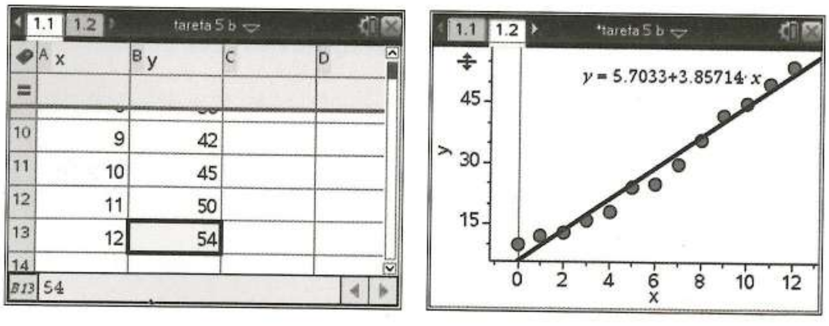


Figura 5.—Resposta da Ana às alíneas b) e c) da tarefa 4 do 2.º conjunto de tarefas

Tarefa 4

a) Considera dois pontos de uma determinada reta (reta r).

b) Considera a reta que passa por esses dois pontos e escreve a expressão analítica que define essa reta.

c) Considera dois pontos para outra determinada reta (reta s).

d) Considera a reta que passa por esses dois pontos e escreve a expressão analítica dessa reta.

e) Escreve o sistema de duas equações a duas incógnitas que essas duas retas sugerem.

f) Qual a solução do sistema formado pelas reta que encontraste nas alíneas anteriores.

Figura 6.—Tarefa 4 do 3.º conjunto de tarefas

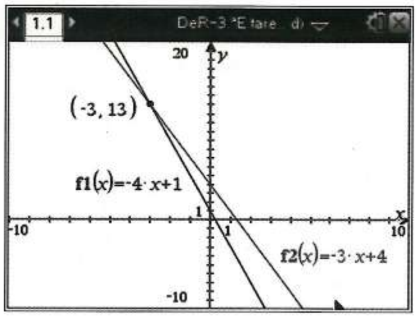


Figura 7.—Resposta da Maria à alínea f) da tarefa 4 do 3.º conjunto de tarefas

de de conceitos em simultâneo apelando a um pensamento complexo.

A terceira tarefa aqui apresentada (figura 6) é da autoria da professora e procura sistematizar os conhecimentos dos alunos relativamente ao tema em estudo. A tarefa foi apresentada na fase final do estudo do tópico curricular e pretendia-se aferir sobre as aprendizagens realizadas e a destreza no uso da calculadora.

A tarefa poderia ser realizada por processos algébricos ou gráficos, no entanto os alunos optaram pela utilização de uma metodologia mista. A partir das coordenadas de dois pontos conseguiram chegar por processos algébricos à equação da reta sem dificuldades. Depois de representarem cada uma das retas pela sua expressão analítica equacionaram o sistema pedido.

Para responder à última alínea os alunos optaram pela resolução gráfica do sistema (figura 7) manuseando a calculadora e os diferentes menus com destreza e de forma assertiva.

Embora esta tarefa apresentasse um grau de dificuldade elevado os alunos mostraram ser capazes de lidar com diferentes conceitos e diferentes representações desses mesmos conceitos, quer na sua forma gráfica quer algébrica.

A partir do trabalho realizado pode constatar-se que os alunos são capazes de utilizar diferentes representações no trabalho com Funções e Sistemas de Equações quando são colocados em ambientes de aprendizagem potenciados pela tecnologia. Recorrem frequentemente à calculadora gráfica sobretudo na resolução de tarefas que envolvem a representação gráfica. O recurso a esta ferramenta não invalidou a resolução analítica mas antes permitiu aos alunos a representação de um maior número de gráficos em menos tempo, disponibilizando-os assim para a análise de outras situações, o que pode tornar-se vantajoso no seu processo de aprendizagem. Além disso permitiu-lhes o contacto com situações próximas da modelação matemática, o que não seria possível sem este artefacto.

O papel da professora revelou-se de extrema importância em todo o processo. Utilizou frequentemente a calculadora gráfica e explorou diversas situações, deixando, propositadamente, outras ao cuidado dos alunos. O desenvolvimento deste ambiente de aprendizagem mostra-nos que é possível utilizar de forma eficiente a calculadora gráfica no Ensino Básico, proporcionando aos alunos ambientes de aprendizagem mais ricos e motivantes, possibilitando uma aprendizagem efetiva dos conceitos e potenciando as competências algébricas e gráficas dos alunos quando lidam com as diferentes representações dos conceitos.

Referências

Lopes, L. (2014). *Aprendizagem das funções e sistemas de equações no 8.º ano com recurso à calculadora gráfica*. Tese de mestrado não publicada. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Longo, E., & Branco, I. (2011). *Matemática Aplicada às Ciências Sociais — 11.º Ano*. Lisboa: Texto Editores.

Pereira, P., & Pimenta, P. (2011). *Xis 8 Matemática* (Vol. I). Lisboa: Texto.

Luísa Lopes
Escola Secundária Sebastião e Silva

António Domingos
Departamento de Matemática da FCTUNL / UIED

APM – 2015

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2015

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento (@-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	60,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	60,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	80,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	75,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	100,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2015

		Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Instituições	Portugal	47,00 €	28,00 €
	Estrangeiro		32,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções