Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2014

129

Setembro ∞ Outubro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	Manuela Pires
	Paulo Alvega
	Rita Mestre
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2014
Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Outubro 2014
Tiragem 1700 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
ASPRINT, Apolinário Silva, Unipessoal Lda
Núcleo Empresarial de Mafra
Av. Dr. Francisco Sá Carneiro, Bloco C – 12 cave
2644–006 Mafra

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre a capa

Fotografia de José Sebastião e Silva e da sua mulher, Virgínia Adelaide Sebastião e Silva (Rossio, 1955) —Espólio familiar (Agradeço à Anabela Teixeira por ter trazido ao meu conhecimento esta fotografia e ao Eng. Carlos Sebastião e Silva a cedência de digitalizações da fotografia original, bem como a autorização para a sua utilização.)

A capa deste número pretende chamar a atenção para a comemoração do centenário do nascimento do Prof. José Sebastião e Silva. Deliberadamente apresenta-se aqui o grande matemático numa faceta mais humanizada.

Aproveito a ocasião para chamar a tenção dos leitores da Educação e Matemática, para a recém inaugurada exposição *José Sebastião e Silva – O Homem, O Cientista, O Professor*, que permanecerá em exibição na Reitoria da Universidade de Lisboa até 19 de dezembro de 2014. Mais informações sobre esta exposição e outros eventos a realizar durante o ano letivo 2014/2015 em www.sebastiaoesilva100anos.org.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Adelina Precatado, Ana Rita Branco, Ana Romano, Branca Silveira, Carlos Farias, C. Miguel Ribeiro, Cátia Rodrigues Sousa, Hélia Gonçalves Pinto, Helena Rocha, Isabel Gil, Isabel Leite, José Filipe, José Paulo Viana, Leonor Santos, Manuel Lagido, Maria do Céu Roldão, Patrícia Damas Beites e Paulo Afonso.

Saiu da redação

Alice Carvalho deixou de integrar a redação da *Educação & Matemática*. Durante treze anos deu um contributo inestimável para a qualidade da nossa revista e para o trabalho em equipa. Por tudo, o nosso agradecimento.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

O saber dos professores

Há muitos anos que o início do ano letivo não era tão acidentado, embora eu já consiga recordar muitos... A comunicação social encarrega-se sempre de dramatizar todos os incidentes, mas de facto o cenário da escola neste Outubro de 2014 é sem dúvida desanimador — para os professores e, para os cidadãos e para todos aqueles que se envolvem há muito na qualidade do ensino e no desenvolvimento profissional dos docentes — como é o caso da APM, de outras associações profissionais, e de modo geral das universidades e politécnicos que realizam formação de professores.

Partilho do descontentamento geral, como tenho tornado público. Mas mais que os incidentes e bizarrias lamentáveis da pequena política que nos invade todos os dias, preocupa-me uma subtil, mas fortíssima, alteração na construção deliberada do que me parece a desvalorização dos professores e de que talvez nem os próprios tenham uma consciência clara, arrastados como estão na luta pela sobrevivência. Refiro-me ao desprezo reiterado pelo conhecimento profissional, aquele saber que deve distinguir um professor, e que o legitima socialmente para ensinar, lhe dá uma «licença» expressiva do reconhecimento público da especificidade daquilo que faz. Sem entrar nas minudências teóricas, recordo que um saber profissional — neste caso, o dos professores — se caracteriza por combinar e mobilizar adequadamente várias componentes de conhecimento para a sustentação da ação específica daquele profissional.

Todos os saberes profissionais se constituíram gradualmente a partir de uma espécie de pré-história em que os «oficiais» do ofício procediam por senso comum, numa base de tentativa-erro... Assim foi com o recurso aos barbeiros na história que antecede a profissionalização dos médicos... ou com a cultura benévola e prática de João Semana, que cuidava mais por instinto e afeto que por saber científico...

À medida que uma profissão se afirma e se distingue, invoca, constrói e defende a especialidade do seu saber — passa a exigir-se que só quem sabe possa exercer. E que, para isso, seja formado nesse saber profissional, como Nóvoa bem assinalou na história que traça da profissão em Portugal.

E precisa de saber o quê para ser professor?...

De uma forma simplificada, as políticas de formação têm incorporado, com graus variáveis de profundidade, e com nomenclaturas diversas, o reconhecimento da exigência de quatro grupos de componentes de conhecimento profissional docente, a combinar na formação: conhecimento dos conteúdos a ensinar (designada em geral como componente *científica*), conhecimentos ligados ao *como* ensinar (subsumidos na designação componente *pedagógica e/ou didática*), conhecimento do *aluno e do seu contexto*, e o conhecimento *prático* (oferecido em formatos de estágio, *practicum*, prática profissional) corporizado na formação mediante dispositivos variados de contacto e/ou imersão no contexto de trabalho, desejavelmente supervisionada, e com graus de responsabilidade variável do formando face à ação plena de ensinar.

Políticas recentes em Portugal vêm lamentavelmente empobrecendo este cruzamento de elementos do saber profissional internacionalmente aceite na comunidade investigativa e nos *fora* de políticas educativas (como a OCDE ou a Comissão Europeia), aproximando-o do senso comum e esbatendo a complexidade requerida para o saber de um profissional, atribuindo centralidade acrescida e quase exclusiva à componente de conhecimento de conteúdos com desvalorização tendencial das restantes componentes. Esta tendência é patente em reformas pontuais de disciplinas curriculares e no discurso público dos responsáveis que retoma, numa anacronia incompreensível, a velha máxima do tempo dos nossos pais «quem sabe ensina»... Regresso à pré-história da profissão... Ao tempo em que qualquer um podia «dar aulas»... Perda do *empowerment* conquistado ao longo de mais de cem anos de profissionalização desta nossa ação de ensinar enquanto fazer com que outros aprendam, cada vez mais essencial se queremos uma sociedade equitativamente mais educada.

Ainda que muitos professores não se dêem conta, o poder está a ser-lhes retirado silenciosamente, o único poder que os dignifica e que pode afirmá-los socialmente e realizá-los profissionalmente — o poder do seu conhecimento.

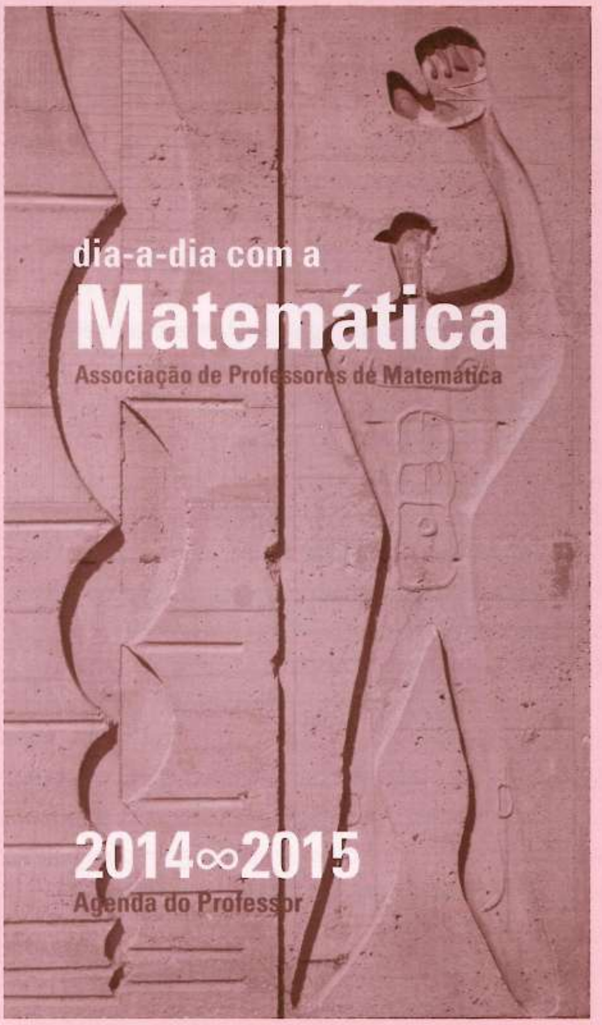
Uno a minha voz à daqueles muitos que, nesta revista e noutros locais, se continuarão a bater por uma profissão cada vez mais reconhecida e respeitada, e estão dispostos a trabalhar por isso. Defendida na exigência acrescida do seu saber e do respeito que lhe é devido. Mesmo quando os ventos são adversos.

Maria do Céu Roldão
Faculdade de Educação e Psicologia
Universidade Católica Portuguesa

Agenda do Professor 2014–2015

dia-a-dia com a Matemática

Lurdes Figueiral (APM, 2014)

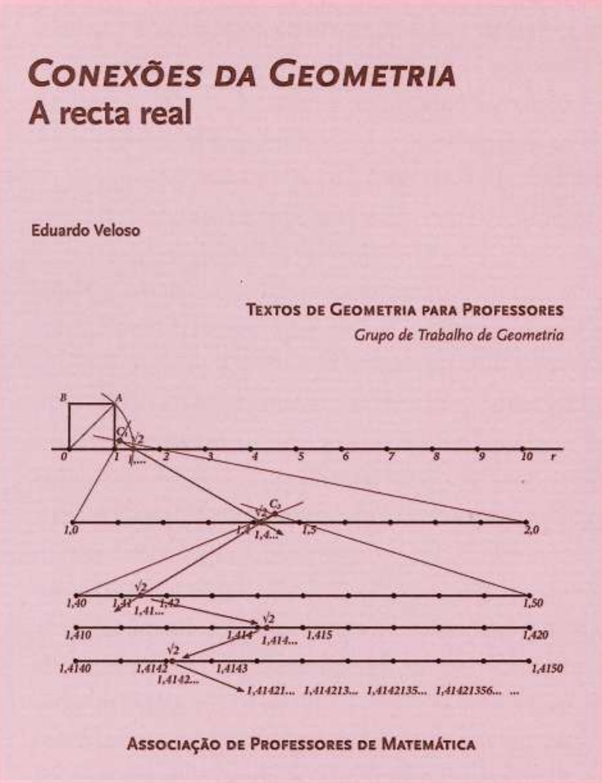


Para este ano fazemos um convite a (re)visitar as proporções. Fonte fecunda de explorações e aplicações matemáticas, o trabalho com as proporções permite ainda diversas conexões com outras áreas da ciência e da cultura, em especial com as artes visuais, a música, a arquitetura, a filosofia e a história.

Conexões da Geometria

A recta real

Eduardo Veloso (APM, 2014)



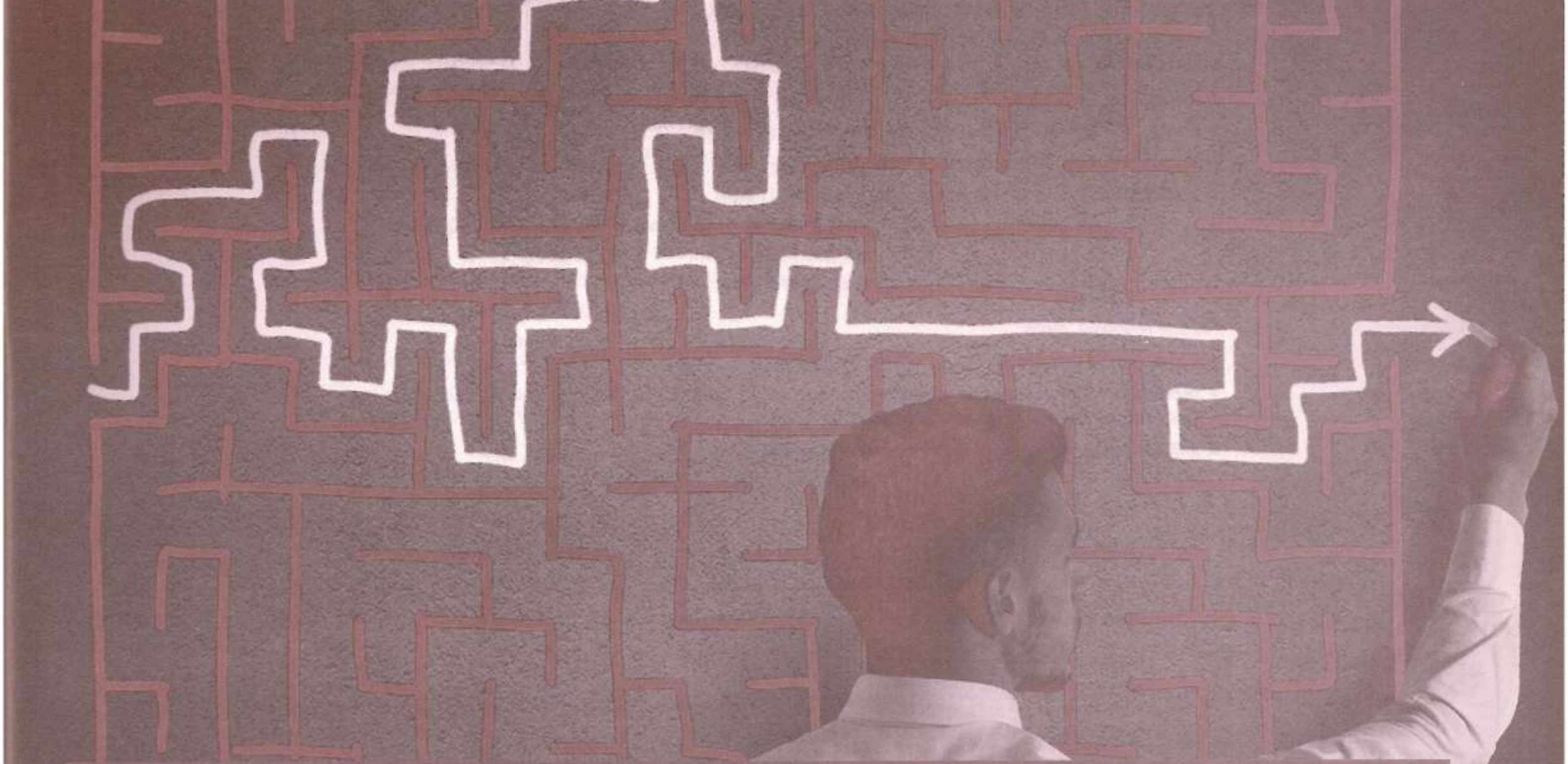
Textos de Geometria para Professores

Esta colectânea de textos, editada pela APM e da Responsabilidade do Grupo de Trabalho de Geometria (GTG), tem por fim o desenvolvimento profissional dos professores nos ensinos básico e secundário, em particular no tema da geometria. Tentaremos ter em atenção, como factor orientador dos conteúdos que escolhemos para os textos e da forma como são tratados, o propósito cultural que enfatizamos para o currículo de matemática, nomeadamente o conhecimento da sua história, da sua intervenção nas diferentes civilizações e das características próprias como aborda a realidade e se desenvolve como ciência.

A Colectânea foi iniciada em 2012, com a publicação da obra *Simetria e Transformações Geométricas*.

A melhor resolução existe?

Carlos Farias



Alguns professores questionam-se sobre o motivo de o GAVE/IAVE, quanto aos exames nacionais, publicar apenas as provas e os critérios de classificação, deixando para outras instituições (sociedades científicas, associações de professores, editoras etc) o trabalho de escreverem uma resolução. É comum ouvir a resposta que, assim, o GAVE/IAVE evita a exposição e as consequentes críticas, ainda que construtivas, como a que se segue.

O Teste Nacional Intermédio (TNI) de Matemática A, ministrado no passado dia 30 de abril de 2014, em muitas escolas secundárias, aos alunos do 12.° ano, levou a algumas reflexões que agora se partilham.

Questões prévias:

A melhor resolução de um problema (de matemática) existe?

Se existe, o que deve ter a melhor resolução de um problema (de matemática)?

Qual é a melhor resolução para um problema (de matemática)?

O que nos leva a optar por determinada resolução, de um problema (de matemática), em detrimento de outras?

E se pensarmos em jogos matemáticos? Por exemplo, num problema de xadrez, o número mínimo de lances é decisivo para valorizar a resolução apresentada. Num problema de damas, se a resolução não for única, diz-se que tem dual (ou duais) e perde muito do seu valor. O mesmo se passará em problemas de bridge, go, sudoku etc.

E quanto aos problemas de matemática?

Uns dirão que a melhor resolução é a primeira que fazemos, como quase tudo na vida, a primeira vez é especial.

Outros dirão que é a mais «curta». Aqui surge outra questão: como medir o tamanho? Sim, aqui o tamanho importa. Entre uma demonstração de dez páginas e outra de duas páginas, somos levados a pensar no ambiente e imprimir a mais pequena.

E se a de duas páginas apenas for entendida por meia dúzia de sábios em todo o mundo? Há demonstrações de teoremas que estão «reservadas», no sentido de acessíveis, apenas a um escol de matemáticos e longe dos conhecimento e entendimento dos restantes.

Todos concordarão que a possibilidade de massificar o conhecimento matemático (e não só) é uma atitude nobre (apesar de perigosa para os medíocres e incompetentes), democrática e, simultaneamente, geradora de mais e melhor democracia, na senda de Bento de Jesus Caraça e muitos outros.

1. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1+e^{-x} & \text{se } x\leq 0 \\ \dfrac{4x+\ln x}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

1.3. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, os pontos A e B, ambos pertencentes ao gráfico de f, e a reta AB

Sabe-se que:

- a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares;
- os pontos A e B têm abcissas simétricas;
- a abcissa do ponto A pertence ao intervalo $]0,1[$

Seja a a abcissa do ponto A

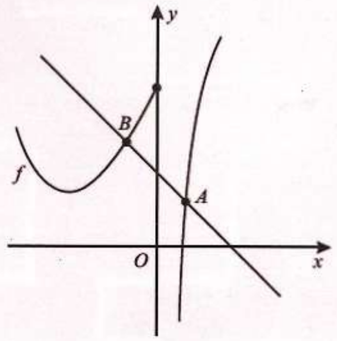


Figura 2

Determine o valor de a, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar o valor de a, com arredondamento às milésimas.

Figura 1. Item 1.3 do TNI de 30/04/2014.

Portanto, alguns defenderão que a melhor resolução é a que necessita de conhecimentos mais básicos e, assim, estar ao alcance de um maior número de pessoas.

Há professores para os quais as melhores resoluções são as dos seus alunos e são essas que colocam na «pedra» (nos tempos modernos, com os quadros brancos, nem se sabe como chamar a esse material). Depois se, por algum motivo, consideram pertinente analisar algum pormenor de outras resoluções feitas na componente não letiva, orientam a discussão na tentativa de se alcançar esse objetivo. Há também razões «sentimentais» para decidir por uma resolução, a preferida, por exemplo, se utilizar ferramentas do campo (ou do ramo) em relação ao qual se tem predileção. Haverá outras razões, sobre as quais não se consiga explicar o porquê dessa eleição.

Segundo Hoffmann [1], Paul Erdös dizia que «se Deus existe então deve ter um Livro com as mais belas demonstrações» e a história da matemática mostra-nos que, mesmo após a demonstração de um resultado, muitos continuam em demanda da que consta no Livro.

Pelo facto de ser oriunda do GAVE/IAVE, uma resolução não tem que vir diretamente do Livro, como alguns que trabalham diariamente com matemática consideram e que só pode gerar alguma inquietação.

Como dito no início, isto vem a propósito do TNI de 30 de abril de 2014.

Analisemos alguns dos seus itens e respetivas resoluções.

No Grupo II, temos o item 1.3 (Figura 1), cujos Critérios Específicos de Classificação se apresentam na Figura 2.

A resolução que o GAVE/IAVE apresentou para o item 1.3 é a que consta da figura 3.

1.3.		20 pontos
Identificar o declive da reta AB	2 pontos	
Apresentar, em função de a, a ordenada do ponto A	2 pontos	
Apresentar, em função de a, as coordenadas do ponto B	2 pontos	
Determinar, em função de a, o declive da reta AB	4 pontos	
Equacionar o problema	4 pontos	
Reproduzir o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora	3 pontos	
Indicar o valor pedido	3 pontos	

1.3. Como a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares, o seu declive é igual a -1

Tem-se: $f(a)=\dfrac{4a+\ln a}{a}=4+\dfrac{\ln a}{a}$ e $f(-a)=-3a+1+e^{a}$, pelo que o ponto A tem coordenadas $\left(a, 4+\dfrac{\ln a}{a}\right)$ e o ponto B tem coordenadas $(-a, -3a+1+e^{a})$

Portanto, o declive da reta AB é dado por $\dfrac{4+\frac{\ln a}{a}-(-3a+1+e^{a})}{a-(-a)}=\dfrac{3+\frac{\ln a}{a}+3a-e^{a}}{2a}$

Assim, a solução da equação $\dfrac{3+\frac{\ln x}{x}+3x-e^{x}}{2x}=-1$, no intervalo $]0,1[$, é o valor de a

Ora, $\dfrac{3+\frac{\ln x}{x}+3x-e^{x}}{2x}=-1 \Leftrightarrow 3+\dfrac{\ln x}{x}+5x-e^{x}=0$

Para resolver esta equação, recorremos às potencialidades gráficas da calculadora.

Na figura, está representada parte do gráfico da função definida por $y=3+\dfrac{\ln x}{x}+5x-e^{x}$

O zero desta função, no intervalo $]0,1[$, é o valor de a

Conclusão: $a \approx 0{,}334$

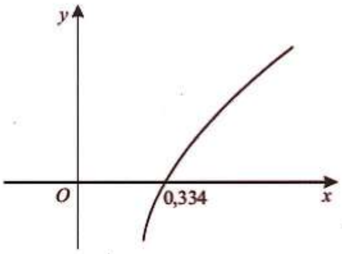


Figura 3. Resolução publicada pelo GAVE/IAVE do item 1.3 do TNI de 30/04/2014.

Apresenta-se uma resolução diferente da publicada pelo GAVE/IAVE:

Os pontos A e B têm as seguintes coordenadas

$$(a, f(a)) \text{ e } (-a, f(-a)),$$

respetivamente.

A reta AB é dada pela equação: $y = -x + b$.

Como $A \in$ gráfico de f e $A \in AB$, podemos escrever

$$f(a) = -a + b.$$

Como $B \in$ gráfico de f e $B \in AB$, podemos escrever

$$f(-a) = a + b.$$

então

$$f(-a) - f(a) = 2.a$$

ou

$$f(-a) - f(a) - 2.a = 0$$

com $a \in]0,1[$.

Agora, usando as capacidades gráficas da calculadora, basta determinar o zero da função

$$\begin{aligned} R(x) &= f(-x) - f(x) - 2.x \\ &= -3.x + 1 + e^{x} - \frac{4.x + \ln(x)}{x} - 2.x \end{aligned}$$

em $]0,1[$.

Não esquecendo de reproduzir o gráfico visualizado na calculadora e indicar o valor de a com a precisão pedida, fica o item devidamente resolvido.

Uma opinião pessoal pode ser suspeita, por isso, foi apresentada esta resolução a vários alunos submetidos à realização deste TNI e, perentoriamente, consideraram-na mais «acessível».

Como o item solicita a utilização da calculadora gráfica, seria possível encontrar a resposta, em alguns modelos de calculadoras, quase sem efetuar cálculos no papel.

No mesmo teste, em relação ao item 4, podemos ter algo idêntico a dizer mas outros comentários urge apresentar.

Consultando o texto [2], o professor Armando Machado escreve, na página 65, o seguinte:

«O programa em vigor não exige o conhecimento destas fórmulas mas, mesmo que o exigisse, não haveria interesse em as conhecer todas de cor; bastaria conhecer uma ou duas e saber como as outras se podem deduzir facilmente delas. Parece-nos, de qualquer modo, haver interesse em que o estudante tenha conhecimento da sua existência e saiba onde as procurar no caso de necessitar de as aplicar. Destacamos por isso as quatro fórmulas obtidas:

P27. Quaisquer que sejam os ângulos generalizados α e β, tem-se

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$

$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)$

$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)$.»

4. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\cos^2\left(\frac{x}{14}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{14}\right)$

Qual das expressões seguintes também define a função g?

(A) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right)$

(B) $\cos\left(\frac{x}{7}\right)$

(C) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{28}\right)$

(D) $\cos\left(\frac{x}{28}\right)$

Figura 4. Item 4, do Grupo I, do TNI de 30/04/2014.

4. Resposta **(B)**

Tem-se: $\cos^2\left(\frac{x}{14}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{14}\right)=\cos\left(2\times\frac{x}{14}\right)=\cos\left(\frac{x}{7}\right)$

Figura 5. Resolução publicada pelo GAVE/IAVE do item 4, do Grupo I, do TNI de 30/04/2014.

Mas o programa em vigor faz referência a estas fórmulas?

Sim, em [3] encontramos a frase:

«*Poderá* aparecer, *ainda*, como aplicação do conceito de produto escalar de dois vetores a dedução da fórmula do desenvolvimento de $\cos(x-y)$.» Os itálicos não constam no original.

E ainda:

«As derivadas do seno e do co-seno *podem* ser obtidas a partir das fórmulas do seno e do co-seno da soma e de que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$». O itálico não consta no original.

Em [4], no programa que começará a ser implementado no 10.° ano, em 2015/16, podemos ler na página 24 o seguinte conteúdo para o 12.° ano:

«— Fórmulas trigonométricas da soma, da diferença e da duplicação;»

Portanto, a partir de 2017/18, não há dúvidas que estas fórmulas farão parte dos conteúdos a serem lecionados no 12.° ano.

Apesar do programa não exigir o seu conhecimento, segundo o professor Armando Machado e não só, o GAVE/IAVE há vários anos que incluiu no formulário de exame (e dos TNI), entre outras, as três fórmulas seguintes:

«Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\ \cos b+\cos a\ \operatorname{sen} b$

$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}$»

Às vezes, pretende ainda o GAVE/IAVE que os alunos, caso necessitem, deduzam as fórmulas trigonométricas do arco duplo (ou da duplicação), fazendo nas anteriores $a=b$.

Analisando os exames nacionais do Ensino Secundário, desde 2006, e os TNI do 3.° período, desde 2008, foi detetado o recurso às fórmulas trigonométricas da duplicação nos seguintes itens:

- 6, do Grupo I, do exame da 1.ª fase de 23 de junho de 2009, 5 pontos em 200
- 3.1, do Grupo II, do TNI de 24 de maio de 2012, 1 ponto em 200
- 3.1, do Grupo II, do TNI de 24 de maio de 2013, 2 pontos em 200
- 4, do Grupo I, do TNI de 24 de maio de 2014, 10 pontos em 200
- 4, do Grupo II, do TNI de 24 de maio de 2014, 3 pontos em 200
- 3, do Grupo II, do exame da 2.ª fase de 21 de julho de 2014, 3 pontos em 200

Quanto à cotação da etapa onde é utilizada a fórmula, esta foi variando, como se pode ver acima.

Voltando ao TNI de 30 de abril de 2014, no Grupo I temos o item apresentado na Figura 4.

Na sua resolução vê-se claramente o objetivo deste item: testar se o aluno consegue obter a fórmula do cosseno do arco duplo, partindo da fórmula do cosseno da soma que consta do formulário.

No item 4 do Grupo II do mesmo TNI, consta a Figura 4 (ver Figura 6).

A resolução apresentada pelo GAVE/IAVE (Figura 7) recorre à utilização de mais uma fórmula trigonométrica do arco duplo, neste caso para o seno, observável nos critérios específicos (Figura 8). Uma devia ser pouco e duas não seriam demais, para incluir no mesmo teste.

4. Na Figura 4, está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4

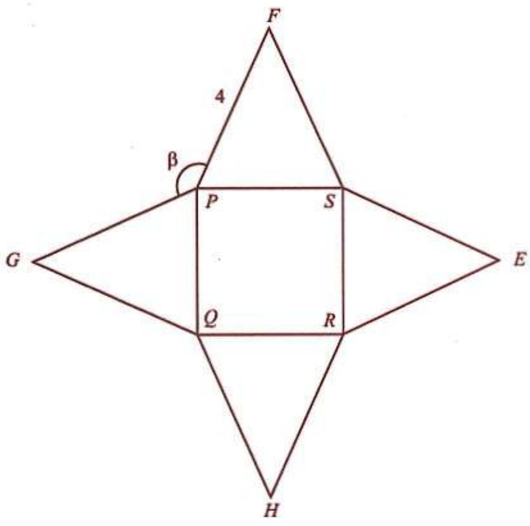


Figura 4

Seja β a amplitude, em radianos, do ângulo FPG $\left(\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$

A aresta da base da pirâmide e, consequentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de β

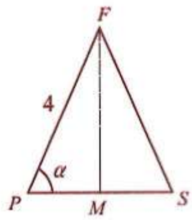
Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de β, por $-32\cos\beta$

Sugestão – Comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo FPS, que poderá designar por α

Figura 6. Item 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014.

4. De acordo com a sugestão, seja α a amplitude do ângulo FPS

Seja M o ponto médio de $[PS]$



Tem-se:

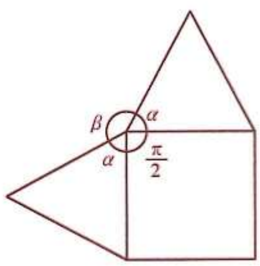
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{FM}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{FM}}{4}$, pelo que $\overline{FM} = 4\operatorname{sen}\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{PM}}{4}$, pelo que $\overline{PM} = 4\cos\alpha$

Portanto, a área do triângulo $[PSF]$ é dada por

$$\frac{\overline{PS} \times \overline{FM}}{2} = \frac{2 \times 4\cos\alpha \times 4\operatorname{sen}\alpha}{2} = 16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 8 \times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 8\operatorname{sen}(2\alpha)$$

De acordo com a figura ao lado, tem-se $\alpha + \beta + \alpha + \frac{\pi}{2} = 2\pi$,



pelo que $2\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{3\pi}{2} - \beta$

Tem-se, então, $8\operatorname{sen}(2\alpha) = 8\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -8\cos\beta$

Portanto, a área lateral da pirâmide é igual a

$4 \times (-8\cos\beta)$, ou seja, $-32\cos\beta$

Figura 7. Resolução publicada pelo GAVE/IAVE do item 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014.

4. .... **20 pontos**

Escrever $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{FM}}{\overline{FP}}$, em que M designa o ponto médio de $[PS]$ .... 2 pontos

Obter $\overline{FM} = 4 \operatorname{sen} \alpha$ .... 1 ponto

...

Escrever $16 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 8 \operatorname{sen}(2\alpha)$ .... 3 pontos

...

Figura 8. Parte dos critérios específicos de classificação do item 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014.

Apesar de haver quem trabalhe diariamente no ensino da matemática e idolatre as resoluções do GAVE/IAVE como vindas diretamente do Livro ou se tratem de pura inspiração divina, não nos devemos resignar.

Deve ser habitual os professores dizerem aos alunos: «num problema de geometria a rotação da folha pode ser decisiva».

Será que olhando para o [FPS] de outro lado, nos inspira outra resolução?

Eis outra resolução, prescindindo da rotação da figura.

$$A_{[FPS]} = \frac{4.\overline{PK}}{2} = 2.\overline{PK} = 2 \times 4.\cos\left(2.\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\text{ver } *) = 8.\cos(\pi - \beta) = -8.\cos\beta$$

$$A_{\text{faces laterais}} = 4.A_{[FPS]} = -32.\cos\beta$$

* Como $\beta + 2.\alpha + \frac{\pi}{2} = 2.\pi$ então $2.\alpha - \frac{\pi}{2} = \pi - \beta$.

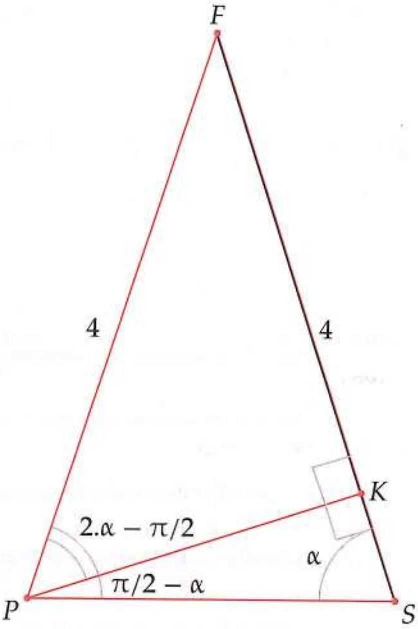


Figura 9. Para outra resolução do item 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014.

Singela, com 3 linhas apenas, se escreve, não a palavra «mãe», mas esta resolução que um aluno do 11.° ano devia conseguir escrever antes de comer as filhós e o peru do Natal.

A vontade de colocar um segundo item, usando fórmulas trigonométricas para o arco duplo, devia ser grande pois não permitiu vislumbrar outras resoluções. A propósito das resoluções apresentadas, foi enviado um e-mail ao sr. diretor do GAVE/IAVE, no dia 04 de maio de 2014 (quatro dias após o TNI), que se deve ter extraviado, uma vez que ainda não acusou a sua receção.

Analisemos, agora, a prova mais «fresca», o exame da segunda fase de 2014 de Matemática A, código 635, realizado em 21 de julho de 2014.

No jornal Público, de 22/07/2014, pudemos ler:

«Por último, Jaime Carvalho e Silva sustenta que a questão 1.2 (Figura 10) ‹é relativa à resolução de uma equação com números complexos que não faz parte do programa›.»

Nesse artigo apresentam o professor Jaime Carvalho e Silva como vice-presidente da APM mas, no contexto da notícia, seria importante salientar que foi o Coordenador da equipa que elaborou o programa do Ensino Secundário em vigor.

Relativamente ao item 5, do Grupo II, recordando os itens: 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014 e 6 do Grupo I, do exame da 1.ª fase de 2009, seria espectável que a expressão para a área não fosse $A(\alpha) = 16.\text{sen } \alpha.\cos \alpha$ mas sim $A(\alpha) = 8.\text{sen}(2\alpha)$.

Neste item, o que terá levado, quem elaborou a prova, a evitar a utilização da fórmula do seno do arco duplo?

1.2. Seja $\alpha \in]0, \pi[$

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha\, z + 1 = 0$

Apresente as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

Figura 10. Item 1.2, do Grupo II, do Exame da 2.ª fase, em 21/07/2014.

3. Na Figura 4, está representado um pentágono regular $[ABCDE]$

Sabe-se que $\overline{AB} = 1$

Mostre que $\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Nota: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ designa o produto escalar do vetor $\overrightarrow{AB}$ pelo vetor $\overrightarrow{AD}$

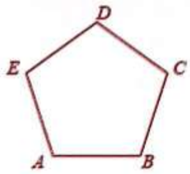


Figura 4

Figura 11. Item 3, do Grupo II, do Exame da 2.ª fase, em 21/07/2014.

Escrever $\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Escrever $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Figura 12. excerto dos critérios de classificação do item 3, do Grupo II, do exame da 2ª fase de 21/07/2014.

A resposta pode encontrar-se um pouco mais acima, na mesma página, lendo o item 3 (Figura 11), a intuição logo nos diz que, aqui, precisaremos da fórmula do cosseno do arco duplo.

Mostrando que $D\widehat{A}B = 2.\frac{\pi}{5}$ e usando a «desditosa» fórmula, mostra-se a igualdade pretendida.

Na Figura 12 apresemta-se parte dos Critérios Específicos de Classificação para o item 3, do Grupo II e lá estão 3 pontinhos para a utilização da fórmula do cosseno do arco duplo.

Mas não haverá uma resolução sem «sair» dos programas em vigor?

Será bom tê-la, não vá algum aluno pedir a anulação da prova, por esta conter 2 itens com conteúdos que não fazem parte do programa.

Sem pretensões de conseguir alguma resolução do Livro, analisemos a resposta que se segue para o item 3 do exame de 21/07/2014.

Na figura 13 está representado um pentágono regular [ABCDE], uma diagonal [AD] desse pentágono, a altura [EF] do [ADE] referente à base [AD] e a altura [DG] do [ABD] referente à base [AB].

Se $\overline{AB} = 1$ então $\overline{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Quem nunca fez esta demonstração, tem aqui um bom pretexto para fazê-la.

Daqui podemos concluir que

$$\cos(E\widehat{A}F) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

logo

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{8},$$

$$\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \quad \text{e} \quad 1 - 2.\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

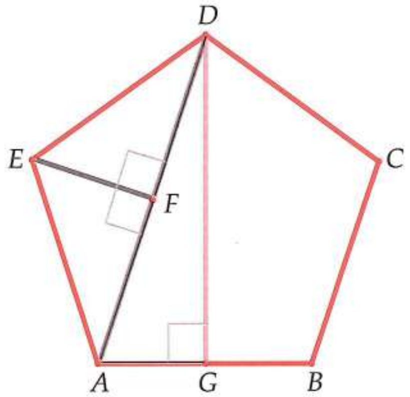


Figura 13. Para resolução do item 3, do Grupo II, do Exame da 2.ª fase, em 21/07/2014.

Por outro lado

$$\cos(D\widehat{A}B) = \cos(D\widehat{A}G) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Agora, a igualdade pedida é facilmente concluída, sem o uso da fórmula do cosseno do arco duplo e, apenas, com base em conteúdos lecionados até ao 10.° ano.

No primeiro Critério Geral de Classificação, o GAVE/IAVE escreve: «É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado.», a Nota 1 é: «A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.» (esta Nota surgiu em 2014, em anos anteriores os alunos puderam usar essas regras), no entanto, pela repetição dos modelos de Exames e Testes Nacionais Intermédios, bem como a insistência em certas «resoluções-tipo» e respetivos Critérios de Classificação, o GAVE/IAVE assume um papel redutor em relação ao aparecimento de resoluções diversificadas que muitos professores incentivam.

Recentemente, um estudo de investigadores da Universidade do Porto concluiu que as escolas privadas preparam melhor os alunos para os Exames mas as escolas públicas preparam-nos melhor para enfrentar as dificuldades com as quais se depararão no ensino superior. Até que ponto a formatação de exames, resoluções e critérios de classificação contribui para as conclusões desse estudo?

E que resposta dar à questão que encabeça o artigo?

A melhor resolução para um problema (de matemática) pode não existir mas é enriquecedor procurar vários pontos de vista que levem a diversas resoluções. Quanto a isto, todos devemos concordar. Ou não?

Referências

[1] Hoffman, Paul (1998), O Homem Que Só Gostava de Números, Gradiva, 2000.

[2] Machado, Armando (2002), Geometria 11.° Ano, Texto destinado aos professores, Versão de 01/08/2002, Elaborado para o projeto REANIMAT — Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário.

[3] Programa de Matemática A — 11.° ANO, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Autores: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Maria Graziela Fonseca, Arsélio Almeida Martins, Cristina Maria Cruchinho da Fonseca, Ilda Maria Couto Lopes. Homologação: 01/04/2002. Ministério da Educação — Departamento do Ensino Secundário.
Programa de Matemática A — 12.° ANO, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Autores: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Maria Graziela Fonseca, Arsélio Almeida Martins, Cristina Maria Cruchinho da Fonseca, Ilda Maria Couto Lopes. Homologação: 17/05/2002. Ministério da Educação — Departamento do Ensino Secundário.

[4] Programa e Metas Curriculares de Matemática A, Ensino Secundário, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Ministério da Educação. «O calendário de aplicação deste Programa está definido no Despacho n.° 159717/2012, de 14 de dezembro, estando prevista para o ano letivo 2015–16 a sua implementação no 10.° ano de escolaridade, prosseguindo nos anos seguintes para os 11.° e 12.° anos de escolaridade.»

Carlos Farias
Escola Secundária Quinta das Palmeiras

Desistências no torneio

Com a finalidade de treinar os alunos para o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, o professor desafiou a sua turma para se juntarem num sábado e fazerem um torneio de Hex, em que cada um jogaria com todos os outros.

Infelizmente, à última hora, alguns alunos tiveram de desistir e, por este motivo, disputaram-se menos 94 jogos do que os previstos inicialmente.

Quantos alunos tinha a turma e quantos desistiram?

(Respostas até 31 de dezembro para zepaulo46@gmail.com)

PONTOS E PLANOS, SEMPRE NO ESPAÇO

O problema proposto no número 127 de Educação e Matemática foi o seguinte:

Temos quatro pontos no espaço, não complanares.

Quantos planos existem que sejam equidistantes dos quatro pontos?

Apesar de este problema estar na lista dos meus preferidos, recebemos apenas seis respostas, enviadas por Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Graça Braga da Cruz (Ovar), Inês & Luís Bernardino, Mário Roque (Guimarães), Laura Almeida (Porto Santo).

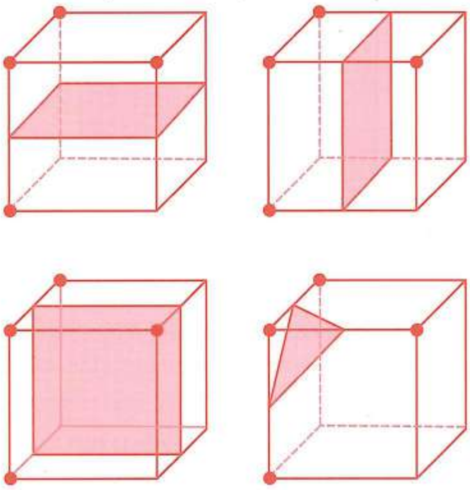


Figura 1

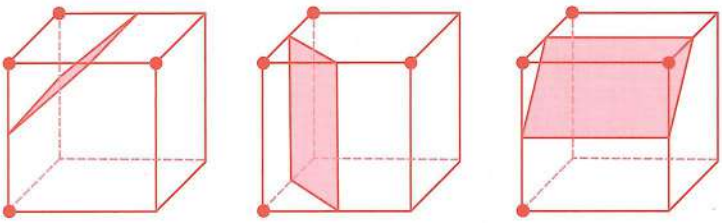


Figura 2

A principal surpresa é que há mais soluções do que as que estamos à espera. Começamos por descobrir quatro delas, julgamos que está tudo feito mas só depois de refletirmos melhor é que encontramos um segundo grupo de planos que satisfazem a condição imposta.

Demos a palavra ao Carlos.

Hipótese A)

Estão 3 pontos de um lado e 1 ponto do outro lado

Dados 3 dos pontos pensemos no plano por eles definido.

Agora imaginemos um plano paralelo a esse e que se encontra a meia distância entre ele e o 4º ponto. Este plano está à mesma distância dos 4 pontos (3 estão de um lado do plano e o 4º está do outro lado).

Como podemos fazer este mesmo raciocínio 4 vezes, deixando de cada vez um dos pontos fora do plano, temos 4 planos equidistantes dos 4 pontos.

O Mário incluiu os desenhos dos planos, imaginando que os quatro pontos estão em vértices de um cubo (figura 1).

Hipotese B)

Estão 2 pontos de cada lado

Consideremos uma reta a passar em dois dos pontos e outra reta a passar nos outros dois pontos. (...) Ora, o plano paralelo a estas duas retas e equidistante delas fica a igual distância dos quatro pontos.

Se repetirmos o processo para as outras combinações de pontos obtemos um total de 3 planos equidistantes dos 4 pontos.

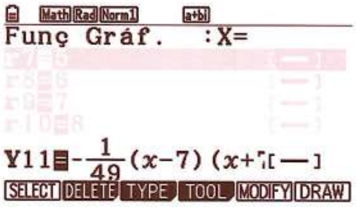
Conclusão, existem sete planos equidistantes dos quatro pontos (figura 2).

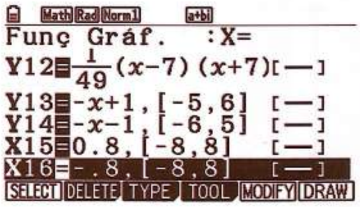
A propósito da bandeira nacional...

Estava eu numa aula do 11.º ano de Matemática A de domínios planos, quando me apercebo que o Filipe e a Bárbara do 11.ºE da Escola Secundária de Vila Verde, estavam agitados. Fui saber o que se passava e lá comentaram «só nos lembrámos que poderia dar para fazer a bandeira nacional!... mas não temos como fazer o círculo, pois não?...» e eu só respondi «Podem mudar no Type...» e fui continuar a aula, corrigimos mais uns domínios planos... até que o Filipe disse «já está» e foi uma animação... Eu fiquei satisfeita de ver o verde, vermelho e amarelo da nossa bandeira, mas faltava a esfera armilar! Perguntei-lhes como fazer?... mas o toque falou mais alto. Em casa fui pensar nisso, com mais umas funções e alguns cuidados com as definições da janela lá conseguimos ver a nossa bandeira... Experimente!

Escreva no *Menu* dos *Gráficos* as condições:

- $x_1 < 0$ (defina cor verde, traço grosso)
- $x_2 > 0$ (defina cor vermelha, traço grosso)
- $r_3 = 1$ (defina cor amarelo, traço grosso)
- $r_4 = 2$ (defina cor amarelo, traço grosso)
- $r_5 = 3$ (defina cor amarelo, traço grosso)
- $r_6 = 4$ (defina cor amarelo, traço grosso)
- $r_7 = 5$ (defina cor amarelo, traço grosso)
- $r_8 = 6$ (defina cor amarelo, traço grosso)
- $r_9 = 7$ (defina cor amarelo, traço grosso)
- $r_{10} = 8$ (defina cor amarelo, traço grosso)
- $y_{11} = -\frac{1}{49}(x-7)(x+7), [-8, 8]$
  (defina cor preta, mantenha o traço fino)
- $y_{12} = \frac{1}{49}(x-7)(x+7), [-8, 8]$
  (defina cor preta, mantenha o traço fino)
- $y_{13} = -x+1, [-5, 6]$
  (defina cor preta, mantenha o traço fino)
- $y_{14} = -x-1, [-6, 5]$
  (defina cor preta, mantenha o traço fino)
- $x_{15} = 0.8, [-8, 8]$
  (defina cor preta, mantenha o traço fino)
- $x_{16} = -0.8, [-8, 8]$
  (defina cor preta, mantenha o traço fino)

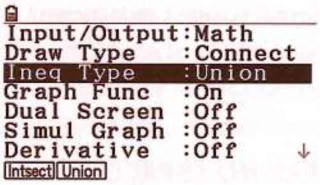




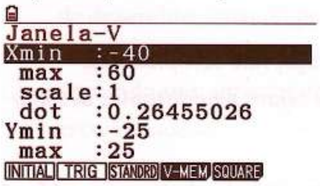
Para alterar o tipo de função, escolha TYPE (F3), para alterar a cor do gráfico e o tipo de traço, ponha o cursor em cima na condição e faça SHIFT, FORMAT (5).

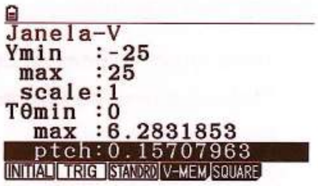
Em SHIFT, MENU (SET UP), defina:

Defina a janela:



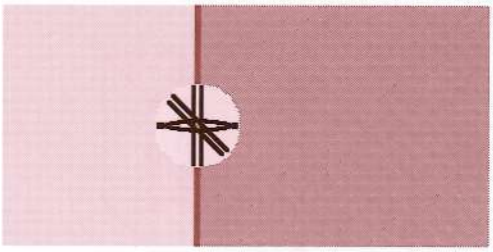
Faça EXE, e deixe que os alunos lentamente descubram a





bandeira de Portugal

Um possível tarefa seria darmos as primeiras condições e pedir-lhes a esfera armilar... que poderá ter outras soluções.



Nota: esta atividade foi resolvida com a calculadora gráfica Casio fx-CG20

Isabel Leite
Escola Secundária de Vila Verde, Casio+

Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!

PATRÍCIA DAMAS BEITES, ANA ROMANO

As aulas ditas tradicionais caracterizam-se pela centralidade do papel do professor no processo de ensino-aprendizagem. Deste modo, em geral, os alunos têm uma atitude passiva e o professor, essencialmente, pratica a transferência de conhecimento. Estudos, de várias áreas que não só da Educação Matemática e da Didática da Matemática, apontam para as vantagens na mudança de paradigma do referido tipo de aulas. Concretamente, apela-se à centralidade do aluno no processo de ensino-aprendizagem e à sua aprendizagem ativa.

A Aprendizagem pelos Pares, designada originalmente por *Peer Instruction* nos trabalhos de Eric Mazur (Físico da Universidade de Harvard), surge no contexto dessa mudança e ainda pela observação de falhas na aprendizagem conceptual dos alunos. O referido método de ensino-aprendizagem é centrado no aluno, visa a substituição da transferência do conhecimento pela assimilação do mesmo e, indissociavelmente, a aprendizagem conceptual. Nas palavras de Mazur, «Ensinar é apenas ajudar a aprender» (Fiolhais & Pessoa, 2003, p. 21) e o desafio é o de encontrar novas maneiras de chegar aos alunos.

Os acontecimentos precursores

No final dos anos 70, David Hestenes (Físico da Universidade do Arizona) manteve várias conversas com um colega que lecionava Introdução à Física. Este último confessou-lhe as preocupações com os seus alunos, pois, semestre após semestre, a média das suas classificações nunca ultrapassava os 40%. Na opinião de Hestenes, tais classificações deviam-se a que as questões dos testes do seu colega, contrariamente ao que sucedia com outros colegas, exigiam a compreensão dos conceitos, ou seja, eram conceptuais.

Hestenes decidiu testar a sua conjetura com a ajuda de Ibrahim Halloun, um dos seus alunos de pós-graduação. Os dois desenvolveram um teste, com questões conceptuais de escolha múltipla, conhecido por *Force Concept Inventory* (FCI). O mesmo foi realizado, no início e no final do semestre, por cerca de 1000 alunos de sete professores da unidade curricular Introdução à Física, os quais lecionavam com recurso a aulas tradicionais.

Os resultados do estudo, nomeadamente a subida de 14% nas classificações da primeira para a segunda aplicação do FCI, indicaram que «os alunos não aprendem muito numa aula convencional (passiva), independentemente da forma como se ensina» (Fiolhais & Pessoa, 2003, p. 19). No entanto, os colegas de Hestenes não consideraram os resultados, segundo ele, pela ideia pré-concebida de que as aulas tradicionais são o caminho pelo qual praticamente todos ensinam Física Introdutória. Mais ainda, pensar que havia algo errado com as mesmas implicaria uma mudança na prática letiva.

Alguns anos após a publicação dos resultados, Mazur leu o estudo mas estava cético, pois ele era professor na Universidade de Harvard e os resultados não se iriam aplicar aos seus alunos. De facto, os seus alunos tinham boas notas e ele considerava-se um bom professor. Para provar que os alunos dele eram diferentes, decidiu aplicar o FCI e, após a aplicação do mesmo, Mazur ficou chocado. Como ele próprio afirmou, «They didn't do much better» (Hanford, 2011) e

> vendo o teste era de esperar que os meus alunos tivessem 100 por cento e, por isso, fiquei perplexo. A minha primeira reacção foi pensar que havia algo de errado com o teste. Não sabia o que pensar. Por um lado, os meus alunos tinham boas notas em exames muito mais complexos, com integrações, derivações (Fiolhais & Pessoa, 2003).

A reação dos alunos perante as questões conceptuais também foi inesperada, tendo os mesmos perguntado: «How should I answer these questions? According to what you taught me, or according to the way I usually think about these things?» (Hanford, 2011). Estas perguntas começaram a despertar nele um sentimento de que algo estava errado, na forma como ele chegava aos alunos. Segundo Mazur,

> ensinava tal como eu próprio tinha sido ensinado. Afinal, que outras formas há de ensinar? É natural, foi como nós aprendemos e, além disso, temos tendência para projetar a nossa própria experiência nas pessoas que nos rodeiam. O que pensamos é: «Eu aprendi assim e, por isso, eles também devem aprender assim» (Fiolhais & Pessoa, 2003, p. 18).

Foi então que ele decidiu mudar a sua prática letiva, inovando com a criação da Aprendizagem pelos Pares. Para Hestenes, Mazur era incomum, pois «He was the first one who took it to heart» (Hanford, 2011). Os resultados, tendo os primeiros sido publicados em (Crouch & Mazur, 2001), foram tão bons que ainda hoje mantém este método de ensino-aprendizagem e realiza, com os membros do grupo Mazur em (MazurGroup, 2014), investigação sobre o mesmo.

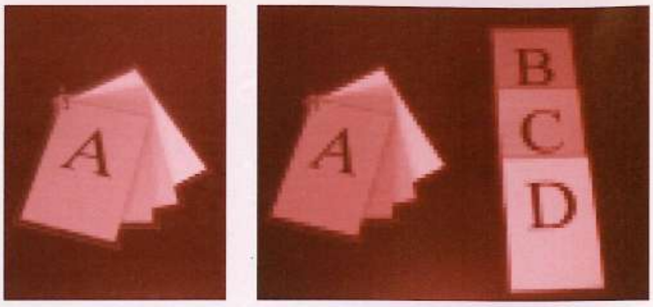


Figura 1. Cartões de votação usados pela docente Patrícia Beites na Universidade da Beira Interior

As principais características

Previamente a uma aula com Aprendizagem pelos Pares, os alunos devem ler um determinado conjunto de informação, de uma referência indicada pelo professor, e resolver um trabalho de casa associado. Este, a entregar antes dessa aula, é constituído por três questões: as duas primeiras construídas recorrendo a aspetos, preferencialmente difíceis, da leitura; a terceira visa a escrita das dificuldades e dúvidas suscitadas pela leitura, das quais se obtêm pistas para a planificação.

Na aula, tipicamente, há os denominados eventos de votação. Cada um destes começa com a proposta de uma questão conceptual (QC), de escolha múltipla, que deve satisfazer critérios básicos constantes no manual (Mazur, 1997): focar-se num só conceito; não se poder resolver imediatamente com cálculos; estar escrita de forma clara; ter dificuldade média; ter opções boas. Estas podem ser obtidas, nomeadamente, através da leitura de: trabalhos de casa, testes, exames e referências com estudos sobre erros, por exemplo (Bagni, 2001).

Os alunos dispõem então de cerca de dois minutos para pensarem e decidirem individualmente qual a opção correta. Decorrido esse tempo, eles votam recorrendo a uma das seguintes formas de votação com: as mãos; cartões, como os da Figura 1; um sistema eletrónico de resposta (clickers), como em (CLC, 2014); os telemóveis, como se descreve em (Byrne, 2011). No âmbito da votação eletrónica, pode-se ainda referir o Navigator da TI-NSpire CX, o qual cria uma rede sem fios para as unidades portáteis de uma turma, (TexasInstruments, 1995).

Após a contagem (manual ou eletrónica) dos votos e desde que a percentagem de respostas corretas esteja entre 35% e 70%, os alunos discutem as suas respostas com os colegas mais próximos. Entretanto, o professor circula pela sala de aula, ouvindo e promovendo discussões frutíferas, e pede aos alunos que convençam os colegas, explicando o raciocínio subjacente, que a resposta em que votaram é a correta.

A discussão dura entre dois a quatro minutos, seguindo-se uma segunda votação em que, de acordo com (Crouch & Mazur, 2001), a percentagem de respostas corretas deve aumentar. Por fim, o professor explica a opção correta. Uma alternativa a este último passo de Mazur é solicitar a explicação a um aluno voluntário, (Beites & Nicolás, 2013). Segundo estes autores, para que os alunos não tenham receio de explicar em voz alta e de errar na presença dos seus pares, é importante que o professor diga primeiro a opção correta.

Se a percentagem de respostas corretas na primeira votação for superior a 70%, então o professor deve passar diretamente para uma explicação curta, pois a QC é pouco benéfica no sentido da discussão. Também segundo (Crouch & Mazur, 2001), se a questão estiver bem construída e a percentagem de respostas corretas na primeira votação for inferior a 35%, aparentemente apenas alguns alunos compreendem a noção relevante para ter uma discussão frutífera e a explicação, passando pela revisita ao conceito, fica a cargo do professor.

Resta ainda salientar que, em função do conhecimento que o professor tiver da turma e de cada um dos seus alunos, podem ser feitas mais adaptações às indicações em (Crouch & Mazur, 2001). Nomeadamente, por um lado, a mencionada revisita ao conceito pode passar pelo pedido de explicação a alunos que raciocinaram corretamente. Por outro lado, não estando em causa o receio de errar em voz alta, a solicitação de explicação a alunos que escolheram uma opção incorreta pode levar à compreensão do erro.

Os pilares teóricos

A Teoria Socioconstrutivista de Lev Vygotsky fundamenta a Aprendizagem pelos Pares devido aos pressupostos da Aprendizagem Cooperativa em que a mesma assenta. Concretamente, o conhecimento é construído socialmente, valorizando os papéis do professor como agente mediador, do aluno e dos seus pares (os outros alunos) em cooperação.

A chamada Aprendizagem Cooperativa tem por base a referida teoria, na qual a aquisição dos processos cognitivos superiores resulta das atividades sociais em que participa cada indivíduo. Segundo Vygotsky, a aprendizagem decorre da interação social e a relação da primeira com o desenvolvimento é explicada pela Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

A noção de ZDP é definida como a diferença entre o que o aluno já sabe, conhecimento atual, e aquilo que pode aprender, conhecimento potencial. Mais precisamente, trata-se da

> distância entre o nível de desenvolvimento actual, tal como é determinado pela solução independente dos problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, tal como está determinado pela solução de problemas com a ajuda de um adulto ou em colaboração com os colegas mais capacitados (Díaz-Aguado, 2000, p. 136).

Em suma, a aprendizagem ocorre através de interferências do professor e de outros alunos ao nível da ZDP de um aluno. Assim, a discussão desencadeada por questões conceptuais, entre alunos e professor mas, especialmente, entre um aluno e os seus pares, é fulcral para a assimilação do conhecimento que caracteriza a Aprendizagem pelos Pares.

Alguns recursos e exemplos

A Aprendizagem pelos Pares, com a consequente construção de questões conceptuais por Mazur em (Mazur, 1997), foi idealizada para melhorar a aprendizagem dos alunos na área da Física do Ensino Superior. No entanto, como se salienta em (Romano, 2013) e referências aí citadas, o mencionado método de ensino-aprendizagem já foi aplicada nas mais diversas áreas do Ensino Superior não português, nomeadamente, Matemática, Filosofia, Química, Informática e Medicina. Em território nacional, que seja do conhecimento das autoras, a Aprendizagem pelos Pares nem está muito difundida nem é muito implementada.

Em diversas unidades curriculares integrantes da Matemática, a Aprendizagem pelos Pares foi colocada em prática na Universidade da Beira Interior, nomeadamente, pelos professores Rogério Serôdio (Prémio de Mérito Pedagógico 2012) e Patrícia Beites. Várias questões conceptuais de Álgebra Linear podem ser consultadas, da autoria desta última, em (Beites & Nicolás, 2013) e, sob a designação de *good questions*, em (Terrel, s.d.). No que se refere à Análise, em (Pilzer, 2001) encontram-se duas questões conceptuais, relativas à composição e à adição gráfica de funções reais de variável real, respetivamente. Muitas outras, também de Análise, podem ser encontradas em (Hughes-Hallet *et al.*, 2003) e (Hughes-Hallet *et al.*, 2010).

Nas referências já citadas há material que pode ser aproveitado para implementar a Aprendizagem pelos Pares na Matemática do Ensino Secundário. Neste nível de ensino, apesar de haver menos recursos e estudos realizados, mencionam-se várias experiências bem sucedidas (por exemplo, em Estatística, em Economia e em História) em (Schell, 2012) e começam a surgir algumas teses sobre a temática, nomeadamente (Iverstine, 2010). Como propostas para a

TPC: Leitura das páginas 156 a 158 de (Costa & Rodrigues, 2012) e respostas, escritas à mão, às três questões subsequentes.

1. Aplicando as regras operatórias dos logaritmos, escreve $1 - \log_3 5$ sob a forma de um único logaritmo. Em cada passo deves explicitar a regra utilizada.
2. Seja $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, fixo. Indica, justificando adequadamente, o valor lógico da proposição:
$$\text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}^+,$$
$$\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y.$$
Recorda que deves apresentar uma demonstração ou um contraexemplo consoante o valor lógico seja verdade ou falsidade, respetivamente.
3. O que achaste difícil ou confuso na leitura? Se nada foi difícil ou confuso, então diz o que te pareceu mais interessante. Por favor, sê o mais específico possível.

Figura 2. Proposta de um trabalho para casa

unidade Função Logarítmica do tema Introdução ao Cálculo Diferencial II, nas figuras 2 e 3, exibem-se um trabalho de casa e uma QC extraídos de (Romano, 2013).

Depois de conhecer a Aprendizagem pelos Pares, atreve-se a experimentar?

Sem utilizares a calculadora, escolhe o maior número:

a) $\ln(30) - \ln(2)$;

b) $2\ln(4)$;

c) $\ln(3) + \ln(4)$;

d) $\dfrac{\ln(4)}{\ln(2)}$.

Figura 3. Proposta de uma questão conceptual, adaptada de (Hughes-Hallet *et al.*, 2010)

Referências

Bagni, G. T. (2001). An investigation of some misconceptions in Hight Scool students' mistakes. *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, I, 3–24.

Beites, P. D., & Nicolás, A. P. (2013). *Peer Instruction in Linear Algebra*. ICERI2013 Proceedings, ISBN: 978-84-616-3847-5.

Byrne, R. (2011). *Three Alternatives to Clicker Response Systems*. Obtido em 2014, de http://www.freetech4teachers.com/2011/10/three-alternatives-to-clicker-response.html#.U0A8TV7WYyE

CLC. (2014). *Spring 2011 Clicker Pilot*. Obtido em 2014, de http://clc.its.psu.edu/classrooms/clickers/pilot

Costa, B., & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço 12*. Porto: Porto Editora.

Crouch, C. H., & Mazur, E. (2001). Peer Instruction: Ten years of experience and results. *American Journal of Physics, 69* (9), 970–977.

Díaz-Aguado, M. J. (2000). *Educação Intercultural e Aprendizagem Cooperativa*. Porto: Porto Editora.

Fiolhais, C., & Pessoa, C. (2003). Ensinar é Apenas Ajudar a Aprender. 26 (*Fascículo 1*), 18–22.

Hanford, E. (2011). *The problem with Lecturing*. Obtido em 2012, de http://americanradioworks.publicradio.org/features/tomorrows-college/lectures/problem-with-lecturing.html

Hughes-Hallet, D., Gleason, A., Lock, P., Flath, D., Davidian, A., Flath, D., Robinson, M. (2010). *Applied Calculus: ConcepTests*. United States of America: John Wiley & Sons.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A., McCallum, W., Lomen, D., Lovelock, D., Tecosky-Feldman, J., Lock, P. (2003). *Calculus: ConcepTests*. United States of America: John Wiley & Sons.

Iverstine, W. (2010). *Application of Peer Instruction in the High School Setting*. Tese de Doutoramento, Southeastern Louisiana University.

Mazur, E. (1997). *Peer Instruction: a user's manual*. Upper River: Prentice-Hall.

MazurGroup. (2014). *Mazur Group*. Obtido em 2014, de http://mazur.harvard.edu

Pilzer, S. (2001). Peer Instruction in Physics and Mathematics. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 11* (2), 185–192.

Romano, A. (2013). Aprendizagem pelos Pares: Um contributo para a sua aplicação no Ensino Secundário. Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, Universidade da Beira Interior.

Schell, J. (2012). Turn to your Neighbor. Obtido em 2014, de http://blog.peerinstruction.net/2012/06/19/does-peer-instruction-work-in-high-schools-2/

Terrell, M. (s.d.). *Webpage of Maria Terrell*. Obtido em 2014, de http://www.math.cornell.edu/~maria/

TexasInstruments. (1995). *Education Tecnology*. Obtido em 2014, de http://education.ti.com/en/us/products/ti-navigator-systems/ti-nspire-cx-navigator-system/features/features-summary

Patrícia Damas Beites, Ana Romano
Universidade da Beira Interior

Matemática ao vivo: Proporcionalidade directa no Ensino Básico

Isabel Gil

Como contribuir para um entendimento mais profundo de alguns conceitos matemáticos é o objectivo subjacente a este registo de situações em sala de aula. Pretende-se, através de diferentes estratégias pedagógicas, que os alunos construam o seu conhecimento de forma progressiva e com um nível de complexidade crescente; que testem as suas novas ferramentas e as apliquem em contextos diversificados; que, em suma, ganhem destreza no raciocínio e gosto em atacar uma situação problemática por vários ângulos.

1. O que é uma proporção

Vamos fazer um jogo? Descubram a palavra em falta:

$$\frac{\text{lua}}{\text{noite}} = \frac{\text{sol}}{?}$$

Registem no caderno diário como se lê: *A lua está para a noite assim como o sol está para _____*.

Esta foi fácil. Experimentem agora:

$$\frac{\text{chave}}{\text{fechadura}} = \frac{\text{botão}}{?}$$

Surgem termos como *camisa, casaco.* Útil para chamar a atenção para a escolha de termos que não permitam ambiguidade nas respostas, porque os «problemas» seguintes vão ser inventados e propostos pelos alunos aos colegas. Na era do fecho éclair, quantas crianças sabem que *um botão entra na casa*?

«Agora que já resolvem este jogo tão bem, vamos fazer mais difícil ainda: de quantas maneiras diferentes conseguem «arrumar» os números 2, 3, 6 e 9 neste jogo?»

Muito poucos alunos conseguem chegar às 24 combinações. Para que todos o façam, a sugestão de que devem fixar um dos números e «fazer rodar» os outros ajuda os mais inseguros.

Quando todos registam as 24 soluções vão trabalhar sobre elas e descobrir que umas funcionam matematicamente e outras não. A escolha de números tão básicos não é aleatória, estes facilitam o cálculo mental dos produtos e a progressão rápida na tarefa.

«Ora descubram lá quantas ‹certas› existem. Nas que não funcionam cortem o sinal de igual para se ler *diferente de*. As verdadeiras destaquem com um rectângulo».

O trabalho em progresso tinha este aspecto:

$$\boxed{\frac{2}{6} = \frac{3}{9}} \quad \frac{2}{6} \neq \frac{9}{3} \quad \boxed{\frac{2}{3} = \frac{6}{9}} \quad \frac{2}{3} \neq \frac{9}{6} \quad \frac{2}{9} \neq \frac{3}{6} \quad \frac{2}{9} \neq \frac{6}{3}$$

Concluem com a frase: *Em 24 soluções possíveis só 8 são verdadeiras.*

E acrescenta a professora: ...e chamam-se proporções! Vamos lá descobrir porquê...

A atividade que acabo de descrever foi recebida com entusiasmo pelos alunos e vai ser muito útil quando lhes for pedido que calculem o termo em falta de qualquer proporção ou que traduzam uma situação problemática por uma proporção. Ganham um cuidado especial porque verificaram por si próprios que num universo de 24 possibilidades só 8 podem «correr bem». Também compreendem que a proporção do colega do lado, embora diferente da sua, pode ser igualmente válida.

2. A proporção como igualdade entre duas razões

Todos sabem do fraquinho da professora por chocolates... e como em dias de festa faz mousse para os amigos, revela então a receita aos alunos, desafiando os rapazes a experimentarem (há sempre uma aula em que um deles traz orgulhosamente a sua grande tigela e a mousse é distribuída em copinhos de plástico, saboreada e elogiada).

Por vezes não há chocolate em casa da professora a não ser a tablete para fazer mousse... e lá se vai um pedaço!

«Imaginem que quero fazer mousse e só tenho metade da tablete. Posso? E faço como?»

Receita completa	Falta chocolate!	Há poucos ovos!
200g de chocolate	100g	?
250g de açúcar	?	?
6 ovos	?	4 ovos
1 c. sopa de leite	?	?
1 c. sopa de manteiga	?	?

Se no caso do chocolate o cálculo é simples, a falta de ovos exige proporções com cálculos mais complexos. Aconselha o bom senso, nos dois últimos ingredientes, a aceitar o q.b.

3. Há proporções por todo o lado

3.1 Escalas

Tendo como material a régua de 15 cm — que habita sempre em todos os estojos e é obrigatória nas aulas de Matemática — a professora pede aos alunos que meçam o manual e registem um esboço no caderno.

Ultrapassadas algumas dificuldades (stôra, a régua é mais pequena do que o livro, faço como? Pedro, porque escreveste quatro medidas no teu esboço, descreve-me lá o que é um rectângulo) propõe o desenho rigoroso do manual e todos constatam que vai ter de ficar menor que o tamanho real. Relembra que na reprografia podem obter reduções e ampliações. Neste caso é precisa uma redução e é um deles que propõe: 5× mais pequeno. Utilizando duas proporções:

$$\frac{1}{5} = \frac{b}{22} \qquad \frac{1}{5} = \frac{h}{28}$$

Os alunos estão familiarizados com os símbolos: b-base e h-altura. As medidas foram arredondadas (Por excesso? Por defeito? E porque escolheste arredondar por excesso?).

Os desenhos «rigorosos» passam o crivo da sobreposição no vidro da janela e há quem se espante: não é que ficaram mesmo geometricamente iguais?

Com ajuda de uma ficha métrica extensível repetem o processo para o desenho da porta e do quadro. Surge a discussão de que para estes casos a escala de 1:5 «não serve»- se os objectos são maiores também a redução terá de ser mais radical. Chegam a um consenso e trabalham agora com a escala 1:10 e descobrem que os cálculos são ainda mais rápidos, «quem é que não sabe dividir por 10!». Desta vez o TPC é fazer mais do mesmo: o mínimo são dois desenhos e não podem partir nada lá em casa.

A aula seguinte é um trabalho a pares que envolve réguas de 50 cm, mapas rodoviários, atlas e calculadoras. A ideia é programarem destinos em viagens de avião, ou seja, em linha recta, de onde e para onde quiserem: no país, na Europa, entre duas capitais em diferentes continentes. É obrigatório o registo, para cada viagem, por exemplo:

$$\text{Lisboa/Londres} \rightarrow \_\_\_\_ \text{ Km} \qquad \frac{1\text{cm}}{120\text{Km}} = \frac{13\text{cm}}{DR}$$

(DR =Distância Real, por oposição a Distância no Mapa)

Os registos no quadro são por vezes validados por outro par de alunos com outro mapa, outra escala.

3.2 Os Dois Solitários, crónica de Carlos Fiolhais

O texto é delicioso e é lido em voz alta por vários alunos, sucessivamente, com interrupções frequentes para comentar ou sublinhar pormenores. Os registos no caderno são os seguintes:

N.º de assaltos	Anos de actividade	Roubos	
36	13	700 000€	(El Solitário)
29	2	500 000€	(Solitário Português)

«Utilizando proporções, prova qual dos dois assaltantes foi o melhor.»

Muitos cálculos depois, as conclusões que convenceram foram:

a) Se considerarmos o tempo e o dinheiro, ganha o português, porque:

$$\frac{2}{500\,000} = \frac{E}{700\,000}$$

E = 2,8 (para ganhar da mesma maneira que o português, o espanhol só precisava de 2,8 anos e teve de roubar durante 13 anos!)

b) Se considerarmos o n.º de assaltos e o dinheiro:

$$\frac{29}{500\,000} = \frac{36}{E}$$

E = 620 690€ (ganha o espanhol porque conseguiu mais do que isto «mas por pouca diferença!« comenta a Rita)

c) Se considerarmos o tempo e o n.º de assaltos, ganha o português, porque:

$$\frac{2}{29} = \frac{13}{E}$$

E = 188,5 (o espanhol teve tempo, como o português, para fazer todos estes assaltos e fez só 36)

Tal como concluía o cronista, embora noutro contexto, «Em justificações, ganhamos a qualquer país do mundo».

Isabel Gil
Escola EB 2,3 de Santana, Sesimbra

Conhecimento de futuros professores dos primeiros anos sobre os diferentes significados das frações

Hélia Gonçalves Pinto, C. Miguel Ribeiro

Uma das dificuldades no ensino-aprendizagem dos números racionais relaciona-se com os diferentes significados das frações — tanto para alunos como para professores. Assim, é necessário desenvolver o conhecimento matemático especializado do professor.

Tendo por base a reconhecida necessidade de melhorar a formação de professores e a pretensão de contribuir de forma ativa para essa melhoria, iremos discutir alguns resultados relativos aos desempenhos apresentados por futuros professores ao responderem a tarefas que envolvem os diferentes significados de frações.

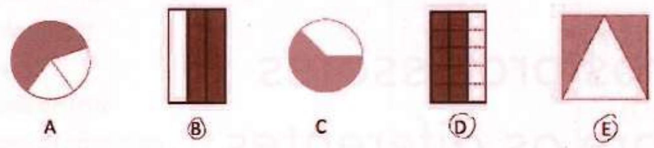
Os diferentes significados das frações, conhecimento e formação de professores

Os alunos adquirem uma compreensão significativa do conceito de número racional quando lhes é proporcionada a exploração de tarefas que contemplam a maioria dos significados das frações (Kieren, 1976; Lamon, 2007; Streefland, 1991). No entanto, o facto de se compreender um dos significados de fração, não significa que se tenha conhecimento do conceito de número racional, pelo que se torna necessário desenvolver uma compreensão dos vários significados e suas inter-relações (Kieren, 1976; Lamon, 2007). Aliás, o facto de os alunos serem confrontados essencialmente com a definição técnica de fração como parte-todo, deixa-os com uma noção empobrecida de número racional, para além de considerarem fração como sinónimo de parte-todo, excluindo os outros significados: quociente, razão, operador e medida (Lamon, 2007).

Ao nível elementar, e num contexto escolar, as frações podem assumir diferentes significados (e.g., Monteiro & Pinto, 2005). Assim, a fração como *parte-todo* surge em situações de comparação entre a parte e um todo (a unidade) — o denominador indica o número de partes iguais em que a unidade está dividida e o numerador o número de partes escolhidas, podendo o todo ser contínuo (uma folha de papel) ou discreto (berlindes). A fração como *quociente* associa-se a situações de partilha equitativa (foram distribuídas, equitativamente, 3 sandes por 4 crianças) — o numerador representa o que é partilhado e o denominador os recetores dessa partilha (pertencem, portanto, a conjuntos distintos). A fração pode ser entendida como *razão*, por exemplo, em situações de relação entre duas partes de um todo (a razão entre o número de meninos e de meninas numa turma é de 2/3 e lê-se: «é de 2 para 3»). A fração é encarada como *operador* em situações em que é aplicada ao cardinal de um conjunto discreto — o denominador indica uma divisão e o numerador uma multiplicação (3/4 de 12 lápis) ou, associada à transformação de uma figura (redução, ampliação, identidade). A fração como *medida* ocorre em situações de comparação de uma grandeza com outra tomada como unidade de medida — esta medida pode ser maior, menor ou igual que a grandeza a medir.

De acordo com Monteiro e Pinto (2005) a fração como parte-todo pode ser considerada tanto em situações de medida como de partilha. No entanto, consideram que uma abordagem às frações sustentada apenas naquele significado, limitará certamente o entendimento dos alunos sobre frações, uma vez que, entre outros motivos, estes confundem a relação parte-todo com a relação parte-parte, o que dificulta a compreensão de situações que envolvam frações que representam quantidades maiores que a unidade. Assim, concordando com vários autores (e.g. Fosnot & Dolk (2002) e Streefland (1991)), defendemos uma primeira abor-

4. Qual das seguintes figuras tem $\frac{2}{3}$ pintados? Justifica as tuas opções.



R: B, D e E porque estão 2 partes pintadas de 3 partes.

Figura 1. Fração como parte-todo

$$30 - \frac{3}{5} = \underset{(\times 5)}{\frac{30}{(1)}} - \frac{3}{5} = \frac{30}{5} - \frac{3}{5} = \frac{27}{5} =$$

Figura 2. Fração como operador

dagem às frações em contextos de partilha equitativa, partindo de situações inspiradas na realidade dos alunos e sustentadas num processo construtivo de matematização. Desta forma possibilita-se a exploração de contextos diversificados promovendo uma compreensão dos diferentes significados das frações e por conseguinte, do sentido de número racional.

Porém, para que os alunos possam explorar e desenvolver uma plena compreensão sobre os distintos significados e interpretações das frações, é fundamental que os professores detenham um amplo e sólido conhecimento relativamente aos diferentes aspetos do conteúdo que pretendem abordar e das possíveis formas de representação ou exploração e abordagem em contexto — conhecimento matemático especificamente relacionado com a atuação docente (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013). Assim, tendo como objetivo promover nos seus alunos um entendimento do que fazem, porque o fazem e como o fazem, o professor terá de saber, por exemplo que para identificar a fração correspondente à parte pintada de uma figura têm de considerar a figura dividida em partes iguais; que considerando uma determinada quantidade, 3/5 dessa quantidade é distinto de retirar 3/5 à unidade. Sendo estes exemplos de um conhecimento do que se supõe encontrar no nível dos alunos, ao professor cumprirá um conhecimento especializado que lhe permita, também, entre outros, navegar entre diferentes representações de um mesmo tópico ou relacionar (imediatamente) tópicos distintos, aparentemente desconexos. Apenas sendo detentor do referido conhecimento, será possível ambicionar uma melhoria da sua prática e dos resultados e conhecimentos dos alunos.

ALGUNS RESULTADOS PRELIMINARES E DISCUSSÃO

Nesta secção apresentamos e discutimos alguns aspetos relativos às respostas apresentadas por 27 futuros professores dos primeiros anos (12 que estavam a iniciar a frequência do 1.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo e 14 que estavam a finalizar o 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica — em diferentes instituições) a tarefas que envolvem os diferentes significados das frações — de acordo com o Programa de Matemática então em vigor (ME, 2007). A diversidade de contextos não pretende comparar formações mas sim obter um mais amplo entendimento sobre alguns dos aspetos que serão essenciais melhorar no ensino e na aprendizagem de números racionais.

Os estudantes mencionam estar mais à-vontade em situações envolvendo a fração como parte-todo referindo que foi o sentido mais explorado durante a sua escolaridade, incluindo a formação inicial de professores. Porém, ainda assim, nem sempre consideram a necessidade de a unidade estar dividida em partes equivalentes, sendo que mesmo os estudantes que referem esse facto revelam algumas dificuldades. Por exemplo, quando solicitados a identificarem figuras que têm 2/3 pintados (Figura 1), 36% dos estudantes identifica a figura E, que está dividida em 3 partes não congruentes apesar de terem igual forma.

Numa das questões envolvendo a fração como operador, outro significado que também fazia parte do seu currículo escolar, 64% dos futuros professores não consegue determinar 3/5 de 30. Ao responderem à questão: «No dia do seu aniversário o Manuel levou para a escola um saco com 30 gomas. Deu aos seus colegas de turma 3/5 dessas gomas. Com quantas gomas ficou o Manuel?», evidenciam um completo desconhecimento de que a fração pode ser encarada como algo que não parte-todo e não criticam a razoabilidade dos resultados que obtêm. Assim, consideram perfeitamente normal obter como resposta 27/5, ao recorrerem a procedimentos algébricos para retirarem 3/5 a 30 gomas (Figura 2).

Estas dificuldades levam a equacionar o tipo de abordagens e explorações efetuadas mesmo na formação inicial (para que possam adquirir significado) envolvendo situa-

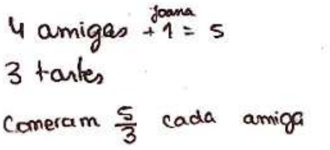


Figura 3. Fração como quociente

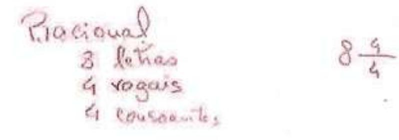


Figura 4. Fração como razão

ções onde a fração é aplicada ao cardinal de um conjunto discreto.

Ao responderam a uma questão envolvendo a fração como quociente «A Joana adora as tartes da pastelaria bocadoce. Um dia resolveu convidar 4 amigas para irem provar as tartes que ela tanto gosta. Pediram 3 tartes e dividiram-nas igualmente entre elas. Que parte de tarte comeu cada amiga?», o erro mais comum corresponde à troca do dividendo pelo divisor (56%) (Figura 3), sendo que a totalidade de respostas incorreta foi de 64%. Estas respostas revelam, mais uma vez, uma falta de sentido crítico quanto aos resultados (e processos) já que nem sequer é equacionada a impossibilidade de cada amiga comer mais do que uma tarte, o que poderá estar associado a um desconhecimento das relações entre numerador e denominador de uma fração envolvendo quantidades maiores que a unidade (Esta falta de conhecimento sobre o papel da unidade revelou-se explicitamente aquando da exploração em grande grupo das tarefas propostas).

Na questão que envolve a fração como razão «[...]Escreva uma fração que represente a relação entre o número de vogais e o número total de letras [da palavra RACIONAL], 36% dos estudantes apresentou uma resposta errada, surgindo essencialmente a confusão entre a relação parte-todo e a relação parte-parte (Figura 4).

A tarefa que envolvia a fração como medida revelou-se problemática talvez pelo facto de a unidade de medida ser «maior», em área, que o que se pretende medir. Ainda assim, ao serem confrontados com questões envolvendo a comparação das medidas dos elementos constituintes dos blocos padrão, 36% dos estudantes erram a resposta cujas questões envolvem a unidade de medida inferior ao objeto a medir, sendo que esse valor aumenta para 71% quando a unidade de medida é superior ao objeto a medir (Figura 5).

Estas dificuldades dos futuros professores expressam também as dificuldades reveladas em outras questões ao não problematizarem o facto de a fração que obtêm ser superior à unidade, mesmo em situações onde é expressamente referido que se tem de dividir a unidade em partes iguais — sem que, propositadamente, se mencione qual a unidade considerada.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

A fração como parte-todo corresponde ao significado que foi referido pelos estudantes como tendo sido o mais explorado durante a sua formação escolar. Porém, apesar de a questão que envolve este significado recolher a menor percentagem de respostas incorretas (36%), esta é ainda preocupante. Tal como refere Lamon (2007), o facto de os alunos serem tradicionalmente confrontados essencialmente com a definição técnica de fração como parte-todo, deixa-os com uma noção empobrecida de número racional. Também Monteiro e Pinto (2005) alertam para alguns inconvenientes de uma abordagem didática às frações exclusivamente através da relação parte-todo, nomeadamente pelo facto de os alunos confundirem a relação parte-todo com a relação parte-parte e ser uma abordagem que dificulta a compreen-

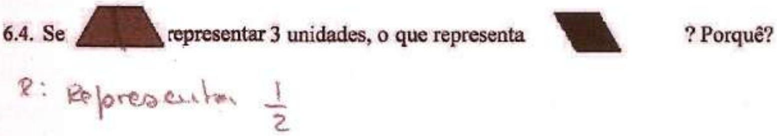


Figura 5. Fração como medida

são de frações que representam uma quantidade maior que a unidade. Esta poderá ser a razão pela qual cerca de 36% dos estudantes apresenta uma resposta errada à questão que envolve a fração como razão e 71% uma resposta errada à questão que envolve a fração como medida, cuja unidade de medida é superior ao objeto a medir.

O tipo de respostas apresentado pelos futuros professores revela-se problemático e deverá ser tido em conta aquando da concetualização de tarefas para a sua formação. Estas deverão sustentar-se num conjunto de objetivos que tenha a prática docente tanto como ponto de partida como de chegada (e.g., Ribeiro, Mellone & Jakobsen, 2013) de modo a promoverem o desenvolvimento do conhecimento especializado. O facto de os futuros professores revelarem um conhecimento matemático limitado dos significados das frações ilustra a necessidade de que este seja um dos aspetos centrais do conhecimento especializado a desenvolver na formação inicial de professores, de modo a permitir, num futuro próximo, melhorar significativamente as aprendizagens dos nossos alunos neste tema.

Referências

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2985–2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents.* Portsmouth: Heinemann.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101–144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook ok mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação — DGIDC.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89–107.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings PME 37* (Vol. 4, pp. 89–96). Kiel, Germany: PME.

Streefland (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*: Kluwer Academic Publishers.

Hélia Gonçalves Pinto
ESECS do Instituto Politécnico de Leiria
helia.pinto@ipleiria.pt

C. Miguel Ribeiro
CIEO, Universidade do Algarve
cmribeiro@ualg.pt

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

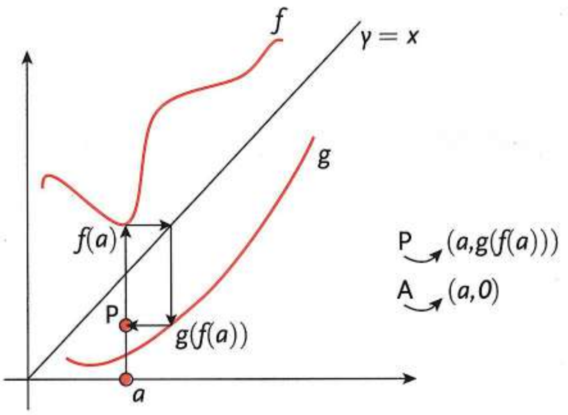
Interpretação geométrica da composição de funções

A tarefa que apresentamos nesta secção é uma das vinte e sete propostas da brochura «Problemas e investigações com tecnologia» elaborada pelo grupo T3 da APM e recentemente publicada pela Associação. A publicação apresenta enunciados e propostas de resolução, no sentido de, segundo os autores, facilitarem a aplicação em sala de aula, nomeadamente na forma de tirar partido do uso da tecnologia. Embora tenham sido concebidas para a TI-Nspire, as resoluções foram adaptadas para poderem ser usadas com qualquer outra tecnologia gráfica.

Assim, respeitando a metodologia adotada na brochura, decidiu-se por apresentar a tarefa seguida da proposta de resolução.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

O esquema seguinte mostra como se pode obter, graficamente, a imagem de um ponto P, por composição de duas funções $(g \circ f)$.



1. Considera as funções $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = \frac{x^2}{4} - 4$.
   — Representa graficamente as funções indicadas e a bissetriz dos quadrantes ímpares $y = x$.
   — Marca, no eixo dos *xx*, o ponto genérico A, de abcissa **a**, e recria o esquema representado na figura. Confirma que, ao movimentares o ponto A, o ponto P se desloca segundo o processo indicado.

   1.1. Obtém o lugar geométrico do ponto P, ao movimentares o ponto A.
   1.2. Determina, analiticamente, a expressão $h(x) = (g \circ f)\ (x)$, representa-a graficamente e confirma que o gráfico coincide com o traçado geométrico do ponto P.

2. Considerando a função $f(x) = 2x + 2$, qual será a expressão da função $j(x) = (f \circ f)\ (x)$?
   Adapta o esquema gráfico a esta nova situação.

3. Se a função f for representada pela expressão $f(x) = \frac{1}{x}$, qual será o gráfico correspondente a $j(x) = (f \circ f)\ (x)$?
   Terias que impor alguma restrição ao gráfico obtido através da tua construção?

4. No caso de $m(x) = (f \circ f \circ f)\ (x)$, como adaptarias o teu esquema gráfico a esta nova situação?
   Aplica a nova construção, à função $m(x)$ no caso em que $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$.
   Confirma, analiticamente, o resultado obtido graficamente. Qual é o domínio da função $m(x)$?

5. Dada uma função f, pretende-se encontrar pontos no respectivo gráfico, denominados pontos cíclicos, tal que $f(a) = b$ e $f(b) = a$, correspondentes ao seguinte esquema:

$$a \underset{f}{\overset{f}{\rightleftarrows}} b$$

   Considera a função $f(x) = x^2 - 2$. Investiga, graficamente, se existem pontos cíclicos.
   No caso de existirem, determina, analiticamente, as respectivas coordenadas.

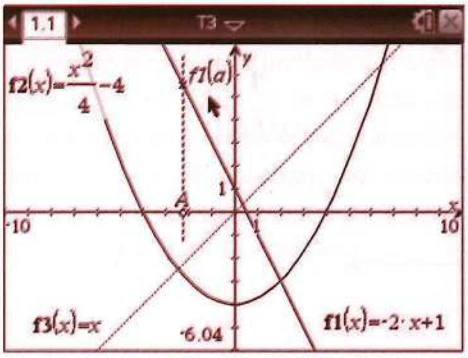
Proposta de resolução

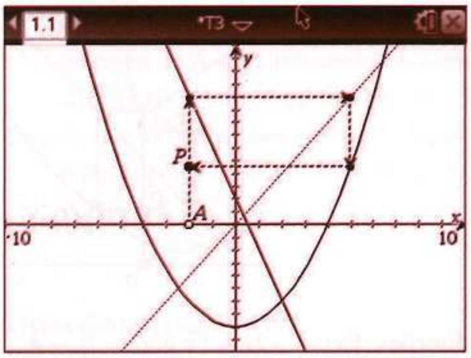
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA COMPOSIÇÃO DE DUAS FUNÇÕES

1.

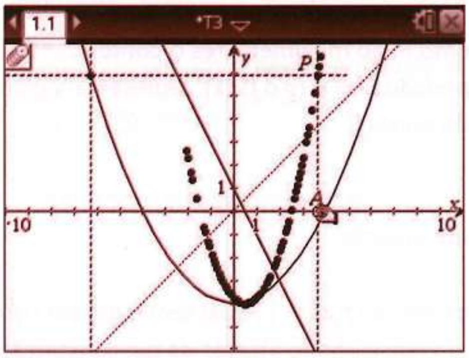
1.1. Introduzem-se as funções $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = \frac{x^2}{4} - 4$, a bissetriz dos quadrantes ímpares e o ponto A, genérico, pertencente ao eixo dos *xx*. Com o auxílio de retas perpendiculares aos eixos coordenados, começa-se por determinar:

— $f(a)$, imagem da abcissa do ponto A, pela função f;
— em seguida, projeta-se, horizontalmente, esse valor sobre a bissetriz $y = x$;
— através de uma nova projecção, agora vertical, sobre a função $g(x)$, obtém-se o valor de $g(f(a))$;
— finalmente, através de uma projecção horizontal sobre a reta vertical inicial, de abcissa **a**, obtém-se o ponto P pretendido, de coordenadas $(a, g(f(a)))$.



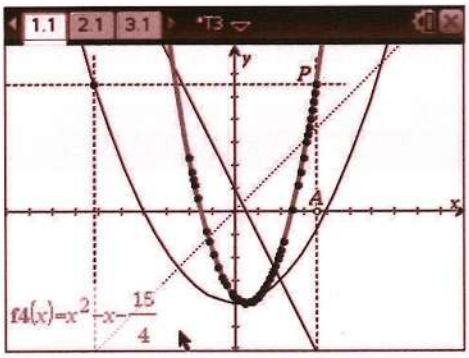


Utilizando o traçado geométrico sobre o ponto P e deslocando o ponto A, pode observar-se o lugar geométrico correspondente ao gráfico da função composta $(g \circ f)\ (x)$.



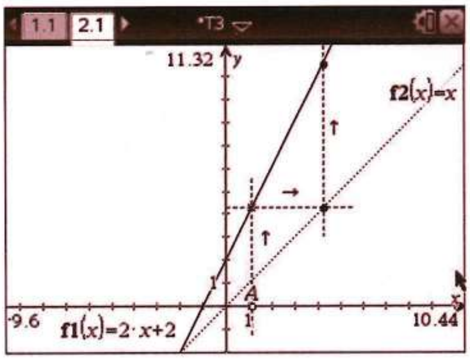
1.2. Determina-se a expressão analítica da função *h*, composta das duas funções, $g \circ f$ e compara-se o respetivo gráfico com o gráfico obtido na alínea anterior.

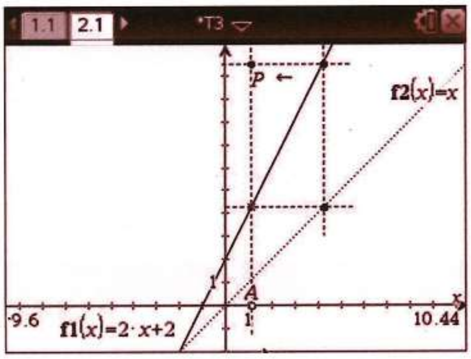
$$h(x) = (g \circ f)\ (x) = g(f(x)) = g(-2x + 1) = \frac{(-2x + 1)^2}{4} - 4 = x^2 - x - \frac{15}{4} \quad \text{e} \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R}$$



Pode observar-se que os dois gráficos coincidem ponto por ponto.

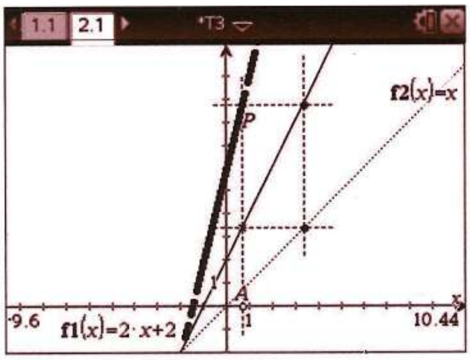
2. Começa-se por adaptar a construção anterior à nova situação:

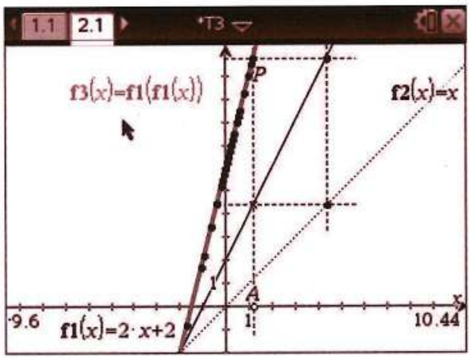




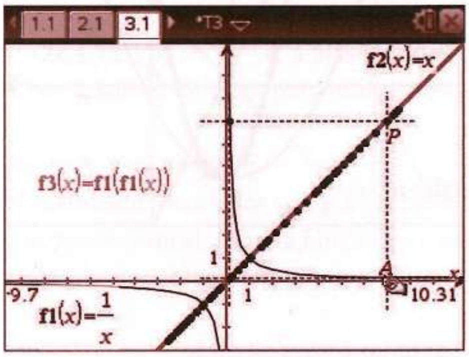
Em seguida, obtém-se a expressão analítica e comparam-se os dois gráficos, não esquecendo de analisar o domínio da função composta:

$$(f \circ f)\ (x) = f(f(x)) = f(2x+2) = 2(2x+2) + 2 = 4x + 6 \quad \text{e} \quad D_{f \circ f} = \mathbb{R}$$





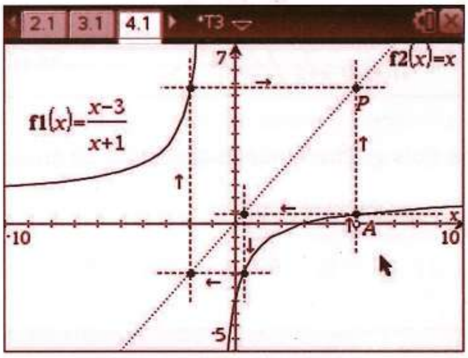
3. Alterando no esquema a função inicial, e mais uma vez com recurso ao traçado geométrico, obtém-se a representação gráfica da função composta. Neste caso, tem que atender-se ao respetivo domínio, concluindo-se que os dois gráficos não são coincidentes:

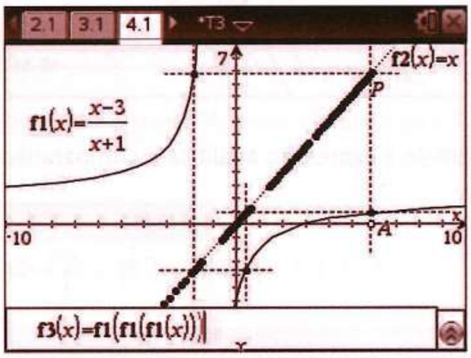


$$(f \circ f)\ (x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in Df \wedge f(x) \in Df\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4. Mais uma vez, tem que se adaptar o esquema de construção, tornando-se desta vez, um pouco mais complicado, por ser a função composta de três funções coincidentes:





Analiticamente:

$$(f \circ f \circ f)\ (x) = f(f(f(x))) = f\left(f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)\right) = f\left(\frac{-x-3}{x-1}\right) = \frac{\frac{-x-3}{x-1} - 3}{\frac{-x-3}{x-1} + 1} = x$$

e

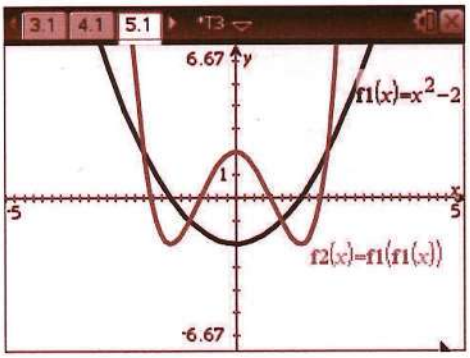
$$D_{f \circ f \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in Df \wedge f(x) \in Df \wedge f(f(x)) \in Df\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

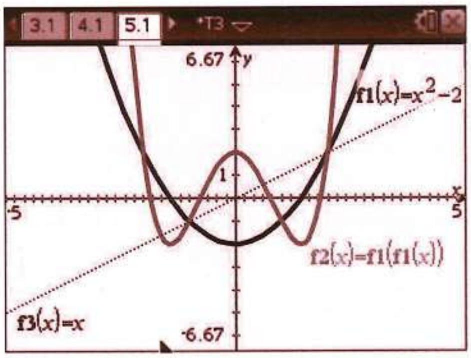
A partir do domínio da função composta, conclui-se que não há coincidência dos dois gráficos.

5. Das condições do enunciado, pode concluir-se:

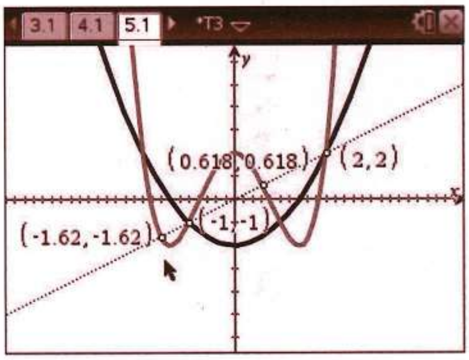
$$\begin{cases} f(a) = b \\ f(b) = a \end{cases} \Rightarrow f(f(a)) = a$$

O que facilita a obtenção gráfica dos **pontos cíclicos**, através da interseção do gráfico da função composta com a bissetriz dos quadrantes ímpares:





Conseguindo obter-se, aproximadamente, as coordenadas dos quatro pontos cíclicos desta função.



Analiticamente:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x^2 - 2) = x \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - 2 = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4 - 2 = x \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$$

e, através do recurso à regra de Ruffini e à fórmula resolvente,

$$(x-2)(x+1)(x^2+x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Confirmando-se, analiticamente, os quatro pontos cíclicos, bem como os valores aproximados obtidos graficamente.

1995, 2005, 2015...
O INÍCIO DE UMA BELA SEQUÊNCIA!

O ProfMat regressa à bela cidade de Évora e mais uma vez à Escola Secundária Gabriel Pereira. À semelhança de anos anteriores o encontro decorrerá de quinta a sábado, mais precisamente nos dias 26, 27 e 28 de Março e o SIEM a 28 e 29 de Março.

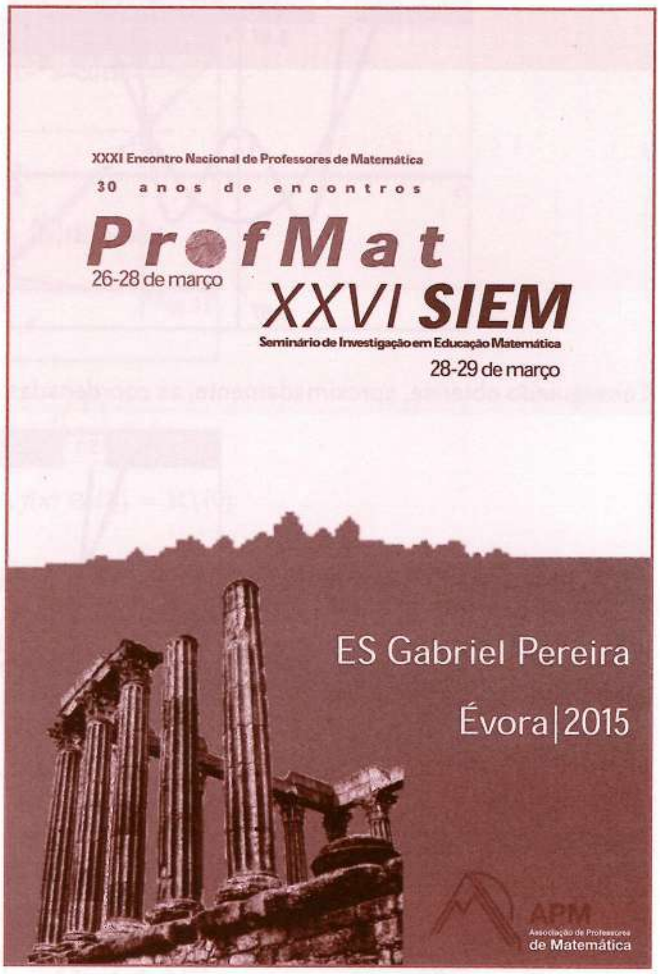
A organização dos encontros está em marcha e muito em breve terá notícias, esteja atento(a) ao seu *e-mqil*.

Mas não deixe de marcar na sua agenda as datas do ProfMat e do SIEM e venha fazer parte da história...

Afinal já passaram *30 anos de encontros!...*

Fica o convite! Até breve...

A Comissão Organizadora



AFIRSE-XXII COLÓQUIO 2015

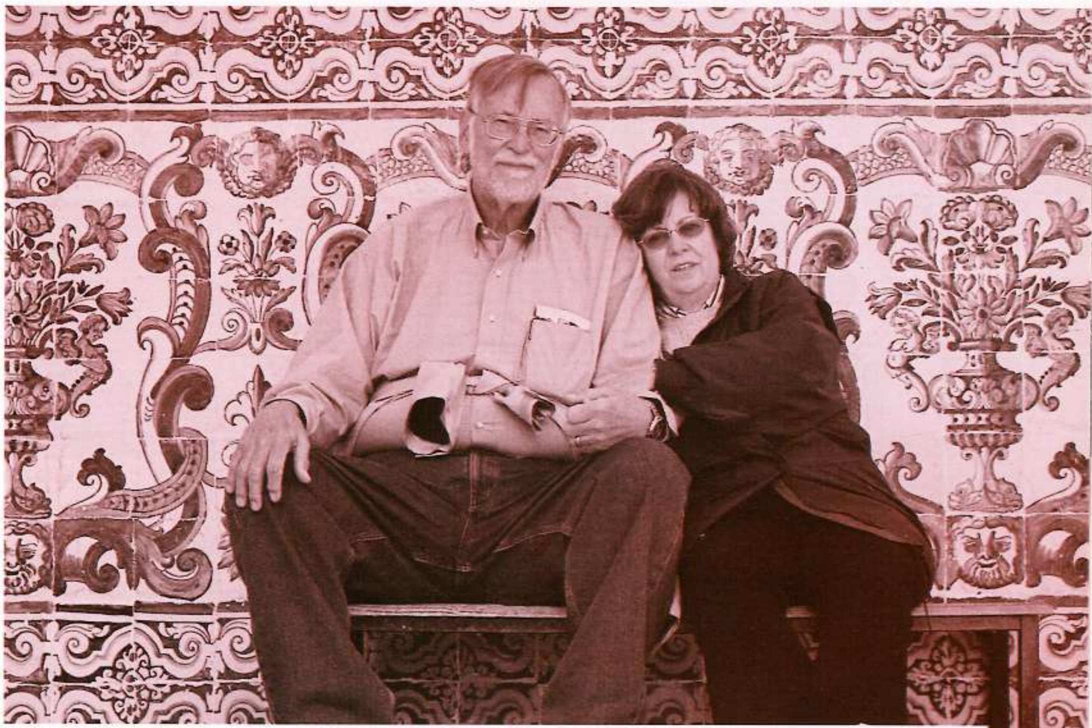
A AFIRSE PORTUGAL vai realizar o seu XXII Colóquio em colaboração com o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, subordinado ao tema da *Diversidade e Complexidade da Avaliação em Educação e Formação.*

O XXII Colóquio terá lugar nos dias 29, 30 e 31 de Janeiro de 2015, nas instalações do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa: Alameda da Universidade, Lisboa, Portugal

XIV CIAEM — CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) convoca a educadores, investigadores, especialistas y estudiantes en Educación Matemática de todas las Américas y del mundo a la *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (XIV CIAEM) que se celebrará en Tuxtla Gutiérrez, Estado de Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015. http://www.ciaem-iacme.org/

Recordando **Bert Waits**



Nem só de tecnologia vive a seção. Este podia ser um *slogan* para despertar a curiosidade dos nossos leitores, mas quero usá-lo aqui para lembrar que por detrás da tecnologia há pessoas que com as suas ideias e visões permitem que as tecnologias se tornem nas ferramentas fantásticas que muitas vezes admiramos e elegemos para ajudar os nossos alunos e colegas a pensar e a resolver problemas que antes pareceriam intransponíveis. É de facto das pessoas que vamos falar nesta seção mas muito em particular de uma pessoa que deu um contributo enorme para que hoje possamos clicar num pequeno conjunto de teclas de uma calculadora e nos apareça um gráfico que podemos manipular e modificar. Desta forma passamos a poder identificar muitas das suas características que ficariam ocultas ou incompreensíveis se não as pudéssemos observar. É o «Poder da Visualização». Este é o *slogan* da pessoa que queremos aqui recordar e que recentemente nos deixou, o Professor Bert Waits. Mais do que enumerar ou descrever a sua obra, que é muito vasta, pretendemos aqui partilhar alguns testemunhos de colegas nossos que de alguma forma conviveram com ele.

O meu primeiro encontro com o Bert Waits foi no início dos anos 90, numa reunião na sede da APM. Ele veio contagiar-nos com o aparecimento de uma nova forma de tecnologia gráfica que cabia no bolso. Se para nós hoje esta é uma «banalidade» colocar na altura era «algo do outro mundo» que só se podia fazer em computadores muito grandes e dispendiosos. É neste contacto com o Bert que eu fui para a minha faculdade incumbido de criar um endereço de correio electrónico para podermos trocar ideias e materiais. Foi nesta altura que criei o meu endereço, que ainda se mantém e foi a pessoa a quem enviei o meu primeiro e-mail, que ainda guardo num computador «velhinho». Até neste contexto a tecnologia e a inovação estiveram presentes pela mão do Bert Waits.

Uma das faces visíveis da sua vasta obra foi a criação do T3 «Teachers Teaching with Technology» que hoje continua a ajudar à difusão da utilização das calculadoras gráficas da Texas Instruments um pouco por todo o mundo. Em Portugal foram vários os colegas que participaram neste projeto e que conviveram de perto com o seu criador. É nesse sentido que apresentamos um conjunto de depoimentos pessoais para que não nos esqueçamos da pessoa e do seu humanismo, para além da sua vasta e grandiosa obra.

Obrigado a todos pelos vossos testemunhos.

Obrigado Bert Waits.

António Domingos
amdd@fct.unl.pt
Departamento de Matemática da FCT-UNL
UIED — Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

Bert Waits (1940–2014)

Bert Waits Kerr morreu no dia 27 de julho de 2014 em Orlando, Florida. Bert era Professor Emérito de Matemática na Ohio State University. Foi co-fundador e diretor do *Ohio Early College Mathematics Placement Testing* (EMPT) Program do Ohio Board of Regents, que se tornou um modelo nos Estados Unidos. Foi autor de mais de 70 publicações em reconhecidas revistas especializadas a nível nacional e internacional, tendo realizado muitas conferências, palestras, oficinas e mini-cursos, nomeadamente em encontros nacionais do MAA e NCTM. Foi co-autor em 1989 do *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* do NCTM.

Trabalhando com Frank Demana, desempenhou um papel fundamental na conceção da família das calculadoras gráficas da Texas Instruments, promovendo o uso da tecnologia portátil na educação matemática. Ambos desenvolveram uma abordagem gráfica para o estudo de funções, que teve impacto nos currículos do ensino secundário e universitário em todo o mundo. A sua abordagem incluía a noção de «gráfico completo» onde procuravam capturar os traços essenciais do gráfico de uma função e o poder das equações paramétricas aplicadas a situações interessantes como, por exemplo, descrever a trajetória de uma bola de basquete.

Demana e Waits desenvolveram o conceito de «poder da visualização» muito antes de outros educadores matemáticos terem visto o seu valor para a compreensão em educação matemática. Waits e Demana foram co-fundadores da T-Cubed, *Teachers Teaching with Technology*, a conferência anual *International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (ICTCM), e a bianual *International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT). Cordenaram muitos projetos de educação matemática financiados pela *National Science Foundation* (NSF). Bert foi coautor de numerosos livros de texto sobre cálculo e pré-calculo para os diferentes níveis de ensino. Junto com Frank Demana, Bert foi distinguido com o *Glenn Gilbert Award do National Council of Supervisors of Mathematics* e o *Christopherson-Fawcett Award do Ohio Council of Teachers of Mathematics* pela sua contribuição no campo da educação matemática.

Bert Waits era conhecido não só pelos seus contributos substanciais, mas também pelo seu sentido de humor. Na sua presença não só se aprendia, como se tornava divertido fazê-lo.

Olá, Bert Waits

No início dos anos 90, o Bert veio a Portugal apresentar uma tecnologia recém-desenvolvida, a calculadora gráfica, e a forma como poderia ser usada no ensino da matemática. A sessão começou às 21h30, na sede da APM, e estavam umas trinta pessoas. Muitos anos depois, ainda o Bert me dizia espantado: «Que país é este em que tanta gente aparece tão tarde na noite para ouvir falar de matemática? Se não tivesse visto, nunca acreditaria que isso era possível.».

Começava assim uma relação que foi crescendo com os tempos e só agora foi interrompida pelos piores motivos. O dinamismo e o entusiasmo do Bert foram contagiosos e logo na APM se criou um grupo de trabalho para preparar e usar o «poder da visualização» que as novas máquinas traziam ao ensino. Esse grupo transformou-se, poucos anos depois, no T3 Portugal que, claro, se mantém ativo e dinâmico — o «efeito Bert» continua vivo.

Os encontros com o Bert foram-se sucedendo, nos Estados Unidos e pela Europa. Os meus contactos e a minha relação com ele foram-se estreitando, passando gradualmente de profissionais a de amizade. Em 2001 fui mesmo passar férias a casa dele e da Bárbara, a mulher. Foram seis dias bem preenchidos, em que alternámos a matemática com passeios pela Carolina do Sul e com a prova de petiscos. Há cinco anos, foi a minha vez de lhe mostrar Portugal e de comermos peixe a quase todas as refeições (não podem imaginar a cara de prazer do Bert quando lhe aparecia à frente um prato de dourada ou de cherne).

Vou ter pena de não continuar a rir-me com o Bert. Vou ter pena de não continuar a receber, de vez em quando, um livro pelo correio ou, por correio eletrónico, uma daquelas hiperligações que ele gostava de partilhar. Mas tenho aqui à frente tudo o que me foi enviando ao longo destes anos todos e que, claro, me vai continuar a ser bem útil. Além disso, e ainda melhor, fica a paixão e a inspiração que tão bem transmitiu. Continuemos pois o trabalho.

Olá, Bert Waits.

José Paulo Viana

Conheci o professor Bert Waits desde o início dos anos 90. Em 1993 veio ao Norte fazer uma sessão na Escola Secundária Augusto Gomes, a escola onde eu trabalhava. Nessa sessão pedi-lhe autorização para tirar fotografias e ele, além de dizer logo que sim, ainda me pediu para lhe tirar uma fazendo «pose» a apontar para a imagem projectada e para lha mandar para os Estados Unidos, o que eu fiz evidentemente.

Ao longo dos anos fui encontrando Bert Waits em vários locais, recordo alguns nos Estados Unidos em encontros do T3 e na Europa em reuniões de coordenadores europeus.

Em Maffliers, França, tive um choque quando o encontrei. No dia da chegada, enquanto esperava pela hora da primeira reunião andava eu a fazer uma caminhada por um pequeno bosque que rodeava o hotel, quando me cruzei com uma pessoa que me disse «OH! My Portuguese friend!». Ao longe não o reconheci, pois Bert Waits tinha tido um problema grave de saúde e estava extremamente magro, bastante alquebrado, andando muito devagar, nada da figura «imponente» a que nos tinha habituado. Fizemos o resto da caminhada em conjunto conversando animadamente com a simpatia usual dele.

Nessa reunião foi apresentada a versão experimental da TI-Nspire. Num workshop de treino que decorreu em várias salas em pequenos grupos, Bert Waits mais uma vez quis ficar no grupo da «Portuguese friend». O trabalho do grupo estava a ser dinamizado pelo colega norueguês que já tinha tido alguma formação no que viria a ser a nova calculadora.

Bert Waits acompanhou os trabalhos com alguma dificuldade, colocando questões e dúvidas com toda a humildade e mostrando o seu «espanto» dizendo que quando ele e Frank Demana começaram nunca iriam supor o ponto a que as calculadoras chegaram. E isto passou-se em 2006! Fica a recordação da simpatia e da amizade com que Bert Waits sempre tratou os colegas portugueses.

Branca Silveira

Na revista *Educação e Matemática* n.º 29, de 1994, a Helena Lopes descreve o primeiro Seminário sobre Calculadoras Gráficas realizado pela APM e refere-se a Bert Waits, nestes termos:

«Viva! Foi assim que Bert Waits iniciou a sessão plenária. No seu estilo simpático e informal, fez uma sensibilização para a utilização das calculadoras gráficas referindo a urgência da mudança no ensino da matemática e concebendo a calculadora gráfica como uma ferramenta que favorece essa mudança ...»

Desde este Seminário, de certa forma marcante para a época, encontrei o Bert Waits em diversas ações ligadas à APM e ao T3.

Guardo sobretudo esse seu estilo «simpático e informal» mas também a sua vontade de contribuir para mudar, diga-se melhorar, o ensino da matemática.

Adelina Precatado

Conheci o Bert Waits num seminário realizado nos anos 90 e em cuja organização colaborei. Ele era um orador carismático, habituado a envolver a audiência com as suas palavras, algo para que até a sua figura imponente parecia contribuir na perfeição. Eu era uma miúda magrita, que fazia timidamente a sua primeira comunicação. Apesar das diferenças, partilhávamos a paixão pelas calculadoras gráficas, ancorada na nossa convicção que estas poderiam dar um importante contributo ao ensino e aprendizagem da Matemática. Durante anos mantivemo-nos em contacto. Primeiro por carta, pois o acesso à internet ainda não era comum em terras lusas, e mais tarde por e-mail. Convidou-me a visitá-lo e a ficar em casa dele e disse-me vezes sem conta que era de pessoas como eu, com o meu entusiasmo, que precisávamos. Nunca entendi ao certo o que terá visto em mim. Penso que o meu genuíno agrado por esta tecnologia, aliado à minha juventude de então, terá sido o que lhe captou atenção. Mas o entusiasmo, isso era o que verdadeiramente o caracterizava a ele. Até hoje, continuo a empolgar-me com as potencialidades das calculadoras gráficas e as problemáticas da sua integração no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, mas o entusiasmo, isso sempre fui buscar a ele. Para mim, Bert Waits foi, é e continuará a ser o grande entusiasta da utilização das calculadoras gráficas no ensino da Matemática. Um entusiasmo que o tornou responsável pela implementação do projecto T3, com impacto em tantos professores de diversos países. Um entusiasmo que teve sem dúvida um grande impacto em mim e que nunca poderei esquecer...

Helena Rocha
Universidade Nova de Lisboa

Errata

Por lapso, na Educação e Matemática 128 foi cortada a última linha do artigo da autoria de João Fernandes, publicado nesta secção. Pelo facto pedimos desculpa aos nossos leitores e ao autor. De seguida reproduzimos a última frase do artigo, tal como deveria ter sido publicada: «No futuro, espera-se que o motor aceite interacções noutras línguas que não apenas o inglês, o que não invalida o seu uso no dia a dia das escolas de língua portuguesa.»

Bert Waits foi o co fundador do T3 com Frank Demana no fim da década de oitenta nos Estados Unidos. Com o programa Teachers Teaching With Technology pretendia engajar a comunidade de educadores em matemática e ciências, em geral, para utilização dos novos recursos tecnológicos, especialmente gráficos, acabados de disponibilizar por tecnologia cada vez mais acessível. «The power of visualization», slogan que repetia, traduzia uma mais valia nas práticas educativas pela possibilidade de realizar no imediato pequenas investigações, experimentações e conjeturas que permitiam dar significado às aprendizagens.

Tendo começado a iniciativa T3 com apenas 12 formadores, no estado de Ohio, a sua energia contagiante levou a que atualmente sejam cerca de 300 os membros do T3 só nos EUA e participem nas conferências do T3 cerca de 3000 professores oriundos da América Latina, Ásia e Europa.

Na conferência internacional de Filadelfia, realizada em 2013,comemoraram-se os 25 anos do T3 e foi-me dado assistir a uma grande e emotiva homenagem feita aos dois fundadores. Retenho desse encontro o clima de amizade vivido. Aliás, um certo «espírito de família» foi repetidamente salientado por vários oradores como marcante neste grupo e devedor da energia e humor contagiante do Bert Waits.

As fotos dizem respeito a outro momento emotivo quando o astronauta e administrador da NASA, Leland Melvin que abriu a conferência internacional, chamou Bert Waits para lhe entregar uns badgtes-espécie de medalha que o acompanhou enquanto astronauta na estação espacial internacional.

Manuel Lagido
Coordenador do Grupo T3 Portugal

Na secção das tecnologias deste número da revista Educação & Matemática, alguns colegas recordam Bert Waits, como matemático, pedagogo e amigo, salientando a influência que teve nas suas vidas profissionais e pessoais. Na secção «para este número selecionámos» associamo-nos à homenagem prestada e procuramos que a voz esclarecida de Bert Waits sobre a utilização das tecnologias na educação matemática continue a estar presente e a ser tida em conta.

Selecionámos o texto «UMA CRÍTICA: O que está a faltar na discussão sobre o draft dos Princípios e *Standards 2000* para a Matemática escolar», pois as ideias nele contidas salientam as alterações profundas que o uso da tecnologia permitiu fazer na aprendizagem da matemática nas últimas décadas e preconizam uma orientação para novas mudanças necessárias. Será que um documento datado, escrito em 2000, sobre o papel da tecnologia no ensino, não está desatualizado e aquelas já não serão as ideias centrais hoje, passados catorze anos? Durante estes anos continuaram-se a verificar grandes mudanças na tecnologia, mas o que se passou com o uso das mesmas no ensino da matemática?

Infelizmente, o que se verifica hoje é um retrocesso real, efetivado na recente alteração dos programas portugueses de matemática. Esperamos que as questões que Bert Waits equaciona no texto, nos ajudem nesta travessia do deserto e contribuam para o debate que é necessário continuar a fazer.

UMA CRÍTICA: O que está a faltar na discussão sobre o draft dos Princípios e Standards 2000 para a Matemática escolar.

BERT K. WAITS

ANTECEDENTES

Como co-autor dos níveis 9–12 das *Normas* do NCTM durante os verões de 1987 e 1988, estou muito desapontado com o esboço do documento dos *Standards 2000*. Tentei ler e reagir ao novo modelo, de mente aberta e receptiva. As minhas preocupações ao analisarem o documento baseiam-se em dez anos de envolvimento intenso e pessoal no ensino da Matemática desde a «saída das *Normas*». Verifiquei que a versão «original» das *Normas* teve um impacto tremendamente positivo na educação matemática de milhões de alunos dos níveis K–12. Compreendo perfeitamente que as *Normas* originais necessitam de actualização, clarificação e amplificação, como acredito ser esse o objectivo dos *Standards 2000*.

PROBLEMA 1 — NÃO HÁ UMA VISÃO SÉRIA RELATIVAMENTE AO USO E IMPLICAÇÕES DA TECNOLOGIA.

Os *Standards 2000* falham em não agarrar a tremenda oportunidade que as mudanças e avanços da tecnologia têm proporcionado durante os últimos doze anos, desde que a versão original das *Normas* foi concebida. Isto é um gravíssimo erro que fará regredir o avanço do ensino da Matemática no próximo século. Sinto que os autores dos *Standards 2000* sucumbiram à pressão exercida por grupos «anti-tecnológicos» ou de «back to basics». Nos *Standards 2000* não há uma visão relativamente ao mais importante agente catalisador do ensino da Matemática — o avanço da tecnologia!

PROBLEMA 2 — O USO REGULAR DA TECNOLOGIA DISPONÍVEL NÃO É ADEQUADAMENTE APOIADO.

De forma a fundamentar a minha crítica tenho que realçar alguns aspectos da história da educação matemática dos últimos cinquenta anos. Por volta 1974–75 surgiu uma «nova» tecnologia (calculadoras científicas) que rapidamente provou ser uma forma «melhor» de calcular valores de funções transcendentes do que a interpolação logarítmica do papel e do lápis. Um FACTO histórico é que em poucos anos o uso desta nova tecnologia levou a uma grande mudança no currículo da iniciação à análise infinitesimal. Eu sei, porque ensinei essas matérias durante quinze anos, antes e depois de 1975. O conteúdo do que ensinava (em algumas disciplinas mais de 30%) simplesmente desapareceu por causa da calculadora científica.

Em meados dos anos 80, integrei o início da revolução das calculadoras gráficas (computadores gráficos de bolso). Tenho visto como milhares de professores talentosos usam as representações gráficas e numéricas das calculadoras gráficas para melhorar o ensino e aprendizagem da Matemática, de formas que nunca imaginei. As calculadoras gráficas fornecem a oportunidade de realçar o «antigo conteúdo» com novas representações e proporcionam a oportunidade de introduzir nova *matemática* e aplicações da matemática que simplesmente não são possíveis de realizar usando só papel e lápis. Agora, graças ao uso de calculadoras gráficas, muitos mais alunos vêem a Matemática como uma «disciplina a valorizar». Os próprios professores confirmam que os alunos ficam entusiasmadíssimos com as matérias da disciplina nas aulas em que usam a calculadora gráfica. Há centenas de exemplos para estes casos. Os autores dos *Standards 2000* deviam *assumir uma posição forte e dar voz ao impacto positivo* das calculadoras gráficas e delinear a importância da continuação do seu uso para alunos de Matemática do 9.º ao 12.º ano. Deveriam ser apresentados muitos mais exemplos no documento final.

Problema 3 — Onde é que está a «nova» tecnologia e a álgebra simbólica informatizada?

Outra grande crítica ao draft dos *Standards 2000* é a falha em reconhecer que hoje em dia há uma nova tecnologia disponível que irá ter um maior impacto no currículo de Matemática que as calculadoras científicas tiveram após 1975. A nova tecnologia de hoje é semelhante às calculadoras gráficas mas é muito mais poderosa porque tem pré-instalado um *software de cálculo simbólico*. Tanto a Casio como a Texas Instruments já comercializam estas novas ferramentas de aprendizagem, e sem dúvida outras empresas as seguirão. A obsoleta analogia curricular entre calculadoras científica e calculadoras simbólicas (CAS) é bem real. Capacidades algébricas simbólicas com papel e lápis eram *necessárias no passado* para avançar na aprendizagem da Matemática. É muito infeliz como, para a maior parte dos adultos, a única álgebra de que se recordam são as manipulações algébricas de papel e lápis. O que é necessário agora é aceitar que álgebra informatizada cada vez mais será considerada como a melhor forma de manipular álgebra, assim como foi calcular valores de funções transcendentes em calculadoras científicas.

O uso de calculadoras simbólicas por parte dos alunos pode levar a uma compreensão real do uso de «álgebra» como uma linguagem de representação simbólica. No próximo século será muito mais importante para os nosso alunos tornarem-se utilizadores capazes de álgebra, como uma linguagem de representação, do que tornarem-se capazes na aplicação de técnicas obsoletas de manipulação simbólica usando o papel e lápis. O uso de calculadoras simbólicas poderá levar à rentabilização de tempo útil de aula que pode ser usado no desenvolvimento do «pensamento algébrico» assim como em vários outros tópicos referenciados nos *Standards* originais. É importante salientar que vários professores simplesmente não têm tempo durante o ano escolar para ensinar os ricos tópicos sugeridos nos *Standards* originais.

Este novo documento precisa de frisar que o ensino da «álgebra» como uma linguagem de representação e uma forma de raciocínio é bem mais desafiante que ensinar técnicas de manipulação simbólica de papel e lápis. A utilização de calculadoras com cálculo simbólico, no ensino e na aprendizagem de Matemática nas escolas, irá providenciar tempo suficiente para os alunos desenvolverem os seus conhecimentos de álgebra como uma linguagem de representação e como forma de raciocínio. Os autores dos *Standards 2000* têm de ser específicos relativamente às mudanças inevitáveis no currículo da Matemática (uma significativa redução de tempo gasto em capacidades de manipulação algébricas) E frisar as maravilhosas oportunidades que esta rentabilização do tempo vai proporcionar.

Problema 4 — Onde é que a experiência de outros países é tida em conta?

O draft dos *Standards 2000* deve apontar referências e exemplos específicos de como as calculadoras com cálculo simbólico são utilizadas no ensino da Matemática em escolas secundárias de outros países. Por exemplo há um programa enorme na Áustria, já com seis anos de existência que visa integrar as calculadoras algébricas nas aulas de Matemáticas das escolas secundárias (o uso do DERIVE em PCs e mais tarde o uso de TI–92). Desenvolveram também poderosas abordagens pedagógicas em relação a calculadoras com cálculo simbólico (o princípio da caixa branca — caixa negra e o princípio do andaime) que deveriam estar ilustradas no documento. Encontram-se vários exemplos da utilização de calculadoras simbólicas no ensino da Matemática nas escolas em

http://www.math.ohio-state.edu/~waitsb/Papers/s2000dwp

Outro documento que é essencial que seja lido pelos autores dos *Standards 2000* (assim como por todos os pais com filhos em idade escolar e por qualquer professor de Matemática) é *Vamos Abolir a Aritmética de Papel e Lápis* do professor Ralston, que pode ser adquirido via net no endereço http://www.doc.ic.ac.uk/~ar9/abolpub.htm.
(http://tonyralston.com/papers/abolpub.htm)
(tradução publicada nas EM n.ºs 58 e 59, no ano 2000)

Problema 5 — Não é reconhecido o óbvio — muita (ou a maior parte) dos conhecimentos manipulativos da álgebra de papel e lápis estão obsoletos.

O draft dos *Standards 2000* precisa de comunicar clara e explicitamente que muitas das tão apreciadas «técnicas algébricas manipulativas» acabarão por cair no esquecimento. Os nossos alunos (e os professores das disciplinas que usam a Matemática) não são estúpidos. Ao alunos rapidamente irão reconhecer que a álgebra informatizada é uma «ratoeira melhor», quando comparada com os métodos de manipulação simbólica do papel e do lápis. Os professores têm de estar preparados para lidar realisticamente com este facto, e irão precisar da ajuda do NCTM.

Os *Standards 2000* tem que comunicar clara e explicitamente que os métodos de papel e lápis já não são «matemática», e que as ferramentas tecnológicas, fornecem, simplesmente, métodos melhores para FAZER algumas (ou quase todas) manipulações associadas à Matemática. Temos um problema de imagem da «Matemática» que tem de ser reconhecido e denunciado nos novos *Standards*. O que é a Matemática? É importante considerar esta pergunta do ponto de vista de um pai, de um contribuinte, de um legislador. Provavelmente, tiveram um contacto com a Matemática nos tempos gloriosos dos intermináveis exercícios e actividades de papel e lápis — do tipo «faz até doer». A sua visão da Matemática é de uma caminhada de métodos e de prática (até à maestria) — resolver, factorizar, simplificar, etc. Mesmo alguns dos nossos colegas acreditam que essa prática frequente e aborrecida é necessária. Não admira que os nossos críticos sejam cépticos.

Problema 6 — É necessário maior ênfase na necessidade de existir um balanço entre abordagens mentais, de papel e lápis e tecnológicas.

O draft dos *Standards 2000* precisa de comunicar que «nós» acreditamos numa abordagem equilibrada ao ensino e aprendizagem da Matemática. Este novo documento precisa de ser incisivo e comunicar claramente que as tradicionais capacidades mentais aritméticas e algébricas são muito importantes. Na verdade, acredito que elas serão ainda mais importantes no futuro, à medida que vamos avançando para um ambiente de ensino mais informatizado. É também necessário realçar que algumas capacidade do tipo papel e lápis são importantes e que haverá tempo suficiente, previsto no currículo, para a «prática» apropriada dessas capacidades necessárias. No entanto, o documento não deve recuar na defesa do uso intenso, regular e integrado da tecnologia disponível, incluindo calculadoras gráficas com cálculo simbólico, geometria dinâmica e computacionais, em todas as aulas de Matemática das escolas secundárias. «Equilíbrio» significa o uso apropriado de métodos mentais, de papel e lápis e tecnológicos. A palavra problemática na frase anterior, e frequentemente enganadora, é «apropriado». Os *Standards 2000* deviam fornecer exemplos mais específicos daquilo que é apropriado e do que não é.

Problema 7 — Onde estão os tópicos que devem receber mais atenção e aqueles que devem receber menos atenção?

Muitos professores acharam que estes estavam entre as melhores partes do Standards primitivos, para os anos 9–12. E são ainda mais importantes dez anos depois! O esboço dos *Standards 2000* não tem coragem para o pôr de forma crua e directa. Sei que alguns professores acreditam que «menos atenção» significa «nenhuma» e que o NCTM devia recuar. NÃO — faz parte do nosso papel explicar aos professores o que é que «menos atenção significa», etc., e aguentar o rumo.

Neste ponto o draft dos *Standards 2000* tem que ser muito específico, sublinhando o que é apropriado e o que é desapropriado. Os professores precisam de ver tópicos específicos que devem receber menos atenção e tópicos específicos para receberem maior atenção. Sim, haverá controvérsia (lembram-se quando se pensava que a Terra era plana?). Mas o NCTM deve apoiar os professores para que estes tenham coragem para fazer o que é melhor para os alunos — não para os seus pais!

Bert K. Waits
Professor de Matemática da Ohio State University
e membro do grupo original, dos níveis 9 –12,
que escreveu as Normas para o Currículo
e Avaliação em Matemática Escolar, 1989

Texto traduzido pelo grupo T3 da APM em 2000, a partir do texto original, *online* nesse ano.

O papel dos papéis

Muitas das tarefas de geometria que tenho vindo a apresentar e discutir nestas notas têm como suporte de trabalho um papel ponteado. Dito de outro modo, *privilegio* nesta tarefas a utilização de um papel com elementos orientadores indispensáveis para trabalhar a geometria das figuras planas sem o peso de instrumentos de medida. Muitos raciocínios são mais simples e diretos e muitos outros podem ser também mais exigentes, constituindo verdadeiros raciocínios geométricos. Por exemplo, identificar comprovadamente ângulos retos (nota E&M 109) ou segmentos paralelos (nota E&M 113) pode exigir raciocínios mais ou menos sofisticados. Mais simples, mas exigindo bastante atenção, é a identificação de segmentos congruentes em quadriláteros (figura 1). A situação de existência de dois lados congruentes tem duas possibilidades, consecutivos ou opostos, e neste caso é interessante notar que o quadrilátero de três lado iguais não é trapézio.

A escolha do ponteado é estratégica. O papel ponteado quadriculado, em que se enquadra o geoplano, serve maravilhosamente o estudo dos quadriláteros pois permite construir todos os tipos de quadriláteros, como tenho ilustrado em várias destas notas. Mas este tipo de papel não serve o estudo dos triângulos pois não permite desenhar triângulos equiláteros cujos vértices sejam os pontos fundamentais da rede. Sem este triângulo não faz sentido discutir classificações de triângulos. No entanto o papel isométrico permite representar quase todos os tipos de triângulos incluindo triângulos retângulos (figura 2). O ângulo reto pode ser facilmente identificado com recurso ao detetor de ângulos retos e que não é mais do que um canto de uma folha de papel A4. Por acaso há um triângulo que não se consegue representar nesta rede ponteada, é o triângulo retângulo isósceles. Esta é a única limitação deste papel para o estudo completo dos triângulos. Porém é uma limitação que se pode transformar numa mais valia.

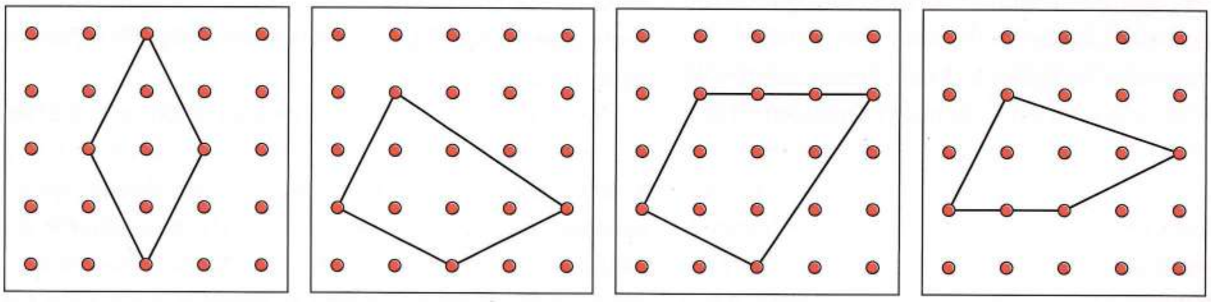


Figura 1. Quadriláteros com 4, 3 e 2 lados iguais.

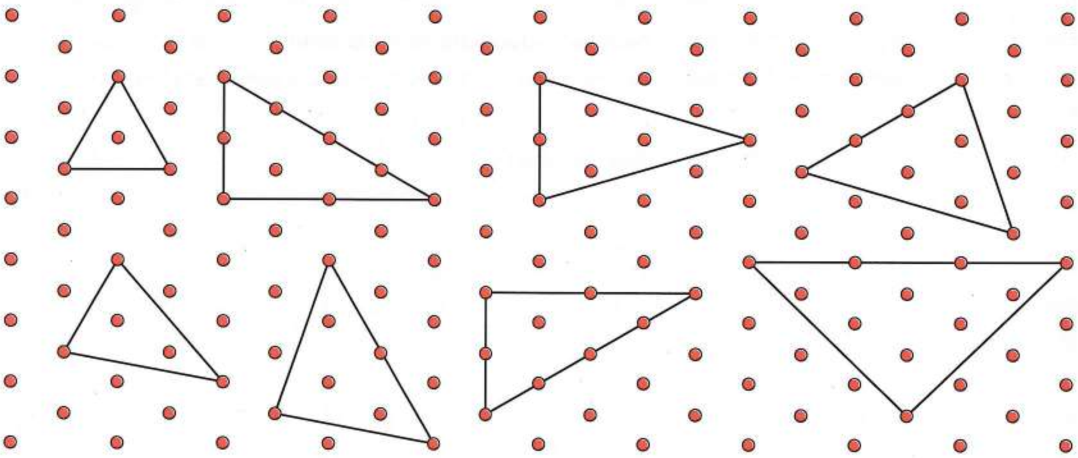


Figura 2. Triângulos representados em papel ponteado isométrico

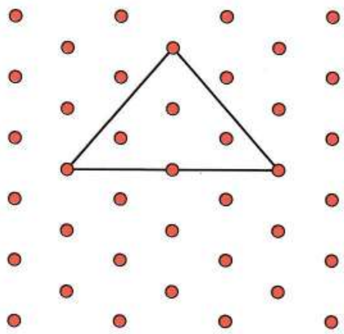


Figura 3. Exemplo de um falso triângulo retângulo com 3 ângulos agudos

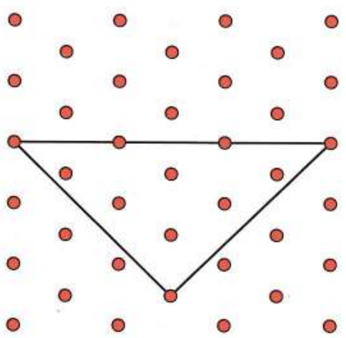


Figura 4. Exemplo de um falso triângulo retângulo com um ângulo obtuso

Recentemente, discuti a exploração de triângulos a partir de uma tarefa com grandes potencialidades de diferenciação pedagógica no artigo «Exames e diferenciação pedagógica» publicado em Junho na revista on-line Almadaforum. Nunca tinha feito uma exploração tão completa sobre triângulos com recurso a este papel e fiquei fascinada pela diversidade de triângulos que foi possível desenhar e pelos raciocínios que tive de fazer. O ângulo reto, como ângulo charneira que permite classificar o triângulo quanto aos ângulos criou-me algumas partidas. Há situações em que ele é quase, quase reto, estando no limiar entre deixar de ser agudo para ser já obtuso (Figuras 3 e 4).

Aos triângulos com um ângulo destes eu chamo falsos triângulos retângulos porque a olho nu eles parecem mesmo ter um ângulo reto. Os dois exemplos apresentados são triângulos isósceles. Deixo-vos por isso uma tarefa com duas partes distintas.

Descobrir o maior número de triângulos retângulos e de falsos triângulos retângulos desenhados em papel isométrico.

Para cada caso apresentar a justificação do raciocínio para garantir que o triângulo é mesmo triângulo retângulo.

As duas partes da tarefa apontam para dois níveis de exploração. Um nível mais elementar em que se prova que o triângulo é retângulo porque se verifica que tem um ângulo reto recorrendo simplesmente à sua medição. Outro mais elaborado em que se recorre a uma demonstração geométrica. A construção rigorosa e simples destas figuras, bem como a sua análise rápida seria bastante mais complicada em papel branco. Até porque em papel branco seria difícil alimentar estes desafios.

Como desafios finais para esta discussão sobre papéis ponteados deixo-vos em jeito de problema duas questões a que a minha abordagem anterior já respondeu. No entanto a compreensão das duas impossibilidades não foi de todo abordada.

Será possível construir um triângulo equilátero cujos vértices sejam pontos de uma rede ponteada ortonormado? Porquê?

Será impossível obter um triângulo retângulo isósceles cujos vértices sejam pontos de uma rede ponteada isométrica? Porquê?

Referência bibliográfica

Loureiro, C. (2014). Exames e Diferenciação. Almadaforma, nº 6, Junho 2014, (16–19). http://issuu.com/almadaformarevista/docs/6almadaforma.

A Matemática do Planeta Terra continua com muito por fazer...

Sem qualquer pretensão de esgotar o tema, os resultados obtidos pelo contributo da colaboração de investigação matemática com outras ciências na compreensão de fenómenos do Planeta Terra, bem como na divulgação desta temática para o público em geral e no envolvimento de agentes educativos para a abordagem destes tópicos justificam a continuidade deste projeto mundial. Assim sendo, vale a pena «deitar o olho» pela agenda nacional deste projeto, destacando algumas perspetivas neste âmbito.

Antes de nos projetarmos no futuro, uma nota sobre a *Feira da Matemática* que teve lugar nos dias 6 e 7 de Junho de 2014. Numa co-organização APM e Museu de História Natural e da Ciência (MUHNAC), este evento envolveu alunos, professores, famílias numa mostra de iniciativas de cariz educativo e de divulgação no âmbito da Matemática do Planeta Terra. Em termos associativos este evento encerrou um ciclo de programação das iniciativas onde a APM esteve envolvida, nomeadamente com a entrega dos prémios do concurso *Matemática, onde estás?* e a exibição de duas exposições que foram reformuladas *Matemática e a Natureza* e *Escher: Arte e Matemática* e que continuam disponíveis para requisição (crecursos@apm.pt).

Comissão Nacional da UNESCO Portugal
United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
Portuguese National Commission for UNESCO
MPT

Os projetos iniciados em 2013 continuam ativos, as efemérides continuam a ser assinaladas. Um desses exemplos é a iniciativa *Bons Raios Te Meçam* que já contou com a colaboração direta de cerca de 70 entidades distribuídas por 6 países e atualmente tem vários parceiros internacionais (Galileo Teacher Training Program (GTTP), Inspiring Science Education (ISE), Open Discovery Space (ODS), Sol para Todos, Projeto Eratóstenes Brasil, Eratóstenes iberoamericano e Eratosthenes Experiment). Ao longo deste ano letivo, estão programadas novas edições para todos os equinócios e solstícios (21/12/2014, 21/03/2015, 21/06/2015). Poderá obter mais informação e inscrever-se em http://www.mat.uc.pt/mpt2013/bons-raios-te-mecam.html.

A assinalar 2014 como o Ano Internacional da Cristalografia, foi criada uma exposição intitulada Cristalografia nas Ciências Fundamentais que está disponível para ser requisitada (http://www.mat.uc.pt/mpt2013/aic2014.html).

Mas as novidades vão continuar a ser uma constante...

A título de exemplo e para quem gosta do tema *Mar*, foi inaugurada no Centro de Ciência Viva de Tavira, durante o mês de Outubro, a exposição «SURFIN'MAT». Para os mais criativos há ainda a possibilidade de experimentarem novas imagens no programa SURFER e concorrer, até 31 de dezembro de 2014, para que os seus trabalhos sejam incorporados na referida exposição. Mais informação em http://www.mat.uc.pt/mpt2013/concurso-surfin-mat.html.

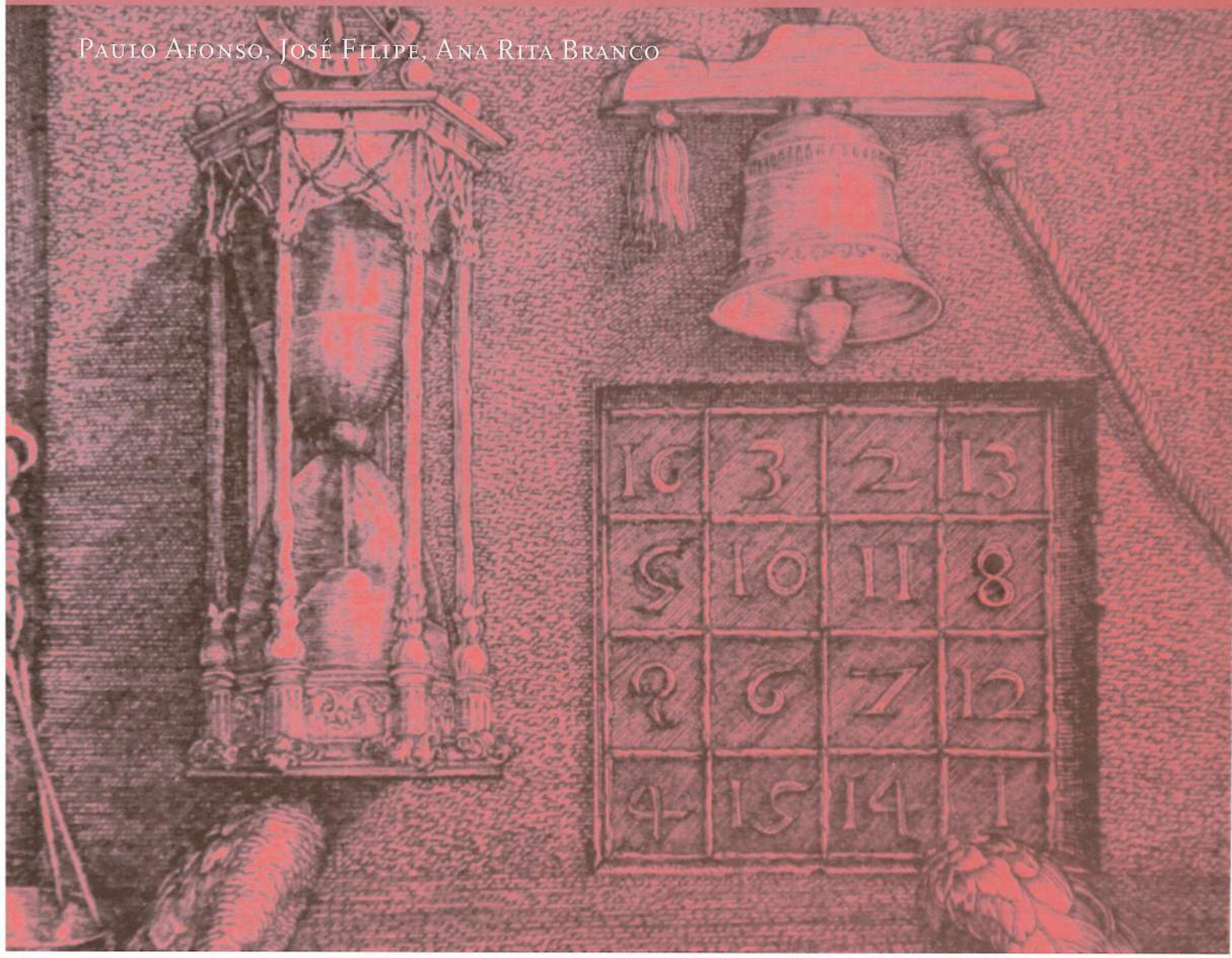
O *Espaço Matemático em Língua Portuguesa* (EMLP), criado sob a égide do ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), pretende criar uma rede de professores e investigadores nas áreas da Matemática e da Educação Matemática tendo em comum a expressão em Língua Portuguesa. As suas linhas de atuação, pela convergência com os princípios do MPT, sugerem estratégias de atuação em articulação com este projeto. A APM já manifestou o apoio a este organismo. Embora a iniciar os primeiros passos, o 1.º encontro está já agendado para Outubro de 2015, em Coimbra. A informação a respeito do EMLP pode ser consultada na página do Facebook (https://www.facebook.com/pages/Espa%C3%A7o-Matem%C3%A1tico-em-L%C3%ADngua-Portuguesa/1505326219686241?fref=ts).

Ainda numa versão embrionária os Jogos Matemáticos da Lusofonia são outra aposta que está a ser trabalhada pelo projeto MPT. A este propósito, no dia 4 de Outubro, durante as *III Jornadas de História de Jogos de Tabuleiro*, foi lançado um concurso MPT que visa recolher elementos culturais de natureza lúdica em países de língua oficial portuguesa. Quaisquer que sejam as suas coordenadas no Planeta Terra, estará com certeza impregnado de Matemática por fazer, discutir e divulgar.

Joana Latas
Representante do MPT em São Tomé e Príncipe
Departamento de Educação da HBD,
São Tomé e Príncipe

Quadrados mágicos envolvendo números figurados

Paulo Afonso, José Filipe, Ana Rita Branco



Introdução

Proporcionar aos alunos tarefas de aprendizagem que evidenciem o lado apaixonante da Matemática e que a ajudem a identificar como ciência suscetível de provocar nos estudantes a vontade de se assumirem como «pequenos» investigadores matemáticos, é algo que qualquer professor deseja conseguir.

Sentir nos alunos o prazer da descoberta e o sentimento de vitória, faz com que qualquer professor fique orgulhoso do seu desempenho profissional. Desenvolver nos alunos o sentido investigativo, intuitivo e indagador, é um dos principais papéis que se exige ao professor de Matemática destes tempos modernos. Por isso, a conceção de boas tarefas de aprendizagem é algo que deve merecer a máxima atenção nos momentos que os docentes têm para a planificação da sua atividade de ensino. Tanto quanto possível, essas tarefas deveriam deixar transparecer a vertente conectiva da Matemática, em que os conteúdos se interligam entre si.

2	36	3
9	6	4
12	1	18

3	144	4
16	12	9
36	1	48

4	400	5
25	20	16
80	1	100

Figura 1

5		6
36		25
	1	

Figura 2

5	900	6
36	30	25
	1	

Figura 3

A Tarefa

A título de exemplo, uma dessas possíveis tarefas passa por se desafiar os alunos a tentarem identificar algo de comum em três conjuntos numéricos, no sentido de conseguirem arranjar fundamento para serem, eles próprios, a propor o próximo conjunto numérico que dê continuidade aos anteriores (figura 1).

Possível exploração ao nível o 1.° ciclo, com base em padrões e regularidades

Sem qualquer tipo de ajuda, seria muito interessante ouvir as sugestões dos alunos do 1.° ciclo do ensino básico, designadamente as suas justificações ou argumentações. Com isso estar-se-ia a promover, certamente, a comunicação matemática dos intervenientes.

Nas abordagens que eventualmente surjam, é bem provável que, face à análise dos três conjuntos numéricos apresentados, se proponha o valor 1 para colocar na quadrícula central da linha inferior.

Por sua vez, analisando-se os valores das quadrículas extremas da linha de topo dos três quadrados, poder-se-á constatar a seguinte regularidade (2, 3 — quadrado da esquerda), (3, 4 — quadrado do meio) e (4, 5 — quadrado da direita). Logo, é possível que sejam propostos para o novo quadrado os valores 5 e 6.

Se a atenção recair na linha central e nos respetivos valores extremos, é bem provável que os alunos identifiquem a presença de números quadrados. Assim, na do quadrado da esquerda tem-se 4 (2^2 ou 2×2) e 9 (3^2 ou 3×3). Já no quadrado do meio existem os seguintes números quadrados; 9 (3^2 ou 3×3) e 16 (4^2 ou 4×4). Por sua vez, no quadrado da direita existem os valores 16 (4^2 ou 4×4) e 25 (5^2 ou 5×5). Logo, se esta regularidade for identificada, é bem provável que para o novo quadrado se proponham os seguintes números quadrados: 25 (5^2 ou 5×5) e 36 (6^2 ou 6×6).

Assim sendo, eis como já estaria o novo quadrado (ver figura 2).

Tentemos, agora, conjeturar acerca de qual será o valor central deste novo quadrado. Para tal, voltemos a analisar os três quadrados que estão a servir de base investigativa. Note-se que, para cada um, o valor central coincide com o produto dos valores colocados nos extremos da respetiva linha de topo:

a) $6 = 2 \times 3$ b) $12 = 3 \times 4$ c) $20 = 4 \times 5$

Constata-se, então, que cada número central é um número oblongo, pois resulta do produto de dois números inteiros consecutivos. Assim sendo, é desejável que se avance para o valor central do novo quadrado o produto de 5 por 6, isto é, o valor 30.

De seguida, o número a investigar deverá ser o que se deve colocar na quadrícula central da linha do topo. Ora, atendendo aos três quadrados iniciais, esse valor coincide sempre com o quadrado do valor central:

a) $36 = 6^2$ ou 6×6 b) $144 = 12^2$ ou 12×12
c) $400 = 20^2$ ou 20×20

Assim sendo, será espectável que o valor dessa posição, seja o quadrado do respetivo valor central (30), ou seja, 900. Logo, a figura **3** estará quase terminada.

Restam, pois, dois números para que o novo quadrado fique completo. Centremo-nos na quadrícula respeitante ao canto inferior esquerdo dos três quadrados dados. Certamente que será fácil observar-se que, em cada, o valor presente nessa posição relaciona-se sempre com o respetivo valor central. No primeiro caso é o dobro, no quadrado do meio é o triplo e no quadrado da direita é o quádruplo. De facto:

a) $\mathbf{12} = 2 \times 6$ b) $\mathbf{36} = 3 \times 12$ c) $\mathbf{80} = 4 \times 20$

Logo, é expectável que se proponha o quíntuplo do valor central para o caso do novo quadrado. Assim, $5 \times 30 = 150$.

Resta, pois o valor do canto inferior direito. Ora, fazendo uma análise semelhante à que se acabou de fazer, constata-se que no caso do quadrado da esquerda o valor des-

5	900	6
36	30	25
150	1	180

Figura 4

sa posição é o triplo do valor central ($18 = 3 \times 6$). Por sua vez, no caso do quadrado do meio, o valor dessa posição é o quádruplo do valor central ($48 = 4 \times 12$). Por último, o valor dessa posição no quadrado da direita é o quíntuplo do valor central ($100 = 5 \times 20$). Logo, no caso do novo quadrado, será de prever que se proponha o sêxtuplo do valor central, isto é o valor 180, pois $180 = 6 \times 30$.

Outra abordagem possível para se descobrirem estes números extremos da linha inferior passaria por se constatar nos três quadrados iniciais que: (a) relativamente a cada valor do canto inferior esquerdo, este obtém-se multiplicando o valor do canto superior esquerdo pelo valor central; (b) cada valor do canto inferior direito resulta do produto do valor do canto superior direito pelo valor central.

Eis como fica a resposta ao desafio inicialmente colocado (figura 4).

Possível exploração ao nível do 2.° ciclo, com base na potenciação e na divisibilidade do número

Ao nível do 2.° ciclo do ensino básico é bem possível que os alunos avancem com outros tipos de abordagem ao desafio colocado.

Será expectável que alguém constate que na figura da esquerda existe esta curiosidade matemática: $(2 \times 3) \times 36 = (1 \times 6) \times 36 = 216$. Ora, isso poderá levar os alunos a intuir se os outros produtos também serão este valor. Vejamos:

$9 \times 6 \times 4 = 216$
$12 \times 1 \times 18 = 216$
$2 \times 9 \times 12 = 216$
$3 \times 4 \times 18 = 216$
$2 \times 6 \times 18 = 216$
$3 \times 6 \times 12 = 216.$

Confirmar-se-ia, pois, que esta figura é um quadrado mágico de produto 216. Por sua vez, o quadrado do meio também apresenta a seguinte curiosidade numérica: $(3 \times 4) \times 144 = (1 \times 12) \times 144 = 1728$. Uma vez mais, esta constatação poderá levar os alunos a estimar sempre o produto 1728 para as restantes multiplicações do quadrado. Vejamos:

$16 \times 12 \times 9 = 1728$
$36 \times 1 \times 48 = 1728$
$3 \times 16 \times 36 = 1728$
$4 \times 9 \times 48 = 1728$
$3 \times 12 \times 48 = 1728$
$4 \times 12 \times 36 = 1728$

Confirmar-se-ia, pois, que se trata de um novo quadrado mágico, mas de produto 1728.

Por analogia com estes dois quadrados anteriores, também o quadrado da direita evidencia ser um quadrado mágico, com produto mágico 8000. Vejamos:

$4 \times 5 \times 400 = 8000$
$1 \times 20 \times 400 = 8000$
$25 \times 20 \times 16 = 8000$
$80 \times 1 \times 100 = 8000$
$4 \times 25 \times 80 = 8000$
$5 \times 16 \times 100 = 8000$
$4 \times 20 \times 100 = 8000$
$5 \times 20 \times 80 = 8000$

Confirma-se a conjetura de que este quadrado da direita também é um quadrado de produto mágico, que designaremos por quadrado mágico multiplicativo.

Os produtos mágicos obtidos são, pois, o 216, o 1728 e o 8000. Ora estes três valores terão certamente uma relação entre si. E, de facto, têm, pois a coluna central de cada quadrado permite que se conclua que se tratam de números cúbicos. Vejamos:

$1 \times 6 \times 36 = 6^0 \times 6^1 \times 6^2 = 6^3$
$1 \times 12 \times 24 = 12^0 \times 12^1 \times 12^2 = 12^3$
$1 \times 20 \times 400 = 20^0 \times 20^1 \times 20^2 = 20^3$

Ora, esta constatação leva a que seja fácil propor-se o próximo número cúbico para se associar ao quadrado em branco. Para tal, basta analisarem-se os valores das bases de cada potência assinalada nos três quadrados dados e ver que vão crescendo segundo um padrão ou regularidade: $6 + 6 = 12$ e $12 + 8 = 20$. Logo, a seguir seria $20 + 10 = 30$. Isto faria com que o produto mágico do quadrado em branco fosse o cubo desse valor, isto é: 30^3, ou seja, 27000.

Restaria, agora, descobrir os valores das quadrículas dos quadrados conhecendo-se apenas o valor central (30), o valor acima dele (900) e o valor abaixo dele (1), isto é, para já estariam descobertos os três valores da coluna central.

5	900	6
36	30	25
150	1	180

Figura 5

Para se avançar com esta proposta de resolução, seria interessante perceber-se que os seis valores que faltam descobrir são, todos eles, divisores do valor 27000.

Assim, será útil decompor-se o 27000 em fatores primos, para que a partir daí se identifiquem todos os divisores daquele número. Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 27000 & 2 \\ 13500 & 2 \\ 6750 & 2 \\ 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, $27000 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3$. Logo, tendo em conta cada expoente de cada potência, o conjunto dos divisores deste número é formado por 64 elementos, pois $(3 + 1) \times (3 + 1) \times (3 + 1) = 4 \times 4 \times 4 = 64$. Destes, serão utilizados os seguintes divisores para completar a figura do desafio: 5, 6, 25, 36, 160 e 180. Logo, a figura 5 fica concluída.

Note-se que na linha de topo era necessário usar os divisores 5 e 6 para que o seu produto se equivalesse ao valor 30 que existe na coluna central. Logo, em ambos os casos estar-se-ia na presença do valor 27000, pois $5 \times 6 \times 900 = 1 \times 30 \times 900 = 27000$.

Por sua vez, na linha central necessitar-se-iam dos divisores 25 e 36, pois o seu produto é 900, que a multiplicar por 30 também originaria o valor 27000.

Já na linha de baixo, os divisores necessários seriam o 150 e o 180, pois o seu produto é 27000, que a multiplicar pelo 1, mantém esse valor.

Reflexão

Esta tarefa evidencia, pois, possuir múltiplas potencialidades para incutir nos resolvedores o gosto pela matemática.

Como síntese final, seria interessante que os alunos pudessem concluir que também existe uma regularidade nos produtos mágicos em termos da potenciação utilizada, pois, como se observou atrás, trata-se sempre de números cúbicos:

$$216 = 2^3 \times 3^3 = 6^3$$
$$1278 = 3^3 \times 4^3 = 12^3$$
$$8000 = 4^3 \times 5^3 = 20^3$$

Por isso, confirma-se que o próximo produto mágico deveria resultar de $5^3 \times 6^3$, isto é 30^3, ou seja, o valor 27000.

Extensão

Qual a veracidade das seguintes conjeturas?

A — Um quadrado mágico multiplicativo com a configuração (ordem 3) dos que foram abordados, tem sempre como número central um número oblongo.

B — Com qualquer número cúbico é possível formar um quadrado mágico multiplicativo de ordem 3.

Paulo Afonso
Instituto Politécnico de Castelo Branco
Escola Superior de Educação

José Filipe
Agrupamento de Escolas Amato Lusitano

Ana Rita Branco
Centro Social Padres Redentoristas

Um olhar sobre o encontro de Origami

Cátia Rodrigues Sousa

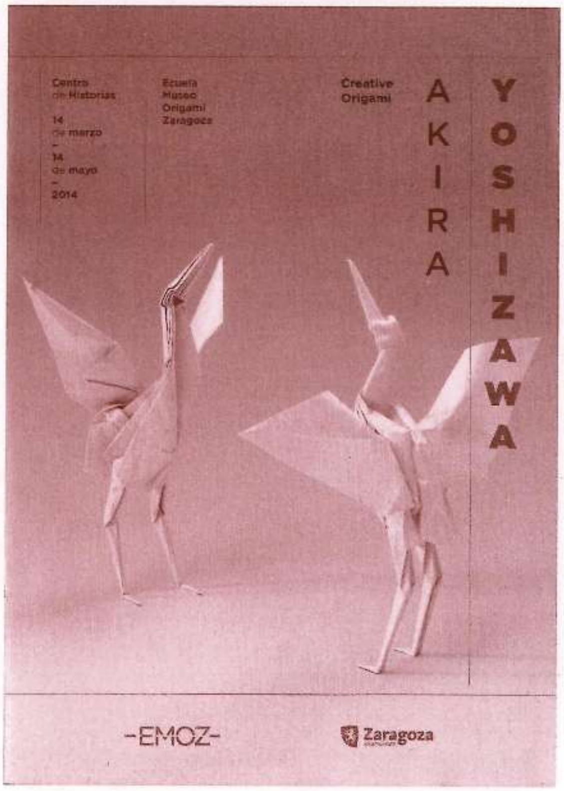
Introdução

Quando a minha colega de profissão e amiga Graça me propôs passarmos, este ano, umas férias que aliassem formação profissional com a descoberta e o conhecimento de novos mundos, comecei por achar uma ótima ideia, mas o entusiasmo diminuiu quando me falou no local, tão longínquo e ao mesmo tempo dispendioso: Japão.

No entanto, não esmorecemos ao considerarmos que após um ano letivo tão intenso, podíamos ficar com a carteira mais vazia, mas a «cabeça» mais «arejada» e com novas ideias para enfrentar os desafios do novo ano letivo. Ainda bem que nos aventurámos.

Sexto encontro internacional «Origami em Ciência, Matemática e Educação»

Ao chegar ao sexto encontro internacional de origami, realizado em Tokyo, Japão, em agosto de 2014, tudo era uma surpresa, o local, a organização, a simpatia, a amabilidade, o material de oferta (papel específico para origami, cartolinas e uma pen com os artigos a serem apresentados ao longo dos três dias de duração do encontro), a diversidade de nacionalidades, cerca de 137 oradores e mais de 200 participantes, além de excelentes exposições paralelas de trabalhos em origami, permitindo-nos contactar com alguns dos autores em pessoa.



A língua oficial do encontro foi o inglês e ao assistir à sessão de abertura do encontro verificámos que éramos as únicas portuguesas a participar. Ao longo dos dias descobrimos uma oradora brasileira e dois oradores espanhóis, mas a grande maioria eram japoneses, americanos e ingleses. Ainda surgiram alguns italianos com alguma representatividade, mas que era expectável uma vez que este encontro já se realizou em Itália.

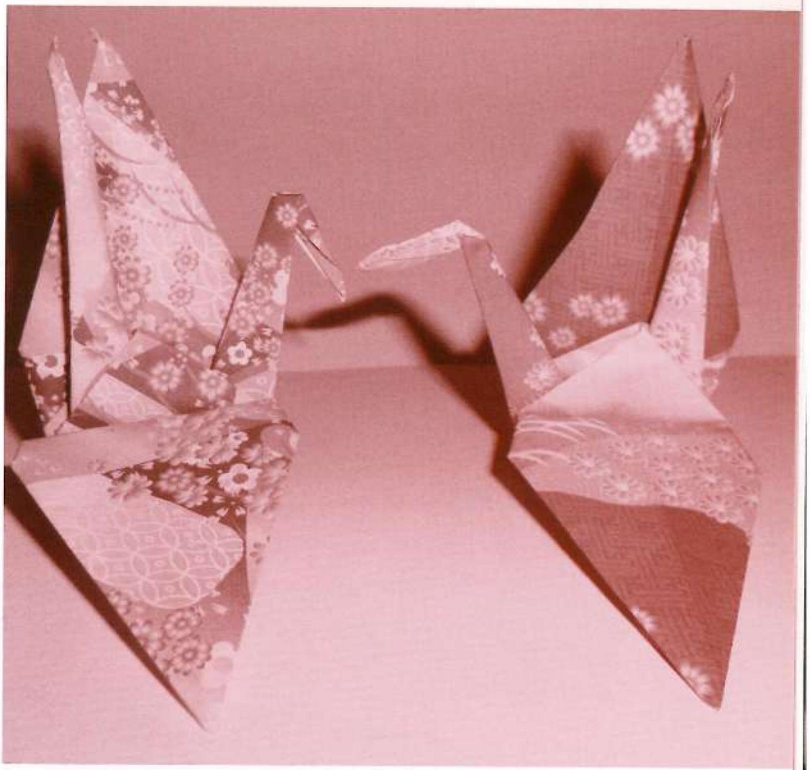
As palestras tinham por base a apresentação de estudos e experiências realizadas no terreno, quer na área da Educação, quer na Ciência e Matemática. Nas sessões que participámos, especificamente na área de educação, tivemos oportunidade de fazer dobragens em papel de forma a percebermos melhor alguns dos exemplos utilizados com alunos para apreender determinados conceitos. A partilha de experiências foi uma mais valia em todo o encontro.

Muitos foram os oradores internacionais que divulgaram estudos com alunos desde o pré-escolar até ao ensino básico e secundário demonstrando o contributo e os benefícios que o origami tem no desempenho dos alunos na área da matemática, na medida em que com simples dobragens no papel, os alunos conseguem desenvolver a capacidade de visualização, noções geométricas, noções básicas de medida, facilitando ainda o desenvolvimento da memória, concentração/atenção, pensamento, sequenciação, coordenação motora fina, destreza manual e representação mental e espacial.

Patsy Wang-Iverson e Nick Timpone, dos USA, afirmaram que com a criação do jardim de infância, em 1838, Friedrich Froebel, usou o origami nos primeiros anos para explorar informalmente conceitos matemáticos, no entanto as suas intenções e métodos foram abandonados com a expansão e crescimento dos jardins de infância por todo o mundo, acabando-se por desprezar completamente o origami como estratégia de ensino da matemática nos primeiros anos.

Estes autores apresentaram um estudo comparativo feito com dois grupos de alunos (grupo experimental e grupo de controlo), um deles onde foi feito um trabalho sequencial com origami e outro que não tinha sido sujeito a qualquer experiência. Neste estudo os alunos eram sujeitos a questões de alguns dos ítens do TIMSS 2011 (Tendências Internacionais no Estudo da Matemática e das Ciências; timss.org). Os autores pretenderam responder à seguinte questão de partida: «Might students introduced to origami in the early grades perform at a higher level?» (Wang-Iverson, P. e Timpone, N. (2014), pp.18). Do estudo realizado verificaram que os alunos que nas suas aulas de matemática utilizaram a dobragem de papel conseguem melhores resultados, melhor desempenho e compreensão e aumentaram o seu interesse e gosto pela matemática.

Huang Yanping e Lee Peng-Yee, da China, indo ao encontro dos autores anteriores também falaram do uso das dobragens para resolver problemas em geometria, apresentando alguns exemplos práticos para explicitar alguns conceitos e propriedades das linhas paralelas, triângulos, quadriláteros e círculos. Os materiais apresentados são desenvolvidos para a formação de professores, mas muito mais materiais podem ser encontrados no livro escrito pelos autores denominado «Paper Folding and Mathematics». Foi publicado, em 2012, por Science Press, em Pequim e contém materiais úteis para professores na sua prática quotidiana.



Linda Marlina, formadora de professores na Indonésia partilhou experiências com origami como meio de desenvolvimento de capacidades no ensino da educação infantil e que além de ser um material barato e de fácil aquisição, permite a realização de atividades atrativas para as crianças ajudando-as no desenvolvimento de habilidades motoras, desenvolvimento do cérebro da criança e na introdução da matemática, especialmente na área da geometria. No entanto o uso do origami na educação ainda não é uma estratégia adotada pelo Currículo da Educação na Indonésia. A oradora tem persistido no uso do origami na educação e para isso tem vindo , desde 2006, a realizar mais de 50 reuniões, de forma a explicitar a importância do origami na educação infantil. Também colaborou com a Associação de Professores da Indonésia realizando workshop e neste momento já existem algumas escolas de educação infantil a usar o origami como currículo local.

Muito mais testemunhos existiram confirmando as ideias já referidas anteriormente de que o origami é uma estratégia de ensino bastante importante. Alguns oradores também se referiram ao facto do uso do origami permitir aos alunos o desenvolvimento de uma linguagem precisa e específica, permitindo-lhes um potencial elevado para a redação técnica. Assim, com o uso frequente do origami, os alunos conseguem ler diagramas e escrever ou explicar instruções com um nível de desempenho mais elevado.

Ao terminar o encontro descobrimos que nos dias seguintes se iria realizar um workshop, mas com muita «pena» nossa não poderíamos participar por termos data de regresso marcada. Esta foi uma das oportunidades que perdemos, mas que não nos foi comunicada antecipadamente e por isso não conseguimos conciliar com a estadia em Tokyo.

Conclusão

O origami é uma técnica oriunda da China, mas foi no Japão que o origami se tornou conhecido, sendo neste momento considerado património cultural japonês. Não há loja japonesa onde o «tsuru» não seja o anfitrião, uma garça, característica do Japão e que significa boa sorte, felicidade e saúde e não há habitante que não consiga mentalmente reproduzir figuras em origami, isto porque a oferta de workshop em origami é diversificada e uma constante.

Por todas as vantagens e benefícios anteriormente justificados em estudos feitos internacionalmente considero que esta técnica deveria ser contemplada no currículo nacional de matemática para o ensino básico.

No final do encontro, na sessão solene de encerramento, foi solicitado aos participantes que enviassem via email sugestões para o local a organizar o próximo encontro em origami, porque não...Portugal?

Referências Bibliográficas

Marlina, L. (2014). Origami as Teaching Media for Early Childhood Education in Indonesia (Traning for Teachers). (pp. 27). in *Program and Abstratcts of the 6th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education.* Tokyo: University of Tokyo.

Wang-Iverson, P. e Timpone, N. (2014). Examining TIMSS Itens Through the Lens of Origami. (pp. 18). in *Program and Abstratcts of the 6th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education.* Tokyo: University of Tokyo.

Yanping, H. e Peng-Yee, L. (2014). Using Paper Folding to Solve Problems in School Geometry. (pp. 20). in *Program and Abstratcts of the 6th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education.* Tokyo: University of Tokyo.

Cátia Rodrigues Sousa
Agrupamento de Escolas Gualdim Pais, Pombal

Notas sobre as atuais orientações para a avaliação do desempenho dos alunos do ensino básico em Portugal

Leonor Santos

No dia 15 de setembro do presente ano saiu em Diário da República um novo despacho que regulamenta a avaliação do desempenho dos alunos do ensino básico, o Despacho normativo n.° 13/2014. Este novo normativo é muito semelhante ao seu correspondente publicado em 2012, apresentando apenas pequenas alterações de ajuste a outras que foram entretanto sendo introduzidas, como o caso, por exemplo da eliminação da área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado. A sua leitura levanta inúmeras perplexidades, que serão em seguida ilustradas.

a) *Regulamentar, a palavra de ordem*

É verdadeiramente impressionante o número de sucessivos normativos que regulamentam a avaliação pedagógica que têm saído nos últimos anos. O quadro 1 sumariza-os, considerando o período de vigência do atual Ministro da Educação.

O que significa esta produção em catadupa de regulamentação? Será falta de uma ideia clara e refletida sobre as políticas educativas? Será que a publicação de um normativo surge ao sabor de uma nova ideia que vai aparecendo? Será que se acredita que muita regulamentação resolve os problemas da educação?

b) *Incidência da avaliação pedagógica*

De um princípio que assumia que «a avaliação formativa é a principal modalidade de avaliação do ensino básico» (Despacho 162/ME/91, pt. 3.1; Despacho normativo n.° 98-A/92; Despacho normativo n.° 30/2001, pt. 16; Despacho normativo n.° 1/2005, pt. 19) deparamo-nos com a total ausência do termo «avaliação formativa». A avaliação formativa desaparece de todo o texto, à semelhança do que já se verificava no Despacho normativo n.° 24/2012, muito embora ainda se encontrasse a sua menção no Decreto-Lei

Quadro 1: Publicação de normativos, entre 2011 a 2014, que regulamentam a avaliação pedagógica dos alunos

Data	Normativo
03/08/2011	Decreto-Lei n.° 94/2011 introduz um ajustamento na organização curricular no ensino básico
05/07/2012	Decreto-Lei n.° 139/2012 estabelece os princípios orientadores da organização, da gestão e do desenvolvimento dos currículos dos ensinos básico e secundário, bem como da avaliação e certificação dos conhecimentos adquiridos e capacidades desenvolvidas pelos alunos, aplicáveis às diversas ofertas curriculares do ensino básico e do ensino secundário
06/12/2012	Despacho normativo n.° 24/2012 de forma a materializar a execução dos princípios do decreto-lei anterior, definindo as regras de avaliação dos alunos do ensino básico
10/07/2013	Decreto-Lei n.° 91/2013 introduz alterações ao Decreto-Lei n.° 139/2012
04/11/2013	Decreto-Lei n.° 152/2013 aprova o Estatuto do Ensino Particular e Cooperativo de nível não superior, ajustamento de procedimentos de avaliação
15/09/2014	Despacho normativo n.° 13/2014 que materializa a execução dos princípios enunciados no Decreto-Lei n.° 139/2012 alterado pelo Decreto-Lei n.° 91/2013, definindo as regras de avaliação dos alunos do ensino básico

n.° 139/2012: «A avaliação formativa determina a adoção de medidas pedagógicas adequadas às características dos alunos e à aprendizagem a desenvolver» (Artg. 28.°, pt. 2). O Decreto-Lei n.° 94/2011 que introduz um ajustamento na organização curricular no ensino básico ainda prevê diferentes modalidades de avaliação, embora retire a consideração de que a avaliação formativa seja a principal modalidade de avaliação. Assim, podemos afirmar que em 2011 há um ténue passo de desvalorização da avaliação formativa, em 2012, uma tentativa não totalmente assumida de a ignorar, para finalmente, em 2014, esta questão ficar totalmente resolvida, eliminando de vez esta vertente essencial da avaliação pedagógica.

Após mais de 20 anos, a avaliação formativa deixa de ser referida nos normativos da avaliação pedagógica em Portugal! O que significa tal retrocesso? Que implicações para as práticas avaliativas que ocorrem no terreno?

c) *O que é aprender*

A legislação é bem clara sobre o que incide a avaliação pedagógica: «a avaliação dos alunos incide sobre os conteúdos definidos nos programas e obedece às metas curriculares em vigor nos 1.°, 2.° e 3.° ciclos» (Artg. 5.°, pt. 1). Portanto ter aprendido é sinónimo de aquisição de conteúdos! Fala-se ainda de componentes do currículo de carácter transversal ou de natureza instrumental, remetendo a sua avaliação para o Conselho Pedagógico de cada escola, logo enviando a mensagem de que são de segundo nível de importância. Emerge, assim, um retrocesso evidente sobre o entendimento de currículo, retomando a perspetiva, há muito abandonada, que o associava a uma listagem de conteúdos a ensinar e a aprender, significado vigente no início do séc. XIX e início do séc. XX.

Como se compatibiliza esta assunção com o que hoje se entende por saber? Em particular, por se ser competente matematicamente? Onde ficam as capacidades transversais? Qual a sua importância? Qual o seu lugar na avaliação pedagógica?

d) *Como se aprende*

De forma coerente podemos verificar que as medidas de promoção do sucesso escolar (note-se que não se afirma que é de promoção das aprendizagens) listadas no normativo, e como tal com força de lei, apontam todas para fora da sala de aula, à exceção da alínea d) que refere a possibilidade da presença de dois professores na sala de aula. Contudo, tendo em conta a atual situação de extrema contenção financeira, esta medida soa mais a retórica do que a uma verdadeira possibilidade. Acresce o facto de, ignorando tudo o que é apontado pelos resultados da investigação, se propor a constituição de grupos de homogeneidade relativa, dedicando-lhe mesmo um ponto específico! Justifica-se esta medida argumentando que favorece «a igualdade de oportunidades no percurso escolar do aluno» (Art. 22.°, pt. 1). Nada mais falso! Esconde-se, ou por ignorância ou por má-fé, a importância decisiva para as aprendizagens das expetativas dos professores face ao que os seus alunos são capazes de aprender. Os melhores alunos tornam-se ainda melhores, todos os outros não evoluem, havendo mesmo casos de retrocesso.

Será uma solução pedagogicamente adequada exigir mais tempo de estadia na escola aos alunos que apresentam mais dificuldades, que em geral são também aqueles que menos adaptados estão à escola? É por exaustão que se aprende? Que se aprende o quê? É dar mais do mesmo?

e) *Medir a temperatura cura a doença*

Ao ler-se o despacho em análise, fica a ideia, por um lado, de que a aprendizagem é sinónima de obtenção de resultados positivos em provas de avaliação sumativa (interna ou externa). Por outro lado, que é fazendo muitas provas que se aprende. Só assim se compreende todo o dispositivo associado às provas de equivalência à frequência, que admite mesmo alunos autopropostos nos 1.° e 2.° ciclos. Parece haver uma clara desvalorização da escola. Não importa se o aluno a frequenta ou não, não importa o contributo da escola na formação global do indivíduo, o que importa é ter resultado positivo nas provas de avaliação sumativa. Este entendimento é coerente com a perspetiva do que é saber, isto é ter adquirido os conteúdos programáticos, explicitados/referidos nas metas curriculares. É igualmente consonante com o reduzir o tempo do ano escolar para nele se incluírem provas de avaliação externa. Não importa reduzir o tempo de aprendizagem, o que é necessário é medir, medir e medir!

Importa então perguntar: Para que serve a escola? Qual o seu papel? O que pretendemos para cidadãos no Portugal do futuro?

Do exposto fica claro que a evolução que temos assistido nos últimos anos às orientações para a avaliação do desempenho dos alunos, em particular do ensino básico, é muito preocupante. Temos de reconhecer que nem todas as orientações anteriores, embora presentes nos normativos, tiveram a sua expressão de forma generalizada no terreno. Por exemplo, embora a avaliação formativa fosse considerada essencial nas práticas avaliativas dos professores, tal não se verificava ainda de forma expressiva. Também a autoavaliação anual do aluno prevista no seu processo individual poderá não ter sido usada para dar maior atenção ao desenvolvimento desta capacidade. Ou ainda ser uma oportunidade pouco aproveitada a possibilidade prevista dos alunos no primeiro período dos anos iniciais dos 2.° e 3.° ciclos não terem de ser sujeitos a uma classificação, mas antes a avaliação sumativa ter uma natureza descritiva. Perante este facto, dois caminhos seriam possíveis: ou procurar criar condições favoráveis à operacionalização no terreno das medidas ainda não inteiramente seguidas, ou reconhecendo a sua dificuldade de operacionalização simplesmente eliminá-las. Pois o que temos vindo a assistir nestes últimos anos é uma orientação que opta pelo segundo cenário e vai mesmo muito para além dele. Estamos a assistir a uma viragem paradigmática do entendimento do que é a escola e do que são as suas funções. Valoriza-se o sucesso escolar em detrimento das aprendizagens, valoriza-se a avaliação sumativa em detrimento da avaliação formativa, valoriza-se o papel do Estado enquanto regulador do currículo em detrimento do profissionalismo dos professores, valoriza-se a seleção em detrimento da igualdade de oportunidades. É isto que queremos para as nossas crianças e adolescentes? É isto que queremos para um país que se quer evoluído?

LEONOR SANTOS
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

APM – 2014

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2014

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento (@-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	60,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	60,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	80,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	75,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	100,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2014

		Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Instituições	Portugal	47,00 €	28,00 €
	Estrangeiro		32,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções