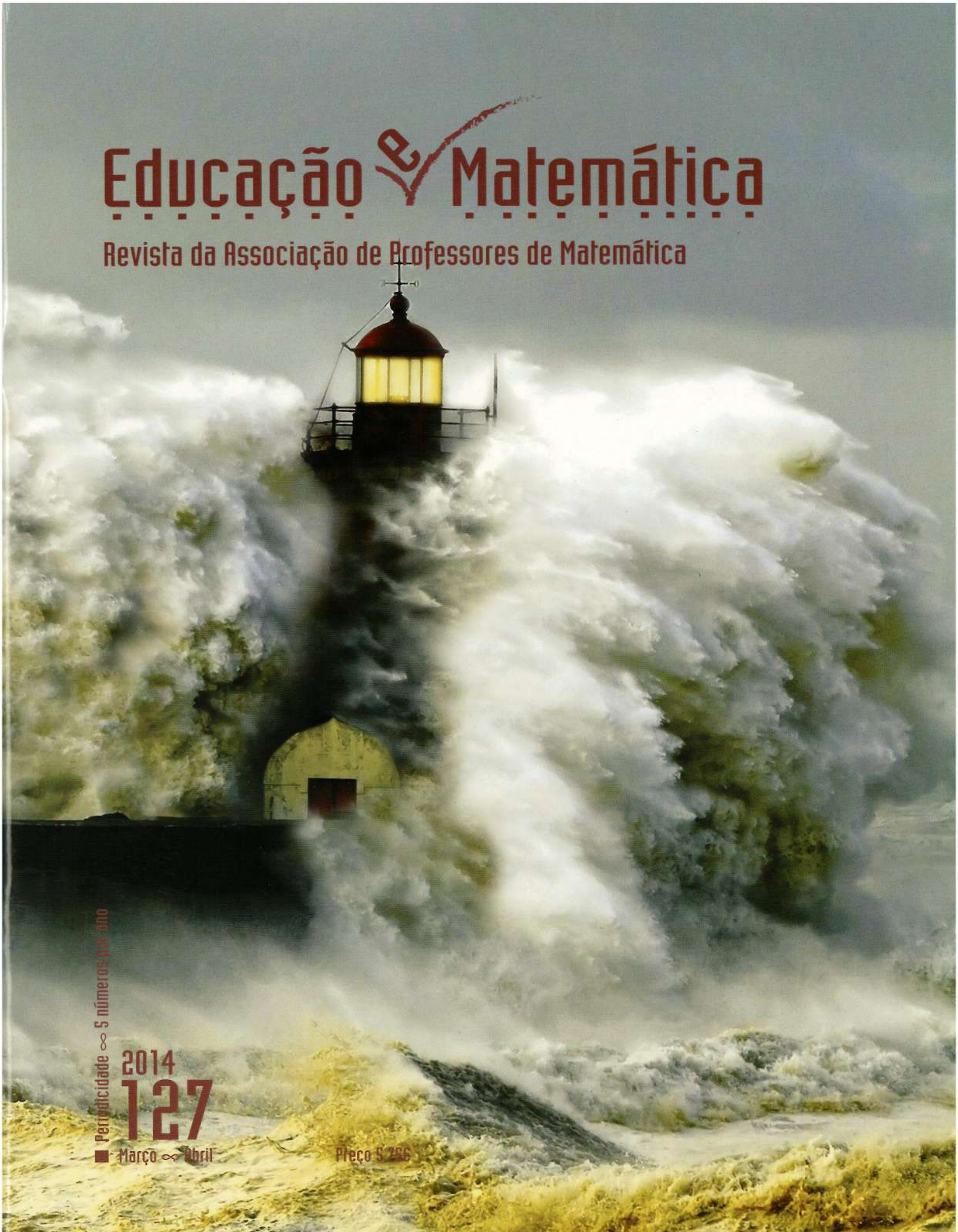
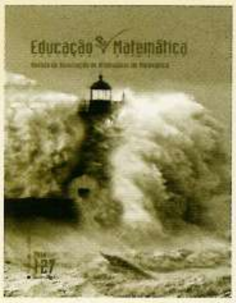

Educação e Matemática
Revista da Associação de Professores de Matemática
Periodicidade ∞ 5 números por ano
2014
127
Março ∞ Abril
Preço



ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Helena Rocha
Redação	Alice Carvalho
	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	Manuela Pires
	Paulo Alvega
	Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2014

Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Abril 2014
Tiragem 1700 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
ASPRINT, Apolinário Silva, Unipessoal Lda
Núcleo Empresarial de Mafra
Av. Dr. Francisco Sá Carneiro, Bloco C – 12 cave
2644–006 Mafra

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre a capa

O ProfMat 2014 decorre numa altura em que a Educação vive momentos atribulados (de certo modo encontramo-nos no centro de uma tempestade). A capa deste número alude ao facto de em tais circunstâncias ser importante manter à vista os princípios norteadores que acabarão por nos alinhar com o caminho do progresso.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Alexandra Rocha, Ana Dias, Cristina Natália da Fonseca, Didia Guerschman, Eduardo Veloso, Irene Segurado, Isabel Urbano, João Fernandes, Joaquim Félix, José Luiz Pastore Mello, Luz Gago, Manuela Pires, Manuela Simões, Margarida Amado, Paulo Correia, Renata Carvalho, Rui Trindade, Teresa Grossmann, Vítor Duarte Teodoro.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Uma *Agenda* para evitar o desastre no ensino da Matemática

A direção da APM, com o apoio do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, organizou uma conferência a que chamou *Conferência para evitar o desastre no ensino da Matemática*, onde apresentou uma *Agenda* cujo objetivo é evitar que as medidas tomadas por este executivo no que diz respeito ao ensino da Matemática, nomeadamente as alterações dos programas do Ensino Básico e da Matemática A, estilhacem irremediavelmente o que de positivo os resultados dos estudos internacionais revelaram sobre o desempenho dos alunos portugueses.

É com um misto de incredulidade, indignação, impotência, revolta, que temos vindo a assistir a este elenco de disparates! As alterações curriculares efetuadas em 2013 são o tipo de erros que denunciam incompetência, incoerência e leviandade da parte de quem os promove e antecipam um desastre certo para aqueles a quem se dirigem: antes de mais, os alunos, mas também os professores, as escolas, os pais, a sociedade. Estes programas, pela sua extensão absurda, pelo seu grau de formalismo e abstração, pela atomização e prescrição do que se ensina e até pela forma como se pretende que se aprenda, são (já estão a ser!) um verdadeiro desastre para o ensino da Matemática.

A APM nasceu do movimento de renovação do ensino da Matemática que, desde os anos 80 do século passado, tem contribuído para o aprofundamento e melhoria da educação Matemática em Portugal. Empenhou-se em congregar os professores num trabalho de reflexão conjunta, organizando encontros, formação, produzindo materiais e organizando ou colaborando em projetos de estudo sobre a realidade da aprendizagem da matemática nas nossas escolas. Pelos seus Estatutos, está chamada a *Intervir na definição da política educativa, especialmente no que respeita aos problemas do ensino da Matemática*. E, se o tem feito em tempos favoráveis, muito mais o deve fazer em tempos sombrios de negação daquilo em que acredita e pelo que tem lutado.

A *Agenda* apresentada propõe e reivindica isso mesmo: que se vá à razão das coisas, das opções nas políticas educativas; que se avalie, se analise, se estude, se reflita. Para isso a APM está disponível e incentiva os seus associados a fazê-lo nas suas escolas. Denuncia veementemente as medidas governativas já referidas e considera que esta denúncia é uma das suas responsabilidades.

Os programas homologados em 2013 são uma afronta ao rigor e à seriedade de qualquer trabalho. Não nasceram de nenhuma avaliação ou estudo sobre o que está no terreno, não têm paralelo em nenhum outro país com quem nos podemos comparar, não contaram com um único especialista em didática ou em ensino da Matemática na equipa dos seus autores.

No caso do Ensino Básico ignora-se todo o trabalho feito, todo o investimento realizado na experimentação e implementação do recente programa de 2007, bem como os resultados da avaliação feita dessa mesma experimentação. Atropelou-se a legislação sobre manuais escolares, atropelou-se a dignidade dos que trabalham e investigam no âmbito do ensino da Matemática. Atropelaram-se os professores, o seu empenho e a sua formação. Atropelaram-se os alunos e os encarregados de educação. E de tudo isto resultou um programa absurdo, um programa impossível de cumprir, um programa que afasta alunos da matemática e revolta professores. E, se olharmos para o programa de Matemática A, reforça-se a nossa convicção de que há desconhecimento da realidade e uma ignorância confrangedora do mundo da educação básica e secundária e do que deve ser o ensino da Matemática nestes níveis de ensino.

Estes programas ignoram aspetos relevantes do que consideramos ser um ensino atual e de qualidade: o desenvolvimento de capacidades complexas como a compreensão ou a resolução de problemas, a integração adequada e indispensável de ferramentas tecnológicas, as sugestões metodológicas que são um apoio para os professores e aumentam a sua autonomia pedagógica, a referência a modalidades e instrumentos de avaliação que são também instrumentos importantes do ensino e da aprendizagem e que são completamente omitidos.

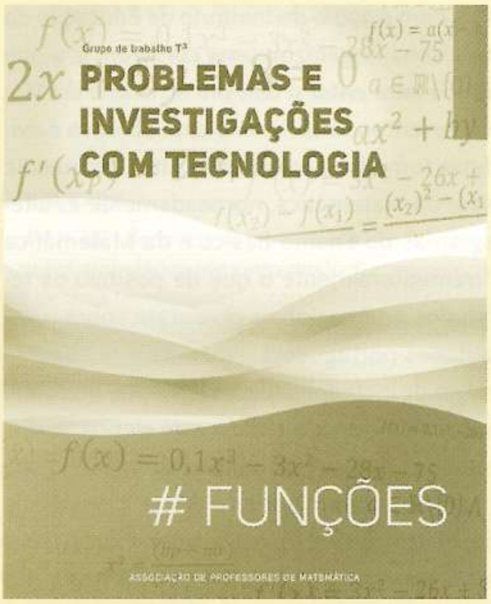
Para além dos programas, na *Agenda* insistimos também na necessidade de se fazer um estudo sério sobre a formação contínua de professores e sobre a Matemática na sua formação inicial. A estas questões voltaremos em breve.

A direção da APM

Publicações APM

Problemas e investigações com tecnologias – Funções

Grupo de Trabalho T3 da APM (APM, 2014)



Esta publicação resulta do trabalho coletivo do grupo de trabalho T3 da APM, com o intuito de, mais uma vez, partilhar com os professores de Matemática um conjunto de propostas de investigações, de desafios e de problemas que, tirando partido da tecnologia, possam ser apresentados aos alunos em sala de aula.

Elas tiram partido dos avanços da tecnologia nos últimos anos, e embora tenham sido concebidas para a TI-Nspire, foram adaptadas nesta publicação para poderem ser usadas com qualquer outra tecnologia gráfica.

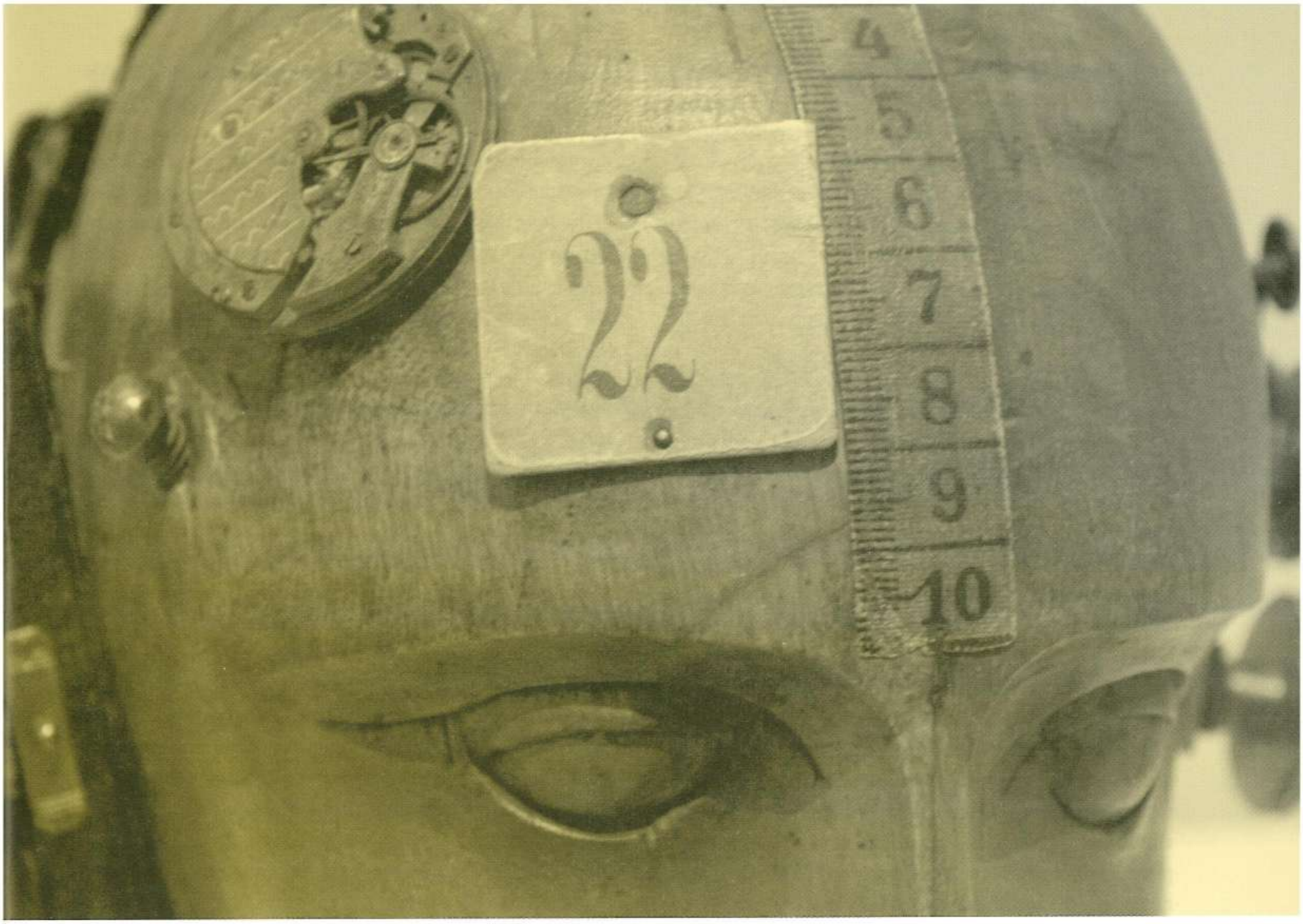
A tecnologia é encarada sobretudo como um instrumento de investigação ao dispor dos alunos e não apenas para efetuar cálculos, confirmar resultados ou apresentar uma «ilustração animada» de conteúdos matemáticos.

Estamos convictos que a surpresa e, porque não dizer, a beleza de algumas descobertas, em atividades como as que aqui propomos, poderão contribuir para o empenhamento de muitos alunos na sua aprendizagem da Matemática.

Esta publicação apresenta enunciados e propostas de resolução que, esperamos, facilitem a aplicação em sala de aula, nomeadamente na forma de tirar partido do uso da tecnologia.

A título de exemplo, deixamos algumas dessas questões: Onde se intersetam as retas tangentes ao gráfico de uma função quadrática em pontos de abcissas simétricas?; Onde é que a tangente no ponto médio de dois zeros de uma função polinomial do 3.° grau interseta o eixo Ox?; Qual é o lugar geométrico dos pontos P_k, do gráfico de $f(x) = kx - \ln x/x$, quando variamos o parâmetro k? Como modelar a população de coelhos e lobos numa reserva natural?; Como analisar o fenómeno da consonância e dissonância quando se tocam duas notas musicais? Qual é o canteiro de flores de área máxima para x metros de cerca? Como descobrir uma função (polinomial, exponencial, logarítmica, ...) que descreva um bom caminho entre bandeiras num Slalom?, etc, etc..

Grupo de trabalho T3, da APM



Metas Curriculares da Matemática: Contributo para um Debate

Rui Trindade

Este é um texto que escrevi após a leitura do Ofício n.° 1289, proveniente do Gabinete do Ministro da Educação e Ciência, em 26.06.2013, a uma solicitação do Sindicato dos Professores da Grande Lisboa (SPGL), no dia 10.05.2013, que pretendia ter acesso a «todos os estudos, pareceres, relatórios e demais documentação, de carácter científico ou de outra natureza»[1] que sustentaram a promulgação do Despacho n.° 5165-A de 16 de Abril de 2013, através do qual se revogava o programa de Matemática para o Ensino Básico de 2007 e se instituía a adoção das Metas Curriculares como «um documento de referência obrigatório a partir do ano lectivo de 2013–2014»[2].

Foi a leitura do referido ofício que suscitou a escrita deste texto que visa interpelar e refletir sobre os fundamentos da decisão que subjazem à legitimação científica das Metas Curriculares na disciplina de Matemática como instrumento curricular de referência do trabalho a ser desenvolvido pelos professores. Por isso, é que o objeto de reflexão deste artigo será, por um lado, as «investigações recentes acerca da cognição e da aprendizagem, muito particularmente as que incidem no ensino e na aprendizagem da Matemática» (GMEC, 2013, p. 1) e, por outro, o modo como estas investigações são mobilizadas para legitimar as medidas de política educativa que o atual Ministro da Educação tem vindo a assumir.

1. O recurso à Psicologia como instrumento de legitimação pedagógica

O texto em análise carateriza-se por utilizar a produção científica que foi sendo construída no campo da Psicologia como instrumento de legitimação das decisões curriculares e pedagógicas que propõe, tal como a invocação, produzida no ofício em análise, o comprova quando se afirma que «nas Metas Curriculares atendeu-se aos estudos de psicologia cognitiva, nomeadamente àqueles relativos à natureza da compreensão, da memória e das ligações entre ambas» (GMEC, 2013, p. 1).

Trata-se de uma situação que está longe de ser inédita ou circunstancial, até porque, relembre-se, foi através de um tal expediente que uma parte significativa dos pedagogos relacionados com a «Ligue Internationale pour l' Éducation Nouvelle» (vulgo «Movimento da Escola Nova») encontrou a justificação para credibilizar o pedocentrismo dos projetos de educação escolar que desenvolveram e sobre os quais refletiram. Uma decisão tão veementemente assumida que se pode considerar ter sido essa estratégia argumentativa uma das causas da emergência e afirmação da Psicologia da Educação como área do saber relevante a partir da primeira metade do séc. XX (Trindade, 2012). Para esses pedagogos, onde se incluem, entre outros, Ferrière (1934), Claparède (1931; 1959), Decroly & Hamaide (1932), Cousinet (1945), Dottrens (1974; 1974a; 1974b) ou Bartolomeis (1984), a Psicologia, ao revelar-nos o funcionamento e a dinâmica cognitiva das crianças, oferecia-nos a possibilidade de compreender como é que os alunos aprendem para, segundo eles, se determinar, de forma certa e segura, a direção da ação pedagógica que os professores deveriam seguir (Trindade, 2012). Sendo este um equívoco concetual e pedagógico, não deixa de ser, apesar disso, um dos alicerces de uma crença através da qual se tende a valorizar a dimensão cognitiva do ato de aprender como uma dimensão dissociada das particularidades epistemológicas dos objetos da aprendizagem. Trata-se de um equívoco porque identifica as aprendizagens realizadas, ou a realizar, como o resultado de uma atividade exclusivamente cognitiva e não como uma atividade de caráter epistemológico que supõe a existência de dinâmicas cognitivas que não poderão ser ignoradas. Um equívoco que poderá ser identificado no documento em análise quando se evocam as já referidas «investigações recentes acerca da cognição e da aprendizagem» (GMEC, 2013, p. 1), «os estudos da psicologia cognitiva, nomeadamente aqueles relativos à natureza da compreensão, da memória e das ligações entre ambas» (ibidem) ou os «pressupostos, hoje, universalmente aceites pela psicologia cognitiva» (ibidem) como argumentos que servem para justificar a medida que nesse documento se pretende legitimar. É como se o ato de compreender um facto ou um objeto de saber não dependesse das caraterísticas e da natureza deste facto e deste objeto ou que se pudesse discorrer sobre memória e compreensão como atividades não situadas face a uma determinada atividade académica.

Tratando-se de uma leitura possível, e até certo ponto comum, no domínio da reflexão sobre os fundamentos das aprendizagens escolares, não deixa de ser uma leitura que, hoje, é necessário problematizar, tal como o faz Brun (2000) quando, ao recusar identificar as aprendizagens em matemática com a realização, por parte dos alunos, das «operações cognitivas requeridas por um objeto matemático (idem, p.90), recusa que se substituam «os objetos matemáticos a ensinar por conteúdos que relevam das estruturas operatórias definidas pelo meio da lógica» (idem, p. 19). Para este autor, o ensino da Matemática não poderá constituir-se como um espaço curricular que sirva, acima de tudo, para introduzir uma espécie de programa de desenvolvimento operatório» (ibidem). Daí que não seja suficiente compreender e descrever «as operações do pensamento» (Vergnaud, 2000, p. 181) como operações dissociadas das «informações pertinentes» (ibidem) que se exprimem «em termos de objetos (argumentos), de propriedades, de relações (funções proposicionais) e de teoremas (proposições)» (ibidem). Em suma, não é a dimensão cognitiva do trabalho de ensino e de aprendizagem na área da matemática que interessa recusar ou negar. O que se pretende, através deste conjunto de argumentos, é contextualizar tal dimensão no âmbito de atividades, as dos professores e as dos alunos, que terão que ser abordadas, em primeiro lugar e acima de tudo, como atividades de caráter didático, as quais poderão beneficiar dos contributos das mais diversas áreas disciplinares, entre os quais se encontram os contributos da Psicologia.

Como se constata, não é o saber produzido nesta área que eu ponho em causa, como saber de referência da reflexão sobre a educação a desenvolver no domínio da matemática ou em qualquer outro domínio curricular, mas o estatuto que se atribui ao mesmo no âmbito de uma tal reflexão. Uma reflexão que, de acordo com a perspetiva que defendo, pode beneficiar com um tal contributo, ainda que não possa ser determinada por ele.

Em suma, e na minha opinião, um dos problemas do documento em análise diz respeito à postura epistemológica que o sustenta, a qual se carateriza, de um modo geral, pelo seu teor tecnocrático no momento em que subalterniza as questões epistemológicas inerentes aos fundamentos da ação educativa na área da Matemática para valorizar exclusivamente a atividade cognitiva dos alunos, como se esta atividade, só por si, fosse suficiente para fundamentar o trabalho dos professores e as exigências, desafios e obstáculos com que estes se têm que defrontar no decurso da sua intervenção como docentes[3].

2. Memorização e compreensão: Uma relação a discutir

No documento em análise é a relação entre a memorização e a compreensão que constitui o núcleo argumentativo em função do qual se justificam as decisões curriculares e pedagógicas que o documento das Metas Curriculares veicula. Uma relação que, num primeiro momento, é vista como uma relação de subordinação instrumental da memorização face à compreensão quando se considera que os estudos que servem de suporte à adoção daquele documento

> destacam a importância da compreensão, entendendo-se esta como resultando do desenvolvimento contínuo e gradual de um conjunto de conhecimentos adquiridos previamente e que incluem regras, procedimentos e conceitos. Nesta perspectiva, *compreender* significa dispor de uma rede complexa de conhecimentos e de capacidades de natureza diversa que podem ser usados de forma flexível para resolver problemas em diferentes contextos e não de algo difuso a que o aluno recorreria para aprender Matemática (GMEC, 2013, p. 1).

Uma afirmação que antecede uma outra, através da qual defende que «a compreensão depende, assim, dos conhecimentos que cada um dispõem na sua memória e que podem ser recuperados sempre que é necessário resolver problemas matemáticos» (ibidem), em função do que se conclui, quase de imediato, que «as Metas Curriculares não opõem memorização e compreensão e realçam *a necessidade de desenvolver a primeira, de modo que a segunda possa ser alcançada*» (ibidem)[4].

Independentemente do tom dos argumentos utilizados no ofício do Gabinete do Ministro da Educação e Ciência (GMEC, 2013), os quais estão longe de se limitar a apresentar uma perspetiva científica da problemática em debate[5], importa chamar a atenção para um facto que no referido ofício se afirma quando se tenta impor a ideia de que a formulação das Metas Curriculares, tal como estas se encontram definidas no Despacho n.° 10874/2012, correspondem a «pressupostos hoje universalmente aceites pela psicologia cognitiva» (ibidem). Uma ideia que, na minha opinião, é, mais do que um equívoco, uma mistificação porque não se pode considerar como consensual no campo da psicologia cognitiva, a relação de subordinação da compreensão face à memorização. Basta a leitura de autores tão relevantes como Ausubel (2003), Bruner (2000; 2002), Garnham (1997), Koschmann (2001), Siegler (2001) ou, entre outros, Rodrigo e Correa (2002) para se compreender que a ideia de um consenso universal acerca da subordinação referida da compreensão face à memorização é, e isso aceita-se, uma interpretação possível no campo da psicologia cognitiva, ainda que concetualmente controversa. A partir dos autores que acabei de referir, entre outros passíveis de serem citados, é possível propor a inversão dos termos da equação, defendendo que a possibilidade de atividades memorização, consequentes e produtivas, de conceitos e de procedimentos relativamente complexos depende, acima de tudo, do modo como compreendemos esses conceitos e estes procedimentos, integrando-os no conjunto de redes concetuais que tanto nos permitem interpretar as informações a que acedemos como a agir no e sobre o mundo que nos rodeia.

Tendo em conta, no entanto, os conteúdos do documento das metas curriculares, parece-me que, mais do que o vínculo anunciado com a psicologia cognitiva, é o vínculo com Ensino para a Mestria (Skinner, 1971; 1983; Schmidt, 1979) ou com as taxonomias educacionais que sustentaram a denominada Pedagogia por Objetivos (Landsheere & Landsheere, 1977; Mager, s.d.), de inspiração neo-comportamentalista, que me parecem constituir a referência maior da proposta curricular apresentada através daquele documento. Afirmo isto, baseado quer na proliferação de descritores que é proposta no documento das metas curriculares, os quais contribuem para atomizar excessivamente o trabalho de ensino e de aprendizagem nas salas de aula, quer na subsequente defesa de uma conceção de sequencialidade onde parece confundir-se intencionalidade com prescritividade didática, já que o encontro entre um aluno e um objeto de saber, podendo ser um encontro planeado, está longe de ser um encontro previsível. Daí a familiaridade que identifiquei entre os documentos em análise e o já referido Ensino para a Mestria ou da Pedagogia por Objetivos, os quais sendo credores da influência do comportamentalismo no campo da educação, propuseram, em nome do discurso tecnocrático da eficiência pedagógica, o desenvolvimento de projetos de intervenção educativa que se construíam quer em função da atomização do trabalho escolar dos alunos quer em função de uma conceção estrita de sequencialidade didática. Uma opção que visava garantir o maior controlo possível seja sobre a intervenção dos professores seja sobre os resultados obtidos, ou a obter, pelos alunos, conduzindo os primeiros a definirem de forma pormenorizada e, em função de um guião previamente formatado, os objetivos a atingir em termos de sequências, hierarquizadas e invariantes, de comportamentos observáveis que os alunos deveriam assumir ou a preverem com exatidão os materiais a utilizar, bem como os estímulos a propor.

A identificação entre os dispositivos curriculares e pedagógicos referidos e o documento das metas curriculares, do ponto de vista da racionalidade pedagógica que os sustenta, parece ser, assim, mais do que uma simples coincidência. Penso mesmo que a relação de subordinação da compreensão face à memorização encontra neste domínio uma legitimidade concetual que lhe advém do facto de se ignorar ou subalternizar o significado que os alunos atribuem à informação e às tarefas em que se envolvem como fator potenciador das aprendizagens que terão que realizar. É este pressuposto que explica que se defenda que «a compreensão depende, assim, dos conhecimentos que cada um dispõe na sua memória» (GMEC, 2013, p. 1) e não do modo como os alunos organizam esses conhecimentos através da construção de mapas concetuais que conferem significado às informações a que acedem e aos procedimentos que acionam. Nesta perspetiva, que encontra a sua sustentação teórica, também, na reflexão que o cognitivismo nos tem vindo a legar e em projetos de intervenção educativa que, no caso português, estão patentes nos resultados que o Plano de Ação da Matemática, mesmo que efémero, permitiu que os alunos obtivessem, não se nega a importância do ato de memorizar, ainda que se defenda que um tal ato depende obrigatoriamente das oportunidades que são oferecidas aos alunos para investirem na construção de uma relação significativa com o património de informações, instrumentos, procedimentos e atitudes culturalmente validados, os quais são tidos como necessários à vida nas sociedades contemporâneas (Trindade & Cosme, 2010). Creio mesmo que a desconfiança com que se aborda, em termos pedagógicos, a memorização se explica pela consciência, mais ou menos explícita, que, hoje, possuímos acerca do seu estatuto nas escolas, sobretudo quando constatamos como a memorização pode contribuir para impedir a compreensão. Não é obrigatório nem é inevitável que isto aconteça, mas é o que acontece e o que continuará a acontecer se nos projetos de educação escolar se continuarem a identificar o ato de educar com um ato de domesticação que, paradoxalmente, se invoca como uma condição imprescindível para garantir, num futuro algo longínquo, a possibilidade de cada aluno assumir comportamentos intelectuais autónomos e complexos.

Notas

[1] Neste texto, e a partir deste momento, o Ofício 1289, de 26.06.2013, do Gabinete do Ministro da Educação e Ciência, a que faço referência nesta introdução passa a ser citado como «GMEC, 2013».

[2] Cf. Despacho n.° 5165-A de 16 de Abril de 2013

[3] A referência que no documento em análise se produz acerca de que não são apenas «os estudos teóricos acerca do nosso funcionamento cognitivo» que são valorizados como fonte de legitimação das Metas Curriculares, do ponto de vista da argumentação, deixa muito a desejar, quer porque a argumentação utilizada aponta num sentido contrário quer porque a afirmação de que os «programas de ensino e de aprendizagem que, seguindo estes princípios, têm revelado resultados muito positivos» ou a identificação de um desses programas (o da equipa de J. R. Anderson, da Carnegie-Mellon University) não são suficientes, só por si, para justificar a medida proposta e esclarecer os sentidos pedagógicos da mesma.

[4] Itálico nosso.

[5] Chamo a atenção para o juízo de valor abusivo que está contido na citação publicada antes, em que se refere que a compreensão não poderá ser vista como «algo difuso a que o aluno recorreria para aprender Matemática». Uma afirmação cujos fundamentos se desconhecem e que, no texto citado (GMEC, 2013), não se explicitam. Tratando-se da afirmação de uma posição concetual que invoca especialistas e conceitos de uma dada área do saber, é de estranhar a utilização de insinuações como argumentos, a não ser que estejamos perante um texto que tende a ocultar as suas motiva-

ções ideológicas sob a capa do contributo da psicologia cognitiva.

Referências bibliográficas

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Claparède. E. (1931). *L'éducation fonctionelle*. Neuchatel: Delachaux & Niestlé, S.A.

Claparède. E. (1959). *A escola sob medida*. Rio de Janeiro: Editora

Bartolomeis, F. de (1984). *Introdução à didáctica da Escola Activa*. Lisboa: Livros Horizonte.

Brun, J. (2000a). Apresentação. Em Brun, J. (Dir.), *Didáctica das matemáticas* (p.11–16). Lisboa: Instituto Piaget.

Bruner, J. S. (2000). *Cultura da educação*. Lisboa: Edições 70.

Bruner, J. S. (2002). *Actos de significado: Para uma psicologia cultural*. Lisboa: Edições 70.

Cousinet, R. (1945). *Une méthode de travail libre par groupes*. Les Éditions du Cerf.

Dottrens, R. (1974). *Educar e Instruir I*. Lisboa: Editorial Estampa.

Dottrens (1974a). *Educar e Instruir II*. Lisboa: Editorial Estampa.

Dottrens (1974b). *Educar e Instruir III*. Lisboa: Editorial Estampa.

Ferrière, A. (1934). *A escola activa*. Porto: Editora Educação Nacional.

Garnham, A. (1997). Representing information in mental models. In Conway, M. A. (Ed.), *Cognitive models of memory* (149–172). UK: Psychology Press, Publishers.

Decroly, O.; Hamaïde, A. (1932). *Le calcul et la mesure au premier degré de l'école Decroly*. Neuchâtel: Delachaux & Niestlé.

Koschmann, T. (2001). A third metaphor for learning: toward a deweyan form of transactional inquiry. In Carver, S. M.; Klarhr, D. (Ed.), *Cognition and Instruction: Twenty-five years of progress*, (439–454). London: LEA.

Landsheere, V.; Landsheere, G. (1977). *Definir os objetivos da educação*. Lisboa: Moraes Editores

Mager, R. F. (s.d.). *Como definer objetivos pedagógicos*. Lisboa: Carreira & Carreira.

Rodrigo, M. J.; Correa, N. (2002). Representação e processos cognitivos: Esquemas e modelos mentais. In Coll, C.; Marchesi, A.; Palacios, J. *et al.* (Org.), *Desenvolvimento psicológico e educação: Psicologia da Educação Escolar* — Vol. 2 (81–93). Porto alegre: Artmed.

Schmidt, M. (1979). *Mastery learning: Theory, research and implementation*. Ontário: Ministry of Education.

Siegler, R. (2001). Cognition, instruction and the question of meaning. In Carver, S. M.; Klarhr, D. (Ed.), *Cognition and Instruction: Twenty-five years of progress*, (195–203). London: LEA.

Skinner, B. F. (1971). *L'analyse experimentale du comportement: Un essai theórique*. Bruxelles: Dessart e Mardaga.

Skinner, B. F. (1983). *O mito da liberdade*. S. Paulo: Sumus.

Trindade, R. (2012). *O Movimento da Educação Nova e a reinvenção da Escola: Da afirmação de uma necessidade aos equívocos de um desejo*. Porto: UPorto Editorial.

Trindade, R.; Cosme, A. (2010). *Educar e aprender na Escola: Questões, desafios e respostas pedagógicas*. V.N. Gaia: Fundação Manuel Leão.

Vergnaud, G. (2000). A teoria dos campos conceptuais. Em Brun, J. (Dir.), *Didáctica das matemáticas* (p. 155–191). Lisboa: Instituto Piaget.

Legislação citada

Despacho n.° 10874/2012 (DR n.° 155, 2.ª Série, de 10 de Agosto de 2012).

Despacho n.° 5165-A/2013 (DR n.° 74, 2.ª Série, de 16 de Abril de 2013).

Rui Trindade
Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade do Porto

Pontos e planos, sempre no espaço

Temos quatro pontos no espaço, não complanares.
Quantos planos existem que sejam equidistantes dos quatro pontos?

(Respostas até 15 de julho para zepaulo46@gmail.com)

O LOSANGO DE VASARELY

O problema proposto no número 125 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Muitas das obras do pintor húngaro-francês Victor Vasarely (1906-1997), um dos fundadores da op art, baseiam-se em figuras e transformações geométricas.

No estudo de um dos seus quadros, unem-se dois vértices de um quadrado com os pontos médios dos lados opostos, dando origem a um losango central, tal como se vê na figura 1.

Que relação há entre as áreas do losango e do quadrado inicial?

Recebemos respostas de Alberto Canelas (Queluz), Ana Luísa Correia, Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva, João Barata (Castelo Branco), João Pereira (São Martinho do Porto), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Apesar de as respostas serem apenas nove, apareceram seis (sim, seis) processos de resolução, que foram desde a simples utilização de um programa de geometria dinâmica (pela Graça) até à artilharia pesada da geometria analítica (pelo Hugo), passando por um elaborado método de semelhança de triângulos (também da Graça). Vejamos os outros três.

Método da partição (Alberto, Francisco e Pedrosa)

Tracemos a diagonal DB e, por E e F, paralelas ao lado AB (ver figura 2).

O quadrado inicial fica dividido em doze triângulos que, facilmente se demonstra, têm áreas iguais. Como o losango é formado por quatro desses triângulos, a sua área é um terço da área do quadrado.

Método do baricentro (Ana Luísa e João Pereira)

O baricentro de um triângulo tem a propriedade de o dividir em três triângulos com a mesma área. O ponto E (ver figura 3) é o baricentro do triângulo ACD. Então, a área do ΔACE é um terço da área do ΔACD. Logo, a área de metade do losango é um terço da área de metade do quadrado pelo que a área do losango é um terço da área do quadrado.

Calculo direto da área (Catarina e João Barata)

Seja L o comprimento do lado do quadrado.
A diagonal maior do losango é $D = \sqrt{2}.L$

A diagonal menor é um terço da maior: $d = \dfrac{\sqrt{2}.L}{3}$

A área de um losango é $\frac{1}{2}D.d = \frac{1}{2}\sqrt{2}.L.\frac{\sqrt{2}.L}{3} = \frac{L^2}{3}$

Logo, a área do losango é um terço da área do quadrado.

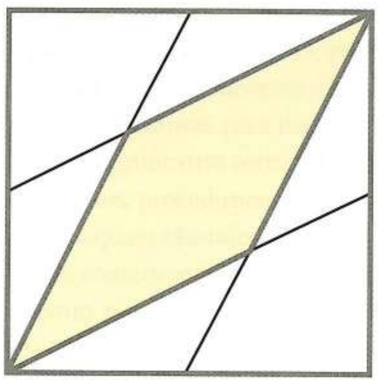


Figura 1

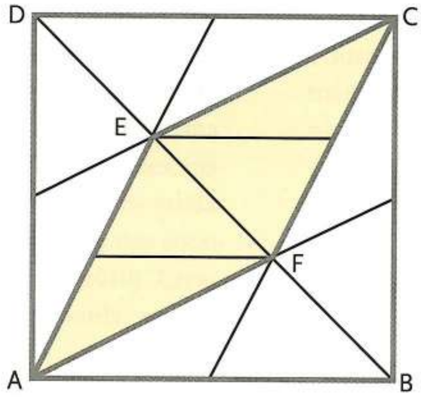


Figura 2

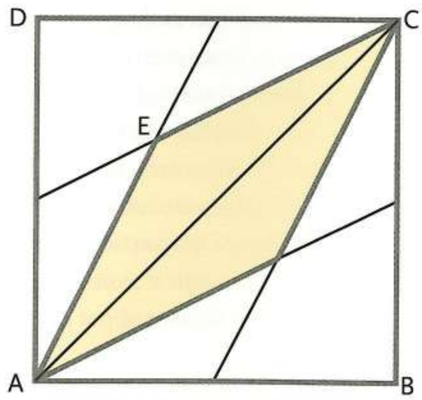
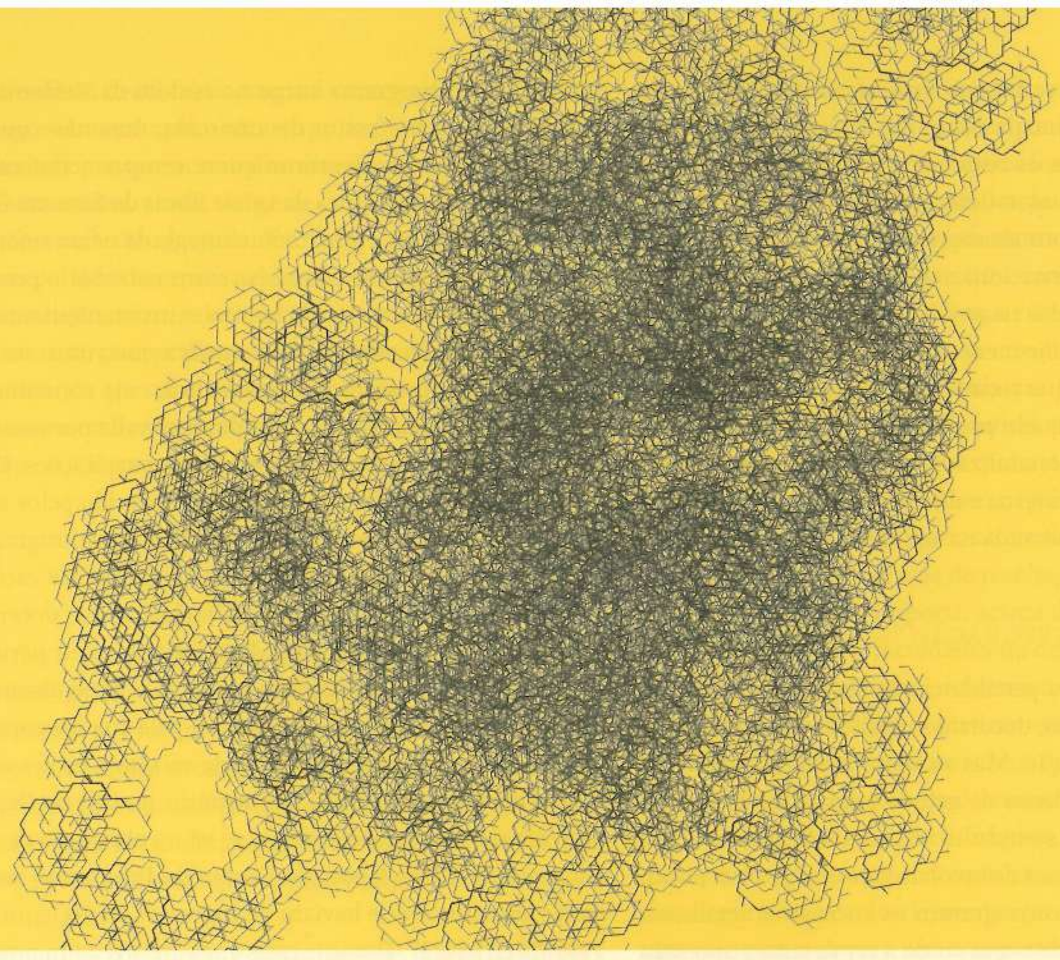


Figura 3



A falta que nos faz(ia) um novo programa de Matemática A

Joaquim Félix, Paulo Correia

No passado mês de novembro de 2013 fomos surpreendidos, ou talvez não, com uma proposta de novo programa para a disciplina de Matemática A destinada aos cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas do ensino secundário. A forma e o processo como decorreu a proposta e consequente homologação do programa de Matemática para o ensino básico diminui a surpresa. O conteúdo e a sua apresentação, tipo «chave na mão», com programa, metas e cadernos de apoio prontos a utilizar, menos de um mês para discussão pública de tamanhas alterações a aplicar (só) a partir de 2015/2016, aqui sim, consubstanciou-se, apesar de tudo, a surpresa. As semelhanças deste processo com o mesmo tipo de atuação na implementação do programa de Matemática para o ensino básico, foram claras e assumidas, apesar de toda a contestação que esse processo gerou.

Fazer um programa é, necessariamente, fazer escolhas. Cada tema matemático preterido na construção de um programa representa um risco de não contribuir para um conhecimento matemático mais sólido dos alunos. Por outro lado, dada a diversidade de conteúdos matemáticos relevantes e a limitação do tempo semanal destinado à disciplina, a opção por investir na qualidade das aprendizagens em detrimento da quantidade de temas estudados, parece-nos uma opção muito acertada[1]. O programa agora aprovado parece inverter claramente esta opção, aumentando o número de temas a abordar, com a consequente redução do tempo destinado ao estudo de cada um deles. Por outro lado a abordagem preferencial, o aprofundamento recomendado ou os recursos recomendados são assumidamente omitidos do programa em nome de uma pretensa «liberdade pedagógica».

E surge não num contexto de «catástrofe» e confusão generalizada no ensino da disciplina, mas numa altura em que, paulatinamente, os resultados de estudos internacionais vêm trazendo boas noticias para Portugal, em que cada vez mais jovens alunos alcançam bons resultados em provas e concursos internacionais e em que jovens investigadores são reconhecidos nas mais diversas áreas científicas (a geração que tem hoje menos de 34 anos terá seguramente trabalhado no ensino secundário, com o atual programa, a menos deste ou aquele pequeno ajuste). A esta realidade não será alheia a estabilização relativa do currículo, das provas de avaliação externa e da estrutura curricular global que vinha sendo observada na última década.

A (falta de) integração

Poucos contestarão a pertinência de repensar o currículo do ensino secundário, decorridos mais de dez anos desde a última reestruturação. Mas as alterações produzidas em julho de 2012 nos planos de estudo[2], longe de enquadrarem e de darem um sentido ao ensino secundário compagináveis com doze anos de escolaridade obrigatória, pouco mais fazem do que consagrarem os sucessivos retalhos a que este nível de ensino tem vindo a ser sujeito: supressão de disciplinas e de áreas curriculares não disciplinares, redução da carga horária de algumas disciplinas mantendo-lhe os mesmos programas, mudanças nos exames finais a realizar pelos alunos, fim dos cursos tecnológicos e sua substituição por cursos profissionais.

As mudanças produzidas deveriam, contudo, enquadrar-se num todo coerente, do qual não conseguimos ver indícios.

Para que deve servir afinal o ensino secundário? Deve valer por si mesmo ou limitar-se a ser um ciclo vestibular para prosseguir estudos de nível superior, seja ele mais longo e tradicional, universitário ou politécnico, ou ainda «de curta duração»?[3]

A alteração do programa de Matemática A, a par do de Português e de Físico-Química, surge assim como mais uma alteração sem a integração desejável num repensar coerente do ensino secundário como um todo e num contexto cuja conexão e rumo não são evidentes.

A (falta de) memória

As anteriores alterações curriculares no ensino secundário (em 1991 e 1997)[4] foram motivadas, de alguma forma, pela identificação de problemas graves no processo de ensino e de aprendizagem da disciplina.

Em 1991 o programa surge no âmbito da Reforma do Sistema Educativo (assim denominada, mas não concretizada na sua plenitude, como quase sempre acontece no nosso país...) na sequência da Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986. Conceptualmente integrada nessa reforma o programa enquadra-se também num necessário processo de renovação do currículo há muito insistentemente reclamado pelos docentes de matemática que viram na Associação de Professores de Matemática, cuja constituição recente tinha ela própria sido muito motivada por essa necessidade, um veículo dos seus anseios e aspirações. Essa renovação era também um propósito assumido pelos seus autores, conscientes embora de todos os constrangimentos da altura, desde as condições pedagógicas das escolas à diversidade imensa dos perfis de formação dos docentes que leccionavam a disciplina. Passando por um período de experimentação em algumas escolas e generalizando-se em 1993, rapidamente se concluiu pela sua inexequibilidade. Tantos foram os clamores de escolas e professores que logo em julho de 1995, o Ministério, através do Departamento de Ensino Secundário, se vê na obrigação de publicar umas «Orientações de Gestão do Programa» destinadas aos alunos que haviam de ingressar no 10.° ano em 1995/96 e 1996/97. Durante estes anos decorreu um processo de auscultação de inúmeros docentes, instituições de ensino universitário, sociedades científicas e associações profissionais que originou o programa reajustado de 1997.

Em 2001, na sequência da revisão do ensino secundário[5] é homologado o programa atualmente em vigor para a disciplina de Matemática A e surgiram as disciplinas e respetivos programas de Matemática B e de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

No período que decorreu entre 1997/98 e 2000/2001 registaram-se inúmeros contatos entre os professores, decorreu um programa de formação alargado e com a participação direta dos autores do programa e criou-se uma equipa de «professores acompanhantes» que acompanharam em proximidade os seus pares na implementação do «reajustamento». O programa de 2001 surge, desta forma, já «testado», culminando este processo.

Temos assim, portanto, que nos últimos 20 anos, os processos de alteração dos programas surgiram na sequência de processos *de baixo para cima* e sempre também com dois traços comuns: em primeiro lugar o do programa ser exequível na sua plenitude, de forma mais ou menos «tranquila», consoante as turmas e os perfis de alunos, mas ainda assim exequível; em segundo lugar o traço da participação e da experimentação prévias à implementação generalizada.

Nenhum destes dois traços é característica do programa agora homologado: não surge de nenhuma necessidade sentida por quem trabalha diretamente com os alunos e muito menos, ainda, surge de qualquer processo de discussão e reflexão alargada. Também não está previsto nenhum período de experimentação no seu calendário de implementação, nem se conhecem propostas de programas de formação para professores no âmbito do novo programa (lembramos que a formação que foi promovida a propósito do programa do ensino básico foi alvo de muitas críticas, sendo considerada tardia, insuficiente e desadequada).

A (falta de) adequação aos destinatários

Um dos aspetos mais claros deste programa é a definição dos destinatários: «O Programa e as respetivas Metas foram concebidos por forma a fornecer aos alunos instrumentos que garantam um prosseguimento de estudos com sucesso, tendo em consideração que é este o ramo da Matemática do Ensino Secundário que dá acesso aos cursos do Ensino Superior de áreas que requerem uma sólida formação matemática.»[6]

Contudo, a primeira e mais comum reação a este programa, ainda na sua fase de proposta, foi a de que este não é um programa para a generalidade dos nossos alunos, das nossas turmas e das nossas escolas. Quanto muito trata-se dum programa para uma elite muita reduzida de alguns alunos e seria necessário colocá-los todos numa mesma turma. Rapidamente iremos regressar, certamente, aos tempos dos «programas mínimos» que julgávamos definitivamente banidos do nosso sistema educativo.

Não se trata de dizer que alguns dos tópicos não deveriam fazer parte da formação matemática dos alunos no ensino secundário, mas de ter consciência plena do que é a realidade do trabalho nas escolas, dentro e fora da sala de aulas, onde o tempo e o sossego necessários e potenciadores de um trabalho de natureza colaborativa entre os professores foi (quase) reduzido a coisa nenhuma.

Houvesse boa memória, e haveria com certeza consciência de que «a nossa história recente está cheia de programas sobrecarregados muito bem intencionados, mas que nunca são cumpridos, mesmo quando a metodologia usada é apenas a da aula magistral com aulas de exercícios»[7].

Sendo louvável a clarificação dos propósitos, parece-nos que um programa destinado a alunos do ensino secundário (num contexto de ensino obrigatório) deve centrar-se na formação integral dos alunos enquanto cidadãos. A assunção (implícita) de que o percurso académico dos alunos de Matemática A deve passar por um curso do Ensino Superior que requeira uma «sólida formação matemática» sugere uma formação matemática de tipo «pré-universitário», quando se deveria investir numa formação com alguma abrangência e destinada a uma variedade relativamente ampla de percursos formativos, a nível superior ou não.

Permita-se-nos aqui citar esse vulto incontornável que é J. Sebastião e Silva e cujas palavras parecem quase sempre revestirem-se duma indiscutível atualidade: «Para nós e para muitos, é indiscutível que a Matemática deve desempenhar no ensino liceal um papel essencialmente formativo. Pouco interessa que o aluno fique a conhecer muitos teoremas e os processos de resolução de muitas classes de problemas: o que importa, acima de tudo, é que ele tenha exercido as suas faculdades na demonstração dos teoremas e na resolução dos problemas; é que tenha adquirido o hábito de pensar matematicamente, quer estudando o desenvolvimento lógico das teorias, quer aplicando os factos estabelecidos à resolução de numerosas questões procedentes da realidade tangível. Exige-se, evidentemente, um mínimo de informação matemática, a aquisição duma técnica segura de cálculo elementar (numérico e algébrico), mas isso pouco deverá ser, comparado com o trabalho de criação de hábitos de raciocínio, de abstração, de disciplina mental, que distinguem a formação matemática. E é ainda manifesto que esse mínimo de informação se refere quási exclusivamente aos alunos que vão seguir determinados cursos, enquanto os benefícios da formação matemática interessam à totalidade dos alunos.»[8]

Tendo em conta o seu carácter fortemente formativo, que papel desempenha então a matemática no currículo do ensino secundário? Que alternativa para os alunos que não estudam Matemática A? Ou por outras palavras, para os alunos que não pretendem prosseguir estudos em «áreas que requerem uma sólida formação matemática»? Vão-se manter os atuais programas de Matemática B e de Matemática Aplicada às Ciências Sociais? Para que cursos? Continuará a ser possível terminar o ensino secundário sem nenhuma formação de base matemática?

A (falta de) exigência e rigor

Analisando o programa, de um ponto de vista científico, não nos merece reparos relativamente à existência de erros ou incorreções formais. Ainda assim algumas opções parecem-nos altamente questionáveis ou porque não seguem a linha tradicional (e não são encontrados motivos que justifiquem a mudança) ou porque descaracterizam os temas matemáticos que supostamente deveriam ser desenvolvidos.

São públicas as críticas que o professor Jaime Carvalho e Silva apontou à definição de continuidade que o programa adota[9]. Sem ser questionado a validade da definição adotada, a opção por uma abordagem diferente da tradicional, ou sequer uma maior popularidade no ensino superior, parece ser uma mudança pouco feliz sem ganhos evidentes.

É igualmente pública a crítica que o professor António Fernandes faz do tratamento da Lógica no programa e nos cadernos de apoio[10], alertando para um formalismo excessivo e para a necessidade de adequar o ensino deste tema aos alunos a que se destina o programa.

Ainda numa vertente científica é questionável o tratamento da Estatística, (sobre)valorizando o tratamento analítico das propriedades dos somatórios, fórmulas e relações algébricas por oposição a uma ausência de referências às etapas de um estudo estatístico, ao tratamento de dados estatísticos com a folha de cálculo, ou à construção de um inquérito, que são competências características de uma aprendizagem consistente deste tema matemático.

A exigência e o rigor têm sobretudo a ver com a qualidade das aprendizagens, com a forma como os conceitos são ensinados e deles se apropriam, ou não, os alunos. Crer que a abstração e o formalismo, só por si, tornam os alunos matematicamente mais capazes, ou acreditar que, pelo facto de a uma extensa lista de conteúdos se associar um conjunto de metas para cada um dos anos de escolaridade, daí resultarão melhores e mais rigorosas aprendizagens parece-nos uma questão de fé.

A (falta de) liberdade

A opção por um programa que consiste essencialmente numa listagem de conteúdos, para além de contrariar as recomendações da investigação em teoria curricular, foi assumida com o pretexto de aumentar a liberdade pedagógica dos professores.

Contudo a liberdade pretendida pelo atual programa fica altamente condicionada pela extensão da lista de conteúdos, que irá, certamente, pressupor uma lógica de trabalho de sala de aula que não permitirá opções pedagógicas assentes em atividades de investigação, trabalhos de grupo, atividades de modelação, resolução de problemas, ou outras metodologias consensualmente recomendadas e promotoras de melhores aprendizagens, mas que também exigem a implementação num tempo mais alargado.

A questão do tempo é central. Sem tempo não há liberdade. A extensão da lista de conteúdos e a indefinição do grau de aprofundamento de cada conteúdo coloca um cenário onde não existem muitas hipóteses de escolher usar a tecnologia, ou a realização de atividades de exploração (de resto apontadas como inadequadas para os objetivos do programa[11]).

A importância da avaliação externa no ensino secundário condiciona, só por si, a liberdade pedagógica dos professores. Um contexto de indefinição sobre a abordagem preconizada para cada tema, bem como o nível de aprofundamento desejável, limita fortemente as opções pedagógicas. As práticas letivas, e de avaliação, que valorizem a realização de exames tenderão a ser altamente valorizadas, remetendo para um plano secundário (ou até eliminando) o desenvolvimento de competências e capacidades matemáticas que não são passíveis de ser avaliadas em provas de âmbito nacional.

Será também curioso analisar a pretensa liberdade metodológica dos professores no que se refere aos processos e instrumentos de avaliação interna e à forma como esta se integrará, ou não, nos processos de aprendizagem dos alunos. Ao programa associam-se as metas traduzidas numa outra imensa lista de descritores, escritos para professores, mas correspondendo a desempenhos específicos e avaliáveis que os alunos deverão evidenciar. E a avaliação interna também deverá «traduzir com fidelidade o nível de desempenho do aluno no que se refere ao cumprimento do programa e das respetivas metas curriculares»[12]. Como fazer conciliar isto com aprendizagens que façam sentido quando se aprende e não deixadas para um certo dia, algures no futuro que se espera iluminado de cada aluno, será mais um problema para resolver, livremente, pelos professores. Problema que, porventura, talvez algum «Teste Intermédio» ou, enfim, o Exame Nacional de 2018 venha ajudar a resolver...

A (falta de) matemática transversal

O programa de matemática, ainda em vigor, introduziu no currículo, nas práticas letivas e nas práticas de avaliação aspetos importantes, como a comunicação matemática ou a utilização da tecnologia. Outros aspetos entendidos como transversais como a modelação matemática, a resolução de problemas ou a história da matemática, não conseguiram fazer uma transição tão satisfatória entre o currículo prescrito e o currículo implementado.

O programa agora aprovado surge como um retrocesso neste processo de valorização de temas matemáticos entendidos como transversais.

As referências à comunicação matemática sugerem uma valorização de processos de transmissão (ler e escrever) em detrimento da argumentação e do recurso a representações múltiplas da informação.

As referências à utilização da tecnologia privilegiam receios de má utilização e não enfatizam as vantagens.

A resolução de problemas surge como forma de aplicar os conhecimentos de cada unidade temática, num entendimento muito pouco consensual do papel da resolução de problemas no contexto do ensino da matemática. A ambiguidade sobre os conceitos de exercício e problema, apresentando atividades de investigação com uma conotação negativa, e sugerir ganhos no afastamento da realidade, configuram um entendimento da atividade de resolução de problemas muito questionável e que contraria as vantagens destas atividades já identificadas pela investigação.

A modelação é sugerida como a manipulação de modelos e não na perspetiva (mais ambiciosa) da criação dos modelos matemáticos, sem referências à tecnologia disponível para este tipo de atividade e sem a reserva de tempo ou oportunidade necessários.

A história da matemática, que nunca conseguiu uma implementação efetiva na prática docente da maioria dos professores, não parece ser valorizada neste programa, sendo as referências vagas e pouco concretas.

A necessidade de (continuar a) acreditar

Qualquer programa sofre ajustamentos e alterações no processo de implementação — os investigadores já explicitaram claramente as diferenças entre o currículo definido e o currículo implementado.

A implementação deste programa, por não definir opções metodológicas preferenciais, por ser vago no nível de aprofundamento dos temas e por ser demasiado extenso, potencia este tipo de ajustamento em larga escala: na concretização de propostas dos manuais, nas práticas dos professores, na avaliação e na definição e criação de instrumentos de avaliação (testes, testes intermédios e exames).

Caberá aos professores o papel de transformar esta proposta na criação de oportunidades de aprendizagens de qualidade. Ficará ao critério dos professores fazer as opções sobre os temas que merecem um estudo mais aprofundado, onde a tecnologia poderá constituir-se como uma mais valia para a aprendizagem, e também serão os professores a decidir sobre os temas e as abordagens que deverão ser menos valorizadas. Será ainda responsabilidade dos professores manifestarem a sua opinião na definição de provas de âmbito nacional e na seleção dos manuais que melhor conseguirem transformar este programa em aprendizagens relevantes.

Caberá aos professores fazer as escolhas que o programa não faz. Oxalá que não sejam em vão!

Notas

[1] Posição expressamente assumida pela equipa que procedeu ao reajustamento do programa de matemática do ensino secundário, coordenada por Jaime Carvalho e Silva (*in* Matemática — Programas, M.E. — Departamento do Ensino Secundário, Janeiro de 1997.

[2] Através do Decreto-Lei n.° 139/2012, de 5 de julho.

[3] Intuito há pouco tempo noticiado como propósito do Ministério, mas que parece ainda ninguém ter percebido exatamente do que se trata.

[4] Nota: colocamos aqui 1997 e não 2001, porque o programa atual de Matemática A, homologado em 2001, assenta essencial no reajustamento operado em 1997.

[5] Concretizada através do Decreto-Lei n.° 7/2001, de 18 de janeiro.

[6] *in* Programa de Matemática A, pág.3

[7] *in* Matemática — Programas, M.E. — Departamento do Ensino Secundário, Janeiro de 1997.

[8] in «A Teoria dos logaritmos no ensino liceal» publicado na Gazeta de Matemática nffl 12 – 1943, e reproduzido em Silva, J. Sebastião, Textos Didácticos, vol III, FCG, Lisboa, 2002.

[9] https://www.facebook.com/notes/jaime-silva/nota-n%C2%BA-7-sobre-a-proposta-de-programas-de-matem%C3%A1tica-a/673921322640716
https://www.facebook.com/notes/jaime-silva/nota-n%C2%BA-8-sobre-a-proposta-de-programa-de-matem%C3%A1tica-a/674521482580700 e
https://www.facebook.com/notes/jaime-silva/nota-n%C2%BA-9-sobre-a-proposta-de-programa-de-matem%C3%A1tica-a/674767032556145

[10] http://www.apm.pt/files/208571_Mat_A_Ant_Fer_52a700cc4010d.pdf

[11] Programa de Matemática A, pág. 7.

[12] Programa de Matemática A, pág. 30.

Joaquim Félix
Agrupamento de Escolas n.° 2 de Évora
Esc. Sec. Gabriel Pereira

Paulo Correia
Agrupamento de Escolas n.° 1 de Alcácer do Sal
Esc. Sec. de Alcácer do Sal

Uma perspetiva sobre os novos programas de Português e Matemática[1]

«...mas se a maioria não sabe contar, escreve mal, lê mal, fala mal, como falar de criatividade até isso estar resolvido?»

Esta foi a questão levantada por uma jornalista, numa recente entrevista a um antigo ministro da educação[2], quando ele afirmou que a ação do atual responsável tem atendido mais «a aspetos relacionados com o *curriculum*, o conteúdo das disciplinas, havendo outros aspetos que não estão a ser acautelados, tais como a criatividade, a iniciativa, a responsabilidade, a atitude».

A frase da jornalista ilustra bem a visão que parece justificar os novos programas de Português e Matemática do secundário. Há nela duas ideias que merecem reflexão. Uma pretende ser um «diagnóstico» sobre os conhecimentos dos alunos: a maioria não sabe contar, nem escrever, ler, falar... Outra é a uma «teoria» sobre o ensino: primeiro, ensina-se o «básico» e depois — se houver depois — tratar-se-á de coisas como a referida criatividade.

O «diagnóstico», largamente difundido, carece, evidentemente, de fundamentos: a maioria não sabe? quem testou, mediu para chegar à conclusão de que se trata de uma maioria? o que quer dizer não saber contar, não saber ler? e ler o quê? E poderíamos continuar assim, questionando a validade de tal afirmação. Como é óbvio, trata-se de uma mera opinião, uma generalização, aliás normalmente acompanhada do seu corolário, igualmente expedito: os alunos não sabem porque os professores, intoxicados com o «eduquês» deixaram de saber ensinar, só se preocupam com o prazer dos meninos e, até, eles próprios não sabem. Ou vá lá, em versões benéficas, têm menos conhecimentos científicos, rigorosos, do que pedagógicos, vagos... Nas escolas, sobretudo nas públicas, ocupam-se com coisas parvas como a formação para a cidadania, a educação integral, os valores, as atitudes e esquecem o «básico».

Nesta perspetiva, este estado de coisas, assim rigorosamente(!) diagnosticado, dá lugar à hierarquização segundo a qual o desenvolvimento da criatividade, da iniciativa, da responsabilidade deve ser posterior ao prioritário, a aquisição dos tais conhecimentos básicos. Mas basta pensar um pouco para logo surgirem algumas questões muito simples: quando é que uma coisa está feita para se poder passar a outra? em que momento se pode começar a tratar da dita criatividade, não prioritária? quando é que aquilo que os alunos sabem é suficiente para, então, ser possível passar ao «resto»? e este «resto» não será também, afinal, prioritário?

Dir-nos-ão que a jornalista tem todo o direito a ter e a exprimir essa opinião. É verdade — embora se pudesse (devesse?) esperar alguma reflexão mais séria sobre o assunto, uma visão menos depreciativa de alunos e professores. Mas o que se torna mais preocupante é que, desgraçadamente, essa opinião parece ter orientado a elaboração e aprovação dos novos programas.

É certo que os programas até aqui em vigor precisavam de ser ajustados, renovados — mas depois de avaliados com rigor, como é básico em qualquer ação de re-planeamento. E, como é básico também, os professores, principais responsáveis pela execução dos programas, deviam participar nessa avaliação, pois não há programa que funcione sem os professores. Infelizmente, isso não aconteceu. Nem seria de esperar que acontecesse quando se parte de um «diagnóstico» como o apontado, que deixa aos professores o papel de quem não consegue fazer o seu trabalho. A maioria, claro...

O QUE VEMOS ENTÃO NOS NOVOS PROGRAMAS DE PORTUGUÊS E MATEMÁTICA?

Para começar, em ambos são simplesmente postas de lado algumas das exigências decorrentes das leis do país, nomeadamente a Lei de Bases do Sistema Educativo, que apontam para a educação para a cidadania, a formação integral do indivíduo, o desenvolvimento de atitudes de cooperação e de respeito pelo outro.

Depois, se, na entrevista referida no início, a afirmação que a ação do atual ministro tem atendido mais «ao conteúdo das disciplinas» pode transmitir a ideia de que essa ação seria inócua e (talvez) até necessária, a verdade é que também a esse nível a opção é desastrosa. O que se verifica é uma acumulação de conteúdos e conhecimentos específicos que torna estes programas inexequíveis no tempo disponível, a não ser que o ensino se centre na exposição pelo professor, que transmite os conhecimentos, de forma desligada do desenvolvimento das capacidades de compreensão, de aplicação, de comunicação e de reflexão crítica dos alunos.

São portanto programas que, embora afirmando o contrário, impõem rigidamente uma determinada metodologia. Não há neles nem espaço nem tempo para outra coisa que não seja o método expositivo, neste afã de, primeiro, ensinar conteúdos, deixando para depois — quando? — o modo como o aluno os integra e interage com eles, que significado lhes atribui e o que fica capaz de fazer com eles. Esquece-se é que são estas últimas operações — que exigem, em simultâneo, o desenvolvimento da criatividade, da atitude crítica, da autonomia — que fazem com que realmente se aprenda. Quer dizer, com estes programas os alunos nem, sequer, aprenderão mais conceitos e factos, nem aprenderão a falar/ler/ escrever/calcular/pensar melhor, nem, muito menos, aprenderão a ser capazes de mais autonomia, de mais criatividade, de mais crítica, objetivos estes considerados essenciais em todos os estudos internacionais sobre educação para o século XXI.

O curioso é que é precisamente destes estudos que os novos programas se reclamam. No entanto, se lermos, por exemplo, as orientações da conferência internacional da OCDE sobre educação no século XXI, deparamo-nos, logo no início, com o seguinte:

In the knowledge economy, memorization of facts and procedures is not enough for success. Educated workers need a conceptual understanding of complex concepts, and the ability to work with them creatively to generate new ideas, new theories, new products, and new knowledge. They need to be able critically to evaluate what they read, be able to express themselves clearly both verbally and in writing, and understand scientific and mathematical thinking. They need to learn integrated and usable knowledge, rather than the sets of compartmentalised and de-contextualised facts. They need to be able to take responsibility for their own continuing, life-long learning.[3]

O que parece é que na leitura feita pelos autores dos novos programas se omitiram palavras como *creatively*, *critically*, que traduzem ideias essenciais ao que é dito. Com elas se referem atitudes a desenvolver em simultâneo com a memorização, compreensão e aprendizagem de capacidades e competências de leitura, de expressão e de raciocínio matemático e científico. Também a frase que defende a necessidade de contextualização, integração e utilidade dos conhecimentos a adquirir, isto é, a necessidade de as aprendizagens serem significativas, parece ter sido descartada. O mesmo acontece com a exigência da autorresponsabilização, com o que implica de desenvolvimento da autonomia.

No caso do programa de Português, que tanto refere os *Common Standards*, a questão da leitura do texto complexo, tópico essencial na reformulação programática (leitura cuja necessidade e vantagem não é contestável) é tratada de uma maneira que também parece ter aproveitado daquela referência apenas parte do que lá se diz, como, por exemplo, neste caso:

Furthermore, students in college are expected to read complex texts with substantially greater independence (i.e., much less scaffolding) than are students in typical K-12 programs. College students are held more accountable for what they read on their own than are most students in high school(...) This discrepancy in task demand, coupled with what we see below is a vast gap in text complexity, may help explain why (...) so few students in general are prepared for postsecondary reading.[4]

A questão que aqui se levanta diz certamente respeito à necessidade de ler textos complexos, mas de os ler de forma independente, sendo isto tão importante como aquilo. Donde, não interessa que os programas estejam cheios de textos complexos se esses programas não forem orientados para o desenvolvimento da capacidade de os alunos lerem com autonomia, criatividade, espírito crítico. O que acontece é que no programa de Português as leituras do domínio da Educação Literária são todas mais do que dirigidas, não havendo qualquer espaço ou ocasião para a leitura independente. Parece que o Projeto de Leitura, parte constante dos programa, aponta para isso; porém, reserva-se-lhe tempo nenhum, dado o que é atribuído às outras leituras orientadas.

Também na Matemática, os autores introduzem novos temas e mais conteúdos, fazendo uma distribuição por 543 tempos, em vez dos 491 previstos atualmente, para a mesma carga horária da disciplina. O programa não é exequível no tempo que existe, logo não é credível e mostra bem que foi elaborado de forma atabalhoada. São mais conteúdos e ideias soltas, à custa da aprendizagem num contexto de resolução de problemas, de tarefas de exploração e de investigação em que se promove o estabelecimento de conexões entre os vários temas da Matemática e com a realidade. Sob a máscara de introdução de conteúdos «mais exigentes» ficaremos com uma Matemática muito mais pobre e descontextualizada. Ao invés de finalidades abrangentes como «desenvolvimento de capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade», reduzem-se as finalidades a duas, em que se absolutiza «a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio abstracto». Há nisto um propósito, que é ainda mais explícito quando criticam as abordagens intuitivas de conceitos, como os limites de sucessões e de funções ao afirmarem «que quando trabalhados de forma vaga e exageradamente intuitiva levam com frequência à formação de conceções erradas, difíceis de reverter». A experiência diz-nos o contrário, ou seja, quando se memorizam ‹definições› em vez de construir conceitos em contextos diversificados, fica-se com uma visão estreita, pouco profunda e com mais dificuldade de raciocínio.

E OS ALUNOS?

Os alunos são, nestes programas, tratados como se espera de quem acha que eles, na sua maioria, fazem tudo mal: contam, escrevem, leem, falam mal... Paira por aqui uma espécie de desprezo por essa grande maioria que, de facto, tem dificuldades na escola e não faz tudo «bem», nem sabe «bem», nem é «bem».

Não nos revemos nesta visão. Sabemos exatamente como é difícil fazer com que os alunos aprendam tudo o que queremos ensinar-lhes; conhecemos os seus problemas; não temos nenhuma ilusão de facilidade nem queremos «facilitar». Mas sabemos sobretudo que temos nas nossas aulas todos, a maioria e a minoria. Sabemos que todos são cidadãos com direito a aprender e que todos podem fazê-lo. Os que têm livros em casa e os que não têm, os que têm explicações e os que não têm, os filhos de doutores e os filhos de desempregados, os filhos de ricos e os filhos de pobres. Os que falam bem e os que falam mal. Temos todos, os de hoje: estes, os reais, os dos telemóveis, os do *facebook*, os do SASE, os das aldeias distantes, os dos meios industriais, os das áreas metropolitanas, os que temos. É com estes que temos de trabalhar, é a estes que temos de ensinar os conhecimentos específicos de Português e de Matemática, sejam conceitos, sejam procedimentos e capacidades, mas também a criatividade, a autonomia, a responsabilidade, a crítica.

Sabemos que não só temos que os conhecer como temos que contar com eles. Talvez venha a propósito lembrar outra vez um desses texto internacionais que terão estado na base dos novos programas. Acentua o relatório da conferência da OCDE /CERI, já acima citado:

The importance of motivation and emotion in learning : The motivation to learn, the belief about one's own abilities and the existence of learning strategies are a precondition for successful and lifelong learning, as PISA has shown. These findings are supported by the results from neuroscience: Negative emotions that are caused, e.g. by incomprehensible learning materials, affect cognitive functions negatively.

É portanto preciso ter em conta os alunos, a sua motivação e emoções; e é preciso ter estratégias de ensino/aprendizagem que partam dos dados fornecidos pelas ciências que estudam os mecanismos do pensamento e da emoção. Quer dizer que os abundantes conteúdos específicos constantes dos programas de Português e de Matemática só serão ensinados/aprendidos com sucesso se não aparecerem aos olhos dos alunos como *incomprehensible learning materials*.

É por isso que, por exemplo, no caso do Português e no domínio chamado Educação Literária, a exclusividade da opção pela organização diacrónica das leituras parece absolutamente insensata e condenada ao fracasso. Propor a leitura dos textos mais antigos da nossa literatura ou das reflexões do poeta em *Os Lusíadas*, em meia dúzia de aulas, a alunos acabados de concluir o 9.º ano, nativos digitais com os 14–15 anos acabados de fazer nesta segunda década do século XXI é, simplesmente, abdicar de qualquer estratégia. Porque a língua lhes é um enorme obstáculo, o universo referenciado lhes é absolutamente alheio e tudo isso lhes exige uma maturidade que eles não têm. Começar por aí é como escolher o canhão da Nazaré para ensinar jovens aprendizes de surfistas. Ou, por outras palavras, o que fazemos é fazer com que não aprendam, não leiam, não compreendam e se limitem — alguns, os que, mais dóceis, aceitam repetir o incompreensível — a papaguear o que lhes dizemos.

Não se trata de «facilitar», não se trata de desistir de ensinar Camões por ser difícil. Trata-se de o ensinar tendo a prudência de estrategicamente reunir as condições que permitam o sucesso da tarefa. Desgraçadamente, o programa parece pouco preocupado com isto. É como se o importante fosse a aparência e não o que realmente acontece e é; é como se, estando o programa cheio de títulos, obras, autores, quer dizer, de muita literatura, isso fosse suficiente, mesmo que a leitura pelos alunos seja um faz de conta...

São estes alunos que saem da aula de Português e entram na de Matemática (disciplinas bem separadas e de preferência em aulas de 50 minutos, para a exposição «render») para aprenderem num compacto, lógica e teoria de conjuntos. Depois, com a cabeça já arrumada e no lugar, estão preparados para o «pretenso» rigor de definições. Que engano! Não tivemos nós a experiência, como professores e alguns como alunos, nos programas dos anos 70 e 80, da aridez que provocou o estudo da lógica no início do 10.° ano e das estruturas algébricas no 12.° ano? Não verificámos que o empacotamento da lógica não levava ao desenvolvimento do raciocínio lógico? Não fizemos nós cursos de Ensino da Matemática, com muitos teoremas para enunciar e demonstrar e cadeiras de geometria sem ter feito um único esboço? De que forma esta aprendizagem contribuiu para aprendermos, de um ponto de vista superior, a Matemática que ensinamos? É isto que desejamos para os nossos alunos?

Dizem os autores na introdução «ao optar-se por uma estrutura em termos de Metas Curriculares, muitos dos conteúdos transversais inerentes a um Programa de Matemática do Secundário, encontram-se agora, em grande medida, explicitados, o que, por exemplo, levou à constituição do domínio Lógica e Teoria dos Conjuntos». Mas, a resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação são capacidades transversais que não se desenvolvem isoladamente, mas no trabalho realizado nos diversos temas, ao longo dos anos. Por isso, «estudá-las» à parte no início do 10° ano não aumenta o domínio sobre elas, bem pelo contrário. Os alunos construirão um conhecimento dogmático e pouco aberto a ampliações dos conceitos.

O RIGOR E A EXIGÊNCIA

Têm sido estes os desígnios apresentados para o lançamento dos novos programas. Devemos ser mais rigorosos e mais exigentes: de acordo. Mas em quê? E como?

Na nossa perspetiva de professores, devemos em primeiro lugar ser rigorosos e exigentes connosco próprios, com o nosso trabalho, a nossa formação, o modo como exercemos a profissão. Essa exigência passa também pela forma como lemos, interpretamos e executamos os programas que guiam a nossa ação. Também, por isso, exigimos destes que sejam bem delineados: que tratem, com rigor, do ensino dos conhecimentos específicos, mas que não deixem de exigir o desenvolvimento das capacidades mais globalizantes e de atitudes como as já referidas criatividade, autonomia, responsabilidade, crítica, etc., nem tão pouco o dos valores fundamentais numa sociedade democrática; que tenham rigorosamente em conta o que os estudos internacionais afirmam ser essencial para o cidadão do século XXI, sem deixar de lado o que não convém a uma visão radicalmente simplista e preconceituosa da educação; que se adeqúem aos alunos a quem se destinam, não iludindo a realidade de hoje e daqui, num Portugal com altas taxas de abandono escolar, de população sem o ensino secundário completo, e com uma periclitante extensão a 12 anos da escolaridade obrigatória; que demonstrem de facto uma real exigência de qualidade, mas também de inclusão; que não se contentem em parecer exigentes e rigorosos quando, numa análise rigorosa, se centram apenas em parte do que é exigível para a educação deste século. A não ser assim, os proclamados rigor e exigência não serão senão *nomes com quem se o povo néscio engana* — como se lê em Camões, a propósito de outras ilusões.

Notas

[1] A necessidade desta reflexão conjunta sobre o Português e Matemática A surgiu na continuação de uma discussão de ambos os programas, na nossa escola, com professores dos dois grupos disciplinares. E se o panorama nos parece catastrófico em cada uma das disciplinas per si, o que dizer quando a orientação parece ser comum às várias revisões curriculares, visível nas reações de várias associações de professores? Na verdade, julgamos que esta revisão de programas não favorece nem a inclusão nem a melhoria do ensino e exige, portanto, que unamos esforços para o denunciar.

[2] Entrevista a Marçal Grilo, conduzida por Maria João Avillez, na *Pública* de 16/02/2014.

[3] *21st Century Learning: Research, Innovation and Policy — Directions from recent OECD analyses.*

[4] *Common Core State Standards for English Language Arts & Literacy in History/Social Studies, Science, and Technical Subjects — Appendix A: Research Supporting - Key Elements of the Standards — Glossary of Key Terms.*

Manuela Pires
Margarida Amado
Professoras de Matemática e de Português
do Agrupamento de escolas
Marinha Grande Poente

O Programa de Matemática do Ensino Básico de 2013. E agora, o que fazer?

A implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico (2013) (PMEB) apresenta-se como um novo (grande) desafio para os professores de Matemática.

Uma leitura atenta dos documentos oficiais — PMEB 2013, Metas Curriculares (MC) e Cadernos de Apoio (CA) — deixava-nos adivinhar que iam surgir alguns constrangimentos na sua implementação. Primeiro, porque todo o processo decorreu num curto espaço de tempo desde a sua aprovação à sua implementação, não tendo havido uma fase de apropriação adequada dos documentos, com esclarecimentos, debates e reflexão, envolvendo todos os agentes; Segundo, porque houve formação dirigida apenas a um professor por ciclo de cada escola ou agrupamento de escolas antes da sua implementação e, em alguns casos, já durante a sua implementação, a qual se revelou escassa e não foi replicada de modo eficiente nas escolas; Terceiro, porque os documentos preconizam uma alteração na perspetiva de ensino da Matemática vigente em Portugal nos últimos anos decorrente da investigação feita em educação Matemática em Portugal e a nível internacional.

Agora, como implementadoras, surgem outros constrangimentos, no quotidiano da sala de aula. Por exemplo: Como minimizar os efeitos de ter dois manuais distintos na sala de aula (há alunos que têm o manual referente ao PMEB 2007 e outros do PMEB 2013)? Como promover o desenvolvimento da capacidade de raciocínio matemático e de resolução de problemas? Como desenvolver o pensamento algébrico dos alunos? Como desenvolver o sentido de número dos alunos?...

Neste espaço, procuramos partilhar ansiedades e dúvidas que nos acometeram no tratamento de um tema transversal como a resolução de problemas e ainda no desenvolvimento do pensamento algébrico, nomeadamente no tratamento dos subdomínios sequências, regularidades e sucessões.

É reconhecido que a atividade matemática implica mais do que a destreza na utilização de procedimentos algébricos ou algoritmos estudados e treinados, mais do que a aplicação de axiomas, definições, teoremas e demonstrações bem memorizados... ela envolve a combinação de observações, o estabelecer comparações, o recurso a imagens, a formulação de conjeturas e o antecipar a estrutura de uma prova, ações características da componente intuitiva. Nesta perspetiva, ao procurarmos compreender de que modo a intuição pode ser desenvolvida nos nossos alunos, reconhecendo que o ponto de partida não é a memorização mecânica de definições e algoritmos, descobrimos que a variedade e a qualidade das representações mentais que possuímos dos objetos matemáticos são determinantes para uma intuição matemática mais poderosa. E, neste sentido, a resolução de problemas surge como uma das experiências a ser contemplada na atividade matemática dos alunos, na sala de aula, uma vez que estes, ao «atacar» os problemas, terão a oportunidade de estabelecer relações entre as diferentes representações dos objetos matemáticos quando selecionam uma estratégia que permita a sua resolução. Ao analisar o PMEB 2013, deparamo-nos com uma definição de resolução de problemas que contempla a atividade que deve ser realizada pelos alunos nas suas diferentes fases, mas que a reduz a uma atividade a ser desenvolvida apenas no final do tratamento de um subdomínio, envolvendo regras, procedimentos, conhecimentos de factos, conceitos e relações previamente estudados e treinados (PMEB, 2013, p. 5).

Ao remeter a resolução de problemas para o final do tratamento de um subdomínio, somos confrontados com um grande constrangimento na nossa prática: E agora, como fazer? Haverá lugar para a resolução de problemas como atividade matemática para introduzir determinados tópicos? Ou ainda, como fazer com que os alunos estabeleçam conexões entre os diferentes temas matemáticos, se estes surgem através da resolução de problemas de forma compartimentada e isolada? Como é que a resolução de problemas pode facilitar uma conceção da Matemática como um todo coerente?

Em última análise, como desenvolver a intuição matemática, se os alunos não tiverem possibilidade de resolver problemas que estimulem os aspetos intuitivos do pensamento matemático, uma vez que devem «mobilizar conhecimentos, factos, conceitos e relações, selecionar e aplicar adequadamente regras e procedimentos, previamente estudados e treinados» (PMEB, 2013, p. 5). Não estaremos a reduzir a experiência matemática dos alunos a alguns aspetos, que não podendo ser descurados, não evidenciam aquilo que a Matemática tem de característico?

Por exemplo, como convencer um aluno que um algoritmo ou um procedimento poderá ser a estratégia mais eficiente quando comparada com uma estratégia mais informal (como uma resolução com recurso a um esquema, a uma tabela ou listagem de valores) se este é obrigado a resolver o problema do primeiro modo? Não é esta visão contraditória com o que é enunciado no PMEB 2013, no ponto relativo à Matemática como um todo coerente?

O trabalho em torno das sequências, regularidades e sucessões surge no PMEB 2013 em três momentos: 2.º, 6.º e 7.º anos. No 2.º ano é solicitado aos alunos que estes determinem termos de uma sequência dada uma lei de formação e que conhecidos alguns termos da sequência enunciem a lei de formação. No 6.º ano, o trabalho deve ser feito em torno de sequências definidas por uma lei de formação por recorrência. No entanto, no descritor ALG6 3.3. é referida a resolução de problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida. E agora, como fazer? Para concretizar este descritor, poder-se-á fazer o estudo das sequências com uma abordagem funcional? Em caso afirmativo, este trabalho não será contraditório com a resolução de problemas encarada na perspetiva do PMEB 2013, tendo em conta que nos descritores anteriores o trabalho à volta das sequências é feito de forma recursiva? A dúvida é ainda maior quando no CA do 6.º ano não são apresentados exemplos de concretização destes descritores.

As sequências e sucessões surgem no 7.º ano depois do estudo das funções. Estas são definidas como funções de domínio $\{1, 2, 3, \ldots, N\} \in \mathbb{N}$, respetivamente. Enquanto, nos anos anteriores, as sequências são trabalhadas estabelecendo uma relação recursiva, no 7.º ano exige-se que o aluno utilize uma relação funcional entre duas variáveis (ordem e termo). Constatamos que esta mudança na abordagem não constitui um problema para os alunos dado que a determinação de termos de uma sequência ou sucessão, a partir do termo geral, já tinha sido trabalhada com o estudo das funções. No entanto, do nosso conhecimento profissional, decorrente da nossa experiência, e do conhecimento resultante da investigação sobre o tema, podemos afirmar que o tratamento deste tema fica aquém das suas potencialidades em termos de atividade matemática. Verifica-se o que é pedido ao aluno neste subdomínio é de um nível cognitivo baixo, pois os descritores iniciam-se pelo verbo identificar. Se por um lado, com este trabalho a estrutura algébrica é evidenciada, mesmo que possa ser sem compreensão por parte do aluno, por outro, processos de nível cognitivo elevado, tais como a abstração e a generalização, são esquecidos no quotidiano da sala de aula. Estes processos não são apenas característicos do pensamento algébrico, estendem-se também a outros domínios da matemática, pelo que ao não serem privilegiados no tratamento de sequências e sucessões, ficam comprometidas a apropriação e a capacidade de utilização desses mesmos processos noutros contextos pelos alunos.

Um constrangimento com que nos deparamos, diretamente relacionado com o estudo das sequências e sucessões, surgiu no trabalho em sala de aula em torno das funções no 7.º ano. Pois, para a concretização dos descritores FSS7 2.6. e 2.7. é necessário que o aluno já domine as operações com expressões algébricas, sendo que este trabalho ainda não foi feito aquando da lecionação das funções, nem está previsto que se faça no contexto das sequências e regularidades nos ciclos anteriores. Voltando um pouco atrás, as expressões algébricas surgem no 5.º ano, em que é exigido ao aluno a tradução em linguagem simbólica de enunciados matemáticos expressos em linguagem natural e vice-versa. Espera-se que o aluno utilize toda uma linguagem simbólica, que se lhe apresenta como abstrata e complexa, na ausência de um contexto e de um significado. De facto, pela nossa experiência em sala de aula, o aluno só recorre à simbologia própria da Matemática quando lhe atribui significado e quando lhe reconhece vantagens. Neste caso, o que fazer? Como fazer com que os alunos aprendam a manipular expressões algébricas, com significado, quando não foi feito um trabalho de preparação?

Na nossa opinião, o estudo das sequências, regularidades e sucessões, em torno de atividades onde se estabelecem relações funcionais, é propício para o desenvolvimento de destrezas de cálculo algébrico e de um modo mais abrangente do pensamento algébrico. Por exemplo, quando, conhecidos alguns termos da sequência ou sucessão, se solicita ao aluno a determinação de um termo longínquo e quando se lhe solicita que estabeleça uma relação entre a ordem e o termo correspondente, assim como quando se lhe solicita a lei de formação e o termo geral, estão criadas as condições para que o aluno atribua significado às expressões algébricas, às operações nelas envolvidas, assim como aos procedimentos algébricos envolvidos na simplificação de uma expressão algébrica.

Este novo (grande) desafio, que é a implementação do PMEB 2013, tem-nos gerado muitas ansiedades e dúvidas em vários domínios. Refletir sobre os constrangimentos é um ponto de partida, mas depois.... O que fazer?

Alexandra Rocha
Escola Secundária de S. Pedro da Cova

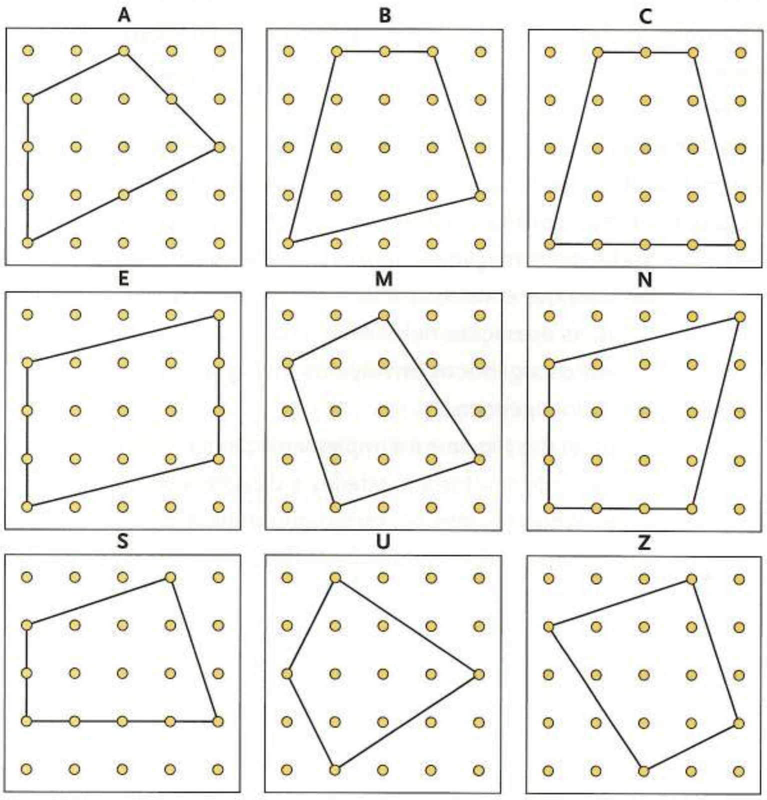
Cristina Natália da Fonseca
Agrupamento de Escolas de Valongo

Famílias, repetidos e intrusos

A tarefa que vamos discutir (divulgada na E&M anterior, n.º 126) foi trabalhada numa sessão de formação com professores dos 2.º e 3.º ciclos, aproveitando, assim, esta discussão muito contributos destes professores.

São objetivos da primeira parte da tarefa: agrupar quadriláteros a partir de propriedades comuns; construir o conceito de classe; definir classes de quadriláteros; desenvolver o raciocínio visual. A tarefa apresentada tem também uma parte relativa a perímetros e áreas que discutiremos em outros momentos.

São objetivos ambiciosos, mas estão muito interligados e a forma como a tarefa está organizada torna-os mais acessíveis. A natureza exploratória da tarefa, partindo dos conhecimentos dos alunos, permite realizar discussões muito interessantes baseadas nas diferentes conclusões a que irão chegar. A tarefa deve ser resolvida sem o recurso a uma régua para que não haja a tentação de medir comprimentos. É importante que os raciocínios sejam geométricos e de base visual, aproveitando as caraterísticas da rede ponteada ortonormada que sustenta os quadriláteros. A limitação da rede, a que dá jeito chamar geoplano de 5 por 5, ajuda a ter figuras equilibradas e a trabalhar num universo mais restrito.



As questões colocados como ponto de partida são: 1. *Há algum quadrilátero repetido?* 2. *Há intrusos no grupo de quadriláteros?* 3. *Carateriza a família de quadriláteros que consideraste.* 4. *Acrescenta mais algum exemplar que aches que deve pertencer à família que escolhestes.*

A *questão 1* e a existência de pelo menos duas figuras repetidas foi considerada importante pelos professores porque permite abrir a discussão da congruência de figuras. A sensibilidade e atenção à congruência é fundamental em todo o trabalho na geometria. Neste caso M e Z são os quadriláteros repetidos. Por isso a discussão que vamos fazer a seguir será apenas com base em 8 figuras.

A *questão 2,* sobre a existência de intrusos, obriga a olhar para os quadriláteros todos e a evidenciar alguma propriedade que permita compará-los e agrupá-los. É aqui que está a abertura da tarefa e que lhe confere a natureza exploratória.

Como afirmamos na nota anterior, pessoas diferentes vão ser sensíveis e identificar relações diferentes, a discussão surge naturalmente a partir das ideias que cada um vai ter que defender. O que está em jogo não é o certo ou errado, mas sim o que cada um vê, como defende e o modo como o verbaliza. Por essa razão as questões 3 e 4 são indissociáveis da questão 2.

É importante registar que consideramos como intrusos de uma família os elementos que não verifiquem a propriedade que carateriza essa família. O número de intrusos no conjunto dado pode ser superior aos dos membros da família presentes. O tipo de raciocínio que está em jogo é inerente a uma relação do tipo «se ..., então», isto é, se considerarmos uma determinada propriedade caraterística da família, os quadriláteros que não a verificam são os intrusos.

Família 1 — B, C, E, M, N, S e U. É intruso A.

Pode haver quem defenda que não há nenhum intruso pois este quadrilátero, se estivesse representado em fundo branco, passaria facilmente como elemento da família. A família é constituída por todos os quadriláteros que têm pelo menos um par de lados iguais. Neste caso, para além de construir mais quadriláteros com esta propriedade é desafiante obter mais alguns que a não tenham.

Família 2 — B, C, M e S. São intrusos A, E, N e U.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm apenas um par de lados iguais.

Família 3 — E, N e U. São intrusos A, B, C, M e S.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm dois pares de lados iguais.

Família 4 — A, C, E. São intrusos B, M, N, S e U. Um deles, o M, se estivesse representado em fundo branco passaria muito bem por elemento da família.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm pelo menos um par de lados paralelos.

Se quisermos podemos restringir esta família e considerar os quadriláteros que têm apenas dois pares de lados paralelos. Neste caso ficaria solitário o quadrilátero E como representante da família.

Família 5 — M, N e S. São intrusos A, B, C, E, e U.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm pelo menos um ângulo reto. Esta família também pode dar origem a uma outra, constituída por quadriláteros com exatamente 2 ângulos retos, neste caso pertence-lhe o quadrilátero S. Nos intrusos há ângulos quase retos que é interessante analisar.

Família 6 — C, N e U. São intrusos A, B, E, M e S.

A família é constituída por todos os quadriláteros que têm um eixo de simetria. Neste caso haverá a discussão sobre se A e E serão ou não intrusos. O quadrilátero A porque visualmente dá a ilusão de que é um trapézio isósceles e o E porque, embora errado, é comum identificar em paralelogramos a existência de eixos de simetria. E fica a abertura para a discussão sobre se haverá quadriláteros com mais eixos de simetria, abrindo assim a possibilidade para aparecerem quadrados e outros retângulos que, propositadamente, foram excluídos do conjunto inicial de 9 quadriláteros que permitiu despoletar toda esta discussão.

Além destas 6 famílias é possível definir ainda outras recorrendo, por exemplo, à complementaridade de conjuntos e à negação de condições: não têm nenhum par de lados paralelos, não têm nenhum par de lados iguais, não têm nenhum ângulo reto. Alguém mais sofisticado poderá avançar para a análise das diagonais, mas como não estão representadas, não têm força visual e é natural que isso não ocorra. É interessante analisar que há elementos que podem pertencer a mais do que uma família e que uma família pode estar incluída noutra, ideias que são preparatórias da compreensão do que é uma classificação hierárquica.

Os 9 quadriláteros dados respeitam a condição de terem os vértices na fronteira do ponteado. Embora esta condição não deva ser usada como caraterística de uma família, pode ser exigida para limitar o conjunto das figuras com que queremos trabalhar.

A diversidade de resultados da tarefa, as discussões que vai permitir realizar, os conceitos que permite trabalhar, bem como as perspetivas que abre em termos de continuidade, levam-nos a considerar um grande potencial na utilização desta tarefa para trabalhar sobre quadriláteros. Perspetivamos por isso outras tarefas para trabalhar a classificação hierárquica de quadriláteros. Fica registado já um agradecimento especial aos professores que participaram nesta formação e que estão a experimentar esta tarefa com os seus alunos.

O MPT um ano depois...

Passado um ano após a abertura oficial do Ano da Matemática do Planeta Terra 2013, o que se destacou? O que significou a participação portuguesa neste projecto à escala mundial? Terá ele chegado aos diferentes públicos? E depois de 2013, o que será a Matemática do Planeta Terra? A E&M[1] foi conhecer a opinião de Carlota Simões (CS), coordenadora nacional do Matemática do Planeta Terra, sobre esta temática. Carlota Simões é professora no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e vice-directora do Museu da Ciência da mesma Universidade. O gosto pela aplicabilidade da Matemática em contextos do quotidiano aproximou-a da divulgação matemática onde tem desenvolvido um trabalho notável com propostas para o público mais jovem e no estabelecimento de conexões entre a música e a matemática (e.g. E&M 126, pp 23–33).

EM: O dia 5 de Março de 2013 assinalou a abertura oficial do ano da Matemática do Planeta Terra 2013, em Paris, na sede da UNESCO. Portugal assinalou este dia com uma iniciativa no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa. Na sua opinião, qual a mais-valia da participação de Portugal neste projecto?

CS: O objectivo do Ano Internacional da Matemática do Planeta Terra (MPT) era o de incentivar a investigação, a educação, a divulgação e a cooperação em áreas interdisciplinares relacionadas com a Matemática e o Planeta Terra. As instituições portuguesas que foram parceiras internacionais do MPT responderam da melhor forma, desenvolvendo actividades de grande qualidade nas quatro frentes, que tiveram grande impacto no público também graças aos *media partners* do MPT. Talvez a maior conquista da participação de Portugal neste projecto tenha sido a criação de parcerias, não só entre instituições nacionais, mas também com outros países. E estas parcerias são para continuar.

EM: O MPT2013 contou com seis instituições portuguesas inscritas no projecto internacional, além de muitas outras instituições apoiarem iniciativas pontuais da programação. O que faz a coordenadora nacional do Matemática do Planeta Terra?

CS: Como a própria palavra indica, uma coordenadora coordena, ou seja, cria, recebe e distribui ideias. A equipa é enorme, e trabalha em rede. Usando linguagem matemática, mais concretamente da teoria de grafos, cada entidade funciona como um nó, e os nós estão ligados por arestas, as parcerias. Cada aresta melhora as ideias que recebe do nó anterior, amplificando-as para o nó seguinte. E, deste modo, todos juntos, em rede, fazem as ideias acontecer.

EM: A programação do MPT promoveu mais de 200 iniciativas que decorreram durante 2013. Destaque-nos quatro dessas iniciativas, explicando o motivo da sua escolha.

CS: A escolha é difícil, por isso vou estabelecer um critério, escolhendo apenas entre as iniciativas que atravessaram as nossas fronteiras, para a lista ficar mais curta.

No que diz respeito à investigação, as duas conferências promovidas pelo Centro Internacional de Matemática (CIM) na Gulbenkian, em Março e em Setembro, foram pontos altos do MPT, reunindo investigadores internacionais de topo, cujos trabalhos têm tido grande impacto no progresso das ciências. Estas conferências serviram de impulso para a criação da colecção *CIM Series in Mathematical Sciences*, uma parceria Springer e CIM. O primeiro livro será baseado na primeira conferência Gulbenkian, «Mathematics of Energy and Climate Change»[2].

Quanto à cooperação, há que felicitar toda a equipa que conseguiu preparar, desenvolver e pôr em prática a iniciativa *ECLIPSE 2013: História e Ciência no Príncipe*, que aproveitou exemplarmente a feliz coincidência que foi haver um eclipse do Sol na ilha do Príncipe em 2013, e saber usá-lo para recordar o histórico eclipse de 1919, também na ilha do Príncipe, e que permitiu validar a teoria da relatividade de Einstein[3].

Como exemplo de uma actividade em ambiente escolar, a iniciativa *Bons raios te meçam* repetiu a experiência realizada pela primeira vez por Eratóstenes há mais de dois milénios. Analisando a sombra de objectos em dois lugares diferentes, ao meio dia solar, e juntando alguma matemática, Eratóstenes foi o primeiro a apresentar um valor para o raio da Terra, mostrando deste modo ser possível medir o raio da Terra usando os raios solares. Esta iniciativa tem sido feita em simultâneo com parceiros de diversos países, assinalando os solstícios e os equinócios de 2013 e de 2014 [4].

A iniciativa mais mediática foi sem dúvida a *Matemática das calçadas portuguesas*, que faz parte de um projecto a que chamámos Matemática Urbana. Foram organizados passeios, foram produzidos roteiros junto de diversas câmaras municipais, tanto no Continente como nas Ilhas. A Matemática das Calçadas vai continuar em 2014, agora em parceria com o Ano da Cristalografia. E já estamos em contacto com o Rio de Janeiro com o objectivo de levar a matemática das calçadas ao outro lado do Atlântico[5].

EM: O público-alvo deste projecto incidiu em investigadores, público escolar, bem como público em geral. Na sua opinião o MPT chegou às nossas escolas, aos nossos alunos, aos portugueses?

CS: Neste tipo de projectos, quem os organiza acredita ter chegado a todo o lado, mas a realidade pode ser diferente. Uma resposta correcta a esta pergunta precisava de um levantamento exaustivo, seguido de um tratamento estatístico. Há no entanto alguns indicadores que nos fazem ficar optimistas em relação ao impacto do MPT, como sejam o número de entidades representadas[6], o número de notícias em jornais, na rádio e na televisão[7], o número de amigos no *Facebook*[8], o número de participantes no concurso «Matemática e Calçada Portuguesa»[9] ou mesmo a diversidade de países (14 países, de quase todos os continentes: Europa, Ásia, Austrália, América do Sul e América do Norte) de onde nos foram enviadas cartas no âmbito do desafio *Mail Art — Matemática do Planeta Terra*[10].

EM: *Beyond* 2013. Em Dezembro de 2013 foi anunciado num comunicado de imprensa que findo 2013 o MPE continuaria. O MPT em Portugal aliou-se a mais este desafio[11]. O que podem os professores, os alunos e o público em geral esperar do MPT depois de 2013? Quais são os desafios a que o MPT se propõe?

CS: Um dos objectivos do comité da Matemática do Planeta Terra passa por divulgar os recursos didácticos que estão disponíveis online no *site* oficial[12], associando-os ao Centro de Formação em Ciências Fundamentais da UNESCO[13]. Está ainda em criação o Espaço Matemático Lusófono do ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*), por iniciativa dos delegados do ICMI de Portugal e do Brasil, que o comité do MPT vai apoiar. No seguimento das parcerias que estão a ser estabelecidas com países de língua oficial portuguesa, estamos a desenvolver o projecto *Jogos Matemáticos da Lusofonia*, no sentido de recuperar e redescobrir jogos matemáticos tradicionais em países lusófonos.

Em 2014 celebra-se o Ano Internacional da Cristalografia e o Comité Português da Matemática do Planeta Terra já está a colaborar na programação, conjuntamente com a Comissão Nacional da UNESCO e o Comité Português para o Programa Internacional de Geociências da UNESCO, em particular e a título de exemplo, promovendo o projecto *cristais e minerais na reserva da biosfera do Príncipe* e continuando a promover a *Matemática da calçada portuguesa*, agora também além-fronteiras.

Notas

[1] Esta entrevista foi conduzida por Joana Latas, editora da secção *Matemática no Planeta Terra* da Educação & Matemática. Por opção dos autores não se seguem as regras do novo acordo ortográfico.

[2] http://www.springer.com/about+springer/media/pressreleases?SGWID=0-11002-6-1397143-0

[3] http://www.mat.uc.pt/mpt2013/eclipse-2013.html

[4] http://www.mat.uc.pt/mpt2013/bons-raios-te-mecam.html

[5] http://www.mat.uc.pt/mpt2013/matematica-urbana.html

[6] http://www.mat.uc.pt/mpt2013/comissao-de-entidades-representadas.html

[7] http://www.mat.uc.pt/mpt2013/imprensa.html

[8] https://www.facebook.com/MatematicaDoPlanetaTerra

[9] https://www.facebook.com/media/set/?set=a.373634256114142.1073741885.252434501567452&type=3

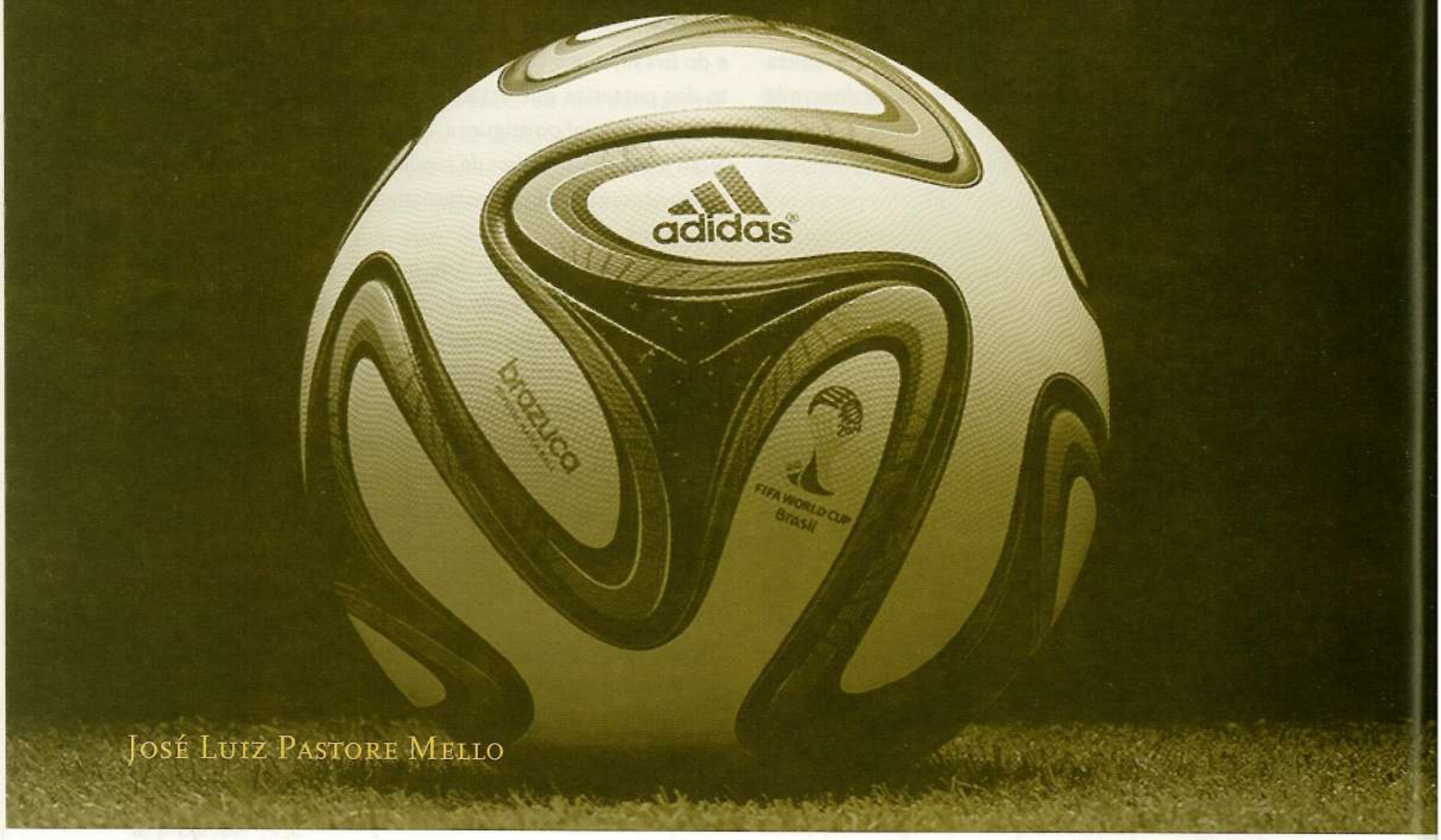
[10] https://www.facebook.com/media/set/?set=a.292425970901638.1073741854.252434501567452&type=3

[11] http://www.mat.uc.pt/mpt2013/beyond-2013.html

[12] http://www.mpt2013.pt

[13] http://www.portugal.gov.pt/pt/os-ministerios/ministerio-da-educacao-e-ciencia/mantenha-se-atualizado/20131110-mec-unesco.aspx

Jabulani × Brazuca: uma mudança de natureza matemática



José Luiz Pastore Mello

Jabulani, a bola da última Copa do Mundo, conseguiu uma proeza inédita: foi criticada por quase todos os jogadores de futebol profissional. Excetuando os jogadores patrocinados pela Adidas que, por razões óbvias, não se juntaram ao coro, os que quiseram se manifestar sentaram-lhe o couro[1]. E olha que nem mais de couro são feitas as bolas profissionais.

A história da bola de futebol moderna começa na copa do mundo de 1970 que, aliás, também marca o início de uma parceria entre FIFA e Adidas, empresa que desde então vem sendo a fornecedora oficial de bolas da entidade.

A grande novidade introduzida na bola da copa de 70, que ainda era fabricada em couro, foi sua forma. Até então os gomos externos das bolas eram feitos a partir de tiras curvas, e não de polígonos. A bola da copa de 70 foi a primeira a utilizar gomos poligonais em sua confecção. Os gomos pretos eram em forma de pentágonos regulares e os brancos de hexágonos regulares. A bola lembrava a imagem de um satélite norte-americano lançado em 1962, cujo nome acabou servindo de inspiração para a primeira bola de copa do mundo a ganhar um nome especial de batismo: Telstar. (Figura 1)

Bola da Copa de Inglaterra (1966) 24 gomos curvos

Bola Telstar Copa do México (1970) 32 gomos poligonais

Satélite Telstar, lançado em 1962 Forma «esférica» com placas retangulares

Figura 1

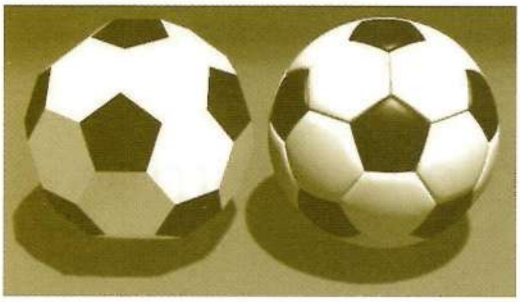


Figura 2. Icosaedro truncado ao lado de uma bola moderna de futebol

Icosaedro regular
20 faces triangulares

Icosaedro truncado
12 faces pentagonais e
20 hexagonais

Figura 3

A escolha do nome Telstar foi uma grande jogada de *marketing* já que a imagem do satélite remetia diretamente à da bola. Sorte da Adidas não ter pedido a um matemático que escolhesse o nome da bola, senão a coitada provavelmente seria chamada de Icosaedro Truncado, que é o nome do poliedro formado por pentágonos e hexágonos regulares. Infle um icosaedro truncado e você terá uma bola como aquela tão bem tratada pelo escrete[2] brasileiro de 70. (Figura 2)

O icosaedro regular é um conhecido poliedro convexo de 20 faces triangulares regulares. Seu primo próximo, o icosaedro truncado, é um poliedro convexo obtido após fazermos «cortes» nos vértices do icosaedro regular. Poliedros cujas faces regulares são de mais de um tipo, como é o caso icosaedro truncado que possui 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, recebem o nome de sólidos de Arquimedes. (Figura 3)

Da copa de 1970 até a de 2002, no Japão e na Coreia, a bola passou por mudanças sintéticas e estéticas. Em 1982 o couro da bola, que retinha muita água em jogos com chuva tornando-a demasiadamente pesada para ser cabeceada, foi substituído por uma mistura de couro e material sintético. Logo na copa seguinte, no México em 1986, a bola passa a ser confeccionada em material 100% sintético, o que apontou para um caminho sem volta na escolha do material usado na fabricação das bolas profissionais. Curiosamente foram 32 anos de bolas feitas a partir do «gabarito» de um icosaedro truncado, que é um poliedro de 32 faces, até que na copa de 2006, na Alemanha, a superfície externa da bola mudou radicalmente por meio do recobrimento de 14 gomos curvos. A superfície externa da nova bola nasceu sob a égide da pesquisa científica tendo sido concebida em estudos na Universidade de Loughborough. De acordo com o que se anunciava na época, a nova bola era «mais redonda», precisa e consistente do que qualquer outra bola concebida anteriormente. (Figura 4)

Quatro anos depois entra em ação, na África do Sul, a Jabulani. A bola, que era anunciada como detentora da melhor aerodinâmica dentre todas as antecessoras, não demorou para virar motivo de chacota entre os jogadores. Inúmeros vídeos começaram a circular na internet mostrando a grande predileção da Jabulani aos desvios de trajetória. O mistério de sua trajetória irregular chegou até a ser investigado em túneis de vento da NASA, porém, o veredito final nunca veio a público. Como estratégia publicitária de divulgação da alta tecnologia envolvida no processo de fabricação da Jabulani, a Adidas divulgou um vídeo[3] que imediatamente colocou uma pulga atrás da orelha dos matemáticos de plantão (figura 5). Nas imagens da fabricação da Jabulani percebia-se com clareza que seu interior era recheado por um dodecaedro regular, que é um poliedro de 12 faces pentagonais. Na ocasião, a imprensa comentava muito sobre a relação entre a trajetória irregular da Jabulani e sua superfície externa de 8 gomos, porém, nada

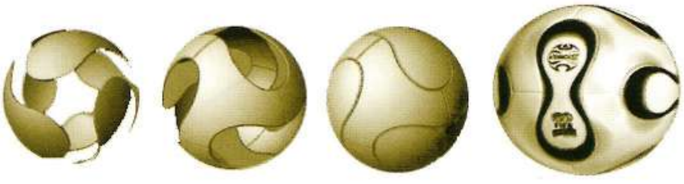
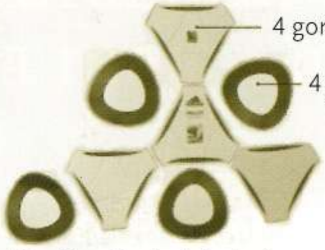


Figura 4. +Teamgeist, a bola oficial da Copa da Alemanha (2006) com seus 14 gomos



Planificação da Jabulani

Figura 5

se dizia a respeito da maior novidade dessa bola do ponto de vista matemático, que era a mudança no seu «esqueleto» com a troca do icosaedro truncado por um dodecaedro. Quando inflado, o dodecaedro regular, que é o «gabarito» da parte interna da Jabulani, é menos esférico do que o de uma bola tradicional (icosaedro truncado), e isso por uma razão de ordem geométrica: o «ângulo de folga» na planificação do vértice poliédrico de um dodecaedro regular é maior do que o de um icosaedro truncado. (Figura 6)

Mais quatro anos e nasce a Brazuca, a bola da Copa do Mundo do Brasil, que veio ao mundo com a promessa de não decepcionar os jogadores profissionais. Segundo informações da FIFA, a bola foi pré testada e aprovada por jogadores como Messi, Zidane e Casillas, todos atletas patrocinados pela Adidas. A Brazuca tem a mesma circunferência da Jabulani (69 cm), e pesa apenas 3 gramas a menos (437 g) e, portanto, não são nessas informações técnicas que devemos procurar a diferença entre elas. Com apenas 6 gomos idênticos, é uma bola minimalista em sua superfície externa e surge dando garantias de melhor aderência, toque e aerodinâmica no gramado. Aos matemáticos, mais interessados no «recheio» da Brazuca do que propriamente nos seus gomos externos, a grande expectativa ficou por conta da divulgação do vídeo[4] de fabricação da bola. Nesse exato instante tenho aqui em minhas mãos uma Brazuca que, pela curiosidade científica, seria esquartejada por um estilete não fosse o vídeo que a Adidas acaba de divulgar na internet do processo de fabricação da bola. Que bom, pouparei 400 reais[5], que é o preço da bola no Brasil.

No vídeo percebemos com clareza que a Adidas trocou a alma interna «dodecaedrica» da Jabulani por um balão formado por fusos esféricos, que por sua vez foi recoberto por tiras adesivas. Curiosamente o balão recoberto lembra muito a superfície externa da bola da Copa de 1966, na Inglaterra. Os supersticiosos de plantão talvez digam: - mau presságio para a seleção canarinho[6]. Eu, como matemático, tendo a achar que se trata apenas de um acerto de contas com as leis da aerodinâmica.

Notas

[1] «Sentar o couro» ou «tirar o couro» é uma expressão informal usada no Brasil com o significado de falar mal de alguém ou de alguma coisa.

[2] Seleção brasileira.

[3] Vídeo de fabricação da Jabulani (consultado em 11/12/2013) http://www.youtube.com/watch?v=zbLjk4OTRdI

[4] Vídeo de fabricação da Brazuca (consultado em 11/12/2013) http://www.youtube.com/watch?v=LUaOwqrdiCI

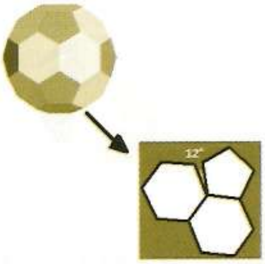
[5] Aproximadamente 125 euros.

[6] Forma carinhosa usada pelos brasileiros para se referir à sua seleção de futebol.

José Luiz Pastore Mello
Colégio Santa Cruz, em São Paulo, Brasil

Parte interna da Jabulani

Dodecaedro regular
12 faces pentagonais



Bola tradicional

Icosaedro truncado 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais

Figura 6

Geometria colorida

Eduardo Veloso[1]

Tradicionalmente, as cores não intervinham em geometria, pelo menos não intervinham com «substância». Que pretendo dizer com isto?

Suponhamos que estamos no âmbito da geometria plana. Estamos assim a imaginar um plano, representado por uma folha de papel *branco*. Desenhar uma *figura* nesse plano é escolher e assinalar, com uma cor diferente — *preto*, por exemplo — esses pontos escolhidos. As cores, do plano e dos pontos escolhidos, podiam ser outras, por exemplo verde/vermelho, desde que fossem duas diferentes.

A figura 1a representa um triângulo *ABC*. O rectângulo cinzento representa o plano ilimitado. Note-se que neste triângulo os pontos assinalados são os vértices e os lados (*e não o interior*) e até poderíamos ter escolhido outra cor para os vértices — por exemplo o amarelo — e traçado a figura 1b. Poderíamos ainda ter assinalado os pontos do interior do triângulo *ABC* com um cinzento médio, e obtido a figura 1c.

Se definimos *figura plana como um conjunto (bem definido) de pontos do plano,* então estamos em presença de *duas figuras apenas:* a figura 1a e a figura 1b são geometricamente *a mesma figura,* pois os conjuntos de pontos assinalados no plano são os mesmos em qualquer dos casos. *Igualdade de figuras* quer aqui dizer, portanto, *figuras com os mesmos pontos.* Assim, encarando a cor como o estamos a fazer neste início do artigo, podemos dizer que estamos a trabalhar apenas *com uma cor,* a qual serve para distinguir do plano os pontos que formam a figura que queremos assinalar. De resto, *por este facto,* essa «cor» até podem ser várias (como no caso da figura 1c, em que são três: preto, amarelo e cinzento).

Mas quando a matemática pretende estudar as simetrias da arte decorativa, em que as figuras com mais do que uma cor abundam..., é óbvio que estes simples conceitos iniciais da geometria elementar não chegam. Que fazer?

O que é que distingue realmente um ponto de outro na geometria com apenas uma cor? Eu diria que é a *posição* dos pontos! As duas figuras 1a e 1b são *a mesma figura,* ou seja, *são formadas pelos mesmos pontos,* porque ao pintarmos o ponto *A* de preto ou vermelho, no contexto em que nos estávamos a colocar, estávamos a assinalar o mesmo ponto *A*, pois em ambas as situações *a sua posição no plano era a mesma.*

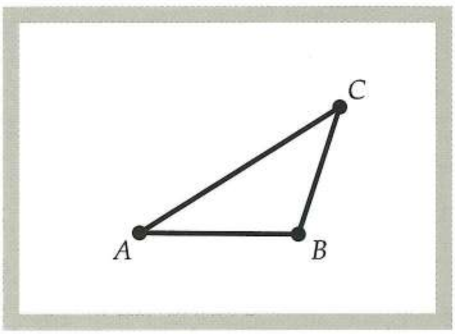


Figura 1a

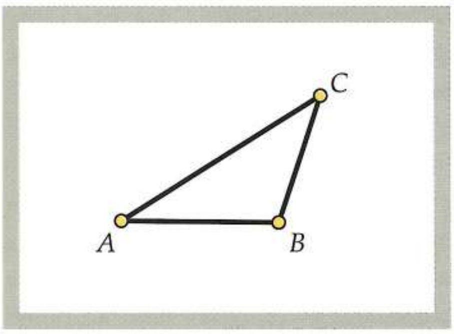


Figura 1b

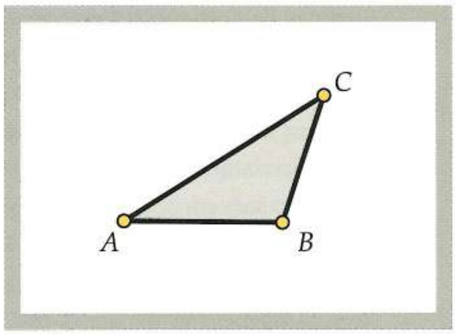


Figura 1c

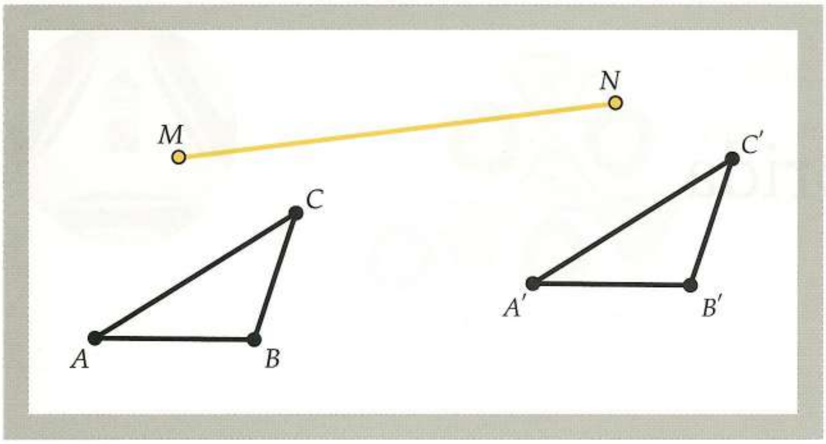


Figura 2

Mas pensemos no seguinte exemplo: um triângulo ABC, um segmento orientado MN e a imagem $A'B'C'$ de ABC pela translação definida por MN. (Figura 2)

Podemos considerar que a figura 2 é formada pelos pontos todos assinalados no plano, ou que temos aqui três figuras (um segmento e dois triângulos). Mas o que *nunca diremos* é que o triângulo ABC *é a mesma figura* que o triângulo $A'B'C'$! É evidente que os dois triângulos são *diferentes conjuntos de pontos*, e dada a nossa definição de figura estamos perante figuras diferentes... Mas não devemos chamar ignorante a alguém que diga que os dois triângulos são iguais, pois está simplesmente a definir igualdade de figuras de um modo diferente da nossa... Foi por um preconceito deste tipo que na Matemática Moderna se começou a chamar a estes dois triângulos *geometricamente iguais*, o que gerou e continuará a gerar grandes confusões, agora que nas metas isso foi ressuscitado... A solução é deixar os alunos até ao fim do 2.° ciclo, pelo menos, dizer iguais — tal como chamam iguais a dois gémeos, que no entanto não são a mesma pessoa... — e não os obrigar desde logo a dizer congruentes.

E depois, quando e se necessário, explicar a pouco e pouco por que razão devemos preferir a palavra *congruente*.

Portanto, *mesma figura* é diferente de *figuras congruentes* (ou iguais). E *congruentes* o que é? Em vez da velha ideia de Euclides da sobreposição, como já temos transformações geométricas, podemos definir duas figuras F e F' como *congruentes* (ou iguais) se existe uma *isometria* que as transforma uma na outra (como a translação no caso dos triângulos da figura 2).

Como sabemos, *isometrias* são as transformações geométricas que preservam as distâncias entre quaisquer dois pontos. Assim, voltando às cores, se os pontos A', B' e C' fossem vermelhos, não seria por isso que os dois triângulos deixariam de ser *congruentes* (ou vulgarmente *iguais*...), pois as distâncias entre os pares de vértices correspondentes dos triângulos são iguais!

Portanto, no contexto da *geometria a uma cor* em que estamos a mover-nos até agora, as isometrias não ligam à cor, pois só há uma cor realmente, é qualquer cor que assinale uma nossa escolha de um ponto no plano, o qual supostamente tem uma cor uniforme que não conta...

Figuras coloridas; primeiros passos

É óbvio que na arte decorativa não podemos ignorar as cores, e a matemática que queira analisar a arte decorativa não o pode obviamente fazer.

Está-se mesmo a ver o que são figuras coloridas e o que significa duas figuras coloridas serem iguais. Mas em matemática, quando estamos a abordar um assunto novo, devemos inicialmente ter cuidado com os termos que usamos, ser um pouco formais e apenas depois aceitar cometer abusos de linguagem. Uma linguagem muito formal é quase ilegível, e portanto, assim que sabemos com alguma certeza do que estamos a falar, podemos e devemos — sobretudo na educação básica — começar a cometer abusos de linguagem simplificadores.

Vamos considerar de início que, além da cor uniforme do plano — que será o cinzento médio —, temos apenas duas cores à nossa escolha[2]. Essas duas cores serão, pelas razões apontadas na nota 2, o preto e o branco (mas poderiam ser em teoria quaisquer duas cores diferentes). Como construímos uma figura colorida? Atribuindo a cada ponto que escolhemos para a figura uma das duas cores. Um modelo matemático para este procedimento é considerar que as cores formam um conjunto C com dois elementos — $C = \{P, B\}$ — e que colorir uma figura F (conjunto de pontos) é conceber uma aplicação Γ de F em C, que faz corresponder a cada ponto de F um elemento de C,

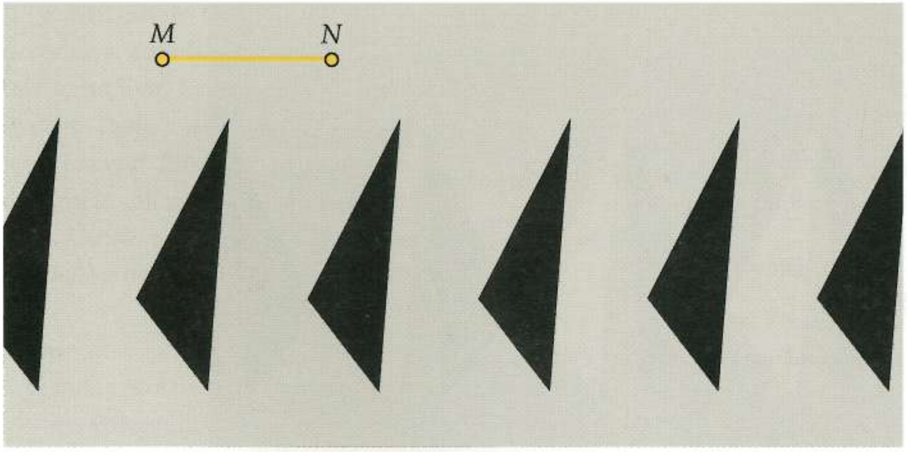


Figura 3

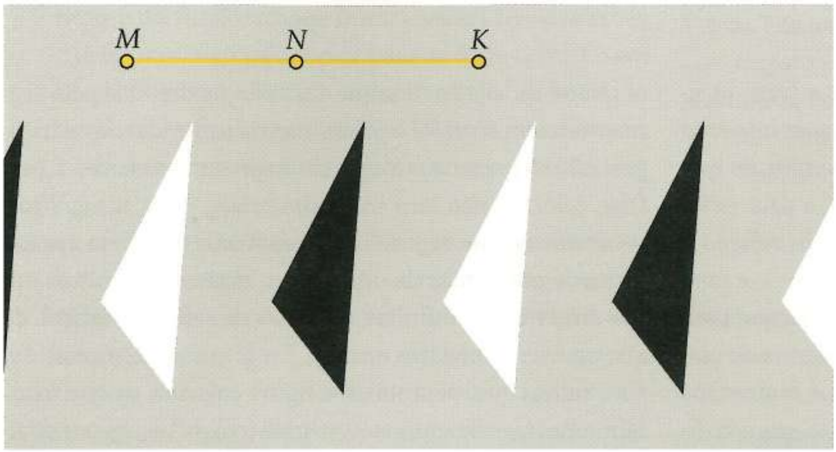


Figura 4

isto é, uma das duas cores. Assim, dado o conjunto C das cores — neste caso com dois elementos, preto e branco —, uma *figura colorida* $\mathcal{F}$ não é mais do que, um par (F, Γ) formado por uma figura F e uma aplicação Γ de F em C. O crucial é compreender como se define igualdade de duas figuras coloridas — que não pode ser, obviamente, o mesmo que a anterior igualdade de duas figuras, quando as figuras eram simples conjuntos de pontos... Consideremos então duas figuras coloridas $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, ou seja dois pares $\mathcal{F}_1 = (F_1, \Gamma_1)$ e $\mathcal{F}_2 = (F_2, \Gamma_2)$. As figuras $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ *são iguais quando os pares são iguais!* E isso quer dizer que $F_1 = F_2$ e que $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Ou seja, existe uma isometria do plano **S** que transforma F_1 em F_2, e para cada ponto $P' = \mathbf{S}(P)$ de F_2, $\Gamma_2(P') = \Gamma_1(P)$. Ou seja. em linguagem simples, pontos correspondentes em F_1 e F_2 (pela isometria **S**) têm a mesma cor. Assim, *duas figuras coloridas são iguais* quando são iguais geometricamente (existência da isometria **S**) e quando pontos correspondentes pela isometria **S** têm a mesma cor. E não voltaremos à linguagem formal a não ser que sintamos que podemos estar a escamotear alguma incorrecção com a nossa linguagem abusiva...

Frisos coloridos

Vamos estudar alguns exemplos de frisos coloridos para compreender as implicações que pode ter a cor no estudo da simetria. Mantemo-nos ainda num plano em que os pontos que queremos distinguir do fundo cinzento podem ter duas cores, preto ou branco. Consideremos a figura 3.

Embora existam duas cores disponíveis, apenas foi usada uma cor — o preto —, além do fundo cinzento do plano. Assim, esta figura estuda-se como se fosse *não colorida*. Vemos que a translação de segmento orientado MN é uma simetria da figura, tal como todas as suas potências inteiras. Portanto, trata-se de um friso[2].

Poderíamos ainda, prosseguindo a nossa análise, concluir que não existem outras simetrias (sejam de rotação, de reflexão ou de reflexão deslizante) neste friso, pelo que é do tipo *p111*. Portanto, os pontos da figura podiam ser todos pretos ou *todos de uma outra cor qualquer*, que as conclusões na geometria sem cores seriam sempre as mesmas.

Mas consideremos agora a possibilidade de colorir os pontos da figura com as duas cores, preto e branco, e imaginemos a figura 4.

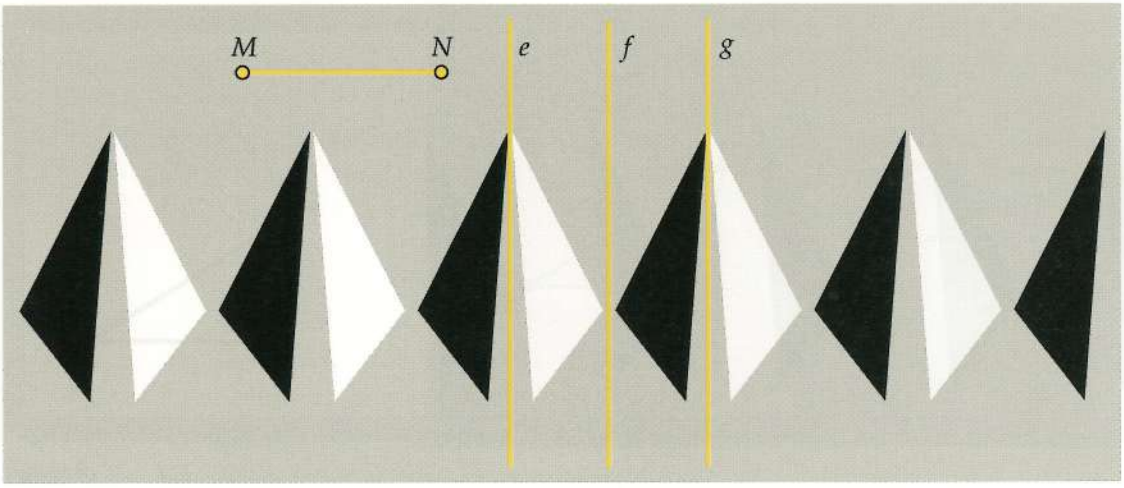


Figura 5

Neste caso, como devemos reinterpretar a frase «*sendo por definição uma simetria da figura F qualquer isometria T do plano que a deixe invariante*»? Se temos mais do que uma cor para os pontos que formam a figura, a palavra *invariante* tem que ser explicitada: invariante em relação à posição dos pontos — ou seja, à *forma* da figura — e *também em relação às cores dos pontos*, o que significa que para ser simetria de uma figura colorida, uma isometria do plano tem que *preservar as cores*. Voltando por uns momentos a uma linguagem formal, podemos dizer que, no estudo do friso $\mathcal{F}$ da figura 4 — que é uma figura colorida e portanto formalmente um par (F, Γ) — *simetria colorida de* $\mathcal{F}$ é qualquer isometria **S** do plano que verifique as seguintes condições:

- $\mathbf{S}(F) = F$, em que os pontos de F são considerados todos da mesma cor;
- Qualquer que seja o ponto P de F, $\Gamma(\mathbf{S}(P)) = \Gamma(P)$, ou seja, as cores são preservadas por **S**.[4]

Note-se que a translação definida pelo segmento orientado MN — que era uma simetria do friso da figura 3 — ***não é*** uma simetria do novo friso com duas cores, pois por exemplo o primeiro triângulo da esquerda, preto, é transformado num triângulo branco — e assim, essa translação não preserva as cores! Mas, dada o facto da cor ser repetida de dois em dois triângulos, a translação definida pelo segmento orientado MK (comprimento igual ao dobro do comprimento de MN) é uma simetria do friso colorido, pois preserva as cores.

Acompanhe-nos agora o leitor na análise do friso colorido da figura 5.

Não é difícil concluir que a translação definida pelo segmento orientado MN é uma simetria (colorida) deste friso, pois não só preserva a forma como preserva as cores. E este friso colorido não tem mais simetrias... Mas *se não ligássemos às cores*, ou seja se imaginássemos este friso apenas formado por pontos de uma só cor, então ele admitiria outras simetrias — infinitas simetrias de reflexão vertical, de que apresentamos três eixos e, f e g. como exemplos. Assim, vemos que, perante uma figura colorida, de que naturalmente investigamos as simetrias (coloridas), se por qualquer razão decidimos não ligar às cores, o número e tipo das suas simetrias pode naturalmente aumentar.

Observações finais

1. Se o conceito de simetria colorida for bem entendido, o estudo das simetrias das figuras coloridas da arte decorativo é idêntico ao que é feito para as figuras a uma só cor. A extensão para um número de cores maior do que dois não tem dificuldades do ponto de vista conceptual, embora evidentemente a pesquisa das simetrias se possa tornar mais complexa. Visite o *site* da *Associação Atractor* e utilize o DVD *Simetria*, produzido pela Atractor.

2. Do ponto de vista do ensino, o Grupo de Trabalho de Geometria entende que nos primeiros anos, em que os alunos estão a dar os primeiros passos em geometria, a introdução do conceito de simetria e o seu estudo no caso das figuras da arte decorativa — rosáceas, frisos e padrões — torna-se mais claro e produtivo se os exemplos se limitarem a figuras com apenas uma cor. Uma transição para o estudo de figuras coloridas poderá ser feito mais tarde, quando o professor entenda conveniente.

3. Um estudo muito completo sobre a simetria na arte decorativa, com figuras a uma e mais cores, pode encontrar-se no livro *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis* (ver bibliografia), Neste livro são apresentados fluxogramas completos para a classificação de figuras coloridas da arte decorativa.

4. Outras referências importantes são os livros de Maria Dedò e de Conway, referidos na bibliografia.

Notas

[1] O autor escreve segundo a ortografia anterior ao Acordo Ortográfico.

[2] O facto desta nota estar a ser escrita para a revista *E&M*, que admite apenas uma cor além do preto e branco do texto e do fundo, impõe limitações no uso das cores das figuras. Vamos adoptar para as duas cores disponíveis o preto e o branco, e supor que a cor de fundo do plano é um cinzento médio. Desta forma, ficamos ainda com uma *spot color* para outras indicações nas figuras,.

[3] Para o estudo das simetrias de figuras não coloridas, veja por exemplo o livro *Simetria e Transformações Geométricas.*

[4] Esta abordagem formal da simetria de figuras coloridas é inspirada num texto existente no *site* da *Associação Atractor* (http://www.atractor.pt). Neste site, e também no DVD *Simetria*, produzido pela mesma associação, são estudadas, com todo o desenvolvimento, as simetrias das figuras coloridas da arte decorativa.

Bibliografia

Bastos, Rita. *Sobre Simetria.* In *Notas sobre o Ensino da Geometria*, **Educação e Matemática**, n.° 88, Maio/Junho 2006.

Conway, John H., Heidi Burgiel e Chaim Goodman-Straus. *The symmetry of things.* Wellesley: A. K. Peters, Ltd., 2008.

Dedò, Maria. *Forme: simmetria e topologia.* Padova: Decibel Editrice, 1999.

Veloso, Eduardo. Simetria e Transformações Geométricas. *Textos para professores,* GTG. APM: 2012.

Washburn, Dorothy K. e Crowe, Donald W. *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis.* Seattle: University of Washington Press, 1988.

EDUARDO VELOSO

ESE POLITÉCNICO DO PORTO ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO **31 de Maio de 2014**
Escola Superior de Educação do Porto

IV Dia GeoGebra Portugal
Para além de Euclides

No próximo dia 31 de maio realizar-se-á o IV Dia do Geogebra Portugal. O encontro decorrerá na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto e conta com os apoios daquele instituto, do Centro de Investigação e Inovação em Educação da ESE/IPPorto e do Instituto Geogebra Portugal.

Sob o lema *Para além de Euclides*, esta iniciativa procurará:

- Dar a conhecer novas potencialidades do GeoGebra;
- Apresentar o GeoGebra como instrumento facilitador no ensino e na aprendizagem;
- Mostrar recursos elaborados com o apoio do GeoGebra;
- Facilitar espaços para compartir experiências sobre o uso deste programa em contexto de educação e investigação matemática;
- Fomentar a criação de grupos de trabalho de professores interessados na elaboração de recursos com o GeoGebra.

O encontro contemplará conferências plenárias, comunicações, apresentações breves e *posters*. À semelhança do ano passado, Markus Hohenwarter, o autor do Geogebra, fará uma conferência via *skype*.

As inscrições decorrem até 30 de abril, assim como a receção de propostas para comunicações e *posters*.

Mais informações em: ‹http://www.geogebra.org.pt/index.php/component/content/article/1-noticias-recentes/240-iv-dia-geogebra-portugal-para-alem-de-euclides-31-de-maio-de-2014›

Cálculo mental: é preciso relembrar?

IRENE SEGURADO, RENATA CARVALHO

Na última década, a revista *Educação & Matemática* (EM) tem publicado alguns artigos descrevendo práticas curriculares e extracurriculares envolvendo cálculo mental. Com este artigo pretendemos revisitar estas publicações.

Em 2002 no artigo «Competência matemática e competências de cálculo no 1.º ciclo» Lurdes Serrazina realça, entre outros aspetos, a importância de compreender os números e as operações, de desenvolver o sentido de número, a capacidade e a flexibilidade para calcular mentalmente e o sentido crítico para avaliar a razoabilidade de um resultado seja ele exato ou aproximado. A autora refere que o cálculo mental pode ser desenvolvido através da introdução de estratégias e de algoritmos informais delegando para mais tarde a aprendizagem de algoritmos formais que, se forem ensinados prematuramente podem bloquear o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental. Acrescenta ainda que muitas vezes o ensino das quatro operações tem sido confundido com o ensino dos algoritmos, levando a uma sobrevalorização dos procedimentos em detrimento da compreensão. Uma consequência desta prática é relembrar de forma incorreta ou esquecer procedimentos que foram memorizados, sem compreensão.

Para Serrazina (2002) desenvolver competências de cálculo exige equilíbrio e conexão entre a compreensão conceptual e a capacidade de cálculo. Assim, os alunos devem ser incentivados a desenvolver as suas estratégias de cálculo mental com números inteiros e a partilhá-las com os colegas e o professor, sendo este um ambiente de partilha propício à aprendizagem de conceitos matemáticos e ao desenvolvimento de capacidades transversais. Acrescenta ainda que «não basta aprender procedimentos, é necessário transformá-los em instrumentos pensantes» (p. 59). Como nota final, a autora reforça a ideia de que o sentido de número e de operação, bem como a capacidade e a flexibilidade no cálculo mental, devem ser desenvolvidos ao longo de todo o ensino básico.

Em 2005, Dulce Araújo e João Janeiro no artigo «Mentalmente & estima-tudo» dão a conhecer um campeonato de cálculo mental que realizaram para alunos do 9.º ano e que surgiu a partir do questionamento da própria prática dos professores tendo em conta as orientações curriculares em vigor na altura: «Que competências nele preconizadas [no Currículo Nacional do Ensino Básico] estariam na prática a ser inconscientemente mais desprezadas por nós próprios e a ser menos trabalhadas com os nossos alunos, face a outras diretamente relacionadas para cada ano de escolaridade?» (p. 18). A resposta foi simples — o cálculo mental. Para estes autores, o cálculo mental é uma competência essencial e como tal, apresentam três razões para que este e as estimativas sejam contemplados na aprendizagem curricular da matemática: tem uma importância prática, tendo em conta que na nossa vida diária a maioria dos cálculos são efetuados mentalmente e com recurso a estimativas; tem um valor pessoal e individual, uma vez que cada individuo constrói as suas estratégias; e tem valor matemático, porque é um cálculo não mecanicista com base na compreensão e na flexibilidade de cálculo de cada indivíduo orientado para a resolução de problemas. Araújo e Janeiro (2005) vêm assim, através de uma atividade extracurricular, corroborar as ideias defendidas por Serrazina (2002) e relembrar que o cálculo mental é importante e necessário.

Em 2007, ano em que é homologado um novo programa de matemática para o ensino básico, e onde o desenvolvimento do sentido de número é considerado um aspeto transversal a todo o ensino básico, João Janeiro volta a escrever sobre cálculo mental na EM partilhando «13 ideias sobre o cálculo mental». Entre as 13 ideias descritas por Janeiro (2007) está, por exemplo, que o cálculo mental mais do que ser o cálculo de cabeça deve ser entendido como um cálculo realizado com a cabeça; que deve ser um objetivo na aprendizagem da matemática; e que há relações e propriedades dos números — factos numéricos básicos — que são essenciais para o desenvolvimento desta capacidade. O autor sugere ainda algumas estratégias para o cálculo mental com números inteiros.

No mesmo ano, Sara Monteiro escreve sobre o «Desenvolvimento do cálculo mental — teste de 1 minuto» e de como este passou a ser um dos objetivos principais de uma disciplina em oferta de escola para o 7.º ano de escolaridade. Semanalmente, nesta disciplina denominada de «Matemática elementar», no início da aula os alunos realizavam testes com a duração de 1 minuto com operações elementares com números racionais (não na forma fracionária). O teste era corrigido e entregue pelo professor na aula seguinte. Da sua experiência, esta autora destaca três ideias que considera fundamentais: a importância do controlo rigoroso do tempo para que o cálculo mental não seja só o saber calcular, mas fazê-lo num período de tempo aceitável; a importância do *feedback* atempado a alunos e encarregados de educação acerca da evolução dos alunos na capacidade de cálculo mental; e o facto dos alunos encararem os «testes de 1 minuto» de forma lúdica onde a competição é saudável e promove a evolução destes ao nível das capacidades de cálculo.

Ainda em 2007, Cláudia Fialho, Isabel Rocha e Manuela Pires no artigo «Desenvolvimento do cálculo mental» defendem que o cálculo mental é uma competência de natureza prática que se desenvolve de forma sistemática e prolongada. Estas autoras consideram que existe uma grande variedade de materiais (e.g., fichas, jogos) que têm como objetivo o desenvolvimento do cálculo mental, mas chamam a atenção que, só por si, este material não ensina estratégias de cálculo. Tal como o fizeram Araújo e Janeiro (2005), estas autoras, refletindo sobre que competências estariam, inconscientemente, a ser mais desprezadas pelos professores e consequentemente menos trabalhadas com os alunos, concluíram que seriam as de cálculo mental e estimativa. Assim, Fialho, Rocha e Pires (2007), de forma a colmatar esta lacuna, decidiram promover um Campeonato de cálculo mental e estimativa para duas turmas do 9.º ano. Neste contexto, deixam-nos no seu artigo o desafio de fazermos uma análise das atividades que realizamos com os nossos alunos e pensar se as tarefas que lhes propomos, para desenvolver o cálculo mental e estimativa, são apropriadas e suficientes.

Em 2011, no artigo «Uma ‹lente› para analisar tarefas numéricas» Joana Brocardo refere existir uma grande diversidade de tarefas matemáticas sobre números que o professor pode selecionar para usar nas suas aulas. Contudo, para a autora o importante «é desenvolver uma lente» (p. 47) assente numa perspetiva global de desenvolvimento de sentido de número, que permita analisar as tarefas de acordo com as suas potencialidades e introduzir-lhe as adequações necessárias de modo a que estas estimulem mais «os alunos a usar um pensamento flexível e a *olhar para os problemas* antes de usar um algoritmo» (p. 47). Para Brocardo (2011) a escolha *intencional* dos números, embora sempre interligada à possibilidade de estabelecer teias de relações numéricas, é uma característica, essencial numa tarefa quando se tem como objetivo trabalhar o cálculo mental, aspeto que considera «de fulcral importância para desenvolver o sentido de número» (p. 50). Acrescenta ainda que é importante analisar cuidadosamente as relações entre os valores numéricos usados em cada uma das tarefas «tendo o cuidado de ir explicitamente pensando no modo de evoluir para propostas com números sucessivamente mais *exigentes* do ponto de vista do cálculo mental» (p. 51).

Ainda em 2011, num artigo em que descrevemos «Uma experiência com cálculo mental» (Carvalho & Segurado, 2011), assumimos que ensinar a calcular mentalmente não é fácil, requer tempo, persistência e um trabalho estruturado, devendo iniciar-se logo nos primeiros anos em que as crianças aprendem a trabalhar com números. Para nós e seguindo as ideias de Serrazina, (2002) a criança deve ter liberdade para calcular mentalmente sem estar presa a formalismos e é nesse processo que as estratégias de cálculo devem ser ampliadas e desenvolvidas.

Nesse artigo partilhámos uma experiência conjunta em sala de aula. Preparámos uma tarefa com dez questões de cálculo mental com números racionais não negativos na representação decimal e realizámo-la numa turma do 6.º ano de escolaridade, tendo como objetivos: partilhar e discutir estratégias de cálculo mental e erros dos alunos e produzir novos conhecimentos. Esta tarefa foi criada tendo por base possíveis estratégias de cálculo mental a que os alunos podem recorrer (e.g., Mudança de representação; decomposição de números; operar primeiro com a parte inteira e depois com a parte decimal ou vice-versa; estabelecer relações parte/todo).

A aula teve a duração aproximada de 90 minutos. Os alunos tinham de resolver primeiramente, num curto espaço de tempo e através de cálculo mental, cinco adições e subtrações com números racionais na representação decimal e seguidamente explicitarem o seu raciocínio. Após a análise dos seus raciocínios, com base na discussão com os seus pares e professora (Irene) resolveram mais cinco questões. Era pretendido que após a discussão fossem identificados e colmatados erros dos alunos. Esta experiência alterou o modo como a professora da turma passou a encarar o ensino do cálculo mental, levando-a a perceber «melhor a importância do seu ensino [do cálculo mental] pensado e programado» (p. 33). Realçamos ainda alguns aspetos desta aula, quer a nível de estratégias quer a nível de erros que são reveladores das potencialidades do cálculo mental: apropriação por parte dos alunos das potencialidades de diferentes estratégias de cálculo; tomada de consciência dos erros cometidos, por exemplo troca de décimas por centésimas; utilização indevida da propriedade comutativa na subtração, entre outras. Mais do que uma aula de cálculo mental esta foi mais uma etapa no processo de apropriação do sentido de número.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para todos os autores citados neste artigo o desenvolvimento do cálculo mental surge como um objetivo importante e que deve estar presente no currículo de Matemática. Ao longo deste artigo realçámos diversas ideias: que o cálculo mental pode ser desenvolvido recorrendo a atividades curriculares e extracurriculares, que se complementam; que deve ser um objetivo na aprendizagem da Matemática; que deve ser desenvolvido em aula de forma integrada, sistemática e regular; que contribui para o desenvolvimento do sentido de número; e que promove dinâmicas que favorecem o reforço e consolidação de aprendizagens matemáticas e de capacidades transversais.

Refletindo acerca do ensino/aprendizagem do cálculo mental no currículo de Matemática verificamos que no Programa de Matemática de 2007 o cálculo mental surge como um objetivo transversal ao ensino básico e associado ao desenvolvimento do sentido de número. Atualmente, no Programa e Metas Curriculares — Matemática ensino básico (2013), o cálculo mental deixa de ser transversal e surge referido apenas até ao 3.º ano de escolaridade. É valorizada «uma sólida proficiência no cálculo mental» (p. 6) mas como meio para atingir um único fim, a «fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos» (p. 6), aspeto que consideramos redutor tendo em conta as potencialidades do cálculo mental para a compreensão dos números, das operações e suas relações, tão importantes para o trabalho futuro no âmbito da Álgebra.

De acordo com a nossa experiência, o nosso sentir e todas as orientações internacionais cabe-nos a nós, que acreditamos nas potencialidades do cálculo mental, relembrar que o seu desenvolvimento é útil, necessário e deve continuar a ser um objetivo na aprendizagem da Matemática ao longo do ensino básico.

Referências

Araújo, D., Janeiro, J. (2005). Mentalmente & Estima-tudo — campeonato de cálculo mental e estimativa. *Educação e Matemática*, 83, 18–20.

Brocardo, J. (2011). Uma ‹lente› para analisar tarefas numéricas. *Educação e Matemática*, 115, 47–52.

Carvalho, R., Segurado, I. (2011). Uma ‹lente› para analisar tarefas numéricas. *Educação e Matemática*, 115, 31–33.

Fialho, C., Rocha, I., & Pires, M. (2007). Desenvolvimento do cálculo mental. *Educação e Matemática*, 93, 24.

Janeiro, J. (2007). 13 ideias sobre cálculo mental. *Educação e Matemática*, 93, 29.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. (retirado de http://sitio.dgidc.medu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf em 29/02/2008).

Ministério da Educação. (2013). *Programa e Metas Curriculares — matemática ensino básico*. (retirado de http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=17 em 04/09/2013).

Monteiro, S. (2007). Desenvolvimento do cálculo mental, o teste de 1 minuto. *Educação e Matemática*, 93, 26–28.

Serrazina, L. (2002). Competência Matemática e competências de cálculo no 1.º ciclo. *Educação e Matemática*, 69, 57–60.

Irene Segurado
Escola Básica 2,3 Dr. Rui Grácio

Renata Carvalho
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

I Competição Internacional GeCla. Relatos de uma experiência

Manuela Simões

Em meados do mês de abril do ano letivo passado, a Associação Atractor contactou vários professores comunicando que uma professora italiana gostaria de realizar uma atividade de intercâmbio com o GeCla, um software desenvolvido pelo Atractor e em aperfeiçoamento contínuo. Apesar de algumas hesitações iniciais, por estarmos já na reta final do ano letivo, senti que se tratava de um desafio aceitar, embora com algum receio de que eu e os alunos não conseguíssemos corresponder ao que seria esperado de nós, o que se prendia fundamentalmente com três tipos de razões:

- a minha inexperiência pessoal no uso do GeCla no trabalho com alunos e na realização de competições;
- o conhecimento dos meus alunos relativo a padrões e simetrias. Lecionava turmas de 7.° ano e como tal sabia que os alunos deveriam ter trabalhado de forma intuitiva o tema no ano anterior, mas uma vez que no 3.° ciclo ele só é lecionado no 8.° ano, não conhecia o grau de profundidade da sua preparação;
- organização da logística necessária — computadores, instalação do programa, ligações à net, etc.

Durante o ano letivo anterior, tinha participado num *Workshop* dinamizado pelo Atractor, com um grupo de colegas professores de vários pontos do país. Tal facto e o pronto apoio que o Atractor se prestou a fornecer convenceram-me que teria condições para avançar. A preocupação seguinte passou então a ser a preparação dos alunos para a atividade. Estando no final do ano letivo e tendo que ter em conta o calendário da professora italiana, restavam-me pouco mais de duas semanas.

Desafiei então alguns alunos das minhas turmas do 7.° ano cujas caraterísticas pessoais me pareciam garantir alguma possibilidade de sucesso. Para além do entusiasmo que suspeitava que a atividade, pelas suas características, poderia provocar, pretendia que o caráter matemático da atividade fosse encarado e explorado de forma séria, e não apenas como mais uma tarefa «gira» com tecnologia. Havia assim que pensar em como otimizar a preparação dos alunos em tão curto espaço de tempo. Pensei que seria bom terem o apoio de alunos mais velhos, do 8.° ano, que tivessem trabalhado nesse ano o tema das Isometrias. Assim, e dado que uma das colegas que lecionava o 8.° ano também tinha participado no Workshop do GeCla desafiei-a a acompanhar-me neste desafio escolhendo ela também um grupo de alunos da sua turma de 8.° ano. Assim foi convidado um grupo de 21 alunos — 12 do 7.° ano e 9 do 8.°, pertencentes a três turmas.

Preparação da Sala/ Local de realização da Atividade

Um dos problemas a resolver era a instalação do programa num número suficiente de computadores. Em comunicação com o Atractor e com a Paola (a professora italiana) íamos tentando perceber quais as dificuldades tecnológicas que poderíamos ter. Ao mesmo tempo o Atractor criou um documento com instruções sobre o modo de competição do GeCla, que foi sendo aperfeiçoado com os nossos contributos.

Preparação dos alunos

Calendarizaram-se as sessões de preparação que não podiam ocorrer durante as aulas de Matemática uma vez que os alunos das turmas envolvidas não estavam todos implicados. Por outro lado, para que os alunos de 8.° pudessem apoiar os mais novos, havia que trabalhar conjuntamente com o grupo todo. A competição ficou marcada para o dia 3 de junho, uma segunda feira, e foram marcadas duas sessões de preparação na semana anterior. Com tão curto espaço tornou-se essencial definir quais as competências mínimas a adquirir relativamente ao GeCla e como garantir que do ponto de vista matemático os alunos sabiam efetivamente o que andavam à procura, evitando que clicassem à toa nas figuras até que «desse certo». (Figura 1)

Na primeira sessão, de cerca de 2 horas, começou-se por explicar o que era o programa e o significado do seu nome — GeCla, gerador e classificador de padrões. Procurou-se que os alunos adquirissem os conhecimentos básicos sobre o modo de funcionamento do programa, trabalhando apenas a partir do próprio computador. Ao mesmo tempo e a partir de uma das imagens da biblioteca do programa, de uma forma muito informal, a partir das contribuições dos alunos, surgiram as noções de rotação, reflexão e translação. Ao mesmo tempo os alunos iam conhecendo as diferentes possibilidades, o papel dos carimbos e as diferentes características de alguns deles. Na parte final, ainda houve tempo para alguns alunos classificarem padrões nas imagens constantes da biblioteca do programa.

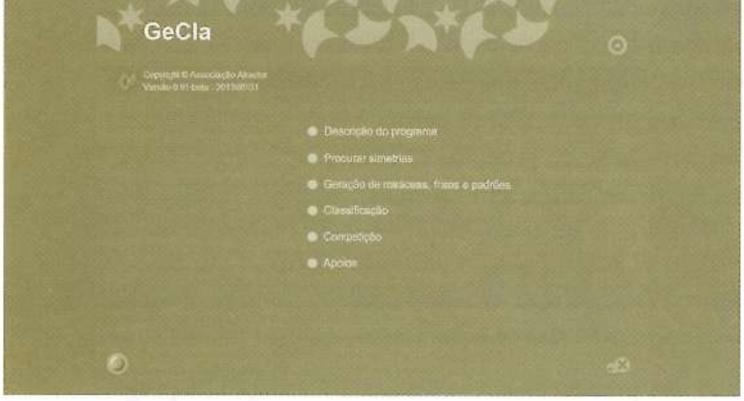


Figura 1

A segunda sessão ficou marcada para a tarde seguinte. Aos mais entusiastas, e com mais tempo, foi dado o conteúdo do DVD para que pudessem praticar. As equipas que iriam participar no intercâmbio foram então formadas.

Nesta sessão as equipas competiram entre si num mesmo computador. Aprenderam a iniciar uma competição e a definir as opções pretendidas. Para esta primeira experiência de competição optámos que cada equipa gerasse 3 padrões para a outra classificar, a partir de imagens da biblioteca do programa ou do computador que estavam a usar. Propositadamente não impusemos qualquer restrição aos carimbos a usar, uma vez que pretendíamos avaliar o grau de proficiência e as estratégias que utilizavam, quer para a criação de padrões, quer na identificação de transformações. Durante a sessão alguns comportamentos chamaram-nos a atenção. A determinada altura reparei que uma das equipas estava a construir um padrão colocando por cima da imagem um rectângulo preto opaco que escondia os pormenores que permitiriam identificar as transformações. Chamei a atenção então a todas as equipas que o objetivo era criar padrões interessantes, desafiantes é certo, mas para serem identificados e não para serem escondidos, pelo que

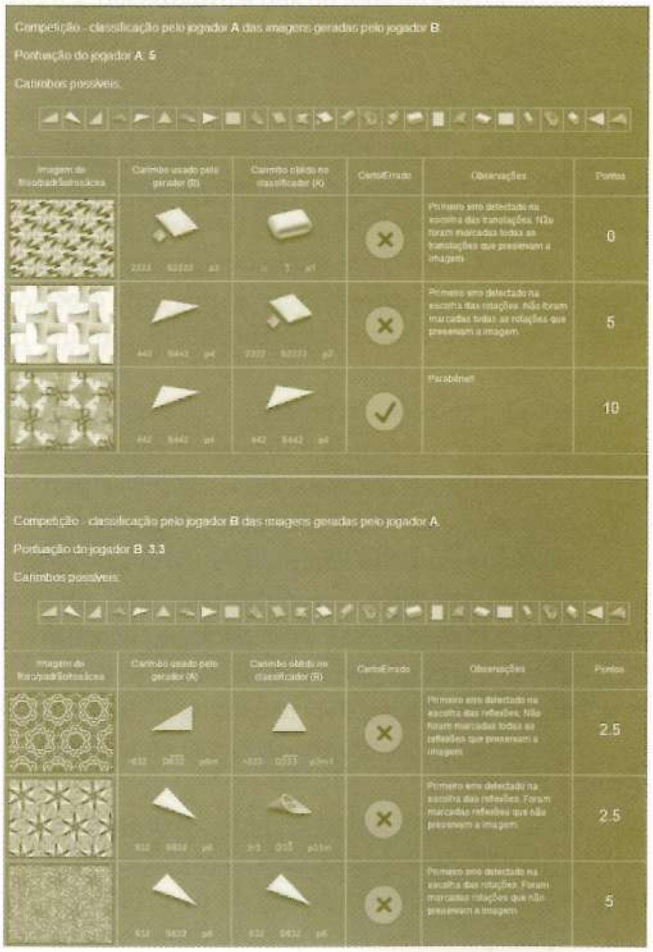


Figura 2

não aceitaria que as equipas fizessem algo desse tipo, uma vez que isso iria desvirtuar toda a atividade. Este aviso foi suficiente. Notámos que as imagens em que existiam reflexões deslizantes para identificar conduziam frequentemente a erros. Apesar de algumas equipas não mostrarem esse tipo de problema pareceu-me que seria mais indicado não incluir os carimbos que produzissem a reflexão deslizante. (Figura 2)

Refletindo sobre o trabalho realizado nesta sessão, surpreendeu-me o grande entusiasmo da maioria dos alunos, bastante mais do que aqueles que eu esperava, não apenas pelo recurso ao *software*, mas também com a possibilidade de trabalharem com alunos de outro País. Também me surpreendeu a rapidez e o à vontade com que os alunos começaram a utilizar as várias possibilidades do programa. No final dois alunos (do 7.° ano) pediram autorização para instalar a *Dropbox* nos seus computadores e recorrerem à pasta que o Atractor entretanto havia criado para a competição. Realizaram entre eles, de forma completamente autónoma, uma competição *online*. Quando passei pelos seus computadores já estavam a usar o *chat*, sem que eu lhes tivesse falado de tal ferramenta.


Internet GeCla Cup

This is to certify that *Gaia Tabacchi*, from Istituto Rosetum (Besozzo), participated in the first international GeCla competition - **Portugal vs Italy**, via Internet, organised by *Associação Atractor - Matemática Interactiva* and by *Matematita*.

3rd June 2013


Internet GeCla Cup

This is to certify that *Catarina Silva*, from Escola Dr Joaquim Gomes Ferreira Alves (Valadares), participated in the first international GeCla competition - **Portugal vs Italy**, via Internet, organised by *Associação Atractor - Matemática Interactiva* and by *Matematita*.

3rd June 2013

Figura 3

Organização da Competição

Depois de ultrapassadas as preocupações com a parte tecnológica, eu e a Paola preocupámo-nos em delinear o formato sob o qual a competição deveria ocorrer. Durante as sessões de preparação e após apreciarmos o desenvolvimento dos alunos acordámos, muito facilmente, em realizar a competição com 3 imagens — um friso, uma rosácea e um padrão (este com recurso apenas aos carimbos verdes e amarelos). De seguida, e tendo em conta alguns dos comportamentos e estratégias dos alunos, a Paola propôs realizar uma lista de regras que norteassem a competição — por exemplo, não esconder detalhes dos padrões de forma a deliberadamente impedirem o reconhecimento, distribuir tarefas entre os vários elementos das equipas, com cada um sendo responsável pela criação de uma imagem e classificação de outra.

Sendo esta a primeira vez que qualquer uma de nós realizava uma competição online em Gecla e recorrendo a vários computadores fomos ao longo da semana fazendo várias competições teste. Através delas fomos dando conta aos elementos do Atractor das dificuldades que íamos tendo e dos problemas que iam surgindo, aos quais recebemos sempre resposta pronta. Durante a competição mantivemos ligação via *Skype*. Ambas estávamos encantadas com a forma como os alunos se organizaram e participaram, recorrendo às várias potencialidades do programa. Do lado português, os 6 computadores trabalharam sempre bem e não houve problemas de ligação. No final, os alunos puderam conhecer-se via Skype. Para comemorar o evento foram criados pelas instituições envolvidas certificados a serem entregues aos participantes

A Competição

Às 8.30 de Portugal, 9.30 de Itália, de segunda-feira 3 de junho, os alunos foram chegando à sala e as equipas foram tomando o seu lugar. No início foi pedido aos alunos que refletissem primeiro sobre as imagens e não clicassem à sorte. Apesar de não ser a vitória o importante chamei a atenção para a preocupação que cada equipa deveria ter de sentir que tinha feito o melhor que sabia. As competições começaram a desenrolar-se a bom ritmo, com grande envolvimento e empenho por parte dos alunos. Todos começaram a recorrer ao chat e apesar de uma ou outra intervenção menos adequada, na maioria do tempo a interação foi adequada e muito positiva. Em termos tecnológicos tudo correu sem problemas, mesmo com 7 computadores a trabalharem simultaneamente — 6 com os alunos em competição e um para comunicação entre mim e a Paola.

Nos dias seguintes indaguei os alunos quanto à sua opinião sobre a experiência. Todos se mostraram entusiasmados, muito satisfeitos e com vontade de repetir. (Figura 3)

Conclusão e Reflexão Final

Pontos fortes da experiência

- Apesar dos receios iniciais, as questões tecnológicas foram sempre ultrapassadas com sucesso e depois da experiência realizada percebi que é realmente simples e fácil de operacionalizar. O apoio dos elementos do Atractor foi essencial;
- O entusiasmo e empenho dos alunos foi marcante. A ideia de trabalharem com alunos de outros países foi encarada como muito atrativa. O facto de terem podido comunicar uns com os outros durante a competição aumentou o sentido de proximidade e de realidade da experiência. A língua não foi uma barreira. Em italiano, espanhol ou inglês, foram conseguindo comunicar, recorrendo ao tradutor do Google se necessário;
- Não se notou qualquer diferença no desempenho dos alunos do 8.° e do 7.° ano. Aliás, houve equipas do 7.° ano muito mais cuidadosas e com mais sucesso do que as do 8.°.

Pontos a ponderar

- A instalação do programa tem de ser organizada com alguma antecedência. Pode ser necessária a licença de administrador e ultrapassar todos os procedimentos de segurança. Isso faz com que o professor não possa pensar em utilizar de um momento para o outro o GeCla. É preciso planificar e procurar que todas as instalações necessárias sejam realizadas;
- Qualquer atividade deste tipo deverá ser sempre complementada, com uma reflexão mais profunda sobre a identificação de transformações geométricas e a sua presença nos mais diversos contextos. No caso concreto desta experiência, os alunos de 7.° ano que participaram na experiência tornaram-se peças chave na partilha e apoio aos outros colegas na abordagem deste tópico no início do 8.° ano. Mostraram ter muita mais facilidade em identificar transformações, em qualquer contexto, e conseguiram com sucesso muito superior aos restantes passar a formalizar os conceitos que haviam explorado tão intuitivamente. O saldo da experiência é assim extremamente positivo e ficou a vontade de repetir.

Manuela Simões
Escola Secundária Dr. Joaquim Gomes Ferreira Alves, Vila Nova de Gaia

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

GeCla – Gerador e Classificador de Padrões

A tarefa que aqui se apresenta foi concebida para alunos do 3.° ciclo, mas facilmente pode ser adaptada a outros níveis. Para os alunos do 1.° ciclo os alunos poderão recorrer à versão do programa *GeClaMini*. O desenvolvimento requer a utilização de computadores, onde tenha sido previamente instalado o programa GeCla e tem uma duração prevista de 90 minutos.

A realização desta tarefa pressupõe um primeiro momento em que os conceitos principais sobre Isometrias serão recordados, especialmente quanto aos elementos chave a identificar em cada caso — translações, reflexões, rotações e reflexões deslizantes.

De seguida sugere que o professor faça uma apresentação breve do programa que poderá começar por, a partir do menú inicial, se explorar a opção *Procurar Simetrias*. Para esta aula o professor poderá colocar, numa pasta partilhada (intranet da escola, *dropbox* ou outro meio equivalente) ou no Ambiente de Trabalho de cada computador, imagens preparadas para estas primeiras abordagens que poderão estar arrumadas em subpastas designadas por *Para Descobrir* e *Para Classificar*.

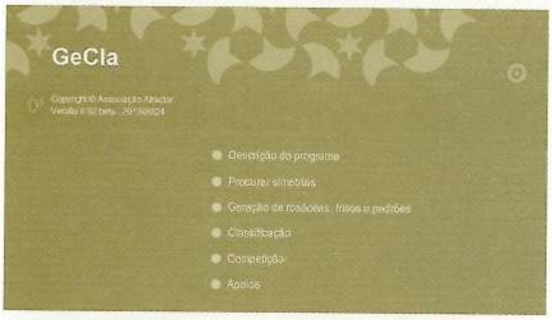
A diferença entre as opções *Procurar Simetrias* e *Classificação* é que a primeira permite que o aluno explore livremente o tipo de simetrias que poderá encontrar em cada uma das imagens.

Na segunda opção, o aluno ira descobrir de que tipo é a simetria apresentada, identificando o Carimbo que poderá gerar cada figura, seguindo a hierarquia pré-definida pelo GeCla na identificação de simetrias — translações, reflexões, rotações e reflexões deslizantes.

Para a terceira parte da tarefa, onde os alunos irão competir uns com os outros, o professor poderá criar na mesma pasta partilhada uma subpasta específica para esta fase — nesta tarefa a subpasta foi designada por *GeClaCup*.

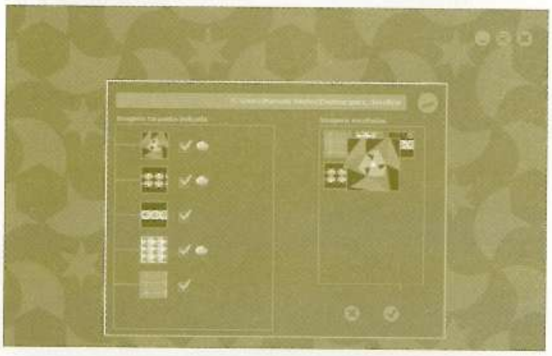
A organização da atividade dos alunos, ou as opções de número de imagens e nível poderão ser diferentes das apresentadas nesta tarefa, cabendo a cada professor ajustar essas opções as características específicas do seu grupo de alunos.

GECLA — GERADOR E CLASSIFICADOR DE PADRÕES



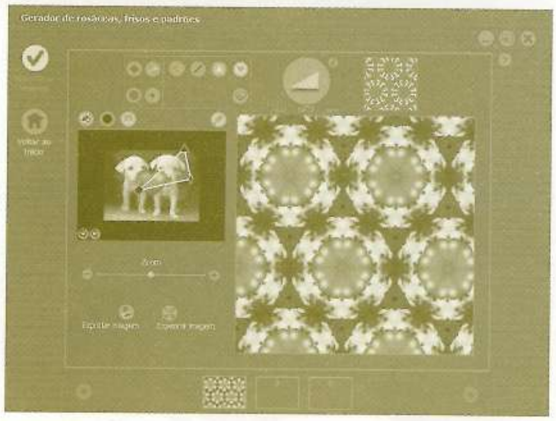
Ao clicares no *ícon* do programa aparece uma caixa de diálogo como a que se apresenta.

A partir deste menú podes utilizar o GeCla para três tipos de actividade: Descobrir (procurar simetrias; classificação); Criar e Competir



1. Descobrir Simetrias

Explora a diferença entre as opções *Procurar Simetrias* e *Classificação*. Depois de compreendida, tenta identificar qual o carimbo utilizado para criar algumas imagens colocadas na pasta PARA CLASSIFICAR no teu ambiente de trabalho. Para isso selecciona no menú principal do GeCLa: *Classificação* e acede à seguinte janela



2. Criar Simetrias

Vais agora criar as tuas próprias imagens que depois poderão ser classificadas por colegas teus. Para tal cria um padrão, uma rosácea e um friso, recorrendo às imagens do Programa ou a outras que queiras utilizar. Escolhe os carimbos próprios para cada tipo, a partir da opção: *Geração de rosáceas, frisos e padrões*. Nas opções, altera o número de imagens para 3 e o nível 15. No final, guarda cada uma das imagens.

3. Competir

A tua equipa vai agora criar uma competição desafiando outra equipa da tua turma. Cada equipa deve ter 3 elementos e cada um dos alunos deverá ser o responsável pela criação de uma imagem e classificação de outra (contando sempre com a ajuda dos seus colegas).

No menu Competição, escolhe 2 computadores; a pasta a partilhar: *Dropbox/GeClaCup*.

E clica no botão Criar Nova Competição com as opções: 3 imagens, nível 15.

E.... Boa Competição!!

Resolver problemas no Jardim de Infância — Uma experiência Algarvia

Teresa Grossmann, Luz Gago, Ana Dias, Didia Guerschman, Isabel Urbano

Uma grande descoberta resolve um grande problema mas há um grão de descoberta na solução de qualquer problema. O problema pode ser modesto; mas se desafia a curiosidade e trás à ribalta as faculdades inventivas de cada um, e a resolução pelos próprios meios, pode-se experimentar a tensão e o gosto do triunfo e da descoberta. Tal experiência numa idade suscetível pode criar o gosto pelo trabalho mental e deixar uma impressão indelével na mente e no carácter para toda a vida.

(Pólya, 1990, p. xxxi, prefácio da primeira edição, 1945)

1. Introdução

O Colégio Internacional de Vilamoura forma alunos dos dois aos dezoito anos e nele coexistem dois sistemas de ensino, o dos estudos portugueses e o dos estudos ingleses, convivendo cerca de quarenta nacionalidades. Ao desenvolvermos um currículo centrado na compreensão, o «saber pensar» surgiu como uma capacidade nuclear a ser trabalhada com os alunos. A Matemática pode contribuir de forma significativa para o desenvolvimento dessa capacidade, nomeadamente através da implementação de um trabalho com os alunos que promova a capacidade de resolver problemas. Associada à resolução de problemas está também a comunicação matemática, que é de extrema importância numa escola internacional onde os idiomas e os costumes se cruzam e a Matemática funciona como uma língua universal.

Para resolver problemas é necessário interpretar o que nos é pedido, formular questões, planear e discutir estratégias, integrar novas e criativas ideias, testar conjeturas, executar o planeado, utilizar um raciocínio lógico que conduza todo o processo e no final comunicar de forma clara não só a solução como o caminho percorrido para a alcançar. O aluno perante um problema, terá assim que recorrer a diferentes modelos interpretativos que lhe permitirão descodificar o que é pedido e construir um caminho cuja riqueza será tanto maior quanto mais variada for a sua bagagem lógica, criativa e cognitiva. Com o objetivo de promover nos alunos o gosto pela resolução de problemas e um espírito crítico, inquisidor e criativo, resolvemos desenvolver um projeto com as crianças do jardim de infância e do primeiro ciclo. Neste artigo apresentamos os aspetos mais importantes da implementação desse projeto e descrevemos o decorrer de uma sessão com um grupo de alunos de cinco anos.

2. Sobre a resolução de problemas

Como resolvem os alunos problemas? Haverá tantas respostas como alunos e cada uma delas encontra-se encerrada na mente de cada um, nem sempre sendo fácil para o próprio compreendê-la e exprimi-la com clareza de forma a ser entendida por outros.

Pólya introduziu o termo «heurísticas modernas» para descrever a arte de resolver problemas, centrou parte do seu trabalho na conceptualização da Matemática como resolução de problemas e fez desta o foco da instrução matemática (Schoenfeld, 1992). Segundo Pólya (1990) há quatro passos essenciais na resolução de problemas (figura 1). A criatividade, a curiosidade criada pelo desafio e a flexibilidade para procurar soluções alternativas são também fatores essenciais na busca da solução do problema.

Como aprender a resolver problemas?

Num artigo transcrito de uma conferência de Pólya (2002), este afirma que «a Matemática não é um desporto de espectadores. Perceber Matemática significa ser capaz de fazer Matemática » (p. 7). A resolução de problemas à semelhança das investigações matemáticas «envolve processos de raciocínio complexos e requer um elevado grau de empenho e criatividade por parte do aluno» (Ponte e Matos, 1992, p. 239). É decisiva uma atitude ativa por parte do aluno para promover o desenvolvimento do seu pensamento matemático, através da compreensão dos procedimentos e do seu significado. O trabalho com a resolução de problemas também atribui ao professor um papel exigente ao nível pedagógico, pessoal e do seu conhecimento matemático.

Sendo sempre necessário um sistema de sinais que funcione como ferramenta do pensamento (Nunes & Bryant, 1996), para resolver problemas também se tem que recorrer a representações que podem envolver materiais manipuláveis, símbolos orais ou escritos, diagramas ou gráficos.

As crianças, a Matemática e a importância da resolução de problemas.

«... as crianças precisam de aprender Matemática de forma a compreender o mundo que as rodeia. A Matemática é uma disciplina curricular, mas para as crianças, é também uma parte importante da sua vida diária.»

(Nunes & Bryant, 1996, p. 1)

A criança desenvolve o seu conhecimento matemático a partir de relações simples com base nas quais desenvolve um raciocínio lógico e eficaz (Nunes & Bryant, 1996). A compreensão matemática da criança é gradual e ela gera conhecimento matemático a partir da aprendizagem com sentido que vai fazendo da estrutura desse conhecimento. A resolução de problemas está em sintonia com a curiosidade natural das crianças e dos jovens e é apontada como um fator de desenvolvimento da autoestima e da motivação dos alunos (Kyriacou & Goulding, 2006).

3. O desenvolvimento do projeto

A importância que a resolução de problemas tem no desenvolvimento do pensamento, levou-nos a trabalhá-la com as nossas crianças, de forma sistemática mas criativa, fomentando não só o raciocínio lógico, mas também a explicitação oral do mesmo.

No ano letivo de 2011/12 implementámos um projeto piloto com alunos do jardim de infância (estudos portugueses e ingleses) a partir dos quatro anos de idade. A fase inicial envolveu as educadoras e uma professora de Matemática do ensino secundário que coordenou o projeto. Do trabalho realizado e da sua análise resultaram as orientações que a seguir se descrevem, que funcionaram como um guia da implementação mais alargada do projeto no ano letivo seguinte.

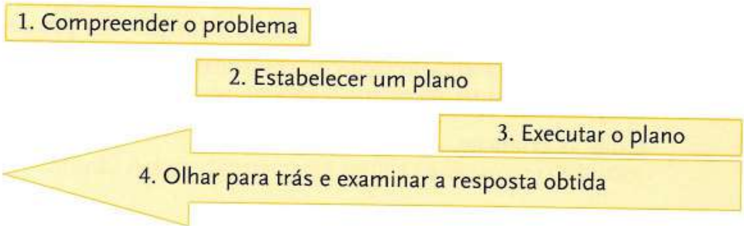


Figura 1. Esquema das heurísticas de Pólya

A formação das educadoras e auxiliares de educação

É fundamental que os adultos que vão trabalhar com os alunos compreendam o que é a resolução de problemas e assumam um papel de moderadores que intervêm o mínimo possível. As educadoras e auxiliares de educação nunca devem esquecer que «as soluções que as crianças, mesmo as mais novas, apresentam para vários problemas matemáticos, quase nunca são desprovidas de sentido mesmo que estejam muito erradas; pois frequentemente contêm elementos de um pensamento genuíno e inteligente que merece ser respeitado e deve ser encorajado.» (Nunes & Bryant, 1996, p. xv). As respostas de cada aluno devem ser aproveitadas ou como ponto de partida, ou para enriquecer a discussão do grupo na procura da sua solução. Por vezes terão que recentrar a discussão no tema, pois há alguma tendência para as crianças se dispersarem. A formação dos adultos que foram entrando no projeto consistiu na participação como observadores numa sessão e numa reflexão posterior sobre o decorrer da mesma.

A escolha dos problemas

Em cada sessão deve ser escolhido um problema desafiador e exequível, adequado ao grupo de alunos. Pode ter uma, nenhuma ou várias soluções, estar relacionado com situações do quotidiano ou apelar a cenários mais abstratos. É importante diversificar e ter presente que parte da riqueza do projeto está na discussão que se gera entre os alunos.

A preparação de cada sessão

A preparação de cada sessão é da responsabilidade da educadora que deve garantir que os restantes adultos na sessão, têm a informação necessária para realizarem um bom trabalho com os seus alunos.

As sessões deverão decorrer na parte da manhã sempre que possível, pois nesse período a capacidade e a duração da concentração dos alunos é melhor. A escolha dos materiais que vão auxiliar a representação e a resolução do problema deve ser criteriosa. Os grupos de alunos deverão ter materiais diversificados à disposição para poderem optar pelos que considerarem mais adequados à sua estratégia. Os materiais não deverão ser indicadores da resolução, mas apenas um auxiliar da mesma. A constituição dos pequenos grupos e a dinamização do seu trabalho também deve ser planeada de forma a garantir uma participação ativa de todas as crianças,

O decorrer da sessão:

1. A apresentação do problema e os passos para o resolver

No início de cada sessão serão relembrados em conjunto os passos para resolver um problema e as regras de funcionamento. Deve-se destacar a importância da contribuição de todos para a resolução do problema e do respeito pelo pensamento dos outros. Em seguida a educadora apresenta o problema aos alunos de forma a que este seja bem compreendido por todos. Nesta fase as crianças tendem a começar a dar respostas mas é importante que se concentrem na compreensão do que lhes é pedido.

2. A resolução do problema em pequenos grupos

Numa segunda fase é promovido o trabalho em pequenos grupos. No caso do jardim de infância sempre que possível deverá estar um adulto, em cada um dos grupos que se constituem para resolver o problema.

Os pequenos grupos deverão resolver o problema e preparar a apresentação das suas estratégias e da sua resolução aos colegas. As questões «como pensámos?», «como fizemos?» e «o que concluímos?» devem estar presentes no decorrer da atividade.

3. A apresentação das resoluções e a discussão em grande grupo

Por fim é promovida, de novo em grande grupo, a apresentação das várias resoluções. Pretende-se estabelecer uma discussão rica sobre as soluções encontradas, as estratégias seguidas e o caminho mais eficaz para resolver o problema em questão. No caso de não ser possível apresentar o trabalho de todos os grupos, devem ser selecionados os que são mais suscetíveis de promover a discussão.

A discussão final pode ser difícil de gerir e deverá ser adequada à faixa etária dos alunos. É no entanto uma etapa fundamental, pois por vezes só é possível verificar que a criança efetivamente compreendeu e assimilou o que fez, quando consegue transmitir de forma inteligível a sua estratégia.

No fim de cada sessão deve ser pedida aos alunos a sua opinião sobre a atividade desenvolvida.

Após a sessão

Após cada sessão todos os adultos que estiveram envolvidos, concluem sobre a adequação ou não do problema proposto e fazem uma análise da forma como a sessão decorreu e de como alguns conceitos e processos matemáticos foram utilizados.

Propor a alguns encarregados de educação que participem nas sessões como observadores, permite sensibilizar os vários elementos da comunidade escolar para a importância da resolução de problemas.

4. O desenrolar de uma sessão com alunos de cinco anos

Um dos grupos que integrou o projeto piloto com quatro anos de idade (em 2011/12) continuou no ano letivo seguinte, no pré-escolar, a resolver problemas com uma periodicidade trissemanal. Uma das sessões realizadas com esse grupo, em abril de 2013, é descrita em seguida.

O grupo era constituído por dezassete crianças e quatro adultos: duas educadoras, uma auxiliar e a coordenadora do projeto. A educadora do grupo iniciou a sessão pedindo aos alunos que a lembrassem sobre como se resolvia um problema:

Tomás: chegávamos às conclusões...
Beatriz: ...e para isso «dávamos ideias.

O alargamento desta atividade ao meio familiar também foi visível, quando o Martim pediu para levar uma cópia do problema para o pai, «porque às vezes não sei dar os dados todos».

De seguida a educadora relembrou os passos para resolver problemas. As crianças evidenciaram estar familiarizadas com as etapas a seguir, explicando cada uma delas:

Beatriz: Ver muito bem o problema.
Tomás: Perceber o problema se não, não conseguimos.
Débora: Observar muito bem os dados.
Bruno: O melhor é resolver em equipa.
Beatriz: Dar boas ideias.
Débora: Pôr mãos à obra.
Lorena: Começar a fazer o que se pensou.
Martim: Olhar para trás e ver se está tudo bem;
Gonçalo: Ver se está bem o trabalho.
João: Partilhamos as coisas que a gente faz.
Laura: Partilhamos as nossas ideias.

A educadora apresentou então o seguinte problema: «O Manuel vai festejar o seu aniversário. Faz 6 anos. Convidou os 21 meninos da sua turma. Foi comprar pizzas! Cada pizza está dividida em 4 fatias. Quantas pizzas é que o Manuel deve comprar para que cada menino receba uma fatia de pizza?». (Figura 2)

Figura 2

Após a apresentação do problema foram colocadas questões ao grupo como «quantos meninos vão à festa?» ou «em quantas fatias se divide cada pizza?» para que todos retivessem os dados iniciais.

O grupo foi depois dividido aleatoriamente em quatro pequenos grupos. Cada criança escolheu uma peça de uma cor e foi sentar-se na mesa correspondente. Os materiais à disposição foram papel, lápis de cor, cartolinas, barrinhas de *cuisenaire* e peças de encaixe. Outros materiais como cola e tesouras estão sempre disponíveis e as crianças sabem onde os ir buscar caso necessitem.

Uma vez em pequenos grupos o problema e os dados foram novamente relembrados com a ajuda do adulto presente. A partir daí a maioria dos alunos envolveu-se na resolução do problema enquanto o adulto/moderador promovia a participação de todos. As propostas de resolução foram variadas, o material utilizado foi diversificado e as crianças recorreram a diferentes representações. Num dos grupos estabeleceu-se o seguinte diálogo:

Maria: Vamos desenhar os vinte e um meninos com uma fatia de pizza na mão.
António: Desenhar vinte e um meninos demora muito tempo, vamos fazer as pizzas.
Daniel: Agora as peças são os meninos.
Maria: Então e o Manuel também come pizza?
Daniel: Assim são vinte e dois.
Francisca: Vamos dividir as pizzas em quatro!
Daniel: Como se divide? Com as barrinhas é fácil... fazemos uma cruz no círculo.
Maria: Agora damos uma fatia a cada um e contamos.

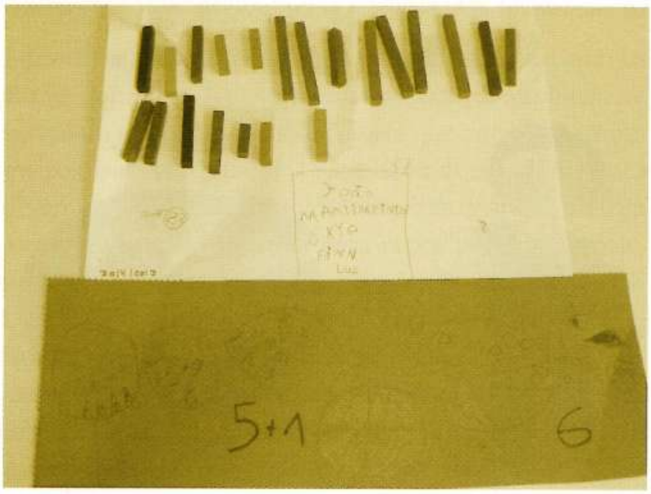


Figura 3

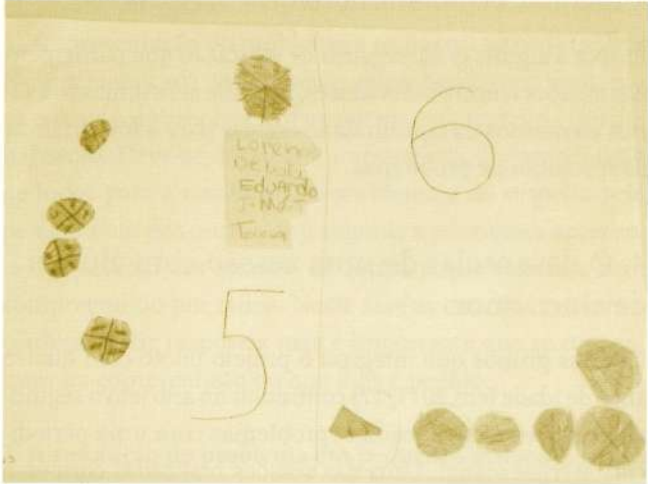


Figura 4

O grupo acaba por não considerar o Manel e conclui que precisa de cinco pizzas e de mais uma fatia da pizza seis. A dificuldade inicial da divisão de um círculo em quatro é evidenciada no desenho das primeiras pizzas nas quais «flutuam» quatro fatias. Ao introduzir a cruz o Daniel consegue dividir a pizza em quatro partes iguais. (Figura 3)

Num outro grupo dois dos alunos rapidamente concluíram que não era uma divisão exata. O Tomás começou por desenhar várias pizzas que dividiu em cinco fatias e verificou que sobravam algumas em relação às vinte e uma. Quando alertado pela professora para verificar em quantas fatias tinha dividido a pizza, refez os seus desenhos dividindo em quatro cada pizza.

Tomás: Temos um problema.

Professora: Então qual é o problema.

Tomás: Ficam fatias.

Professora: E então como vamos resolver esse problema?

Tomás: Já sei. Pedimos uma pizza maior e essa dividimos em cinco.

Professora: E se for assim de quantas pizzas precisas?

Tomás conta e responde: De quatro?

Professora: Todos concordam?

Tomás conta novamente e conclui que afinal são cinco.

Lorena que também tinha desenhado e dividido em quatro as pizzas responde: «Fica uma fatia na última pizza». Apesar de dizer que fica uma fatia a Lorena parece querer dizer que precisa de uma fatia da última pizza o que é evidenciado no seu desenho quando pinta apenas uma fatia dessa pizza.

Professora: Quantas pizzas precisas?

Lorena: Cinco e na última é só uma fatia.

Professora: E então o que vamos fazer?

Lorena: Ficam para o Manuel?

Lorena acaba por concluir que precisa de seis pizzas considerando que o aniversariante poderá ficar com as restantes fatias da sexta pizza. (Figura 4).

Neste grupo a maior dificuldade foi conseguir um trabalho conjunto. Cada elemento seguiu a sua estratégia e não foi possível conciliá-las. Apesar de todos ouvirem as propostas uns dos outros, depois... seguiram a sua.

Um outro grupo optou por desenhar os meninos e as pizzas divididas, fazendo uma correspondência entre cada menino e uma fatia de pizza (figura 5).

Este grupo incluiu o Manuel pelo que precisou de cinco pizzas e meia. No entanto escreve cinco mostrando relutância em contabilizar a meia pizza como uma inteira.

Após os grupos chegarem a uma ou a várias soluções, os seus elementos pensaram na melhor forma de apresentar o trabalho aos colegas. Escolheram quem iria apresentar o grupo, quem apresentava a estratégia e quem indicava a ou as soluções. Os vários trabalhos foram apresentados e tentou-se estabelecer uma discussão conjunta. Os grupos acabaram por dizer que precisavam de seis pizzas apesar de não comerem a última toda. Só o Tomás defendeu as cinco pizzas sendo a última maior e dividida em cinco. A educadora ainda questionou se o Tomás tinha respeitado o que era pedido, mas a hora de almoço tinha chegado e já só houve tempo para uma breve avaliação da sessão:

João: Foi fixe fazer o nosso trabalho, porque inventámos coisas giras.

Martim: No início foi difícil e depois ficou mais fácil porque o João ajudou.

Beatriz: Foi divertido. Gostei da ajuda dos outros.

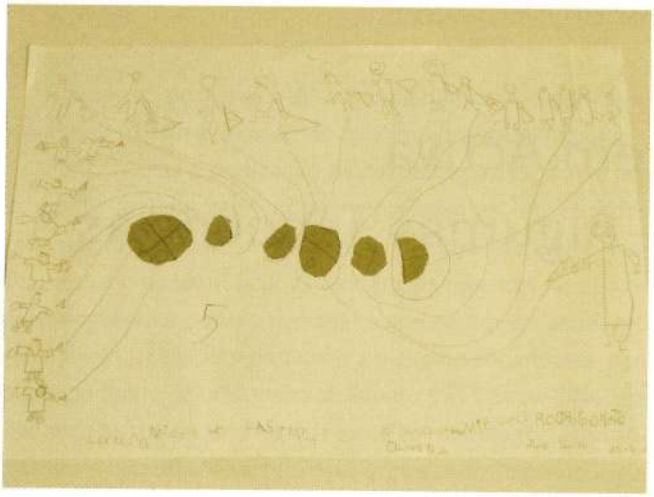


Figura 5

Joana: Eu achei que todos apresentaram a resolução do problema. Acho que fizemos um retrato da resolução do problema de maneiras diferentes.

E terminou!

Após a saída das crianças os adultos fizeram a sua avaliação. Foi consenso geral a evolução positiva deste grupo ao longo das sessões ao nível da maturidade, do comportamento, do raciocínio matemático e da criatividade.

Foram identificadas algumas dificuldades como a divisão de um circulo em quatro o que se tornou numa importante aprendizagem. A discussão final poderia ter sido mais explorada mas o tempo de concentração das crianças é limitado e tendem a centrar-se apenas no seu próprio trabalho.

Conclusões

Da avaliação das várias sessões concluiu-se que este projeto representa uma mais-valia para os alunos envolvidos. A aposta na resolução de problemas desenvolve capacidades que se refletem na atitude e no discurso das crianças.

Considerou-se que é possível implementar a partir dos quatro anos de idade uma abordagem sistemática à resolução de problemas e verificou-se ao longo das sessões uma evolução positiva na forma como os alunos resolvem os problemas e explicitam, oralmente e através de diferentes representações, a sua estratégia. Também se verificou uma crescente autonomia e uma melhoria da cooperação em grupo.

Os alunos das faixas etárias mais baixas planeiam e executam em simultâneo, o que os leva a fundir num só os passos correspondentes ao estabelecimento e à execução de um plano. A discussão conjunta tende a ser uma apresentação por parte de cada grupo, sendo difícil estabelecer uma discussão frutífera nos alunos mais novos. Esta é uma parte do projeto que deve ser mais trabalhada.

Uma boa escolha dos problemas e a preparação das sessões de trabalho revelou-se fundamental. A sintonia dos adultos que acompanham os alunos com o projeto é um fator decisivo no desenrolar das sessões para garantir a participação de todos e fomentar nos alunos o espírito de descoberta.

Recordando Costa (2010) quando escreve que «é essencial que o colégio mantenha a capacidade de se questionar continuamente e de estar aberto aos questionamentos do mundo» (p. 104), esperamos com a resolução de problemas acender nos nossos alunos a necessidade de um questionamento permanente, e a vontade de procurarem algumas respostas.

Referências

Costa, R., (2010). Uma educação para a vida. Um projecto de educação internacional no séc. XXI. Portugal: Caleidoscópio.

Kyriacou C., Goulding M. (2006) A systematic review of strategies to raise pupils' motivational effort in Key Stage 4 Mathematics. Technical Report. In: *Research Evidence in Education Library*. London: EPPI-Centre, Social Science Research Unit, Institute of Education, University of London.

Nunes T. & Bryant P. (1996). Children doing mathematics. Blackwell

Pólya, G. (2002). The goals of mathematical education. *Mathematics Teaching* 181 / December, (pp. 6–7, pp. 42–44).

Pólya, G. (1990). *How to solve it.* Penguin Books, England. (Versão original publicada em 1945).

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interaction in mathematica invstigations. In J.P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information Technologies: Research in contexts of practice* (pp. 239–254). Berlin: Springer .

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

Teresa Grossmann, Luz Gago, Ana Dias,
Didia Guerschman, Isabel Urbano
Colégio Internacional de Vilamoura

Ambientes de Aprendizagem Activa para a Educação STEM — Algumas Tendências no Uso de Tecnologias

João Fernandes, Vitor Duarte Teodoro

A aprendizagem não é necessariamente resultado do ensino. Esta afirmação poderá parecer evidente, mas as práticas dominantes no ensino de disciplinas STEM (*Science, Technology, Engineering, Mathematics*), como palestras, resolução de exercícios ou receituários de procedimentos, têm resultados pouco eficazes para os alunos e para a sua aprendizagem.

As reformas educativas nesta área propõem ambientes de aprendizagem activos, com actividades *hands-on, minds-on, hearts-on*, onde os professores recorrem a pedagogias baseadas em investigação (Handelsman *et al.*, 2004; Rocard *et al.*, 2007) e os alunos discutem, explicam e testam as suas ideias, ensinando-se mutuamente e colaborando na resolução de problemas. Para ter uma ideia geral do que se passa neste tipo de ambiente sugere-se a visualização do vídeo «Active learning classrooms» (figura 1).

Para ilustrar de forma mais concreta o que é um ambiente de aprendizagem activo no contexto das disciplinas STEM no ensino secundário, sugere-se de seguida um padrão de design de aula, tendo como referências principais o projecto Scale-Up (figura 2). Este projecto, orientado para disciplinas de 1.º ciclo do ensino superior, teve um impacte relevante na motivação e aprendizagem nas disciplinas STEM (Beichner *et al.*, 2007), sendo útil reflectir nas suas possibilidades para o ensino secundário.

O padrão de *design* proposto compreende, não necessariamente de forma linear (figura 3):

A. uma *actividade pré-aula*, que poderá ser uma leitura, recolha de informação ou outra. Nesta actividade, é pedido aos alunos que expressem as suas ideias nas suas próprias palavras ou representações, seguindo-se uma breve avaliação, p.e. um *mini-teste* de resposta rápida, de correção automática. Estas ideias e conceitos serão depois abordados durante a aula;

B. um *organizador avançado* no início da aula, constituindo um sumário da aula e ligando conhecimentos prévios dos alunos aos novos conhecimentos a abordar;

C. breves períodos de instrução intercalados com *testes conceptuais, instrução por pares* (Mazur, 1997) e *demonstrações interactivas*, não superiores a 15 minutos;

D. actividades *tangíveis* (p.e. *hands-on* com recurso a sensores e aplicações de aquisição e análise de dados);

E. actividades *ponderáveis* (*hearts-on*, com recurso a questões relevantes para os alunos e *minds-on*, relacionadas com situações complexas, imaginárias ou da vida real);

F. *trabalho laboratorial de natureza mais aberta* (inquérito aberto ou semi-aberto), com produção de relatório;

G. *resolução de problemas* e *mini-testes*;

Figura 1. «Active learning classrooms», vídeo disponível em http://vimeo.com/41007436

Figura 2. Sala de aula Scale-Up na North Carolina State University

H. *wrap-up* final, com um pequeno resumo do essencial da aula;

I. proposta de *trabalho de casa* para praticar e desenvolver uma melhor compreensão do que foi aprendido na aula.

Para facilitar a realização destas actividades, existe um conjunto de tecnologias úteis a professores interessados em criar este tipo de ambientes. O principal objectivo deste artigo é o de identificar as tendências recentes no uso de tecnologias que podem suportar a aprendizagem activa em disciplinas STEM, em particular no ensino secundário, partindo do relato de uma visita ao evento BETT Show 2014, um evento anual em Londres que exibe as tecnologias educativas mais recentes. O artigo está organizado segundo algumas das actividades acima listadas, referindo-se para cada um delas sugestões de utilização de tecnologias consideradas adequadas à pedagogia subjacente.

INSTRUÇÃO

Nos breves períodos de instrução, o professor pode tirar partido de ferramentas de apoio à exposição e comunicação à aula inteira, como: projetores de curto alcance portáteis, sistemas portáteis de quadro interactivo, adaptadores para projecção sem fios, *tablets*, visualizadores sem fios.

Pode ainda recorrer a aplicações para organização de informação e escrita digital.

Existem inúmeras aplicações para *tablet* ou computador, Documents 5 ‹http://readdle.com/products/documents›, Doceri ‹https://doceri.com/›, Notetaker HD ‹http://www.notetakerhd.com/›, Evernote ‹http://evernote.com/intl/pt-br/› e Penultimate ‹http://evernote.com/intl/pt-br/penultimate/› que facilitam a organização de documentos de todo o tipo, sejam vídeos, pdf, apresentações ou outros. Existem também aplicações para apresentação de informação durante a aula, expandindo as possibilidades do quadro comum. Estas permitem por exemplo inserir imagens, formas geométricas, fundos (p.e. papel milimétrico), objectos de medição (réguas, transferidores), áudio, ilustrações feitas no momento ou comentar excertos de documentos, escrever notas (à mão se necessário) e gravar toda a actividade no ecrã para posterior partilha da aula num sistema de gestão de aprendizagem. No caso de usar *software* científico que apenas corre num computador, o acesso remoto sem fios via tablet é uma solução a considerar.

Figura 3. Padrão de *design* de aula em ambiente de aprendizagem activa

Podem ainda ter acesso a recursos educativos digitais. Diversos repositórios de simulações, vídeos, animações e exercícios interactivos ou de apoio ao inquérito disponibilizam hoje em dia recursos de grande qualidade organizados tanto pela comunidade como por especialistas. Um exemplo actual é o National STEM Centre, ‹http://www.nationalstemcentre.org.uk›, uma iniciativa do National Science Learning Centre em York, Reino Unido ou a Casa das Ciências, ‹http://casadasciencias.org› da Fundação Calouste Gulbenkian.

DEMONSTRAÇÕES INTERACTIVAS, TESTES CONCEPTUAIS E INSTRUÇÃO POR PARES

Nas demonstrações interactivas é pedido aos alunos que prevejam o resultado de uma actividade, observem esse resultado e o discutam face às suas expectativas iniciais.

Os testes conceptuais são pequenos testes informais realizados durante a aula para diagnosticar rapidamente a compreensão dos alunos sobre um determinado conceito. Não têm mais de 5 questões de resposta rápida (resposta múltipla p.e.), projectadas para toda a turma, às quais os alunos respondem com cartões coloridos associados a cada hipótese de resposta ou recorrendo a sistemas de resposta digitais, os *clickers*. As respostas dadas com estes são imediatamente representadas de forma gráfica. Caso o nível de compreensão não seja o esperado, poderá abordar-se novamente o conceito e depois, fazer novamente um teste conceptual até os resultados serem os esperados.

Estes testes podem ser usados em combinação com instrução por pares da seguinte forma: é projectado um teste conceptual, ao qual os alunos devem formular individualmente as respostas em menos de dois minutos. Depois, são dados três minutos para discussão em grupos de três ou quatro alunos até se chegar a uma resposta consensual, que é depois submetida com o *clicker*.

Se a maioria dos alunos usar *smartphones* ou tablets, existem aplicações que substituem os *clickers*, como por exemplo ExitTicket ‹http://exitticket.org› e Qwizdom Virtual Response ‹http://qwizdom.com/education/products/virtual-response›.

Outro tipo de tecnologia útil para apoiar a interactivade na aula é o *software* de gestão de tablets e outros dispositivos móveis, como é o caso do JAMF Software Casper Suite, ‹http://www.jamfsoftware.com/products/casper-suite/› e DyKnow, ‹http://www.dyknow.com/›. Este tipo de aplicação permite ao professor controlar tablets usados pelos alunos, convidando-os p.e. a mostrar o seu trabalho a toda a turma ou colaborar com estes em tempo real.

TANGÍVEIS, PONDERÁVEIS E TRABALHO LABORATORIAL

Actividades tangíveis envolvem o uso de equipamento de laboratório, objectos do quotidiano e medições, não demorando mais de 15 minutos a completar a discutir. Podem depois evoluir para trabalho laboratorial, que demora geralmente mais tempo, é orientado por hipóteses e requer a entrega de um relatório mais formal.

Ponderáveis envolvem trabalho de grupo na resolução de problemas quantitativos ou qualitativos por aproximação, suposição e breves pesquisas na *web*.

Para a realização destas actividades existem algumas tecnologias relevantes que se apresentam a seguir.

Sensores e aplicações para análise de dados. Os *kits* de sensores (*Kits* de sensores Einstein Labmate ‹http://einsteinworld.com/product/labmate/› e Globisens Labdisc ‹http://www.globisens.net/labdisc-models›) com ligação sem fios a aplicações de análise de dados (figura 4) tornam flexível a sua utilização em vários tipos de actividades, incluindo fora da sala de aula. Estas aplicações existem agora para *tablets* e dispositivos móveis.

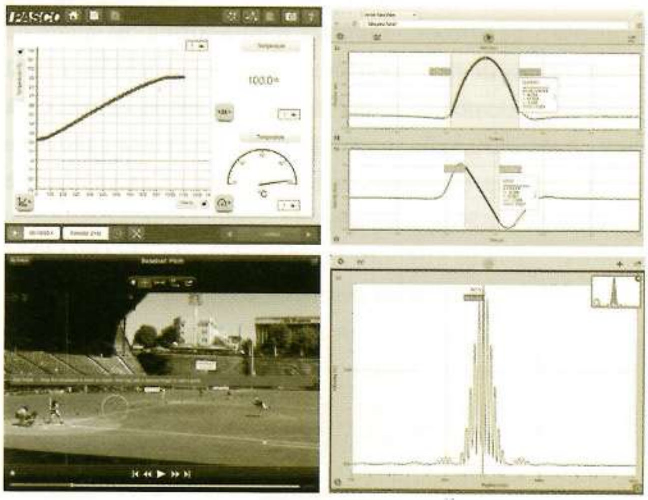


Figura 4. Aplicações para aquisição e análise de dados SPARKvue HD http://www.pasco.com/ipad/, Vernier Data Share, http://www.vernier.com/products/software/data-share/, Vernier Video Physics for iOS http://www.vernier.com/products/software/video-physics/ e Vernier Graphical Analysis for IPad http://www.vernier.com/products/software/ga-ipad/

Tiny computers. Os *tiny computers* como por exemplo Raspberry Pi ‹http://www.raspberry.org› e Arduino ‹http://arduino.cc›, permitem a programação de aplicações de forma fácil, sendo grande a sua flexibilidade para projectos de aquisição de dados e robótica.

Kits para robótica. Os *kits* de robótica, com aplicações de programação associadas, estiveram em destaque no BETT show 2014 uma vez que a disciplina de computação foi introduzida no currículo inglês com a reforma curricular de 2013. . São exemplos de *kits* o Vex Iq, ‹http://www.vexrobotics.com/vexiq/›, Roborobo, ‹http://www.roborobo.co.kr/eng/index.php› e Engino Robotics, ‹http://www.enginorobotics.co.uk/›.

PARA SABER MAIS

Este artigo pretende dar ideias do que poderá ser em traços gerais a interacção entre professores e alunos num ambiente de aprendizagem activa com recurso às tecnologias mais recentes. Para exemplos mais concretos, na Matemática e noutras disciplinas STEM, sugere-se a consulta dos seguintes recursos na *web:*

- Improving Learning in Mathematics — http://www.nationalstemcentre.org.uk/elibrary/collection/282/improving-learning-in-mathematics
- SCALE-UP — http://scaleup.ncsu.edu/

Referências

Beichner, R. J., Saul, J. M., Abbott, D. S., Morse, J., Deardorff, D., Allain, R. J., Bonham, S. W., *et al.* (2007). Student-centered activities for large enrollment undergraduate programs (SCALE-UP) project. *Research-based Reform of University Physics*, 1(1), 2–39.

Handelsman, J., Ebert-May, D., Beichner, R., Bruns, P., Chang, A., DeHaan, R., *et al.* (2004). Scientific teaching. *Science*, 304(5670), 521–522.

Mazur, E. (1997). *Peer instruction*. Prentice-Hall.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., Hemmo, V. (2007). *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. European Commission.

Por opção dos autores, este artigo não obedece à regras do novo acordo ortográfico.

João Fernandes (jpsf@fct.unl.pt)
Vitor Duarte Teodoro (vdt@fct.unl.pt)

APM – 2014

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2014

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento (@-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	60,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	60,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	80,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	75,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	100,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2014

		Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		15,00 €
	Estrangeiro		20,00 €
Instituições	Portugal	47,00 €	28,00 €
	Estrangeiro		32,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções