

Educação Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2014
128

■ Maio ∞ Junho

Preço 5,75€



EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Alice Carvalho
	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	Manuela Pires
	Paulo Alvega
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2014

Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes

Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Junho 2014

Tiragem 1700 exemplares

Periodicidade

Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão

ASPRINT, Apolinário Silva, Unipessoal Lda
Núcleo Empresarial de Mafra
Av. Dr. Francisco Sá Carneiro, Bloco C – 12 cave
2644-006 Mafra

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre a capa

Squares of 1,2,3,4 and Square Roots to 8
Johnson Crockett (1970-1975)

A pintura que constitui a capa deste número consiste em quadrados de áreas 1, 2, 3 e 4 e sete segmentos de recta cujos comprimentos são as raízes quadradas de 2, 3, 4, 5, 6, 7, e 8. A construção é toda baseada em utilizações sucessivas do Teorema de Pitágoras.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

António José Almeida, Eduarda Moura, Fernanda Menina, Graciosa Veloso, Helena Rocha, Jaime Carvalho e Silva, João Pedro Ponte, José Manuel Matos, José Matias Alves, Laura Bandarra Pinto, Manuel Vara Pires, Marisa Quaresma, Neusa Branco, Sandra Guerreiro.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista.

Aprender a «ser professor». Por uma formação inicial sustentada e de qualidade, sempre!

«Na minha vida nem sempre a bússola se atrai ao mesmo norte. (...) Não sei caminhos de cor.», Fernando Namora, *Mar de Sargaços*, 1940.

A figura do professor reveste-se de uma enorme complexidade. Ser professor é um processo que se desenvolve no tempo. Começando ainda antes da formação formal e prolongando-se ao longo da vida profissional, atravessa diferentes contextos, vive diversos dilemas e desenvolve conhecimento em vários domínios. O professor vai enfrentando (e resolvendo) situações de características únicas e cada vez mais exigentes, necessitando de mobilizar saberes especializados em múltiplas dimensões. De facto, o professor *deve* saber como a Matemática se integra no currículo, *deve* sentir-se seguro nos temas matemáticos a tratar e na(s) maneira(s) de os ensinar, *deve* perceber os alunos com quem trabalha e a(s) forma(s) como aprendem, *deve* recorrer aos materiais didáticos mais adequados, *deve* refletir sobre as suas práticas, *deve* valorizar a colaboração com os outros professores, *deve* intervir na escola e na comunidade...

Sabendo que, neste caminho de «ser professor», todas as experiências de vida e de formação têm um significado muito próprio, a formação inicial é seguramente uma das etapas que assume especial relevância. Nas últimas décadas, foi-se tornando consensual que, para lecionar Matemática, se deva ser portador de uma habilitação profissional adquirida em curso superior adequado. Atualmente, esta habilitação é obtida através de um mestrado profissionalizante, antecedido de uma licenciatura de *banda larga* na(s) respetiva(s) área(s) disciplinar(es), optando-se, assim, por um modelo de natureza bietápica e sequencial em detrimento de uma orientação mais integrada da formação.

Num momento em que as entidades oficiais parecem pretender «mexer em tudo» como se não tivéssemos um passado nem houvesse um amanhã, as recentes alterações ao regime jurídico da habilitação profissional para a docência na educação pré-escolar e nos ensinos básico e secundário, enquadrado no D.L. n.º 79/2014, de 14 de maio, acabam por não ser verdadeiramente uma surpresa. Seguem a agenda habitual já vista, por exemplo, na alteração dos programas de matemática, expressa na inoportunidade da proposta e

dos prazos de discussão, nas fortes dúvidas sobre os estudos e as evidências que dizem sustentar tais alterações ou na inadequação de algumas soluções apresentadas em clara contradição com avaliações já produzidas. Mesmo assim surpreendem, ou talvez não, por terem sido aprovadas em pleno desenvolvimento de processos de avaliação externa realizados pela A3ES em muitos cursos de formação de professores. Não seria mais avisado esperar e atender aos resultados globais desta avaliação e depois alterar, de uma forma coerente e sustentada, os aspetos mais problemáticos?

Embora o novo normativo tenha aspetos positivos, como o (necessário) aumento de créditos para a formação de educadores de infância e de professores dos primeiros anos ou o reforço das didáticas específicas na generalidade dos ciclos de ensino, a verdade é que outras alterações levantam sérias dúvidas. Cito, como exemplos, a ausência dos perfis geral e específicos do desempenho profissional como referência fundamental, a pouca valorização da formação educacional geral, a (quase) inexistência da formação em metodologias de investigação educacional, o regime de fixação de vagas ou a introdução de provas de ingresso (nas áreas de Português e de Matemática) na Licenciatura em Educação Básica. Mas, apesar de tudo, o novo regime jurídico apresenta alguns recuos relativamente à proposta inicial. Ficaria, porventura, mais coerente e fundamentado se tivesse tido, na conta devida, os pareceres do Conselho Nacional de Educação ou os inúmeros comentários ou sugestões de alteração propostos, quer por instituições do ensino superior, quer por professores.

Muitas perplexidades e interrogações se mantêm. Por isso, tal como em tantas outras áreas, nestes quarenta anos de Abril, é importante continuar a pensar e a defender uma formação inicial sustentada e de qualidade... sempre!

MANUEL VARA PIRES

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA

EDITORIAL

Manuel Vara Pires

MAIO :: JUNHO

#128

1

A matemática nos programas do ensino não-superior (1835–1974)

António José Almeida
José Manuel Matos

Este livro oferece uma análise dos programas de matemática do ensino não-superior publicados em Portugal entre 1835 e 1974. No âmbito das finalidades da Associação de Professores de Matemática, e com o apoio da Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, pretende-se divulgar estes documentos à comunidade educativa e oferecer uma fonte de pesquisa aos investigadores interessados na história do ensino das disciplinas escolares.

O estudo dos programas ajuda-nos pois a compreender algumas dimensões que constituem a matemática escolar contemporânea:

- *a matemática escolar* — como se constituiu a matemática escolar como disciplina autónoma, com os seus profissionais específicos, as suas representações, as suas práticas;
- *os temas* — quando surgem, como evoluíram, qual a sua sequência e integração no todo do programa, quando desapareceram;
- *o tipo de conhecimento matemático desejável* — a intuição, a memorização, a ligação à vida, a abstração, a disciplina mental;
- *os métodos* — o laboratório de matemática, os exercícios, o ensino heurístico, a ligação ao real, os problemas, o trabalho de grupo; e
- *as tecnologias materiais* — o quadro, a lousa, o contador, a caixa métrica, o papel quadriculado, o material concreto, os modelos, os filmes, o retroprojektor, a régua de cálculo, o computador.

O conhecimento do passado permite-nos ir para além de visões simplistas e redutoras, que tanto o glorificam como «o tempo do antigamente é que era bom», como o desprezam como «ensino tradicional». Contrariando a glorificação das escolas do passado, sabemos que durante a maior parte do antigamente apenas uma pequena minoria tinha

A MATEMÁTICA NOS PROGRAMAS DO ENSINO NÃO-SUPERIOR 1835-1974

Coordenadores:
António José Almeida e José Manuel Matos



acesso à escola e que, mesmo para essa, o abandono e o insucesso eram muito elevados. Quanto aos métodos, muito provavelmente, tal como nos dias de hoje, a prática escolar recorria essencialmente ao ensino expositivo. Mas ao percorrer os programas não podemos deixar de notar que as aspirações dos legisladores, muitas vezes eles próprios professores profundamente empenhados numa prática de melhoria do ensino, são bem mais complexas, contrariando também a sua condenação como «ensino tradicional». Se em determinadas épocas (anos 1930 e 40) se pretendeu um abaixamento geral da qualidade da formação escolar, reduzindo programas e exaltando apenas a memorização e a repetição de procedimentos, noutras, em particular no ensino pós-primário, pretendeu-se levar aos que frequentavam as escolas uma matemática de qualidade integrando uma formação humana integral.

Que Educação Queremos?

JOSÉ MATIAS ALVES

A educação que queremos para este presente e próximo futuro tem muito a ver com a nossa concepção de sociedade, de ordem social, de ser humano, de vida desejada. Telegraficamente, escrevo: quero uma sociedade mais livre e mais justa, uma ordem social mais fraterna e respeitadora das diferenças, um ser humano promovido na sua dignidade, na sua identidade, nas suas múltiplas inteligências, uma vida liberta dos grilhões da opressão e da pobreza, da asfixia de uma política que faz da falsidade, da mentira e do faz de conta o seu bilhete de identidade.

Quero, pois, uma educação mais humana, mais liberta das *tentações caninas*, mais próxima das pessoas e dos contextos, mais exigente nos dispositivos de aprendizagem de todos.

Nesta visão enuncia alguns desafios para as escolas e para os professores.

DESAFIOS PARA AS ESCOLAS

1. *Desafio da autonomia.* Dada a complexidade crescente do ato educativo, só uma escola mais autónoma pode cumprir o mandato de educar todos os cidadãos que *são obrigados* a frequentar a escola. Porque só

uma escola com poder de decisão sobre como organizar os processos de ensino e aprendizagem, como afetar os recursos que dispõe, como gerir espaços e tempos pode gerar mais sucesso. Se queremos uma escola mais sucedida temos de ter mais liberdade de pensar, organizar e gerir os projetos pedagógicos e educativos. Tem, contudo, de ser uma autonomia desejada, valorizada pelos professores, instituída e não decretada. E para que seja desejada tem de deixar de ser um simulacro e um faz de conta. E tem de significar uma ação profissional mais detentora do seu destino, mais criadora e mais autoral. Estou plenamente convencido que há muitos professores que não enjeitam esta possibilidade. Diria até mais: estou convencido que muitos professores estão disponíveis para ver que só deste modo se sentirão profissionais. Só deste modo se sentirão gratificados e orgulhosos de ser professor.

2. *Desafio da inserção territorial.* Uma escola sozinha pode muito pouco. Uma escola a quem *tudo foi confiado* (numa clara desresponsabilização social), uma escola que sobrevive asfixiada num mandato excessivo de ter de fazer (e ser) tudo só pode ver degradada a sua imagem pública e arruinado o seu projeto educativo. Por isso, a escola tem de se organizar numa lógica de rede, de interação com todas as agências políticas, culturais, associativas, desportivas... que operam num determinado território. O território por excelência é, naturalmente, o município. A escola tem de ser parceiro ativo na construção de um projeto educativo municipal. E os órgãos autárquicos têm de assumir a responsabilidade de congregar visões, vontades e recursos. A autonomia da escola concretiza-se neste cenário de interdependência ativa e numa proximidade que só pode significar uma elevação das qualidades da educação.

3. *Desafio da construção de uma comunidade educativa.* A autonomia, a interdependência, a inserção territorial são os ingredientes chave da construção de uma *comunidade educativa*. Como sabemos, o Diário da República diz que a escola é uma comunidade educativa. Mas este enunciado não passa de uma ficção. Para que uma escola seja uma comunidade educativa tem de ser laboriosamente construída por todas as entidades que são membros da comunidade: os professores, os alunos, os funcionários, os pais, as autarquias, as empresas, as associações locais, as entidades públicas que operam no território. E só há um *fórum* onde esta intersecção é possível: um conselho municipal de educação e formação, evidentemente renovado nas suas competências e composição onde todos estes autores têm a legitimidade de decidirem sentidos e rumos para a educação.

4. *Desafio do reconhecimento social.* A escola só existe, só é procurada pelas famílias se for reconhecida como uma instituição credível, como uma organização que se mobiliza para realizar os melhores processos educativos e alcançar os melhores resultados possíveis. Uma escola que não é procurada pelas famílias, que não é reconhecida pelo valor da sua ação tende a fechar as suas portas. É, por isso, fundamental, abrir-se aos contextos, incrementar os processos de comunicação, escutar, interagir, dialogar. Dar conta dos seus sucessos e das suas dificuldades. Não recluir a honestidade e a transparência da verdade. Porque só assim gerará a confiança e o compromisso.

5. *Desafio da responsabilidade.* Uma escola mais livre e mais autónoma, territorialmente inserida, só pode ser uma instituição mais responsável que faz tudo o que está ao seu

alcance para providenciar uma melhor educação. Mas esta responsabilidade é obrigatoriamente partilhada em sede da comunidade educativa (e aqui reside uma das óbvias vantagens deste conceito de escola). Os professores, os alunos, os pais, as autarquias, as empresas têm uma quota parte de responsabilidade na conceção e realização dos projetos educativos. E a educação só melhorará na assunção clara desta responsabilidade partilhada.

6. *Desafio da (des)aprendizagem.* Uma escola é uma instituição especializada no ensino, leia-se, especializada no fazer aprender *todos* os alunos que acolhe. Para ensinar todos de modo diferenciado e eficaz tem de se dispor a aprender permanentemente. A aprender com os êxitos e inêxitos, com os problemas e os sucessos. Numa palavra, a escola tem de ser uma organização aprendente, tem de gerar oportunidades para que cada um dos seus membros se disponha a uma aprendizagem contínua. E para isto é imprescindível parar, refletir, interagir, colaborar, dialogar, procurar novas respostas para velhos e novos problemas.

7. *Desafio da diversidade e flexibilidade.* A escola confronta-se hoje com uma diversidade de públicos, com uma larga heterogeneidade de culturas, interesses, ideologias, vontades. Tragicamente, continua a organizar-se no pressuposto de que é possível *ensinar todos como se todos fossem um só*. A trama burocrática do centralismo, da uniformidade, do currículo único, do comando e do controlo central, da padronização, *da chapa cinco*; a instituição de uma ordem rígida e única e a crença (hoje absurda) numa racionalidade olímpica e no *the one best way* é o caminho seguro para o desastre. A criação de uma Direção Geral dos Estabelecimentos Escolares é o exemplo paradigmático da perpetuação de uma ordem medieval e vassálica. Só um outro paradigma, fundado na liberdade de organizar de outro modo os processos de escolarização, poderá responder com mais profissionalismo e eficácia aos desafios que hoje enfrentamos.

Mas é preciso enunciar outros desafios, nomeadamente dirigidos aos professores, autores centrais de uma renovação da educação.

DESAFIOS PARA OS PROFESSORES

1. *Desafio da vontade.* O primeiro dos desafios é perceber os fatores que têm levado os professores a quererem abandonar a profissão. Que têm feito da vida profissional uma tormenta. Que têm reforçado a *impossibilidade* de uma profissão. Temos de acender os detonadores que façam os pro-

fessores voltar a acreditar na imprescindibilidade de uma profissão. Que os façam ver a gratificante *alegria de ser professor*. Nesta senda escarpada, só vejo uma possibilidade: criar espaços e tempos para uma interação profissional mais reconfortante, mais securizante, mais gratificante. Porque há muito mais a unir-nos do que a separar-nos. Porque só nos temos a nós mesmo como aliados.

2. *Desafio do saber*. Os professores são os profissionais do conhecimento. Têm de estar permanentemente atualizados, têm de estar cientificamente informados dos conhecimentos que se vão produzindo. As associações profissionais e as universidades têm aqui um papel de grande relevância e têm, provavelmente, de fazer mais do que têm feito. Mas também cada professor, cada grupo, cada departamento. Fazendo dos tempos de reunião, tempo de partilha e de produção de conhecimento. E da própria ação profissional um procedimento de investigação sobre os problemas que se vão enfrentando. Este é o sentido maior de um ofício *intelectual* que não pode deixar de se questionar e de procurar as respostas. Não podemos aceitar cumprir o papel de ser a *voz do dono*, de ser o funcionário *cansado* que cumpre as instruções e as ordens superiores. Nós é que temos de saber como devemos ensinar, mesmo aqueles alunos que não querem aprender. Ou pelo menos, procurar a resposta.

3. *Desafio do poder e da autoridade*. Querer, saber e poder. Temos de afirmar *muito mais* o nosso poder que existe muito mais do que pensamos. Temos de nos ver como autoridade. Porque o conhecimento é a pedra angular da distinção. Porque ser autor é ser criador das respostas ajustadas para os problemas concretos e que só nós somos capazes de decidir. A nossa autoridade advém, em larga escala, desta possibilidade de afirmarmos um saber fazer concreto, situado, ajustado, eficaz. Que ninguém pode exercer em nosso nome.

4. *Desafio da autonomia individual e coletiva*. Como intelectual que é, o professor tem de ter a possibilidade de tomar decisões sobre o como ensinar, o como avaliar, o como diferenciar a sua ação pedagógica. Tem por isso de ter uma larga autonomia decisional. Mas, ao mesmo tempo, tem de colocar a sua autonomia ao serviço da autonomia do grupo profissional (em sede de departamento, de conselho de turma, de grupo disciplinar...). Porque há decisões que só podem ser tomadas nesta esfera específica. E a profissão tem muito a ganhar com o desenvolvimento de uma comunidade de profissionais.

5. *Desafio de uma cultura interativa e colaborativa*. Autonomia coletiva desenvolve-se numa lógica de interação e colaboração. As culturas profissionais alicerçam-se em práticas sistemáticas de interação e colaboração que elegem os exercícios profissionais como foco de interpelação. Precisamos *como do pão para a boca* de ver esta oportunidade de desenvolvimento. E ver só pode ser ensaiar, experimentar, avaliar, pensar, interagir, dentro e fora da sala de aula. Os líderes escolares têm neste campo a particular responsabilidade de criar estas oportunidades das pessoas verem e praticarem.

6. *Desafio de uma avaliação formadora*. Os professores foram treinados para serem juizes do conhecimento revelado pelos alunos. E a assumirem, sobretudo, o papel de classificadores e pré-autores dos certificados e das credenciais escolares. Mas seria importante que os professores se revissem, sobretudo, como geradores de oportunidades de aprendizagem. Porque o seu papel mais nobre é justamente fazer crescer o outro, fazer ver aos alunos o poder do conhecimento, vê-los evoluir em termos cognitivos, afetivos, relacionais, pessoais, sociais... E, sendo assim, a avaliação pedagógica poderia estar mais ao serviço deste desiderato, ao serviço desta ambição primeira.

7. *Desafio do reconhecimento*. Para que os professores possam ser a chave essencial do futuro de milhões de pessoas; para que a escola possa ser essa casa de humanidade; para que a educação do futuro se veja liberta das ameaças das múltiplas exclusões, o professor tem de ser política e socialmente reconhecido na sua imprescindibilidade. O que está longe de acontecer. Por efeito do *inverno demográfico*, os professores têm sido dispensados aos milhares, frequentemente minorizados e desautorizados, subliminarmente impelidos a requerer a aposentação antecipada porque já não aguentam a pressão. Os efeitos de uma política de penalização do ofício docente (mais alunos por turma, intensificação e aumento do trabalho...) vai fazer rebentar a corda do stress e transformar a profissão num difícil exílio.

Sete mais sete desafios que se colocam hoje à escola portuguesa. O mesmo é dizer aos cidadãos portugueses e ao futuro de Portugal. E, se não quisermos hipotecar definitivamente este futuro — muito para além da dívida — seria bom que todos nos determinássemos a exigir outro presente.

JOSÉ MATIAS ALVES

CENTRO DE ESTUDOS EM DESENVOLVIMENTO HUMANO
UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

Classificação de Quadriláteros a partir dos lados

A tarefa que apresento decorre da tarefa discutida nas duas notas anteriores, «De novo os quadriláteros (1)» e «Famílias, repetidos e intrusos», (E&M n.º 126 e n.º 127). Esta tarefa foi planeada para trabalhar a classificação ortodoxa de quadriláteros, assunto que considero um dos mais interessantes e de difícil aprendizagem na geometria elementar. Porventura um dos assuntos em que professores e alunos têm grandes dificuldades.

Uma das ideias fundamentais desta tarefa é que a sua natureza aberta e exploratória implica que o professor planeie muito bem a discussão das produções dos alunos. Por isso é indispensável que o professor pense previamente quais são os bons exemplos e contra-exemplos que vão ser úteis para a discussão. Só assim poderá selecionar com segurança, entre as produções dos alunos, os quadriláteros mais favoráveis para a discussão coletiva. Além disso, o professor deve ter exemplos preparados para fazer aparecer no momento adequado. Uma sugestão é criar uma folha de figuras de apoio à discussão que contenha exemplos de todos os tipos:

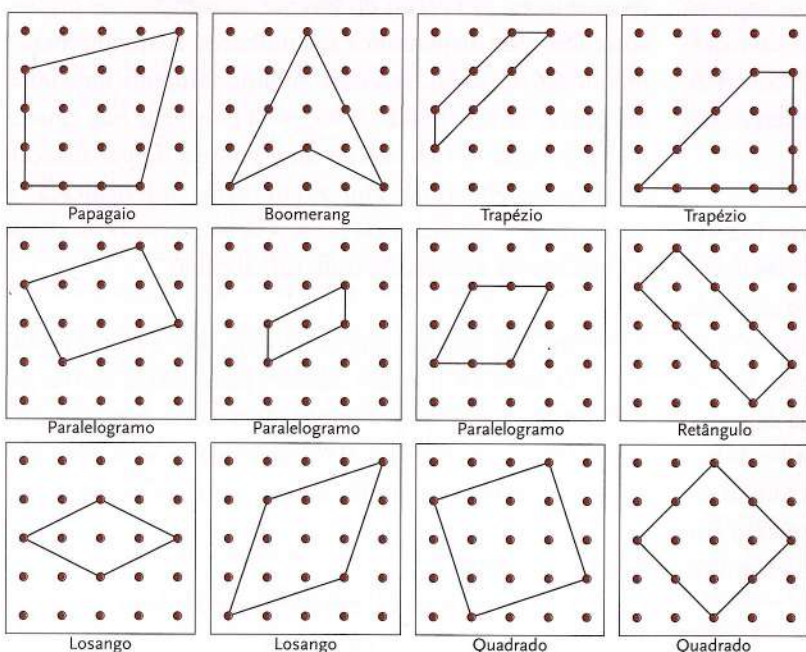
- Boomerangues e papagaios — dois pares de lados consecutivos iguais
- Trapézios — pelo menos um par de lados paralelos

- Paralelogramos — dois pares de lados paralelos
- Losangos — quatro lados iguais
- Retângulos — dois pares de lados paralelos e quatro ângulos retos
- Quadrados — quatro lados iguais e quatro ângulos retos

Há contra-exemplos interessantes de aparecer, que poderão ser muito úteis na discussão, e que não estão na folha de trabalho. São eles: um quadrilátero com dois lados opostos iguais e que não é trapézio; um quadrilátero apenas com três lados iguais.

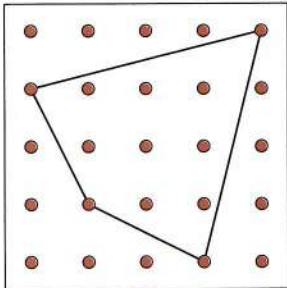
Proposta de trabalho

1. Em cada quadrilátero da folha de trabalho:
 - Assinala os lados iguais com uma pequena marca.
 - Pinta da mesma cor os pares de lados paralelos.
2. Organiza em famílias os quadriláteros. Para cada família que organizares acrescenta novos elementos construídos por ti.

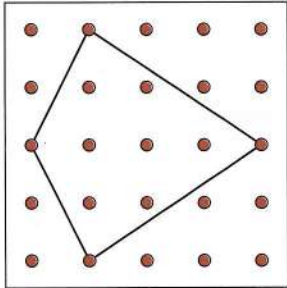


Exemplos para apoio à discussão

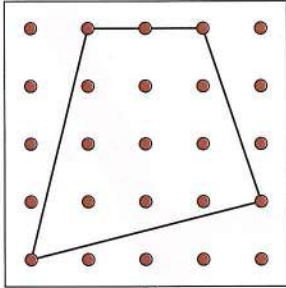
Folha de trabalho



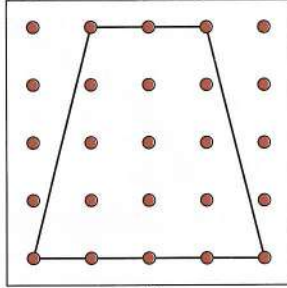
A



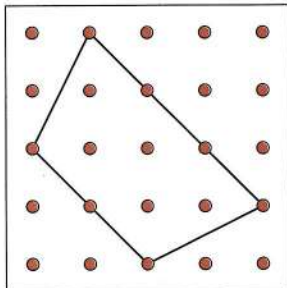
B



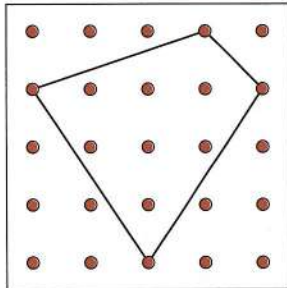
C



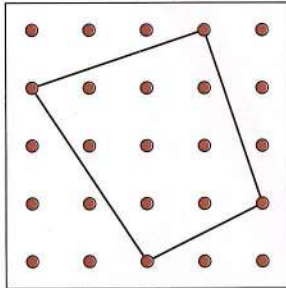
D



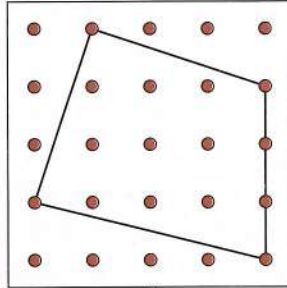
E



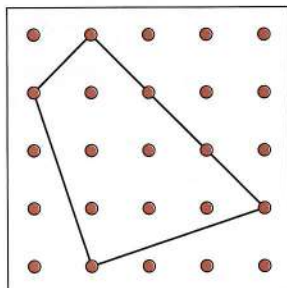
F



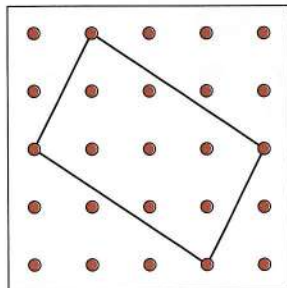
G



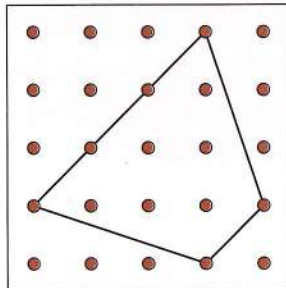
H



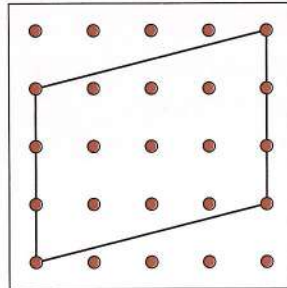
I



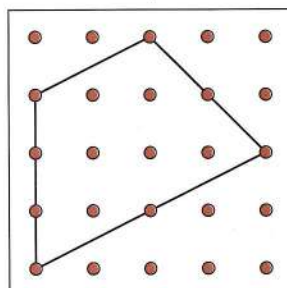
J



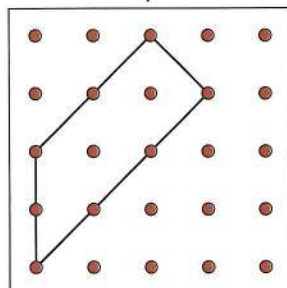
K



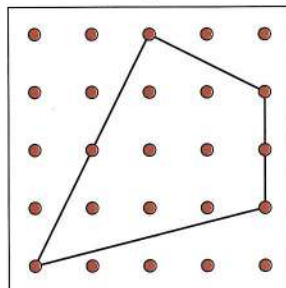
L



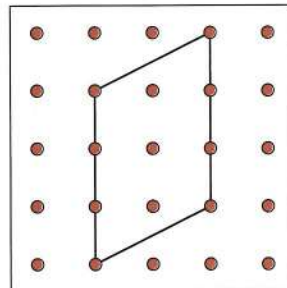
M



N



O



P

Número racional como quociente da divisão de inteiros

GRACIOSA VELOSO

Não basta conhecer os fenômenos; importa compreender os fenômenos, determinar as razões da sua produção, descortinar as ligações de uns com outros.

(Caraça, 2002, p. 62)

Os estudos desenvolvidos no âmbito da Educação, especificamente em Educação Matemática e a experiência profissional mostram que ao professor cabem complexas funções, especificamente a observação, a interpretação e a orientação dos alunos no processo de aprendizagem. Esta competência requer o desenvolvimento articulado do conhecimento didático, relativo a aspetos do processo de aprendizagem e do ensino específicos dos diversos tópicos, com a compreensão em profundidade da matemática que ensina. Em 2009, Ma apresenta e discute quatro componentes fundamentais — *ideias básicas, perspectivas múltiplas, conectividade e coerência longitudinal* (Ma, 2009, p. 211) — do conhecimento matemático que um professor deve dominar de modo a que compreenda e oriente os seus alunos: a compreensão das ideias matemáticas básicas, a conexão entre estas, seja relativamente a conceitos ou a procedimentos, as representações múltiplas para um mesmo conceito ou processo e a coerência longitudinal. É com a preocupação de contribuir

para a explicitação de conexões da divisão de números inteiros com o sentido de número racional que proponho este artigo. Tem como objetivo apresentar o número fracionário como solução para o problema da impossibilidade da divisão no universo dos números inteiros. Enquadrados em contextos simples, analiso os aspetos da divisão, no conjunto dos números inteiros, que conduziram ao aparecimento de um outro número, o número fracionário.

DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Cada uma das quatro operações aritméticas fundamentais transforma, com processos próprios, um par (ordenado) de números num número do mesmo conjunto. Neste artigo considero como universo de trabalho o conjunto dos números inteiros não negativos, \mathbb{N}_0 (ou \mathbb{Z}_0^+). Este conjunto pode ser expresso pela reunião do conjunto dos números naturais, \mathbb{N} , com o conjunto singular que contém o nú-

mero zero^[1] formalmente representado por $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Caraça (2002) discute, neste universo, a possibilidade de cada uma das quatro *operações fundamentais* da Aritmética. Considera possíveis a adição e multiplicação, pois a soma e o produto de dois números inteiros são números também inteiros. Quanto à subtração e à divisão explicita as condições de possibilidade. Na subtração exige que o aditivo seja maior ou igual ao subtrativo. Na divisão impõe que o dividendo seja múltiplo do divisor. É das condições de possibilidade da divisão que me vou ocupar seguidamente.

A DIVISÃO COMO OPERAÇÃO INVERSA DA MULTIPLICAÇÃO

Considerem-se as duas situações A e B, que envolvem, propositadamente com significados diferentes, os mesmos números:

Formação de grupos

A. Os 24 alunos da turma A estão organizados em 8 grupos de trabalho de igual dimensão. Quantos elementos tem cada grupo?

B. Todos os 24 alunos da turma B estão organizados em grupos de 8 alunos. Quantos grupos existem nesta turma?

Estas situações podem ser interpretadas matematicamente como mostra a Tabela 1.

Em cada situação, a relação entre o número de alunos da turma com o número de grupos e o número de alunos por grupo, pode ser representada pela equação $24 = 8 \times n$, em que n representa o número que se desconhece. Na situação A, a variável n representa o número de alunos por grupo; na situação B, a variável n representa o número de grupos. O valor de n pode ser obtido determinando o quociente de 24 por 8, concluindo que na situação A cada grupo tem 3 (24:8) alunos e na situação B existem 3 (24:8) gru-

pos. Em ambas as situações são conhecidos o produto e um dos fatores e o outro fator é desconhecido. Este foi determinado como o quociente da divisão entre os dois termos conhecidos. Neste processo a divisão apareceu como operação inversa da multiplicação. Conforme afirma Caraça (2002), a divisão é a operação inversa da multiplicação porque resolve o problema de sendo conhecido o produto e um dos fatores permitir determinar o outro fator. Pode representar-se esta relação entre a multiplicação e a divisão como sua operação inversa do seguinte modo usando simbologia matemática:

$$D : d = q, \text{ porque } d \times q = D$$

em que D representa o produto (conhecido),

$$d \neq 0 \text{ o fator conhecido}^{[4]}$$

e q representa o fator desconhecido, obtido através da divisão. A terminologia específica da divisão é:

D — dividendo; d — divisor e q — quociente.

Segue-se uma análise desta relação entre a multiplicação e a divisão discutindo a possibilidade da operação divisão e depois o modo de ultrapassar um tipo de impossibilidade surgida na divisão de um número inteiro por um número natural.

DIVISÃO INTEIRA — CONCEITO PARA ULTRAPASSAR UM DOS IMPASSES NA DIVISÃO

Nesta secção procede-se à discussão da possibilidade da divisão no conjunto \mathbb{N}_0 , e em seguida discute-se como se pode ultrapassar, pela divisão inteira, um primeiro nível de impossibilidade da divisão neste universo.

A possibilidade operatória pode ser traduzida pela questão: Da divisão de um número inteiro por um número natural resulta um número inteiro? Nas duas situações abor-

Tabela 1. Situações de partilha equitativa e de medida

Situação A	Situação B
Partilha equitativa ^[2]	Medida ou Agrupamento ^[3]
Dados:	
24 — n° de alunos da turma	24 — n° de alunos da turma
8 — n° de grupos	8 — n° de alunos por grupo
Os grupos têm igual n° de alunos.	Os grupos têm igual n° de alunos.
Todos os alunos estão distribuídos.	Todos os alunos estão distribuídos.
Pedido:	
número de elementos por grupo	número de grupos

dadas anteriormente, que envolveram os números inteiros 24 e 8, foi obtido o quociente 3 que é também um número inteiro. A pertença ao mesmo conjunto deste número é justificada pelo facto de 24 ser múltiplo de 8. Estendendo esta relação pode afirmar-se que a divisão é possível em \mathbb{N}_0 desde que o dividendo seja múltiplo do divisor. Ficam assim excluídos, (ainda) sem resposta, os casos em que:

(i) o dividendo é maior que o divisor não sendo seu múltiplo,

$$D > d, D \text{ não múltiplo de } d;$$

e em que

(ii) o dividendo é menor que o divisor, $D < d$.

Uma vez estabelecida a condição de possibilidade da operação analise-se como se evoluiu na abordagem dos casos abrangidos em (i). Considere-se uma situação em que o dividendo é maior que o divisor e não é seu múltiplo.

EMBALAR OBJETOS

Há 33 objetos para embalar em caixas iguais e com capacidade para 6 objetos. Quantas caixas se encherão, no máximo, e quantos objetos ficarão, eventualmente, por embalar?^[5]

Um dos processos práticos de proceder ao empacotamento consiste em ir enchendo as caixas até se obter o maior número possível de caixas cheias. Este processo pode ser traduzido, enchimento a enchimento, da seguinte forma:

- enche-se 1 caixa com 6 objetos, restando 27 objetos, traduzida esta ação pela igualdade $33 = 1 \times 6 + 27$;
- repete-se a ação anterior, enche-se uma segunda caixa, e podem representar-se as duas ações já executadas por $33 = 2 \times 6 + 21$.
- Assim sucessivamente até não haver possibilidade de encher outra caixa,

A Tabela 2 apresenta todos os passos efetuados para a obtenção da resposta à questão formulada, afirmando que se encheram 5 caixas e ficaram 3 objetos por embalar.

Detenhamo-nos um pouco na análise desta tabela, com a preocupação de a relacionar com a divisão. Procuremos

explicitar as regularidades nas cinco igualdades que nela figuram. Representam decomposições de 33 como soma de duas parcelas em que uma delas é um produto e neste produto existe um invariante que é 6 (número de objetos por caixa). Como diferença significativa para o que estamos a estudar interessa realçar que a igualdade

$5 \times 6 + 3 = 33$ difere das quatro anteriores por a parcela 3 ser menor que 6. Revisitando o problema significa que é esta, e não as anteriores, que corresponde à resposta apresentada.

Relacionando a solução deste problema com a definição de divisão apresentada anteriormente, pode perguntar-se se 5 pode ser considerado quociente da divisão de 33 por 6. Raciocinando por absurdo, ou seja, admitindo que pode ser considerado como quociente, significava que era válida a igualdade $5 \times 6 = 33$; perante a falsidade desta afirmação conclui-se que 5 não é o quociente desta divisão. A igualdade $33 = 5 \times 6 + 3$ tem relação com a igualdade $30 = 5 \times 6$, sendo aceitável a afirmação: o quociente inteiro é 5 (n° de caixas cheias) e o resto é 3 (n° de objetos não embalados). Estamos perante um caso de divisão inteira, operação que vai ser caracterizada imediatamente de seguida.

No conjunto dos números inteiros não negativos, \mathbb{N}_0 , a divisão inteira é uma operação (binária) que transforma cada par ordenado desses números (dividendo, divisor), (D, d) , com $d \neq 0$, num único par ordenado de números, (q, r) , em que q designa o quociente inteiro e r o resto, com $0 \leq r < d$, e de tal modo que o produto de d por q adicionado a r é D . Esta relação de igualdade designa-se por *identidade fundamental da divisão inteira* e representa-se com simbologia matemática por $D = d \times q + r$, com $0 \leq r < d$.

Esta definição acolhe a de divisão como operação inversa da multiplicação no conjunto \mathbb{N}_0 , apresentada na primeira parte desta secção. A igualdade $D = d \times q$ específica da divisão como operação inversa da multiplicação, correspondente às situações em que D é múltiplo de d , traduz aquela identidade com resto zero.

Tabela 2. Percurso da divisão inteira de 33 por 6

Nº de caixas cheias	Nº de objetos empacotados	Nº de objetos por empacotar	Igualdade correspondente
1	6	27	$1 \times 6 + 27 = 33$
2	12	21	$2 \times 6 + 21 = 33$
3	18	15	$3 \times 6 + 15 = 33$
4	24	9	$4 \times 6 + 9 = 33$
5	30	3	$5 \times 6 + 3 = 33$

Uma vez caracterizada a divisão inteira e para a distinguir da anteriormente definida, chama-se divisão exata a esta operação inversa da multiplicação. Pelo que foi analisado pode afirmar-se que a divisão exata em \mathbb{N}_0 é um caso particular de divisão inteira, tendo como quociente um número natural e nulo o resto.

Sistematizando a análise feita nesta secção, formulou-se a questão: Como ultrapassar a impossibilidade de, pela divisão exata, se poderem resolver os casos em que o dividendo é maior que o divisor? Desenhou-se um percurso que teve como desfecho a resposta: a divisão inteira. Como nota de reflexão e de passagem à secção que deu título ao artigo, fica o comentário a seguir. A divisão inteira não é a operação inversa da multiplicação pois para um dividendo e um divisor nas condições aqui explicitadas — dividendo não múltiplo do divisor — o quociente (inteiro) não é solução inteira da equação $D = q \times d$. Esta equação é, como foi explicitado, impossível em \mathbb{N}_0 .

SURGIMENTO DO NÚMERO FRACIONÁRIO NO CONTEXTO DA DIVISÃO DE INTEIROS

O problema da possibilidade da divisão no conjunto dos números inteiros foi, até aqui, discutido através de dois tipos de situações: aquele em que o dividendo é múltiplo do divisor e o imediatamente anterior a esta secção, em que o dividendo é maior, embora não múltiplo do divisor. Falta discutir o caso em que o dividendo é menor que o divisor. Para prosseguir, voltemos à igualdade $33 = 5 \times 6 + 3$, que relaciona o dividendo, 33, com o divisor, 6, com o quociente inteiro, 5 e com o resto, 3. Como este não é nulo, significa que 33 (ainda) não foi dividido exatamente por 6. Para responder a este impasse pode começar por se enunciar a pergunta: Como dividir este resto, 3, pelo divisor 6? A divisão como operação inversa da multiplicação não é solução, pois 3 não é múltiplo de 6. Será a divisão inteira um estratagema adequado? A igualdade $3 = 0 \times 6 + 3$, embora verdadeira, em nada adianta para poder responder. Realmente o quociente nulo traduz um não fracionamento do dividendo e conseqüentemente o problema ainda não está resolvido. A resposta a este problema é possível pela criação de um novo número e pela extensão a um novo conjunto numérico, que contém o conjunto \mathbb{N}_0 , da definição de divisão exata apresentada atrás nos termos seguintes:

Quando

- D representa um número inteiro
- d representa um número natural (inteiro não nulo, $d \neq 0$)

e $D < d$

define-se a divisão como sendo a operação que permite determinar o quociente $q = \frac{D}{d}$, $d \neq 0$ de tal modo que q verifique a equação $q \times d = D$ e em que:

- D representa o dividendo,
- d o divisor
- $\frac{D}{d}$ o quociente exato.

$\frac{D}{d}$ representa um exemplo de uma nova categoria de número, o *número fracionário*. A esta representação $\frac{D}{d}$ chama-se *fração própria*, se o numerador for menor que o denominador.

Se o numerador for maior ou igual que o denominador pode afirmar-se que se trata de uma *fração imprópria*.

Esta caracterização da divisão de números inteiros permite agora afirmar que é possível efetuar a divisão de um número inteiro qualquer por um número não nulo. Nos exemplos atrás estudados pode afirmar-se que o quociente de 3 por 6 é $\frac{3}{6}$ e que o quociente de 33 por 6 é $\frac{33}{6}$.

É esta caracterização do quociente de quaisquer dois números inteiros, sendo o divisor não nulo, que permite definir número racional desde já. Um número racional é todo o número que pode ser representado por uma fração cujos numerador e denominador representam números inteiros, mantendo a restrição de o denominador representar um número não nulo. Resulta assim que qualquer inteiro também é número racional, basta pensar que pode ser representado por qualquer fração cujo numerador seja um inteiro múltiplo do denominador. Um número fracionário pode ser representado na forma de fração cujo numerador não é múltiplo do denominador. Resulta então que nenhum número inteiro é número fracionário e reciprocamente, nenhum fracionário é número inteiro.

A criação do número fracionário permitiu a construção de um conjunto numérico, o *campo racional* (Caraça, 2002, p. 36) que é o conjunto dos números racionais (não negativos representado por \mathbb{Q}_0^+). Este conjunto é a reunião dos conjuntos disjuntos, anteriormente invocados, \mathbb{N}_0 e o conjunto dos números fracionários. Embora a discussão das quatro operações no conjunto dos números racionais não seja objeto deste artigo, é do conhecimento profissional que as suas definições e propriedades são inclusivas relativamente ao conjunto dos números inteiros. Este aspeto relativo ao conhecimento sobre a Matemática é valorizado por Caraça (2002) ao considerar regida pelo princípio de *economia de pensamento*:

É claro que as novas definições, uma vez que não estamos obrigados pelas antigas (que não são aplicáveis), podem ser dadas como quisermos. Mas não é menos claro que convém que essas novas definições saiam o menos possível, dos moldes das antigas, para que a introdução delas no cálculo se faça com o menor dispêndio

possível de energia mental, não só no dar da definição, como nas suas consequências. (Caraça, 2002, p. 26)

A CONCLUIR

Se este artigo ajudar a aprofundar a ligação existente entre a divisão de números inteiros e o significado de fração enquanto quociente, cumpre o principal objetivo que me propus ao escrevê-lo. O percurso que construí caracteriza-se pela identificação dos impasses criados na divisão definida no conjunto dos números inteiros e progressiva superação, até emergir o número fracionário como forma de dar resposta a situações reais e de traduzir aspetos essenciais do princípio de economia na evolução da Matemática.

Procurei passar a escrito parte do trabalho, no campo do conhecimento matemático dos números racionais, que tenho vindo a sistematizar relativamente à experiência na formação inicial de futuros professores dos 1º e 2º ciclos, na tentativa de contribuir para a evolução respeitante à compreensão matemática do que se ensina nos primeiros anos de escolaridade básica.

Notas

[1] Adoto a caracterização de Caraça, considerando que zero não é número natural, (Caraça, 2002, p. 4).

[2] O sentido de partilha equitativa provém de situações em que genericamente há D objetos (quantidade de uma grandeza) a serem distribuídos igualmente por d grupos e pretende-se determinar a dimensão de cada grupo, ou seja, o número de objetos (quantidade de grandeza) por 1 grupo.

[3] O sentido de medida, ou agrupamento, está presente em situações em que, genericamente, a quantidade de uma grandeza presente no dividendo vai ser medida tendo como unidade de medida o valor (da mesma grandeza) do divisor. O quociente representa a medida referida.

[4] Em toda a divisão, o divisor tem que ser diferente de zero.

[5] Este problema é diferente daquele que, envolvendo os mesmos dados, pergunta: «Quantas caixas são necessárias para empacotar os 33 objetos?»

Referências

- Caraça, B. J. (2002). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (4ª ed.). Lisboa: Gradiva.
- Ma. L. (2009). *Saber e Ensinar Matemática Elementar*. Lisboa: Gradiva.

GRACIOSA VELOSO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A sequência de tarefas seguinte tem como principal objetivo o desenvolvimento do sentido de número racional pela compreensão do significado de medida das frações. É este o significado envolvido na marcação de pontos de um segmento de reta (cujo comprimento é considerado como unidade de medida) correspondentes a frações unitárias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, etc.

Quando as crianças iniciam a escolaridade básica possuem e revelam algum conhecimento informal baseado nas suas experiências sociais e por esta razão trazem ideias de metade e de quarta parte, em situações de partilha equitativa. Não se passa nada de semelhante relativamente ao conhecimento e muito menos à compreensão da fração como traduzindo a medida de uma grandeza. É para apelar a que se evite a precipitação da abordagem pela via da medida que proponho estas tarefas. Devem ser exploradas sem recorrer a quaisquer processos de cálculo algorítmico. Os materiais são uma ajuda quer para pensar quer para comunicar os aspetos significativos da experiência matemática com eles desenvolvida.

Na primeira tarefa através da comparação visual entre a área de cada peça do Tangran e a da unidade de medida aparecem as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Na segunda tarefa, continuando a usar uma unidade de referência não normalizada, a área do hexágono, surgem, suportadas na análise da utilização do material, relativamente à tarefa anterior, por exemplo, as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{3}$. Nesta tarefa ainda, por observação de alguns blocos dá-se expressão visual a que $\frac{5}{6}$ representa a soma de $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$; consequentemente também se pode estabelecer a igualdade $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Pode ainda ser explorada a variação da medida da grandeza área com a variação da unidade, nomeadamente a situação correspondente a números inversos.

Na terceira tarefa, através da variação da unidade de medida de comprimento podem aparecer outras frações, por exemplo, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, etc. Na quarta tarefa é valorizada a componente mais formal, decorrente das tarefas anteriores, a da representação de pontos numa reta orientada.

GRACIOSA VELOSO

ORDENAÇÃO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Tarefa A: Medindo áreas no Tangran

O tangram é um puzzle chinês constituído por 7 peças:
 2 triângulos grandes; 2 triângulos pequenos
 1 triângulo médio; 1 quadrado
 1 paralelogramo oblíquo



- Determina a área de cada peça, considerando como unidade de referência a área do maior triângulo
- Ordena as medidas das áreas das peças representando-as por frações.

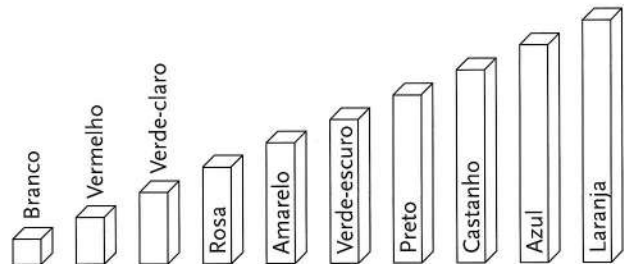
Tarefa B: Medindo áreas de blocos padrão

1. Considera a área do hexágono amarelo como unidade de medida de área.
 Qual a fração que representa a medida da área de:
 a) triângulo (verde); b) losango (azul); c) trapézio (encarnado).
2. Considera agora como unidade a área do trapézio.
 Qual a fração que representa a medida da área do losango com esta unidade?
3. Considera a área do losango uma outra unidade de medida da grandeza área.
 Qual é a medida da área do trapézio com esta unidade?



Tarefa C: Medindo comprimentos de barras cuisenaire

A figura junta mostra as dez barras Cuisenaire.
 Estas barras podem ser utilizadas para medir a grandeza comprimento.



- a) Se considerarem como unidade de medida do comprimento a barra maior (laranja) indica a medida do comprimento da barra:
 a1) branca; a2) cor de rosa; a3) preta; a4) azul.
- b) A fração $\frac{2}{5}$ representa a medida de uma das barras tomando o comprimento de outra barra como unidade.
 Qual é a barra unidade? E qual é a barra cuja medida de comprimento é a representada pela fração dada?

Tarefa D: Representação em reta orientada

Representem numa reta orientada os pontos A, B, C, D, cuja distância à origem é respetivamente:

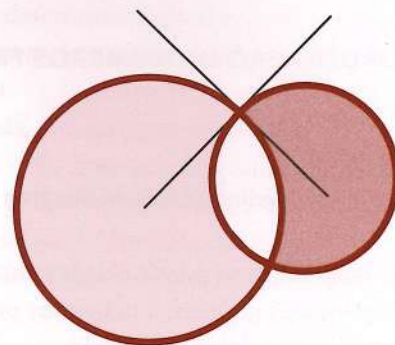
$$\frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{7}{10}; 1\frac{2}{5}$$

Diferença de áreas

Desenhámos dois círculos, respetivamente de áreas 17 e 8 cm^2 , de tal modo que as suas tangentes num ponto de interseção são perpendiculares entre si.

Qual é a diferença entre as áreas das duas regiões que não se sobrepõem (a sombreado na figura)?

(Respostas até 03 de setembro para zepaulo46@gmail.com)



AS IDADES DAS VIZINHAS

O problema proposto no número 126 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Pai: — «Acabei de encontrar as nossas novas vizinhas, uma senhora e as suas duas filhas. Vou colocar-te um problema para descobrires que idades elas têm.»

Filho: — «Força! Já sabes que gosto de desafios.»

Pai: — «O produto das suas idades é 2450.»

Filho: — «Só isso não chega.»

Pai: — «A soma das três idades é o quádruplo da tua.»

Filho (depois de pensar um bocado): — «Ainda não consigo.»

Pai: — «Sou mais novo que a mãe das raparigas.»

Filho (que sabe a idade do pai): — «Ah, então já sei!»

Que idades têm os cinco personagens desta história?

Recebemos onze respostas, de Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva, João Pereira (São Martinho do Porto), Laura Almeida (Porto Santo), Mariana Ribeiro (Lisboa), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e de um grupo de quatro professores de Paião: Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

Praticamente todos seguiram a mesma via: 1º) fazer a lista dos casos possíveis para as idades da mãe e suas duas filhas usando a primeira informação do pai; 2º) eliminar os casos que não cumpriam a segunda informação; 3º) desempatar entre os casos restantes usando a terceira informação.

Vejamos então como isto foi feito.

1º Passo) O produto das três idades é 2450.

Eliminando os casos inviáveis por a mãe ser demasiado nova ou demasiado velha, temos cinco possibilidades:

A) $35 \times 10 \times 7$

B) $35 \times 14 \times 5$

C) $49 \times 10 \times 5$

D) $49 \times 25 \times 2$

E) $50 \times 7 \times 7$

2º Passo) A soma das três idades é o quádruplo da do filho.

Temos então:

A) Soma 52

B) Soma 54

C) Soma 64

D) Soma 76

E) Soma 64

O caso A) é de eliminar porque 52 não é múltiplo de 4.

Aqui, várias resoluções avançaram para o 3º passo com os quatro casos sobrantes. No entanto, tal como nos diz a Graça:

Temos quatro situações em que a soma das idades é um múltiplo de 4. Mas, atendendo a que o filho sabe qual é o quádruplo da sua idade e responde que a informação é insuficiente, então isso só se pode dever a que há, pelo menos, duas somas iguais. É o que se verifica com a soma 64. Então a idade do filho é $64/4 = 16$ anos e sobram apenas dois casos:

C) $49 + 10 + 5 = 64$

E) $50 + 7 + 7 = 64$

3º Passo) O pai é mais novo do que a mãe das vizinhas.

Ora, se o pai tivesse 48 anos ou menos, o filho continuaria na dúvida; mas isso não se verifica — a informação do pai foi suficiente para dar a resposta.

Então o pai tem 49 anos, a mãe das vizinhas 50, as filhas são gêmeas com 7 anos e a idade do rapaz é 16.

A Catarina chama a atenção para um facto curioso: Para se descobrir a idade das vizinhas não era necessária a segunda informação (a soma das três idades ser o quádruplo da do rapaz).

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2013 consistiu na resolução do problema «As compras da Catarina»:

A Catarina foi ao supermercado às compras. Colocou os seis produtos de que precisava no cesto e reparou que os seus preços eram todos diferentes.

Enquanto esperava na fila, pegou na calculadora e, distraída, multiplicou os preços em vez de os somar. Fez depois o cálculo já com a operação certa e reparou, admirada, que o resultado era o mesmo.

A Catarina ter-se-á enganado?

Se tal for possível, explica como obtiveste os seis preços de uma possível solução.

Se for impossível, demonstra-o.

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Foram-nos entregues catorze resoluções. Três delas foram eliminadas porque os preços indicados, em euros, tinham mais de duas casas decimais. Noutra, da Gisela, cuja resposta vinha em verso, a solução só funcionaria se o cálculo do produto fosse feito numa máquina que arredondasse os resultados à centésima.

O problema tem muitas soluções, mas não uma infinidade como dois concorrentes se atreveram a dizer. Privilegiámos as resoluções que indicassem corretamente um método para descobrir tantas soluções quantas quiséssemos.

Várias pessoas começaram, seguindo uma das indicações do Polya, por resolver o problema para dois preços. Viram que era possível e foram aumentando o número de produtos comprados até chegar aos seis. A vantagem desta via é que, a partir das três compras, se percebe a lógica do que é preciso fazer e rapidamente se avança.

Outros atacaram logo o problema considerando seis itens.

Sejam a, b, c, d, e, f os seis preços. Terá de ser:

$$a \times b \times c \times d \times e \times f = a + b + c + d + e + f$$

Resolvendo em ordem a f , vem:

$$f = \frac{a + b + c + d + e}{abcde - 1}$$

Representemos a soma e o produto dos cinco primeiros preços respetivamente por S e por P , dando um aspeto mais simpático à equação.

$$f = \frac{S}{P - 1}$$

Demos a palavra à Graça:

Os preços são números com duas casas decimais, no máximo. Pensei no meu 10.º ano: quando é que uma fração representa um dízima finita? Se o denominador for um produto de uma potência de 2 por uma potência de 5. Então, $P - 1$ tem de ser o produto de uma potência de 2 por uma potência de 5, ou seja, P tem de ser igual à soma de 1 com um produto de uma potência de 2 por uma potência de 5.

Mas, havia ainda a considerar que o quociente não poderia ter mais de duas casas decimais.

Logo, convém que o denominador da fração que define f seja um destes valores: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 ou 100, a que correspondem os seguintes valores de P : 2, 3, 5, 6, 11, 21, 26, 51 e 101.

Agora, para se obter uma solução, escolhe-se um destes valores para P . É mais fácil se optarmos por um número não primo. Arranjam-se depois cinco números, no máximo com duas casas decimais, cujo produto seja P .

Por exemplo, seja $P = 6$ (foi o valor mais popular entre os participantes). Há várias possibilidades para os cinco preços. Eis algumas.

1,00 – 2,00 – 0,50 – 1,50 – 4,00, pelo que $f = 1,80$. A soma e o produto dos seis preços é 10,80.

1,00 – 2,00 – 3,00 – 0,25 – 4,00, pelo que $f = 2,05$. A soma e o produto dos seis preços é 12,30.

6,00 – 2,00 – 0,50 – 0,25 – 4,00, pelo que $f = 2,55$. A soma e o produto dos seis preços é 15,30.

Mais alguns exemplos:

Com $P = 11$: 11,00 – 2,00 – 0,50 – 0,10 – 10,00, pelo que $f = 2,63$. A soma e o produto dos seis preços é 28,93.

Com $P = 51$: 17,00 – 1,00 – 2,00 – 3,00 – 0,50, pelo que $f = 0,47$. A soma e o produto dos seis preços é 23,97 e o grupo Adelina, Anabela, Pilar & Teresa apresentou até a lista dos seis produtos que se poderiam comprar.

O mesmo fez o Mário, usando $P = 2$ (sendo a soma e o produto dos seis igual a 19,00):

1 saco de plástico para as compras: 0,20€

1 chupa-chupa para o filhote: 0,80€

1 pacote de arroz: 1,00€

1 garrafa de tinto do Douro: 2,50€

1 cachecol do FCP: 5,00€

1 livro «Uma Vida Sem Problemas II»: 9,50€

NOTA FINAL

Existem outros valores de $P-1$, denominador da fração para calcular o sexto preço f , para além dos indicados pelos concorrentes (1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100). Basta pensar que, se o denominador for k vezes um dos números anteriores e o numerador for múltiplo de k , a fração se simplifica. Por exemplo, se o numerador for múltiplo de 3, o denominador pode ser 3×4 ou 3×5 ou 3×10 ou 3×20 ou... Vejamos um caso, para $P = 76$ e $S = 21$:

$9,50 - 1,00 - 0,50 - 8,00 - 2,00$, pelo que $f = 0,28$. A soma e o produto dos seis preços é 21,28.

LISTA DE PARTICIPANTES

Individuais: Augusto Manuel Barreto, Catarina Isabel Ferreira, Cláudia Domingues, Gisela Araújo, Graça Braga da Cruz, Graciosa

Veloso, Hugo Miguel Sá, José Santos Silva, M^a Manuela Nogueira da Silva, Mário Roque, Paula Cristina Gomes, Paulo Correia.

Em equipa: Adelina Precatado, Anabela Teixeira, Pilar Mansos & Teresa Moreira; Daniel Castanho & Sandra Neves;

PREMIADOS E PRÉMIOS

1^o (*Unidade TI-Nspire Cx, oferta Texas Instruments*)

— Catarina Ferreira

2^{os} (*três jogos diversos*)

— Graça Braga da Cruz

— Hugo Miguel Sá

— Mário Roque

— Adelina, Anabela, Pilar & Teresa

Os prémios devem ser levantados até 31 de Dezembro de 2014. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt ou 217163690).

ENCONTROS



sociedade
portuguesa de
investigação em
educação
matemática

Decorrerá em Setúbal, de 22 a 23 de novembro de 2014, o *EIEM 2014 — Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Pro-

movido pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, este será um encontro que terá por tema as tarefas matemáticas. A divulgação do encontro será feita no site da SPIEM: <http://www.spiem.pt/>.



ticEDUCA 2014

III Congresso Internacional TIC e Educação
Lisboa, Portugal | 14 a 16 de novembro

De 14 a 16 de Novembro de 2014 decorrerá no Instituto de Educação, em Lisboa, o *III Congresso Internacional TIC e Educação — ticEduca 2014*. Sob o tema da aprendizagem *online*, o encontro organiza-se em torno de cinco subtemas: ambientes de aprendizagem formais e informais e tecnologias; comunicação mediada por computador, relações e expressão das emoções *online*; tecnologias digitais e desenvolvimento profissional; *e-learning* no ensino superior e na formação profissional; e tecnologias e necessidades (educativas) especiais. Mais informações disponíveis em <http://ticeduca2014.ie.ulisboa.pt>.

CERME9



De 4 a 8 de fevereiro de 2015 realizar-se-á em Praga, na República Checa, o *CERME 9 — Congress of European Research in Mathematics Education*. Este é um encontro que se organizará em torno de vinte grupos temá-

ticos diferentes e que deliberadamente se afasta das apresentações individuais para valorizar o trabalho colaborativo em torno de cada um dos temas. Para mais informações consulte <http://www.cerme9.org/>.

XII
congresso
spce

Decorrerá em Vila Real, de 11 a 13 de setembro de 2014, o *XII Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* sob o tema «As ciências da educação: espaços de investigação, reflexão e ação interdisciplinar». Centrado em torno de dezoito eixos temáticos, este é um encontro abrangente que foca desde as questões da administração educacional e da política educativa, passando pelo currículo e pelas metodologias de ensino, pela formação de professores, incluindo ainda questões ao nível da cidadania e dos direitos humanos, entre vários outros temas. Mais informações podem ser acedidas em <http://xiicongressospce2014.utad.pt/>.

HELENA ROCHA

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Ao longo de mais de um ano destacámos, nesta secção da E&M, um planeta por descobrir apoiando-nos na Geometria esférica para determinar distâncias na Terra e na Geologia para fazer contagem do tempo. A Ciência Polar evidenciou um planeta suportado por vida e, ainda dentro do tema da Biologia, os dados referentes às tartarugas marinhas e espadartes dos Açores alertaram-nos para um planeta em risco. Transversalmente foram evidenciados processos matemáticos a apoiarem e fundamentarem decisões! A matemática continua a justificar as decisões, as estratégias, mas desta vez no âmbito das Ciências Sociais.

Encerramos com este número o último dos quatro temas sugeridos pelo comité internacional da Matemática do Planeta Terra: um planeta organizado pelos humanos, no qual Jaime Carvalho e Silva destaca a matemática para os cidadãos, em particular a Teoria Matemática das Eleições. A abordagem de casos particulares que desvendam como a matemática pode camuflar ou evidenciar estratégias e justiça de sistemas eleitorais é apenas mais uma confirmação do quanto ainda há por dizer e fazer a propósito da Matemática do Planeta Terra.

Joana Latas

Um planeta organizado por humanos: os sistemas eleitorais

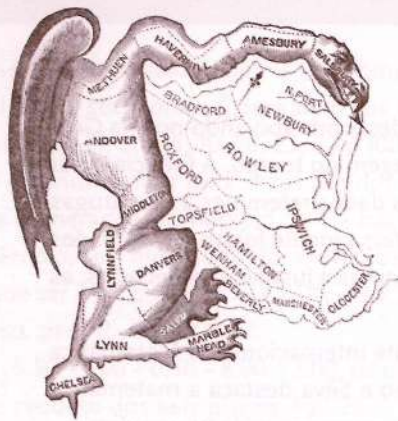
Muitas pessoas continuam a pensar que a Matemática cada vez é menos necessária para a maioria dos cidadãos; os matemáticos e os físicos precisam dela, alguns engenheiros e economistas vão usá-la muito, mas a maior parte das outras pessoas não vai precisar dela para nada, exceto talvez quando vai ao supermercado (mas apenas para comparar preços de embalagens com quantidades diferentes, que o pagamento é electrónico e já nem há trocos!). Este é um erro grave cometido por muita gente, incluindo altos responsáveis da educação nacional e internacional, que radica na ideia da Matemática se reduzir ao trinómio da Álgebra (pouco mais que aritmética), Geometria (polígonos e poliedros) e Análise (limites, derivadas e integrais). A Matemática está cada vez mais presente neste nosso Planeta Terra e um cidadão que não esteja devidamente equipado com ela, ficará gravemente limitado na sua ação. Claro que a Matemática para o cidadão não se restringe ao trinómio clássico Álgebra-Análise-Geometria, mas inclui temas muito para além dele, como aqueles que fazem parte da disciplina de «Matemática Aplicada às Ciências Sociais» que tem existido no curriculum do Ensino Secundário em Portugal; aliás, esta disciplina deveria ser obrigatória para todos aqueles que não tivessem disciplinas de Matemática mais técnicas (como o são inevitavelmente Matemática A ou B).

Dentro dos temas da Matemática para os cidadãos, está a matemática da organização humana, onde entra a Teoria Matemática das Eleições.

A Teoria Matemática das Eleições tornou-se um método «nobre» quando em 1972 o Prémio Nobel da Economia foi atribuído ao matemático Kenneth Arrow, pela sua teoria do equilíbrio económico e da escolha social, o que inclui a sua demonstração do «Teorema da Impossibilidade» que essencialmente diz que não há um sistema eleitoral que seja genuinamente democrático.

O Teorema de Arrow levanta muitos problemas interessantes: se não há um sistema que seja melhor do que todos os outros, quais os sistemas mais aconselháveis? A resposta depende da situação em que se estiver e inúmeros autores publicaram e continuam a publicar investigações e discussões sobre o tema. Até Charles Dodgson, mais conhecido como Lewis Carroll, publicou vários textos sobre o assunto. Ele escreveu mesmo que as eleições eram uma espécie de jogo e que o jogo só seria justo se todos conhecessem bem as respetivas regras, isto é, se soubessem as consequências de cada método de votação.

Os sistemas de votação são a base da democracia, mas não é por isso que são infalíveis, havendo muitos modos de os comprometer; por isso os sistemas de vigilância e verificação da votação são muitos e é frequente ouvirmos falar de observadores internacionais destacados para eleições. Existem também modos legais de perverter as eleições. Vou apenas exemplificar com um dos métodos mais célebres, o «Gerrymandering» (Produzir salamandras como o Gerry). Em 1812, o governador do estado americano do Massachu-



Quadro 1

Lista	Bastonário	Votos Conselho Geral
Lista E	A. Raposo Subtil	3232
Lista F	Vasco Marques Correia	3394
Lista G	Jorge Neto	1750
Lista I	Elina Fraga	6510
Lista K	Jerónimo Martins	849
Lista S	Guilherme Figueiredo	3510
Nulos	—	566
Branços	—	1547
Total		21358

setts, Elbridge Gerry, estava em risco de perder o controlo da Assembleia de Representantes estadual; então redeseñhou os círculos eleitorais de modo a garantir que obteria a maioria em quase todos esses círculos. Para isso teve de fazer uma ginástica geográfica considerável, que o ilustrador do Boston Weekly Messenger, transformou numa salamandra monstruosa!

Ainda hoje, o desenho dos círculos eleitorais é objeto de manipulação eleitoral, não havendo um método matemático independente para o fazer.

Outro aspeto importante: a escolha do sistema de eleição só é fácil quando há dois e só dois candidatos a uma eleição: ganha quem tiver mais votos! Mas as complicações começam quando há três candidatos: e se cada um desses candidatos tem entre 30 e 40% dos votos, quem deve ser eleito? Um método muito comum consiste em fazer uma segunda volta com os dois candidatos com mais votos na primeira volta. Recentemente a Ordem dos Médicos alterou o método de eleição do Bastonário, introduzindo uma segunda volta caso nenhum dos candidatos obtenha mais de 50% dos votos na primeira volta. Com este novo método, as eleições de 2010 tiveram um resultado indisputável na segunda volta; enquanto que na primeira volta os dois candidatos mais votados (entre quatro) tiveram 3728 votos (40,59%) e 3631 votos (39,53%), na segunda volta o Bastonário atual ganhou por 8.424 votos (61,6%) contra 4.931 votos (36,1%). Os 97 votos de diferença na primeira volta teriam levantado muitos problemas se fosse esse o resultado final da eleição!

Mas a Ordem dos Advogados mantém o sistema de eleição maioritário com uma volta. Nas eleições de novembro de 2013 foi eleita uma Bastonária com apenas 31% dos votos expressos, entre seis candidatas, como o Quadro 1 mostra.

Deveria a Ordem dos Advogados mudar o seu sistema para um sistema maioritário com duas voltas? Talvez. Com 6 candidatas a dispersão de votos é inevitável. A ideia é que com duas voltas o Bastonário terá um apoio, senão entu-

siástico, pelo menos maioritário dos membros da sua Ordem. Claro que haverá situações extremas que sairão fora desta ideia (mas são mais raras).

Existe contudo outra alternativa menos conhecida e que em certas situações pode trazer bastantes vantagens: o sistema de votação por aprovação. A ideia é que cada eleitor vota no número de candidatos que entender, votando em todos que acharia adequados para o cargo em questão, independentemente de achar que uns poderiam ser melhores do que outros. Este sistema é mais «justo» do que o de maioria simples pois permite, apenas com uma votação, obter um resultado final tão consensual quanto possível. Claro que existe sempre a possibilidade de voto «útil» ou de voto «estratégico», mas no sistema de votação por aprovação tal é menos provável do que no sistema maioritário a duas voltas em que o voto estratégico é óbvio quando o candidato com mais votos na primeira volta quer garantir que vai à segunda volta o pior candidato e «dá uma forcinha a este»...

Muito para discutir neste Planeta Terra!

Referências

- Norris, Pippa (1997) *Choosing Electoral Systems*, International Political Science Review 18(3): 297–312.
- Cardoso, Carla (2009) *A Matemática das Eleições*, Dissertação orientada pelo Prof. Doutor Jorge Nuno Silva, Univ. Lisboa.
- Pinto, Joaquim (2006) *Teoria Matemática das Eleições*, Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática, Univ. Porto.
- Malkevitch, Joseph & Froelich, Gary (2003) *A Teoria Matemática das Eleições*, COMAP/DES.

JAIME CARVALHO E SILVA

CMUC/DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA



Experiências de prática profissional na formação de professores de Matemática do 2.º ciclo^[1]

NEUSA BRANCO, JOÃO PEDRO DA PONTE

O professor vale o que vale a sua prática. Não serve de muito um professor ter imensas qualidades e conhecimentos, se não tirar partido deles no decurso da sua atividade docente. Daí a necessidade de compreender a prática profissional dos professores, perceber quais são os seus elementos estruturantes, que fatores a condicionam e de que modo se desenvolvem ao longo da carreira profissional. A prática profissional do professor experiente é essencial para orientar a formação inicial. Além disso, nesta formação, a prática tem outro papel, tão ou mais importante — a experiência de situações de prática, desde que devidamente enquadradas por momentos de reflexão, constitui um aspeto essencial do desenvolvimento do futuro professor. É o que procuramos mostrar neste artigo.

FORMAÇÃO INICIAL: PRÁTICA PEDAGÓGICA E REFLEXÃO

O conhecimento profissional do professor é orientado para a atividade de ensinar Matemática aos seus alunos. Este conhecimento apoia-se, naturalmente, em conhecimentos de natureza teórica sobre a Matemática, sobre a educação em geral e sobre o ensino da Matemática. Apoia-se também em conhecimentos de natureza social e experiencial sobre os alunos, sobre si próprio, sobre muitos outros aspetos incluindo a dinâmica da aula, os valores e a cultura da escola e da comunidade que esta serve, bem como da comunidade profissional (Ponte, 2012).

Cabe à formação inicial proporcionar oportunidades para que o futuro professor analise as orientações curriculares para o ensino da Matemática e realize planificações tendo em atenção o modo de trabalho dos alunos, a dinâmica de sala de aula, o seu papel e dos alunos, a natureza das tarefas a propor e os materiais didáticos a utilizar. É igualmente necessário que reflita sobre a condução de aulas, as ocorrências registadas e as decisões tomadas, tendo em conta o seu conhecimento dos alunos e a aprendizagem que se pretende proporcionar.

As situações de estágio podem colocar os futuros professores perante situações muito exigentes. A utilização de tarefas desafiantes e a condução de uma comunicação que encoraje a participação do aluno é um aspeto essencial da sua formação. Neste processo de aprendizagem com a prática e na prática, a reflexão assume um papel essencial para promover o desenvolvimento do conhecimento profissional (Serrazina, 1999). No entanto, esta reflexão constitui muitas vezes um grande desafio para o futuro professor dada a sua reduzida experiência e natural dificuldade em se centrar nos aspetos essenciais da prática.

Apresentamos de seguida aspetos significativos da prática docente experienciada por diversas estagiárias tendo por base as suas reflexões sobre o trabalho que realizaram no 2.º ciclo em Matemática. O estágio decorre de fevereiro a junho, no ano letivo 2011–12, tendo os alunos três blocos de 90 minutos de Matemática por semana, incidindo sobre temas matemáticos e tópicos contemplados no *Programa de Matemática* (ME, 2007). As aulas objeto de atenção foram descritas pelos futuros professores e por estes consideradas como particularmente significativas para o seu desenvolvimento profissional.

OBSERVAÇÃO

As estagiárias integram as turmas de Matemática e cumprem duas semanas de observação, começando por ter intervenções pontuais com os alunos. Observam a turma e a prática do professor cooperante o que lhes permite conhecer os alunos, identificando as suas principais capacidades e dificuldades, bem como o trabalho que estão a desenvolver num determinado tópico matemático.

Logo nestas semanas as estagiárias interagem com os alunos, participando nas atividades propostas pelos professores cooperantes e apoiando o trabalho na sala de aula. Com base nessa observação recolhem informações importantes, estabelecem uma primeira relação com os alunos e começam a perspetivar a sua intervenção:

Procurei apoiar a professora cooperante na execução das suas aulas e prestei apoio, de modo individualizado, aos alunos na realização das atividades desenvolvidas, facto este que me possibilitou uma maior aproximação aos alunos. (2.ª reflexão de Daniela)

No início do estágio, nas aulas de observação, procurei retirar a maior informação possível, de modo a facilitar a minha intervenção prática seguinte. (2.ª reflexão de Eva)

CONCEÇÃO/PLANIFICAÇÃO

As estagiárias iniciam, então, a planificação e a preparação das aulas e a experiência de lecionação, sendo responsáveis pela gestão das suas aulas e pela elaboração dos materiais didáticos propostos aos alunos. O trabalho de planificação é acompanhado pelo professor cooperante e pelo professor supervisor que lhes dão *feedback* com o intuito de contribuir para a melhoria dessa preparação, questionando-os para preverem diversas situações do trabalho com os alunos e para refletirem previamente sobre ao contributo do trabalho a propor para a aprendizagem dos alunos.

As estagiárias definem os objetivos específicos de aprendizagem relativos aos tópicos visados em cada aula ou num conjunto de aulas. Escolhem, adaptam ou constroem tarefas matemáticas e selecionam e organizam outros recursos como materiais manipuláveis e tecnológicos. Descrevem em pormenor no plano de aula a sua estratégia de ação, indicando como organizam os alunos e os principais momentos da aula que preveem de acordo com a tarefa a propor e os seus objetivos de aprendizagem. Indicam, ainda, como avaliam as aprendizagens dos alunos.

A prática de ensino supervisionada está articulada com a unidade curricular de Didática da Matemática pelo que algumas das ideias de trabalho com os alunos que as estagiárias levam para a sua sala de aula surgem do trabalho realizado nessa unidade curricular. Exemplo disso são algumas tarefas inicialmente discutidas com as estagiárias e que estas posteriormente adaptam aos seus alunos. Esta unidade curricular dá também a conhecer materiais manipuláveis e o modo de os explorar com os alunos e discute a sua utilização em sala de aula. Em muitos casos as estagiárias concretizam diversas dessas situações com os seus alunos.

Nas suas reflexões, as estagiárias apresentam os diversos pontos relativos à preparação de uma aula ou um conjunto de aulas de uma mesma unidade didática, tendo em vista um conjunto de objetivos específicos de aprendizagem. Por exemplo, Célia refere que o estágio proporciona o desenvolvimento do seu conhecimento curricular:

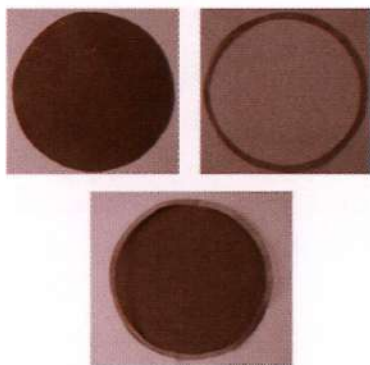


Figura 1. Materiais de Ana — Círculo e circunferência

Evoluí na planificação pois conheço cada vez mais o programa e por isso sei, cada vez melhor, os objetivos que tenho de desenvolver bem como os tópicos e subtópicos. Este facto facilita-me o trabalho quando estou a fazer as planificações das minhas aulas. (1.^a reflexão)

Pelo seu lado, Ana apoia-se num artigo (Canavarro, 2011) para realçar a importância que tem para a sua prática na sala de aula o conhecimento das potencialidades da tarefa que propõe aos alunos, focando a diversidade de estratégias e de representações que estes podem usar para a resolver: «[Conhecer] diversas estratégias e representações para deste modo definir as estratégias que mais se identificavam com as características destes alunos. Isto permite ao professor explorar o potencial da tarefa e gerir as discussões que poderão proporcionar-se» (2.^a reflexão). Apoia a sua reflexão neste artigo que discute a prática letiva do professor numa abordagem exploratória na sala de aula para salientar, ainda, a importância da escolha da tarefa para a promoção da aprendizagem dos alunos.

Uma preparação detalhada da tarefa a propor revela-se também importante para que as estagiárias se sintam mais seguras na gestão do trabalho na sala de aula. Prever as respostas de alunos, as suas dificuldades e questões que podem colocar, ajuda Célia a definir possíveis formas de atuação:

À medida que vou preparando cada aula vou pensando em possíveis perguntas e dificuldades dos alunos de modo a conseguir delinear diferentes abordagens às situações que contribuam para promover a compreensão dos conceitos envolvidos e para os ajudar a ultrapassar essas dificuldades, conseguindo, assim, responder às suas questões. Ou seja, faço uma antecipação das estratégias de resolução e das questões dos alunos, tendo em conta as suas capacidades e conhecimentos, onde prevejo como os alu-

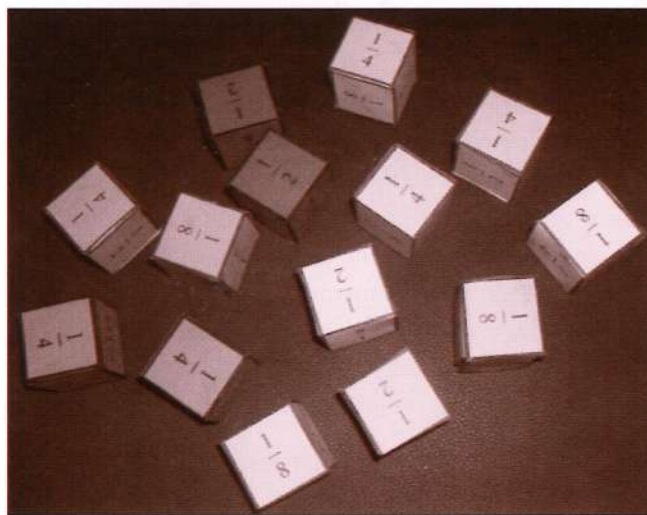


Figura 2. Materiais de Ana — Cubo das frações

nos vão reagir a um novo conceito ou como poderão resolver as tarefas. (1.^a reflexão)

No final do estágio, Célia faz um balanço deste trabalho de preparação:

Refletindo sobre este trabalho de preparação, verifico que é uma mais-valia para a minha prática letiva, nomeadamente, para melhorar a discussão com os alunos. Já que vou preparada para as suas questões e representações o que me ajuda a perceber melhor as suas ideias e a conseguir explicá-las aos restantes colegas. Por isso vejo que é um trabalho vantajoso tanto para o professor como para os alunos. (2.^a reflexão)

Além da decisão das tarefas a propor aos alunos, as estagiárias dão também atenção à utilização de materiais manipuláveis. Por exemplo, Ana elabora diversos materiais, nomeadamente nos temas Geometria (Figura 1) e Números e Operações (Figura 2).

Para Ana esses materiais visam apoiar a realização de tarefas numa lógica exploratória: «propus a utilização de material que os alunos pudessem manipular de modo a poderem ser eles próprios a identificar os conceitos e as relações envolvidos» (2.^a reflexão).

Apesar da importância que assume a planificação detalhada para o trabalho das estagiárias, estas verificam que no decorrer da aula pode ser necessário ajustar algumas situações, sem se perder de vista o propósito da aula. Por exemplo, Eva reconhece que o plano de aula não assume um carácter rígido mas sim orientador, devendo ser flexível de modo a «permitir ao professor inserir novos elementos, mudar de rumo, se o exigirem as necessidades e/ou interesses do momento» (2.^a reflexão).

OPERACIONALIZAÇÃO/LECIONAÇÃO

As estagiárias são incentivadas a refletir sobre a sua prática e a identificar o seu contributo para a aprendizagem dos seus alunos. Essa reflexão é apoiada pelo professor cooperante que as ajuda a identificar esses contributos e pelo professor supervisor que questiona o seu conhecimento didático e científico e as confronta com as suas decisões e ações. O *feedback* dado imediatamente após a aula pelos dois professores ou o *feedback* posterior do professor supervisor (já que este não está presente em todas as aulas) é assim levado em conta pelas estagiárias nas reflexões que a seguir apresentamos.

Na sua reflexão, Ana e Célia reconhecem os momentos principais de uma aula de cunho exploratório (Ponte, 2005). Ana destaca o seu próprio papel de monitorização durante o trabalho autónomo dos alunos na resolução de uma tarefa, apoiando-os nas suas dificuldades e analisando as suas resoluções. Durante este momento identifica as resoluções que considera «mais importantes para partilhar com a turma no momento da discussão» (2.^a reflexão), procurando que estas representem a diversidade de estratégias e representações que surgem na turma. Refere que, em grande parte das situações, seleciona os alunos a apresentar para a turma as suas resoluções, com um dado objetivo didático:

Propus intencionalmente a alguns alunos (que demonstraram dificuldade em resolver os exercícios ou que os resolveram de maneira diferente) que fossem ao quadro escrever as suas resoluções para que os colegas pudessem comparar as suas respostas e estratégias. Sempre que havia uma resposta diferente da escrita no quadro, solicitei aos alunos que confrontassem as suas respostas para tentarem concluir autonomamente qual a resposta correta (no caso de haver só uma resposta correta) ou se as duas respostas são plausíveis (no caso de haver mais de uma solução ou mais de uma estratégia de resolução). (2.^a reflexão)

Pelo seu lado, Célia descreve os diversos momentos que, habitualmente, a sua aula contempla, a apresentação do trabalho a realizar, o trabalho autónomo dos alunos e a discussão coletiva e sistematização:

Comecei por apresentar a situação à turma, indicando o que pretendia para depois os deixar explorar. No momento de exploração por parte dos alunos, passei por todos de modo a acompanhar o seu trabalho e a questioná-los sempre que necessário para que a sua exploração fosse aprofundada e que esse trabalho correspondesse aos objetivos pretendidos. Depois deste momento de trabalho autónomo em que o meu papel era, essencialmente de orientação, seguia-se um momento de discussão coletiva com o intuito de verificar os resultados obtidos e chegar a uma conclusão em grande grupo. Nesta discussão pretendi tirar eventuais dúvidas

que poderiam ter surgido aquando a exploração realizada pelos alunos e sistematizar conhecimentos. (...) Fui fazendo questões no sentido de os alunos apresentarem de um modo claro e detalhado o seu raciocínio, mantendo uma boa discussão e proporcionando a participação de todos. (1.^a reflexão)

Ana e Daniela apontam que a discussão coletiva na sala de aula constituiu um momento importante para a análise de dificuldades dos alunos e para a consolidação de conhecimentos:

Ao longo das aulas tive o cuidado de promover uma dinâmica de discussão com os alunos sobre os diferentes aspetos que estavam a ser trabalhados, pois desta forma, pelo que verifiquei na minha prática, os alunos são estimulados a participar ativamente na aula. (2.^a reflexão de Ana)

Quando pedia aos alunos para irem ao quadro, tentava sempre que fossem apresentadas diversas resoluções ou representações para serem discutidas com os colegas de turma e também para estes alunos explicarem oralmente o seu raciocínio. Por vezes, surgia o caso de alguns alunos apresentarem erros nas suas resoluções e não aceitarem que a sua resolução esteja errada. Neste caso particular, pedia a esses alunos para identificarem o que se apresentava de modo incorreto e para explicarem ao colega o motivo de tal resolução estar incorreta, sempre com o meu apoio quando necessário. Assim, os alunos partilharam os seus conhecimentos e a aprendizagem ocorreu de um modo ativo em que todos participavam para uma aprendizagem mútua. Quando terminava a exploração de um tópico/tema com os alunos, estabelecia uma síntese do que foi estudado, com exemplos e tarefas que suportavam os diferentes aspetos trabalhados, seguindo a mesma lógica de exploração anteriormente apresentada. (2.^a reflexão de Daniela)

As estagiárias identificam também aspetos menos conseguidos da sua prática (que em grande parte estão relacionados com as características dos alunos) e também aspetos mais conseguidos.

Outras estagiárias decidiram utilizar em aulas do 5.^o ano um material manipulável, *geostrips*, previamente apresentado pelo professor supervisor e explorado numa sessão de trabalho com elas. Assim, Berta reflete sobre a tarefa construída e a exploração que esta potenciou, retirando indicações para uma prática futura. A tarefa visa proporcionar a construção de triângulos, dadas as medidas dos lados, e a compreensão dos casos de possibilidade de construção de triângulos, recorrendo a *geostrips*:

No final da aula, refletindo sobre o trabalho realizado pelos alunos verifiquei que o guião que facultei tinha algumas limitações isto porque este tinha indicações tão específicas que retirei o caráter investigativo que a tarefa poderia ter. Limitei a exploração dos alunos ao fornecer-lhes, no enunciado, as medidas dos *geostrips* que tinham que utilizar para analisar a possibilidade e impossibi-

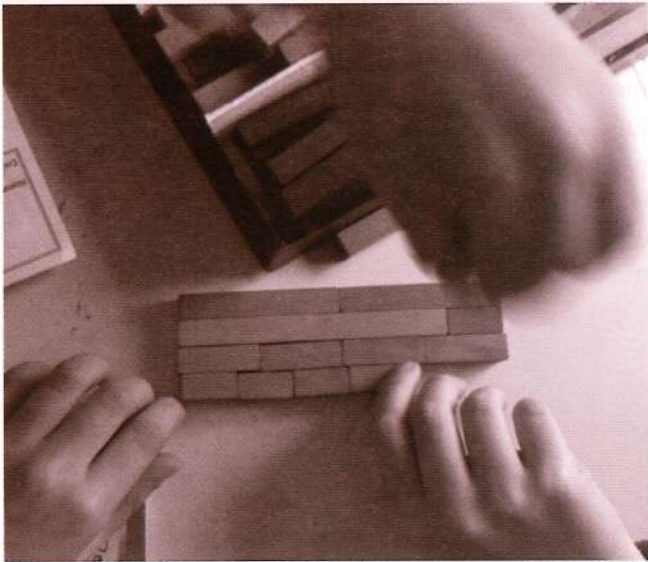


Figura 3. Materiais de Eva — Utilização de material Cuisenaire no estudo de frações

lidade de construção de triângulos. Acredito que em consequência desta orientação «bloqueei» a capacidade de eles chegarem a uma conclusão. (1.ª reflexão)

Pelo seu lado, Célia aponta a utilização deste material como positiva para a aprendizagem dos alunos:

Nesta prática verifiquei que a utilização deste material em particular permitiu aos alunos a análise e observação de construção de figuras geométricas (nomeadamente triângulos) o que os ajudou a compreender melhor a relação existente entre os comprimentos dos lados de um triângulo. (1.ª reflexão)

Eva usa material manipulável na análise de relações numéricas. Por exemplo, usa o material Cuisenaire para promover a identificação de frações equivalentes e a comparação e ordenação de números racionais não negativos. Procura propor tarefas que envolvam a utilização de materiais, adequando essa utilização aos objetivos visados:

[Quando seleciono o material] procuro constatar a sua intencionalidade mediante as diferentes situações e finalidades propostas, compreendendo que a sua utilização deve ser adaptada ao contexto da turma.

As estagiárias refletem também sobre a aprendizagem dos alunos. Analisando uma aula que lecionaram, descrevem o seu papel e o papel dos alunos, apoiando a sua reflexão na

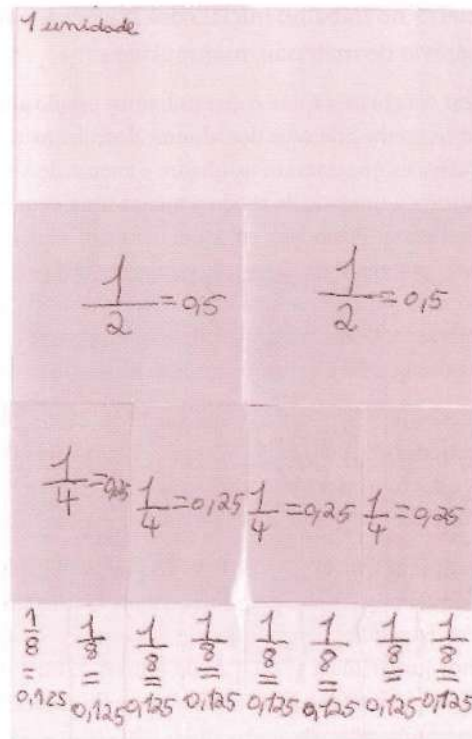


Figura 4. Registo do aluno Augusto, relacionando a representação fracionária e a decimal

análise das produções dos alunos e dos episódios que consideram mais significativos para a sua aprendizagem.

No 5.º ano, na introdução ao trabalho com números racionais não negativos, algumas estagiárias prepararam uma aula em que, a partir da divisão em partes iguais de uma unidade contínua (uma tira de papel), os alunos chegam à representação em forma de fração, que usam pela primeira vez. Esta aula, à semelhança das restantes, foi previamente discutida com o professor supervisor, com o intuito de analisar a exploração que a tarefa possibilita e a sua adequação aos conhecimentos anteriores dos alunos e à aprendizagem prevista para o seu ano de escolaridade. Célia descreve o início da tarefa:

Comecei por distribuir, a cada aluno, um conjunto de quatro tiras de folhas coloridas, de quatro cores diferentes e identificar a tira verde como uma unidade. De seguida dobramos em duas partes iguais a tira azul (ficando com $\frac{2}{2}$), dobramos a tira cor-de-rosa duas vezes a meio (ficando com $\frac{4}{4}$) e dobramos a tira amarela ao meio três vezes (ficando com $\frac{8}{8}$) e escrevemos a fração correspondente a cada parte, sendo que depois de utilizada para responder às questões, foi colada na folha de registo, como no exemplo do aluno A. (Aula da 5.ª semana de estágio)

Ana descreve um dos momentos de sistematização onde pretende evidenciar as relações que os alunos conseguem

estabelecer no trabalho inicial com frações tendo por base o uso prévio de materiais manipuláveis:

Para tirar conclusões sobre o que tínhamos estado a fazer e sistematizar os conhecimentos dos alunos, descolei as tiras de grandes dimensões que estavam no quadro e apenas deixei a tira verde que indicava a unidade de modo a iniciar uma pequena exploração e discussão. Posto isto, coloquei uma tira azul, que era referente a $\frac{1}{2}$, por baixo da tira verde e perguntei ao mesmo tempo «Se tivermos $\frac{1}{2}$ quanto nos falta para obtermos uma unidade?» e os alunos responderam corretamente «Faltam-nos $\frac{1}{2}$ » — e eu coloquei a tira que faltava para completar a unidade.

Seguidamente, retirei as duas tiras de $\frac{1}{2}$ do quadro, coloquei 3 de $\frac{1}{4}$ e questionei «Então e se já tivermos $\frac{3}{4}$ quanto nos falta para obtermos uma unidade?» e responderam corretamente que faltava $\frac{1}{4}$ e eu coloquei a tira que faltava para completar a unidade.

Para complicar um pouco mais, retirei as quatro tiras referentes a $\frac{1}{4}$, coloquei uma de $\frac{1}{8}$ e perguntei quias eram as hipóteses que tínhamos para obter uma unidade e os alunos responderam que podíamos juntar mais $\frac{7}{8}$, ou $\frac{1}{8}$ mais $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (à medida que iam dando as hipóteses eu fui colocando no quadro as peças respetivas).

Nesta exploração coloquei outras questões idênticas às acima referidas sempre com o intuito de compreender se os alunos conseguiam reconstruir a unidade e durante a discussão percebi que os alunos já conseguiam fazer comparação entre frações, pois alguns referiram, por exemplo, que $\frac{1}{2}$ era igual a $\frac{2}{4}$. (Aula da 5.ª semana de estágio)

Ana verifica que esta abordagem permite que os alunos compreendam a fração como parte-todo e reconstruam a unidade a partir das suas partes, iniciando assim a comparação de números racionais representados na forma de fração e a identificação de frações equivalentes.

CONCLUSÃO

Como referimos, o estágio constitui um momento fundamental da formação inicial dos futuros professores, proporcionando o contacto com diversas vertentes da prática profissional, em especial com a prática letiva. A organização do curso promove a articulação entre as unidades curriculares de didática específica e de prática de ensino supervisionado, apoiando as estagiárias na preparação das suas aulas e na reflexão sobre a prática. Procura-se, deste modo, conjugar conhecimento teórico e conhecimento da prática profissional, proporcionando uma fundamentação para as propostas de trabalho com vista à aprendizagem dos alunos.

A reflexão que as futuras professoras fazem sobre a sua prática apresenta contributos do estágio para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional. Na reflexão sobre a lecionação, analisam as suas ações e questionam-nas, procurando tanto aspetos a melhorar como aspetos positivos e perspetivando desse modo a sua prática futura. Além disso, identificam o contributo dessa prática para a aprendizagem matemática dos alunos. Salientam em especial o papel dos materiais manipuláveis e das tarefas desafiantes, bem como da dinâmica da aula, enfatizando a importância dos momentos de trabalho autónomo, discussão e sistematização para a aprendizagem dos alunos, numa lógica de abordagem exploratória que experienciam na sua prática ainda durante a formação inicial. O seu empenho neste tipo de trabalho mostra que estas orientações curriculares podem ter um lugar importante na formação inicial dos futuros professores.

Nota

[1] A realização deste trabalho foi financiada por fundos nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Referências

- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11–17.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Org.), *Educación matemática: Teoría, crítica y práctica* (pp. 93–98). Barcelona: Graó.
- ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.
- Serrazina, L. (1999). Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em Matemática num contexto de reforma curricular no 1.º ciclo. *Quadrante*, 8(1–2), 139–168.

NEUSA BRANCO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO, INSTITUTO POLITÉCNICO DE SANTARÉM E UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO DO INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

JOÃO PEDRO DA PONTE

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

Frisos no GeoGebra

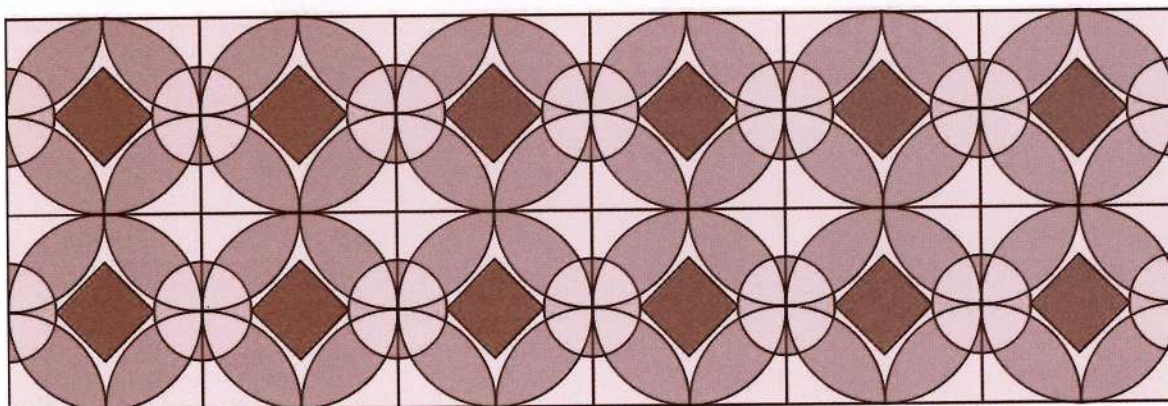


Figura 1

A atividade intitulada «A Matemática dos nossos frisos» foi desenvolvida por todas as turmas de 8.º ano da Escola Eng.º Duarte Pacheco em Loulé e enquadrou-se no âmbito da utilização de metodologias de ensino e aprendizagem que intensificassem o recurso às novas tecnologias em ambientes digitais, promovendo a utilização do software interativo GeoGebra. A sua aplicação teve como principal objetivo o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem autónoma, recorrendo a estratégias que envolvessem o aluno no seu processo de aprendizagem, podendo ser dinamizada na unidade das Isometrias do 8º ano. Esta atividade permite ao aluno estabelecer conexões entre a matemática e a arte através da construção de frisos, estimulando ainda a criatividade.

Numa fase inicial foi realizada uma visita de estudo aos Jardines Reales Alcazares, em Sevilha, e sugerido aos alunos a recolha de fotografias de alguns azulejos para posterior análise. Depois de lecionado o capítulo das Isometrias e para sua consolidação foi sugerida a realização de um trabalho a pares em que os alunos deveriam elaborar um friso no GeoGebra. No final, todos os trabalhos foram expostos à comunidade educativa.

Para orientar os alunos, foi sugerida inicialmente a criação de um motivo, ao qual deveriam ser aplicadas diferentes isometrias até obter um friso. Apresentamos em seguida um exemplo de uma construção de um friso apresentado por dois alunos (Figura 2), bem como exemplos de possíveis ferramentas do *software* utilizadas.

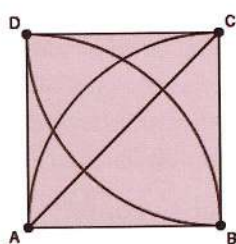


Figura 2. Motivo inicial

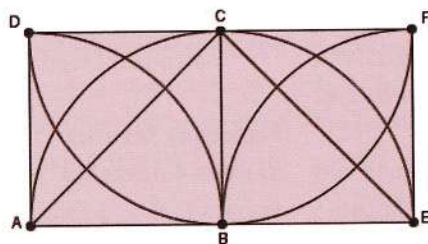


Figura 3

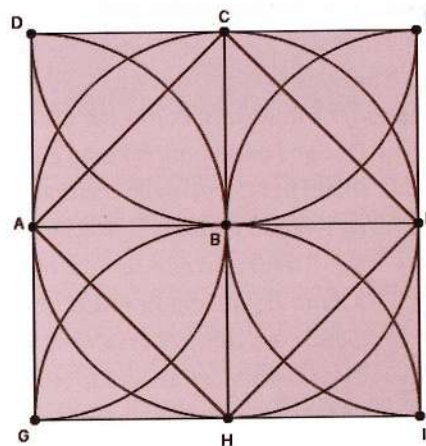


Figura 4

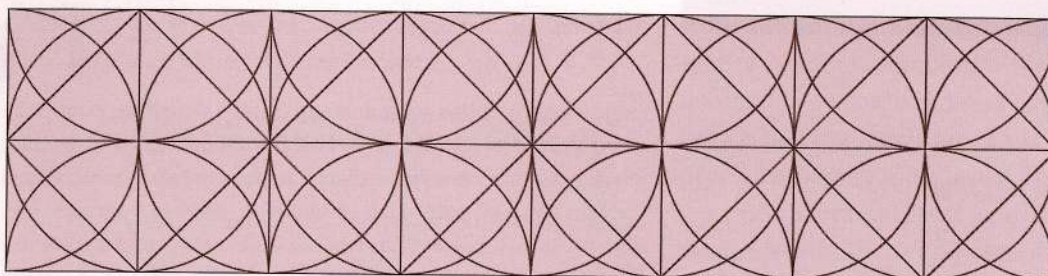


Figura 5

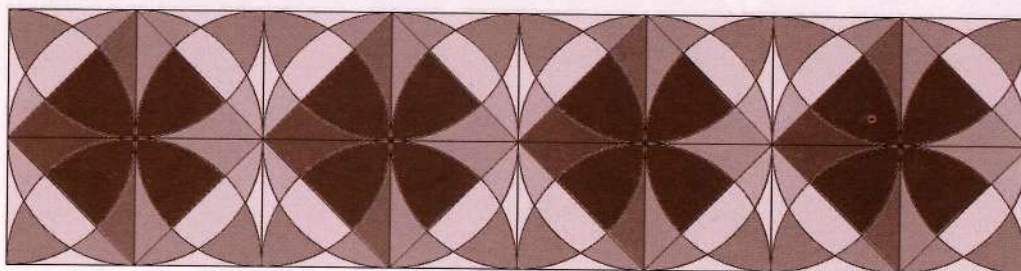





Figura 6

Após escolhido o motivo inicial, construíram uma reflexão segundo a reta BC recorrendo à ferramenta  Reflexão (Objeto, Reta), obtendo a figura 3.

Com a ferramenta  Rotação (Objeto, Centro, Amplitude) construíram uma rotação do retângulo [AEFD] com centro em B e amplitude de 180° , obtendo a figura 4.

Em seguida recorreram à ferramenta  Translação (Objeto, Vetor) e construíram a imagem do quadrado [GIFD] pela translação associada ao vetor \overline{AE} , repetindo este processo de modo a obter o friso da figura 5.

Para finalizar recorreram ao *software Paint* no qual coloriram o friso. A figura 6 é o resultado final apresentado por dois alunos.

Os trabalhos, além de proporcionarem maior familiarização com o Geogebra, permitiram a aplicação das isometrias ajudando os alunos a compreender os conceitos e suas aplicações e ainda estabelecer ligações com cálculo de áreas e perímetros, como a sugestão que a seguir apresentamos.

Tendo por base a figura 7 é possível levar os alunos a responder a questões, como por exemplo:

- Designa por R uma reflexão que permite obter o quadrado BEFC a partir do quadrado ABCD. Indica o eixo de reflexão da transformação geométrica R.
- Seja S a rotação que permite obter o quadrado GHBA a partir do quadrado ABCD. Indica um valor da amplitude e o centro dessa rotação.
- É possível obter o quadrado HIEB a partir do quadrado ABCD por uma translação? Justifica a tua resposta.

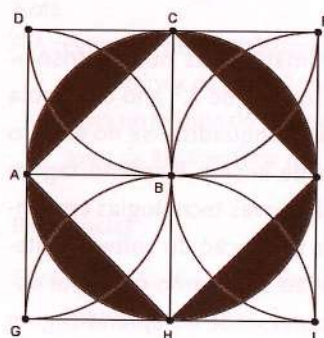


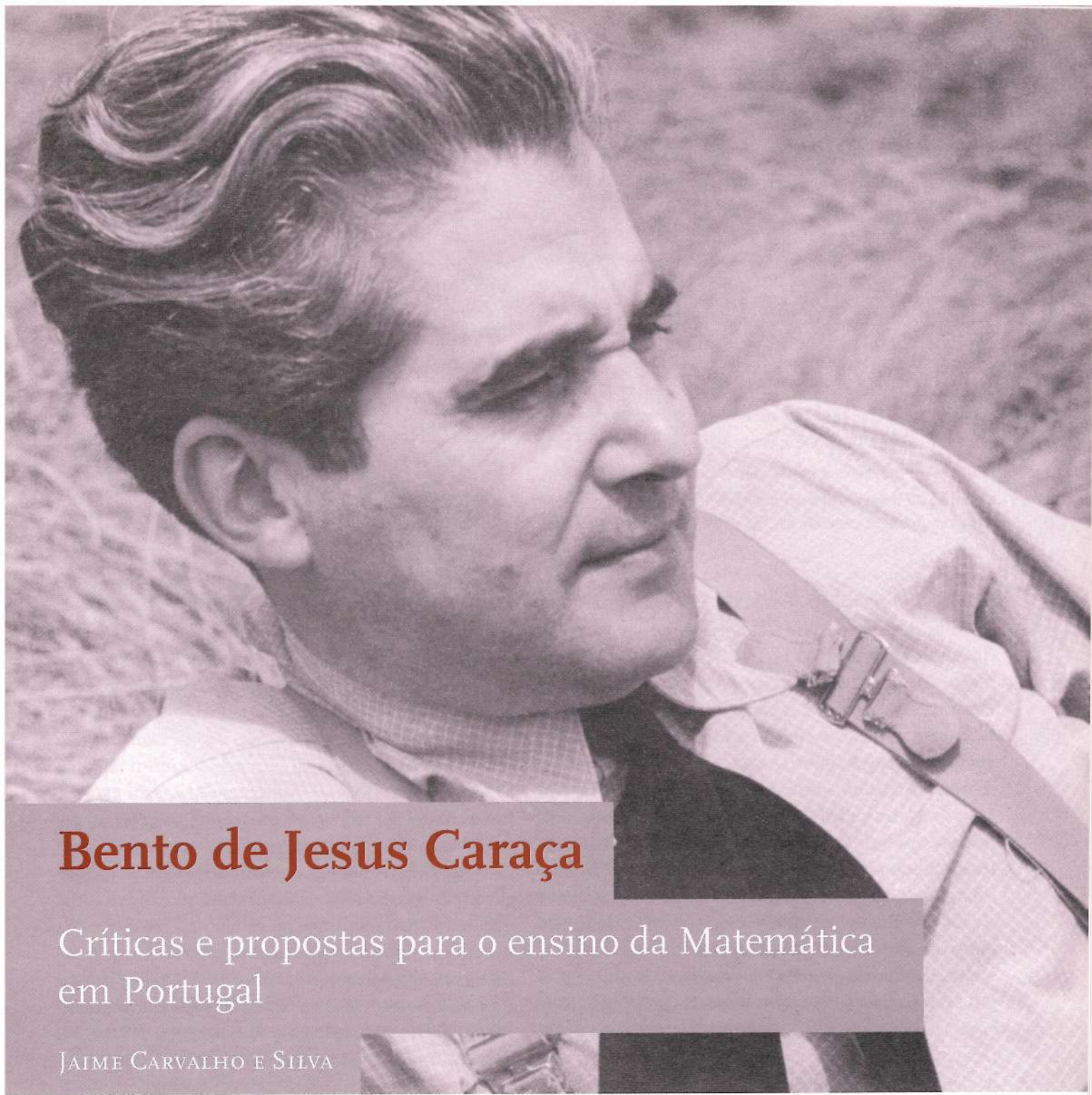
Figura 7

- Justifica que a figura apresentada tem simetria rotacional. Na tua justificação deves referir todas as possíveis amplitudes para essas rotações centradas no ponto B.
- Sabendo que $\overline{AE} = 6$ cm, determina o valor exato da área sombreada da figura.

FERNANDA MENINA

SANDRA GUERREIRO

ESCOLA E. B. 2, 3 ENG.º DUARTE PACHECO — LOULÉ



Bento de Jesus Caraça

Críticas e propostas para o ensino da Matemática em Portugal

JAIME CARVALHO E SILVA

Foi recentemente disponibilizado em linha pela Fundação Mário Soares um conjunto de documentos pessoais de Bento de Jesus Caraça, incluindo muitos manuscritos, cedidos pelo seu filho João Caraça. Este espólio contém elementos muito importantes para podermos conhecer melhor as ideias de um dos pensadores mais originais do nosso século XX.

Dentro desse espólio estão as notas manuscritas inéditas^[1] de uma conferência proferida por Bento de Jesus Ca-

raça no Liceu Pedro Nunes. Este manuscrito inclui as notas tomadas por Bento Caraça sobre as questões colocadas pelos assistentes, inclusive sobre as respostas de Bento Caraça. Estas notas são muito interessantes e serão analisadas em detalhe noutra publicação, mas aqui iremos integrar algumas ideias retiradas dessas notas numa análise global do pensamento de Bento de Jesus Caraça sobre o ensino da Matemática em Portugal, cuja atualidade é gritante.

Notas

1

1 - O Dr. Ferreira de Macedo ocupou-se principalmente do ensino da geometria; eu vou ocupar-me principalmente do da álgebra.

As críticas a fazer não são muitos números
nem muitos graves.

Satisfazer os seus fins?

Os fins próprios¹¹ do ensino de Matemática nos
Vieus são dois:

(s.d.), «Apontamentos sobre conferência sobre programas e ensino da matemática no ensino secundário»

CasaComum.org, Disponível http://hdl.handle.net/11002/fms_dc_54063

Antes de discutir o presente devemos ter algum conhecimento do passado. Em particular devemos ter conhecimento do passado em realidades próximas da nossa, e, por maioria de razão, na nossa própria realidade. Infelizmente o nosso passado recente é frequentemente ignorado e as ideias apresentadas pelos nossos melhores pensadores desaparecem facilmente da nossa memória coletiva. Um dos pensadores que mais batalhou pela renovação do ensino da Matemática em Portugal foi, sem dúvida, Bento de Jesus Caraça. Além de intervenções de fundo mais conhecidas, são de destacar a sua participação na fundação e nos corpos gerentes da Sociedade Portuguesa de Matemática (fez parte das quatro Direções eleitas entre 1940 e 1947) sendo aí de destacar a sua participação na Comissão Pedagógica, a sua intervenção como responsável da Secção «Pedagogia» da *Gazeta de Matemática* (a secção deixou de aparecer com a indicação de um responsável a partir da morte de Bento Caraça) e diversos textos de intervenção na revista *Gazeta de Matemática* (são notáveis as polémicas com José Sebastião e Silva a propósito do ensino dos logaritmos e a polémica sobre os resultados dos exames de aptidão à Universidade).

A Comissão Pedagógica da Sociedade Portuguesa de Matemática estabeleceu um plano de atividades mal foi criada e este foi aprovado em Assembleia Geral da SPM. Além de intervenções pontuais em questões então candentes, é de destacar uma preocupação com a melhoria do ensino da matemática em Portugal em várias vertentes, apontando-se:

- i) «a preparação cultural e pedagógica dos professores de Matemática do ensino secundário»;
- ii) os métodos de ensino como «a possível introdução de métodos novos de ensino, tais como os métodos laboratoriais para os rudimentos de geometria»;
- iii) o incentivo do gosto pela matemática sendo apontada a «criação de clubes de Matemática».

A preocupação de Bento Caraça com o ensino da Geometria espelha-se nas páginas da *Gazeta de Matemática* com a publicação de vários originais e traduções relativas ao tema. Em duas notas da secção «Pedagogia» nos números 14 e 16 dessa revista pode-se continuar a ver essa preocupação: «Parece que os novos métodos de ensino vão enfim penetrando (quão lentamente!) entre nós» sendo citado por Bento Caraça o «ensino experimental da Geometria».

Infelizmente foi preciso esperar pelos anos 90 do século XX para ver reaparecer em Portugal, embora de forma inicialmente demasiado débil, o ensino da Geometria nos moldes preconizados por Bento Caraça. Hoje o «ensino experimental da Geometria» está de novo em causa em Portugal.

Não deixa de ser surpreendente a atualidade das preocupações expressas por Bento Caraça ou pela Comissão Pedagógica da SPM. Mais uma razão para a obra de Bento Caraça ser devidamente estudada e divulgada. Claro que não será surpreendente que uma personalidade ímpar faça análises que resistam à voragem do tempo. Mas continua a ser indispensável nós refletirmos sobre essas análises e até sobre a razão pela qual essas análises são quase esquecidas.

A furiosa especialização dos tempos atuais deixa para segundo plano as tentativas de visões globais do sistema social e educativo. Não era claramente estreito o ponto de vista de Bento Caraça, como se espelha nas suas diversas intervenções. Por exemplo, os dois volumes das *Lições de Álgebra e Análise*, como bem indicou Sebastião e Silva, apresentam «a Matemática como se fosse uma obra de arte, numa nova linguagem — viva, clara, incisiva, cativante»^[2]. O texto está cheio de notas históricas, de indicações bibliográficas detalhadas, de complementos que alargam os horizontes dos leitores e lhes dão uma visão sem par da riqueza, variedade e vitalidade da Matemática; como exemplos desses últimos podemos apontar textos sobre a potência do numerável e a potência do contínuo, os quaterniões, as construções com régua e compasso, a teoria das substituições, o axioma de Zermelo ou a discussão do conceito de curva (incluindo o exemplo da curva de Hilbert que preenche o plano).

Na polémica com Sebastião e Silva sobre o ensino dos logaritmos este defende que se deve ensinar como se cons-



«Vila Viçosa? Bento Caraça»

CasaComum.org, Disponível http://hdl.handle.net/11002/fms_dc_54280

trôu uma tábua de logaritmos; Bento Caraça contrapõe^[3] que não há vantagem em ensinar os alunos a construir um instrumento que já se encontra construído no mercado, até porque em várias áreas já se começava a substituir o seu uso pelo das réguas de cálculo e das máquinas de calcular. Bento Caraça entendia que estas sim deviam ser objecto de estudo pelo seu interesse prático e reclamava contra os exageros de cálculo associados à tábua de logaritmos «exercendo a sua tiraniazinha sobre a pobre massa académica» e citando um exemplo de uma prova de exame em que se pediam cálculos tão rigorosos que se obtinha a posição de um navio no mar a menos de um milímetro!

A propósito desta discussão, por duas vezes, Bento Caraça fala da estrutura do ensino secundário ao afirmar que o ensino secundário deve ser *para todos* e não se deve submeter às necessidades de nenhuma futura profissão em par-

ticular (relembremos que na altura apenas havia 11 anos de escolaridade). E defende que vários temas ausentes dos programas deviam estar aí presentes porque «na vida contemporânea têm uma importância tal que devem ser ensinados a todos»; dentre esses temas cita: a noção de probabilidade, rudimentos da estatística, tábuas de mortalidade. Indica outros assuntos que considera muito importantes e estavam então ausentes dos programas: o manejo da régua de cálculo e da máquina de calcular, as aproximações no cálculo numérico, a resolução de triângulos não rectângulos. E cita ainda outros assuntos também então ausentes mas a que atribui essencialmente valor cultural como a Geometria Analítica e a teoria dos complexos.

No manuscrito referido no início, Bento Caraça indica qual a sua visão sobre «os fins *próprios* do ensino da Matemática nos liceus» e que indica serem dois:

- a) familiarizar os alunos com a técnica do cálculo algébrico elementar e o das primeiras propriedades geométricas das figuras.
- b) dar-lhes uma primeira vista de conjunto sobre os fundamentos do edifício matemático.

Como refere que as questões de Geometria já foram abordadas numa conferência anterior de Ferreira de Macedo^[4], apenas foca as questões relacionadas com a Álgebra. Bento Caraça entende que no domínio da Álgebra o ensino liceal não satisfaz nenhuma das duas finalidades. No que diz respeito à primeira finalidade escreve que «é frequente encontrar alunos nos cursos superiores não sabendo operar sobre radicais, desconhecendo inteiramente as regras operatórias das potências chegando mesmo a ignorar as regras elementares do cálculo das frações. Quanto ao cálculo logarítmico, nem falar nisso.» Bento Caraça entende que a situação sobre a segunda finalidade é ainda mais grave pois os alunos pensam que se demonstram certas propriedades que na realidade são definições, mostrando um total desconhecimento sobre o «edifício matemático». Cita os casos de

$$a^0 = 1, a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Refere ainda a confusa conceção de infinito dos alunos dando alguns exemplos dos erros que encontrou:

$$\frac{0}{m} = \infty, \frac{m}{0} = 0, \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \infty.$$

Numa apreciação geral, Bento de Jesus Caraça considera que «o ensino da Matemática faz-se desarticulado, o alunos não aprendem a relação íntima existente entre os seus diversos compartimentos. Atende-se apenas às pedras, sem se ver o belo edifício que com essas pedras vai sendo cons-

As superfícies cilíndricas são 3: circunferência, esfera, parabolóide.

Julho 1944. 25.7.24

(1937-1941), «Manuscritos reproduzindo respostas de alunos nos exames»

CasaComum.org, Disponível HTTP: http://hdl.handle.net/11002/fms_dc_54068

truído. E isso dá origem a (o que até chega a ser chic) certas pessoas se considerarem como não tendo a bossa das matemáticas.» São certamente questões muito atuais.

Em Novembro de 1943 Bento de Jesus Caraça publica na *Gazeta de Matemática* um texto^[5] em que pretende analisar a coordenação (ou falta dela) entre o ensino secundário e o ensino superior através dos resultados dos exames de aptidão ao ISCEF. Começa por estranhar que os alunos das escolas técnicas tenham notas inferiores aos dos liceus no acesso ao ISCEF quando aqueles deviam estar mais motivados do que estes por virem de uma escola (Instituto Comercial) que estaria mais motivada para o acesso ao ISCEF. Contudo da análise sobressai que ambos os tipos de alunos cometem erros perfeitamente aberrantes (do tipo «o lugar geométrico dos lados dum ângulo é a bissetriz») que Bento Caraça atribui à falta de espírito crítico e ao automatismo do ensino da Matemática, com uma clara tendência para aplicar fórmulas e receitas. Depois de algumas reações publicadas na *Gazeta de Matemática* volta ao tema em Fevereiro de 1945 tentando oferecer a sua explicação para tão deplorável estado de coisas^[6].

Por um lado reconhece que há realmente descoordenação entre o secundário e o superior pois declara que «é frequente um aluno chegar ao fim do seu curso médio no ensino técnico comercial sem ter aprendido uma palavra de geometria elementar. E como não parece possível que se ensinem os rudimentos de Geometria Analítica ou do Cálculo Diferencial, incluem-se habitualmente perguntas de geometria elementar sintética nos pontos de resposta obrigatória do exame de aptidão ao ISCEF».

Aponta ainda outras graves disfunções no sistema educativo, como a tendência para haver um número enorme de alunos «externos particulares» e «externos individuais» com altíssimas taxas de reprovações (um Diretor Geral atribuiu este facto ao facto de sermos uma «terra de autodidactas!») ou ainda a deficiente formação de professores (que num severo artigo de Hugo Ribeiro era apontada como a causa principal da degradação do ensino).

Na parte final deste último texto Bento Caraça apresenta as suas ideias sobre o ensino secundário. Entende que o ensino deve ser obrigatório até aos 15 anos (sem distinção alguma entre os então existentes ensino liceal e ensi-

no técnico) onde «se ministrariam os conhecimentos (matemáticos e das outras disciplinas) indispensáveis a todo o cidadão português». Relativamente aos anos seguintes Bento Caraça opina que «nos dois ou três anos seguintes, com um começo de especialização, haveria tempo para dar sólidas bases em cada uma das disciplinas sobre as quais se pudesse edificar um ensino superior digno desse nome.»

Claro que os tempos mudam, as condições sociais também, a ciência matemática evolui e não se pode estar a aplicar *ipsis verbis* a uma época o que foi preconizado noutra.

Mas de tudo isto que podemos retirar como lição do pensamento de Bento Caraça?

Essencialmente que depois de uma formação geral fornecida pelo ensino básico (e a atual estrutura coincide com a preconizada por Bento Caraça) deve haver uma diversificação de acordo com a preparação pretendida no fim do ensino secundário. Se uns vão para o ensino superior deve haver uma definição mínima do que é pretendido no início do ensino superior para que se possa fazer uma discussão fundamentada. Se outros terminam os seus estudos no 12.º ano deve pensar-se o que será útil a esses futuros cidadãos. Se o objectivo é que o fim do ensino secundário corresponda a uma formação precisa então deve ser definido com alguma clareza qual o perfil da formação e em seguida elaborar o currículo de acordo com o perfil pretendido. Todas estas três finalidades do ensino secundário devem merecer igual importância por parte dos responsáveis para que não se crie a ideia de que há umas vias nobres e outras menos nobres e não se repita a divergência de classificações observada por Bento Caraça. Cada uma das três vias escolhidas deve ser resultado de uma opção consciente e não a procura da via mais fácil ou da via onde ainda sobram lugares vagos.

No manuscrito referido no início, Bento Caraça faz algumas considerações sobre o ensino da Matemática a nível secundário, de modo que se cumpram as finalidades que definiu. Considera que o estudo «dos números irracionais e da continuidade» é um dos «mais delicados do ensino secundário». Critica várias opções correntes sobre o estudo das tangentes e dos limites infinitos e o uso que se faz do símbolo $\frac{m}{0}$ que entende deve ser banido do ensino secundário. A propósito destes temas foi criticado no

final da conferência por dois professores (Dr. Tenório^[7] e Dr. Leote^[8]) a quem responde o mesmo: «Não disse que os professores não ensinavam bem, disse que os alunos não aprendiam».

Muitas das discussões sobre o perfil de formação ficam-se por definições generalistas que nunca vão até ao âmago das diferentes disciplinas. Se Bento Caraça já reclamava, com insistência, a inclusão de temas como a noção de probabilidade, rudimentos da estatística, tábuas de mortalidade, o manejo da máquina de calcular, as aproximações no cálculo numérico, a resolução de triângulos não rectângulos, a Geometria Analítica e a teoria dos complexos, isso só reforça a necessidade de uma reflexão muito cuidada sobre que Matemática ensinar em cada ciclo de ensino. Acresce o facto de a Matemática se continuar a desenvolver tanto que novas áreas como a teoria de grafos ou os sistemas dinâmicos se impõem como áreas importantes e a sua entrada no ensino aparece como inevitável.

Uma área com a importância da matemática na sociedade atual, em que praticamente todos os atos do cidadão estão dependentes da «digestão» de dados numéricos, não será possível uma boa formação sem uma lugar adequado da Matemática em todas as formações. Nunca será dando um lugar menor à Matemática nas Escolas Profissionais que se conseguirá uma melhor formação. Se eventualmente a Matemática é menos popular, isso deve-se a razões circunstanciais que devem ser combatidas de forma ativa por todos.

O currículo de matemática das escolas profissionais (assim como os de qualquer outra escola) deve obedecer a princípios gerais sólidos. Na «Gazeta de Matemática» aparecem relatadas as conclusões da Conferência Internacional da Instrução Pública promovida pela UNESCO^[9]. Bento Caraça já não promoveu esta publicação mas certamente subscreveria a maioria das suas conclusões. Pode-se ler aí, entre muitas outras recomendações:

- O ensino da matemática (...) deve dispor de um número de horas adequado;
- nos países em que o ensino da matemática não figura a título obrigatório em certas secções (secções literárias, por exemplo), um ensino de matemática com tendência cultural, de preferência a pura técnica matemática, deveria ser organizado, pelo menos a título facultativo;
- o programa de matemática de uma secção determinada da escola secundária deve estar de harmonia com os fins gerais do ensino deste ramo e com os objectivos particulares da secção;



«Alentejo. Bento Caraça com um cabrito ao colo»

CasaComum.org, Disponível http://hdl.handle.net/11002/fms_dc_54281

- os programas serão mantidos em dia e adaptados aos progressos das ciências e às necessidades da técnica e da vida modernas, sacrificando questões antiquadas;
- é necessário despertar e manter o interesse dos alunos tanto pela matemática como pelas suas aplicações;
- é preciso aproveitar questões suscitadas pelas situações concretas, não somente para mostrar a importância prática da matemática, mas sobretudo para motivar desenvolvimentos teóricos;
- é indispensável ensinar a pôr problemas, a buscar dados, a explorar e apreciar resultados;
- é preciso dar o sentido de aproximação, da ordem de grandeza e de verosimilhança dos resultados;
- é indispensável indicar as etapas importantes da história das noções e das teorias matemáticas estudadas;
- é preciso que o professor de matemática em exercício possa estar a par ao mesmo tempo da evolução moderna das ciências matemáticas teóricas, das aplicações actuais importantes e dos progressos recentes da didática da sua disciplina;
- visto que em todos os países um ensino adequado da matemática é um elemento essencial da educação, importa assegurar o recrutamento dum número suficiente de professores competentes.



(1946), «Bento Caraça com o seu filho João Manuel Gaspar Caraça no dia do seu primeiro aniversário»

CasaComum.org, Disponível http://hdl.handle.net/11002/fms_dc_54229

Em que data decorreu este congresso? Em 1956. Mas podia ser qualquer data dos últimos cem anos, por exemplo 2014.

Segundo o testemunho de António Aniceto Monteiro, Bento Caraça era ao mesmo tempo^[10]: «um distinto professor de matemática, um grande impulsionador da cultura popular e um eminente escritor e conferencista de temas científicos, literários e artísticos. Era um grande carácter, conservando sempre a feição modesta de homem do povo, de trato fino e amável, e idéias generosas.»

Termino com uma citação de um texto de Sebastião e Silva sobre Bento Caraça em que aquele relata as influências deste no alerta contra os excessos do formalismo na matemática:

Quando hoje me acontece — o que não é raro — ver alguns jovens portugueses caídos em êxtase perante a obra desse admirável autor policéfalo que se chama Nicolas Bourbaki (a quem devo aliás grande parte da minha formação), apetece-me logo espicaçá-los, dizendo-lhes que estão em perigo mortal de fanatização. (...) Devo a António Monteiro o ter-me ensinado a descobrir os méritos reais da criança. Mas foi Bento Caraça quem me ajudou a prever os possíveis inconvenientes do estruturalismo de Bourbaki, bem como a maneira de os combater. O seu ponto de vista neste caso, resume-se em poucas palavras: «A intuição, que se adquire e afina no contacto com os problemas reais, é cruel para quem a despreza: o seu castigo é a esterilidade». Eu sei que não basta a intuição, o contacto com a realidade: já se viu que a lógica é necessária (...) Mas quando, ao tentar fazer investigação, dou comigo às vezes a construir esquemas cada vez mais abstractos, sem finalidade, começo a ver o seu sorriso, entre irónico e afectuoso,

de Bento Caraça, e julgo ouvir a sua voz dizer-me, com lhaneza alentejana: «Amigo, você por esse caminho arrisca-se a ficar perdido em congeminções escolásticas: vai ser como um moinho, que mexe e remexe, sem ter nada dentro para moer.» Acordo então do meu devaneio e prometo a mim mesmo ser mais razoável daí para diante.^[11]

Notas

[1] (s.d.), «Apontamentos sobre conferência sobre programas e ensino da matemática no ensino secundário», CasaComum.org, Disponível http://hdl.handle.net/11002/fms_dc_54063 (2014/4/26)

[2] Silva, José Sebastião e, *Bento Caraça e o ensino da Matemática em Portugal*, «Vértice», 1978, vol. XXXVIII, pp. 516–523.

[3] Caraça, Bento de Jesus, *Nota*, «Gazeta de Matemática», 1942, n.º 11, pp. 16, e Caraça, Bento de Jesus, *Resposta às considerações anteriores* «Gazeta de Matemática», 1942, n.º 12, pp. 14–17.

[4] António Ferreira de Macedo (1887–1959) foi professor de Matemática no IST, foi um dos fundadores da Universidade Popular Portuguesa e publicou na «Biblioteca Cosmos» os livros «A geometria ao alcance de toda a gente» (2 volumes).

[5] Caraça, Bento de Jesus, *Algumas reflexões sobre os exames de aptidão*, «Gazeta de Matemática», 1943, n.º 17, pp. 6–8.

[6] Caraça, Bento de Jesus, *Em guisa de continuação de um debate*, «Gazeta de Matemática», 1945, n.º 23, pp. 7–9.

[7] Alfredo Tenório de Figueiredo, professor metodólogo no Liceu Normal de Lisboa.

[8] Jaime Furtado Leote, professor metodólogo no Liceu Normal de Lisboa.

[9] Recomendação n.º 43 da Conferência Internacional da Instrução Pública, «Gazeta de Matemática», n.º 68–69, 1957, pp. 30–34.

[10] (1949), «Revista Universitária n.º 2 — artigo de homenagem a Bento Jesus Caraça da autoria A. A. Monteiro.», CasaComum.org, Disponível http://hdl.handle.net/11002/fms_dc_53828

[11] Silva, José Sebastião e, *Bento Caraça e o ensino da Matemática em Portugal*, «Vértice», 1978, vol. XXXVIII, pp. 516–523.

JAIME CARVALHO E SILVA

A atividade de resolução de problemas matemáticos em sala de aula

EDUARDA MOURA

Resumo. Neste artigo é discutido o tema curricular da resolução de problemas matemáticos no 2.º ciclo em sala de aula do ponto de vista da aprendizagem em interação. Com base em propostas e recomendações inspiradas em observações e discussões feitas durante sessões de formação de professores, algumas situações são exemplificadas e discutidas ilustrando a complexidade que o professor encontra quando tem como objetivo fazer sentido da resolução de problemas como atividade de sala de aula.

No Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 2.º Ciclo (ME, 2005) as sessões de formação foram estruturadas para que os professores tivessem a oportunidade de: a) fazer uma análise curricular de problemas matemáticos; b) resolver os problemas e pensar nos problemas em termos dos processos que eles próprios utilizaram para os resolver; e, c) aprender a ouvir as estratégias das crianças integrando essas estratégias na monitorização da atividade de resolução de problemas. Neste artigo discutimos alguns exemplos dos problemas didáticos que o professor pode encontrar quando faz sentido da resolução de problemas como atividade de sala de aula.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: RECOMENDAÇÕES DA INVESTIGAÇÃO

Aprendizagem. Os aspectos mais estudados da resolução de problemas matemáticos são o desenvolvimento de estraté-

gias para resolver problemas, o autocontrole e a satisfação intelectual resultante da atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da metacognição. Os processos associados à resolução de problemas requerem uma prática de reflexão e automonitorização que leve ao desenvolvimento de heurísticas, procedimentos matemáticos, ter consciência de processos cognitivos e autocontrole.

Todos estes resultados de investigação levam a levantar a hipótese de que os processos da aprendizagem da resolução de problemas concorrem com a compreensão dos conceitos matemáticos que está subjacente aos problemas o que torna o processo da aprendizagem mais complexo. Assim, é um desafio para o professor desenvolver esta atividade em sala de aula.

Aprender a resolver problemas foi também estudado em relação a estilos cognitivos e diferenças individuais bem como concepções erróneas sobre a matemática que podem impedir a criança de resolver problemas. Têm ainda sido documentadas as concepções restritas que as crianças têm sobre o que constitui um problema matemático revelando, por exemplo, concepções simplistas. Detalhes sobre todos estes aspectos da aprendizagem da resolução de problemas podem ser consultados em Schoenfeld (1992) e Silver (1985).

Documentados foram também os aspectos afetivos da resolução de problemas relativamente a experiências emocionais que contribuem para a formação e reforço de sentimentos que podem não ajudar a criança a resolver problemas (McLeod, 1992). Como dar a conhecer aos alunos as

limitações das suas escolhas em resultado dos seus estados afetivos — negativos ou positivos — pode constituir uma forma de ação para o desenvolvimento da atividade de resolução de problemas, podendo a atividade ser autónoma e não dependente do desempenho dos professores ou outros alunos.

O ensino. O matemático George Polya foi durante algum tempo o maior precursor do ensino da resolução de problemas preocupando-se também em pensar sobre como poderia ensinar os alunos a resolver problemas (Polya, 1985). Investigação sobre o ensino da resolução de problemas tem identificado vários fatores que não facilitam o seu ensino. As crenças e conceções dos professores sobre a matemática e seu ensino e aprendizagem são incompatíveis com a atividade que o professor tem de desenvolver para que os seus alunos aprendam a resolver problemas. Mesmo quando os professores aderem à resolução de problemas em sala de aula, investigação tem mostrado que os professores passam a maioria do tempo a modelar estratégias e a resolver problemas de aplicação direta. Por outro lado, não passam tempo suficiente em atividades de exploração dos problemas, na discussão sobre a seleção de uma dada estratégia, e em atividades que tornem parte integrante da resolução de problemas pensar sobre a resolução do problema, o seu processo, as estratégias e os métodos usados. Em síntese o tempo dedicado a planear que cada aluno tenha oportunidade de fazer sentido da sua experiência é insuficiente.

Os futuros professores apresentam também dificuldades em ver como podem ensinar a resolver problemas aos seus alunos dado que eles próprios sentem dificuldades em resolver problemas acabando muitas vezes por considerar que, por essa razão, a atividade não é apropriada aos seus alunos. Detalhes sobre o ensino da resolução de problemas podem ser consultados em Fernandes, *et al.*, (1997); Silver (1985); e, Thompson (1992).

Modelação matemática é a tentativa de trazer para a sala de aula situações que envolvem a separação do que é matemático numa dada situação e do que é acessório ou ruído (Matos, *et al.*, 1995). A atividade de modelação matemática permite o estudo de propriedades matemáticas de certos modelos e a escolha e justificação de modelos na interpretação matemática de uma situação concreta. Este tipo de atividade é logo facilmente adaptável à resolução de problemas dado a interpretação matemática de uma situação concreta ser facilmente problemática.

Nos relatórios sobre investigação da resolução de problemas nos últimos cinco anos, Lesh & Doerr (2003), apontam para o reforço destas recomendações e encorajam os

professores a trabalhar situações que envolvem vários ciclos de modelação, talvez na tentativa de diversificar, bem como desdobrar, o processo da aprendizagem da resolução de problemas na sala de aula.

O ambiente. O ambiente de sala de aula envolve interações de dois tipos: as interações entre as crianças e o ambiente e, as interações que ocorrem em cada uma das crianças. As interações com o ambiente podem englobar manipulação de objetos, experiências com objetos, interações com os mais diversos artefactos de entre os quais o computador ocupa um lugar primordial e as interações com os outros, com outras crianças e com o professor. Nenhuma interação pode ser planeada na sua totalidade, e as interações de entre cada uma das crianças são resultado de autorregulação (Steffe, 1999). Em consequência, o ambiente que é proporcionado nas aulas de resolução de problemas deve ser propício a que as crianças exteriorizem o que estão a pensar e que o façam também através das suas ações com os artefactos e através das interações com as outras crianças e com o professor.

Segundo Cobb & Bauersfeld (1995) aprender a interagir em pequenos grupos pode ser conseguido através do desenvolvimento de normas sociais que permitem às crianças aprender a ouvir e a fazer sentido matemático do que os outros fazem ou dizem conceptualizando a interação com os outros como uma obrigação. Ainda no contexto da experiência de ensino de sala de aula, tanto em pequenos grupos como em grande grupo, padrões de interação e padrões de argumentação desenvolvem-se de maneiras diferentes e propícias à aprendizagem ativa da matemática e logo podendo ter interesse para um ambiente de sala de aula propício à aprendizagem da resolução de problemas. Nestes ambientes o professor faz sentido da atividade das crianças valorizando as suas produções matemáticas (Wood, Nelson & Warfield, 2001).

Investigação sobre as aprendizagens matemáticas necessárias para que uma criança esteja pronta para enfrentar e participar ativamente em discussões, em grupo, na sala de aula de matemática é ainda não exaustiva. Steinbring (2000) tem estudado como o professor, os alunos e a matemática interagem analisando as interações matemáticas na sala de aula através de um modelo semiótico adaptado à matemática: o triângulo epistemológico. Com estes conceitos e a nível do ensino elementar de problemas aritméticos curriculares, consegue encontrar relações feitas entre os contextos de referência embutidos na didática e na interação da sala de aula e os símbolos matemáticos, neste caso os números inteiros (Steinbring, 2006). Como es-

tes tipos de relações simbólicas podem contribuir para o desenvolvimento de ambientes de sala de aula propícios à aprendizagem da resolução de problemas, poderá talvez ser realizado através de ambientes de aprendizagem em que os professores conseguem ensinar refletindo sobre a atividade simbólica das crianças quando em interação com outras crianças. E trabalhando com os alunos essas relações simbólicas e as operações subjacentes à atividade de simbolização. A construção de relações entre símbolos e referentes requer aprendizagem e estudos que incidam na aprendizagem desta linguagem, envolvida também na resolução de problemas matemáticos, têm revelado que nem sempre estas relações se realizam. Ver por exemplo Lehrer *et al.* (2000), um estudo no qual é recomendado que o desenvolvimento com os alunos da atividade de atribuir símbolos, desenhar diagramas e descrever situações com objetos e conceitos matemáticos deve ser feita de modo a serem os alunos a engendrar tal atividade, opostamente a que as formulações dadas aos problemas, por exemplo, estejam repletas de legendas a decifrar.

Moura (2004) chama a atenção para o papel da construção do conhecimento matemático quando as crianças interagem com outras crianças, defendendo que, em interação, significados matemáticos têm de ser segurados em imaginação e tal não acontece necessariamente em todas as fases da aprendizagem de um conceito. Aprender a interagir de forma a não perder ou ceder significados matemáticos não é garantido, depende da aprendizagem e também da experiência com os conceitos em interação. No desenvolvimento dessa experiência as crianças podem precisar do apoio do professor havendo aqui uma razão adicional para

O senhor Anastácio quer colocar uma cerca à volta de cada um dos quatro canteiros indicados na figura. Sabendo que o perímetro do canteiro A é de 60 m, o do B é de 64 m e o do C é de 56 m, de quantos metros de cerca precisará o senhor Anastácio para o canteiro D?

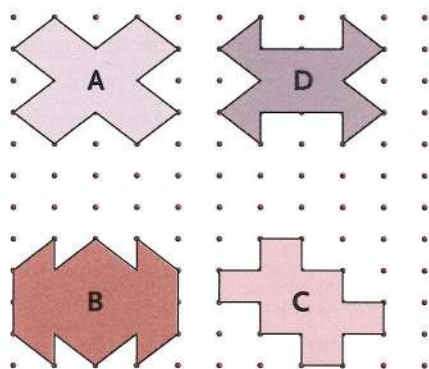


Figura 1. A cerca do Sr. Anastácio

aprender a fazer sentido da forma como as crianças aprendem e como se desenvolve a progressão dessa aprendizagem em interação. Muito está ainda por investigar sobre o desenvolvimento deste tipo de ensino.

Em relação a fatores socioculturais Lerman (2006) exclui os estudos sobre como as crianças podem construir uma epistemologia da matemática própria dentro da escola. Apesar de considerarmos a investigação sociocultural sobre a sala de aula de matemática crucial, dado o detalhe que nos oferece sobre a educação dos alunos numa instituição que historicamente foi desenhada para satisfazer as necessidades da sociedade, não encontramos resultados de investigação que nos informem sobre os aspetos discutidos neste artigo. A discussão aqui feita não exclui portanto que futuras investigações se foquem nos aspetos macrosociais do ambiente de sala de aula propício à aprendizagem da resolução de problemas.

APRENDER A RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS EM SALA DE AULA

As estratégias das crianças. Para qualquer um de nós um problema matemático forma-se quando nos deparamos com qualquer questão ou assunto que envolva dúvida e incerteza. A palavra *problema* vem do grego *pro'blema* e o seu significado enciclopédico é o de obstáculo. Na etimologia da palavra está expresso que a ideia de problema é a de ser capaz de construir perante si um obstáculo a partir de uma situação proposta. Em matemática um problema é também sinónimo de *puzzle*, adivinha ou enigma, é antónimo de certeza e resolver problemas é aprender a lidar com incerteza. Na aprendizagem da resolução de problemas matemáticos por parte das crianças queremos que aprendam a lidar com incerteza, que aprendam a divertir-se com isso e que aprendam matemática nova.

Os problemas trabalhados com os professores foram retirados de diversas fontes. A discussão do problema da Cerca do Sr. Anastácio (Gave, 2001), ver Figura 1, parece-nos relevante no sentido de ilustrar a complexidade de um ambiente de sala de aula de resolução de problemas.

A noção de substituição algébrica está implícita no problema, basta pensarmos sobre o que é necessário saber sobre a linha do perímetro da cerca D e analisarmos de que forma vamos chegar ao valor do comprimento de cada uma das três dimensões a descobrir. São necessárias duas substituições e o problema pode tornar-se mais simples se o transformarmos num problema semelhante em que só uma substituição é necessária, embora muito menos interessan-

te do ponto de vista matemático e da aprendizagem da matemática. As estratégias seguintes poderão aparecer:

- Contar o número de segmentos em que o perímetro se decompõe sem os diferenciar e dividir o perímetro da cerca por esse número;
- Depois de encontrar o lado do retângulo na cerca A, fazer o mesmo na cerca B sem levar em conta que os segmentos do lado e diagonal não são geometricamente iguais;
- Depois de encontrar o lado do retângulo na cerca A, descontá-lo sucessivamente ao perímetro da cerca B — 64, 59, 54, 49, 44, 39, 34, 29 e 24 — e por tentativa erro encontrar o número que cabe oito vezes em 24, ou seja, o número que multiplicado por 8 dá 24, ou somar oito vezes um número até o resultado ser 24.

À primeira vista parece adequado orientar as crianças para a cerca A, sugerindo «tirar o primeiro valor» dividindo 60 por 12. No entanto, orientá-los para a cerca D, e encorajá-los a investigar o que é necessário descobrir para calcular a medida do perímetro envolve pensar ativamente no problema; por isso pensamos ser mais adequado não tomar a decisão de induzir a criança num caminho determinado subtraindo-a da aprendizagem de investigar sobre o problema e do prazer da descoberta. Mais ainda, apesar das crianças demorarem mais tempo, caem menos no erro de contar o número de segmentos nas outras cercas, sem os diferenciar, e fazer uma divisão do perímetro por esse número.

Nos casos em que as crianças não diferenciam os diferentes segmentos de que o perímetro é composto — duas primeiras estratégias — ao questionarmos sobre o que necessitam saber sobre a cerca D, podemos sugerir à partida que façam experiências para pensar sobre as relações entre as medidas dos diferentes segmentos que compõem a linha do perímetro. É mais provável que assim descubram que antes de repetirem a estratégia da divisão em relação à cerca B, têm de descontar na medida total do perímetro a medida das diagonais. Esta estratégia de descontar o valor poderá ter de ser ensinada ou poderá surgir como necessidade lógica, após descobrirem que os segmentos são diferentes. Pedir às crianças para todas as vezes que descobrem a medida de um segmento a escrevam junto de todos os segmentos iguais, em todas as cercas, ajuda as crianças a não esquecer o que estão a fazer e dá-lhes ânimo porque estão a progredir.

Para algumas crianças a diagonal de um quadrado e o lado medem o mesmo. Ao estudar a geometria do quadrado e do retângulo, se as crianças passarem por comparar

diretamente a diagonal do retângulo com o lado, com uma dobragem por exemplo, talvez os diferenciem nas representações. Estas propriedades geométricas quando são simplesmente apresentadas às crianças são esquecidas pois não estão relacionadas com a sua experiência matemática.

Para as crianças familiarizadas com a resolução de problemas é garantido fazer listas, desenhos, esquemas e cálculos sem os apagar, não tendo como objetivo único apresentar uma solução fechada e concisa. Constatamos ser necessário trabalhar com as crianças para as encorajar a criar hábitos de fazer experiências, a interpretar os resultados e a fazer verificações autonomamente. As crianças que não se familiarizam com este tipo de atividade não se mostram ativas sendo necessário encorajá-las a escrever o que estão a pensar e a pensar alto para assim progredirem nas suas formas de pensar.

Monitorizar a atividade da resolução de problemas. Como já referido, a monitorização da atividade de resolução de problemas deve ser feita sempre no contexto da aprendizagem da matemática e de forma a expandir essa aprendizagem.

Durante a formação as crianças estiveram organizadas em pequenos grupos. Verifica-se em alguns casos que as crianças preferem ouvir as explicações dos colegas sem participarem na resolução do problema. Participar na resolução tem de ser conceptualizado pela criança como uma obrigação, embora o professor tenha de garantir que a criança esteja motivada para o fazer, começando por trabalhar com as crianças para que gostem de resolver problemas. Uma outra razão para que as crianças se envolvam em encontrar as suas próprias soluções dos problemas opostamente a ouvirem uma solução, explicada quer pelo professor quer por um colega, é que ouvir a resolução de um problema pode levar facilmente à sua compreensão. No entanto, é totalmente perdida a oportunidade que a criança tem de desenvolver as estratégias necessárias para resolver aquele e subsequentes problemas.

Que uma criança entenda o que as outras crianças estão a fazer ou dizer, ou até saiba inquirir os colegas, sem nunca contribuir para a resolução do problema não é suficiente para considerar que a criança está a participar. Quando o professor notar este padrão tem de intervir de forma a que todas as crianças tenham oportunidade da discussão ser feita à volta da forma como pensaram no problema. A monitorização das interações em pequeno grupo deverá assim incluir este aspeto porque algumas crianças podem saber entender e inquirir os colegas, mas não fazer ouvir as suas próprias ideias, sabendo segurar os seus próprios significados matemáticos em interação.

COMENTÁRIO FINAL

Com o objetivo de tornar as fases de resolução de problemas de Polya em instrumentos pedagógicos que ajudem o professor, a monitorizar a atividade das crianças durante a resolução de problemas, defendemos que o professor estando consciente do papel das fases na resolução de problemas as possa contextualizar na atividade das crianças.

A monitorização das interações nos pequenos grupos em situação de resolução de problemas em sala de aula é um espaço profissional que todo o professor precisa de conquistar. Muito detalhe sobre este tipo de monitorização está ainda por investigar bem como sobre a formação necessária para que os professores não só acreditem que os alunos aprendem a resolver problemas matemáticos, como são capazes de realizar tal ensino.

Como foi acima mencionado, os padrões de interação propícios à aprendizagem da resolução de problemas em sala de aula dependem de vários aspetos da aprendizagem em interação ainda não investigados, tanto em pequenos grupos como em grande grupo, e da aprendizagem da monitorização da atividade das crianças que pode resultar em tais padrões. Esperamos que os exemplos discutidos possam ajudar futuras investigações sobre estas duas dimensões da aprendizagem da resolução de problemas em sala de aula.

Referências

- Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. (Vol. 2). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Fernandes, D., Lester, F., Jr., Borralho, A., & Vale, I. (1997). *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: múltiplos contextos e perspetivas*. Lisboa: Gráfis.
- Gave. (2001). *Provas de Aferição*. Ministério da Educação — Gabinete de Avaliação Educacional. Fonte: <http://www.gave.min-edu.pt/np3/7.htm> [2007, Janeiro].
- Lehrer, R., Schauble, L., Carpenter, S., & Penner, D. (2000). The interrelated development of inscriptions and conceptual understanding. Em P. Cobb, E. Yackel, & K. MacClain (Eds.), *Symbolizing and communication in the mathematics classrooms: perspectives on discourse tools, and instructional design* (pp. 325–360). London: LEA.
- Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in the PME. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 347–366). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. Em R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–34). Mahwah, USA: LEA.
- Matos, J. F., Carreira, S. P., Santos, M. P., & Amorim, I. (1995). A modelação no ensino da Matemática. In J. F. Matos, S. P. Carreira, M. P. Santos, & I. Amorim (Eds.), *Modelação Matemática* (pp. 149–181). Lisboa: Universidade Aberta.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). New York: Macmillan.
- ME, & MCTES. (2005). Despacho conjunto n.º 812/2005. *Diário da República* [2014, Janeiro].
- Moura, E. (2004). *Social interaction in the context of a radical constructivist teaching experiment*, University of Georgia, Athens.
- Polya, G. (1985). *Como resolver problemas*. (2.ª ed.). Lisboa: Gradiva.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.
- Silver, E. A. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale: LEA.
- Steffe, L. P. (1999). Individual constructive activity: An experimental analysis. *Cybernetics & Human Knowing*, 6(1), (pp. 17–31).
- Steinbring, H. (2000). *Chapter 5: Analyses of mathematical interaction in teaching processes*. Mathe2000. Fonte: www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/mathe2000/pdf/rf4-6steinbring.pdf [2013, Outubro].
- Steinbring, H. (2006). *What makes a sign a mathematical sign? — an epistemological perspective on mathematical interaction* (Springer). Educational Studies in Mathematics. Fonte: www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/6semiotic.pdf [2013, Outubro].
- Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching* (pp.127–146). New York: Macmillan.
- Wood, T., Nelson, B. S., & Warfield, J. (Eds.). (2001). *Beyond classical pedagogy*. (Vol. 16). Mahwah: LEA.

EDUARDA MOURA

Wolfram|Alpha para a educação STEM

JOÃO FERNANDES

O Wolfram|Alpha <https://www.wolframalpha.com/> é uma ferramenta web, criada pela empresa Wolfram, que responde a questões em linguagem natural e matemática, realizando computações a partir de uma gigantesca base de dados, algoritmos e métodos. Nas palavras dos criadores, é um motor de conhecimento computacional.

Sendo grátis para usos não comerciais, existem diversas possibilidades de aplicação desta ferramenta no ensino das Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM), explorando este artigo alguns exemplos destas potencialidades.

Como primeiro exemplo, vejamos as capacidades de interpretação de linguagem natural deste motor. No campo de pesquisa, podemos colocar um problema de aritmética simples:

Rachel has 17 apples. She gives 9 to Sarah. How many apples does Rachel have now?

Os resultados (figura 3) mostram as capacidades e as várias formas de representar o problema identificado por este motor. Também podemos pesquisar factos (figura 3), como por exemplo,

age of planet earth

que podem ser usados na resolução de um problema proposto na aula.

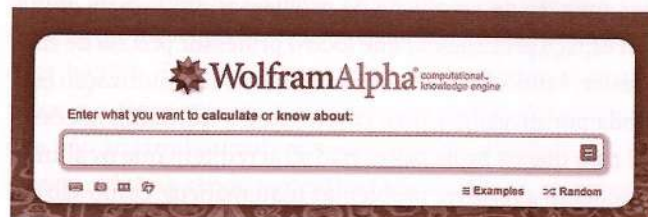


Figura 1. Página de entrada do Wolfram|Alpha



Figura 2. Vídeo explicativo do conceito do Wolfram|Alpha, disponível em <http://www.wolframalpha.com/tour/what-is-wolframalpha.html>

Vejamos agora exemplos para várias disciplinas STEM, na Química, Física, Biologia, Ciências da Terra e Matemática.

QUÍMICA

São muitas as possibilidades de uso desta ferramenta na Química, seja para obter informações sobre elementos químicos ou substâncias, grupos funcionais, estruturas tridi-

Figura 3. Exemplos de interpretação de linguagem natural pelo Wolfram|Alpha

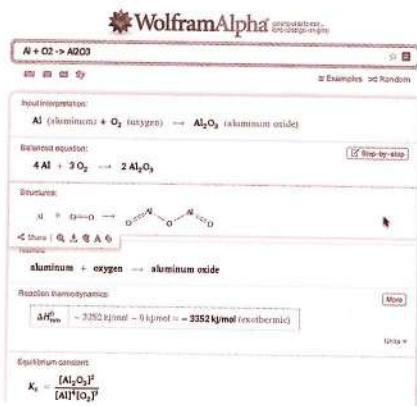


Figura 4. Reacção química

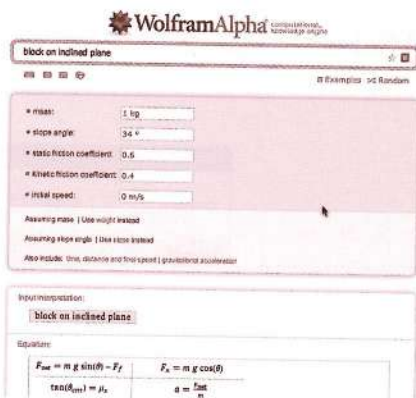


Figura 5. Bloco deslizando num plano inclinado

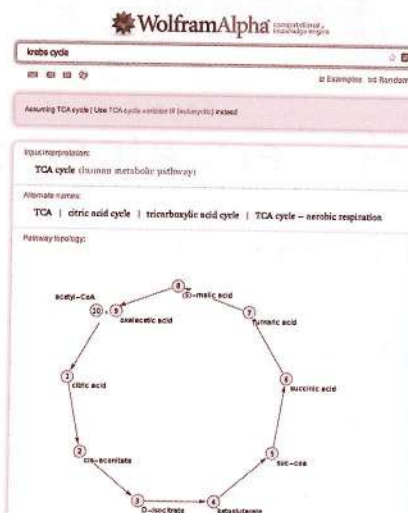
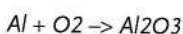


Figura 6. Ciclo de Krebs

mensionais, quantidades químicas ou reacções químicas. Um exemplo possível é a reacção entre o alumínio e o oxigénio (figura 4):



obtendo-se a representação da equação, as estruturas, a termodinâmica da reacção, a constante de equilíbrio ou as propriedades da substância.

FÍSICA

Na Física, podemos usar este motor na resolução de problemas de Mecânica, Óptica, Mecânica Quântica, Termodinâmica, Electricidade e Magnetismo ou Astrofísica. Veja-se o exemplo do plano inclinado (figura 5):

block on inclined plane

É possível alterar os valores iniciais desta situação directamente no formulário apresentado, obter as equações e respectivos resultados, um esquema e ainda gráficos que relacionam diversas grandezas.

BIOLOGIA

Na Biologia, podemos abordar temas como o Genoma, Animais e Plantas, Biologia molecular ou Vias metabólicas, como por exemplo o ciclo de Krebs (figura 6):

krebs cycle

Neste caso, são apresentados os nomes alternativos do ciclo, a tipologia da via metabólica, os seus diversos componentes e os passos da mesma.

CIÊNCIAS DA TERRA

Vários tópicos das Ciências da Terra podem ser abordados, como Tempos geológicos, Vulcões, Sismos, Marés ou Ciências Atmosféricas. Nos sismos, é possível obter valores para o tempo que as ondas P e S demoram a percorrer uma distância entre dois locais do globo (figura 7):

seismic travel times from Lisbon to New York

O valor para a profundidade do hipocentro é assumido automaticamente, podendo no entanto ser alterado. É também apresentado o gráfico da distância percorrida pelas ondas S e P em função do tempo.

MATEMÁTICA

No caso da Matemática, o Wolfram|Alpha tem a maior parte das funcionalidades de uma calculadora gráfica. No en-

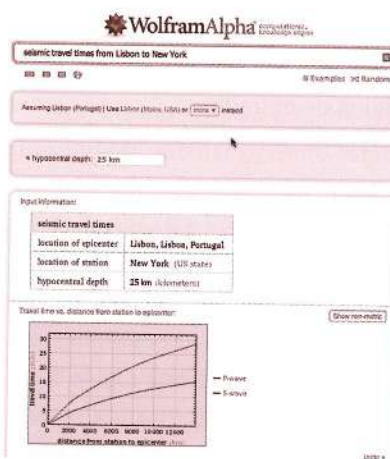


Figura 7. Tempo que as ondas S e P demoram a percorrer a distância entre dois locais

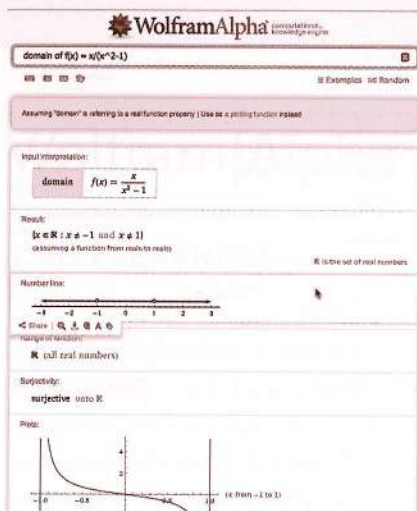


Figura 8. Domínio de uma função

tanto, é bastante mais poderoso, permitindo explorar temas desde a Álgebra à Estatística, do Cálculo à Análise, a Geometria ou as Funções. Este motor tem a Matemática na sua génese (no *software* Wolfram Mathematica, criado já há mais de duas décadas pela mesma empresa), sendo bastante desenvolvido neste tópico STEM. Por exemplo, calculamos o domínio de uma função (figura 8):

$$\text{domain of } f(x) = x/(x^2-1)$$

Neste caso, são apresentados o domínio e os gráficos da função.

Para exemplos e planos de aula nas várias especialidades, consulte <http://www.wolframalpha.com/examples/> e <http://www.wolframalpha.com/educators/lessonplans.html>

PERSONALIZAÇÃO DE RESULTADOS

Para usar esta aplicação nas aulas, poderá ser útil personalizar alguns elementos tais como o sistema de unidades, moeda, fuso horário ou tamanho de letra, sendo para isso necessário criar uma conta na hiperligação *Sign in* no canto superior direito da página de entrada.

PARTILHA DE RESULTADOS

Duas outras funcionalidades úteis para a preparação de aulas são a função de *bookmark* e *Clip 'n Share* de resultados. No primeiro caso, basta guardar os URLs de qualquer pesquisa realizada. No segundo, com o rato sobre um resultado, basta clicar com o botão direito no ícone *Clip 'n Share* na base da secção em destaque (figura 8).

Os *Widgets*, mini-aplicações computacionais, também poderão ser úteis para um sistema de gestão de aprendizagem, *blog* ou *site* de disciplina, bastando para isso copiar

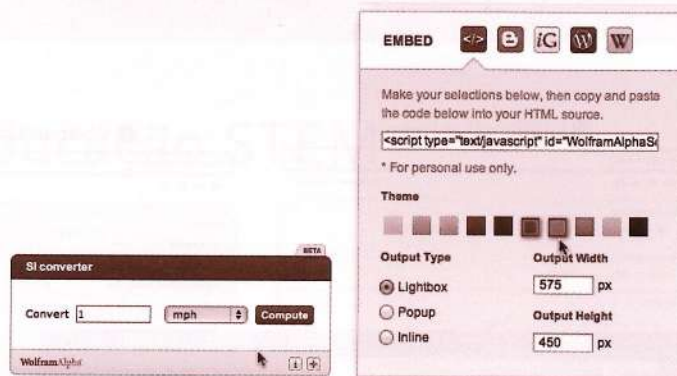


Figura 9. Widget com conversor de unidades do sistema imperial para internacional, com respectivo código de *embed* em <http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=a5818169326f4d6907c27d14718f8bb>

o código de *embed* disponibilizado e colar no destino pretendido (figura 9). É possível consultar uma galeria destes Widgets em <http://www.wolframalpha.com/widgets/gallery/> ou criar um novo em <http://developer.wolframalpha.com/widgetbuilder/>.

VERSÕES PARA TABLETS E SMARTPHONES

Existem também aplicações Wolfram|Alpha para iOS e Android, mas a ligação à internet é fundamental para que estas funcionem.

UTILIZADORES AVANÇADOS

Para utilizadores avançados, existe a subscrição Wolfram|Alpha Pro em <http://www.wolframalpha.com/pro> e o *plugin* de navegador web Wolfram CDF Player em <http://www.wolfram.com/cdf-player/>, sendo neste caso possível obter versões dinâmicas de resultados de computações com controlos interactivos, rotação 3D, animações ou exportação de dados para por exemplo uma folha de cálculo.

PARTICIPAR

É possível participar (<http://www.wolframalpha.com/participate/>) neste esforço de construção de uma base de conhecimentos computacionais, podendo por exemplo tornar-se um curador voluntário, testar novas versões, tornar-se parte da rede de especialistas, contribuir com factos, figuras, dados estruturados ou algoritmos, ou mesmo sugerir fontes de dados.

No futuro, espera-se que o motor aceite interações noutras línguas que não apenas o inglês, o que não invalida o

O pensamento algébrico e as representações

LAURA BANDARRA PINTO

Neste artigo, descrevo uma aula realizada, no ano lectivo 2012/2013, no 2.º período, numa turma de 9.º ano de escolaridade, durante a abordagem do tema *Números e Operações*. Analiso as representações utilizadas pelos alunos para explicitar e generalizar os seus raciocínios, no decorrer da exploração de uma tarefa, em que se interligavam conteúdos aritméticos e algébricos de forma a atribuir significado às representações.

INTRODUÇÃO

A Álgebra escolar é um dos ramos da educação matemática onde tem sido difícil a afirmação de metodologias adequadas às características de cada aluno e, por vezes, considera-se que a compreensão dos conceitos algébricos é reservada apenas a alguns (Kaput, 1999, 2008; Stacey, Chick & Kendal, 2004).

No entanto, as orientações curriculares indicam que a Álgebra escolar deve ser pensada desde os primeiros anos de escolaridade e fortemente ligada aos conceitos aritméticos (NCTM, 2007; ME, 2007, 2013). Referem que todos os alunos devem desenvolver o pensamento algébrico, ao longo do percurso escolar, porque os torna poderosos a resolver problemas, expande as suas oportunidades e fornece-lhes um conjunto de ideias matemáticas fundamentais (NCTM, 2007).

De acordo com Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico é um processo através do qual os alunos generalizam as ideias matemáticas a partir de casos particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade.

Subjacente a esta definição de pensamento algébrico, surgem duas ideias distintas, que contrastam com a imagem tradicional da álgebra escolar baseada na manipulação formal. Um primeiro aspecto relaciona-se com o facto de exis-

tirem outras formas para além da simbólica dos alunos poderem se exprimir algebricamente, tais como a linguagem natural, os diagramas, as tabelas, as expressões numéricas e os gráficos (Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007). O segundo tem a ver com a ênfase na compreensão e a produção de significados para os símbolos, em que o pensamento algébrico surge associado à generalização de ideias gerais resultantes de um raciocínio com compreensão.

Sendo assim, pensar algebricamente implica ter acesso a diversas representações, incluindo a simbólica, ser capaz de transitar com flexibilidade entre representações de acordo com as características da tarefa e de operar com os símbolos e com as regras formais, com compreensão (Schoenfeld, 2008). Deste modo, as representações desempenham um aspecto crucial no desenvolvimento do pensamento algébrico e a forma como os alunos representam as ideias matemáticas está intimamente ligada com a maneira como as compreendem e utilizam (Ponte & Serrazina, 2000).

Para além das simbologias algébrica e aritmética, existem mais três sistemas simbólicos fundamentais: a linguagem natural, as tabelas e os gráficos (Carraher & Schliemann, 2007). A estes, Friedland e Tabach (2001) acrescentam ainda a representação verbal e a numérica e apresentam as vantagens e desvantagens de alguns destes sistemas. (Tabela 1)

Por sua vez, Brown e Mehilos (2010) referem que a representação tabular permite estabelecer conexões entre a aritmética (problemas com números específicos), e a Álgebra (quantidades a variar e abstractas). Salientam que as tabelas favorecem a verificação de que as variáveis são números que se alteram e que o valor das expressões varia como o resultado.

Dada a importância atribuída às representações que os alunos utilizam para representar as suas ideias, torna-se relevante analisar a forma como os alunos expressam as suas generalizações quando resolvem tarefas de natureza algébrica.

Sistema	Vantagem	Desvantagem
Representação verbal	— Conexões da Matemática com outras áreas do conhecimento e do quotidiano	— Por vezes, utilização ambígua e associações incorrectas
Representação numérica	— Compreensão inicial do problema e investigação de casos particulares	— Não é generalizável, em determinados casos
Representação gráfica	— Proporciona uma imagem clara, intuitiva e apelativa de uma função	— Influenciada por factores externos (escalas) — Apresenta uma parte do problema
Representação algébrica	— Concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos — Permite justificar e efetuar generalizações	— Oculta o significado matemático ou a natureza do objecto — Dificulta a interpretação de resultados

Tabela 1

Saliente-se que, em relação à Matemática, no decorrer do 3.º ciclo, os alunos da turma em que foi realizada a tarefa tiveram um percurso de aprendizagem conturbado fruto da multiplicidade de professores que lecionaram a disciplina no 7.º ano. Na avaliação diagnóstica que realizei, no início do ano lectivo, percebi que estes alunos manifestavam lacunas na compreensão dos conceitos algébricos. Face a este panorama, no decorrer do ano escolar, tive a preocupação de valorizar as conexões que se podem estabelecer entre a Álgebra e os restantes temas matemáticos, de forma a promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A CONCRETIZAÇÃO DA TAREFA

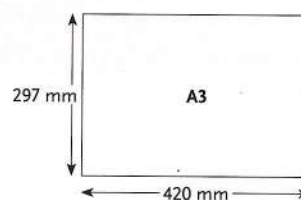
A tarefa utilizada resultou da adaptação de uma proposta existente no projeto 1001 itens do Gave^[1] e faz parte de um conjunto lato de propostas de natureza algébrica, que se inserem no âmbito da realização de um percurso de aprendizagem em que se valoriza o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Durante a planificação da aula em que se explorou esta tarefa, refleti sobre os objetivos a atingir, a gestão espacial e temporal, as possíveis questões e dificuldades que os alunos poderiam manifestar, as extensões que se poderiam realizar ao enunciado da tarefa e as estratégias que deveria utilizar para facilitar a discussão final dos resultados obtidos. Assim, optei por fotografar com uma máquina fotográfica digital as produções que os diversos grupos realizavam para que, na fase da discussão dos resultados obtidos, os alunos explicassem o trabalho realizado, tendo por base as suas representações.

Tal como planifiquei, a aula em que foi explorada a tarefa dividiu-se em quatro partes: análise do enunciado da tarefa (5 min.), exploração da tarefa (35 min.), apresentação e discussão do trabalho produzido pelos grupos (40 min.) e o surgimento de algumas extensões da tarefa (10 min.).

TAREFA:

Uma folha A3, com 0,01 mm de espessura, foi cortada ao meio. As duas metades resultantes do corte foram empilhadas e cortadas ao meio.



As quatro partes resultantes do segundo corte voltaram a ser empilhadas e, uma vez mais, foram cortadas a meio. O processo foi repetido sucessivamente.

1. Qual é a altura da pilha antes do 11º corte? Apresenta os cálculos que efetuares.
2. Que dimensões poderiam ter as folhas resultantes de uma sequência de cinco cortes sucessivos da mesma folha A3? Justifica a tua resposta.
3. Imagina que o processo se repetia infinitamente. Obtém uma expressão que indique a altura da pilha de partes da folha e uma outra que indique as dimensões das folhas resultantes desses cortes. Explica o teu raciocínio.

No decorrer deste processo, os alunos encontravam-se divididos em 3 grupos de 4 elementos (Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3).

No início da aula, ao lerem o enunciado da tarefa, os alunos sentiram a necessidade de dobrar várias folhas para perceberem que estratégias deveriam utilizar para resolver a situação proposta. Depois, questionaram-se sobre a forma como deveriam organizar os dados e que representações deveriam utilizar, bem como o significado a atribuir à letra n .

Nesta fase dos trabalhos, percebi que o grupo 1 não compreendia de que forma utilizaria a letra para generalizar os

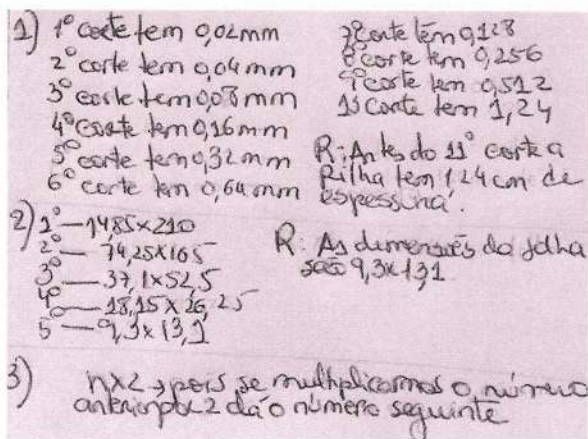


Figura 1. Produção do grupo 1

seus raciocínios e que os grupos manifestavam dificuldade em explicar os seus raciocínios. Perante estes factos, interagi com os grupos e solicitei-lhes que registassem e explicitassem todos os seus raciocínios, utilizando esquemas, palavras, tabelas ou gráficos. (Figura 1)

Da análise dos registos efetuados pelo primeiro grupo, constato que estes alunos organizaram as suas ideias através de uma representação tabelar (embora não desenhem a tabela) e encaram de uma forma recursiva a sequência resultante das dobragens das folhas. Quanto à generalização dos seus raciocínios verifico que consideraram que a letra n representava o número de dobragens e obtêm uma expressão resultante das infinitas dobragens e cortes das folhas. Também observei que este grupo produz respostas diretas e não explica os seus raciocínios. (Figura 2)

O segundo grupo já desenha uma tabela para representar a relação entre o número de cortes e a altura da pilha de folhas. Privilegia a linguagem natural para explicar a generalização obtida para as dimensões das folhas resultantes dos infinitos cortes e consegue formalizar simbolicamente a expressão da pilha de partes da folha. Para este grupo, a letra n representa o número de cortes efetuados nas folhas. (Figura 3)

O grupo 3 utiliza uma representação tabelar (embora não desenhe a tabela) para expressar a relação entre o número de cortes e a espessura da pilha de folhas resultante e, numa primeira fase, efetua apenas cálculos aritméticos. No entanto, estes alunos já conseguem formalizar simbolicamente as expressões gerais solicitadas, mas referem que o primeiro valor a atribuir à letra n é zero.

Dado o trabalho realizado pelos grupos, optei por encadear a sequência de apresentações de acordo com o nível de generalização: grupo 1-grupo 2-grupo 3.

Durante a discussão dos resultados obtidos, o grupo turma sentiu a necessidade de discutir a noção de variável

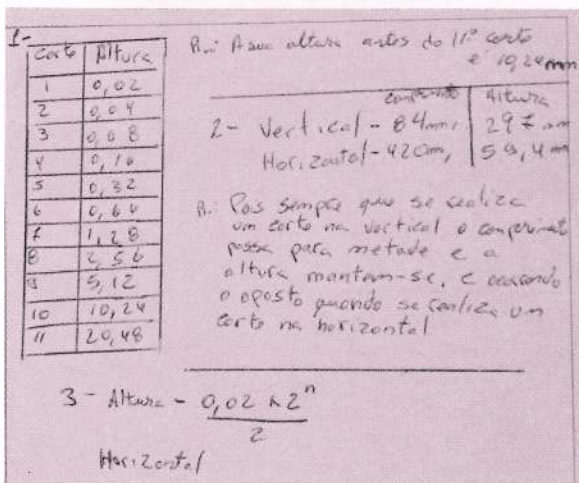


Figura 2. Produção do grupo 2

e o que representava na situação proposta a letra n . Foi notório que o grupo 1 manifestou dificuldade em perceber o significado da letra. Por sua vez, o grupo 2 revelou alguma dificuldade em formalizar simbolicamente alguns raciocínios e em perceber de que forma se obtêm uma expressão geral. Já o grupo 3 referiu que não sentiu a necessidade de desenhar uma tabela para representar os seus cálculos porque estava a apresentar resultados numéricos. Segundo este grupo, a utilização das tabelas é restrita à representação de funções, quando são fornecidas as expressões analíticas.

De seguida, face às generalizações formais obtidas pelos grupos, promovi um momento de discussão dedicado à demonstração da validade das generalizações obtidas.

Na fase seguinte da discussão, o grupo-turma manifestou a necessidade de analisar o que aconteceria se dobrassem folhas de outros formatos. Sendo assim, os alunos analisaram a seguinte tabela retirada da internet^[2]. Perante estes dados, os alunos sentiram curiosidade em estabelecer uma relação entre os diversos formatos e verificaram que a razão entre as diversas dimensões é $\sqrt{2}$. (Figura 4)

No decorrer destas conclusões, percebi que seria interessante para os alunos visionarem um dos episódios da série «Isto é Matemática»^[3] que divulga as ideias referidas pelos alunos.

CONSIDERAÇÕES

Da aula anteriormente descrita, constato que alunos que estão a completar o 3.º ciclo, ainda, restringem a explicitação dos seus raciocínios aos cálculos numéricos e, por vezes, não valorizam a construção explícita de tabelas para representar os seus raciocínios. Saliento que apenas um dos três grupos desenhou uma tabela para representar a relação entre o número de cortes e espessura das folhas.

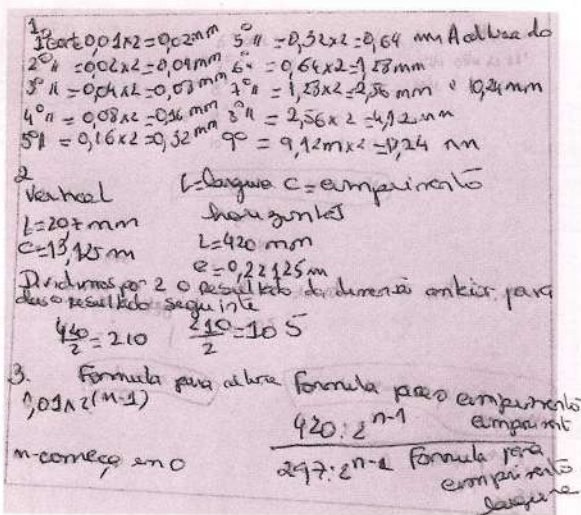


Figura 3. Produção do grupo 3

Quanto à utilização da simbologia algébrica, a maioria dos grupos consegue obter a formalização simbólica dos seus raciocínios, embora não valorize a demonstração da validade das expressões obtidas. Um dos grupos ainda encara a relação entre as variáveis de uma forma recursiva.

As atuais orientações curriculares nacionais (ME, 2003) são parcas na evocação de orientações metodológicas e na forma de trabalhar na sala de aula. No entanto, ainda, é necessário que o professor na sua prática educativa valorize o raciocínio dos alunos e selecione tarefas que promovam uma dinâmica de sala de aula que contribua para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Canavaro, 2007), pois a Álgebra é uma poderosa ferramenta matemática, mas também é uma das áreas em que os alunos mostram mais dificuldades de aprendizagem (Radford, 2009).

Notas

- [1] http://www.gave.minedu.pt/np3content/?newsId=111&fileName=folha_de_papel_a3.pdf
 [2] <http://design.blog.br/design-grafico/tamanhos-de-papel>
 [3] <http://www.youtube.com/watch?v=Wd5NjLWSj0o>

Referências

- Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning, *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.
 Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532–538.
 Canavaro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81–118.
 Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Rese-*

Formato	Largura (mm)	Altura (mm)
A0	841	1189
A1	594	841
A2	420	594
A3	297	420
A4	210	297
A5	148	210
A6	105	148

Figura 4. Dimensões de folhas de diversos formatos

- arch on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.
 Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173–185). Reston, VA: NCTM.
 Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.
 Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Routledge.
 Kieran, C. (2007). Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K.Lester, Jr., (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
 Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.
 NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
 Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.
 Schoenfeld, A. H. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479–510). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
 Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Eds.). (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.

Laura Bandarra Pinto

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE MOURA



XXX ProfMat e o XXV SIEM

Uma visão, uma experiência e alguma esperança...

O SIEM voltou à cidade de Braga e, felizmente, reencontrou-se com o ProfMat num dia em que a investigação e a prática dividiram o mesmo espaço de partilha e aprendizagem na Escola Secundária de Alberto Sampaio.

Como é tradição, estes dois encontros apresentam elevado número de sessões, muitas das quais em paralelo, o que nos obriga, muitas vezes, a difíceis decisões. O que aqui apresento é um breve testemunho do que vivi nestes dias de trabalho, partilha e aprendizagem em Braga. É um texto que pretende mostrar a minha experiência, onde, infelizmente, cabe apenas uma pequena parte do muito que se passou nestes 4 dias.

Passando aos acontecimentos concretos, começo por relembrar a conferência plenária, *Uma experiência de ensino centrada na multiplicação: Especificidades e desafios* realizada por Fátima Mendes, da Escola Superior de Educação de Setúbal. Um pouco diferente do habitual, esta conferência centrou-se nos aspetos metodológicos da investigação numa experiência de ensino. Efetivamente a *design research* é uma abordagem metodológica que tem vindo a merecer enorme reconhecimento por parte da investigação nacio-

nal e internacional. Esta conferência ajudou-nos a perceber melhor as suas características e potencialidades, por um lado, e por outro lado mostrou-nos também os desafios que coloca a investigadores e professores, no contexto de um trabalho colaborativo. É de recordar ainda o enorme envolvimento que houve na discussão com o grande grupo, particularmente sobre a definição da conjectura que está por detrás desta abordagem.

De um ponto de vista dos meus interesses e preocupações como investigadora e, especialmente, como professora recordo ainda algumas ideias da conferência plenária, *Visualización y razonamiento. Creando imágenes para comprender las matemáticas*, proferida por Inés M^a Gómez-Chacón, professora da Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Computense de Madrid. Começo por destacar a importância da partilha que nos permitiu, ainda que resumidamente, perceber o que são as preocupações da investigação no país vizinho e conhecer um pouco do elevado número de projetos em que esta investigadora está envolvida. Na sua conferência plenária destacou a questão do papel da visualização no desenvolvimento do raciocínio e da valorização



de diferentes representações e da intuição, questionando desta forma o papel das abordagens puramente formais. Feliz ou infelizmente há muito tempo que esta questão não era tão pertinente como nos dias que correm com a implementação das novas orientações curriculares que seguem uma abordagem exclusivamente formal, desvalorizam a intuição e a compreensão em detrimento da memorização e aplicação de procedimentos.

Sem ser exaustiva, mas numa tentativa de deixar presente um pouco do (muito) que se discutiu, relembro agora alguns dos temas trazidos à agenda pelos simpósios temáticos (1) Resolução de Problemas no ensino e aprendizagem da Matemática; (2) Números e Geometria nos primeiros anos de ensino básico; (3) Conhecimento profissional do futuro professor de Matemática; (4) Práticas profissionais do professor de Matemática; (5) Educação Matemática e Cidadania; (6) Currículo de Matemática: Diferentes perspetivas; (7) Formação de professores de Matemática; e (8) Aprendizagem da Matemática.

Para recordar que «estávamos no bom caminho...» retomo agora o painel plenário *Para evitar o desastre no ensino da Matemática* moderado por Henrique Guimarães, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e onde participaram João Pedro da Ponte, também do IE da UL, que nos mostrou como estávamos a melhorar e o reflexo disso nos resultados obtidos no TIMSS 2011 e PISA 2012. Ana Cristina Tudella, do Agrupamento de Escolas de Fr. Gonçalo de Azevedo, foi o rosto das dificuldades que os professores e alunos vivem hoje nas escolas com a implementa-

ção do PMEB homologado em 2013. Jaime Carvalho e Silva, do Departamento de Matemática, FCT — Universidade de Coimbra lembrou-nos o desastre da proposta do «novo» programa de Matemática A para o ensino secundário. Por fim, Leonor Santos, do IE da UL mostrou-nos «um olhar da investigação em educação matemática sobre o que está a acontecer no ensino desta disciplina». Investigação esta que está na base do bom caminho que estávamos a trilhar... mas que permanece desconhecida por quem «decide» hoje as políticas educativas que nos «cortam» o trilho. Por isso, foi com certa nostalgia e enternecimento que ouvi Sérgio Niza falar da «situação paradoxal da profissão docente» e valorizar de forma quase poética o papel «indispensável» do professor lembrando também o investimento que é necessário (re)fazer na educação.

No fundo estas comunicações deixaram-me num misto de sentimentos e emoções, por um lado a tristeza de constatar o «desastre» que se avizinha no ensino da Matemática, mas por outro lado também a vontade de tentar inverter esta situação e de encontrar estratégias para «combater» e/ou contornar todos estes constrangimentos, porque sabemos que existem «novos rumos, novas formas, de apostar... que não estamos sós e que vale a pena estarmos aqui» como nos recordou o coro da Escola Secundária de Alberto Sampaio numa excelente interpretação do Hino da APM.

MARISA QUARESMA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

Figuras geométricas

Nº de jogadores: 2 ou 4 em duas equipas de dois jogadores

Nível de escolaridade: 2.º ciclo

Conteúdos envolvidos: figuras geométricas no plano e no espaço

Material necessário: dois pequenos baralhos de cartas iguais mas de cor diferente, cada um com vinte e cinco cartas com a imagem de diferentes figuras geométricas (ver figura 1); dois suportes do conhecido jogo «Quem é quem?» ou algo que os reproduza (a marca Jogos Intemporais tem no mercado uma versão do jogo na modalidade de jogo de viagem a um preço bastante acessível).

O jogo

O objectivo deste jogo é adivinhar a figura escolhida pelo adversário. Trata-se de um jogo que se centra em torno de figuras geométricas, pretendendo aprofundar o conhecimento dos alunos sobre características importantes dessas figuras. Na versão que aqui se apresenta são consideradas simultaneamente figuras no plano e no espaço, pelo contributo que considero que uma abordagem conjunta pode trazer ao aprofundamento das aprendizagens dos alunos. Naturalmente é possível optar por uma abordagem separada, se tal for considerado mais adequado para o caso específico dos alunos envolvidos.

Preparação do jogo

É entregue a cada jogador (ou equipa de jogadores) um baralho de cartas. Este deve escolher, fora do olhar do seu adversário, a carta com que irá jogar e colocá-la no local próprio do seu suporte, mesmo à frente. As restantes 24 cartas serão colocadas nos suportes móveis, na posição levantada, igualmente de modo a que o adversário não as possa ver. Determina-se quem começa o jogo.

Modo de jogar

O primeiro a jogar coloca uma questão ao adversário sobre a figura que este escolheu. A pergunta formulada pode ser qualquer uma, desde que o adversário possa responder com SIM ou NÃO (as únicas respostas admissíveis). Perante a resposta obtida analisa as figuras que tem à sua frente e baixa todas as que deixaram de poder corresponder à escolha da figura feita pelo adversário. É então a vez de o outro jogador fazer uma pergunta... e o processo prossegue até que alguém faça uma pergunta que identifique especificamente a figura escolhida pelo adversário e que obtenha SIM como resposta.

Fim do jogo

O jogo termina quando um dos jogadores conseguir adivinhar qual a figura escolhida pelo seu adversário. Obviamente esse será o vencedor do jogo.

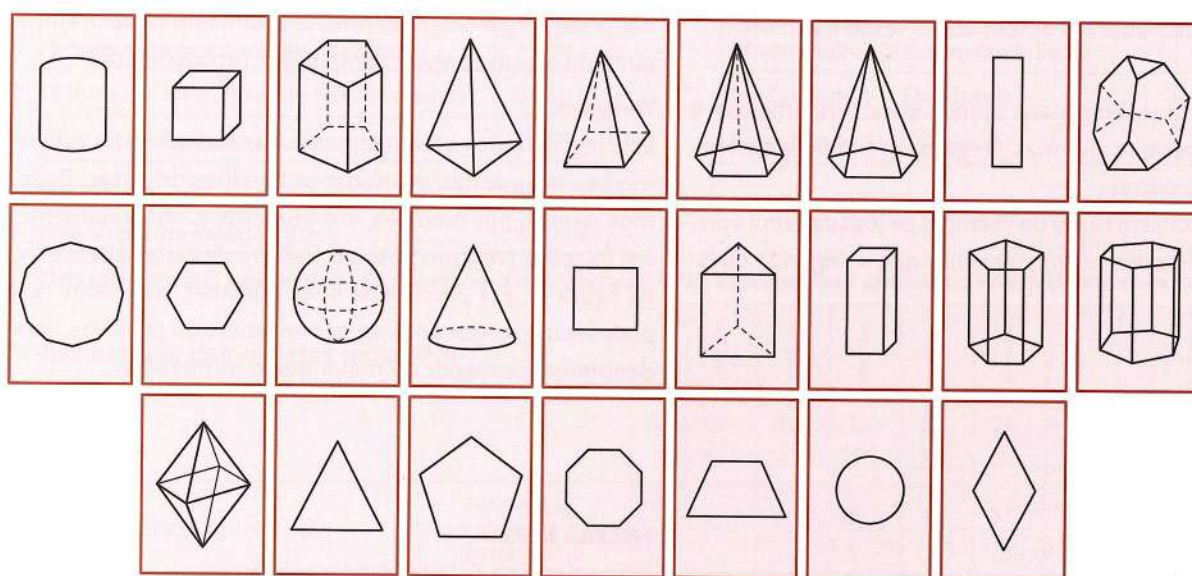


Figura 1. As vinte e cinco cartas com figuras geométricas de cada jogador



Figura 2

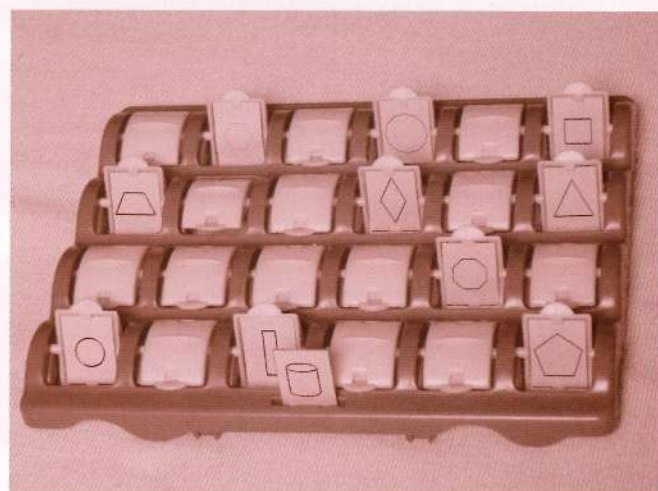


Figura 3

Exemplos de possíveis jogadas

Os jogadores fazem os preparativos para o jogo, colocando as cartas nos respectivos suportes.

O jogador 1 pergunta «A figura que escolheste é uma pirâmide?»

O jogador 2 escolheu a carta com o quadrado pelo que responde «Não» e o jogador 1 baixa as quatro cartas que representam pirâmides (ver figura 2).

É então a vez do jogador 2 fazer uma pergunta e do jogador 1 responder com sim ou não.

Volta a ser a vez do jogador 1 fazer uma pergunta e este opta por «A tua carta representa uma figura plana?»

O jogador 2 responde «Sim» e o jogador 1 baixa as onze cartas com sólidos geométricos que ainda estavam levantadas (ver figura 3).

E o jogo prossegue até que o jogador 1 pergunta «A tua carta é um quadrado?» e obtém como resposta «Sim».

Comentários

É importante dar tempo aos alunos para experimentar o jogo e perceber que algumas perguntas tendem a ser melhores do que outras.

Uma reflexão em torno do exemplo de jogadas aqui apresentado, facilmente permite concluir que a segunda ques-

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$
	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	

Figura 4. As vinte e cinco cartas com fracções

tão veio tornar inútil a primeira (uma vez que as pirâmides também seriam excluídas com a resposta a esta questão). Claro que alguns alunos tentarão argumentar que se a carta escolhida tivesse uma pirâmide já não seria assim. Mas ou eles são realmente alunos com sorte ou o jogo se encarregar de lhes mostrar que alguém que consegue fazer melhores perguntas tenderá a ganhar-lhes.

De um modo geral perguntas em que as hipóteses de obter um sim são tantas como as de obter um não tenderão a ser as melhores, pois permitem garantir sempre a eliminação de um número razoável de cartas. Para ganhar é preciso chegar à carta com menos perguntas que o adversário e, portanto, optar por questões do tipo «é um cilindro?» ou «é um cubo?» dificilmente será uma boa estratégia. Um bom jogador terá assim que ter conhecimento sobre as diferentes figuras em jogo, para conseguir encontrar boas perguntas, mas precisará também de ter implicitamente algum conhecimento sobre probabilidades.

Variações

Este jogo admite naturalmente muitas variações. É simplesmente uma questão de mudar os baralhos de cartas. Podemos pensar, por exemplo, em números e, concretamente, em fracções (veja um possível baralho de cartas alternativo na figura 4). E a procura de boas questões facilmente nos pode levar a pensar em fracções negativas ou positivas, com denominador menor ou maior que o numerador...

HELENA ROCHA

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

VAMOS JOGAR
Helena Rocha
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

APM – 2014

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo *APMinformação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2014

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento (@-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	60,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	60,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	80,00 €
Modalidade 1 + <i>Quadrante</i>	75,00 €
Modalidade 2 + <i>Quadrante</i>	100,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço <http://www.apm.pt>

Assinaturas das revistas para 2014

		<i>Educação e Matemática</i> (inclui atas ProfMat)	<i>Quadrante</i>
Sócio individual	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Instituições	Portugal	47,00 €	28,00 €
	Estrangeiro		32,00 €

Editorial

- 01 **Aprender a «ser professor». Por uma formação inicial sustentada e de qualidade, sempre!**
Manuel Vara Pires

Artigos

- 03 **Que Educação Queremos?**
José Matias Alves
- 08 **Número racional como quociente da divisão de inteiros**
Graciosa Veloso
- 19 **Experiências de prática profissional na formação de professores de Matemática do 2.º ciclo**
Neusa Branco, João Pedro da Ponte
- 27 **Bento de Jesus Caraça: Críticas e propostas para o ensino da Matemática em Portugal**
Jaime Carvalho e Silva
- 33 **A atividade de resolução de problemas matemáticos em sala de aula**
Eduarda Moura
- 45 **XXX ProfMat e o XXV SIEM: Uma visão, uma experiência e alguma esperança...**
Marisa Quaresma

Secções

- 14 **O problema deste número** José Paulo Viana
Diferença de áreas
- 15 **O problema do ProfMat 2014** José Paulo Viana
As compras da Catarina
- 38 **Tecnologias na Educação Matemática** António Domingos
Wolfram|Alpha para a Educação STEM
João Fernandes
- 13 **Materiais para a aula de Matemática**
Ordenação de números fracionários
- 25 **Pontos de vista, reações e ideias**
Frisos no GeoGebra
Fernanda Menina, Sandra Guerreiro
- 06 **Caderno de Apontamentos de Geometria** Cristina Loureiro
Classificação de Quadriláteros a partir dos lados
- 41 **Espaço GTI**
O pensamento algébrico e as representações
Laura Bandarra Pinto
- 47 **Vamos Jogar** Helena Rocha
Figuras geométricas
- 17 **Matemática do Planeta Terra 2013** Joana Latas
Um planeta organizado por humanos: os sistemas eleitorais, Jaime Carvalho e Silva
- 16 **Encontros**
- 02 **Leituras**
A matemática nos programas do ensino não-superior (1835–1974)