Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2014

130

Novembro ∞ Dezembro

Preço 7,80€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Lina Brunheira
Subdiretora Helena Rocha
Redação António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Irene Segurado
Isabel Rocha
Manuela Pires
Paulo Alvega
Rita Mestre
Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2014
Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Dezembro 2014
Tiragem 1700 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
ASPRINT, Apolinário Silva, Unipessoal Lda
Núcleo Empresarial de Mafra
Av. Dr. Francisco Sá Carneiro, Bloco C – 12 cave
2644–006 Mafra

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre este número temático

A revista temática de 2014 incide sobre a Resolução de Problemas, um tema clássico da matemática e da didática desta área que, na opinião da Redação da *Educação e Matemática*, continua a merecer toda a atenção. Quando há um ano atrás escolhemos o tema, imediatamente pensámos em alguém para editar este número: Henrique Guimarães. Para nossa felicidade, o Henrique aceitou o convite e conduziu o trabalho com todo o cuidado, reflexão e conhecimento que imprime em tudo em que se envolve, mas também com o especial carinho que sabemos ter por esta revista que ajudou a fundar e onde foi redator entre 1987 e 2001. Além da qualidade do trabalho que esperamos ver reconhecida pelo leitor, fica o prazer e o enriquecimento da equipa que trabalhou com o Henrique. Foi muito bom tê-lo de volta. Muito obrigada Henrique!

Sobre a capa

Na capa deste número podemos ver uma fotografia dos físicos Wolgang Pauli e Neils Bohr observam o movimento giratório de um pião. Nesta revista dedicada à resolução de problemas a imagem parece capturar perfeitamente a atmosfera mágica associada à compreensão de factos novos.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Alice Rocha, Helena Fonseca, Hélia Jacinto, Isabel Oitavem, Jeremy Kilpatrick, Lina Fonseca, Marta Procópio, Pedro Almeida, Reinhard Kahle e Susana Carreira.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista. Por opção do editor e/ou autores, alguns artigos não obedecem às regras do novo acordo ortográfico.

É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino. (J. Sebastião e Silva: Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 7.º ano, Lisboa: ME (1965-66). As citações usadas são retiradas deste guia e do que Sebastião e Silva também elaborou para o então 6.º ano dos liceus (1964))

Resolução de problemas, pois claro

Sebastião e Silva (1914-1972) combatia «a obsessão do exercício» e o seu carácter rotineiro e resolução mecânica que, como dizia, só contribuíam para a completa adulteração da finalidade do ensino da Matemática, «habituando o aluno a não pensar e destruindo nele toda a iniciativa e toda a espontaneidade para a resolução de problemas essencialmente novos, como os que são postos a cada passo pela ciência, pela técnica e pela vida corrente» .

O projecto de modernização do ensino da Matemática que S. e Silva preparou e dirigiu, em meados da década de 60 do século passado, assentava em duas ideias para o ensino da Matemática — a valorização do papel do aluno na aprendizagem e a aprendizagem com compreensão. Defendendo que era necessário «mudar os programas», actualizando os conteúdos matemáticos a ensinar, mas também «mudar os métodos» do ensino que se praticava, em que «o papel dos alunos era quase cem por cento passivo», S. e Silva sustentava o «método activo» e a «aprendizagem por descoberta», sublinhando a importância de o aluno conseguir «ele próprio, *sem ajuda* (sublinhado no original), resolver exercícios pela primeira vez». Estava aqui a referir-se à resolução de exercícios não rotineiros, com características de um «problema novo» que pode proporcionar o «momento áureo de alegria que o aluno precisa de conhecer alguma vez». E, repare-se, no que S. e Silva acrescenta: «só por essa via se entra no segredo da matemática, se descobrem os seus tesouros».

Resolução de problemas, pois claro.

Manjul Bhargava, matemático recém laureado com a medalha Fields, numa entrevista a propósito desta distinção, quando lhe pediram três sugestões que daria aos professores indianos «para criar interesse pela Matemática nas aulas, especialmente nos alunos que receiam a disciplina», respondeu:

«Os problemas de Matemática devem ser motivados não apenas recorrendo às ciências, mas também através das artes: puzzles, brinquedos, magia, poesia, música — tudo isto deve ser um elemento essencial na aula de Matemática;
Os alunos não devem ser ensinados a resolver problemas de um modo mecânico; devem, em vez disso, ser orientados para descobrir por si próprios ideias matemáticas importantes. A Matemática deve ser um processo de descoberta criativo e estimulante.
A Matemática deve ser interactiva e colaborativa. Os alunos devem ser encorajados a descobrir coisas em conjunto e a trabalhar em conjunto.
É assim na investigação matemática, e isto deve reflectir-se na aulas de Matemática.»

E este número *Educação e Matemática* é um número temático sobre a Resolução de Problemas. Na verdade, não é o primeiro sobre o tema. Há já mais de 25 anos, o número 8 a ele inteiramente se dedicou, sem que todavia se assumisse como número temático. Desde então, e mesmo desde antes, a resolução de problemas teve sempre uma presença regular na Revista.

Abrimos desta vez com uma «conversa escrita» com Jeremy Kilpatrick que nos dá interessantes testemunhos e em que partilha as suas ideias e perspectivas sobre inúmeros e diversos aspectos da resolução de problemas — na matemática, no currículo, na aula e na formação de professores. Seguem-se textos com origem e natureza muito variada, em artigos e nas secções habituais, especialmente concebidas para este número — problemas para resolver, problemas em Geometria, a tecnologia na resolução de problemas e, destaco em particular, o interessante texto de George Pólya, na secção *Para este número seleccionámos*.

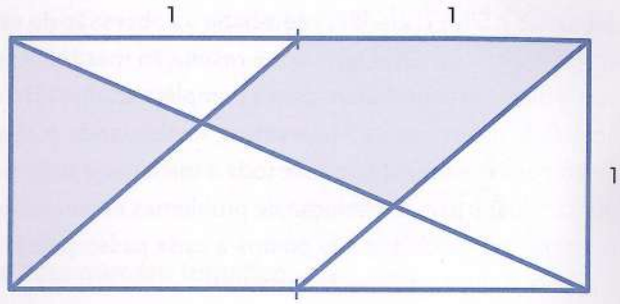
A sequência com que os textos são apresentados digamos que caminha de textos sobre a resolução de problemas na matemática e no seu ensino — a avaliação do PISA 2012, o «regresso ao passado» nos programas de 2013, e dois textos sobre os problemas de Hilbert — para textos sobre experiência com a resolução de problemas. Destaco aqui a entrevista a três professoras em que, num registo muito pessoal e directo, nos proporcionam os seus pontos de vista sobre o tema em discussão e testemunhos vívidos da realidade de hoje nas aulas de Matemática. Destaco também o artigo *A Lua aqui tão perto...* que a secção dos *Materiais* acompanha — interessante revisitar de um dos primeiros problemas discutidos na *Educação e Matemática*, numa evocação de Paulo Abrantes que muito se interessou pela resolução de problemas. Mas há ainda a questão da formulação de problemas — todos sabemos que «Os problemas não caem do céu» — e de como, fora de aula, a resolução de problemas pode ser trabalhada. Fechamos com um olhar retrospectivo selectivo sobre o que de resolução de problemas tem aparecido nas páginas da nossa Revista.

A experiência matemática, como qualquer outra experiência aliás, não se transmite. Cabe-nos como professores proporcionar condições para que os nossos alunos vivam, adquiram, desenvolvam essa experiência. Para que resolvam problemas, pois claro.

Um problema no problema

A professora Teresa projetou no quadro o seguinte enunciado:

Qual é a área da zona sombreada desta figura?



Depois, disse aos seus alunos:

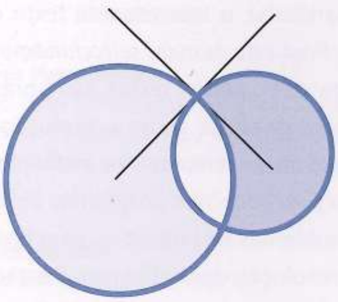
— Quero que cada um de vocês resolva este problema por dois métodos diferentes.

Podem os leitores da *Educação e Matemática* ajudar estes alunos com duas maneiras distintas de chegar à solução?

(Respostas até 20 de fevereiro para zepaulo46@gmail.com)

DIFERENÇA DE ÁREAS

O problema proposto no número 128 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:



Desenhámos dois círculos, respetivamente de áreas 17 e 8 cm², de tal modo que as suas tangentes num ponto de interseção são perpendiculares entre si.

Qual é a diferença entre as áreas das duas regiões que não se sobrepõem (a sombreado na figura)?

Recebemos nove respostas: Alberto Canelas (Queluz), Catarina Ferreira (Viseu), José Luís Freitas (Funchal), Carlos Dias, Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Inês & Luís Bernardino, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e de um grupo de quatro professores de Paião: Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

Demos a palavra à Catarina:

Depois de analisar o problema, tirar conclusões sobre as relações entre os ângulos ao centro e de descobrir as áreas dos segmentos circulares em função de um dos ângulos ao centro, verifiquei que a diferença entre as áreas não depende da área branca e que existe uma resolução muito mais simples.

Pois é verdade. A perpendicularidade das tangentes estava lá só para dar um «ar difícil» ao problema... Se não nos deixarmos distrair por isso, encontramos uma maneira curta e fácil de chegar à solução.

Vejamos então esse processo. Na figura, estão definidas três áreas: $A_{\text{sombreada clara}}$, $A_{\text{sombreada escura}}$ e A_{branca}.

Temos:

$A_{\text{sombreada clara}} = 17 - A_{\text{branca}}$

$A_{\text{sombreada escura}} = 8 - A_{\text{branca}}$

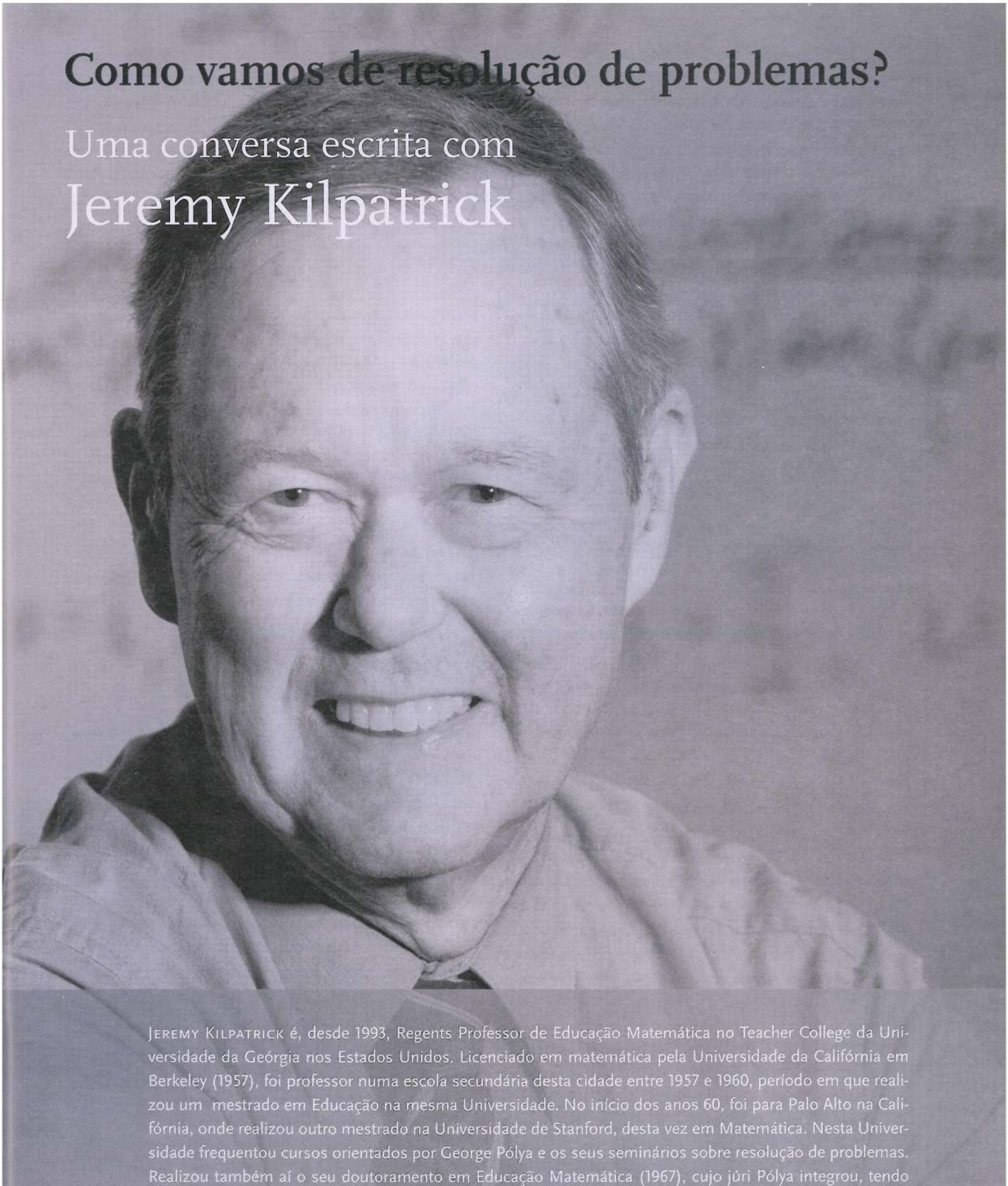
$A_{\text{sombreada clara}} - A_{\text{sombreada escura}} = (17 - A_{\text{branca}}) - (8 - A_{\text{branca}}) = 9$

R: A diferença entre as áreas das duas regiões pedidas é 9 cm².

Note-se que, para além da Catarina e só pelo prazer da matemática, também o Alberto, o Carlos, a Graça, o Pedrosa e o Zé Luís calcularam a área da intersecção dos dois círculos, que é de ≅2,010 cm².

Como vamos de resolução de problemas?

Uma conversa escrita com Jeremy Kilpatrick



Jeremy Kilpatrick é, desde 1993, Regents Professor de Educação Matemática no Teacher College da Universidade da Geórgia nos Estados Unidos. Licenciado em matemática pela Universidade da Califórnia em Berkeley (1957), foi professor numa escola secundária desta cidade entre 1957 e 1960, período em que realizou um mestrado em Educação na mesma Universidade. No início dos anos 60, foi para Palo Alto na Califórnia, onde realizou outro mestrado na Universidade de Stanford, desta vez em Matemática. Nesta Universidade frequentou cursos orientados por George Pólya e os seus seminários sobre resolução de problemas. Realizou também aí o seu doutoramento em Educação Matemática (1967), cujo júri Pólya integrou, tendo sido nestes anos que Kilpatrick acompanhou Pólya como seu assistente.

Como professor e investigador, Jeremy Kilpatrick tem-se interessado por uma grande variedade de temas e questões da educação matemática, sendo de destacar aqui a sua grande produção como autor e co-autor de inúmeros livros, artigos e outros textos sobre temas do currículo e desenvolvimento curricular em matemática, e, em particular, sobre a resolução de problemas.

Jeremy Kilpatrick é uma figura de grande notoriedade na comunidade internacional de educação matemática. Recebeu em 2007 a prestigiada Medalha Felix Klein atribuída pelo ICMI pelos elevados serviços prestados à Educação Matemática, tendo sido antes homenageado com o prémio do NCTM de 2003 para Serviços Distintos nesta mesma área.

Importa ainda dizer que Jeremy Kilpatrick tem visitado com alguma frequência o nosso país — nos anos mais recentes, participou em 2008 no ProfMat de Elvas e no SIEM em Badajoz — e colaborou já anteriormente com a Educação e Matemática.

O texto que a seguir se publica é um depoimento escrito que Jeremy Kilpatrick gentilmente se prontificou elaborar, expressamente para este número a Educação e Matemática. Trata-se da tradução de integral desse depoimento, em que Kilpatrick, na resposta às questões que lhe foram colocadas, nos dá a sua visão, ideias e perspectivas, sobre a Resolução de Problemas, em particular no que se refere à sua relação com a matemática-ciência, ao seu lugar e papel no currículo de Matemática, ao seu lugar e papel nas aulas desta disciplina.

Henrique Manuel Guimarães

A resolução de problemas e a matemática

Henrique Guimarães: Jeremy, antes do seu doutoramento em educação matemática na Universidade de Stanford, realizou um mestrado em matemática, igualmente em Stanford e, alguns antes, em Berkeley, na Universidade da Califórnia, concluiu a licenciatura, também em matemática. Tudo isto foi já há muitos anos, mas diga-me lá: pode contar-nos o que hoje reconhece como relevante, do ponto de vista matemático, na sua experiência com a matemática durante todos esses anos?

Jeremy Kilpatrick: Foi há mais de 50 anos que realizei o meu mestrado em matemática. Passei da matemática para a educação matemática, para fazer o doutoramento, em parte porque a pessoa que veio a ser o meu orientador, Ed Beegle,[1] tinha acabado de mudar da Universidade de Yale para a de Stanford, mas também porque que o estudo em matemática pura, na minha licenciatura, me estava a afastar demasiado da matemática escolar que era o meu interesse principal.

Da matemática da minha licenciatura, foram as disciplinas de Lógica e Fundamentos da matemática as que mais me atraíram, provavelmente porque conseguia ver facilmente como elas entravam nas reformas que estavam a ser propostas na época, para a matemática escolar — a Matemática Moderna. Estava também interessado na Teoria de Números e em Geometria elementar porque George Pólya,[2] de que fui assistente e que mais tarde fez parte do júri do meu doutoramento, costumava dizer que esses assuntos eram muito bons para o ensino da resolução de problemas, pois os alunos não necessitavam de muitas bases matemáticas para conseguirem resolver problemas sofisticados não rotineiros, e mesmo problemas ainda não resolvidos. Assim, pensei que seria bom prosseguir com esses assuntos como parte dos meus estudos em educação matemática, em vez de os estudar apenas em matemática.

HG: Que palavras usaria para descrever a actividade matemática? Em sua opinião, de que modo a actividade matemática pode ser melhor caracterizada? Acha que há alguma peculiaridade importante da actividade matemática quando a comparamos com outro tipo de actividade científica? Pensa que há alguma dissemelhança ou diferença profunda entre o que os matemáticos e os outros cientistas fazem? E encontra algumas semelhanças?

JK: A actividade matemática partilha com outras actividades científicas uma atenção à investigação, ao arriscar palpites e a tentativa e erro, o recurso à indução, à elaboração de conjecturas informais e à experimentação. Muitos dos métodos heurísticos identificados por Pólya aplicam-se também a outras ciências do mesmo modo que se aplicam à matemática. O que distingue a matemática é que, na sua investigação, ela prossegue dando atenção aos métodos dedutivos. A matemática faz uso do raciocínio dedutivo — a demonstração dedutiva em particular — de um modo que as outras ciências não fazem. Os cientistas nunca podem ter a certeza que as generalizações que realizam se manterão válidas à medida que a ciência avança, enquanto que a matemática, pressupondo que não há falhas, pode ter a certeza que as suas demonstrações permanecerão válidas indefinidamente.

HG: No que se refere aos problemas matemáticos e à resolução de problemas, como descreve o seu papel na matemática e na actividade matemática? O que acha da afirmação muito conhecida de Halmos[3] que os problemas são «o coração da matemática».[4]

JK: Eu estou muito de acordo com a alegação que os problemas são o coração da matemática. Formular e resolver problemas são, não apenas o motor que impulsiona a matemática, são igualmente o principal meio de ensino e aprendizagem da matemática. Nem todo o ensino e aprendizagem da matemática pode fazer uso de problemas mas, frequentemente, é possível fazer muito mais com os problemas do que habitualmente se faz.

HG: Consegue descrever algumas características particulares, ou identificar alguns requisitos específicos que um problema matemático deve possuir?

JK: Os problemas matemáticos podem assumir diversas formas no ensino. Tal como Pólya fez notar, (Pólya, 1945, p. 158; 1966, pp. 126–127) no ensino da Matemática há lugar, quer para problemas rotineiros, quer para problemas não rotineiros.[5] O que é importante é assegurar que nem todos os problemas apresentados aos alunos sejam problemas rotineiros. Assim, os professores devem acautelar que são propostos aos alunos — ou que lhes é pedido que formulem — problemas que não seguem um padrão que já conhecem e que por isso não lhes colocam nenhum desafio. Os alunos devem ganhar experiência na formulação de problemas para que possam ver que num problema — como Pólya assinalou — existe a *incógnita*, existem os *dados* e a *condição*. Identificar estes aspectos num problema é parte da compreensão do que é que o problema pede, e do início das tentativas da cada um para o resolver.

A resolução de problemas no currículo de Matemática

HG: O seu artigo com George Stanic,[6] sobre perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática, começa dizendo-nos que os problemas ocuparam sempre um lugar central no currículo escolar desde tempos antigos, mas que a resolução de problemas não. Desde então, depois da *Agenda for Action* do NCTM (1980), dos primeiros *Standards* do NCTM (1989) e dos *Principles and Standards* também do NCTM (2000), e de muitos outros documentos de orientação curricular nos EUA e em muitos outros países, como vê a evolução do currículo Matemática no que diz respeito à resolução de problemas ao longo de todos estes anos?

Que apreciação faz dessa evolução? Como vamos hoje, no que se refere à resolução de problemas no currículo de Matemática?

JK: No início do movimento para fazer com que a resolução de problemas ocupasse um lugar central no currículo, escrevi um texto para a revista *Arithmetic Teacher* (Kilpatrick, 1981) onde me lamentava, não a propósito da escolha de resolução de problemas como um aspecto central do nosso ensino, mas pelo facto do modo como ela estava a ser tratada, pouco mais do que um chavão relativamente vazio. No caso, referia-me a *An Agenda for Action*, mas o meu lamento aplica-se também a outros casos:

> Na medida em que *An Agenda for Action* não especifica o que se que dizer com *resolução de problemas*, não situa os seus pontos de vista num contexto histórico, e falha na identificação de práticas correntes que possam ser exemplo, ela perpetua o uso de *resolução de problemas* como um recipiente vazio que podemos encher com os nossos próprios significados. (Kilpatrick, 1981, p. 2)

Há pouca dúvida de que o currículo de Matemática, pelo menos nos Estados Unidos, vem dando mais atenção aos problemas nas últimas décadas, mas é uma questão em aberto até que ponto essa atenção se generalizou na sala de aula de matemática típica. Ainda acontece muito que o professor proponha alguns problemas rotineiros, explique como cada um pode ser resolvido, proponha a seguir mais alguns problemas, e pense que assim incorporou a 'resolução de problemas' no seu ensino.

Parece haver uma propensão natural para tornar a resolução de problemas num mero procedimento. Vemos essa propensão no modo como a lista de questões e sugestões heurísticas de Pólya (1945) é tão frequentemente afixada nas paredes das salas de aula e se espera que seja entendida como uma receita a ser seguida sequencialmente. Parece que os professores de Matemática acham mais difícil apresentar e ilustrar os itens da lista de forma sugestiva, do que de forma prescritiva.

HG: Em seu entender, até que ponto e de que modo mudaram o lugar e o papel da resolução de problemas no currículo de Matemática, refiro-me ao currículo prescrito? Em que dimensões curriculares — conteúdos, finalidades e objectivos, orientações para o ensino — acha que se verificaram as mudanças mais sensíveis e profundas? E em quais dessas dimensões a resolução de problemas não é ainda considerada.

JK: Como eu procurei dizer, acho a resolução de problemas foi estabelecida em muitos países (pelo menos nos Estados Unidos) com um lugar e papel centrais nas finalidades e objectivos do currículo prescrito, mas que isso parece não ter acontecido tão claramente no currículo implementado. Toda a evidência que conheço, sugere que os professores de Matemática americanos ainda dão muito mais ênfase aos procedimentos, do que aos conceitos ou ao raciocínio. Isso não quer dizer que o conteúdo do currículo e as orientações para o ensino se tenham mantido inalterados pelos esforços na valorização da resolução de problemas, mas eu diria que estas dimensões têm sido muito menos afectadas do que as finalidades e os objectivos. Por exemplo, o currículo prescrito de Matemática só raramente foi reorganizado em torno de problemas em vez de em torno de tópicos matemáticos.

HG: Pode dar-nos alguma ideia sobre como a resolução de problemas é tratada nas principais orientações e propostas nos recentes *Common Core State Standards in Mathematics*[7] (CCSS-M) dos EUA?

JK: A resolução de problemas é bem tratada nos CCSS-M (NGACPB & CCSSO, 2010). Existem oito *standards* ditos de processo:

1. Compreender problemas e persistir na sua resolução
2. Raciocinar abstractamente e quantitativamente
3. Construir argumentos viáveis e criticar o raciocínio de outros
4. Elaborar modelos matemáticos
5. Utilizar estrategicamente instrumentos apropriados
6. Procurar ser preciso
7. Procurar estruturas e utilizá-las.
8. Procurar regularidades em raciocínios que se repetem e expressá-las (pp. 6–8)

A resolução de problemas está implícita em cada um destes *standards* e, no desenvolvimento de todos eles, excepto no caso do n.º 3, usa mesmo o termo *problema*. Os investigadores em educação matemática americanos ficaram particularmente satisfeitos com a inclusão do *standard* n.º 4. Estão optimistas que isso poderá ajudar o currículo de Matemática a mudar no sentido da utilização de problemas na modelação de situações extraídas, tanto da vida real, como da própria matemática. Os professores poderão assim proporcionar aos seus alunos oportunidades para formular e resolver problemas.

Nos chamados *standards* de conteúdo dos CCSS-M, que estão organizados por ano de escolaridade, desde o pré-escolar até ao 8.º ano, e por linhas temáticas para o conjunto dos restantes anos, o termo *problema* aparece repetidamente. Para estes anos é feita a seguinte observação:

> A modelação é melhor interpretada, não como uma colecção de tópicos isolados mas em conexão com os outros *standards*. Elaborar modelos matemáticos é um *standard* para a prática matemática, e *standards* de modelação específicos aparecem ao longo dos *standards* deste nível de escolaridade assinalados com uma estrela (✱). (NGACPB & CCSSO, 2010, p. 57)

É claro que resta saber até que ponto os professores dos Estados Unidos conseguirão incorporar bem no seu ensino as ideias dos CCSS-M.

HG: No ano passado, tivemos em Portugal um mudança abrupta e inesperada no programa de Matemática para o ensino básico que substituiu um programa que estava em aplicação apenas há três anos (ME-DGIDC, 2007). Neste programa, a resolução de problemas era explicitamente tratada e muito valorizada. O novo programa, pelo contrário, é muito parco e a este respeito e começa assim: «A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a selecção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais.» (MEC, 2013, p. 6) Quer comentar?

JK: Lamento dizer que, no que é dito nessa citação, parece fazer-se alguma coisa de que eu me queixava anteriormente: reduz a resolução de problemas ao seguir uma receita específica, sugerindo que os alunos precisam simplesmente de praticar, seguindo regras e procedimentos previamente aprendidos, e que, assim, ficarão preparados para resolver qualquer problema de matemática que encontrem.

Claro que eu não estou a par de todo o tratamento da resolução de problemas no novo programa português, mas fico decepcionado com a suposição que é aparentemente feita, de que o aluno recebe o problema como um texto, em vez de ter uma oportunidade de formular ou elaborar sobre ele por si mesmo. A julgar pelo breve trecho que apresentou, parece tratar-se de uma forma profundamente mecânica de tratar a resolução de problemas.

A resolução de problemas na aula

HG: A propósito da resolução de problemas na aula de Matemática, olhando para os anos 80, quais os principais aspectos mais conseguidos ou que pontos fortes destacaria, desde essa época? E que fraquezas ou aspectos menos conseguidos?

JK: Suponho que os aspectos mais conseguidos foram, como sugeri, o apoio da resolução de problemas por parte muitos investigadores em educação matemática em muitos documentos. Os professores de Matemática ficaram conscientes que deviam ter em atenção a resolução de problemas e, de acordo com a investigação, parecem estar a tentar fazer isso. Além do mais, editoras e grupos de professores têm vindo a produzir materiais — principalmente colecções de problemas — que podem ser utilizados no ensino. A internet tem multiplicado essas colecções, bem como ideias para aulas sobre resolução de problemas. Contudo, o ensino de Matemática parece não ter mudado o suficiente para que fazer com que a resolução de problemas e o seu desenvolvimento seja central nesse ensino. Um ponto fraco poderá ser o facto de alguns professores (e autores de manuais) terem concluído que a resolução de problemas pode ser tratada como uma unidade de ensino em separado, em vez de algo que permeia todo o ensino.

Uma outra fraqueza poderá ser o descurarmos a formulação de problemas como uma actividade de sala de aula. Uma das melhores maneiras de os alunos aprenderem a resolver problemas é através da formulação dos seus próprios problemas. Esta actividade pode ensinar-lhes o que diferencia um problema rotineiro de um problema não rotineiro, bem como o que é necessário para que um problema tenha solução. Mas, ensinar os alunos a formulação de problemas, raramente faz parte da matemática escolar.

HG: Em seu entender, quais são os principais constrangimentos ou dificuldades que os professores enfrentam na utilização da resolução de problemas para ensinar Matemática? Tem alguma ideia ou percepção de como se poderão ultrapassar essas dificuldades?

JK: Eu acho que a maioria dos professores têm muito pouca experiência, quer a resolver problemas, quer a ensinar os alunos a resolvê-los. Os alunos precisam ver exemplos do que é que é a resolução de problemas, mas os seus professores, muitas vezes, não têm preparação para exemplificar o processo. Pólya costumava dizer que o professor, diante dos seus alunos, precisa ser um actor, actuando como se não conhecesse o problema, e pensar em voz alta à medida que realiza os passos para a sua resolução.

Penso que poucas pessoas calculam quanto os alunos precisam de ver alguém a pensar em voz alta diante deles, enquanto trabalha um problema desafiante, tentando primeiro uma abordagem e depois outra, fazendo uma pergunta e depois outra. Somente com este exemplo, seguido de um diálogo com os alunos, eles conseguem aprender o valor das questões e sugestões heurísticas que Pólya identificou.

É claro que os alunos também necessitam de muitas oportunidades para usar essas perguntas e sugestões por si próprios. Não se pode, no entanto, esperar que eles aprendam a usar tais questões e sugestões gerais, sem terem oportunidades de as ver na prática.

HG: Acha que a resolução de problemas é ensinável? Em que medida? Existem algumas capacidades específicas que são necessárias para ser um bom *resolvedor* de problemas?

JK: Eu acho que não há qualquer dúvida: a resolução de problemas é ensinável. Uma vez escrevi um artigo que abordou a questão de saber se ensinar é ensinável (Kilpatrick, 1987b) e usaria a mesma argumentação para a resolução de problemas. Mas não é fácil. Como acabei de dizer, os alunos precisam de muitas, muitas oportunidades, tanto para ver as perguntas e sugestões heurísticas utilizadas na resolução de problemas desafiantes, como para praticar usando, eles próprios, essas perguntas e sugestões.

Penso que a quantidade dessas oportunidades foi lamentavelmente subestimada por alguns autores, que escrevem sobre a resolução de problemas, que alegaram que a heurística Pólya não pode ser ensinada. Pela minha experiência, os alunos não precisam de capacidades ou características específicas para aprenderem a resolver problemas. O que eles precisam é de sucesso na resolução de problemas e a confiança que daí resulta, podem adquiri-la de um professor que é sensível à necessidade que têm de serem bem sucedidos.

HG: George Pólya, no seu famoso livro *How to Solve It* de 1945, disse que os problemas rotineiros, por vezes mesmo muitos, como observou, são necessários no ensino da Matemática. No entanto, acrescentou que «fazer com que os alunos não resolvam problemas de outro tipo é indesculpável».[8] Tenho a certeza de que concorda com Pólya, pode falar-nos sobre quais os principais benefícios que os alunos podem retirar da resolução de problemas? Que tipo de contribuição a resolução de problemas pode dar ou favorecer relativamente ao desenvolvimento matemático e pessoal dos alunos?

JK: Já me referi há pouco ao que Pólya pensa sobre problemas não rotineiros, e você tem razão, eu concordo com ele. Devia ser óbvio que se os problemas de rotina são o único tipo de problemas com que os alunos se confrontam na aula de Matemática, eles vão deixar a escola sem a consciência do poder da matemática para lidar com o mundo, e sem preparação para a usar nas suas próprias vidas. Ao aprender a resolver problemas não rotineiros, os alunos podem ganhar confiança na sua capacidade de fazer matemática e não simplesmente absorvê-la. Um aluno em que toda a sua carreira escolar é gasta em aulas de Matemática, em que nunca são propostos problemas que o desafiam, sai dela com uma visão completamente estéril do que a matemática é e pode ser.

HG: Grosso modo e de uma forma muito simplista, eu acho que, em geral, os professores tendem a ver a resolução de problemas como tarefa muito exigente e difícil de realizar e de gerir em sala de aula. Que tipo de ganhos ou vantagens os professores podem obter da utilização da resolução de problemas para a tarefa de ensinar Matemática?

JK: Eu acho que você tem razão, os professores que têm uma noção razoável da resolução de problemas vêem-na como exigente e difícil, e estão certos. É assim. Mas deveriam igualmente ver que é muito gratificante para eles e para os seus alunos, se esses alunos aprenderem a resolver problemas matemáticos desafiantes. Se os professores pensarem — como eu penso — que a resolução de problemas é a essência da matemática, então, como é que podem deixar que ela não seja o centro do seu ensino?

HG: Jeremy, você foi aluno de Pólya na Universidade de Stanford e, muito cedo na sua carreira académica, foi seu assistente e colaborador. Quando estive consigo na Universidade da Geórgia há alguns anos atrás, disse-me que aquilo primeiramente o atraiu em Pólya, dizia respeito sobretudo à aprendizagem da matemática e de como fazer matemática. Pode dizer-nos o que mais o atraiu nas ideias de Pólya? Até que ponto e de que modo as ideias de Pólya contribuíram para as suas próprias ideias sobre a matemática, a resolução de problemas e a resolução de problemas no ensino da Matemática?

JK: Como penso ter-lhe dito nessa altura, a minha primeira atracção por Pólya veio através de *How to Solve It* que eu comprei e li antes de o ter visto ensinar. Acho que o que mais me atraiu foi a forma como ele expunha as ideias sobre a resolução de problemas, que eram fáceis de entender e faziam muito sentido. Os meus professores de Matemática do ensino secundário em nenhuma altura trataram a resolução de problemas, de modo que o livro fez-me perceber o que eu tinha andado a perder. Deve ser óbvio, a partir do que eu disse anteriormente, que as ideias de Pólya tiveram uma enorme influência na forma como eu vejo a matemática, a resolução de problemas e a resolução de problemas no ensino de Matemática.

Todos os esforços de Pólya para ajudar os professores e os alunos provém da visão de que nós compreendemos a matemática melhor quando a vemos nascer, quer seguindo os passos das descobertas históricas, quer envolvendo-nos nós próprios em descobertas. Ele queria que os alunos vissem a matemática em construção e não apenas o produto acabado. Via a matemática em elaboração como uma ciência indutiva, produzindo seus segredos através de palpites inteligentes, seguidos por cuidadosos testes, a que se seguiam outros palpites aperfeiçoados. Pólya usava repetidamente o poder do exemplo específico para iluminar (e, geralmente, para ajudar a estabelecer) a generalização. (Kilpatrick, 1987a, p. 300)

Pela minha parte, fiz o meu melhor para seguir, nas minhas aulas e trabalhos académicos, o exemplo que ele deu. Pólya tinha uma colecção maravilhosa de problemas que ele dava às suas turmas para resolver, muitos dos quais trabalhou connosco em aula, antes de nos deixar libertos para resolver outros problemas por nós próprios. As disciplinas que leccionava eram sempre um bom equilíbrio entre matemática, humor, problemas desafiantes, e observações positivas. Todos os seus alunos perceberam que ele os respeitava e queria que aprendessem tanta matemática quanta fossem capazes. Não tenho, no entanto, a certeza que todos tivessem dado conta do cuidado com que ele preparava cada uma das aulas e como ele as revia minuciosamente depois as ter leccionado.

HG: Também me disse na mesma altura que não tinha valorizado a forma como Pólya abordava o ensino de resolução de problemas até o ter visto ensinar. Pode desenvolver um pouco mais esta sua consideração, e partilhar connosco o que viu no ensino de Pólya que o fez mudar de apreciação?

JK: Pólya era cuidadoso no ensino de matemática que fazia, nunca avançava a um ritmo que nem todos os alunos pudessem acompanhar, ainda que nunca fosse tão lento que levasse a que nada de importante houvesse para ser discutido. Achei isso fascinante. Para além do mais, a vê-lo ensinar, aprendi que os alunos precisam de observar técnicas de resolução de problemas concretizadas por um professor que pensa em voz alta enquanto resolve um problema como nunca o tivesse visto ou resolvido antes. Depois do professor ter mostrado algo sobre como pensar no problema, pode, então, perguntar aos alunos qual poderia ser o passo seguinte na resolução. Dessa forma, os alunos envolvem-se no processo. Pólya «considerou que a imitação e prática são o principal meio através dos quais a resolução de problemas é aprendida». (Kilpatrick, 1987a, p. 300)

Assim que me tornei assistente de Pólya, vi como ele preparava cuidadosamente cada aula e como ele reflectia sobre ela depois de a ter dado, de forma a que, na vez seguinte, pudesse fazer um trabalho melhor. Era como um curso de mestrado em ensino.

HG: Em sua opinião, da heurística de Pólya, a que é que ainda vale a pena dar ênfase no ensino da Matemática?

JK: Toda ela permanece válida. Eu não mudaria nada.

HG: Pensando nos futuros professores, o que acha que é preciso que mude na sua formação inicial, matemática e educacional, de forma a que a resolução de problemas possa estar mais presente nas aulas de Matemática?

JK: Não é uma tarefa fácil levar para as aulas a resolução de problemas genuína, mas penso que a abordagem de Pólya oferece o caminho mais promissor. Escrevi sobre isso num livro em sua homenagem. (Kilpatrick, 1987b) Pólya queria que a preparação de professores incluísse, não apenas o estudo do conteúdo matemático, mas também experiência em fazer matemática, concretizada numa espécie de seminário de resolução de problemas como aqueles que ele realizou em Stanford para professores. Pólya via este seminário «como uma oportunidade para os professores adquirem um conhecimento autêntico e profundo da matemática do ensino secundário, numa forma que eles podiam usar com os seus alunos». (O. c. p. 89)

Notas

1 Edward Griffith Begle (1914 –1978) foi um matemático norte americano que se interessou muito pelo ensino da Matemática e pela investigação neste domínio, tendo ficado conhecido pelo facto de ter dirigido o *School Mathematics Study Group*, considerado o mais importante projecto que, nos EUA, promoveu a reforma curricular que ficou internacionalmente conhecida como a reforma da Matemática Moderna. [NT]

2 George Pólya (1887–1985), matemático de renome com grande produção em domínios matemáticos muito diversos, desenvolveu igualmente uma intensa actividade muito relacionada com o ensino em Matemática, nomeadamente com a resolução de problemas (ver artigo nesta revista, pp. 44–50). [NT]

3 Paul Richard Halmos (1916–2006), matemático norte americano, nascido na Hungria, em Budapeste. Foi muito novo para os EUA onde fez toda a sua formação escolar e carreira académica e científica. [NT]

4 *The Heart of Mathematics*, artigo de P. Halmos publicado na revista The Americam Mathematical Monthly, vol. 7, pp. 519–524 (1990). Ver também *Pense Nisto* (p. 59) desta revista. [NT]

5 Ver também artigo pp. 44–50 desta revista. [NT]

6 Stanic, G. M. A. e Kilpatrick, J. (1989). [NT]

7 NGACPB & CCSSO (2010). [NT]

8 Pólya (1945, p. 142). [NT]

Referências

Kilpatrick, J. (1981). One point of view: Stop the bandwagon, I want off. *Arithmetic Teacher*, 28(8) 2.

Kilpatrick, J. (1987a). George Polya's influence on mathematics education. *Mathematics Magazine*, 60, 299–300.

Kilpatrick, J. (1987b). Is teaching teachable? George Polya's views on the training of mathematics teachers. In F. R. Curcio (Ed.), *Teaching and learning: A problem-solving focus* (pp. 85–97). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática para o ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

MEC (2013). *Programa e metas curriculares de Matemática — Ensino básico*. Lisboa: MEC.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author. [Tradução portuguesa APM (ed.) em 1985]

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. [Tradução portuguesa APM (ed.) em 2007]

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards: Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1966). On teaching problem solving. In Conference Board of the Mathematical Sciences, *The role of axiomatics and problem solving in mathematics* (pp. 123–129). Boston, MA: Ginn.

Pólya, G., & Kilpatrick, J. (2009). *The Stanford mathematics problem book: With hints and solutions*. New York, NY: Dover. (Original work published 1974)

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Vol. 3. The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–22). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tradução de
Henrique Manuel Guimarães

Pisa-papéis

Um olhar sobre a avaliação da resolução de problemas no PISA 2012

Paulo Alvega

A cada três anos desde 2000 os alunos podem ser sorteados, no ano que completam 15 ou 16 anos, para prestar provas PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos promovido pela OCDE) que avaliam a literacia na Leitura, em Matemática e nas Ciências. As provas escritas duram duas horas e misturam os itens de resposta aberta e de resposta fechada ou escolha múltipla organizados em grupos com base em episódios que descrevem situações da vida real dos jovens. A abordagem das avaliações efetuadas reflete o facto de que a sociedade atual recompensa, não tanto o que sabemos mas o que conseguimos fazer com aquilo que sabemos. Também são aplicados questionários para obter informação sobre os próprios estudantes, o seu contexto familiar e escolar, e as suas experiências de aprendizagem anteriores, assim como sobre o sistema educativo e o ambiente de aprendizagem. Depois, os resultados são publicados e já estamos habituados às capas dos jornais e às breves reportagens nos noticiários sobre as subidas e descidas dos alunos portugueses nos *rankings* do universo de alunos dos países da OCDE. De ambos os lados das trincheiras saltam argumentos e explicações que tudo justificam e o seu contrário. A poeira assenta e logo a seguir os holofotes apagam-se. A exceção tem sido a análise cuidada dos resultados e das recomendações.

As últimas provas foram realizadas em 2012, num número crescente de países (65), e os resultados dos cerca de meio milhão de alunos, representativos de vinte milhões de alunos de escolas públicas ou privadas, foram publicados no final de 2013.[1] Foi com alguma surpresa, portanto, que lemos notícias em finais de março sobre o desempenho dos alunos portugueses na resolução de problemas. E espante-se, ou talvez não, ficaram acima da média. Isto exigia uma *investigação*! Pela primeira vez este estudo internacional avaliou a capacidade de resolução de problemas, com recurso ao computador e de forma interativa, simulando situações da vida real. A curiosidade aumentava. Em 44 países, o desempenho dos portugueses esteve a par de países como a Noruega, a Dinamarca e a Suécia (pois, a Finlândia está top 10 de uma lista encabeçada pelos alunos de Singapura).

Afinal, como fora avaliada a capacidade de resolução de problemas? Além de saber o lugar nos *rankings*, importava descobrir como o programa definia problema. Que conclusões e recomendações fazia? Havia um caminho a percorrer e mãos à obra. Os volumes de apresentação dos resultados (em inglês) estão disponíveis e as páginas consultadas (digitais, felizmente) começaram a aumentar e a amontoar-se. Papéis e mais papéis.

A publicação relativa à resolução de problemas — «A resolução criativa de problemas: a capacidade dos alunos em lidar com problemas da vida real» (OECD, 2013)[2] — é o quinto de seis volumes que analisam os resultados dos alunos. Para os interessados, motor de busca: PISA 2012 volume 5. O último referente à literacia financeira foi entretanto também publicado. Ao longo de cinco capítulos descobrimos os pressupostos desta avaliação, a definição dos seus termos, as diferenças de desempenho e as implicações destas. (Capítulo 1 — A avaliação da capacidade da resolução de problemas no PISA 2012; Capítulo 2 — O desempenho dos alunos na resolução de problemas; Capítulo 3 — Pontos fortes e pontos fracos dos alunos na resolução de problemas; Capítulo 4 — Como varia nos vários países o desempenho na resolução de problemas; Capítulo 5 — Implicações da avaliação da resolução de problemas para as políticas e a prática.)[3]

Construtores de canoas no PISA 2012

Todos conhecemos, tendo lido ou não, as aventuras descritas por Defoe de Robin Crusoé, esse sim, um verdadeiro *resolvedor de problemas*. A construção sem ferramentas dos meios de abrigo e sobrevivência ou de uma canoa que o levasse da ilha onde tinha sido largado foram problemas que Crusoé procurou resolver com sucesso. O desejo de partir aumentava apesar dos recursos para isso parecerem impossíveis. Lemos sobre as suas aventuras no preâmbulo do volume relativo à resolução de problemas, onde também se define a competência em resolução de problemas e se descreve a necessidade de avaliá-la.

No contexto do PISA 2012, problemas são definidos como situações sem solução óbvia e a resolução de problemas requer pensar e aprender em ação — envolve «o desencadear de ações experimentais com o meio ambiente, habitualmente com base em palpites ou pressentimentos, para clarificar a natureza do problema e as suas potenciais soluções» (p. 1). Assim, defende-se que deste modo os alunos «conseguem aprender mais sobre a natureza do problema e a eficácia das suas estratégias» e «modificam o seu comportamento, iniciando mais interações experimentais subsequentes com o meio ambiente» (p. 1). Como se lembra no relatório a este propósito, a estratégia inicial de Crusoé para escapar numa canoa feita de um tronco falhou porque estava tão obcecado com a solução que nunca considerou como a transportar até à praia. Resolvemos pequenos problemas todos os dias. As rápidas mudanças sociais e tecnológicas implicam que a aplicação daquilo que sabemos também evolui rapidamente. Os nossos jovens *Crusoés* de quinze anos, como também é dito, precisam de se adaptar, aprender, arriscar novas tentativas e estar sempre prontos a aprender com os erros. O mundo profissional atual procura pessoas que consigam resolver problemas não rotineiros, simples ou complexos. Uma explicação dada pelo documento é que, com a introdução de computadores e máquinas, aos trabalhadores é exigido cada vez menos resolver tarefas manuais rotineiras ou analíticas. Pelo contrário, aumentam as situações inesperadas e não familiares. Portanto, a ênfase da educação está a mudar também: «as capacidades mais fáceis de ensinar e avaliar são aquelas que são mais fáceis de digitalizar, de automatizar e de ir buscar a terceiros»; os jovens «precisam mais do que dominar um repertório de factos e procedimentos», precisam de aprender toda a vida e de lidar com novas situações «onde o efeito da sua intervenção não é previsível» e, quando enfrentam problemas sem uma estratégia previamente conhecida para a sua resolução, devem ser capazes, como é sublinhado, «de pensar de modo flexível e criativo

NATUREZA DA SITUAÇÃO Toda a informação necessária é apresentada no enunciado?	INTERATIVO: nem toda a informação é apresentada, alguma tem de ser descoberta, explorando a situação.	
	ESTÁTICO: toda a informação relevante é apresentada.	
PROCESSO DE RESOLUÇÃO Quais são os principais processos cognitivos envolvidos na tarefa?	EXPLORAR E COMPREENDER a informação apresentada.	
	REPRESENTAR E FORMULAR: construção de gráficos, representações simbólicas ou verbais, e formulação de hipóteses sobre os fatores relevantes e as relações entre eles.	
	PLANEAR E EXECUTAR: conceber um plano estabelecendo objetivos e sub-objetivos, e executar a sequência de passos identificados no plano.	
	MONITORIZAR E REFLETIR: acompanhar o processo, reagindo ao 'feedback' e refletindo na solução, na informação apresentada, ou na estratégia adotada.	
CONTEXTO Em que cenário do quotidiano está o problema integrado?	SITUAÇÃO: o cenário envolve algum dispositivo tecnológico?	Tecnológico
		Não Tecnológico
	INCIDÊNCIA PRINCIPAL: com que ambiente está relacionado o problema?	Pessoal (estudante/família)
		Social (comunidade/sociedade)

Tabela 1

para ultrapassar as barreiras no caminho para atingir a solução» (p. 26).

A competência em resolução de problemas é definida como «a capacidade de uma pessoa se envolver em processos cognitivos para compreender e resolver situações problemáticas onde um método de resolução não é imediatamente óbvio. Inclui a disposição para se envolver com a situação de modo a conseguir alcançar as suas potencialidades como cidadão construtivo e reflexivo» (p. 30). Como nos é dito, a avaliação em resolução de problemas centra-se nos processos cognitivos gerais envolvidos «mais do que na capacidade para resolver problemas em matérias escolares específicas». Considerando o progresso na compreensão daqueles processos, bem como a possibilidade de usar simulações em computadores, a avaliação da resolução de problemas no PISA 2012 atribuiu um lugar de destaque ao que chamou «problemas interativos»: «problemas que requerem a descoberta de informação útil, explorando a situação problemática», por exemplo ao utilizar um telemóvel recém-adquirido (p. 29). Aparelhos tecnológicos, relógios, iluminação, tráfego, vitaminas, máquinas automáticas de bebidas são contextos que os alunos encontram fora da escola no seu quotidiano, uns mais do que outros. Como se faz notar, ao usar cenários deste tipo com forte relação com problemas da vida real, o PISA 2012 procura evitar «tanto quanto possível a necessidade de conhecimentos curriculares específicos» (p. 29). Acrescenta-se ainda que os itens têm «textos curtos» e «linguagem simples» e que se é necessário recorrer às operações aritméticas, são disponibilizadas calculadoras no cenário proposto (o que não acontece na avaliação dos outros domínios).

O quadro para a avaliação da competência em resolução de problemas no PISA 2012

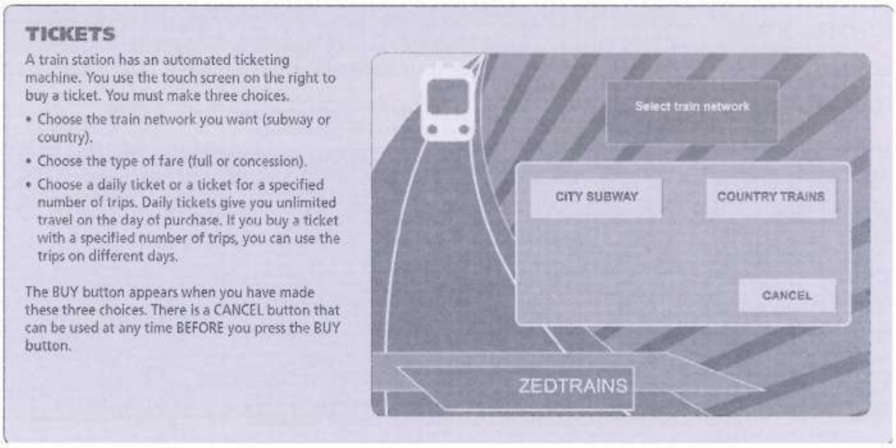
As tarefas propostas para a avaliação da competência em resolução de problemas são caraterizadas segundo três aspetos: a Natureza da situação problemática, o Processo de resolução e o Contexto do problema (tabela 1).

A prova consistiu em 16 unidades de avaliação organizadas em 4 grupos, cada qual preparado para ser resolvido em vinte minutos. A cada aluno foi atribuído um ou dois grupos, dependendo se também participava nas avaliações de Matemática ou de Leitura com recurso ao computador. Para cada unidade o material de motivação aparece no topo do ecrã e os itens com as questões na parte inferior, estando separados visualmente por caixas retangulares. Nunca é necessário usar o botão de rolar (*scroll*). Os itens são apresentados numa sequência pré-definida e o aluno não pode voltar atrás, devendo confirmar a sua resposta. A cada problema é atribuído um nível de dificuldade (1–6) e a pontuação é atribuída, não só pela correção da resposta dada, mas também pela sequência de ações realizadas.

Unidade 3: BILHETES

Trata-se de uma situação de simulação de compra de bilhetes de comboio numa bilheteira automática

Exemplo de uma unidade de avaliação no PISA 2012: contexto motivacional e itens (questões)



BILHETES

Uma estação de comboios tem uma máquina de venda automática de bilhetes. Para comprar um bilhete utiliza-se o écran sensível ao toque. Tem que fazer três escolhas.

- Escolher a rede de comboios que pretende (metro ou suburbano)
- Escolher a tarifa (completa ou com desconto)
- Escolher um bilhete diário ou um bilhete para um certo número de viagens.

O bilhete diário permite um número indeterminado de viagens no dia da compra. O outro tipo de bilhete permite realizar as viagens em dias diferentes. O botão COMPRAR aparece quando tiver feito as três escolhas. Existe um botão CANCELAR que pode ser usado em qualquer altura, antes de ter pressionado o botão COMPRAR.

A classificação do desempenho dos alunos no PISA 2012

Considerando-se a média da OCDE 500 pontos, Portugal obteve 494 pontos. Três pontos percentuais menos quando comparado com o desempenho em literacia em Matemática, Ciências e Leitura. Singapura liderou (562 pontos) encabeçando seis outros países asiáticos que imediatamente a antecedem. Entre os dez primeiros países, apenas um país europeu, a Finlândia, que surge logo depois do Canadá e da Austrália (ver Quadro 1, na página 15).

Em Portugal, cerca de 20 por cento dos alunos, percentagem semelhante à média da OCDE, não conseguem resolver com sucesso problemas que não sejam problemas elementares (alunos de baixo desempenho) e 7,4 por cento conseguem resolver e explorar situações complexas, planear resoluções de vários passos, experimentar alternativas e realizar ajustamentos em função da informação recebida (alunos de alto desempenho) — a média da OCDE é 11,4 (em Singapura este valor é de mais de 29 por cento). No que se refere aos processos de resolução de problemas, os alunos portugueses revelaram melhor desempenho nas tarefas de utilização do que nas de aquisição de conhecimen-

Question 1: TICKETS *CP038Q02*

Buy a full fare, country train ticket with two individual trips.
Once you have pressed BUY, you cannot return to the question.

Questão 1: Bilhetes

Compra um bilhete de tarifa completa para um comboio suburbano com duas viagens individuais.
Uma vez pressionado o botão COMPRAR, não podes voltar atrás à pergunta.

Question 2: TICKETS *CP038Q01*

You plan to take four trips around the city on the subway today. You are a student, so you can use concession fares.
Use the ticketing machine to find the cheapest ticket and press BUY.
Once you have pressed BUY, you cannot return to the question.

Questão 2: Bilhetes

Planeias fazer hoje quatro viagens de metro pela cidade. Como estudante, podes beneficiar de tarifas reduzidas.
Usa a máquina de venda automática para descobrir o bilhete mais barato e pressiona o botão comprar.
Uma vez pressionado o botão comprar, não podes voltar atrás à pergunta.

Question 3: TICKETS *CP038Q03*

You want to buy a ticket with two individual trips for the city subway. You are a student, so you can use concession fares.
Use the ticketing machine to purchase the best ticket available.

Questão 3: Bilhetes

Queres comprar um bilhete para duas viagens no metro. Como estudante, podes beneficiar de tarifas reduzidas.
Usa a máquina de venda automática para comprar o melhor bilhete disponível.

tos. Quanto à natureza das situações, o seu desempenho foi pior nas situações de carácter interativo do que nas situações estáticas.

Recomendações e implicações

Um dos objetivos do PISA é contribuir para tornar o ensino mais relevante e identificar como os alunos podem aprender melhor, os professores ensinar melhor e as escolas funcionar de modo mais efetivo. Ter uma compreensão profunda daquilo que constitui a competência em resolução de problemas dá-nos evidências de como estão preparados os nossos jovens para resolver problemas complexos, não familiares, que podem encontrar fora do contexto curricular. Assim, o documento publicado apresenta, além de resultados e conclusões, recomendações e implicações. Cada um poderá fazer as suas extrapolações e refletir na sua experiência e/ou prática profissional. Como pode a apresentação destes resultados ser mais do que um conjunto de *rankings* ou de tabelas? Como pode contribuir para definir prioridades ou estratégias? Que alvos queremos atingir e em que medida estes resultados devem ser tidos em conta?

■ Table V.A ■

SNAPSHOT OF PERFORMANCE IN PROBLEM SOLVING

Countries/economies with mean score/share of top performers/relative performance/solution rate above the OECD average
Countries/economies with share of low achievers below the OECD average

Countries/economies with mean score/share of top performers/relative performance/share of low achievers/solution rate not statistically different from the OECD average

Countries/economies with mean score/share of top performers/relative performance/solution rate below the OECD average
Countries/economies with a share of low achievers above the OECD average

	Performance in problem solving				**Relative performance in problem solving,**	**Performance in problem solving, by process**		**Performance in problem solving, by nature of the problem situation**	
	Mean score in PISA 2012	Share of low achievers (below Level 2)	Share of top performers (Level 5 or 6)	Gender difference (boys - girls)	compared with students around the world with similar performance in mathematics, reading and science	Solution rate on tasks measuring **acquisition of knowledge**	Solution rate on tasks measuring **utilisation of knowledge**	Solution rate on items referring to a **static** problem situation	Solution rate on items referring to an **interactive** problem situation
	Mean score	%	%	Score dif.	Score dif.	Percent correct	Percent correct	Percent correct	Percent correct
OECD average	500	21.4	11.4	**7**	-7	45.5	46.4	47.1	43.8
Portugal	494	20.6	7.4	**16**	-3	41.6	45.7	44.0	42.0

Note: Countries/economies in which the performance difference between boys and girls is statistically significant are marked in bold.
Countries and economies are ranked in descending order of the mean score in problem solving in PISA 2012.
* See notes in the Reader's Guide.
Source: OECD, PISA 2012 Database, Tables V.2.1, V.2.2, V.2.6, V.3.1, V.3.6 and V.4.7.
StatLink http://dx.doi.org/10.1787/888933003649

Quadro 1

Uma das conclusões enunciadas é que o impacto da condição socioeconómica no desempenho em resolução de problemas é menor do que no desempenho em Matemática, em Ciências e em Leitura. Os alunos de contextos socioeconómicos desfavorecidos tendem a ter resultados melhores do que os esperados em resolução de problemas do que em matemática talvez, considera o estudo, porque as oportunidades extra-escolares para exercitar a sua capacidade (*skills*) de resolução de problemas surgem nos diversos contextos sociais e culturais. Ainda assim, como se relata, «a qualidade das escolas importa: diferente acesso a escolas de alta qualidade significa que, em média, esses alunos têm resultados inferiores aos dos alunos com melhores contextos socioeconómicos» (p. 14).

Em 23 países os rapazes obtiveram melhores resultados do que as raparigas, em 5 países aconteceu o inverso e nos restantes 16 a diferença não foi significativa. Mas estas diferenças são menos significativas do que acontece nas restantes competências. Outra conclusão: a resolução de problemas reduz as diferenças de género entre os mais competentes. Que explicações podemos encontrar para este facto?

Segundo o relatório apresentado, embora todos concordem que as crianças precisam de desenvolver a capacidade (*skills*) resolução de problemas, na prática, esta capacidade tem sido amplamente trabalhada com um ensino centrado apenas em obter soluções segundo regras, como as regras da álgebra. Estas regras são importantes mas, como chama a atenção o relatório, «aplicar regras algébricas é apenas o segundo passo do processo de resolução de problemas; o primeiro, que os computadores não podem fazer, envolve examinar o conjunto confuso de factos de um problema da vida real para determinar que regras se aplicam» (p. 119). Daqui, como se conclui no relatório, «desenvolver a perícia e a flexibilidade requeridas por problemas não rotineiros inclui expor os alunos a vários problemas da vida real» (p.119). Os jovens que têm bons desempenhos em resolução de problemas estão aptos para examinar as situações problemáticas, de modo a recolher informação útil, construir representações mentais coerentes das partes relevantes envolvidas e das suas relações, e comunicar estas representações. Conseguem planear estratégias para ultrapassar obstáculos e executar esses planos enquanto monitorizam o processo, criticando cada passo e refletindo em possíveis alternativas ou elementos em falta.

Desenvolver as capacidades (*skills*) de raciocínio que favoreçam a resolução de problemas, sublinha-se no relatório, não é conseguido por apenas treinar mais e mais problemas descontextualizados, propondo-se que os professores encorajem os alunos a «refletir nas estratégias quando lidam com problemas relacionados com conteúdos específicos, expandido o seu repertório de princípios gerais»; e acrescenta-se, «quando os professores pedem aos alunos para descrever os passos que deram para resolver um problema, estimulam a sua metacognição que por sua vez melhora as capacidades gerais em resolução de problemas» (p. 120).

Outra conclusão é que a capacidade de resolução de problemas desenvolve-se melhor em contextos com significado. Parece óbvio. Invocando a «intensa» investigação realizada neste domínio, afirma-se que capacidades gerais — como a inteligência, memória de trabalho e outras — não ajudam a resolver um problema, independentemente do domínio em que se aplica e do conhecimento que a pessoa tem sobre o problema. Propõe-se que conteúdos concretos sejam ensinados de modo a ajudar a sua transferência para novas situações, outros tipos de problemas e outros conteúdos, e procurar que «os alunos se centrem mais na estrutura profunda subjacente a duas situações problemáticas do que nas diferenças superficiais entre elas — apenas assim podem aplicar o conhecimento adquirido numa situação para resolver um problema noutra situação» (p. 121). São nomeadas algumas formas de alcançar este objetivo. Identificar problemas diferentes que requeiram ações similares. Usar diagramas para visualizar a estrutura escondida de diferentes problemas. Destacar comparações entre exemplos que salientem similaridades ou diferenças. Usar analogias entre fenómenos que surjam em diferentes domínios. Como é dito, as pessoas são mais propensas a transferir partes de estruturas hierarquizadas de conhecimento bem integradas, do que pedaços isolados de conhecimento — «quanto mais conexões o estudante observar entre o ambiente de aprendizagem e o mundo exterior mais fáceis serão as transferências» (p. 121).

Por fim, o estudo salienta a importância das práticas nas escolas e da definição de políticas educativas, visto que os melhores resultados surgem quando é dada prioridade ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. A associação entre o desempenho na resolução de problemas e os outros três domínios avaliados é forte e positiva a nível individual, escolar e nacional. Em geral, os alunos mais competentes em Leitura, Ciências ou Matemática são-no também quando confrontados com problemas não familiares em contextos não curriculares. Conseguem desenvolver representações mentais coerentes de uma situação problemática, planear com um foco claro e mostrar flexibilidade na integração de informação e na reflexão sobre o problema e a sua solução. Quaisquer comentários são desnecessários.

Depois de uma análise das tabelas, grelhas e quadros, depois de tantas páginas acumuladas sob o pisa-papéis, quais as implicações no caso português? Que políticas, que sistemas educativos temos? Que currículo queremos? Que adultos estamos a formar nas nossas escolas? Um olhar sobre esta avaliação permitiu identificar algumas questões que consideramos pertinentes na resolução de problemas.

Conseguirão os nossos jovens escavar dos troncos as canoas e levá-las para o mar?

Notas

1 «Esta é a segunda vez que a Matemática é avaliada como domínio principal desde a 1.ª edição do Programa, em 2000, tendo já sido domínio principal em 2003 (. . .). Portugal obteve 487 pontos na escala da Matemática, representando uma progressão de 21 pontos relativamente ao resultado alcançado em 2003 — ano em que a Matemática também foi domínio principal. Esta pontuação coloca Portugal, pela primeira vez, desde o início do Programa, na média da OCDE.» (MEC, 2013, Sumário Executivo)

2 No original *Creative Problem Solving — Student' Skills in Tackling Real-Life Problems* (OECD, 2013). Sem outra indicação as páginas das citações referem-se a este documento.

3 No original: *Assessing Problem-Solving. Skills in PISA 2012; Student Performance in Problem Solving; Student' Strengths and Weaknesses Problem Solving; How Problem Solving Performance Varies Within Countries; Implications of the Problem Solving Assessment for Policy and Practice.* (OECD, 2013).

Referências

MEC (2013). *PISA 2012 — Portugal: primeiros resultados.* Lisboa: MEC.

OCDE (2013). PISA 2012 Results (volume V): *Creative Problem Solving — Students' Skills in Tackling Real-life Problems.* http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-volume-V.pdf (Extraído em 8.08.2014)

Paulo Alvega
Agrupamento de Escolas Queluz-Belas

Resolução de problemas de Matemática: regresso ao passado

LINA FONSECA

INTRODUÇÃO

Revisitar a resolução de problemas no ensino da matemática, o que se tem defendido sobre o assunto em Portugal e o que se tem feito nos contextos educativos e a situação atual, originada pelo programa de matemática homologado em 2013, é propósito deste texto.

A centralidade da resolução de problemas no ensino da matemática é comummente aceite, pois é motor de desenvolvimento da ciência e da nossa civilização. A mudança, a inovação e a criatividade surgem em resposta a necessidades que urgiu ultrapassar. O ser humano sempre encarou, resolveu e inventou problemas. Problemas práticos e problemas teóricos, problemas simples e problemas complexos, problemas abertos e problemas fechados. Sem problemas não teremos matemática, mas apenas um sucedâneo. Resolução de problemas. De que se fala? A que se chama problema?

Vários autores (e.g. Lester, 1980; Mason, 1992; Mayer, 1985; Pólya, 1981) há muitos anos manifestaram o entendimento de que problema é uma situação com a qual o aluno se defronta e para a qual não conhece um procedimento ou uma técnica específica que lhe permita aceder à solução. Procurar o caminho, não óbvio, que leva da situação inicial à solução é o processo de resolução de problemas. Neste sentido, há uma relação estreita entre cada problema e quem o resolve. O que pode entusiasmar e exigir esforços significativos a alguns, pode desanimar e ser entediante para outros.

Qualquer pessoa que tenha passado pelos bancos da escola associa a matemática à resolução de problemas. A memória distante recorda problemas de partilhas, de torneiras a debitar para tanques, de distribuição de produtos por vasilhas, problemas que afligiam os alunos, mas problemas que se resolviam aplicando diretamente os conteúdos matemáticos trabalhados na aula e cuja seleção era orientada por alguma palavra-chave do enunciado. O processo de resolução quase sempre único; a resposta correta o objetivo a alcançar. Eram os designados problemas de passos, segundo a tipologia de Charles e Lester (1986). Os manuais escolares continham problemas destes para os alunos exercitarem. Novas roupagens, mas quase sempre a mesma estrutura rígida. Uma dinâmica que ajudou a consolidar conceções sobre a matemática que Schoenfeld (1992) referiu, como, por exemplo, a de que os problemas de matemática têm uma e uma só resposta correta, os problemas de matemática resolvem-se rapidamente e há apenas um modo correto de resolver qualquer problema de matemática que é, vulgarmente, a regra que o professor apresentou.

Uma dieta matemática restritiva.

Os alunos alimentados por ela não resolviam outros problemas que pareciam enigmas. Problemas para a resolução dos quais não bastava a aplicação direta dos conteúdos aprendidos, problemas que podiam ter várias respostas, que podiam ser resolvidos de vários modos distintos. Era preciso mais. Mas o quê? Mais conteúdos matemáticos? Não necessariamente. Isso afastaria este tipo de problemas para anos de escolaridade posteriores. Eram necessários outros conhecimentos. Outras capacidades para gerir e aplicar conhecimentos. Outra plasticidade de raciocínio que até então o ensino da matemática não ajudava a desenvolver.

Um olhar por programas de Matemática para o Ensino Básico

Nos programas oficiais portugueses a resolução de problemas esteve sempre presente, mesmo que implicitamente. No programa do 1.º ciclo do ensino básico (ME, 1991), na secção relativa à matemática, a centralidade era dada aos problemas sem que, no entanto, se precisasse o significado atribuído à expressão. Na edição de 2004 (ME, 2004), já se indicavam as capacidades transversais, como grandes finalidades do ensino da matemática no Ensino Básico, e nos problemas referiam-se situações de exploração e descoberta e situações de aplicação, considerando-se a resolução de problemas como «a atividade fundamental desta disciplina» (ME, 2004, p.167).

Nos programas do 2.º e 3.º ciclos do ensino básico (ME, 1991a, 1991b) os objetivos gerais são organizados em atitudes/valores, capacidades/aptidões e conhecimentos. Na secção relativa às capacidades/aptidões é realçada a «capacidade de resolver problemas» (p. 10) aliada à de «desenvolver o raciocínio» e à de «desenvolver a capacidade de comunicação» (p. 10). A análise de diferentes aspetos de uma situação, o reconhecimento de analogias, a seleção de estratégias adequadas para a resolver, estimando e criticando o(s) resultado(s) obtidos, apreciando a sua adequação ao contexto eram objetivos a desenvolver durante o 5.º e 6.º anos de escolaridade. (ME, 1991a, p. 10). Para os 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade o programa dava continuidade aos aspetos relativos à seleção de estratégias e à apreciação da adequação dos resultados ao contexto. Acrescentava ao desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, o realce para a compreensão do enunciado, com a formulação de questões, seleção e interpretação de informação relacionada com o problema, a formulação de hipóteses e a previsão de resultados (ME, 1991b, p. 10). Estes objetivos gerais concretizavam-se ao longo do programa, nos diferentes conteúdos abordados.

Foram surgindo manuais escolares que apresentavam também outro tipo de problemas, que não aqueles aos quais todos estávamos habituados, os problemas de conteúdo (Fernandes et al., 1994). Surgiram também problemas de processo, de aplicação, de aparato, como referidos por estes autores. Um desafio para alunos e professores. Problemas resolvidos por esquemas, por listas, por desenhos. Problemas que obrigavam à recolha de dados reais e à tomada de decisões. Problemas em que se recorria à utilização de materiais, aparatos para experimentar. Matemática? E os cálculos, onde ficavam?

O caminho foi longo.

A formação de professores, inicial, contínua e pós-graduada, também foi dando relevo à resolução de problemas. O modelo de resolução de problemas de Pólya, estratégias variadas de resolução de problemas, ensino através da resolução de problemas, ensino sobre a resolução de problemas e ensino para a resolução de problemas (Hatfield, 1978).

Alargou-se o leque de problemas apresentado e explorado em sala de aula. Passou a ser natural a existência de processos de resolução diferentes, seguindo caminhos diferentes obtendo a mesma solução ou não, se o problema o permitisse. Os alunos foram aprendendo a responder à questão «porquê?», a trabalhar em pequenos grupos, a apresentar o raciocínio utilizado, argumentando em sua defesa e a apreciar e questionar resoluções diferentes das suas.

Este relato parece contar uma história perfeita. Mas não é.

O caminho escolhido é mais difícil, exigente e trabalhoso. Os novos problemas a resolver, para além dos problemas de passos, sempre presentes, são mais exigentes, pois necessitam de maior concentração dos alunos, de melhor compreensão dos textos, da conjugação de vários saberes, da construção de argumentação em defesa das opções tomadas e, várias vezes, da delimitação de contornos quando as situações propostas são menos definidas. Mas estes são os problemas que os alunos, futuros cidadãos, têm de enfrentar na sociedade em mudança, onde os problemas de amanhã são-nos hoje completamente desconhecidos.

Estas preocupações podem parecer precoces quando se pensa nos anos iniciais de escolaridade, mas o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, sejam eles quais forem, é lento e por isso os alunos necessitam desde cedo de poder contactar com situações desafiadoras que melhorem não só a sua capacidade de resolução de problemas, mas também a sua autoconfiança. O pensamento e raciocínio matemáticos provocam-se pelo desafio, pela contradição, pela surpresa, pela identificação de falhas e favorecem-se pela colaboração e reflexão (Mason, Burton & Stacey, 1985). A capacidade de resolver problemas, um dos *soft skills* que vários jovens europeus, incluindo portugueses, candidatos a emprego não manifestam (IEFP, 2014), tem na matemática terreno fértil para se desenvolver.

Para a resolução de problemas, o conhecimento do conteúdo matemático, sendo essencial, nem sempre é suficiente. Outros conhecimentos e capacidades precisam ser desenvolvidas. Foi a esta necessidade que respondeu o programa de matemática do ensino básico (ME, 2007). Para além de quatro áreas de conteúdo matemático, o programa indicava a necessidade de se desenvolverem nos alunos, em todos os alunos, as capacidades transversais de resolução de problemas, de comunicação e de raciocínio matemático, aspetos centrais na matemática e na sua aprendizagem e explicitados pela primeira vez neste documento oficial que olhou de modo global para a formação matemática dos jovens durante a escolaridade de nove anos.

O desenvolvimento das capacidades transversais é essencial na aula de matemática?

Há matemática sem resolução de problemas?

Há matemática sem raciocínio?

Pode aceder-se ao raciocínio desenvolvido pelo aluno sem que ele o comunique?

As respostas a estas questões são simples — sim; não; não; não — o que poderia levar a concluir pela não necessidade de explicitar as capacidades transversais no programa, dada a sua essencialidade na matemática. No entanto, a influência do currículo prescrito na ação do professor em sala de aula, nos manuais escolares e nas famílias é forte. Em muitos casos, aspetos não explicitados no currículo não são trabalhados. Daí a importância e necessidade da sua explicitação.

Na história da humanidade, dos países e das pessoas encontram-se ciclos. Ciclos mais e menos positivos e promissores, mais e menos desafiantes, mais e menos felizes. O mesmo acontece na história do programa de matemática em Portugal.

Sem ter a pretensão de um texto histórico, quero dizer que a história recente mostra o fim abrupto de um ciclo que se entendia como promissor, desafiante e feliz, no sentido de poder contribuir para o desenvolvimento de capacidades transversais dos nossos alunos, a par do desenvolvimento dos seus conhecimentos de conteúdo matemático, no que se refere à matemática escolar. Havendo consciência da necessidade de trabalho contínuo e persistente, depois dos desafios, os resultados começavam a ser promissores.

O programa de Matemática da era Nuno Crato

O mês de junho do ano de 2013 é de má memória para muitos professores de matemática, pela revogação do programa de matemática de 2007 para o ensino básico. O programa que o veio substituir, sustentado numa conceção diferente sobre o papel do professor e do aluno, deixa de explicitar as capacidades transversais e uma variedade de tarefas a usar em sala de aula. Pelo que se escreveu, parece que o atual programa de matemática (MEC, 2013) não se refere à resolução de problemas, o que não é verdade. Tanto na secção das finalidades, como dos objetivos, pode ler-se que a resolução de problemas e a progressiva compreensão matemática poderão contribuir para que os alunos desenvolvam o gosto pela matemática e que os «desempenhos [fundamentais], devem concorrer (. . .) para a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, para uma comunicação (oral e escrita) adequada à matemática, para a resolução de problemas em diversos contextos» (MEC, 2013, p. 4).

Os «desempenhos fundamentais» (p. 3) não integram o objetivo de resolver, como seria expectável, e mais adiante, na secção relativa à resolução de problemas está esclarecida a dúvida: na resolução de problemas aplicam-se regras e procedimentos previamente estudados e treinados.

A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (MEC, 2013, p. 5)

Em todos os anos de escolaridade, do 1.º ao 9.º ano, são referidos os problemas, mas sempre ligados apenas aos conteúdos — problemas de conteúdo (Fernandes et al., 1994) — como se exemplifica.

problemas de um passo envolvendo situações de juntar e acrescentar" (p.7)

problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório (p.8)

problemas de até três passos envolvendo medidas de diferentes grandezas (p.12)

problemas envolvendo o cálculo e a comparação de frequências relativas (p.13)

problemas envolvendo a média e a moda (p.16)

problemas envolvendo figuras com simetrias de rotação e de reflexão axial (p.18)

problemas envolvendo triângulos e quadriláteros (p.20)

problemas envolvendo equações de retas (p.23)

problemas envolvendo lugares geométricos no plano (p.25)

Quando se refere que «rotinas e automatismos são essenciais ao trabalho matemático, uma vez que permitem libertar a memória de trabalho, por forma a que esta se possa dedicar, com maior exclusividade, a tarefas que exigem funções cognitivas superiores» (p. 4) fica-se sem se perceber que funções são estas.

Há malefícios no treino? Apenas o de habituar/preparar o aluno a um tipo de exercício ou problema e a repetir procedimentos, dificultando a mobilização de conhecimentos e capacidades para, de modo criativo e inovador, abordar problemas diferentes dos que treinou. Apenas o de lhe diminuir a capacidade de experimentar, de tentar, de analisar erros e situações novas, de delinear uma estratégia de resolução para uma situação desconhecida, de raciocinar. Quando é que o aluno enfrenta situações novas, situações que não se resolvem com um, dois, três ou vários passos, como é explicitado no programa e como se espera o aluno tenha sido treinado ao longo dos primeiros quatro anos de escolaridade? Durante os cinco anos seguintes também não se vislumbram situações diferentes porque os problemas referidos são sempre relacionados com o conteúdo a abordar.

Reduzir o ensino da matemática, sobretudo nos primeiros anos, a esta dinâmica, cria fortes obstáculos ao desenvolvimento da capacidade de raciocinar do aluno que é a capacidade de obter conclusões com base em evidências ou conhecimentos prévios, um «hábito da mente» (Goldenberg, Cuoco & Mark, 1998) e como todos os hábitos precisa de ser trabalhado em todas as situações, em todos os anos de escolaridade e com todos os alunos. Tal como referia Dreyfus (1991), há mais de vinte anos, com a proposta atual para o ensino da matemática parece voltar-se a uma espécie de ritual «faz isto, depois faz aquilo, depois faz aquilo» (Dreyfus, 1991, p.28) sendo a aplicação do procedimento correto suficiente para o sucesso.

Os alunos podem apoderar-se de um amontoado de conhecimentos matemáticos, mas não adquirem experiência e a metodologia do trabalho matemáticos a que não se acede apenas com rotinas, mas necessitam da utilização flexível do conhecimento e dos processos matemáticos (Fonseca, 2004).

O período que agora vivemos é um retrocesso no ensino da matemática.

Como qualquer ciclo de vida, naturalmente, será ultrapassado.

Referências

Charles, R. & Lester, F. (1986). *Mathematical problem solving.* Springhouse: Learning Institute.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25–41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fernandes, D., Borralho, A. & Amaro, G. (1994). Processos de resolução de problemas: Revisão e análise crítica de investigação que utilizou esquemas de codificação. In D. Fernandes, A. Borralho e G. Amaro (Ed.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular.* Lisboa: IIE.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de matemática: A demonstração em geometria.* (Coleção de Teses). Lisboa: APM.

Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: rationales research. In L. Hatfield & D. Bradbard (Ed.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop* (pp. 21–42). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

IEFP (2014). Guia do 1.º Emprego. Fórum Estudante. http://issuu.com/forumestudante/docs/g1e2014_web

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Ed.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.3–42). London: Lawrence Erlbaun Associates Publishers.

Lester, F. (1980). Mathematical problem solving research. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston, VA: NCTM.

Mason, J. (1992). Researching problem solving from the inside. In J.P. Ponte, J. F. Matos & D. Fernandes (Ed.), *Mathematical problem solving and new information technologies*, (pp.17–36). Berlin: Springer-Verlag.

Mason, J., Burtos, L. & Satcey, K. (1985). *Thinking mathematically*. Bristol: Addison-Wesley.

Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp.123–138). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

ME (1991). *Organização Curricular e Programas — 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DEB.

ME (1991a). *Programa de Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem*. Vol. II. Ensino Básico. 2.º Ciclo. Lisboa: ME-DGEBS.

ME (1991b). *Programa de Matemática. Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem*. Vol. II. Ensino Básico. 3.º Ciclo. Lisboa: ME-DEB.

ME (2004). *Organização Curricular e Programas — 1.º Ciclo do Ensino Básico* (4.ª ed.). Lisboa: ME-DEB.

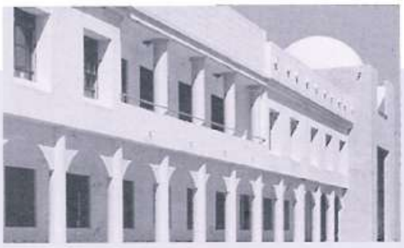
ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

MEC (2013). *Programa e Metas curriculares de Matemática. Ensino Básico*. Lisboa: MEC.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley and Sons.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp.334–370). New York: Macmillan.

LINA FONSECA
Escola Superior de Educação
Instituto Politécnico de Viana do Castelo



International Conference on Technology in MathematicsTeaching

24–27 June, 2015—Faro, Portugal
Universidade do Algarve

A *International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT) é uma das mais prestigiadas conferências europeias dedicada à utilização das tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática.

Há mais de duas décadas, vários nomes de referência ligados à utilização das tecnologias na Educação Matemática, como Bert Waits (Ohio State University) criaram um espaço de debate, discussão e partilha de experiências e trabalhos de investigação de modo a promover a utilização das tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática, em todos os níveis de ensino.

Portugal vai receber, pela primeira vez, esta prestigiada Conferência Internacional em Faro, na Universidade do Algarve, de 24 a 27 de junho de 2015.

Tal como sucedeu nas anteriores edições, procuramos criar um importante fórum de discussão e partilha de boas práticas de utilização das tecnologias na Educação Matemática, assim como promover a divulgação de trabalhos recentes de investigação no domínio das tecnologias numa perspetiva educacional e do seu impacto no ensino e aprendizagem da Matemática.

O programa contará como uma sessão plenária em cada dia, com várias sessões paralelas de comunicações e *workshops*, e terá, naturalmente, uma componente social que inclui o jantar de confraternização e um passeio. Prevê-se, ainda, nesta edição, a possibilidade de um espaço de contribuições em língua Portuguesa, ao encontro de várias sugestões de colegas portugueses e de outros países de língua oficial Portuguesa.

As conferências plenárias do ICTMT 12 estão a cargo de Manuel Santos-Trigo do México, de Susana Carreira de Portugal, de Nathalie Sinclair do Canadá e de Alison Clark-Wilson de Inglaterra.

Para mais informações consultar a página do ICTMT 12 (http://ictmt12.pt/) ou o Facebook (www.facebook.com/ICTMT12).

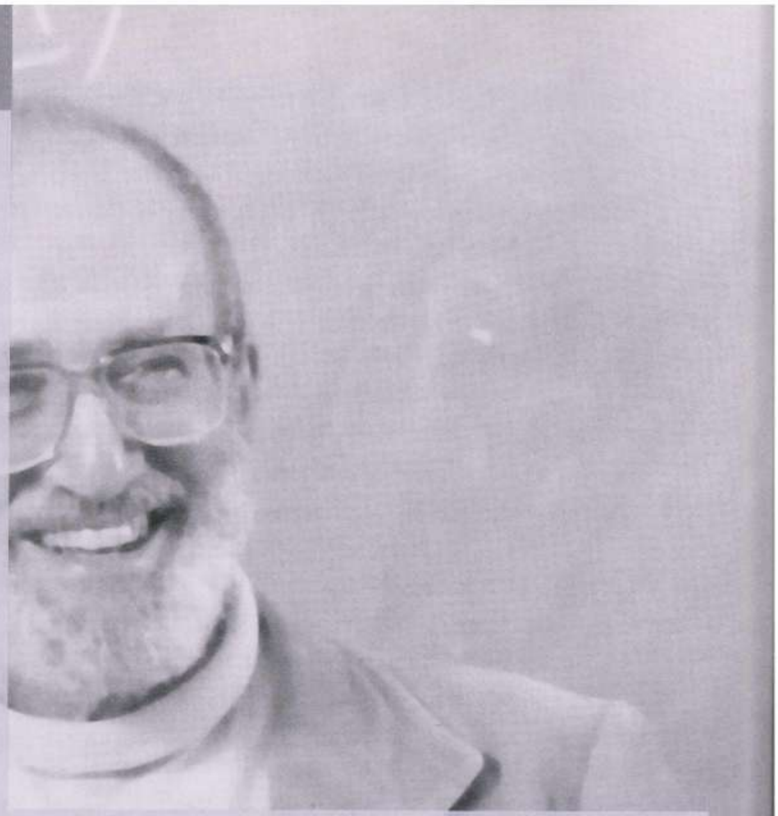
De que é que a Matemática consiste verdadeiramente?
Axiomas...? Teoremas...?
Demonstrações...? Definições...?
Teorias ...? Fórmulas...? Método...?

A Matemática certamente não existiria sem estes ingredientes. Todos eles são essenciais.

É todavia sustentável que nenhum desses ingredientes está no coração da Matemática, que a principal razão de existir de um matemático é resolver problemas e que, por isso, aquilo de que verdadeiramente a Matemática consiste, é de problemas e das suas soluções.

Eu acredito que os problemas são o coração da matemática e espero que, como professores, nas nossas aulas e seminários, e nos livros e artigos que escrevemos, valorizemos cada vez mais os problemas, e que ensinemos os nossos estudantes de forma a que sejam cada vez mais capazes de formular e resolver problemas.

Paul Halmos (1980)
The Heart of Mathematics, **publ icado na revista The American Mathematical Monthly, vol. 87(7), pp. 519–524.**



OS PROBLEMAS, O CORAÇÃO DA MATEMÁTICA

Coração, orgão central no nosso organismo, no nosso peito. Coração, órgão vital, músculo-motor que impulsiona o sangue-seiva que liga e alimenta e alenta, parte a parte, todas as partes nos lugares mais extremos e separados do nosso corpo. Coração, lugar-símbolo do enamoramento, do amor.

A palavra *coração* no texto, que destacamos em itálico, é bem uma forte metáfora evocando e convocando qualidades dos problemas no que diz respeito ao seu lugar e papel na matemática — centralidade; força motriz, impulso e pulsação; vitalidade; agente de cativação, razão e motivo de entusiasmo, gosto, paixão.

Paul Richard Halmos (1916–2006) foi um matemático norte americano de grande importância que nasceu em Budapeste, tendo ido com 13 anos para os EUA onde fez toda a sua formação escolar e carreira académica e científica. Considerado um dos matemáticos da sua geração que melhor expunham a matemática — «seja com papel e lápis, seja com giz no quadro» — e com grande influência na comunidade e cultura matemáticas, dele também se disse que a sua herança não foi apenas matemática, mas também de «conselhos e opiniões» sobre as múltiplas e diversas facetas da vida de um matemático — «escrever, publicar, falar, pesquisar e mesmo pensar sobre a matemática» — tendo deixado testemunhos escritos sobre estas facetas «com uma extraordinária combinação de convicção e humildade».

Henrique Manuel Guimarães

Os Problemas de Hilbert*

Reinhard Kahle, Isabel Oitavem e Helena Rocha

* Investigação apoiada pelos projectos A Herança de Hilbert na Filosofia da Matemática (PTDC/FIL-FCI/109991/2009) e A Noção da Demonstração Matemática (PTDC/MHC-FIL/5363/2012) financiados pela FCT/MEC.

O mais atrativo seria tentar antever o futuro, i.e., fazer uma identificação de problemas que os futuros matemáticos deveriam investigar. Assim podias eventualmente conseguir que ainda se falasse da tua palestra daqui a décadas.[1]

O matemático alemão David Hilbert (1862–1943) foi convidado a intervir, como um dos oradores principais, no Congresso Internacional dos Matemáticos que teve lugar em Paris, em 1900. A sugestão de apresentar uma lista de problemas que considerasse merecer a atenção dos matemáticos do novo século partiu do seu colega e amigo Hermann Minkowski (1864–1909) — ver citação acima. O impacto desta lista foi além das meras décadas previstas por Minkowski, pois hoje em dia, mais de um século depois, os Matemáticos ainda falam da palestra de Hilbert.

Hermann Minkowski

Na sua apresentação, Hilbert acentuou a importância de problemas na matemática com as seguintes palavras: «[a] grande importância de problemas específicos para o avanço da ciência matemática em geral e o seu papel para o trabalho do investigador concreto não pode ser negada. Quando um ramo da ciência oferece excesso de problemas, ele está vivo (. . .). Como na sua generalidade toda a ação humana persegue objetivos, a investigação matemática precisa de problemas. Através da resolução de problemas fortalece-se a força do investigador; ele encontra novos métodos e perspetivas, ele ganha uma visão mais abrangente e independente.» (Hilbert, 1901, p. 290)

O que ficou na história como os 23 problemas de Hilbert consiste numa lista de problemas, em aberto à data, abrangendo as mais diversas áreas da matemática e que foi publicada por Hilbert (1901). Na palestra proferida em Paris, Hilbert apresentou 10 desses problemas (Grattan-Guinness, 2000). Aqui traduzimos as designações dos 10 primeiros que constam na publicação acima mencionada:

1. O problema de Cantor da cardinalidade do contínuo.[2]
2. A inexistência de contradições nos axiomas aritméticos.
3. A igualdade de volume entre dois tetraedros com a mesma área de base e a mesma altura.
4. O problema da reta como menor ligação entre dois pontos.
5. A noção de Lie de grupo de transformações contínuo sem a assumção da diferenciabilidade das funções que definem o grupo.
6. O estudo matemático dos axiomas da física.
7. Irracionalidade e transcendência de determinados números.
8. Problemas sobre números primos.
9. Demonstração da lei da reciprocidade em corpos numéricos arbitrários.
10. Decisão da solubilidade de equações diofantinas.

A lista continua com problemas de praticamente todas as áreas da Matemática, alguns mais específicos, outros mais gerais,[3] e o seu sucesso foi imediato. Em 1900, no próprio ano em que foi apresentada, Max Dehn (1878–1952), um aluno de doutoramento de Hilbert, resolveu o terceiro problema. Outros problemas, como a hipótese de Riemann (incluída no problema 8), permanecem em aberto até aos nossos dias. Para outros ainda, veio a verificar-se que, tal como Hilbert os formulou, não são passíveis de uma solução definitiva. Porém todos inspiraram o desenvolvimento matemático durante o século XX (e depois), ver por exemplo Browder (1976). Por isso, esta intervenção de Hilbert é ainda hoje considerada como «provavelmente a mais importante apresentação de sempre num Congresso Internacional dos Matemáticos» (Alexanderson, 2014, p. 332).

Com base em exemplos anteriores, como o problema da independência do axioma das paralelas de Euclides que levou à descoberta de geometrias não-euclideanas, Hilbert teve a convicção que a investigação dos seus (e de outros) problemas iria contribuir para o desenvolvimento/avanço da Matemática. Segundo ele, ao encontrarmos soluções, estas podem conduzir a generalizações conceptuais, valiosas para abrir novas perspetivas, mas «ainda mais importante» (Hilbert, 1901, p. 296) pode ser a perceção de que, em casos em que não conseguimos resolver o problema em geral, é preciso remetermo-nos para problemas mais simples que ainda precisem de ser investigados, conduzindo assim a especializações.

No âmbito de uma discussão atual à data, Hilbert expressou ainda na sua intervenção em Paris um especial otimismo, afirmando que todo o problema matemático tem solução (Hilbert, 1901, p. 298): «Aqui está o problema, procura a solução. Podes encontrá-la por raciocínio puro; porque em matemática não há nenhum ignorabimus!» Esta frase foi a reação acesa de Hilbert à expressão de Emil DuBois-Reymond (1818–1896) «ignoramus et ignorabimus» (ignora-

Max Dehn

mos e ignoraremos). Hilbert foi e é, por vezes, alvo de críticas em virtude deste otimismo e pelo fato de alguns dos seus problemas terem tido «não soluções» inesperadas.

Por exemplo, Kurt Gödel (1906–1978) mostrou que o segundo problema não pode ser resolvido tendo por base o contexto formal considerado por Hilbert (ver, por exemplo, Kahle, 2006).

Tais resultados de impossibilidade não são, de forma alguma, deficiências das questões de Hilbert — pelo contrário: Hilbert previu explicitamente a possibilidade de resultados «negativos», referindo os exemplos da irracionalidade de $\sqrt{2}$ na matemática da Grécia antiga, bem como a independência do axioma das paralelas. Na prática, os resultados de impossibilidade contribuíram substancialmente para uma melhor compreensão da realidade matemática, pelo que os problemas correspondentes devem ser considerados como particularmente bem sucedidos. De certa forma, provar que não existe solução é, para Hilbert, uma solução admissível.

Gostariamos agora de dar um exemplo, mencionado no contexto do primeiro problema de Hilbert, que pode ajudar a desenvolver a nossa compreensão de conceitos matemáticos, mesmo quando não resolvemos o problema.

Na segunda parte da explicação do primeiro problema, Hilbert discute uma conjetura de Cantor: os números reais podem ser *bem-ordenados*. Um conjunto diz-se *bem-ordenável* se existe uma relação de ordem nesse conjunto tal que qualquer subconjunto não vazio tem um elemento mínimo relativamente à ordem considerada (ver, por exemplo, Franco de Oliveira, 1982). Os números naturais são trivialmente bem ordenados, pela relação < usual.

Os números inteiros já não são bem ordenados com base na relação <, mas podem ser facilmente bem ordenados, se considerarmos a relação $i \prec j$, se e só se $|i| < |j|$ ou $(|i| = |j|$ e $i < j)$. Esta ordem corresponde a

$$0 \prec -1 \prec 1 \prec -2 \prec 2 \prec \cdots$$

A conjetura de Cantor diz que o conjunto dos números reais é bem-ordenável. Porém nenhuma relação concreta que bem-ordena os números reais foi descrita por Cantor. Em 1904 Zermelo demonstrou que qualquer conjunto é bem-ordenável, usando o seu famoso *Axioma da Escolha*. Deste axioma resulta a existência de conjuntos que, em geral, não podem ser construídos de uma forma concreta. Em particular, este axioma permite provar a existência de uma boa-ordem para os números reais, mas não ajuda a construí-la.

Ainda nos anos 20 do século passado, Hilbert acreditava na possibilidade de dar uma definição concreta de uma relação que bem-ordena os números reais. Porque não? Para começar, precisamos de ser capazes de comparar quaisquer dois números reais. É possível identificar números reais com frações decimais infinitas. Formalmente, tais frações podem ser descritas por $n + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$ (sendo n a parte inteira, e $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ os dígitos decimais).

Para comparar dois números reais $n + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$ e $m + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot 10^{-i}$ podemos tentar comparar n e m e depois, sucessivamente a_i e b_i para $i = 1, 2, \ldots$ ad infinitum. Deparamo-nos com dois problemas, ambos para o caso de igualdade: para comparar expansões decimais iguais precisamos de efetuar um número infinito de comparações; se tivermos, por exemplo, as frações decimais $1,(0)$ e $0,(9)$ (que representam o mesmo número real 1), precisamos de comparar dois conjuntos infinitos *atuais* — o de todos os a_i's e de todos os b_i's — para verificar a igualdade.

Isto não precisa de ser o fim da história, porque a matemática fornece ferramentas para estudar conjuntos infinitos *atuais* (incluindo as suas comparações). Mas para usar tais ferramentas precisamos de saber mais sobre a estrutura *interna* destes conjuntos. E aqui surge a questão chave para a compreensão da situação: como é que os a_i's de uma representação $n + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$ de um número real podem ser dados? Uma resposta natural seria: por uma regra ou um programa que permita gerar ou calcular a_{i+1} a


Kurt Gödel


Georg Cantor

partir dos $a_1, \ldots, a_i$. Mas isto não pode ser; porque se os números reais fossem gerados por regras ou calculados por programas, então o conjunto dos números reais seria enumerável (porque todas as regras ou todos os programas formam conjuntos enumeráveis) e o teorema fundamental de Cantor diz-nos que o conjunto dos números reais é não-enumerável. Ou seja, existem números reais que não são computáveis (que não podem ser gerados por programas).

Afinal o problema da igualdade de números reais é intrínseco. Sabemos hoje que a igualdade de números reais não é decidível, i.e., não existem programas implementáveis em computadores que possam verificar em tempo finito para quaisquer dois números reais se estes são iguais. E com isto, também não pode existir uma boa-ordenação *concreta* dos números reais, se *concreta* implica a existência de um algoritmo que possa ser implementado num computador.

Desta reflexão simples sobre como poderíamos definir uma boa-ordenação dos números reais, ainda se pode iniciar uma nova área de questões: o que é a teoria matemática dos números computáveis, ou seja do subconjunto enumerável dos números reais que podem ser gerados (e tratados) por computadores. Esta teoria específica tornou-se, na era dos computadores, numa área importante de investigação dentro da teoria de computação.

Este exemplo ilustra como nós, ainda hoje, tiramos proveito de uma reflexão sobre questões da lista de Hilbert.

Com inspiração no sucesso da lista de Hilbert, cem anos depois tentou-se reviver a ideia e desafiar a comunidade matemática com uma lista de problemas. Assim, em 2000, a Fundação Clay (uma fundação privada, sediada em Cambridge, Massachusetts, que apoia investigação matemática) publicou os sete problemas seguintes, chamados *Problemas do Prémio Millenium*:

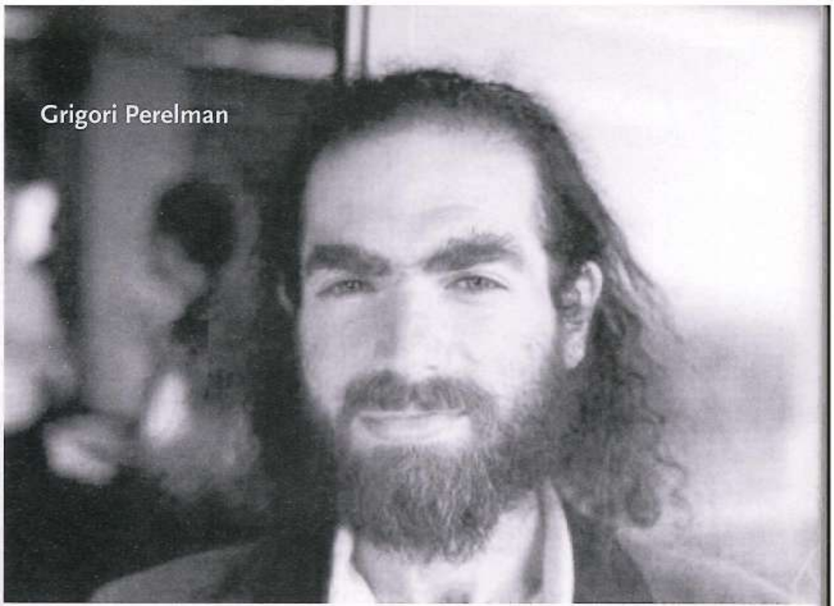
1. P versus NP.
2. A conjetura de Hodge.
3. A conjetura de Poincaré.
4. A hipótese de Riemann.
5. A existência de Yang-Mills e a falha na massa.
6. A existência e suavidade de Navier-Stokes.
7. A conjetura de Birch e Swinnerton-Dyer.

Obviamente, estes nomes são, per se, pouco esclarecedores;[4] mas note-se que a hipótese de Riemann já estava incluída — como *subproblema* — no oitavo problema de Hilbert.

Ao invés dos problemas de Hilbert, desta vez a cada problema apresentado é associado um prémio pecuniário no valor de 1.000.000 US$ (ver Precatado & Rocha, 2000). É questionável se um tal prémio é — ou deve ser — uma boa motivação para tentar resolver um destes problemas. Ironicamente, quando Grigori Perelman (nascido em 1966) re-

Bernard Riemann

Grigori Perelman



solveu um problema desta lista (o único resolvido até agora), a conjetura de Poincaré, ele declinou o prémio (aparentemente, por o ver como uma desvalorização do contributo de outros colegas na construção do caminho que depois levou à solução).

Como António Gedeão disse[5]

> *. . . o sonho comanda a vida,*
> *que sempre que um homem sonha*
> *o mundo pula e avança*
> *como bola colorida*
> *entre as mãos de uma criança.*

Os 23 problemas de Hilbert constituiram uma pauta de sonhos para as gerações vindouras, até aos nossos dias.

Notas

1 Hermann Minkowski numa carta a David Hilbert, Zurique, 5 de janeiro de 1900 (Minkowski, 1973, p. 119f).

2 Ver também a contribuição de António Fernandes nesta revista sobre este problema.

3 A lista completa dos problemas de Hilbert, com indicações sobre o estado da arte quanto às respostas atuais a estas questões, pode ser facilmente encontrada na *internet*, quer em português quer em inglês (neste caso, com muito mais informação), nomeadamente na *wikipedia*.

4 Como aconteceu com os problemas de Hilbert, a *internet* está repleta de informações sobre estes problemas.

5 Pedra Filosofal em Movimento Perpétuo, 1956.

Referências

Alexanderson, G. (2014). About the cover: Hilbert and the Paris ICM. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51(2), 329–334.

Browder, F. (ed.) (1976). *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, volume 28 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. New Brunswick, NJ: Rutgers University.

Franco de Oliveira, A. (1982). *Teoria de Conjuntos*. Lisboa: Livraria Escolar Editora.

Grattan-Guinness, I. (2000). A sideways look at Hilbert's twenty-three problems of 1900. *Notices of the AMS*, 47(7), 752–757. http://www.ams.org/notices/200007/fea-grattan.pdf.

Hilbert, D. (1901). Mathematische Probleme. *Archiv für Mathematik und Physik*, 3. Reihe, 1, 44–63, 213–237. (Reimprimido em Hilbert, 1935, p. 290–329; as páginas nas citações referem a esta edição.)

Hilbert, D. (1935) *Gesammelte Abhandlungen*, Band III. Berlin: Springer.

Kahle, R. (2006). Os teoremas de incompletude de Kurt Gödel. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 55, 63–76.

Minkowski, H. (1973). *Briefe an David Hilbert* [Cartas a David Hilbert]. Berlin: Springer. (Editado por L. Rüdenberg e H. Zassenhaus.)

Precatado, A. & Rocha, H. (2000). Problemas matemáticos milionários. *Educação e Matemática*, 60, 27.

Reinhard Kahle
CENTRIA CMA & Dep. de Matemática, FCT, UNL

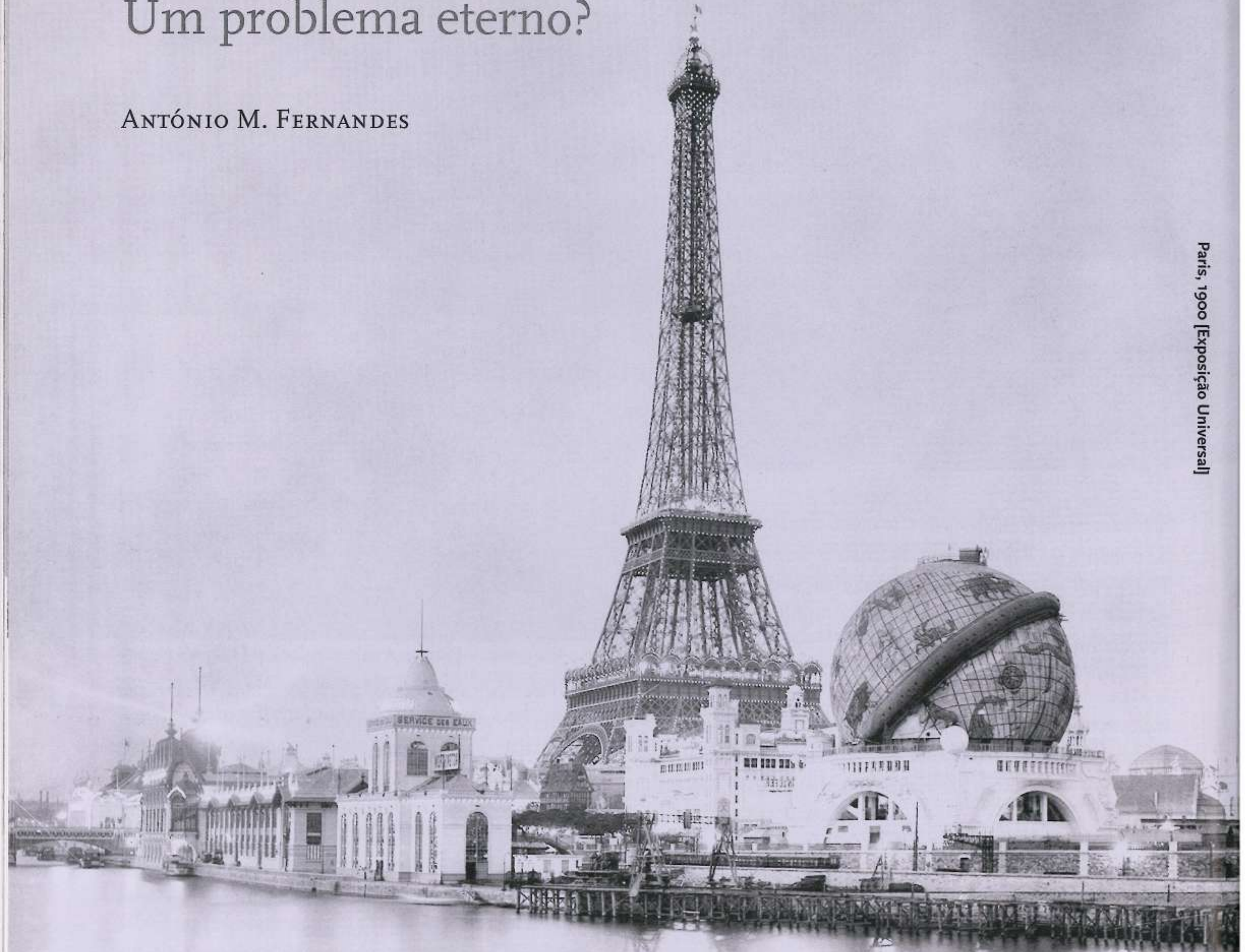
Isabel Oitavem
CMAF, FC-UL & Dep. de Matemática, FCT, UNL

Helena Rocha
UIED & Dep. de Matemática, FCT, UNL

O problema do contínuo

Um problema eterno?

António M. Fernandes



Paris, 1900 [Exposição Universal]

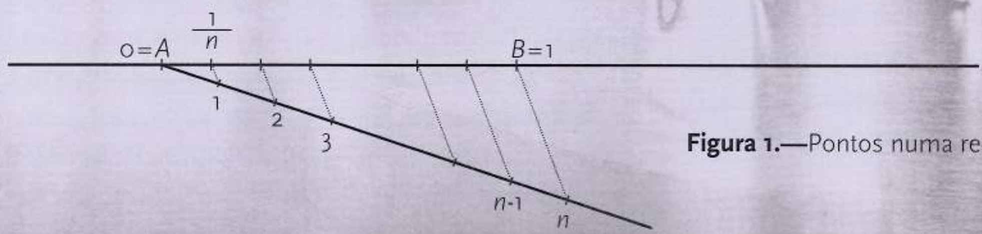


Figura 1.—Pontos numa recta com coordenadas racionais.

Dirigindo-se ao Congresso Internacional de Matemática (Paris, 1900), David Hilbert deu a conhecer uma lista contendo 23 problemas. A actividade matemática do Séc. XX viria a ser essencialmente determinada pelo conteúdo dessa lista.

Alguns anos antes, Richard Dedekind e Georg Cantor (independentemente) haviam descrito o análogo aritmético do *continuum* (a estructura da recta geométrica) obtendo *os números reais* a partir dos números racionais.

Uma vez fixados dois pontos A e B numa recta AB, podemos fazer corresponder a cada número racional um ponto dessa mesma recta (figura 1). Os pontos aos quais corresponde um desses números constituem a denominada

Figura 2.—David Hilbert

Figura 3.—Georg Cantor

recta racional. Que a recta racional não coincide com a recta geométrica é um facto conhecido desde a antiguidade.[1] O processo de estender os racionais aos reais constitui desta forma um processo de preenchimento das lacunas determinadas pela recta racional. Os pontos que correspondem aos *números reais* (entre os quais se incluem os racionais) constituem a *recta real*, aquela que finalmente identificamos com a *recta geométrica*.

A questão que encabeça a lista de Hilbert corresponde ao denominado *problema do contínuo de Cantor* que, de uma forma um tanto ou quanto prosaica, pode ser descrito como o *problema de saber quantos pontos existem numa recta*. A questão é à primeira vista absurda—*a recta tem infinitos pontos . . .*

Qual é o tamanho do infinito?

Em 1817 a Universidade de Halle (fundada em 1694) fundiu-se com a Universidade de Wittenberg (fundada em 1502), originando uma nova universidade que se passou a designar *Universidade de Martinho Lutero Halle-Wittenberg*. Wittenberg constituíra o mais importante pólo intelectual da Reforma Protestante sob a influência de Martinho Lutero e Philipp Melanchton. Wittemberg foi encerrada em 1813 no contexto das *Guerras Napoleónicas*. A fusão ocorreu na sequência do *Congresso de Viena* (1814–1815) que teve lugar após a queda do imperador francês.

A beligerância não conduziu apenas a reconfigurações geo-políticas. Este episódio motivou uma profunda reorganização do sistema universitário alemão, criando condições únicas para uma profíqua relação entre a matemática e a filosofia. Foi neste clima intelectual, entretanto solidamente constituído que, em 1867, e após ter concluído o seu doutoramento, Georg Cantor integrou a Universidade em Halle, lugar onde acabaria por permanecer durante toda a sua carreira académica.[2]

Como normalmente sucede com os génios visionários, Cantor não foi universalmente compreendido pelos seus pares. Alguns, influentes, como Leopold Kronecker, não se resignaram a uma incompreensão passiva. A tarefa de silenciar Cantor assumiu, neste caso, as proporções de uma *cruzada*.

Contudo, o seu *crime* foi apenas o de tentar responder à questão: *quão grande pode ser o infinito?*

O todo é maior que a parte

Aristóteles (384–322 a.C.) descreve na *Metafísica* o modo como as ciências dedutivas se devem organizar. Cada uma delas, segundo ele, deve proceder a partir de *primeiros prin-*

cípios. Alguns são comuns a qualquer ciência—os *axiomas* ou *noções comuns*—outros, são específicos de cada domínio—os *postulados*. É neste contexto que no primeiro livro dos *Elementos* surge como axioma: *O todo é maior que a parte*. A alegada natureza paradoxal da noção de *infinito* esteve quase sempre ligada a este *princípio*.

Existe uma tradição de análise continuada da noção de infinito desde Anaximandro (611–546 a.C.). Em plena idade média, quando esse escrutínio foi levado a cabo essencialmente por teólogos, a argumentação passou, curiosamente, a adquirir uma natureza lógico-matemática.

A opinião de Aristóteles foi neste assunto, como noutros, extraordinariamente influente: *o infinito actual não existe, o infinito só pode ser concebido potencialmente*. Contudo, esta posição não é sustentável mesmo aderindo ao modelo aristotélico dado que, para Aristóteles, o tempo não tem princípio nem fim e, o Universo e a Humanidade não possuem uma origem no tempo. Deste modo era difícil, para não dizer impossível, sustentar que no tempo presente não tivessem sido completadas um número infinito (actual) de revoluções da Lua em torno da Terra. Por outro lado, quando outros filósofos medievais, como Avicenna, procedendo na tradição aristotélica, se viram confrontados com a tentativa de conciliar a doutrina do estagiarita com a tese da sobrevivência individual da alma humana, as dificuldades encontradas não foram menores (embora neste caso, a solução concebida se tenha que considerar particularmente engenhosa).

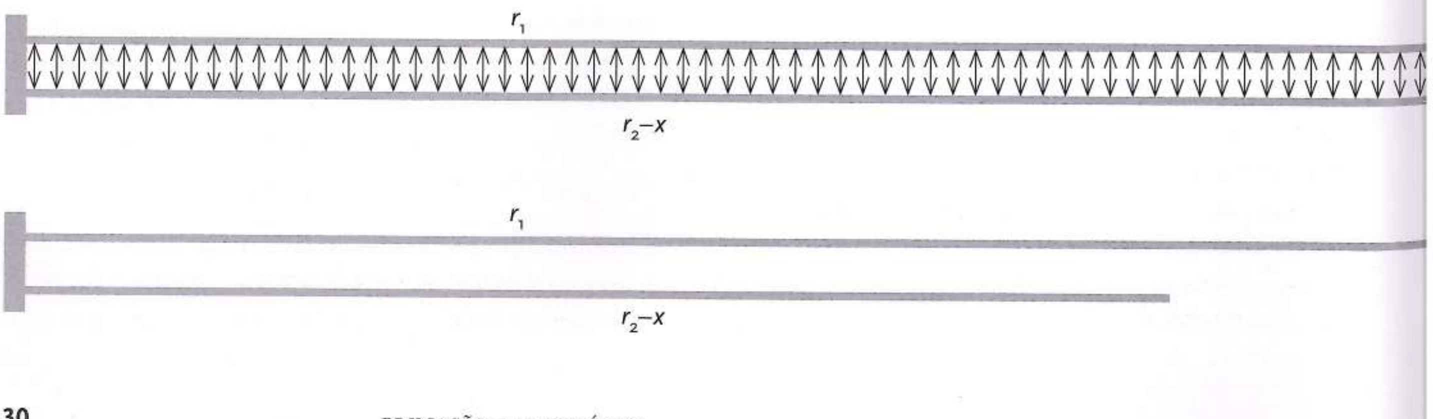
Avicena (c. 980–1037) foi um filósofo persa que escreveu tratados sob diversos assuntos, dedicando-se em particular à análise do *infinito*. Ele considerou a seguinte experiência mental: imaginemos dois raios (rígidos) que se projectam a partir da Terra, infinitamente. Designemos por x a parte inicial do segundo desses raios que, digamos, tem como extensão a distância entre a Terra e a Lua. Removamos essa parte x do segundo raio e movamos o remanescente de modo que a sua origem passe a coincidir com a origem do primeiro raio (a Terra). A experiência só pode ter como resultado uma das duas situações descritas na figura 4. Na primeira situação, existiria uma correspondência bijectiva (uma correspondência perfeita, nas palavras de Avicenna) entre os pontos de um raio e de outro, pelo que *seriam iguais, não obstante um ser uma parte do outro* (contradição!). Na segunda hipótese o raio original (infinito) seria a soma de x com o remanescente e, sendo ambos finitos, uma coisa infinita obter-se-ia da soma de duas finitas (contradição!).

Avicenna conclui que o *infinito actual* não pode existir mas, fruto de uma análise mais fina, observa que o seu argumento só se pode aplicar a *totalidades* cujos constituintes se encontrem ou *essencialmente ordenados* ou *espacialmente ordenados*. Desta forma, ao contrário do que suponha Aristóteles, certas totalidades infinitas podem existir, e.g. a totalidade das almas (visto não se poderem ordenar essencialmente ou espacialmente como os pontos de uma recta).

Este episódio é interessante pois revela que este movimento, de uma argumentação física para uma argumentação mais abstracta de teor lógico-matemático, teve o poder de libertar estas concepções de amarras desnecessárias. Aquelas que restam resumem-se ao axioma aristotélico segundo o qual, *o todo é maior que a parte*. As contradições com este princípio são geralmente obtidas constatando a existência de uma bijecção entre uma certa colecção de objectos e uma sua parte própria e, interpretando a existência de uma tal bijecção como um testemunho do facto de terem o mesmo número de elementos.

Muitos séculos mais tarde Galileu Galilei (1564–1642), nos seu *Diálogos sobre as duas novas ciências*, é confrontado com idêntico dilema. Ele considera os números naturais $1,2,3,\ldots$ e os números naturais que são quadrados perfeitos $1,4,9,\ldots$ e constata a existência de uma bijecção (correspondência bi-unívoca) entre ambas as colecções, designadamente a correspondência $n \leftrightarrow n^2$. Conclui então que se os números naturais e os quadrados perfeitos pudessem

Figura 4.—A experiência mental de Avicena



ser vistos como totalidades, a existência daquela correspondência forçar-nos-ia a concluir que *o todo não é maior que a parte*.

Cantor versus Aristóteles

Considerando os conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$ e $C = \{\bullet, \circ, *\}$ não existe qualquer dificuldade em concordar com as afirmações: *A e B têm a mesma quantidade de elementos* e *a quantidade de elementos em A é menor que em C*.[3]

A *quantidade de elementos num conjunto* corresponde à sua *cardinalidade* e dois conjuntos X, Y com a mesma cardinalidade dizem-se *equipotentes* escrevendo-se, simbolicamente, $|X| = |Y|$. (No exemplo acima tem-se então que $|A| = |B|$.)

Conclui-se que A e B são equipotentes simplesmente contando os elementos em ambos os conjuntos (ambos têm *dois* elementos). Mas, para generalizar a noção de cardinalidade (ou de equipotência) a conjuntos infinitos, como fez Cantor, não podemos depender do processo de contagem, dado não ser possível percorrer todos os elementos de um conjunto infinito *contando-os*.

A verificação da relação $|A| = |B|$ pode, contudo, efectuar-se sem envolver directamente um processo de contagem. Continuando a considerar A e B, é possível definir uma correspondência *biunívoca* (ou, como também se diz, uma *bijecção*) entre os elementos de A e os elementos de B. Isto traduz-se na existência de uma *função* $f : A \to B$ que é *injectiva* e *sobrejectiva*.

Uma função $f : X \to Y$ é *injectiva* se dados $x, y \in X$, com $x \neq y$, os elementos que lhes correspondem através de f (que iremos denotar por $f(x), f(y)$, respectivamente) são igualmente diferentes (mais formalmente: $(\forall x, y \in X)[x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$); e é *sobrejectiva* se para qualquer elemento em Y existe um elemento em X que lhe corresponde através de f, i.e. para qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ (ou, mais formalmente: $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)$).

Retomando o exemplo inicial, a função $f : A \to B$ definida por $f(a) = x$ e $f(b) = y$ testemunha que $|A| = |B|$, uma vez que é bijectiva.

Os exemplos acima permitem-nos ainda fazer uma observação interessante: é fácil concluir que não pode existir nenhuma aplicação bijectiva $h : A \to C$ (como $a \neq b$, depois de escolhermos as respectivas imagens [diferentes] sobra um terceiro elemento que não pode ser imagem de a ou de b, caso contrário um mesmo objecto teria duas imagens, o que é impossível numa função). Também não pode existir uma função bijectiva $g : C \to A$. (O leitor poderá constatar que uma função $g : C \to A$ nunca poderá ser injectiva.)

Igualmente interessante: a não existência de uma bijecção entre os conjuntos A e C revela que possuem cardinalidades diferentes mas, a existência de aplicações injectivas $h : A \to C$ (ou, o que é o mesmo, de aplicações sobrejectivas $g : C \to A$) testemunham o facto de a cardinalidade de A não ser superior à cardinalidade de C.

Vale a pena notar que no caso finito, estas considerações estão intimamente ligadas ao processo de contagem. De facto, os números naturais são, no contexto da teoria de conjuntos, introduzidos de acordo com o seguinte esquema:

$$0 := \emptyset;\ 1 := \{0\};\ 2 := \{0, 1\};\ 3 := \{0, 1, 2\};\ \cdots;$$
$$n + 1 := \{1, 2, \ldots, n\};\ \cdots.$$

(Denotamos acima por $\emptyset$ o *conjunto vazio*, i.e. o conjunto que não possui quaisquer elementos.) Desta forma, dizer que o conjunto C acima tem três elementos é o mesmo que dizer que existe uma bijecção entre C e o *conjunto* $3 = \{0, 1, 2\}$.

De uma maneira geral, diz-se que um conjunto X é finito se existe uma bijecção entre X e um natural $n \in \mathbb{N}$.

Cantor generalizou as considerações anteriores permitindo-se comparar, do ponto de vista da cardinalidade, quaisquer conjuntos, finitos ou não. Desta forma, dados dois conjuntos X, Y dizemos que são *equipotentes* (continuando a escrever $|X| = |Y|$) se existe uma bijecção $f : X \to Y$. Por outro lado, dizemos que a cardinalidade de X não excede a cardinalidade de Y (escrevemos $|X| \leq |Y|$) se existe uma função *injectiva* $h : X \to Y$ (pode verificar-se que isto é equivalente à existência de uma aplicação *sobrejectiva* $g : Y \to X$).

Tem-se:

- se $|X| = |Y|$ então $|Y| = |X|$ (se existe uma bijecção $f : X \to Y$ então, a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ é igualmente uma bijecção).
- se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$ então $|X| \leq |Z|$ (se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são injectivas, então a composição $g \circ f : X \to Z$ é injectiva).
- se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$ então $|X| = |Y|$, i.e. se existem aplicações injectivas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ então existe uma bijecção entre X e Y (este resultado não trivial é conhecido como teorema de Cantor-Shröder-Bernstein).

A notação $|X| < |Y|$ abrevia $|X| \leq |Y|$ e $|X| \neq |Y|$, ou seja, o facto de a cardinalidade de X ser estritamente inferior à cardinalidade de Y.

O próprio Cantor, usando estas novas noções, foi capaz de estabelecer alguns resultados surpreendentes. Em primeiro lugar, constatou a existência de cardinalidades infinitas diferentes. De acordo com o resultado conhecido por *Teorema de Cantor* tem-se que $|X| < |P(X)|$, para qualquer conjunto X. Por $P(X)$ denota-se o conjunto das partes de X que é constituído por todos os subconjuntos de X—um conjunto A é *subconjunto* de um conjunto X (escreve-se $A \subset X$) se todo o elemento de A é elemento de X. Por convenção o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto X e, como é claro a partir da definição $X \subset X$, para qualquer X.

Para estabelecer o teorema de Cantor há que estabelecer duas coisas: (1) a existência de uma função injectiva $f : X \to P(X)$(o que permitirá estabelecer $|X| \leq |P(X)|$); (2) a inexistência de uma função sobrejectiva $h : X \to P(X)$ (o que permitirá concluir que $|X| \neq |P(X)|$). De (1) e (2) decorre que $|X| < |P(X)|$.

Comecemos por (1): a função $f : X \to P(X)$ definida por $f(a) := \{a\}$ é injectiva. (A conclusão usa o facto de dois conjuntos serem iguais se e só se possuírem os mesmos elementos. Desta forma dois conjuntos singulares $\{a\}$ e $\{b\}$ são iguais se e só se $a = b$.)

Quanto a (2): a não existência de uma sobrejecção $h : X \to P(X)$ far-se-á por redução ao absurdo, ou seja, vamos supor a existência de uma tal sobrejecção e com isso deduzir uma contradição. (Desta forma a existência de uma sobrejecção $h : X \to P(X)$ revela-se insustentável pelo que teremos de concluir a sua não existência.) Suponhamos então que $h : X \to P(X)$ é uma sobrejecção. Isto significa que dado um qualquer $A \subset X$, existirá sempre um elemento $a \in X$ tal que $A = h(a)$. Uma vez que para qualquer $a \in X$ se tem que $h(a) \subset X$ faz sentido considerar o subconjunto de X constituído pelos $a \in X$ tais que a não é elemento de $h(a)$. Definimos assim:

$$\Gamma = \{a \in X \mid a \notin h(a)\}$$

que é um subconjunto de X. Como estamos a supor que h é sobrejectiva, existe $b \in X$ tal que $h(b) = \Gamma$ e, é agora que *o milagre se opera:*

$$b \in \Gamma \textit{ se e só se } b \notin h(b) \textit{ se e só se } b \notin \Gamma,$$

uma vez que $\Gamma = h(b)$, obtendo-se desta forma a contradição pretendida.[4]

Fazendo mais algumas considerações adicionais, este resultado permite desde logo mostrar que a cardinalidade dos números naturais é estritamente inferior à cardinalidade dos números reais. Com efeito, o intervalo $[0, 1]$ tem a mesma cardinalidade de $P(\mathbb{N})$. Com efeito, qualquer número real $x \in [0, 1]$ possui uma *representação diádica*, ou seja, pode ser escrito na forma:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{2^2} + \frac{\alpha_2}{2^3} + \frac{\alpha_3}{2^4} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^{n+1}} + \cdots \qquad (*)$$

onde cada $\alpha_i \in \{0, 1\}$. O critério para obter a representação diádica é o seguinte: $\alpha_0 = 0$ se $x < 1/2$ e $\alpha_0 = 1$ se $x \geq 1/2$. Depois disso, de uma maneira geral,

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 0 & \left(\text{se } x < \frac{\alpha_0}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^{n+1}}\right) \\ 1 & \left(\text{se } x \geq \frac{\alpha_0}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$$

Como a representação geométrica deixa antever, à medida que vamos somando as parcelas na *soma formal* (*) o resultado vai-se aproximando progressivamente do valor x coincidindo, no limite, com o próprio x. Se x for um número racional, então a partir de certo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\alpha_n = 0$. Caso contrário, existe uma infinidade de naturais $n \in \mathbb{N}$ para os quais $\alpha_n = 1$.

De qualquer forma, o que é importante para o argumento é que, por este processo, existe uma correspondência biunívoca entre os números no intervalo $[0, 1]$ e as sequências infinitas de *zeros* e *uns*. Finalmente, existe também uma correspondência biunívoca entre o conjunto de tais sequências e $P(\mathbb{N})$, designadamente aquela que a $A \subset \mathbb{N}$ faz corresponder a sequência infinita $(\alpha_0^A, \alpha_1^A, \alpha_2^A, \ldots, \alpha_n^A, \ldots)$ que se define através de

$$\alpha_n^A = 1 \textit{ se e só se } n \in A.$$

Tem-se então:

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| = |[0, 1]| \leq |\mathbb{R}|.$$

Poderíamos ser levados a pensar que o mesmo tipo de relação se verifica entre as cardinalidades de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$. Com efeito, à primeira vista, $\mathbb{Q}$ parece ter muito mais elementos que $\mathbb{N}$, sobretudo devido à *densidade da ordem dos racionais*, i.e. devido aos facto de entre dois racionais existir sempre um terceiro. Contudo, esse não é o caso e tem-se $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Por um lado, é claro que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$. Por outro lado, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$ pois existe uma função injectiva $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ que se define de acordo com o seguinte: dado um racional $q \in \mathbb{Q}$ começamos por escrevê-lo na forma de uma fracção irredutível p/q. Tem-se assim que $r = p/q$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Posto isto, define-se (usando o teorema fundamental da aritmética),

$$f(r) = \begin{cases} 0 & (\text{se } r = 0) \\ 2 \cdot 3^{p+1} \cdot 5^{q+1} & (\text{se } r > 0). \\ 2^2 \cdot 3^{p+1} \cdot 5^{q+1} & (\text{se } r < 0) \end{cases}$$

Estes exemplos, e outros considerados por Cantor considerou, conduziram-no à questão de saber se, dado um conjunto infinito qualquer de números reais $X \subset \mathbb{R}$, se terá sempre que $|X| = |\mathbb{R}|$ ou $|X| = |\mathbb{N}|$ ou se, pelo contrário,

Figura 6.—Da esquerda para a direita: Ernst Zermelo e Abraham Faenkel

existirão *cardinalidades intermédias*. Este é na sua essência o *problema do contínuo de Cantor*.[5]

A *hipótese do contínuo* está intimamente ligada a este problema mas envolve um outro aspecto—o princípio da *boa-ordenação*, que estabelece a possibilidade de fixar em cada conjunto uma *boa-ordem*. (Para uma discussão mais detalhada deste princípio ver o artigo de Isabel Oitavem, Helena Rocha e Reinhard Kahle, neste mesmo número.)

As respostas de Kurt Gödel e Paul Cohen

Durante toda a sua vida, Cantor perseguiu, sem êxito, uma resposta para a questão do *continuum*. Em diversas ocasiões julgou ter demonstrado que a *hipótese do contínuo* era verdadeira e, em outras tantas que era falsa. Em todos os casos acabou por encontrar alguma falha na sua argumentação. Sabemos hoje que uma tal decisão não pode ocorrer no seio da teoria de conjuntos, pelo que os esforços de Cantor estariam sempre condenados ao fracasso—a hipótese do contínuo é *independente* dos axiomas da teoria de conjuntos. É uma situação análoga àquela que envolveu o famoso *Postulado V* de Euclides, do qual decorre que através de um ponto exterior a uma recta se pode fazer passar uma única paralela. O *Postulado V* é independente da denominada *geometria pura*, ou seja, a geometria cujos axiomas excluem o *Postulado V*.

Em termos muito gerais, suponhamos que um dado domínio da matemática é axiomatizado através de axiomas $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$. Estes descrevem factos que se assumem verdadeiros acerca de certo tipo de objectos cuja natureza se pretende investigar (podem ser pontos, rectas, planos, etc. . . ., no caso da geometria, certos tipos de entidades algébricas no caso da álgebra, ou conjuntos, no caso da teoria de conjuntos). Se, utilizando os axiomas $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ como hipóteses for possível demonstrar uma determinada sentença ξ (simbolicamente escrevemos $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots \vdash \xi$) então em qualquer *interpretação* que se considere dos objectos e relações básicas onde os axiomas sejam verdadeiros, também ξ será verdadeira. (Isto acontece porque as demonstrações propagam a verdade.)

Desta forma, perante uma sentença ξ, se for possível descrever interpretações numa das quais ξ é verdadeira e noutra ξ é falsa, somos forçados a concluir que nem ξ nem a sua negação (que se denota $\neg\xi$) se podem demonstrar a partir dos axiomas $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$.

Detenhamo-nos por mais algum tempo sobre esta noção de *interpretação*. De modo a mantermo-nos próximos do nosso objecto de discussão faremos algumas considerações sobre o caso da teoria de conjuntos.

Uma *interpretação* da teoria de conjuntos consiste numa colecção V de objectos que serão vistos como *conjuntos*—o *universo da interpretação*—e, uma relação E que descreve, ou *interpreta*, a relação de pertença: dados dois objectos x, y em V, se x se relaciona com y do ponto de vista de E, isso

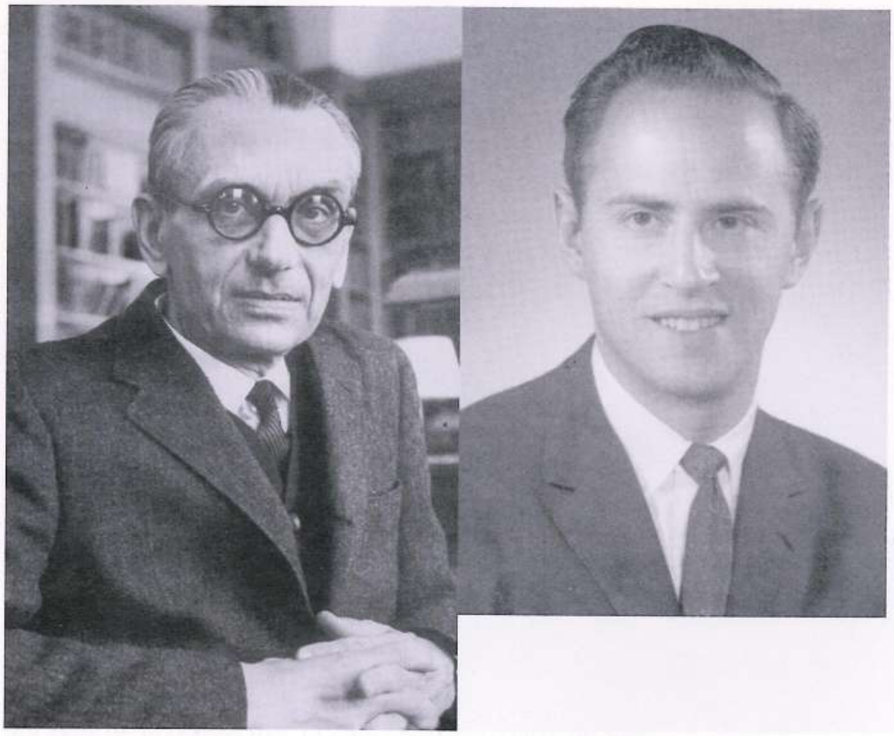


Figura 7.—Da esquerda para a direita: Kurt Gödel e Paul Cohen

significa que x é um elemento de y na interpretação (V, E). Como se depreende, a relação E é *binária* ou seja descreve uma relação que envolve pares de elementos sendo por esse motivo que do ponto de vista matemático se identifica E com um conjunto (no sentido natural) de pares ordenados de elementos de V. Finalmente, e para tornar a escrita mais natural, em vez de escrever $(x, y) \in E$ escreveremos xEy.

Consideremos como exemplos: (V_1, E_1) e (V_2, E_2) onde definimos $V_1 = \{*, \circ, \bullet\}$, $E_1 = \{(\bullet, \circ), (\bullet, *)\}$ e $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $E_2 = \in$. Na interpretação (V_1, E_1) o objecto $\bullet$ é o conjunto vazio (o único conjunto do universo V_1 que não tem elementos [do ponto de vista de E_1]). Esta interpretação tem ainda outra característica interessante. De acordo com a concepção cantoriana, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos. Mais tarde, quando Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel axiomatizaram a teoria de conjuntos, esta concepção traduzir-se-ia no denominado *axioma de extensionalidade*. Ora, na interpretação (V_1, E_1) o axioma da extensionalidade é falso porque os *conjuntos* $*$ e $\circ$ têm os mesmos elementos (o conjunto $\bullet$) e, no entanto, são diferentes. Uma simples verificação mostrará que na segunda interpretação—(V_2, E_2)— este axioma é verdadeiro.

Em 1938 Kurt Gödel cumpriu uma primeira etapa na tentativa de clarificar a natureza da hipótese do contínuo. Essencialmente, ele foi capaz de descrever uma interpretação da teoria de conjuntos — o *universo construtível* de Gödel— onde todos os axiomas são verdadeiros e, adicionalmente, a hipótese do contínuo também é verdadeira. A existência desta interpretação veio revelar que na teoria de conjuntos não é possível demonstrar que a hipótese do contínuo é falsa ou, como se diz em terminologia mais técnica, que a hipótese do contínuo é *consistente* com a teoria de conjuntos. (As demonstrações propagam a verdade, o que significa o seguinte: se numa interpretação as hipóteses da demonstração [neste caso os axiomas] são verdadeiros então as sentenças demonstradas também são necessariamente verdadeiras.)

Gödel perseguiu activamente a resposta definitiva à questão do *continuum*. Restavam agora duas hipóteses: ou a teoria de conjuntos demonstrava a hipótese do contínuo ou então, deveria existir um outro tipo de interpretação onde os axiomas da teoria de conjuntos seriam verdadeiros e a hipótese do contínuo, falsa. A própria abordagem de Gödel revelou que seria difícil encontrar essa interpretação, a menos que se inventasse um método radicalmente novo. A razão é simples, Gödel descreveu um método através do qual (de maneira uniforme), se poderia obter dentro de qualquer universo de conjuntos, um sub-universo ou, como também se diz *um modelo interno* que satisfaz a hipótese do contínuo. A menos que nos dispunhamos a considerar universos de certo modo *estranhos* se operarmos a construção godeliana então, independentemente do universo de conjuntos onde a efectuemos, obtemos sempre o mesmo modelo interno (que se denota L). Assim, se fosse possível descrever um processo análogo ao descrito por Gödel que conduzido no seio de um universo de conjuntos arbitrário, desse origem a um modelo interno onde a hipótese do contínuo fosse falsa, então isso sucederia se, em particular, fosse feito no seio de L. Contudo, L não possui outros modelos internos que não sejam ele próprio. Desta forma ter-se-ia que o modelo descrito pela construção seria o próprio L pelo que, em L a hipótese do contínuo deveria ser falsa e isso, não sucede.

Viria a acontecer já na década de 1960 que Paul Cohen equipado de ideias radicalmente novas (como era necessário) foi capaz de produzir uma outra interpretação da teoria de conjuntos onde a hipótese do contínuo é falsa. (Uma vez que o método dos modelos internos, usado por Gödel, estava fora de questão, Cohen recorreu aos denominados modelos exteriores, i.e. interpretações cujo universo é uma extensão de um universo de conjuntos previamente considerado.)

Desta forma, a teoria de conjuntos também não é capaz de demonstrar a hipótese do contínuo.

Conjuntamente, os resultados de Gödel e de Cohen mostram que a hipótese do contínuo é independente dos axiomas da teoria de conjuntos. A questão do *continuum* de Cantor ficava assim resolvida . . . *Será assim?*

Matemática: um mundo inacabado . . .

Não sem algum espanto a comunidade matemática acolheu os famosos resultados de incompletude (Gödel, 1931).

Pressupondo um determinado aparato lógico de fundo, não importa que axiomas fixemos (desde que possamos decidir, perante uma sentença se é ou não um axioma) existirão sempre proposições que não se podem demonstrar ou refutar nessa axiomática (dizem-se *independentes* dessa axiomática). A Matemática é pois uma *obra inacabada*. Os axiomas da teoria de conjuntos, são insuficientes (e sê-lo-ão sempre) para decidir todas as questões acerca do universo de conjuntos e, em última análise, todas as questões matemáticas. A *geometria pura* não consegue decidir o axioma das paralelas e é possível expandi-la de formas que são incompatíveis entre si mas que, não obstante, fornecem geometrias alternativas, todas elas interessantes. Nesse caso não necessitamos de optar por uma delas, já que todas elas constituem sistemas onde se pode desenvolver matemática importante.

Já no caso de um sistema fundacional, como a teoria de conjuntos, optando por conservar vários sistemas (incompatíveis entre si) corresponde a manter activo, o desenvolvimento de *várias Matemáticas*. A questão adquire pois uma natureza diferente e, muito embora não exista razão, a priori, para que a actividade matemática não se ocupe de *diversas Matemáticas* em simultâneo, essa não tem sido a prática seguida.

De resto uma tal postura pressuporia uma atitude filosófica face à Matemática muito peculiar. Mas independentemente de uma tal atitude se tornar predominante e determinar o curso destas opções, a verdade é que subsistirá sempre uma segunda dificuldade: não é razoável aceitar a hipótese do contínuo, ou a sua negação como axiomas.

Quando Euclides fixou os axiomas da Geometria Euclidiana, esses axiomas foram escolhidos com base na evidência do seu carácter de verdade. Mesmo que num dado momento todos pudéssemos concordar sobre esse carácter, não deixaria de ser uma escolha fundada num certo grau de subjectividade (que, neste caso, o tempo se encarregou de elucidar). No caso da teoria de conjuntos (o actual sistema fundacional) a escolha dos axiomas não foi feita com base no mesmo critério, os axiomas foram isolados com base na sua capacidade de descrever os diferentes aspectos da Matemática, por um lado, e por descreverem aspectos essenciais da estrutura de um *idealizado* universo de conjuntos, por outro. E esta é a razão pela qual não podemos simplesmente adoptar a hipótese do contínuo ou a sua negação como um novo axioma. Nenhuma dessas asserções caracteriza de forma directa um aspecto dessa estrutura.

O desafio permanece vivo: isolar um princípio estrutural que permita decidir a hipótese do contínuo. Deste ponto de vista, o desafio de Hilbert permanece activo. A resposta que lhe será dada trará certamente uma nova luz sobre a essência da Matemática e, provavelmente sobre o modo como escolheremos, no futuro, como ela evoluirá.

Notas

[1] A descoberta da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado que corresponde à irracionalidade de $\sqrt{2}$ é um facto geralmente atribuído à escola pitagórica.

[2] Não obstante o seu desejo em se mudar para universidades mais importantes como Berlim ou Göttingen

[3] Desde que se admita nestes exemplos que símbolos diferentes denotam objectos diferentes.

[4] De acordo com alguns historiadores da matemática este resultado de Cantor estará na origem do famoso paradoxo de Russell.

[5] Não é difícil constatar que se $X \subset Y$ então $|X| \leq |Y|$, por outro lado a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é a menor cardinalidade infinita, i.e. se X é infinito então $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

António M. Fernandes
Dep. Matemática, IST—Universidade de Lisboa

A resolução de problemas no ensino da Matemática

Uma entrevista a três professsoras

Sendo esta edição da Educação e Matemática um número temático sobre a resolução de problemas, decidimos saber a opinião de três professoras de Matemática, de ciclos de escolaridade diferentes, sobre este tema: a Marta Procópio, a Alice Rocha e a Helena Fonseca. A Marta terminou a sua licenciatura em Matemática e Ciências em 2002, iniciou o seu percurso profissional no 2.º ciclo e está a lecionar no 1.º ciclo desde 2007. Esteve na DGIDC, atual DGE, durante dois anos a acompanhar o programa *Mais Sucesso Escolar*. A Alice, com formação inicial em Engenharia, começou a dar aulas no final dos anos 80 e trabalhou sempre no 2.º ciclo, tendo sentido a necessidade de se associar na APM muito cedo, por a sua formação inicial não ser na via de ensino. A Helena concluiu a sua licenciatura em Ensino da Matemática em 1994, e desde então lecionou no 3.º ciclo e no ensino secundário, com um interregno de cinco anos, em que lecionou na licenciatura em Ensino da Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

A entrevista realizou-se na sede da APM e teve a duração de cerca de duas horas e foi conduzida por Lina Brunheira e por Sílvia Zuzarte da redação da Educação e Matemática. O texto que publicamos é a transcrição editada da gravação, previamente analisado pelas professoras entrevistadas.

Educação e Matemática (EM): Que memória é que vocês têm da vossa experiência pessoal com a resolução de problemas?

Marta Procópio (MP): A minha primeira memória — e eu ontem à noite pensei nisto — tem a ver logo com a infância, porque eu sempre tive uma maior apetência para a área da matemática. Quando eu era pequena existiam uns caderninhos da Disney que tinham desafios. E, alguns de português, não é, mas eu claro que fazia primeiro todos os de matemática. E portanto, para mim, a primeira ideia que tenho enquanto memória da resolução de problemas tem a ver com esses desafios que eu ia fazendo enquanto criança, e depois fiquei muito desiludida quando cheguei ao 1.º ciclo e aquelas coisas que se fazia de matemática não tinham desafio nenhum. (. . .) Em termos de resolução de problemas era muito . . . aqueles problemas muito fechados, são aquilo a que chamamos exercícios, portanto é essa a memória que tenho.

EM: Já agora, para ti o que é que eram os problemas, o que é que identificavas como problemas?

MP: Para mim um problema era um desafio. Portanto era algo que eu não sabia a resposta à partida, não sabia o caminho que ia escolher. Portanto, tinha que arranjar uma estratégia para chegar a um resultado e depois confrontava os meus pais com a estratégia que eu tinha usado para ver se eles faziam da mesma maneira, se não faziam, pronto. Quando na escola me colocavam um problema, havia sempre um caminho, portanto a professora estruturava aquilo tudo no quadro e eu achava que não tinha piada nenhuma, porque éramos quase como cordeiros que seguíamos todos o mesmo caminho e pensávamos todos igual. Portanto, para mim, a resolução de problemas tem este caráter de desafio, de encontrar a resposta e de encontrar um caminho para lá chegar.

EM: Ok, então, Lena?

Helena Fonseca (HF): Assim a primeira memória que eu tenho é na parte educacional do curso de ensino da Matemática, portanto no 4.º ano em que na disciplina de Metodologia da Matemática houve uma parte em que trabalhámos a resolução de problemas com o professor Paulo Abrantes e foi aí que eu acho que comecei a tomar consciência de que realmente, para além daqueles exercícios que era aquilo que eu fazia, existiam problemas de tipo diferente, com desafios, com problemas para os quais não conhecíamos a resposta. Lembro-me de ele nos apresentar vários problemas e nós nas aulas de Metodologia explorávamos esses problemas ou levávamos para casa e apresentávamos no dia seguinte e portanto foi aí que eu tomei consciência da importância desse tipo de trabalho, das características desse tipo de trabalho, de tantas variedades de problemas

Alice Rocha

que existiam e pronto, foi aí, digamos, que nasceu o bichinho que depois me levou também a começar a experimentar com os meus alunos a resolução de problemas.

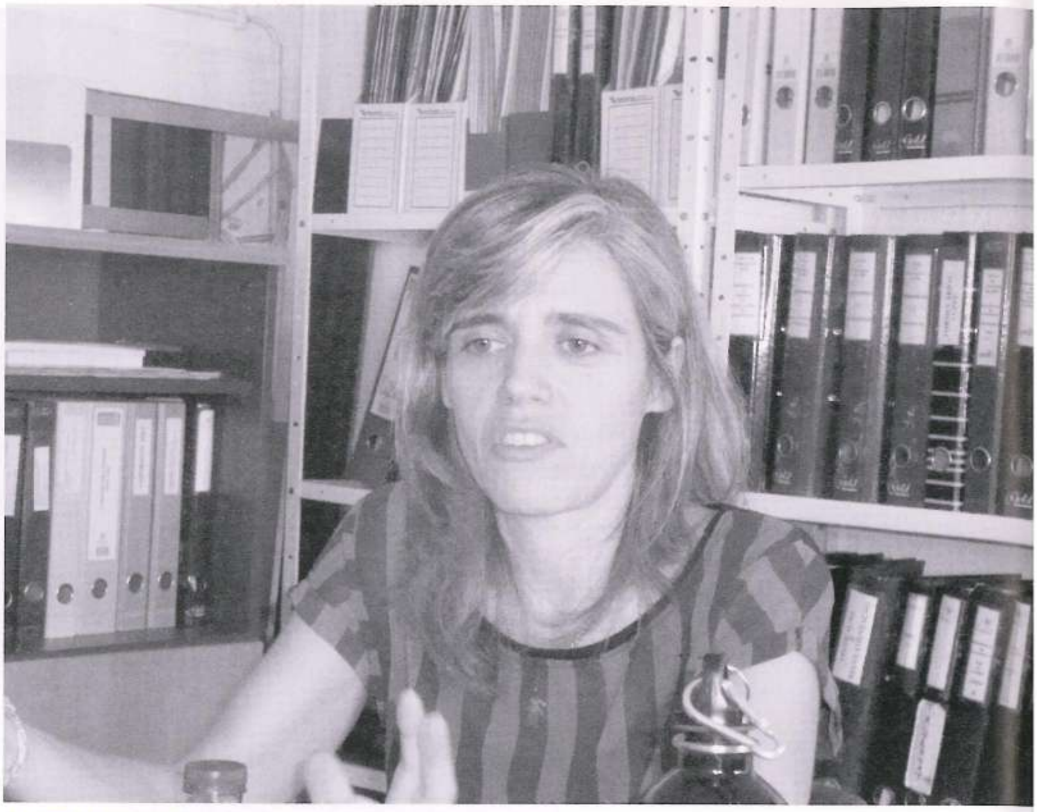
EM: Ok, então vamos passar para a Alice . . .

Alice Rocha (AR): Sim, eu estou muito perto do que a Helena diz, realmente em miúda não tenho assim memórias da resolução de problemas com o conceito que eu hoje tenho, no entanto, eu sempre associei a Matemática à resolução de problemas. Recordo-me realmente que ficava muito tempo de volta da Matemática, que até me esquecia, conseguia estar horas a estudar Matemática, a resolver problemas de Matemática, o que não acontecia com as outras disciplinas, isso eu recordo, que o tempo que lhe dedicava me dava prazer. Se era resolução de problemas, creio que não. Ouvi falar a Marta da questão dos desafios, não tenho nenhuma memória de problemas que eu hoje coloco aos alunos que existisse na altura. Agora há uma coisa, eu sempre associo a Matemática a resolução de problemas e cálculo mental. Para mim a Matemática era isso! Se seria uma verdadeira resolução de problemas ou não, não sei. Sei que quando decido realmente ingressar no ensino, me associei muito cedo à Associação de Professores de Matemática, e ia a todas as sessões que havia sobre a resolução de problemas. Não sei exatamente [porquê], mas talvez porque achava aquilo central, que tinha que saber muito daquilo. Recordo [a nossa colega] Maria José Delgado e há duas ou três coisas que eu reconheço que ainda hoje fazem parte da minha aula. Recordo que ela falava que nós tínhamos que ser entusiásticos na apresentação de problemas, que isso era logo meia conquista, porque para promover a resolução de problemas na sala de aula, isso tinha que vir de nós. A outra [coisa que recordo] era a persistência, mas essa persistência era para dar tempo ao aluno para resolver, era o tempo para nós observarmos, [para a] reflexão. E uma outra [coisa] que permanece até hoje em qualquer coisa que faça é realmente personalizar os problemas. Eu agora entendo, quando ela dizia: «personalizar o problema» . . . achava curioso mas eu recordo que era o que nós hoje falamos muito da contextualização, que é muito importante para a resolução.

EM: Então vamos aproveitar já a deixa, porque a Alice de certa forma já entrou na questão da sala de aula, que é o tema, talvez o principal, e a minha primeira pergunta então é: Como é que entram os problemas na vossa sala de aula, e em particular, com que objetivo ou objetivos é que usam os problemas.

AR: Eu utilizo os problemas de várias formas, às vezes pode ser para abordar um conteúdo sem que eles o tenham dado . . . o que à partida se calhar é capaz de se questionar, se a resolução de problemas, pelo menos ultimamente do que se tem lido, não é mais para consolidar, porque eu também considero o problema muitas vezes para consolidar, para mobilizar conhecimentos.

EM: Então se calhar agora vamos falar no caso do 1.° ciclo,



Helena Fonseca

até porque eu tenho alguma curiosidade em perceber até que ponto é que aquela experiência de infância da Marta depois tem influência na maneira como os problemas aparecem na sala de aula.

MP: Pois têm, e eu acho que por esse motivo eu também preferi ficar no 1.º ciclo a voltar ao 2.º. Depois, em termos de 1.º, 2.º ano de escolaridade, a resolução de problemas na minha sala de aula parte muito para o pensar matematicamente. Não é para introduzir um conceito novo, mas é muito o pensar, o raciocínio, o comunicar e também muito associado à língua portuguesa porque trabalho muito a compreensão leitora, a partir de um enunciado. Para mim serve sempre muito mais para pensar matemática do que para outra coisa . . . mas serve também às vezes para, lá está, aquela articulação entre conteúdos, a discussão . . . Eu nunca vejo a resolução de problemas como uma tarefa individual em que o aluno pensa sozinho. Até pode ter um tempo, mas normalmente há muita discussão inicial para o desmontar do problema e depois cada um, então, procura a sua estratégia, ou procuram a pares, [e] no fim temos a tal discussão. Portanto é o pensar matematicamente em coletivo para percebermos que nem todos arranjamos as mesmas estratégias, mas podemos chegar à mesma resposta ou a respostas diferentes se o problema assim o permitir. Até porque . . . eu acho que já não há aquela ideia de que na matemática há só uma resposta. A primeira ideia já não é: «não é assim porque eu fiz assim e a minha é que está certa». Eu lembro-me que quando comecei a dar aulas havia muito esta postura dos alunos face à matemática e hoje em dia eu já não sinto isso, pelo menos nas minhas aulas.

EM: Então Lena, vamos subir de ciclo . . .

HF: O 3.º ciclo e o secundário. Eu utilizo os problemas também como já foi dito, umas vezes para iniciar algum tema, outras vezes para consolidar alguma temática que foi trabalhada, mas se calhar atualmente [menos], e principalmente no último ano. Estou a pensar que este ano que passou tive 7.º ano, tive [o] novo programa de matemática, metas curriculares, e portanto, onde a resolução de problemas aparece assim no final dos tópicos, assim como algo que «se houver tempo no fim trabalha-se um bocadinho a resolução de problemas». Não é por o programa trazer a resolução de problemas no fim, mas é porque eu não tenho tempo de trabalhar tudo o que está naqueles programas, naquelas metas, e portanto, a resolução de problemas, realmente, eu acho que este ano nas minhas aulas decaiu imenso. Se calhar fiz alguns problemas de consolidação, mas já não tive tempo de fazer aqueles problemas para introduzir um tema, para eles próprios explorarem, investigarem, e daí então iniciarem uma nova matéria, não tenho tempo. Antes sim, usava mais, usava também como um despoletar de uma certo tópico matemático, mas este ano ao nível do 7.º ano não

Marta Procópio

conseguí. Em anos anteriores eu fazia com os meus alunos, na aula, o problema da quinzena e nessa altura eu tinha tempo. Eu lembro-me que propunha o problema, acho que era no fim da semana à 6.ª feira, e depois eles tinham uma semana... para pensarem no problema, para escreverem, entregarem, quem quisesse entregar, eu depois recolhia as respostas, via quem tinha entregue, estudava aquilo que eles tinham escrito e na semana seguinte, então discutíamos também num bocadinho da aula. Eu acho que isso era produtivo, lembro-me que as participações foram subindo, portanto houve mais alunos que, também se calhar um bocadinho puxados pelos outros e vendo que os outros apresentaram, foram também apresentando algumas resoluções muito simples, outros umas resoluções elaboradas com várias páginas, sei lá, às vezes faziam já um bocadinho de investigação matemática, porque às vezes alguns problemas levavam a respostas diferentes, permitiam caminhos diferentes, eu acho que os ajudava a pensar matematicamente. No secundário os problemas também podem servir para introduzir a matéria ou para consolidar, embora, por exemplo ao nível do 10.º ano, até este momento, havia aquele módulo inicial da resolução de problemas na geometria. Aí era uma altura em que eu usava bastante a resolução de problemas, o próprio manual até [os] trazia, pelo menos aquele que nós usámos, no início falava do Pólya e das etapas de resolução de problemas do Pólya. Agora o programa vai mudar brevemente e portanto essa parte aí acho que se vai perder muito, essa parte que permitia uma ligação do 3.º ciclo com o secundário, parece-me a mim, era boa, mas vai-se perder. No entanto, continuo sempre que possível a usar alguns problemas, e problemas que às vezes também são transversais aos ciclos, tanto dão para o 3.º ciclo como para o secundário. Por exemplo, no outro dia no 11.º ano apresentei um problema de que gosto muito que é aquele problema de quantas vezes temos que dobrar a folha de papel para chegar da Terra à Lua e apresentei-o antes de darmos as progressões geométricas e aquilo gerou ali discussão, houve caminhos diferentes, uns fizeram, usaram a calculadora porque já sabiam introduzir as expressões das sucessões na calculadora, outros fizeram os cálculos. Gosto desses problemas que podem ser transversais aos vários ciclos e que se podem ir explorando mais ou menos consoante os conhecimentos que os alunos têm, e pronto, agora estou um bocadinho mais angustiada porque acho que a resolução de problemas está a ficar um bocadinho mais comprometida.

EM: Vou aproveitar uma das coisas que a Helena falou porque referiste a utilização do manual, até a propósito daquele módulo inicial do 10.º ano. E vou começar por ti, como é que selecionas os problemas que tens utilizado?

HF: Em termos do secundário, uso o manual. Uso essencialmente o manual, por exemplo esse do exemplo que dei há pouco da dobragem da folha de papel, esse não vinha no manual, mas uso essencialmente o manual. O manual até traz várias situações, mesmo depois não só na geometria, mas ao nível das funções, problemas muito de ligação à realidade, problemas de otimização que não são nada imediatos e portanto ao nível do secundário vou explorando essas situações. Também tenho usado aquelas brochuras já antigas de secundário e algumas delas das funções, da geometria, também têm situações problemáticas interessantes que eu também já tenho usado. Ao nível do básico já disse que agora não exploro tanto, ou exploro muito pouco.

MP: Às brochuras, eu recorro muito, não só aos manuais que temos, manuais muito bons no 1.º ciclo, [mas] também recorro muito às brochuras que foram criadas no âmbito do programa de 2007, aos sites que ainda existem da formação contínua dos professores de matemática também desse programa, têm imensas propostas de atividades que nós implementámos, portanto há poucos anos atrás e que deram muitos frutos e portanto, continuo a ir à essas fontes.

EM: Então falta saber aqui da Alice, em termos da seleção, como é que selecionas os problemas?

AR: Há vários. Há o manual, que por acaso também é um manual que, para nós, pelo menos, resolveu-nos a situação. Também estou a dar 6.º ano, portanto não entra aí tanto em confronto com a realidade das metas, mas também, os problemas da altura da Maria José [Delgado], ainda tenho muitos que utilizo e realmente tenho bastante material em casa onde me posso socorrer de problemas que muitas vezes são recorrentes. Eu realmente utilizo-os e às vezes parece que é quase a primeira vez, porque surgem sempre novas coisas na resolução, mas há muitos que são realmente . . .

EM: Já uns clássicos. Se calhar vou pegar no que a Marta tinha dito há bocadinho, tem a ver [com a forma] como é que organizas a resolução de problemas na sala de aula. Há bocado tu falaste que normalmente era em grupo, portanto, como é que é feita essa organização e quais as principais dificuldades que tens na gestão de aulas em que trabalhas a resolução de problemas? Como é que consegues ultrapassar essas dificuldades, se é que surgem dificuldades . . .

MP: Normalmente o problema é apresentado aos alunos, portanto é fornecido. Se estiver no manual, é só indicado [onde está] e aquilo que tento fazer, não no 1.º ano, logo [no princípio], mas a partir do 3.º período . . . [é dar] oportunidade aos alunos para lerem o enunciado, e são os alunos que depois [o] vão explicar, vão desmontar a situação que ali está. Depois dessa primeira abordagem, deles entenderem o contexto daquela situação apresentada, é tempo de, dependendo do grau de dificuldade do problema, cada um tentar encontrar o seu caminho para chegar a uma resposta. Esse caminho pode ser pensado individualmente ou normalmente a pares, porque a sala de aula hoje em dia está tão cheia que não há muito espaço . . . Depois no final, fazemos sempre uma discussão coletiva, são apresentadas as várias estratégias ou a estratégia encontrada. Por vezes, no 1.º ciclo, nós temos o hábito de afixar tudo, portanto, tudo fica exposto, e então muitas vezes são criados materiais que concretizam os vários caminhos e as respostas que foram dadas ficam expostos em sala de aula ou durante um tempo, [e] servem para conexões com outros problemas que vão surgindo.

Agora quanto às dificuldades: normalmente a dificuldade é sempre na fase inicial. É sempre no desmontar o problema. Lá está, porque por vezes a compreensão [do enunciado] é sempre a grande dificuldade no 1.º ciclo. Muitas vezes [os alunos] não entendem as inferências, não entendem o que está por detrás, que não é [imediatamente] claro. E, [em] alguns problemas em que é necessário utilizar os conhecimentos que já temos, eles têm um bocadinho essa dificuldade que às vezes é ultrapassada, porque há sempre alguém que se lembra: «Lembras-te daquele problema que nós fizemos assim e que falava sobre aquilo»? Depois um diz: «Pois é, até temos aquele placar . . .». Pronto, e às vezes é ultrapassada assim, outras vezes sou eu que tenho que dar assim umas achegas, indo introduzindo pequenas perguntas para chegar ao caminho que eu pretendo.

EM: Alice . . .

AR: Não é muito diferente . . . Realmente a [a dificuldade na] interpretação, como a Marta dizia, nós também a sentimos, mas sinto[-a] também muito na comunicação, quando eles estão a tentar explicar porquê, [a] tentar formalizar alguma coisa do que é dito, aí sinto muita dificuldade. Muitas vezes até tento que sublinhem, por exemplo, o que quer o problema, que sublinhem o verbo da ação, na tentativa de os orientar na resolução. Na sala de aula, essencialmente, são essas as duas dificuldades: interpretação, sim, comunicar também.

HF: Ora bem, com o 3.º ciclo e o secundário também não é muito diferente. Os alunos costumam trabalhar a pares, portanto também há uma apresentação inicial do problema, que poderá ser feita [através de] uma leitura conjunta ou não, conforme eu ache que o problema pode levantar mais questões ou menos questões. No 3.º ciclo normalmente eles têm que ter um enunciado mais orientado, porque são menos autónomos, têm também muito o problema da interpretação. Portanto eu acho que isto é comum a todos os ciclos e vai-se acentuando. Há aquela fase inicial, às vezes é um bocadinho complicada, tento ir dando pistas sem responder às questões que eles colocam e depois, digamos, daquele arranque e deles perceberem melhor o que é que é pretendido, lá avançam.

Depois há a parte do momento da discussão que, a determinada altura há alguns que já vão muito adiantados, há outros que ainda estão muito atrasados, mas tem que haver um momento de ponto da situação. Portanto tento que àqueles que não foram tão longe solicitar[-lhes] primeiro alguma participação, para que eles também sintam que conseguiram fazer alguma coisa útil. Às vezes é difícil, mas tento que isso aconteça. Mas também a parte da comunicação matemática, lá está, é difícil, eles até às vezes nos dizem: «eu sei, eu já percebi, mas agora não consigo escrever, agora não consigo explicar» . . .

EM: Para conseguirmos alguma concentração naquilo que é o essencial, vou pedir-vos para tentarem dizer-nos quais são as principais vantagens que veem na utilização da resolução de problemas na sala de aula?

HF: Eu acho que talvez a principal vantagem seja o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. O nosso objetivo pode ser outro para além desse, como por exemplo, usar como contexto dos conteúdos que estou a lecionar. Isso condiciona a seleção que eu faça. Em vez de usar um problema, poderia eu expor a matéria de outra maneira, ou arranjar um exercício e isso iria condicionar o raciocínio dos alunos. Também acho que pode ser um estímulo. Um problema é mais desafiante, é mais interessante do que um exercício ou a exposição do professor. Hoje em dia com tantos desafios que os alunos já têm se não tentarmos desafiar também na sala de aula, os alunos não se interessam tanto pelas aulas propriamente ditas . . .

AR: Eu neste aspeto não tenho muito a acrescentar ao que a Helena referiu em último: cativar muito mais o aluno para a disciplina. Eu acrescentaria o pensar. Aquele momento de refletir que faz muita falta na sala de aulas. Porque temos que avançar e não dar esse tempo, é uma das coisas que... quando estou a refletir sobre como é que a aula correu... sinto aí falhas. Sinto que não dei tempo suficiente. Para o raciocínio matemático ser desenvolvido, que é um dos nossos objetivos, tal como a comunicação matemática, que falámos há pouco, creio que é necessária essa pausa.

EM: Marta . . .

MP: Quando perguntaram só quais as vantagens da resolução de problemas apontei logo, para não me esquecer, em três pontos. Para mim a resolução de problemas ajuda a pensar matematicamente, a estruturar o pensamento, vai na linha daquilo que a Alice acabou de dizer, e a compreender o que se lê.

EM: A próxima pergunta, de certa forma, já foi respondia pela Helena. Tem a ver com a ligação entre a forma como utilizam a resolução de problemas na sala de aula e os documentos curriculares vigentes. A Marta talvez seja a mais nova das três, mas já passou por uns quantos documentos curriculares . . .

MP: Três, [em] 91, 2007 e agora em 2013 . . .

EM: A questão é: Qual é a ligação que existe entre aquilo que está presente nos documentos curriculares e a forma como utilizam a resolução de problemas na sala de aula, que ligação encontram?

MP: Eu neste momento não encontro ligação, estou um bocadinho... Não estou perdida, porque continuo a acreditar que a resolução de problemas é muito válida dentro da sala de aula, mas o programa de 2013 praticamente não a contempla, pelo menos, não de forma contextualizada. As atuais orientações curriculares estão um bocadinho desprovidas da resolução de problemas. No entanto, e querendo ser otimista como sempre sou, acho que também não diz que não podemos usar e como o professor é livre de estabelecer as estratégias . . .

EM: Isso é relativamente ao documento que acabou de entrar, ao de 2013 . . .

MP: Aos anteriores . . . no de 1991 acho que já existia bastante a resolução de problemas, mas não estava tão . . . não se entendia muito bem o que era a resolução de problemas. Ainda se confundia um bocadinho. Pelo menos a interpretação que se fazia. O programa de 2007, acho que era bastante claro e introduzia-nos a resolução de problemas e as tarefas abertas como uma grande mais-valia na sala de aula. Todas as formações de professores que tivemos no âmbito do programa de 2007 fez com que toda a cultura de sala de aula de Matemática fosse alterada nesse sentido.

EM: Então Alice . . .

AR: Eu por acaso entre o de 91 e o de 2007 não vejo assim tanta diferença. Não vejo. Vejo mais diferença, realmente, entre o de 2007 e o recente. Não é que seja banida a resolução de problemas, obviamente, está mais em causa as investigações na aula de Matemática. Se lermos o dedicado à resolução de problemas no atual e no antigo/recente, realmente é posta mais em causa essa tarefa, essa atividade mais aberta. Entre os outros dois não faço essa leitura, Marta. Baseio-me no facto de que houve, a seguir a 91, muito sobre resolução de problemas, e depois . . . Houve quase que uma estagnação, não houve muita mais novidade. Se ler coisas recentes, acho que não há muito de diferente do que o que recolhi no início dos anos 90. Neste ano letivo só lecionei 6.º ano, não fui confrontada ainda com as metas em termos de sala de aula. Se fizermos uma leitura do que o programa anterior dedica a resolução de problemas e aos dois, três parágrafos que o recente refere sobre a resolução de problemas, há duas diferenças. O de 2007 dá ênfase às estratégias e à discussão das estratégias, e este bane mesmo. Com a leitura que fiz e com a preparação que já fizemos das metas, a resolução de problemas, pelo menos no meu grupo de trabalho não acredito que vá ser abandonada. Porquê? Talvez porque não saiba fazer de outra forma, pode ser por aí, mas realmente preciso de refletir um pouco mais. A resolução de problemas . . . acho que conseguimos contornar . . . talvez pela idade que também já tenho. Quando se tem mais de meio século de vida já trabalho assim, já não sei fazer tão bem de outra maneira. Vou tentar ver o que eu posso . . . se calhar, esta opinião irá ser mudada daqui a uns meses, porque vou começar a lecionar agora o 5.º ano.

EM: Helena . . .

HF: Há pouco já disse quase tudo, mas reforço que até este novo programa existir não me tinha sentido condicionada para resolver ou não resolver os problemas na sala de aula e este ano senti-me muito condicionada a todos os níveis. Estou com o 7.º ano e eles têm que chegar ao 9.º ano e ter adquirido uma série de conceitos e competências e serão avaliados através de um exame. Tudo isto me assusta, é uma questão que tem sido discutida no nosso grupo disciplinar. A nossa escola vai atribuir uma hora de compensação já ao 7.º ano nos horários para o próximo ano. Pode ser que isso vá ajudar um bocadinho . . .

AR: É que realmente as metas não são flexíveis, não é . . .

HF: E também não são nada fáceis para os alunos. Nesta altura não sei como articular as duas coisas, basicamente é isso. Pode ser que venha a conseguir com mais estas compensações.

EM: A próxima pergunta já foi um bocadinho aflorada pela Alice, mas digamos, há muito mais para dizer sobre ela. A questão que vos levanto é: será que é mesmo possível ensinar a resolver problemas? Isto porque pelo menos na conceção que vocês já mostraram ter de um problema, de certa forma um problema é um pouco único, embora com semelhanças com outros problemas, não é? Mas enfim não sabemos à partida a estratégia que vamos utilizar, como já referiram.

MP: Eu não sei se é possível ensinar os alunos a resolver problemas, mas é possível ensinar os alunos a pensar matematicamente e isso ajuda a ter competências para resolver qualquer problema que lhes apareça à frente. A resolução de problemas ajuda a saber pensar. Quando são confrontados com outro problema, se já têm essa competência de pensar matematicamente conseguem depois arranjar caminhos para depois resolver aquele obstáculo que encontram.

EM: Por exemplo, haverá características que um aluno tenha que ter para ser bom a resolver problemas ou não é necessário, qualquer aluno pode ser bom a resolver problemas?

MP: Acho que todas as pessoas são capazes de qualquer coisa, mas umas com maior apetência e outras com menor apetência, porque nós temos apetências para áreas diferentes. Nem todos os alunos têm apetência, propriamente para a matemática. Se pensar no 1.º ciclo . . . sim, acho que todos os alunos são capazes de resolver problemas. Estamos a falar de uma fase elementar e acho que é extremamente importante que tenham essa capacidade de pensar matematicamente, sejam submetidos a este tipo de aprendizagem para que mais tarde consigam. Se pensar num 3.º ciclo, secundário, se não tiverem estas bases logo do 1º ciclo, não sei se todos os alunos conseguem resolver problemas. Acho que o 1.º ciclo são os alicerces de toda a educação, não só a matemática... e se os alicerces não estiverem bem estruturados não . . .

EM: Na verdade, estás a valorizar mais a preparação prévia que tiveram do que propriamente características específicas do aluno?

MP: Sim, porque continuo a acreditar que todos os alunos são capazes sempre de dar mais. Há alunos que nos chegam com grandes dificuldades, mas isso são meninos diagnosticados, têm realmente algumas limitações. Excluindo esses alunos, acho que todos os alunos são capazes de lá chegar, com mais ou menos dificuldade . . .

EM: Helena, a Marta falou no secundário . . . um bocadinho a comparar com alunos mais velhos, qual é que é a tua visão sobre isso?

HF: Ligando à questão que vocês colocaram, se é possível ensinar a resolver problemas, eu acho que se vai ensinando ao longo do tempo. Para se chegar ao ensino secundário a resolver problemas e a gostar de se resolver problemas, tem que se iniciar cedo, tem que se iniciar no 1.º ciclo e tem que se fazer com alguma frequência. Isso é que vai ajudar os alunos a começarem a deparar-se com diversas estratégias que podem utilizar, com outros problemas que começam a comparar. Quanto às características que os alunos devem ter, ou, os alunos que resolvem problemas têm, acho que têm que ter interesse pelo desafio. Há alunos que não se interessam muito por isso. Tem a ver com o gosto pela matemática, mas com o gosto pelo desafio. Às vezes há alunos que nem são muito bons a matemática, mas que até gostam muito de resolver problemas. Nem sempre são os bons a matemática que resolvem melhor os problemas. Além disso há uma outra coisa que é muito importante e, hoje em dia os alunos, ou muitos alunos têm pouco, que é o ser persistente. É muito importante porque um problema não tem uma resposta imediata e não é o primeiro caminho que se segue, ou o primeiro plano que se faz, que nos vai ajudar a chegar a alguma resposta que faça sentido. É preciso voltar trás, arranjar uma nova estratégia, é preciso que o aluno seja muito persistente.

EM: Ok, Alice . . .

AR: Muita persistência, realmente era o que eu acrescentaria. Isso faz parte da natureza do indivíduo, ser mais ou menos persistente, portanto seria uma característica fundamental. Quanto à primeira questão, em relação às características [dos alunos], subscrevo o que a Helena diz. Em relação a ser possível ensinar [a resolver problemas]. Pelo menos a frequência da resolução de problemas na sala de aula é notório que tem frutos. Além disso, quando se está a tentar resolver problemas há sempre orientações que damos no sentido da leitura cuidada, de retirar dados dali, de organizar os dados, portanto todas estas dicas de ler, organizar, arranjar formas que podem ser muito diferentes para resolver... estas orientações são de certa forma estruturantes.

EM: Sabe-se que a resolução de problemas, como orientação curricular para o ensino da matemática tem já várias décadas, mas tem tido dificuldade em penetrar efetivamente na sala de aula. Que razões é que encontram para isso?

AR: Porque é difícil. É difícil gerir uma aula com resolução de problemas, é muito mais fácil [com] outro tipo de tarefas. O problema é que às vezes ainda não tivemos tempo e [temos] logo de imediato que montar e começar, [e pensar] onde é que devemos dar uma ou outra dica para orientar o aluno. É difícil. Depois, para apresentar problemas tem que haver a tal discussão das diferentes soluções e nós temos que fazer debate. Isso não é nada fácil, sinceramente. Pode ser uma dificuldade mas, quanto menos [problemas] fazemos, [mais] piora a situação. É daquelas situações que eu reconheço, quanto maior frequência, mais à vontade nos sentimos de apresentar este tipo de tarefa.

EM: Helena . . .

HF: Eu concordo com o facto de ser difícil a gestão da sala de aula. Outra dificuldade também é a preparação que exige esse tipo de aula que acho que é muito diferente de uma aula que não tenha resolução de problemas, uma aula mais expositiva ou de uma aula com mais exercícios. A resolução de problemas ou as atividades de investigação exigem uma preparação diferente do professor, exige que o professor tenha trabalhado bem o problema, que tenha explorado possíveis caminhos, que tenha estudado eventuais pistas a dar. Embora às vezes surjam situações inesperadas a que na altura temos que dar resposta, ou depois pensar nelas. Mas acho que a preparação [dessas aulas] também é uma dificuldade.

EM: Marta, queres acrescentar alguma coisa?

MP: No caso do 1.º ciclo aquilo que eu sinto é... muitos dos professores não têm na sua formação inicial, e posteriormente na sua formação contínua . . . Nunca tiveram uma aposta nesta área e não se sentem à vontade com esta gestão de sala de aula. No ensino expositivo nós é que guiamos tudo, não há muita expetativa por parte do aluno, não existem novidades, o professor já sabe mais ou menos o que vai acontecer. Neste tipo de aula, o professor perde um bocadinho o controle e quando não se tem depois a bagagem suficiente para conseguir interpretar a estratégia dada pelo aluno... isso faz com que os professores não se sintam à vontade para se confrontarem com as estratégias apresentadas pelos alunos. Como não têm esse à vontade acabam por se retrair um pouco. Tenho sentido isso também na formação. Como dou formação aos meus colegas do agrupamento sinto muito isso. Os colegas levam as tarefas para aplicar e aplicam na hora de matemática. Preparam tudo muito bem antes e questionam-me por e-mail. Sente-se que existe um bocado de receio do professor se expor e de que o aluno arranje uma estratégia que o professor não entenda e depois o professor fica um bocadinho exposto. No caso do 1.º ciclo tem a ver com a formação inicial e depois com a aposta na formação contínua que nem sempre passa por estas áreas.

EM: Mas e agora Marta, estas dificuldades que tu notas, parece-te que estão mais associadas a questões da gestão ou questões até da matemática propriamente dita?

MP: Por vezes é a questão da gestão da sala de aula. Gerir a discussão entre alunos nem sempre é fácil e às vezes, com casos de indisciplina, pode gerar ainda mais indisciplina e há colegas que se retraem nesse sentido. Também existe o fator do conhecimento matemático. Temos colegas de 1.º ciclo que a sua formação inicial é de educação física, por exemplo, e são pessoas que, ou na sua formação contínua apostaram muito na área da matemática e no português, ou então não se sentem à vontade para gerir uma aula de resolução de problemas porque eles próprios não têm, não se sentem à vontade na gestão dos conteúdos.

EM: Agora vou pedir que cada uma dê duas ou três recomendações para um professor que queira usar a resolução de problemas na sala de aula, assim sucintas . . .

AR: A resolução de problemas dá alegria à sala, ao clima de sala de aula, pelo desafio que a atividade em si transmite. O outro aspeto é porque é muito vantajoso na progressão da aprendizagem do aluno. Estes são os dois aspetos que eu focaria. Fazemos um, outro e outro problema e isso nota-se, a vontade é cada vez mais . . . a resolução de problemas é a âncora de muitos conteúdos matemáticos para os alunos.

MP: Aquilo que eu recomendo é que [os professores] apostem sempre na sua formação porque se não fizermos formação no âmbito da... não é só da resolução de problemas, mas da atividade matemática em si, não conseguimos nunca crescer com os alunos. O professor deve ser persistente quando acredita que é uma mais-valia para os seus alunos. Quanto a mim, a resolução de problemas é um fator extremamente importante para o sucesso escolar na Matemática e para o gosto pela disciplina, temos que ser persistentes e mesmo achando que a orientação curricular não vai nesse sentido, no momento, tentarmos . . . Claro que temos que cumprir os objetivos que estão no programa atual mas, no caminho para lá chegar, tentarmos nunca descurar aquilo em que acreditamos que é: o sucesso para nossos alunos é importante e a resolução de problemas [contribui para o] sucesso dos nossos alunos.

EM: Helena tens a última palavra . . .

HF: É um bocadinho ligado à persistência. Recomendação para um professor que queira usar a resolução de problemas: não desista. A implementação da resolução de problemas pode não ser fácil, mas só com o tempo é que os alunos vão evoluir e se vão sentindo a pouco e pouco mais à vontade. A primeira vez, se calhar, não vai correr muito bem, a segunda também não, mas é preciso não desistir. Acho que é a recomendação que eu deixaria.

AR: E a mesma para os alunos...

A Matemática não é um desporto para espectadores: não a podemos apreciar, nem aprender, sem uma participação activa.

Em *O ensino por problemas* (G. Pólya, 1967)

George Pólya (1887–1985), húngaro de nascimento, foi um matemático de grande importância na primeira metade do século passado que também se notabilizou pelo trabalho que desenvolveu e publicou sobre os métodos heurísticos e a resolução de problemas em Matemática e o seu ensino. Perante a ameaça hitleriana na Europa, parte em 1940 para os EUA, onde se fixou definitivamente, tendo ingressado em 1942 na Universidade de Stanford, na Califórnia, universidade a que permaneceu ligado até ao seu falecimento.

Em 1945, publica um dos seus livros mais conhecidos, How to Solve It, que foi elogiado na recensão do matemático E.T. Bell, e também por outro matemático de renome, Hermann Weyl, na revisão da nova impressão do livro em 1948. Esta obra teve um grande êxito editorial — um ano após seu falecimento, já tinham sido vendidos mais de um milhão de exemplares. O livro está traduzido em mais de 20 línguas de muitos países, em inúmeras reimpressões e edições, a última das quais de 2014. Em Portugal foi publicado numa edição de 2003 com o título Como resolver Problemas.

Professor emérito em 1953, Pólya publica, nos anos que se seguem, outras das obras que mais o notabilizaram — Mathematical Discovery (1954), Mathematics and Plausible Reasoning (1962 e 1965), Mathematical Methods in Science (1963) — bem como inúmeros textos e intervenções, onde desenvolve e aprofunda as suas ideias sobre a resolução de problemas, a heurística e o processo de criação em matemática, e onde aborda também questões sobre ensino desta ciência.

Em 1963 é premiado pelos seus serviços distintos em matemática — *Award for distinguishes services in mathematics* — prémio atribuído pela *Mathematical Association of America* que o homenageia, como se pode ler no elogio que lhe foi feito, não apenas pela contribuição para uma melhor compreensão sobre o processo de criação matemática, mas também pela «sua influência construtiva no ensino da matemática no seu sentido mais amplo, em todos os níveis, elementares ou avançados, e à escala nacional ou internacional». George Pólya, diz ainda o elogio, «é único entre os matemáticos a combinar, durante a sua distinta carreira científica, a investigação profunda em uma frente muito ampla, com um interesse sempre presente pelo ensino da matemática».

Pólya publica o seu último artigo em 1984, também sobre resolução de problemas, em colaboração com uma sua colega e amiga Jean Pederson.

O texto que seleccionámos, traduzido por Paulo Alvega e ainda inédito em português, foi publicado em 1967 na revista *L'Enseignment Mathématique*, das primeiras revistas dedicadas ao ensino da Matemática. Neste texto, Pólya começa por abordar, de uma forma simples e abreviada, algumas das suas ideias gerais sobre o ensino, várias vezes retomadas em outros dos seus textos — o ensino como uma arte, não como uma ciência, a importância do desenvolvimento do pensamento matemático nos alunos, a centralidade da aprendizagem activa. Revisita depois algumas das questões que muito o interessaram ao longo da sua vida, sobre a resolução de problemas e o seu ensino, sobre o papel do professor e o do aluno, sempre num estilo simples, directo e conciso, convidando a leituras de outras das suas obras para maior detalhe e aprofundamento.

Henrique Manuel Guimarães

O ENSINO POR MEIO DE PROBLEMAS

George Pólya

Naquilo que se segue, interesso-me em primeiro lugar pelo ensino da Matemática nas escolas secundárias dos Estados Unidos (*high schools*); no entanto para que este artigo possa contribuir para uma discussão internacional, concentro-me nas questões comuns a todas as escolas de nível secundário, i.e., as escolas para jovens dos 12 aos 18 anos, não importa em que país, por exemplo os liceus e ginásios europeus. Algumas restrições na aplicação deste artigo, que estão na natureza das coisas, serão cuidadosamente especificadas no momento oportuno.

UMA ARTE, NÃO UMA CIÊNCIA

Evidentemente, o ensino não é uma ciência exata com uma terminologia precisa largamente aceite. É por este motivo que as finalidades e os métodos de ensino não podem ser discutidos de uma maneira adequada sem exemplos concretos, longamente descritos e de forma cuidada. Como, no entanto, o lugar destinado a este artigo não permite exemplos detalhados, devo remeter, no que se refere a maiores explicações e ilustrações apropriadas os meus livros disponíveis em várias línguas.[A]

Ensinar é uma ação humana complexa, dependendo em grande medida das personalidades em causa e das condições locais. Hoje, não há propriamente uma ciência do ensino, e não haverá nenhuma no futuro previsível. Em particular, não existe um método de ensino que seja indiscutivelmente o melhor, como não existe a melhor interpretação de uma sonata de Beethoven. Há tantos bons ensinos como bons professores. O ensino é mais uma arte do que uma ciência. (Isto não exclui, claro, que o ensino possa beneficiar de uma atenção criteriosa dada às experiências e teorias psicológicas.) Para todos os efeitos, o que se segue é uma apresentação não dogmática das minhas convicções pessoais. Ficaria contente se algum diretor ou professor de espírito aberto encontrar aí pontos que se ajustem às condições do seu ensino ou ao seu gosto pessoal.

AS FINALIDADES

As finalidades do ensino, os assuntos a ensinar e os métodos a utilizar dependem das condições que prevalecem neste ou naquele lugar, neste ou naquele momento: devem satisfazer as necessidades da comunidade e são limitados pelo que se dispõe no que se refere ao pessoal docente e ao dinheiro. (De facto, dependem da apreciação mais ou menos esclarecida destas condições pelas autoridades locais.)

No entanto, uma discussão sobre o ensino não pode ter sentido sem que seja definido previamente a finalidade a atingir. A minha convicção pessoal é que a tarefa principal do ensino da Matemática ao nível secundário é ensinar os jovens a PENSAR. Tudo que direi em seguida decorre desta convicção fundamental. Se o leitor não consegue partilhar inteiramente a minha opinião, espero no entanto que o possa fazer em alguma medida, que possa considerar como uma finalidade subordinada mas importante aquilo que para mim é a finalidade principal, e que possa então encontrar no que se segue sugestões úteis.

Naturalmente, não esqueço as outras finalidades essenciais — penso simplesmente que elas são compatíveis com aquilo que considero como a finalidade principal. Essas tarefas são: preparar os alunos para a disciplina de Física, se uma tal disciplina faz parte do programa da escola; preparar os futuros engenheiros e os alunos das Faculdades de Ciências. No que diz respeito aos futuros matemáticos, uma questão é importante: eles não devem ser desapontados por um ensino mal conduzido. No entanto, a introdução de assuntos que apenas têm interesse para futuros matemáticos é supérflua — e seria um procedimento pouco correto relativamente à grande maioria dos alunos.

PENSAR

Tenho dito que a finalidade principal de um programa de Matemática a nível secundário é ensinar aos alunos a pensar. Esta afirmação exige maiores explicações, mas uma explicação adequada necessitaria de repetir uma boa parte dos exemplos tratados nos meus livros citados na nota;[A] tal repetição está fora de questão, mas as indicações que se seguem poderão ajudar.

Propuseram-se de diferentes perspetivas objetivos diversificados tais como os seguintes: experiência de pensamento independente, flexibilidade de espírito, hábitos de trabalho melhorados, atitudes de espírito desejáveis, alargamento de pontos de vista, maturidade de espírito, introdução ao método científico. Parece-me que estes objetivos, interpretados concreta e razoavelmente ao nível do ensino secundário se sobrepõem consideravelmente e juntos cumprem plenamente o fim que preconizo.

Abordando este assunto de outro ponto de vista, obtém-se uma imagem com maior definição. O nosso ensino deveria englobar todos os principais aspetos do pensamento matemático, na medida em que tal seja possível, ao nível do ensino secundário. As atividades mais marcantes de um matemático são: a descoberta de demonstrações rigorosas e a construção de sistemas axiomáticos. Existem ainda outras atividades, que usualmente deixam menos vestígios na obra acabada de um matemático, e são portanto menos visíveis, mas nem por isso menos importantes: reconhecer e extrair um conceito matemático de uma dada situação concreta; em seguida, *adivinhar* sob muitas formas: prever o resultado, prever as grandes linhas de uma demonstração antes de realizá-la com detalhe. *Adivinhar* assim entendido, pode também englobar a generalização a partir de casos observados, um raciocínio indutivo, uma argumentação por analogia, etc.

O ensino da Matemática dá apenas uma ideia unilateral, diminuída, do pensamento do matemático, se suprimir estas atividades *não formais* de adivinhar e de extrair os conceitos matemáticos do mundo visível à nossa volta; se negligenciar aquilo que poderia ser uma parte bem mais importante para o aluno em geral, a mais instrutiva para o futuro utilizador da Matemática, e a mais produtiva e mais rica para o futuro matemático.

A APRENDIZAGEM ATIVA

«Para aprender eficazmente, o aluno deverá descobrir por si mesmo uma parte da matéria ensinada tão grande quanto é possível nas circunstâncias dadas.» Eu prefiro esta formulação[1] do *princípio da aprendizagem ativa* que é o princípio educativo menos controverso e mais antigo (podemos encontrá-lo em Sócrates). A Matemática não é um desporto para espetadores: não podemos apreciá-la nem aprendê-la sem uma participação ativa, de modo que o princípio de aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, matemáticos professores, especialmente se temos como fim principal, ou como uma das finalidades essenciais, en-

George Pólya e Alexander Ostrowski, fotografados por Paul Halmos

sinar crianças a pensar.

Se queremos desenvolver a inteligência do aluno, devemos estar atentos e deixar que as primeiras coisas ocorram em primeiro lugar. Certas atividades ocorrem mais fácil e naturalmente que outras: adivinhar é mais fácil que demonstrar, resolver problemas concretos é mais natural que construir estruturas concetuais. Em geral, o concreto vem antes do abstrato, a ação e a perceção antes das palavras e dos conceitos, os conceitos antes dos símbolos, etc.

Uma vez que o aluno deverá aprender não receptivamente mas pelo seu próprio esforço, comecemos onde o esforço é menor e o resultado do esforço mais compreensível do ponto de vista do aluno: o aluno deverá familiarizar-se antes de mais com o concreto, em seguida com o abstrato, primeiro com a variedade da experiência, depois com a unificação dos conceitos, etc. Isto conduz à resolução de problemas matemáticos que é, na minha opinião, a atividade matemática que mais se aproxima do fundamental do pensamento do quotidiano. Temos um problema cada vez que procuramos os meios para atingir um objetivo. Quando temos um desejo que não podemos satisfazer imediatamente, pensamos em meios de o satisfazer, assim se coloca um problema. A maior parte da nossa atividade pensante, que não seja apenas um sonho acordado, ocupa-se de coisas que queremos e dos meios de as obter, o que quer dizer problemas.

Frequentemente, os problemas quotidianos conduzem a problemas matemáticos simples, e o passo de abstracção do problema quotidiano para o problema matemático pode tornar-se fácil e natural para o aluno com um pouco de habilidade por parte do professor. E como os problemas de todos os dias são do que é mais central no nosso pensamento diário, do mesmo modo podemos esperar que os problemas matemáticos estejam no centro do ensino da Matemática. A resolução de problemas tem sido a espinha dorsal do ensino da Matemática desde a época do *papiro de Rhind*. A obra de Euclides pode ser considerada como um empreendimento pedagógico: dissecar o grande tema da geometria em problemas manejáveis. A resolução de problemas é ainda, na minha opinião, a espinha dorsal do ensino ao nível secundário — e sinto-me incomodado que uma coisa tão evidente tenha necessidade de ser sublinhada.

Há certamente outras coisas que devem ser propostas ao nível do ensino secundário: as demonstrações matemáticas, a ideia de um sistema axiomático, talvez mesmo um relance sobre a filosofia subjacente às demonstrações e estruturas matemáticas. Contudo, estes assuntos estão muito afastados do pensamento usual e não poderão ser apreciados ou mesmo compreendidos sem uma base suficiente de experiências matemáticas que o aluno adquire principalmente resolvendo problemas.

CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS

Há problemas e problemas, e todo o tipo de diferenças entre problemas. No entanto, a diferença mais importante para o professor é entre os problemas de rotina e aqueles que o não são. O problema que não se resolve por rotina exige alguma criação e um certo grau de originalidade da parte do aluno, o problema de rotina não exige nada disso. O problema que não se resolve por rotina tem alguma hipótese de contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno, o problema de rotina não tem nenhuma. A linha de demarcação entre estes dois tipos de problemas pode não ser precisa, no entanto, os casos extremos são claramente reconhecíveis. O caráter conciso deste artigo permite apenas uma curta descrição de dois tipos de problemas rotineiros: os problemas que exigem simplesmente a aplicação de uma regra bem conhecida, e os problemas que são apenas uma simples questão de vocabulário.

Um problema pode ser resolvido aplicando mecânica e diretamente uma regra que o aluno não tem qualquer dificuldade em encontrar: a regra é colocada debaixo do seu nariz pelo professor ou pelo manual. Não há nenhuma invenção, nenhum desafio à sua inteligência. Aquilo que possa extrair de tal problema é apenas uma certa prática na aplicação dessa regra, uma simples aplicação de conhecimento mecânico.

Uma questão pode ser formulada para verificar se o aluno sabe utilizar corretamente um termo ou um símbolo do vocabulário matemático recentemente ensinado; o aluno pode responder imediatamente à questão desde que tenha entendido a explicação do termo ou do símbolo; não há um lampejo de invenção, nenhum apelo à inteligência, é tudo uma questão de vocabulário.

Os problemas rotineiros, mesmo os dos dois tipos que acabo de descrever, podem ser úteis, mesmo necessários, se são utilizados no momento certo e na dose apropriada. Eu protesto é contra o abuso dos problemas rotineiros, cujo único resultado é fazer com os alunos inteligentes ganhem aversão à matéria que lhe é apresentada sob a etiqueta de *matemáticas*. Os manuais *tradicionais* são duramente criticados nos nossos dias, mas a maior parte das críticas não parecem sublinhar aquilo que, na minha opinião, é o seu ponto mais fraco: quase todos os seus problemas são problemas rotineiros do primeiro tipo que acabei de descrever.

Quanto aos manuais *modernos*, têm frequentemente capítulos inteiros repletos de termos e símbolos novos, que não têm relação com a experiência e os conhecimentos matemáticos prévios do aluno, e dos quais, por consequência, o aluno não pode fazer um uso sério; em consequência, os problemas no fim do capítulo são problemas rotineiros particularmente de nível pouco elevado, a maior parte deles são simples questões de vocabulário.

Parece-me que o mau serviço prestado ao aluno é, nos dois casos, de natureza semelhante. Não há muito a escolher entre o *tradicional* e o *moderno* se a escolha consiste entre uma rigidez apertada e muitas palavras sem relação com os factos.

Não irei explicar o que é um problema matemático não rotineiro: se nunca resolveu um, se nunca experimentou a tensão e o triunfo da descoberta, e se, após alguns anos de ensino, não observou ainda essa tensão e esse triunfo em algum dos seus alunos, então procure outra profissão e pare de ensinar Matemática.

A ESCOLHA DOS PROBLEMAS

A resolução de um problema não rotineiro pode exigir um verdadeiro esforço do aluno; no entanto, ele não fará esse esforço se não reconhecer razões para o fazer, a melhor motivação é o interesse pelo problema. Do mesmo modo, devemos ter um grande cuidado em escolher problemas interessantes e em torná-los atraentes.

Em primeiro lugar, problema deve ter um sentido e ser oportuno, do ponto de vista do aluno. Deve ter uma relação natural com as coisas que são familiares, e deve favorecer um resultado compreensível ao aluno. Se para o aluno o problema parece sem relação com aquilo que lhe é habitual, a afirmação do professor de que será útil mais tarde, não é mais que uma pobre compensação. Um professor que assistiu a uma das minhas conferências contou a seguinte observação de um dos seus alunos de quinze anos: «Até agora, tenho sido capaz de resolver todos os problemas, mas não consigo ver nenhuma razão no mundo para os resolver».

Não apenas a escolha, mas também a apresentação do problema merece a nossa atenção. Uma boa apresentação revela relações com as coisas familiares e faz com que o objetivo do problema seja compreensível. O principio do ensino ativo sugere-nos um pequeno truque muito útil: o professor não deverá começar pelo enunciado completo do problema, mas por sugestões apropriadas e deverá deixar aos alunos o cuidado de encontrar a formulação definitiva.

De tempos a tempos, a turma deverá trabalhar um problema mais importante que tenha um conteúdo rico e possa servir de porta de entrada para todo um capítulo da Matemática. A turma deverá trabalhar tal problema de pesquisa sem pressa, de tal modo, que segundo o princípio do ensino ativo, os alunos consigam descobrir (ou sejam conduzidos a descobrir) a solução, e sejam capazes de explorar por si próprios algumas consequências da solução.[2]

CONDUZIR À DESCOBERTA

A ideia deverá nascer no espírito do aluno e o professor deverá agir como parteiro; a metáfora é antiga (deve-se a Sócrates) mas não está desatualizada. Se considerarmos o desenvolvimento da inteligência do aluno como a finalidade principal (ou mais importante) do ensino ao nível secundário, e o trabalho do aluno para resolver problemas como o meio principal (ou mais importante) de atingir esta finalidade, então a principal (ou mais importante) preocupação do professor deve ser conduzir o aluno à descoberta da solução por si próprio. A primeira coisa a considerar, quando se trata de ajudar o aluno, é não ajudar demais: o aluno deve fazer o máximo possível por si mesmo. O professor deverá evitar uma grande interferência no processo natural do nascimento de uma ideia.

Sem metáforas: ao ajudar o aluno, o professor deverá dar apenas uma ajuda *interior*, quer dizer, sugestões que teriam podido nascer no espírito do próprio aluno, e evitar uma ajuda *exterior*, quer dizer dar elementos para a solução que não tenham relação com o estado de espírito do aluno.

Afirmo que é importante dar uma ajuda interior, mas não digo que tal seja fácil. Para fazê-lo com eficácia, isto exige da parte do professor um bom conhecimento tanto do problema como do aluno; dito de outro modo, o professor deve ter experimentado e estar familiarizado com as etapas da resolução de problemas que ocorrem com frequência e naturalmente.

A HEURÍSTICA

A heurística é o estudo dos caminhos e dos meios de descoberta e de invenção; estuda principalmente, na resolução dos problemas, as etapas que ocorrem com frequência e naturalmente e que têm alguma hipótese de nos aproximar da solução. Não se trata de um tipo de estudo muito usual; ainda que Descartes e Leibniz tenham meditado nisso (o último chamou à heurística a «arte da invenção»), o assunto estava praticamente morto quando surgiu o meu primeiro artigo relacionado, em 1919.[3]

Para mais informações sobre a heurística (a resolução de problemas, a arte de adivinhar, . . .) pode consultar-se as referências dadas na nota A. As ideias mais simples da heurística são as mais importantes para o professor que poderá, de qualquer forma, extraí-las da sua própria experiência, uma vez que decorrem do simples bom senso. (Embora o bom senso seja bastante pouco comum, como o observou Descartes.)

Eis alguns conselhos sobre os problemas de todos os dias, que podem aparecer-vos muito triviais.

Enfrentem o vosso problema se o querem resolver e perguntem-se: *O que é que eu desejo?* E quando estiverem decididos e o vosso objetivo for claro, considerem tudo que se encontra à vossa disposição, tudo que possam utilizar para o alcançar, perguntem-se: *O que é que eu tenho?* Tendo passado em revista durante um certo tempo tudo o que tenham a possibilidade de utilizar, podem voltar à primeira questão e desenvolvê-la: *O que é que eu quero? Como o posso conseguir? Onde o posso conseguir?* Interrogando-se desta forma, podem aproximar-se da solução do vosso problema.

É menos trivial observar que os problemas quotidianos apresentam certas analogias com os problemas matemáticos. O professor que tenta dar uma ajuda *do interior* a um aluno debruçado sobre um problema matemático, pode utilizar com proveito as questões precedentes, ou questões paralelas expressas em termos matemáticos.

O professor pergunta: *Que é que vocês querem? Qual é a incógnita?* Se o objeto da pesquisa, a incógnita, está suficientemente claro para o aluno, o professor pode continuar: *Que é que vocês têm, quais são os dados, qual é a condição?* Se o aluno der respostas suficientemente claras a estas questões, o professor pode voltar à sua questão inicial e desenvolvê-la: *Que queremos obter? Qual é a incógnita? Por que meio podem obter o valor desta incógnita? Através de que dados podem determinar o valor deste tipo de incógni-*

tas? E estas questões têm muito boas hipóteses de mobilizar os conhecimentos apropriados no espírito do aluno e conduzi-lo mais perto da solução.

Estas questões são exemplos de uma heurística prática e de bom senso. O professor deverá utilizá-las em primeiro lugar nos casos em que elas sugerem facilmente a ideia correta ao aluno. Em seguida, poderá utilizá-las em casos cada vez mais numerosos, tão frequentemente quanto o possa fazer com discernimento e tato. Com o tempo, o aluno poderá compreender o método e aprender a utilizar ele próprio estas questões: *aprende assim a dirigir a sua atenção sobre os pontos essenciais*, quando se encontra diante de um problema. Desta maneira, ele terá adquirido o hábito de um pensamento metódico, que é o maior benefício que pode tirar das aulas de matemática a generalidade dos alunos, que nunca empregarão a Matemática na sua profissão.

Reenvio, uma vez mais, o leitor que queira aprofundar estas observações sobre a heurística às obras citadas na nota A.

Notas

A 1. How to solve it, second edition, Doubleday, 1957
2. Mathematics and plausible reasoning, vol. 1 and 2. Princeton University Press, 1954
3. Mathematical discovery, vol. 1 and 2, Wiley, 1962/65
Traduções: Alemão: 1, 2, 3; árabe:1; espanhol:1, 2; francês:1, 2, 3; hebraico:1; húngaro; 1, 3: italiano:1; japonês:1, 2, 3; polaco:1; romeno: 1, 2; russo:1, 2; sérvio:1.

1 Cf. 3. (citada na nota A), vol. 2, p. 103.

2 Este é uma primeira referência aquilo que Wagenschein chama *exemplarisches Leheren*(Ensino por meio de exemplos); cf. nota A, 3, vol. 2, p. 123.

3 [NT] Pólya, G. (1919). *Geometrische Darstellung einer Gedankenkette* [Geometrical representation of a chain of thought]. Schweizerische Pädagosgische Zeitscrift,2, 53–63.

George Pólya, 1967
Departamento de Matemática
Universidade de Stanford, Stanford, Califórnia

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A Lua aqui tão perto...

Os materiais que aqui apresentamos foram construídos a partir do problema publicado por Paulo Abrantes, num artigo do número dois da Educação e Matemática, também referido noutros textos desta revista temática. A nossa proposta traduz-se na apresentação do problema em duas formulações diferentes: uma tarefa mais estruturada para o final do 1.° ciclo ou para o 2.° ciclo e outra menos estruturada para o 3.° ciclo e ensino secundário. A ideia de apresentar o mesmo problema em ciclos tão diferentes decorre da transversalidade do seu objetivo principal: compreender o crescimento de uma função exponencial de base 2. Assim formulado, este objetivo parece muito afastado dos primeiros anos. Mas, na verdade, até as crianças do 1.° ciclo podem reparar que a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... rapidamente atinge valores muito grandes. A grande diferença entre possíveis resoluções diz respeito aos conhecimentos e às ferramentas que os alunos podem mobilizar. Nos níveis mais baixos, as crianças precisam de identificar a sequência associada ao número de folhas sobrepostas, o que favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para chegar aos valores exatos das espessuras, terão de calcular sistematicamente os dobros (sugerimos que usem o fator constante da calculadora) e fazer conversões dos valores obtidos em milímetros, para metros e depois para quilómetros, num contexto em que essas conversões fazem sentido e não por imposição do enunciado. No 3.° ciclo e no ensino secundário, os alunos utilizam a álgebra para apresentar um modelo matemático que se adeque à situação, e podem utilizar uma calculadora científica, gráfica ou uma folha de cálculo para determinar a distância obtida para um número qualquer de dobragens. No final do ensino secundário, o problema poderá ser resolvido usando uma equação exponencial, tirando partido do conhecimento do conceito de logarítmo. Em todos os casos, sugerimos que os alunos sejam confrontados com as suas estimativas iniciais e os valores obtidos posteriormente, uma vez que essa provável disparidade pode constituir um elemento muito relevante na aprendizagem.

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa

A LUA AQUI TÃO PERTO...

Nesta investigação propomos-te uma viagem: até onde poderemos chegar com uma folha de papel? Vamos usar matemática, mas também um pouco da tua imaginação. Para começar, pega numa folha de papel, por exemplo A4.

1. Se dobrares a folha de papel ao meio ficas com dois pedaços da folha sobrepostos. Para simplificar, vamos dizer que ficámos com duas folhas sobrepostas. Se voltarmos a dobrar ao meio, com quantas folhas sobrepostas ficaremos? E se dobrarmos de novo?
2. Vamos continuar o processo de dobragem anterior, mas desta vez organizando os dados numa tabela como a apresentada aqui por baixo. Completa a segunda coluna.

Número de dobragens	Número de folhas sobrepostas	Altura obtida (mm)
1	2	
2		
3		
4		
5		

3. Com 5 dobragens já tiveste dificuldade em dobrar o papel, certo? É agora que entra a tua imaginação e, claro, a matemática. Considera que poderás continuar a dobrar a folha tantas vezes quanto queiras. Quantas folhas sobrepostas teremos com 10 dobragens? E com 15 dobragens?
4. Vejamos agora a altura obtida pelas folhas sobrepostas. Comecemos por fazer algumas estimativas. Qual a altura que pensas ter obtido com 5 dobragens? E com as 10? E com as 15? Será que chegas à altura do teu professor? Ou da tua sala?
5. Vamos então determinar exatamente os valores anteriores. Considera que a tua folha tem 0,1 mm de espessura. Preenche agora a terceira coluna da tabela (Altura obtida).
6. Qual a altura obtida com 5, 10 e 15 dobragens? Nota: Efetua a conversão dos valores para metros.
7. Já viste que os valores obtidos são muito grandes, provavelmente maiores do que imaginavas. Mas será possível chegar à Lua, continuando o mesmo processo de dobragem das folhas? A distância da Terra à Lua é de cerca de 384 403 km.
   Sugestão: Usa uma calculadora e converte os valores para quilómetros.

A LUA AQUI TÃO PERTO...

Vamos propor-te uma investigação. Para isso terás de usar matemática, mas também um pouco de imaginação. A questão que te colocamos é a seguinte: Quantas vezes seria necessário dobrar ao meio uma folha de papel para se atingir a distância da Terra à Lua? Para responder a esta questão, vamos seguir alguns passos:

1. Admite que uma folha de papel tem a espessura de 0,1 mm. Nesse caso, se dobrarmos a folha ao meio, a espessura dessa folha será 0,2 mm. Se a dobrarmos de novo ao meio, ou seja, com duas dobragens qual é a espessura obtida? E com três dobragens?
2. A partir das cinco dobragens começa a ser difícil dobrar o papel e o pedaço é cada vez mais pequeno. É aqui que entra a imaginação. Vamos abstrair-nos dos aspetos práticos e pensar que podemos continuar este processo as vezes que quisermos. Organiza uma tabela que relacione o número de dobragens com a espessura obtida. Quantas dobragens serão necessárias para obter a tua altura? Sugestão: Converte os valores para metros.
3. Considera n a variável correspondente ao número de dobragens. Encontra uma expressão que represente a espessura obtida depois de realizadas n dobragens.
4. E agora a nossa viagem até à Lua. Começa por estimar quantas dobragens serão necessárias para que a espessura da folha de papel dobrada atinja a distância desejada. De seguida, descobre o valor exato tendo em conta que deves atingir pelo menos o valor 384 403 km, que corresponde a um valor aproximado da distância da Terra à Lua. Boa viagem!

XXXI PROFMAT

O ProfMat regressa à bela cidade de Évora e mais uma vez à Escola Secundária Gabriel Pereira, nos dias **26, 27 e 28 de Março**. Em Évora tivemos oportunidade de comemorar os dez anos de ProfMat, em 1995, e os vinte anos em 2005. Esperamos mais uma vez reencontrar-nos, todos, para comemorar os **30 anos de Encontros!**

Este ano o encontro tem como tema aglutinador **A Matemática e o currículo escolar.**

À semelhança de anos anteriores, o ProfMat será creditado como curso de formação.

Em http://www.apm.pt/encontro/profmat_2015_siem pode obter todas as informações de que necessita, bem como inscrever-se no ProfMat, propor uma sessão prática, uma comunicação ou uma comunicação com demonstração. Esteja atento às nossas promoções, inscreva-se!

Ficamos à sua espera, em Évora, cidade branca de todas as encruzilhadas, na primavera de 2015! No XXXI ProfMat! Afinal já passaram 30 anos de encontros!...

Fica o convite!

Contamos consigo!

A Comissão Organizadora

SIEM XXVI

O 26º seminário em Investigação em Educação Matemática, SIEM XXVI, irá decorrer na Escola Secundária Gabriel Pereira, em Évora, nos dias 28 e 29 de março de 2015.

O seu objetivo principal é a divulgação, partilha e debate da investigação em Educação Matemática, potenciando a articulação entre a investigação e as práticas de ensino da Matemática e o diálogo entre professoras/es e investigadoras/es.

O programa científico, que no dia 28 se destina também aos participantes no ProfMat, contará com sessões plenárias, um painel e duas conferências com discussão, e com sessões paralelas. Destaca-se este ano a inclusão de uma nova modalidade de sessão, os *workshops* de investigação, que procuram intensificar a partilha e reflexão, tendo como foco a investigação sobre as práticas de ensino.

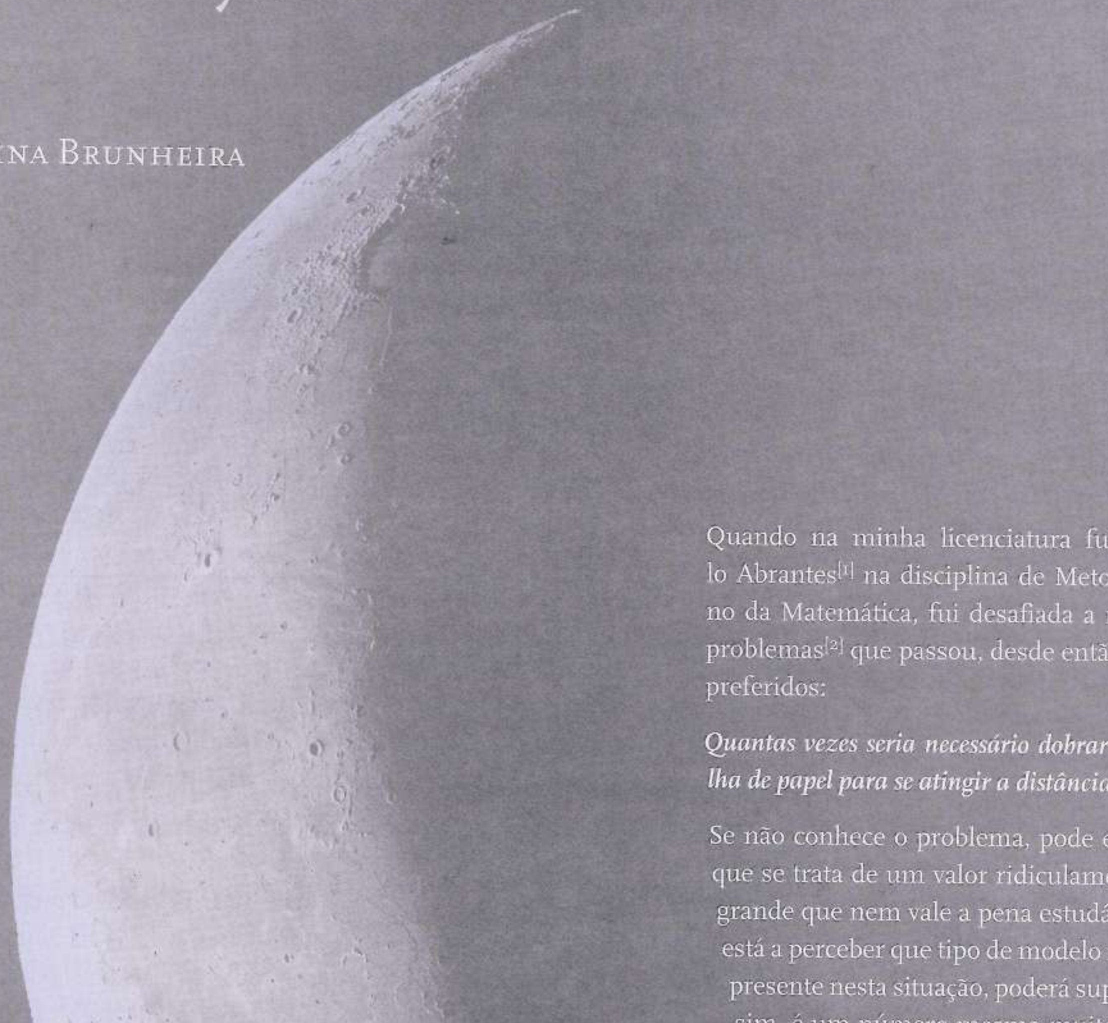
O SIEM XXVI constitui uma oportunidade importante em termos de investigação e formação, sendo aberto a que professoras/es e investigadoras/es apresentem e discutam os seus trabalhos.

Para informações complementares, consultar: http://www.apm.pt/encontro/profmat_2015_siem

Ana Paula Canavarro (Pela CC do SIEM)

A Lua aqui tão perto . . . e o George Clooney também!

LINA BRUNHEIRA



Quando na minha licenciatura fui aluna de Paulo Abrantes[1] na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática, fui desafiada a resolver um dos problemas[2] que passou, desde então, um dos meus preferidos:

Quantas vezes seria necessário dobrar ao meio uma folha de papel para se atingir a distância da Terra à Lua?

Se não conhece o problema, pode estar já a pensar que se trata de um valor ridiculamente grande, tão grande que nem vale a pena estudá-lo a sério. Se já está a perceber que tipo de modelo matemático está presente nesta situação, poderá supor que, ainda assim, é um número mesmo muito grande. No entanto, vale a pena investigar. Tomemos 384 403 km para o valor da distância da Terra à Lua (embora varie conforme o curso da órbita da Lua) e 0,1 mm para o valor da espessura de uma folha de papel vulgar. No artigo da EeM de 1987, Paulo Abrantes sugeria que fizéssemos um programa simples em linguagem computacional *Basic* ou utilizássemos uma folha de cálculo. Hoje podemos usar também uma calculadora gráfica, or-

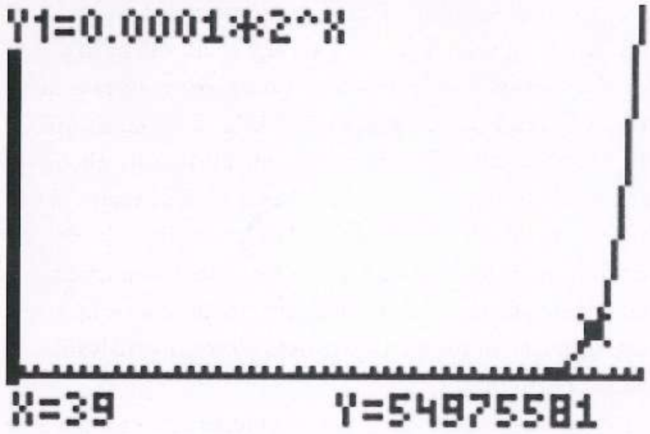


Figura 1.—Gráfico da função $f(n)=0{,}0001\times 2^n$

N.º de dobragens	Espessura em metros
0	0,0001
1	0,0002
2	0,0004
3	0,0008
4	0,0016
5	0,0032
...	
12	0,410
13	0,819
14	1,638
15	3,277
16	6,554
...	
39	54 975 581,389
40	109 951 162,778
41	219 902 325,555
42	439 804 651,110

Figura 2.—Tabela do número de dobragens/espessura

ganizar os dados numa tabela e traçar o gráfico[3] (figura 1) da função que nos dá a espessura da folha (em metros) a partir de um número n de dobragens: $f(n) = 0,0001 \times 2^n$.

A análise do gráfico permite-nos ver que a espessura obtida pela dobragem da folha só ganha um valor considerável perto da 40.ª dobragem, altura em que a função aumenta drasticamente o seu crescimento. Através da tabela (figura 2) acedemos mais detalhadamente à forma como os valores variam. Nas primeiras dobragens, digamos que não acontece nada de especial... a folha é tão fina que, mesmo dobrada várias vezes, não vamos longe. Só na 14.ª dobragem ultrapassamos o metro na espessura e na 20.ª os 100 metros . . . No entanto, pouco depois chegamos ao quilómetro e, surpreendentemente, na 30.ª dobragem atingimos os 100 000 km. Neste momento começamos a acreditar, embora por ventura com ceticismo, no que a tabela nos mostra: com 42 dobragens obtemos uma espessura que chega e ultrapassa a distância pretendida. Por esta altura, acredito que já esteja à procura de um erro na tabela. Pode repetir os cálculos, experimentar outras ferramentas e até é bom que o faça. Porém, a resposta não mudará. De facto, mesmo para quem está familiarizado com a função exponencial, este crescimento não deixa de surpreender e chocar o senso comum.

O passo seguinte será reclamar: os cálculos estão corretos, mas ninguém consegue dobrar uma folha tantas vezes! De acordo, é claro que o problema é artificial pois, efetivamente, a experiência deixa de ser praticável a partir de um reduzido número de repetições. No entanto, o facto de conseguirmos ligá-lo a experiências pessoais, mesmo que de uma forma limitada, faz com que ele tenha um efeito marcante na maneira como passamos a olhar o crescimento exponencial.

Prossigamos com uma ideia que Paulo Abrantes refere a propósito da resolução de problemas: «um dos poderes da matemática é relacionar o que pode não parecer relacionável». Este poder entra em ação quando percebemos que existem problemas que, aparentemente, são diferentes, mas acabam por ser modelados da mesma forma. É o caso do problema do tabuleiro de xadrez e os grãos de milho, ou outros que surgem com frequência nos manuais escolares. No entanto, pensemos agora em situações reais.

No verão de 2014, surgiu a moda dos banhos públicos nas redes sociais, um desafio que terá começado nos EUA com uma iniciativa de solidariedade. As regras são simples: uma pessoa escolhe três amigos do *Facebook* e lança o desafio de, em 48 horas, publicarem nas redes sociais um vídeo a tomarem banho. Para dificultar, o banho tem de ser de água fria e num lugar público. A moda terá *pegado* por várias razões, mas certamente que o modelo matemático envolvido assume aqui um papel importante. Claro está, temos de novo uma progressão geométrica, só que desta vez de razão 3 em vez de 2. No entanto, quando estudamos situações da vida real como estas e procuramos modelos matemáticos que as expliquem, devemos percorrer o ciclo *realidade — matematização — teoria — regresso à realidade*, também referido por Paulo Abrantes. Assim sendo, percebemos que o modelo de progressão geométrica de razão 3 não se ajusta perfeitamente à situação pois não tem em conta diversas variáveis, como a quebra da cadeia por parte de algumas pessoas. Se assim não fosse, ao fim de 25 repetições desta cadeia, todo o planeta já teria tomado um banho público . . .

Partindo da realidade, há várias situações em que admitimos aplicar o modelo da função exponencial e em que ele poderá desempenhar um papel, mas, na verdade, serão poucas as que podem ser completamente modeladas por aquela função, havendo normalmente algum fator que limita o crescimento. Vejamos o caso da teoria dos seis graus de separação. De que trata esta teoria?

Já deve ter ouvido e até repetido várias vezes a expressão *o mundo é muito pequeno*. Usamo-la, por exemplo, quando percebemos que um amigo nosso afinal tem uma prima que é vizinha do primeiro-ministro... Digamos que esta situação traduz a existência de mais ligações entre as pessoas do que imaginávamos: na situação hipotética que acabei de formular, eu estaria apenas a 3 graus de separação do primeiro-ministro (eu — amigo — prima — primeiro-ministro). A teoria dos seis graus de separação diz, nem mais nem menos, que duas quaisquer pessoas do planeta estão, em média, a seis graus de separação. Impossível, estará a pensar . . . Existirá algum fundamento nesta afirmação, ou será um mito?

Tudo começou em 1969 com um estudo do psicólogo norte-americano Stanley Milgram, que desenvolveu a seguinte experiência: enviou 160 cartas a cidadãos do Wichita e Omaha para que estes as fizessem chegar a uma dada pessoa em Boston, com quem não tinham relação, através de intermediários. Estes cidadãos foram enviando as cartas a pessoas que conheciam e que, mesmo não conhecendo o destinatário em Boston, pudessem continuar a cadeia e se aproximassem sucessivamente do destino. Surpreendentemente, estas cartas levaram, em média, cinco passos até chegarem ao destino, número que Milgram alterou para seis, atendendo a que algumas acabaram por se perder. É claro que esta é apenas uma experiência e, além disso, limitada aos cidadãos dos EUA. No entanto, apesar de o nosso senso comum negar esta afirmação, ela foi ganhando adeptos e deu origem a uma peça de teatro, a um filme e a um *site*, o *Oráculo de Bacon*,[4] concebido a partir de um programa informático desenhado nos anos 90 por estudantes universitários, que permite descobrir os graus de separação entre quaisquer dois atores, inclusivamente atores portugueses.

Mais recentemente, os investigadores Steve Strogatz[5] e Duncan Watts[6] começaram a testar a teoria dos seis graus de separação a propósito do fenómeno da sincronicidade. Intrigava-os questões que nos são tão familiares como: Por que razão os grilos cantam em uníssono? Os cientistas sabiam que os grilos interagem ajustando o seu som ao dos seus vizinhos, o que os levou a considerar de forma mais séria a teoria dos seis graus de separação. Afinal, a afirmação de que quaisquer duas pessoas no planeta estão em média a seis graus de separação seria verdadeira ou um mito? Como explica Steve Strogatz num documentário da BBC[7] sobre este assunto, «se uma pessoa conhece 100 pessoas e cada uma delas conhece 100 pessoas, ao fim de 5 passos temos o planeta inteiro!». Voltamos a ter uma progressão geométrica, desta vez com crescimento ainda mais rápido, atendendo ao valor da razão. No entanto, mais uma vez, este modelo acaba por não explicar convenientemente a situação, porque existem muitas sobreposições, ou seja, muitas das pessoas que cada um de nós conhece são também conhecidas entre si e é isso que torna o problema tão difícil. Como explica aquele matemático, as pessoas tendem a conviver com outras que frequentam os mesmos ambientes e conhecem pessoas que têm entre si muitas afinidades — vivem de certa forma agrupadas em *clusters*. Por esse motivo, parece-nos tão difícil chegar a outras pessoas que vivem noutras partes do mundo e em comunidades tão diferentes da nossa. De facto, se tentássemos chegar até elas através de amigos e conhecidos com um perfil semelhante ao nosso, levaríamos muitos passos até lá chegarmos. No entanto, Watts e Strogatz fizeram uma descoberta que altera drasticamente este número — muitos de nós conhecemos alguém que se mudou para um lugar distante, o que se traduz num elo entre comunidades geograficamente distantes. Estes elos não mudam a organização da sociedade que mantém os seus indivíduos essencialmente agrupados em *clusters*, pois basta a existência de algumas ligações para *unir o mundo*. Visualmente, os dois grafos da figura 3, em que cada ponto representa uma pessoa, mos-

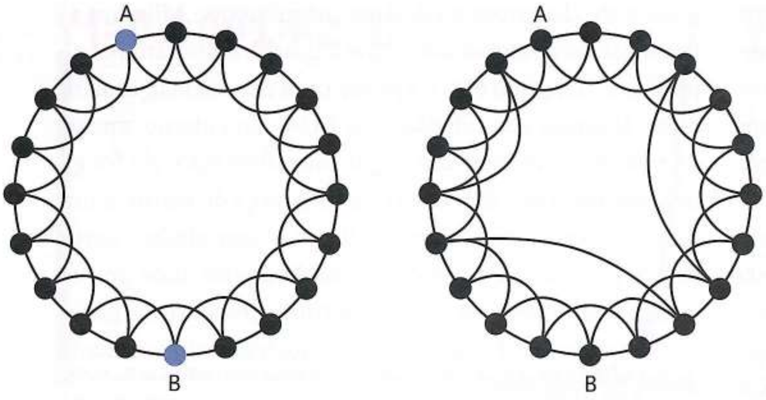


Figura 3.—O modelo de Watts e Strogatz de mundo pequeno (à direita).

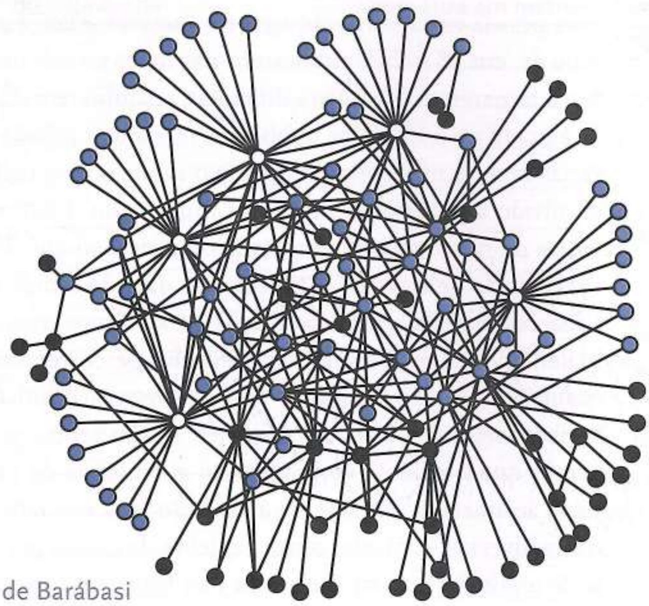


Figura 4.—Modelo de Barábasi

tram-nos esta situação: no grafo da esquerda, para chegar de A a B, precisamos de passar por várias pessoas; no grafo da direita, vemos que a existência de um pequeno número de ligações entre pessoas que não estão próximas encurta enormemente a *distância entre* A *e* B. Este último grafo é representativo da noção de *mundo pequeno* de Watts e Strogatz (figura 3).

A esta descoberta, juntou-se uma outra do físico húngaro Barábasi[8] que estudava na altura redes na internet. Neste caso, Barábasi procurava a resposta para uma pergunta semelhante: Qual a *distância* entre quaisquer dois documentos na *internet*? Ou seja, partindo de um documento que contém *links*, acedemos a outros que, por sua vez, estão ainda ligados a outros documentos diferentes. O primeiro número a que chegou foi curiosamente muito superior a seis, no entanto, Barábasi percebeu que nem todos os sites têm a mesma importância, pois alguns têm uma visibilidade muito maior. É o caso da Amazon, do Yahoo, do Google . . . Esta descoberta estendeu-se também ao trabalho de Whatts e Strogatz pois, assim como há *sites* que são muito mais visitados do que outros, também há pessoas que têm muitas mais ligações do que outras. Os cientistas chamam-lhes *hubs* — nós com muitas conexões que exercem um papel central em qualquer rede (figura 4). Na verdade, isto acontece para as redes da internet, para as redes sociais, redes de transportes e até para as ligações entre as proteínas no interior das células.

Muitas vezes podemos ter a resolução do problema, mas é preciso *senti-la*. Foi o que me aconteceu com o problema da Lua e se repetiu com a teoria dos seis graus de separação. Neste caso, esta ideia significou para mim algo muito claro: tinha de testar a teoria. Sentei-me com alguns colegas, identificámos algumas pessoas da vida pública portuguesa e tentámos chegar a elas o que, na maioria dos casos, veio a acontecer. Afinal, estou muito mais próxima das pessoas públicas que tinha escolhido do que imaginava. Tornei-me ambiciosa. Escolhi um ator de Hollywood *aleatoriamente* — George Clooney. Como chegar até ele? Bom . . . na minha adolescência fiz amizade com um ator português chamado Adriano Carvalho. Pensei que não chegaria através dele, mas consultando o *Oráculo de Bacon*, descobri que o Adriano participou no filme *Star Crossed*, em que contracenou com Wayne Duvall, que por sua vez participou no filme *Leatherheads* com George Clooney! São portanto 3 graus!

Resolvi levar esta situação para a sala de aula. Os alunos reuniram-se em grupo e tentaram chegar a várias figuras públicas portuguesas de diferentes quadrantes. Sem problema, facilmente se chegou ao atual e ao antigo Primeiro-ministro, ao Presidente da República, a Cristiano Ronaldo ou a Judite de Sousa. Os meus alunos estavam renitentes em nomear pessoas estrangeiras, mas quando perceberam que poderíamos chegar a Diogo Morgado ou a Daniela Ruah, abriu-se um mundo de possibilidades (figura 5).

No meu exemplo, os atores portugueses Diogo Morgado e Daniela Ruah representam simultaneamente exemplos de pessoas que geograficamente se distanciaram, permitindo estabelecer ligações com outras pessoas nos EUA, mas também são casos de nós com muitas conexões na rede e

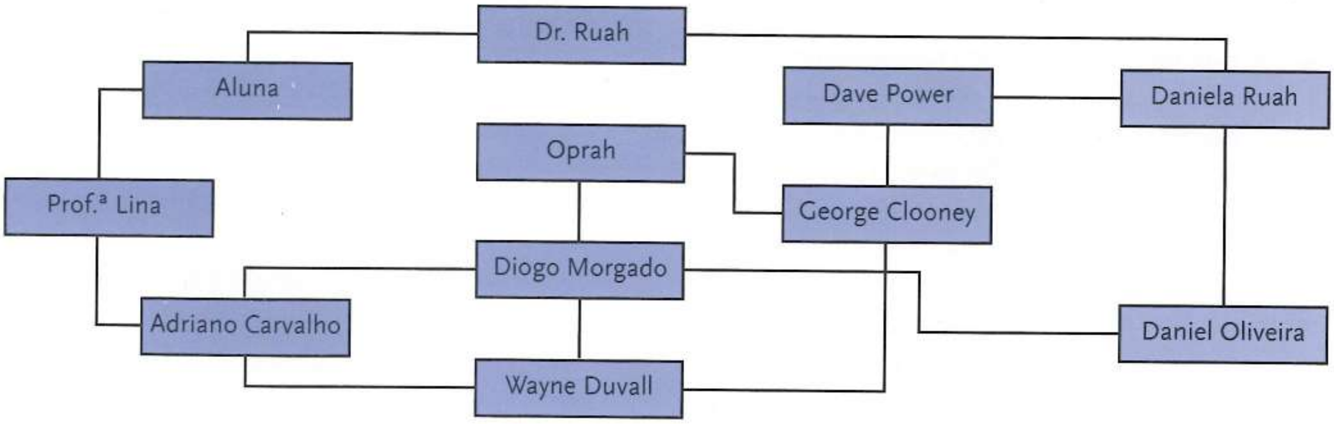


Figura 5.—Grafo com ligações a algumas celebridades

que conhecem outras pessoas ainda mais conectadas. Para chegar a elas, não precisei de mais do que quatro passos e, possivelmente, através delas chegarei a anónimos em sítios tão longínquos como Darfur, onde Clooney abraçou uma causa humanitária.

Podemos continuar a procurar pessoas e divertirmo-nos com este desafio, ao mesmo tempo que nos surpreendemos com a nossa proximidade em relação a pessoas que nem suspeitávamos. Mas quão séria é esta questão? O estudo de Strogatz e Watts deu origem a uma nova área de conhecimento — a ciência das redes — uma área interdisciplinar que promete abrir portas ao conhecimento de uma forma revolucionária. No documentário da BBC, vemos o geneticista Marc Vidal[9] a trabalhar numa equipa multidisciplinar para construir o primeiro mapa com todas as doenças e os genes que lhe estão associados, mostrando conexões entre todas as doenças humanas conhecidas (figura 6). A teoria das redes está a ajudar os informáticos a

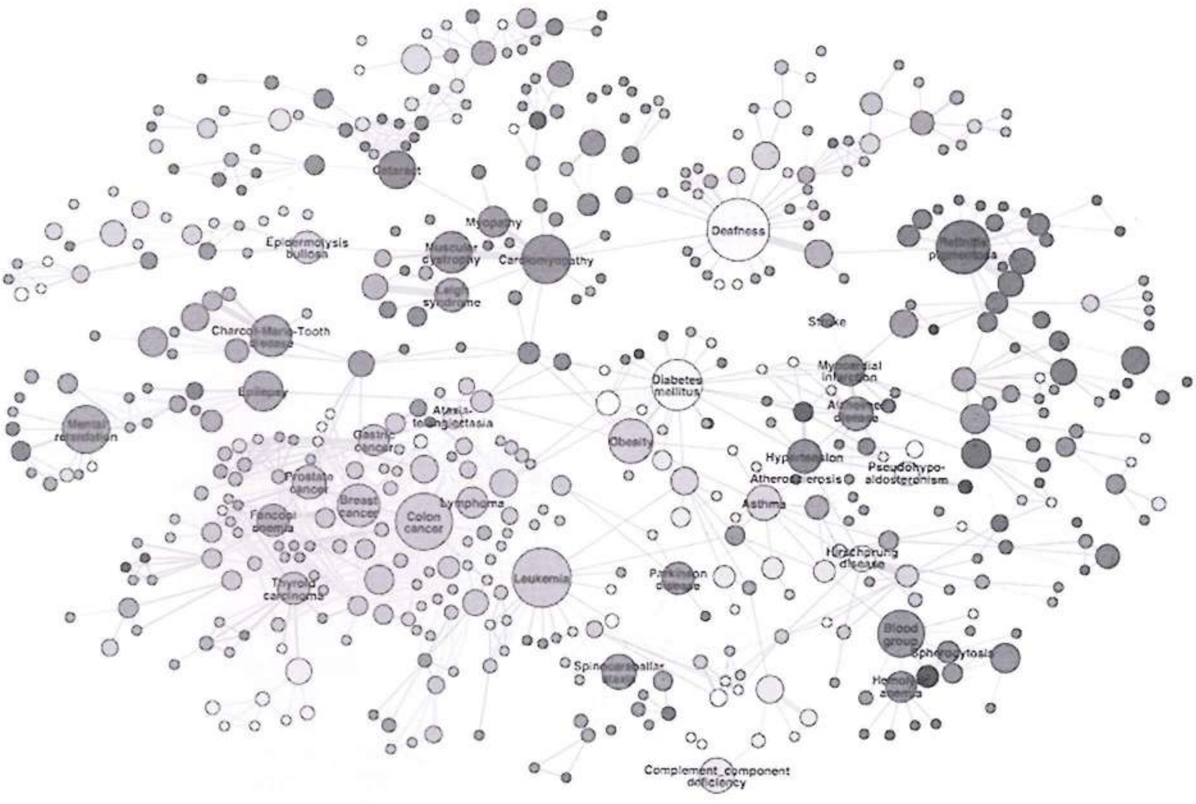


Figura 6.—Mapa das doenças humanas—Barábasi, Vidal e Cusick

compreender a razão pela qual alguns vírus informáticos se espalham tão facilmente e são tão resistentes, da mesma forma que explica a razão pela qual o vírus HIV continua a proliferar. A visão sobre um mundo tão pequeno promete ainda criar ferramentas para combater o terrorismo, prever pandemias ou tratar doenças.

Como Paulo Abrantes afirmou no livro *A viagem de ida e volta*, «na vida, as situações mais interessantes correspondem geralmente a experiências vividas — irrepetíveis e intransmissíveis. Podemos tentar descrevê-las aos outros, mas não conseguimos libertar-nos da sensação de que o mais importante ficou por dizer.» Esta mensagem pode ser válida para experiências diversificadas, mas proponho que pensemos nela a propósito da resolução de problemas — foi com esse objetivo que o Paulo a escreveu. Tudo o que aprendemos a partir de um problema, seja um conceito, uma propriedade, uma estratégia ou uma forma de pensar, é, na maioria das vezes, insubstituível. Penso que as situações que aqui apresentei ilustram esta ideia, mas a razão pela qual as escolhi prende-se também com os sentimentos que espoletaram - surpresa, desconfiança, admiração e, finalmente, fascínio sobre a forma como a matemática me continua a explicar o mundo. Podemos estar muito próximos uns dos outros, mas estas aprendizagens ficam com quem as vive e não se transmitem oralmente, nem pelo professor que está a um grau de distância.

Notas

1 Paulo Abrantes (1953–2003) iniciou a sua carreira como professor de Matemática do Ensino Secundário onde lecionou durante alguns anos. Foi professor no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e um reconhecido investigador na área da educação matemática em Portugal e no estrangeiro. Ocupou o cargo de Diretor do Departamento de Educação Básica no Ministério de Educação (1999–2002), sendo responsável pelo projeto de Gestão Flexível do Currículo e pelo Currículo Nacional do Ensino Básico (2001). Foi sócio fundador da APM e presidente da direcção da Associação, tendo integrado a redacção da Educação e Matemática desde a sua criação da revista em 1986, e sido seu director durante vários anos. Trabalhou na formação inicial e contínua de professores, e integrou e coordenou diversos projetos de desenvolvimento curricular e investigação, particularmente sobre problemáticas curriculares e da aprendizagem da Matemática, onde dedicou especial atenção à resolução de problemas e ao trabalho de projeto.

2 Publicado no número 2 da revista Educação e Matemática

3 Utilizei aqui a variável real positiva x em vez de natural para melhor visualização da curva

4 Disponível em http://oracleofbacon.org/movielinks.php

5 Steve Strogatz é professor de Matemática Aplicada na Cornell University. Doutorou-se em Harvard nesta área e tem trabalhado em dinâmica não linear e sistemas complexos. Tornou-se mundialmente conhecido pelo artigo publicado na revista científica Nature sobre *mundos pequenos*.

6 Duncan Watts foi aluno de Steve Strogatz, com quem trabalhou na construção do modelo de *mundos pequenos*. Atualmente é investigador principal da empresa Microsoft.

7 Disponível em https://archive.org/details/Seis.Graus.Separacao

8 Albert-László Barabási é professor e diretor do Northeastern University's Center for Complex Network Research e membro do Center of Cancer Systems Biology — Dana Farber Cancer Institute, Harvard University e professor no Center for Network Science, Central European University.

9 Marc Vidal é diretor do Center of Cancer Systems Biology — Dana Farber Cancer Institute, Harvard University e professor na Harvard Medical School. A sua investigação recorre à ciência das redes para compreender a forma como as proteínas das células interagem entre si.

Referências

Abrantes, P. (1987). A Lua aqui tão perto. *Educação e Matemática*. 2, 11–12.

Abrantes, P. (1988). *Viagem de ida e volta*. Lisboa: APM.

Barábasi, A. (2002). *Linked: The new science of networks*. Cambridge: Perseus.

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema.

O problema pode ser modesto mas se desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

Tais experiências, numa idade susceptível, poderão criar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, uma marca indelével na mente e no carácter.

G. Pólya (1945)
How to solve it
Do prefácio, extraído da tradução portuguesa de Leonor Moreira: *Como resolver problemas* (Gradiva, 2003).

Todo o problema novo, com interesse, tem uma *ideia-chave*, um *abre-te Sésamo* que ilumina o espírito de súbita alegria: a clássica *ideia luminosa* que faz gritar ‹Eureka!›.

Ora, é esse momento áureo de alegria que o aluno precisa de conhecer alguma vez: só por essa porta se entra no segredo da Matemática, se descobrem os seus tesouros, se aprendem as suas recônditas harmonias.

Visto por esse mágico prisma, todos os assuntos, desde os mais modestos, se transformam como por encanto, ganhando vida e beleza.

J. S. Silva (1965–66)
Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (2.º e 3.º volumes — 7.º ano)

George Pólya (1887–1985), Matemático húngaro de nascimento, para além da sua grande produção matemática em domínios da Matemática muitos diversos, desenvolveu uma intensa actividade muito relacionada com ensino da Matemática. Em 1945 publicou *How to solve it*, livro que se tornou um ‹best-seller› traduzido em muitas línguas, incluindo a portuguesa, e que ainda hoje continua a merecer novas edições.
Este livro, e outros que escreveu posteriormente, em que Pólya elabora sobre a heurística e a actividade matemática, em particular sobre a resolução de problemas, são obras ainda actualmente consideradas de grande importância para o ensino da nossa disciplina.

José Sebastião e Silva (1914–1972), de que este ano se comemoram os cem anos do seu nascimento, é reconhecido como o maior matemático português do séc. XX, tendo publicado obra científica com grande repercussão internacional. Interessou-se muito pelo ensino da Matemática nos diversos níveis, como autor de manuais para esta disciplina e com um profundo envolvimento na renovação do seu ensino — foi o grande protagonista na reforma da «Matemática Moderna» em Portugal, iniciada em meados dos anos 60. Foi autor do programa para esta reforma e dos Compêndios de Matemática e respectivos Guias de utilização, para apoio dos alunos e dos professores.

Henrique Manuel Guimarães

O GeoGebra na Resolução de Problemas: diferentes abordagens e suas potencialidades

HÉLIA JACINTO

A utilização de tecnologias na aula de matemática continua a ser um tema que promove debates acalorados, opondo os mais céticos aos seus mais acérrimos defensores. O atual programa de matemática do ensino básico ‹adverte› sobre o uso indevido da calculadora, mas ‹permite› o recurso a programas de geometria dinâmica, embora os reduza a «instrumentos de desenho e medida» (MEC, 2013, p. 14). Na verdade, a construção e a medição de figuras robustas são apenas duas das potencialidades dos Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), já que estes favorecem também a exploração de conexões entre objetos de diferentes naturezas, por exemplo, geométricos e algébricos.

Os AGD são especialmente apelativos na resolução de problemas que envolvem noções de geometria pelo facto de possibilitarem que as ideias e os conceitos geométricos ganhem vida através da sua manipulação, ao pôr a descoberto o dinamismo implícito nas condições do problema. Resolver problemas com um AGD não só permite alargar o espetro de abordagens e estratégias dos alunos, como potencia o desenvolvimento do pensamento matemático que pode compreender a formulação de uma conjetura, a generalização, a justificação ou a demonstração (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010).

Na sala de aula, a resolução de problemas «deverá constituir o tipo privilegiado das atividades em Matemática» (APM, 2009). Por *problema* entende-se a tarefa não rotineira e de caráter desafiador, para a qual não se dispõe de um procedimento que garanta obter a solução de imediato e que, portanto, requer o desenvolvimento de uma estratégia. Assim, a resolução de problemas não é uma atividade que se deva restringir à mera «seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados» (MEC, 2013, p. 5). Além disso, utilizar um AGD para resolver problemas geométricos estimula a atividade de construção (que permite uma melhor compreensão das relações matemáticas subjacentes), bem como a manipu-

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim de relva retangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do retângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH].

No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do retângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]).

Quando lá chegou, o jardineiro protestou, dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

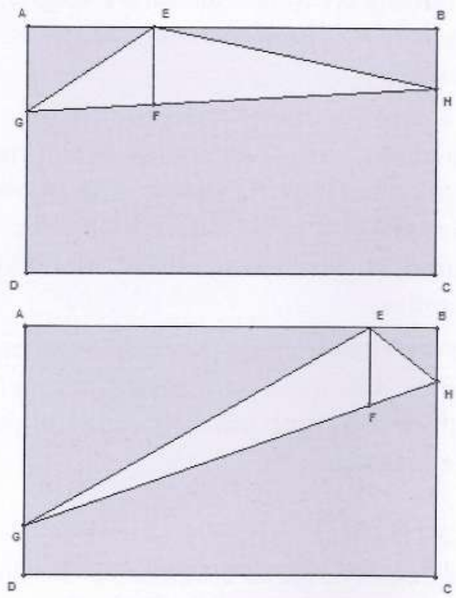


Figura 1.—Enunciado do Problema 6 da edição 2010/2011 do Sub14

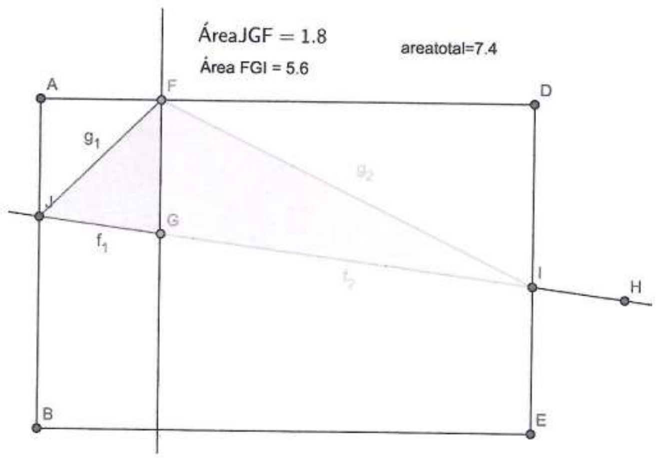


Figura 2.—Construção de Marta e Miguel

lação e a exploração de propriedades dos objetos geométricos. No fundo, resolver problemas com um programa de geometria dinâmica impele o desenvolvimento dos processos de raciocínio dos alunos e, em particular, do seu pensamento geométrico (Iranzo & Fortuny, 2011).

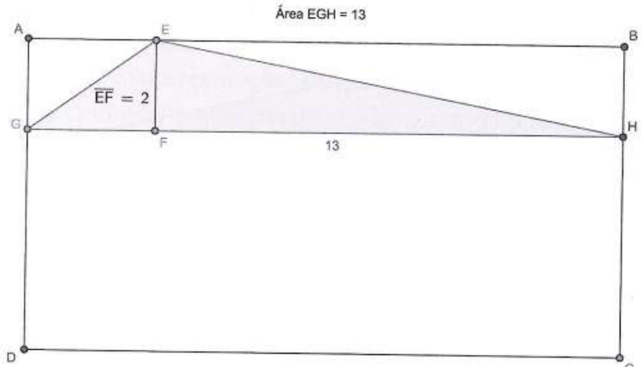
UTILIZAÇÕES DO GEOGEBRA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Com a finalidade de ilustrar diferentes utilizações de um AGD na resolução de problemas, apresenta-se quatro soluções de um problema proposto na Competição Matemática Sub14 (figura 1), realizadas por alunos do 7.º ano.

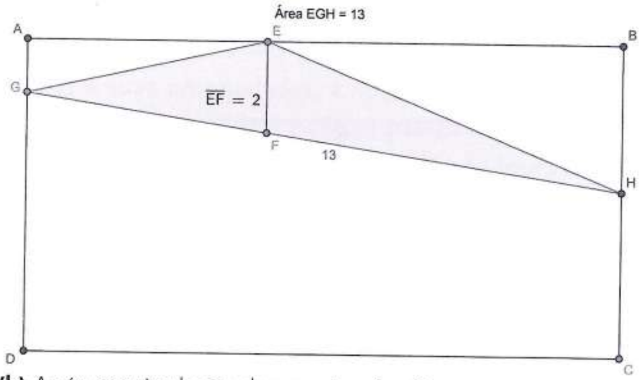
A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA PARA OBTER A SOLUÇÃO

A Marta e o Miguel, de Portalegre, começaram por representar o relvado retangular e as três condições do enunciado relativas à construção do canteiro triangular: a vara tem 2 unidades de comprimento (segmento FG), é perpendicular ao lado AD do retângulo e o «fio» (segmento JI) passa pela extremidade da vara, intersetando-a no ponto G.

Construíram os triângulos resultantes da divisão do canteiro triangular pela vara, alteraram cores, registaram as medidas dessas áreas e a do triângulo FIJ. Como o GeoGebra permite associar medidas aos objetos, e a manipulação de pontos móveis altera formatos e dimensões, é possível observar se essas variações se refletem nas medidas de área correspondentes. Assim, ao arrastar o vértice F, a área total não se modifica apesar de a área dos triângulos menores se alterar, donde concluem que a Rosa tinha razão. No entanto, os jovens não justificaram a sua conclusão pois usaram o GeoGebra apenas para obter a solução do problema.



(a) Aspeto inicial da construção



(b) Após manipulação dos pontos E e G

Figura 3.—Construção enviada por Andreia, Lucas e José

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA PARA INTERPRETAR A SOLUÇÃO

A Andreia, o Lucas e o José, de Portimão, fizeram uma construção em GeoGebra (figura 3) e procuraram dar sentido à sua conclusão. À construção robusta acrescentaram o comprimento do segmento GH e a área do triângulo EGH. A manipulação dos pontos E e G, e a observação da invariância da medida de área e do comprimento do lado inferior do triângulo parecem convencê-los de que a área não se altera. Por escrito, explicam que «triângulos com a mesma base e a mesma altura têm áreas iguais», observação que emergiu a partir da manipulação da figura pois «movendo unicamente os vértices E e G (...) facilmente se constata que o valor da área se mantém inalterável. Por isso o jardineiro não tem razão quando diz que a área diminuiu».

Contudo, ao mover os pontos E e G, o segmento GH deixa de ser paralelo ao lado AB do retângulo, embora a medida que o GeoGebra devolve se mantenha (figura 3b) — o que parece induzir os jovens a considerar que o segmento GH é também invariante e a assumir que é a base do triângulo. Esta situação pode dever-se ao facto de o arredondamento estar definido à unidade, pelo que a manipulação da figura e a observação da invariância da área e do comprimento do segmento conduziram a uma solução correta

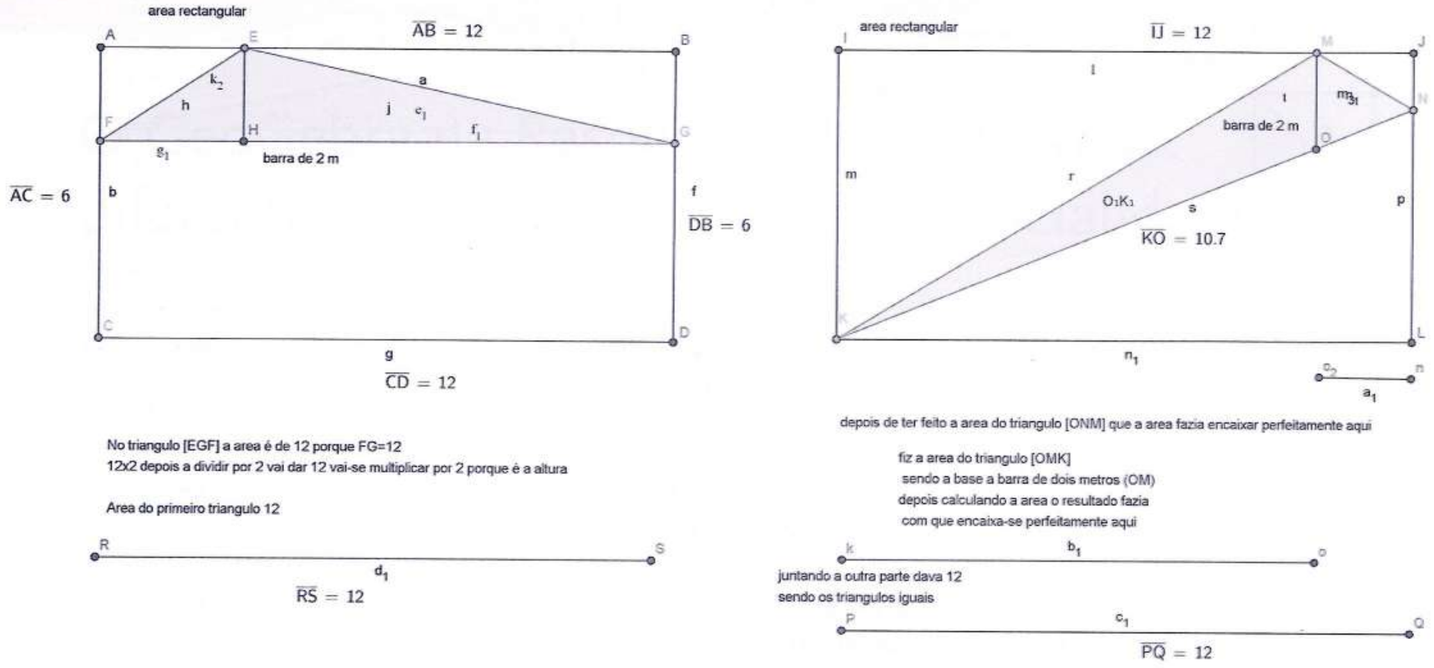


Figura 4.—Imagem com as construções, enviada pela Sara

(a área mantém-se) e ainda a uma tentativa de interpretação desse facto.

A utilização do GeoGebra para confirmar a solução

A Sara, de Lagos, enviou uma imagem resultante de uma captura de ecrã do ficheiro em GeoGebra que produziu quando resolveu o problema (figura 4). Por escrito, explicou:

Fui imaginar que o retângulo tinha 12 cm de largura, a fórmula da área de um triângulo é base x altura a dividir por dois. No primeiro triângulo a área é 12, porque a sua base é 12, 12 × 2 = 24 e 24 a dividir por 2 vai dar 12.

A partir da primeira construção (à esquerda na figura 4) e conforme explicou, a Sara observou que o valor da área do canteiro coincidia com o que inicialmente atribuiu ao comprimento do lado do retângulo. A construção à direita (figura 4) indica que a jovem procurava perceber geometricamente o que acontece quando o lado inferior do triângulo deixa de ser paralelo ao lado AB, pelo que divide o canteiro em dois triângulos interiores, ONM e OMK. Após fazer corresponder a vara à base de cada um desses triângulos e ao representar as suas alturas por dois segmentos denominados a1 e b1, a Sara ‹reduz› a área a uma medida linear pois, se a vara mantiver um comprimento de 2 unidades, o valor da área do triângulo vai corresponder ao comprimento do lado do retângulo. É o que tenta mostrar ao juntar os dois segmentos — as alturas dos dois triângulos interiores — obtendo o comprimento do lado do retângulo. Todavia, a Sara não faz um uso consciente das unidades de medida pois considera que o lado AB tem um comprimento de 12 *centímetros* e o segmento EH tem um comprimento de 2 *metros*, sem que isso a impeça de observar e confirmar geometricamente a invariância da área do canteiro triangular.

A utilização do GeoGebra para explorar a solução

A Jéssica, de Santiago do Cacém, também recorreu ao GeoGebra para simular a construção do relvado e do canteiro, e explorar as suas áreas. No texto que produziu, manipulou a variável ‹altura› dos triângulos menores obtidos pela decomposição do canteiro pelo segmento *i* (figura 5) e concluiu que a área do canteiro triangular coincidia com o valor que se escolhesse para comprimento do retângulo.

Para medir a área de um triângulo, fazemos a seguinte conta: altura × base /2. Para medir a área desses dois triângulos, será então: altura × 2 / 2. Ora, está claro que 2/2=1, portanto, a área desses dois triângulos é igual à sua altura. Podemos afirmar que a soma das alturas dos dois triângulos é igual ao comprimento do rectângulo (jardim de relva). Portanto, a área da zona das flores é igual ao comprimento do jardim de relva rectangular. Se o comprimento do retângulo (jardim de relva) não muda, então a área do triângulo (zona de flores) também se mantém. Por outras palavras, a Rosa tem razão.

A construção de um segmento que regula o comprimento da vara e do ponto móvel no retângulo para controlar as suas dimensões revelam um modo de pensar distinto. Mas é a ausência de medições que evidencia que a construção foi

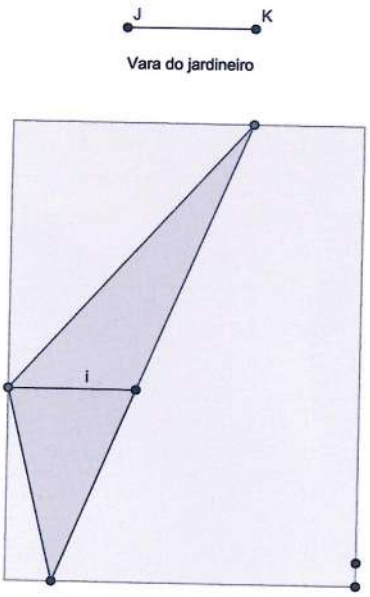


Figura 5.—Construção enviada

feita no GeoGebra com a perspetiva das propriedades geométricas e das relações impostas pelas condições do enunciado, mais do que com o intuito de determinar comprimentos ou áreas. A relação quantitativa que a aluna explica no texto surge numa representação geométrica extremamente poderosa devido à possibilidade de manipulação e, consequentemente, de generalização. A inserção do segmento que permite alterar a dimensão da vara envolve a análise de uma variável que não surge no enunciado, pelo que a exploração da Jéssica vai além daquilo que é solicitado.

Algumas implicações

Destas quatro abordagens ao problema sobressai um conjunto de traços comuns: todos os alunos representam o relvado retangular e o canteiro triangular, todos usam o ‹arrastamento› para verificar ou comprovar, todos analisam, todos concluem. Contudo, também existem diferenças entre estas resoluções e a sua génese parece estar fortemente relacionada com a faceta dinâmica da ferramenta: num caso, a introdução de elementos adicionais na figura levou a compreensões mais profundas da situação; noutro, a invariância da área não só foi reconhecida como explicada geometricamente; e ainda numa outra solução transformou-se o problema num outro ainda mais abrangente permitindo a exploração de uma família de figuras.

As várias resoluções distinguem-se sobretudo pelo papel que o GeoGebra desempenhou para: 1) obter a solução; 2) interpretar a solução; 3) confirmar a solução; e 4) explorar a solução. Mas o uso de tecnologias na resolução de problemas, como noutro tipo de tarefa exploratória, não se esgota na obtenção de uma resposta, é o processo de resolver que motiva o desenvolvimento do pensamento matemático. Estas resoluções ilustram de que forma um AGD pode favorecer a manipulação, o arrastamento, a observação — ações que levam à formulação de conjeturas e sua demonstração, e que constituem aspetos vitais do pensamento geométrico. A formulação da conjetura de que a área do canteiro triangular é invariante surge da observação das propriedades da figura que se mantêm quando a mesma é sujeita a um arrastamento. Mediante a produção rápida de uma grande quantidade de verificações suportadas na medição, alguns alunos podem assumir que essa evidência é suficiente como ‹prova›. Outros, contudo, mobilizam conhecimentos prévios — a construção, a decomposição de figuras e suas propriedades, a noção de altura de um triângulo ou de área – para explorar padrões ou invariantes. É dessa combinação entre a manipulação da figura e as noções geométricas que surge a necessidade de uma prova das propriedades emergentes, pelo que o desenvolvimento do pensamento matemático, e neste caso do pensamento geométrico, assenta na produção de uma sequência de afirmações que justifiquem logicamente a conjetura enunciada.

Este conjunto de resoluções revela a eficácia do uso do GeoGebra, não só para encontrar a solução de um problema geométrico, mas sobretudo para estruturar, dar suporte e ampliar as abordagens destes jovens, exemplificando ainda de que forma as ferramentas tecnológicas podem efetivamente transformar a resolução de problemas numa atividade catalisadora de pensamento matemático.

Referências

APM (2009). *A renovação do currículo de matemática.* (edição comemorativa). Lisboa: APM.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*, 225–253.

Iranzo, N. & Fortuny, J. (2011). Influence of GeoGebra on Problem Solving Strategies. Em L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra* (pp. 91–104). Rotterdam: Sense Publishers.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares. Matemática. Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Hélia Jacinto

Escola Básica José Saramago, Poceirão
& Unidade de Investigação do Instituto
de Educação da Universidade de Lisboa

Quando os problemas não caem do céu

Pedro Cruz Almeida

A afirmação de que os problemas não caem do céu pode ser contrariada por uma valente carga de água. Mas vendo bem, ela não é, só por si, um problema. Os estragos por ela provocados só acedem à categoria de problemas porque nos afetam e, sobretudo, porque os queremos resolver. Os problemas, qualquer que seja o âmbito da atividade humana, são sempre construções de quem os quer resolver. Sempre? No ensino, e no ensino da matemática, a maioria dos problemas caem efetivamente, não do céu, mas das mãos dos professores ou dos cadernos de exercícios. Ainda assim, quem pretende resolver um problema já formulado tem de o interpretar e isso acaba por ser uma reformulação do problema. A inevitável interpretação que se faz de um problema constitui-se como um novo enunciado (Kilpatrick, 1987).

Neste artigo procuro sensibilizar para o papel da formulação de problemas no ensino da matemática. A minha preocupação está focada nos primeiros anos de escolaridade.

Breves referências à formulação de problemas

Uma visão, para mim inspiradora, do papel que a formulação de problemas desempenha na resolução de problemas é a lista de perguntas que George Pólya recomenda a quem pretende ou tem de resolver um problema, na sua famosa obra *How to Solve It* (2003/1945, 1.ª ed.). Desde que a resolução de problemas se tornou o centro das atenções do currículo e da investigação que a formulação de problemas se fez presente, apesar de não ter sido alvo da mesma atenção. Ela foi progressivamente ganhando direitos de cidadania. O ano de 1980 é considerado um marco no que se refere ao papel da resolução de problemas no currículo. Foi nesse ano que o National Council of Teachers of Mathematics publicou *An Agenda for Action*, (NCTM, 1980) colocando a resolução de problemas no centro do ensino da matemática e recomendando — esta é a parte que me interessa — que os alunos aprendam, entre outras coisas, a formular questões-chave, a analisar e conceber problemas e a definir o problema e o seu objetivo. Uma importante obra de referência para a formulação de problemas é *The Art of Problem Posing* (Brown & Walter, 2005), cuja primeira edição data de 1983. Este livro resulta de uma experiência acumulada por estes autores na realização de cursos dedicados à formulação e resolução de problemas desde meados dos anos 60 do séc. XX.

Na revista *Educational Studies in Mathematics* de maio de 2013, especialmente dedicada a este tema, podemos dar-nos conta do panorama da investigação nesta área. Reconhece-se que as atividades de formulação de problemas podem promover atitudes positivas para com a matemática e o envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem, assim como contribuem para o desenvolvimento de capacidades e conhecimentos na resolução de problemas (Singer, Ellerton, & Cai, 2013). Há ainda outros dois artigos de que gosto muito. Um que aborda a avaliação da capacidade de formulação de problemas (Silver & Cai, 2005) e outro que usa a formulação de problemas para avaliar o conhecimento dos alunos sobre a divisão, em particular a divisão de 6 por 1/2 (Barlow & Drake, 2008).

O que é a formulação de problemas

Vou usar a definição dada por Stoyanova e Ellerton (1996) para dizer em que consiste a formulação de problemas: «o processo pelo qual os estudantes constroem interpretações pessoais de situações concretas, com base na sua experiência matemática, e as formulam como problemas matemáticos significativos» (p. 1). É uma definição muito abrangente, mas dá-me jeito que assim seja. Dentro desta definição, Stoyanova e Ellerton estabelecem três categorias de tarefas. Numa primeira categoria está a formulação livre, no sentido em que não tem de obedecer a um determinado constrangimento matemático. Quem inventa o problema escolhe o contexto, os dados e condições que determinam a estrutura matemática do problema. Numa segunda categoria consideram-se as formulações que devem obedecer a determinadas condições sem no entanto condicionar de forma fechada a estrutura matemática do problema. Designam-se por tarefas semiestruturadas. O aluno tem a liberdade de definir a estrutura matemática a partir de dados que lhe são fornecidos por meio de uma história, uma imagem ou uma outra representação. Nem sempre é fácil decidir se uma determinada tarefa deve ser incluída nesta categoria ou na terceira e última, a das tarefas estruturadas. Percebe-se que aqui estão as tarefas em que a estrutura matemática da situação está bem definida. Quem formula tem de encontrar o contexto que se adequa à estrutura ou descortinar tal estrutura dentro de um contexto que lhe é fornecido e uma condição que lhe é imposta.

Outros autores (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005) encontraram uma maneira de classificar as tarefas de formulação de problemas tendo em conta processos cognitivos utilizados: *compreender, editar, traduzir e selecionar*. Relacionadas com o processo *compreender* estão as tarefas em que se formula um problema para uma determinada expressão numérica que é apresentada. Trata-se de contextualizar a expressão exigindo, no mínimo, o conhecimento do significado e das propriedades das operações envolvidas. *Editar* é o processo envolvido numa tarefa que consiste simplesmente em formular um problema ou perguntas a partir de dados apresentados num texto ou numa imagem. O processo *traduzir* está presente quando, na tarefa de formulação, é exigida uma interpretação das relações entre os dados presentes numa representação matemática. Por exemplo, formular um problema que se resolva por meio de uma ou mais operações, a partir de dados apresentados sob a forma de gráficos, diagramas, tabelas . . . Quando se trata de descobrir a pergunta que produziu uma determinada resposta com base em dados de um enunciado, está envolvido o processo *selecionar*.

Há muito mais na literatura sobre categorização de tarefas, processos e estratégias (eg., Brown & Walter, 2005; Silver, 1994; Singer & Voica, 2013). O que apresentei até aqui é apenas um princípio que me tem orientado no desenvolvimento de tarefas de formulação de problemas.

A fotografia que vês ao lado mostra a embalagem e os pacotes do leite escolar que se bebem na tua escola.

Faz diferentes perguntas para serem respondidas a partir dos dados que a imagem mostra.[1]

Figura 1.—Tarefa (A) semiestruturada envolvendo o processo editar.

Alguns exemplos

As tarefas e os resultados que apresento foram realizadas em contexto de entrevista. Iniciei a aplicação destas tarefas quando os alunos frequentavam o 3.º ano e prossegui o trabalho durante o primeiro período do 4.º ano de escolaridade. Envolvi cinco alunos, dois rapazes e três raparigas com níveis de desempenho escolar diferentes. Um dos meus objetivos no trabalho que estou a desenvolver é observar o conhecimento matemático mobilizado por estes alunos em tarefas de formulação de problemas.

Tarefa A

A figura 1 mostra uma tarefa semiestruturada que envolve o processo *editar*. São fornecidos dados através de uma imagem e é pedido ao aluno que formule perguntas (problemas) que exijam a sua utilização na resolução. Não é estabelecida qualquer restrição quanto às operações que devem ser envolvidas. Os dados presentes podem ser relacionados aditiva ou multiplicativamente. A pergunta pode incidir sobre a diferença entre o número de pacotes dentro e fora da caixa ou pretender saber quantos mililitros de leite há em 27 embalagens. Por isso mesmo é uma tarefa que dá ao aluno a oportunidade de usar os conhecimentos que possui com alguma liberdade.

Devo chamar a atenção para a confusão entre *embalagem* e *pacote* que o enunciado negligentemente provoca. Esta confusão foi depois esclarecida oralmente, passando a chamar-se pacote à caixa que contém as embalagens.

Para esta tarefa o Ricardo fez quatro perguntas pela ordem que enuncio:

(a) Quantos ml há na embalagem?
(b) Quantos ml há num pacote?
(c) Quantas embalagens há no pacote?
(d) Se for o dobro dos pacotes quantos ml havia?

Pedi-lhe que numerasse as suas perguntas por ordem crescente de dificuldade e a sua resposta foi (c), (a), (d), (b). Explicou que as questões (c) e (a) são as mais fáceis por terem resposta dada na imagem. Do meu ponto de vista não deixam de ser perguntas interessantes pois correspondem à capacidade de focar a atenção e identificar dados no contexto. Mas a questão mais interessante aqui é ter decidido que a pergunta (d), que envolve duas operações, é mais fácil que a pergunta (b). A justificação dada pelo Ricardo baseou-se na possibilidade de se poder calcular o dobro usando a adição, sendo mais complicado saber a capacidade do pacote por conter muitas embalagens. De facto, quando na explicação ele cita a pergunta (d) para a comparar com a outra (b), lê apenas a expressão *se fosse o dobro* e não tem em conta o resto da pergunta (d). Só após a resolução da sua terceira pergunta, assim que lê a quarta, reconhece imediatamente que já a tinha resolvido.

Há uma condição no pedido que é feito ao aluno, a de que devem ser usados os dados fornecidos na imagem, no entanto os alunos frequentemente acrescentam dados. É

$$3 \times 6 = ?$$
$$3 \times ? = 18$$
$$? \times 6 = 18$$

Figura 2.—Conjunto das três expressões utilizadas numa tarefa (B) estruturada, envolvendo o processo compreender.

possível que tal possibilite uma formulação mais ajustada aos conhecimentos que se possuem, quer no sentido de complicar como de simplificar o problema.

O Daniel começou por formular três perguntas:

(a) Se houvesse 4 pacotes de leite escolar, quantas embalagens haveria?

(b) Quantos ml haveria nos 4 pacotes de leite?

(c) Quantos ml haveria em 10 pacotes de leite?

Pedi-lhe ainda uma quarta pergunta com uma condição: que fosse respondida por meio de uma divisão. Ao inserir esta condição no pedido da tarefa estou a aproximá-la de uma tarefa estruturada. No diálogo que se seguiu, o Daniel propõe que se determine metade (ou a quarta ou a oitava parte) «se houvesse 28 embalagens». Porquê 28? Porque 27 é primo, diz, e faço-lhe ver que tal não é verdade porque 27 se pode obter com 3×9. Mas é mais complicado, responde. Insisto que ele utilize o número 27 e pense por quanto o pode dividir. Acabou por escrever «Se houvesse 27 embalagens qual seria a 1/9 parte?» Este *se houvesse*, desnecessário, explica-se pela continuidade da sua utilização nas perguntas anteriores e por fidelidade à sua primeira formulação que contava com 28 embalagens. Estabelecidas as quatro perguntas, pedi ao Daniel que as ordenasse da mais fácil para a mais difícil. Contrariamente ao que esperava, colocou em primeiro lugar esta última, depois a que inquiria sobre o número de embalagens em 4 pacotes, em terceiro a que perguntava sobre a capacidade em mililitros de 10 pacotes e, por fim, a capacidade de 4 pacotes. À semelhança do Ricardo, a sua justificação baseia-se na facilidade dos cálculos. Refere que saber a nona parte é fácil porque «é só 3×9» e que também é fácil a multiplicação de 27 por 4. Quanto à maior facilidade em calcular a capacidade de 10 pacotes do que de 4, atribui ao facto de 10 ser «um número redondo» e exemplificou fazendo o cálculo mentalmente.

Tarefa B

A figura 2 mostra as expressões usadas numa tarefa estruturada que envolve o processo *compreender*. Foi pedido, para cada expressão, a elaboração de um contexto e de uma pergunta. Cada expressão foi apresentada num pequeno cartão, de modo que os alunos pudessem concentrar-se numa expressão de cada vez, escolher por onde começar, voltar atrás e reformular o que já tinham dito ou pegar noutra expressão. Tratou-se portanto de formular três problemas que podiam estar relacionados, por exemplo, mantendo o contexto e fazendo variar a incógnita. Esta tarefa pode parecer demasiado elementar por causa dos valores envolvidos mas, com isto, pretendi facilitar a escolha de um contexto próximo da realidade e não ocupar o aluno com a determinação do resultado. O meu objetivo foi verificar até que ponto os alunos conseguiam criar contextos que evidenciassem os diferentes sentidos das operações envolvidas.

Fiquei surpreendido. Afinal não é assim tão fácil inventar um problema para a expressão 3×6=?. Na primeira tentativa, a Diana começou por atribuir 3 objetos a uma personagem e 6 a outra, mas rapidamente percebeu que não resultava e voltou atrás. A primeira proposta da Inês ia no sentido de saber quanto tinham ao todo duas personagens, tendo uma 3 objetos e outra 6 vezes mais. Acabou também por perceber que não podia ser.

O Ricardo, embora tenha sido necessário focar a sua atenção para corrigir algumas incoerências textuais, deixou claras as suas intenções logo na primeira tentativa. Decidiu começar pela expressão 3×?=18 (I), seguindo depois para 3×6=? (II) e, por fim ?×6=18 (III). Manteve o mesmo contexto e fez variar a incógnita. Interessa comparar os enunciados que produziu para I e III.

(I) «O Vítor tinha 3 amigos e cada amigo deu-lhe um número de carros. O Vítor viu que todos deram o mesmo número e a soma foi 18. Quantos carros deu cada amigo?»

(III) «O Vítor ficou com 18 carrinhos e sabe que cada amigo lhe deu 6 carros. Quantos amigos tem o Vítor?»

Sei que o Ricardo não tem um conhecimento explícito dos sentidos da divisão, mas os enunciados que produziu referem-se aos sentidos de partilha equitativa (I) e de medida ou agrupamento (III). Esta *proeza* foi conseguida porque ele manteve o contexto, de tal forma que, tanto em I como em III, 3 corresponde ao número de amigos, 6 ao número de carros por amigo e 18 ao total de carros. Ele explica que para resolver estes problemas pode recorrer à divisão (18÷3 ou 18÷6). Embora formalmente pareça elementar, quando estas situações aparecem em problemas, exigem dos alunos concetualizações diferentes para a sua resolução.

Reflexões finais

Pode ser um exagero, mas os exemplos acima apresentados sugerem que a produção de um enunciado é mais revelador da competência matemática que a resolução de um problema. As tarefas A e B possuem características que me parecem essenciais para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. A primeira dá liberdade ao aluno para escolher a operação que resolverá o problema formulado, mas exige prestar atenção às possíveis relações entre os dados fornecidos. A segunda dá-lhe a operação e obriga-o a selecionar criteriosamente os dados e suas relações. Ambas possibilitam uma reflexão sobre as condições presentes no contexto, reflexão na qual o aluno está fortemente interessado porque é o autor do problema. Nos primeiros anos de escolaridade, os problemas de contexto próximo da realidade têm um papel importante por contribuírem para dar sentido ao conhecimento matemático e por estabelecer uma ligação entre este e a realidade. No entanto, o uso rotineiro e acrítico deste tipo de enunciados leva os alunos a uma leitura displicente dos enunciados, focando-se em indícios textuais para a seleção das operações que permitem resolver o problema, não sendo capazes de uma interpretação profunda da estrutura do problema (Corte, Verschaffel, & Greer, 2000). A utilização de atividades de formulação de problemas pode contribuir para desenvolver nos alunos uma abordagem mais crítica do enunciado. Mas para que isto aconteça, este tipo de atividades não podem ser esporádicas e aparecer isoladas, sem integrarem uma estratégia de ensino que articule toda a atividade matemática na sala de aula. O objetivo não é nem pode ser, na minha modesta opinião, pelo menos neste nível de ensino, aprender a formular problemas (mais giros, mais originais, . . .), mas desenvolver atitudes, capacidades e conhecimentos promotores do sucesso na aprendizagem.

Notas

1 27 Embalagens de 200 ml

Referências

Barlow, A. T., & Drake, J. M. (2008). Assessing understanding through problem writing. *Mathematics Teaching in Middle School*, 13(6), 326–332.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 37(3), 149–158. doi: 10.1007/s11858-005-0004-6

Corte, E. De, Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. Recuperado (set 2013) de http://math.unipa.it/~grim/Jdecorte.PDF

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (pp 123–147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* Recuperado (nov 2009) de http:// www.nctm.org / standards/content.aspx?id=17278 2009/11/29

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For The Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12 (3) 129–135.

Singer, F. M., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. Educational Studies in Mathematics, 83, 9–26. doi: 10.1007/s10649-012-9422-x

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 1–7. doi: 10.1007/s10649-013-9478-2

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. Recuperado jun 2013, 2013, de http://www.merga.net.au/documents/RP_Stoyanova_Ellerton_1996.pdf

Pedro Cruz Almeida
Escola Superior de Educação de Lisboa

Um problema para o olhar

Dado um triângulo ABC qualquer, marque um ponto D no lado AB e trace DE paralelo a BC, como mostra a figura (figura 1). Una os pontos B com E e C com D, e marque o ponto de interseção F. Trace o segmento AF e prolongue-o de modo a intersectar o lado BC. O ponto de interseção é G. O segmento AG é sempre uma mediana do triângulo. Prove que esta afirmação é verdadeira.

Escolhi este problema porque ele apela fortemente ao recurso a um AGD para testar a validade da afirmação e porque esta demonstração, que não é simples, foi bem desafiante e inesperada para mim. A chave da demonstração está na maneira como olhamos para a figura (figura 1), para os seus elementos e no modo como procuramos invariantes entre esses elementos ou entre as suas relações.

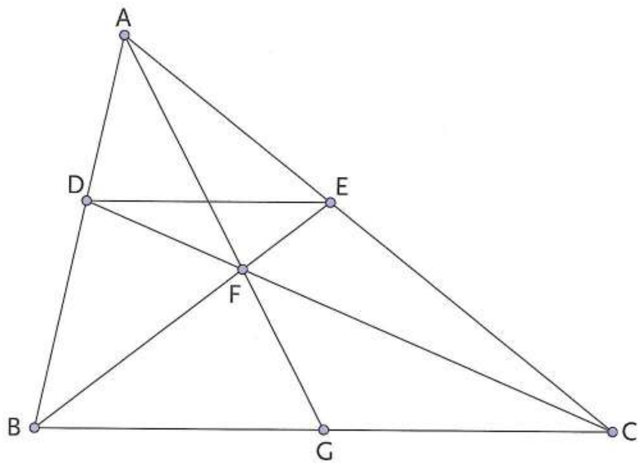


Figura 1

Para provar que AG é mediana basta provar que G é o ponto médio de BG, ou que BG = GC.

A demonstração tem que ter por base as propriedades relativas à situação, ou seja, que DE é paralelo a BC, e factos conhecidos que decorrem da semelhança de triângulos.

Ao examinar a figura é importante ter em conta que não temos apenas uma figura, mas todas as figuras que se obtém fazendo variar o triângulo ABC e a posição do ponto D. Uma sucessão de figuras auxiliares ajudam a ver o que está em causa.

Neste caso temos duas maneiras diferentes de olhar a figura (figura 2 e figura 3). Em qualquer dos casos estamos a dar atenção a pares de triângulos semelhantes, por isso destacamos os triângulos pintando-os. Num caso temos o triângulo ADE semelhante a ABC, no outro temos DFE semelhante a BCF. Para ambos os casos a razão de semelhança tem que ser igual pois ela é determinada pelo paralelismo dos segmentos DE e BC e pela relação que se estabelece entre DE e BC. Designamos esta razão por k. Temos BC = k DE.

O facto dos dois pares de triângulos terem a mesma razão de semelhança é o elemento crucial desta situação. Ao traçar o segmento AG mantêm-se a razão de semelhança entre novos pares de triângulos e podem ser obtidas relações entre outros segmentos.

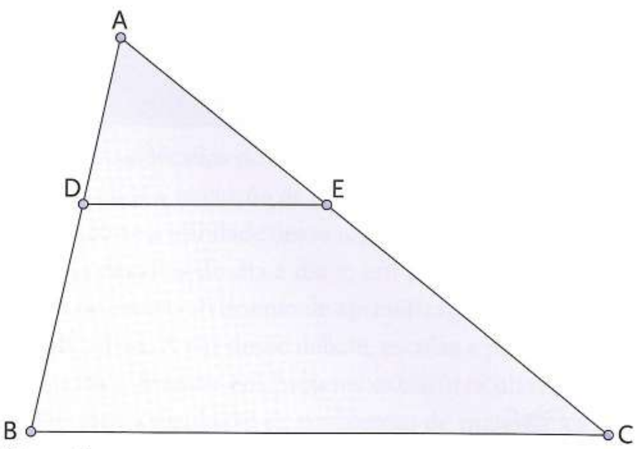


Figura 2

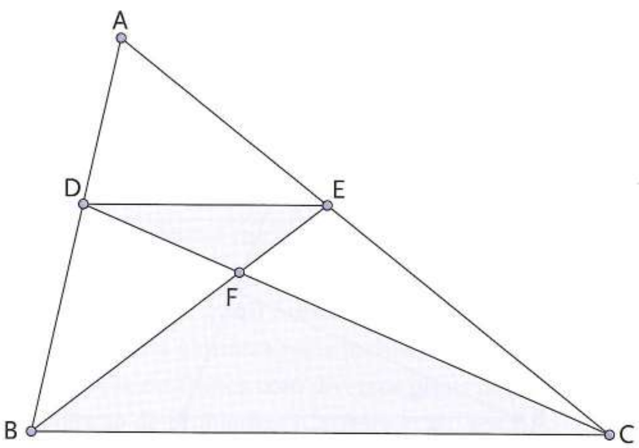


Figura 3

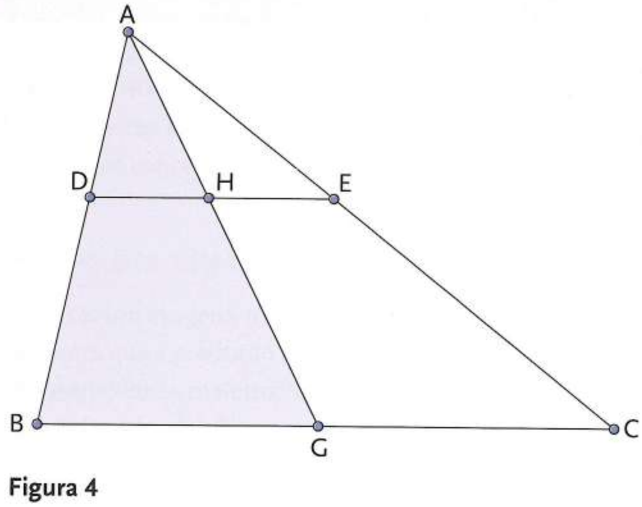


Figura 4

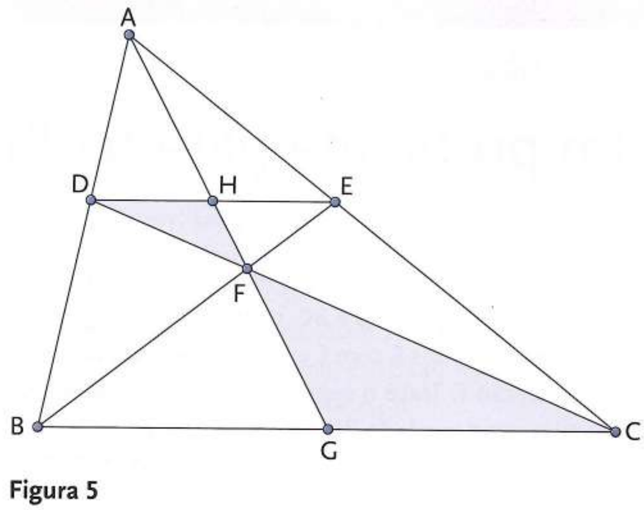


Figura 5

Estabelecendo agora relações entre os segmentos da figura (figura 4 e figura 5), obtemos:

BG = k x DH e também GC = k x DH

Destas duas igualdades podemos retirar que BG = GC. Precisamente o que queríamos demonstrar.

Chegamos ao fim da demonstração. Este resultado dá-nos mais uma ideia interessante e útil, um processo para obter paralelas (Figura 6). O processo é este: Desenhamos um triângulo ABC e obtemos o ponto médio de um dos seus lados, BC por exemplo. A partir desse ponto médio traçamos a mediana relativa a BC e marcamos um ponto qualquer sobre ela, o ponto P. As semirretas definidas por cada um dos vértices B e C e este ponto P intersetam os lados AB e AC em R e S. Estes dois pontos definem um segmento de reta RS paralelo a BC.

Este problema e esta construção são especialmente interessantes para explorar num ambiente de geometria dinâmica. Uma outra ideia que considero relevante tem a ver com a razão de escolha deste problema. Olhar e analisar várias vezes esta figura, procurando o máximo de relações entre os seus elementos confere-lhe também um dinamismo, mesmo que esteja desenhada em papel branco. Experimente.

Este problema foi retirado de Johnston-Wilder, Sue e Mason, John (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University. (p. 39). A discussão apresentada foi adaptada da discussão feita pelos autores do livro.

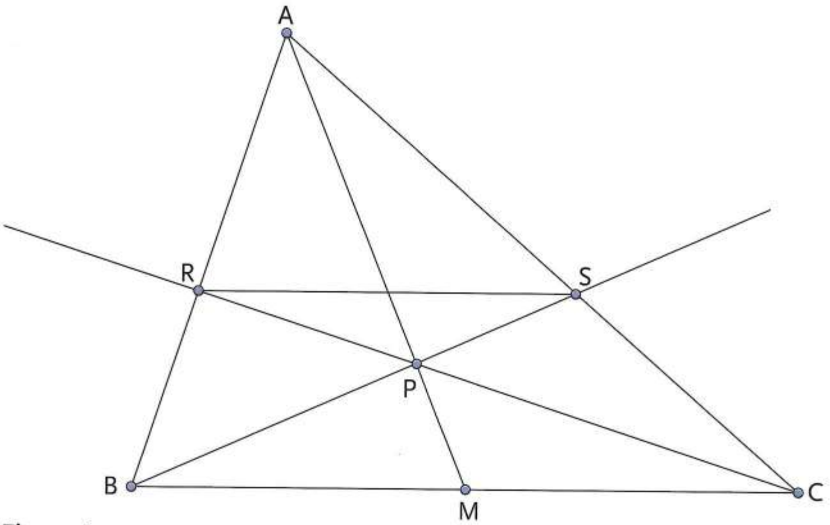
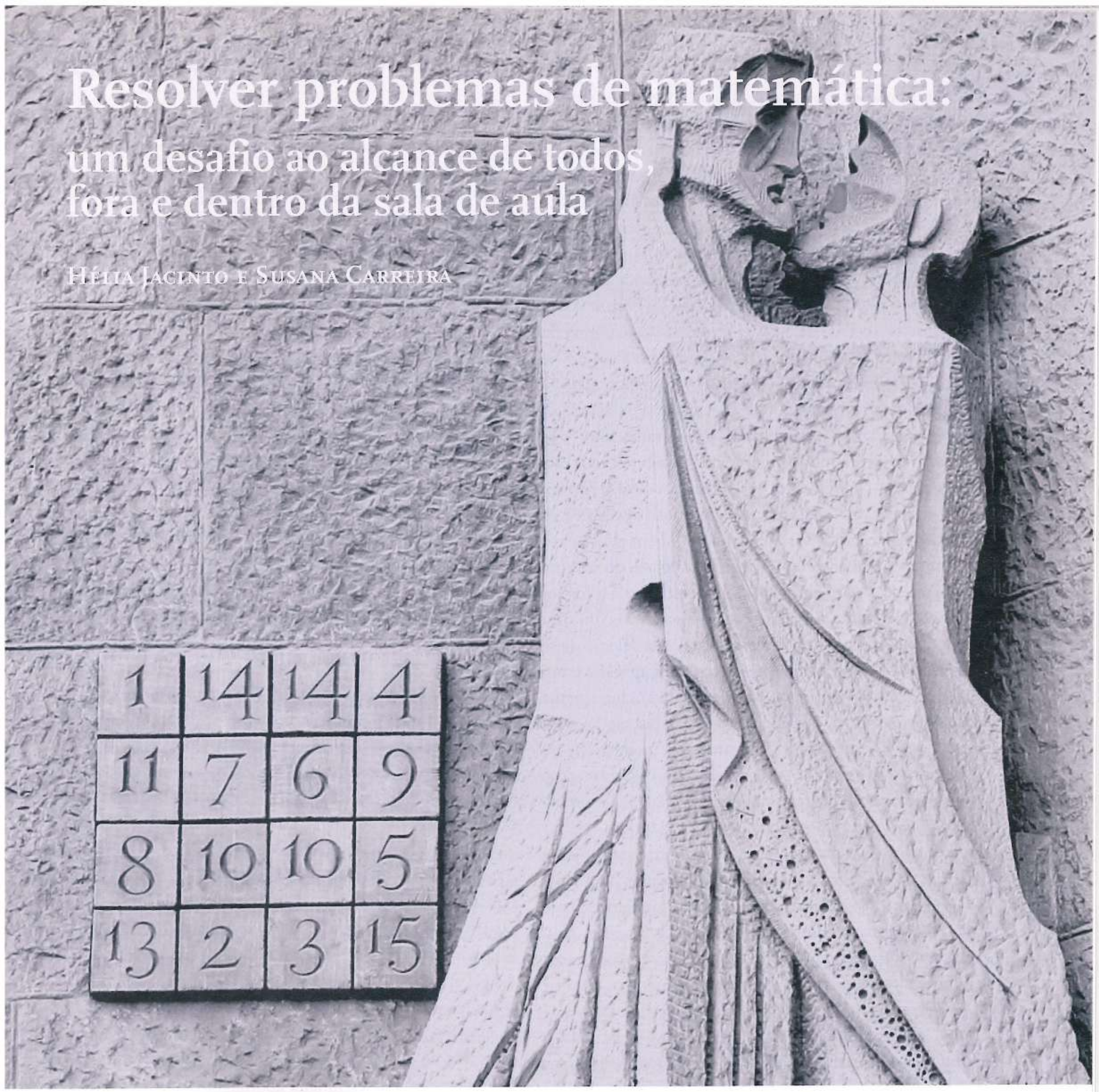


Figura 6

Resolver problemas de matemática:
um desafio ao alcance de todos, fora e dentro da sala de aula

Hélia Jacinto e Susana Carreira



Nas últimas décadas do século XX ganhou vida um amplo debate sobre a *resolução de problemas* de matemática reconhecendo-se a utilidade dessa capacidade básica para fazer face aos desafios do dia a dia e, em paralelo, a sua importância no desenvolvimento de aprendizagens matemáticas significativas. A par desse debate, escolas e professores começaram a investir em projetos extracurriculares relacionados com a resolução de problemas de matemática com o objetivo de complementar o trabalho de sala de aula. São hoje exemplos o *Problema do Mês*, o *Canguru Matemático Sem Fronteiras* ou as *Olimpíadas Portuguesas da Matemática*. Algumas destas iniciativas têm um forte cunho competitivo e destinam-se a alunos particularmente talentosos, mas outras — de que o Sub12 e o Sub14[1] são exemplo — assumem uma natureza mais inclusiva o que possibilita a participação de alunos com diversos graus de aptidão para a resolução de problemas (Carreira et al., 2012).

As Competições Matemáticas Sub12 e Sub14

Estas Competições são organizadas pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve desde 2005 e destinam-se a jovens do Algarve e do Alentejo que frequentem o 5.º ou o 6.º ano — no caso do Sub12, e o 7.º ou 8.º ano — no caso do Sub14. Funcionando de modo idêntico, o Sub12 e o Sub14 estão organizados em duas fases. Entre janeiro e junho decorre a *fase de apuramento*, durante a qual são disponibilizados *online* dez problemas, um por quinzena. Os concorrentes acedem ao enunciado e dispõem de duas semanas para encontrar a solução e enviar a sua resolução em formato eletrónico. A resposta a cada problema só é considerada válida mediante apresentação de uma explicação detalhada da estratégia usada e de uma justificação do raciocínio. A organização devolve uma apreciação do trabalho de cada concorrente, o que pode conter pistas que ajudem a corrigir ou a completar a resolução. É permitido que revejam a solução dentro do prazo estipulado e é também possível solicitar ajuda a professores, colegas, familiares, ou mesmo à organização, a fim de ultrapassar eventuais dificuldades. Ao longo da edição, a organização divulga listas com o desempenho dos concorrentes bem como uma seleção de resoluções que ilustrem diferentes estratégias, revelem criatividade ou o uso oportuno de uma determinada ferramenta tecnológica — as *resoluções admiráveis*. Estas são as particularidades dos Subs que sustentam a sua faceta inclusiva e que permitem manter estes jovens, com diferentes aptidões para a matemática, focados na resolução de problemas desafiadores durante um período de tempo relativamente longo. Os concorrentes que resolvam corretamente oito dos dez problemas propostos são apurados para a *fase final* que consiste na resolução de cinco problemas, com papel e lápis, no campus da Universidade do Algarve. Aqui se desenrola a verdadeira competição, dado que os concorrentes resolvem os problemas individualmente e num período de tempo limitado (Amado & Carreira, 2012).

Os Campeonatos de Matemática Sub12 e Sub14 foram o foco do projeto de investigação Problem@Web,[2] na área da Educação Matemática, onde se procurava compreender as estratégias de resolução usadas pelos concorrentes, o uso de ferramentas tecnológicas, as formas de expressão do pensamento matemático, e ainda a sua criatividade matemática. Com base em dados recolhidos no âmbito deste projeto, debruçamo-nos sobre a natureza da resolução de problemas de matemática que decorre para além da sala de aula num ambiente permeado pelas mais diversas tecnologias. Descrevemos ainda como alguns professores acompanham os seus alunos nas Competições e incorporam esta resolução de problemas nas suas aulas de matemática.

Em que é que esta resolução de problemas de matemática é diferente?

Os *problemas não-rotineiros* propostos nas Competições visam estimular intelectualmente os concorrentes supondo-se, à partida, que não dispõem de um procedimento que lhes dê garantia imediata de encontrar a solução. Os desafios não são alinhados com o currículo pelo que esta resolução de problemas envolve o recurso a uma matemática e a um pensamento matemático que não são necessariamente impelidos pelos conhecimentos matemáticos escolares, ou seja, os concorrentes *desenvolvem formas produtivas de pensar* acerca de cada situação, utilizando conhecimentos informais e incorporando elementos descritivos da sua abordagem.

Nestas Competições respeitam-se as preferências e as experiências de cada concorrente e *reconhece-se a sua validade* enquanto elementos estruturantes da capacidade de resolver problemas. Esta liberdade espelha-se na diversidade de soluções submetidas quer em termos das abordagens, estratégias ou representações matemáticas, quer em termos das ferramentas usadas. Na verdade, o recurso às tecnologias surge com dois propósitos: comunicar a solução encontrada — o que inclui necessariamente um relato do processo seguido; ou suportar o desenvolvimento e a implementação de uma estratégia que conduza à solução — e neste caso, o ficheiro também incorpora essa sequência de passos.

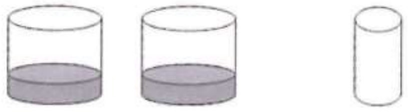
Ao longo de sucessivas edições tem ficado patente que a fase de resolução de um problema está intrinsecamente ligada à fase de elaboração da resposta. Não sendo sempre possível distingui-las como duas fases distintas ou bem delimitadas, sobretudo quando o uso de tecnologias apoia o desenvolvimento de pensamento matemático, é oportuno considerar a *expressão do pensamento* como *parte integrante da resolução de problemas*. Aliás, os concorrentes fazem uma seleção ponderada dos programas que permitem implementar uma determinada abordagem ou resolver um certo tipo de problemas de forma que o ficheiro resultante sirva de veículo de exposição do raciocínio seguido.

Nos Subs, resolver um problema não se resume à apresentação dos cálculos e da solução. Em complemento, importa incluir descrições e explicações detalhadas dos processos, donde que as ilustrações, os esquemas, a utilização de cores ou legendas permitem traçar um roteiro do pensamento matemático desenvolvido até obter a solução.

A tinta que sobrou

A Miriam gosta de dedicar o tempo livre a fazer decorações em sua casa. Recentemente, pôs as mãos à obra e decidiu pintar o seu escritório.

Na hora de arrumar tudo, já muito satisfeita com o trabalho concluído, verificou que tinham sobrado duas latas, cada uma cheia até um quarto de altura. Resolveu juntar o conteúdo das duas latas numa lata mais pequena, com metade do diâmetro das outras duas e com a mesma altura. Achou que nessa lata mais pequena caberia exactamente o conteudo das outras duas.



$V_{cilindro} = Área\ base \times h$

$Área\ base = \pi r^2$

Será que tem razão?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 1—Enunciado do problema 2 da edição 2011/2012 do Sub14

Duas latas iguais com tinta até $\frac{1}{4}$ da altura é o mesmo que tinta até $\frac{1}{2}$ da altura de uma lata.

Chamei R_1 ao raio das 2 latas iguais.

Calculei o volume de tinta:

$$\boxed{V_{tinta} = \pi \times R_1^2 \times \frac{h}{2} = \frac{\pi \times R_1^2 \times h}{2}}$$

Como a lata mais pequena tem metade do diâmetro dos outros, também tem metade do raio, ou seja $\frac{R_1}{2}$.

Calculei o volume da 3ª lata:

$$\boxed{V_{3^a\ lata} = \pi \times \left(\frac{R_1}{2}\right)^2 \times h = \pi \times \frac{R_1^2}{4} \times h = \frac{\pi \times R_1^2 \times h}{4}}$$

Logo, a tinta não vai caber na 3ª lata, portanto a Miriam não tem razão, porque $\frac{\pi \times R_1^2 \times h}{2} > \frac{\pi \times R_1^2 \times h}{4}$

João Real

Comissão: 44

Figura 2.—Resolução digitalizada enviada pelo concorrente A1

Descrições, explicações e construções não são simplesmente processos que os alunos usam a caminho de produzir 'a resposta' e não são simplesmente pós-scripts que os alunos apresentam após 'a resposta' ter sido produzida. Estes SÃO os componentes mais importantes que são necessários nas respostas. (Lesh & Doerr, 2003, p. 3)

Resolver problemas no âmbito do Sub12 e do Sub14 é encontrar formas produtivas de pensar sobre as situações desafiadoras propostas e desenvolver modos de resolver e exprimir o próprio pensamento, na combinação de conhecimentos matemáticos escolares e conhecimentos informais. Nesse processo, os jovens desenvolvem as suas próprias estratégias e incorporam elementos mediados pelas tecnologias que usam, o que pode ser interpretado como um discurso matemático digital.

Um problema, três modos de resolver-e-exprimir

Na fase de apuramento das Competições, que se desenrola a distância, as soluções têm que ser submetidas eletronicamente e, portanto, são *digitais*. Todavia, muitas são inicialmente produzidas por meios convencionais, como o papel e lápis, e são posteriormente digitalizadas. Estes formatos surgem, sobretudo, quando os concorrentes enveredam por estratégias que incluem manipulação simbólica, o que é difícil de reproduzir quer no corpo de um *e-mail*, quer nos programas usuais.

É o caso da solução que o concorrente A1 apresentou para o problema *A tinta que sobrou* (Figura 1). O jovem começou por notar que se cada uma das latas maiores contém tinta até 1/4 da sua capacidade, ao juntar essa tinta numa única lata idêntica obter-se-á metade do volume da lata (Figura 2). Designou adequadamente os raios dos dois tipos de lata e determinou uma expressão para o volume de tinta em cada uma delas, considerando que o raio da base da lata mais pequena é metade do raio da lata maior. Finalmente, comparou as duas expressões e concluiu que o volume de tinta que sobrou é superior à capacidade da lata pequena.

Neste trabalho, em que a tecnologia não adquire um papel de relevo no desenvolvimento da estratégia, está patente um *discurso expositivo* que caracteriza esta resolução de problemas: o jovem fez uma narrativa do processo seguido, apresentando as convenções que usará adiante, intercalando explicações textuais com a manipulação algébrica para deduzir expressões que representem o volume de tinta que sobrou e a capacidade da lata pequena. Destacou

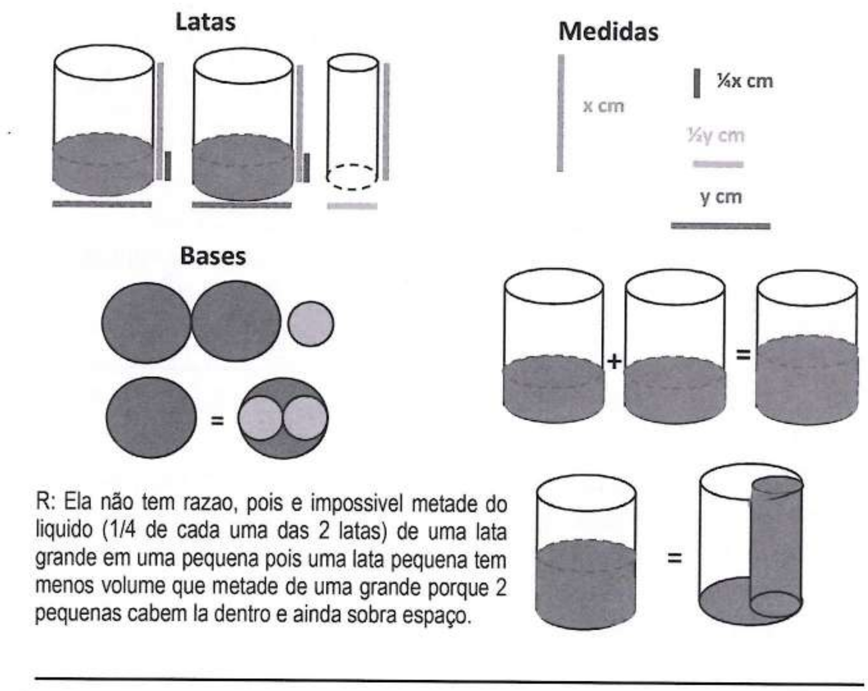


Figura 3.—Excertos da resolução elaborada em PowerPoint pelo concorrente A2

dois passos intermédios ao sublinhar a vermelho a descrição do processo e ao desenhar caixas vermelhas ao redor dessas expressões.

O concorrente A2, por sua vez, submeteu uma resolução elaborada em *PowerPoint* (Figura 3) onde se pode identificar um tipo de discurso expositivo, marcado pela sequência de representações da situação muito próximas do contexto do problema, que pode ser considerado um *discurso matemático digital* dada a relevância que a ferramenta tecnológica assume. As primeiras representações sintetizam as informações contidas no enunciado e incluem uma legenda onde se associam os segmentos coloridos às dimensões das latas, valores estes que são desconhecidos.

O problema é *desvendado* quando o jovem representa a base de uma lata grande e ao sobrepor-lhe duas bases pequenas constata que não cobrem na íntegra o círculo maior. Esta constatação *bidimensional*, que parte da análise e comparação da área das bases das latas, é expandida para uma representação *tridimensional* da situação que suporta a comparação dos volumes de tinta nos cilindros. Verifica então que, para uma mesma altura, «uma lata pequena tem menos volume que metade de uma lata grande» pois ao colocar duas latas pequenas no interior de uma lata grande, «ainda sobra espaço».

As ilustrações e os esquemas utilizados favoreceram o *desenvolvimento de uma forma produtiva de pensar sobre a situação* que congrega saberes informais e conhecimentos matemáticos escolares. Estas representações, a utilização da cor e as legendas suportam o pensamento matemático pois permitem uma manipulação virtual da situação. Todavia, e apesar do relato visual ser bastante claro e revelador do modelo da situação que o concorrente desenvolveu (comparação da área das bases, desprezando as suas alturas por serem iguais e inferindo sobre os volumes em questão), houve a necessidade de incluir uma explicação textual que resume a sua conclusão. Esta resolução ilustra o poder das ferramentas tecnológicas em transformar um problema numa situação manipulável, compreensível e resolúvel, mas revela sobretudo que *resolver e exprimir* essa solução são duas facetas da mesma atividade.

Já as concorrentes A3 e A4 enviaram um ficheiro produzido no Excel e incluíram uma descrição dos seus processos no corpo do *e-mail* (Figura 4). O ficheiro permite fazer um teste mediante a introdução de valores em células

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Cálculo do volume da tinta					Cálculo do volume da lata pequena			
2	Raio	Altura	Total			Raio	Altura	Total	
3	4	5	251,2			2	10	125,6	
4									

Resposta:

Eu e a minha colega utilizamos uma técnica em excel, que dá para calcular várias coisas.

Primeiro cálculamos o volume da tinha conjunta das duas latas grandes. Indicámos o raio, a altura, utilizamos a técnica e no total incide o volume da tinta.

Fizemos o mesmo para o volume da lata pequena.

Resposta: Não é possivel a tinta das duas latas grandes caber na lata pequena, porque o volume da tinta é duas vezes maior que o volume da lata, no qual deveria ser ao contrário.

Figura 4—Resolução enviada elaborada em Excel pelas concorrentes A3 e A4 e explicação do processo

chave. À esquerda, é possível determinar o volume de tinta que sobrou mediante a introdução de um valor para o raio da base do cilindro e outro para a altura de tinta que se queira considerar. A célula C3, que contém a fórmula «= 3,14*A3∧2*B3», devolve o volume total de tinta nessa lata. À direita, calcula-se o volume da lata pequena considerando que o seu raio é metade do raio da lata maior e que a sua altura é o dobro da altura que a tinta que sobrou atinge numa lata grande, e o resultado surge na célula H3. Ao inserir vários casos, todos eles respeitando as condições iniciais, é possível verificar que «o volume da tinta é duas vezes maior que o volume da lata» pequena.

Esta estratégia encerra outra visão do mesmo problema, igualmente produtiva. Com o auxílio de uma folha de cálculo as concorrentes conseguem rapidamente simular um conjunto de experiências e, analisando os resultados obtidos, conjeturar que o volume da lata pequena é metade do volume de tinta que sobra, embora não o provem matematicamente. Completaram o modelo criado no Excel com uma breve descrição textual em que explicam a sequência de passos e respondem à questão colocada, o que vai ao encontro da ideia de que este *discurso expositivo*, composto pelo ficheiro e pela explicação, é parte integrante da resolução do problema. A folha de cálculo permitiu que as concorrentes desenvolvessem um modelo informal marcado pela *expressividade representacional* que a ferramenta permite e pela introdução de expressões que apontam para o contexto para explicitar o sentido que atribuíram aos valores representados.

Para um mesmo problema, três resoluções, três estratégias, três ferramentas, três modos de pensar a que correspondem três modelos eficazes, e que estas Competições acolhem. É a qualidade das descrições do pensamento matemático — isto é, a combinação de representações (mediadas pelo papel e lápis, *PowerPoint* ou *Excel*) com descrições mais ou menos detalhadas do processo de resolução — que permite exteriorizar as formas como estes jovens estão a interpretar o problema e como desenvolvem as suas próprias maneiras de encontrar a solução. Constroem formas de resolver e exprimir a solução que, além de estarem intimamente ligadas às ferramentas que escolhem usar, estão também muito centradas nas suas potencialidades representacionais: visuais no caso do *PowerPoint*; ou de cálculo relacional, no caso do *Excel*.

Os jovens participantes nas Competições exibem uma grande destreza na utilização de ferramentas digitais para comunicar a sua resolução, mas também na exploração dos contextos e no descortinar de uma estratégia, como suporte do seu pensamento matemático. Conseguem tirar partido das tecnologias, reconhecendo e selecionando as potencialidades que são efetivamente úteis à resolução de um dado problema (os destaques, as cores, o desenho, os esquemas, as fórmulas, o texto) para produzir o seu próprio discurso matemático digital, num processo que respeita o seu ritmo de trabalho e as preferências em termos de abordagem, de estratégia, de tecnologias e representações que potenciam.

Das competições à sala de aula: como promover a resolução de problemas

No âmbito do projeto Problem@Web foram entrevistados vários professores, que acompanharam os seus alunos ao longo de sucessivas edições do Sub12 e do Sub14, com o propósito de compreender como encaram esta resolução de problemas, o que valorizam nesta experiência extraescolar, como colaboram com os seus alunos e ainda se e de que forma incorporam os problemas das Competições nas suas aulas.

Como veem as Competições e esta resolução de problemas?

Os professores entrevistados apreciam sobretudo a *natureza dos problemas* propostos aos concorrentes pois consideram que são *adequados para os fazer pensar* de tal forma que lhes permite *sair um bocadinho da rotina* que é inculcada por problemas mais rígidos, como aqueles que surgem nos manuais e apelam diretamente a determinados conhecimentos. Sublinham a possibilidade de os alunos desenvolverem a sua estratégia sem terem que recorrer forçosamente aos conteúdos que estão a trabalhar nas aulas e poderem *ir buscar conteúdos diferentes ou conhecimentos do dia a dia para resolver os problemas.*

[S]urge ali o problema para eles resolverem, portanto eles terão que ir pelo caminho que entenderem e fazerem esquemas ou aquilo que entenderem (. . .) eles têm que ir por outros caminhos e às vezes vão por caminhos muito engraçados. (entrevista P2)

Também mostram apreço pela diversidade nas temáticas escolhidas pois uns problemas *têm a ver com a parte da lógica, outros mais com a parte da geometria, outros em que se fazem outras conexões,* são muito *ricos* e permitem desenvolver muitas capacidades mesmo sem estarem alinhados com os programas.

Outro aspeto positivo é o desenvolvimento da comunicação matemática através do relatar de um processo ou justificar um raciocínio, mas adiantam que esta exigência das Competições se transforma num obstáculo já que *transcrever exatamente o raciocínio que fizeram* ou *explicar como é que raciocinaram* é muito difícil sobretudo para os alunos mais jovens. Para além de poderem *escolher muitas formas diferentes de resolver* os problemas, o facto de os concorrentes terem um período de tempo considerável para pensar na resolução de cada problema é motivo diferenciador.

Como a fase de apuramento se desenrola a distância, há um maior número de alunos a poder participar, o que inclui os de zonas mais distantes ou mesmo isoladas. Este aspeto promove também um maior envolvimento das famílias que chegam a contactar os professores procurando ideias para acompanhar os filhos. A vertente inclusiva das Competições é sublinhada pelos docentes no sentido em que permite que os alunos adquiram *mais autonomia, autoestima, fiquem com aquela ideia de que são capazes* de resolver aquele tipo de desafios.

Trazer as Competições para a aula de matemática

O facto de serem grandes entusiastas da resolução de problemas do Campeonato acaba por transparecer na forma como os docentes acompanham os seus alunos. Uma das professoras resolve cada novo problema assim que este é lançado na página do Sub12 e, já a pensar nas suas aulas, tenta definir pelo menos duas estratégias diferentes. Todavia surpreende-se sempre quando os seus alunos acabam por fazer outro raciocínio e apresentam resoluções criativas, diferentes das suas. Com essa experiência reconhece que tem aprendido muito com os seus alunos.

[E]les têm uma forma de pensar muito diferente da nossa (. . .) nós já estamos um pouco viciados. (entrevista P2)

Para além de recorrerem às Competições para reforçar o trabalho na resolução de problemas nas aulas de Substituição ou de Estudo Acompanhado, enquanto as havia, também utilizam estes problemas na aula de matemática. Selecionam um problema e projetam-no para a turma toda, mesmo que só alguns alunos estejam a participar nos Subs. Como refere um dos docentes, esta *é uma maneira de os integrar* no estilo das Competições, por isso opta por resolver os primeiros problemas em sala de aula. Inicialmente dá algum tempo para exploração autónoma por parte dos alunos *para eles pensarem, para se irem orientando e discutirem.* Nos minutos iniciais não tira dúvidas e incentiva a uma leitura cuidada pois entende que eles *têm de ler, têm de reler várias vezes, têm de experimentar.*

Geralmente, quando percebem que os alunos estão *um bocado embrulhados* nesses momentos iniciais, estes professores dão pequenas dicas para ajudar a desbloquear, mostram exemplos de abordagens ou sugerem formas de organizar a informação para ampliar a diversidade de ferramentas de resolução de problemas. Quando alguns alunos encontram uma solução, abrem uma discussão à turma a fim de comparar estratégias e resultados. Às vezes não é possível encerrar a discussão na aula e os alunos levam esta tarefa para concluir em casa — o que também permite mostrar que a resolução de problemas *é um processo que não é imediato* e que pode ser necessário *mais tempo* para encontrar a estratégia mais adequada.

À semelhança do que é exigido nas Competições, estes professores insistem em que os seus alunos justifiquem os processos usados e apresentem argumentos válidos. Tal insistência não visa apenas fazer cumprir as regras, já que consideram que é fundamental ser-se capaz de expor o que se pensou e o que se fez, mas encaram ainda este requisito como uma forma de *ver se eles têm confiança naquilo que fazem.*

Também nas aulas, os professores projetam a página das Competições com a tabela de resultados para que a turma acompanhe o progresso dos participantes. O que motiva os alunos mais jovens é verificar se alguma das resoluções da turma foi escolhida como *resolução admirável* e publicada na página. Esta atitude leva a que uma das docentes encoraje os seus alunos a serem inventivos e a encontrar várias estratégias de resolução do mesmo problema. Diz-lhes:

> esmerem-se a fazer e sejam originais (...) pensem lá de outra maneira, pensem na primeira e agora vejam lá se não há outra mais interessante. (entrevista P1)

Depois de os seus alunos se ambientarem com algumas técnicas ou estratégias, estes professores insistem para que resolvam os problemas sozinhos e continuem a participar de forma autónoma. Sempre que lhes pareça oportuno, também recorrem aos problemas dos campeonatos para trabalhar determinados conteúdos programáticos e apontam duas possibilidades, assim resumidas:

> podemos utilizá-los tanto para introduzir conteúdos, como aplicação de conteúdos para resolver. (entrevista P3)

No fundo, estes professores encontraram nas Competições Sub12 e Sub14 uma forma de motivar os seus alunos para a resolução de problemas e para a matemática. Reconhecem, com algum desânimo, que muitos alunos têm *a ideia de que resolver um problema é uma coisa chata, muito difícil, muito complicada, só acessível a alguns.* O desalento converte-se em esperança quando sentem que o seu esforço diário é recompensado:

> à medida que se vai encaminhando, eles vão sendo capazes de fazer e depois dizem «afinal era muito fácil!». (entrevista P2)

A persistência é, assim, um das aprendizagens que estes professores tentam desenvolver nos seus alunos, mas são eles próprios reflexo de uma certa perseverança: a de incluir frequentemente tarefas de resolução de problemas não rotineiros nas suas aulas de matemática — *leva um certo tempo, não se pode desistir logo à primeira!*

Notas

1 http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/

2 https://sites.google.com/site/problematwebeng/

Referências

Amado, N. & Carreira, S. (2012). Um olhar sobre uma competição matemática na Web — A resolução de problemas para além da sala de aula. *Educação e Matemática, 119*, pp. 13–18.

Carreira, S., Amado, N. (Coords.), Ferreira, R. A., Rodriguez, J., Silva, J. C., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S., & Mestre R. B. (2012). *Um olhar sobre uma competição matemática na Web*: Os SUBs. Faro: Universidade do Algarve. ISBN: 978-989-8472-19-9.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Model and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism — Models and Modeling Perspectives on Mathematical Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3–33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hélia Jacinto

Escola Básica José Saramago, Poceirão & Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Susana Carreira

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

A resolução de problemas na Educação e Matemática

Sílvia Zuzarte

Ao longo dos 27 anos da revista Educação e Matemática a resolução de problemas esteve sempre presente, fosse através de relatos de experiências de sala de aula, da divulgação e exploração de problemas, nas secções O Problema deste número e Materiais para a aula de Matemática, ou em artigos que apelam à reflexão sobre a resolução de problemas.

Para escrever este artigo fiz uma viagem ao longo da revista, com inúmeras paragens, cuja descrição não caberia neste espaço. Assim, optei apenas por apresentar o que vi em algumas dessas paragens, mais ou menos demoradas. São muitas as estações e para que a viagem não se tornasse demorada, decidi falar-vos apenas de algumas. Optei essencialmente por artigos que apelam à reflexão, não só porque são em menor número, mas também porque de alguma forma me tocaram mais.

Parei logo na revista número 1, num artigo com o título *A resolução de problemas*, onde Leonor Moreira nos desafia para um olhar sobre a Matemática como uma disciplina viva e interessante, que pode ser redescoberta pelos alunos através da resolução de problemas. A autora apresenta um exemplo, que se espera seja hoje menos comum, da resolução de um problema por alunos do 1.° ciclo recorrendo às várias operações até encontrar um valor que lhes parecesse plausível. Para aguçar a vontade de (re)ler este artigo fica aqui o seguinte trecho: «O aspecto formal e acabado com que a Matemática, geralmente, é apresentada aos nossos alunos constitui, ao mesmo tempo, uma mentira e um erro pedagógico. Uma mentira, porque representa uma quase inversão da sequência que tem lugar no tempo e na história. Um erro pedagógico porque inibe, nos nossos alunos, a actividade matemática, a capacidade de inventar (reinventar) a Matemática.» (p. 10). Após esta paragem, que espero vos ajude a refletir um pouco, convido-vos a saborear uma maçã da Maria na revista número 2. A partir do conhecido problema Quantas maçãs tinha a Maria, Eduardo Veloso apresenta várias resoluções e vai muito além com várias generalizações. Bom apetite!

Saltamos agora algumas estações e paramos na revista número 8, dedicada à resolução de problemas. Sendo assim, embora não explicitamente, este foi o primeiro número temático da revista. A capa, realizada por Eduardo Veloso, apresenta uma «lousa» com o enunciado de um problema e o editorial, sobre a resolução de problemas nos programas da época, é de Paulo Abrantes. Desta revista destaco dois artigos: *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática* de Domingos Fernandes e *Um (bom) problema (não) é (só) . . .*, de Paulo Abrantes. Domingos Fernandes propõe-se encontrar resposta a três questões: «1) O que é a metacognição?; 2) Porque é que os aspectos metacognitivos são importantes para o ensino/aprendizagem da resolução de problemas?; 3) Que podemos nós, professores de Matemática, fazer no que respeita ao ensino dos aspectos metacognitivos?» (p. 3). Levanto um pouco do véu com um trecho do artigo, que se enquadra na terceira questão, «(. . .) interessa que o professor em vez de apresentar a solução de um problema, se empenhe na sua resolução. O que isto implica é que o professor ao demonstrar como se resolve um dado problema, deve explicitar as decisões que tomou e deve explicitar como avaliou e controlou tais decisões.» (p. 5). Paulo Abrantes contextualiza a resolução de problemas no currículo e a partir de sete exemplos discute o que é ou não um (bom) problema. Quase no final do artigo podemos ler o seguinte: «A definição de *bom problema* é uma noção relativa não só porque depende, como vimos, dos conhecimentos que o aluno dispõe mas também por outras razões de natureza educativa.» (p. 35). A (re)leitura destes artigos constituí uma excelente oportunidade para refletir sobre como trabalhamos a resolução de problemas com os nossos alunos.

Continuando a reflexão sobre a resolução de problemas na aula de Matemática paramos na revista 17 e (re)lemos o artigo de António Borralho, *Funções dos problemas no processo de ensino/aprendizagem da Matemática*, que nos guia pelas seguintes funções: função educativa, função de ensino e função de desenvolvimento. A que se referirá António Borralho? Aqui fica um exercício para o leitor: cada trecho diz respeito a uma função, qual é qual? Trecho 1 – «A proposta de um problema a um aluno é a oportunidade para que este se confronte com uma situação matemática na qual se incluem determinados conhecimentos sob a forma de termos ou expressões matemáticas, relações quantitativas, operações matemáticas, etc, que são necessários aplicar ou realizar para obter respostas.» (p. 13). Trecho 2 – «(. . .) a principal função da escola, no que respeita ao ensino, deverá estar mais vocacionada para fomentar no aluno a possibilidade de este adquirir o conhecimento por si próprio, do que dotá-lo de grandes volumes de informação, até porque isso seria impossível de se atingir se tivermos em conta o vertiginoso aumento dos conhecimentos de cada campo científico.» (p. 14); Trecho 3 – «Esta função engloba, também, a formação de sentimentos/atitudes positivas face ao trabalho em geral, e à resolução de problemas em particular.» (p. 13). Não posso deixar de manifestar a minha frustração por, passados 23 anos, depois das recentes alterações curriculares, termos voltado a ter programas de Matemática que ignoram, mais acentuadamente ainda, a afirmação do trecho 2.

Algumas revistas depois, no número 21, na secção Para este número selecionámos, é-nos apresentado o artigo *Resolução de problemas e concepções acerca de Matemática* de Martha L. Frank originalmente publicado no Arithmetics Teacher de janeiro de 1988, «salienta a necessidade de promover mudanças nas concepções dos alunos acerca da Matemática e da resolução de problemas. (. . .) Sem esquecer que as concepções dos alunos não mudam da noite para o dia. Martha Frank apresenta sugestões para o ensino da Matemática que poderão influenciar positivamente a actuação dos alunos na resolução de problemas.» (p. 21). (Re)leia o artigo e reflita sobre a questão: Será a realidade atual assim tão diferente?

Dez números depois, Ana Maria Boavida, com o artigo *Matemática e resolução de problemas: múltiplos olhares dos professores*, interpreta a influência das conceções dos professores sobre a matemática na forma como ensinam. Apresenta alguns resultados de um estudo, por si conduzido, onde explora relações entre as filosofias pessoais sobre a matemática de quatro professores e as suas interpretações de problema e resolução de problemas. Ana Maria Boavida agrupou os sentidos que os professores em estudo concedem à resolução de problemas no âmbito do currículo de Matemática em torno de três eixos «a) problemas como exercícios: ausência de problemas enquanto objetos de pesquisa (Duarte); b) problemas como um conteúdo a ser somado ao currículo de matemática (Inês e Paula); c) resolução de problemas enquanto via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática (Maria)» (p. 45). Para sabermos mais sobre as relações acima referidas teremos de (re)ler o artigo.

Uma outra paragem que fiz foi na revista 60, para reler o artigo Cinco problemas, onde cada um de cinco autores apresenta um dos problemas: a conjetura de Kepler, o último teorema de Fermat, a conjetura do fole, o teorema das quatro cores e o terceiro problema de Hilbert. Estes problemas foram a inspiração para as capas dos cinco números publicados no ano 2000, ano Mundial da Matemática e foram resolvidos durante o século XX. Fascina-me sempre ver como a matemática evolui e o prazer e a paixão que desperta, levando pessoas a envolver-se na resolução de um mesmo problema durante anos. Como conseguiremos despertar este prazer e esta paixão nos nossos alunos? Não será certamente, na minha opinião, sobrecarregando-os com definições e notações desnecessárias. Por falar em prazer . . . José Paulo Viana lança assim um desafio a Eduardo Veloso «Deu-me um enorme gozo resolver este problema. Se não o conheceres (do que duvido . . .) julgo que também o apreciarás.» (p. 5). Claro que este desafio foi aceite. Surgiram cinco resoluções diferentes que são apresentadas num artigo na revista 78. Além de José Paulo Viana e Eduardo Veloso, também resolveram o problema António Bernardes, Cristina Loureiro, Florinda Costa e Rita Bastos. Ao (re)ler o artigo não só teremos acesso a cinco resoluções, mas também a uma reflexão sobre as estratégias utilizadas: «(. . .) é possível encontrar uma estratégia velha de séculos, senão milénios, na resolução de problemas de geometria: supor o problema resolvido e procurar relações entre os vários objectos geométricos, esperando-se que daí resultem indicações para a resolução do problema posto» (p. 12). Aconselho a (re)leitura com algum tempo disponível, para poder também aceitar o desafio.

Na revista 97, dois artigos sobre resolução de problemas despertaram a minha atenção: *Da selha da roupa à forma do bolo* e *Respostas reais para problemas reais*. No primeiro, Susana Carreira, Ana Maria Boavida, Hélia Oliveira e Leonor Santos, a propósito de uma proposta de trabalho colocada na formação de professores acompanhantes do Plano de Matemática, discutem questões acerca da natureza dos problemas; no segundo, Jorge Cruz explora ideias que supõe consensuais sobre como implementar a resolução de problemas na sala de aula. Uma das ideias apresentadas por Jorge Cruz é a seguinte «[o] uso tradicional de problemas no final de uma sequência, como se fosse para provar que os conhecimentos teóricos têm aplicação em contextos reais (nos quais os problemas podem surgir) é insuficiente» (p. 38). Será mesmo consensual, ou os nossos decisores políticos na área da educação andam distraídos?

Mais à frente, na revista 114, reli com agrado uma entrevista de Jeremy Kilpatrick a George Pólya, onde são colocadas questões como «De onde vieram as regras e métodos heurísticos que estão no How to solve it?[1] Qual a sua origem?». A partir destas questões a entrevista foca-se na resolução de problemas e vemos como Polya responde sem pretensiosismos a todas elas. Delicie-se como eu (re) lendo esta entrevista . . . Não terminei aqui a minha viagem, mas termino aqui as sugestões sobre a viagem que empreendi. Desafio-os a continuá-la. Porém, reforçando a importância da resolução de problemas para a matemática, e consequentemente para a educação matemática, não posso deixar de vos presentear com uma citação do recentemente galardoado com a Medalha Fields (2014), Manjul Bhargava, o primeiro matemático de origem indiana a receber esta medalha: «– Os alunos não deveriam ser ensinados a resolver problemas como robôs; em vez disso, eles deveriam ser guiados a descobrirem ideias matemáticas chave por si próprios. A matemática deve ser um processo de descoberta criativo e estimulante!»[2]

Afinal, o que seria a matemática e a educação matemática sem problemas? Dos bons, é claro!

Notas

[1] Trata-se do livro de G. Pólya de 1945 (1.ª edição) — em português *Como resolver Problemas* tradução de Leonor Moreira (Gradiva, 2003).

[2] http://indiatoday.intoday.in/story/fields-medal-winner-manjul-bhargava-interview-3-ancient-indian-mathematicians-his-inspiration/1/377773.html

Sílvia Zuzarte
Agrupamento de Escolas de Casquilhos

APM – 2015

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2015

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento (@-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	60,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	60,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	80,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	75,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	100,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2015

		Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Instituições	Portugal	47,00 €	28,00 €
	Estrangeiro		32,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções