Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2014

126

Janeiro ∞ Fevereiro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Lina Brunheira
Subdiretora Helena Rocha
Redação Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Irene Segurado
Isabel Rocha
Manuela Pires
Paulo Alvega
Sílvia Zuzarte

Colaboradores Permanentes

António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2014

Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Fevereiro 2014
Tiragem 1700 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
ASPRINT, Apolinário Silva, Unipessoal Lda
Núcleo Empresarial de Mafra
Av. Dr. Francisco Sá Carneiro, Bloco C – 12 cave
2644–006 Mafra

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre a capa

Na capa deste número uma aproximação da denominada *curva de Peano*. Esta curva é um objecto matemático particularmente interessante, já que pode ser descrita por uma função contínua que aplica de forma biunívoca a linha no plano (em particular percorre todos os pontos do plano). Trata-se de um objecto contra-intuitivo — a curva sendo contínua não possui tangente em nenhum dos seus pontos.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Cristina Tudella, António Nóvoa, Eduardo Veloso, Florinda Costa, Guida Rocha, Helena Rocha, Isabel Oitavem, Jaime Carvalho e Silva, João Pedro da Ponte, Jorge Barroco, Laura Nunes, Leonor Santos, Lurdes Figueiral, Mª José Carinha Bóia, Manuela Ribeiro, Maria Gorete Pires Branco, Pedro Almeida e Sandra Nobre.

Saiu da redação

Adelina Precatado deixou de integrar a redação da revista. Ao longo de dezoito anos, metade deles como sub-diretora, foi sempre um elemento muito presente, apoiando toda a equipa com as suas ideias, o seu conhecimento, a sua sensibilidade e sensatez. Por tudo o que nos ofereceu e nos ensinou, fica o nosso enorme agradecimento.

Alterações na direção da *Educação e Matemática*

Desde janeiro de 2014, o cargo de subdiretora passou a ser assumido por Helena Rocha que substitui Adelina Precatado no exercício das mesmas funções.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Escola Pública: A liberdade como princípio, a liberdade como fim

«Como todo o bom governo, o bom professor disciplina, mas não paralisa as vontades, não escraviza, emancipa» (Bernardino Machado, 1904).

A escola pública tem a liberdade como princípio e como fim. Num país tão frágil como Portugal, tem sido, apesar de todas as suas deficiências, um elemento de progresso e de futuro. Num país tão desigual como Portugal, tem constituído uma base importante de coesão social. Num país tão dependente como Portugal, tem promovido a cultura e a ciência, desprendendo-nos pouco a pouco da civilização em segunda mão «que nos vem em caixotes pelo paquete» (Eça de Queirós).

• *A liberdade que é igualdade.* A escola pública representa, historicamente, um lugar da igualdade de oportunidades. Aqui se travaram as lutas históricas pela escolaridade obrigatória, libertando as crianças e os jovens de um destino que, muitas vezes, os empurrava para a ignorância e para o trabalho precoce. Graças à escola pública, o sonho de uma «educação para todos», que pareceu impossível a tantas gerações, tornou-se realidade.

• *A liberdade que é diversidade.* A escola pública é, por definição, um lugar da diversidade. Nela, como diz João dos Santos, estão presentes todas as crianças de todas as famílias «qualquer que seja o seu cheiro, forma, encadernação ou linguagem». Não há melhor instituição para aprender a palavra e o diálogo, para aprender a conviver, a viver com os outros.

• *A liberdade que é aprendizagem.* Não basta uma «escola para todos», precisamos de uma «escola onde todos aprendam». Há muitos que se contentam com o «sucesso parcial» de alguns. Mas a nossa ambição tem de ser infinitamente maior. O compromisso com a aprendizagem de todos é a marca de água da escola pública.

Ficam aqui três liberdades que definem a escola pública. Ainda é longo o caminho para que elas se cumpram plenamente. Mas, se ignorarmos o que já foi feito, perdemos a memória e o sentido da viagem. Estas liberdades, que estão na origem da escola pública, completam-se com três outras liberdades.

• *A liberdade que é participação.* Muitos entendem que a democracia deve parar à porta da escola. Mas não. A escola pública tem de habituar as crianças, como queria António Sérgio, «à acção municipal, à própria vida da cidade, ao exercício dos futuros direitos de soberania e de *self-government*». É por isso que falamos de uma «escola democrática», onde professores e alunos, obviamente com estatutos diferentes, cooperam no trabalho escolar.

• *A liberdade que é autonomia.* Pouco avançaremos se não construirmos uma liberdade de iniciativa e de organização das escolas, que rompa com a rigidez, a burocracia e o centralismo. «Não somos uma corporação, não é a um espírito de corpo que aspiramos. Constituímos antes um colégio colaborante, onde em comum trabalhamos sobre as nossas obras» (Sérgio Niza). Precisamos de construir propostas pedagógicas coerentes e inovadoras, de avançar na organização de escolas diferentes com diferentes projectos educativos.

• *A liberdade que é criação.* A escola é cultura, e não há cultura sem criação. A cultura é o que nos une numa herança comum, mas é também o que nos permite sair de nós mesmos e aceder a outros mundos. Educar é transmitir e, por isso, a primeira palavra pertence ao professor. Mas não há educação sem criação e, por isso, é tão importante a cultura científica e artística que permite a cada um inscrever uma palavra nova no mundo.

Três liberdades e mais três. A liberdade é um substantivo, mas é também um verbo de acção. A escola pública tem de saber repensar-se, renovar-se, abrir-se.

Em primeiro lugar, repensando-se no espaço público. Há mais educação para além da escola. Hoje, precisamos de reforçar os laços entre a escola e a sociedade e assim renovar um compromisso social em torno da educação. É uma mudança decisiva, que exige uma efectiva capacidade de decisão das pessoas, das autarquias e das instituições no interior deste espaço público da educação. Não gosto muito da metáfora das «cidades educadoras», mas é a que melhor ilustra a dimensão de partilha e de co-responsabilização que marca a educação nas sociedades contemporâneas.

Em segundo lugar, renovando-se como «coisa pública». A escola não é um «serviço» ou uma «mercadoria», é uma instituição da *res publica*. Quando se compara a escolha da escola com a escolha das malas, dos sapatos, do jornal, do carro ou da casa, como já se escreveu, perde-se todo o sentido, social e cultural, individual e colectivo, do acto de educar.

Em terceiro lugar, abrindo-se ao futuro. Vivemos um tempo de profunda mudança geracional, em grande parte pela forma como o digital está a transformar as vidas das crianças e dos jovens. Michel Serres diz mesmo que, nas últimas décadas, nasceu «um novo ser humano que vive, pensa, comunica e... aprende de maneira totalmente diferente». Os edifícios escolares vão desaparecer ou, pelo menos, vão transformar-se radicalmente. Os tempos escolares vão ser organizados de modo totalmente diferente. O trabalho dos professores vai sofrer alterações profundas. A escola pública tem de estar à altura desta revolução da aprendizagem que está a acontecer debaixo dos nossos olhos e perante uma certa «indiferença» da nossa parte.

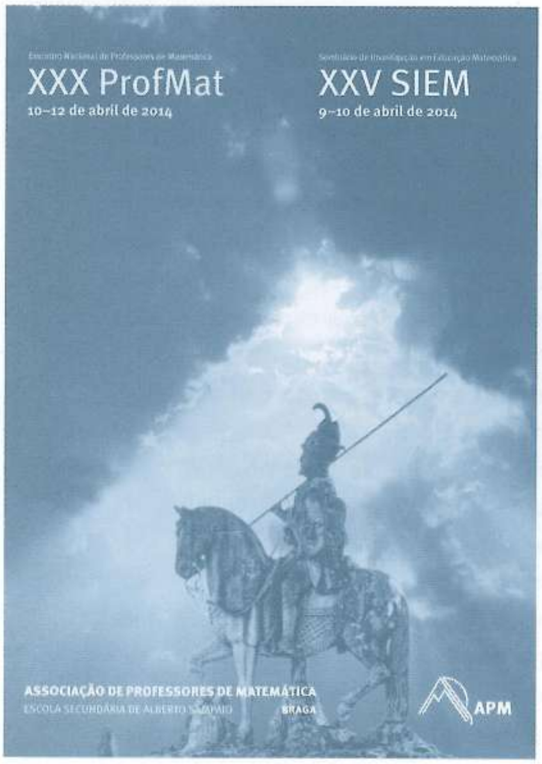
A escola pública tem de ser, cada vez mais, um espaço de liberdade. Hoje, as sociedades têm um nível de educação, instituições culturais e científicas e meios tecnológicos que permitem concretizar o sonho, que muitos outros sonharam antes de nós, de uma escola que é

Igualdade
Diversidade
Aprendizagem
Participação
Autonomia
Criação

A liberdade tem uma característica única e singular: só existe em mim se existir também nos outros. Não posso ser livre se os outros viverem sem liberdade. A escola pública é o lugar da liberdade, de todos e não apenas de alguns. A liberdade como princípio. A liberdade como fim.

António Nóvoa
Universidade de Lisboa

XXX ProfMat • XXV SIEM • 2014



Nos dias 10, 11 e 12 de abril de 2014 a Associação de Professores de Matemática realiza em Braga um dos seus mais significativos eventos: o ProfMat. Será o 30º ProfMat numa cadeia de vinte e nove anos ininterruptos de encontros. Nos dias 9 e 10 realiza-se o 25º SIEM num feliz reencontro destas duas realizações que favorecem e substanciam a relação sempre por nós procurada entre a investigação e a prática letiva.

No ProfMat de 2014 temos muitas razões para nos encontrarmos. Encontramo-nos para refletir e debater, para trocar experiências e dúvidas, logros e dificuldades. Para aprender, sempre. E para não desistirmos, nunca. Encontramo-nos para rever amigos antigos e recentes e para conhecermos novos.

E para continuarmos a fazer da APM um lugar de pertença e de referência na nossa tarefa educativa, no nosso empenho em melhorarmos enquanto professores de Matemática, na nossa responsabilidade de intervirmos e fazermos ouvir a nossa voz em relação às políticas educativas que afetam o ensino da Matemática em particular e a qualidade do ensino público, de todos os níveis, em geral. Muitas razões para nos encontrarmos em Braga. Por isso estaremos lá.

Nota: Toda a informação relativa a prazos, valores, promoções e acreditação da formação em http://www.apm.pt/encontro/profmat_2014_ siem onde poderá também efetuar a sua inscrição.

A Comissão Organizadora

No dia 19 de dezembro do ano passado, decorreu no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa a conferência «Evitar o desastre no Ensino da Matemática», promovido pela APM com o apoio daquele instituto. A conferência foi moderada por Henrique Manuel Guimarães e contou com as intervenções de João Pedro da Ponte, Ana Cristina Tudella, Jaime Carvalho e Silva, Leonor Santos e Lurdes Figueiral. Apesar do curto espaço de tempo que decorreu entre o seu anúncio e a sua realização e a fase particularmente absorvente do trabalho dos professores com as reuniões de avaliação, a conferência teve uma grande adesão e foram muitos os que lamentaram não poder participar. Por este motivo, a redação da Educação e Matemática, considera pertinente publicar parte das intervenções dos cinco conferencistas, a quem pedimos um resumo das ideias principais. Por se tratar de uma tomada de posição, publicamos na íntegra a intervenção da Presidente da APM.

Evitar o desastre no Ensino da Matemática

Lições dos Resultados do TIMSS e do PISA

No final de 2012 e de novo no final de 2013 foram divulgados resultados de provas de avaliação internacionais em que participaram alunos portugueses. No TIMMS (*Trends in International Mathematics and Science Study*), num conjunto de 52 países, os nossos alunos do 4.° ano conseguiram o 15.° lugar. A maior parte dos itens não são divulgados, conhecendo-se apenas uma pequena parte. Nestes itens que são públicos os alunos portugueses situam-se em geral entre o 7.° e o 11.° lugar, sendo que num dos itens mais difíceis, envolvendo conhecimentos de geometria e raciocínio lógico, ficaram em 1.°. No PISA (*Programme for International Student Assessement*), que avalia o desempenho dos alunos de 15 anos, Portugal ficou dentro da média dos 34 países da OCDE, e se se ajustarem os valores tendo em conta o nível socioeconómico do país, ficou em 6.° lugar. Nestas provas de avaliação internacionais os nossos alunos estão dentro de padrões de desempenho internacionais de que só nos podemos orgulhar. O mito que os alunos portugueses teriam um problema genético que os impediria de conseguir bons resultados em Matemática ficou definitivamente por terra.

Os defensores do *back to basics* que antes usavam os (fracos) resultados dos alunos portugueses neste tipo de provas como arma de arremesso para dizer que tudo ia mal no ensino da Matemática, chegando a falar em «desastre nacional», desta vez ficaram sem palavras e acabaram cilindrados pela comunicação social. O discurso que o ensino da Matemática estaria entregue ao «eduquês» e que este conduzia os alunos a não saberem as coisas mais elementares ficou completamente desacreditado.

Diversos fatores contribuíram para estes bons resultados. Em primeiro lugar, há que destacar o programa de formação contínua para professores do 1.° e 2.° ciclo (2005–2011). Este programa envolveu cerca de 15000 professores (entre os quais mais de 50% dos professores do 1.° ciclo), numa atividade consistente realizada ao longo de todo o ano letivo, com trabalho de aprofundamento matemático e didático em sessões de formação regulares e acompanhamento e supervisão direta dos professores na sala de aula. Em segundo lugar, há a referir o Programa de Matemática do ensino básico, homologado em 2007, que gerou um grande movimento de discussão entre professores (ainda antes de ser aprovado) e propiciou o surgimento de um grande número de materiais de apoio e de ações de formação. Houve um processo de generalização voluntária que foi correspondido de forma maciça por parte das escolas e agrupamentos a partir de 2009 e muitos dos manuais que começaram a surgir procuraram seguir de perto as indicações deste programa. Em terceiro lugar, há a referir o Acompanhamento dos Planos da Matemática I e II, com apoio continuado às escolas ao longo do tempo, proporcionando um apoio de proximidade e múltiplas oportunidades formativas, correspondendo às necessidades sentidas pelos professores. Haveria ainda que referir muitas outras iniciativas como o Projeto dos 1000 itens do GAVE e os momentos de debate consagrados às novas orientações curriculares em encontros nacionais de professores como o ProfMat.

Todo este movimento mostrou que as orientações-chave do programa de 2007 são propiciadoras do sucesso dos alunos, na medida em que valorizam:

- O sentido de número, o sentido espacial, o pensamento algébrico e a literacia estatística,
- As capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática,
- Uma abordagem exploratória, visando uma formalização dos conceitos matemáticos progressiva (em lugar de abrupta),
- A aprendizagem dos procedimentos matemáticos com compreensão.

Verificou-se neste período uma forte convergência entre a política educativa, os contributos da investigação e as preocupações dos professores que atuam no terreno. Esta convergência é essencial para que possa existir verdadeiro progresso no ensino da Matemática, e nunca tinha ocorrido com a vitalidade que assistimos em 2005–2011. Houve capacidade dos responsáveis políticos para reconhecerem a qualidade e a importância do trabalho de investigação realizado no campo da Didática da Matemática em Portugal desde os anos 80 e mobilizou-se essa capacidade para promover uma efetiva melhoria nas aprendizagens dos alunos. Houve também capacidade da parte dos investigadores em Didática da Matemática de investirem neste processo de desenvolvimento curricular e de formação de professores. O que se passou neste período mostra que a Matemática, longe de ser necessariamente uma disciplina seletiva e frustrante para a maioria dos alunos, pode e deve ter um lugar importante no currículo escolar, constituindo uma experiência de aprendizagem positiva e gratificante.

Nada disto poderá ser compreendido pelos responsáveis atuais, que, com a sua ideologia e com a sua cegueira, produziram documentos curriculares inadequados e inaplicáveis, irremediavelmente condenados ao fracasso, como tem sido amplamente reconhecido nas «sessões de formação» organizadas para os divulgar. Cabe aos professores dizer de sua justiça o que se passa nas escolas, no âmbito da aplicação destas orientações. Cabe a todos nós criar as condições para que se possa voltar a trilhar o mais breve possível o caminho do sucesso no ensino e na aprendizagem da Matemática.

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

O prejuízo que se anuncia com o PMEB homologado em 2013

«Os alunos não conseguem perceber, nem aprender o que se pretende»; «Não é adequado»; «Os conteúdos são imensos e difíceis»; «Não há tempo para trabalhar tudo,... muito menos para trabalhar com qualidade»; «Os alunos sentem-se perdidos e se já havia alunos a desistirem da Matemática então, com estes conteúdos tão cedo, é um descalabro!» São exemplos de frases de vários colegas, que lecionam o 1.°, 3.°, 5.° ou 7.° ano, a quem pedi a opinião sobre a experiência que estão a ter com a implementação do PMEB2013, que com certeza nos deixam a todos muito preocupados. Sobre a minha própria experiência com alunos do 5.° ano, destacarei apenas algumas ideias.

A primeira ideia que quero destacar é a dificuldade de gestão do programa relativamente ao tempo destinado a cada tema. Observando a tabela da página 15 do PMEB2013 verificamos que no domínio NO5 há apenas 30 blocos de 90 minutos para trabalharmos um número significativo, e complexo, de conteúdos. Para além dos tópicos já existentes relativos aos números naturais, incluem-se agora os números racionais nas suas diferentes representações — fração, numeral misto, dízima e percentagem —, bem como, o trabalho em torno das quatro operações.

Na minha opinião, não é possível ensinar todos estes conteúdos, que são bastante complexos, sobretudo nesta faixa etária, e em tão pouco tempo. É possível imaginar o professor a expô-los de uma forma até muito clara, para uma turma de alunos que ouvem tudo e depois aplicarmos 2 ou 3 exemplos. No entanto, nem as turmas são assim, nem os alunos aprendem deste modo. Ora, de que serve o ensino se não houver aprendizagem?

A segunda ideia diz respeito às várias alterações a nível de conteúdo, relativamente ao PMEB2007. Por exemplo, no subdomínio dos «números naturais» foram introduzidos novos conteúdos, como o algoritmo de Euclides e a noção de números primos entre si que é agora antecipada à própria noção de número primo que só será trabalhada no 6.° ano. Incluem-se ainda um conjunto de novas propriedades, definidas como metas, tais como a NO5.3.12.:«Saber que o produto de dois números naturais é igual ao produto do máximo divisor comum pelo mínimo múltiplo comum e utilizar esta relação para determinar o segundo quando é conhecido o primeiro, ou vice-versa.» Mas porque têm os alunos do 5.° ano de saber isto?

No documento das metas, «saber» significa que o aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta. Assim, o objetivo limitar-se-á à aplicação desta propriedade. Da minha experiência, posso afirmar que alguns dos meus alunos até a conseguiram aplicar após a realização de alguns exercícios repetitivos, mas umas semanas depois, já não se lembravam desta propriedade. O que ganham os alunos com isto? Haverá vantagens neste tipo de «saber»?

O exemplo do descritor anterior e o grau de complexidade que lhe está associado leva-me à terceira ideia: a desvalorização da compreensão. O PMEB2013 contém centenas de descritores mas raras vezes se refere a compreensão, a não ser para destacar o seu «progresso». Mas, o que é o «progresso da compreensão matemática»? Será possível aprender agora e compreender mais tarde?!

Um Programa é feito de escolhas, e quando se opta pela aprendizagem do tipo de propriedades, atrás referido, há outras aprendizagens que não se podem fazer, pois não há tempo para tudo. Serão estas escolhas as mais adequadas? Não seria importante pensar nas competências essenciais que um aluno, que termina o 2.° ciclo ou que acaba a escolaridade básica, deveria ter desenvolvido? Que matemática queremos que os nossos alunos saibam?

Termino com uma última ideia que me é muito cara: a resolução de problemas. Este tipo de tarefa tem tido um importante papel nas minhas aulas, quer enquanto atividade com valor *per si*, quer enquanto forma de introduzir conteúdos de um modo significativo. Como exemplo deste caso, apresento um problema trabalhado por alunos do 5.° ano que ainda não conheciam a noção de máximo divisor comum, mas que já sabiam o que eram múltiplos e divisores. A resolução apresentada (Figura 1) é ainda um exemplo pouco sofisticado e que, naturalmente, eu pretendia que evoluísse, contudo constituiu um bom ponto de partida para aprender o máximo divisor comum com compreensão. No entanto, percebemos que aos olhos dos autores do PMEB2013, este trabalho não terá qualquer valor porquanto os alunos não realizam uma «seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados» (p. 5), devendo constituir antes uma

A Luísa, na sua mercearia, pretende ter sacos com dois tipos de maçãs: Golden e Fugi. Tem 24 maçãs Golden e 12 maçãs Fugi. Qual é o número máximo de sacos iguais que consegue ter com todas as maçãs de forma a haver maçãs Fugi e Golden em todos os sacos? Apresenta o teu raciocínio.

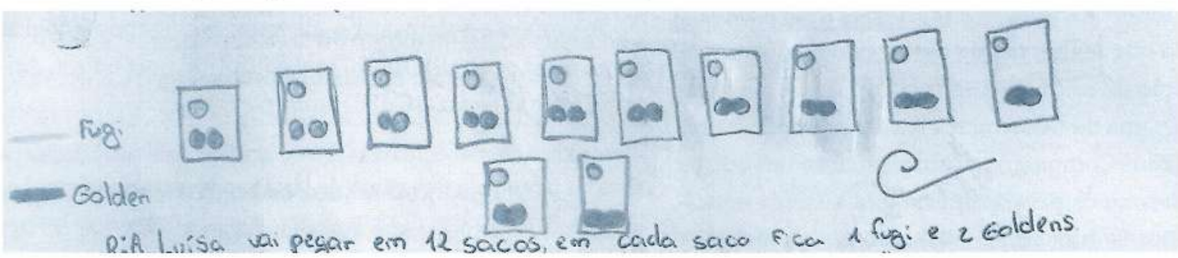


Figura 1

das atividades vagas de exploração e descoberta que recriminam. Mas, será mesmo assim?

Uma coisa é certa, este PMEB(2013) com que somos obrigados a trabalhar, faz-nos pensar na conceção da matemática que gostaríamos que os nossos alunos tivessem. Faz-nos pensar na sua predisposição para aprender esta disciplina. Faz-nos repensar nas aprendizagens matemáticas que são significativas para eles. E nós, acima de tudo, somos professores... somos corresponsáveis pelas aprendizagens dos nossos alunos, pelo que temos uma palavra a dizer sobre o que fazemos na sala de aula e uma resposta a dar perante os nossos pares e a sociedade. E essa resposta não pode ser de acomodação, razão pela qual deixo aqui o meu testemunho.

Ana Cristina Tudella
Agrupamento de Escolas Frei Gonçalo de Azevedo

Sobre a proposta de um «novo» programa de Matemática A para o Ensino Secundário

A primeira nota que me ocorre é que o presente documento foi colocado em consulta pública no dia 4–11–2013, com prazo de discussão até 2–12–2103. Um documento com esta complexidade (103 + 62 + 42 páginas) não pode ser discutido em menos de um mês, sobretudo quando o Ministério da Educação nem sequer se preocupa em promover debates presenciais com diferentes entidades, tal como foi feito em 1990 ou 1996! Apenas a APM promoveu um debate público no dia 20–11–2013, que foi transmitido via internet. Diz o ditado popular que ‹depressa e bem não há quem›.

Não existe explicação razoável para as alterações propostas não se terem baseado em estudos sobre o que aconteceu nas escolas secundárias portuguesas desde 2003 (nem anteriormente). Na proposta são ignorados os estudos internacionais (PISA, TIMSS) e, surpreendentemente, os países da Ásia deixam de ser referência, desaparecendo da bibliografia, quando antes eram apontados como o nível a ultrapassar. Ainda por cima, apesar de os *Common Core Standards* americanos serem citados, não existe qualquer tipo de semelhança com a proposta de novo programa de Matemática A. Também não existe explicação razoável para o facto de nenhuma das novidades da proposta ter sido experimentada nas escolas. Está a promover-se, à pressa, uma alteração radical da prática atual, sem nenhuma base segura ou científica, sem experimentação prévia, sem estudos que a justifiquem, o que surpreende e inquieta o mais distraído dos observadores!

A sensação que tenho, depois de ter lido os documentos, e em função da minha experiência, é de que a aplicação deste programa de Matemática A vai ser um desastre. Como provar isto? Comparando com a situação nos outros países, pois mesmo os países com melhor sistema educativo estão sempre a procurar melhorar o seu próprio sistema. Que fazem os outros países? Nesses países há instituições especializadas que acompanham o funcionamento do sistema educativo, prestam atenção à investigação educacional e às experiências de outros países e vão propondo soluções. Em Portugal, surpreendentemente, uma comissão elabora sozinha um documento avulso e afirma que:

«os programas devem ser construídos em função dos conhecimentos e capacidades fundamentais (...) cabendo ao sistema educativo, às escolas, aos professores e aos próprios alunos mobilizarem-se para cumprir esse objetivo.» (JL, 13–11–2013)

Esta proposta ignora pois a realidade, não tendo, nomeadamente, em conta a transição entre o Ensino Básico e o Ensino Secundário, ao contrário de outros países; foi pura e simplesmente eliminado o módulo inicial e nada existe para o substituir.

Esta proposta ignora os temas transversais, ao contrário de todos os outros países. Questões como a resolução de problemas, a modelação matemática e o uso da tecnologia são tratadas de forma marginal neste documento, quando são o centro das preocupações de outros países, sendo sempre temas transversais.

Esta proposta é claramente demasiado abstrata, demasiado extensa, contém conteúdos inadequados para este ciclo e ainda por cima começará a ser aplicada sem que os alunos que entram no 9.° ano em 2015 tenham tido os novos programas do Ensino Básico!

A proposta é demasiado abstrata, escolhendo a lógica como tema central, e muito mal conforme nota o Prof. António Fernandes (DM, IST) num parecer:

«Os autores, certamente nada versados nestes assuntos, decidem abordar o tema de um ponto de vista excessivamente formalista, sem se aperceberem nem do verdadeiro papel desse formalismo nem do contexto em que se revela necessário. E, quando não estão entretidos com este devaneio, ocupam-se com a redução da lógica formal ao papel de uma abreviatura, assassinando-a assim duplamente.»

No currículo escolar de 2007 da Coreia do Sul aparece a indicação expressa de que «o significado de proposições e condições deve ser ensinado ao nível da compreensaão de uma afirmação matemática.» No currículo oficial em França para o 12.° ano pode ler-se que: «os conceitos e métodos da área da lógica matemática não devem ser objeto de aulas específicas» sendo introduzidos à medida que vão sendo necessários.

A extensão do programa é assustadora, não se percebendo qual possa ter sido a ideia para a sua concretização prática nas escolas. Ocorre-nos uma mera exposição magistral dos assuntos, sem espaço para mais nada. Como efeito, são introduzidos como temas novos logo no 10.° ano: lógica matemática até à «Resolução de problemas envolvendo operações lógicas sobre proposições». É introduzida a «Racionalização de denominadores», a «Definição de elipse e respetiva equação cartesiana reduzida; relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal», «Relações de equivalência, partições e vetores», «Restrições de uma função», «Funções sobrejetivas e bijetivas», «Sinal de somatório; tradução no formalismo dos somatórios das propriedades associativa e comutativa generalizadas da adição e distributiva generalizada da multiplicação em relação à adição», «Percentil de ordem *k*», «Simulação Monte Carlo».

No 11.° e 12.° anos são introduzidos a «lei dos senos e dos cossenos», «funções trigonométricas inversas», «osciladores harmónicos», «desigualdade de Cauchy-Schwarz», «supremos e ínfimos», «teorema de Lagrange e de Rolle», «continuidade da função inversa», «teorema de Weierstrass», «derivada da função inversa», «equações diferenciais», «primitivas», «cálculo integral», «teorema fundamental do cálculo integral», «fórmula de Barrow e teorema da média».

Neste contexto, o 10.° ano é mesmo mais problemático, podendo mesmo ser considerado um ano mártir, com tantos temas novos e abstratos, com o desaparecimento do módulo inicial (lá vão desaparecer os cortes nos cubos!), mas também porque são antecipados vários temas de anos seguintes: Radicais (11.° ano), «Função injetiva; Função inversa» (11.° ano), «Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real» (12.° ano), «As funções RQ e RC enquanto funções inversas» (11.° ano).

Tudo isto fará com que se vá inevitavelmente produzir uma fuga à matemática A, escolhendo os alunos outras vias no Ensino Secundário, tal como sucedeu já em Inglaterra e é reportado no relatório «Making Mathematics Count» (The report of Professor Adrian Smith's Inquiry into Post-14 Mathematics Education, February 2004).

Em conclusão: a aplicação destes programas será inevitavelmente um desastre (como foi o programa do 12.° ano nos anos 80) e quando começar a ser *amputado* não faltarão as desculpas habituais (sobre o sistema, os professores, os alunos, os pais e o País!), nunca sobre o programa! No final teremos uma «manta de retalhos» incoerente como foram os programas dos anos 80 (do básico, do secundário e do 12.° ano). Claramente, como afirmou em tempos um Ministro da Educação, o Ministério da Educação não tem memória!

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Um olhar da investigação em educação matemática

Existe um sistema complexo de interinfluências entre a definição de um currículo e vários domínios da esfera social. Por exemplo, Gimeno (1989) identifica oito domínios que poderão moldar um currículo (Figura 2). Ir-me-ei apenas debruçar sobre as Ciências e domínios disciplinares, muito em particular no que respeita à Educação matemática.

É de fazer notar que os diversos documentos que acompanham o Programa de Matemática para o Ensino Básico (PMEB) (ME, 2013a) afirmam a influência da investigação e, como tal, os seus resultados, nas opções curriculares tomadas. É, por exemplo, o caso do Desp. n.° 9888–A/2013 (2013, p. 2366–2) que homologa este programa e onde se

Figura 2. Subsistemas de influência do currículo

pode ler que o referido programa foi «elaborado com base em investigação recente ...». Já na proposta para o novo programa de Matemática A para o ensino secundário recentemente em discussão (PPMat A) (ME, 2013b) não é assumida tal influência de forma explícita. Fica assim a dúvida. Será mesmo verdade que as orientações curriculares são coerentes com o conhecimento atual gerado pela investigação? Não procurando ser exaustiva, focar-me-ei apenas em três capacidades transversais constantes em qualquer programa de Matemática para responder a esta questão[1].

Começo pela resolução de problemas, capacidade transversal a desenvolver nos alunos ao longo de todos os ciclos de escolaridade e reconhecida como essencial desde os anos 80 do séc. XX. Dos documentos em análise pode ler-se que:

PMEB	PPMat A
A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados (...) a resolução de problemas não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta. (objetivos)	
Em particular, no 1.° ciclo (...) o número de passos necessários à resolução dos problemas vá aumentando de ano para ano. (objetivos)	Nos enunciados de exercícios e problemas deve ter-se em conta a conveniência de uma progressiva utilização das técnicas e princípios que vão sendo adquiridos (objetivos)

Destes extratos duas asserções se podem retirar, respeitando o significado do conceito de resolução de problemas e a sua função pedagógica. Ao considerar que um problema se caracteriza e diferencia pelo número de passos a efetuar para o resolver é retomar uma tipologia de problemas em desuso que reduz o conceito de problema (Schoenfeld, 2005). Para além disso, a resolução de problemas é apenas encarada como um contexto favorável para aplicação de conhecimentos e *skills* adquiridos. Esta é uma visão redutora de resolução de problemas, uma vez que ignora a resolução de problemas como uma metodologia (é através da resolução de problemas que ocorre a aprendizagem) e como um conteúdo (uma capacidade a ser desenvolvida pelos alunos e como tal a ser tida em conta por parte do professor enquanto objeto de aprendizagem) (Abrantes, Leal, & Veloso, 1993; Guimarães, 2005).

Igual afastamento entre o preconizado curricularmente e a investigação matemática se pode encontrar quando nos focamos na comunicação matemática. Na parte dos objetivos nos dois documentos curriculares em análise o que é dito sobre a comunicação matemática está em consonância com o entendimento atual sobre esta capacidade matemática dos alunos, qualquer que seja a sua idade:

PMEB	PPMat A
Oralmente, deve-se trabalhar com os alunos a capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos	(...) os alunos devem ser estimulados a desenvolver a capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos
identificando as questões que levantam, explicando-as de modo claro, conciso e coerente, discutindo, do mesmo modo, estratégias que conduzam à sua resolução. Os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas. Sendo igualmente a redação escrita parte integrante da atividade matemática, os alunos devem também ser incentivados a redigir. (objetivos)	

Contudo, no seu desenvolvimento esta capacidade é completamente esquecida, muito em particular na listagem das múltiplas metas curriculares apresentadas. Uma vez mais, ignora-se a educação matemática. Faz-se tábua rasa do contributo da comunicação matemática, evidenciado por numerosas investigações, para a aprendizagem matemática nas suas mais diversas componentes, como seja na aquisição de conceitos e procedimentos matemáticos (Lim, & Pugalee, 2004); no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas (Borasi, & Rose, 1989; Pugalee, 2004), do pensamento algébrico (Mestre & Oliveira, 2012), do pensamento crítico (Semana & Santos, 2008) e da capacidade de metacognição (Pugalee, 2001); e para a perceção do que é a matemática e a sua atividade (Clark, Waywood, & Stephens, 1993).

Por último, no que respeita ao raciocínio matemático parece legítimo afirmar que para os autores destes documentos curriculares apenas existe o raciocínio dedutivo:

PMEB	PPMat A
(...) a abstração desempenha um papel fundamental na atividade Matemática (...) uma visão vaga e meramente intuitiva dos conceitos matemáticos tem um interesse muito limitado e é pouco relevante (introdução/finalidades)	(...) o desenvolvimento do raciocínio abstrato deve ser considerado como uma finalidade em si (...) o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades (finalidades/objetivos)

O raciocínio indutivo e o abdutivo, reconhecidos intrinsecamente constitutivos da atividade matemática (Davis & Hersh, 1981; Mata-Pereira & Ponte, 2012) são desvalorizados. Se tal não bastasse, ignora-se a importância destes tipos de raciocínio para a aprendizagem matemática (Vale & Pimentel, 2012). A atribuição de significado (*sense making*) que hoje se associa ao raciocínio matemático (NCTM, 2009) é igualmente ignorada, como se fosse uma condição não necessária para acontecer aprendizagem.

Na base dos poucos exemplos agora apresentados, é difícil compreender o significado das seguintes afirmações, uma vez mais retiradas dos documentos curriculares:

PMEB	PPMat A
Com base em investigação recente sobre o ensino da Matemática, adota-se uma estrutura curricular sequencial, que se justifica atendendo a que a aquisição de certos conhecimentos e o desenvolvimento de certas capacidades depende de outros a adquirir e a desenvolver previamente. (metodologias)	Alicerçado na análise dos resultados de diferentes abordagens que ao longo dos tempos têm sido adotadas para o ensino da Matemática neste nível de escolaridade, tanto a nível nacional como internacional (...) o presente Programa foi elaborado tendo em conta a experiência, de mais de dez anos, de aplicação do Programa anterior. (introdução)

Pergunto então: Que investigação serviu de quadro de referência para estas propostas curriculares? Que resultados das diferentes abordagens adotadas para o ensino da Matemática foram obtidos e por quem? Que aprendizagens foram retiradas da experiência acumulada? Onde se encontra evidência? Como foram analisadas?

Nota

1 Para desenvolvimento deste tema consultar depoimento da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática dirigido à Comissão Parlamentar de Educação, Ciência e Cultura disponível em http://www.spiem.pt/atividades/pareceres/

2 Todas as referências apresentadas poderão ser consultadas na versão online deste artigo, disponível na página da APM

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Agenda para evitar o Desastre no Ensino da Matemática

A Associação de Professores de Matemática fiel ao seu dever estatutário de *Intervir na definição da política educativa, especialmente no que respeita aos problemas do ensino da Matemática* (art.° 2.°), fiel à sua história a às suas origens e respondendo às exigências do momento presente, tem feito ouvir a sua voz na defesa de um ensino da Matemática consistente, quer com a investigação nacional e internacional neste âmbito, quer com a prática e a experiência dos professores, quer com os estudos internacionais mais recentes sobre esta matéria como acabámos de ouvir nestas intervenções.

Ao longo destes últimos dois anos, a APM tem denunciado as medidas de política educativa que a atual equipa ministerial tem vindo a tomar no âmbito do ensino da Matemática, considerando que elas põem seriamente em risco as melhorias verificadas neste ensino.

Em educação não se plantam eucaliptos, como escreveu há tempos num artigo do Público uma professora (e então também diretora de escola) que muito prezo, a professora Paula Romão. Em educação plantam-se árvores que demoram muito tempo a crescer e a dar frutos, a fundar as suas raízes profundamente no terreno propício, com o clima adequado. Árvores resistentes que, no entanto, se podem tornar frágeis num breve instante, quando o machado as corta pela raiz, quando o fogo as transforma em cinzas.

É esse momento de destruição que estamos a assistir, sentindo-nos quase impotentes, sentindo-nos indignados, sentindo-nos profundamente apreensivos.

Em cerca de quase 30 anos de história, na APM muitos professores de Matemática partilharam o desejo e a busca da melhor maneira de levar os alunos a aprender e a gostar desta disciplina. Estudámos, experimentámos, avaliámos, recomeçámos, com dúvidas, com algumas certezas, com determinação ou cansaço, mas sempre com uma linha de fundo e de horizonte que nos convencia a não desistir: trabalhar por uma Matemática escolar compreensível para os alunos, com significado, com capacidade de lhes dar ferramentas intelectuais para lhes dar poder: o poder de compreender, de analisar, de intervir, de criticar, de propor.

Os nossos alunos, em número cada vez mais significativo, foram mudando a sua atitude para com a Matemática, foram obtendo melhores resultados, foram-se envolvendo na aula com as propostas e com as atividades...

É certo que o nível de insucesso e de rejeição ainda é significativo, até porque são muitos os fatores que influenciam, não só os maus resultados em Matemática, como a rejeição que muitos alunos têm em relação a ela.

Mas víamos também os nossos esforços confirmados, não só pela experiência que nos era devolvida e por esse saber empírico que ela nos dá, mas sobretudo pelos estudos que fazíamos, pelas conferências a que assistíamos em encontros e congressos nacionais e internacionais, pela literatura da especialidade, pelos relatórios das avaliações internacionais mais prestigiantes.

Por isso, quando em meados da década passada, começámos a ouvir Nuno Crato com um discurso impreciso e demagógico sobre o ensino da Matemática não lhe demos demasiada importância: o seu conteúdo era tão fraco que não o percebemos como ameaça. Fizemos mal: tínhamos que ter começado imediatamente a rebater as suas ideias. Mas ainda não estávamos suficientemente avisados para o populismo que nos havia de invadir. Pensámos que ser intelectual e profissionalmente honestos seria sempre suficiente. Com a nossa ética, com a nossa aposta e entrega à causa da educação — que sempre quisemos de qualidade para todos, no democratíssimo e justíssimo conceito de escola pública — não fomos suficientemente desconfiados nem perspicazes em relação ao que se estava a construir: a imagem de um especialista, de um cientista rigoroso e exigente, dada assim de bandeja a uma opinião pública (e até mesmo especializada) sedenta de ordem e disciplina, desejosa que alguém lhes apontasse os maus de uma fita de desgraças cujas dimensões catastróficas eram mais ficcionada que reais e como se a solução para problemas complexos fosse simples e unívoca.

E hoje é o que nos é dado assistir. Contrariando os principais estudos nacionais e internacionais no que concerne ao ensino da Matemática, às suas questões pedagógicas, didáticas e metodológicas, sem paralelo em currículos de países de referência neste âmbito, foi homologado, em junho de 2013, um programa de Matemática para o Ensino Básico (PMEB2013) que está a substituir o programa homologado em 2007 cuja generalização terminou apenas em 2013. Sem avaliações, sem estudos, sem análises.

Fomos agora surpreendidos com uma proposta de programa para Matemática A que, na senda do que foi feito com o PMEB2013, assume uma abordagem demasiado formalista e abstrata da Matemática, distante da experiência, da prática e da intuição dos alunos, componentes fundamentais para uma aprendizagem com compreensão e significado. Sebastião e Silva, o matemático português de quem celebraremos em 2014 o centenário do nascimento, afirmou que «o extremo rigor lógico, em vez de formativo pode tornar-se perigosamente deformador». E o grande Poincaré, num texto de 1905, afirma que «sem [a intuição] os espíritos ainda jovens não teriam meios de aceder ao entendimento da Matemática, não aprenderiam a gostar dela e, sobretudo, nunca viriam a ser capazes de aplicar a Matemática».

A seguirmos o caminho agora em curso, a relação com a Matemática voltará a ser uma relação de medo, de inacessibilidade, de impotência para uma grande parte das crianças e dos jovens no nosso país. Estamos assim perante um péssimo serviço ao ensino da Matemática que levará, este sim, ao desastre tantas vezes profetizado.

Para resolver os problemas de aprendizagem e formação, este ministro multiplica os exames... e, é claro, inclui sempre no rol, exames de Matemática e Matemática nos exames! Exames para tudo, exames no 4.° ano, no 6.° ano, induzindo práticas de treino para estas provas, reduzindo drasticamente a duração do ano letivo, introduzindo precocemente fortes fatores de seleção.

Exames para preparar melhor os candidatos a professores, exames para melhorar e fiscalizar a sua formação, já atestada pelas instituições de ensino superior que os certificaram. Há problemas? Venha um exame! Há insuficiência de preparação? Venha um exame!

E acaba-se com a formação e o acompanhamento no terreno dos professores. E acaba-se com o reforço do apoio naqueles lugares onde ele é mais necessário (basta recordarmos a sinistra fórmula que concede mais horas de crédito horário às escolas com melhores resultados... nos exames). E aumenta-se o número de alunos por turma, inviabilizando um trabalho interativo na sala de aula e uma atenção mais personalizada, por parte dos professores, entretanto absorvidos e consumidos por condições profissionais que cada vez mais lhes minam a possibilidade de um trabalho conjunto e pessoal de estudo, de reflexão de partilha.

Falta dinheiro para tudo em Educação. Mas, nem essa falta de recursos, impediu este ministro de operar a mais irracional alteração no ensino da Matemática de que temos memória, ao arrepio de tudo o que tem vindo a ser feito, avaliado, investigado, cá, como em países de referência neste âmbito. Uma alteração assim é o contrário daquilo que Nuno Crato dizia defender: rigor e qualidade, sem falar na importância da avaliação. Quando se muda sem análises e sem estudos, sem validação nem avaliação, não há qualquer rigor nem seriedade metodológica neste procedimento.

Uma obsessão difícil de entender, a par da dos exames que tudo resolvem... basta recordar a patética análise deste ministro aos resultados do PISA2012 (como já tinha feito aliás aos do TIMSS2011) no telejornal de ontem: os alunos portugueses melhoraram... por causa de exames, sendo que alguns nem sequer ainda existiam mas que ele, Nuno Crato, já então defendia...

Por muito que me esforce só consigo ver nas suas atitudes e palavras um profundo desconhecimento da realidade e da matéria e uma intencionalidade ideológica discriminatória e seletiva que abrirá a porta a percursos alternativos precocemente instituídos e fechará ainda mais as portas do ensino superior aos nossos jovens, agravando assim a taxa de formação secundária e superior no nosso país.

Cabe-nos evitar o estilhaçar irremediável das conquistas feitas em Educação ao longo dos nossos anos de democracia, neste esforço ímprobo de recuperar séculos de atraso, pelo menos em relação à maior parte dos nossos parceiros europeus, esses com os quais nos estão sempre a comparar.

A APM não pode por isso deixar de denunciar, em nome de um ensino da Matemática com qualidade e significado para todos os alunos, as medidas que estão a ser implementadas nesta legislatura.

Por isso lançamos hoje aquilo que entendemos ser os pontos indispensáveis de uma

Agenda para evitar o Desastre no Ensino da Matemática

A Associação de Professores de Matemática entende que, para prosseguir, consolidar e incrementar a melhoria nas aprendizagens e nos desempenhos matemáticos dos alunos portugueses, é necessário:

1. A revogação do Programa de Matemática do Ensino Básico homologado em 2013 e das Metas Curriculares a ele associadas. Estas metas, aprovadas em agosto de 2012, foram profundamente criticadas pelas modificações inapropriadas que introduziam nos conteúdos matemáticos e pelas abordagens de ensino que propunham, em completa contra corrente face às orientações curriculares internacionais no ensino da Matemática e sem qualquer sustentação em estudos científicos nesta área. Foram além disso fortemente contestadas por contrariarem o programa então em vigor, homologado em 2007 (o PMEB) e que em 2012/2013 terminava a fase de generalização. A persistente denúncia dessa incompatibilidade levou, em abril de 2013, à revogação do programa de 2007, de uma forma arbitrária e prepotente, sem que tivesse sido feita qualquer avaliação do desenvolvimento da aplicação desse programa, e ainda na inexistência de programa alternativo. Cerca de dois meses depois foi apresentada uma proposta de novo programa que foi apressadamente homologado numa versão praticamente sem alterações face à proposta apresentada, pese embora as muitas críticas e propostas de alterações de que foi alvo. Um processo levado a cabo, muito precipitadamente recorrendo mesmo a expedientes para contrariar ou tornear a lei, nomeadamente no que toca à elaboração, aprovação e adoção dos manuais escolares que, tal como a APM tinha denunciado junto da Procuradoria da Justiça e da Comissão Parlamentar de Educação, Ciência e Cultura, veio desestabilizar e instalar injustiças e perturbações nas escolas neste ano letivo agora a decorrer. Pelo que temos vindo a denunciar e que aqui reafirmamos, e para evitar mais danos no ensino da Matemática e prejuízos muito dificilmente reparáveis, consideramos que a aplicação do programa homologado em junho de 2013, que agora se está a iniciar nos 1.°, 3.°, 5.° e 7.° anos, deve ser suspensa no final deste ano letivo, prosseguindo a aplicação do programa de 2007, ainda vigor em todos os outros anos de escolaridade. Devem além disso ser desenvolvidos os estudos necessários para a avaliação fundamentada do programa de 2007, tendo em vista a realização dos ajustamentos e reformulações que venham a verificar-se convenientes, numa lógica de continuidade e não de rotura.

2. A manutenção em vigor do atual Programa de Matemática A para o Ensino Secundário. A exemplo do que se passou com o PMEB, foi também recentemente conhecida uma proposta de programa de Matemática A para o ensino secundário que visa a substituição do programa atual sem que tenha sido realizada qualquer avaliação dos resultados da sua aplicação. Esta proposta foi já objeto de críticas profundas, nomeadamente pela adoção de uma conceção de uma Matemática escolar de pendor formalista e excessivamente abstrata, expressa numa extensa listagem de temas matemáticos que virá a causar problemas de exequibilidade, onde são introduzidos muitos tópicos matemáticos novos, em numerosos casos muito desadequados ao ensino secundário. Nesta situação, e para que não se repita o que ocorreu no ensino básico, consideramos que deve ser suspenso o processo de elaboração de um novo programa de Matemática A, mantendo-se em vigor o atual programa até que sejam feitos os estudos convenientes para a avaliação da sua aplicação.

3. A elaboração de um novo plano de formação contínua de professores em colaboração com instituições de ensino superior e o reforço da elaboração de materiais de apoio a essa formação consonantes com as orientações curriculares internacionalmente reconhecidas para o ensino da Matemática. Existem exemplos num passo recente de processos de formação contínua de professores em larga escala que deram frutos reconhecidos e que podem servir de base a novos programas a desenhar no futuro. Existem outras modalidades, como os «estudos de aula» que têm sido experimentadas com sucesso. Exige-se do ministério da educação ações concretas de apoio a iniciativas neste campo.

4. O aprofundamento da reflexão sobre a formação em Matemática dos futuros professores, propondo-se, a APM, desenvolver ações tendo em vista o envolvimento das instituições de ensino superior com responsabilidades na formação inicial de professores, nomeadamente no domínio da Matemática e da Educação. Sendo importantes as condições de acesso, são muito mais importantes as condições em que decorre a formação matemática e didática dos futuros professores de todos os níveis de ensino (incluindo o ensino superior) e, para além da discussão dos princípios já ensaiada em momentos anteriores, é importante discutir as condições efetivas necessárias para uma adequada preparação dos futuros professores.

5. O incremento da informação e sensibilização da opinião pública relativamente às posições e propostas da APM sobre o ensino da Matemática, propondo-se para isso reforçar a sua intervenção para divulgação e esclarecimento dessas propostas e posições junto da comunicação social, da comunidade educativa, sindicatos, associações de pais, associações culturais, organizações não governamentais e grupos parlamentares e o Conselho Nacional de Educação no sentido de aumentar a sua sensibilidade e informação sobre as posições e propostas da Associação de Professores de Matemática a este respeito.

6. A inversão da política educativa que tem vindo a ser seguida nesta legislatura, o que consideramos impossível sob a égide deste ministro da educação cuja ação tem vindo a causar grande desestabilização nas escolas e entre os professores e que tem revelado evidente incapacidade para perceber os problemas atualmente existentes no ensino da Matemática — muitos dos quais por ele criados ou fortemente agravados — bem como manifesta impreparação nos diversos campos da política educativa, não só no que respeita ao ensino básico e secundário, mas também ao ensino superior.

19 de dezembro de 2013

Lurdes Figueiral

Direção da Associação de Professores de Matemática

Estatuto Editorial da *Educação e Matemática*

A *Educação e Matemática* (EM) é uma publicação da Associação de Professores de Matemática (APM). É uma publicação periódica, sai cinco vezes por ano e um dos seus números anuais é temático. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro. Os principais objetivos da *Educação e Matemática* são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas atuais e importantes da educação; matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

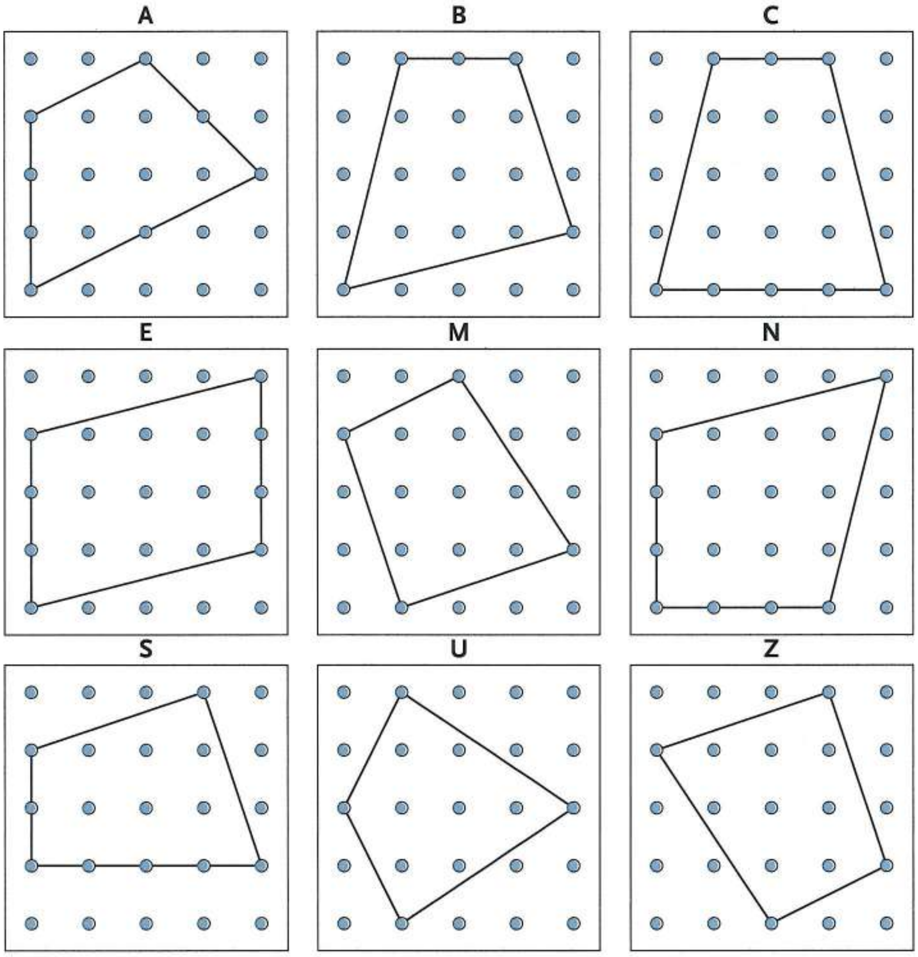
A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias ... . A EM tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com caráter permanente. A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista. À semelhança das outras revistas informativas, a *Educação e Matemática* assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Diretora da *Educação e Matemática*

De novo os Quadriláteros (1)

Quando pessoas diferentes olham para uma figura nem todas veem o mesmo. Este é certamente um dos aspetos que dificulta o ensino da geometria. Johnston-Wilder e Mason (p. 53) defendem a utilidade de dizermos o que vemos, e quando o fazemos num grupo depressa descobrimos que aquilo que para uns é mais saliente, para outros não teve importância ou não mereceu atenção. Afirmam que o desenvolvimento do raciocínio geométrico depende da nossa capacidade de identificar e reconhecer relações geométricas que são úteis e isso pode desenvolver-se através da participação em discussões em que ouvimos o que os outros têm para dizer e em que cada um pode defender o que vê.

A tarefa que se propõe foi construída para provocar discordâncias. Perante estes 9 quadriláteros há quem seja mais sensível a uma relação entre os elementos de cada figura do que a outra. A rede ponteada ortonormada que sustenta os quadriláteros constitui um suporte indispensável dos raciocínios que se pretendem fazer.



1. Há algum quadrilátero repetido? Há intrusos no grupo de quadriláteros?
Carateriza a família de quadriláteros que consideraste.
Acrescenta mais algum exemplar que aches que deve pertencer à família que escolheste.

2. Dos 9 quadriláteros apresentados qual é o que tem o maior perímetro?
Será possível acrescentar algum quadrilátero a este grupo de 9 e que tenha um perímetro maior? Se sim, acrescenta, se não porquê?

3. Dos 9 quadriláteros apresentados qual é o que tem a maior área?
Será possível acrescentar algum quadrilátero a este grupo de 9 e que tenha uma área maior? Se sim, acrescenta, se não porquê?

Referências Bibliográficas

Johnston-Wilder, Sue e Mason, John (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.

O papel da tecnologia na aprendizagem da matemática. Um exemplo com recurso ao *Geogebra*[1]

Hoje em dia não podemos falar do ensino e aprendizagem da matemática sem referir o papel da tecnologia. Já temos várias décadas de trabalho e investigação sobre este fenómeno, mas parece que ainda há um longo caminho a percorrer. Do ponto de vista do currículo prescrito (Gimeno-Sacristán, 1998) as indicações e orientações são no mínimo controversas, envolvendo avanços e recuos que dão sinais contraditórios para os professores que têm que modelar esse mesmo currículo de modo a colocá-lo em ação na sala de aula. A investigação mostra-nos que há benefícios inequívocos na utilização da tecnologia, embora a sua efetiva integração na sala de aula ainda necessite de um trabalho sistemático que integre as ferramentas disponíveis de forma a criar ambientes de aprendizagem autênticos.

Muitas vezes o uso que é proposto aos alunos não tem um caráter sistemático, envolvendo a realização de tarefas esporádicas em situações de aprendizagem muito particulares. Os ambientes de aprendizagem criados nestes contextos diferem bastante daqueles a que os alunos estão habituados alterando significativamente as normas da sala de aula vigentes. Ainda assim é possível verificar que este tipo de abordagens podem revelar-se uma mais-valia na aprendizagem de conceitos que por vezes o professor considera adquiridos por os mesmos já terem sido abordados em diversos tópicos do currículo em anos de escolaridade anteriores.

A situação de aprendizagem que a seguir se descreve insere-se no currículo do 9.º ano de escolaridade, no estudo das propriedades geométricas da circunferência com recurso ao *software Geogebra*. É a primeira vez que estes alunos utilizam este programa computacional no ano letivo, embora tenham alguma experiência de utilização do computador com base noutras ferramentas, como por exemplo a folha de cálculo. No episódio que se apresenta procura-se mostrar como é que o *software* pode dar *feedback* ao professor no sentido de saber se alguns dos conceitos elementares estão ou não reificados (Sfard, 1992).

O ambiente de aprendizagem criado envolve a realização de uma ficha de trabalho relativa ao Ângulo ao centro e Ângulo inscrito (1ª parte em anexo), realizada por alunos que trabalham em díades e onde se pretende que estes deduzam as propriedades que lhe são enunciadas. A recolha dos dados foi apoiada pela gravação das ações e diálogos da díade, através da gravação do ecrã do computador, que nos permitiu aceder ao modo de pensamento exteriorizado pelas alunas Carla e Maria.

A tarefa consistia em começar por desenhar um ângulo inscrito na circunferência, como se mostra na Figura 1, e de seguida desenhar um ângulo ao centro, como mostra a Figura 2.

Depois era pedido para medir as amplitudes dos dois ângulos, registar numa tabela da Folha de Cálculo e voltar a repetir o processo até obter dez pares de medições no total, como se exemplifica na Figura 3.

Com o objetivo de caracterizar a compreensão manifestada pelo grupo Carla e Maria no que se refere ao conceito de ângulo e de semirreta vamos analisar a forma como ambas abordaram a primeira parte da tarefa. Começaram por ler a tarefa e realizar os primeiros passos pedidos. As primeiras dificuldades surgiram na manipulação da ferramenta

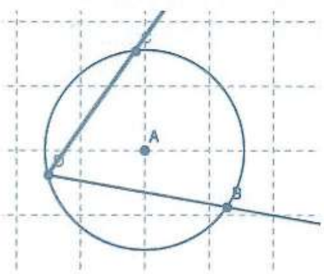


Figura 1. Ângulo inscrito na circunferência.

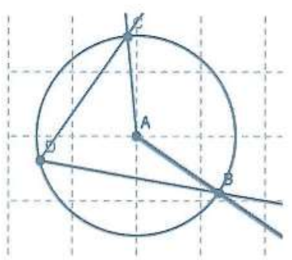
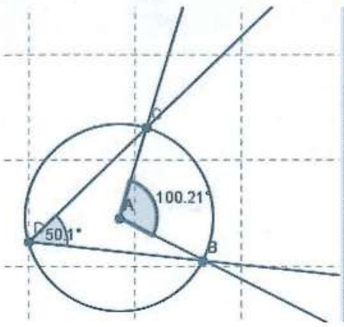


Figura 2. Ângulo inscrito e ao centro.



1	Ângulo Inscrito	Ângulo ao Centro
2	67.27°	134.54°
3	49.62°	99.24°
4	75.18°	150.35°
5	99.31°	198.61°
6	50.1°	100.21°
7		
8		
9		
10		
11		

Figura 3. Simulação da construção da tabela.

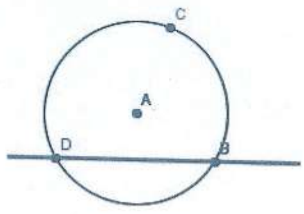


Figura 4. Reta desenhada pela Maria.

porque não conseguiam fixar o ponto B (passo número 3). Depois de várias tentativas percorrendo os vários separadores, chamaram a professora para as ajudar. Para construir o ângulo inscrito na circunferência, a Maria começou por desenhar uma reta, como mostra a Figura 4.

Carla: Tás a fazer retas! Não é essa! Volta para atrás!

[A Maria apaga a última ação.]

Carla: Volta ao menu!

[A Maria passou o rato entre as opções de construir uma reta, uma semirreta ou um segmento de reta. Mostrou-se indecisa entre as duas últimas opções, passando o rato constantemente entre elas.]

Carla: Pára!! Pára!!! Pode ser essa! Segmentos de reta, para unir BDC!

[A Maria constrói o triângulo BDC.]

Carla: Boa!!!

As alunas ficaram satisfeitas quando conseguiram construir o triângulo. Esta atitude parece mostrar que elas confundiram a noção de ângulo com a de triângulo, pois ambos necessitam de três pontos. Ao longo desta construção mencionam várias vezes BDC uma para a outra. Não devem ter reparado que a alínea pedia para construírem um ângulo com vértice em D, ou poderiam pensar que conseguiriam medir o ângulo apenas se estivesse presente num triângulo.

A Maria olhou para o computador dos colegas do lado e verificou que, estes não tinham construído um triângulo, por isso, chamou a professora para se certificar que estavam no bom caminho. A professora chamou a atenção para o facto da ficha pedir para construir o ângulo BDC e não o triângulo BDC e relembrou, com as alunas, a noção de ângulo. As alunas chegaram à conclusão que tinham de apagar o triângulo e desenhar duas semirretas, no entanto, desenharam duas retas, a reta DC e a reta DB. Para a alínea que pede para desenhar o ângulo ao centro CÂB, construíram as retas AC e AB, como mostra a Figura 6. Daqui pode-se depreender que as alunas confundiram as três noções, reta, semirreta e segmento de reta. Mesmo depois de terem refletido que era necessário construir duas semirretas, elas construíram retas.

Passaram então à medição dos ângulos, abriram a folha de cálculo para construir a tabela pedida, colocaram as amplitudes dos ângulos digitando os valores e anotaram as primeiras medições. Quando lhes era pedido para mover o ponto C, não o conseguiram fazer, desiludidas por necessitarem novamente de auxílio, chamaram a professora que as ajudou a refletir, mais uma vez, sobre a noção de ângulo. Depois apagaram todas as retas desenhadas e construíram duas semirretas mas sem a mesma origem, como ilustra a Figura 7 e fizeram o mesmo na construção do ângulo ao centro.

As alunas continuaram a mostrar não ter presente a noção de ângulo, parece que o importante para elas é que retas, semirretas ou segmentos de reta se cruzem.

Voltaram a construir a tabela na folha de cálculo, desta vez arrastando os valores das amplitudes para a tabela. No entanto, ao verificarem que não conseguiam mover, novamente o ponto C, voltaram a pedir ajuda. A professora

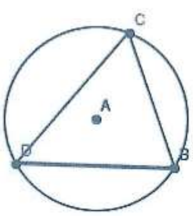


Figura 5. Triângulo construído pelas alunas.

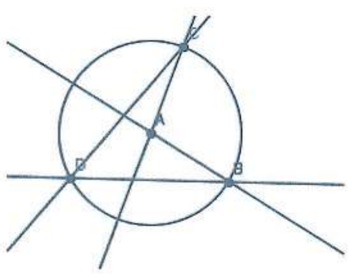


Figura 6. Retas construídas pelas alunas.

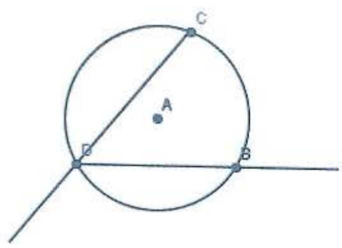


Figura 7. Duas semirretas sem a mesma origem para a construção do ângulo inscrito.

questionou-as no sentido de compreenderem que as semirretas têm de ter a mesma origem e construíram as semirretas de forma correta.

Este episódio mostra-nos que de facto os conceitos de ângulo, reta, semirreta e segmento de reta manifestados pelas alunas não estavam compreendidos e consequentemente elas não conseguiam manejá-los para construir novos objetos matemáticos que estavam a ser solicitados. Dado que são conceitos elementares, que já foram abordados ao longo do 2.º e 3.º ciclos do ensino básico. que elas frequentam, seria de esperar que os mesmos já estivessem reificados e que os conseguissem usar para construir os novos conceitos que agora eram abordados. Nas tarefas seguintes estas alunas já não manifestaram dificuldades quando confrontadas com estes conceitos, apresentando mesmo um desempenho muito bom. É neste sentido que consideramos que o *software* desempenhou um papel fundamental na construção destes conceitos, proporcionando a estas alunas uma experiência matemática que até aqui nunca lhe tinha sido oferecida. O uso de ferramentas que permitam abordar os conceitos a partir das suas múltiplas representações desempenham um papel eficaz na compreensão dos mesmos, podendo o professor desta forma monitorizar e consolidar os conhecimentos dos seus alunos.

Nota

1. Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Promover o Sucesso em Matemática* (contrato PTDC/CPECED/121774/2010).

Bibliografia

Gimeno-Sacristán, J. (1998). O Currículo: Uma reflexão sobre a prática. Porto Alegre: Artmed.

Salvador, C. M. (2013). *Geometria: um estudo sobre ângulos e polígonos, no 9.º ano de escolaridade, com recurso ao Geogebra.* (Tese de Mestrado), Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification — the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function (pp. 59–84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

ANTÓNIO DOMINGOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCT-UNL
UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO EDUCAÇÃO
E DESENVOLVIMENTO (UIED)

ANEXO

ESCOLA BÁSICA DOS 2.º E 3.º CICLOS	Data: __/__/__
Ficha de Trabalho de Matemática	*Propriedades Geométricas das circunferências*
Nome: ______________________ **N.º:** ____	**Turma:** B 9.º Ano

Objetivo: Estudar as propriedades geométricas das circunferências utilizando o *software Geogebra*.

Tarefa 1 — Ângulo ao centro e Ângulo inscrito

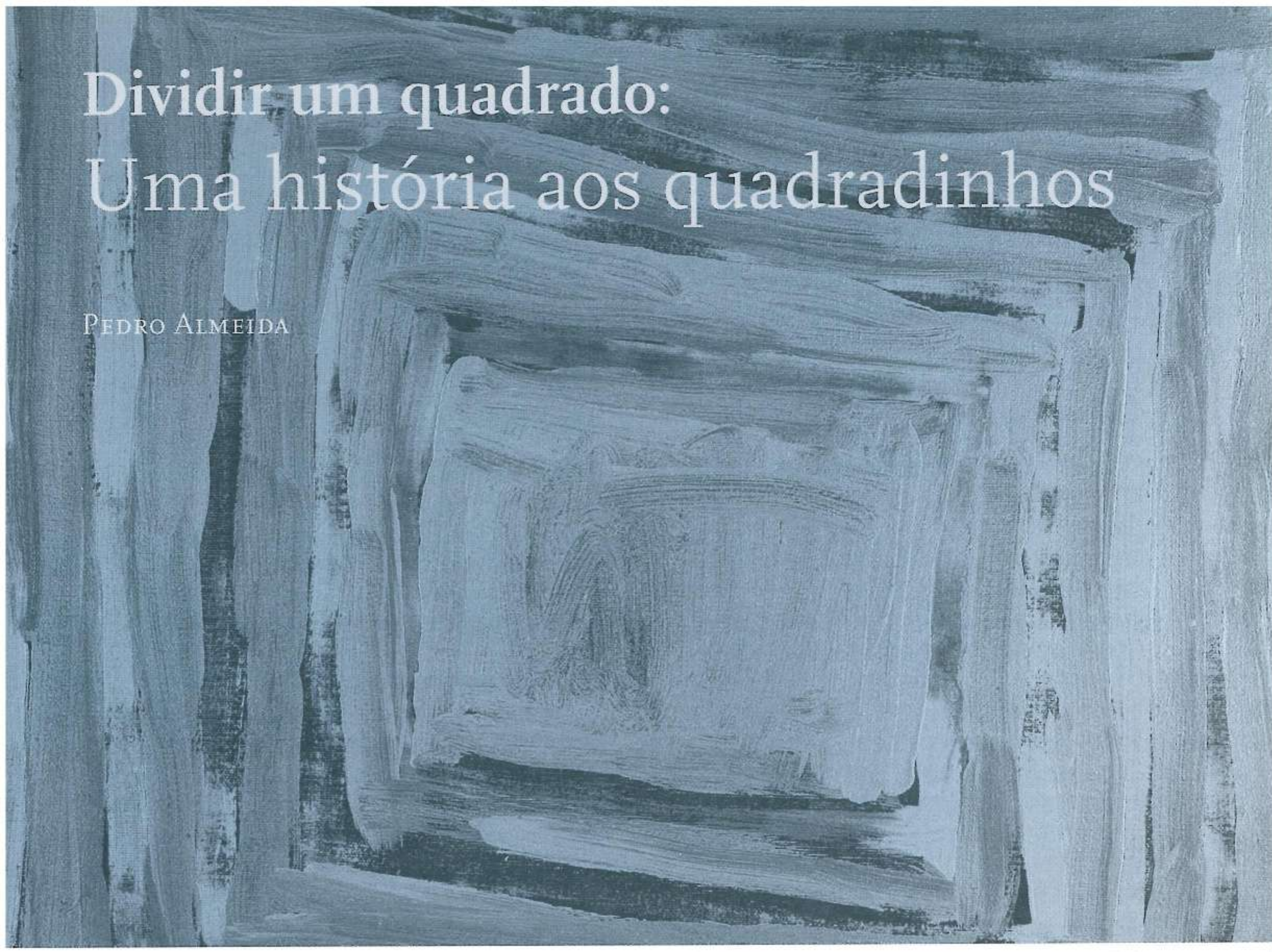
1. Abre o *GeoGebra*.
2. Desenha uma circunferência de centro A e raio à tua escolha.
3. Fixa o ponto B, nas propriedades dos objetos: seleciona «*Fixar objeto*».
4. Representa dois pontos na circunferência, C e D.
5. Sabendo que um *ângulo inscrito numa circunferência é o que tem vértice nesta e os lados contêm cordas*, desenha o ângulo BD̂C .
6. Sabendo que um *ângulo ao centro numa circunferência é o que tem o vértice no centro desta e os seus lados contêm raios*, desenha o ângulo CÂB (*altera a cor das semirretas*).
7. Mede a amplitude do ângulo ao centro e do ângulo inscrito.
8. No menu Exibir, seleciona a Folha de Cálculo.
9. Regista os teus valores numa tabela da folha de cálculo, semelhante à da figura:

Folha de Cálculo

	A	B
1	Ângulo inscrito	Ângulo ao centro
2	57.97°	115.94°
3		

10. Move o ponto C e volta a registar os novos valores obtidos dos ângulos na tabela.
11. Repete o ponto 9 mais oito vezes, registando sempre os valores dos ângulos na tabela.
12. Guarda o ficheiro com o nome da tarefa e o teu nome (Exemplo: T1_Ana2_Sofia17)
13. Analisa cada linha da tua tabela e regista as tuas conclusões?

...



Dividir um quadrado: Uma história aos quadradinhos

Pedro Almeida

Todos sabemos dobrar um quadrado de papel em partes iguais. E nessa dobragem reconhecemos usar preceitos de rigor geométrico. Na prática a aproximação ao rigor depende da habilidade do executante, porque em verdade ele só existe na nossa imaginação.

É fácil encontrar soluções de divisão por dobragem em duas, quatro, oito partes... uma sucessão de potências de 2, até onde o papel o permitir. Mas então e em 3, e em 5,...? Claro que a olho não vale, tem de haver alguma referência geométrica.

Insistiram comigo para que contasse umas descobertas acerca da divisão do quadrado em partes iguais. Para mim foi uma história de interrogações que se bifurcou várias vezes e tem ainda por onde crescer. Contá-la ao pormenor não cabe aqui, dizer simplesmente onde cheguei não tem qualquer interesse. Talvez um meio termo pudesse ser útil para nos questionarmos, mais uma vez, sobre os caminhos que percorremos quando queremos aprender.

A partir de agora vou referir-me sempre à divisão do quadrado (pode perfeitamente ser um outro retângulo). Claro que comecei pela divisão por dobragem de papel, mas cedo o processo se desmaterializou.

O interesse pela divisão em 3 e em 5 partes marinou durante anos até dar lugar à vontade de a procurar, numa esforçada «investigação», recorrendo à tentativa e erro. Se o recurso às diagonais ou às mediatrizes dos lados estava esgotado tinha de explorar outros segmentos.

A divisão em três partes (figura 1) foi a primeira a surgir por dobragem e verificada depois com recurso a um programa de geometria dinâmica.

Considerando,

— o quadrado ABCD[1],

— o ponto médio E do lado AB,

— o ponto de interseção F da diagonal AC com o segmento ED,

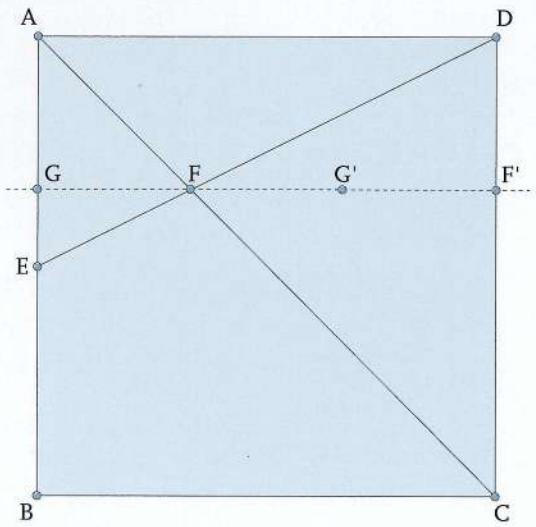


Figura 1

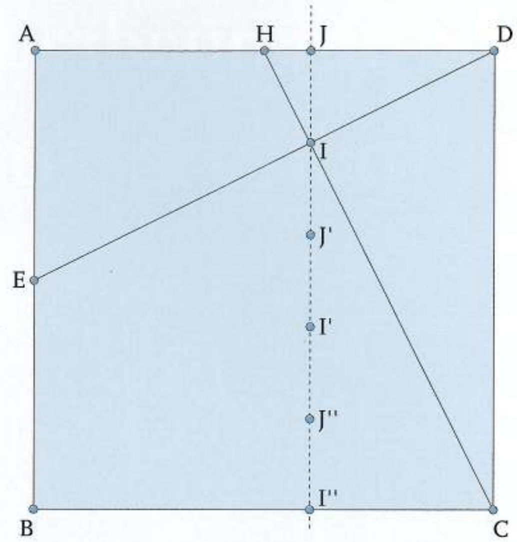


Figura 2

a distância de F ao lado AB (ou a AD) é um terço da medida do lado.

Verifiquei recorrendo a meias voltas: o ponto G foi obtido por meia volta de G com centro em F, e o ponto F por meia volta de F com centro em G. Como não tinha a certeza se F caíra exatamente sobre o lado CD, usei a ferramenta de medida do programa para verificar se realmente GF era ou não um terço do lado do quadrado.

Fiquei satisfeito mas o sucesso motivou-me a ir mais além. A divisão em 5 partes passou ser especialmente querida pois, a partir dela obteria uma desejada divisão em dez partes iguais. Continuei a experimentar interseções entre outros segmentos, agora já recorrendo ao programa de geometria dinâmica e não a dobragens.

Obtive a solução quando substituí a diagonal AC pelo segmento HC, sendo H o ponto médio de AD (figura 2). Sobre o ponto de interseção, tracei a perpendicular ao lado mais próximo e obtive o ponto J. Recorri a meias voltas sucessivas até obter o ponto I'' que caiu sobre o lado BC.

Dividindo assim o lado do quadrado, consigo dividir o quadrado em cinco partes iguais e, por divisão destas ao meio, está dividido em 10 partes.

Considerei que tinha alcançado o meu objetivo, o de achar as divisões que me faltavam. Repare-se que com as divisões em 3 e em 5 conseguia também a divisão em 6, 9 e 10 partes iguais. Só me faltava a divisão em sete, mas o interesse marinou, mais uma vez, até encontrar uma amiga que me renovou o interesse. «Acho que em 7 não dá, exclamei a brincar, o 7 é um primo tramado».

Mais do que a divisão em 7 partes iguais o que intrigava era o modo de demonstrar que estas divisões funcionavam, sem recorrer à experimentação.

Pensei que só obteria a divisão em 7 partes iguais se encontrasse alguma regularidade no processo. Além disso, essa regularidade poderia ajudar-me a ver uma explicação geométrica para o efeito.

Como tinha obtido sucesso com interseção de segmentos que ligavam vértices a pontos médios dos lados, resolvi continuar.

A figura 3 mostra já um desenvolvimento dessa procura de regularidade. Tracei sobre o quadrado os segmentos ED e EC, depois AG e BF, sendo E, G e F os pontos médios dos respetivos lados. Assinalei as interseções H, I, J e K e, recorrendo (outra vez) a sucessivas meias voltas verifiquei que o segmento HI media um terço do lado e que o segmento JK correspondia a um quinto do lado. Encontrados os pontos H e I tracei os segmentos AH e BI, os quais intersetam ED e EC em J e K (já assinalados anteriormente), e em N e O. De seguida verifiquei que NO media a sétima parte do lado do quadrado. Curioso como este processo vai definindo sucessivamente segmentos com comprimento expresso por frações unitárias de denominador ímpar. Porque não uma sucessão com denominador natural?

Recomecei. A teimosia (e uma dose de intuição) dizia-me que encontraria sobre uma diagonal os pontos que me dariam a sucessiva divisão em 1/2, 1/3, 1/4,... porque, se bem se lembram foi sobre uma diagonal que encontrei 1/3 e 1/2 já lá estava.

A figura 4 mostra como fui traçando segmentos que se intersetam com a diagonal BD.

O primeiro segmento é a diagonal AC. Pelo ponto de interseção E tracei uma perpendicular a CD e determinei o ponto de interseção F.

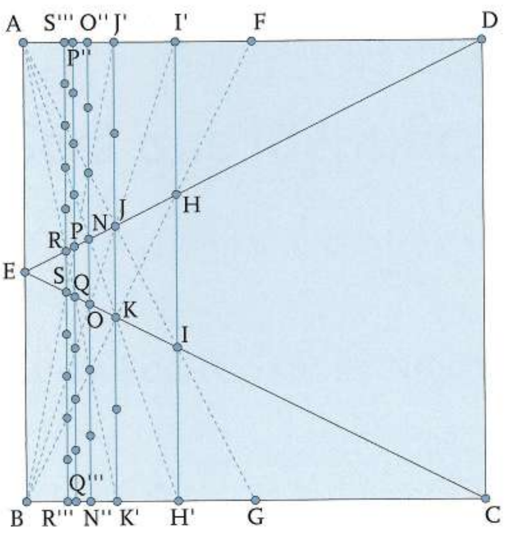


Figura 3

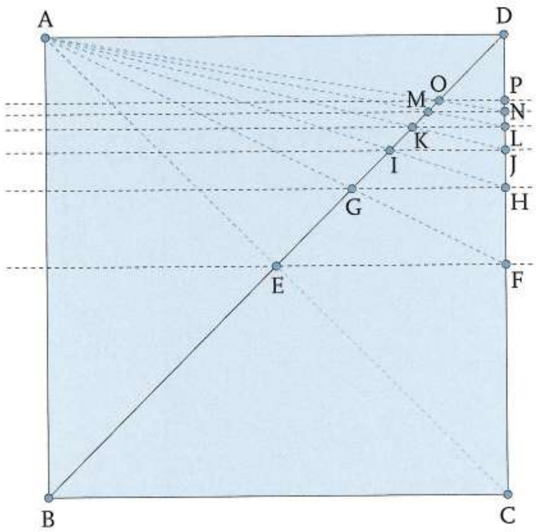


Figura 4

Traço o segmento AF que se intersecta com BD em G. Traço a perpendicular a CD e determino o ponto de interseção H. Repito o procedimento: traço AH, encontro a interseção I, desenho a perpendicular a CD passando por I e marco a interseção J. Deste modo vou obtendo sucessivamente a divisão do lado do quadrado.

O segmento EF (igual a FD) é 1/2 de CD; o segmento HD é 1/3 de CD... o segmento PD divide o lado em 7 partes iguais e continuaremos por aí adiante se seguirmos sempre o mesmo procedimento.

Até agora a verificação das ditas divisões em partes iguais foi sempre obtida recorrendo a meias voltas e aparente coincidência de pontos sobre pontos ou segmentos. Ora isso não chega, é como as dobragens feitas a olho. É preciso encontrar provas mais válidas. Nesta altura, um olhar mais atento encontraria as tais provas, mas eu deambulei por percursos tortuosos, levantando novas questões e encontrando alguns becos muito curiosos. É neste ponto da história que consigo entusiasmar duas colegas em busca de uma ferramenta que mostrasse que as divisões funcionavam rigorosamente. De três maneiras diferentes usámos a semelhança de triângulos para mostrar que os tais segmentos dividiam exatamente o lado do quadrado (e a diagonal) em partes iguais. O teorema de Tales também ajuda.

Os triângulos ABF e DFE são semelhantes, pois

- os ângulos AFB e DFE são verticalmente opostos,
- os ângulos EDF e ABF são alternos internos, assim como FAB e FED.

Sendo E o ponto médio, o segmento DE é 1/2 de AB e portanto a razão de semelhança é 1/2. O segmento DF divide BF em 2 partes iguais, logo é 1/3 da diagonal.

De acordo com o teorema de Tales, sendo paralela ao lado AD a reta que passa em F, a sua interseção em G com o lado CD marca o segmento DG que é 1/3 do lado, tal como DF é 1/3 da diagonal.

Se agora traçarmos o segmento AG, teremos os triângulos ABH e DHG semelhantes tal como os referidos na figura 5. Entretanto sabemos já que DG é 1/3 do lado. Portanto DH é 1/3 de BH, sendo então 1/4 da diagonal. Tal como fizemos para a figura 5, a interseção da reta paralela ao lado AD que passa em H define um segmento DI que é 1/4 do lado, tal como DH é 1/4 do lado (figura 6).

Como se pode ver poderemos continuar recursivamente a definir segmentos do lado do quadrado que correspondem a uma sucessão de frações unitárias de denominador natural.

Como disse no início, vale a pena olhar para o percurso que fiz. Não é exagero reconhecer que se tratou de uma «experiência matemática». Uma experiência que progrediu mais à custa de perguntas que de respostas, num ciclo de conjetura e verificação, de palpites que suscitavam novos interesses que me levaram a novas paisagens (figura 7). Outro ingrediente desta experiência é a autoria do problema, fui eu que o criei e o vivi com o entusiasmo ingénuo de quem pensa descobrir algo novo. Numa pesquisa superficial pela Web encontrei o teorema de Haga, mas deve haver muito mais coisas relacionadas com isto. Para além das atitudes, há a considerar o papel desempenhado pelo *software* de geometria dinâmica (GEOGEBRA). A facilidade e rigor com que se fazem as construções e as ferramentas que auxiliam na verificação de resultados impulsionam a realização de mais experiências antes de passar à fase de demonstração e que para ela contribuem. Infeliz-

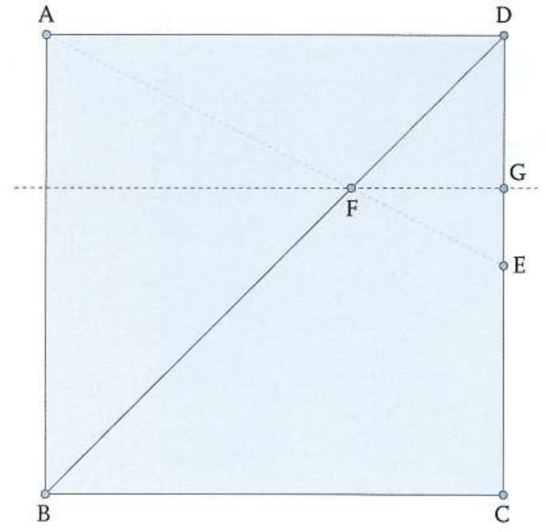


Figura 5

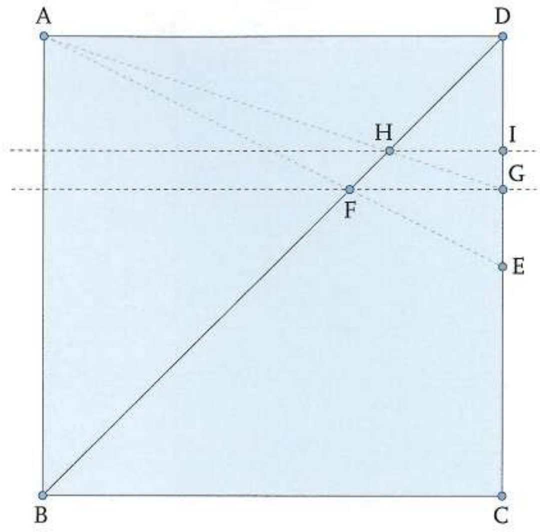


Figura 6

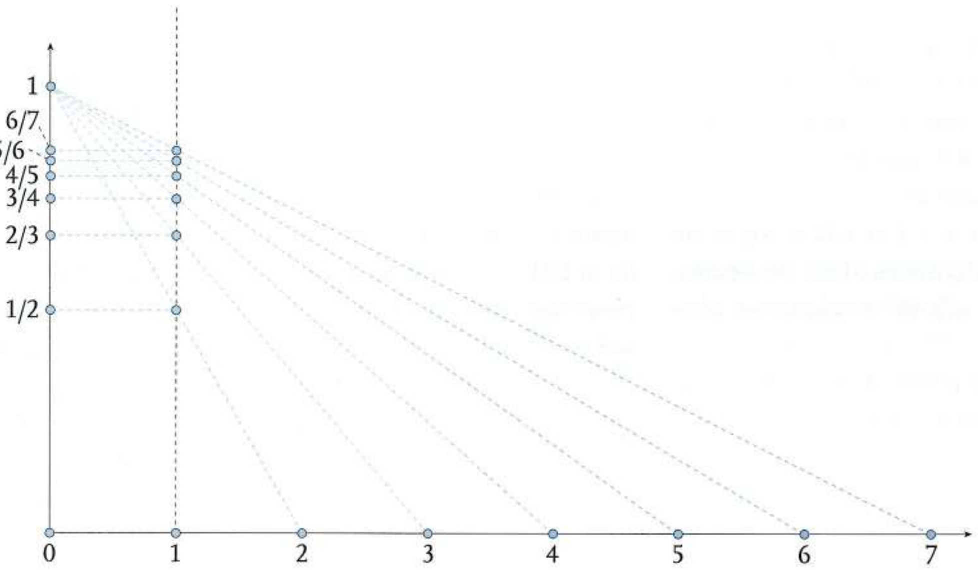


Figura 7

mente a escola, falo de um modo geral, não promove estas atitudes e elas parecem-me essenciais no desenvolvimento de competência matemática. Inquieta-me a conceção sobre a aprendizagem da Matemática que se limita à capacidade de resolver os exercícios ou problemas, sustentada pela prática intensiva, pelo treino de tarefas de aplicação. Isso é essencial, mas quando se olha para a motivação e envolvimento dos alunos e se descobre que eles mesmos já não estão minimamente interessados em compreender os conhecimentos que adquirem (?) e só querem é passar no teste e no exame... E quando eles nos dizem que a Matemática é aquela disciplina em que para passar no exame só precisam de treinar muito. Estamos a formar o quê, máquinas de calcular?

Nota

[1] Simplifiquei ao máximo a notação e não me parece que no decorrer do texto se crie alguma ambiguidade por causa disso.

Pedro Almeida
Escola Superior de Educação de Lisboa

Será que identificámos eixos de simetria?

Guida Rocha, Sandra Nobre

No 1.º ciclo a exploração do conceito de simetria de reflexão tem sido um grande desafio para professores e alunos. Enquanto professoras sentimos necessidade de clarificar o que entendemos sobre este conceito pelo que adotamos a definição apresentada por Veloso (1998), na qual uma figura tem simetria de reflexão se existe uma isometria do plano da figura, definida por um eixo, que deixa a figura invariante, ou seja, alguns pontos da figura podem mudar de posição mas a figura no global não se altera. Para trabalhar o conceito de simetria de reflexão é fundamental o recurso a tarefas que façam apelo ao uso de material concreto e que facilite a compreensão destes conceitos por parte dos alunos (Veloso, 1998). A escolha dos recursos, bem como a sua utilização é essencial na aprendizagem dos conceitos pelo que devem ser bastante ponderados por parte do professor.

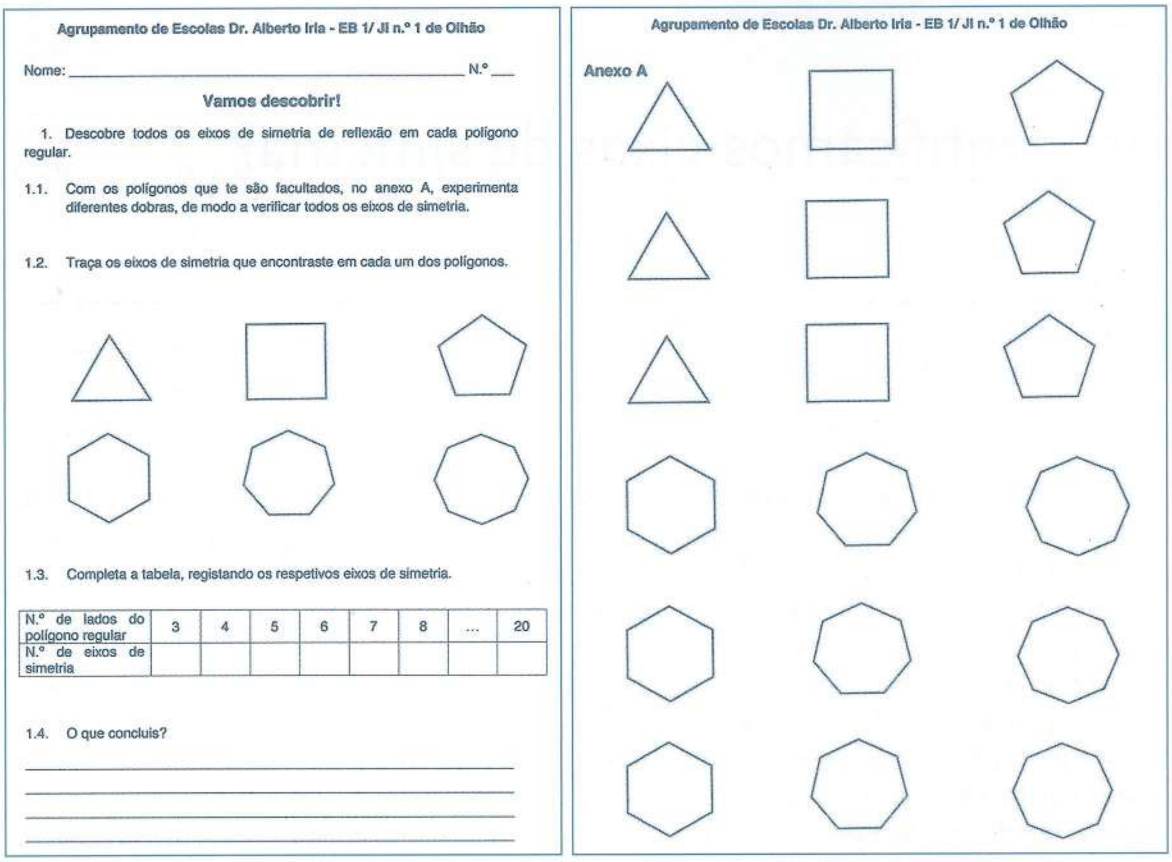
Este artigo surge como reflexão de uma aula, de cerca de noventa minutos, numa turma do 4.º ano, na qual o principal objetivo foi «Identificar no plano eixos de simetria de figuras» (Ministério da Educação, 2007, p. 23), neste caso concreto de alguns polígonos regulares. O ponto de partida da nossa reflexão foi o propósito principal do ensino da Geometria, do programa de Matemática do ensino básico de 2007, o qual incide no desenvolvimento do sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, bem como na utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos. Refletimos sobre as opções metodológicas e algumas das limitações que sentimos durante e após a implementação da tarefa.

A aula foi planificada tendo em conta o trabalho prévio desenvolvido com estes alunos no tema Geometria, uma vez que a primeira autora foi professora da turma desde o 2.º ano. No 3.º ano, no estudo da simetria de reflexão, a professora propôs tarefas em que os alunos completaram figuras, sendo apresentada parte da figura e um ou dois eixos de simetria (eixo horizontal, eixo vertical ou ambos). Para a visualização das figuras os alunos manipularam espelhos e miras, no entanto a maioria não conseguiu completar as figuras como se pretendia. A falta de rigor no manuseamento do material levou a que os alunos não colocassem os recursos disponíveis sobre o eixo de simetria, pelo que não se verificou a invariância da figura. O incorreto posicionamento do espelho e da mira, limitou a compreensão do conceito de reflexão, uma vez que os alunos não observaram o que se pretendia, logo não atingimos o nosso objetivo. Na aula seguinte a noção de eixo de simetria foi trabalhada a partir da dobragem de figuras. Foram distribuídas pelos alunos, figuras já com os eixos de simetria representados. Após dobragem das figuras pelos eixos de simetria, os alunos concluíram que «ao dobrarmos a figura pela reta que indica o eixo de simetria, as duas partes da figura coincidem ponto por ponto, caso contrário a reta não é eixo de simetria».

Tendo em conta as dificuldades no uso de espelhos e miras e uma vez que a técnica de dobragem resultou no 3.º ano, na planificação deste tópico no 4.º ano optámos por sugerir a dobragem como método de verificação da existência de eixos de simetria em polígonos regulares, desde o triângulo ao octógono, aplicando a tarefa da Figura 1.

Após a entrega do enunciado da tarefa, os alunos, individualmente, começaram por recortar os polígonos regulares distribuídos numa folha anexa. De seguida, através de dobragens tentaram identificar os seus eixos de simetria de reflexão. Durante o trabalho dos alunos a professora aproveitou para questioná-los acerca do nome dos polígonos.

Surgiram alguns obstáculos durante a implementação da tarefa. O primeiro foi no recorte dos polígonos, pois a falta de precisão impossibilitou que na dobragem dos polígonos as duas partes coincidissem rigorosamente. No entanto, apesar da falta de rigor, de um modo geral, os alunos traçaram o resultado das suas dobragens para o triângulo e para o quadrado.


Agrupamento de Escolas Dr. Alberto Iria - EB 1/ JI n.º 1 de Olhão

Nome: ______________________ N.º ___

Vamos descobrir!

1. Descobre todos os eixos de simetria de reflexão em cada polígono regular.

1.1. Com os polígonos que te são facultados, no anexo A, experimenta diferentes dobras, de modo a verificar todos os eixos de simetria.

1.2. Traça os eixos de simetria que encontraste em cada um dos polígonos.

1.3. Completa a tabela, registando os respetivos eixos de simetria.

N.º de lados do polígono regular	3	4	5	6	7	8	...	20
N.º de eixos de simetria								

1.4. O que concluis?

Agrupamento de Escolas Dr. Alberto Iria - EB 1/ JI n.º 1 de Olhão

Anexo A

Figura 1. Tarefa e anexo com polígonos

O segundo obstáculo prendeu-se com o aumento do número de dobras, à medida que o número de lados aumentava. A Figura 2 mostra o registo do André que a partir do pentágono deixa de realizar dobragens e experimenta traçar os eixos de simetria recorrendo unicamente à régua.

Outros alunos fizeram as dobras, mas não as assinalam a lápis, acabando por se perder na contagem. Em dezoito, dez alunos identificaram corretamente o número de eixos de simetria para cada um dos polígonos regulares, embora não tenham sido rigorosos no recorte das figuras e no traçar dos eixos. Dos oito alunos que não conseguiram encontrar todos os eixos de simetria dos polígonos, destacamos o exemplo de uma aluna que para o pentágono só encontrou um eixo de simetria e dois alunos que não encontraram nenhum. Observámos que à medida que o número de lados do polígono aumentava poucos alunos continuaram a utilizar o método da dobragem, pois perdiam-se no número de dobras, alguns desses alunos apresentaram os eixos de simetria, recorrendo à régua, unindo vértices opostos e os pontos médios dos lados opostos, à semelhança do que verificaram no quadrado e no triângulo. Os oito alunos que não traçaram todos os eixos de simetria desistiram no pentágono, quando se depararam com o aumento do número de dobras possíveis. São exemplos a aluna que só traçou apenas um eixo de simetria no pentágono e os dois alunos que não traçaram nenhum, estes alunos manifestaram imediatamente a sua desistência ao dizer «Não consigo!».

Para a discussão da tarefa, a professora preparou um exemplo de cada polígono ampliado, que fixou e dobrou no quadro de acordo com os eixos de simetria. Tentou depois através do questionamento, que os alunos identificassem o número de eixos de simetria para qualquer polígono regular:

Professora: Como é que posso verificar se já tenho todos os eixos de simetria, ao olhar para as figuras?

Daniel: O triângulo tem 3, o quadrado tem 4, o pentágono tem 5.

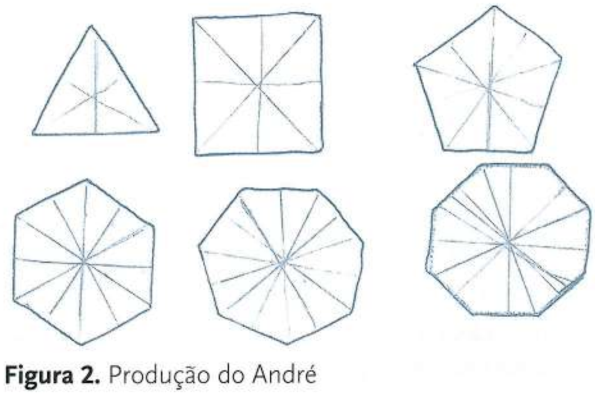


Figura 2. Produção do André

Professora: Porquê?

Daniel: Porque o triângulo tem 3 lados e 3 vértices, o quadrado 4 lados e 4 vértices...

Professora: Então interessa o número de lados e de vértices.... E o hexágono?

Turma: 6

Professora: E se passarmos para um polígono regular com 20 lados?

Turma: 20 eixos.

Este diálogo foi crucial para grande parte dos alunos sistematizarem as suas conclusões.

A Beatriz apresentou a sua conclusão e a professora escreveu-a no quadro: «O número de lados de um polígono regular é igual ao número de eixos de simetria». Os alunos que não chegaram sozinhos a esta conclusão, copiaram a resposta da Beatriz para a sua folha de registo.

Concluída a tarefa proposta, a professora usando o triângulo equilátero colocou outras questões no sentido de explorar os eixos de simetria, tanto nos polígonos regulares com um número par de lados como com um número ímpar.

Professora: Qual é a regra para descobrir os eixos de simetria do triângulo?

Carlos: O vértice vai unir no lado. (apontando para o lado oposto)

Professora: O vértice vai unir no meio do lado oposto.

Professora: E no quadrado? Acontece o mesmo?

Alguns alunos: Os dois vértices.

Professora: Que vértices?

Daniel: Opostos

A professora pegou no quadrado e traçou os referidos eixos de simetria.

Professora: Já tenho dois eixos de simetria e agora?

Aluno C: Dobrar ao meio.

Professora: O quê?

Aluno C: Os lados opostos. E depois a mesma coisa.

De forma análoga a discussão prosseguiu para polígonos com um maior número de lados. A partir desta discussão, a professora sugeriu o registo das conclusões a que os alunos chegaram com base nas suas observações. A professora registou no quadro a questão: «Quando o número de lados é ímpar o que se une?». Vários alunos reagiram a esta questão colocando o dedo no ar.

Fernando: Une-se o vértice a...

Turma: ... metade do lado oposto.

Professora: Quando o número de lados é par?

Gonçalo: Unem-se os vértices opostos.

Daniel: E os lados opostos.

O registo das conclusões no quadro foi intercalado com a discussão, sendo utilizadas as expressões que os alunos referiram.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletindo acerca da atividade descrita, podemos constatar que ao optarmos por serem os alunos a recortar os polígonos, fornecidos na folha anexa, nos deparámos com uma limitação na identificação dos eixos de simetria, uma vez que as figuras passaram a não ter simetria. Uma forma de minimizar este obstáculo poderia ser fornecer folhas de papel vegetal com os polígonos impressos sem necessidade de recorte. A transparência deste material facilita a dobragem e possibilita aos alunos a visualização dos eixos de simetria enquanto retas, o que não se verifica na opção do recorte. Atendendo às dificuldades que os alunos manifestaram na identificação e representação dos eixos de simetria consideramos uma mais-valia a discussão dos eixos de simetria para polígonos regulares com número de lados par e ímpar, facto que não estava contemplado na nossa planificação. Contudo, podíamos ainda ter aproveitado para introduzir a noção de ponto médio, quando os alunos referiram «nos polígonos pares unem-se as metades dos lados opostos», o que não aconteceu.

Esta reflexão leva-nos a ponderar sobre as nossas opções relativamente aos materiais a utilizar no estudo da simetria de reflexão e da identificação dos eixos de reflexão, bem como a estarmos despertas para a necessidade de rigor na linguagem matemática, desde os primeiros anos.

Referências

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC (disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf)

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais. Materiais para professores.* Lisboa: IIE.

GUIDA ROCHA
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DR. ALBERTO IRIA, OLHÃO

SANDRA NOBRE
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS PROFESSOR PAULA NOGUEIRA, OLHÃO

A determinação do m.d.c. de dois números e a Subtracção recíproca / Algoritmo de Euclides

Florinda Costa, Manuela Ribeiro, Mª José Carinha Bóia

O conceito de divisibilidade era já dominado pelos pitagóricos[1] e este arrastava naturalmente a determinação dos divisores comuns de dois ou mais números e, em particular, a determinação do m.d.c. de dois números.

Vamos encontrar a resposta dada pelos pitagóricos a este último problema nas proposições 1 e 2 do Livro VII dos *Elementos de Euclides*[2]:

Elementos VII, 1 — Dados dois números distintos, e subtraindo-se continuamente de cada vez o menor do maior, se o número que resta nunca medir o anterior até que reste uma unidade então os números originais são primos entre si.[3]

Elementos VII, 2 — Dados dois números não primos entre si, encontrar a sua máxima medida comum.[3]

Como aplicar estas proposições à determinação do m.d.c., por exemplo, de 14 e 32?

1. Partimos do par (14, 32) em que 14 é o menor.	14	32
2. O menor 14 é subtraído ao maior 32. Substituímos o maior pela diferença e conservamos o menor.	14	18
3. Voltamos a repetir o passo 2 subtraindo agora 14 a 18. Ficamos com o par (14, 4) em que agora 4 é o menor.	14	4
4. O menor 4 é subtraído ao maior 14. Substituímos o maior pela diferença e conservamos o menor.	10	4
5. Voltamos a repetir o passo 4 subtraíndo agora 4 a 10.	6	4
6. E mais uma vez subtraíndo 4 a 6. Ficamos com o par (2, 4) em que agora 2 é o menor.	2	4
7. O menor 2 é subtraído ao maior 4. Substituímos o maior pela diferença e conservamos o menor.	2	2

Chegamos então a dois números iguais. Esse número comum — 2 — é o m.d.c. dos dois números de que partimos 14 e 32.

Tal processo para a determinação do m.d.c. de dois números, conhecido como *Subtracção recíproca, antifairese ou antanairese* baseia-se na seguinte propriedade aritmética:

«Dados dois números naturais m e n com m>n, os divisores comuns de m e n são exactamente os divisores comuns do menor dos números n e da sua diferença m − n.»

Assim os divisores comuns de 14 e 32, são os mesmos de 14 e 18, 14 e 4, 10 e 4, 6 e 4, 2 e 4, e, 2 e 2.

Ora 2 é o m.d.c. de 2 e 2, logo também é o m.d.c. de 2 e 4, de 6 e 4, ..., de 14 e 32.

Demonstremos a propriedade anterior:

$$m, n \in \mathbb{N} \text{ com } m>n$$

d é divisor comum de m e n $\Leftrightarrow$ d é divisor comum de n e m-n

1. d é divisor comum de m e n $\Rightarrow$ d é divisor comum de n e m − n.
   Se d é divisor comum de m e n existem números naturais p e q tais que m = pd e n = qd.
   Como m > n, p > q, logo p − q é também um número natural e m − n = (p − q)d, logo d é divisor de m − n.

Como d é também divisor de n, d é divisor comum de n e m − n.

2. d é divisor comum de n e m − n ⇒ d é divisor comum de m e n.

   Se d é divisor comum de n e m − n existem números naturais r e s tais que $n = rd$ e $m - n = sd$.

   $n + (m - n) = rd + sd$

   $m = (r + s)d$

   Ora $r + s$ é um número natural, logo d é divisor de m. Como d é também divisor de n, d é divisor comum de m e n.

Ao aplicarmos a *Subtracção recíproca* à determinação do m.d.c.(14, 32) encontrámos um processo finito e chegámos a dois números iguais. Será que tal situação se verifica sempre?

Partimos de dois números naturais m e n com $m > n$, mantemos o menor, n, e substituímos o maior, m, pela diferença $m - n$, logo por um número inferior. Vemos assim que a sequência dos maiores números de cada par é estritamente decrescente, logo finita. Assim ao fim de um número finito de passos, quando muito igual ao maior dos números, não é possível subtrair o menor do maior, ora tal facto só pode vir da igualdade dos dois números.

O processo anterior pode ser condensado em:

32	14	14	4	4	2
4	2	2	3	0	2

m.d.c.(14, 32) = 2 (último divisor)

Comparemos:

Subtracção recíproca		Processo condensado	
14	32	32	14
14	18	4	2
14	4		

Subtraímos duas vezes 14 a 32, e resta 4

10	4	14	4
6	4	2	3
2	4		

Subtraímos três vezes 4 a 14, e resta 2

2	2	4	2
0	2	0	2

Subtraímos duas vezes 2 a 4, e resta 0

NB: Na Subtracção recíproca subtraímos 2 apenas uma vez a 4 mas ficámos com resto 2, logo podemos voltar a subtrair 2 até obtermos resto zero.

Os gregos não levavam o processo até ao fim, isto é, até ao par (0, 2) porque não tinham símbolo para o zero. Ficavam-se pelo par de números iguais (2, 2).

Este processo condensado da Subtracção recíproca é chamado *Algoritmo de Euclides*.

A Subtracção recíproca foi também usada por Teeteto[4] para determinar a máxima medida comum de duas quaisquer grandezas do mesmo tipo. Encontramos tal referência nas proposições 2 e 3 do Livro X dos *Elementos* de Euclides.

Elementos X, 2 — Se, quando a menor de duas grandezas desiguais é continuamente subtraída de cada vez da maior, e aquela que resta nunca medir a anterior, então as grandezas são incomensuráveis[5].

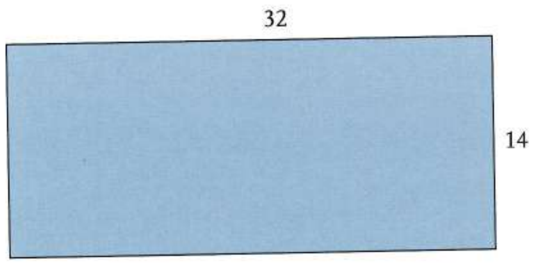
Elementos X, 3 — Dadas duas grandezas comensuráveis, encontrar a sua máxima medida comum[5].

Vemos assim que:

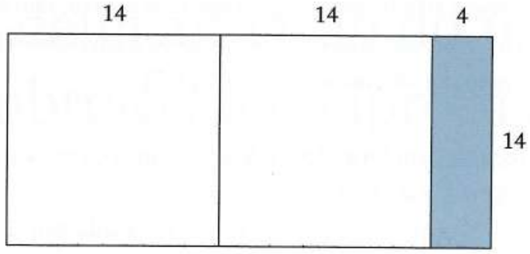
- Elementos VII, 1 e 2 permitem averiguar se dois números distintos são ou não primos entre si e, caso não sejam, determinar o m.d.c. dos dois números;
- Elementos X, 2 e 3 permitem averiguar se duas grandezas são ou não incomensuráveis e, caso não sejam, determinar a máxima medida comum das duas grandezas.

Estamos agora em condições de ilustrar geometricamente a Subtracção recíproca / Algoritmo de Euclides. Retomemos a determinação do m.d.c. (14, 32).

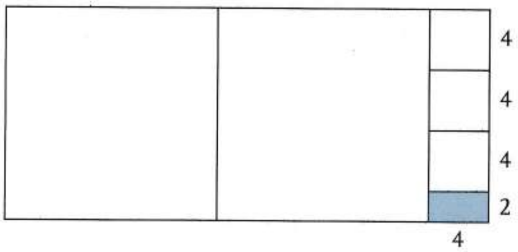
1. Partimos do par (14, 32). Construimos dois segmentos de recta de comprimentos 32 e 14 ou seja um rectângulo 32×14.



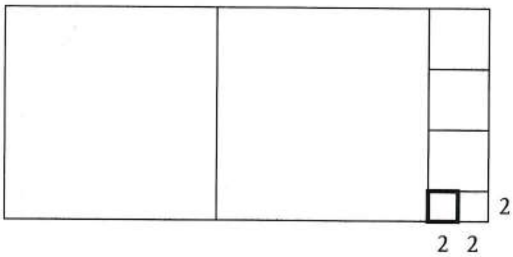
2. A 32 retiramos 14, o maior número possível de vezes — 2, e resta 4, ou ao rectângulo 32×14 retiramos o maior quadrado possível — 14×14, o maior número de vezes possível — 2, e resta um rectângulo 4×14.



3. A 14 retiramos 4, o maior número possível de vezes — 3, e resta 2, ou ao rectângulo 4×14 retiramos o maior quadrado possível — 4×4, o maior número de vezes possível — 3, e resta um rectângulo 4×2.



4. A 4 retiramos 2, o maior número possível de vezes — 2, e resta zero, ou ao rectângulo 4×2 retiramos o maior quadrado possível — 2×2, o maior número de vezes possível — 2, e acabamos de pavimentar o rectângulo inicial 32×14.



O lado deste último quadrado retirado — 2, é o m.d.c. (14, 32).

Notas

1. Pitágoras de Samos viveu na segunda metade do século VI a.C. e fixou-se em Crotona onde fundou uma espécie de confraria, a *escola pitagórica*.
2. Euclides de Alexandria escreveu os *Elementos* cerca do ano 300 a.C.
3. *Vide:* Sá, C. *et al.* (2000) (p. 277)
4. Teeteto nasceu perto de Atenas e viveu entre 417 e 369 a.C.
5. Tradução de: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Bibliografia e referências online

Sá, C. *et al.* (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics — An Introduction*. Columbia: Addison-Wesley Educational Publishers

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

http://www.atractor.pt/mat/mdcEuclides/Euclides/euclides.html

Nota: por opção das autoras, este artigo não obedece às regras do novo acordo ortográfico.

Florinda Costa
Manuela Ribeiro
Mª José Carinha Bóia

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Por sermos defensoras da implementação de uma metodologia que proporcione a todos os alunos oportunidades de vivência de diferentes tipos de experiências de aprendizagem, estamos a propor uma sequência de tarefas que favoreça a integração da história da matemática no seu ensino.

Concretamente, as tarefas enquadram-se no programa do 2.º ciclo no conteúdo dos divisores comuns de dois números e na determinação do máximo divisor comum.

A utilização dos processos designados por *Subtracção Recíproca* e *Algoritmo de Euclides*, que surgiram há cerca de 24 séculos, facilita a compreensão dos conceitos envolvidos e proporciona um conhecimento histórico dos mesmos.

Esta sequência de tarefas é apoiada pelo artigo *A determinação do m.d.c. de dois números e a Subtracção recíproca/Algoritmo de Euclides.*

Florinda Costa
Manuela Ribeiro
Maria José Carinha Bóia

DETERMINAÇÃO DO M.D.C. UTILIZANDO O ALGORITMO DE EUCLIDES

1. Verifica que os divisores comuns de dois números naturais, por exemplo 30 e 54, são os mesmos que os divisores comuns do menor e da diferença entre eles, neste exemplo 30 e 24.

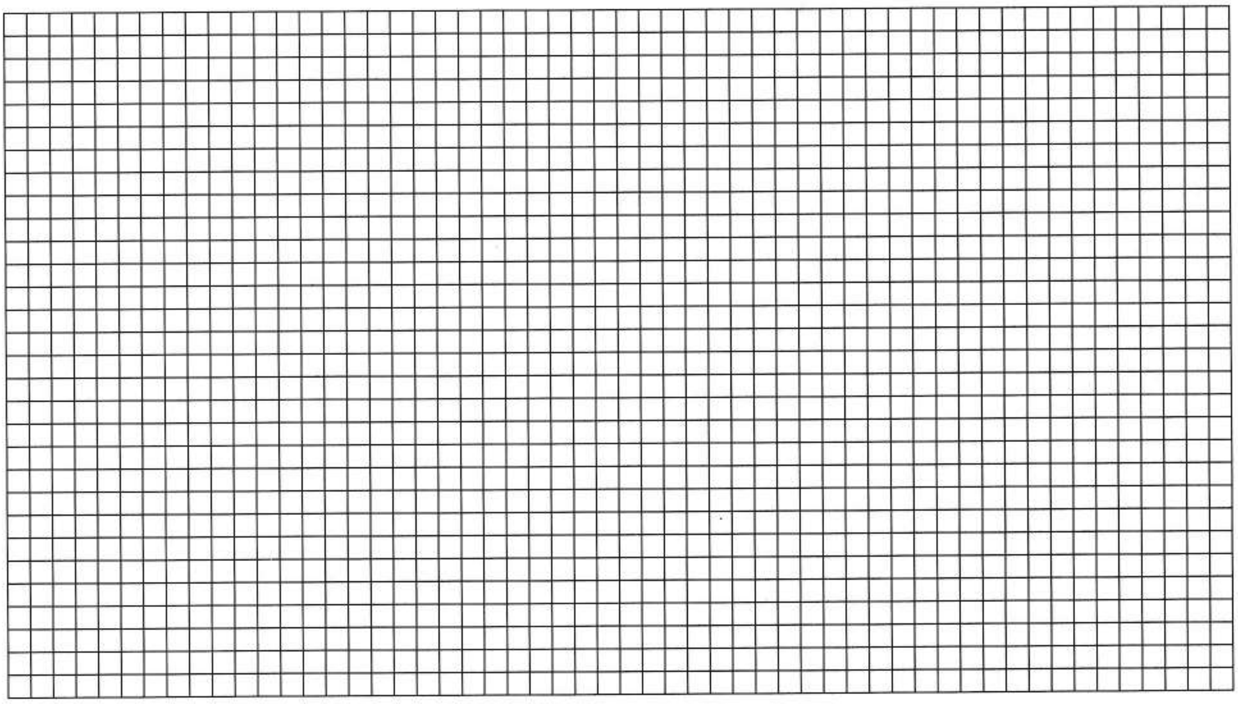
2. Partindo do par (30, 54) forma o par constituído pelo número menor e pela diferença entre ambos. Repete a operação até obteres um par de termos iguais.

Determina os divisores comuns dos números de cada par da lista que elaboraste. Confronta e discute os resultados obtidos com colegas teus. Regista as conclusões a que chegaste.

3. Os termos do último par obtido na tarefa 2 são iguais, pelo que esse número é o máximo divisor comum entre os números do último par e também entre todos os pares de números que foram sendo obtidos na tarefa 2 e do próprio par (30, 54) de que partiste.

Determina por este processo o m.d.c. (32, 56).

4. Na figura junta está representado um rectângulo de 30 x 54 correspondente ao primeiro par de números da lista da tarefa 2.



4.1. Ao lado maior deste rectângulo, tira o lado menor tantas vezes quantas as possíveis.

Deves obter um novo rectângulo cujas dimensões são:

— O menor dos dois números dados;

— O resto obtido quando efectuamos as subtracções sucessivas possíveis.

Este processo é equivalente a tirarmos ao rectângulo dado o maior quadrado nele contido tantas vezes quantas as possíveis.

4.2. Sobre o novo rectângulo obtido efectua o procedimento anterior, isto é, tira-lhe o maior quadrado nele contido tantas vezes quantas as possíveis.

4.3. Repete o passo 2. até esgotares o rectângulo inicial.

O lado do último quadrado retirado é a maior medida comum dos dois lados do rectângulo inicial, ou seja, o m.d.c. dos dois números.

5. Constrói o rectângulo 12 x 32 e determina pelo processo utilizado na tarefa 4 o m.d.c. (12, 32).

6. Na tabela seguinte encontras na coluna 1 a lista de pares de números construída a partir do par 30 e 54 e na coluna 2 as correspondentes diferenças entre os números dos diferentes pares. Sendo a divisão inteira entendível como subtracção sucessiva com o mesmo subtractivo, completa devidamente as colunas 3 e 4 :

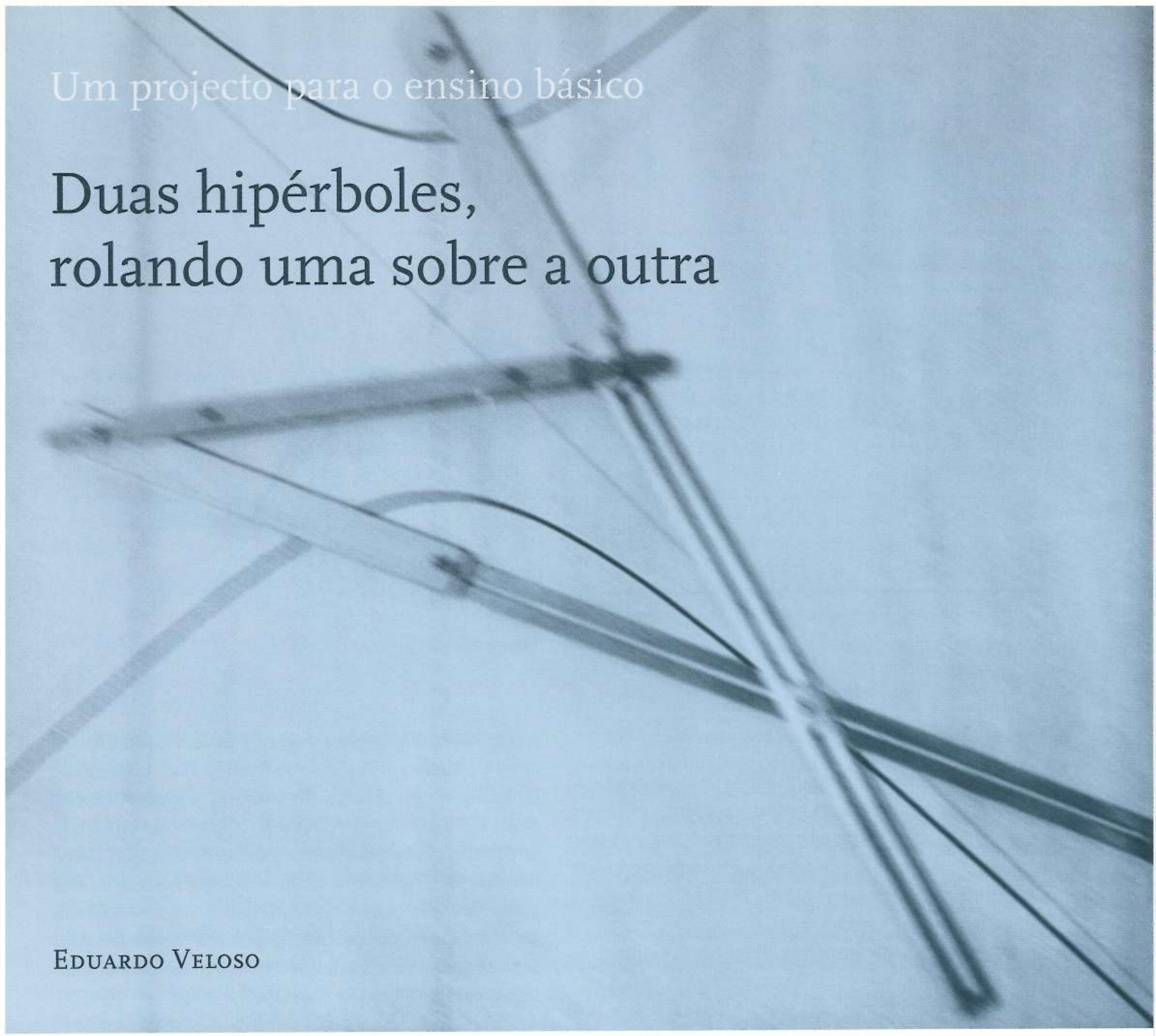
Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
Par de números	Diferença entre os números do par	Divisão inteira correspondente às subtrações (sucessivas)	Interpretação
(30, 54)	$54 - 30 = 24$	$\begin{array}{r\|l} 54 & 30 \\ \cline{2-2} \ldots & \ldots \end{array}$	30 cabe em 54 .... vez(es) e sobra ....
(30, 24)	$30 - 24 = 6$	$\begin{array}{r\|l} 30 & 24 \\ \cline{2-2} \ldots & \ldots \end{array}$	24 cabe ...... vez(es) em 30 e sobra ......
(24, 6) (6, 18) (6, 12) (6, 6)	$24 - 6 = 18$ $18 - 6 = 12$ $12 - 6 = 6$ $6 - 6 = 0$	$\begin{array}{r\|l} 24 & 6 \\ \cline{2-2} \ldots & \ldots \end{array}$	6 cabe ...... vez(es) em 24 e sobra ...... **6 é o m.d.c.**

Acabas de determinar o m.d.c.(30, 54) por dois processos: o processo das *Subtracções recíprocas* (colunas 1 e 2) e o chamado *Algoritmo de Euclides*, que é um processo condensado do anterior (coluna 3).
O m.d.c. (30, 54) é 6, identificável no processo das subtracções recíprocas por qualquer um dos termos do par de números iguais a que chegámos e no algoritmo de Euclides pelo último divisor.

Nota: No algoritmo de Euclides ao dividirmos 24 por 6 obtivemos quociente 4 e resto zero, isto é, subtraímos 6 quatro vezes a 24 enquanto que na subtracção recíproca subtraímos 6 apenas três vezes a 24 mas ficámos com resto 6, logo podemos voltar a subtrair 6 até obter resto zero.

Os gregos não levavam o processo até ao fim, ficando no par de números iguais (6, 6) porque não tinham símbolo para o zero.

7. Elabora um esquema semelhante para determinar, pelos dois processos, o m.d.c. (42, 98).



Duas hipérboles, rolando uma sobre a outra

Eduardo Veloso

Uma pequena homenagem a Paulo Abrantes (1953–2003) grande defensor do trabalho de projecto.

O ministro da «educação» ainda não proibiu os professores de *perder tempo com projectos* e por isso proponho-vos aqui um projecto que envolve geometria e mecanismos, uma conexão muito famosa da história da matemática que poderia dar origem a múltiplas e interessantes actividades escolares se não fossem as metas, os exames e toda a miséria educativa dos tempos que estamos a viver.

A proposta de projecto será feita no fim do artigo. Como as cónicas são um tema ignorado do antigo e do novo programa... começo por mostrar um processo para traçar uma hipérbole, depois veremos o que é um antiparalelogramo e como pode servir para articular duas hipérboles iguais e por fim sugerirei a construção de mecanismos (um digital e outro físico) para colocar as hipérboles a rolar uma sobre a outra. Pode ver desde já um possível resultado final[1].

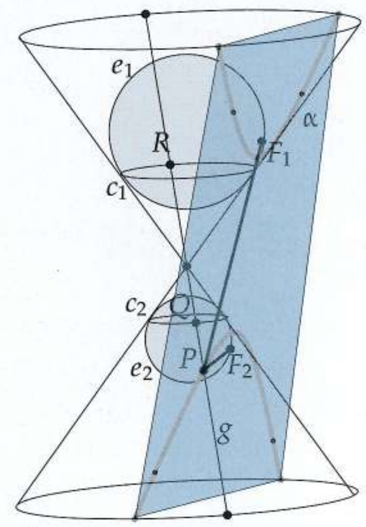


Figura 1

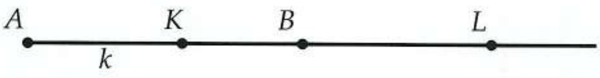


Figura 2

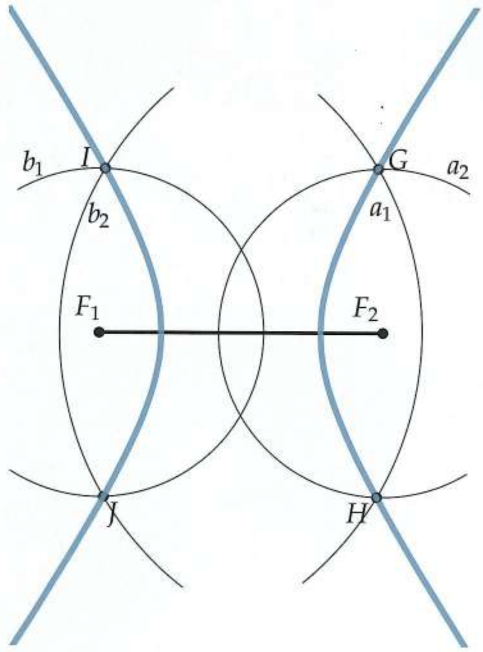


Figura 3

1. Traçado de uma hipérbole

Quando intersectamos uma superfície cónica de revolução por um plano paralelo a duas geratrizes obtenho como secção uma hipérbole[2]. Para indicar como podemos construir uma hipérbole vamos servir-nos do método que o matemático belga Germinal Dandelin (1794–1847) utilizou nas suas investigações sobre cónicas.

Imaginemos uma superfície cónica de revolução e um plano α paralelo a duas das suas geratrizes[3] — plano a cor na Figura 1. Imaginemos ainda duas esferas e_1 e e_2 — hoje conhecidas como esferas de Dandelin – interiores à superfície, nas seguintes condições: cada uma das esferas é simultaneamente tangente ao plano α e — dito de um modo informal — tangente à superfície cónica ao longo de uma circunferência. Ou seja, a esfera e_1 (resp. esfera e_2) é tangente ao plano α no ponto F_1 (resp. F_2) e tem em comum com a superfície cónica a circunferência c_1 (resp. circunferência c_2). Seja P um ponto da hipérbole. A geratriz g que passa por P é tangente às esferas nos pontos Q e R. Como F_1 e R são os pontos de tangência de duas tangentes (rectas PF_1 e g) tiradas por P à mesma esfera e_1, temos $PF_1 = PR$; analogamente, $PF_2 = PQ$. Então, $PF_1 - PF_2 = QR$. Tendo em atenção que, para qualquer P sobre o ramo da hipérbole correspondente ao ponto F_2 o segmento QR tem comprimento constante (sendo o segmento definido pelas intersecções de uma geratriz g do cone com as circunferências c_1 e c_2) e ainda que, no caso do ponto P estar no ramo de hipérbole correspondente ao ponto F_1, teremos, *mutatis mutandis*, um resultado inteiramente análogo, vemos que os pontos de tangência com as esferas de Dandelin são os focos da hipérbole e que a propriedade característica dos pontos da hipérbole, conhecida desde Apolónio — constância da diferença entre as distâncias (maior menos a menor) de um ponto da hipérbole aos fócos — se demonstra facilmente com as esferas de Dandelin.

Traçado da hipérbole (dados os focos e a diferença constante k)

Sejam F_1, F_2 os fócos da hipérbole a traçar e consideremos (Figura 2):

- um segmento AB igual ao segmento F_1F_2;
- um ponto K, no interior do segmento AB; designemos por k o comprimento de AK;
- a semi–recta KB e um ponto genérico L dessa semi–recta.

Observe a Figura 3. Se traçarmos o segmento F_1F_2 e depois, com centro em F_1 e F_2, as circunferências a_1 e a_2, de raios respectivamente iguais aos comprimentos dos segmentos AL e KL da Figura 2, os pontos de intersecção G e H dessas

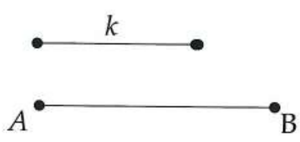


Figura 4A. Podemos supor que os segmentos *AB* e *k* são iguais aos da Figura 2, que nos serviram para construir a hipérbole da Figura 3.

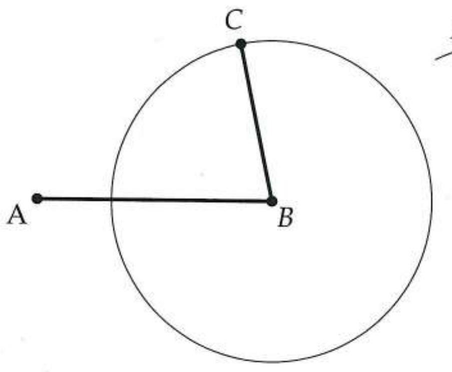


Figura 4B. Traço a circunferência de centro *B* e raio *k*; escolho um ponto qualquer da circunferência para ponto *C*.

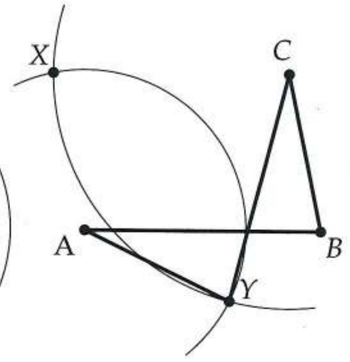


Figura 4C. O terceiro lado, *CD*, é oposto a *AB* e portanto traço uma circunferência de centro *C* e raio *AB*. O quarto lado tem comprimento *k*, e portanto traço uma circunferência de centro *A* e raio *k*. Há duas soluções para o ponto *D*. Escolho a solução *Y* para o lado *CD* não ficar paralelo a *AB*!

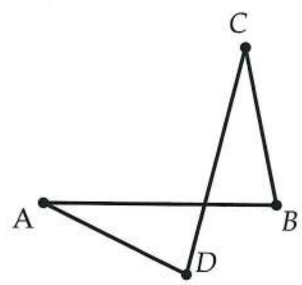


Figura 4D. O quadrilátero final *ABCD* tem os lados opostos iguais mas não paralelos! É um *antiparalelogramo*.

circunferências são pontos da hipérbole pretendida, *pois a diferença dos raios é sempre igual a k, para qualquer L*. Analogamente, a partir das circunferências b_1 (centro F_1, raio KL da Figura 2) e b_2 (centro F_2, raio AL da Figura 2) podemos obter os pontos de intersecção I e J, pertencentes ao outro ramo da hipérbole. Se estivermos a trabalhar com um programa de geometria dinâmica como o *Sketchpad*, por exemplo, poderemos então traçar os lugares geométricos dos pontos G, H, I e J quando o ponto L percorre a semi-recta KB da Figura 2, obtendo os dois ramos da hipérbole desejada (a cor na figura).

2. Paralelogramos e antiparalelogramos

Uma definição habitual de paralelogramo é a seguinte:

Um paralelogramo é um quadrilátero com os lados opostos paralelos

Aceite esta definição, não é difícil demonstrar que num paralelogramo os lados opostos são iguais. Propomos ao leitor que imagine essa demonstração, começando por traçar as diagonais do paralelogramo, ou que a procure num livro de geometria elementar.

Será a recíproca verdadeira? Começo por definir lados opostos, para que nos possamos entender: direi que *dois lados opostos num quadrilátero são dois lados sem vértices comuns*. A questão anterior é portanto a seguinte: se num quadrilátero os lados opostos forem iguais, estaremos necessariamente em presença de um paralelogramo? Se o leitor está a pensar que sim, então eu vou mostrar-lhe como se pode construir um quadrilátero com os lados opostos iguais e que *não é um paralelogramo* (veja a Figura 4 e leia atentamente as legendas).

Talvez o leitor esteja a protestar porque os lados deste quadrilátero se cruzam... mas nós não combinámos qual era a definição de polígono ou de quadrilátero que adoptávamos. Se adoptamos a definição mais usual, em que os lados dos polígonos não se podem cruzar então, se os lados opostos são iguais, também são paralelos. Mas aceitando que nos polígonos os lados se podem cruzar... então existem quadriláteros de lados opostos iguais e não paralelos! É a definição de polígono que vamos adoptar neste artigo e portanto para nós existe este tipo de quadriláteros: são os chamados *antiparalelogramos*. *ABCD* é um desses quadriláteros.

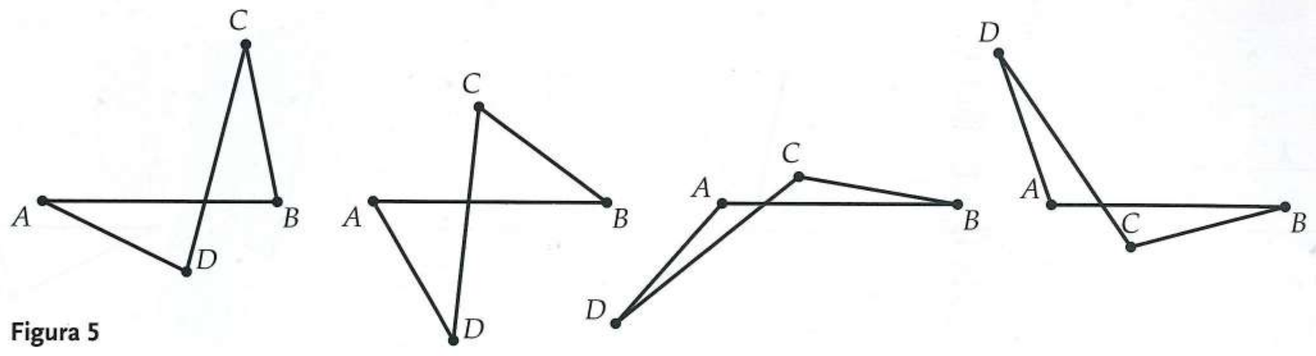


Figura 5

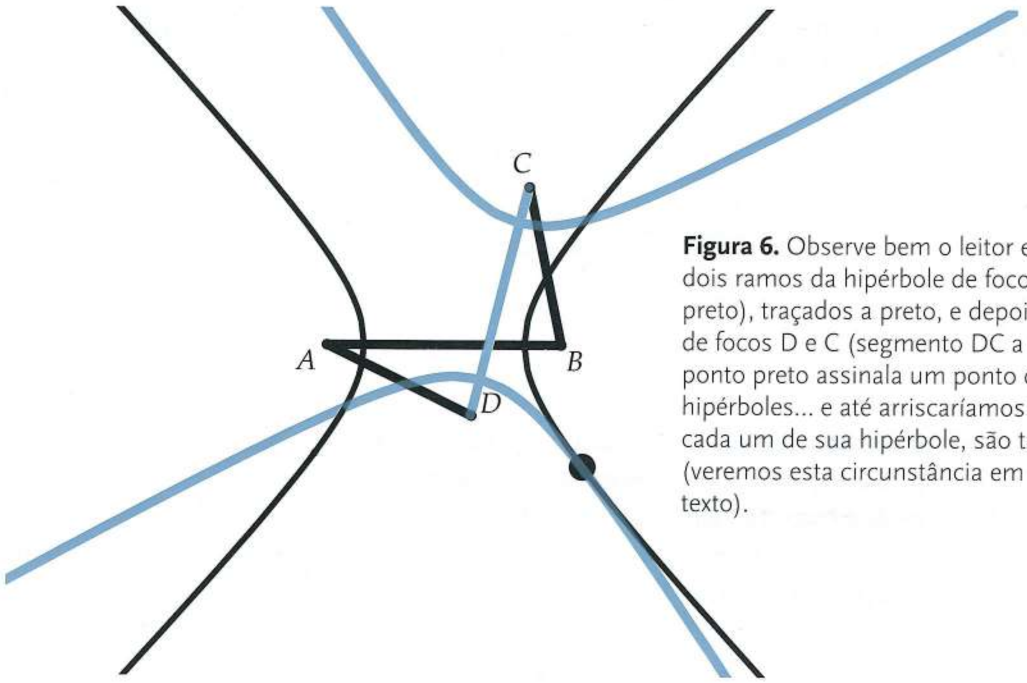


Figura 6. Observe bem o leitor esta figura. Identifique os dois ramos da hipérbole de focos A e B (segmento AB a preto), traçados a preto, e depois os ramos da hipérbole de focos D e C (segmento DC a cor), traçados a cor. Um ponto preto assinala um ponto que parece comum às duas hipérboles... e até arriscaríamos dizer que os dois ramos, cada um de sua hipérbole, são tangentes nesse ponto... (veremos esta circunstância em detalhe mais à frente no texto).

3. Animando um antiparalelogramo...

Avançando um pouco em direcção ao nosso mecanismo final... vamos supor que o ponto B é um *pivot* em torno do qual pode rodar o segmento BC. O segmento CD «empurra» o ponto D e obriga o segmento AD a rodar em torno de A. Na Figura 5 mostramos diversas posições desse movimento.

Tal como construímos uma hipérbole de focos A e B – na Figura 3 designados por F_1 e F_2 — podemos agora, precisamente do mesmo modo, traçar a hipérbole de focos D e C, considerando ainda como diferença constante entre as ditâncias de um ponto da nova hipérbole aos dois focos a mesma distância k, ou seja, o comprimento de CB (ou AD). Se o leitor está a acompanhar estas construções e tem um modelo como este construído num programa de geometria dinâmica, como o *Sketchpad*, poderá arrastar o ponto C (e daí o ponto D) e ver a hipérbole a cor a acompanhar o movimento dos seus fócos D e C. (Figura 6).

O que podemos fazer aqui (em que não temos movimento) para simular este efeito é traçar 4 miniaturas para diferentes posições do ponto C ao rodar em torno de B. É a Figura 7 da página seguinte. Observem-se as posições sucessivas (de ***I*** até ***IV***) do ponto C, e em consequência as posições sucessivas do segmento DC, e daí as posições sucessivas da hipérbole a cor, e daí ainda os sucessivos pontos de contacto (tangencial, como veremos) entre as duas hipérboles, assinalados por um ponto a negro. Nas posições I e II, o ponto de contacto entre as duas hipérboles dá-se entre o ramo da direita da hipérbole a preto e o ramo inferior da hipérbole a cor. Mas no posição III o ponto de contacto volta a aparecer no ramo da esquerda da hipérbole de focos A e B e no ramo de cima da hipérbole a cor.

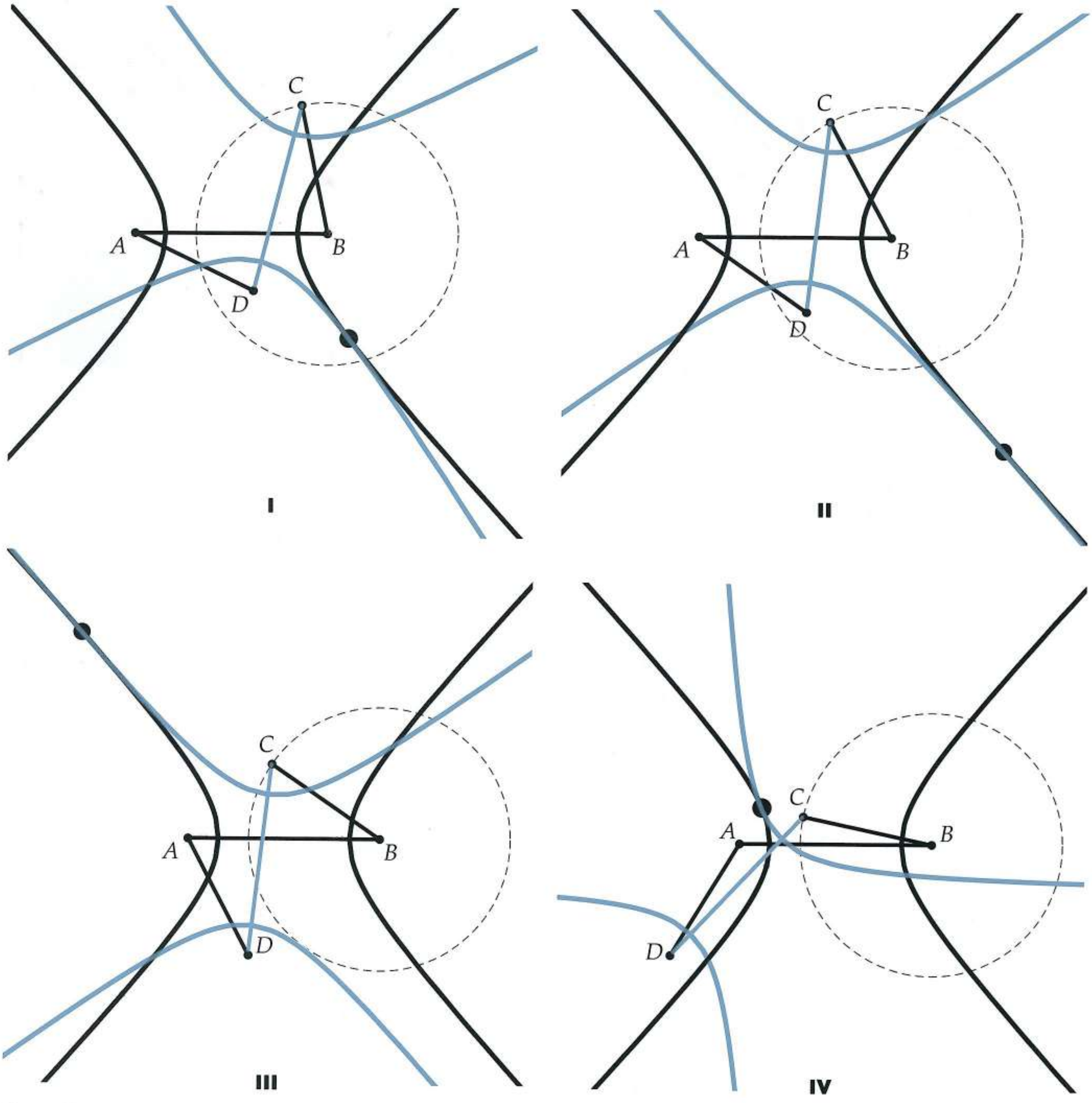


Figura 7

No movimento visto no modelo feito no *Sketchpad* ou ainda melhor no mecanismo que vamos construir, vê-se nitidamente o ponto de contacto a *fugir para o infinito* depois da posição II e a *aparecer do infinito* antes da posição III. Também nos dois modelos (em geometria dinâmica ou no mecanismo) a sensação de que a hipérbole a cor está a rolar sem atrito sobre a hipérbole preta é muito real. Falta mostrar que realmente em cada momento existe um ponto de contacto entre as duas curvas e que nesse ponto as tangentes a uma e a outra curva coincidem. É o que faremos na próxima secção.

4. Porque parecem rolar as hipérboles, uma sobre a outra?

Quando «vemos» uma roda de um automóvel a rolar sobre a estrada, o que nos dá a sensação de que se trata de um rolamento sem atrito é o facto de os pontos coincidentes da roda e da estrada serem em cada momento diferentes dos precedentes e a estrada (suposta rectilínea) se manter sempre tangente à roda do carro (o módulo da velocidade do ponto da roda deve ser igual ao módulo da velocidade do carro na estrada).

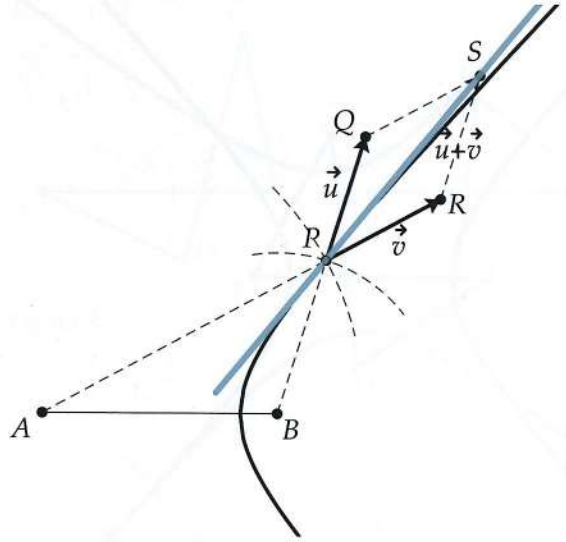


Figura 8

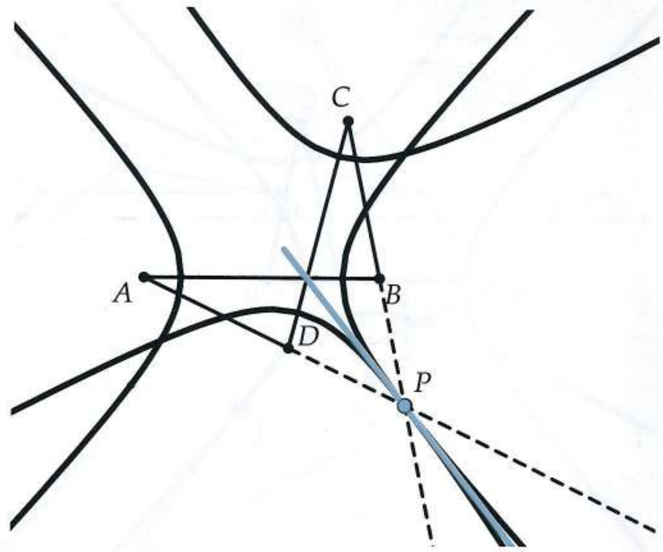


Figura 9

Para mostrar que a ilusão que temos ao ver o movimento das duas hipérboles é semelhante[4], comecemos por ver como posso traçar a tangente a uma hipérbole num dado ponto P (Figura 8).

Reveja a Figura 3, parte da qual retomamos na Figura 8 embora com etiquetas diferentes. O ramo de hipérbole que estamos a ver pode supor-se que está a ser descrito por P, ponto de intersecção de duas circunferências cujos raios estão ambos a aumentar *mas cuja diferença se mantém constante*. Numa linguagem inteiramente informal, podemos dizer que o movimento de P é resultado da composição de dois movimentos, um que o afasta do ponto A à velocidade v, outro que o afasta do ponto B à velocidade u. Mas como a diferença dos raios se mantém sempre constante, as duas velocidades de afastamento são iguais em módulo. Isso significa que os vectores u e v têm o mesmo módulo, e que portanto o movimento resultante, de velocidade $u+v$, tem a direcção da bissectriz do ângulo APB. Portanto obtemos assim a direcção da tangente à hipérbole no ponto P, que é a recta PS.

Observe agora a Figura 9, obtida a partir da Figura 7.I.

Note que o ponto P se obteve por intersecção das semirectas AD e CB e que a recta a cor se obteve a partir da bissectriz do ângulo APB (exactamente como na Figura 8). Portanto:

- o ponto P (que nos diversos casos da Figura 7 é representado por um «grande» ponto a preto) é sempre um ponto de ambas as hipérboles, dado que $PA - PB = PC - PB = CB =$ constante (e portanto ponto da hipérbole de focos A e B) e que $PC - PD = PA - PD = AD =$ constante (e portanto ponto da hipérbole de focos C e D);
- a recta a cor tem sempre a direcção da bissectriz do ângulo APB (ou CPD) e portanto é tangente comum às duas hipérboles no ponto P.

Destes factos resulta a sensação de que, quando o ponto C roda em torno do ponto B, a hipérbole a cor (na Figura 6, por exemplo) parece estar a rolar sem atrito sobre a hipérbole a preto. Tudo o que estamos a tentar reproduzir em figuras estáticas apenas se pode observar facilmente num *sketch* dinâmico de um programa de computador, com o por exemplo o *Sketchpad*. Ou num modelo físico...

5. Um projecto para o 9.° ano

1. Para que os seus alunos do 9.° ano, por exemplo, possam ter interesse em desenvolver um projecto relativo às «hipérboles que rolam uma sobre a outra» é necessário *partir do resultado final* e depois o projecto consiste em estudar passo a passo o modo como podemos concretizar esse resultado. Portanto, o primeiro momento deste projecto consiste em mostrar aos seus alunos um ficheiro de geometria dinâmica com as hipérboles realmente a rolar uma sobre a outra.

O ideal é o leitor, ao preparar este projecto, construir por si próprio este ficheiro de geometria dinâmica, no programa que costuma utilizar.

Poderá também mostrar aos seus alunos de início uma imagem de um mecanismo em madeira, construído em Itália, para traçar uma hipérbole a partir de um antiparalelogramo (Figura 10).[5]

E pode sugerir que em conjunto, estudem este assunto e procurem formas de construir um ficheiro interactivo num progra-

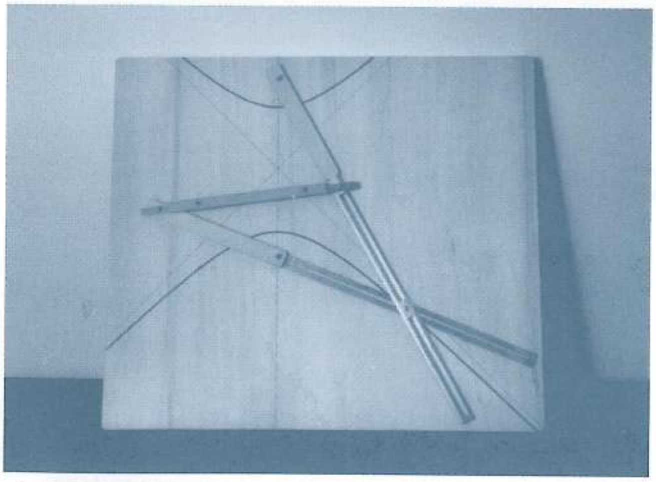


Figura 10

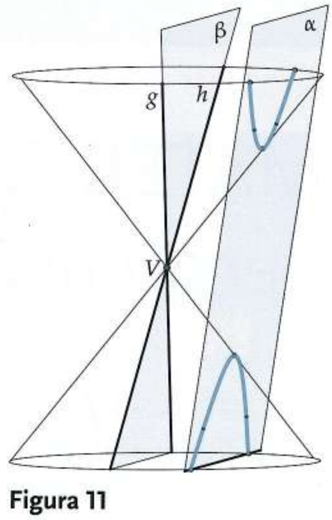


Figura 11

ma de geometria dinâmica e um mecanismo físico para mostrar as hipérboles a rolar uma sobre a outra. E será este portanto o projecto que proporá aos seus alunos.

2. O decorrer do projecto depende muito dos modos de trabalho que tem com os seus alunos, das facilidades que tem de trabalho — por exemplo, tem a escola oficinas onde possam ser construídas peças em madeira ou acrílico? — e isso depende de escola para escola e não pode ser definido aqui. Apenas vamos dar algumas sugestões gerais.

3. O próprio decorrer do projecto deve ser discutido em interacção com os alunos. Podemos imaginar uma discussão geral em que seja feita uma lista dos termos que o professor usou na descrição do modelo final — hipérboles, cónicas, antiparalelogramo, tangente, ponto do infinito, ... e em que o professor proponha que o primeiro trabalho dos alunos deverá ser a pesquisa na Internet dos significados desses termos e depois, termo a termo, uma discussão com o professor, para procura dos significados finais. Conhecidos os conceitos que intervêem neste projecto, há que procurar os meios para realizar o modelo... um programa de geometria dinâmica e paralelamente o projecto de um modelo físico, escolha de materiais, pesquisa de oficinas onde possa ser feito, preços, e assim por diante.

4. O professor, que antes de propor o projecto deve fazer uma pesquisa, poderá ir alimentando o trabalho dos alunos com textos, leituras de partes de livros, indicação de *sites* na *Internet*, demonstração de alguns pontos mais difíceis, produção de *sketchs* interactivos e proposta da sua construção aos alunos.

5. Um dos pontos principais que deve nortear este trabalho de projecto é que para os alunos, o trabalho deve ser exactamente o inverso do que fizemos neste artigo. O ponto de partida tem que ser o resultado final — o modelo em geometria dinâmica, em que se visualizem as hipérboles a rolar uma sobre a outra, e depois num trabalho de pesquisa e informação lento, percorrer as étapas necessárias para reproduzir e compreender esse resultado final — incluindo aspectos históricos, aquisição de novos conceitos, e demonstração de resultados parciais.

Notas

1. No endereço http://www.apm.pt/textosGTG/apoio_EM/hiperboles_I.html poderá encontrar ficheiros *Sketchpad* e um pequeno video relativos a este artigo.
2. Veja por exemplo o site http://www.degraf.ufpr.br/docs/conicas.pdf. Para uma breve história das cónicas, veja o livro *Geometria — Temas Actuais.*
3. Numa vista (Figura 11) esquemática da situação vemos o plano α, a hipérbole, um plano β paralelo a α e passndo pelo vértice V da superfície cónica e as duas geratrizes g e h, pertencentes ao plano β e paralelas ao plano α.
4. O colega Arala Chaves, da Atractor, observa que «isso se traduz observando que os comprimentos dos arcos de hipérbole entre (por exemplo) o vértice (fixo) e o ponto de tangência (variável) se mantêm iguais entre si nas duas hipérboles ao longo do movimento.» A Associação Atractor mostrou durante uma dezena de anos, no Centro de Ciência Viva (Pavilhão do Conhecimento, Parque das Nações), um modelo físico das *hipérboles rolantes*, no âmbito da exposição *Matemática Viva*. Veja *Rolamento de hipérboles*, em http://www.atractor.pt/matviva/geral/modulo.html
5. Veja o interessantíssimo museu http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm

Nota: por opção do autor, este artigo não obedece às regras do novo acordo ortográfico.

EDUARDO VELOSO

MATER: a matemática como uma perspetiva sobre o planeta Terra

Sabia que o Universo existe há cerca de treze mil e quinhentos milhões de anos (13 500 000 000)? Sabia que o planeta a que chamamos Terra e onde vivemos se formou em conjunto com os demais elementos do sistema solar há cerca de 4 500 000 000 anos? E sabia que este nosso planeta esteve deserto durante muito e muito tempo e que só há cerca de 3 500 000 000 anos surgiu a primeira manifestação daquilo a que chamamos vida? E que os primeiros seres cuja vida dependia da existência de oxigénio surgiram há cerca de 500 000 000 anos? E que os dinossáurios se extinguiram há cerca de 65 000 000 anos?

Muito provavelmente todos estes são números de que já ouviu falar. Não significa que os saiba de cor, mas já se deparou certamente com eles em diferentes ocasiões. A questão não é essa, mas antes qual o significado que têm para si. Que ideia tem da sua ordem de grandeza? Certamente conseguirá ordenar no tempo os acontecimentos, mas será que tem uma noção dos números envolvidos que vá para além do «grande»?

Se lhe pedisse que me dissesse quando ocorreria o surgir da civilização humana se considerássemos um ano (de 1 de janeiro a 31 de dezembro) como todo o tempo decorrido desde o início da formação do universo, que mês avançaria? E que dia? E quer arriscar uma hora? A sério, pare por um momento e pense numa data. Já pensou? Se escolheu dezembro, acertou. Com esta proporção a civilização surgiu na Terra no dia 31 de dezembro, mas mais que isso, surgiu no dia 31 de dezembro às 23h 59m 54s, ou seja, nos últimos seis segundos do ano. Impressionado? E a vida na Terra surgiu a 11 de outubro pelas 23h 33m 20s. A extinção dos dinossáurios ocorreu no dia 30 de dezembro pelas 11h 53m 20s e os primeiros seres cuja vida dependia da existência de oxigénio surgiram no dia 20 de dezembro pelas 10h 13m 20s. Quanto ao sistema solar, formou-se no dia 17 de setembro pelas 20h 00m 00s. Incrível como a nossa noção do significado de todos aqueles grandes números parece alterar-se, não é?

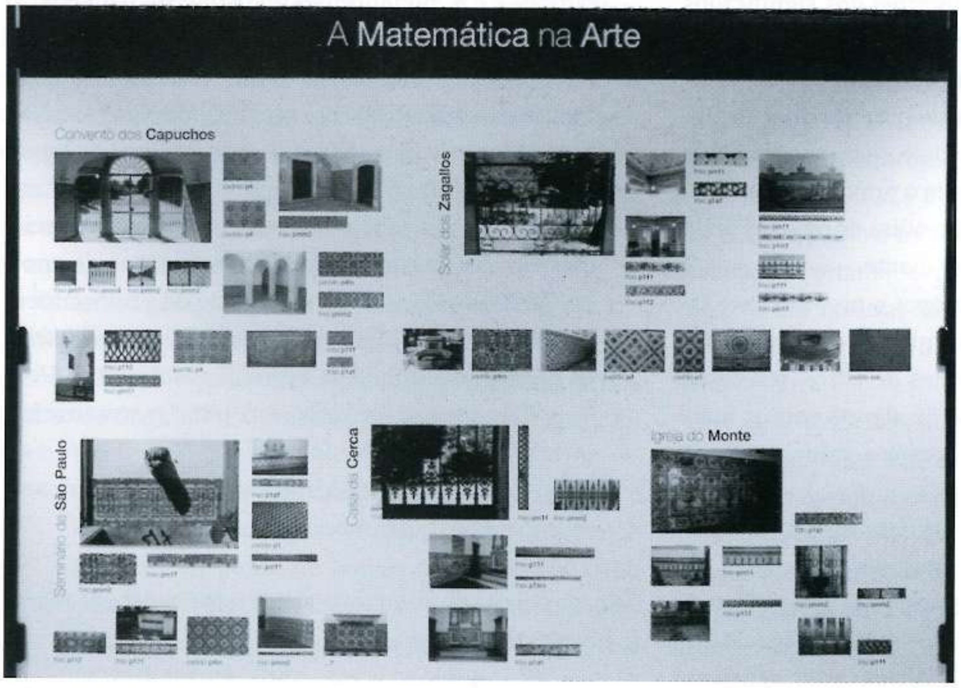


Figura 1. A matemática na arte do concelho de Almada

Neste calendário, um segundo corresponde a 500 anos de idade do Universo. Um minuto serão então 30 000 anos, uma hora 1 800 000 anos e um dia 43 200 000 anos.

E deixando as questões do tempo e passando para aspetos relativos à vida na Terra, falemos de formigas. Certamente já observou uma formiga a transportar algo de dimensões e peso superior ao seu próprio. E um elefante? Sabemos que são animais fortes, mas consegue imaginar um elefante a transportar, digamos, outro elefante maior que ele próprio? Não? É natural porque um elefante teria grande dificuldade em carregar algo tão grande e pesado quanto ele. A razão para tal prende-se com o facto de a superfície relativa nos animais mais pequenos ser superior à dos animais maiores. A formiga acaba assim por ser mais resistente que o elefante. Podemos então ser tentados a pensar que se conseguíssemos aumentar a formiga para o tamanho do elefante teríamos um animal mais forte que este... mas isto não é verdade. Se conseguíssemos fazer esta transformação, o resultado seria um animal que não conseguiria erguer o seu próprio peso do chão, pois as suas pernas seriam finas de mais para sustentar o peso do corpo. Dá que pensar, não dá? A questão é que quando um objeto é aumentado a sua área e volume não crescem de igual modo, o que implica a diminuição da razão entre a área total e o volume. A formiga é assim mais resistente que o elefante porque a sua superfície relativa é superior à do elefante.

Estas são apenas algumas das questões com que se pode deparar numa visita à exposição MATER. Uma iniciativa do departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT–UNL) no âmbito do ano da Matemática do Planeta Terra. Tendo como comissária Fátima Rodrigues, esta é uma exposição que se divide por cinco módulos abordando temáticas do Tempo, Espaço, Vida, Quotidiano e Arte e a importância da Matemática em cada uma delas.

Esta exposição, que estará patente ao público até final deste ano lectivo, tem a maioria dos seus elementos situados em salas do edifício da biblioteca da FCT–UNL, mas uma visita completa requer um passeio pelo Campus de Caparica e pelo concelho de Almada. É verdade, uma reprodução à escala do nosso sistema solar colocou o sol na rotunda central do *campus* e os planetas mais próximos

Figura 2. Mapa do concelho de Almada com a localização e a órbita dos planetas do sistema solar

em cabines telefónicas espalhadas pelo campus (Mercúrio, Vénus, Terra, Marte), mas colocou planetas mais distantes em locais como o centro comercial Almada Fórum (Urano) ou o Cristo Rei (Neptuno). Também o módulo dedicado à Arte sugere uma visita aos pontos mais aliciantes do concelho de Almada, como o convento dos Capuchos ou a Igreja do Monte da Caparica.

Se ficou com curiosidade, aproveite as visitas guiadas regularmente organizadas ou vá simplesmente visitar... sozinho, em família ou com amigos... nos dias úteis ou aos sábados... Ou então marque uma visita de estudo com os seus alunos, sejam eles do básico ou do secundário, e participe com eles numa das muitas atividades disponíveis, como a descoberta da velocidade a que ia o animal que deixou um dos vários conjuntos de pegadas espalhados pelo campus. E não se surpreenda se, no final, os seus pequenos investigadores lhe conseguirem mesmo dizer qual o animal que deixou aquelas pegadas... afinal, isso é apenas Matemática!

E se quiser saber mais, passe por http://eventos.fct.unl.pt/mater2013/.

Helena Rocha, Isabel Oitavem
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

As idades das vizinhas

Pai: — «Acabei de encontrar as nossas novas vizinhas, uma senhora e as suas duas filhas. Vou colocar-te um problema para descobrires que idades elas têm.»
Filho: — «Força! Já sabes que gosto de desafios.»
Pai: — «O produto das suas idades é 2450.»
Filho: — «Só isso não chega.»
Pai: — «A soma das três idades é o quádruplo da tua.»
Filho (depois de pensar um bocado): — «Ainda não consigo.»
Pai: — «Sou mais novo que a mãe das raparigas.»
Filho (que sabe a idade do pai): — «Ah, então já sei!»
Que idades têm os cinco personagens desta história?

(Respostas até 25 de abril para zepaulo46@gmail.com)

NA ILHA DE BOOLE

O problema proposto no número 124 de Educação e Matemática foi o seguinte:

A ilha de Boole é habitada por duas tribos: os Verks, que dizem sempre a verdade, e os Falks, que mentem sempre. Quando lá estive, fui jantar com quatro habitantes chamados Aok, Bok, Cok e Dok.

Quando me interroguei sobre as respetivas tribos, disse-me Aok: «Exatamente um de nós os quatro é falk».

Bok acrescentou: «Nós os quatro somos falks».

Baralhado, perguntei a Cok: «Aok é verk?». A resposta que ele deu não me permitiu ficar a saber o que era Aok.

A que tribo pertence Dok?

Recebemos apenas quatro respostas: Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias, Graça Braga da Cruz (Ovar) e Laura Almeida (Porto Santo), com esta última a apresentar duas resoluções diferentes.

Há vários processos para chegar à conclusão que Dok é um verk.

O Carlos e a Laura fizeram uma tabela com os 16 casos possíveis quanto às tribos a que podem pertencer os quatro personagens. Depois, de acordo com as afirmações do enunciado, foram eliminando esses casos, até sobrarem apenas dois, ambos com Dok a ser um verk.

As restantes resoluções seguiram uma via dedutiva.

Representemos as tribos pela respetiva inicial: V (de Verk) e F (de Falk).

Como diz a Graça: *Bok não pode estar a dizer a verdade, pois cair-se-ia num paradoxo: se dissesse a verdade, então ele próprio estaria a mentir!*

Demos agora a palavra ao Alberto.

Se Aok for V, então só há um F que é Bok. Se Aok for F haverá 2 ou 3 F, que serão Aok, Bok e, eventualmente, um de entre Cok e Dok.

Temos agora a pergunta feita a Cok, o qual poderá responder *Sim* ou *Não*.

Se Cok responder *Sim* e for V então Aok é V o que implica que Dok é V.

Se Cok responder *Sim* e for F então Aok é F o que implica que Dok é V.

Se Cok responder *Não* e for F então Aok é V. Mas isto é impossível, pois, como vimos atrás, se Aok for V só pode haver um F que é Bok.

Se Cok responder *Não* e for V então Aok é F o que implica que Dok poderá ser V ou F.

Mas, se Cok tivesse respondido *Não*, ficaríamos a saber que Aok era F o que contradiz o enunciado.

Portanto Cok respondeu *Sim*, o que não permite determinar o que é Aok (nem Cok) mas possibilita saber que Dok é V.

Em conclusão, Dok pertence à tribo dos Verks.

O ensino da Matemática para os alunos surdos

Laura Nunes, Jorge Barroco

Quando nos decidimos dedicar ao ensino da Matemática, raramente ou nunca, nos questionamos: Em que língua iremos ensinar os nossos alunos? Foi o nosso caso, até sermos colocados numa escola vocacionada para o ensino de surdos. Ambos tivemos as mesmas ilusões, pensámos que bastava fazer uso da escrita e procurar aprender os gestos para transmitirmos os conceitos matemáticos. Porém, rapidamente desconstruímos as ilusões e contactámos com a realidade. Fomos confrontados com o problema da comunicação perante uma população estudantil maioritariamente surda severa e profunda, que utilizava uma língua diferente da nossa — a Língua Gestual Portuguesa (LGP) e que não dominava a Língua Portuguesa escrita. Ficámos, assim, remetidos para outra forma de ensinar.

Atualmente, o Decreto-lei 3/2008 (ME, 2008) afirma, logo nas linhas introdutórias, que «a promoção de uma escola democrática e inclusiva, orientada para o sucesso educativo de todas as crianças e jovens» é condição necessária para «a melhoria da qualidade do ensino». Este decreto tem como princípio básico o de que as crianças e jovens surdos profundos devem fazer as suas aprendizagens escolares através da sua língua materna: a Língua Gestual Portuguesa (Carvalho, 2007).

Deste modo, importa refletir sobre a transmissão dos conhecimentos e as metodologias pedagógicas da disciplina de Matemática através da Língua Gestual Portuguesa. Quais as dificuldades dos alunos surdos? Quais as dificuldades com que se deparam os professores de Matemática no ensino de surdos? O que está a ser feito, nesta área, numa escola vocacionada para o ensino de surdos — Centro de Educação e Desenvolvimento (CED) Jacob Rodrigues Pereira?

Como refere Harlan Lane (1992) « A educação é o campo de batalha onde as minorias linguísticas ganham ou perdem os seus direitos» e a nossa contribuição enquanto docentes destas crianças e jovens é assegurar que eles alcancem uma melhor educação e consigam uma igualdade de oportunidades em relação aos seus pares ouvintes.

Quais as principais dificuldades dos alunos surdos?

Filhos de pais ouvintes

Segundo dados do Gallaudet Institute, cerca de 98% das crianças surdas são filhas de pais ouvintes. Perante este número, percebemos que os pais não dominam a língua natural dos filhos, e que as crianças crescem e desenvolvem-se no seio de famílias que não falam a mesma língua.

Aprendizagem tardia da Língua Gestual

Muitas vezes estas crianças só são expostas à língua gestual na escola, o que implica atrasos no desenvolvimento cognitivo. Para Goldfeld (1997) existem algumas dificuldades decorrentes do atraso do domínio de uma linguagem, relacionadas com a capacidade de abordar assuntos abstratos e com a aquisição de conceitos científicos ou conceitos espontâneos mais abstratos, de maior nível de generalização.

Fraco domínio da Língua Portuguesa escrita

Para as crianças surdas, a aprendizagem da Língua Portuguesa escrita, não corresponde, à semelhança das crianças ouvintes, à aprendizagem do uso secundário da sua língua, mas à aprendizagem de uma outra língua. Esta dificuldade não poderá ser esquecida nem menosprezada, quando sabemos que o sucesso escolar depende substancialmente do domínio da língua de escolarização.

Quais as principais dificuldades com que se deparam os professores de Matemática no ensino de alunos surdos?

Uma língua diferente

A Matemática é ensinada por professores ouvintes que possuem, inevitavelmente, lacunas ao nível da Língua Gestual Portuguesa, uma vez que esta não é a sua língua natural. Alguns dos professores não tiveram, anteriormente, qualquer contacto com a Língua Gestual, outros possuem apenas alguma formação em Língua Gestual Portuguesa, através de formações ou cursos de certificação. Normalmente, as formações pretendem dotar os formandos de algumas competências de comunicação, obviamente de importância extrema, mas com poucas referências a conceitos matemáticos, limitando-se apenas ao ensino dos gestos para os números, para as quatro operações e para algumas figuras geométricas, como o triângulo, o quadrado e o retângulo. Por outro lado, tal como referimos anteriormente, os alunos surdos não dominam o Português escrito e, em momento algum, devemos dissociar a Matemática do Português, renunciando ao facto que as dificuldades da segunda se repercutem no sucesso da primeira.

Uma língua sem gestos matemáticos

E, então, como acedem os alunos surdos ao currículo da Matemática? A Língua Gestual Portuguesa possui apenas gestos para um número ínfimo de conceitos. Quando, por exemplo, um professor pede a um aluno ouvinte algo muito simples como calcular o perímetro de um triângulo equilátero, o mesmo não demorará mais do que trinta segundos a fazê-lo. No entanto, quando a mesma pergunta é dirigida a um aluno surdo, não se verifica tal celeridade na obtenção da resposta, dada a inexistência de gestos para perímetro ou para equilátero, e o aluno também não domina a escrita, ou seja, não associa, através da escrita, a palavra ao conceito. O professor é forçado a recorrer à dactilologia (alfabeto manual), à imagem, à exemplificação, a códigos estabelecidos, à mímica e a uma panóplia de estratégias para que seja compreendido, tanto quanto possível, pelo aluno. É claro que este foi um exemplo simples, mas também não existe gesto para triângulo escaleno, triângulo isósceles, triângulo obtusângulo, trapézio, paralelogramo, número primo, número composto, raio, diâmetro, potência... e, praticamente, todos os outros termos que nos lembremos de mencionar. O professor procura, por diversas formas, que o aluno aceda ao conceito, criando gestos e estabelecendo códigos, que até podem ser ou parecer eficazes. Porém, o professor não acompanha o aluno surdo ao longo de toda a sua vida escolar. Desta forma, quando o aluno surdo tem outro professor, este irá criar, possivelmente, outro código. Assim, o gesto utilizado para mencionar o triângulo equilátero não se vai manter e passa a ser novo, uma vez que, apesar do recetor ser o mesmo, o emissor passou a ser outro... E com isto nos interrogamos: será que os alunos surdos conseguem chegar ao conceito? Afinal, a Língua Gestual Portuguesa, considerada língua oficial portuguesa e língua natural dos alunos surdos, não responde ainda às necessidades da disciplina de Matemática.

Um programa sem adaptações

O programa da disciplina de Matemática para os alunos surdos não sofre qualquer adaptação em relação aos seus pares ouvintes. Este compreende os mesmos conteúdos e prevê a mesma carga horária para cumprir uma tarefa que des-

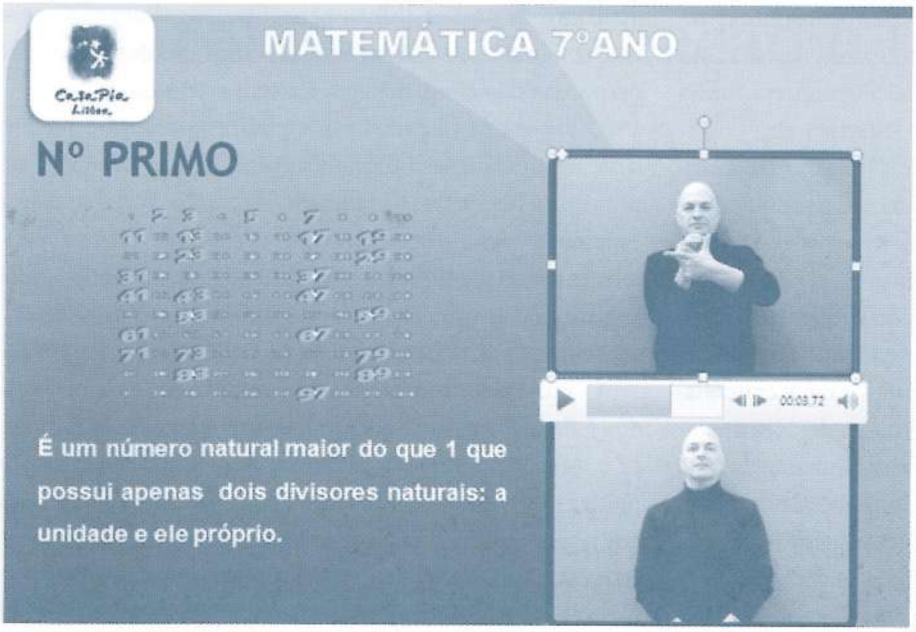


Figura 1. Janela de acesso aos vídeos.

de já se pode antever como difícil para o docente a quem é lançado o desafio de o transmitir, bem como ao aluno que se confronta com uma tarefa gigantesca pela frente.

Apesar de, de acordo com o Decreto-Lei n.° 3, de 7 de janeiro de 2008, estes alunos beneficiarem de um programa educativo individual, na sua construção não é possível adequar os conteúdos às necessidades destes alunos, existindo somente a possibilidade de introduzir objetivos referentes a conteúdos de anos escolares anteriores, que se entendam como indispensáveis para a compreensão dos novos conteúdos a lecionar, ou a introduzir estratégias, o que não responde, de forma alguma, à especificidade do ensino de crianças e jovens surdos.

O que está a ser feito numa escola vocacionada para o ensino de surdos — CED Jacob Rodrigues Pereira?

O Centro de Educação e Desenvolvimento Jacob Rodrigues Pereira é, de entre os CED da Casa Pia de Lisboa, aquele que se encontra vocacionado para a educação e ensino de crianças e jovens surdos, integrando a Instituição desde 1834. Este estabelecimento de ensino tem como missão promover a educação destes alunos num ambiente bilingue e inclusivo, e apostar na sua inserção social e profissional, se necessário assegurando o seu acolhimento.

Construção de materiais bilingues

O Departamento de Matemática do CED Jacob Rodrigues Pereira, com o apoio da Unidade de Investigação deste CED, iniciou um projeto de trabalho, conjuntamente com o Subdepartamento de Língua Gestual Portuguesa, para a criação de gestos matemáticos em formato digital. A equipa de trabalho é constituída por uma professora de Matemática do 3.° Ciclo (Laura Nunes), especializada em Educação Especial, com experiência no ensino de surdos desde 2001, por um formador surdo e por um intérprete de Língua Gestual Portuguesa. Neste momento, já se procedeu ao levantamento de todos os conceitos matemáticos que são abordados no 7.° ano, à criação de gestos para os mencionar e à sua explicação através da Língua Gestual Portuguesa. É certo que, ao efetuar o levantamento dos conceitos necessários para o 7.° ano, fez-se também o levantamento de muitos dos conceitos que os alunos abordam no 1.° ou no 2.° ciclos, uma vez que a aprendizagem e o ensino da Matemática é, na maioria das vezes, sequencial. O levantamento dos conceitos matemáticos é da responsabilidade da professora e a criação dos gestos é feita pelo formador surdo, após a explicação dada pela professora com a presença do intérprete. Considerou-se essencial a presença deste último profissional, para que não houvesse qualquer tipo de dificuldade/obstáculo de comunicação entre a professora e o formador surdo e para que a explicação do conceito fosse dada sem quaisquer erros a nível da Língua Gestual Portuguesa. Todo este trabalho foi filmado e já se encontra em formato digital.

Para que se possa elucidar o trabalho que se fez, apresentamos o seguinte exemplo (Figura 1): caso se esteja a abordar os números primos de um número, encontrar-se-ão dois vídeos.

Ao clicar sobre o vídeo do canto superior, conhecer-se-á o gesto de número primo. Se pretendermos a explicação do conceito através da Língua Gestual Portuguesa, basta clicar sobre o vídeo que está no canto inferior.

A explicação do conceito também é dada através da Língua Portuguesa escrita, tal como se pode observar no exemplo apresentado. Sempre que possível, recorrer-se-á a uma imagem que possa elucidar o conceito.

A Fundação Portugal Telecom tomou conhecimento do trabalho desenvolvido, reconheceu a importância que a produção destes vídeos terá na comunidade surda, e concretamente, entre os jovens estudantes surdos, e decidiu apoiar este trabalho atribuindo um donativo para aquisição de uma câmara de filmar que garanta uma boa qualidade dos vídeos a produzir. A Fundação irá também assegurar a divulgação da parceria através dos seus canais de comunicação, bem como dos vídeos produzidos através de outros canais como o sapo vídeos ou o Meo Kanal.

Este trabalho estará disponível brevemente e tem a ambição de poder uniformizar os gestos ao nível do CED e, se possível, a nível nacional, de forma a colmatar uma lacuna no nosso sistema de ensino.

Projeto de Incentivo à Matemática

Muito por força da urgência em cumprir um programa extenso e exigente, acrescido da pressão de preparar os seus alunos para os momentos de avaliação externa, os docentes veem-se obrigados, muitas vezes, a ensinar a disciplina de matemática de forma «rotineira», onde os conteúdos trabalhados são aqueles presentes no manual adotado e complementado pela prática de exercícios. A Matemática acaba, assim, por aparecer aos alunos como uma área do conhecimento humano desligada da realidade e do quotidiano onde o indivíduo se encontra inserido. Sendo assim, é comum ouvirmos os nossos alunos perguntarem: «Para que serve isto?», «Onde vou utilizar aquilo?». Em muitos casos, tais perguntas não chegam sequer a ser respondidas.

O Projeto de Incentivo à Matemática pretende, por um lado, ultrapassar esta rotina e apresentar a matemática de uma outra perspetiva e por outro, responder às dificuldades específicas dos alunos surdos, uma vez que estes necessitam de mais tempo para se apropriarem dos conteúdos matemáticos e de uma atenção mais próxima por parte do docente que os acompanha nesse processo de apropriação.

O Projeto de Incentivo à Matemática para alunos surdos é da responsabilidade do Departamento de Matemática e tem como objetivo principal proporcionar atividades práticas que ajudem a construir fundamentos matemáticos necessários, não só para um desempenho com sucesso na Matemática formal, mas sobretudo para resolver problemas do quotidiano. O projeto está a ser aplicado nos 1.°, 2.° e 3.° Ciclos.

Bibliografia

Carvalho, P.(2007). *Breve história dos surdos: No mundo e em Portugal.* Lisboa: Surd`Universo.

Decreto n.° 3/2008, de 7 de janeiro de 2008 (Diário da República, 1.ª série, n.° 4), «Capítulo V, Modalidades específicas de educação, Artigo 23.°, Educação bilingue de alunos surdos».

Goldfeld, M. (1997). *A criança surda: Linguagem e cognição numa perspectiva sócio-interaccionista.* São Paulo: Plexus.

Lane, H. (1992). *A Máscara da Benevolência.* Lisboa: Instituto Piaget.

Laura Nunes, Jorge Barroco

Docentes do DMCE e da Unidade de Investigação — CED Jacob Rodrigues Pereira/ Casa Pia de Lisboa

As tarefas de exploração e investigação na aprendizagem da Geometria

Maria Gorete Pires Branco

A Geometria é uma área da Matemática que proporciona um meio de descrição, análise e compreensão do mundo e da sua beleza visual (*National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2007). Ela trata de formas, das suas propriedades e das suas relações e, por isso, ao olharmos à nossa volta rapidamente nos apercebemos de que na «Natureza são produzidas e reproduzidas determinadas formas e que, além disso, a Natureza prefere certas formas em relação a outras também possíveis» (Loureiro, Oliveira, Ralha & Bastos, 1997, p. 14).

Ela é por excelência um tema formativo, que permite ao aluno trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou trabalhar com expressões algébricas. A sua aprendizagem, através da resolução de problemas não rotineiros, pode propiciar o desenvolvimento de múltiplas capacidades, apontadas como fundamentais para qualquer pessoa e, em particular, para todos os alunos, sendo a mais óbvia a visualização espacial (Afonso, 2002; Hoffer, 1981; Junqueira, 1995). Para isso é relevante que o professor proponha aos alunos tarefas adequadas, como as tarefas de natureza exploratória e investigativa e as de construção e manipulação. E a Geometria fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo à manipulação de materiais é, dentro da Matemática escolar, uma área propícia a um ensino baseado fortemente na realização de tarefas de exploração e investigação (Abrantes, 1999), que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem a necessidade de um grande número de pré-requisitos. Evitando, sem grande dificuldade, uma visão da matemática centrada na resolução de exercícios e problemas de rotina.

As tarefas de natureza exploratória e investigativa representam boas oportunidades para pôr os alunos a debater questões, a expor os seus raciocínios, a estabelecer conjeturas e a usar e aplicar a matemática. O trabalho com este tipo de tarefas, ao estimular a participação dos alunos favorecendo uma aprendizagem significativa, e ao proporcionar pontos de partida diferentes facilitando o envolvimento dos alunos com diferentes níveis de competências e o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões, apresenta importantes potencialidades educacionais (Santos, Brocardo, Pires & Rosendo, 2002).

As investigações matemáticas como atividades de ensino-aprendizagem ajudam a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína. O aluno formula questões, estabelece conjeturas, realiza provas e refutações, justifica e apresenta resultados, argumenta e discute com os colegas e com o professor. Em particular, a exploração de investigações geométricas, «pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação» (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003, p. 71).

Ao realizar uma investigação matemática é importante começar por uma exploração inicial que permita clarificar a questão ou situação proposta e colocar questões interes-

Tarefa

Poliedros Regulares

Com polígonos regulares congruentes podem-se construir poliedros regulares.
Utilizando *polidrons*, investiguem quantos poliedros regulares convexos é possível construir. Encontrem explicações para a vossa resposta.
Estabeleçam, para cada um, as principais características.

Sugestão: À medida que vão construindo os poliedros registem numa tabela as principais características.

santes e produtivas sobre as quais se vai trabalhar. Depois é fundamental analisar alguns dados e formular conjeturas. O teste e a recolha de mais dados podem refinar essas conjeturas ou levar a que sejam refutadas e a olhar a questão de outra forma, formulando novas conjeturas. Passando a fase do teste há que provar a sua veracidade. Durante este processo novas questões para investigar podem surgir. A exploração de investigações é, assim, um trabalho exigente que envolve processos de raciocínio complexos, que requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte dos alunos (Ponte & Matos, 1996). Os alunos quando estão pouco familiarizados com este tipo de tarefas revelam dificuldades em entender alguns dos processos inerentes à atividade investigativa, contudo a realização continuada deste tipo de atividade contribui para um entendimento progressivo destes processos, sendo a formulação de questões, aquele a que os alunos dão menor importância.

A seguir descrevem-se alguns episódios de uma aula para ilustrar estas ideias, na qual a autora desempenhou o papel de observadora participante ativa, no âmbito de uma investigação com uma turma de alunos do 10.° ano de escolaridade.

A tarefa de investigação proposta «Poliedros regulares», trabalhada no âmbito do módulo inicial do programa do 10.° ano, tinha como objetivo que os alunos investigassem quantos poliedros regulares convexos é possível construir e estabelecessem as principais características para cada um deles.

Os alunos trabalharam em grupos de três elementos e esta era a terceira tarefa de natureza exploratória e investigativa que realizavam. A aula seguiu a estrutura, que geralmente envolve uma aula com tarefas de exploração e investigação (Christiansen & Walther, 1986; Ponte *et al.*, 2003): (i) introdução da tarefa; (ii) Desenvolvimento da tarefa (iii) Discussão de resultados.

Introdução da tarefa

O enunciado da tarefa foi entregue aos alunos por escrito e lido em voz alta pela professora que paralelamente foi colocando algumas questões, procurando que os alunos recordassem a noção de poliedro regular. Foram distribuídas várias peças de polidron (triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos regulares) pelos grupos.

Desenvolvimento da tarefa

Os alunos começaram logo por tentar construir poliedros, uns optaram por trabalhar com triângulos equiláteros, outros com quadrados. Rapidamente construíram o tetraedro e outros o cubo. O entusiasmo e o prazer visível em usar as peças para construir os poliedros levaram alguns grupos a não definirem estratégias de exploração e ao esquecimento do registo das características dos poliedros que iam construindo. A maioria dos grupos seguiu a sugestão dada no enunciado da tarefa de organizar e registar as características dos poliedros numa tabela. Todos os grupos apontaram o número de vértices, arestas e faces e o tipo de face do poliedro. Alguns acrescentaram o número de faces que concorria em cada vértice do poliedro e as amplitudes dos ângulos internos dessas faces.

Apesar de ter sido recordada a noção de poliedro regular, alguns grupos estavam a considerar poliedros que não eram regulares e não se apercebiam desse facto, pois não tinham procurado clarificar o foco da investigação. Contudo, outros grupos procuraram relacionar as observações iniciais com o objetivo da investigação, como se pode verificar, por exemplo, pelo diálogo seguinte:

Matilde — O cubo é regular. Interessa.
Diana — Vou construir o paralelepípedo. Não temos peças.
Matilde — Coloca assim dois quadrados para um lado. Podemos escolher as cores.
Francisca — Este parece um prédio, parece aquele jogo.

Concluímos que a conjetura apresentada em cima acerca dos dodecaedros não é válida.

Chegámos a esta conclusão porque ao construirmos uma figura em que no mesmo vértice concorressem 4 pentágonos regulares, não era possível concretizar. A conjetura anterior errada deve-se ao facto de termos colocado os ângulos externos do pentágono enquanto que o que queríamos saber eram os ângulos inscritos.

Pensando sobre o problema descobrimos que o ângulo interno é de 108°, então:

$108 \times 3 = 324° < 360°$ (é possível construir)

$108 \times 4 = 432° > 360°$ (não é possível construir)

Figura 1. Justificação apresentada pelo grupo para a refutação da conjetura.[1]

Matilde — Não podemos construir um paralelepípedo, porque temos que investigar os poliedros regulares.

A formulação de questões a investigar foi uma fase da atividade investigativa a que os alunos não deram grande importância. Em geral, usavam o modo afirmativo em vez do interrogativo, proferiam afirmações, como por exemplo: «Com triângulos ainda dá para vermos mais». Embora durante a realização da tarefa tenham formulado uma ou outra questão de forma mais precisa, por exemplo, quando procuravam estudar as características do cubo: «Quando as diagonais [espaciais do cubo] se cruzam também dará 90°?» nunca as registaram.

A formulação e o teste de conjeturas foram processos que estiveram presentes no trabalho dos alunos. Formularam várias conjeturas, algumas das quais irrelevantes para a investigação e outras triviais como: «Algumas das faces do cubo são perpendiculares e outras paralelas». Contudo, também formularam conjeturas relevantes para a investigação, por exemplo: «Podem concorrer no mesmo vértice 4 pentágonos». Esta conjetura foi formulada com base no cálculo da soma das amplitudes dos ângulos das faces que podiam concorrer num vértice do poliedro. Estes alunos calcularam a amplitude de um ângulo interno de um pentágono regular utilizando o mesmo procedimento para o cálculo de um ângulo externo, tendo obtido 72°, que multiplicado por 4 dá 288°, portanto inferior a 360°. Ao testarem a conjetura, os alunos verificaram que não era possível construir poliedros regulares concorrendo quatro pentágonos em cada vértice, porque «não há espaço para a quarta peça, sobrepõem-se». Então refutaram a conjetura e preocuparam-se em tentar perceber o porquê destes resultados. Um dos alunos do grupo desconfiou do valor obtido para a amplitude do ângulo interno do pentágono regular e, em conjunto, procuraram encontrar o erro. Os alunos registaram o argumento que os levou a refutar a conjetura, como se pode observar na figura 1.

Num outro grupo, os alunos depois de terem construído o tetraedro realizaram mais experiências na tentativa de obter mais poliedros regulares formados por triângulos equiláteros, mas não conseguiam. Então conjeturaram que com triângulos equiláteros não dava para construir mais poliedros regulares para além do tetraedro. A professora incentivou-os a continuar a experimentar e passado algum tempo já tinham o octaedro construído. Entretanto, Pedro diz: «Não dá com 5 [triângulos]», Nelson não concordou, «mas ainda dá com 300°». Os alunos continuaram a exploração e formularam uma nova conjetura: «Com 6 faces [triangulares] já não dá para construir poliedros regulares».

Os alunos nesta tarefa, e uma vez que já tinham realizado duas tarefas de natureza exploratória e investigativa, evidenciaram maior preocupação com a justificação das suas conjeturas, embora tenha sido necessário insistir para que procurassem argumentos válidos. Como mostra o episódio seguinte, em que um dos grupos procura argumentos para justificar a conjetura de que com quadrados só dá para construir o cubo:

Matilde — Nós já tínhamos visto que podíamos ter duas peças aqui, duas ali, ali, sempre duas, ia dar um poliedro regular, mas era uma ampliação deste [do cubo].

Diana — Pois tendo sempre o mesmo número de quadrados, temos na mesma um cubo, se pusermos de outra maneira dá um paralelepípedo e já não é regular.

Francisca — Aqui [no cubo] em cada vértice concorrem 3 [faces].

Ao concorrer 4 faces num vértice não podemos formar um poliedro porque 90 × 4 = 360 que dá uma figura plana.

Não podemos construir poliedros com hexágonos porque cada ângulo interno tem 120 e ao tentarmos pôr 3 faces num vértice obtemos 360° ou seja uma figura plana.

Nas figuras a partir do pentágno não se consegue construir um poliedro, pois o mínimo de faces a concorrer num vértice é 3, com 4 existe sobreposição de pentágonos logo 108 × 4 = 432°.

No heptágono cada ângulo inscrito tem 128 logo ao tentar concorrer 3 faces num vértice dá 385° que dá superior a 360° logo existe sobreposição de heptágonos.

Figura 2. Justificações apresentadas por um grupo para algumas conjeturas.[2]

Matilde — Para ser regular tem que ser sempre o mesmo número [de faces] a concorrer em cada vértice. E se concorrerem 4?

Diana — Não dá, olha, não faz vértice.

Matilde — Então é essa a justificação.

A professora estava próxima do grupo e questionou as alunas: «O que significa não fazer vértice?» Diana disse: «Não dá assim para dobrar». A professora sugeriu que procurassem razões para não permitir a dobragem, mas as alunas ficaram em silêncio, então a professora avançou uma pista «há pouco disseram que a amplitude dos ângulos internos de cada quadrado era de 90°, pensem se esse dado poderá ajudar para encontrarem justificações válidas». As alunas tinham sobre o plano da mesa a figura plana que haviam construído e rapidamente chamaram a professora para lhe comunicar a justificação que tinham encontrado:

Matilde — Stôra, aqui à volta do ângulo [no qual concorrem as 4 faces], dá 360°, por isso é que não dá para dobrar, não é? Diga-nos se está bem.

Professora — São vocês que têm que decidir se está bem.

Francisca — Sim, mas oh stôra, eu acho que se der menos de 360° dá, com 360° não.

Professora — Pronto, então discutam as três para poderem decidir.

As alunas mostravam pouca confiança em si próprias. Depois de alguma discussão decidiram escrever: «Se concorrerem num vértice mais de 3 faces a soma dos ângulos que concorrem nesse vértice irá ser de 360°, o que não permite a dobragem. Forma-se uma figura plana». Não contemplando, porém na sua justificação casos em que concorrem mais de quatro faces em cada vértice, apesar de terem referido «mais de 3 faces». Para as restantes conjeturas formuladas em torno dos restantes poliedros regulares, as alunas continuaram a apresentar justificações baseadas em raciocínio aritmético.

Os alunos de outros grupos também se preocuparam em justificar as suas conjeturas, como se pode observar, por exemplo, na figura 2.

Os alunos justificaram que com quatro quadrados a concorrer num vértice não é possível construir poliedros regulares por se obter uma figura plana e o mesmo acontece com três faces hexagonais regulares quando estas concorrem num vértice. Nestas justificações estão subjacentes as condições de que para se poder construir um poliedro regular têm que concorrer no mínimo três faces num vértice e a soma das amplitudes dos ângulos das faces que concorrem num vértice tem que ser inferir a 360°. Os alunos apresentam assim, justificações baseadas em raciocínio aritmético e na observação das construções feitas com auxílio das peças de *polidron*. Parece terem começado a entender o *estatuto* de uma conjetura. Para tal terá contribuído o trabalho realizado, em tarefas anteriores, em torno da importância da justificação e prova das conjeturas.

Discussão de resultados

À medida que se iam discutindo os resultados, um aluno ia registando as conclusões no quadro. O número de poliedros regulares encontrados e algumas das suas características, como o número de faces, vértices e arestas, tipo de face do sólido e número de faces que concorrem em cada vértice do poliedro não geraram muita discussão. Verificou-se alguma discordância relativamente à contagem do número

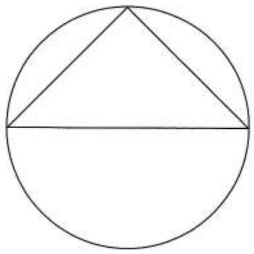


Figura 3. Desenho feito por Cátia (reproduzido do original).

de vértices e de arestas, mas depressa se chegou a consenso. Por vezes, alguns alunos questionavam os outros e pediam explicações sobre determinadas características que eles tinham estabelecido e que os colegas não referiam, como por exemplo, a soma das amplitudes dos ângulos que concorriam em cada vértice do tetraedro, como se pode observar no episódio seguinte:

Lúcia — E os ângulos? Não disseste nada.
Fábio — Ah, dá 180°.
Joaquim — Eu concordo, mas porque dá 180, tens que explicar.
Fábio — O de cada triângulo é 60 e temos 3 [triângulos], é vezes 3, que dá os 180°.

As alunas de um dos grupos apresentaram algumas conjeturas que tinham formulado e que lhes pareceram ser importantes, por exemplo, conjeturaram que a «altura do tetraedro é perpendicular à base no baricentro da mesma». A justificação apresentada baseava-se em raciocínio geométrico e apoiava-se no critério de perpendicularidade entre retas e planos. A comunicação desta conjetura e a respetiva justificação por parte das alunas gerou discussão em torno de conceitos, como altura, baricentro, circuncentro e ortocentro de um triângulo. Verificou-se que muitos alunos não tinham noções claras destes conceitos, como se pode observar no episódio seguinte:

Leonel — O circuncentro tem a ver com o triângulo?
Carlos — O circuncentro é o centro da circunferência.
(...)
Cátia — Temos que ter os vértices do triângulo a tocar na circunferência.
Professora — Queres vir aqui [ao quadro] explicar?
(A Cátia foi ao quadro e desenhou a figura 3).
Carlos — O que ela vai fazer é a altura do triângulo que é igual ao raio da circunferência.
Francisca — Achas que sim? Pode não ser.
Carlos — Pelo menos parece. Ela agora pode traçar a altura e ver o centro.
Cátia — Não ia traçar a altura.
Carlos — Mas, se traçares a altura vai dar no meio da base do triângulo que é o centro.
Cátia — O que eu queria dizer é que, o circuncentro vai ser o ponto de interseção dos segmentos que traçamos aqui neste ponto, neste e neste [pontos médios dos três lados do triângulo].
Professora — Segmentos? A que segmentos te estás a referir?
Cátia — Às medianas, não, mediatrizes.

O que Carlos pretendia explicar aos colegas é que o circuncentro do triângulo era o centro da circunferência circunscrita, só que ele baseou-se na evidência do desenho, considerando o triângulo isósceles tendo por base o diâmetro da circunferência. Esta discussão continuou, a professora pediu a contribuição dos restantes alunos, foi esclarecida a noção de segmento de reta, medianas e mediatrizes e foi retomada a ideia de Carlos no sentido de levar os alunos a compreenderem que os desenhos não representam necessariamente toda a informação que é conhecida sobre os objetos geométricos. A ideia de Carlos foi também aproveitada para serem discutidas as noções de altura e de ortocentro de um triângulo. Apesar da conjetura que levou a esta discussão ser irrelevante para a investigação, contribuiu para que fossem relembrados e até aprendidos novos conceitos, como por exemplo o conceito de ortocentro de um triângulo, que os alunos mencionaram desconhecer.

A concluir

Apesar de os alunos na realização desta tarefa não terem atribuído muita importância à formulação de questões a investigar, em geral, usaram o modo afirmativo em vez do interrogativo, alguns grupos procuraram relacionar as observações iniciais com foco na investigação. O processo de formulação de conjeturas esteve presente no trabalho de todos os grupos, embora algumas tenham sido formuladas de forma implícita. Alguns alunos revelaram alguma tendência para apresentar o máximo de conjeturas possível, independentemente da trivialidade ou relevância para a investigação. Esta tendência parecia estar relacionada, por um lado com alguma dificuldade e um certo descuido em relacionar essas conjeturas com o foco da investigação e por outro lado, por considerarem importante mostrar muito trabalho feito. Os alunos formularam as suas conjeturas com base no processo de especialização e testaram-nas através da realização de mais experiências particulares com as peças de *polidron*. A realização do teste permitiu aos alunos refinar e reformular algumas conjeturas e refutar outras. Verificou-se que a utilização de materiais manipuláveis facilitou a formulação e o teste de conjeturas.

Os alunos na realização desta tarefa já demonstraram entender a justificação das conjeturas como um aspeto inerente à atividade investigativa, começaram a entender o estatuto de uma conjetura e manifestaram preocupação em apresentar alguns argumentos para as validar, embora ainda tenha sido necessário incentivá-los a procurar argumentos lógicos ou pelo menos plausíveis.

A discussão e apresentação do trabalho desenvolvido pelos alunos é uma fase fundamental do trabalho de investigação, por isso carece de atenção por parte do professor. Este momento é propício para desafiar e incentivar os alunos a aprofundar a investigação, a refletir sobre o trabalho realizado, a criticar e questionar as ideias dos outros, a apresentar argumentos que convençam os colegas e também o professor. E pode ser também um momento oportuno para relembrar e mesmo aprender novos conceitos. Por isso é importante que o professor se aproprie da tarefa para que se sinta à vontade para moderar a discussão em torno das descobertas realizadas pelos alunos e de possíveis dificuldades que possam surgir que, por vezes, não são previsíveis.

Notas

[1], [2] Transcrito do original, foram corrigidos erros ortográficos, mas mantida a construção frásica.

[3] Para mais detalhes desta aula consultar Branco (2011).

[4] Tarefa adaptada de Guillén (1991). Transcrito do original, foram corrigidos erros ortográficos, mas mantida a construção frásica.

Referências

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153–167). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Afonso, C. (2002). *As fases de aprendizagem do modelo de van Hiele: Uma experiência no ensino da Geometria com futuros professores do 1.° ciclo*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Branco, M. G. P. (2011). *Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10.° ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga. (Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt).

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243–307). Dordrecht: D. Reidel.

Guillén, S. G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Editorial Sintesis.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*, 11–18.

Loureiro, C., Oliveira, A., Ralha, E. & Bastos, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10.° ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

NCTM (2007). *Princípios e normas profissionais para a Matemática escolar*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional. (Original em inglês publicado em 2000).

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119–138). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M. & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.° ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 88–106). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Maria Gorete Pires Branco

Escola Secundária de Caldas das Taipas, Braga, Portugal

APM – 2014

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2014

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento (@-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	60,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	60,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	80,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	75,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	100,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2014

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Educação e Matemática
(inclui atas ProfMat)</th><th>Quadrante</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sócio individual</td><td>Portugal</td><td></td><td>12,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td></td><td>15,00 €</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Instituições</td><td>Portugal</td><td rowspan="2">47,00 €</td><td>28,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td>32,00 €</td></tr>
</table>

índice

Editorial

Artigos

Secções