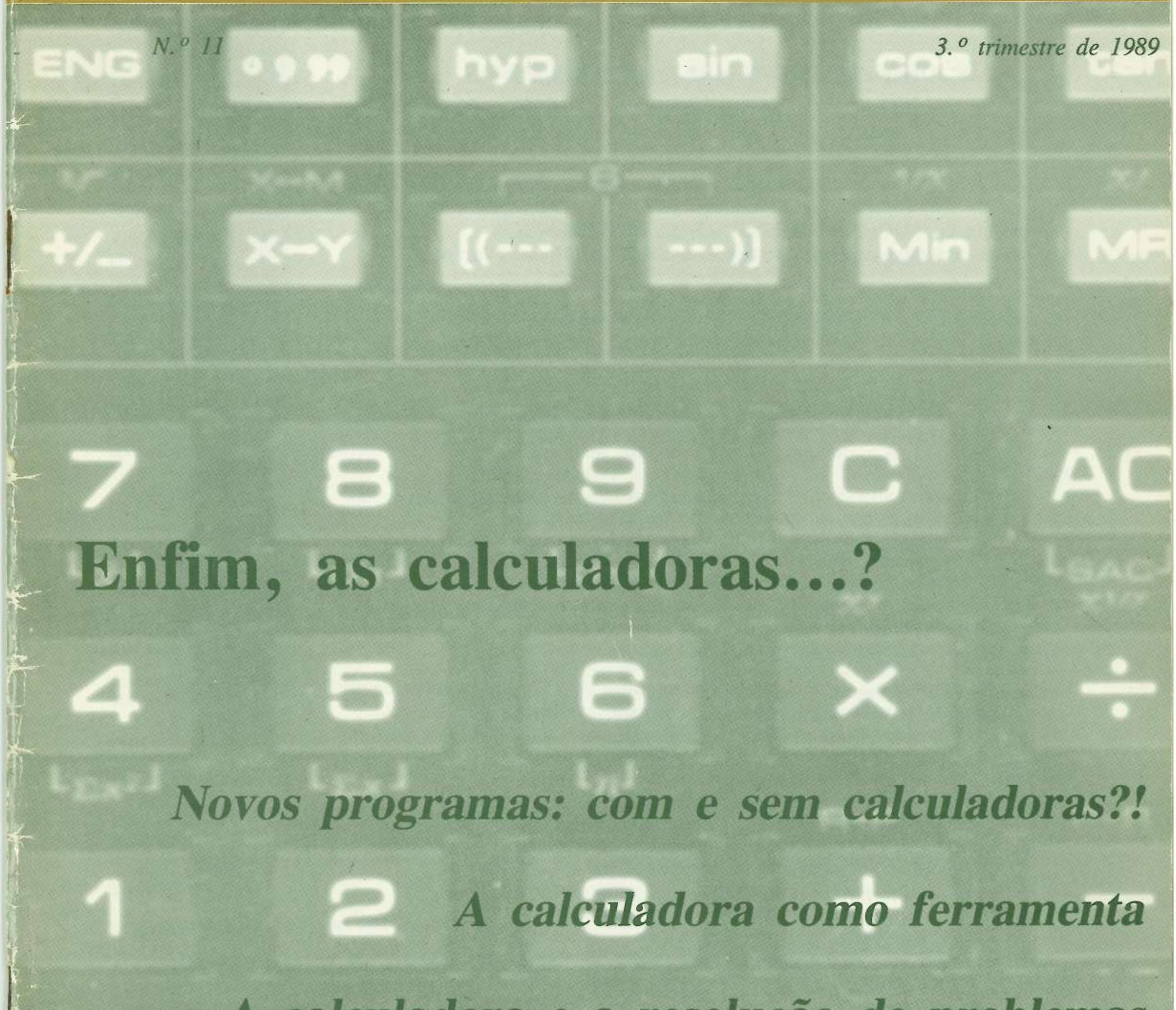
# Educação e Matemática

N.º 11 3.º trimestre de 1989




## Enfim, as calculadoras...?

### *Novos programas: com e sem calculadoras?!*

### *A calculadora como ferramenta*

### *A calculadora e a resolução de problemas*

### *A calculadora e a aprendizagem*

250$00

*Revista da Associação de Professores de Matemática*

# PUBLICAÇÕES APM

## MAIS JOGOS, MAIS ENIGMAS, MAIS PROBLEMAS


Autores: Odete Bernardes, Paula Teixeira, Pedro Esteves e Zé Paulo Viana

Para quem gosta de jogos, enigmas ou de problemas.
Continuação do volume "Jogos, Enigmas e Problemas".
☐ 1.ª Edição, Setembro 1989: 151 pp.; preço: 250$00 (sócios 300$00)

## CALCULADORAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA


Autores: Albano Silva, Cristina Loureiro, José Manuel Varandas

A calculadora como ferrramenta com grandes potencialidades educativas. Actividades com calculadoras para vários níveis de ensino, do 5.º ao 12.º ano.
☐ 1.ª Edição, Setembro 1989; 151 pp.; preço: 500$00 (sócios 400$00)

## CRONOLOGIA RECENTE DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Autor: José Manuel Matos

Um itinerário aliciante, dos anos quarenta aos anos oitenta. Reedição melhorada e aumentada.
☐ 3.ª Edição, Setembro 1989: 87 pp.; preço: 450$00 (sócios 360$00)

## QUOD NOVIS


Autoras: Georgina Tomé e Susana Carreira

Uma experiência de abordagem do programa do 11.º ano, a partir de um conjunto de problemas propostos, utilizando a folha de cálculo.
☐ 1.ª Edição, Outubro 1989: 395 pp.; preço: 1200$00 (sócios 960$00)

- *Dia-a-dia com a Matemática — Agenda do professor 1989/90* — Ana Vieira Lopes, António Bernardes, José Manuel Varandas
☐ 1.ª Edição, Agosto 1989: 140 pp.; *preço: 360$00 (sócios 300$00)*
- *Agenda para a Acção* — recomendações para o ensino da Matemática nos anos 80
☐ 4.ª Edição, Fevereiro 1988: 58 pp.; *preço: 180$00 (sócios 150$00)*
- *O Computador na Aula de Matemática* — Eduardo Veloso
☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 73 pp.; *preço: 300$00 (sócios 250$00)*
- *Jogos, Enigmas e Problemas* — Odete Bernardes e Paula Teixeira
☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 48 pp.; *preço: 180$00 (sócios 150$00)*
- *A Matemática na Vida das Abelhas* — Ana Luísa Teles, Ana Vieira, Aniss Ali e Fátima Tavares
☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 80 pp.; *preço: 300$00 (sócios 250$00)*
- *O Problema da Semana* — Maria João Costa
☐ 5.ª Edição, Julho 1988: 86 pp.; *preço: 240$00 (sócios 200$00)*
- *PROFMAT N.º 3*
☐ 1.ª Edição, Setembro 1987: 188 pp.; *preço: 480$00 (sócios 400$00)*
- *PROFMAT N.º 4*
☐ 1.ª Edição, Janeiro de 1989: 269 pp.; *preço: 600$00 (sócios: 500$00)*
- *Renovação do Currículo de Matemática / documentos para Discussão*
☐ 2.ª Edição, Novembro 1988: 89 pp.; *preço: 240$00 (sócios 200$00)*
- *Cadernos de Educação e Matemática - n.º 1 / A Natureza da Matemática*
☐ 1.ª Edição, Setembro 1988: 75 pp.; *preço: 420$00 (sócios 350$00)*
- *O Geoplano na Sala de Aula* — Lurdes Serrazina e José Manuel Matos
☐ 2.ª Edição, Abril 1989: 276 pp.; *preço: 600$00 (sócios 500$00)*
- *Viagem de Ida e Volta* — Paulo Abrantes
☐ 1.ª Edição, Agosto 1988: 63 pp.; *preço: 300$00 (sócios 250$00)*
- **Educação e Matemática**, disponíveis exemplares dos números 2, 3, 4 e 7. *Preço de cada número: 200$00 ou 250$00 (N.º 7)*
Outros números disponíveis em fotocópia a 200$00 cada um.

**Todos estes materiais podem ser pedidos pelo correio, utilizando a ficha do verso da capa.**

*FICHA TÉCNICA*

**Título da publicação:**

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 11, 3.º trimestre de 1989

**Directora:** Leonor Moreira

**Redacção:**

António Bernardes
Eduardo Veloso
Henrique Guimarães
José Paulo Viana
Paulo Abrantes
Pedro Esteves

**Colaboraram neste número:**

Albano Silva, Ana Baltazar, Fátima Delgado, Graciosa Veloso, Henrique Guimarães, João Filipe Matos, João Pedro Ponte, José Paulo Viana, Leonor Moreira, Margarida Junqueira, Paula Teixeira, Paulo Abrantes, Rita Vieira, Sérgio Valente.

**Capa:** concebida e executada por Eduardo Veloso

**Entidade Proprietária:**

Associação de Professores de Matemática

**Periodicidade:** Trimestral

**Tiragem:** 2000 exemplares

**Fotocomposição, montagem e fotolito:**

Execução e oferta da
Texto Editora, Lda.

**Impressão:** Costa e Valério

**N.º de Registo:** 112807

**Correspondência:**

Associação de Professores de Matemática
a/c de Leonor Moreira
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

NOTA: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

**Editorial**

# A calculadora e o processo de ensino-aprendizagem

A utilização educativa das calculadoras entrou finalmente na ordem do dia.

As calculadoras são objectos matemáticos por excelência que o desenvolvimento tecnológico se encarregou de tornar em objectos de uso corrente. Fazem já parte da vida de todos os dias.

Entre os professores, existe manifestamente uma forte onda de interesse pelas suas aplicações. Os projectos de novos currículos que têm sido divulgados fazem-lhes referência apontando de diversos modos a sua importância como meios auxiliares de ensino.

A utilização normal da calculadora nas aulas, nos testes, e em outras actividades, em todos os níveis de escolaridade, poderá constituir um importante factor de melhoria do ensino da Matemática, aproximando a nossa disciplina das outras matérias escolares e da vida prática, suscitando o interesse dos alunos, alargando e diversificando as actividades de ensino-aprendizagem.

A máquina de calcular é um instrumento rico de potencialidades para a disciplina de Matemática.

Ela pode ser utilizada para apoiar o desenvolvimento de novos conceitos, para formular conjecturas e explorar relações matemáticas, e para resolver problemas. A calculadora proporciona a exploração de novas estratégias e métodos de trabalho, como a tentativa e erro e as aproximações sucessivas. Permite alargar o leque de situações a considerar, usando valores retirados directamente de problemas da vida real, sem se ser submergido pelos cálculos. A calculadora é ela própria uma fonte natural de novos problemas e novos conceitos, como os de arredondamento, aproximação e convergência.

Num plano ainda mais fundamental, o recurso à calculadora permitirá ancorar firmemente a actividade matemática na representação numérica, onde a grande maioria dos alunos se move mais à vontade, partindo daí para as representações gráfica e algébrica, mais abstractas.

Apesar das calculadoras mais comuns serem relativamente simples, o seu domínio implica sempre um esforço de aprendizagem.

É preciso saber quais as funções das diferentes teclas, que prioridades estão estabelecidas para as diversas operações, como tirar partido das memórias. Mas, além disso, é preciso saber como as usar de forma crítica, conhecer as suas limitações, desenvolver o sentido do número, e ser capaz de decidir se uma certa resposta faz ou não sentido, avaliando assim os resultados obtidos.

A introdução da calculadora nos programas só será um passo verdadeiramente positivo se se perspectivar a sua utilização generalizada, tendo em conta todos estes aspectos, no quadro da diversificação das estratégias de ensino e da implicação do aluno no processo de aprendizagem.

No entanto, embora com grandes potencialidades, a calculadora não passa de um instrumento.

Num processo de inovação educacional são sempre de esperar dificuldades e contratempos. Não faltarão anedotas com exemplos caricatos, pretendendo demonstrar as vantagens do cálculo com papel e lápis e dos métodos tradicionais. Mas a verdade é que não devemos atribuir à calculadora nem um carácter milagroso, nem um carácter demoníaco. Como qualquer outro instrumento, pode, simplesmente, ser bem ou mal usada.

Por isso, o factor decisivo que irá determinar a extensão e a natureza das mudanças que a sua utilização generalizada poderá estimular será, naturalmente, o que neste domínio vierem a fazer os professores.

O uso das calculadoras não anuncia o fim do cálculo, mas implica que o cálculo seja encarado de uma outra maneira. Estimula novas formas de trabalhar favorecendo uma atitude mais prática e experimental na Matemática. Dá um relevo importante à actividade de conjecturação e à resolução de problemas, mas exige uma cuidada formação crítica dos alunos.

A utilização educativa das calculadoras não deve por isso ser vista como uma simples alteração menor, conduzindo a um pequeno reajustamento de dois ou três capítulos do programa e deixando o resto inalterado. Pelo contrário, deve traduzir uma mudança profunda nas concepções e nas práticas pedagógicas na nossa disciplina.

Esta mudança tem de ser apoiada por um esforço generalizado de formação, produção de materiais de apoio, realização de encontros de trocas de experiências e reflexão pedagógica, de informação acerca dos novos objectivos aos professores das outras disciplinas, aos pais e aos alunos. Uma contribuição fundamental neste processo poderá igualmente ser proporcionada pela investigação que já se desenvolve nesta área.

Em termos internacionais, terá de se dizer que as calculadoras chegam tarde entre nós ao ensino da Matemática.

Mas, aproveitando a experiência dos outros, perspectivando de forma ampla a sua utilização educativa e fazendo o necessário trabalho de formação de professores, é bem possível que se venha a concluir no futuro que, em Portugal, mais do que em muitos outros países, as calculadoras exerceram um grande contributo para a renovação do ensino da nossa disciplina.

*João Pedro Ponte*

## PUBLICAÇÕES — ENVIO PELO CORREIO

Envie fotocópia da ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome de **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para

Henrique M. Guimarães
Faculdade de Ciências
Av. 24 de Julho, 134, 4.º 1300 LISBOA

| Títulos publicações ou software | nº de ex. | preço unitário (*) | custo publicações | custo software |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| SÓCIO DA APM ☐ Nº ☐ | | subtotais → | | |
| NÃO SÓCIO ☐ | portes do correio | pub. 15% | + | |
| (assinalar com uma cruz) | | software fixo 120$00 | | + |
| Nome | | totais parciais | (1) | (2) |
| Morada ........................ | | valor total ((1) + (2)) → | | |
| Código Postal ........................ | | Para uso da APM | Pedido recebido em | |
| Data do pedido ........................ | | ass.: | Respondido em | |

(*) note bem: as publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM

# Calculadoras na Educação Matemática
## — contributos para uma reflexão —

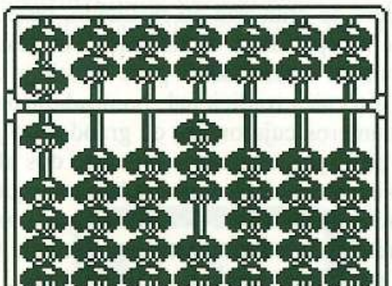
Albano V. Silva, Esc. Prep. da Brandoa

### Calculadora, um instrumento do nosso quotidiano

No desenvolvimento social ao longo das diferentes épocas, o Homem, desejando interpretar e actuar no mundo que o rodeia, vai fazendo evoluir de forma extraordinária o conceito de número e os cálculos necessários para operar com esses números.

Primeiro face a problemas reais da vida quotidiana, depois face a problemas ligados à evolução científica e tecnológica, vão-se desenvolvendo cálculos que ultrapassam, em muito, a capacidade de memória humana. De forma a facilitar esses cálculos morosos e complicados, o Homem cria instrumentos de cálculo auxiliares do seu trabalho que adapta às mais diferentes actividades.

Não é nossa intenção fazer a história dos instrumentos de cálculo, mas um pouco de curiosidade leva-nos a pensar que a utilização de seixos, nós em corda, entalhes em pau (um dos mais antigos exemplos de um pau entalhado data do Paleolítico[1] ou os próprios dedos eram já instrumentos auxiliares de cálculo. Alguns milhares de anos decorridos, surge, no Oriente, um instrumento de cálculo mais sofisticado — o ábaco[2] —, talvez a primeira máquina de calcular. Já na nossa era são conhecidas algumas calculadoras mecânicas utilizadas por matemáticos na sua investigação, que nunca chegaram a ser comercializadas. E muitos de nós se lembram da utilização de tabelas de logaritmos (um precioso instrumento auxiliar de cálculo, que por vezes ainda se usa), ou das famosas réguas de cálculo.



Estes antecedentes das modernas calculadoras electrónicas, extremamente sofisticadas, reforçam a ideia da necessidade, sempre sentida pelo Homem, de se munir de instrumentos auxiliares de cálculo.

Hoje é difícil descobrir uma actividade prática ou profissional que não use no seu quotidiano uma calculadora. Elas fazem parte do dia-a-dia das sociedades modernas e o seu uso está claramente vulgarizado.

E na Escola?

Apesar da época actual se caracterizar pela divulgação e uso de instrumentos de cálculo cada vez mais poderosos, como são os computadores, a calculadora é apenas usada nas escolas em disciplinas de natureza técnica ou em cursos técnicos/científicos.

Contudo a experiência de utilização da calculadora pelos nossos alunos é, quase o podemos dizer, anterior à entrada na escola, faz parte dos seus estojos, dos seus relógios, das suas molas de papéis, da sua vivência diária.

Na aula de Matemática das escolas portuguesas, nos seus diferentes graus de ensino, a calculadora não tem a mesma divulgação, apesar de se tratar de um instrumento que, utilizado de forma criteriosa e com espírito crítico, tem bastantes potencialidades educativas ao nível da Educação Matemática, questionando o actual peso do cálculo e abrindo novas perspectivas para o desenvolvimento de conceitos, a resolução de problemas e o próprio estudo do cálculo, entre outros aspectos.

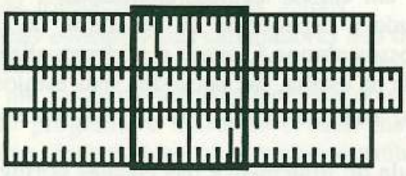
As razões para a sua não utilização ou utilização restritiva são as mais diversas, mas não corremos grandes riscos de errar se dissermos que muitos dos argumentos utilizados pelos professores de Matemática reflectem as fortes tradições culturais desde há muito prevalecentes no ensino de Matemática extremamente enraizado no cálculo e nas suas técnicas e que eles próprios experimentaram como alunos. Se pensarmos nas insignificantes alterações dos programas de Matemática ao longo das últimas décadas (com excepção da renovação encetada pelo Prof. Sebastião e Siva), na pesada estrututa que é o sistema educativo português, pouco aberto à valorização da inovação e da formação de professores, não são de estranhar esses argumentos. Mas não será cada dia sempre um dia certo para pensar o futuro…?

Hoje a discussão em torno da reforma curricular e dos novos programas, coloca na ordem do dia, também, a discussão sobre que Matemática fazemos nas nossas escolas e que papel para os instrumentos de cálculo, nomeadamente a calculadora.

Essa discussão tem-se vindo a fazer, produziram-se alguns documentos importantes de que se destaca, pelo seu papel pedagógico, "A Renovação do Currículo de Matemática", editado pela APM, mas é urgente continuar a alargar a reflexão de todas as escolas e professores de Matemática.

Não acreditamos em mudanças na educação sem a intervenção activa dos professores, sem que os professores sintam a sua necessidade, através da reflexão conjunta que fazem das suas práticas pedagógicas e da interligação destas às novas propostas curriculares apresentadas. A calculadora se introduzida na aula de Matemática sem qualquer projecto educativo que a sustente será mais um "modernismo" que nada mudará para além de poder criar grande insegurança em professores e alunos.

Assim, discutir alguns argumentos e desbravar algumas propostas não tem outra intenção que não seja contribuir para essa reflexão, com uma forte convicção de que hoje é um grande dia de construção do futuro da Educação...!



## Calculadora e capacidade básica de cálculo

Os diferentes argumentos geralmente apresentados para a não introdução da calculadora na aula de Matemática — os alunos deixam de saber fazer contas, tornam-se dependentes da máquina, calculam mecanicamente sem pensar, confiam em absoluto nos resultados que a máquina lhes dá,... — radicam claramente na preocupação e defesa do cálculo como componente essencial do ensino e aprendizagem da Matemática.

Apesar do mau estar sentido pela maioria dos professores de Matemática face ao insucesso da disciplina e à crescente compreensão que o ensino que se tem vindo a fazer é responsável pelo desinteresse dos alunos, têm sido dados poucos passos para inflectir esta lógica.

O ensino da Matemática caracteriza-se ainda hoje por um excessivo peso de cálculo, onde o desenvolvimento da capacidade básica de cálculo, a memorização e manuseamento das suas técnicas parece ser o fio condutor da Matemática ao longo dos diferentes anos de escolaridade.

Tem sido muito valorizada a destreza para resolver complicadas expressões numéricas ou "aliciantes" equações, com significado muito duvidoso para a maioria dos alunos.

Hoje não podemos continuar a assistir indiferentes a que alunos com algum desembaraço no cálculo escrito, não saibam analisar uma simples situação da vida real, de forma a reconhecer que cálculos devem ser feitos para resolver o problema implícito nessa situação.

De facto, a calculadora vem levantar problemas quanto às prioridades a estabelecer no ensino e aprendizagem da Matemática nos diferentes anos de escolaridade.

Ela efectua a maioria dos algoritmos que fundamentam um ensino com grande ênfase no desenvolvimento da capacidade de cálculo. A calculadora vem, de certa forma, evidenciar a fragilidade do ensino que fazemos mas vem, também, possibilitar a sua reflexão. Se outros argumentos não houvesse, este era, por si só, suficiente para não adiar mais uma reflexão séria sobre a introdução da calculadora.

Não está em causa a eliminação dos programas de todas as técnicas de cálculo nem, muito menos, afirmar que o cálculo não é importante e que não deva ser parte integrante da Matemática escolar. O que está em causa é a importância e prioridade do cálculo e a forma de se desenvolver essa componente da Matemática.

O uso da calculadora poderá provocar uma recessão no cálculo escrito e mecanizado. Mas será socialmente preocupante um aluno dos nossos dias não encontrar, com a mesma rapidez que um aluno de há 20 anos, o quociente de um número de 7 dígitos por um número com 4 dígitos, utilizando unicamente papel e lápis? O desembaraço dessa técnica numa situação como esta, contribuirá para reforçar a compreensão da operação?

Contudo, poderá já ser preocupante se o aluno, observando o dividendo e o divisor, não conseguir ter mentalmente uma ordem de grandeza do quociente.

Um outro exemplo. Perante um aluno com dificuldades na compreensão e desenvolvimento do algoritmo da adição, será mais importante insistir na repetição de contas em série até o aluno dominar mecanicamente a técnica "do vai um" ou perceber claramente que "o vai um" da soma das unidades corresponde a uma dezena que se vai adicionar à soma dos algarismos das dezenas,... Porque não utilizar, face a estas dificuldades, por exemplo uma aproximação diferente à soma iniciando a operação da esquerda para a direita? Aliás, trata-se de um método com bastante interesse tendo em conta o desenvolvimento de processos de aproximação sucessiva ao resultado exacto. Por exemplo, a soma de 325 com 748 seria igual a 1000 (300+700) mais 60 (20+40) mais 13 (5+8). A compreensão da forma tradicional de execução do algoritmo viria depois, tornando-se então mais simples para o aluno a sua técnica. E talvez se ganhasse na compreensão da operação e na compreensão da ordem de grandeza do resultado, desenvolvendo igualmente a capacidade de estimação de resultados. E se isso acontecer a calculadora pode substituir com maior eficiência a técnica tradicional, nomeadamente em presença de números cuja ordem de grandeza o justifique.

Não é, pois, preocupante a recessão dos alunos face ao cálculo escrito e às técnicas tradicionais que pode em alguns casos acontecer, se pensarmos que o uso da calculadora realizado de uma forma consciente transporta consigo o desenvolvimento do cálculo mental e da estimação.

Perde-se em habilidades mecânicas, mas ganha-se em compreensão da realidade dos números — do seu sentido na vida e nos problemas, da sua ordem de grandeza,... — e ganha-se no sentido crítico face a esses mesmos números, enquanto resultado das operações em que possam estar envolvidos.

O argumento de, face ao uso da calculadora, o aluno aceitar qualquer resultado da máquina, deixa também de se poder colocar, e o encontrar resultados "disparatados'' pode abrir caminho a reflexões importantes sobre o seu aparecimento. Contudo, é necessário ter em conta que neste aspecto, a maior parte das calculadoras apresentam como uma das suas limitações, em relação a outros instrumentos de cálculo mais potentes, o não fazer o registo dos passos intermédios de resolução.

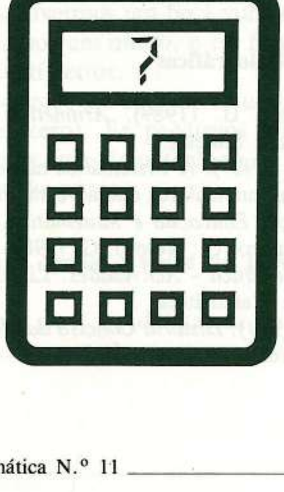
De facto, a discussão da introdução da calculadora na aula de Matemática passa fundamentalmente pela discussão do relevo e do papel dado à capacidade básica de cálculo, seja ele aritmético ou algébrico, e pela forma como a trabalhamos com os nossos alunos.

Desenvolver o sentido do número e capacidades como o cálculo mental e a estimação são objectivos do cálculo que ficam extremamente valorizados com a introdução da calculadora.

A possibilidade de trabalhar com números de maior ordem de grandeza, de se poder investigar as suas propriedades, de explorar as suas possíveis decomposições, de entender as possibilidades mais amplas da sua manipulação, de tomar decisões em contextos numéricos, são factores que implicam um melhor entendimento do sentido do número e do seu papel na interpretação da realidade.

Uma nova forma de encarar o cálculo, possibilitadora de novas abordagens numéricas, assentes em actividades que permitam ao aluno tirar todo o partido do uso da calculadora, transporta como efeito importante e decisivo o desenvolvimento de uma atitude de pesquisa e construção da Matemática.

Para isso é necessário os alunos aprenderem a usar a calculadora de forma correcta. Do ponto de vista técnico, utilizando as possibilidades abertas pelas memórias cumulativas, constantes das operações e funções directas de percentagem e raíz quadrada, só para falar das calculadoras simples; do ponto de vista pedagógico incentivando o seu uso com espírito crítico de forma a permitir, a cada momento, analisar a razoabilidade dos resultados que a calculadora vai fornecendo, fomentar o registo, sempre que necessário, dos passos intermédios do desenvolvimento das estratégias, para que possam estar seguros de possíveis alterações a efectuar.



## A calculadora estimula a actividade matemática

### — na construção de conceitos

Esta nova discussão sobre o cálculo que a calculadora vem evidenciar, através do tratamento númerico que passa a ser possível fazer, vem enriquecer a construção de muitos conceitos como os de número, sucessão, série e convergência, entre outros, e vem possibilitar uma melhor compreensão das operações que se envolvem, de forma natural, nesse trabalho numérico.

Por outro lado, muitas situações geométricas e algébricas poderão ter um tratamento numérico mais concreto, mais acessível, podendo assim ser trabalhados em níveis de escolaridade mais elementares, contribuindo para que os nossos alunos desenvolvam a capacidade de organizar os dados, estabelecendo as correctas relações entre eles de forma a permitir-lhes um maior sucesso no uso dessas abordagens.

Trata-se no fundo, da possibilidade de exploração informal de muitas situações e conceitos habitualmente tratados do ponto de vista formal.

Esta perspectiva, que a calculadora nos abre no campo do ensino e aprendizagem da Matemática, vem possibilitar ao longo dos diferentes anos de escolaridade diversas aproximações a conceitos e noções de uma forma informal, caminhando de uma forma mais segura para a formalização matemática.

Todo o trabalho de experimentação e investigação, descoberta de regularidades, formulação de conjecturas e generalização de situações que os alunos de Matemática vão fazendo crescer, assentam em situações problemáticas formuladas por si próprios ou proporcionadas pelo professor.

Um pouco como na evolução da Matemática é a formulação e resolução de actividades e problemas o motor do desenvolvimento e construção de conceitos e ideias matemáticas por parte dos alunos.

### — na resolução de problemas

A resolução de problemas é também no panorama do ensino da Matemática, uma finalidade que vai ganhando uma importância crescente na comunidade educativa. Tanto mais que as realidades da nossa época vêm evidenciando a capacidade de resolução de problemas como uma ideia chave do crescimento individual e a consequente valorização social desta capacidade.

Ao mesmo tempo que permite a descoberta, construção e valorização da Matemática, a resolução de problemas representa um espaço de mobilização de diferentes saberes e aprendizagens sendo paralelamente uma metodologia de trabalho possibilitadora do desenvolvimento de capacidades e atitudes formativas face à Matemática e face à vida.

A calculadora vem abrir novas dimensões à actividade de resolução de problemas, aliviando o peso dos cálculos que a resolução de um problema geralmente transporta e permitindo ao aluno centrar-se no seu processo de resolução.

Em muitos dos problemas que damos aos nossos alunos os dados são apresentados de forma estilizada com a preocupação de que possibilitem cálculos não muito complicados e resultados que sejam, de preferência, números inteiros, raízes quadradas de quadrados perfeitos ou senos de ângulos conhecidos. Esta preocupação impossibilita muitas vezes a formulação de problemas que partam de situações reais do quotidiano.

A possibilidade de encarar situações problemáticas ligadas à vida e a dados reais ganha, com a presença da calculadora, um lugar mais importante na educação matemática, porque os alunos podem, sem risco de serem abafados em cálculos sem fim, pesquisar, organizar e gerir os dados com muito maior facilidade e rapidez.

Pelo que conheço dos professores de Matemática penso que espera uma resposta ortodoxa!

Ainda tomando como base esta possibilidade aberta pela calculadora (facilitadora da organização e gestão de dados) parece-nos importante retirar três consequências: 1) a presença da calculadora vai permitir que os alunos com menor domínio das técnicas básicas de cálculo não fiquem impossibilitados de viverem, por via disso, todo o processo de formulação e resolução de problemas (desenvolvendo nesse processo técnicas alternativas que lhe permitirão colmatar essas falhas); 2) a possibilidade dos alunos poderem trabalhar mais problemas devido à rapidez com que os cálculos são efectuados; 3) a possibilidade que se abre para fases do problema geralmente negligenciadas, que se prendem com a discussão do resultado, verificação da correcção da estratégia utilizada e possíveis generalizações.

Se a rapidez e facilidade de resolução dos cálculos necessários que a calculadora nos proporciona faz nascer uma nova dimensão para a resolução de problemas que se prende com a natureza das situações e dos dados utilizados, não é menos importante a contribuição da calculadora na diversificação das estratégias de resolução de problemas. A calculadora, na fase de abordagem da estratégia a utilizar, incentiva conjecturas, experimentações, verificações e formulação de novas conjecturas, ..., fomentando o desenvolvimento de métodos próprios de resolução de problemas, baseados, por exemplo, em metodologias de tentativa-erro, que têm muito a ver com as novas abordagens numéricas de que já falámos.

A construção de novos métodos de abordagem dos problemas deve ser incentivada e o melhor processo de o fazer passa por encontrar, na sala de aula, momentos de comunicação e discussão das estratégias e métodos utilizados. Para além de ser um enriquecimento e valorização do trabalho desenvolvido, individualmente ou em grupo, trata-se de um processo que vai permitir aos alunos ganhar mais confiança para trabalhar novos problemas.

Embora estejamos conscientes que a calculadora não é indispensável para a prática de resolução de problemas, estamos convictos que ela vai permitir mais e melhores problemas, integrados em situações mais ricas. Paralelamente, ao permitir novas abordagens de resolução e ao facilitar as generalizações, contribui para a descoberta e desenvolvimento de ideias e conceitos matemáticos, num processo em crescendo.

Desta forma, não há razão para que os professores de Matemática situem a discussão ao nível da utilização ou não da calculadora. Pelo contrário, parece-nos fundamental aceitar todos os desafios que ela nos coloca, reflectir sobre a sua melhor utilização, criando materiais e actividades diversificadas de forma a que ela contribua para novas experiências e novas práticas de alunos e professores.

O desafio não é fácil, a introdução de qualquer inovação acarreta sempre constrangimentos de diversa ordem, nomeadamente o peso da opinião pública, que ao falar de Educação toma quase sempre o seu tempo como o óptimo, mas trata-se de uma oportunidade de renovação do ensino e aprendizagem da Matemática, que urge, e... haverá algo mais belo que o processo que se vive quando somos protagonistas dos nossos próprios desafios?

**Notas**

1 Struik, Dirk J. (1989); História Concisa das Matemáticas (pag.32)

2 Pensa-se ter sido inventado no Oriente há cerca de 5000 anos

**Referências Bibliográficas**


Abelló, Frederic U. (1989). *Aritmética y Calculadoras*. Madrid, Editorial Sintesis.

Ponte, João P. (1987). A Matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço. *Educação e Matemática*, n.º 4.

Silva, A.; Loureiro, C.; Veloso, G. (1989). *Calculadoras na Educação Matemática - Actividades*. Lisboa, Associação de Professores de Matemática.

Struik, Dirk (1989). *História Concisa das Matemáticas* (trad. de J. S. Guerreiro). Lisboa, Gradiva.

# Uma corda à volta da terra

**José Paulo Viana,** Esc. Sec. Marquês de Pombal

Um dos mais antigos problemas que me entusiasmou é o da corda à volta da Terra. Suponho que quase todos o conhecerão já:

*"Temos uma corda bem justa à volta da Terra, no equador, por exemplo. Se acrescentarmos um metro à corda e a esticarmos uniformemente, ela deixa de estar justa e passa a haver uma folga. Que animal consegue passar entre a corda e o chão?"*

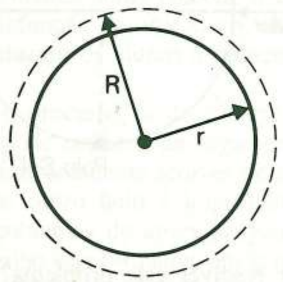
Se nunca viram este problema, pensem um bocado nele, tentem resolvê-lo, antes de continuar a ler.

A resposta é surpreendente: um gato passa à vontade! E surpreendente é também que a folga não depende do tamanho inicial da circunferência. Com efeito, se for

r = raio da circunferência inicial

P = perímetro do círculo inicial

a nova circunferência terá comprimento P+1.




Seja R o seu raio.

Então $2\pi R = P + 1$

$$2\pi R = 2\pi r + 1$$
$$2\pi (R - r) = 1$$
$$R - r = \frac{1}{2\pi}$$

Ora R–r é precisamente a folga procurada e que, portanto, é igual a $1/2\pi = 0{,}159$ m ou seja, quase 16 cm.

Vemos também que este valor não depende do raio inicial. Assim, se tivermos um fio à volta de uma laranja e lhe acrescentarmos um metro, o fio ficará afastado os mesmos 15,9 centímetros.

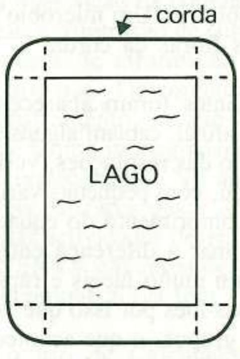
No limite, podemos até considerar um ponto (circunferência de raio zero). Se pegarmos num fio de um metro, construimos uma circunferência de raio 15,9 centímetros à volta do ponto.

### Uma corda à volta do lago

Aqui há tempos ouvi a Adelina, da Escola Secundária Camões, contar que tinha proposto este problema aos seus alunos do 8.º ano e que, para confirmar (e mesmo convencer alguns mais cépticos...) resolveu fazer com eles uma experiência concreta. Para isso, aproveitou um lago redondo que existe na praça em frente à escola e lá foram todos, munidos de corda e fita métrica. Esticaram a corda à volta do lago, acrescentaram um metro e voltaram a esticar tentando que a folga se distribuisse igualmente. Mediram e lá estavam os 15,9 cm (ou, pelo menos, muito próximo...).

Fiquei entusiasmado com esta ideia da Adelina, sobretudo porque tinha já verificado que algumas pessoas continuam inabalavelmente descrentes. Para eles, a intuição continua a ser mais forte que a demonstração matemática e não conseguem acreditar que a folga seja mesmo tão grande. Ora, nestes casos, não há como ver para crer.

Como tinha uma turma de 10.º ano onde desde a primeira aula vínhamos fazendo e discutindo problemas, resolvi avançar com este e comecei logo à procura de lagos redondos. Corri as cercarias da escola e, com grande desgosto, não encontrei nada circular. Só rectângulos! Pus-me a pensar então no que aconteceria se a corda estivesse à volta de um rectângulo e lhe acrescentasse um metro. Surpresa! Acontecia o mesmo, exactamente o mesmo, que com as circunferências. Não só a folga não dependia das dimensões do rectângulo, como continuava a ser de 15,9 centímetros. Nem queria acreditar no que *via*. Mas lá estava, reparem na figura. Se




eu esticar a corda de modo a que fique toda a igual distância do rectângulo inicial, o que acontece é que ela fica direita e paralela aos lados, excepto nos cantos. Aí, para que todos os pontos fiquem equidistantes do rectângulo, a corda tem de se dispor num arco de circunferência com centro no vértice do rectângulo. Portanto, as partes rectas da corda têm o mesmo comprimento que o rectângulo inicial. O metro adicional vai-se repartir em arcos de circunferência que, no total, formam uma circunferência inteira (de perímetro um metro, claro). Como a folga é exactamente o raio destes arcos, cá vamos obter $2 \pi r = 1$ m, ou seja, $r = 0{,}159$ m.

Claro que já não parei aqui. Se isto acontecia com círculos e rectângulos, também aconteceria nos outros polígonos? Deitei mãos à obra e lá estava: acontecia. Desde que o polígono fosse convexo, a folga continuava a ser a mesma, quaisquer que fossem a forma e as dimensões iniciais. Aliás, nem era preciso partir de um polígono. Basta a figura ser convexa. Experimentem ver o que acontece com um triângulo, ou um pentágono, ou ...

Andava eu nestas lidas quando encontrei o Eduardo Veloso e lhe comecei a contar estas coisas, todo satisfeito.

— Claro, claro — interrompeu ele. — O Papert tem um capítulo do livro "Logo: Computadores e Educação"(*) onde fala nisso tudo.

Fui ver ao livro. Era verdade. São assim os desgostos da vida: de vez em quando julgamos estar a descobrir coisas que afinal já tinham sido descobertas. O que vale é que para nós foram mesmo descobertas e ninguém nos tira a alegria desses momentos.

### Uma turma à volta da corda

Claro que todas estas implicações do problema da corda reforçaram a ideia de que o tinha de apresentar e discutir na tal turma. Era uma turma que gostava de problemas: a aula de apresentação começou com um problema e acabou com outro; um mês depois de se iniciar em várias turmas o "problema da quinzena", propuseram que, para eles, se fizesse antes o "problema da semana".

Quando apresentei os dados e fiz a pergunta "Que animais conseguiriam passar entre a corda e o chão?", surgiram logo as respostas: "Uma minhoca", "Não, não, só um micróbio", "Um micróbio? Qual o quê, só se passar entre as fibras da corda!", "Uma toupeira, escavando...".

Nas aulas seguintes foram aparecendo comentários intrigados de que, afinal, cabiam alguns animais. Quando fizemos a discussão das resoluções, verifiquei que todos eles tinham seguido, com pequenas variações, o método de, conhecido o comprimento do equador (40.000 quilómetros), determinar a diferença entre os dois raios.

Os cálculos eram muito fáceis e rápidos utilizando a calculadora. Propus-lhes por isso que verificassem logo ali, em pequenos grupos, o que aconteceria se, em vez da Terra, tivessem uma moeda, uma laranja, uma bola de futebol, um lago redondo... E lá apareceram de novo os 15,9 centímetros. Fizemos depois a resolução para um raio **r** qualquer e confirmámos a independência da folga relativamente ao raio inicial.

Para a semana seguinte ficaram encarregues de investigar o que aconteceria com um rectângulo ou com um triângulo. Como devem imaginar, foi mais uma semana de discussões durante os intervalos onde iam surgindo as exclamações de "como é possível?".

### Uma corda mais curta

Terminada a semana e feita a análise destas variantes do problema, diz-me o João:

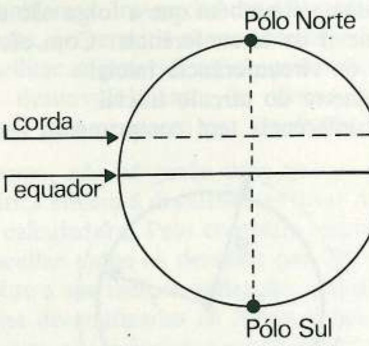
— Hoje sou eu que tenho um problema para si!

O João era, de todos, o mais entusiasta dos problemas. Resolvia-os quase todos com enorme alegria, seguindo por vezes estratégias pouco habituais, inesperadas e perfeitamente eficazes.

Era este o problema do João:

*"Temos a tal corda à volta da Terra. Se lhe retirarmos um metro, já não é possível pô-la ao longo do equador. Vamos então pousá-la no chão "paralela" ao equador (todos os seus pontos estarão assim a igual distância do equador).*

*Qual vai ser a distância da corda ao equador? Cabe lá algum país?".*




Querem tentar resolver este problema? (Solução noutra página desta revista).

(*) Papert, S. (1985). Logo: Computadores e Educação. São Paulo: Brasiliense.

# A epêntese da calculadora na proposta de novos programas de Matemática do 3.º ciclo

João Filipe Matos, Dep. de Educação da Fac. de Ciências de Lisboa

Ao longo da evolução da Matemática, a actividade dos matemáticos tem consistido essencialmente na formulação e resolução de sucessivos problemas, e generalização dos respectivos resultados. Nem sempre explicitamente formulados, estes problemas têm sido a base do desenvolvimento de novas teorias e novos ramos da Matemática. Muitos desses problemas têm sido resolvidos, ultrapassados, ou reformulados e generalizados, mas outros constituem ainda hoje um desafio para os matemáticos. Vêm estas palavras a propósito da problemática da formação matemática de base dos alunos.

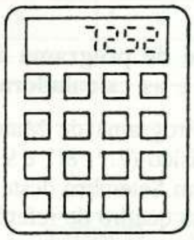
Ao pensar na formação matemática dos alunos é necessário ter em conta a natureza do processo de construção do conhecimento em Matemática, isto é, a natureza da Matemática como ciência, e a relevância desta questão na definição de objectivos, estratégias e métodos que conduzam os alunos à apreciação da Matemática.

De facto, o processo de descoberta e construção em Matemática pode também ter lugar em diversos níveis de ensino, nomeadamente através de actividades investigativas. Por outro lado é importante que os alunos vivam em ambientes de aprendizagem em que o processo de trabalho seja formativo em si mesmo, e o ênfase não seja colocado exclusivamente nos produtos. As actividades de investigação em Matemática, traduzem-se na exploração de situações problemáticas da própria Matemática, situações problemáticas reais ou imaginárias, na elaboração de teorias que vão sendo apresentadas, discutidas e aperfeiçoadas pelos alunos, e que podem desembocar na apresentação de um atelier ou um poster aberto à escola (por exemplo na área da teoria dos números, das formas em Geometria, do tratamento da informação, etc.). Se se pretender atingir objectivos ao nível das concepções e atitudes dos alunos, as actividades de investigação podem e devem constituir uma das componentes mais importantes do currículo de Matemática.

Naturalmente que esta perspectiva dá aos alunos um papel muito importante. E é necessário valorizar o papel do aluno na aula de Matemática. A verdade é que a sua iniciativa, as suas capacidades criativas, a sua dinâmica revelam-se diariamente em muitas actividades não escolares, algumas delas desenvolvendo-se inclusivamente dentro da própria instituição escolar.

Por outro lado parece ser muitas vezes assumido que o conhecimento matemático que é suposto os alunos aprenderem existe algures, quiçá na memória ou nos apontamentos do professor ou descrito nos manuais. Isto corresponde a uma concepção fechada e estática do saber como algo que é prescrito, que flui no sentido do professor para o aluno. É quase como se se ignorasse que os alunos são pessoas, capazes de ter ideias, construir e elaborar, raciocinar. É como se se admitisse que para pensarem os alunos precisam da autorização do professor, ou de um quadro de definições, regras e teoremas absorvidos de um qualquer manual, ou ser enquadrados por uma interminável grelha de objectivos super-específicos.

É esta ideia implícita do saber, da imediaticidade das (pseudo) aprendizagens — facilmente restituíveis pelos alunos num qualquer teste sumativo — que tendem a dar à Matemática a ideia de produto acabado.



## Dos computadores às calculadoras na Matemática

Com o advento da tecnologia, novos meios e novas formas de exploração e tratamento da informação têm sido colocadas à disposição da comunidade, permitindo assim a elaboração e construção de conhecimento a partir de grande quantidade de informação que por vezes se encontra muito dispersa. Os computadores constituem sem dúvida um instrumento que tem vindo a abrir perspectivas há pouco tempo inimagináveis ao nível da produção de novo conhecimento. No âmbito da educação são menos visíveis os traços desse fenómeno. Em Portugal, e através das actividades desenvolvidas no âmbito do Projecto MINERVA em cerca de 400 escolas, a utilização de microcomputadores tem vindo a dar passos importantes.

No entanto, o uso de Calculadoras não tem tido expressão saliente no nosso ensino. Assim, e aparentemente de forma um pouco contraditória, parece dar-se um "salto" sobre as Calculadoras, passando de imediato ao microcomputador e remetendo-as para um papel secundário.

O facto de os alunos terem acesso à utilização de Calculadoras na aula permite que o professor dê ênfase às aplicações da Matemática no contexto de problemas que estejam na área de interesses dos alunos. Na verdade, o interesse dos alunos na resolução de problemas, é consideravelmente maior quando eles utilizam dados pessoais. Alunos que utilizam dados recolhidos por eles próprios estarão intrinsecamente mais motivados para a resolução dos problemas. Estes podem ser personalizados, cada aluno ou grupo de alunos adaptando a questão à sua situação particular: "Quantas pegadas deixas marcadas na areia quando dás um passeio de 1 quilómetro ao longo da praia?"

Não será necessário tecer muitas mais considerações àcerca da importância da utilização das Calculadoras em todos os níveis de ensino. Ainda recentemente a APM publicou um excelente trabalho — Calculadoras na Educação Matemática — que mostra de forma bem clara algumas das perspectivas mais interessantes da sua utilização. Apenas lembrarei que as Calculadoras são um material de fácil aquisição, quer pelos alunos quer pelas escolas.

Finalmente, a utilização da Calculadora na aula de Matemática não é actualmente posta em causa com argumentos convincentes. Quanto à forma como é proposta a sua utilização, a questão parece-me ser menos pacífica.

## O projecto de programa do 3.º ciclo e as calculadoras

O projecto de Programa de Matemática para o 3.º ciclo do Ensino Básico (7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade), divulgado em Setembro deste ano, afirma no seu preâmbulo ter como quadro de referência a Lei de Bases do Sistema Educativo, atribuindo ao ensino da Matemática uma dupla função, nomeadamente o "desenvolvimento de capacidades e atitudes, e a aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização" (pág. 1). E salienta que "a adopção deste quadro de referência visa um aluno que, no termo do ensino básico se afirme como um ser pensante dotado de imaginação criadora e de capacidade de adaptação a um mundo em mudança" (pág. 2). As atitudes, as capacidades e os conhecimentos são as três linhas por onde os autores do Programa se propõem estruturar a proposta de estudos. Seria interessante analisar e discutir as perspectivas que explícita e implicitamente aquele Programa apresenta relativamente ao desenvolvimento das atitudes dos alunos no quadro da aprendizagem da Matemática, nomeadamente no enunciado das Finalidades e Objectivos Gerais deste ciclo e na subsequente definição de Estratégias/Meios que o Programa nos oferece. Mas trata-se agora apenas de analisar a forma como é concebida a utilização das Calculadoras nesta proposta de Programa.

Embora a lista de Objectivos Gerais inclua a utilização de Calculadoras ao nível do desenvolvimento de capacidades/aptidões, existe um traço curioso (e preocupante) nessa proposta. Refiro-me àquilo que poderíamos chamar, em termos linguísticos, de epêntese e que consiste no acrescentamento de uma sílaba ou letra sem valor determinado no meio duma palavra. E mais complicada e preocupante poderá ser esta epêntese se através de uma leitura cuidada atendermos em pormenor a outras das componentes da proposta.

## A Matemática "com ou sem" a utilização da calculadora

Da leitura atenta do capítulo correspondente aos Materiais fica a ideia clara de que a utilização das Calculadoras é parte muito importante do Programa. São feitas diversas afirmações, todas elas no sentido de tornar saliente a utilização das Calculadoras, dizendo-se nomeadamente que "são instrumentos fundamentais para o desenvolvimento de aptidões ligadas ao cálculo assim como meios facilitadores e incentivadores do espírito de pesquisa" (pág. 20). Apesar de mais uma vez a insistência no cálculo me levantar algumas reticências, fica ainda alguma esperança quando na mesma página se lê que "a utilização das Calculadoras faz parte integrante deste Programa". Isto significaria que a utilização das Calculadoras integraria ou completaria outros elementos do Programa, ou na etimologia da palavra, que os renovaria.

Mas é o Plano de Organização e Sequência do Ensino-Aprendizagem da mesma proposta que vem clarificar (?) definitivamente como é que é entendida a utilização das Calculadoras. De facto, o traço geral dos objectivos expressos neste capítulo do Programa no que respeita às Calculadoras é a insistência na frase "com ou sem Calculadoras". Diz-se por exemplo "determinar áreas e volumes de sólidos e de objectos da vida real com ou sem auxílio da calculadora" (pág. 25). Repare-se: com ou sem Calculadoras. Esta frase pode querer dizer que a sua utilização não é relevante, ou que é facultativa, ou que se deve fazer o cálculo com e sem Calculadoras, sugerindo que a calculadora será apenas um instrumento de verificação dos cálculos já efectuados mentalmente ou com papel e lápis, ou poderá querer dizer todas essas coisas, ou nenhuma.

Mas se esta irritante referência ao "com ou sem" fosse uma questão pontual talvez o meu desapontamento e preocupação não fossem tão grandes. A questão é que encontramos pelo menos mais uma meia dúzia de "com ou sem Calculadoras" neste Plano de Organização e Sequência do Ensino-Aprendizagem da proposta de Programa. E se lermos cuidadosamente a especificação relativa ao 7.º ano de escolaridade encontramos uma sementeira igual ou superior de "com ou sem", além de curiosas sugestões de estratégias tais como "o valor numérico de expressões literais será calculado por escrito, mentalmente ou usando calculadora" (pág. 43).

Tudo leva a crer que esta insistência não é certamente casual. Ela poderá querer dizer que na opinião dos autores da proposta de Programa, as Calculadoras não constituem um instrumento suficientemente importante, e portanto deixariam em aberto a ideia de que a sua utilização pode ser facultativa. Ou poderá querer dizer que existe uma certa resistência à sua recomendação explícita e assumida. Ou poderá ser apenas uma forma de agradar a diversas correntes e perspectivas relativamente ao ensino da Matemática em Portugal. Ou poderá pura e simplesmente não querer dizer nada disto.

*(continua na pág. 12)*

# A calculadora como ferramenta na resolução de problemas

Graciosa Veloso, Esc. Sec. C. Universitária

*O senhor Joaquim é pastor. Precisa de fazer um redil. Vai aproveitar uma parede de uma casa em ruínas e tem 168 m de arame. O redil deverá ter forma rectangular. Que rectângulo deverá construir de forma que a área seja máxima?*

Estamos perante uma situação, em que, do ponto de vista matemático, se pretende maximizar a função área. Será que do ponto de vista educativo a situação se resume à anterior? Como a resolver? Em que níveis de escolaridade? Será vantajosa a utilização da calculadora?

Um tipo de resposta possível e frequente a estas questões, pode ser: ...''com certeza, mas só no 11.º ano, altura em que damos derivadas, é que faz sentido colocar uma situação destas, como aplicação ou, quando muito, como motivação para o estudo da função derivada,... e sem necessidade da máquina''... Segundo esta perspectiva, uma forma possível de resolver o *exercício*, será considerar a área como a função **A(x) = x (168 – 2x)** em que **x** representa uma das dimensões do rectângulo. **A(x)** é uma função quadrática, cujo coeficiente do termo do 2.º grau é negativo e com termo independente nulo, logo o gráfico correspondente admitirá um único extremo relativo que é um máximo. Este será, neste caso, o zero da função derivada **A'(x) = 168 – 2x** , ou seja, **x = 42**. Então, as dimensões do rectângulo são 42 e 84. Neste processo de resolução, algébrico, aplicaram-se procedimentos que, à partida, se sabia conduzirem à solução; segundo Kantowsky, resolveu-se um exercício de aplicação de conhecimentos sobre função quadrática, derivadas e localização de extremos. Não se tratou de resolver um problema, pois havia já a posse prévia dos dispositivos conducentes à solução. Será o processo de resolução anterior, embora frequente, o único, ou até mesmo o mais natural para muitos alunos? Evidentemente que não é o único e será tão válido como outros que sejam mais significativos do ponto de vista da aprendizagem?

Detenhamo-nos num outro processo de resolução, *construído por alunos sem utilização da via algébrica*, recorrendo a estratégias em que a *tentativa* e as explorações *numéricas* são parte integrante:

- Tentativa de compreensão do problema

  Trata-se de determinar a largura e o comprimento de um rectângulo, tal que

  $$2 \times \text{largura} + \text{comprimento} = 168$$

  e tal que a área seja o maior possível.

- Estratégias de resolução

  Vamos construir tabelas e, por tentativas, com o auxílio da calculadora, vamos investigar as relações que devem existir entre os dados:

| LARGURA (m) | COMPRIMENTO (m) | 2 × LARG. + COMP. | |
|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 2 × 5 + 5 | não aceitável |
| 10 | 148 | 2 × 10 + 148 | aceitável |
| 20 | 138 | 2 × 20 + 138 | não aceitável |
| 20 | ... | | |
| 30 | | | |
| ⋮ | | | |
| 80 | 8 | 2 × 80 + 8 | |
| ⋮ | | | |
| 90 | | | impossível |

| LARGURA (m) | COMPRIMENTO (m) | ÁREA (m²) |
|---|---|---|
| 5 | 158 | 790 |
| 10 | 148 | 1480 |
| 20 | 128 | 2560 |
| 30 | 108 | 3240 |
| 40 | 88 | 3520 |
| 50 | 68 | 3400 |
| 60 | 48 | 2880 |
| ⋮ | ⋮ | |

Há que investigar o que se passa no intervalo [40, 50], pois nos extremos há inversão na ordem de grandeza das áreas. Assim pode-se ainda construir uma outra tabela

| LARGURA | COMPRIMENTO | ÁREA |
|---|---|---|
| 40 | 88 | 3520 |
| 41 | 86 | 3526 |
| 42 | 84 | 3528 |
| 43 | 82 | 3526 |
| ⋮ | | |

Será que para 44, 80 obtemos a mesma área que para 40, 88? Será de admitir a existência de alguma simetria no gráfico? (com uma folha de cálculo pode-se rapidamente aprofundar esta exploração).

Serão mesmo 42 e 84 as dimensões procuradas? Tentemos ainda um refinamento à volta do 42:

| LARGURA | COMPRIMENTO | ÁREA |
|---|---|---|
| 42,000001 | | 3528 |
| 42,000002 | 83,999996 | 3528 |
| ⋮ | | |
| 42.5 | 83 | 3527,5 |
| ⋮ | | |

Parece mesmo que 42 e 84 era o que procurávamos! Que outras questões podem emergir destas?... Por exemplo estas:

- Haverá alguma relação entre a área deste rectângulo e a do da família dos que têm perímetro 168 que tem maior área? Que tipo de relação? Porquê?
- Será o rectângulo 42 × 84 o que tem maior área na família dos seus isoperimétricos?

Este processo de resolução oferece-nos alguns comentários, pois julgamos poder constituir exemplo de aspectos muito importantes do ponto de vista da aprendizagem e da actividade matemática.

Os alunos tiveram de criar informação, de a organizar (construção das tabelas), relacionar, eliminar casos, seleccionar informação para investigação, ... A calculadora desempenhou um papel importante como ferramenta na resolução do problema, efectuando todos os cálculos necessários a todas as actividades que já mencionámos. Neste tipo de processo, o aluno pode fazer Matemática, o aluno do ensino básico pode investigar relações interessantes, nem sempre trabalhadas, entre perímetro e área. Mas, há ainda uma questão por esclarecer: este processo não prova que o rectângulo procurado é o de dimensões 42 × 84... Mas não constituirão situações como estas ambiente propício para *sentir a necessidade da prova por parte do aluno?* Não será caso para se relativizar um pouco a importância do pensamento formal, num contexto rico de actividade e descoberta?

Estes dois processos apresentados não se excluem naturalmente. Contudo, será de atentar no significado que o segundo pode ter para os alunos de níveis etários mais baixos e mesmo para alunos dos cursos complementares. A possibilidade de diversificar formas de abordagem ou resolução de uma situação pode contribuir para uma tão necessária flexibilidade curricular. A natureza experimental e a diversidade de capacidades que envolve, fazem deste segundo processo um contexto oportuno para a utilização da calculadora como ferramenta na resolução de problemas.

- A abordagem numérica não constituirá uma etapa fundamental, a não "queimar", na construção de ideias algébricas?
- Não constituirão os processos experimentais vias de construção e de prazer na actividade matemática?

## A epêntese... (conclusão)

### A calculadora "sempre que adequado"

Naturalmente que naquela sementeira de que falei não estão contabilizadas as vezes que a utilização de Calculadoras é aconselhada "sempre que adequado" (por exemplo, pág. 33). Trata-se de um outro traço que surge na proposta de Programa e cujo sentido me deixa confuso. Pretende-se dizer que a calculadora deve ser utilizada sempre que o seu uso for ajustado à actividade? Pretende-se sugerir que o uso da calculadora deve estar sujeito à actividade, adquirindo um papel meramente servilista do cálculo? Pretende-se dizer que o seu uso deve ser feito sempre que o professor assim julgar adequado (e aí voltaríamos à primeira questão)?

Poderíamos por absurdo admitir que esta questão seria uma precaução da parte dos autores do Programa no sentido de evitar exageros na utilização da calculadora por parte dos alunos. Recuso-me a acreditar nessa possibilidade, ciente de que são por demais conhecidas as limitações das Calculadoras.

Em resumo, a ideia que fica desta proposta de Programa é uma concepção superficial, balbuciante e servilista do cálculo àcerca da questão da introdução das Calculadoras no Programa do 3.º ciclo. Talvez afinal não seja de estranhar a não existência, no capítulo das Orientações Metodológicas da proposta de Programa, de uma única referência à utilização das novas tecnologias em geral, e das Calculadoras em particular. Aliás estas orientações baseiam-se em dois princípios centrados na questão dos conceitos que ora são "construídos pelos alunos", ora são "abordados sob progressivos níveis de rigor e formalização", "tratados e retomados". A mesma confusão que encontramos no Programa no que respeita às atitudes a promover nos alunos, estende-se à problemática dos conceitos. E inesperadamente, também à utilização das Calculadoras.

De facto, neste mar de confusão que é a proposta de Programa do 3.º ciclo, permito-me sugerir aos professores que não tenham muitas preocupações de ordem hermenêutica na leitura desta proposta de Programa.

Mas façam-no sempre que adequado. Com ou sem...

# A propósito da utilização da máquina de calcular: — uma entrevista —

*Fala-se já há uns bons anos da utilização de máquinas de calcular no ensino da Matemática. Foi e é um tema quente agora mais ainda quando se ouve dizer que de alguma forma elas vão entrar nos novos programas.*

*No ano lectivo passado, o núcleo de estágio da Escola Secundária Marquês de Pombal realizou algumas actividades com máquinas de calcular nas aulas de Matemática. Henrique M. Guimarães foi lá, já perto do final do ano, e ouviu, a propósito, os elementos desse núcleo Helena Torres, António Belo, José Paulo Viana e Ana Vieira Lopes a orientadora de estágio.*

*Dá-se conta aqui do resultado da conversa que então se realizou, onde se falou das motivações e objectivos que conduziram a realização dessas actividades, do que conseguiram alcançar e das dificuldades e obstáculos que surgiram, das reacções dos alunos e dos professores.*

**Henrique M. Guimarães** — Para começar eu lançava uma questão que é habitual colocar-se no princípio destas conversas. O que é que vos levou a realizar actividades com máquinas de calcular com os alunos das vossas turmas? Como é que surgiu a ideia?

**Ana Vieira Lopes** — Aquilo que me lembro é que tudo começou numa reunião de grupo em que houve uma certa polémica sobre as calculadoras, uma reunião do 9.º ano. Havia a ideia que não era permitido utilizar calculadoras e gerou-se uma certa discussão havendo quem fosse de opinião de que não as deveríamos usar e quem achasse que não era justo que se impedisse essa utilização. Ora o que vemos é que cada um pode o que quer. Eu, por exemplo, comprometi-me e resolvi fazer para o grupo uma acção para convencer as pessoas que as calculadoras até eram úteis. Depois, automaticamente, passou para o grupo de estágio. Discutimos essa questão, todos se interessaram e a partir daí começámos a trabalhar.

**HMG** — O que vocês fizeram girou em torno de que tipo de actividades? O que orientou a selecção e a definição dessas actividades?

**Helena Torres** — Um dos nossos objectivos era familiarizar as pessoas com a máquina de calcular no sentido de a poderem utilizar de uma forma crítica.

**José Paulo Viana** — O primeiro objectivo foi esse, mostrar que a máquina de calcular não serve só para multiplicar nem só para fazer somas, e mostrar isso também aos professores porque uma boa parte deles era essa a visão que tinha da máquina de calcular.

**HMG** — E tinham outros objectivos?

**AVL** — Um outro objectivo era conseguir que ficassem a saber usar a máquina de calcular em várias situações. Uma coisa é saber qual é o significado das teclas e o que se pode fazer com elas. Outra coisa é saber quando é que ela é útil e quando é que não é.

Outro objectivo ainda era conseguir que os alunos fossem capazes de definir estratégias para a resolução de um problema, adaptadas à sua máquina. Na verdade, mesmo nós não tínhamos a ideia que as máquinas fossem tão diversas. Têm princípios idênticos mas há pormenores em que diferem umas das outras e o aluno tem assim que saber resolver o problema adaptando-o à máquina que possui.

---

**Com uma máquina destas pode-se ir para tipos diferentes de problemas.**

---

**HMG** — A par destes objectivos, que tipo de preocupações tinham? Por exemplo, há quem diga que a utilização da máquina de calcular conflitua um pouco com os objectivos curriculares. Qual é a vossa opinião sobre isso?

**António Belo** — Não sei se conflitua se concilia. Pode conflituar com os objectivos mais específicos mas tratando-se dos objectivos mais globais que estão no programa acho que, pelo contrário, concilia. Quando se utiliza a máquina de calcular, há certas tarefas que passam a ser muito mais fáceis e sobra mais tempo para nos preocuparmos com outras questões. Por exemplo, perante um problema, se a parte de cálculo se puder fazer mais facilmente, fica mais tempo para se pensar nos métodos de resolução.

**JPV** — E, além disso, acho que permite resolver ou abordar outro tipo de problemas. Os problemas que normalmente se resolvem nas aulas são problemas em que os cálculos têm que ser pequenos para os alunos não perderem muito tempo com eles. Portanto, só um certo tipo de problemas é que é possível sem a máquina de calcular. Com uma máquina destas pode-se ir para tipos diferentes de problemas. Por exemplo, aqueles que se resolvem por tentativas em que cada tentativa envolve vários cálculos.

Com a máquina de calcular podem abordar-se problemas que envolvem assuntos que habitualmente eram tratados mais tarde, como os problemas de máximos e mínimos. Este tipo de problemas que se dão no 11.º ano porque só nessa altura é que se dão derivadas, podem ser resolvidos por tentativas, sem ter que saber derivar.

Assim, acho que nós também aceitámos mudar o tipo de problemas que se fazem nas aulas mas não sei se o conseguimos de forma sistemática. Deste modo os alunos também ficam com uma visão da Matemática um pouco diferente. Às vezes ouvimo-los dizer *"isto dá um resultado muito esquisito..."*. É "esquisito" porque não é um número inteiro. Para os alunos só os números inteiros é que são números normais pois estão habituados a resolver problemas que, na maior parte dos casos, não correspondem ao que acontece na realidade.

**AVL** — Ouve-se também dizer que os alunos não sabem fazer contas e que nós na Matemática só trabalhamos com números inteiros ou com fracções 'jeitosas' para que os resultados sejam também 'jeitosos'. Uma coisa que também tentámos fazer com os alunos foi um certo trabalho de cálculo apoiado na máquina de calcular.

**HMG** — Em termos do vosso dia a dia, como é que funcionavam? Avisavam previamente *"amanhã tragam a máquina!"*? Todos os alunos tinham máquina de calcular? Houve problemas por uns terem e outros não? Como é que era?

**HT** — Eu, no princípio do ano, pedi aos alunos que escrevessem na caderneta se possuíam ou não máquina de calcular. No 7.º ano só um ou dois alunos disseram que não tinham e no 10.º todos disseram que tinham. De qualquer modo não estou muito em condições de falar sobre o que perguntou pois embora tenha utilizado a máquina de calcular não foi de forma sistemática.

**JPV** — Comigo aconteceu um fenómeno curioso. Eu tinha uma turma do 7.º ano e outra do 10.º. No início do ano havia alguns alunos do 7.º que tinham máquina de calcular e outros que não tinham mas que rapidamente arranjaram e começaram a trazer. Estes alunos criaram o hábito de trazer sempre a máquina de calcular para a aula. Nessa turma quase todos os alunos a traziam sempre, nunca lhes recomendei nem lhes disse *"amanhã tragam a máquina!"*. Traziam-na sempre e usavam-na todos os dias.

Os alunos do 10.º ano que desde o início do ano tinham máquina de calcular nunca se habituaram a ela, ou pelo menos nunca acharam que a máquina era importante, que valia a pena trazê-la para a aula. Havia sempre dois ou três que traziam mas os outros não, o que fazia com que de vez em quando andassem todos atrás das duas ou três máquinas de calcular que havia na aula. Desse modo, se eu queria aprofundar um problema utilizando a máquina de calcular tinha que avisar de véspera.

Porque é que eles não usavam a máquina? Ainda por cima sabendo que nas minhas aulas elas eram usadas com certa frequência?

A explicação que encontrei que não sei se é válida mas que me parece plausível, é que enquanto que no 7.º ano os alunos ainda não estão condicionados pela não utilização da máquina isto já não acontece com os do 10.º já um bocado marcados pela experiência anterior.

---

**Os alunos têm uma certa consciência de que [a máquina de calcular] é uma questão polémica entre os professores.**

---

**AVL** — Muitas vezes, os alunos chegam à aula de Matemática, no primeiro ou no segundo dia, e perguntam: *"A professora deixa usar máquina de calcular?"...*

**HMG** — Eles fazem essa pergunta?

**AVL** — Fazem sempre, porque é uma questão polémica. Eles têm a perfeita noção de que isso é polémico, já perceberam que uns professores deixam usar a máquina de calcular e outros não deixam...

**HMG** — Mesmo ao nível do 7.º ano?

**AVL** — Provavelmente já no Ciclo fazem essa pergunta. Eu acho que os alunos têm uma certa consciência de que é uma questão polémica entre os professores, assim, se um professor deixa utilizar a máquina de calcular eles sabem logo.

Além disso, logo no início do ano, começámos por realizar um *dia da calculadora* em todas as turmas. O objectivo era, como já se disse, familiarizar o aluno com a máquina, com a utilização das diversas teclas. Propuseram-se fichas de trabalho com problemas giros e eles ficaram entusiasmadíssimos com esse trabalho. Penso que se geraram neles ideias diferentes relativamente à calculadora.

No 9.º ano houve um problema com a Física pois o grupo desta disciplina decidiu não utilizar a calculadora e trabalhar só com números exactos para os alunos não terem problemas de cálculo. Preferiram isso a trabalhar com a calculadora. Isto criou uma situação complicada, uns alunos traziam a máquina porque se tinham entusiasmado mas outros esqueciam-se pois só era precisa para a Matemática.

**HMG** — Qual era o argumento que os professores de Física apresentavam?

**AB** — Um dos argumentos era que os alunos não tinham espírito crítico, não eram capazes de criticar o resultado que obtinham na máquina. Eu acho que se os alunos não têm espírito crítico e não se preocupam com o resultado que obtem quando utilizam a calculadora, acontece o mesmo se fizerem a conta *à mão*.

**HMG** — E os professores de Matemática? Como é que reagiram?

**JPV** — Nós tentámos alargar a discussão, organizámos uma sessão sobre as calculadoras...

**AVL** — Com o título *"Porque não deixamos os nossos alunos usarem a calculadora nas aulas e nos testes?"...*

**JPV** — A adesão não foi muito grande, não chegou a metade. Dos que não apareceram na sessão, pelo menos uma parte significativa, continuaram a ser contra a utilização das máquinas. Não diziam directamente mas sentia-se.

Dos professores que foram à sessão, para dois ou três eu acho que foi uma revelação. Perceberam que a máquina de calcular era uma coisa completamente diferente do que eles imaginavam, que aquele *instrumentosinho* pode fazer muito mais coisas, que pode ser um bom meio para investigar. Para estas pessoas acho que valeu a pena. Não sei se mudaram a sua atitude nas aulas mas pelo menos ficaram a pensar naquilo e suponho que se se continuar o trabalho com esses professores facilmente começarão a usar a calculadora nas aulas.

Depois houve professores que estiveram na sessão, fizeram coisas mas isso não alterou nada, nem a sua maneira de pensar nem a sua prática.

**AVL** — Alguns professores de Matemática dizem que a máquina de calcular facilita as coisas. Nós propusemos alguns problemas em que era complicadíssimo usar a máquina de calcular e era ver as pessoas a não os conseguirem resolver, a demorar montes de tempo. Pelo menos viram que não era tão simples como isso...

**HMG** — Que outros argumentos apresentam os professores de Matemática para não usarem a máquina de calcular nas aulas?

**HT** — A questão do cálculo, as pessoas continuam a achar que é importante saber racionalizar denomidadores, somar números representados por fracções...

**AB** — Saber bem a tabuada...

**HT** — Isso também eu acho que é importante.

**JPV** — Nós chegamos às nossas aulas e encontramos alunos que não sabem a tabuada. Isto não tem nada a ver com a utilização da máquina de calcular pois eles nunca a utilizaram, nunca deixaram que a utilizassem e eles não sabem a tabuada na mesma.

**AVL** — Eu penso que as pessoas têm muito medo do que não controlam. E também de serem um bocado ultrapassadas.

**HMG** — É quase certo que os novos programas, de uma forma ou de outra, vão referir-se explicitamente à utilização da máquina de calcular. Já identificaram alguma reacção entre os professores a propósito disto?

**HT** — Eu acho que as pessoas não estão preocupadas...

**AB** — Não pensaram no assunto. Quando isso chegar...

**AVL** — Se os programas só fizerem referência, acho que isso não assusta as pessoas. Dizer *"é aconselhável o uso da calculadora"* não significa nada para as pessoas.

**HT** — É como dizer *"é aconselhável a resolução de problemas"*.

**AVL** — Convidar a utilizar a máquina de calcular significa para os professores que eles podem deixar os alunos utilizá-la, não quer dizer que os tenham que ensinar nessa utilização, nem que criar actividades próprias para a calculadora. Acho que esta perspectiva não assusta ninguém.

**JPV** — Não sei porquê mas há uma ideia generalizada contra a utilização das máquinas de calcular não só na Escola mas em todo o lado. Toda a gente acha que nas escolas não se deve usar a máquina de calcular.

**AB** — Acho que tem a ver com o sistema de ensino por onde a maior parte das pessoas passou e que está convencida que era bom. A máquina de calcular não tem nada a ver com os métodos de ensino que então se aplicavam.

**HMG** — Grande parte das pessoas da geração que já saiu da escola, sente que o que aprendeu em Matemática se se utilizar a máquina de calcular perde o sentido e, conscientemente ou inconscientemente, estabelece uma ligação imediata: se há máquina de calcular não há Matemática.

**AB** — Fora da Escola sinto que há a ideia que a Matemática praticamente se resume à Aritmética.

**JPV** — A contas.

**AVL** — E assim, com a calculadora, é fácil. As pessoas acham que por princípio a aprendizagem tem que ser difícil, complicada.

---

**Também houve quem pusesse em causa o que aprendia.**

---

**HMG** — Quando os alunos começaram a sentir que podiam usar à vontade a máquina de calcular quer nas aulas normais quer nos testes, identificaram alguma reacção especial?

**AVL** — No 11.º fiz uma série de trabalhos com equações trigonométricas e havia um aluno que andava divertidíssimo. Ele usava a máquina de calcular e ao irmão que andava no 12.º nunca a tinham deixado usar. Espantava-se com isso e sentia-se importante.

**HT** — Também houve quem pusesse em causa o que aprendia. No 10.º quando tratei a racionalização de denominadores, os alunos perguntaram-me para que era aquilo. Respondi que era para simplificar os cálculos e eles sentiram que não havia necessidade disso dizendo: *"mas nós agora podemos usar a calculadora"*.

**HMG** — No fundo a máquina de calcular surgia como obstáculo à actividade que se propunham realizar. Lembram-se de outros obstáculos que tenham surgido?

**AB** — Aconteceu-me uma vez no primeiro teste de trigonometria. Depois de o ter feito verifiquei que com a máquina de calcular aquilo não tinha a mínima dificuldade. A partir do momento em que se utiliza a calculadora o tipo de trabalho de avaliação tem que ser completamente diferente.

**HMG** — Que consequências teve a utilização da máquina de calcular na preparação das vossas aulas? Já conseguem ter alguma reflexão sobre isso?

**JPV** — Um dos aspectos é este a que o Belo agora se referiu. Depois pode-se ir muito mais fundo nas questões, pode-se também exigir muito mais dos alunos. Isto obriga a mudar não só a forma como se dá as aulas, como os conteúdos, aquilo que se ensina. Realmente, estando a utilizar a máquina de calcular não faz sentido racionalizar denominadores de fracções ou resolver equações trigonométricas.

**AVL** — O próprio capítulo dos radicais torna-se duvidoso, põe-se em causa todo um capítulo no 9.º ano.

**Levou-me a considerar que a Matemática que está nos programas (...) nem sempre é a que tem mais sentido ensinar-se.**

**HMG** — Num balanço sobre esta experiência de utilização da máquina de calcular nas vossas aulas o que diriam quer ao nível dos alunos quer ao vosso nível?

**HT** — Para mim em particular foi positivo pois o que aqui fizemos deu espaço à reflexão individual e de grupo mesmo de professores fora do estágio. Levou-me a reflectir não só nas potencialidades da máquina de calcular que eu conhecia pouco, se calhar não mais que os alunos e outros professores, e por outro lado levou-me a pensar na utilidade daquilo que eu ensino. Levou-me a pôr em causa muitas dessas coisas, a considerar que a Matemática que está nos programas nem sempre é a mais útil, nem sempre é a que tem mais sentido ensinar-se.

**JPV** — No que se refere aos alunos acho que valeu a pena porque lhes deu uma perspectiva da utilização da máquina de calcular que eles não tinham e das suas potencialidades. Senti, no entanto um problema, sobretudo no 7.º ano em que os alunos usavam permanentemente a calculadora mesmo para fazer somas e diferenças elementares. Se tinham que somar 12 com 9 faziam-no com a máquina de calcular. Ora, eu acho que a este nível pode ser perigoso resolverem tudo sem nunca fazerem qualquer cálculo mental, passarem a usar a máquina permanentemente, mesmo em coisas que inclusivamente são mais simples de fazer sem a máquina.

**HMG** — E foi sempre assim até ao fim do ano?

**JPV** — Eu senti isso no fim do ano, no princípio não.

**HMG** — E tens algum dado que possa explicar porque faziam isso? Não sabiam a tabuada? Não estavam para isso? Faziam isso pelo simples prazer de usar a máquina?

**JPV** — Era porque não estavam para fazer o cálculo mentalmente. Em alguns casos que acompanhei, se surgia uma soma simples que o aluno fazia com a máquina e eu dizia *"não é preciso a máquina, quero de cabeça"*, notava que havia já uma certa relutância em fazer cálculos mentais.

Este é um perigo que existe, sobretudo com os alunos mais novos, embora ache que isso foi contrabalançado por algumas actividades que propusemos e que obrigavam a pensar antes de utilizar a máquina.

**AVL** — O balanço que faço é extremamente positivo. É aliciante para os alunos, um desafio diferente, trabalhar com uma máquina. Estamos numa era em que eles gostam de trabalhar com maquinetas e eles tiveram a possibilidade de explorar de uma forma organizada a máquina que tinham.

Há problemas, concretamente há certos capítulos em que somos obrigados a reformular um bocadinho aquilo que fazíamos (o caso da trigonometria, dos radicais, das potências, etc). No entanto penso que isso não é negativo, introduzir um elemento que obriga a essa reformulação. Se uma pessoa tiver uma máquina de calcular já não faz esse tipo de coisas, reduzir radicais por exemplo.

**Foi possível fazer coisas novas, coisas diferentes, coisas que nunca se teriam feito se não houvesse a máquina.**

**HMG** — Para além de ter sido algo de que os alunos gostaram que de certa maneira os entusiasmou e de terem adquirido o domínio técnico de um instrumento há outras coisas que vos levem a dizer que valeu a pena?

**JPV** — Foi possível fazer coisas novas, coisas diferentes, coisas que nunca se teriam feito se não houvesse a máquina. E repara que só este ano é que pensámos um pouco a sério nisto. É possivel fazer mais, quer com os alunos que já se iniciaram quer também ao nosso nível enquanto professores. O que eu quero e o que me parece mais importante, é descobrir outras utilizações da máquina aplicadas à Matemática que nos permitam investigar, procurar e resolver outro tipo de problemas com os alunos. É inevitável que as máquinas de calcular vão passar a ser usadas a nível mais geral e é agora ainda mais importante que sejam usadas numa perspectiva mais inovadora, mais enriquecedora. Isto é um trabalho que tem que continuar a ser feito.

# PENSE NISTO:

### Descubra as diferenças

Se for bom observador notará algumas diferenças entre os dois textos que a seguir se apresentam. Pense nelas.

**I**

*"A calculadora é uma realidade no quotidiano dos jovens. A sua vulgarização impõe que se considerem alterações quer dos conhecimentos a adquirir, quer dos métodos a utilizar, embora continue a considerar-se indispensável que os alunos efectuem cálculos com papel e lápis. Assim privilegia-se o trabalho com números na forma decimal, dá-se um certo ênfase ao cálculo mental e à estimação e aligeira-se o cálculo com números representados com fracções.*

*A experiência tem revelado que os alunos, libertos das preocupações do cálculo se tornam mais confiantes e persistentes na resolução de problemas, actividades fundamental no contexto deste programa. A calculadora será então usada, não só como instrumento de cálculo mas também para experimentação e pesquisa."*(1)

**II**

*"A experiência tem revelado que os alunos, libertos das preocupações do cálculo se tornam mais confiantes e persistentes na resolução de problemas, actividades fundamental no contexto deste programa. A calculadora será então usada, não só como instrumento de cálculo mas também para experimentação e pesquisa.*

*A par disto, a calculadora é uma realidade no quotidiano dos jovens e sua vulgarização impõe que se considerem alterações quer dos conhecimentos a adquirir, quer dos métodos a utilizar. Assim, embora continue a considerar-se indispensável que os alunos efectuem cálculos com papel e lápis, privilegia-se o trabalho com números na forma decimal, dá-se especial ênfase ao cálculo mental e à estimação e aligeira-se o cálculo com números representados com fracções."*(2)

Estamos, ou continuamos, em ano de *Programas. Novos Programas*, acrescente-se. E uma das coisas novas que trazem é, em termos simples, a máquina de calcular. Na verdade, há muito que se fala deste instrumento e era já tempo de em programas para o ensino da Matemática isso também acontecer. É pois, mais exactamente, uma coisa nova **nos** programas que, espera-se, haveremos de ter. Mesmo assim, registe-se, ainda bem.

No entanto impõem-se desde logo algumas reflexões, ou perguntas se quiserem. Porque se propõe a utilização da máquina de calcular no ensino da Matemática? Com que objectivos se propõe essa utilização? Que formas de utilização se antecipam e a quais se dá maior ênfase? Que papel e importância se atribui ao cálculo?

Como pretexto para as respostas, aqui fica este *jogo das diferenças*.

(1) In "Projecto de Programa de Matemática, 2.º ciclo do ensino básico", Setembro de 1989 — Documento elaborado para a recolha de pareceres (p. 9).

(2) Da nossa responsabilidade.

*Henrique M. Guimarães*

CASIO
*** CASIO FX-850P ***
*** SCIENTIFIC LIBRARY 116 ***
fx-5000F
* 128 Fórmulas incorporadas
* Programável
fx-82B
* Calculadora Científica Básica
* 75 Funções
fx-7500G
* Calculadora Científica
* Programável c/ gráficos
* Visor Gráfico
CALCULANDO O FUTURO CIENTIFICAMENTE
CALCULADORAS PARA O ENSINO
MAIS MEMÓRIAS
MAIS FUNÇÕES
MAIS QUALIDADE
exija
GARANTIA
BELTRÃO COELHO, LDA.
2 ANOS
CASIO
LIDER MUNDIAL EM CALCULADORAS

# Para este número seleccionámos...

*Apesar da vulgarização do uso das calculadoras no nosso quotidiano, a instituição escolar portuguesa tem persistido, na melhor das hipóteses, em ignorar a sua existência. E digo na melhor das hipóteses porque, em alguns anos de escolaridade, chega a proibir o seu uso.*

*Noutros países, a polémica gerada em torno da utilização das calculadoras ainda não se extinguiu, sobretudo quando estão envolvidos alunos do ensino elementar. Contudo, numa meta-análise publicada em Março de 1986, na revista* **Journal for Research in Mathematics Education** , *Ray Hembree e Donald Dessart, depois de terem analisado 79 estudos diferentes, concluiram que: (1) quando usam calculadoras em testes, os alunos obtêm melhores resultados do que quando usam papel e lápis, quer se trate de efectuar operações aritméticas básicas, quer se trate de resolver problemas; (2) os alunos que usam calculadoras revelam atitudes mais positivas relativamente à Matemática do que aqueles que o não fazem; (3) o uso das calculadoras pode, mesmo melhorar o desempenho dos alunos tanto na execução de operações com papel e lápis, como na resolução de problemas (excepção feita relativamente aos sete estudos que envolviam alunos do quarto ano de escolaridade, em que o efeito médio era negativo).*

*Segundo aqueles investigadores, a questão não está em* **se** *as calculadoras devem ser usadas, mas, antes, em* **como** *devem ser usadas.*

*No artigo que seleccionámos para este número e que foi publicado no* **1989 NCTM Yearbook — New Directions for Elementary School Mathematics** — *Barbara Reys sugere algumas actividades que podem promover o desenvolvimento do raciocínio e de estratégias de resolução de problemas, a compreensão de conceitos e a sua aplicação.*

*(Leonor Moreira)*

# A calculadora como uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem

**Barbara J. Reys**

Muito tem sido dito e escrito sobre o papel da calculadora na aula de Matemática. Grande parte da investigação conduzida nos últimos quinze anos, sobre este tópico, restringiu-se a aspectos restritos. A situação é, claramente, descrita por Hembree e Dessart (1986, p. 84): "Muita investigação incidiu sobre a probabilidade de as calculadoras prejudicarem a aquisição de competências básicas, mas pouco esforço foi feito no sentido de melhorar o desempenho dos alunos através do uso sistemático de calculadoras". Contudo, actualmente, a investigação, o diálogo profissional e a prática na sala de aula começam a colocar questões a respeito do papel da calculadora no ensino, na aprendizagem e na avaliação. E, mais importante, como é que usar a calculadora como uma ferramenta de cálculo pode alterar a ênfase no currículo e os métodos de ensino?

### Mudanças nos métodos de ensino

Neste artigo, exploram-se as mudanças nas abordagens e métodos de ensino, associadas ao uso das calculadoras. As mudanças curriculares são exploradas por Coburn noutro capítulo deste *yearbook*.

A premissa básica desta discussão é que: *o uso da calculadora como ferramenta de cálculo proporciona, a professores e estudantes, o tempo necessário para focar o esforço e a concentração dos estudantes na compreensão conceptual e no pensamento crítico.* Diversas actividades ilustrarão formas de usar a calculadora para atingir estes novos objectivos.

### Incidência na compreensão conceptual e no pensamento crítico

Imagine-se um professor do quinto ano de escolaridade. O objectivo da sua aula de Matemática é a introdução do conceito de *média*. Quando as ferramentas de cálculo disponíveis eram só o papel e o lápis, os alunos perdiam muito tempo adicionando grandes listas de números e fazendo divisões, para calcular a média. Muitas vezes, devido ao excessivo tempo e esforço dispendidos nos cálculos (e pesquisa de erros), a atenção da actividade desviava-se do objectivo. Consideremos as alterações que a calculadora pode introduzir: uma vez que todos os cálculos podem ser feitos pela calculadora, os alunos podem concentrar-se no conceito em questão, desligando-se do cálculo repetitivo e enfadonho. Surgirão ainda erros de cálculo (muitas vezes relacionados com o uso das teclas), mas refazer os cálculos já não é aborrecido, deixou de ser uma tarefa desagradável para os alunos. Para o professor, esta forma de abordagem disponibiliza tempo adicional útil, para que o conceito adquira significado para os alunos, ajudando, pois, a reter o seu interesse. Com o recurso à calculadora, pode-se, por exemplo, considerar uma variedade maior de exemplos, utilizando diferentes tipos de dados e analisar conjuntos de dados mais directamente ligados a situações da vida real. Os primeiros dados podem ser fornecidos pela própria turma, e explorados (ex: Qual é a altura média dos alunos da turma? O tamanho médio de uma família? O *score* médio da equipa de basquetebol da Escola?). Neste exemplo, a atenção incide directamente na compreensão do conceito de média e muito pouco no simples cálculo da média.

Muitos outros tópicos e conceitos podem ser tratados mais profundamente remetendo os cálculos rotineiros para a calculadora — percentagens, manipulação de fórmulas, resolução de problemas — são, apenas, alguns deles. Tradicionalmente, estes tópicos são considerados "incómodos". São reconhecidos como "difíceis de ensinar" pela maioria dos professores veteranos, devido ao facto de envolverem bastantes cálculos. Deveria ser alertado que, simplesmente permitir o uso das calculadoras nas aulas, não resolve todos os problemas. De facto, estes tópicos são complexos, e exigem algum tempo para serem plenamente desenvolvidos. O valor do uso da calculadora, provém do facto, de permitir que os alunos centrem a atenção directamente nos conceitos em causa.

## Novas formas de desenvolver velhos tópicos

O poder de cálculo da calculadora também *permite ao professor abordar e desenvolver tópicos sob novas formas*. Considere-se, por exemplo, a área de um triângulo. Suponha que desenvolveu, já, a fórmula que permite calcular a área de um triângulo. Pretende que, em seguida, os alunos usem a fórmula com vários tipos de triângulos. Considere-se, então, a actividade 1.

**Actividade 1:** Explorar a área de um triângulo

Dê a cada aluno uma cópia de um triângulo. Peça-lhes que calculem a área do triângulo. Terão que:

1. Decidir qual o lado a usar como base.
2. Medir a base.
3. Identificar e medir a altura.
4. Usar a fórmula com as medidas obtidas.

Peça, depois, aos alunos, que calculem a área do triângulo considerando, como base, cada um dos restantes lados do triângulo.

Comparar as medidas da área.

Os principais objectivos desta actividade são os seguintes:

* praticar o uso da fórmula (usam a fórmula três vezes para o mesmo triângulo);
* ter oportunidade de praticar medições (o que realça a eficiência do sistema métrico);
* valorizar o rigor na medição (os três valores aproximados da área terão, apenas, o rigor que tiverem as medidas);
* reforçar o significado de base e de altura de um triângulo;
* proporcionar a discussão da noção de erro nas medições.

Esta actividade é valorizada quando os alunos utilizam a calculadora para executar os cálculos. De facto o uso da calculadora promove maior rigor nas medições, já que os alunos não são penalizados nos cálculos por terem sido exigentes na medição. Mais uma vez, a calculadora é usada como uma ferramenta permitindo que mais tempo e energia sejam dispendidos na compreensão dos conceitos em jogo. É evidente que a actividade podia ser desenvolvida sem calculadora, mas os alunos passariam a maior parte do tempo a fazerem cálculos enfadonhos. O uso das calculadoras deixa-lhes tempo para explorar, comparar e experimentar.

## Explorando estratégias de resolução de problemas

A calculadora, também, *promove a exploração natural de estratégias de resolução de problemas e a aplicação de processos intuitivos*. O problema, que se segue, foi recentemente apresentado numa aula do sexto ano de escolaridade:

> Quero comprar uma bicicleta que custa 11 500$00 mas, de momento só disponho de 10 300$00. Tenho um plano para economizar 80$00 por semana.
> Daqui a quantas semanas terei dinheiro suficiente para comprar a bicicleta?

A intenção era que os estudantes constatassem que mesmo que tivessem uma calculadora, a solução do problema já estava achada mesmo antes de começarem a usar a calculadora. Esperava-se que os alunos abordassem o problema de uma forma padronizada: subtrair 10 300 a 11 500 para determinar a quantia em falta e, depois, dividir a diferença por 80 para determinar o número de semanas. Como as abordagens ao problema foram discutidas, tornou-se óbvio que muitos alunos tinham usado uma abordagem diferente, precisamente uma abordagem que a calculadora facilitava. Um aluno descreveu a sua estratégia de resolução da seguinte forma: "Introduzi 10 300 na calculadora, depois pressionei + 80 =. Então, limitei-me a ir pressionando a tecla = (adicionando, sucessivamente, 80) até obter 11 500, contando o número de vezes (semanas) que foi necessário adicionar 80." Neste caso a calculadora permitiu que o aluno explorasse uma abordagem obviamente intuitiva.

## Gerando dados

*O poder da calculadora para gerar, rapidamente, muitos exemplos, pode ajudar os alunos a desenvolverem a compreensão conceptual.*

Da mesma forma que as crianças do primeiro ano de escolaridade desenvolvem a compreensão dos números inteiros, através de uma grande variedade de actividades de contagem, os alunos mais velhos também deviam explorar os decimais com actividades de contagem. Muitas das calculadoras mais baratas têm a possibilidade de adicionar uma parcela constante accionando sucessivamente a tecla =, característica esta que é usada na actividade 2.

> **Actividade 2:** Contar com decimais
>
> Propor aos alunos que teclem, sucessivamente, 0 + 0.1 e que continuem a pressionar a tecla = dizendo os números antes de eles aparecerem (uma décima, duas décimas, três décimas, etc.). Observe o que acontece quando os alunos atingem 0.9 — qual é o próximo? Muitos alunos dirão 'dez décimas''. Aproveite esta oportunidade para realçar as diferentes representações de dez décimas (como fracção e na forma de 1). Os alunos devem continuar esta actividade, contando alto e passando por vários números inteiros.
>
> A seguir pedir-lhes que digam os nomes dos diferentes números que aparecem ao adicionar, sucessivamente, 0.01. O que é mais rápido, contar até 10 de décima em décima ou contar até 1 de centésima em centésima?

Os principais objectivos desta actividade são os seguintes:

* reforçar a relação entre 0.01, 0.1 e 1;
* proporcionar aos alunos a oportunidade de obterem imediato *feedback* ao preverem cada um dos números;
* proporcionar a oportunidade de identificar padrões no sistema de base dez e "ouvir" esses mesmos padrões.

A possibilidade da calculadora proporcionar *feedback* imediato pode ajudar os alunos a desenvolverem a compreensão da multiplicação, quando um dos factores é próximo da unidade (maior ou menor). É esse, precisamente, o objectivo do jogo do ALVO (actividade 3). Só é necessária uma calculadora especial, associada a um retroprojector.

Os alunos divertem-se e aprendem ideias muito valiosas acerca de números próximos da unidade e da forma como eles afectam a multiplicação por números inteiros.

> **Actividade 3:** Explorar factores próximos da unidade
>
> Dê aos alunos um intervalo como ALVO — por exemplo, 2000-2100 — e um valor de partida — digamos 36.
>
> Introduza 36 na calculadora, pressione x, e peça um voluntário para estimar um factor que, multiplicado por 36; conduza a um produto dentro do intervalo. Segue-se um exemplo de como o jogo pode decorrer:
>
> 60 (diz o aluno).
>
> 36 × 60 = 2160 fora do intervalo, por excesso.
>
> O ponto de partida é, agora, 2160. Por que número deverá ser multiplicado 2160 para obtermos um produto que caia dentro do intervalo?
>
> Experimente 0,9.
>
> 2160 x 0.9 = 1944 fora do intervalo, por defeito.
>
> O ponto de partida é, agora, 1944. Por que número deverá ser multiplicado 1944 para obtermos um produto que caia dentro do intervalo?
>
> Experimente 1,05.
>
> 1944 × 1,05 = 2041,2 aí temos!

A calculadora pode, rapidamente, gerar dados para serem analisados. A possibilidade de trabalhar com uma parcela constante pode ser usada na actividade 4 para os alunos estudarem padrões e iniciarem o desenvolvimento da noção de múltiplo.

> **Actividade 4:** Padrões de contagem
>
> Dê a cada aluno, ou par de alunos, uma calculadora e uma folha de registos com quatro quadrados de 10 x 10 com os números de 0 a 99.
>
> Os alunos, usando a característica da parcela constante, contam de 2 em 2, de 3 em 3, de 4 em 4, ...
>
> Em cada contagem, os alunos assinalam, na folha de registo, os números obtidos.

Um exemplo de extensão desta actividade consiste em os alunos usarem o mesmo quadrado de registo para assinalarem, a amarelo, os números obtidos quando contam de 3 em 3 e, de azul, os números obtidos quando contam de 4 em 4. Quais são os números que ficaram pintados de verde (combinação do amarelo com o azul)?

Um outro exemplo de como a calculadora pode ajudar na exploração de um conceito, gerando muitos exemplos, é no desenvolvimento do conceito de raiz quadrada (actividade 5).

> **Actividade 5:** Desenvolver o conceito de raiz quadrada
>
> Usando uma calculadora simples, de preferência sem a tecla da raiz quadrada, os alunos têm de procurar a raiz quadrada de 7569. A estratégia será de "adivinhar e testar" até encontrarem a raiz quadrada. Encorage os alunos a seguirem pistas do tipo: se a raiz for inteira, então o algarismo das unidades só pode ser 3 ou 7.

Os alunos farão, provavelmente, várias tentativas antes de encontrarem a raiz quadrada. Esta exploração é valiosa e reforça o conceito. Cada vez que uma tentativa é testada, esse número é introduzido na calculadora e multiplicado por si próprio, reforçando, assim, o conceito de raiz quadrada.

## Sumário

A calculadora é um poderoso auxiliar da aprendizagem. O seu potencial é grande e ainda não foi totalmente explorado, nem no desenvolvimento de conceitos, nem no desenvolvimento de atitudes positivas e de persistência na resolução de problemas. Como referido no NCTM's *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, "o uso reflectido e criativo das calculadoras melhora extraordinariamente a qualidade do currículo e da aprendizagem das crianças" (1987, p.21). Não podemos perder de vista o principal objectivo do ensino da Matemática: desenvolver a compreensão conceptual das ideias matemáticas. A calculadora pode ajudar a atingir este objectivo se tirarmos partido do seu poder de cálculo.

# Materiais para a aula de Matemática

A aprendizagem é um processo dinâmico, em que o "aprendiz" se apropria de saberes, por interacção entre a sua experiência, as suas concepções e os ambientes de aprendizagem. As aprendizagens não se organizam cumulativamente, das mais simples para as mais complicadas, mas sim de uma forma integrada, como um todo que não é necessariamente decomponível em partes que por acumulação o reconstituam. Nomeadamente no que diz respeito à construção de conceitos, pensamos ser desejável que eles se construam a partir de situações problemáticas em que o aluno tenha um papel activo no processo de resolução. Esta aprendizagem será muito mais significativa que a conseguida através de processos centrados em definições e em aplicações desses conceitos previamente definidos.

A calculadora, devido à rapidez, torna-se uma poderosa ferramenta porque, em pouco tempo, podemos fazer mais e diversos tipos de cálculos. É assim possível libertar o aluno para se concentrar no processo matemático que transcende profundamente o domínio do cálculo.

O conceito de percentagem é suficientemente complexo e importante para que mereça uma utilização da calculadora. É um conceito que requer a exploração de grande quantidade e variedade de situações. É usado quotidiana e massivamente. Justifica-se que cada aluno pegue numa máquina e vá explorando, conjecturando, testando, fundamentando, de um modo e a um ritmo próprios, situações que o desafiem e apoiem na actividade matemática.

Qualquer calculadora possui uma tecla de percentagem (%), que é quotidiana e massivamente utilizada no cálculo directo de percentagens. É também possível utilizá-la em situações que requeiram, por exemplo, cálculos de acumulação de juros, ou de variações percentuais. Tente descobrir como utilizar a tecla % da sua calculadora para:

- somar ou subtrair a um valor inicial uma percentagem relativa

  50 × 25 % + $\boxed{62.5}$

  50 × 25 % − $\boxed{37.5}$

- calcular variações percentuais

  100 − 115 % $\boxed{-13}$

  (por exemplo uma situação em que se trata de calcular a % de redução de um produto que foi adquirido por 100, tendo como preço inicial 115).

  60 − 50 % $\boxed{20}$

  (aqui avalia-se a % de lucro sobre um produto que foi comprado por 50 e vendido por 60).

Na primeira actividade é possível fazer explorações interessantes do conceito de percentagem. Trata-se de discutir o próprio conceito no que se refere ao papel da grandeza que se considera como "100" (será B = 100?); poder-se-á substituir 100 por outro valor numérico?

Na actividade "Aproveitando as promoções de Natal...", a calculadora torna-se útil no cálculo directo da percentagem de redução dos preços no hipermercado e no cálculo dos preços em falta.

Esta actividade pode também ser aproveitada para trabalhar os conceitos de variável e de função, com suporte em situações numéricas e gráficas. Em termos por exemplo de "Geometria Analítica", temos uma hipótese de estudar a função afim, como modelo de generalização de uma situação como a estudada numericamente. É de reflectir sobre o significado, do ponto de vista da aprendizagem, de abordagens desta natureza, que poderão constituir para alguns alunos formas mais interessantes de trabalho, porque lhes permitem ter um contacto mais fácil, porque mais concreto. Se fomentarmos e desenvolvermos metodologias de trabalho diversificadas, estaremos certamente a apoiar a participação de mais alunos na aprendizagem e gosto da Matemática. A utilização de uma folha de cálculo para a exploração de aspectos desta actividade revela-se mais potente que a exclusiva utilização da calculadora, na construção e análise dos gráficos.

Finalmente na actividade "Efectuando Previsões", visam-se objectivos que actualmente podem ser considerados do nível do curso complementar. Pode-se iniciar o estudo da função exponencial a partir desta actividade. É óptima oportunidade de utilizar as funções exponencial e logarítmica das calculadoras científicas para calcular, no primeiro caso, a população esperada no ano 2000 ou a altura aproximada em que a população será 168600 (trata-se de resolver uma equação do tipo $1{,}3^n = 2$, utilizando a função logarítmica, $n = \log 2/\log 1{,}3 = 2{,}64$, ou utilizando a função $x^y$). Entendemos também que esta actividade pode ser trabalhada a nível do ensino básico, a propósito por exemplo da construção do conceito de função numérica e como contra exemplo de uma proporcionalidade directa.

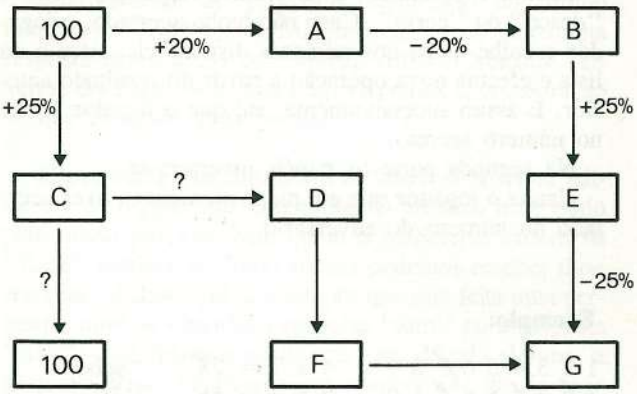
*Graciosa Veloso*

# UTILIZANDO A TECLA % DA CALCULADORA

**1.** No circuito seguinte, podes percorrer vários caminhos. Dois deles estão já definidos. Os outros podes tu construí-los.

Calcula H com a ajuda da calculadora.

Completa as indicações percentuais que faltam.




**2.** A tabela seguinte foi construída com base nos preços divulgados pelo catálogo "Lego 89" e por um caderno de promoções de um hipermercado. O desconto, em percentagem, mantém-se.

Completa a tabela 3.

| LEGO REFERÊNCIA | PREÇO CATÁLOGO | PREÇO HIPERMERCADO |
|---|---|---|
| 1544 | 2745\$00 | 1830\$00 |
| 1577 | 2700\$00 | 1800\$00 |
| 2366 | 1625\$00 | |
| 6274 | 7100\$00 | |
| 6349 | | 2349\$00 |
| 6932 | 3500\$00 | |

Poder-se-á estabelecer alguma relação entre as variáveis "preço catálogo" e "preço hiper"? Poder-se-á considerar o "preço hiper" como função do "preço catálogo"?

Seria interessante fazer a representação gráfica da relação entre as variáveis (se tiveres acesso a uma folha de cálculo tenta obter o gráfico).

Se a percentagem de redução fosse maior que a verificada, que posição relativa teriam os gráficos?

E se todos os produtos anunciados pelo hiper passassem a custar mais 10\$00, que posição teria então o gráfico desta situação relativamente ao primeiro?

**3.** A freguesia Europeia com maior número de habitantes é Odivelas, no concelho de Loures. Tem, segundo informação autárquica actual, cerca de 84000 moradores. Admita-se que a população irá aumentar 3% por ano, durante um período não inferior a 25 anos.

Completa a tabela.

**População esperada, com uma taxa de 3% de crescimento anual**

| N.º ANOS PASSADOS | POPULAÇÃO |
|---|---|
| 0 | 84 300 |
| 5 | |
| 10 | |
| 15 | |
| 25 | |
| X | |

No ano 2000 quantos habitantes terá esta localidade?

Em que ano irá quadriplicar a população?

Que relação te parece existir entre as variáveis "número de anos passados" e "população"?

Constrói um gráfico.

# VAMOS JOGAR

**Jogos na Revista "Educação e Matemática"? Porque não?**

O jogo é uma actividade que agrada e entusiasma quase toda a gente.

Há uma ligação muito grande entre o jogo e a Matemática. Foi o jogo que deu origem a alguns ramos importantes de Matemática (por exemplo, a teoria das probabilidades nasceu da discussão que se gerou entre Pascal e Fermat sobre um problema de jogo de dados). É a Matemática que ajuda a descobrir as melhores estratégias de muitos jogos (por exemplo, no jogo de Nim ou Marienbad, a estratégia vencedora constrói-se a partir da escrita de números no sistema binário).

Jogar, com excepção dos jogos de azar, obriga a pensar, a reflectir e a organizar os raciocínios. A maior parte das vezes, estes raciocínios são de natureza lógico-matemática.

Sendo assim, parece-nos importante que se jogue, inclusivé nas aulas. Uma aula onde se joga é uma aula animada, divertida e participada. Mas não se pode ficar por aqui. É fundamental pôr os alunos a discutir a forma como jogaram e a descobrir as melhores estratégias do jogo. É nesta fase que o jogo é mais rico do ponto de vista educativo.

Propomo-nos assim ir divulgando na revista alguns jogos que nos pareçam interessantes. Sempre que pudermos, acrescentaremos algumas notas ou sugestões de exploração.

Quando experimentares alguns dos jogos aqui apresentados, faz-nos chegar as tuas impressões, críticas e sugestões.

Se conheces algum jogo de que gostes e que te pareça valer a pena divulgar, envia-o para a revista.

Como este número da "Educação e Matemática" é dedicado às calculadoras, iniciamos esta secção com jogos onde se poderão utilizar estas máquinas.

## Sobe e desce

**N.º de Jogadores:** 2

**Material:** calculadora, papel e lápis

**Regras:**

Cada jogo tem duas partes.

Na primeira, o primeiro jogador escreve secretamente um número de dois algarismos. É este número que o outro jogador vai tentar descobrir, dispondo para isso de um máximo de oito tentativas. Começa por escrever num papel os números de 1 a 9.

Para a primeira tentativa escolhe dois dos números, risca-os da lista e efectua com eles uma operação à sua escolha.

Perante o resultado, o adversário responde "sobe", "desce" ou "certo". Caso não tenha acertado, o jogador escolhe outro dos números disponíveis, risca-o da lista e efectua nova operação a partir do resultado anterior. E assim sucessivamente, até que o jogador acerte no número secreto.

Na segunda parte os papéis invertem-se.

Ganha o jogador que em menos tentativas tiver acertado no número do adversário.

**Exemplo:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 2 3 ~~4~~ 5 6 ~~7~~ 8 9 | 4 x 7 = 28 | "sobe" |
| 1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 6 ~~7~~ 8 9 | 28 x 2 = 56 | "desce" |
| 1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 6 ~~7~~ 8 ~~9~~ | 56 – 9 = 47 | "desce" |
| 1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 6 ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ | 47 – 8 = 39 | "desce" |
| 1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ | 39 – 6 = 33 | "sobe" |
| 1 ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ | 33 – 3 = 36 | "certo" |

O jogador descobriu o número à 6.ª tentativa.

## Par ou ímpar

**N.º de Jogadores:** 2

**Material:** calculadora, papel e lápis

**Regras:**

Começa-se por sortear quem é o jogador "par" e quem é o jogador "ímpar", e quem é o primeiro a jogar.

Escreve-se numa folha de papel os números inteiros de 0 a 9.

O primeiro jogador escolhe um destes números, risca-o da lista e introduz esse número na calculadora.

O segundo jogador escolhe outro dos números, risca-o e efectua uma operação à sua escolha com o número que já está na máquina.

O primeiro jogador escolhe um número ainda não riscado e faz nova operação. E assim sucessivamente.

*(continua na pág. seguinte)*

# O problema do trimestre

Qual é o menor número natural cujo quadrado começa por 1989 ?

## Sobre o problema anterior

Relativamente ao problema enunciado no último número de "Educação e Matemática", recebemos uma resposta apresentada pelo colega Alberto Martins Teixeira, do Porto — a quem agradecemos a colaboração — que a seguir transcrevemos:

«O problema que colocam é no fundo o de tentar adivinhar os dígitos que constituem o número imaginado pelo nosso parceiro bem como a respectiva ordem na "frase" numérica. Como apenas podemos receber duas respostas, é desejável que sempre que seja feita uma pergunta, quer se obtenha a resposta "sim" ou a resposta "não", essa resposta esclareça, sem dúvida alguma, a pergunta feita. Se tivermos o número escrito na base binária, uma só pergunta permite-nos adivinhar qualquer dígito pois essa base é apenas constituída por 2 dígitos: o "0" e o "1".

Como tal, bastará fazer uma sequência de perguntas do tipo:

Pi: "O i-ésimo dígito do número na base binária é 1?"

Com uma sequência de 20 destas perguntas P1, ..., P20, o número máximo que é possível adivinhar é obtido quando as respostas forem todas "sim".

Corresponderá ao número 1111...1 (vinte dígitos todos "1"), na base binária ou de forma equivalente ao número $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{19}$ na base decimal. Como se trata de uma progressão geométrica, o seu valor é

$$2^0 \times \frac{1-2^{20}}{1-2} \text{ ou seja } 2^{20}-1$$

É este o número máximo que podemos adivinhar com uma sequência de 20 perguntas, tendo em conta a restrição das respostas.»

## Vamos jogar (conclusão)

Só se pode dividir se o quociente for um número inteiro.

Ao fim de dez jogadas esgotaram-se os números.

Se o resultado final for par, ganha o jogador "par", caso contrário ganha o "ímpar".

**Exemplo:**

| Jogador | No escolhido | resultado |
|---|---|---|
| A (par) | 2 | 2 |
| B (ímpar) | + 6 | 8 |
| A | x 3 | 24 |
| B | + 4 | 28 |
| A | − 7 | 21 |
| B | x 5 | 105 |
| A | − 9 | 96 |
| B | : 8 | 12 |
| A | x 1 | 12 |
| B | + 0 | 12 |

Ganha A porque o resultado é par.

**Sugestões:**

Depois de jogar várias vezes, tenta responder às seguintes questões:

— É indiferente ser "par" ou "ímpar"?

— É indiferente ser o 1.º ou o 2.º jogador?

— Em que casos, sendo tu o último a jogar, podes ter a certeza de ganhar?

**Nota**

Os jogos aqui apresentados foram recolhidos, de entre outros, na revista "Jeux et Stratégie" No 5, Out/Nov 1980, Excelsior Publication, Paris.

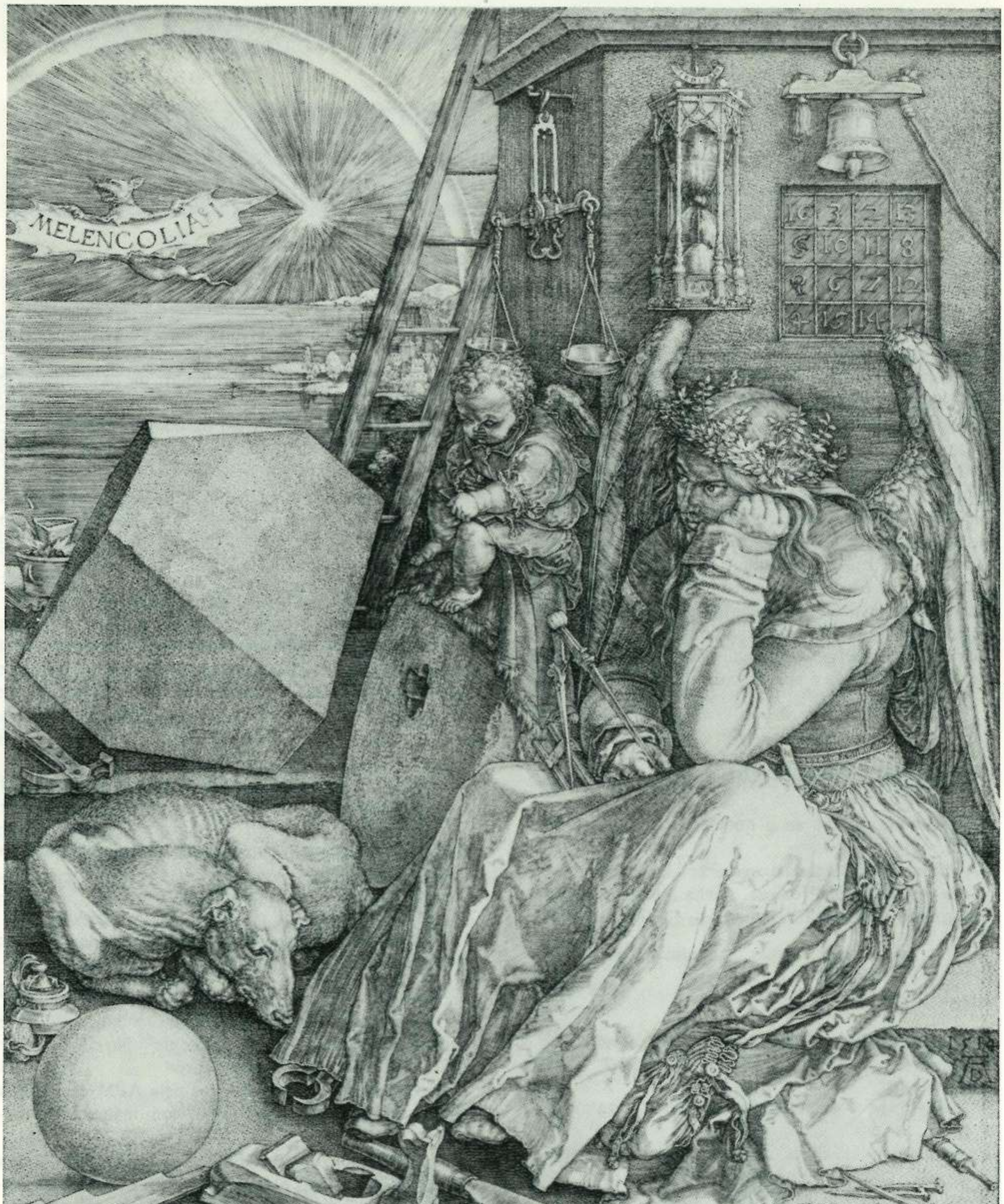
Recentemente, foram editados pela APM dois livros que apresentam mais alguns jogos com máquinas de calcular:

Recentemente, foram editados pela APM dois livros que apresentam mais alguns jogos com máquinas de calcular:

"Calculadoras na Educação Matemática", de A. Silva e outros.

"Mais Jogos, Enigmas e Problemas", de O. Bernardes e outros.

*Rita Vieira*
*Paula Teixeira*
*José Paulo Viana*




A Melancolia, *Dürer*

# Um mágico quadrado mágico

*«Foi há quatro ou cinco anos: uma tarde de primavera chuvosa, em Weimar, numa sala de rés-do-chão com as paredes cobertas de desenhos alemães do século quinto. Incapaz de acolher mais impressões, depois de um dia fatigante, dirigia-me para a saída, quando, num ângulo da sala, uma imagem me feriu, me fez estacar. Um homem nu, de pé, em corpo inteiro: magro, as carnes flácidas, o peito cavado, sem vergonha nem arrogância (...)*

*Uma placa dava-o como auto-retrato de Dürer. Não sei se a atribuição tinha fundamento, mas a impressão que o quadro me produziu está ainda viva».*

*Giorgio Zampa*

### Dürer, o homem e a obra

Em 1455, depois de uma longa viagem pela Europa, chegava a Nuremberga um rapaz húngaro, de vinte e oito anos, de seu nome Albrecht, ourives de profissão.

Albrecht logo encontra trabalho permanente na florescente oficina de Hieronymus Holper, membro influente da corporação dos ourives.

Aos quarenta anos, Albrecht casa com Bárbara Holper, de quinze anos, filha do seu mestre, que lhe dará dezoito filhos. Destes, o terceiro é, precisamente, Albrecht Dürer cujo auto-retrato tanto impressionou Giorgio Zampa.

Aprendiz na oficina paterna, Dürer iniciou-se, aos treze anos (1484), com o primeiro auto-retrato executado a bico de prata. Superada a vontade do pai, que o queria ourives, Albrecht Dürer entra, dois anos depois, para o estúdio de Michel Wolgemut onde permanecerá mais de três anos.

Terminado o aprendizado, visita diversos países, desejoso de conhecer a arte europeia. Durante uma viagem de estudo pela Alemanha (1490-1494) contacta, em Colmar, com a tradição germano-flamenca de Schongauer e aprende a técnica de gravar em cobre. De volta a Nuremberga, casa a 14 de Julho de 1494, mas, no outono, parte sozinho para a Itália onde contacta com as obras de Mantegna e de Bellini.

Em 1496, Frederico, o sábio, grande eleitor da Saxónia visita Nuremberga e admira a obra do pintor. Começa por lhe encomendar o seu retrato e, sucessivamente, dois polípticos para o seu castelo de Wittenberg. Aliás, será o seu mecenas durante toda a vida.

Uma viagem aos Países Baixos, em 1520-1521, permite-lhe conhecer a pintura flamenga e encontrar Erasmo.

Morre em 1528.

A sua concepção de arte e a sua convicção sobre o lugar que ao artista compete na sociedade são visíveis no esforço constante de elevar-se acima da condição de artesão atribuída ao artista alemão e de conferir à arte, a exemplo dos italianos, a dignidade de ciência, assegurando ao artista o estatuto de cultor de artes liberais. Por outro lado, a técnica de gravador, a experimentação contínua da possibilidade expressiva inerente às diversas práticas, a procura de uma extrema perfeição formal preocupam constantemente o artista e prendem-no à tradição artesanal da sua terra.

Sem negar as suas origens, consegue uma relação igualmente profunda com a arte italiana, sendo considerado, simultaneamente, o mais alemão e o mais universal dos artistas alemães.

A abertura ao fascínio do Renascimento só é igualada pela ligação à tradição gótica do Norte. Tal dualidade tem os seus reflexos na surpreendente extensão da sua escala expressiva. O retábulo Paumgartner (cerca de 1500) é de espírito gótico, mas a influência de Bellini impregna, profundamente, a Madona do Rosário (Praga, 1500), a Trindade (Viena, 1511) e, sobretudo, os Quatro Apóstolos (Munique, 1526). A gravura e o desenho são, para Dürer, a expressão da resistência do temperamento autóctone. Neles, Dürer entrega-se a uma paixão analítica das formas naturais. Liberto dos limites da harmonia a que se impõe na pintura, Dürer regressa ao grafismo atormentado do gótico tardio, herdado de Schongauer.

*(continua na pág. 30)*

## Um procedimento de cada vez Diálogos com a tartaruga?!

É com certeza uma perspectiva interessante. Mas como fazê-lo? Bom, será isso que, de uma forma resumida, iremos ver. Isto é, falaremos das primitivas que estabelecem comunicação entre o computador e o utilizador, permitindo-lhe introduzir novos dados no decorrer de um programa.

### 1. readchar, readlist, readlistcc

Experimente o procedimento:

**to experiência1**
**print [Carregue numa tecla]**
**print readchar**
**end**

**readchar** lê o caractere correspondente a uma tecla premida e dá como resultado esse caractere. Se nenhuma tecla tiver sido premida, **readchar** espera que tal aconteça.

**readchar** não faz aparecer o caractere no ecrã pelo que, se o quisermos ver, temos que o mandar escrever.

Experimente mais:

**to experiência2**
**ct**
**print [Escreve o teu nome e carrega em enter]**
**make "nome first readlist**
**(print "Olá :nome)**
**end**

**readlist (rl)** lê uma sequência de palavras escrita através do teclado, e dá como resultado a lista constituída por essa(s) palavra(s).

**readlist** espera que carreguemos na tecla *enter*, sinal de que a sequência de palavras acabou.

Uma vez que **readlist** forma uma lista com a(s) palavra(s) por nós escritas, torna-se necessário encontrar um processo para aceder ao conteúdo dessa lista, permitindo a sua futura utilização. No caso da lista ter um único elemento, a primitiva **first** resolve o problema. Noutros casos... bom, temos que deixar algumas coisas para vocês pensarem.

Se quisermos que as nossas mensagens apareçam na zona de comandos (o que poderá ser conveniente quando não pretendemos misturar gráficos com texto, como por exemplo num jogo) utilizamos a primitiva **readlistcc (rlcc)**.

Construa um procedimento substituíndo, no procedimento **experiência2, ct** por **cc, print** por **show** e **readlist** por **readlistcc**, e execute-o. Observe as diferenças.

E que podemos nós fazer com tudo isto? Como diz um conceituado logoísta nosso amigo, não há como os quadrados para iniciar o Logo. Então voltemos aos quadrados, mas que sejam quadrados sofisticados...

Suponhamos que pretendíamos que a simpática tartaruga nos perguntasse qual a medida com que deveria desenhar o quadrado:

**to quadrado**
**ct rg**
**insert [Escreve a medida que queres para o lado do quadrado e carrega em]**
**insert char 32**
**settc 2 print "enter**
**settc 1**
**print [ ]**
**make "lado first readlist**
**repeat 4 [fd :lado rt 90]**
**.....**

já agora, poderia calcular a área do quadrado, uma vez que a medida do lado está guardada na variável de nome **lado:**

**repeat 10 [print [ ]]**
**(print [A área do quadrado é] :lado * :lado)**
**.....**

pode, ainda, perguntar ao utilizador se quer repetir o programa:

**print [ ]**
**print [Queres fazer outro quadrado? (S/N)]**
**make "resp readchar**
**ifelse :resp = "s**
**[quadrado]**
**[ct rg pr [Até à próxima!] wait 50 ct stop]**
**end**

Aproveitámos para introduzir alguns "truques" que podem ser úteis neste tipo de projectos, como seja mudar o texto de cor (**settc** — só no Logowriter 2.0), deixar espaços em branco (**insert char 32**) e deixar linhas em branco (**print [ ]**).

### 2. Key?

Experimente:

**show key?**
**wait 50 show key?**

*carregue numa tecla imediatamente após ter carregado em enter*

**Key?** dá como resultado "false" (falso) se não carregarmos numa tecla, caso contrário dá como resultado "true" (verdade).

Para que **key?** dê como resultado verdade, o caractere não pode ter sido lido por nenhuma das primitivas referidas em 1.

Para que poderá servir esta primitiva?

Suponhamos que queríamos que a tartaruga desenhasse uma circunferência (outra das aprendizagens fundamentais num bom curso de Logo), mas pudéssemos interromper e continuar o desenho sempre que quiséssemos:

```
to circunferência
repeat 360 [fd 1 rt 1 parar]
end

to parar
if key? [repeat 2 [make "lixo readchar]]
end
```

Afinal o que faz o procedimento **parar**? Não é elementar, mas vejamos se nos entendemos.

Se, durante o desenho da circunferência, não carregarmos em nenhuma tecla, **parar** não faz nada (uma vez que o resultado de **key?** é "false"). Pelo contrário, se premirmos uma tecla, tornamos o valor de saída de **key?** "true" e **readchar** interrompe a execução do procedimento, até que uma tecla volte a ser premida. Mas tal só acontece na segunda vez que a instrução **make "lixo readchar** é executada, pois na primeira vez **readchar** lê o caractere correspondente à tecla já premida e portanto interrompe o traçado da circunferência.

Por outro lado, uma vez que **readchar** leu os caracteres correspondentes às teclas em que carregámos, **key?** dá falso no fim do procedimento **parar**, pelo que, se voltarmos a carregar numa tecla a tartaruga volta a parar e assim sucessivamente.

Não é demais salientar que os exemplos referidos pretendem ser, apenas, uma primeira abordagem do que podem ser projectos utilizando estas primitivas. Fica para vocês os ampliarem, modificarem, etc.

Para terminar, uma pequena nota de carácter pedagógico. Pelo que nos foi dado observar, a utilização destas primitivas, embora não sendo elementar, suscita grande adesão por parte dos alunos que trabalham com o Logo, talvez porque ao permitir-lhes uma relação mais pessoal com a máquina, aumenta a sua criatividade e a originalidade do seu trabalho. Além de que, tal como acontece com professores, há alguns alunos para quem os bonecos da tartaruga não têm uma graça por aí além, aderindo melhor a projectos deste tipo.

*Margarida Junqueiro*
*Sérgio Valente*

## Um mágico quadrado mágico (conclusão)

Debatendo-se entre o panteísmo germânico e o idealismo do Renascimento, Dürer assume um pessimismo filosófico que exprimiu em diversas gravuras: Nemesis (1503), o Cavaleiro, a Morte e o Diabo (1513) e a Melancolia (1514), símbolo da inutilidade das ciências e das obras humanas.

### Onde se fala, finalmente, do quadrado mágico

Depois de contemplar a última gravura referida, que se reproduz na página seguinte, concentre-se no quadrado mágico que aí figura. Cada linha, cada coluna, cada diagonal conduzem, sempre, à soma 34.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Quadrado mágico de Dürer

Mas trata-se, de facto, de um mágico quadrado mágico! A gravura data de 1514, como pode ler-se nas células centrais da última linha.

Adicione os números representados nos quatro cantos do quadrado principal. A soma é, ainda, 34.

Adicione, agora, os números que figuram nas quatro células centrais. Ainda a soma 34.

Experimente, agora, com as células interiores da primeira e da última linhas. Ainda 34.

O mesmo com as células interiores da primeira e da quarta colunas. Ainda e sempre 34.

Adicione, também, as duas primeiras células da coluna um com as duas últimas da coluna quatro. Não me diga que ficou admirado(a) ao encontrar a soma 34...

Calcule a soma das duas diagonais de cada um dos quatro quadrados de 2 × 2, com um dos vértices coincidente com um vértice do quadrado principal. Já não se espantou, não é verdade?

Pois bem, descubra todos os quadriláteros cujos vértices têm por "soma" 34. Mande as soluções para a revista que nós prometemos dar-lhe os parabéns se acertar.

*Leonor Moreira*

**Bibliografia**

Bazin, G. (1953). *Histoire de l'art — de la Pré-histoire à nous jours*. Paris: Garamond.

Classici dell'arte Rizzoli (1968). *L'opera completa di Dürer*. Milão: Rizzoli.

Wills III, Herbert. (1989). Magic with Magic Squares. *Arithmetic Teacher, vol. 36, n.º 8, 44-49.*

# Trigonometria... com um pouco de sorte!

**Ana Baltazar,** Esc. Sec. Laranjeiro

**Fátima Delgado,** Esc. Sec. Anselmo de Andrade

A ficha de trabalho que se apresenta em seguida, foi utilizada em duas turmas do 10.º ano, com a finalidade de introduzir a noção de ângulo generalizado — conjunto de ângulos com a mesma representação geométrica.

Na altura em que lhes foi proposto este problema, os alunos não tinham tomado qualquer contacto formal com ângulos de amplitude superior a 180°. Mas nenhum deles estranhou a existência de um ângulo de 840°... ou de 1080°...

Também «não sabiam» o que significava o sentido de um ângulo. A maioria considerou — sem fazer perguntas — que o sentido positivo era o sentido crescente dos números da Tômbola.

Os resultados obtidos junto dos alunos apoiaram a minha convicção de que é possível trabalhar com os conceitos matemáticos antes de começar a usar a linguagem específica desta ciência.

É evidente que a questão 3 não tem uma única resposta. Propositadamente pergunta-se «qual a amplitude», para que a própria questão não contenha pistas relativamente à resposta, o que aconteceria se se tivesse escrito «qual ou quais». As questões anteriores preparavam já o caminho para a multiplicação de respostas. Porém, se entre os alunos não se puser a questão de que há mais do que uma resposta, então o professor deve fazer discutir o assunto.

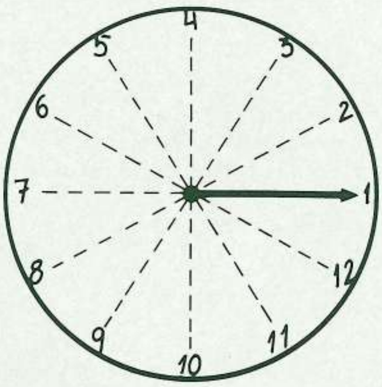
Resta referir que a última questão foi introduzida posteriormente à realização da ficha nas turmas. Poderá explorar-se essa questão, sugerindo uma «batalha» de perguntas e respostas entre os vários grupos de trabalho.

Porque aos alunos não cabe apenas responder mas também — e sobretudo — perguntar!

Outras alterações poderão ainda ser introduzidas nesta ficha de trabalho. Esperamos que ela seja, para os colegas um ponto de partida para novas ideias.

**Ficha de trabalho**

A figura representa uma tômbola utilizada nas feiras, para sorteios. Esta é constituída por um círculo fixo, onde estão inscritos doze números e por um ponteiro móvel com uma das extremidades fixa no centro do círculo.




Em cada sorteio o ponteiro, partindo da posição em que se encontra na figura, inicia um movimento de rotação, sendo o número premiado determinado pela sua posição no final deste movimento (o ponteiro nunca pára entre dois números).

1. No primeiro sorteio, pôs-se o ponteiro a rodar no sentido positivo e este descreveu um ângulo de 840° de amplitude.

1.1 Qual foi o número premiado?

1.2 Quantas voltas completas deu o ponteiro?

1.3 Indica a amplitude de outro ângulo que o ponteiro poderia ter descrito de forma a premiar o mesmo número.

2. No segundo sorteio, o ponteiro descreveu um ângulo de – 1860° de amplitude.

2.1 Qual foi o número premiado?

2.2 Quantas voltas deu o ponteiro?

2.3 Se o ponteiro tivesse rodado no sentido positivo, qual a amplitude do menor ângulo que ele poderia ter descrito de forma a premiar o mesmo número?

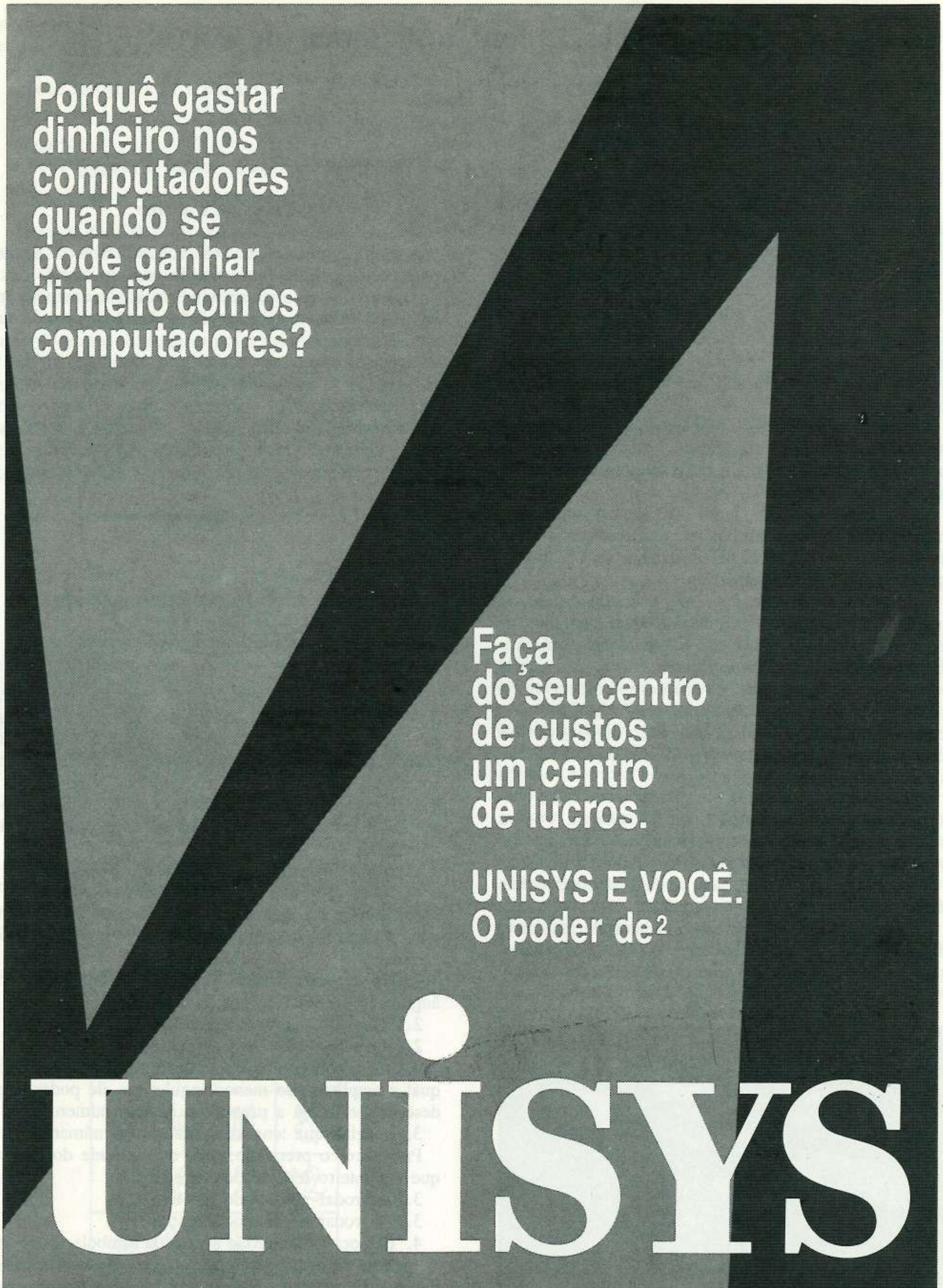
3. Imagina que tens uma rifa com o número 2.

Para seres o premiado, qual a amplitude do ângulo que o ponteiro tem de descrever...

3.1 se rodar no sentido positivo?

3.2 se rodar no sentido negativo?

4. Elabora uma questão acerca da tômbola. Pode ser do género da questão anterior ou não. Resolve a questão por ti proposta. Em seguida, podes propor essa mesma questão a outro grupo de trabalho.


Porquê gastar dinheiro nos computadores quando se pode ganhar dinheiro com os computadores?
Faça do seu centro de custos um centro de lucros.
UNISYS E VOCÊ.
O poder de²
UNISYS

# Profmat-89: um Encontro para recordar

Em Viana do Castelo, entre 11 e 14 de Outubro, cerca de 500 professores de Matemática participaram no Profmat-89. Vieram de todos os distritos do continente e das regiões autónomas, onde trabalham em escolas dos vários níveis de ensino. Tanto quanto a minha memória e os meus conhecimentos da História da Educação me permitem afirmar, *fizeram* o maior acontecimento colectivo realizado em Portugal a respeito do ensino e da aprendizagem da Matemática, pelo menos nos últimos (largos) anos.

A *grandeza* dos Encontros não se mede (apenas) pelo número de participantes. Mas seria uma estupidez não realçar o significado da presença de um tão elevado número de professores da nossa disciplina num Encontro que durou quatro dias e que decorreu em pleno período de aulas numa cidade que ficava longe para muitos... Este facto traduz, desde logo, um interesse *crescente* dos professores de Matemática, se tomarmos como referência os Encontros dos últimos anos.

A forma como um grande número de professores se dispôs a participar é porventura um facto ainda mais significativo. O Encontro registou um número *record* de comunicações, sessões práticas, ideias e materiais presentes na exposição, ..., que reflectem o trabalho desenvolvido ao longo do ano em muitas aulas, muitas escolas, muitos pontos do país... Encarando as coisas deste ponto de vista, esta afirmação corresponde à constatação de um facto muito relevante: hoje, muito mais do que antes, os professores de Matemática aceitam o desafio de desenvolver novas ideias e novas práticas, de construir na acção a (necessária) renovação do ensino da nossa disciplina.

Mas, de facto, não se trata apenas (nem sobretudo) de uma questão *numérica*. Como foi sublinhado durante alguns debates ao longo do próprio Encontro, o ambiente de trabalho do Profmat reflecte uma outra realidade: hoje, muito mais do que antes, os professores de Matemática aceitam que o seu trabalho e o seu papel são importantes, que vale a pena comunicar aos colegas as suas experiências, os seus êxitos e as suas dúvidas, que é fundamental ouvir o que os outros têm a dizer e confrontar pontos de vista. E *este progresso* é talvez o mais importante, aquele que nos pode deixar mais optimistas quanto à expectativa de que o nosso grupo profissional assumirá cada vez mais, colectivamente, o seu papel (decisivo) na renovação educativa.

Não seria justo deixar de salientar que a organização do Encontro — tanto a sua *concepção* como a seriedade com que tudo foi preparado e realizado — contribuiu largamente para que os aspectos atrás referidos pudessem ganhar evidência. Por outras palavras, apetece dizer que a organização compreendeu que *tipo* de Encontro era necessário... E o resultado é a opinião generalizada de que o Profmat foi um enorme êxito. Embora tenha havido falhas e pontos fracos (que convém apontar!), a primeira coisa que me ocorre ao pensar no Encontro é justamente uma sensação de entusiasmo e de optimismo quanto ao futuro.

Mas, agora, vamos por partes.


### Os cursos antes do Profmat

Mantendo uma prática iniciada em Bragança-87, cursos de dois dias antecederam o Profmat. E uma vez mais a experiência terá valido a pena. Apesar de se ter verificado uma razoável concordância entre a *procura* e a *oferta*, julgo que se pode ainda melhorar num aspecto importante: a diversificação. Por exemplo, poderá (deverá?) haver mais *oferta* relativamente a aspectos específicos dos últimos anos do Ensino Secundário?

### As sessões plenárias

Sessões plenárias são importantes por várias razões. Uma delas, que não deve ser negligenciada, é esta: o Encontro não é um somatório de dezenas de sessões práticas e grupos de trabalho. Reunir todos os participantes num enorme salão não confere, só por si, um sentido global ao Encontro mas a realização de algumas sessões plenárias, não sendo uma condição suficiente é, no entanto, uma condição necessária para se dar corpo à ideia de que, apesar da multiplicidade de interesses e actividades, estamos todos a viver uma realização colectiva.

Em todo o caso, as sessões plenárias não constituiram, nem devem constituir, o *essencial* do Profmat. Como é preciso ter em conta o número já muito elevado de participantes, elas terão provavelmente que reduzir-se a um ou dois momentos. Mas é importante que haja espaços *globais* dedicados ao debate de temas de especial actualidade (por exemplo, em Viana destinou-se uma sessão plenária aos novos programas mas não terá havido *espaço* para se discutirem publicamente algumas questões polémicas que eles envolvem). Uma ideia para o futuro poderá ser a realização simultânea de duas (ou três ou quatro...) sessões *semi-plenárias* (ou "um terço-plenárias" ou...):

### As sessões práticas e as comunicações

Realizar trabalho prático ou contactar com materiais concretos é uma forma muitas vezes adequada para se partir para a reflexão e discussão em torno de questões essenciais ao processo de ensino-aprendizagem. Os *workshops* sempre foram um dos pontos fortes do Profmat e julgo que se trata de uma orientação a prosseguir. Claro que o número de participantes levanta alguns problemas: em Viana do Castelo, apesar de haver 17 sessões práticas propostas (!), só foi possível criar um momento dedicado a essa forma de trabalho.

Um comentário quase idêntico pode fazer-se sobre as comunicações que, neste Profmat, atingiram um número *record* (cerca de 4 dezenas), e que constituem também uma componente *obrigatória* de encontros como este. Muitas comunicações (a maioria) foram incluídas nos grupos de trabalho para que estes pudessem basear as suas discussões em experiências concretas. Mas este processo é difícil de organizar porque, à partida, nem sempre se pode saber se uma determinada comunicação — pelo seu conteúdo, grau de estruturação, etc. — deve ou não ter um lugar *independente* no Encontro.

### Os grupos de trabalho

A ideia de considerar os grupos de trabalho temáticos como o *eixo* do Encontro (ensaiada pela primeira vez) terá sido em parte conseguida. Manter a estabilidade dos grupos, ao longo de vários dias, permite uma continuidade no trabalho e uma maior concentração no tema central do grupo. E esses aspectos potencialmente positivos ter-se-ão confirmado. No entanto, alguns grupos eram excessivamente grandes e/ou incluíam muitas comunicações e isso terá dificultado um ambiente de *verdadeiro grupo de trabalho*.

Mas a ideia merece-me bastante simpatia. Algumas hipóteses: (a) as comunicações mais longas e estruturadas devem ficar fora dos grupos; (b) os grupos começam e acabam em "plenário de grupo" mas subdividem-se no resto do tempo, eventualmente por *sub-temas*.

### A Feira de Ideias e Materiais

A F.I.M. terá constituído um dos pontos mais altos do Profmat. De facto, o progresso neste campo é notável. Foi possível dar resposta a uma necessidade já detectada em Encontros anteriores porque se investiu bastante (parabéns aos organizadores e aos responsáveis pela F.I.M.!) e também, obviamente, porque o Profmat não pode deixar de reflectir o trabalho que se realiza ao longo do ano e os principais focos de interesse dos núcleos da APM. Não foi por acaso nem em vão que, em 1988/89, o núcleo do Porto promoveu uma exposição deste tipo e o de Lisboa organizou diversas sessões sobre o uso de materiais na aprendizagem da Matemática, enquanto se procurou começar a dar corpo a uma ideia ambiciosa: a criação de um centro de recursos da APM.

Mas, claro, tudo isso só foi possível porque muitos colegas e grupos se dispuseram a participar com as suas ideias e materiais. E, uma vez mais, é nesse *espírito* que me parece residir o mais significativo factor de progresso deste Profmat. Sem ele, o Profmat teria sido uma coisa totalmente diferente.

### Abertura à população

O momento de abertura do Encontro à população foi outra *novidade* do Profmat. Um conjunto de *ateliers*, montado num local público no centro da cidade, procurava sensibilizar as pessoas para as grandes questões actuais da educação matemática. Houve o cuidado de incluir muitas *coisas* para fazer e para pensar (de modo a evitar uma *linguagem* que pouco dissesse à população) e não há razão para se pensar que a forma adoptada não era a mais conveniente. Simplesmente, deve reconhecer-se que houve pouca participação, o que quer dizer que o maior problema reside nas causas que levam as pessoas a não se deslocarem sequer a uma exposição que, depois, talvez lhes despertasse algum interesse. As formas de atacar esse problema serão várias e não cabem no âmbito desta apreciação.

A verdade é que o local atrás referido esteve sempre cheio... mas a maioria das pessoas eram participantes do Profmat que nem mesmo à noite, numa iniciativa *extra*, deixavam de comparecer e de discutir os problemas e os jogos propostos.

### A que se deve o êxito do Profmat?

Uma coisa que me impressionou (a mim e a muitos colegas) foi a forma organizada como os vários aspectos do Encontro decorreram. Havia um certo receio, mesmo entre elementos ligados à organização, de que o grande aumento do número de participantes provocasse dificuldades: não cumprimento dos horários, dispersão,... Afinal, este terá sido um dos Encontros mais disciplinados em que participei (em Portugal, claro!). E isso deve-se, como já referi, à organização mas também à *atitude* da grande maioria dos participantes.

Esta atitude de envolvimento não se limitou às sessões de trabalho. O mesmo sucedeu com as *actividades sociais* — o passeio a Valença, a ceia, ... (a propósito, vai sendo tempo de se pensar num programa para os acompanhantes que são cada vez mais). E nos tempos deixados livres pelo próprio programa havia sempre colegas a trabalhar ou pequenos grupos a realizar reuniões formais ou informais (ou simplesmente a conviver).

Julgo que o êxito do Profmat se deve, de facto, à conjugação de dois factores que de resto estão ligados entre si: uma organização notável e os efeitos de um *ambiente* de trabalho e de solidariedade que envolve já centenas de professores de Matemática e que se foi desenvolvendo ao longo destes três anos, passando pelos Profmat's anteriores e por muitos outros momentos e realizações. Este *estilo colectivo* que tem marcado a vida da nossa Associação faz com que nos sintamos bem no Profmat e tanto o envolvimento afectivo como o sentido das responsabilidades (o desejo de contribuir para que as coisas *corram bem*) são elementos indissociáveis do êxito do Encontro.

Se formos agora *contabilizar* os contributos na preparação do Profmat-89, estou certo que (contando tudo, as *pequenas* e as *grandes* coisas) ultrapassaremos a centena. Sem falar da participação activa de muitos outros colegas, no decorrer das várias sessões.

Ter consciência disto parece-me muito importante para a continuação do trabalho de *todos* nós. Mas, obviamente, não retira um *milímetro* de mérito aos colegas que, durante um ano, constituiram a Comissão Organizadora do Profmat-89. Não será tão cedo que me esquecerei do trabalho realizado pelos colegas de Viana (o Amaral, o António Novo, a Carmo, o Domingos, a Isabel, o José Portela, a Teresa e mais alguns colaboradores) — que constituem o mais antigo núcleo regional da APM, anterior à própria criação formal da Associação — nem do que fizeram o Eduardo e o Henrique.

### E agora, encontramo-nos nas Caldas da Rainha

Pronto, é só isso. O Profmat-90 será nas Caldas da Rainha em Novembro. E se consegui deixar clara a minha principal *mensagem*, é para começar a preparar já. Por todos nós.

*Paulo Abrantes*

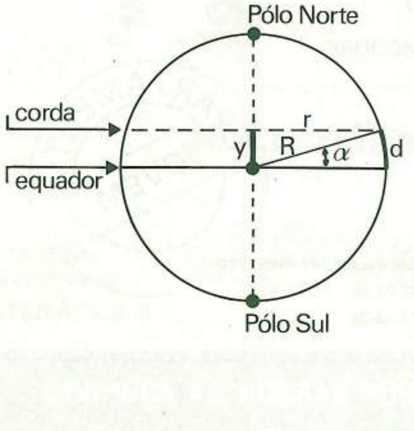
---

### Solução do Problema do João

Seja R o raio da Terra. O comprimento inicial da corda é $P = 2\,\pi\,R$ = 40.000 Kms = 40.000.000 m.

Depois de encurtada, a corda fica numa circunferência (num paralelo da Terra) de raio

$$r = \frac{P-1}{2\pi} = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} = R - \frac{1}{2\pi}$$




Calculemos a distância y (ver figura), aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo de lados y, r e R

$$y^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \left(R - \frac{1}{2\pi}\right)^2 =$$

$$= R^2 - R^2 + \frac{R}{\pi} - \frac{1}{4\pi^2} = \frac{R}{\pi} - \frac{1}{4\,\pi^2}$$

Note-se que $R/\pi$ é da ordem dos dois milhões e $1/(4\pi^2)$ é cerca de 0,025.

Podemos então desprezar $1/(4\pi^2)$ e vem

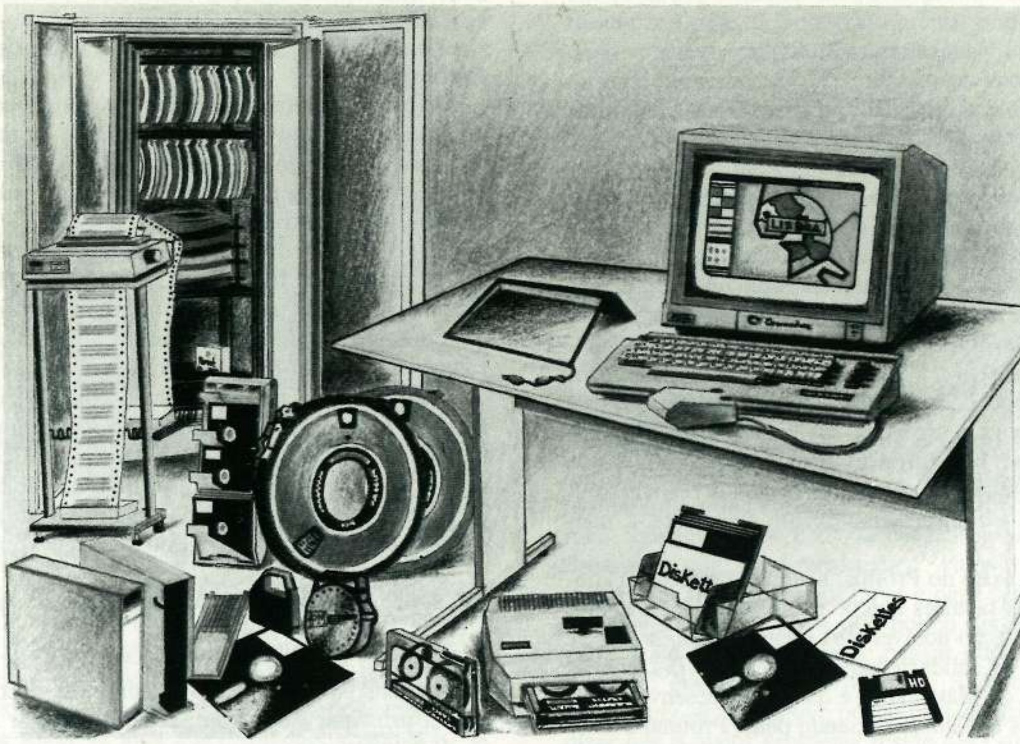
$$y^2 = \frac{R}{\pi} \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{\frac{R}{\pi}} \simeq 1\,423{,}5 \text{ metros}$$

O que nós queremos saber é a distância d. Ora, neste caso, como estamos perto do equador d é praticamente igual a y.

Logo, a corda fica a 1423,5 m do equador!

E agora: Caberia lá algum país?

Sim. Consultados os atlas e enciclopédias, vemos que, pelo menos, o Vaticano e o Mónaco têm larguras inferiores a 1400 metros.



ÍNDICE


Pág.

**A Calculadora e o Processo de Ensino-Aprendizagem**
*João Pedro Ponte* ........ 1

**Calculadoras na Educação Matemática — Contributos para uma reflexão**
*Albano Silva* ........ 3

**Uma Corda à Volta da Terra**
*José Paulo Viana* ........ 7

**A Epêntese da Calculadora na Proposta de Novos Programas de Matemática do 3.º Ciclo**
*João Filipe Matos* ........ 9

**A Calculadora como Ferramenta na Resolução de Problemas**
*Graciosa Veloso* ........ 11

**A Propósito da Utilização da Máquina de Calcular — uma Entrevista**
*Henrique M. Guimarães* ........ 13

**Trigonometria... com um pouco de sorte!**
*Ana Baltazar, Fátima Delgado* ........ 31

**Profmat 89: um Encontro para recordar**
*Paulo Abrantes* ........ 33

SECÇÕES

**Pense Nisto**
*Henrique M. Guimarães* ........ 17

**Para este número seleccionámos**
**A Calculadora como uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem**
*Bárbara Reys* ........ 19

**Materiais para a aula de Matemática**
*Graciosa Veloso* ........ 22

**Vamos jogar**
*Rita Vieira, Paula Teixeira, José Paulo Viana* ........ 24

**O problema do trimestre** ........ 25

**• Matemania • Magia • Poesia**
**Um mágico quadrado mágico**
*Leonor Moreira* ........ 26

**LOGO·MAT**
*Margarida Junqueira, Sérgio Valente* ........ 29