

Educação e Matemática

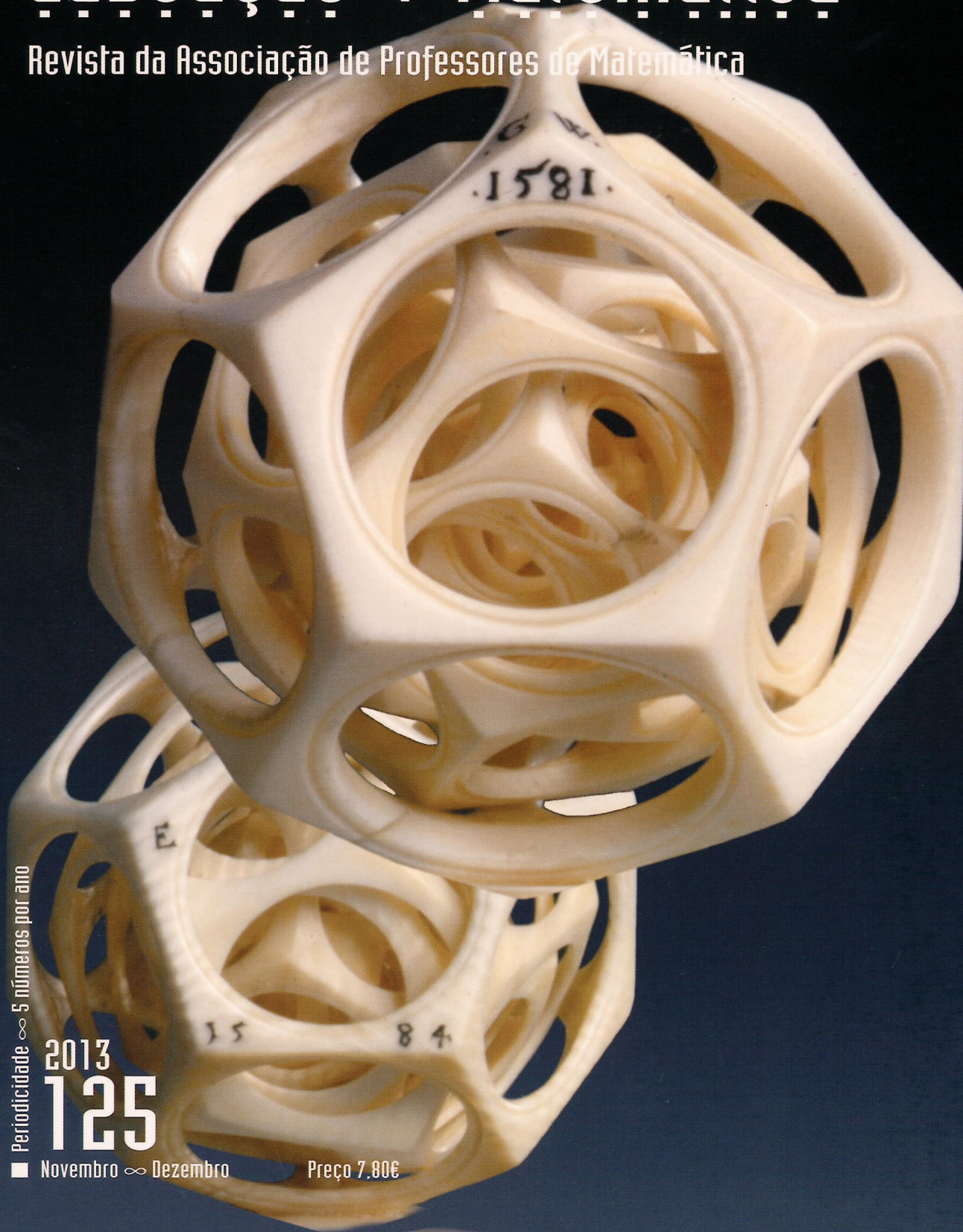
Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2013
125

■ Novembro ∞ Dezembro

Preço 7,80€





EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Adelina Precatado
Redação	Alice Carvalho
	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Helena Rocha
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	Manuela Pires
	Paulo Alvega

Colaboradores Permanentes

António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2013

Ana Paula Canavarro Estatística na Educação Matemática
Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes

Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

Data da publicação Dezembro 2013

Tiragem 1800 exemplares

Periodicidade

Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão

ASPRINT, Apolinário Silva, Unipessoal Lda
Núcleo Empresarial de Mafra
Av. Dr. Francisco Sá Carneiro, Bloco C – 12 cave
2644-006 Mafra

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre este número temático

O número temático de 2013 é dedicado ao tema Cultura – Matemática – Educação. Com esta escolha, a Redação da *Educação e Matemática* procura contribuir para uma reflexão sobre o papel da Matemática na educação dos alunos, no quadro de uma perspetiva mais ampla de formação cultural — uma reflexão que consideramos sempre necessária, mas que o atual momento educativo torna particularmente relevante. Para conduzir a preparação deste número, convidámos para seus editores Eduardo Veloso e Rita Bastos, que têm dedicado há vários anos um interesse particular nestas temáticas. A Redação agradece a ambos todo o empenho e cuidado que dedicaram à sua elaboração, desde a sua conceção até à sua finalização.

Sobre a capa

Georg Wecker (Trabalho em marfim, 1581–1584)
Staatliche Kunstsammlungen Dresden
Colecção: Grünes Gewölbe

A Matemática sempre possui um valor transcendente relativamente ao seu conteúdo tomado *stricto sensu*.

Neste caso a produção de peças como a que se reproduz na capa deste número permitiam, aos seus autores, manifestar um conhecimento matemático, em particular um conhecimento da perspectiva. O autor de uma obra deste tipo era visto como alguém com capacidades extraordinárias e de uma habilidade inquestionável.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Arsélio Martins, Carlota Simões, Eliana Pinho, Helena Sousa, Henrique Guimarães, Isabel Cristina Dias, José Ferreira Lima, Luís Cardoso, Lurdes Figueiral, Michelle Emmer, Miguel Abreu, Ricardo Gafeira e Ubiratan Ambrósio.

Saíram da redação

Nuno Candeias e Júlia Perdigão deixaram de integrar a redação da Revista *Educação e Matemática*. Pelo contributo que deram à revista enquanto permaneceram na redação, aqui fica o nosso agradecimento.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista.

A cultura matemática como finalidade da educação obrigatória

O título deste editorial é apenas uma combinação, entre muitas, das três palavras que constituem o tema deste número da Educação e Matemática: **Cultura – Matemática – Educação**. O próprio conteúdo desta revista mostra essa variedade de opções.

A primeira que surge naturalmente, e muito significativa, é a da relação entre a matemática e os diversos domínios que associamos habitualmente à palavra cultura — artes plásticas, música, literatura, filosofia... Nesta importante direcção, o acerto da escolha de Michele Emmer como autor pode imediatamente ser constatado pelo artigo com que abrimos este número, que apresenta uma visão estimulante e muito abrangente daquela relação. Nesta linha, Lurdes Figueiral revela-nos como a procura do belo inspirou Kepler no desenvolvimento da Matemática, enquanto Eliana Pinho nos mostra a obra de um artista plástico inspirado fortemente em ideias matemáticas e Carlota Simões analisa certas obras musicais, usando ferramentas matemáticas.

Mas a matemática também é um domínio cultural essencial, e daí a iniciativa de promover um debate no último ProfMat em torno da afirmação

A razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural, associada ao facto da matemática constituir uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de pensar e de aceder ao conhecimento.

e de transcrever a primeira parte desse debate neste número da revista.

Uma outra direcção que julgamos não poderia faltar neste número temático é a de compreender que as escolhas que têm sido feitas no que respeita à educação matemática não são inócuas, e como «a matemática pode contribuir na consecução da paz e da dignidade humana, portanto para a justiça social». Para isso recorreremos a Ubiratan D'Ambrosio, que nos apresenta uma visão forte, clara e actualizada do Programa Etnomatemática, que passa por entender «o fazer e o saber matemático de culturas não originadas pelas europeias». Também nesta direcção, Isabel

Cristina Dias levanta várias questões relacionadas com o ensino da Matemática, dando relevo às semelhanças e diferenças entre culturas.

Nos tempos conturbados que estamos a viver, neste avolumar de retrocessos criminosos no que diz respeito à educação e à educação matemática, esperamos que este conjunto de artigos nos ajudem a procurar uma visão positiva do que poderia ser um futuro melhor para a educação. O texto de Lochkart pode dar-nos uma visão promissora da matemática escolar e nos últimos parágrafos deste editorial gostaríamos de prolongar o debate iniciado no ProfMat e abrir caminho ao aparecimento, eventualmente controverso mas estimulante, de novas ideias para a educação matemática.

Como diria Luther King, nós temos um sonho...

No nosso sonho, a educação matemática obrigatória, estendida aos doze anos de escolaridade, mergulharia os alunos numa prolongada experiência matemática recheada de todo o tipo de actividades que lhe são características, como a resolução de problemas, as explorações e investigações, a realização de projectos em matemática e interdisciplinares, a leitura de textos matemáticos e a escrita de textos descrevendo actividades ou apresentando e discutindo os seus resultados.

Naturalmente, ao longo daquela experiência, os alunos trabalhavam individualmente e em grupo, assistiam a exposições do professor a toda a turma, comunicavam entre si e com o professor na introdução e definição de novos conceitos necessários para o desenvolvimento das diversas actividades, tentavam fazer e discutiam demonstrações dos resultados obtidos e reflectiam, individualmente ou em conjunto e sob a orientação do professor, sobre a sua experiência.

A experiência dos alunos não se limitava no entanto ao espaço e tempo da sala de aula — incluía também visitas a bibliotecas, museus e outros locais disseminadores de cultura; a comunicação seria fortemente estimulada, não só com alunos e professores de outras escolas, mas também com outros profissionais — matemáticos, jornalistas, es-

critores, artistas e outras pessoas ligadas à cultura — através de entrevistas, conferências, *workshops*, etc. A utilização das TIC, assim como de materiais manipuláveis, seria tão presente e natural como o é na vida de qualquer cidadão e profissional qualificado.

Os diversos temas da matemática elementar, como a aritmética, a geometria, a álgebra, a análise e a organização de dados seriam os principais objectos da experiência a desenvolver pelos alunos e não vemos como necessária a existência de uma lista fixa de conhecimentos e de técnicas operacionais a aprender pelos alunos antes de terem início as primeiras experiências elementares — pelo contrário, seria no contexto e ao longo da sua experiência matemática que conhecimentos e procedimentos iriam sendo introduzidos e assimilados. No entanto, devido ao grande número de experiências concretas por que passariam todos os alunos, a chamada «matemática útil», necessária para a vida corrente e para a cidadania, não deixaria de fazer parte das suas aprendizagens.

No nosso sonho de uma educação matemática para todos tendo uma finalidade cultural, os programas, os materiais de apoio e a avaliação dos alunos seriam completamente diferentes dos actuais.

Um dos objectivos do texto programático seria precisamente a apresentação da matemática como domínio cultural da educação para todos, e focaria: as características que a aproximam ou a distinguem das outras ciências e dos outros domínios do saber; o que podemos aprender, quando abordamos episódios da sua história, sobre o seu «modo de olhar e aceder ao conhecimento» e de influenciar as civilizações; e como se revela a presença da matemática em tantos aspectos da nossa sociedade actual.

Além disto, o programa devia conter numerosos e significativos exemplos de actividades de diferentes tipos a desenvolver ao longo da escolaridade e correspondendo à finalidade cultural que estamos a defender, com recomendações específicas para os primeiros anos, para os anos intermédios e para as sínteses finais no ensino secundário.

Quanto aos materiais de apoio, deveria fazer-se largo uso das possibilidades de colocar materiais *online* e promover a substituição dos manuais escolares de compra obrigatória por livros e outras publicações para professores e alunos com presença assegurada nas bibliotecas escolares e que multiplicassem as sugestões e indicações presentes no programa.

Na avaliação, a finalidade cultural que defendemos para a educação matemática devia naturalmente levar ao desaparecimento dos exames nacionais e à criação de uma cultura de avaliação contínua e formativa, instituindo o portefólio digital para cada aluno contendo os produtos do seu trabalho escolar, as auto-avaliações e a avaliação dos seus pares e dos seus professores relativos a esses produtos, as sínteses avaliativas e recomendações feitas no fim dos ciclos escolares e outros elementos pertinentes para uma caracterização de cada aluno e do seu percurso na escolaridade básica. Seria este portefólio que, juntamente com uma entrevista, constituiriam os elementos fundamentais para, do lado da instituição de ensino superior, ser apreciada a sua eventual candidatura.

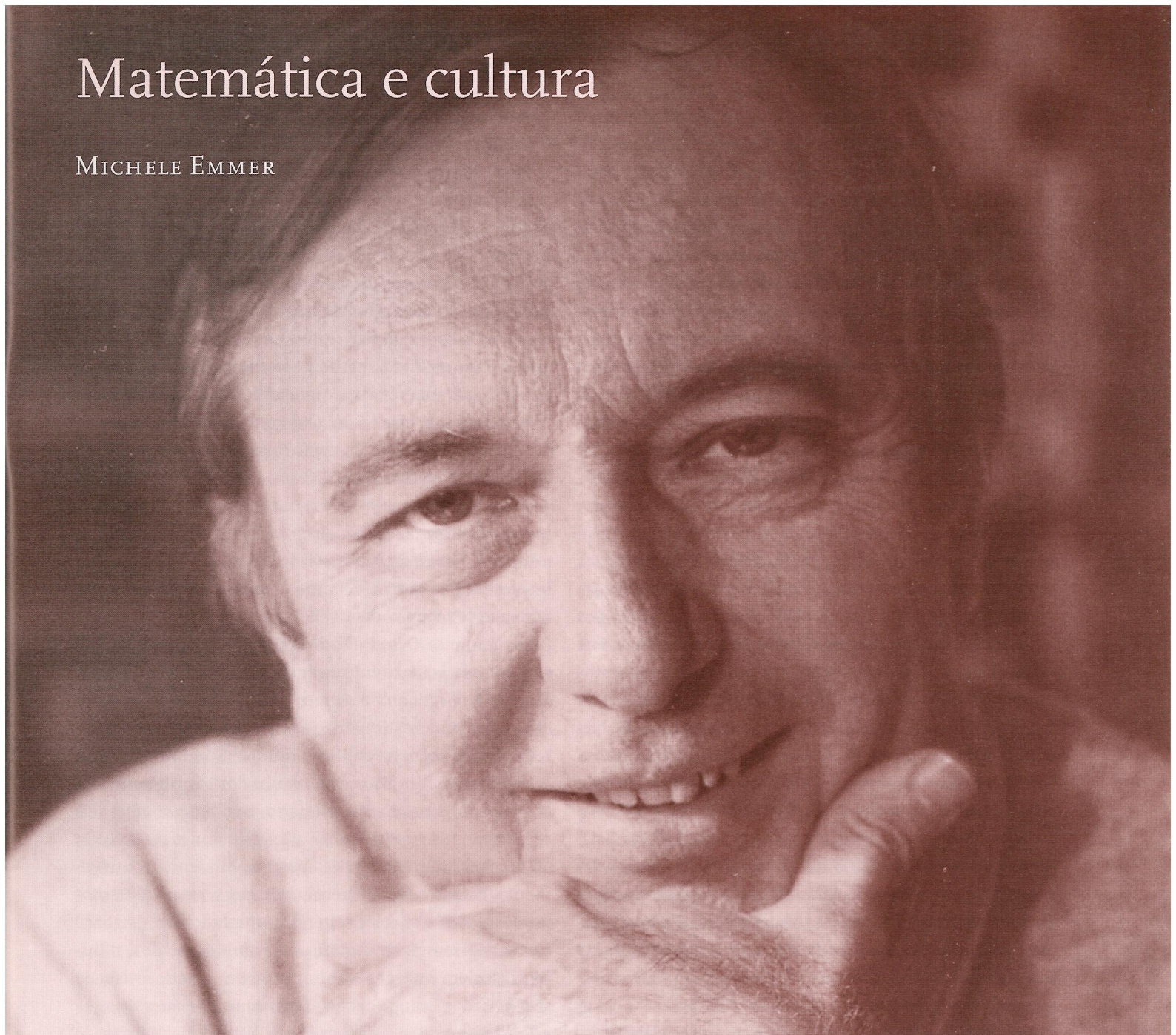
Reconhecemos que estamos muito longe de tornar este sonho realidade, é verdade, mas o que mais nos preocupa é que os professores esqueçam os sonhos que partilharam, especialmente na APM, e que tão férteis se revelaram, e enveredem por outros caminhos, mais conformistas, que certamente representarão um retrocesso na educação matemática que se tem feito neste país. É preciso caminharmos juntos na direcção dos nossos sonhos, com todas as nossas forças, e não nos deixarmos levar pelos pesadelos, como o que nos relata Paul Lockhart.

EDUARDO VELOSO
RITA BASTOS

Nota: por opção dos editores, este artigo não obedece às regras do novo acordo ortográfico.

Matemática e cultura

MICHELE EMMER



RELAÇÕES ENTRE CULTURA E MATEMÁTICA: UMA INTRODUÇÃO

Em 24 de Setembro de 1949 foi publicado um livro destinado a tornar-se famosíssimo: *Le modulator. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*. Autor: Le Corbusier. Tinha um sonho, o arquitecto francês: «O meu sonho é construir, nas áreas edificáveis que mais cedo ou mais tarde estarão disponíveis no nosso país, uma grelha de proporções desenhada sobre uma parede ou realizada com hastes de ferro, que sirva como indicação para o projecto na sua totalidade, um modelo apresentando uma sequência infinita

de diferentes combinações e proporções, e que os pedreiros, os carpinteiros, os marceneiros deverão consultar sempre que tenham de escolher medidas para os trabalhos que lhes cabem; de modo que todas as várias obras realizadas, embora diferentes entre si, sejam unificadas pela harmonia. Tomemos um homem, com um braço levantado, de tal modo que nessa posição atinja a altura de dois metros e vinte... Com a referida *grelha de construção* desenhada de modo a estar em harmonia com esse homem nela incluído, estou certo de que se obterá uma série de medidas conciliando as dimensões humana e a matemática» [1]. Porquê a matemática?

«A matemática é a magnífica estrutura estudada pelo homem para tentar compreender o universo. Apreende o absoluto e o infinito, o compreensível e o eternamente ambíguo. Possui paredes que se podem subir e descer sem qualquer resultado; mas por vezes há uma porta, que então abrimos, entramos, e damos por nós num outro reino, o reino dos deuses, o lugar que encerra a chave dos grandes sistemas. Estas portas são as portas do milagre.» [1]

Alguns anos depois, em 1958, um artista gráfico holandês que viria a tornar-se famoso, Maurits C. Escher, abria uma outra porta: «Há bastante tempo confrontei-me por acaso com o problema da divisão regular do plano, das figuras que se repetem até ao infinito. Deparei com um muro elevado e, tendo o pressentimento de que escondesse algum enigma, subi-o com alguma dificuldade. Assim que cheguei ao outro lado, encontrei-me num lugar selvagem e tive grande dificuldade em encontrar o meu caminho, senão quando, seguindo um percurso muito sinuoso e complicado, atingi a grande porta aberta da matemática.» [2] Anos depois, no prefácio do seu primeiro livro, Escher acrescentará: «Da análise dos enigmas que nos rodeiam e das considerações e observações que fiz cheguei ao domínio da matemática. Embora seja completamente desprovido de conhecimentos e experiência no domínio das ciências exactas, sinto muitas vezes ter mais em comum com os matemáticos do que com os artistas.»[3]

Na mesma altura em que Escher escrevia estas palavras, o Pato Donald, personagem de Walt Disney, fazia uma viagem ao *reino da Matemática* que terminava com as palavras: [4] «Não há limites para o que a mente humana pode conceber e criar. Todos os dias que passam abrem-se portas para novas conquistas científicas e portas que hoje estão fechadas serão amanhã abertas, com a mesma chave: a matemática! A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o Universo.» (citado de Galileu Galilei).

As relações entre a matemática e as artes, a literatura, a poesia, a arquitectura, a música, o teatro, o cinema, têm uma história antiga que se renova continuamente. Em resumo, a relação entre cultura e matemática é indissociável, a matemática é parte essencial da cultura.

«A matemática é uma força cultural de primeiro plano na civilização ocidental» observou o matemático Morris Kline, em 1953, no livro *Mathematics in Western Culture*. [5] «A matemática determinou a orientação e o conteúdo de grande parte do pensamento filosófico, destruiu e reconstruiu doutrinas religiosas, constituiu os fundamentos de teorias económicas e políticas, moldou os principais estilos pictóricos, musicais, arquitectónicos e literários, está na origem da nossa lógica e deu as melhores respostas que te-

mos às questões fundamentais sobre a natureza do homem e do seu universo... Por fim, sendo uma realização humana imensamente depurada, oferece satisfação e valores estéticos pelo menos semelhantes aos que são oferecidos por qualquer outro domínio da nossa cultura». Dir-se-á, palavras de um matemático!

Não há dúvidas de que nos últimos anos, além de uma intensa utilização de ideias e instrumentos matemáticos em todos os campos do saber e da tecnologia, se verificou um grande desenvolvimento nas relações entre matemática e cultura, a começar pelo teatro, no início dos anos noventa do século passado, mas também no cinema, na arte, na música, na literatura, na arquitectura. Neste último caso, a matemática não aparece apenas como instrumento para a construção, mas também como fonte de inspiração de novas formas e novas ideias.

Não devemos, porém, cair no erro de considerar que a matemática é uma disciplina simples e de fácil divulgação. «A matemática é em si própria um mundo, e é preciso habitá-lo durante bastante tempo para sentir tudo o que lhe pertence de modo necessário», salientou Robert Musil, autor do romance *O jovem Toerless* (1906). [6] Um mundo em si mesmo mas, para empregar uma frase célebre do físico Eugene P. Wigner, não oferece qualquer dúvida a «ilógica eficácia da matemática», não apenas nas ciências da natureza mas também na cultura.

«A matemática não é apenas um dos instrumentos essenciais do pensamento primário, mas igualmente, nos seus elementos fundamentais, uma ciência das proporções, do comportamento objecto a objecto, movimento a movimento. E dado que esta ciência tem em si estes elementos fundamentais e os coloca em relação significativa, é natural que factos semelhantes possam ser representados, transformados em imagens.» Palavras de um grande artista do séc. XX, Max Bill. no artigo «*O pensamento matemático na arte do nosso tempo*», publicado em 1949, o mesmo ano do livro de Le Corbusier.[7]

Entre 20 de Janeiro e 17 de Fevereiro de 1963 realizou-se em Paris, no Palais de la Découverte, um dos templos da divulgação científica em França, uma exposição de arte com o título *Formes: mathématiques peintres sculpteurs contemporains*. Uma exposição que colocava no mesmo plano a pintura e a escultura contemporânea e a matemática. Uma exposição em que estavam expostas obras de artistas de grande relevância: entre os pintores, Max Bill, Paul Cézanne, Robert e Sonya Delaunay, Albert Gleitzes, Juan Gris, Le Corbusier, Jean Metzinger, Peter Mondrian, Ladislav Moholy-Nagy, Georges Seurat, Gino Severini, Sophie Taeuber-Arp, Victor Vasarely. Entre os escultores, Max Bill,

Raymond Duchamp-Villon, Georges Vantergerloo. A exposição estava organizada em três secções: – Mathématiques – Peintres – Sculpteurs. [8] Matemática e cultura, em todos os diversos aspectos. Mas a matemática é uma cultura à parte? E a educação que papel tem em tudo isto?

AS DUAS CULTURAS

«As mudanças na educação não produzirão milagres. As divisões da nossa cultura farão de nós mais obtusos do que é possível; não traremos à vida mulheres e homens capazes de compreender o nosso mundo como Piero della Francesca, ou Pascal, ou Goethe compreenderam o seu. Porém, com um pouco de sorte, podemos educar uma grande parte das nossas melhores mentes, de tal modo que não sejam alheias às experiências criativas tanto na arte como na ciência». Em 6 de Outubro de 1956 foi publicado no *New Statesman* um artigo de Charles Percy Snow colocando um problema que foi depois desenvolvido numa conferência e ainda num livro três anos mais tarde. O livro intitulava-se *The Two Cultures* [9] e punha em confronto cultura científica e cultura humanística. Abordava temas muito sensíveis, e o livro desencadeou uma prolongada polémica que levou Snow a publicar, alguns anos depois, em 1963, um apêndice ao livro que termina com as palavras citadas no início. Snow era um químico que tivera o azar de em 1932 se enganar nos dados de uma experiência. Isto teve grandes repercussões e determinou o fim da sua carreira científica. Tornou-se escritor. Os seus romances foram publicados em diversas línguas entre 1940 e 1970. Com o livro *The Two Cultures* tornou-se famoso em todo o mundo.

Na introdução à edição de 1993 Stefan Collini, professor de literatura inglesa na Universidade de Cambridge, escreve: «Devemos incentivar o desenvolvimento de uma capacidade intelectual equivalente ao bilinguismo, não apenas a capacidade de usar a língua das nossas respectivas especializações, mas também de ouvir, aprender e eventualmente contribuir para abordagens culturais mais vastas.» Numa palavra, estamos a falar de *interdisciplinaridade*, termo que aponta para um tema, uma matéria, uma metodologia ou uma abordagem cultural que engloba competências de mais campos científicos ou de mais disciplinas de estudo. E é muito significativo que em 16 de Maio de 2013 tenha sido apresentado em Washington, nos EUA, patrocinado conjuntamente pela Smithsonian Institution e pela NSF, National Science Foundation, um *white book* «that will share results and seek feedback from an exploration of challenges and opportunities for transdisciplinary research and creative work, informed by 200 international

contributors. Next we will consider methods for innovative exchanges supporting crossdisciplinary learning across formal and informal education settings»^[1], sobre as possibilidades de fazer crescer no mundo os cursos, as teses, os doutoramentos, em poucas palavras os percursos educativos interdisciplinares sobre o tema da arte, da ciência, da tecnologia, das duas culturas. O projecto, denominado *SEAD, Networking Sciences, Engineering, Arts and Design to Confront the Hard Problems of our Time*, concebido e lançado por Roger Malina, astrofísico e humanista, professor de *Arts and Technology* e de *Physics* na *University of Texas in Dallas*, director da mais importante revista de arte, ciência e tecnologia, *Leonardo*, da MIT Press, prolonga-se pelos próximos anos. [10].

Em 1981, a historiadora de arte americana Linda D. Henderson publicou um livro destinado a mudar o modo como olhamos a arte moderna, a vanguarda artística do séc. XIX, *The Fourth Dimension and Non Euclidean Geometry in Modern Art* [11] — um trabalho que foi continuado por uma segunda edição do livro publicada em Março de 2013, com mais 200 páginas, pela MIT Press [12]. Henderson reconstruiu os percursos através dos quais as novas ideias sobre geometria da segunda metade do séc. XIX, em particular as geometrias não euclidianas e a ideia de quarta dimensão espacial, antes da teoria da relatividade e do espaço-tempo, influenciaram a arte do séc. XX, inclusive através da literatura inspirada nas investigações matemáticas, a começar pelo romance *Flatland* de Edwin Abbot, de 1884. [13]

As fontes científicas e matemáticas que Henderson utilizou são praticamente a totalidade das investigações matemáticas da época. Não afirmando, obviamente, que esta era a única fonte de inspiração para os artistas da época, mas mostrando como é complexa e fascinante a destriça dos fios de Ariana que levam à formação de novas ideias na ciência e na arte.

«O de filosofia esforça-se o máximo para nos convencer que a sua disciplina é útil. Todos querem convencer-nos que ensinam coisas úteis. Todos excepto o de matemática. Esse disse-nos logo no primeiro dia que a matemática não serve para nada.» «A matemática é importante. Tal como a filosofia: mesmo se nem a matemática nem a filosofia têm respostas para a grande questão. Tolstoi ou Dostoiévski?» Diálogo entre Claude e o seu professor German, na peça de teatro *O rapaz da última fila*, do escritor espanhol Juan Mayorga, [14] diálogo retomado no filme *Dans la maison* [*Dentro da Casa*, em português] de François Ozon. [15]. «Agora vamos rever os números imaginários. E se pensas sequer levantar o rabo dessa cadeira obrigo-te a comer os apontamentos, percebes, poeta? Finalmente entraram-me

na cabeça os números imaginários. É como jogar sem bola. Existem apenas na cabeça. Mas podem-se somar, multiplicar...», diálogos da peça de Mayorga.

«Diz-me, compreendeste esta coisa? Isto dos números imaginários. Sim. Não é muito difícil. Tudo o que é preciso saber é que a raiz quadrada de menos um é a unidade com que se deve calcular. Mas como pode fazer-se tal coisa sabendo, com certeza matemática, que é impossível? (...) O que me faz estremecer é a força contida num tal problema, uma força que nos agarra tão firmemente que no fim aterramos sãos e salvos do outro lado.»

Palavras extraídas de *O jovem Toerless*, um diálogo entre o protagonista e o seu amigo Beineberg. Esta lição sobre números imaginários desperta no protagonista «uma veneração pela matemática, que subitamente deixara de ser uma matéria morta para se tornar em qualquer coisa muito viva».

O professor dele (de Toerless) acrescenta:

«No que diz respeito à matemática (...) admito sem mais que por exemplo estes números imaginários, estas quantidades que na realidade não existem, são um osso duro de roer para um jovem estudante. Tem de aceitar o facto de que tais conceitos matemáticos são inerentes à natureza do pensamento puramente matemático (...) A matemática é em si própria um mundo, e é preciso habitá-lo durante bastante tempo para sentir tudo o que lhe pertence de modo necessário.»

A matemática como fonte de inspiração para dizer outra coisa, para visualizar outra coisa, para imaginar outros mundos. E de que trata o cinema, desde os seus começos? O imaginário do cinema que se casa com o imaginário da matemática e da literatura. Por vezes o resultado deste encontro é surpreendente, porque «a matemática nunca desilude».

É uma das frases chave do filme de François Ozon. A certa altura o protagonista tem nas mãos o livro de Musil, vê-se distintamente a capa. E a palavra «imaginário» repete-se mais vezes nos diálogos. O aluno escreve, conta, imagina, deixando o professor fascinado, atraído. O aluno introduz-se na casa dos pais de um colega de turma e, a pouco e pouco, passa a fazer parte integrante da família. Ou antes, constrói uma narrativa, cada vez mais elaborada, mais realística, mas talvez completamente imaginária, na qual todas as pessoas que vivem naquela casa se tornam ou personagens da história contada pelo aluno ou imagens da sua reconstituição pelo professor ou ainda imagens no filme, imagens ambíguas, como ambíguo é o aluno. História que deveria chamar-se, segundo o aluno, *Os números imaginários*, e segundo o professor, *O rapaz da última fila* porque «o título obriga-nos a assumir uma responsabilidade», como escreve Mayorga no texto teatral. O realizador do filme mudou o título da peça de teatro. Disse Ozon que

«o dispositivo de alternância entre a realidade e a história das criações do aluno pareceu-me imediatamente adequado a uma reflexão lúdica sobre o imaginário e os métodos narrativos». A palavra «matemática» surge muitas vezes no filme, a própria estrutura do filme é uma espécie de «arte combinatória» das várias situações, personagens, invenções imaginadas pelo estudante escritor. Que na peça original é muito bom em matemática, aspecto deixado na sombra no filme, embora ele dê lições de matemática ao colega, sobre números imaginários. Imaginário, realidade, existência, construção, invenção, escrita, narração. O filme encerra todos estes aspectos. Tal como no romance de Musil. Porque «a matemática nunca desilude». Nem no cinema, se for usada como fonte do imaginário.

Desde há muitos anos que comecei a ocupar-me das relações entre matemática, arte, cinema, literatura, arquitectura, numa palavra entre a matemática e a cultura, tendo claro para mim que o meu interesse era também pelas possíveis consequências educativas nos cursos que dei na universidade. Com a ambição de que as pesquisas feitas nos diversos domínios pudessem ser úteis a estudantes, professores, e também aos apaixonados pela cultura.

A MINHA EXPERIÊNCIA

A partir de 1976 comecei a interessar-me pelas conexões entre a matemática e as artes visuais, a arquitectura, e as outras disciplinas científicas. Inicia-se o projecto *Matemática e arte*. Além de escrever artigos e livros, realizei 18 filmes da série *Arte e matemática*, [16] traduzidos em inglês, francês e castelhano, projecto em que participaram muitos matemáticos de diversas universidades, entre os quais Fred Almgren e Jean Taylor, Princeton University, Linda D. Henderson, Texas University, Thomas Banchoff, Brown University, Donald Coxeter, Toronto University, Roger Penrose, Oxford University. E artistas, como Max Bill, Salvador Dalí, Bruno Veronesi, Arnaldo Pomodoro, Bruno Munari e muitos outros, com a colaboração de museus e instituições culturais de todo o mundo.

Em 1985 tem início o projecto *M. C. Escher* em colaboração, entre outros, com R. Penrose e D. Coxeter. Organizei, entre outras iniciativas, o congresso e a exposição sobre Escher na Universidade de Roma e no Instituto Holandês de Roma, em 1985. As actas do congresso, de que fui editor com D. Coxeter, R. Penrose e M. Teuber, foram publicadas pela Elsevier, de Amesterdão, em 1985 e tiveram várias edições, tornando-se num livro de referência para quem se ocupa deste tema. [17] Iniciei neste mesmo ano a realização do filme sobre Escher.[18].

A partir de 1989 comecei a produzir exposições ligadas ao tema da arte e matemática, com a exposição itinerante *L'occhio di Horus: itinerari nell'immaginario matematico*, financiada pelo Instituto da Enciclopédia Italiana, em colaboração com a *Cité de Science de la Villette* de Paris. Depois fui curador da secção de matemática da *Città della Scienza* de Nápoles, destruída num incêndio doloso em Março de 2013. Realizei a segunda exposição e congresso internacional sobre Escher, na Universidade de Roma, em 1998. As actas foram editadas, em colaboração com Doris Schattschneider, pela Springer verlag. [19]

Em 1993 inicio o projecto *The Visual Mind* em colaboração com a MIT Press. Já foram publicados dois volumes com a colaboração de matemáticos e artistas, entre os quais Max Bill, Roger Penrose e Donald Coxeter, Martin Kemp e muitos outros [20].

A partir de 1997 tem início o projecto *Matemática e Cultura* na Universidade de Ca' Foscari em Veneza, um encontro que não se dirige apenas aos matemáticos, aos professores e aos estudantes do secundário. Todos os anos se realiza um encontro sobre o tema, com matemáticos, artistas, filósofos, arquitectos, músicos, escritores, realizadores de cinema. Já intervieram 350 oradores ao longo destes anos e esse encontro tornou-se uma referência quanto aos temas aí tratados. As actas são publicadas pela Springer. Os encontros continuam e o próximo que se realiza de 28 a 30 de Março de 2014, será divulgado através do site <http://www.mat.uniroma1.it/venezia2014>), que estará activo a partir de Outubro de 2013.

Os temas tratados têm a ver com as conexões entre a matemática e a arte, a arquitectura, o cinema, o teatro, a literatura, a poesia, as aplicações, a medicina, a morfologia, a música, a animação computadorizada, a banda desenhada e muitos outros. No decurso dos anos, participaram nos vários encontros, todos os anos, cerca de uma centena de estudantes e meia centena de professores, apesar dos encontros não terem sido pensados apenas para eles. E desde há alguns anos participam estudantes e professores de toda a Itália, mesmo nestes últimos anos de crise.

Era inevitável que destas experiências nascesse também a ideia de criar cursos que tratassem de muitos dos temas de matemática e cultura que têm estado no centro das questões em discussão nos encontros e nas demais iniciativas.

A partir de 2004 comecei a dar um curso chamado *Espaço e forma* dedicado aos estudantes do último ano do mestrado em matemática e do mestrado em design. O simples facto de ter no mesmo curso estudantes de dois mestrados diferentes era por si só uma grande novidade. Queria experimentar em concreto a minha experiência de vários anos

de pesquisas interdisciplinares. Obviamente, havia partes do curso que tinham sido pensadas sobretudo para os estudantes de matemática, e outras para os estudantes de *design* industrial. A partir do mesmo ano, comecei também a dar um curso *Conexões interdisciplinares da matemática* a um grupo de professores.

Eis alguns dos temas tratados nos diversos cursos:

- A ideia de espaço: as novas geometrias, a evolução da ideia de espaço, as influências sobre as vanguardas artísticas dos princípios do séc. XX e sobre a arquitectura.
- A ideia de transformação, de metamorfose.
- As formas regulares no espaço a três dimensões. Do *Timeo* de Platão à redescoberta dos sólidos no Renascimento. Luca Paccioli, Piero della Francesca, até Kepler. Os sólidos semi-regulares, sólidos de Catalan, estrelados. As estruturas matemáticas de Lucio Saffaro.
- A quarta dimensão: das formulações iniciais em *Flatland* aos politopes a quatro dimensões de Coxeter às arquitecturas virtuais. A influência sobre a pintura e sobre a arquitectura do séc. XX. Buckminster Fuller.
- A importância da topologia. Partindo da banda de Moebius e dos primeiros exemplos de superfícies topológicas, até chegar às aplicações na arte (Max Bill, Bruno Munari), na arquitectura (Eiseman, van Berkel, Ghery), nas artes gráficas, no cinema.
- A técnica de animação: da animação tridimensional com objectos reais até à técnica da animação 2D no cinema, com aplicações à geometria (em colaboração com Gian Marco Todesco, da Digital Video).
- A simetria, os grupos cristalográficos, células elementares e elementos geradores.
- Pavimentações possíveis e classificação. Aplicações a diversos tipos de mosaicos em diferentes épocas.
- As estruturas matemáticas na obra de Escher: as simetrias, as geometrias não euclidianas.
- A animação e os desenhos de Escher, os modelos matemáticos, as formas impossíveis.
- As superfícies mínimas, as bolas de sabão. O problema matemático, o problema de Plateau. Aplicações dos modelos em arquitectura e história da evolução dos problemas, com referências à história da arte no séc. XV em paralelo com a evolução dos problemas científicos.
- As relações entre a matemática e o cinema, entre a matemática e o teatro, com exemplos. Projectão de excertos de filmes e de espetáculos teatrais.

- Um caso interessante: as curvas. História das descobertas dos diversos tipos de curvas. A importância, nos diversos períodos históricos dos tipos de curvas. Estudo em rede das suas equações e propriedades.
- Os fractais, dos algoritmos de Mandelbrot ao estudo das diferentes formas.
- Matemática e literatura. Como a matemática influenciou alguns escritores a partir do séc. XIX. Os modelos e sua utilização.

Seguem-se, como textos recomendados, alguns dos livros que escrevi nos últimos anos, além de muitos outros de diversos autores que são referidos nas diversas lições:

- M. Emmer, *Architettura topologica fluida*, in C. Bartocci, *La Matematica*, vol. 3, Einaudi, Torino, 2011
- M. Emmer, *Numeri immaginari: Cinema e matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2011
- M. Emmer, editor, *Flatlandia* con DVD, 2009, casa editrice Bollati Boringhieri, anno 2008
- M. Emmer, *Visibili armonie: arte, cinema, teatro, matematica*, Bollati Boringhieri, 2006
- M. Emmer, *Le bolle di sapone*, Bollati Boringhieri, 2009
- M. Emmer, *Mathland: dal mondo piatto alle ipersuperfici*, Birkhauser, 2004.
- M. Emmer, M. Manaresi, «*Matematica, arte, tecnologia, cinema*», Springer, 2001
- Os volumes da colecção M. Emmer, editor, *Matematica e cultura*, Springer, em italiano e em inglês. Os volumes da colecção *Imagine Math*, Springer, em inglês.
- Os filmes da série *Art and Mathematics*.

ALGUMAS OBSERVAÇÕES FINAIS

Desde há quase dez anos que tenho vindo a fazer estes cursos completamente novos no panorama universitário italiano. Devo dizer que estou muito satisfeito com as reacções dos estudantes. O curso de mestrado em matemática está dividido em três ramos principais: matemática pura, matemática aplicada, didáctica e história da matemática. No meu curso participam estudantes de todos os três ramos, e são muitos os estudantes que escolhem teses interdisciplinares. Inicialmente houve uma certa desconfiança da parte dos outros professores do departamento, mas também na sequência do bom acolhimento por parte dos estudantes o curso tem sido retomado todos os anos sem qualquer objecção. Naturalmente, um dos problemas é que não é con-

cebível, pelo menos nos nossos dias, que exista alguma possibilidade de uma carreira académica dedicada a temas realmente interdisciplinares. É uma enorme limitação, não sendo possível criar cursos de doutoramento, nem bolsas de estudo, e no entanto, mesmo no curso para professores que darei também no próximo ano, verificou-se existir um grande interesse por um modo totalmente novo de apresentar a matemática e o seu papel na cultura. Muitos professores elaboraram lições-piloto para testarem com os estudantes nas suas escolas dando continuidade a alguns dos temas estudados, o que poderá seguramente facilitar o despertar de interesse por parte dos estudantes.

Numa palavra, parece-me que a experiência se pode considerar bem sucedida.

Acredito assim que este é um facto importante e um momento favorável e penso também que a iniciativa de publicar um número da revista *Educação e Matemática* dedicado a este tema é um facto importante e significativo. E que o confronto entre as diversas experiências nos diferentes países, pelo menos a nível europeu, possa ser de grande interesse para o futuro. Estamos sempre a ouvir falar dos problemas económicos da Europa como se a principal motivação para a reunificação europeia não devesse ser, depois de tantos séculos de guerras e destruições, o empenhamento comum em melhorar cada vez mais a vida das populações do continente. E ninguém duvida que uma maior difusão da cultura científica e humanista seja um dos principais meios de contribuir para o crescimento da Europa.

Bibliografia

- [1] Le Corbusier, *Le Modulor. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*, Éditions de l'Architecture d'Aujourd'hui, coll. Ascoral, 1949,
- [2] M. C. Escher, *Regelmatige vlakverdeling*, Stichting De roos, Utrecht, 1958, em francês F. H. Bool, J. R. Kist, J. L. Locher, F. Wierda, Bruno Ernst, *La Vie et L'oeuvre de M. C. Escher*, Chene-Hachette, Paris, 1981, p. 156.
- [3] M. C. Escher, *The Graphic Work of M. C. Escher*, Macdonald and Co, London, 1961, pp. 8.
- [4] *Donald Duck in Mathmagic Land*, realização Hamilton Luske, director artístico Stan Jolley, argumento Milt Banta, Bill Berg e Heinz Haber, Walt Disney Production, USA, 1959.
- [5] M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, Oxford, 1953.
- [6] R. Musil, *Die Verwirrungen des Zöglings Törleß*, 1906.
- [7] M. Bill, *The Mathematical Way of Thinking in the Visual Art of Our Time*, in M. Emmer, ed. *The Visual Mind*, MIT

- Press, 1993, p. 5–9. Publicado originalmente em alemão in *Werke* 3, 1949.
- [8] *FORMES, mathématiques, peintres, sculpteurs contemporains*, catálogo da exposição na Universidade de Paris, Palais de la Découverte, 2 Janeiro–17 Fevereiro 1963. Exposição Palais de la Découverte.
- [9] C. P. Snow, *The Two Cultures*, Cambridge University Press, 1959, adição da segunda parte 1964.
- [10] SEAD project: http://sead.viz.tamu.edu/projects/LE_studychart.html
- [11] L. D. Henderson, *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton University Press, 1983.
- [12] L. D. Henderson, *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, edição revista, MIT Press, 2013.
- [13] E. A. Abbott, *Flatland*, 1884; nova edição com texto em italiano e em inglês, M. Emmer, ed, Bollati Boringhieri, Torino, 2008, com inclusão do DVD do filme *Flatland*, realização M. Emmer, edições inglesa e italiana, música de Ennio Morricone.
- [14] J. Mayorga, *Teatro*, Ubulibri, Milano, 2008
- [15] *Dans la maison*, realização e argumento de François Ozon, a partir do texto teatral *Il ragazzo dell'ultimo banco*, de Juan Mayorga, com Fabrice Lucini, Ernst Umhauer, Kristin Scott Thomas, Emmanuelle Seigner, Denis Menochet, Bastien Ughetto, França (2012).
- [16] M. Emmer, realização e argumento, *Art and Mathematics*, 18 film, DVD, 30 m., 1984–2000, info: emmer@mat.uniroma1.it.
- [17] H. S. M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose, M. Teuber, eds., *M. C. Escher: Art and Science*, North- Holland Elsevier, Amsterdam, 1986.
- [18] *The Fantastic World of M. C. Escher*, regia di M. Emmer, con H.S.M. Coxeter, R. Pernose, B. Ernst, C. Macgillavry, 50m, DVD em italiano, inglês, francês, castelhano. M. Emmer prod & Film 7 Int, Escher film, info: emmer@mat.uniroma1.it.
- [19] M. Emmer, D. Schatschneider, eds. *M. C. Escher's Legacy*, Springer verlag, 2003.
- [20] M. Emmer, ed. *The Visual Mind: Art and Mathematics*, MIT Press, 1993.
 ———, ed. *The Visual Mind II: Art and Mathematics*, MIT Press, 2005

Notas de tradução

- 1 «que partilhará resultados e procurará reacções a partir da exploração de desafios e de oportunidades para a investigação transdisciplinar e para o trabalho criativo, com o suporte de 200 participantes internacionais. Depois tomaremos em consideração métodos para trocas inovadoras apoiando a aprendizagem interdisciplinar em ambientes educativos formais ou informais». Em inglês no original.
- 2 Tradução de Eduardo Veloso (revista por José Ferreira de Lima). O tradutor escreve de acordo com a anti-grafia.

MICHELE EMMER

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA LA SAPIENZA

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A tarefa que aqui apresentamos tem por base uma das peças de Sol LeWitt, descrita no artigo de Eliana Pinho, também desta revista. Trata-se de uma proposta com muito potencial no que respeita ao desenvolvimento do raciocínio espacial e que pode ser trabalhada em todos os ciclos do ensino básico até ao ensino secundário, com diferentes níveis de discussão e aprofundamento. Por exemplo, no que respeita à primeira pergunta, o número mínimo de arestas será três, no entanto, para se manter uma estrutura tridimensional, será necessário que as arestas sejam não coplanares, uma ideia que para alunos mais novos pode ser traduzida por não pertencerem à mesma face. Um outro aspeto sensível nesta proposta, diz respeito à distinção entre casos diferentes. Se no plano consideramos que duas figuras que se obtêm uma a partir da outra por reflexão são

congruentes, no espaço duas figuras ou sólidos nestas condições são considerados enantiomórficos. Não se trata evidentemente de introduzir este conceito, ou ter a preocupação de estabelecer esta regra, mas sim criar oportunidades para a discussão de ideias matemáticas com os alunos que são muito pertinentes. Por este motivo, propomos que a tarefa seja realizada numa fase inicial em pequenos grupos e, posteriormente, seja discutida em grande grupo. Também será fundamental utilizar materiais que podem ser simplesmente palitos e pedaços de plasticina para os alunos unirem as arestas e representarem as suas estruturas.

LINA BRUNHEIRA

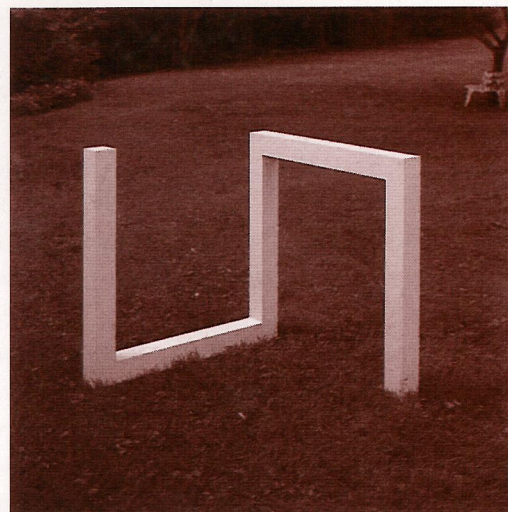
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

CUBOS INCOMPLETOS

Em 1974, um artista plástico norte-americano chamado Sol LeWitt desenvolveu um trabalho que consistiu na construção de cubos incompletos, ou seja, cubos aos quais foram retiradas algumas arestas criando uma estrutura que, ainda assim, teria de ser a três dimensões.

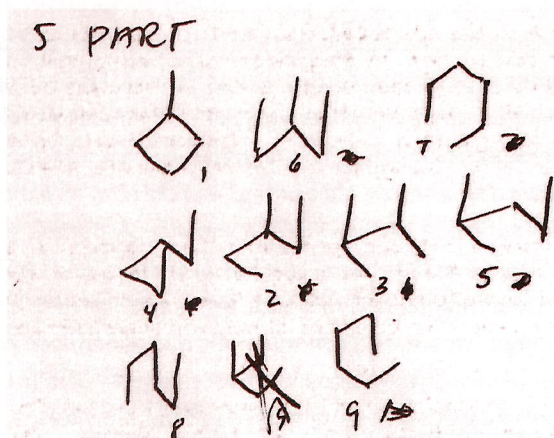
Esse trabalho é composto por várias peças, incluindo desenhos, construção de todos os casos em tamanho pequeno e a sua apresentação conjunta, produção de algumas estruturas em tamanho grande e sua exposição, como podes ver na fotografia.

O que te propomos é que realizes parte da investigação que Sol LeWitt teve de realizar para construir as suas peças. Para isso, responde às seguintes questões com o apoio do material que te foi dado:



Variations of Incomplete Open Cubes, alumínio pintado, 109,2 x 109,2 x 109,2 cm

1. Qual é o número mínimo de arestas para construíres uma estrutura a três dimensões que seja parte de um cubo?
2. Apresenta todos os casos diferentes que tenham esse número mínimo de arestas.
3. Com quatro arestas, quantos cubos incompletos consegues fazer? Compara os teus casos com os encontrados pelos teus colegas.
4. Nesta folha encontras um esboço do Sol Lewitt com o registo de alguns casos correspondentes a cinco arestas, mas entretanto descobriu mais quatro ...
Procura descobrir também quais os que faltam neste esboço!





Sol LeWitt — arte contemporânea e matemática

ELIANA MANUEL PINHO

O encontro da arte contemporânea e da matemática permite uma multiplicidade de abordagens. Este artigo foca um artista plástico ligado à arte conceptual, Sol LeWitt, e algumas das suas obras, escolhidas por exibirem uma trama muito rica de matemática e expressão artística, onde cada uma das disciplinas faz sobressair a natureza da outra, e também pelo seu potencial para a realização de actividades em ambiente escolar. Um objectivo do artigo é levar à acção.

A arte contemporânea convoca atitudes, práticas, ou temas, que podem ser muito enriquecedores noutros contextos e, em particular, nos percursos de aprendizagem. É de salientar a importância dada, na arte contemporânea, à percepção que cada pessoa tem de si própria: do lugar e do conjunto de hábitos em que está inserida, das escolhas que faz e das referências presentes nessas escolhas, e ainda das acções pessoais e do reflexo destas no meio envolvente. As obras de arte contemporânea que lidam com ideias matemáticas, acrescentam mais um elemento integrador a esta lista, pois reúnem dois aspectos culturais, a arte e a matemática, habitualmente separados. Neste âmbito, a obra de Sol LeWitt é exemplar, tornando a geometria, a combinação e outros conceitos matemáticos, presenças verdadeiramente palpáveis.

O reconhecimento da matemática como elemento cultural sai reforçado do encontro entre arte e matemática, encontro este que também contribui para a compreensão do património cultural matemático que existe para além da matemática como disciplina. Por exemplo, quais as noções de simetria tornadas familiares pelo convívio com padrões decorativos ou distribuições ritmadas de objectos, azulejos, candeeiros na estrada, gradeamentos, etc? Quanto saberíamos acerca da circunferência se morássemos em casas circulares? Quanto sabemos acerca de ângulos rectos, medidas de distância e geometria plana, antes de aprendermos estas noções em contexto matemático?

SOL LEWITT

Sol LeWitt nasceu nos Estados Unidos da América em 1928 e faleceu em 2007. Estudou arte na Universidade de Syracuse, Nova Iorque, até 1949, e em 1951 foi chamado para a guerra da Coreia, tendo passado meio ano no Japão e um ano na Coreia. Durante a guerra esteve nos serviços especiais, onde uma das suas obrigações era fazer *posters*.

Depois de regressar a Nova Iorque, Sol LeWitt estudou numa escola de ilustradores e teve várias ocupações, em particular a de *designer* gráfico no gabinete de arquitectura

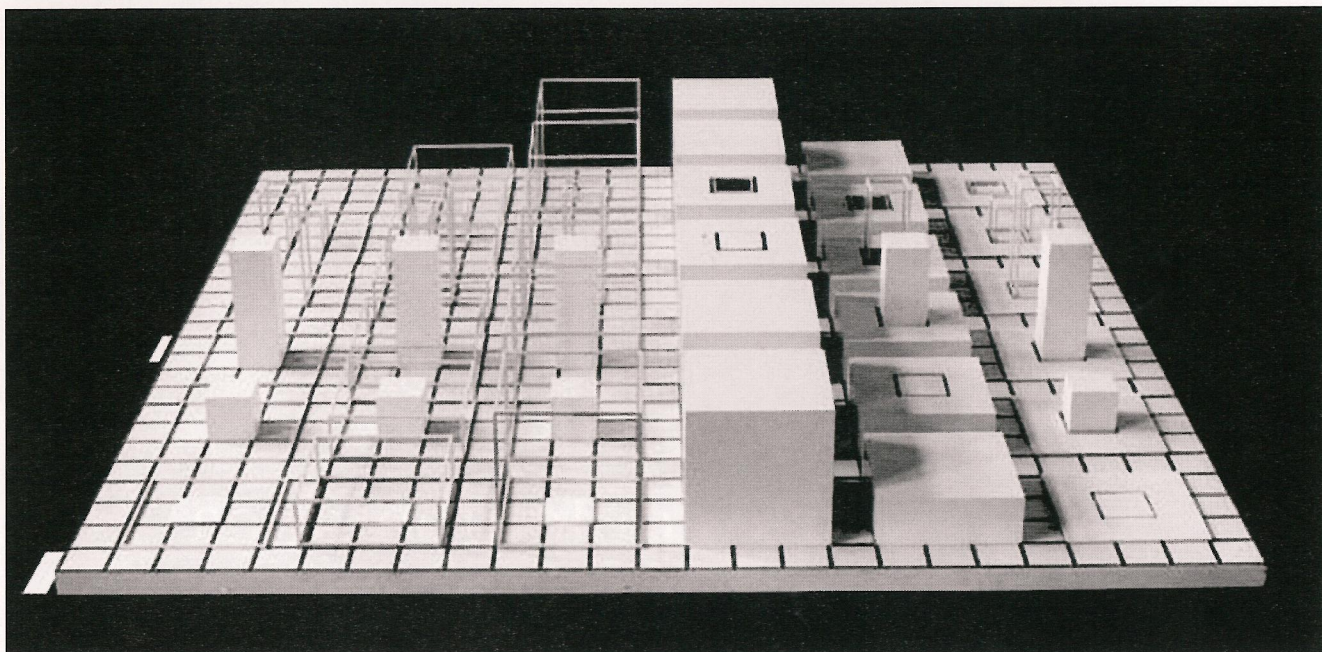


Figura 1. SERIAL PROJECT #1 (ABCD). 1966, aço, 51 cm x 2 m x 2 m.

de Ieoh Ming Pei e a de recepcionista nocturno no MOMA, o museu de arte moderna de Nova Iorque. Como artista plástico, começou a mostrar-se ao público durante a década de 1960, sendo a sua primeira exposição colectiva em 1963, e individual em 1965.

Sol LeWitt foi um dos fundadores da arte conceptual, que enfatiza a primazia da ideia na criação artística [4], e escreveu textos seminais, como «Parágrafos sobre arte conceptual», em 1967, e «Frases sobre arte conceptual», em 1969. Algumas das frases mais conhecidas destes textos são: «Na arte conceptual a ideia ou conceito é o aspecto mais importante da obra. Quando o artista usa uma forma de arte conceptual, isso significa que todo o planeamento e decisões são feitos antecipadamente, e que a execução é uma formalidade. A ideia torna-se a máquina que faz a arte».

Sol LeWitt foi prolífico e trabalhou em meios tão diversos como estruturas modulares em metal, desenhos de parede, desenhos e impressões em papel, livros, fotografia, grandes guaches e blocos de cimento. Neste artigo é apon-tado um pequeno conjunto de peças, a maior parte delas produzidas nas décadas de 1960 e 1970.

O artigo recorre às palavras de Sol LeWitt para apresentar as peças e as situar no contexto da arte conceptual. As citações apresentadas são todas referidas no livro *Sol Lewitt, The Museum of Modern Art* [1], a menos que seja indicada outra fonte. Esse livro, do fim da década de 1970, tem a vantagem de contar com Sol LeWitt na sua concepção, de apresentar a obra com comentários do artista e de compi-

lar os textos escritos por Sol LeWitt até essa data. A outra fonte de citações é uma entrevista que Sol LeWitt concedeu à revista *BOMB* em 2003 [4]. Os elementos matemáticos das peças não são descritos de forma matematicamente rigorosa mas tentando manter a descrição do artista, e as traduções são da autora do artigo.

EXEMPLOS

COMBINATÓRIA E SEQUÊNCIAS

SERIAL PROJECT #1 (ABCD): esta peça define-se a partir de quatro cubos — um cubo grande fechado, um cubo grande aberto (só com as arestas), um cubo pequeno fechado e um cubo pequeno aberto — e da variação destas formas quando a sua altura percorre um conjunto de 3 níveis diferentes. A peça, de planta quadrada, está dividida pelas suas medianas em 4 secções, A, B, C e D, cada uma delas contendo as 9 variações de dois dos cubos, um grande e um pequeno.

No contexto da arte conceptual, a peça não é apenas o objecto final, não se resume à construção física na **figura 1**, mas é a própria ideia e as subseqüentes realizações da mesma. É interessante notar que o cartaz de uma das exposições desta peça, na **figura 2**, é um esquema em que Sol LeWitt esboça uma das secções da sua forma, um elemento do processo de definição da ideia.

ONE SET OF NINE PIECES

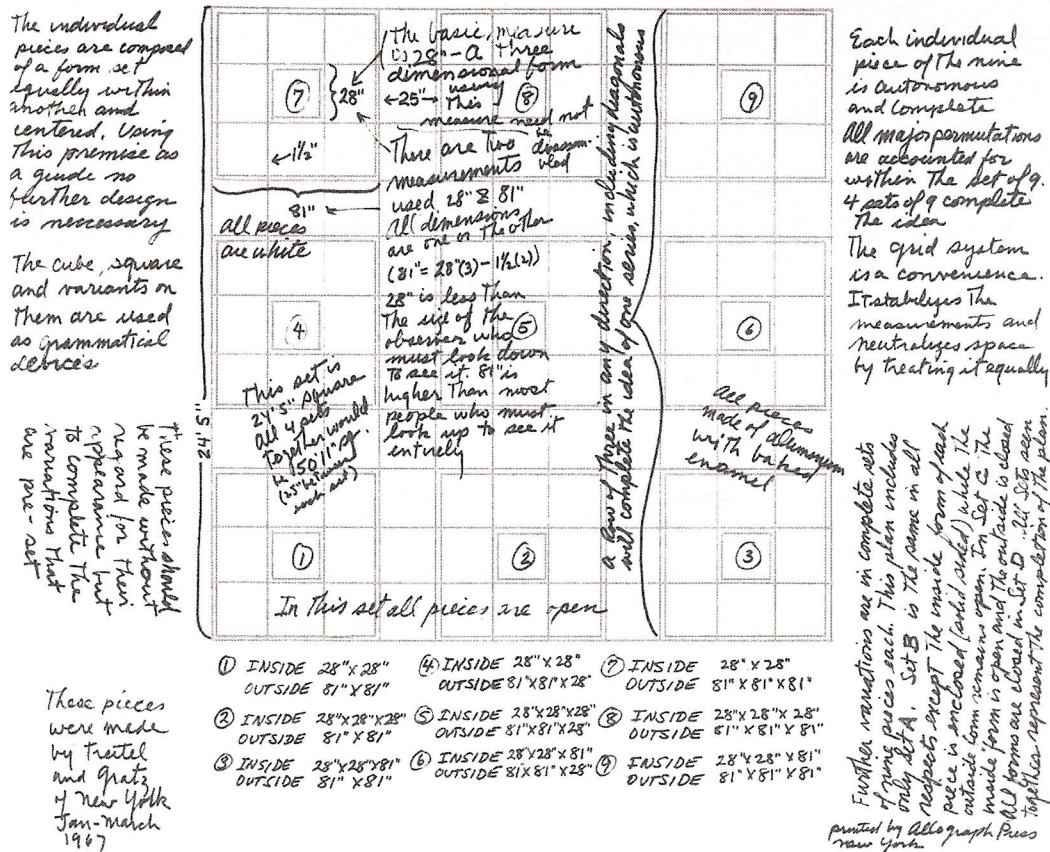


Figura 2. SERIAL PROJECT #1 (ABCD), anúncio para a exposição na Dwan Gallery, 1967.

Em termos matemáticos esta é uma peça simples e é fácil verificar que as combinações, dentro das regras estabelecidas, estão esgotadas. Também é fácil conceber peças diferentes com o mesmo conjunto de regras ou com regras que são variações destas. Todos têm oportunidade de, a partir daqui, imaginar novas ideias e construções, percebendo onde está a regra matemática, onde está a subjectividade e em que passos é que são tomadas as decisões.

Se nos aventurarmos a construir estruturas semelhantes vamos encontrar algumas das questões que foram importantes para Sol LeWitt e que nos trazem novas considerações matemáticas — a dimensão das barras que definem as arestas dos cubos abertos ou a sugestão da existência de cubos pequenos dentro dos cubos grandes, mesmo quando não são visíveis.

Em relação às barras que definem as arestas, quando Sol LeWitt começou a interessar-se por estruturas com cubos abertos, estabeleceu a razão de 1:8,5 entre a largura da bar-

ra e a largura da face vazia. Segundo as suas palavras «a razão 1:8,5 foi uma decisão arbitrária mas, uma vez decidida, foi sempre utilizada». Esta razão é particularmente relevante no caso de VARIATIONS OF INCOMPLETE OPEN CUBES de onde resultam várias representações e construções a diferentes escalas, tal como descrevemos abaixo.

A existência de elementos que não são visíveis pode ser sugerida pela estrutura da peça e/ou através de recursos de representação. Segundo o relato de Sol LeWitt, «Quando SERIAL PROJECT #1 (ABCD) foi feito, algumas das peças nas partes C & D (exterior fechado) continham elementos que não eram visíveis mas eram implicados pela lógica da peça. CUBES WITH HIDDEN CUBES foi uma investigação ulterior da ideia. [...] Propôs que na verdade não precisamos de ver as coisas para percebermos qual a sua forma e a sua localização». Esta ideia de perceber para além do que se vê, a partir dos indícios disponíveis, remete-nos para a própria ciência.

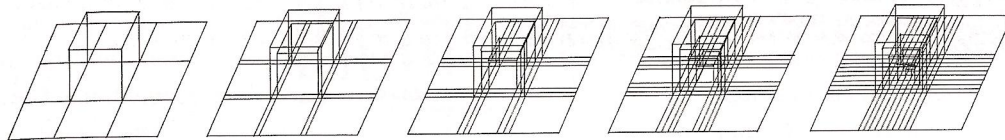
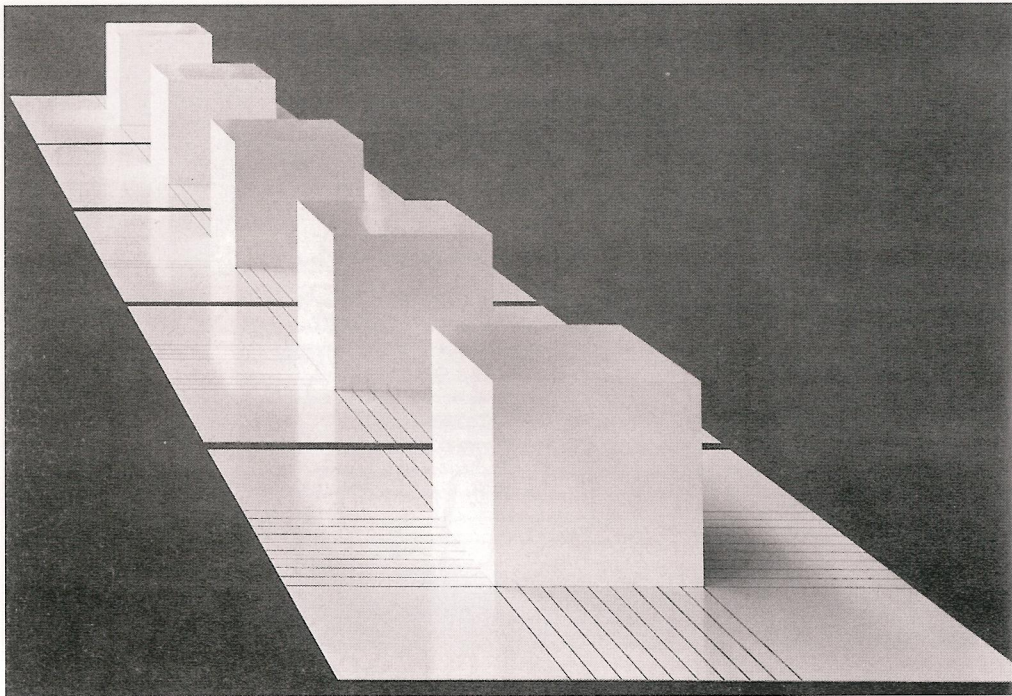


Figura 4. CUBES WITH HIDDEN CUBES, desenho e desenho de trabalho. 1968, caneta e tinta, 31,2×64,2 cm (cima) e 21,6×28 cm (baixo).

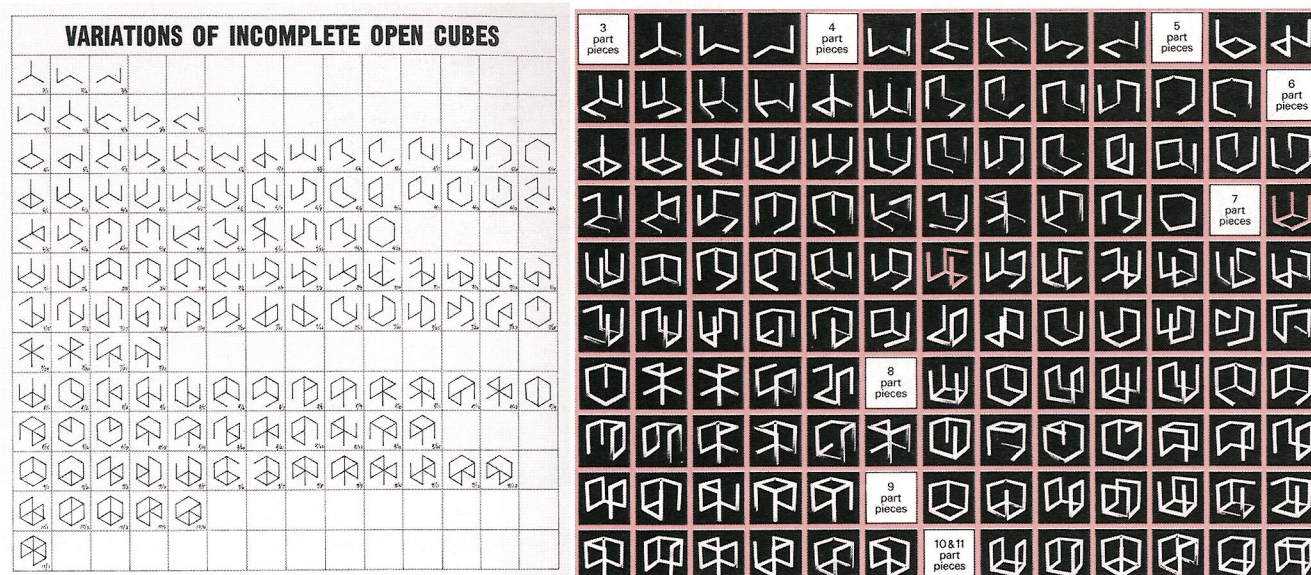


Figura 5. VARIATIONS OF INCOMPLETE OPEN CUBES, desenho esquemático e fotografias com todos os casos. 1974, caneta e tinta, 40,6x40,6 cm (esquerda).

Na peça da **figura 3**, a sugestão da existência de elementos que não são visíveis está ligada aos recursos de representação, ou formalismo, utilizado. Na **figura 4**, é apresentado um desenho esquemático com o princípio de representação usado e um desenho de trabalho.

VARIATIONS OF INCOMPLETE OPEN CUBES: esta peça baseia-se no cubo aberto incompleto, isto é, ao qual foram retiradas algumas arestas, e na procura de todos os casos possíveis. Esta procura é um problema de combinatória cujas condições são definidas por Sol LeWitt — as arestas exis-

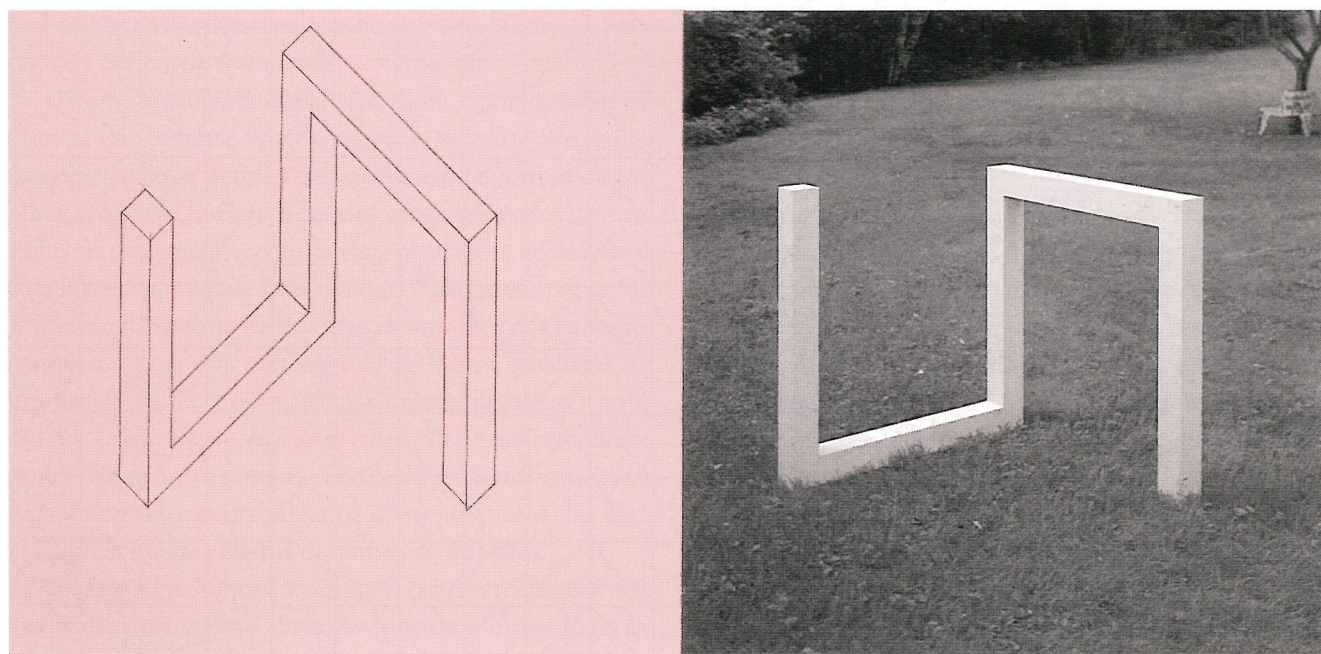


Figura 6. VARIATIONS OF INCOMPLETE OPEN CUBES, desenho esquemático e um elemento a grande escala. 1974, lápis e tinta, 40,6x40,6 cm o desenho (esquerda), alumínio pintado, 109,2x109,2x109,2 cm a peça (direita).

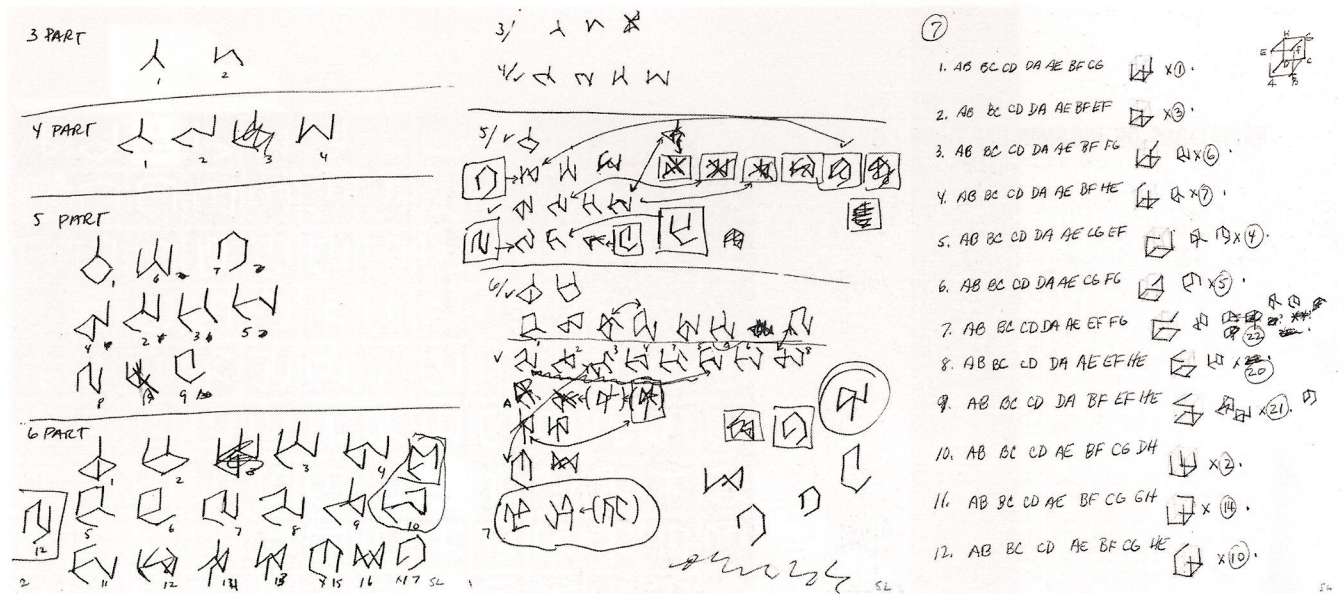
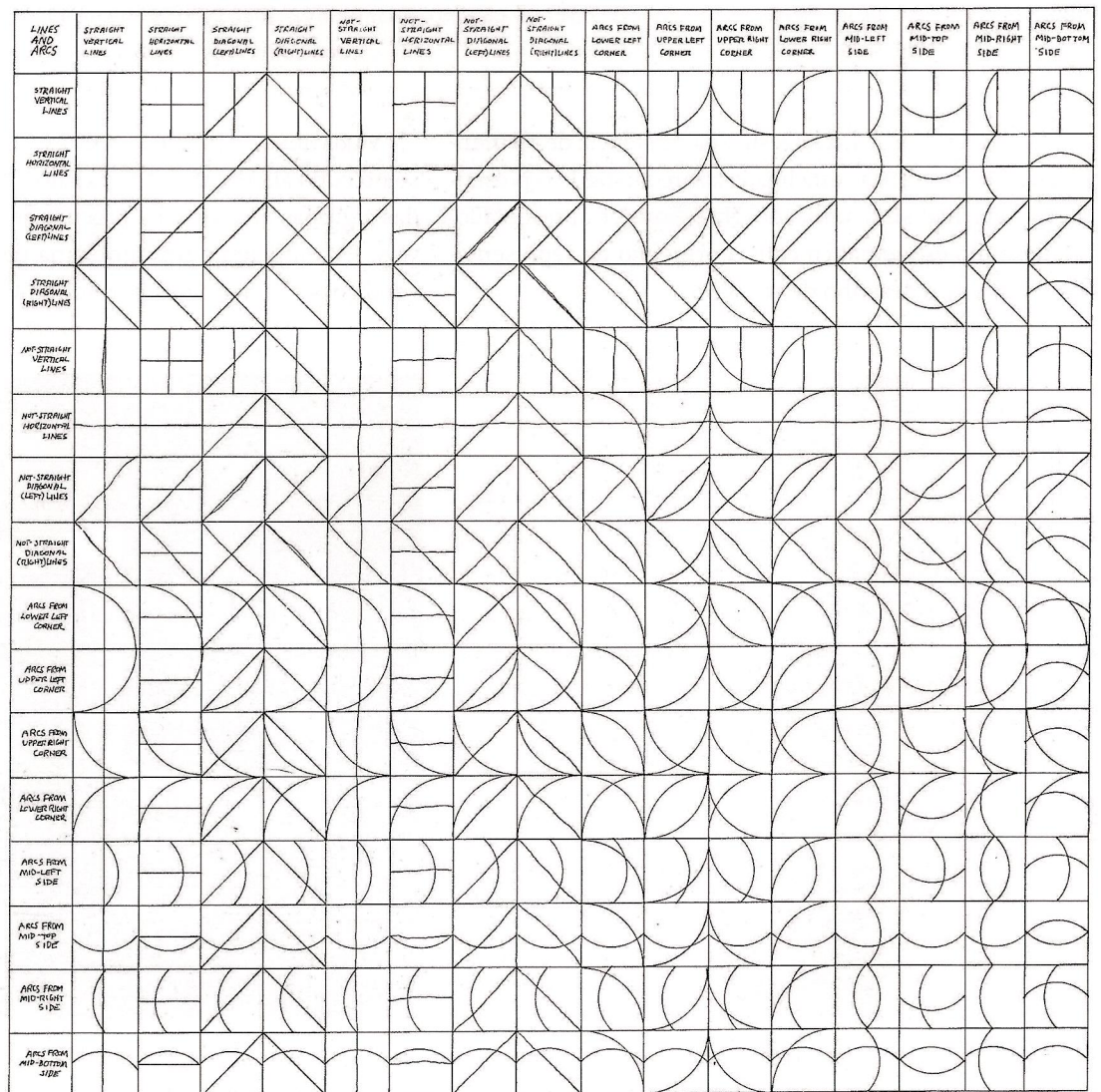


Figura 7. VARIATIONS OF INCOMPLETE OPEN CUBES, desenhos de trabalho. 1973–74, lápis e tinta em papel.

Figura 8.
LINES AND ARCS.
1972, caneta e
tinta, 35x35 cm.



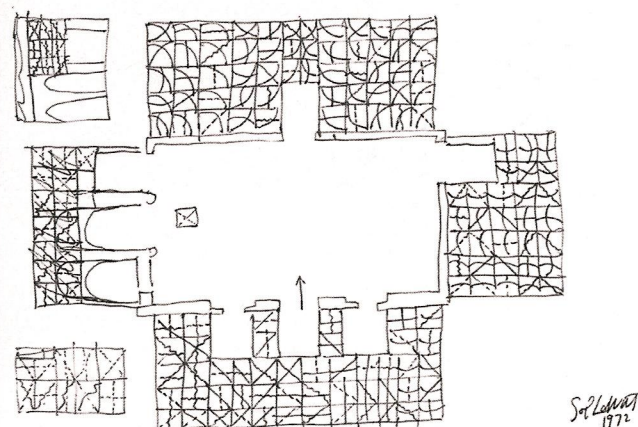
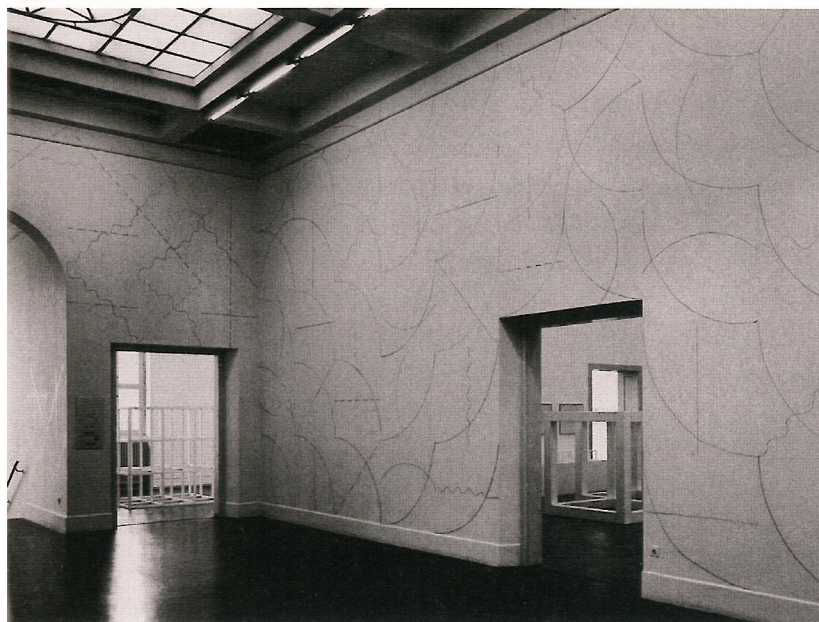


Figura 9. WALL DRAWING #146. 1972, lápis azul. LINES AND ARCS, plano da exposição em Kunsthalle Bern. 1972, tinta em papel.

tentes têm que definir uma estrutura tridimensional (pelo menos 3 arestas não complanares são consideradas), os casos diferentes não podem estar relacionados por uma rotaçã mas podem ser reflexões uns dos outros. A peça inclui diferentes formas de representação das variações: fotografias, desenhos, um livro, construção de todos os casos em pequena escala ($20,3 \times 20,3 \times 20,3$ cm, cada) e a sua apresentação em conjunto, produção de casos a grande escala ($109,2 \times 109,2 \times 109,2$ cm, cada) e sua exposição individual, esquemas de procura da solução, etc. A compilação exaustiva da obra *VARIATIONS OF INCOMPLETE OPEN CUBES*, é feita no livro *Sol Lewitt: incomplete open cubes* [3].

Há uma analogia muito interessante, e que pode ser explorada visualmente, entre o conjunto de esboços e esquemas que levam à definição, concepção e realização destas obras artísticas, por um lado, e os cadernos cheios de exercícios de matemática, com as suas hesitações, tentativas e conclusões, por outro. Esta analogia é particularmente forte no caso da descoberta de todas as variações dos cubos incompletos, pois esta corresponde de facto à resolução de um problema de combinatória. Como podemos ver no livro *Sol Lewitt: incomplete open cubes* [3], a resolução deste problema incluiu a pesquisa acerca do melhor formalismo para descrever e contabilizar os diferentes casos. Na [figura 7](#) apresentamos alguns desenhos de trabalho.

Sol LeWitt pertenceu a uma geração de artistas que reagiu ao expressionismo abstracto procurando algo mais estável e consistente do que o estado de espírito do artista no momento em que faz a obra. A serialidade, ou sequencialidade, foi usada por vários artistas nesta fase como, citan-

do Sol LeWitt, «uma forma de criar arte que não se baseava no capricho do momento mas em processos ponderados consistentemente que deram resultados interessantes e excitantes» [4].

Sol LeWitt afirmou ainda que o uso de ideias sequenciais se tornou o seu vocabulário, e referiu com frequência que foi bastante influenciado pelo trabalho de Eadweard Muybridge, o fotógrafo que em finais do séc. XIX fez sequências de fotografias de pessoas a realizar várias tarefas, de cavalos em movimento, etc. [4].

Sol LeWitt usou «estas formas simples — quadrado, cubo, linha, cor — para produzir sistemas lógicos. A maioria destes sistemas eram finitos, isto é, ficavam completos usando todas as variações possíveis. Isso mantinha-os simples». [4]

A partir deste conjunto de peças é possível imaginar um sem número de variações, quer recorrendo às ideias de base, quer tomando os métodos de pesquisa e representação das sequências. O aspecto da peça na [figura 8](#) é especialmente familiar em contexto matemático, com a sua tabela de dupla entrada, e sugere uma exploração das potencialidades visuais de outros métodos gráficos e mnemónicas usadas nas aulas de matemática.

As peças nas [figuras 8 e 9](#) resultam de todas as combinações possíveis de alguns elementos nas quadrículas de uma grelha. A série foi desenhada sequencialmente em paredes de uma divisão, ou de um conjunto de divisões em inúmeras instalações. Damos o esquema e uma fotografia de uma dessas instalações na [figura 9](#), bem como a descrição que Sol LeWitt faz: «Estes são os três tipos básicos de

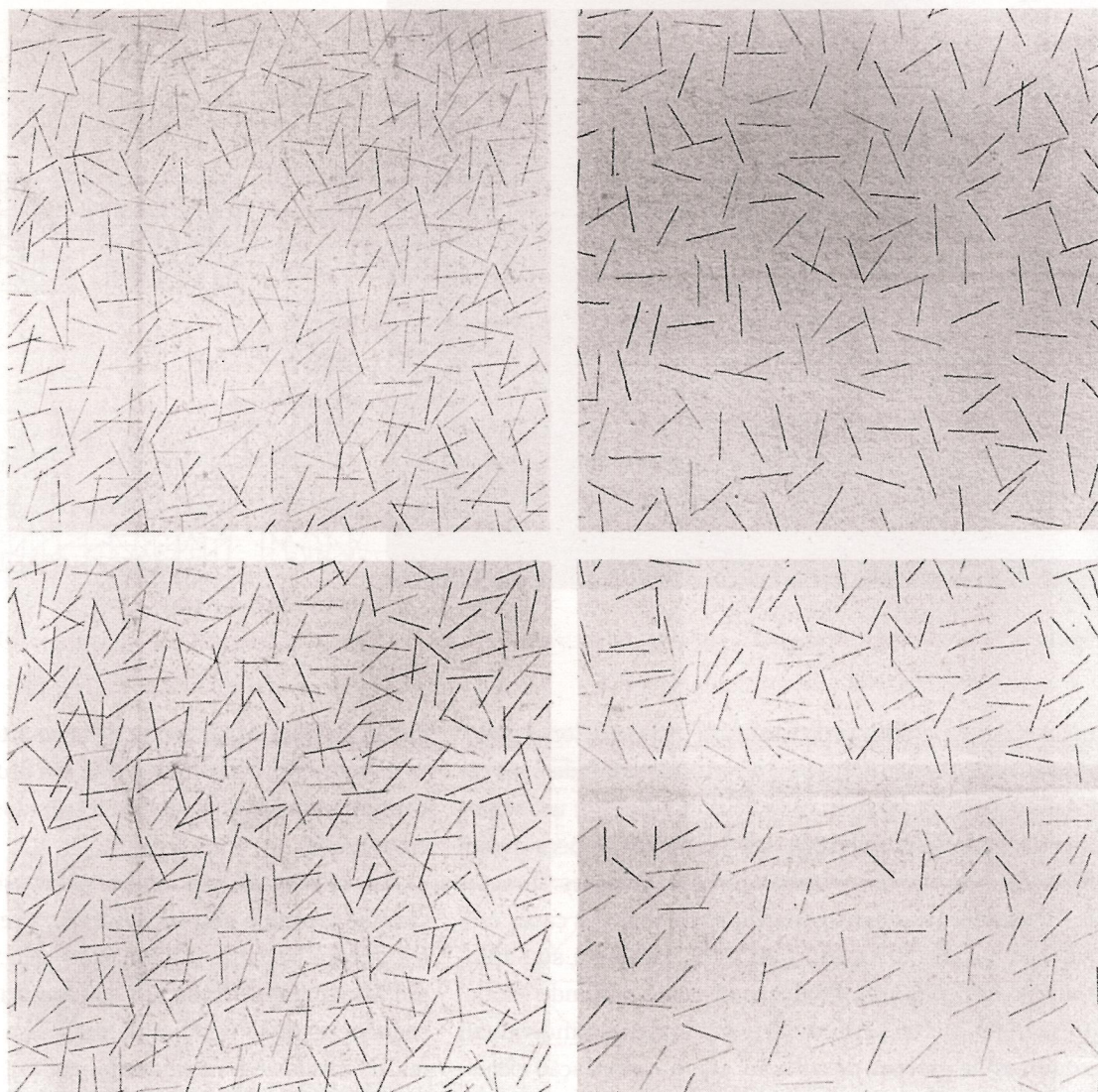


Figura 10. TEN THOUSAND LINES, ONE INCH LONG, EVENLY SPACED ON SIX WALLS OF DIFFERING AREA (*four details of wall drawing*). 1972, lápis.

linhas: rectas, não-rectas e tracejadas, e os dois tipos de arcos: a partir dos cantos e a partir dos pontos médios dos lados. O sistema usa-os em combinações de dois. Dependendo do tamanho da parede, um ou mais destes tipos pode ser omitido (tal como os arcos a partir dos lados, ou as linhas tracejadas). A largura do módulo é determinada pelo alcance médio de uma pessoa a desenhar um arco (cerca de uma jarda ou um metro). Isto limita a linha às capacidades do desenhador ou desenhadora e mantém-na numa escala humana. [...] Independentemente do número de vezes que é feita, a peça é sempre diferente se for feita em paredes com tamanhos diferentes».

A instalação podia incluir um plano como o da [figura 9](#), o que contribuía para a percepção, por parte do visitante, da lógica da peça. Para Sol LeWitt, «Os sistemas sequen-

ciais e as suas permutações funcionam como uma narrativa que tem de ser compreendida»

Embora a sua concepção envolva um processo de combinatória e sequencialidade, estas peças apontam para outros grandes temas na obra de Sol LeWitt — os desenhos de parede e as questões de processo e localização — de que falamos na próxima secção.

PROCESSO E LOCALIZAÇÃO

Há uma grande família de peças como a da [figura 10](#), em que o título descreve o processo que conduz à realização do desenho. Numa analogia com a música, o artista é um compositor e não um executante. Ao executante, o desenhador, é deixada grande liberdade de interpretação e expressão pois a aparência é secundária: «se eu der as instruções

Technology is not subverting art without opposition. The New Combine, to put it another way, has its enemies, honorable enemies—many of them deeply involved, on every level, with contemporary work. Their complaints, whatever the source or the vocabulary, reveal at base certain familiar dispositions—to see technology as an alien, inhuman force, to associate its use in art with mere “gimmickry,” and, finally, to fear any surrender of control by the artist himself over the technological materials involved in his work.

To oppose technology in art is to oppose it in life, for technology is as much a part of man as his home or his road or his clothes; in company with all these, technology is surely *nonhuman*, but man alone can render it *inhuman*. It is man alone, moreover, who reduces material of any kind to the level of gimmickry. There is nothing inherently superficial in a light bulb, as there is nothing inherently noble in pigment. If the oceans of oil wasted upon imitation of the great abstract painters in the 1950s did not wash away this fallacy, nothing ever will. It seems we must learn again that art can incorporate *any* material and *any* process, when employed in the service of the imagination.

That technology is a neutral, not a negative tool, is conceded by the best of the humanists, by those engaged in a rear-guard defense of Western art and civilization against what they consider the excesses of the present, both in politics and in art. When Lewis Mumford, the dean of these guardians, compared technology to the walls of a prison, he also took pains to add that *we* built the walls, “even condemned ourselves to a life-term. . . . But those . . . walls are not eternal.”

On the difficult issue of “human control,” however, the split between new and old is profound. It is no accident that the literary and critical establishments reserved their greatest scorn over so long a period for John Cage, who has distilled in his articles and lectures, as well as his music, the ideas most repellent to the humanists; they are ideas, moreover, that have been realized in the work of many artists, among them Robert Rauschenberg, Jasper Johns, Allan Kaprow, Robert Whitman, the choreographer Merce Cunningham and a whole train of young composers. When Cage recommends, to take just one example, the use of chance methods in composition—the flipping of a coin to determine the order of sounds in music—on the ground that such procedure “brings us closer to nature in her manner of operation,” he strikes at the root of Western esthetics as it has been defined since the Renaissance. (To Mumford, for example, one of art’s central tasks is to “arrest life in its perpetual flux . . . detach itself . . . in its [art’s] final perfection.”)

Cage has not been the only influence on the movement variously described as neo-dada, to be sure; surrealism, Oriental philosophy, Marcel Duchamp, all have contributed, as well as dada. There are wide differences of approach between Cage and Duchamp, Rauschenberg and Kaprow, dada and surrealism, but the net effect of the work produced by them has been an erosion of the line between art and life, between, in effect, greater and lesser degrees of subjective control. The “found objects” in a combine by Rauschenberg turn us out toward the world, away from art, as do the “found sounds” in a Cage concert; when we perform in a happening, we perform as ourselves, not as created (and therefore arrested) characters.

Poetry, mystery and pleasure

It is only natural, then, that these artists—and all those influenced by them, deeply or slightly, from Robert Morris to Charles Frazier—should embrace technology with undisguised lust. For the machine offers the best of all roads away from the self and its inherent limitations. Let the computer then provide us with tables of random numbers, let random sound waves light our dance, let the evening’s television fare provide us with images for our large screens (as in Robert Whitman’s “Two Holes of Water—3,” presented as a part of “Nine Evenings”). The more independence we can cede the machine, from a Cagean point of view, the more interesting, indeed, the more *fun*, it becomes, for it takes forms no earthbound ego might imagine. Recall that Billy Kliver concluded his preparatory remarks for “Nine Evenings” with a reference to the Chinese fireworks of three thousand years ago as “maybe the first use of advanced technology to give poetry, mystery and pleasure to the people. I feel that our performances will have some affinity to these long-forgotten forerunners.”

If it is difficult for the humanist to endorse this position, he can—and must—come to terms with its historicity. There is not only the whole tradition of anti-art behind it, but also certain analogous responses, responses based so deeply in our sensibilities that they barely admit rational explanation. When we play the machine for its own sake—and enjoy it on the same basis—we merely confirm on a new level that love for the thing itself implicit in abstract expressionism as well as the found object. The abstract painters taught us to discard the search for illusion and for meaning in a canvas, to look upon form only as form, color only as color; it is a lesson transferable to computer graphics. The disposition to enjoy the *Ding an sich* is beyond recall; no amount of lecturing in defense of meaning can stay its course.

There is, for all that, a strong countercurrent on the issue of

46

FROM THE WORD «ART»: BLUE LINES TO FOUR CORNERS, GREEN LINES

TO 4 SIDES 2 RED LINES BETWEEN THE WORDS / SE/6/11/19/23/72

Figura 11. FROM THE WORD «ART»: BLUE LINES TO FOUR CORNERS, GREEN LINES TO FOUR SIDES, AND RED LINES BETWEEN THE WORDS «ART» ON THE PRINTED PAGE. 1972.

e elas forem realizadas correctamente, então o resultado está bem para mim». A postura de Sol LeWitt é ainda reforçada pelas afirmações: «O sistema é a obra de arte, a obra de arte visual é a prova do sistema.» e «Não é o aspecto que importa, mas o que é». Esta abordagem é bastante familiar em matemática. Por exemplo, à instrução «desenhar uma função contínua» podemos corresponder com grande liberdade de expressão.

Listamos aqui a tradução de alguns títulos de obras que correspondem a outros tantos processos. Exemplos dos dese-

nhos correspondentes podem ser vistos na internet ou nas obras indicadas na bibliografia.

- «Usando lápis, desenhar 1000 segmentos de recta aleatórios com 10 polegadas de comprimento em cada dia, durante 10 dias, num quadrado de 10 por 10 pés»
- «Linhas, não curtas, não direitas, cruzando e tocando-se»
- «Linhas, não longas, não direitas, que não se tocam»
- «Linhas verticais, não direitas, que não se tocam»

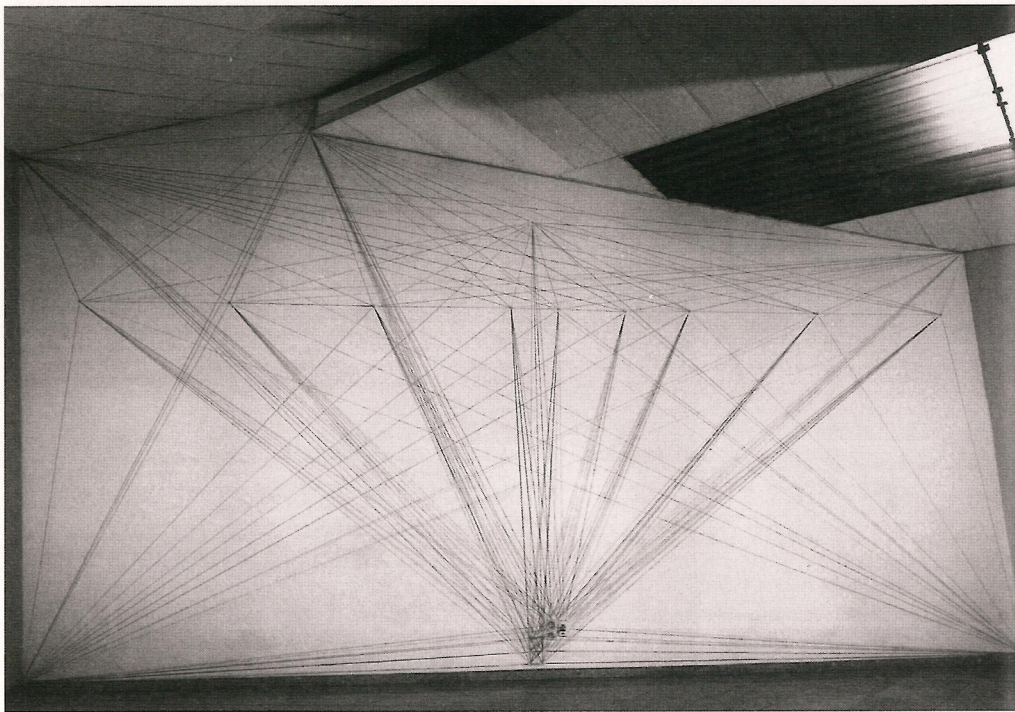


Figura 12.

WALL DRAWING #51. 1970.

- «Linhas rectas, com 24 cm de comprimento, que não se tocam»
- «Linhas rectas, mais curtas do que 24 cm, que não se tocam»
- (a partir de uma malha quadrada com lado de 6 polegadas) «Dentro dos quadrados de 6 polegadas, linhas rectas de aresta a aresta usando lápis amarelo, vermelho e azul»
- «Linhas ligando pontos arquitectónicos»
- «Dez mil linhas, com cinco polegadas de comprimento, numa área de 4 por 5,5 polegadas»
- «Linhas rectas com um metro de comprimento, a partir do ponto médio de linhas rectas e em direcção a pontos na parede»

Com os desenhos de parede feitos a partir de uma regra prévia, Sol LeWitt marcou uma posição crítica em relação ao mercado da arte, dificultando a comercialização da obra de arte e tornando o acesso às peças muito fácil, pois qualquer pessoa poderia, melhor ou pior, fazer os desenhos. «Como a arte é um veículo para a transmissão de uma ideia através da forma, a reprodução da forma apenas reforça o conceito. [...] Quem entende a obra de arte possui-a». [4]

Os desenhos de Sol LeWitt estabelecem com cada parede uma relação particular e sublinham algumas das suas características, como forma, tamanho, aberturas, elementos técnicos, arquitectónicos ou decorativos. Na peça da [figura 10](#),

por exemplo, o tamanho da parede define a densidade média das linhas. Quando feitos em papel, os desenhos podem revelar as características geométricas da folha e elementos específicos como, na [figura 11](#), a palavra «art». Sol LeWitt trabalhou, em particular, acerca dos termos «até», «em direcção a» e «através de» em relação a elementos do espaço arquitectónico, uma abordagem que caracteriza como geográfica e linguística.

Sol LeWitt fez vários livros com as suas pesquisas artísticas que são, em si mesmos, peças de arte.

Citando Sol LeWitt, «A parede é entendida como o espaço absoluto, tal como a folha de um livro. Uma é pública, a outra é privada. Linhas, pontos, figuras, etc., são localizados nestes espaços por palavras. As palavras são os caminhos para perceber a localização do ponto. Os pontos são verificados pelas palavras».

A atenção ao lugar, o reconhecimento de um espaço específico e da relação que o observador com ele pode manter, e ainda o uso do lugar como matéria prima na expressão artística, são aspectos importantes na arte contemporânea. Trazidos para contexto escolar, estes temas podem estimular a definição de identidades e fortalecer a ideia de pertença. Na obra de Sol LeWitt a geometria do espaço revela-se, transforma-se em tensão visual, com especial clareza e simplicidade. Talvez estas características, aliadas ao gosto de intervir no espaço que nos rodeia e à facilidade com que estas fórmulas se concretizam, possam explicar os inúmeros

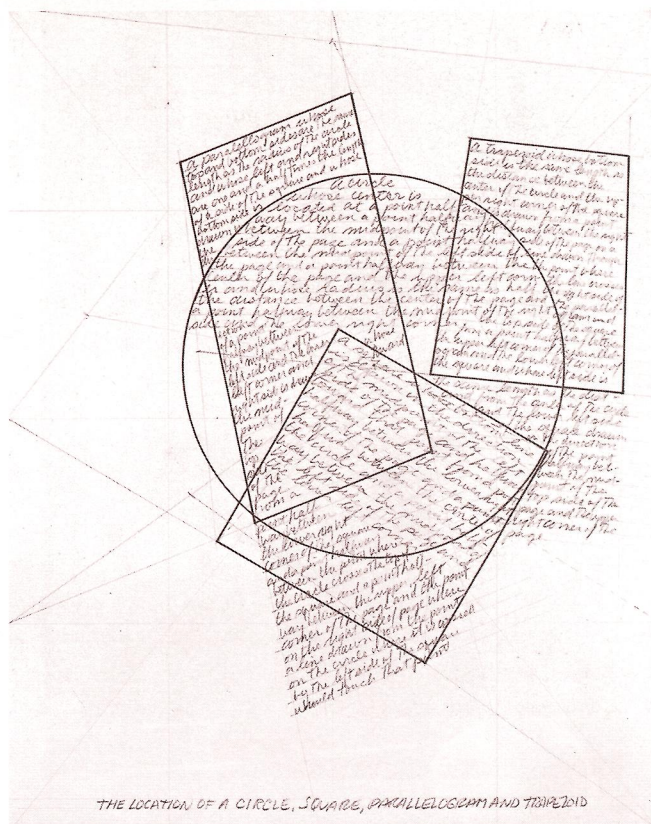


Figura 13. LOCATION OF GEOMETRIC FIGURES. 1977, caneta e tinta, lápis, 35,8x36,9 cm.

desenhos de parede que espontânea ou institucionalmente continuam a ser feitos a partir das ideias de Sol LeWitt, e cujos registos podem ser encontrados na internet com uma pesquisa simples. As referências [5] e [6] correspondem a uma exposição com execução muito cuidada e permitem aprender algumas técnicas para desenhar e pintar sobre a parede.

O exemplo da **figura 13** pode ser descrito como a conjugação do enunciado e da resolução do problema. Incluídas no tema «localização», esta peça apresenta figuras geométricas a par do texto que descreve todos os passos para a sua construção, dado um suporte que pode ser a folha de papel ou a parede. A forma como o texto se relaciona com os objectos descritos varia de peça para peça. «Durante os anos 70 estive interessado nas palavras e no significado como uma forma de fazer arte. Fiz um grupo de peças de «localização» que dirigiam o desenhador no processo de fazer a obra. Todas as marcações que levavam à realização do desenho eram para mostrar. Uma pessoa podia ler as direcções, verificar o processo e mesmo fazê-lo». [4] Desenhos semelhantes foram feitos em diversos contextos e num grande número de diferentes combinações. Estas pe-

ças sugerem, de uma forma muito directa, uma maneira de integrar a expressão artística no âmbito das aulas de matemática — tome-se o enunciado de um problema qualquer, a sua resolução e mãos à obra!

GEOMETRIA E REPRESENTAÇÃO

Sol LeWitt fez referências explícitas à geometria e pesquisou em torno de objectos geométricos específicos, que tomou como unidades básicas de linguagem. Uma pequena pesquisa em torno de LeWitt irá de imediato revelar um conjunto de figuras planas, repetidas nos mais diversos materiais e contextos, expondo as suas tensões internas e as suas interligações. São figuras inscritas no quadrado e definidas a partir da divisão do seu lado em quatro partes — o círculo, um triângulo, um rectângulo, um paralelogramo e um trapézio.

Quanto a objectos tridimensionais, Sol LeWitt trabalhou sobretudo com o cubo: «a característica mais interessante do cubo é que é relativamente desinteressante. Comparado com qualquer outra forma tridimensional, ao cubo falta agressividade, não implica movimento e é menos emotivo. Por isso é a melhor forma para usar como unidade básica para uma função mais elaborada, o dispositivo gramatical a partir do qual a obra se desenvolve. Como é normal e universalmente reconhecido, não se requer nenhuma intenção do observador. É imediatamente compreendido que o cubo representa o cubo, uma figura geométrica que é incontestavelmente ela própria. A utilização do cubo elimina a necessidade de inventar uma outra forma e reserva-se a sua utilização para a invenção».

Uma das consequências do uso sistemático do cubo é a acentuação das questões de representação e de deformação. Várias peças de Sol LeWitt das décadas de 1980 e 1990, tratam a perspectiva axonométrica (cavaleira, militar e isométrica) e a perspectiva linear ou cónica. Nesta altura Sol LeWitt faz um uso mais diversificado da cor e de outros recursos expressivos. Apresentamos apenas um exemplo que é também importante pela forma como uma ideia de geometria pode impregnar o ambiente.

CONCLUSÃO

O conteúdo matemático da obra de Sol LeWitt é indiscutível. No entanto, a matemática não é um objectivo do autor, que afirmou: «A arte conceptual não tem muito a ver com matemática, filosofia ou outra disciplina mental». Mas também, segundo as suas palavras, «Uma vez feita a obra, o artista não controla a forma como o observador a apre-



Figura 14. WALL DRAWING #887. 1998, acrílico.

ende. Pessoas diferentes irão entender de forma diferente uma mesma coisa». Este artigo incorpora a perspectiva de um observador que está atento às ideias matemáticas e à possibilidade da comunidade escolar participar em ações que conjuguem arte e matemática.

Agradecimentos

Este texto procede de duas apresentações com o mesmo título feitas no ProfMat 2012 e na ESELx, respectivamente em Outubro e Novembro de 2012. No processo de preparação das apresentações e do artigo agradeço a Manuel Saraiva, Jaime Carvalho e Silva, Cristina Loureiro, Rita Bastos, Eduardo Veloso e João Pedro Xavier.

Referências

- [1] Sol Lewitt, The Museum of Modern Art, ed. Alicia Legg, 1978 (Sol LeWitt participou na organização deste livro e escreveu comentários às obras apresentadas)
- [2] Sol Lewitt: a retrospective, San Francisco Museum of Modern Art, ed. Gary Garrels, 2000
- [3] Sol Lewitt: incomplete open cubes, organized by the Wadsworth Atheneum Museum of Art, ed. Nicholas Baume, Jonathan Flatley, Pamela M. Lee, 2001

- [4] Sol LeWitt by Saul Ostrow, BOMB 85/Fall 2003, <http://bombsite.com/issues/85/articles/2583> (uma entrevista a Sol LeWitt)

- [5] <http://www.massmoca.org/lewitt/> (uma exposição do MASS MoCA que estará em exibição até 2033, a página tem muita informação sobre os desenhos e pinturas de parede, incluindo uma lista de todos os que estão expostos: <http://www.massmoca.org/lewitt/grid.php>)

- [6] <http://www.youtube.com/watch?v=c4cgB4vJ2XY> (um vídeo com a instalação da exposição no MASS MoCA, permite aprender algumas técnicas para desenhar e pintar na parede)

Nota: por opção da autora, este artigo não obedece às regras do novo acordo ortográfico.

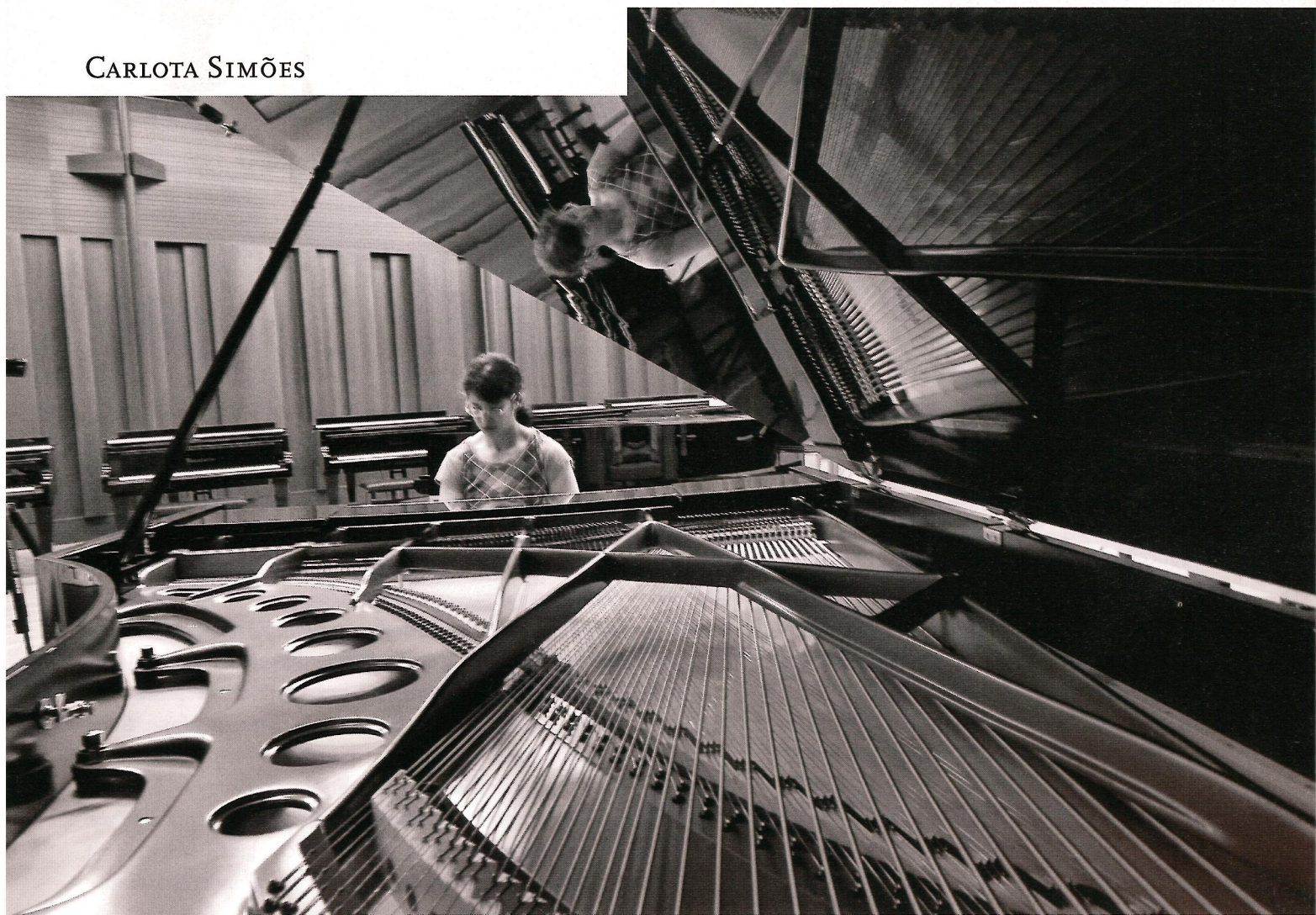
ELIANA MANUEL PINHO

CEAU – CENTRO DE ESTUDOS DE ARQUITECTURA E URBANISMO

Do canto gregoriano a Jacques Brel

Simetrias e estruturas matemáticas em música^{1,2}

CARLOTA SIMÕES



Reflexão, translação, rotação são termos usados frequentemente em matemática e associados em geral ao sentido da visão: vitrais, azulejos, ladrilhos são exemplos que apresentamos para clarificar tais conceitos junto dos nossos alunos. É no entanto possível exemplificar os mesmos conceitos usando o sentido da audição. Se no primeiro caso as coordenadas x e y do plano são, por exemplo, a largura e a altura de uma janela em vitral, no segundo caso as variáveis passam a ser respectivamente o tempo e a altura do som,

e em vez da visão, são necessárias a audição e a memória para reconhecer uma reflexão ou uma translação.

Músicos e compositores conhecem bem estes conceitos e usam-nos com rigor e engenho. Neste texto vamos apresentar vários exemplos musicais de diversas épocas e estilizar bem como a sua tradução para linguagem matemática, analisando composições que vão desde o canto gregoriano do Século VII a Jacques Brel do Século XX, passando pela jovialidade de Mozart e pelo génio de Bach do Século XVIII.



Figura 1



Figura 2

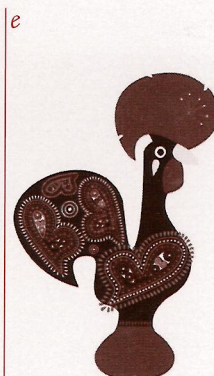


Figura 3

SIMETRIAS MUSICAIS

Conceitos matemáticos como reflexão, rotação e translação podem ser transportados para a música. De facto, as simetrias musicais podem ser identificadas com os frisos, padrões em que existem apenas simetrias de translação segundo uma direcção.

Para exemplificar cada uma destas transformações, tomemos a imagem de um galo de Barcelos a olhar para o lado esquerdo (figura 1). Uma reflexão desta figura, segundo um espelho vertical, coloca o galo a olhar para o lado direito (figura 2). Uma reflexão segundo um espelho horizontal coloca o galo de pernas para o ar, mantendo o olhar para a esquerda (figura 3). Podemos tornar a reflectir a última imagem segundo um espelho vertical (figura 4). A figura final pode ser obtida a partir da inicial apenas com uma única operação: a rotação de 180° . E esta pode ser obtida

por duas rotações sucessivas de 90° , no sentido dos ponteiros do relógio (figura 5).

A música escreve-se na pauta de um modo muito semelhante à representação cartesiana de pontos e funções no plano: um eixo vertical para a altura do som, um eixo horizontal para que as diversas linhas melódicas se desenvolvam ao longo do tempo. A linha melódica representada na pauta pode assim ser analisada como um friso. Suponhamos que a «figura» que queremos transformar é uma sequência de notas S , que queremos usar tanto na forma original como em versões que se obtêm dela por reflexão. Suponhamos que a sequência principal é $S = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. A retrógrada de S , $R(S)$, obtém-se de S lendo esta do fim para o princípio (figura 6).

A inversão de S , $I(S)$, obtém-se de S mantendo a primeira nota, mantendo os intervalos entre duas notas consecutivas

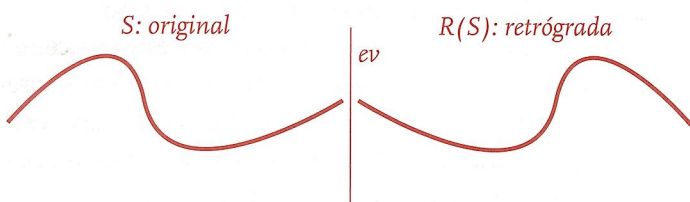


Figura 6. Representação gráfica de uma melodia e da sua retrógrada

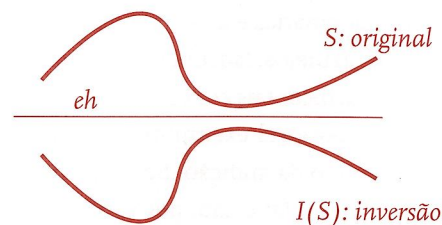


Figura 7. Uma melodia e a sua inversão

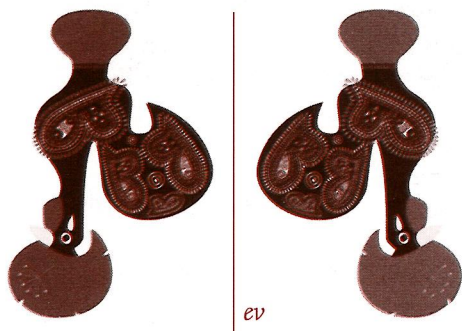


Figura 4



Figura 5. Duas rotações sucessivas de 90°

tivas, mas trocando-lhes o sentido, ou seja, fazendo com que um intervalo ascendente passe a descendente e vice-versa. $I(S)$ corresponde à reflexão segundo um eixo horizontal (figura 7).

Como as notas de $I(S)$ são diferentes das da sequência S , designemos a inversão por $I(S) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. A retrógrada da inversão de S , $RI(S)$, obtém-se de S aplicando-lhe as duas transformações anteriores, obtendo: $RI(S) = (b_n, \dots, b_2, b_1)$ (figura 8).

Na figura 10, podemos ver uma sequência de notas S e as respectivas transformadas $R(S)$, $I(S)$ e $RI(S)$.

Tal como fizemos com o galo de Barcelos, podemos tentar passar directamente da sequência original S para a retrógrada da inversão $RI(S)$ através de uma rotação de 180°. Na verdade, o resultado obtido desta forma não é exactamente $RI(S)$, nem sequer uma transposta por alguns meios-tons de $RI(S)$.

A forma como a música é representada graficamente numa pauta musical permite aplicar uma rotação de 180° à pauta de uma dada melodia e assim obtermos uma nova melodia, na qual intervalos ascendentes passam a descendentes e vice-versa, e onde os intervalos, grosso modo, se mantêm (figura 11). É no entanto necessário acrescentar à pauta uma clave, uma espécie de «origem do referencial» em música, que define a posição de uma nota e permite assim conhecer o nome de todas as outras notas representadas na pauta (figura 11).

Existe em música ainda uma outra operação: a transposta de S por k meios-tons, S_k , obtém-se de S «adicionando» k meios-tons a todas as entradas de S (figura 9). Esta transformação corresponde à translação no plano, em matemática.

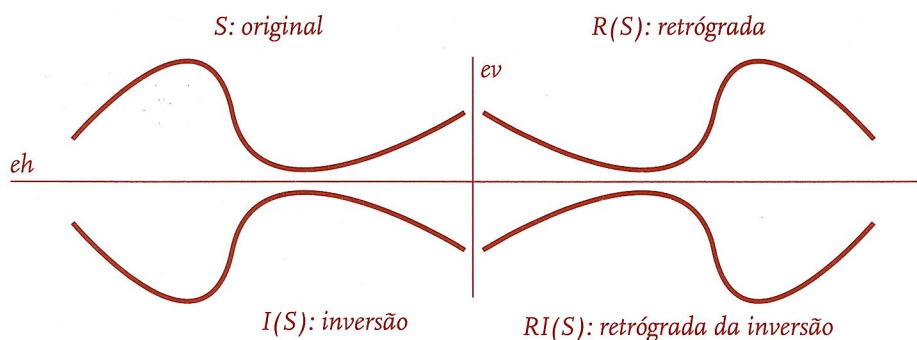


Figura 8. Representação gráfica de uma melodia e suas transformações por reflexão

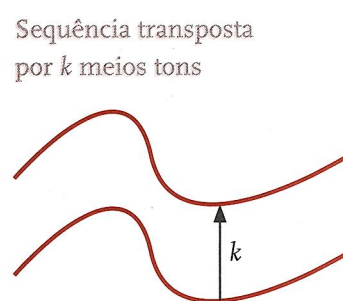


Figura 9. Uma melodia e a sua transposta

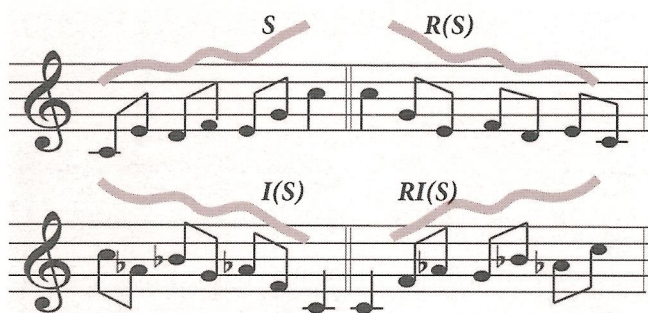


Figura 10. Uma sequência de notas S e as respectivas transformações R(S), I(S) e R(I(S)).



Figura 11. Uma melodia inicial e a melodia que se obtém por rotação da respectiva pauta

TRANSLAÇÃO, REPETIÇÃO E CÂNONE

Quem não se lembra do *Frère Jacques*? O primeiro cantava as primeiras quatro notas, e logo o segundo começava a cantar desde o início enquanto o primeiro seguia com a canção sem se perturbar. O terceiro entrava depois das quatro primeiras notas do segundo, o quarto depois das quatro primeiras notas do terceiro, e assim sucessivamente (figura 12).^[3]

Frère Jacques diz-se um *cânone*: uma música a diversas vozes, na qual uma linha melódica é cantada por uma primeira voz, que será repetida por outras vozes que vão entrando uma após a outra, cada uma retomando o que a ou-

tra acabou de cantar. Na verdade, a sobreposição de linhas melódicas na pauta de um cânone faz lembrar a calçada portuguesa no Largo do Rossio (figura 13)^[4].

Um exemplo magnífico de cânone é o quarto andamento da *Sonata em Lá Maior* de César Franck (1822–1890). Analisando a figura 14, vemos (sombreado inicial mais claro) a primeira frase melódica, tocada pelas duas mãos no piano em simultâneo, e depois pelo violino, com um atraso de quatro tempos. A seguir (sombreado menos claro seguinte) vem a segunda frase que entra no piano enquanto ainda o violino não terminou a primeira. E assim sucessivamente. Esta sonata foi composta por César Franck para violino e piano em 1886, mas existe uma versão para piano e vio-



Figura 12. Os primeiros compassos de *Frère Jacques*



Figura 13. Largo do Rossio, em Lisboa

Allegretto poco mosso

dolce cantabile violino
dolce cantabile piano a duas mãos
sempre legato continua
piano a duas mãos

violino
 violino
 piano a duas mãos

Figura 14. Início do quarto andamento da *Sonata em Lá Maior*, de César Franck

loncelo por Mischa Maisky (violoncelo) e Martha Argerich (piano) que vale a pena ouvir (RM1). Quem quiser explorar mais um cânone brilhante, tentando identificar as frases melódicas que se repetem sucessivamente pelos diversos instrumentos, pode ouvir o Cânone em Ré de Johann Pachelbel (1653–1706), numa versão tocada pela Orquestra Filarmónica de Berlim, conduzida por Herbert von Karajan (RM2).

Em termos matemáticos, o cânone corresponde à translação no plano. Em todos estes exemplos, *Frère Jacques*, *Sonata em Lá* de Franck e *Cânone em Ré* de Pachelbel, a linha melódica sofre apenas uma translação no tempo: a segunda voz reproduz a melodia, começando-a na mesma nota (ou numa nota do mesmo nome, com altura diferente, como acontece na sonata de César Franck).

Mas também existem cânones que deslocam a segunda voz tanto no tempo como em altura do som. Da obra *Variações Goldberg* de Johann Sebastian Bach (1685–1750), que consiste num total de 30 variações sobre um mesmo tema, fazem parte nove cânones (figura 15). O que é interessante para o nosso estudo é o facto de, nesta obra, todas as variações que correspondem a um número múltiplo de três, excepto a última (Variação 30), serem um cânone. Mais ainda: a variação número $3n$ é um cânone ao intervalo n ; a variação 3 é um cânone ao uníssono (o intervalo entre uma nota e ela própria), ou seja, um cânone com duas vozes que se repetem sucessivamente, como no *Frère Jacques*; já a variação 6 é um cânone com intervalo de segunda (o intervalo entre uma nota e a nota imediatamente a seguir), a variação 9 é um cânone com intervalo de terceira, e assim sucessivamente, até à variação 27, um cânone com intervalo de nona.

Na Variação 3 há uma primeira voz que segue uma linha melódica que começa no primeiro compasso (figura 16), e uma segunda voz que começa no segundo compasso, imitando a primeira e sobrepondo-se a ela. Vale a pena ouvir esta variação interpretada por Glenn Gould (RM3)

Aria	Variatio 16. Ouverture
Variatio 1	Variatio 17
Variatio 2	Variatio 18. Canone alla Sesta
Variatio 3. Canone all'Unissono	Variatio 19
Variatio 4	Variatio 20
Variatio 5	Variatio 21. Canone alla Settima
Variatio 6. Canone alla Seconda	Variatio 22. alla breve
Variatio 7. al tempo di Giga	Variatio 23
Variatio 8	Variatio 24. Canone all'Ottava
Variatio 9. Canone alla Terza	Variatio 25. adagio
Variatio 10. Fughetta	Variatio 26
Variatio 11	Variatio 27. Canone alla Nona
Variatio 12. Canone alla Quarta	Variatio 28
Variatio 13	Variatio 29
Variatio 14	Variatio 30. Quodlibet
Variatio 15. Canone alla Quinta	Ario da Capo

Figura 15. As Variações Goldberg, de Johann Sebastian Bach

Na Variação 9 (figura 17), a primeira voz começa no primeiro compasso, num Si, e a segunda voz começa no segundo compasso, no Sol imediatamente mais grave (Sol–Si é um intervalo de terceira). Vale a pena ver a interpretação desta variação por Colin Booth com representação gráfica de Stephen Malinowski (RM4).

SIMETRIA DE REFLEXÃO OU COMPOSIÇÕES CAPICUA

Vimos já que a música escrita na pauta pode ser analisada como se de um friso se tratasse. Procuremos nela mais simetrias dos frisos.

Uma melodia com a simetria da capicua pode ser tocada do início para o fim ou do fim para o princípio, que o resultado musical é o mesmo. Esta é a simetria que encontramos no *Minuetto al Roverso* (RM5) da *Sinfonia n.º 47 em Sol Maior* (figura 18) de Haydn (1732–1809).



Figura 16. Variação 3, *Variações Goldberg*, Johann Sebastian Bach

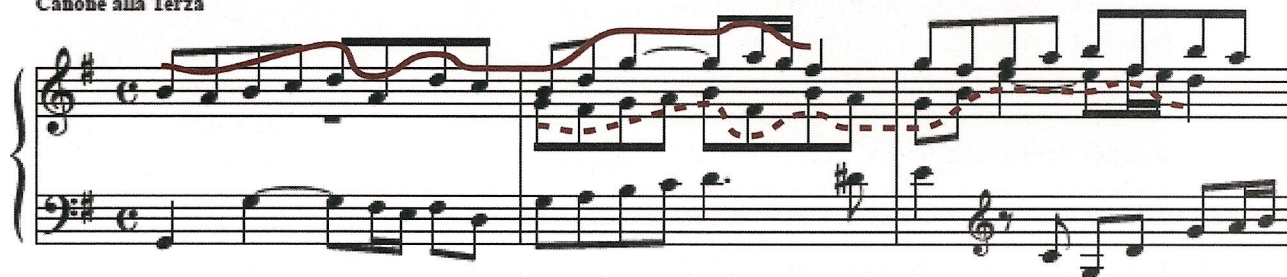


Figura 17. Variação 9, *Variações Goldberg*, Johann Sebastian Bach

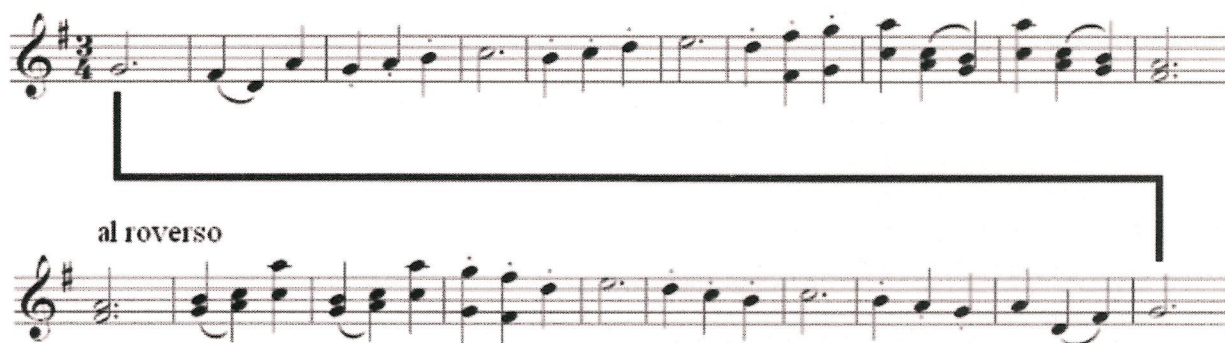


Figura 18. Tema do *Minuetto al Rovverso*, *Sinfonia n.º 47 em Sol Maior* de Haydn

Haydn não foi o primeiro a criar uma obra musical em capicua. Podemos dar o exemplo do Cântico 1 da *Oferenda Musical* (1747) de Johann Sebastian Bach que neste vídeo (RM7) se desenvolve engenhosamente sobre uma Fita de Möbius.

A REFLEXÃO DE ESPELHO HORIZONTAL

Encontrar exemplos musicais inspirados na reflexão segundo um eixo horizontal é uma tarefa mais difícil que as anteriores.[5]

No exemplo seguinte esta simetria é muito difícil de detectar, a não ser por observação das pautas musicais. A com-

posição mais famosa de Paganini (1782–1840) é, quase de certeza, o *Capricho n.º 24* para violino, que podemos ouvir numa interpretação por Alexander Markov (RM8). Um século mais tarde, Rachmaninoff (1873–1943) homenageou Paganini com a sua *Rapsódia sobre um tema de Paganini* (1934), um conjunto de 24 variações sobre o *Capricho 24* de Paganini. Na *Variação 18* da rapsódia de Rachmaninoff, que podemos ouvir numa versão de Rubinstein (RM9), é quase impossível reconhecer o tema original de Paganini sem olharmos atentamente para as duas pautas (figuras 19 e 20). Rachmaninoff usou para tema da sua composição a inversão do tema de Paganini, ou seja, a melodia que se obtém depois de aplicar uma reflexão de eixo horizontal ao tema de Paganini.



Figura 19. Tema do *Caprice n.º 24*, Paganini

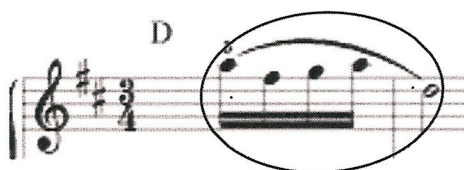


Figura 20. Tema da Variação 18, Rachmaninoff



Figura 21. Calçada Martin de Freitas, junto aos Arcos do Jardim, Coimbra

Violino 1

Der Spiegel (The Mirror) Duet

W A Mozart

Allegro - 120

Violino 2

Der Spiegel (The Mirror) Duet

W A Mozart

Allegro

Figura 22. O dueto *Espelho*, para dois violinos

A simetria musical entre estes dois temas é a que podemos encontrar, por exemplo, na Calçada Martim de Freitas, em Coimbra (figura 21).

O DUETO ESPELHO

Encontra-se online a pauta relativa a uma peça para dois violinos, *Der Spiegel Duet*^[6], atribuída a Mozart e que podemos ver e ouvir no youtube (RM10). O que é original nesta obra

é que uma única pauta serve para os dois violinistas em simultâneo, que a poderão executar se estiverem ambos frente a frente, a olhar para a mesma folha de papel (figura 22). De facto, a isometria envolvida é a rotação de 180° , operação «efectuada» pelo segundo violinista, quando este olha para a pauta que, para o primeiro violinista, estaria invertida. Mas na verdade, e como vimos anteriormente, a rotação de 180° corresponde, grosso modo, à retrógrada da inversão da sequência original.

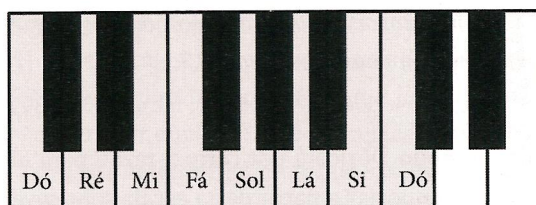


Figura 23. A escala de Dó Maior

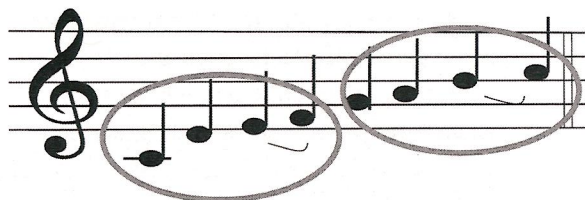


Figura 24. Tons e meios-tons da escala de Dó Maior. Os meios-tons estão assinalados com uma ligadura entre as notas correspondentes

ESCALAS COM SIMETRIA

No teclado de um piano, entre cada duas teclas brancas sucessivas pode haver, ou não, uma tecla preta. No primeiro caso, as notas correspondentes distam de um tom e no segundo caso distam de meio-tom. Mas mesmo quem nunca tenha aprendido música consegue reconhecer e traçar a escala de Dó, entoando meios-tons e tons inteiros sem se aperceber desse feito (figura 23).

Hoje chamamos a esta escala diatônica maior, e caracteriza-se por ter os meios-tons (Mi-Fá e Si-Dó) da terceira para a quarta e da sétima para a oitava notas. Por causa da localização dos meios-tons nesta escala, esta é constituída por dois conjuntos de quatro notas com a mesma distribuição de tons e meios-tons (figura 24).

Podemos tocar esta escala no teclado de um piano começando-a em qualquer nota, mas para respeitar as posições dos seus tons e meios-tons é preciso recorrer às teclas pretas. Começando a escala em Fá ou em Sol, basta usar uma tecla preta: no primeiro caso é a tecla preta que fica

imediatamente antes de Si (Si b), e no segundo caso a que fica imediatamente a seguir a Fá (Fá #). Se no entanto quisermos começar a escala em Si, já temos que usar todas as cinco teclas pretas.

A afinação de um teclado que torna possível começar a escala diatônica em qualquer nota, e de tal forma que qualquer das escalas soe bem ao ouvido, foi um problema resolvido no Século XVIII, com intervenção tanto de matemáticos como de músicos. Bach comemorou o feito compondo *O Cravo bem Temperado* (1722), um conjunto de 24 Prelúdios e Fugas que pode ser visto como um catálogo de composições, que cobre todas as 24 escalas diatônicas (12 maiores e 12 menores) que se obtêm mantendo os tons e meios-tons da escala de Dó, mas começando-a em qualquer uma das 12 notas do teclado, brancas ou negras. As peças aparecem ordenadas, por ordem cromática, começando em Dó e terminando em Si, as ímpares para os tons maiores e as pares para os tons menores (figura 25).

Figura 25. Os 24 Prelúdios e Fugas d'*O Cravo bem Temperado*

Prelúdio e Fuga (nos ímpares)	Escalas maiores	Prelúdio e Fuga (nos pares)	Escalas menores
1	Dó M	2	Dó m
3	Dó # M	4	Dó # m
5	Ré M	6	Ré m
7	Mi b M	8	Mi b m
9	Mi M	10	Mi m
11	Fá M	12	Fá m
13	Fá # M	14	Fá # m
15	Sol M	16	Sol m
17	Lá b M	18	Sol # m
19	Lá M	20	Lá m
21	Si b M	22	Si b m
23	Si M	24	Si m

Bach provou assim que num cravo <bem temperado> se pode transpor a escala de Dó fazendo-a começar em qualquer nota do teclado, mantendo os intervalos da escala diatónica, e ainda compor músicas em quaisquer dessas escalas.

Mas a escala de Dó nem sempre foi tão popular como tem sido de Bach aos nossos dias. Foi o Papa Gregório I (540–604) quem organizou um conjunto de escalas musicais, os modos gregorianos, nomeando-as a partir dos nomes das escalas gregas da Antiguidade. A nossa tão popular escala diatónica que acabou por vencer as restantes em popularidade, era nesse tempo o modo Jónico. Há no entanto um outro modo gregoriano que, talvez pela sua estrutura interessante do ponto de vista da simetria de reflexão, chegou directamente e discretamente desde a Idade Média aos nossos dias.

Consideremos a escala que vai de Ré ao Ré seguinte usando apenas as notas brancas (figura 26). Deste modo, os meios-tons ficam entre a segunda e a terceira, e entre a sexta e a sétima notas. Trata-se do modo Dórico (figura 27).

Na verdade, em termos musicais, esta distribuição simétrica dos meios-tons que os afasta do início e do fim da escala, produz uma sensação de sobriedade no ouvinte, enquanto que a localização de um meio-tom logo no início da escala lhe dá um toque lamentoso ou sensual, como acontece, por exemplo, no Flamenco. A discussão acerca dos efeitos das diversas escalas nas emoções e na formação do carácter vem de longe, pelo menos desde a Antiga Grécia, como podemos confirmar em *A República*.

—Quais são então as harmonias lamentosas? [...]

—São a mixolídia, a sintonolídia, e outras que tais.

—Portanto essas são as que se devem excluir, visto que são inúteis para as mulheres, que convém que sejam honestas, já para não falar dos homens. [...] Não entendo de harmonias, mas deixa-nos ficar [uma harmonia] para aque-

le que se encontra em actos pacíficos, não violentos, que se comporta com bom senso e moderação. [...]

Platão, *A República*, Livro III, 398–399

A sobriedade do modo Dórico é por certo a razão para algumas melodias compostas a partir desta escala sobreviverem ao passar dos séculos, permanentemente retomadas e transformadas por músicos e compositores.

Quem não conhece a canção inglesa *Greensleeves* pelo nome, irá reconhecê-la decerto nesta versão em guitarra (RM11). Esta canção, provavelmente do Período Isabelino, da Inglaterra do Séc. XVI, já foi cantada por Elvis Presley (1968) (RM12) e também por Leonard Cohen (1974) (RM13). Podemos ainda ouvi-la numa interpretação em jazz por John Coltrane (1961) (RM14) ou mesmo pela banda rock Jethro Tull (2003) (RM15).

O modo Dórico é também a escala do hino *Dies Irae* composto no Séc. XIII, que podemos ouvir em canto gregoriano (RM16). Também esta melodia tem vindo a ganhar novas roupagens ao longo dos séculos, incorporada em diversas obras de diversos compositores. São exemplo o quinto andamento da *Sinfonia Fantástica de Berlioz* (Séc. XIX) (RM17) ou a *Dança Macabra (Totentanz)* de Liszt (Séc. XIX) (RM18). O tema *Dies Irae* aparece também na *Variação 24 da Rapsódia sobre um tema de Paganini* (1934) de Rachmaninoff, de que já falámos neste texto a propósito de outra simetria. Pode ouvir integralmente a interpretação da Rapsódia, pelo próprio Rachmaninoff (RM19), e tentar descobrir o tema *Dies Irae* na última variação, a um minuto do final da obra.

Já no século XX, também Jacques Brel incorporou o tema *Dies Irae* na sua canção *La mort* (1959) (RM20), que David Bowie interpretou em 1973 numa versão em inglês, *My Death* (RM21), comprovando a imortalidade do tema mas também da escala poderosa que lhe deu forma. Poder que decerto lhe chegou por via da simetria!

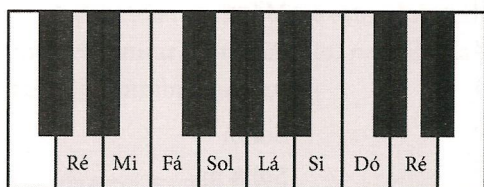


Figura 26. O modo dórico

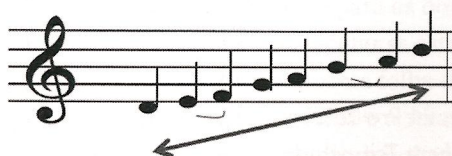


Figura 27. Tons e meios-tons no modo Dórico.

A distribuição de tons e meios-tons nesta escala tem a simetria da capicua

Notas

- [1] A autora escreve segundo a antiga ortografia.
- [2] Este artigo tem referências a locais na *web* onde podem ser ouvidos trechos musicais ou vídeos (*youtube*). Essas referências musicais são listadas a seguir. Se o leitor estiver a ler este artigo com a versão pdf aberta no seu computador, as referências musicais dessa versão são *links* directos para esses locais da *web*.
- [3] http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:YB4001Canon_Frere_Jacques.png
- [4] http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cal%C3%A7ada_da_Pra%C3%A7a_do_Rossio.jpg
- [5] Exemplo sugerido pela colega Ana Pereira do Vale, da Universidade do Minho, a quem agradeço.
- [6] <http://icking-music-archive.org/scores/mozart/spiegel.pdf>

Referências Musicais (na versão em pdf, clique para ouvir)

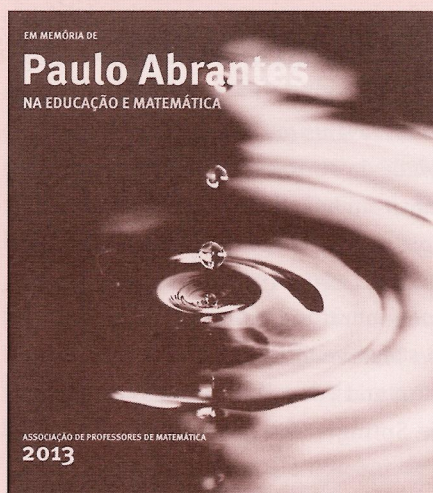
- | | |
|------|---|
| RM1 | http://www.youtube.com/watch?v=oS_OfxK8LEo |
| RM2 | http://www.youtube.com/watch?v=H1L4sVxuKZg |
| RM3 | http://www.youtube.com/watch?v=CtSSpAT7rZg |
| RM4 | http://www.youtube.com/watch?v=6E2s57WuFQU7 |
| RM5 | http://www.youtube.com/watch?v=bMm_R7RFcMg8 |
| RM6 | http://www.youtube.com/watch?v=WLEmVxqye4g9 |
| RM7 | http://www.youtube.com/watch?v=oIN_FyhmY8U |
| RM8 | http://www.youtube.com/watch?v=PZ3o7sMot-012 |
| RM9 | http://www.youtube.com/watch?v=h_BArG3ollw |
| RM10 | http://www.youtube.com/watch?v=M8QlaVgilWc |
| RM11 | http://www.youtube.com/watch?v=wARiOb8oZro16 |
| RM12 | http://www.youtube.com/watch?v=J_wD4o3pqq817 |
| RM13 | http://www.youtube.com/watch?v=s9AH-SB59kc18 |
| RM14 | http://www.youtube.com/watch?v=NpX517F8H2419 |
| RM15 | http://www.youtube.com/watch?v=9qcAgLX7KPg20 |
| RM16 | http://www.youtube.com/watch?v=-fMHms5Cvsw21 |
| RM17 | http://www.youtube.com/watch?v=3lw6bCO-nzM22 |
| RM18 | http://www.youtube.com/watch?v=3gQfPnt-NNs23 |
| RM19 | http://www.youtube.com/watch?v=KL5aiUKPt3Q24 |
| RM20 | http://www.youtube.com/watch?v=Qq9-B6REgRI25 |
| RM21 | http://www.youtube.com/watch?v=XpW5MdStjoU |

Bibliografia

- Bach, J. S., *Das Wohltemperierte Klavier*. Teil I, G. Henle Verlag, München, 1974.
- Levitin, Daniel J., *This is Your Brain in Music*. Dutton/Penguin, New York, 2006.
- Simões, Carlota, *Padrões matemáticos na obra de Mozart*. Encontro MÚSICA e MATEMÁTICA — Actas, Helena Mena Matos e João Nuno Tavares (coordenação editorial), pp. 64–76, Universidade do Porto e Casa da Música, 2006.
- Simões, Carlota, *A ordem dos números na música do século XX*. Revista Colóquio Ciências, n° 24, pp. 48–59, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1999.
- Simões, Carlota, *Mathematical aspects in the Second Viennese School of Music*. Mathematics and Arts: Mathematical Visualization in Art and Education, pp. 105–117, Editor. Claude P. Bruter, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

CARLOTA SIMÕES

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA



Em memória de Paulo Abrantes na Educação e Matemática

Henrique Manuel Guimarães (Org.) (APM, 2013)

68 pp. Preço: 8,00€ / Preço Sócio: 5,00€

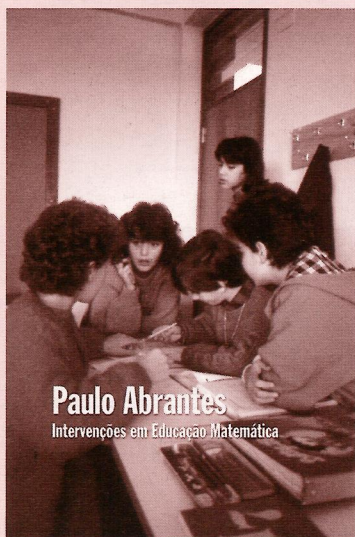
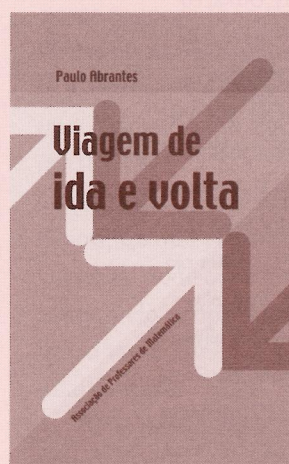
Paulo Abrantes foi um dos directores da *Educação & Matemática* e tudo aquilo em que se envolveu na APM — e envolveu-se em muita coisa e em muitos momentos — a *Educação & Matemática* tinha para ele um significado particular. Integrar a redacção de que fez parte desde o primeiro número, dirigir a Revista quando foi director durante quase cinco anos, e participar nos trabalhos de elaboração dos diferentes números foram experiências que viveu com intensidade e de que retirava uma gratificação especial.

Viagem de ida e volta

Paulo Abrantes (APM, 2005, 2.ª ed.)

54 pp. Preço: 6,00€ / Preço Sócio: 4,00€

Este livro foi reeditado a propósito da organização do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes «Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas». Este trabalho consiste na resolução de um único problema no contexto de ensino e aprendizagem de Matemática. Com esta publicação, o autor transmite a sua experiência pessoal junto dos alunos, em diversas épocas, no estudo, discussão e exploração de um problema.



Paulo Abrantes: Intervenções em Educação Matemática

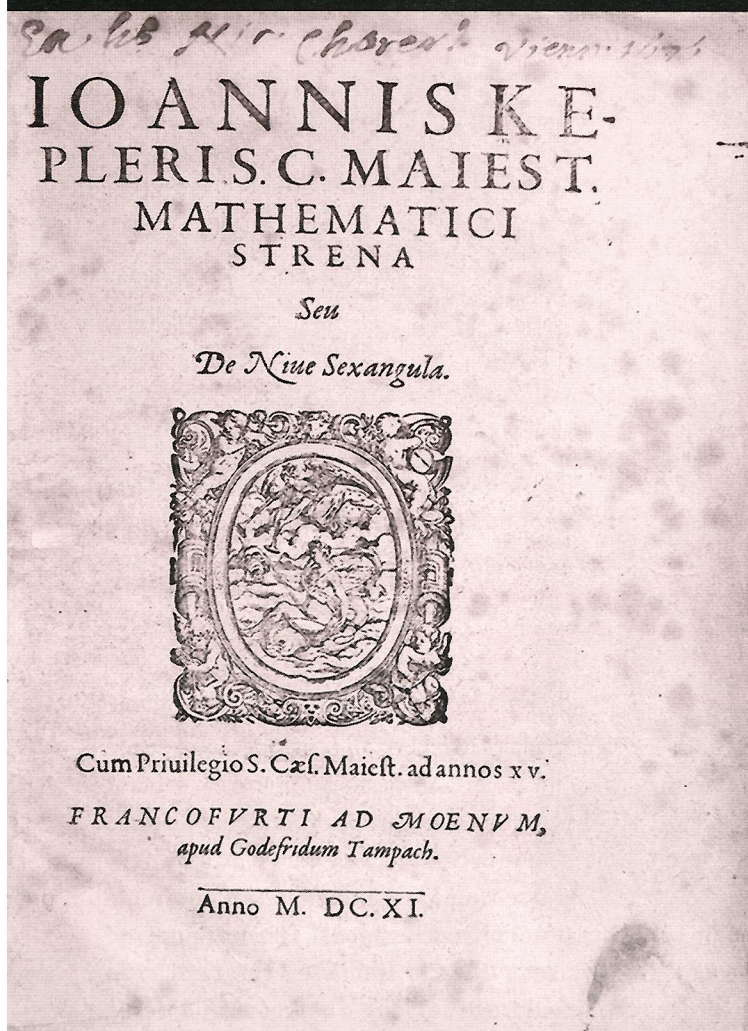
Henrique Manuel Guimarães, *et al.* (Org.) (APM, 2005)

200 pp. Preço: 5,00€ / Preço Sócio: 5,00€

Paulo Abrantes foi uma figura de primeiro plano da Educação Matemática portuguesa e internacional. A par dos seus dotes de orador excepcional e de organizador com qualidades fora do comum, manifestou sempre grande dinamismo e capacidade de realização nos grupos e projectos colectivos em que se envolvia. Este livro contém diversos dos seus escritos mais relevantes, cobrindo as áreas a que deu mais atenção: desenvolvimento curricular e avaliação, experiência matemática e formação de professores. Os textos são apresentados seguindo a ordem cronológica de publicação.

Da neve hexagonal

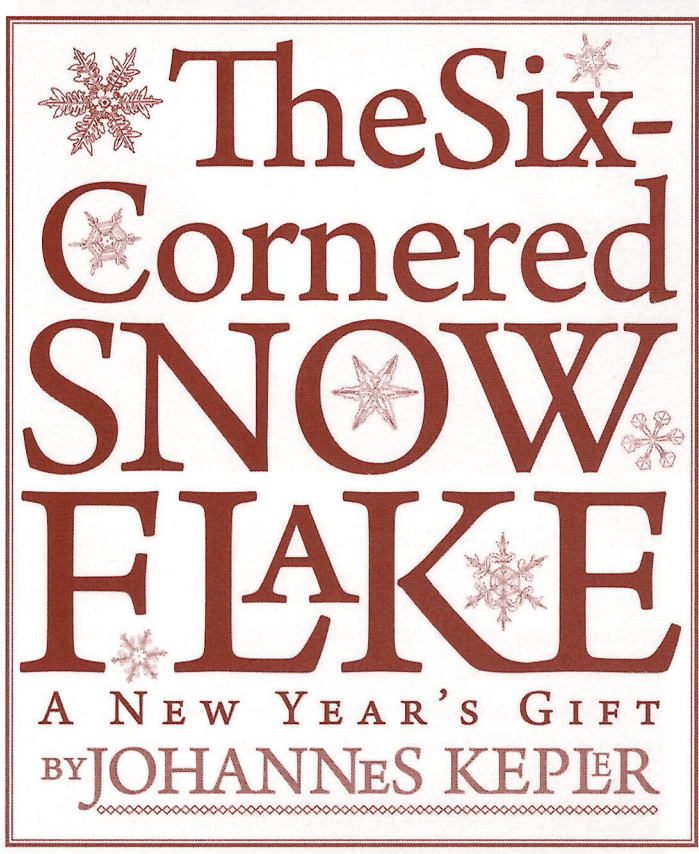
LURDES FIGUEIRAL



Strena seu De Nive Sexangula, 1611.

Em 1610, Kepler escreve um opúsculo intitulado *Strena seu De Nive Sexangula* que se pode traduzir como *A Oferta ou Da Neve Hexagonal*. *A Oferta*, porque Kepler o escreve para oferecer, como presente de ano novo em Janeiro de 1611, a Johannes Matthäus Wackher von Wackhenfels, seu benfeitor da corte prussiana do Imperador Rudolfo II, onde Kepler era astrónomo; *Da neve hexagonal* (ou, mais literalmente, *Da neve de seis ângulos*) porque propõe uma reflexão sobre a causa da forma hexagonal dos flocos de neve.

Este pequeno texto é de agradável leitura pelo *jeu d'esprit* que Kepler utiliza. Logo a abrir, dá o tom:



The Six-Cornered Snow Flake, A New Year's Gift, 2000.

Estou bem consciente do quanto amais o Nada, não tanto pelo pouco valor que tem, mas pelo subtil jogo de ideias que se pode fazer com ele, como se fosse um feliz pardal. Por isso posso imaginar que uma oferta pode agradar-lhe tanto mais, e ser mais bem recebida, quanto mais se aproxime do Nada.⁽¹⁾

Kepler inicia este «jogo de espírito» logo nas primeiras linhas: a *Neve*, que em latim é *Nive* ou *Nix*, pronuncia-se tal como soa na Baixa Alemanha o nada – *nix* – da língua materna de Kepler, ou mesmo o alemão *nichts*.

Na sua essência, este escrito é uma espécie de ensaio sobre a natureza das coisas, das substâncias: Kepler, pro-

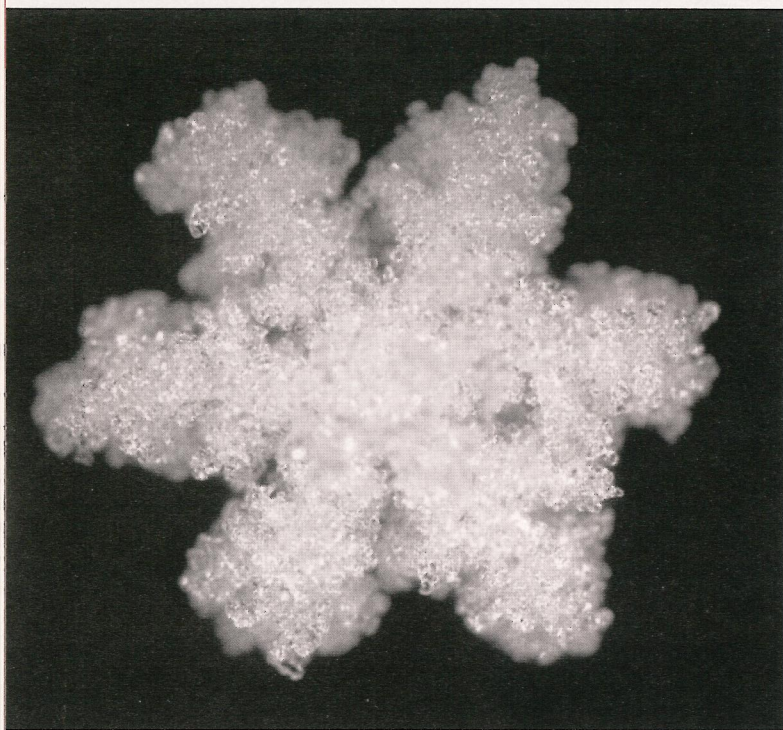


Figura 1

curando essa dádiva que mais se aproxima de *Nada*, depois de recusar sucessivamente o átomo de Epicuro (que considera ser mesmo nada), a poeira da terra (da qual ninguém pode ver a forma e cujo tratamento exigiria cálculos onde ele teme perder-se já que, segundo Arquimedes, haveria numa só semente de papoila, dez mil desses minúsculos grãos), as faíscas de fogo (que ainda são mais que o pó de duas pedras de sílex que se raspam para as produzir — as faíscas, que o pó já ele tinha anteriormente recusado — e por isso, como afirma, «deixo a Platão essas formas piramidais que eu nunca vi, para que ele delas faça fogo como desejava»), o vento e o fumo e a água, escolhe um simples floco de neve, qual estrela caída do céu e pergunta-se se um floco de neve, feito de vapor de água e que derrete quase instantaneamente quando cai, será verdadeiramente alguma coisa.

Vejamos o texto de Kepler:

Enquanto ansiosamente pensava neste assunto [o da oferta do Nada a fazer ao seu amigo], atravessei a ponte⁽²⁾ mortificado pela minha deselegância de me apresentar diante de vós sem um presente de Ano Novo, excepto talvez (para continuar no mesmo tom) aquele que sempre vos trago — literalmente, Nada. Nem eu estava capaz de pensar em algo que, sendo quase Nada, proporcionasse ainda assim uma subtil reflexão. É então quando, por uma feliz coincidência, algum do vapor que havia no ar se transformou em neve pela força do frio, e alguns flocos dispersos caíram no

meu casaco, todos hexagonais, com raios felpudos, filamentosos [omnes sexanguli, villosis radiis, no original]. Por Hércules! Ali estava algo, mais pequeno que uma gota e no entanto dotado de uma forma. Ali estava, na verdade, a mais admirável oferta de Ano Novo para o amante do Nada, e digno também de um matemático (que tem Nada e recebe Nada⁽³⁾) uma vez que desce do céu e tem semelhança com as estrelas (figura 1).

Kepler, interroga-se então:

Visto que sempre é assim, que sempre que começa a nevar, aquelas primeiras partículas de neve adoptam a forma de uma pequena estrela de seis ângulos, é necessário que haja uma causa determinada; pois, se acontece por acaso, por que não tombam igualmente com cinco ou sete ângulos, mas sempre com seis, contanto que estejam ainda esparsas e distintas e antes que se precipitem num confuso aglomerado?

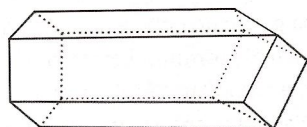
Para ver como estas questões devem ser tratadas, vamos recorrer a alguns exemplos bem conhecidos. Mas vamos apresentá-los de uma forma geométrica, porque uma digressão deste tipo contribuirá muito para a nossa investigação.

Kepler inicia então uma interessante viagem por temas geométricos, cristalográficos e matemáticos, abordando questões que vão desde a conjectura do favo de mel aos quasicristais.

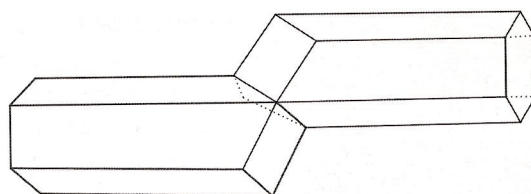
DO FAVO DE MEL À CONJECTURA DE KEPLER

Já Papo de Alexandria (320 d.C.) tinha considerado que até as abelhas, com «uma certa intuição geométrica», sabiam que, entre as formas regulares que pavimentam o plano, o hexágono é aquela que optimiza a área para o mesmo perímetro. Papo referia-se aqui à secção transversal do alvéolo como se este fosse um prisma hexagonal. Ora, o argumento de Papo é incompleto. De facto, limita-se à comparação de três casos: o triângulo, o quadrado e o hexágono que, desde Pitágoras, se sabia serem os únicos polígonos regulares a cobrir o plano. Papo defende que, se a mesma quantidade de material for usada para construir estas figuras, é o hexágono que é capaz de conter mais mel. Papo não apresenta qualquer razão matemática para restringir as hipóteses aos três polígonos regulares (*porque, às abelhas, repugnam as figuras dissemelhantes*), como também para o motivo que o levou a excluir lacunas entre os alvéolos (*elas [as abelhas] acreditam que estas figuras [os alvéolos] devem estar absolutamente justapostas e terem os lados em comum, para que as matérias estranhas não possam entrar nos interstícios e manchar assim o fruto dos seus trabalhos*).

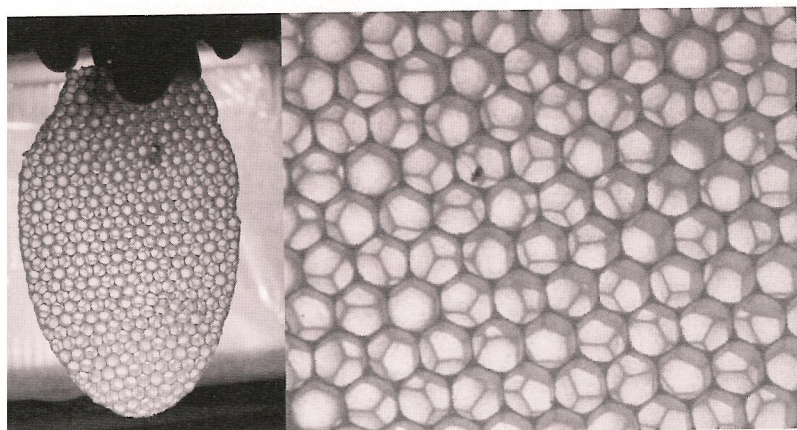
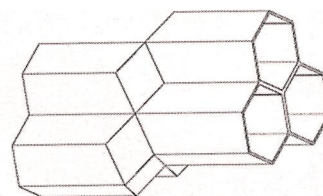
Restringindo-se então a estas três figuras, Papo demonstra que é o hexágono que cumpre o requisito, mas a sua demonstração é feita para um conjunto muito restrito de pos-



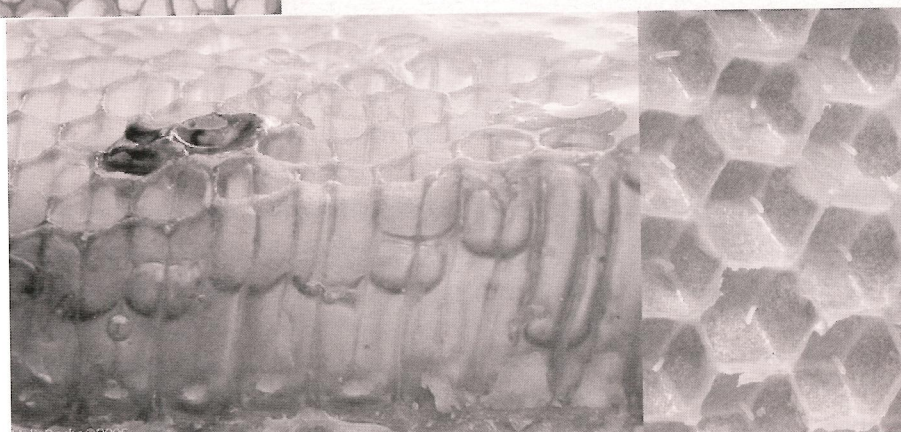
Esquema de um alvéolo



Encaixe de alvéolos pelas paredes do fundo



Pequeno favo tipo seta
fotografado em contraluz



quilha vista em fotografia de perfil

e de cima

Figura 2

sibilidades. Fica então em aberto esta questão, em torno da *Conjectura do favo de mel* (*The Honeycomb Conjecture*) como é conhecida: O hexágono é a figura geométrica com perímetro mínimo e que divide o plano em regiões iguais com uma área dada. (Observe-se que minimizar o perímetro, dada a área, é equivalente a maximizar a área, dado o perímetro.)

Neste livro, Kepler debruçou-se também sobre esta questão e colocou-a no espaço tridimensional, chegando a formular, ele próprio, uma conjectura sobre empacotamentos de esferas (*Conjectura de Kepler*⁽⁴⁾). As demonstrações de ambas as conjecturas estiveram relacionadas e só foram cabalmente resolvidas no limiar deste século. O matemático húngaro László Fejes Tóth (1915–2005) provou, em 1943, a conjectura do favo de mel sob a hipótese da convexida-

de das células e previu que a demonstração sem esta hipótese da convexidade envolveria consideráveis dificuldades. Esta demonstração veio a ser feita por Thomas C. Hales⁽⁵⁾ no contexto da complexa demonstração da Conjectura de Kepler, em trabalhos publicados entre 1998 e 2005.

Na sua viagem ao mundo das colmeias, Kepler descobre que os favos de mel não são constituídos por prismas hexagonais justapostos: esses prismas têm alterada a «parede do fundo». De facto, enquanto que a abertura do alvéolo é um hexágono, no seu fecho posterior este foi substituído por três losangos que formam uma espécie de «quilha» (*cari-nam potius nuncupes*⁽⁶⁾) que permite que os alvéolos se encaixem de forma desencontrada dando mais consistência ao favo (figura 2).



Figura 3

Esta observação suscitou em Kepler uma curiosidade:

Os três planos da quilha são idênticos uns aos outros e a sua forma é a que os geómetras chamam losangos. Intrigado com estes losangos comecei a procurar na geometria corpos que, à semelhança dos cinco sólidos regulares e dos catorze sólidos de Arquimedes, pudessem ser construídos só com losangos. Descobri dois: um relacionado com o cubo e com o octaedro e o outro com o dodecaedro e o icosaedro.

Não sendo então os favos das abelhas células óptimas no preenchimento do espaço, para Kepler elas eram suficientemente boas para ser tidas como exemplo, no seu encaixe posterior, deste «empacotamento» sem falhas que o dodecaedro rômbo permite. Outro exemplo que nos apresenta, são as sementes de uma romã:

Se se corta uma romã de bom tamanho, pode ver-se que a maior parte das sementes estão comprimidas nesta mesma forma (figura 3).

Para Kepler, é claro que as faces rômbricas aparecem na natureza como produto de uma luta pelo espaço entre formas orgânicas redondas, como as sementes de romãs, pressionando-se umas contra as outras.

Por outro lado, essas mesmas formas redondas, se são sujeitas apenas a forças laterais, transformam-se em cubos, tal como as ervilhas, alinhadas na vagem (figura 4).



Figura 4

Mas, e se essas formas esféricas lutando por espaço, são feitas de material sólido? Como devemos embalá-las, a fim de otimizar o uso do espaço? (Corrales, 2010) Kepler descreve as diferentes formas de justapor esferas, com o mesmo raio, no plano e no espaço, da forma mais apertada possível.

No plano, só existem duas maneiras: a de malha quadrada e a de malha triangular (figuras 5 e 6). No primeiro caso, cada esfera contacta com 4 esferas vizinhas; no segundo, cada esfera contacta com 6 esferas vizinhas.

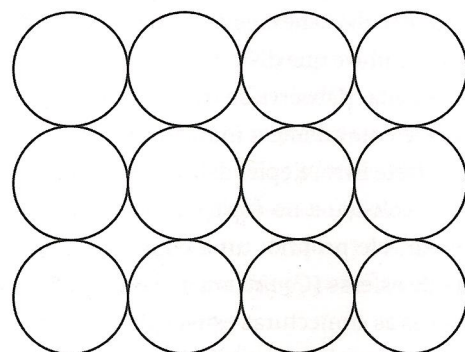
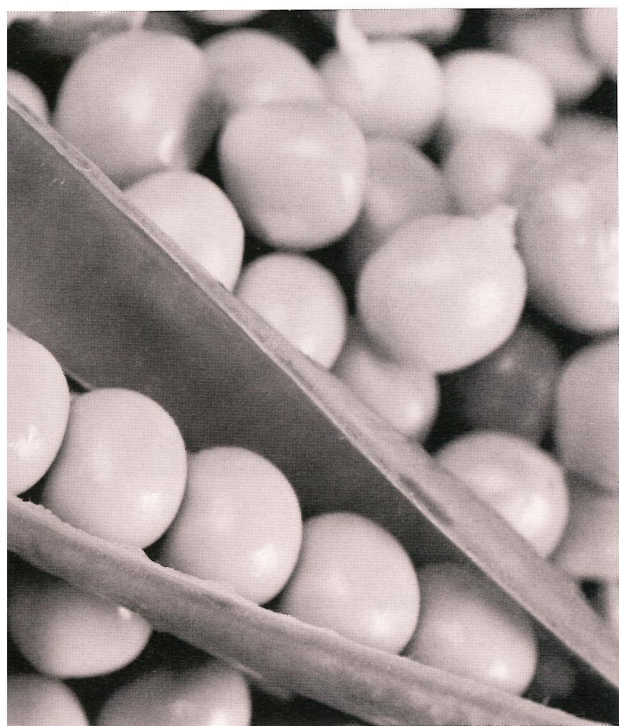


Figura 5. Disposição quadrada



Kepler trabalha obviamente com um conjunto finito de esferas, porque distingue aqui as esferas situadas nos bordos das interiores. Situações que resultam desta concepção finita aparecem noutros locais da exposição feita por Kepler que, no fundo, faz estas análises localmente.

Se quisermos agora empilhar esferas (criando assim uma estrutura tridimensional), teremos que partir destas duas situações planas. Kepler descreve todas as hipóteses.

Malha quadrada: o plano de que se parte tem uma distribuição quadrada e permite duas formas de construir as ca-

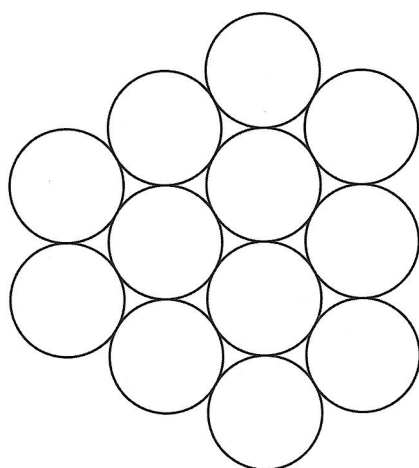


Figura 6. Disposição triangular

madras superiores. Num caso, na camada que se lhe sobre põe, cada esfera coloca-se directamente sobre uma esfera do plano anterior e assim sucessivamente para as camadas que se venham a sobrepor; todas as camadas apresentam uma disposição quadrada e uma esfera «no interior» toca seis esferas vizinhas: 4 no mesmo plano, 1 no plano abaixo e 1 no plano acima. No outro caso, cada esfera das seguintes camadas coloca-se nos interstícios da camada anterior, mantendo uma malha quadrada; cada esfera, agora, toca 4 vizinhas no mesmo plano, 4 no plano abaixo e 4 no plano acima, num total de 12 esferas.

Malha triangular: o plano de que se parte apresenta uma malha triangular. A partir daqui há também duas possibilidades de sobrepor camadas. Numa delas, as camadas seguintes alternam em planos que são colocados de forma que cada esfera esteja sobre uma esfera da camada anterior e de esferas colocadas nos interstícios da camada anterior; cada esfera toca em 6 esferas no mesmo plano, 1 esfera no plano abaixo e 1 esfera no plano acima, num total de 8 esferas. Na outra, as esferas das camadas seguintes são colocadas nos interstícios deixados pelas esferas do plano anterior; cada esfera toca em seis esferas no mesmo plano, 3 no plano abaixo e 3 no plano acima, num total de 12 esferas.

Em relação a estas situações, Kepler faz dois tipos de considerações: a que ocupa a maior parte da sua argumentação tem a ver com a finalidade deste seu escrito — perceber a razão das formas, de certas formas da natureza.

Sobre o primeiro arranjo, diz Kepler, num pressuposto de que as esferas não são totalmente rígidas:

Este é um arranjo cúbico e, uma vez comprimido, as esferas transformam-se em cubos.

E sobre o segundo:

Quando comprimidas, as esferas tornam-se rômbricas⁽⁷⁾. Esta ordenação é mais comparável ao octaedro e à pirâmide.

O terceiro caso apresenta:

Um arranjo semelhante a um prisma e, quando comprimido, as esferas transformam-se em colunas com seis lados quadrados e duas bases hexagonais.

Sobre o quarto diz ser semelhante ao segundo, mas descreve-o da seguinte forma:

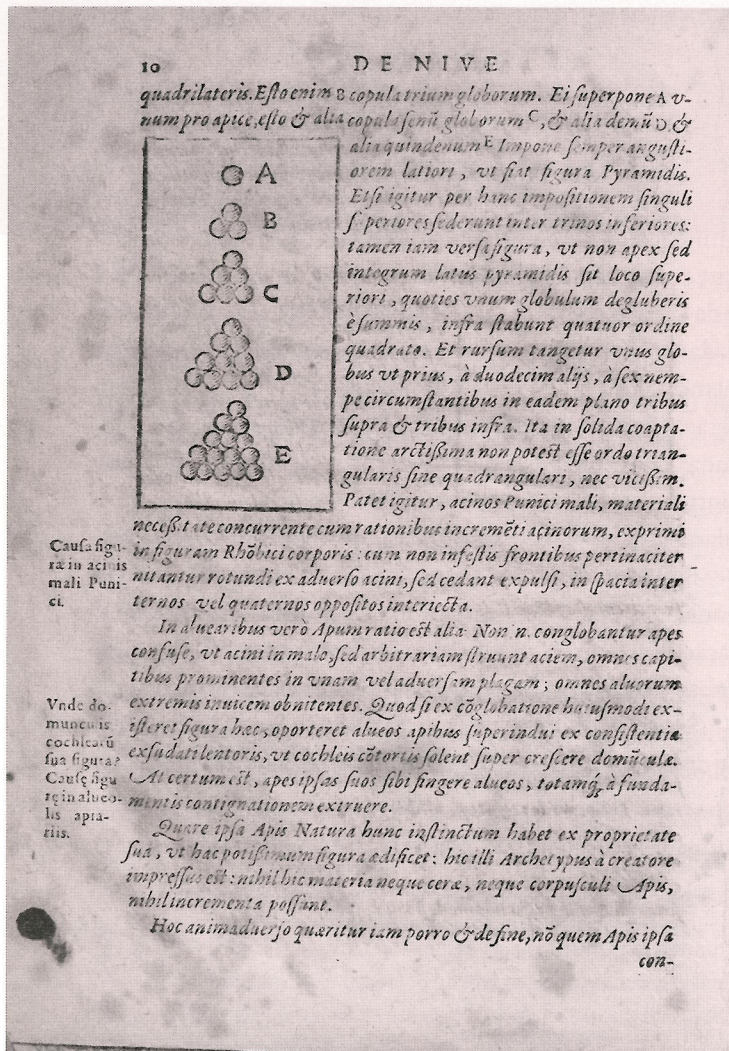
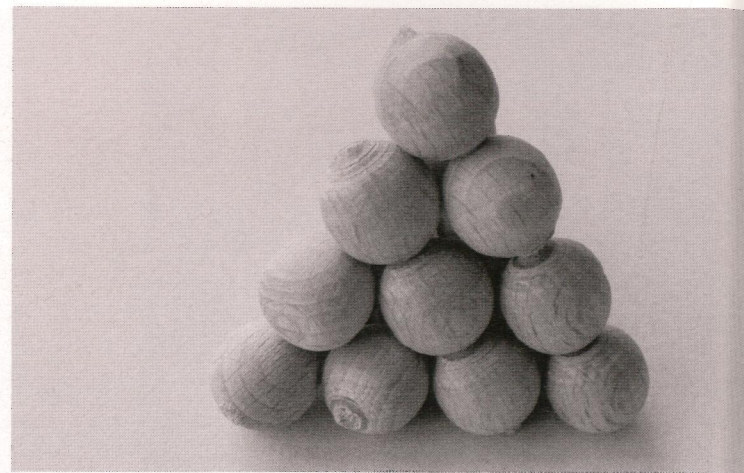


Imagem de página de um exemplar do *Strena seu De Nive Sexangula*, 1611

Seja B um grupo de 3 esferas. Coloque-se uma (A) no topo, como vértice. Considere-se outro grupo C de seis esferas; outro, D, de dez e outro, E, de quinze. Coloque-se o mais estreito sempre acima do mais largo, de forma a obtermos uma forma piramidal. Mesmo se, neste método de empilhamento, cada esfera assenta em três abaixo, se a pirâmide estiver voltada de modo que uma face, em vez de o vértice, esteja em cima, sempre que se retira uma esfera a partir do topo, quatro irão aparecer num arranjo quadrado abaixo.

No fundo, Kepler diz que se «rodarmos» convenientemente a pirâmide, pomos de manifesto uma malha quadrada, onde os arranjos das diferentes camadas eram todos triangulares (fig 7).

Portanto no arranjo sólido mais apertado não pode haver ordem triangular sem ordem quadrada e vice versa

No texto, Kepler, em relação à segunda situação, diz:

É o mais apertado arranjo possível e nenhum outro pode armazenar mais esferas num mesmo contentor.

E, mais à frente, em relação ao arranjo descrito em quarto lugar:

O segundo caso produzirá o mesmo resultado que o segundo caso do arranjo quadrilateral descrito acima.

De facto é o mesmo arranjo, ou empacotamento (figura 8). O que muda é a disposição no plano inicial: se neste o arranjo for quadrado e se empilharmos as esferas em forma piramidal obtemos uma pirâmide quadrangular (se o empilhamento se fizer nos dois sentidos, obtemos o octaedro). Se for triangular, obtemos uma pirâmide triangular. Cada esfera do interior do arranjo toca em 12 outras esferas. Dependendo da orientação do arranjo, pode tocar em quatro, quatro e quatro outras esferas em planos paralelos, ou em seis, três e três esferas.

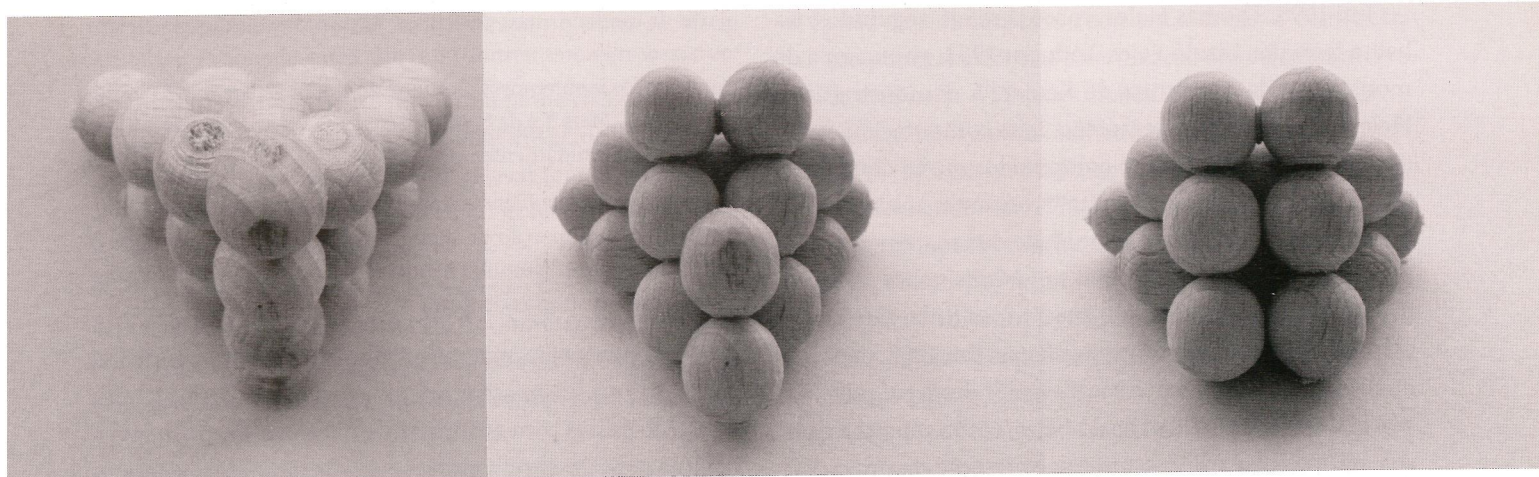


Figura 7. Empilhamento compacto de esferas sobre base triangular: é visível a malha quadrada

E este é sempre o melhor arranjo para empilhar esferas. É esta conclusão que, durante mais de 400 anos, foi conhecida por *Conjectura de Kepler*.

Gauss (Hales, 1998) demonstrou que, de facto, estes dois arranjos descritos por Kepler, possuem a densidade mais alta entre todas as disposições regulares. Em qualquer um deles cada esfera está rodeada por outras 12, e ambos os arranjos têm uma densidade média⁽⁸⁾ de $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$.

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos (ICM)⁽⁹⁾, Hilbert propôs uma lista de 20 problemas em aberto que deveriam ser o grande desafio dos matemáticos do século XX. A conjectura de Kepler é a parte C do 18º problema dessa lista: qual a maneira mais densa, no espaço, de arrumarmos um número infinito de sólidos iguais de uma dada forma, como esferas de raio dado? Ou seja: como podemos arrumá-los de modo que a razão entre o espaço ocupado e o espaço não ocupado assuma o maior valor possível?

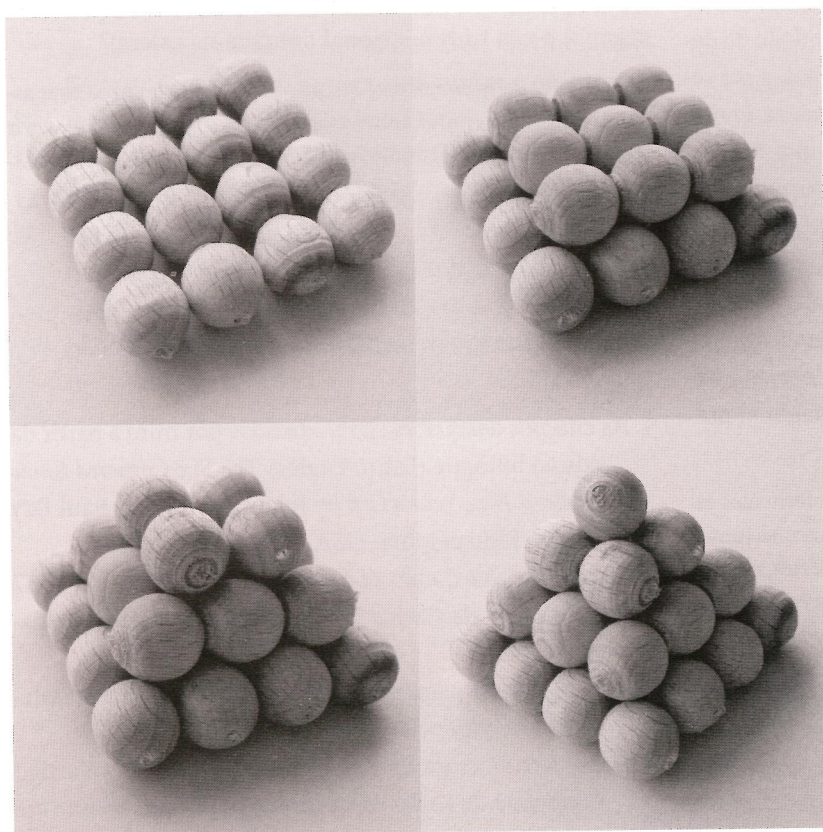


Figura 8. Empilhamento compacto de esferas sobre base quadrada: é visível a malha triangular na face lateral da pirâmide

Em 1998, Thomas Hales, como já referi, seguindo o trabalho feito por László Fejes Tóth em 1953, anunciou a demonstração da conjectura de Kepler. A demonstração de Hales é uma prova por exaustão, feita computacionalmente. Embora este recurso ao computador numa demonstração matemática não seja inédito⁽¹⁰⁾, encontra ainda algumas resistências no seio da comunidade dos matemáticos. No entanto, os editores dos *Annals of Mathematics* concordaram em publicá-la, uma vez que a prova tinha tido a aprovação de um painel de 12 especialistas. Em 2003, depois de quatro anos de trabalho, o coordenador deste painel⁽¹¹⁾, Gábor Fejes Tóth (filho de László Fejes Tóth), reportou que a sua equipa estava 99% segura da correcção da prova, mas que não conseguiam certificar a correcção de todos os cálculos computacionais. Ora, a possibilidade da verificação de uma prova é, segundo o entendimento comumente aceite até ao aparecimento de demonstrações com recurso ao computador, um dos critérios do que é uma boa demonstração matemática⁽¹²⁾.

Em Fevereiro de 2003, Hales publicou um artigo de cem páginas descrevendo, com detalhe, a parte não computacional da sua prova. Os *Annals of Mathematics* concordaram em publicar esta parte. A parte computacional apareceria numa outra publicação, a *Discrete and Computational Geometry*. Um mês antes, Hales tinha anunciado a criação de um projecto colaborativo para produzir uma prova formal completa da conjectura de Kepler. O objectivo é retirar qualquer incerteza que possa restar sobre a validade da demonstração, através de uma prova formal que possa ser verificada por computador⁽¹³⁾. Este projecto chama-se *Project FlysPecK*⁽¹⁴⁾, em que F, P e K se referem a *Formal Proof of Kepler*. Hales calcula que produzir uma prova formal completa pode levar cerca de vinte anos de trabalho.⁽¹⁵⁾

Pode então dizer-se que a conjectura de Kepler foi de facto demonstrada quase com absoluta certeza.

Kepler, que como já referi procura aqui a causa das formas da natureza, introduz a seguir um tema deveras interessante: compara as formas hexagonal e pentagonal presentes na natureza:

Há dois sólidos regulares, o dodecaedro e o icosaedro, formados expressamente por pentágonos, o último com triângulos mas juntos num arranjo pentagonal. A estrutura de cada um destes sólidos, tal como a do pentágono, não pode ser produzida sem a proporção que os géometras modernos chamam «divina». Está ordenada de forma que os dois mais pequenos termos consecutivos, juntos, dão o terceiro; e consequentemente, quaisquer dois termos adjacentes adicionam-se para dar o seguinte, até ao infinito, já que a dita sucessão mantém-se para sempre. É impossível dar um exemplo perfeito com números. Quanto mais avançarmos a

partir da unidade, mais perfeito se torna o nosso exemplo. Sejam os nossos menores termos 1 e 1, mas considerando-os desiguais. Juntemo-los e obtemos 2. Some-se ao maior 1 para dar 3. Some-se 2 e dá 5. Mais 3 e dá 8. Mais 5 e dá 13. Some-se 8 e dá 13. (...) E assim indefinidamente.

Suspeito que a faculdade geradora das sementes se faz à semelhança desta proporção de auto-propagação, e é por isso que o pentágono, que é a genuína bandeira da faculdade generativa das plantas, se manifesta nas flores.

Aparece-nos assim, não só a referência explícita à divina proporção e à sua relação com a sucessão de Fibonnaci, mas a relação destas com as formas da natureza e uma referência que já então abria a porta àqueles «monstros» da natureza que hoje conhecemos como quasicristais, relacionados também com as regularidades não periódicas e as pavimentações de Penrose, e que mereceram, em 2011, a atribuição do prémio Nobel da Química a Daniel Szechtman exatamente pelas suas investigações nestes *monstros*.

Kepler explana-se ainda sobre as razões pelas quais as formas da natureza variam, argumentando num misto de causas matemáticas e causas necessárias que se prendem com a optimização de matérias e de trabalho e com a essência de cada ser, para se centrar, de novo e finalmente, na forma do floco de neve que explora largamente até parar numa questão para a qual não tem solução matemática, pelo que a deixa na porta dos químicos. Porque é que a forma hexagonal do floco de neve é plana (inscrita no hexágono) e não tridimensional (inscrita na esfera)?

Bati à porta da química e vi quanto fica por dizer sobre este assunto antes que conheçamos as causas. Gostaria antes de ouvir o que pensais, meu senhor cheio de engenho, do que desgastar-me numa discussão mais profunda.

Nihil sequitur
Finis⁽¹⁶⁾

Notas

1. As citações desta obra são traduzidas por mim a partir da edição bilingue (Latim-Inglês) *The Six-Cornered Snow Flake, a New Year's Gift* by Johannes Kepler, Paul Dry Books, Philadelphia, USA, 2000.
2. A ponte Carlos, cuja construção foi iniciada em 1357 por ordem de Carlos IV e que atravessa o rio Moldava em Praga.
3. Referência ao pagamento que o imperador frequentemente negligenciava.
4. Sobre a conjectura de Kepler pode ler também o artigo *Conjectura de Kepler demonstrada com amplo recurso aos*

- computadores!, de Eduardo Veloso, no número 49 da EeM, pp 22–23.
5. «Abstract. This article gives a proof of the classical honeycomb conjecture: any partition of the plane into regions of equal area has perimeter at least that of the regular hexagonal honeycomb tiling.», in Hales, 2002.
 6. «posso chamar-lhe quilha».
 7. Refere-se aqui Kepler ao dodecaedro rômbo.
 8. Esta densidade é a razão entre o volume total das esferas que preenchem um determinado espaço (por exemplo, um cubo) e o volume do espaço em causa (nesse caso, o cubo).
 9. *International Congress of Mathematicians* (ICM) é o maior congresso de matemática e é realizado de quatro em quatro anos pela União Internacional de Matemática. O primeiro congresso foi realizado em 1897, em Zurique e o mais recente em 2010, em Hyderabad, na Índia. A realização destes congressos apenas foi interrompida nos anos das duas guerras mundiais do século XX.
 10. O célebre problema das quatro cores, ou da coloração de um mapa no plano, só foi demonstrado em 1976. Ora, esta demonstração foi computacional e tem gerado discussão na comunidade matemática. Appel e Haken, usando a informática, estudaram 1476 casos distintos de regiões e provaram que qualquer outro mapa se reduz a um daqueles. Em 1994, simplificando a demonstração de Appel e Haken, Seymour, Robertson, Sanders e Thomas, reduziram o número de mapas distintos de 1476 para 633.
 11. *the head of the referee's panel*, no original.
 12. Sobre os problemas filosóficos e matemáticos que este tipo de demonstração levanta, ver, por exemplo, Tymoczko, T., *The four-color problem and its philosophical significance*, in T. Tymoczko (ed.) *New directions in the philosophy of mathematics*, Boston: Birkhäuser, 1986, pp. 243–266.
 13. Já não se trata aqui que o computador faça a demonstração por exaustão mas a verificação dos cálculos através da chamada ATP (Automated Theorem Proving).
 14. «The name <fyspeck> comes from matching the pattern /f.*p.*k/ against an English dictionary. FPK in turn is an acronym for «The Formal Proof of Kepler.» The term <fyspeck> can mean to *examine closely or in minute detail; or to scrutinize*. The term is thus quite appropriate for a project intended to scrutinize the minute details of a mathematical proof», in <http://code.google.com/p/fyspeck/>.
 15. cf. <http://www.nationmaster.com/encyclopedia/Kepler-conjecture#Background>.
 16. «Nada se segue. Fim», cf Kepler, J, op.cit., p. 112–113
- Por opção da autora, este artigo não obedece às regras do novo acordo ortográfico.

Referências

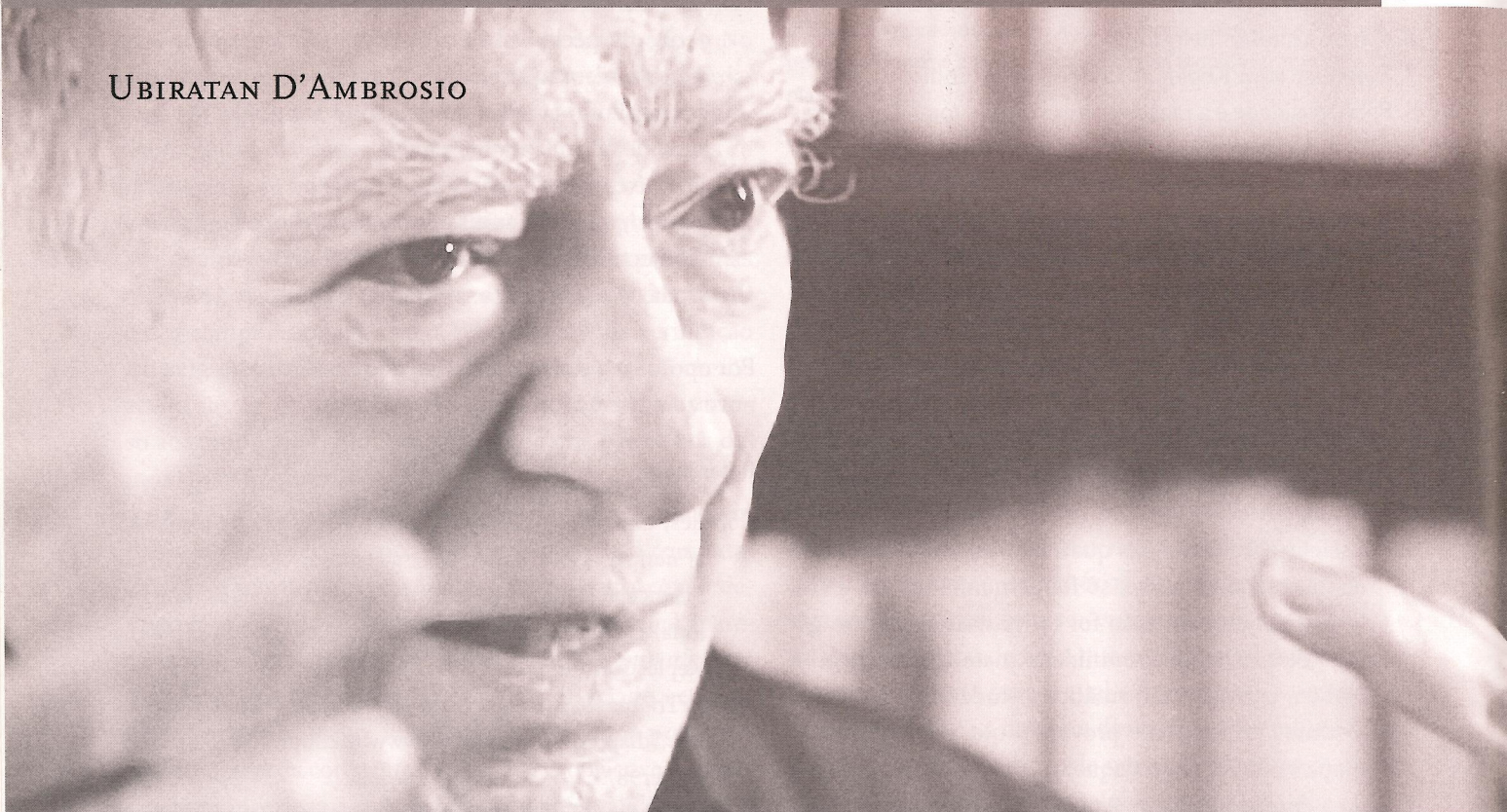
- Corrales, Capi (2010). *The use of mathematics to read the book of nature. About Kepler and snowflakes*, Contribution to Science, 6 (1): 27–34, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, p. 30, in <http://www.mat.ucm.es/~ccorrale/pdfs/KeplerCorrales.pdf>.
- Hales, Thomas C. (1998). *An overview of the Kepler Conjecture*, disponível em <http://www.math.pitt.edu/~thales/kepler98/>.
- Hales, Thomas C. (2002). *The Honeycomb Conjecture*. arXiv: math/9906042v2 [math.MG], Mon, 20 May 2002 16:47:49 GMT.
- Hales, Thomas C. (2005). *A proof of the Kepler conjecture*, *Annals of Mathematics*, 162, 1065–1185.
- Kepler, Johannes (2000). *The Six-Cornered Snow Flake, a New Year's Gift*. Philadelphia, USA: Paul Dry Books

LURDES FIGUEIRAL

ESCOLA SECUNDÁRIA ARTÍSTICA SOARES DOS REIS

Educação Matemática para Cidadania e Criatividade

UBIRATAN D'AMBROSIO



MOTIVAÇÃO PARA ESTE TRABALHO

Acredito que educadores matemáticos devem ser educadores conscientes de sua missão de preparar as futuras gerações para viverem num mundo com paz e dignidade humana para todos. Eu identifico dois aspectos essenciais para cumprir essa missão:

1. *Promover a cidadania plena*, que prepara o indivíduo para estar integrado e produtivo na sociedade, o que é obtido pela transmissão de valores e pelo esclarecimento de suas responsabilidades e de seus direitos na sociedade.
2. *Promover a manifestação da sua criatividade*, que leva ao progresso, e que é obtido pela ajuda às pessoas para realizarem seus potenciais e ascenderem ao mais alto nível de sua capacidade.

Parece-me uma visão equivocada considerar que o principal objetivo dos educadores matemáticos é simplesmente transmitir conteúdo matemático. Embora a matemática seja ensinada com a declarada intenção de que será útil à vida cotidiana, sem uma compreensão clara de como a matemática pode contribuir na consecução da paz e da dignidade humana, portanto para justiça social, os educadores matemáticos poderão falhar na sua importante responsabilidade ética. É essencial que o professor faça reflexões sobre a ética dos usos da matemática. Os educadores matemáticos não podem ignorar o fato que estudantes bem-sucedidos poderão se tornar engenheiros que projetam armas letais ou se dedicar a aprimorar, como economistas e financistas, as práticas do capitalismo brutal.

A MATEMÁTICA E O ESTADO DO MUNDO

Em 1976, em meu polêmico artigo sobre por que ensinar matemática, apresentado no *Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática*^[1] (ICME-3), em Karlsruhe, Alemanha, eu disse:

Vemos o processo educacional como a conjugação de aspectos socioeconômicos globais visando à melhoria da qualidade de vida. Nessa conjugação, intervém, do mesmo que no processo tecnológico, a filosofia à qual a sociedade subscreve, bem como as considerações acerca dos recursos humanos e materiais disponíveis. (D'Ambrosio 1976, p. 224)

Após quase vinte anos, em 1993, na décima quinta conferência anual da *Seção Norte-Americana de Psicologia da Educação Matemática*^[2] (PME-NA), em Pacific Grove, Califórnia, aprofundi essas ideias:

Embora a principal preocupação desse encontro seja a Educação Matemática, eu acredito que me será permitido subordinar meus comentários a um objetivo maior: a sobrevivência da civilização na Terra com dignidade para todos. Isso não é, meramente, um jargão. O mundo está ameaçado, não somente pelas agressões contra a natureza e o ambiente. Estamos, igualmente, preocupados com o aumento das violações da dignidade humana. Defrontamo-nos com mais e mais casos de vida sob o medo, o ódio e a violação dos princípios básicos, sobre os quais se assenta a civilização. (D'Ambrosio, 1993, p. 31).

Essa preocupação é foco do impactante editorial do eminente cientista britânico Martin Rees para um número recente da revista *Science*:

«As principais ameaças à existência sustentável da humanidade agora vêm de pessoas, não da natureza. Choques ecológicos que degradam irreversivelmente a biosfera podem ser desencadeados pelas exigências de um crescimento insustentável da população do mundo. A rápida disseminação de pandemias pode causar estragos nas megacidades do mundo em desenvolvimento. E as tensões políticas serão provavelmente decorrentes da escassez de recursos, agravada pelas alterações climáticas. Igualmente preocupantes são as ameaças imponderáveis resultantes das poderosas novas cyber- bio- e nanotecnologias, pois estamos entrando em uma era na qual alguns indivíduos poderiam, por meio de erro ou terror, provocar uma ruptura social irreversível.» (Rees 2013)

A importância da matemática como um conhecimento que pode ser orientado para evitar o colapso da civilização é indiscutível. É amplamente reconhecido pelos historiadores que a civilização mundial está ancorada na matemática. Ninguém discorda que a matemática é a espinha dorsal do mundo moderno por vários motivos: sua importância nas ciências e na tecnologia; sua fundamentação das teorias e práticas econômicas e financeiras; sua influência nas artes. Mas sobretudo por servir de base ao comportamento cotidiana-

no, regulamentando a ocupação de espaço e organizando a vivência do nosso dia-a-dia. Mikhail Gromov, um dos mais destacados matemáticos atuais, detentor do Prêmio Abel (que é o equivalente a um Prêmio Nobel de Matemática), fez, em uma entrevista de 2010, a seguinte afirmação:

«A Terra vai ficar sem os recursos básicos, e não podemos prever o que vai acontecer depois disso. Vamos ficar sem água, ar, solo, metais raros, para não falar do petróleo. Tudo vai, essencialmente, chegar ao fim dentro de cinquenta anos. O que vai acontecer depois disso? Estou com medo. Tudo pode ir bem se encontrarmos soluções, mas se não, então tudo pode chegar muito rapidamente ao fim! A Matemática poderá ajudar a resolver o problema, mas se não formos bem sucedidos, não haverá mais qualquer matemática, estou com medo!» (Mikhail Gromov, 2010).

Acredito que a preocupação de Gromov e de vários outros matemáticos de grande prestígio influenciaram a IMU/*International Mathematical Union* a criar o projeto *Mathematics of Planet Earth 2013*, imediatamente apoiado em Portugal pela Associação de Professores de Matemática e pela Sociedade Portuguesa de Matemática.^[3]

Uma visão crítica da História, não simplesmente um exercício de *mea culpa*, pode nos ajudar a reconhecer quando e onde a matemática torna-se tão próxima à sociedade, além de influenciar a ideia de progresso, que nos levou à atual Civilização Mundial. Tento entender as relações da Matemática com guerras e destruição, a fim de propor o que poderíamos chamar de Ética da Matemática, tema sintetizado em meu capítulo sobre *Nonkilling Mathematics* no livro *Toward a Nonkilling Paradigm* (D'Ambrosio 2009).

O PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA

Em vários de meus trabalhos tenho proposto um novo pensar em educação, que vai além das especificidades das disciplinas, que tem como foco a preocupação mais urgente de ensinar as várias disciplinas do currículo com objetivo de justiça social, entendida no sentido amplo de alcançar o bem-estar humano, que compreende os componentes básicos de uma vida com liberdade, com escolha de estilo de vida e de experiências espirituais, com boas relações sociais, segurança e tranquilidade, boa saúde e bem-estar físico. Esse novo pensar a educação com objetivos tão amplos, que vai além das especificidades das disciplinas, só pode se realizar se subordinarmos nossa ação pedagógica a uma ética maior ancorada em três vertentes: 1. respeito pelo outro com todas as suas diferenças; 2. solidariedade com o outro, reconhecendo sua essencialidade; 3. cooperação com o outro, reconhecendo que sozinhos não podemos dar conta de lidar com situações e problemas globais.

O Programa Etnomatemática é um programa de pesquisa em história e filosofia da matemática, com importantes implicações pedagógicas, que procura reconhecer relações entre o teor da disciplina e questões sociais, ambientais e mesmo espirituais maiores. A estratégia maior da pesquisa do Programa Etnomatemática é recuperar idéias matemáticas em narrativas orais e escritas, algumas esquecidas, perdidas ou reprimidas, e outras implícitas em contos folclóricos, na mitologia e na ficção.

Por exemplo, em (D'Ambrosio 2010) reflito sobre a narrativa do episódio do dilúvio ordenado por Enlil para eliminar a espécie humana, e mostro como o deus Ea ensina Uta-Napishtim a construir uma nau para salvar a ele, sua família e um casal de cada espécie. Essa narrativa é parte do *Épico de Gilgamesh*, provavelmente a obra literária mais antiga da qual se tem registro. Nesse episódio, as instruções do deus Ea estão descritas em linguagem matemática, o que pode ser considerado o mais antigo texto matemático da Antiguidade do Ocidente e Oriente Próximo. Fica muito claro que a matemática é uma linguagem necessária, inclusive adotada pelos deuses, para descrever, analisar e explicar situações e para resolver problemas do cotidiano. A construção da nau é retomada na Bíblia Judaica, no episódio da sobrevivência de Noé ao dilúvio universal. Analisando a história da matemática, passando por Pitágoras e chegando aos dias de hoje, são evidentes as relações de matemática com as religiões, de fato com a espiritualidade no sentido amplo. Essas relações são estudadas na cuidadosa pesquisa conduzida por cerca de dez anos pelo matemático Klaus G. Witz (2007), na qual investiga influências e expectativas religiosas de futuros pesquisadores matemáticos.

O Programa Etnomatemática é um programa de pesquisa que teve sua origem na busca de entender o fazer e o saber matemático de culturas não originados das europeias e de classes populares, muitas marginalizadas, numa mesma sociedade, onde classes diferentes se encontram e há uma dinâmica de encontro de saberes e fazeres dessas classes. Faz parte desse programa de pesquisa entender o intercultural a dinâmica da evolução de fazeres e saberes que se encontram, mas somos igualmente levados a questionar o intra-cultural, numa mesma sociedade. O intra-cultural é o objetivo de uma linha historiográfica que procura recuperar o conhecimento e comportamento da «invisible society», geralmente não disponível nos acervos acadêmicos.

A história nos mostra que em todos os tempos, a cultura do conquistador e do colonizador evoluem a partir da dinâmica do encontro. Muito antes do polêmico afro-centrismo, que polarizou historiadores da ciência e da matemática a partir da publicação do livro *Black Athena*, por Mi-

chael Polányi, historiadores da matemática já reconheciam que

«[A ciência helênica] teve seu nascimento na terra dos Faraós de onde os filósofos, que ali iam se instruir com os sacerdotes egípcios, trouxeram os princípios elementares.» (Boyer 1900; p.9)

Ainda mais explícita, agora fazendo inclusive um apelo para a educação, é a observação do destacado algebrista japonês Yukio Akizuki:

«As filosofias e as religiões do Oriente são de natureza muito distinta daquelas do Ocidente. Eu posso, portanto, imaginar que podem também existir diferentes modos de pensar mesmo em Matemática. Portanto, eu penso que não devemos nos limitar a aplicar diretamente os métodos que são atualmente considerados na Europa e na América [i.e. USA] como os melhores, mas deveríamos estudar Educação Matemática específica para a Ásia. Tal estudo poderia se mostrar de interesse e valor para o Ocidente como também para o Oriente.» (Akizuki 1960).

O encontro cultural assim reconhecido, que é essencial na evolução do conhecimento, não estava nas prioridades coloniais, bem como não foi contemplado como prioridade da era pós-colonial.

O Programa Etnomatemática não se esgota no entender o conhecimento [saber e fazer] matemático das culturas periféricas. Procura entender o ciclo da geração, organização intelectual, organização social e difusão desse conhecimento em todas as civilizações e culturas. No encontro de culturas há uma importante dinâmica de adaptação e reformulação acompanhando todo esse ciclo, inclusive a dinâmica cultural de encontros [de indivíduos e de grupos]. Uma exposição ampla do Programa Etnomatemática está na sequência de meus livros (D'Ambrosio 1990) e (D'Ambrosio 2001).

Por que Etnomatemática? Poderíamos falar em Etnociência, um campo muito intenso e fértil de estudos, ou mesmo Etnofilosofia, como é bem discutido pelo antropólogo Gary Urton (1997). A palavra etnomatemática sugere o estudo da matemática própria a uma etnia, o que é inadequado, pois matemática, como a entendemos na concepção acadêmica, é própria da civilização que se desenvolveu, desde a antiguidade, a partir da dinâmica de encontros culturais na região do Mar Mediterrâneo, com predomínio da Antiguidade Greco-Romana, continuada pelo Cristianismo e pelo Islamismo. Matemática, bem como as demais disciplinas, são categorias que resultam desses encontros. A categorização do conhecimento em disciplinas é um tema fascinante, o que é muito bem discutido por (Lloyd 2009), ao fazer estudos comparativos entre Europa e China.

Naturalmente, um processo semelhante ocorre em outras regiões do planeta, aproximadamente ao mesmo tempo. A linha do tempo da evolução das civilizações é, com

variações não muito grandes, a mesma. Mais uma evidência que as espécies *homo* evoluíram ao mesmo tempo, em todo o planeta, sempre em resposta a condições ambientais específicas e sujeitas à dinâmica dos encontros culturais. Discuto a essência da evolução das espécies *homo* como uma única espécie a partir da questão «o que é vida?» num trabalho recente (D'Ambrosio 2012).

O Programa Etnomatemática é esse programa extremamente ambicioso, em permanente evolução, e que depende da colaboração de várias especialidades. Uma síntese da base desse programa está num pequeno livro/guia que publiquei recentemente (D'Ambrosio 2011). Um dos resultados que se espera é entender a Matemática, bem como as demais disciplinas, e formular algumas propostas para educação.

A explicação que eu dou para adotar o nome Programa Etnomatemática para um enfoque tão abrangente aos estudos de história e de filosofia está na própria construção do termo. Insisto em esclarecer que minha concepção do Programa Etnomatemática difere de estudos de etnomatemática que visam identificar manifestações matemáticas nas culturas periféricas, tomando como referência a matemática ocidental. O Programa Etnomatemática tem como referências as categorias próprias de cada cultura, reconhecendo que é próprio da espécie humana a satisfação de pulsões de sobrevivência e de transcendência, absolutamente integrados como numa relação de simbiose (como discuto em D'Ambrosio 2012).

A satisfação do pulso integrado de sobrevivência e transcendência leva o ser humano a desenvolver modos, maneiras, estilos de explicar, de entender e aprender, e de lidar com a realidade perceptível.

O pensamento abstrato, próprio de cada indivíduo, é uma elaboração de representações da realidade e, graças à comunicação, é compartilhado, dando origem ao que chamamos cultura. Os instrumentos [materiais e intelectuais] essenciais para essa elaboração incluem, dentre outros, sistemas de observação, de comparação e classificação, de ordenação, de quantificação e mensuração, de inferência, e da linguagem, que permitem descrever e elaborar, comunicar e socializar essas categorias universais de conhecimento e comportamento humanos, próprios da racionalidade das espécies *homo*. O Programa Etnomatemática tem como objetivo entender essas categorias em distintos ambientes.

A exposição acima sintetiza a motivação teórica que serve de base a um programa de pesquisa sobre a geração, organização intelectual, organização social e difusão do conhecimento. Na linguagem acadêmica, poder-se-ia dizer que se trata de um programa interdisciplinar, abarcando o que

constitui o domínio das chamadas ciências da cognição, da epistemologia, da história, da sociologia e da difusão.

O Programa Etnomatemática assume que na sua aventura enquanto espécie planetária, o homem (espécie *homo sapiens sapiens*), bem como as demais espécies que a precederam, os vários homínidos reconhecidos desde há 5 ou 6 milhões de anos antes do presente, tem seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitem entender e lidar com fatos e fenômenos próprios do contexto natural, social e cultural, explicar esses fatos e fenômenos e dar resposta a problemas e situações distintas que se apresentam no dia-a-dia. Em outros termos, de sobreviver, dando essas respostas, mas também de ir além da sobrevivência, isto é, de transcender essas respostas na busca de explicações para elas e para fatos e fenômenos em geral.

Sobreviver e transcender recorre a maneiras, modos, técnicas e mesmo artes para explicar, conhecer, entender, lidar com e conviver com a realidade natural e sociocultural na qual ele, homem, está inserido.

A palavra etnomatemática não é nova. Ela aparece, desde os primeiros anos do século XX, assim como aparecem etnobotânica, etnomusicologia e mesmo etnopsiquiatria, sempre em trabalhos de natureza etnográfica, pesquisa das populações indígenas, e também com vistas a aplicações no ensino dessas populações. Essa utilização da palavra etnomatemática, muito a gosto de antropólogos, se refere ao que é identificado como «matemática de diferentes culturas». É óbvio que tal conceituação é inapropriada. Matemática é uma categoria de conhecimento típica das civilizações que se desenvolveram a partir da Antiguidade Grega. Outras civilizações não desenvolveram matemática. Desenvolveram, sim, estilos de observar, de classificar, de ordenar, de quantificar, de mensurar, de inferir, que são categorias universais de conhecimento e comportamento humanos, próprios da racionalidade das espécies *homo*, todas descritas e elaboradas pela linguagem. Minha conceituação da palavra etnomatemática como etno+matemá+tica é, de fato, um neologismo.

Naturalmente, em todas as culturas e em todos os tempos, o conhecimento é gerado por indivíduos e povos que têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido técnicas de reflexão, de observação, e habilidades (artes, técnicas, *techné* ≈ ticas) para explicar, entender, conhecer, aprender para saber e fazer como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência (≈ *matemá*), em ambientes naturais, sociais e culturais mais diversos (≈ *etnos*). Desenvolveram, simultaneamente, os instrumentos teóricos associados a essas técnicas e habilidades. Daí chamarmos o exposto acima de Programa Etnomatemática.

O nome sugere o corpus de conhecimento reconhecido academicamente como Matemática. De fato, em todas as culturas encontramos manifestações relacionadas e muitas vezes coincidentes com o que hoje se chama Matemática, como por exemplo processos de observação, de classificação, de ordenação, de quantificação, de mensuração, de inferência, geralmente mescladas ou dificilmente distinguíveis entre si, e muitas vezes direcionados a áreas (disciplinas) que na cultura acadêmica chamamos Arte, Religião, Música, Técnicas, Ciências. Em todos os tempos e em todas as culturas, Matemática, Artes, Religião, Música, Técnicas, Ciências foram desenvolvidas, a partir de representações da realidade sensível, com a finalidade de explicar, de conhecer, de aprender, de saber/fazer e de prever o futuro (artes divinatórias). Todas aparecem, num primeiro estágio da história da humanidade e da vida de cada um de nós, como formas de conhecimento indistinguíveis, na verdade mescladas. Devo esclarecer que quando falo em representações da realidade sensível, vou muito além do que é perceptível pelos sentidos. Incluo o imaginário, fantasias e sonhos, e uma realidade própria do esquizóide. É na realidade, na dimensão do indivíduo, que ele gera as suas representações.

O PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA E A EDUCAÇÃO ATUAL

Estamos vivendo um período em que os meios de captar informação e o processamento da informação de cada indivíduo encontram nas comunicações e na informática instrumentos auxiliares de alcance inimaginável em outros tempos. A interação entre indivíduos também encontra, na teleinformática, um grande potencial, ainda difícil de se aquilatar, de gerar ações comuns. Nota-se em alguns casos o predomínio de uma forma sobre outra, algumas vezes a substituição de uma forma por outra e mesmo a supressão e a eliminação total de alguma forma, mas na maioria dos casos o resultado é a geração de novas formas culturais, identificadas com a modernidade. Ainda dominadas pelas tensões emocionais, as relações entre indivíduos de uma mesma cultura (intraculturais) e, sobretudo, as relações entre indivíduos de culturas distintas (interculturais) representam o potencial criativo da espécie. Assim como a biodiversidade representa o caminho para o surgimento de novas espécies, na diversidade cultural reside o potencial criativo da humanidade. As consequências dessas mudanças na formação de novas gerações exige reconceituar a educação. (D'Ambrosio 2012a).

A pluralidade dos meios de comunicação de massa, facilitada pelos transportes, levou as relações interculturais a dimensões verdadeiramente planetárias. Inicia-se assim uma nova era, que abre enormes possibilidades de comportamento e de conhecimento planetários, com resultados sem precedentes para o entendimento e harmonia de toda a humanidade.

Tem havido o reconhecimento da importância das relações interculturais. Mas lamentavelmente ainda há relutância no reconhecimento das relações intraculturais na educação. Ainda se insiste em colocar crianças em anos de escolaridade de acordo com a idade, em oferecer o mesmo currículo num mesmo ano, chegando ao absurdo de se propor currículos nacionais. E ainda ao maior absurdo de se avaliar grupos de indivíduos com testes padronizados. Trata-se efetivamente de uma tentativa de pasteurizar as novas gerações!

Não se pode pretender a homogeneização biológica ou cultural da espécie, mas sim a convivência harmoniosa dos diferentes, através de uma ética de respeito mútuo, de solidariedade e de cooperação.

Naturalmente, sempre existiram maneiras diferentes de explicar e de entender, de lidar e conviver com a realidade. Agora, graças aos novos meios de comunicação e transporte, essas diferenças serão notadas com maior evidência, criando a necessidade de um comportamento que transcenda mesmo as novas formas culturais. Eventualmente, o tão desejado livre arbítrio, próprio de ser [verbo] humano, poderá se manifestar num modelo de transculturalidade que permitirá que cada ser [substantivo] humano atinja a sua plenitude.

Um modelo adequado para se facilitar esse novo estágio na evolução da nossa espécie é a chamada Educação Multicultural, que vem se impondo nos sistemas educacionais de todo o mundo.

Dentre os vários questionamentos que levam à preservação de identidades nacionais, muitas se referem ao conceito de conhecimento e às práticas associadas a ele. Talvez a mais importante a destacar seja a percepção de uma dicotomia entre saber e fazer, própria dos paradigmas da ciência moderna iniciada por Galileu, Descartes, Newton e outros, e que prevalece no mundo chamado «civilizado».

A ciência moderna surgiu, praticamente, ao mesmo tempo em que se deram as grandes navegações, que resultaram na conquista e na colonização, e na imposição do cristianismo a todo o planeta. A ciência moderna, originada das culturas mediterrâneas e substrato da eficiente e fascinante tecnologia moderna, foi logo identificada como pro-

tótipo de uma forma de conhecimento racional. Definiram-se, assim, a partir das nações centrais, conceituações estruturadas e dicotômicas do saber [conhecimento] e do fazer [habilidades].

É fundamental o reconhecimento de uma variedade de estilos de aprendizagem, que implica o desenvolvimento de novas metodologias, e a subordinação dos conteúdos programáticos à diversidade cultural.

Essencialmente, essas considerações determinam uma enorme flexibilidade tanto na seleção de conteúdos quanto na metodologia.

A disciplina denominada Matemática é, na verdade, uma Etnomatemática que se originou e se desenvolveu na Europa, tendo recebido importantes contribuições das civilizações do Oriente e da África, e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII. A partir de então, nessa forma estruturada, foi levada e imposta a todo o mundo. Hoje, essa matemática adquire um caráter de universalidade, sobretudo devido ao predomínio da ciência e tecnologia modernas, que foram desenvolvidas a partir do século XVII na Europa.

A DIMENSÃO POLÍTICA DO PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA

Naturalmente, há um importante componente político nessas reflexões. Apesar de muitos dizerem que isso é jargão ultrapassado de esquerda, é claro que continuam a existir as classes dominantes e subordinadas, tanto nos países centrais quanto nos periféricos.

Faz sentido, portanto, falarmos de uma «matemática dominante», que é um instrumento desenvolvido nos países centrais e muitas vezes utilizado como instrumento de dominação. Essa matemática e os que a dominam se apresentam com postura de superioridade, com o poder de deslocar e mesmo eliminar a «matemática do dia-a-dia». O mesmo se dá com outras formas culturais. Particularmente interessantes são os estudos de Basil Bernstein sobre a linguagem. São conhecidas inúmeras situações ligadas ao comportamento, à medicina, à arte e à religião. Todas essas manifestações são referidas como cultura popular.

A cultura popular, embora seja viva e praticada, é muitas vezes ignorada, menosprezada, rejeitada, reprimida e, certamente, diminuída. Isto tem como efeito desencorajar e até eliminar o povo como produtor e mesmo como entidade cultural.

Isso não é menos verdade com a Matemática. Em particular na Geometria e na Aritmética se notam violentas con-

dições. Por exemplo, a geometria do povo, dos balões e dos papagaios, é colorida. A geometria teórica, desde sua origem grega, eliminou a cor. Muitos leitores a essa altura estarão confusos. Estarão dizendo: mas o que isso tem a ver com Matemática? Papagaios e balões? Cores?

Tem tudo a ver, pois são justamente essas as primeiras e mais notáveis experiências geométricas. E, todos concordam, que a reaproximação de Arte e Geometria não pode ser alcançada sem o mediador cor. Na Aritmética, o atributo do número na quantificação é essencial. Duas laranjas e dois cavalos são «dois» distintos. Chegar ao «dois» sem qualificativo, abstrato, assim como à Geometria sem cores, é o ponto crítico na elaboração de uma Matemática teórica.

O cuidado com a passagem do concreto para o abstrato é fundamental na Educação. Trabalhar adequadamente esse momento talvez sintetize tudo que há de importante nos programas de Matemática Elementar. O resto do que constitui os programas são técnicas que pouco a pouco vão se tornando interessantes e necessárias para uns, e menos interessantes e necessárias para outros.

O que justifica o papel central das idéias matemáticas em todas as civilizações [etnomatemáticas] é o fato de ela fornecer os instrumentos intelectuais para lidar com situações novas e definir estratégias de ação. Portanto a etnomatemática do indígena serve, é eficiente e adequada para as coisas daquele contexto cultural, naquela sociedade. Não há porque substituí-la. A etnomatemática do branco serve para outras coisas, igualmente muito importantes, propostas pela sociedade moderna e não há como ignorá-la. Pretender que uma seja mais eficiente, mais rigorosa, enfim melhor que a outra é, se removida do contexto, uma questão falsa e falsificadora.

O domínio de duas etnomatemáticas, e possivelmente de outras, oferece maiores possibilidades de explicações, de entendimentos, de manejo de situações novas, de resolução de problemas. É exatamente assim que se faz boa pesquisa matemática — e na verdade pesquisa em qualquer outro campo do conhecimento. O acesso a um maior número de instrumentos e de técnicas intelectuais dá, quando devidamente contextualizados, muito maior capacidade de enfrentar situações e problemas novos, de modelar adequadamente uma situação real para, com esses instrumentos, chegar a uma possível solução ou curso de ação.

Isto é aprendizagem por excelência, que é a capacidade de explicar, de apreender e compreender, de enfrentar, criticamente, situações novas. Aprender não é o mero domínio de técnicas, habilidades e nem a memorização de algumas explicações e teorias.

A adoção de uma nova postura educacional é a busca de um novo paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino → aprendizagem, que é baseado numa relação obsoleta de causa → efeito.

Procura-se uma educação que estimule o desenvolvimento de criatividade desinibida, conduzindo a novas formas de relações interculturais e intraculturais. Essas relações caracterizam a educação de massas e proporcionam o espaço adequado para preservar a diversidade e eliminar a desigualdade discriminatória, dando origem a uma nova organização da sociedade. Fazer da Matemática uma disciplina que preserve a diversidade e elimine a desigualdade discriminatória é a proposta maior de uma Matemática Humanística. A Etnomatemática tem essa característica.

Notas

- 1 *Third International Congress of Mathematical Education.*
- 2 *North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education.*
- 3 Mathematics of Planet Earth 2013, *Educação e Matemática*, Setembro/Outubro 2012, pp- 26–31.

Referências

- Akizuki 1960: Yukio Akizuki: Proposal to I.C.M.I., *L'Enseignement mathématique*, t.V, fasc.4, 1960; pp. 288–289.
- Boyer 1900: J.Boyer: *Histoire des Mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1900; p. 9.
- D'Ambrosio 1976: Ubiratan D'Ambrosio: «Report of the B-3 Section on 'Overall Goals and Objectives for Mathematics Teaching (Why Do We Teach Mathematics?)» in *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education*, edited by Hermann Athen and Heinz Künle, pp. 221–30. Karlsruhe, Germany: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1976.
- D'Ambrosio 1990: Ubiratan D'Ambrosio: *Etnomatemática. Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer*, Editora Ática, São Paulo, 1990.
- D'Ambrosio 1993: Ubiratan D'Ambrosio: Diversity and Equity: An Ethical Behavior. in *Proceedings of the 15th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, edited by Joanne R. Becker and Barbara J. Pence, pp. 31–37. San José, Calif.: The Center for Mathematics and Computer Science, San José State University, 1993. (ERIC No. ED372917)
- D'Ambrosio 2001: Ubiratan D'Ambrosio: *Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade*, Autêntica Editora, Belo Horizonte, 2001.
- D'Ambrosio 2009: Ubiratan D'Ambrosio: *Nonkilling Mathematics, Toward a Nonkilling Paradigm*, edited by Joám Evans Pim, Center for Global Nonkilling, Honolulu, 2009; pp.239–268 (www.nonkilling.org).
- D'Ambrosio 2010: Ubiratan D'Ambrosio: From Ea, through Pythagoras, to Avatar: Different Setting for Mathematics, *Mathematics in Different Settings*, Pinto, M.M.F. & Kawasaki, T.F. (eds.) *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education/PME* (04 volumes), Belo Horizonte, MG, Brazil, 2010; vol. 1 pp. 1–20.
- D'Ambrosio 2011: Ubiratan D'Ambrosio: *Uma Síntese Sociocultural da História da Matemática*, PROEM Editora, São Paulo, 2011
- D'Ambrosio 2012: Ubiratan D'Ambrosio: The Program Ethnomathematics: the theoretical basis and dynamics of cultural encounters, *Cosmópolis. A Review of Cosmopolitics* (Haute École de Bruxelles), 2012, n° 3–4, pp.13–41.
- D'Ambrosio 2012a : Ubiratan D'Ambrosio: *Educação para uma Sociedade em Transição*, EUFRN, Natal, 2012.
- Lloyd 2009: G. E. R. Lloyd: *Disciplines in the Making: Cross-cultural Perspectives on Elites, Learning, and Innovation*. Oxford/ New York: Oxford University Press, 2009.
- Rees 2013: Martin Rees: Editorial, *Science*, 08 March 2013, p. 1123.
- Urton 1997: Gary Urton: *The Social Life of Numbers. A Quechua Ontology of Numbers and Philosophy of Arithmetic*, University of Texas Press, Austin, 1997.
- Witz 2007: Klaus G. Witz: *Spiritual aspirations connected with mathematics: the experience of American University students*, Lewiston: The Edwin Mellen Press, 2007.

UBIRATAN D'AMBROSIO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

UMA FOLHA DE CADERNO DIÁRIO DE MATEMÁTICA

ALGUMAS QUESTÕES

ISABEL CRISTINA DIAS

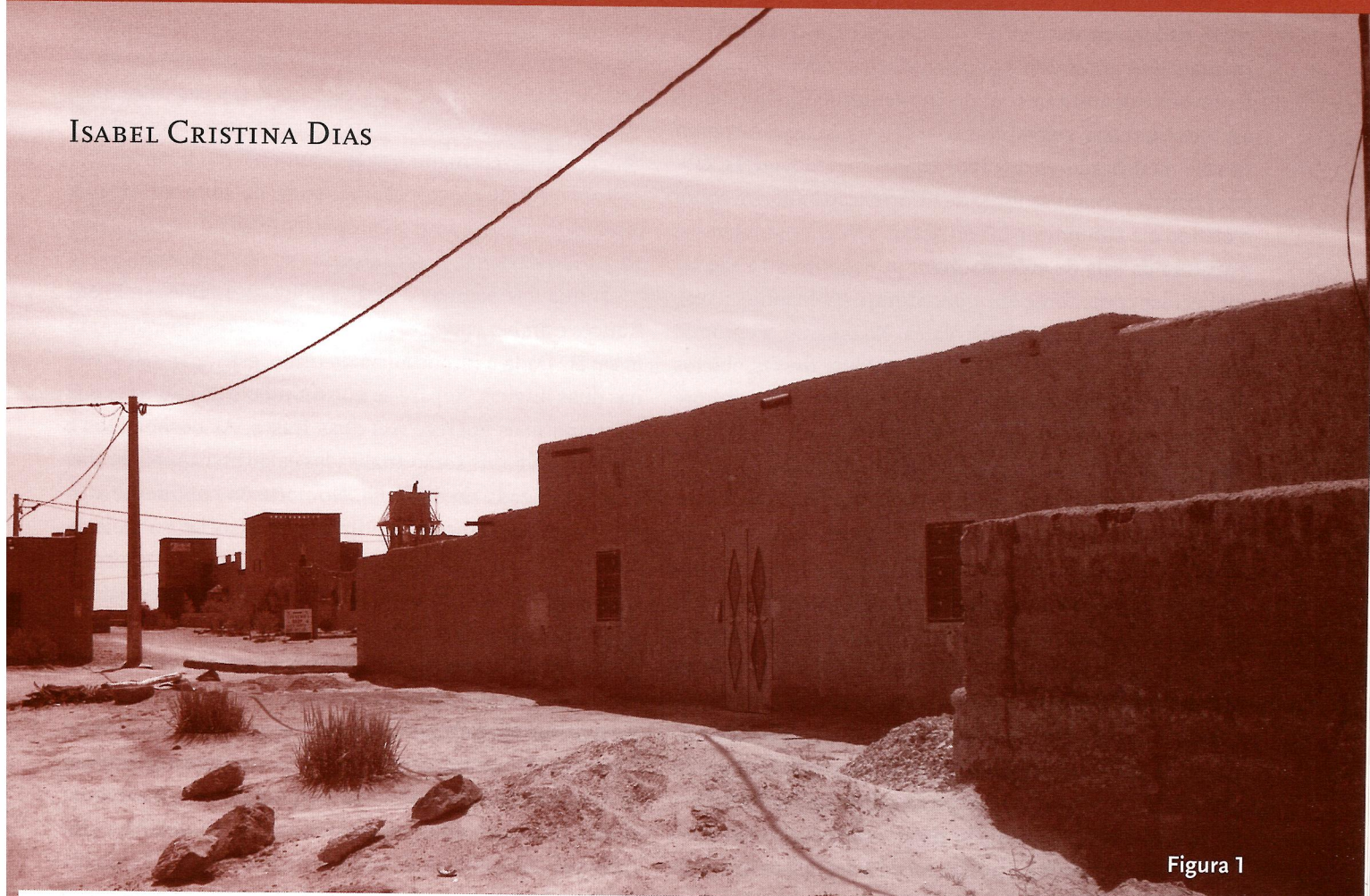


Figura 1

Este artigo tem por base a descrição de um artefacto matemático. Um artefacto que faz parte de uma breve história. Uma história de cunho pessoal contada sob uma perspectiva profissional e enquadrada cultural e historicamente. Artefacto e história são o pretexto para discutir ideias e colocar questões sobre a componente cultural da matemática e da matemática escolar.

Há cerca de uma década, na província de Zagora (Figura 1), a poucos quilómetros da fronteira com a Argélia, encontrei o artefacto que irei descrever e analisar. Caminhava no deserto de Marrocos, com um grupo de portugueses, dois guias locais, um cozinheiro e três cameleiros, quando chegámos a um luxuriante oásis onde existe uma pequena

aldeia de ruas de terra batida e casas de adobe. Caminhávamos em grupo mas não éramos, de todo, um grupo uniforme. Alguns já tinham subido o Monte Kilimanjaro, outros conheciam os caminhos da Patagónia e do Nepal, outros — aventureiros ou inconscientes — tinham feito umas caminhadas ao fim de semana e confiavam na força que emana da vontade de alcançar um objetivo: subir a grande duna de M'Hamid. Embora, como seria de esperar, me incluísse neste último grupo, no momento em que atravessávamos o oásis, terreno bastante mais fácil do que as dunas ou o deserto pedregoso, caminhava junto a alguns dos «especialistas». Um deles, um jovem recém-licenciado em geologia, ficou-me na memória. Não me esqueço do seu espan-

to quando, proferindo exclamações entusiasmadas, quase lhe arranquei das mãos um pedaço de papel que acabara de apanhar do chão à entrada de uma aldeia. Ao ver o meu entusiasmo, ofereceu-mo de imediato. Rasgado e coberto de pó do deserto, o papel era parte de uma folha de um caderno de matemática de um aluno do ensino médio⁽¹⁾. Surgiu agora a oportunidade de contar a história desse presente inesperado que sempre guardei cuidadosamente.

Na investigação em história da educação e, em particular, na história das disciplinas escolares, as fontes documentais têm assumido um papel nuclear como linhas referenciais estruturantes, como fronteiras delimitadoras de espaços e tempos, como vetores de discussão teórica e como fatores modificadores das abordagens metodológicas. Objetos banais tornam-se fonte de informação histórica sobre o ensino e a aprendizagem ou sobre o funcionamento e a estrutura da sala de aula, ganham protagonismo e são reconhecidos como fonte enriquecedora, e até incontornável, na história das disciplinas escolares. No entanto, a «própria materialidade tornou efêmera a existência desses objetos ou documentos e o carácter vulgar e diário quase sempre os desproveu de interesse para os seus possuidores e raramente lhes deu estatuto museológico» (Dias, 2006).

A investigadora Silvina Gvirtz (1997) considera o caderno diário uma forma privilegiada de registo e uma das fontes primárias mais importantes na tentativa de compreender o que se passa numa sala de aula. Num caderno diário se registam sumários, conteúdos transmitidos oralmente pelo professor, anotações registadas no quadro, tarefas realizadas pelo aluno, em suma, parte significativa de uma aula de qualquer disciplina escolar. No caso da história do ensino e aprendizagem da matemática, especificidades relativas à natureza, às metodologias e à didática da disciplina, dão aos cadernos diários dos alunos uma acentuada relevância como fonte de pesquisa. As variadas tarefas próprias da atividade matemática e, em geral, toda a atividade efetuada pelo aluno, constam do caderno diário. Não parece exagerado afirmar que a matemática escolar que «chegou» em cada momento aos alunos se pode vislumbrar com alguma clareza nas páginas dos cadernos.

Em paralelo com a pequena história de viagem acima contada, é útil visitar a história de um conceito que fornece uma adequada lente de observação para artefactos materiais de ensino. Em 1981, o crítico russo Mikhail Bakhtin utilizou, na análise de objetos documentais, uma ideia que já antes concetualizara para a linguística e para a literatura: *heteroglossia*, a presença de vozes variadas e opostas (ou complementares). Michel de Certeau (1987) ao referir-se a este conceito contribuiu para a sua divulgação e Peter Burke,

com um assinalável poder de integração, aplicou-o à história afirmando que a investigação histórica — em particular a história do ensino — tem caminhado «do ideal da Voz da História para aquele da heteroglossia» (Burke, 1992).

Várias vozes (a do aluno e a do docente mas também várias outras) *poderão ser escutadas* ao questionar um vulgar e singular objeto histórico, no presente caso uma folha de um caderno diário de matemática. A voz institucional está presente na própria existência de um caderno diário organizado, numa sequência de matérias estabelecidas no programa oficial de uma disciplina incluída no currículo e num sistema de ensino que regulam e padronizam. A voz da rotina é expressa pela sucessão de exercícios, por uma espécie de cadência inevitável em que o preenchimento das folhas de um caderno garante a aquisição por parte do aluno de saberes muitos discretos, quase sub-reptícios, e afinal, de um saber adquirido na escola mas que quase se pressupõe natural.

Numa das páginas da folha (Figura 2) pode ler-se em francês e árabe: *Equações do primeiro grau com uma incógnita em $\mathbb{R}$* . Dada a importância do título, este aparece escrito nas duas línguas. Repare-se que o símbolo do conjunto dos números reais aparece nas duas frases. As observações e notas que adiante serão analisadas estão escritas em árabe, língua utilizada no dia-a-dia. No norte do continente africano, a língua francesa continua a ser associada à ideia de cultura e, durante décadas, os manuais escolares eram escritos em francês. Atualmente, tal já não acontece, sendo escritos obrigatoriamente em árabe.

De salientar que, para milhões de crianças e jovens marroquinos, a língua materna, utilizada no dia-a-dia em família e na comunidade, não é árabe mas amazigh⁽²⁾. O árabe e o francês que aprendem na escola — e em que aprendem os restantes conteúdos — são segunda e terceira língua. Assim sendo, a linguagem matemática era o quarto «idioma» que o dono daquele caderno diário deveria dominar.

Na primeira frase da primeira coluna, escrita em árabe (a verde no original), a expressão *modo de resolver equações do primeiro grau* titula as propriedades algébricas frequentemente designadas por «princípios de equivalência». Estas estão em destaque, no caderno diário, como primeiro conhecimento a ser lecionado no capítulo das equações de primeiro grau. Abaixo, a tinta vermelha no original, surge uma enumeração em que as alíneas 1), 2) e 3) aparecem como (1, (2 e (3. Como é natural, estão escritas da direita para a esquerda, embora a escrita simbólica matemática apareça da esquerda para a direita. Por exemplo, $ax + b = 0$ se fosse escrito da direita para a esquerda surgiria como $0 = b + xa$. A padronização universal da linguagem algébrica é aqui muito evidente.

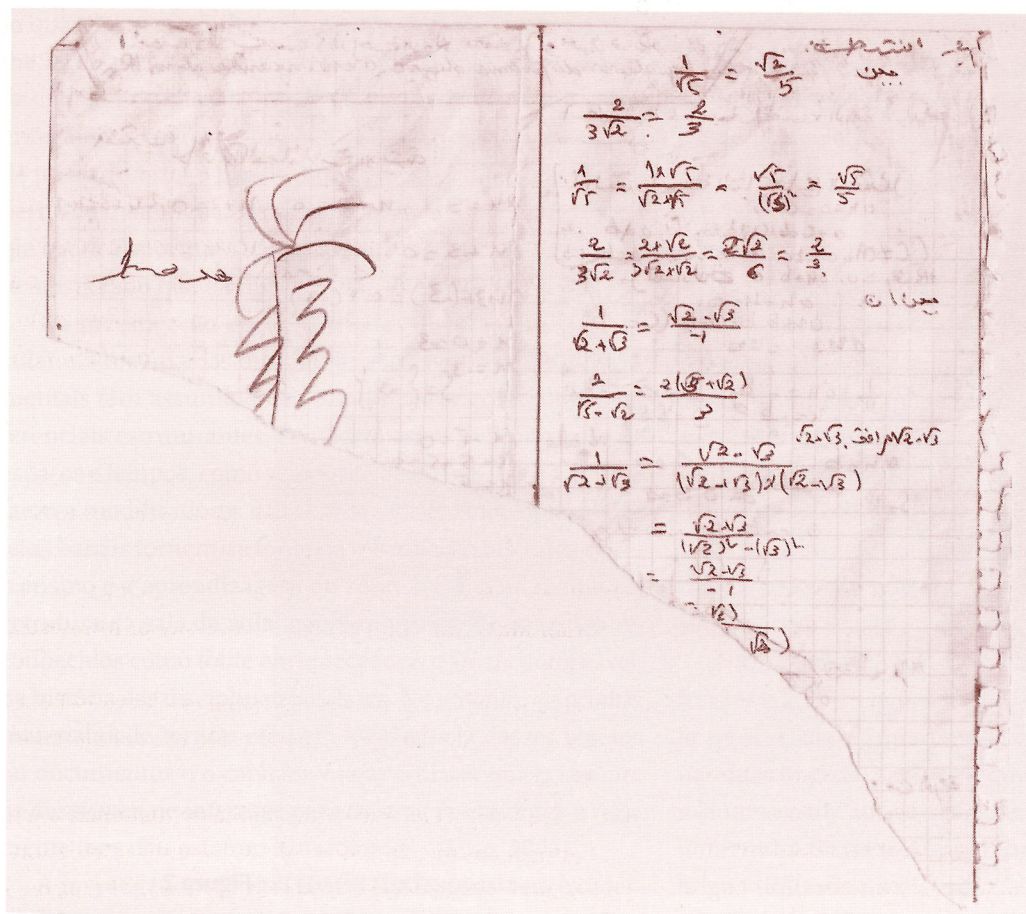


Figura 3

O artefacto em análise é indissociável, na realidade e neste texto, do enquadramento histórico, social, político, educativo e institucional pelo que careceria de uma análise muito mais detalhada que abordasse todos esses pontos de vista. Atendendo à finalidade deste artigo bem como à sua dimensão, tal não é possível. Não obstante, sob o ponto de vista da educação matemática, com a contribuição de uma perspetiva etnomatemática e tendo como referencial principal a história do ensino da matemática, algumas questões podem ser colocadas. Entre muitas outras possíveis, ficam como exemplo:

- 1) Deverá ou não haver um corpo comum de conhecimentos matemáticos que seja ensinado e aprendido pelos alunos do ensino básico e médio de todo o mundo?
- 2) Esse conjunto de saberes matemáticos, globalmente uniformizado, pode justificar-se por ser a garantia de que todos tenham as mesmas oportunidades no prosseguimento de estudos em qualquer país?
- 3) Os saberes matemáticos escolares devem ser os mesmos em contextos, cultural, social, económica e politicamente, tão diferentes?

- 4) Existe uma matemática para todos, existem matemáticas para todos ou existem matemáticas consoante as necessidades de cada um?
- 5) Independentemente das características dos alunos e do contexto em que se inserem, a didática, as metodologias, as estratégias em sala de aula devem ser as mesmas?
- 6) Como explicar o facto de, décadas após a sua independência, os programas da disciplina de Matemática de inúmeros países que foram colonizados até meados do séc. XX, ainda serem praticamente iguais aos dos países europeus?
- 7) Os programas oficiais, pensados para o hemisfério norte ocidental e para o hemisfério sul anglófono e aplicados em locais radicalmente diferentes, são ou não alterados - ao nível da prática letiva diária dos docentes e alunos - pelas componentes locais específicas?

As anteriores interrogações estão inevitavelmente ligadas a aspetos estruturantes que deveriam estar no centro de qualquer análise do ensino e da aprendizagem da(s)

matemática(s) e na base de qualquer discussão curricular acerca da disciplina escolar: Que Matemática ensinar na escola? Para quê aprender matemática? Quem deve aprender determinados saberes matemáticos? E tal discussão é tão necessária numa aldeia do sul marroquino como numa vila andina ou numa periferia urbana europeia.

Este texto não ficaria completo sem a referência a uma peculiar imprecisão que nele consta. Durante aqueles quatro dias de caminhada, para além dos dois guias de deserto, Ben Youssuf e Akmed, e do fantástico cozinheiro berbere, o grupo integrou três habitantes locais, os ditos cameleiros, que cuidaram dos animais que transportaram as nossas bagagens de viajantes. Sendo que em África não há camelos (só na Península Arábica e na Ásia), sendo que os magrebins designam cada um daqueles animais por dromedares, em francês, e por djamal, em árabe (aqui em escrita fonética), fica por precisar qual a correta designação, em língua portuguesa, de quem tratou dos dromedários que nos apoiaram naquela aventura ...

Agradecimento: Não é a primeira vez que, em páginas publicadas pela A.P.M. agradeço ao Sheik David Munir, imã da Mesquita Central. Ao longo de mais de uma década, tenho recorrido à sua preciosa ajuda na leitura do árabe. O meu agradecimento é tanto maior quanto, apesar dos inúmeros afazeres inerentes à condução da Comunidade Islâmica de Lisboa, é seu apanágio uma permanente disponibilidade para colaborar e ajudar.

Notas

(1) Sobre a educação em Marrocos consultar:

— Documento da UNESCO em <http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002164/216443f.pdf>

— Sítio do *Centro de Recursos para la atención a la diversidad cultural en educación*: <https://www.educacion.gob.es/creade/IrASubSeccionFront.do?id=303>

(2) *Amazigh*, *Imazighen* ou *Berberes* são os nomes dados ao grupo étnico autóctone da região compreendida entre o Atlântico e o rio Nilo e entre o Mediterrâneo e o rio Níger; os mesmos vocábulos designam a língua correspondente. Hoje em dia, a maioria dos que falam *Amazigh* — entre 25 e 35 milhões de berberes — vivem na Argélia e em Marrocos mas existem grupos de falantes na Tunísia, Mauritânia, Líbia, Mali e Níger. O termo *Imazighen* (plural de *Amazigh*) pode significar «povo livre» ou «homens nobres e livres», devendo ter tido origem no final do Império Romano. O termo *Berberes* espalhou-se após a chegada dos Vândalos ao império. Algum tempo depois, historiadores mu-

gulmanos mencionam-no. A identidade *Amazigh* engloba mais do que a língua e a etnicidade, inclui a história e a geografia do Norte de África. A presença da língua árabe em toda a região deve-se à expansão árabe após a Hégira e ao disseminar do Islamismo. Línguas como o francês e o espanhol, herdadas da ocupação europeia, são usadas pelos Imazighen instruídos, geralmente em contextos formais, nos negócios e no ensino secundário e superior. Para mais informação, consultar o sítio do *Institut royal de la culture amazigh* <http://www.ircam.ma/>.

Bibliografia

Burke, P. (1992). *A escrita da história. Novas perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP.

Certeau, M. (1986) *Heterologies: Discourse on the Other*. Trans. Brian Massumi. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Chervel, A. (1988) L'Histoire des disciplines scolaires — Réflexions sur un domaine de recherche. *Histoire de l'éducation*, 38, pp. 59–119.

Dias, I. C. (2006). O ensino da disciplina de matemática em Portugal em meados do século XX: a utilização de fontes diversificadas de pesquisa. In *Anais do VI Congresso Luso-Brasileiro de História da Educação*. Uberlândia, Minas Gerais, Brasil: EDUFU.

Frankenstein, M. & Powell, A. (Eds.). (1996). *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education*. New York: Suny.

Julia, D. (1995). La culture scolaire comme objet historique. In A. Nóvoa, M. Depaepe, & E. V. Johanningmeier (Eds.). *The colonial experience in education. Historical issues and perspectives. Paedagogica Historica, supplementary series*, I, 353–382.

Nóvoa, A. (1998). L'Histoire et l'histoire de l'éducation (chap. I). *Histoire et Comparaison — Essais sur l'Éducation* (pp. 13–50). Lisboa: Educa.

Gvirtz, S. (1997). *Del curriculum prescripto al curriculum enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Sharpe, J. (1992). A história vista de baixo. In P. Burke (Org.). *A escrita da história. Novas perspectivas* (pp. 39–62). São Paulo: Editora UNESP.

ISABEL CRISTINA DIAS

ESCOLA SECUNDÁRIA JOSÉ CARDOSO PIRES,
STO. ANTÓNIO DOS CAVALEIROS

GEOMETRICAMENTE FALANDO: RAÍZES, QUADRADOS E NÚMEROS

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi
(Bagdad, c. 790-?, c. 850). Imagem de um selo
da antiga União Soviética



Esta paixão pela ciência, com a qual Deus distinguiu o Imã al-Ma'mun, o Comandante dos Crentes, (...) essa simpatia e condescendência que ele mostra pelos que aprendem, essa prontidão com a qual ele os protege e apoia no iluminar das obscuridades e na remoção das dificuldades, encorajaram-me a compor um pequeno trabalho sobre o cálculo através de completude e simplificação, resumindo-o ao que é mais fácil e mais útil em aritmética, tal como o que os homens requerem constantemente em casos de heranças, doações, partilhas, leis e comércio, e em todos os seus negócios uns com os outros, ou onde a medida de campos, a construção de canais, o cálculo geométrico (...)

(Excerto traduzido a partir de *The Algebra of Muhammed ben Musa* de Frederic Rosen, Londres, 1831)

Na sua mais conhecida e importante obra *al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabalah* Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi salientava que «o que as pessoas geralmente querem ao calcular... é um número», pelo que o livro deveria ser um manual de resolução de equações, com vista à obtenção de um resultado. Apesar do seu esforço de escrever um manual prático e não teórico e de o tipo de descrição dos procedimentos ser semelhante ao dos babilónios, a influência da matemática grega na Casa da Sabedoria de Bagdad «obrigou-o» a fornecer provas geométricas para os seus métodos algébricos.

As tarefas que vais realizar ilustram um dos raciocínios geométricos utilizados por al-Khwarizmi.

1. Recorta os retângulos desenhados na folha anexa 1.
2. Calcula a área de cada um desses retângulos e regista o seu valor nas respetivas figuras.
3. Com o quadrado maior e os 4 retângulos não quadrados constrói uma «cruz» de modo que lados adjacentes tenham o mesmo comprimento.
4. Escreve uma expressão que represente a área da figura que construístes.
5. Supõe que a figura tem 39 unidades quadradas de área. Traduz este facto através de uma equação na incógnita x .
6. Completa a «cruz» com as restantes figuras de modo a obteres um quadrado.
Qual o valor da área deste quadrado? E quanto mede o seu lado?
7. Exprime a área do quadrado «final» através de uma expressão na variável x .
8. Qual é o valor de x ? Explica o teu raciocínio.
9. Verifica que o valor de x que obtiveste é uma solução da equação que escreveste na tarefa 5.
10. Utiliza o mesmo raciocínio e as figuras da folha anexa 2 para resolveres a equação $x^2 + 16x = 36$.

Notas e sugestões:

- A obra de al-Khwarizmi foi primeiramente traduzida para o latim com o título *Ludus Algebrae et Almucrabalaque*. Em 1140, Robert de Chester traduziu o título árabe como *Liber Algebrae et Almucabala*. A expansão árabe na Península Ibérica levou a palavra *al-jabr* para a Espanha. Um algebrista passou a ser um restaurador ou alguém que consertava ossos quebrados. Por isso, Miguel de Cervantes em *Dom Quixote* (II, cap. 15) refere «um algebrista que atendeu ao infeliz Sansão». Na época podia ver-se à porta de uma barbearia as palavras «Algebrista y Sangrador». No século XVI, em inglês, o título surge como *Algiebar and Almachabel*, sendo mais tarde encurtado para *Algebra*. A palavra é usada pela primeira vez com o seu sentido matemático atual em 1551, por Robert Recorde no livro *The Pathwaie to Knowledge* e, muito mais tarde, em 1849, Augustus de Morgan escreveria *Trigonometry and Double Algebra*.
- A palavra *al-jabr* significa restauração, complementação, transposição, completude ou reunião de partes quebradas. A palavra *wa-l-muqabalah* significa simplificação, redução, oposição.
- O título *al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabalah* pode ser traduzido por *compêndio do cálculo por completude e simplificação* ou por *livro sumário sobre cálculos por transposição e redução*.
- Cerca de 750 anos depois da morte do grande matemático de Bagdad, o estudioso persa Beha-Eddin Mohammed Ben al-Husain al-Aamouli escreveu: «o membro que é afetado por um sinal de menos será aumentado e o mesmo adicionado ao outro membro, isto sendo álgebra; os termos homogêneos e iguais serão então cancelados, isto sendo *al-muqabalah*». Estas palavras, incluídas na obra *Kholâsat Al-Hisâb* (Essência da Aritmética), fornecem uma boa descrição dos dois termos.

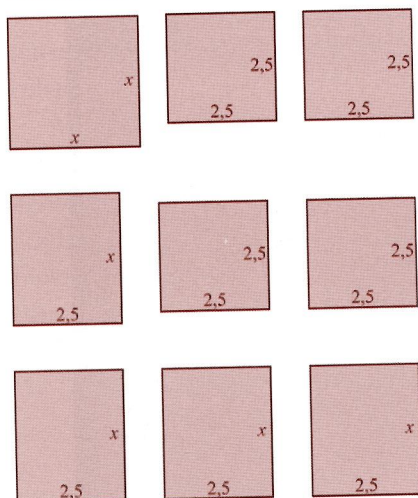
- Ibn Musa al-Khwarizmi escreveu acerca da equação $x^2 + 10x = 39$: «... um quadrado e dez raízes são iguais a trinta e nove unidades. Sendo assim, a questão neste tipo de equação é a que se segue: qual é o quadrado que combinado com dez das suas raízes dará uma soma total de trinta e nove? A maneira de resolver este tipo de equação é tomar uma metade das ditas raízes. Ora as raízes no problema são dez. Assim tomando cinco multiplicadas por si mesmas dá vinte e cinco, uma quantidade que adicionada a trinta e nove dá sessenta e quatro. Toma-se então oito e subtraindo a isto metade das raízes que são cinco, fica três. O número três então representa uma raiz deste quadrado, o qual ele próprio com certeza é nove (...)» (Tradução livre realizada com a preocupação de manter o espírito do texto). A atividade baseia-se na prova geométrica por ele fornecida para justificar o raciocínio aqui descrito.
- Será vantajosa a realização da atividade a pares ou em pequenos grupos já que o carácter das tarefas beneficiará da discussão durante a sua concretização.
- A «cruz» referida na tarefa 3 pode ter várias formas, visto que serão obtidas figuras equivalentes.
- Embora as tarefas 6 e 7 se refiram ao mesmo quadrado «final», na primeira pretende-se que os alunos adicionem os valores 39 e 25 e que indiquem 8 como a medida do lado do quadrado, enquanto na segunda se espera que conclua que $(x+5)^2 = 64$ para que, na tarefa 8, deduzam que $x+5=8$ de modo a obterem o valor de x .

HELENA ISABEL SOUSA

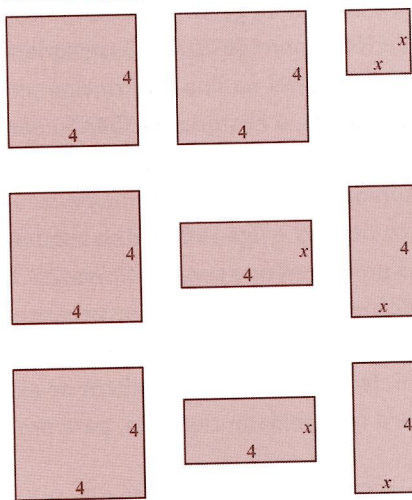
ISABEL CRISTINA DIAS

ESCOLA SECUNDÁRIA JOSÉ CARDOSO PIRES,
STO. ANTÓNIO DOS CAVALEIROS

Folha anexa 1



Folha anexa 2



Nota: as folhas anexas 1 e 2, que aqui apresentamos reduzidas, podem ser descarregadas do portal da APM, na página da revista correspondente a este artigo.

O sol eclipsado!

«Era de mil CCLXX, a uma sexta-feira, a XXX dias de Maio e à hora sexta, o Sol escureceu e a Lua e muitas estrelas surgiram no Céu, por vontade de Nosso Senhor Deus»¹

O eclipse nem sempre foi entendido como um fenómeno natural. No séc. XIII os eclipses eram associados a manifestações supersticiosas, sinais divinos ou maus agouros. A evolução do conhecimento do Universo pelo Homem permitiu explicar este fenómeno cientificamente e este, por sua vez, o conhecimento científico acerca do eclipse levou à evolução da Ciência e à alteração da nossa visão do Universo.

Neste número temático da E&M, a secção do MPT evidencia a influência bilateral entre Cultura e Matemática do e no Planeta Terra e de como esta relação pode estar presente na Educação. Esta herança cultural é algo que o Ano da Matemática do Planeta Terra pretende homenagear.

JOANA LATAS

Em 1919, o astrónomo inglês Arthur Eddington comandou uma expedição à ilha do Príncipe para observar um eclipse total do Sol. A 29 de Maio do referido ano, Eddington fotografou um campo de estrelas de modo a testar a teoria da relatividade de Albert Einstein. Esta teoria prevê que o percurso dos raios de luz seja desviado quando os raios de luz são sujeitos à presença de corpos com massa. Ao comparar a posição aparente com a posição real das estrelas fotografadas, foi possível confirmar que Einstein estaria correto. A comprovação desta teoria foi um grande salto conceptual na época e contribui muito para a compreensão que temos hoje do Universo. Passados 94 anos ainda é aceite pela comunidade científica e constitui uma das mais conhecidas teorias científicas entre a sociedade geral.

No passado dia 3 de Novembro de 2013, quase ao longo da mesma trajetória, foi visível na ilha do Príncipe um eclipse solar. 94 anos passados, a História e a Ciência são unidas pelo mesmo fenómeno.

Esta foi uma oportunidade única para o Príncipe recuperar o evento científico de 1919 e ligá-lo à ciência moderna. Foi com base nestas premissas que surgiu o *Eclipse2013: História e Ciência no Príncipe*², uma iniciativa com a chancela MPT. Decorreu durante cerca de 6 semanas e dirigiu-se a toda a sociedade civil, tendo-se revelado também de extrema importância para a comunidade científica, para professores e para alunos.

As seguintes imagens foram registadas na ilha do Príncipe durante o decorrer do eclipse solar do dia 3 de Novembro de 2013.

Nas figuras 1 e 2 podemos ver um professor a coordenar os seus alunos na análise dos efeitos do eclipse na temperatura ambiente. Para tal fizeram registos sistemáticos da temperatura, organizaram a informação numa tabela e con-

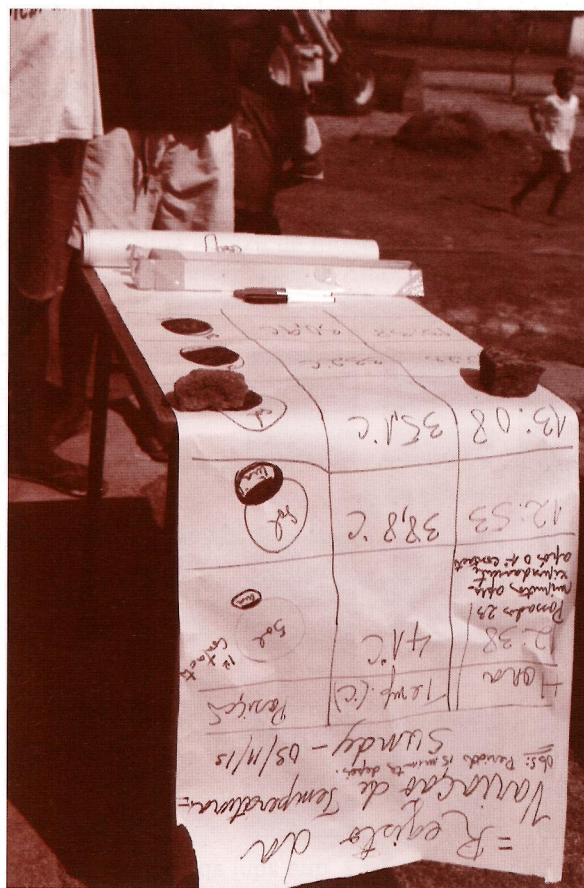
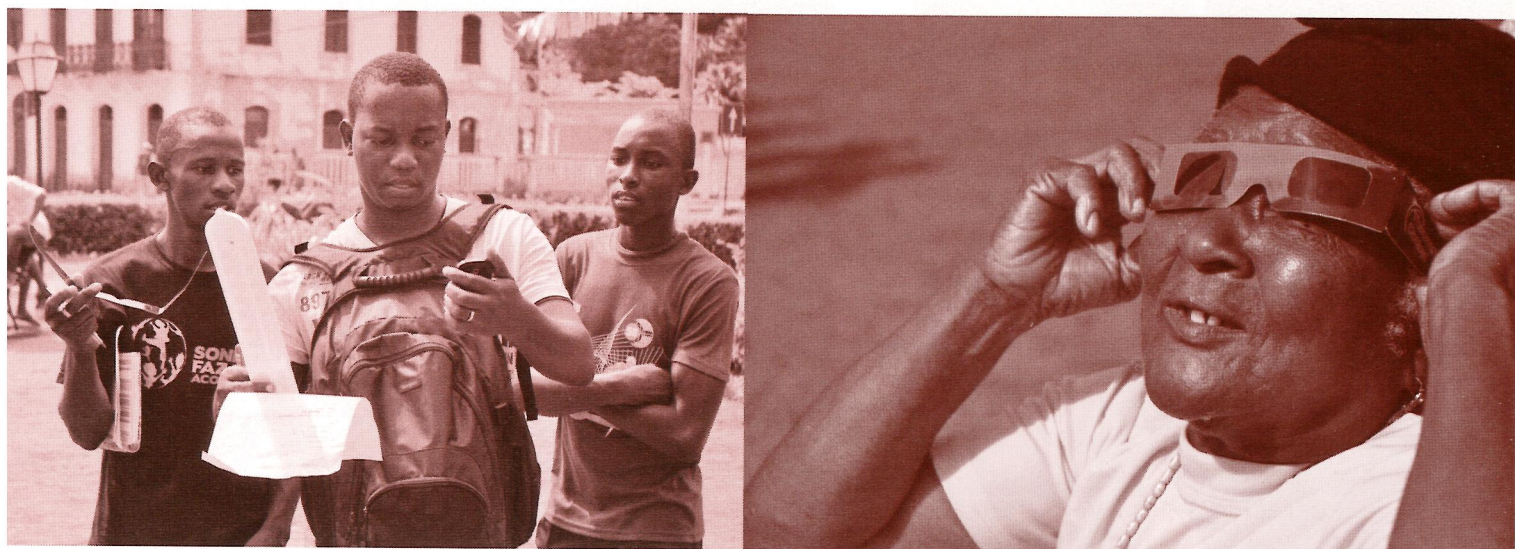


Figura 1. Fotografia de Estrela Matilde



Figuras 2 e 3. Fotografias de Luís Cruz

verteram essa informação num gráfico. Uma atividade que, mesmo não tendo sido dinamizada em contexto de sala de aula, proporcionou aos alunos uma experiência matemática compatível com os objetivos programáticos propostos no âmbito da educação formal.

Na figura 3 deparamo-nos com uma expressão que se pode traduzir por misto de interesse e surpresa, fruto de uma observação segura do eclipse solar usando óculos próprios para o efeito. Esta situação tem a particularidade de ser o resultado de uma marcante interação entre a senhora que observa o eclipse e um dos elementos da comissão organizadora. O alerta para a ocorrência do eclipse, fenómeno que estaria a decorrer e do qual estava alheada, abriu janelas ao conhecimento sobre o meio envolvente e despertou-a para uma participação intencional nesta experiência coletiva.

A História da Ciência e do Príncipe marcaram presença de forma transversal pelas diferentes gerações. Impera agora responder a questões como «o que acontece quando acaba o eclipse?» e «e depois do eclipse?» se não quisermos que a curiosidade e interesse se dissipem. Cabe também à Educação, colocada tanto ao serviço da educação

formal como da educação não-formal, assumir essa continuidade, consolidar conhecimentos, preservar a história e promover a ciência!

Notas

1. *Anais, Crónicas e Memórias Avulsas de Santa Cruz de Coimbra*, introdução de António Cruz, Porto, Biblioteca Pública Municipal do Porto, 1968, p. 98.
2. Mais informação disponível em www.eclipse2013principe.com e em <https://www.facebook.com/eclipse2013.principe>

JOANA LATAS

PROJECTO ECLIPSE2013

LUÍS CARDOSO

PROJECTO ECLIPSE 2013

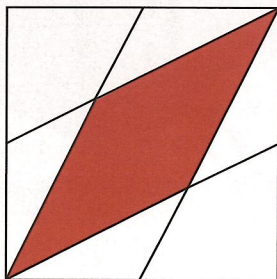
RICARDO GAFEIRA

OBSERVATÓRIO ASTRONÓMICO DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, PROJECTO ECLIPSE 2013

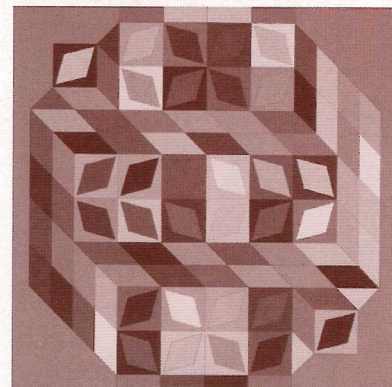
O losango de Vasarely

Muitas das obras do pintor húngaro-francês Victor Vasarely (1906–1997), um dos fundadores da op art, baseiam-se em figuras e transformações geométricas.

No estudo de um dos seus quadros, unem-se dois vértices de um quadrado com os pontos médios dos lados opostos, dando origem a um losango central, tal como se vê na figura seguinte.



Que relação há entre as áreas do losango e do quadrado inicial?



Victor Vasarely «Tridim-Cristal-W»

(Respostas até 19 de fevereiro para zepaulo46@gmail.com)

DOMINÓS EM CASCATA

O problema proposto no número 123 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A Sandra comprou uma série de caixas (menos de 60), cada uma com 30 peças parecidas com dominós.

O objetivo é criar uma instalação com uma peça na primeira linha, duas na segunda, três na terceira e assim sucessivamente, cada fila com mais uma peça que a anterior. Quando tudo estiver montado, empurra-se a primeira peça, que fará cair todas as outras, num efeito em cascata.

Feita a instalação, sobraram duas peças.

Quantas caixas comprou a Sandra e quantas filas tem a instalação?

Recebemos nove respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), João Barata (Castelo Branco), Laura Almeida (Porto Santo), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Houve dois processos de resolução (e a Graça Cruz utilizou os dois).

No primeiro, como diz o Carlos Dias, usa-se a «força bruta». Faz-se, no computador ou na máquina gráfica, uma tabela com o número de peças em função das filas e outra tabela com o número de dominós comprados menos dois. Depois, é só procurar os números que aparecem nas duas.

Note-se que a Laura Almeida foi à procura de números triangulares terminados em 8. São poucos: 28, 78, 378, 528,

1128 e 1378. Depois é só verificar quando se obtém um múltiplo de 60 ao somar 2.

O segundo método é mais «matemático». Descubrem-se várias relações que limitam o número de casos a testar. Vejamos como, seguindo as indicações do Alberto Canelas.

Sendo n o número de filas, o número de pedras na instalação é $1 + 2 + \dots + n$, ou seja, $n(n+1)/2$. Se representarmos número de caixas por k , com $k < 60$, temos:

$$n(n+1)/2 = 30k - 2 \quad \text{ou} \quad n(n+1) = 60k - 4 \quad (\text{Eq1})$$

Desta equação podem tirar-se duas conclusões interessantes:

- Dado que $60k$ é múltiplo de 10, $60k-4$ termina em 6, ou seja, n só pode terminar em 2 ou 7.
- Dado que $60k$ é múltiplo de 3, $60k-4$ não é múltiplo de 3, o que implica que nem n nem $n+1$ são múltiplos de 3.

Portanto a resolução problema resume-se a encontrar dois números inteiros consecutivos, cujo produto termine em 6, que não sejam múltiplos de 3 e obedeçam à Eq1.

Só há quatro casos de produtos a acabar em 6 e que não são múltiplos de 3:

$$7 \times 8; 22 \times 23; 37 \times 38; 52 \times 53$$

Destes casos, só o primeiro e o último obedecem a Eq1.

$$7 \times 8 = 60k - 4 \quad 52 \times 53 = 60k - 4$$

Há portanto 2 soluções: 1 caixa, 7 filas; 46 caixas, 52 filas. Mas, salienta a Catarina Ferreira, «como o enunciado diz que a Sandra comprou uma série de caixas, depreende-se que foi mais do que uma». Conclusão, usaram-se 46 caixas e a instalação tinha 52 filas.

Aprender Matemática: porquê e para quê?



Excertos das intervenções do Painel realizado no ProfMat2013

Os editores deste número temático da revista propuseram à comissão organizadora do ProfMat2013 a realização de um painel subordinado ao tema «Aprender Matemática: porquê e para quê?». Convidaram a presidente da APM, Lurdes Figueiral, para moderar o debate, e como intervenientes, Miguel Abreu, presidente da SPM, Arsélio Martins, da equipa de autores dos programas do ensino secundário e Henrique Guimarães, da equipa de autores do programa do ensino básico.

Não sendo possível transcrever aqui todas as intervenções completas, os editores decidiram publicar na revista impressa apenas as intervenções iniciais dos painelistas e disponibilizar no portal da APM, no sítio da revista, o painel completo.



Lurdes Figueiral

LURDES FIGUEIRAL — Para esta sessão eu gostava que fizessemos um esforço de levantar voo por um bocadinho. As problemáticas de que somos cada vez mais conscientes e que enfrentamos deixaram-nos, ao longo deste Profmat, quase desalentados em alguns momentos. Elas são importantes, mas já falámos muito nelas. Vamos deixar essas problemáticas e vamos erguer-nos e, perguntarmo-nos pelos grandes objetivos, as grandes finalidades do ensino da Matemática: aprender Matemática porquê e para quê?

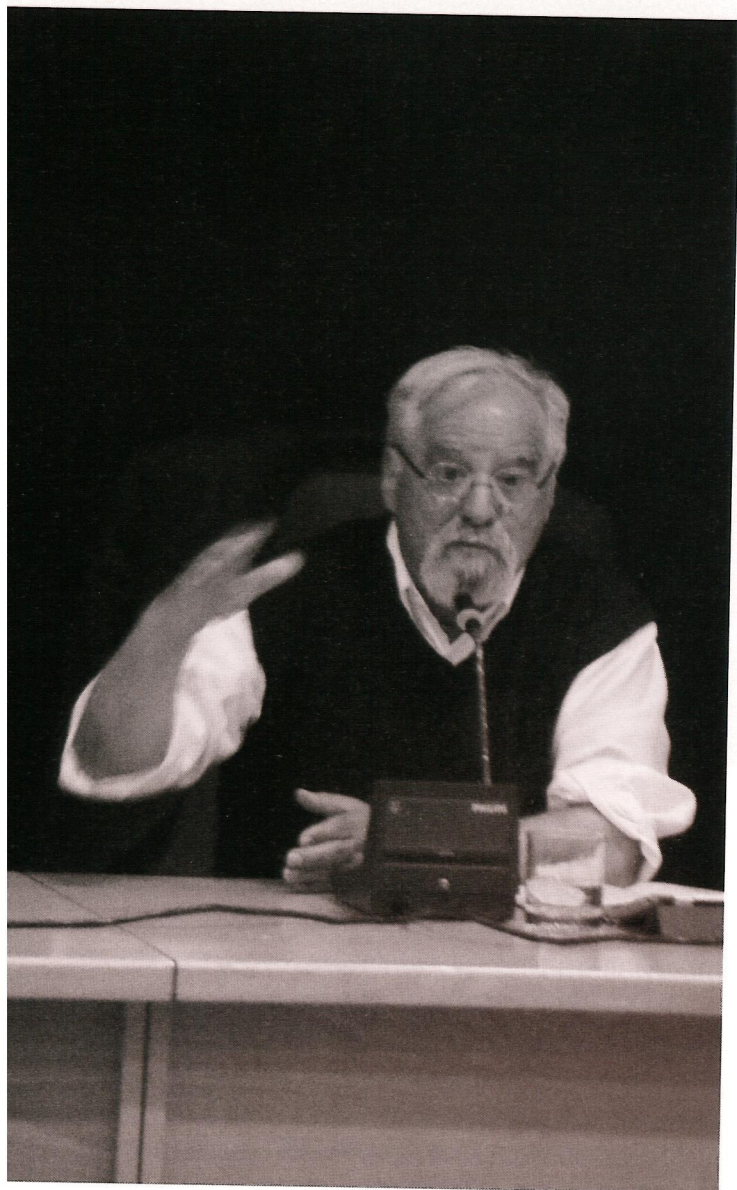
Este desafio foi colocado pelo Eduardo Veloso e pela Rita Bastos como editores do número temático da revista Educação e Matemática e vai ser transcrito depois também nessa revista.

Porque é que o Eduardo e a Rita nos fizeram este desafio que nós aceitámos com muito gosto? Antes de mais, pela memória ... mais do que a memória, pela presença, do nosso colega e amigo Paulo Abrantes. Várias vezes já foi evocado ao longo deste profmat. Nós quisemos fazer deste profmat um ato de arranque dum ano dedicado de maneira especial à memória do Paulo e das suas ideias, sobretudo das suas ideias sobre o ensino da Matemática. E foi ao Paulo que fomos buscar a inspiração de nos perguntarmos: «o porquê e para quê?»

Se nós fizermos esta pergunta — aliás este título, é exatamente o título do documento que o Paulo escreveu para o Seminário de Milfontes sobre a renovação do currículo de Matemática — este perguntar-nos «o porquê e para quê?», é de facto uma pergunta primordial e última. As outras perguntas também são importantes — «o quê?» e o «como?». Mas sobre essas nós debatemo-nos mais vezes. E muitas vezes, debatemos o «como» e «o quê» não tendo presente o «porquê fazemos isso»? E por isso digo que este painel é um convite a vermo-nos a nós próprios, à nossa atuação, ao nosso exercício profissional, às nossas convicções sobre o ensino da Matemática. Vermo-nos um bocadinho à distância. Vermo-nos com essa distância que precisamos para analisarmos aquilo que fazemos, para dar sentido àquilo que fazemos. E o sentido daquilo que fazemos só é pleno se nós o formos atualizando, se nós formos capazes de lhe aumentar sentido, de lhe confirmar sentido. Foi o desafio colocado aos colegas do painel e depois, na parte do debate, será também o desafio colocado aos participantes do profmat.

O desafio inicial foi comentar esta frase, também do Paulo: «A razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural, associada ao facto da matemática constituir uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de pensar e de aceder ao conhecimento». Esta frase foi retirada do Currículo do Ensino Básico, e não era a única razão que o Paulo apontava nesse documento, havia uma outra, mas achámos que esta tinha peso suficiente para proporcionar este debate.

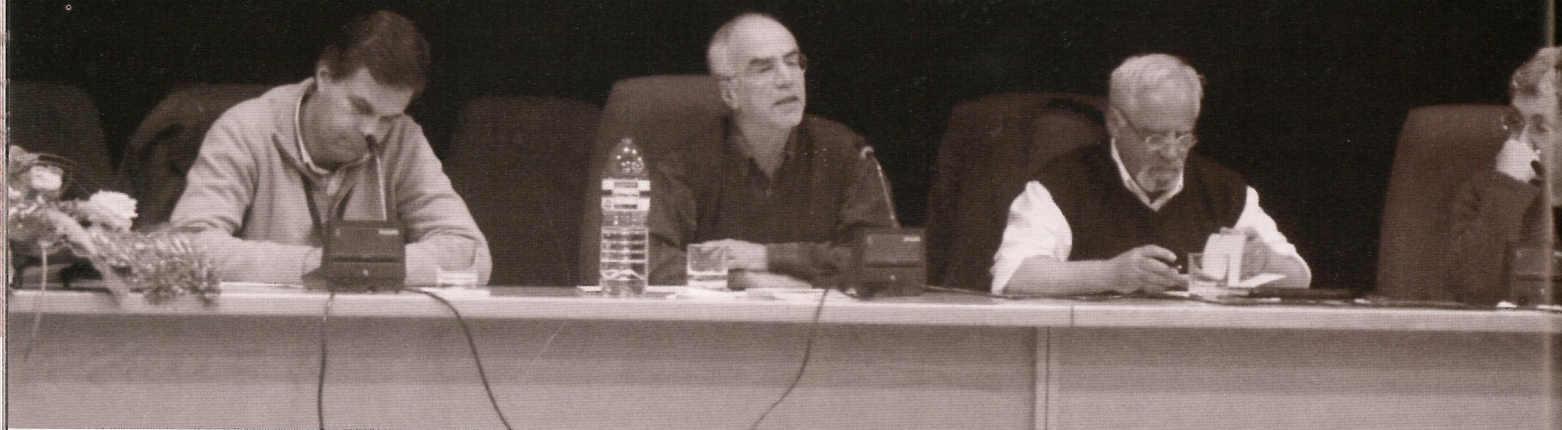
Agradeço aos três, mais uma vez, não só a presença, mas a colaboração. E vou passar a palavra ao Arsélio Martins.



Arsélio Martins

ARSÉLIO MARTINS — Boa tarde a todos e a todas. Eu vou tentar falar da matemática como componente essencial da cultura integral dos indivíduos, da cultura de um modo geral. Para falar disso, frequentemente, dizemos coisas muito vagas, às vezes vagas demais. E vale a pena dizer que, na minha opinião, a cultura dos indivíduos humanos tem a ver com o uso de instrumentos. E de nós usarmos coisas fora de nós que são muito difíceis de usar e não se podem recriar sem grande treino e sem aprendizagem. Não é possível criar outra ferramenta a seguir. Não é possível que a pessoa que um dia se levanta e pega numa coisa para fazer uma obra de arte numa caverna, não se obrigue a ensinar alguém se quiser que isso perdure. O que perdura é o

uso dos instrumentos; o que perdura é uma necessidade de tal ordem importante para as pessoas, para sobreviver, como é importante para as pessoas à volta dela, que ela se torna perdurável. E isso frequentemente tem a ver com instrumentos. Não estou só a falar de instrumentos elementares. Estou a falar de toda a nossa vida. O desenvolvimento da vida humana foi sempre feito por resposta a necessidades de vários tipos e, nessa construção, fez-se aquilo que nós habitualmente chamamos cultura e que tem como ferramentas, tanto o cinzel, como tem como ferramenta nós sabermos o que é um padrão, que nós chamamos matemático, aqueles, que se repetem e se reutilizam de alguma maneira em toda a vida humana e porque é que isso acontece. Tudo isso é a nossa cultura. É cultura a comunicação social, é cultura a possibilidade que nós temos de sobreviver em sociedades complexas como é a nossa. Na nossa sociedade nós sabemos que não é possível sobreviver e fazer passar adiante sem grande capacidade de transmissão dos saberes. Esses saberes são múltiplos, mas de toda essa cultura, uma parte muito significativa tem a ver com cultura científica e hoje mais do que nunca. Se nós pensarmos assim, sabemos que não é possível termos cidadãos sem uma cultura que integre a cultura científica. E é óbvio que não há cultura científica sem uma iniciação especializada à ciência e, em particular, à matemática. Este é o meu ponto de vista. E isto significa que agrupo nisto a necessidade de saber matemática para todas as áreas do conhecimento. E como é que isto passa de geração em geração? Aí surge um outro problema: como é que se ensina? Há coisas que são respostas imediatas a necessidades dos cidadãos e dessas podemos dizer que não há quem não aprenda o que considera que é vital para si mesmo. Para sobreviver, há coisas que se aprendem. Há necessidades intrínsecas. As pessoas aprendem tudo aquilo sem o qual não podem viver. É claro que há pessoas que só aparentam ter necessidades muito elementares e há pessoas que têm necessidades muito complexas e elaboradas. De um modo geral, não é possível viver sem ensino. Porque é que o ensino, e a aprendizagem, são tão importantes e complexos? Bom, a principal razão é porque ser estudante é tão estranho, para cada indivíduo é tão extraordinário estudar como pagar impostos. E, em Portugal, bem sabemos que isso quer dizer



que a contribuição para o bem dos outros não é imediata. A contribuição para o bem dos outros é outra parte da cultura! É nós temos ferramentas, no nosso mundo, e precisarmos de ter conhecimento e necessidade de o estudar. E estudar é uma coisa estranha, à partida. Porque estudar é o outro lado da cultura. As pessoas até sabem muitas vezes que as coisas existem e sabem que alguém as põe a funcionar. Mas nós sabemos, nós todos sabemos que nada funciona bem sem conhecimento incorporado, ou seja, o uso das ferramentas e a operação com ferramentas e com utensílios, de um modo geral, exige estudo. As novas ideias exigem ferramentas cada vez mais complexas. Estudar é estranho porque é uma necessidade exterior.

Dizemos nós que um gato aprende o que é fundamental e depois adapta-se. Nós, humanos, temos dois tipos de necessidades, as que não aparecem como vitais imediatamente, outra é a necessidade que nós temos sem precisarmos de mediador. Mas o que é mais dramático pelo menos para nós, que somos professores, embora as pessoas não pensem nisso, é que nós ... parece que aprendemos, fingindo. Como, por exemplo, se eu for pela estrada e se um polícia me mandar ir pela direita — eu finjo que compreendo e vou pela direita e parece não haver problema algum. Mas, isso não significa nenhuma necessidade, nenhuma necessidade intelectual nem coisa nenhuma, e posso repetir a mesma infração, sem pensar. A maior par-

te das coisas eu aprendo-as por treino! Por treino e por fingir que as percebo ao cumprir as ordens que me dão. Essa parte é uma parte bem determinada.

Ora estudar é estranho porque vai além disso. Os professores, de um modo geral, devem saber que a sua profissão é das mais estranhas que existe, e por isso é uma das mais difíceis. Uma parte do ensino pode ser feita na base do fingimento como aprendizagem. São pessoas que nos imitam nos gestos, pessoas que decoram o que nós dizemos, e não digo que esse conhecimento é pouco importante. Costumo dizer para mim mesmo que aprendi as orações todas antes de saber escrever. Sei-as de cor. Durante muito tempo pensei que as sabia de cor porque as ouvi muitas vezes, mas agora sei que as aprendi de cor porque eu queria ser como os outros, queria dizê-las ao mesmo tempo que os outros, queria fazer parte de uma coisa que era um uníssono para rezar. Os professores são aquelas pessoas que levam a um nível mais elevado essa questão de aprender coisas para outros fins que não o de simplesmente entrar em uníssono só com a minha comunidade restrita. Eu posso ter uma comunidade, e nela até posso já estar bem integrado, mas preciso de fazer mais porque à medida que fomos evoluindo tecnicamente, o saber associado às técnicas é muito mais elaborado. O Gasset dizia qualquer coisa assim: se uma geração deixar de estudar, imediatamente nove centésimos da população morre. Porque atualmente

a nossa sobrevivência é baseada em coisas muito complexas, já que o aproveitamento do planeta, essencial para a sobrevivência de toda a gente, exige grande capacidade técnica, grandes conhecimentos.

Técnicas, eu consigo aprendê-las repetindo. Eu posso ensinar todas as pessoas a usar uma ferramenta repetindo, passo a passo. Mas, se houver uma geração que deixe de investir saberes no aperfeiçoamento das técnicas, a própria técnica desaparece. E portanto, uma parte da humanidade vai «ao charco».

Quem considera que a matemática é uma parte importante e fundamental da cultura humana, deve saber porque é uma coisa estranha a cada um, quase; porque as pessoas não aprendem espontaneamente, não estudam espontaneamente. Porque uma parte das pessoas, ainda por cima, finge que aprende, finge que percebe a mensagem dos professores, ou dos pais! Finge que aprende as regras, as coisas, as operações, finge isso tudo! Levar isso a um nível mais avançado, preservar a memória da humanidade, preservar a memória dos objetos, das coisas que se veem, porque é que são feitas é a coisa mais complicada que existe!

A matemática tem um grande conjunto de coisas que podem ser ensinadas separadamente. Com cada um dos temas da matemática, eu posso desenvolver competências transversais para toda a gente! Mas não há nenhuma hipótese de isso ser cimento se eu não tiver feito uma coisa coerente, racional, juntando a arte, a arte pictórica, a música, a vida social, etc., de tal maneira e em graduações sucessivas, que as pessoas possam aprender de forma voluntária, porque lhe é dada, porque é transmitida de forma racional e compreensível. Não é portanto de estranhar que quem tenha de tomar decisões do ponto de vista curricular, para o tempo presente em que estamos, escolha partes da matemática que é possível transferir, transportar, fazer trabalhar as pessoas.

Outra questão é a consistência com a história da humanidade, a história também das civilizações, já que é da natureza da matemática ser concertada com a história de alguma maneira, exige alguma sequência desse ponto de vista. E tem de ser principalmente consistente com o uso das ferramentas em uso.

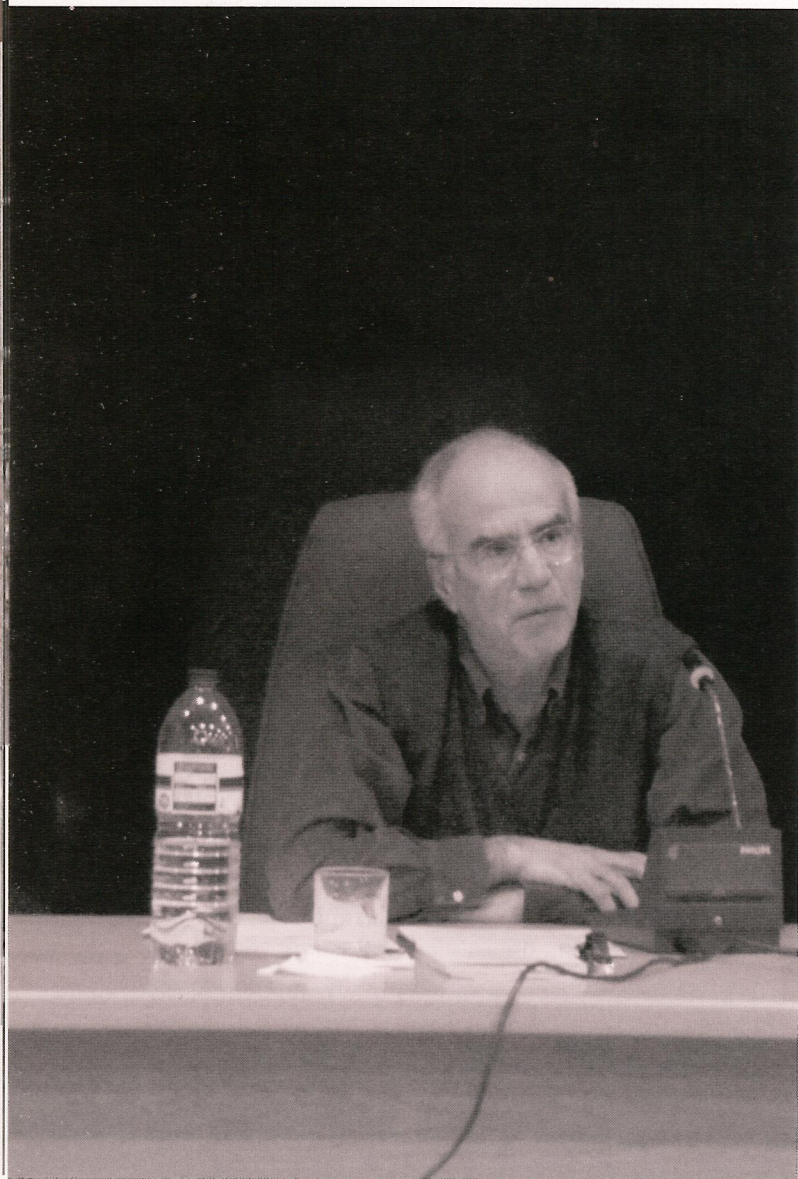
Nenhuma sociedade vive só do seu tempo. Temos de saber quais ferramentas, em cada época, e compreender como nós usamos esta ou aquela ferramenta! Diferentes de época para época, mas sempre vivemos em relação com as ferramentas. Em cada momento, temos de dizer com que interesses é que eu posso levar as pessoas a terem uma memória tão persistente que lhes permita cavar o futuro. Este é que é o problema! Podemos organizar isso por grandes

blocos, assuntos, etc. Ao contrário do que as pessoas muitas vezes pensam, cada matemático olha para o ensino do ponto de vista das suas conceções da matemática! Há um matemático que resume tudo a dois tipos de matemáticos: uns são os solucionadores de problemas que são, segundo ele, os mais reacionários, e outros são os matemáticos teóricos, os teorizadores. Young dizia qualquer coisa do tipo: Eu prefiro os teóricos, eu sou adepto dos teóricos, acho que os teóricos é que fazem mover o mundo. Os solucionadores são uns chatos, e são uns reacionários, pela simples razão que ficam satisfeitos quando resolvem um problema. Têm um problema, resolvem-no e ficam satisfeitos. Não pensam mais naquilo e muitas vezes não usam esse problema para levantar outros problemas.

A Matemática que se ensina modernamente tem que ser claramente a junção das duas coisas. Tem de, por um lado, desenvolver a capacidade de resolver problemas, mas por outro lado, de abrir mecanismos, dar instrumentos matemáticos, etc., que permitam abrir outros problemas, enfrentar outros desafios mais complexos. Quando lhe perguntaram, como pai, como achava que devia ser, ele dizia assim: se eu precisar de um tipo para trabalhar na minha oficina, eu prefiro um solucionador de problemas, porque lá eu tenho que solucionar problemas. Se eu quiser um professor para o meu filho — mas é o filho dele, claro! — eu prefiro um teórico.

É nesta desgraçada complicação que reside em parte a tragédia do ensino, da pedagogia, e reside parte da tragédia da ciência. Em cada momento, temos que decidir o que fazer. Eu não estou nada convencido que seja uma só das coisas! Dou muita importância à História, dou muita importância às ferramentas do tempo de cada um, e que cada um use as ferramentas do seu tempo! Dou muita importância a trabalhar de forma dinâmica, com tudo o que tiver à disposição para ensinar e para favorecer a aprendizagem. Com Klein, sei que as máquinas de calcular foram descobertas por matemáticos puros. Os alunos não podem sair sem ter tido alguma experiência com calculadoras e os professores não podem deixar de saber a matemática das calculadoras. E esta visão do mundo, esta visão das ferramentas que está escrita há cento e tal anos para trás, ainda é a nossa visão!

Não tenho absolutamente a ideia de que faça alguma redução do que seja a cultura e do que seja o papel da Matemática nesta cultura, ao falar de ferramentas. Em Portugal nós fizemos alguns programas virados claramente para a cultura, para as artes. Uns mais, outros menos. E, particularmente, o programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais é completamente diferente de todos os outros,



Henrique Guimarães

visando resolver um problema sério de cultura da sociedade. Nele se fala da matemática na democracia política, na distribuição de bens, na recolha dos resíduos. Trata de modelos matemáticos adequados a discutir e a responder a problemas da vida em sociedade. Eu acho que essa é uma questão que não se pode ignorar.

Da minha parte não há qualquer presunção. Não há aqui presunção a favor de uma coisa ou outra.

A matemática é uma parte fundamental da cultura humana. Assim é, e o ensino deste ponto de vista tem de fazer caminho. O que dizemos aos professores é que isto nunca foi fácil, não vai ser fácil ou simples, porque é preciso que as pessoas tenham ideia de que isso é levar as pessoas a fazer alguma coisa que lhes é estranha! Que não é evidente

imediatamente. Uma criança pode recusar fazer uma boa parte das coisas, pode recusar-se a aprender por não gostar, por não ver utilidade, por não gostar da escola, do professor, da terra, da mãe ...

Estudar pode ser fingimento e por esse fingimento ficamos na mesma. E depois, no ensino, todos os dias valores são postos em causa. Não é por acaso que os programas estão encharcados de valores por sabermos que, se a cultura não for profunda e não houver a ligação entre a cultura científica e a cultura de um modo geral, os nossos melhores podem ser os nossos piores inimigos até porque têm acesso a meios poderosos e conhecimentos que podem ser mobilizados ao serviço de fins contrários ao bem comum. É preciso que o professor saiba das dificuldades da educação com valores e ... de cultura! Eu estou cá só para defender isso, que é esquisito, é complicado, os professores têm que ser animados também a exigir meios e melhores condições de vida, porque sem o trabalho dos professores, como trabalhadores da cultura, nós ficaremos muito mal.

HENRIQUE GUIMARÃES — Boa tarde. Agradeço à comissão organizadora, na pessoa da Rita Bastos e do Eduardo, este convite que me satisfaz duplamente: por ser um tema que me ocupa e preocupa, e por se inserir, digamos, naquilo que a Lurdes Figueiral trouxe aqui na apresentação deste painel: a evocação de um amigo, de um colega e de uma figura de relevo reconhecido no trabalho em que todos estamos envolvidos. Não posso deixar de respirar algumas coisas do que o Arsélio disse para anteceder o que eu trouxe aqui para dizer. O Arsélio referiu um aspeto, não referiu, insistiu num aspeto: aquilo que caracteriza a cultura humana é o uso de instrumentos, a conceção e o uso de instrumentos. Eu estou inteiramente de acordo e até vou acrescentar um pouco mais — provavelmente até é o que nos distingue, enquanto humanidade, do resto dos habitantes do nosso planeta. Ficam algumas exceções, a gente sabe que há uns animais que até fabricam ou usam pequenos instrumentos para a sua sobrevivência mas, desde os primórdios daquele que depois veio a ser o habitante mais devastador do planeta, o instrumento — nos seus vários formatos, sentidos e alcances — tem sido um elemento decisivo na vida humana. Mas eu vou introduzir um outro aspeto que, do meu ponto de vista, talvez seja mais importante para a discussão que aqui nos propomos fazer — é que o homem é o único dos habitantes terrestres que ensina, não há mais nenhum. Enfim, e digo-o com a pretensão de quem conhece muito pouco da Terra e do que se sabe sobre os que a habitam: não há nenhum animal que se conheça que ensine.

Bem, também há, melhor, eu sei que há quem tenha procurado mostrar essa possibilidade com um casal de chimpanzés ... E sabemos que nós conseguimos «ensinar» (vou usar aqui a expressão entre aspas) um papagaio a falar, um cão a fazer coisas, e por aí fora, mas esse papagaio não ensina os filhos a falar, nem o cão ensina os filhos a porem-se de pé. Portanto, o ensinar, no sentido que o Arsélio também usou, de transmitir às gerações futuras o património cultural adquirido, é um privilégio — e provavelmente também uma conquista da humanidade — que nos caracteriza enquanto humanos (e nos interessa muito a nós, professores, que aquilo que fazemos que é ensinar).

Eu continuo a valorizar muito a palavra ensinar e talvez tenha até passado a fazê-lo com mais insistência. Eu sei que o título deste painel é «Aprender Matemática: porquê e para quê» mas, podia substituir o aprender por ensinar, e vou acrescentar a razão porque digo isto. É que, para mim, ensinar, na medida em que ensinar supõe e implica uma relação que eu vou chamar didática (mas podia dizer uma relação pessoal), não existe sem o aprender. Portanto, se a cada ato de ensino não corresponder uma aprendizagem, não há ensino, porque senão, quando estivesse a falar para uma parede, estava a ensinar.

Eu não estou a dizer que a responsabilidade é do professor, estou a dizer é que se o professor não conseguir aprendizagem no aluno a quem se dirige, não está a ensinar. É por isso que eu prefiro falar, a este propósito, sempre do ponto de vista do professor. Mas ainda queria, já agora, fazer algumas distinções: o professor pode ser visto como um funcionário (e aqui sem qualquer carga negativa), pode ser visto como um técnico ... Mas seguramente, numa boa parte daquilo que no professor, enquanto educador, deve compor a sua figura, estas dimensões não são certamente as mais relevantes. O professor deve assumir-se como um transmissor de cultura, como um intelectual, e é com esse sentido que ele pode cumprir a sua missão. Talvez também por isso a sua profissão seja «difícil e estranha», como disse o Arsélio.

A Lurdes, salvo erro, referiu-se a três questões que são as que eu costumo também referir muitas vezes quando discuto com os meus próprios alunos nos primeiros momentos do trabalho em didática, e que apresento como aquilo a que cada professor deve procurar sempre responder. São três questões ou três grandes grupos de questões: questões sobre o o quê?, questões sobre o porquê? e questões sobre o como? ensinar e nós muitas vezes, senão sempre, começamos pelo como, antes do porquê e às vezes até antes de o quê?.

Eu acho que estas questões estão todas ligadas e que temos sempre que fazer as três perguntas. Mas, reduzin-

do-nos apenas ao como?, ao como vamos ensinar Matemática, seja por exemplo Geometria ou Funções, não nos dotaremos de uma argumentação e de uma convicção pessoais para realmente podermos não ser apenas técnicos ou apenas funcionários e assumir um outro registo, contrário, ou pelo menos diferente destes — podermos, no nosso exercício de ensino, ser não apenas reprodutores, mas produtores.

Este painel incide sobretudo nas questões sobre o porquê? que estão, do meu ponto de vista, muito ligadas às questões sobre o o quê?. Penso que o lugar que a Matemática tem ocupado no currículo ou, se quiserem, na escola, resulta das questões das mais variadas, mas aquilo que, a este respeito, a pode distinguir das outras disciplinas, tem certamente a ver com a própria matemática. Temos que mergulhar um pouco na matemática e, portanto, no tal o quê?, para procurar perceber porque é que ela ocupa há tanto tempo o lugar que tem na escola — cada vez mais precocemente na escolaridade e durante mais tempo, e atingindo cada vez mais crianças e jovens e cada vez mais por todo o mundo.

Vou mencionar três (provavelmente podiam ser mais) características, três qualidades (no sentido neutro da palavra) da matemática que de alguma maneira podem contribuir para esse lugar que a Matemática tem. A primeira é a UNIVERSALIDADE — a matemática é talvez, das conquistas, das produções culturais da humanidade que adquiriu ou que foi adquirindo progressivamente uma maior universalidade. Eu sei que é um bocado exagerado, a matemática não está em todo o lado, mas foi cada vez estando mais em mais «sítios» e por toda a parte. A segunda característica que eu queria referir é a APLICABILIDADE, noção que uso aqui num sentido amplo — a matemática é reconhecida (e cada vez mais) uma ciência com inúmeras aplicações, com relações de grande fecundidade com os múltiplos campos de saber e da atividade humana. A terceira, que provavelmente tem ligações com esta última é (e eu não consigo arranjar uma maneira melhor de a dizer): a matemática é um elemento de INTELEGIBILIDADE do mundo. O que é que eu quero dizer com isso? Vou recorrer à ideia de linguagem naquele sentido de uma janela que se abre para o mundo. Cada linguagem permite-nos aceder a um mundo, e a matemática, nesse sentido, é uma linguagem — com a matemática nós ficamos a compreender melhor o mundo. E, permitam-me um pequeno desvio, esse mundo, seja ele qual for — natural, artificial — faz-nos também compreender melhor a matemática. Estas três características, a que podia acrescentar mais uma ou outra, em meu entender, de alguma maneira justificam esse lugar de gran-

de importância, de permanência e de resistência da Matemática na escola.

Posto isto, vou tentar comentar a frase que dá o mote ao painel e, como está descontextualizada, posso fingir que não sei nada de onde é que ela veio. Sei que é do Paulo, pelo menos é atribuída ao Paulo, e vou tentar argumentar com um exercício hermenêutico, digamos assim, de interpretação um pouco livre. A frase começa com «A razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural» e, de facto, a minha primeira questão é: mas podia ser outra a razão? As outras disciplinas não estão exatamente nesta situação? É esta uma razão distintiva da Matemática em relação a outras disciplinas?

Continuando, a frase diz a seguir, «associada ao facto de a matemática constituir uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de pensar e de aceder ao conhecimento». Interrompo aqui e pergunto: mas qual é a razão para se ensinar Matemática? É dito que a razão primordial é de natureza cultural, mas qual é a razão? Eu acho que está lá, ou antes, eu consigo tirá-la de lá, mas não é absolutamente claro. A frase por si só não nos dá imediatamente a razão. Diz que é primordial, diz que é de natureza cultural, mas qual é a razão? Fui buscá-la à segunda parte da frase quando, a seguir a «associada ao facto de a matemática constituir ... », se apresentam três atributos: «uma significativa herança cultural», «um modo de pensar» e «um modo de aceder ao conhecimento».

Talvez possamos retirar daqui que, para o Paulo, há uma espécie de razão tripla para se aprender Matemática ou, se quiserem, na minha versão, para se ensinar Matemática:

— Porque a matemática é uma «significativa herança cultural da humanidade» — e aqui retomo a minha questão inicial: bom, certamente que a música também é, certamente que a física também é, e podíamos continuar.

— Porque a matemática é «um modo de pensar». Não podia estar mais de acordo com esta razão (já o disse há pouco). Sendo um modo de pensar, está associado a uma linguagem, só pensamos com a linguagem, sem linguagem não sabemos pensar. Pensamento e linguagem estão intimamente ligados, e a matemática tem uma linguagem própria e essa linguagem permite-nos aceder a um mundo, um mundo próprio da matemática que, por sua vez, nos faz compreender melhor os outros mundos.

— E porque a matemática é «um modo de aceder ao conhecimento», e imagino que seja, não apenas em matemática, mas a outros conhecimentos, de outras disciplinas, de outros campos do saber humano e da atividade humana.

E, portanto, fazendo agora uma espécie de retro movimento, desdobro a tripla razão para se aprender ou ensinar Matemática do modo seguinte. A razão cultural, ou seja, nós achamos que vale a pena ensinar matemática porque culturalmente ela é um valor importante que nos cabe transmitir de geração em geração — por si só, eu não acredito que esta razão justifique a relevância e a tal permanência e resistência da Matemática na educação escolar. O valor formativo — ou seja, com a matemática, no momento em que aprendemos matemática, desenvolvemo-nos enquanto pessoas, nas nossas capacidades, aptidões e conhecimentos, no nosso património concetual, no nosso património procedimental, no nosso património de capacidades. E finalmente o terceiro, que é o valor instrumental — com a matemática, nós adquirimos formas de entender o mundo, de agir sobre o mundo e, eventualmente, de prever as consequências das nossas ações sobre o mundo.

MIGUEL ABREU — Muito boa tarde a todos, agradeço com toda a convicção e sinceridade o convite e a oportunidade para participar neste debate, aqui no Profmat, sobre este tema — aprender Matemática, porquê e para quê?

Eu começaria por ... uma pergunta diferente. Suponhamos que fazíamos a pergunta aprender a ler e a escrever, porquê e para quê? É uma pergunta que hoje em dia acho que já não faz sentido, ninguém a faz, toda a gente assume que todos nós devemos saber ler e escrever. Sem sabermos ler e sem sabermos escrever somos aquilo que se chama um analfabeto e não conseguimos viver neste mundo. Não conseguimos ser autónomos, não conseguimos fazer nada. Mas é uma pergunta que se calhar, há menos de 100 anos em Portugal muitos pais faziam: porque é que o meu filho há de aprender a ler e a escrever se é muito mais útil para mim que ele esteja aqui a trabalhar no campo, ou na minha serração, ou na minha ... onde for? E se formos mais atrás então, onde pouca gente sabia ler e escrever, essa pergunta ainda mais era relevante. Para que é que vamos aprender a ler e a escrever? Porque, de facto, podia não ter utilidade nenhuma na altura em que a pergunta estaria a ser feita ... Hoje em dia, felizmente, ninguém faz essa pergunta, e portanto não seria tema de debate, penso eu.

E eu direi que vou tentar usar uma pequena linha de raciocínio que me leve a pensar que nos dias de hoje e ao longo do mundo, mas hoje cada vez mais, a pergunta aprender Matemática: porquê e para quê? está exatamente a esse nível: aprender a ler e a escrever porquê e para quê? Eu acho que hoje em dia, quando se diz que qualquer pessoa deve saber ler e escrever, qualquer pessoa deve saber ler e

escrever e contar e no contar estou assumir no sentido lato de saber alguma matemática básica. Depois... Se substituíssemos na pergunta a palavra matemática, por música, pintura, poesia, filosofia, aprender qualquer uma destas coisas, porquê e para quê? São todas elas coisas importantíssimas, património cultural da humanidade, são também para mim, muitas delas, modos de pensar. A poesia é um modo de pensar, a filosofia, a pintura, o latim podia pôr aqui. O latim é uma coisa que ajuda a pensar. E são também, considero, modos de aceder a conhecimento. A pintura, a poesia, a música, do ponto de vista, julgo, de património cultural da humanidade ... têm um papel se calhar tão importante como a matemática. No entanto, é um facto que não damos — se calhar erradamente — mas não se dá no ensino que nós fazemos com as nossas crianças e jovens, certamente o mesmo peso e a mesma ênfase a estes temas da cultura da humanidade que se dá ao ler e escrever, ao português, à língua materna ou à matemática. E porquê? Será que isto é paradoxal? Ou não? Eu acho que não é paradoxal. Há uma razão para a importância que a matemática tem não só em Portugal e cada vez mais pelo mundo inteiro, e que certamente também está associado ao seu valor cultural, mas tem algo mais que a distingue, quanto a mim, da música, da pintura, da poesia, do latim ou da filosofia ou de muitas outras coisas que podíamos referir. Bom, e então, tentando chegar aí, lancei também, para me ajudar a pensar nisto, a pergunta: De toda a matemática que se ensina até ao final do 3.º ciclo, o que é que vai ser mesmo necessário ou útil na vida dos nossos alunos? Todos nós acreditamos que ler e escrever está sempre a ser útil, mas aquilo que nós ensinamos em Matemática até ao final do 3.º ciclo e sem estar a querer discutir em detalhe o tal o quê? mas, em geral, o que é que vai ser útil para a vida dos nossos alunos? E eu considero que praticamente tudo, e vou só ilustrar com uma situação que aconteceu. Começo com uma que já quase todos nos esquecemos porque foi há um ano e meio ou há dois anos, portanto, quando este governo entrou em funções, no verão de 2011. Foi um anúncio, na altura pelo ministro das finanças, a dizer que íamos ter uma sobretaxa de IRS de 3,5% e depois que isso era a mesma coisa que perdermos metade de um subsídio de natal. Ah ... de facto, se lermos as duas coisas separadas, de um lado está perder metade do subsídio de natal, do outro lado está sobretaxa de 3,5% de IRS, são duas coisas completamente diferentes. Porque é que uma é a mesma que a outra? Ah ... e se nós formos a ver, só perceber esta frase implica uma parte significativa daquilo que nós ensinamos de matemática. Ultrapassa tudo, grande parte do que



Miguel Abreu

se ensina no 1.º ciclo. Já precisamos de mais alguma coisa, não é? Precisamos de percentagens, proporções, além de saber somar, contar, ... E portanto depois, desde aí muitas outras coisas nos têm acontecido que para nos conseguirmos adaptar e para conseguirmos atuar perante elas, aquilo que aprendemos de Matemática, no ensino básico em particular, é praticamente tudo fundamental, tão importante como ler e escrever. Depois avançaria um bocadinho mais: Qual é a importância da Matemática que se ensina e se aprende no ensino secundário? E lancei este tópico no sentido de, depois para um futuro médico, um economista, um gestor, ou para um engenheiro, para um físico, para

um biólogo, para um gestor de risco na banca e nos seguros, quase todas as profissões. E de facto para médicos, economistas ou gestores é muito importante, para engenheiros físicos ou biólogos ou gestores de riscos é completamente crucial. A Matemática que nós ensinamos, que os professores do ensino secundário ensinam aos alunos que têm à frente é completamente crucial. Toda ela. Tentarei dizer um bocadinho mais sobre isto já a seguir, mas podia dar exemplos concretos. E se o ensino básico da Matemática deve ser para todos os nossos jovens, e deve ser importante para todos eles, mas também ninguém adivinha quando tem um jovem pela frente o que é que ele vai ser, o que é que ele quer ser ou o que é que ele vai poder ser no futuro. E se ele não tiver a capacidade para poder ser aquilo que ele quer ser, nunca o vai poder ser. E portanto nós temos que fazer para que todas as crianças e jovens que nos passam pelas mãos tenham condições para atingir o potencial que têm para serem aquilo que querem ser e puderem ser e, em muitas das coisas que eles podem querer ser vão precisar de muita matemática. Noutras precisarão de menos, mas em muitas delas vão precisar de muita matemática. Ah ... e depois terminaria, antes de concluir: Qual a importância da matemática para o desenvolvimento de um país como Portugal? Além da questão pessoal de cada aluno, qual a importância da matemática? E queria-vos tentar transmitir coisas que para mim são importantes. Começo com uma citação de 1984 de um senhor que era na altura o presidente da Exxon. A Exxon é aquela companhia petrolífera que era dona daquele barco Valdez que destruiu todo um habitat com um problema de derrame de petróleo ... É só uma pessoa que portanto não tem à partida ... os interesses dele são muito ... terrenos digamos ... (risos). Mas ele disse esta frase ... «Poucas pessoas reconhecem que a celebrada alta tecnologia de hoje é essencialmente uma tecnologia matemática». Isto disse ele em 1984. Eu lembro-me quando estava nos Estados Unidos ver um programa que passou na PBS norte-americana muito giro chamado *Life by the numbers* cujo locutor é o Danny Glover, aquele ator muito conhecido do Arma mortífera I, II, III e IV com o Mel Gibson. Mas ele era o locutor, e uma das mensagens que ele dizia nesse programa era «Enquanto que a energia da sociedade industrial são os combustíveis fosseis — petróleo, carvão, gás, etc. — a energia da sociedade do conhecimento é a matemática. Para criarmos conhecimento, queimamos matemática.» Esse programa é de 1996 e portanto já passaram mais de 15 anos sobre este programa, já passaram 30 anos sobre a frase do presidente da petrolífera da Exxon e se querem que vos diga estas frases são hoje ainda mais atuais do que eram há 30 anos ou do que eram há

20 anos, e vou ilustrar isto com um exemplo. Na semana passada tive a oportunidade de estar aqui neste mesmo anfiteatro para a cerimónia de encerramento das Olimpíadas Portuguesas da Matemática, em que houve uma palestra dada pelo Eng. António Murta de uma empresa, a Pathena, que é uma empresa essencialmente de produção de software, mas ele tem muitos, muitos interesses. É um empresário que apoia financeiramente as Olimpíadas já há 5 ou 6 anos, desde a primeira vez que o filho passou pelas Olimpíadas, e este ano foi convidado como orador para essa cerimónia de encerramento. E ele fez uma palestra que confesso que adorei, a palestra chamava-se «A matemática e eu». Ele mostrou como, na sua vida profissional, queimou e está sempre a queimar matemática como fonte de energia. E deu exemplos muito concretos. Ele trabalhou com empresas de software de bases de dados e deu exemplo como as noções de relação e de função são tão fundamentais para ele quando está a tratar com bases de dados. Mais, a álgebra e a geometria analítica multidimensional, muitíssimo importantes exatamente para essas bases de dados. Deu um exemplo giríssimo de uso de equações diferenciais numa situação de uma empresa por onde ele passou; era uma empresa que enrolava bobines gigantes de cabo e essas bobines tinham comprimentos e diâmetros variados e ele precisava de dimensionar não só a bobine onde ia ser enrolada, mas ter também uma noção do tamanho com que ia ficar e quanto cabo podia enrolar. Havia umas tabelas complicadíssimas na empresa e, cada vez que mudavam os diâmetros dos cabos isso tinha consequências muito chatas e havia um modelo para aquilo que envolvia uma equação diferencial simples. O facto dele a conseguir resolver tornou a empresa muito mais competitiva naquele nicho de mercado onde trabalhava. Falou também de um exemplo concreto com que ele lida agora e muitas empresas hoje em dia lidam, que é a questão de reformular anos e anos de software que foi construído. Há computadores a funcionar nas empresas há mais de 20 anos, muitas empresas vão construindo o seu código e as suas aplicações informáticas usando linguagens que hoje em dia são obsoletas e, para que as empresas se possam adaptar e crescer, têm que poder adaptar essas aplicações informáticas às linguagens que existem hoje em dia para que depois possam continuar a crescer a partir daí. A outra possibilidade é mandar para o lixo tudo o que foi feito ao longo de 30 anos e recomeçar do princípio, o que tem custos dramáticos. E a única maneira de se reconverter 30 anos de código de software é arranjar uma maneira automática de o fazer, porque são milhões de linhas de código e demoraria anos a uma equipa enorme de pessoas remodelar as

coisas código a código. Portanto isso teria custos completamente inportáveis. E de facto há imensa matemática discreta e teoria de grafos associada por exemplo a técnicas de fazer essa transformação automática de código para outro e ele está neste momento envolvido exatamente neste tipo de problemas e diz que para ele é uma vantagem competitiva enorme saber essa matemática, porque quando está a discutir com potenciais fornecedores, quando está a fazer um concurso para decidir quem é a empresa que vai nesta outra empresa fazer a transformação do código, ele pode falar com eles para ver se o que eles estão a dizer é verdade, faz sentido, ou se estão apenas a vender banha da cobra. Deu também um exemplo, com que eu termino, do metro de Londres, que todos os dias, cada vez que funciona, está a queimar matemática, neste caso matemática produzida em Portugal. A Siscog, que é uma empresa já com alguns anos, uma empresa portuguesa e que emprega muitos matemáticos, faz todos os horários de comboios e pessoal do metro de Londres. Também faz dos transportes ferroviários da Holanda, mas em particular do metro de Londres que é uma coisa gigantesca, com imensas linhas... É um problema de otimização de horários que ... Eu não sei, eu estive envolvido uma vez a fazer horários no Técnico, imagino que muitos de vocês já estiveram envolvidos a fazer horários da vossa escola, e é um problema ... bocado ... e que causa relações pessoais muito complicadas... (risos) Imaginem o que é ter de fazer os horários de todos os maquinistas, os condutores do metro de Londres, de todos os metros de Londres ... que satisfaçam não só os maquinistas como os utentes do metro. E não é só isso, há as planificações a 1 ano, a 3 meses, a 1 mês e há as planificações de contingência, quando uma linha tem uma avaria, ou quando há um atentado, ou quando há uma greve. Portanto são problemas de facto complicadíssimos que envolvem imensa matemática.

E portanto eu terminaria dizendo, e tentando contribuir um pouco para o mote que a Lurdes lançou no início

que é voar, eu terminaria talvez com uma frase que é um bocadinho redutora mas penso que traduz a importância que eu vejo nisto. Eu, se tivesse que dizer qual é a razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens, eu diria que é de natureza energética, porque sempre que ensinamos Matemática estamos a produzir e como produtores, como disse o Henrique, como professores, estamos a produzir energia. E, num país como o nosso em que não temos petróleo, não temos gás, esta é das melhores coisas que nós podemos fazer. É das melhores coisas que nós podemos fazer para o desenvolvimento do país e para o desenvolvimento de cada um dos nossos alunos, é dar-lhes essa energia que eles a seguir poderão queimar ao longo da sua vida, seja do ponto de vista apenas utilitário, seja depois ao longo da sua vida profissional, no trabalho que vierem a fazer, nas empresas que venham a criar e nós precisamos de produzir muita matemática que possa ser queimada aqui, tanto em Portugal como fora de Portugal, que há muita necessidade dessa matemática e nós não temos razão nenhuma para não a produzir e para com isso contribuímos de facto para uma melhor qualidade de vida tanto dos nossos alunos como do país em que vivemos. E termino.

LURDES FIGUEIRAL

ESCOLA SECUNDÁRIA ARTÍSTICA SOARES DOS REIS

ARSÉLIO MARTINS

ESCOLA SECUNDÁRIA JOSÉ ESTÊVÃO

HENRIQUE GUIMARÃES

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

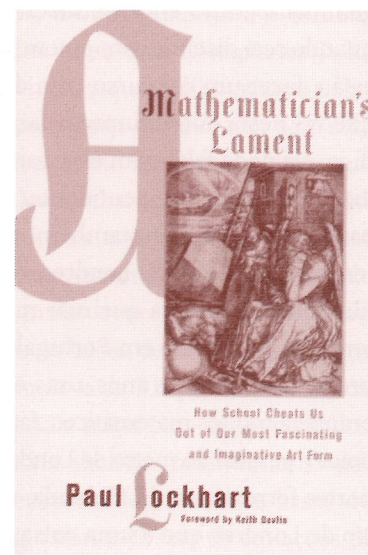
MIGUEL ABREU

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, UNIVERSIDADE DE LISBOA

Lamento de um matemático⁽¹⁾

PAUL LOCKHART

Neste número incluímos um extracto de um texto de Paul Lockhart, escrito em 2002, que Keith Devlin publicou em 2007 na sua coluna mensal *online* do magazine da *Mathematical Association of America*. P. Lockhart, investigador e professor universitário na Brown University, decidira dedicar-se ao ensino básico desde o ano 2000 e neste texto exprime as suas opiniões sobre o estado actual do ensino da matemática. O texto tornou-se muito famoso, deu origem a inúmeras reacções e foi traduzido em diversas línguas. Em 2009 foi publicado um livro com o mesmo título, contendo a versão integral do presente texto e algumas sequelas.



Paul Lockhart
A Mathematician's Lament.

Um músico acorda de um pesadelo terrível. No sonho vê-se num país em que a educação musical foi declarada obrigatória. «Estamos a ajudar os nossos alunos a tornarem-se mais competitivos num mundo cada vez mais dominado pelo som.» Educadores, escolas e o estado são chamados para este projecto de salvação nacional. São encomendados estudos, formadas comissões e tomadas decisões — tudo sem a participação de um único músico ou compositor.

Como é sabido que os músicos exprimem as suas ideias sob a forma de pautas musicais, estas estranhas rectas e pontos pretos devem tornar-se a «linguagem da música». Se pretendemos que os alunos adquiram alguma competência musical é imperativo que se tornem exímios nessa linguagem; seria sem dúvida insensato esperar que uma criança pudesse cantar uma canção ou tocar um instrumento sem ter tido uma aprendizagem prévia da notação e teoria musicais. Tocar e ouvir música, para não falar na composição de uma peça original, são considerados temas muito avançados e deixados de lado até ao ensino universitário, e mesmo até aos últimos anos da licenciatura.

Quanto ao ensino básico e secundário, têm por finalidade o treino dos alunos no uso desta linguagem — a manipulação de símbolos de acordo com um conjunto de regras fixas. «Nas aulas de música pegamos nas nossas pautas, o

professor escreve algumas notas no quadro, e nós temos de copiá-las para as pautas ou transpô-las para uma clave diferente. Temos de ter cuidado em usar as claves e as tonalidades certas, além de que o nosso professor é muito picuinhas e está sempre a ver se os círculos das semínimas estão completamente preenchidos. Uma vez, deu-nos um problema sobre a escala cromática e eu resolvi-o bem, mas o professor deu-me negativa por eu ter feito as hastes das notas ao contrário.»

Na sua clarividência, os educadores chegam rapidamente à conclusão que é possível dar este tipo de formação musical a alunos mesmo muito novos. De facto, um aluno do terceiro ano que não saiba completamente de cor o seu círculo de quintas é visto como um caso chocante. «Tenho de arranjar um explicador de música para o meu filho. Não faz sequer o trabalho de casa. Diz que é aborrecido. Limita-se a ficar sentado à janela, a trautear umas melodias e a improvisar canções cómicas.»

Nos últimos anos do secundário a pressão aumenta. A verdade é que os alunos têm de estar preparados para as provas nacionais e para os exames de admissão à universidade. Têm de fazer as disciplinas Escalas e Modos, Métrica, Harmonia e Contraponto. «É muito o que têm de aprender, mas mais tarde na universidade, quando finalmente ouvi-

rem tudo isto, darão valor a todo o trabalho que fizeram no secundário.» Naturalmente, são poucos os alunos que seguem cursos superiores de música, e portanto apenas alguns deles ouvirão alguma vez os sons representados pelos pontos negros. É importante, porém, que todos os cidadãos sejam capazes de identificar uma modulação ou uma passagem em estilo de fuga, independentemente do facto de que nunca ouvirão nenhuma. «Para dizer a verdade, muitos alunos não são bons em música. Aborrecem-se nas aulas, as suas competências são péssimas, e os trabalhos de casa são praticamente ilegíveis. A maior parte deles não liga nada à importância que a música tem no mundo de hoje; limitam-se a fazer o mínimo de disciplinas de música e a não pensar mais nisso. Possivelmente, umas pessoas são dotadas para a música e outras não. Mas ainda me lembro de uma miúda, que era sensacional! As pautas dela eram impecáveis — todas as notas nos sítios certos, caligrafia perfeita, sustenidos, bemóis, tudo muito belo. Ainda um dia há-de ser uma música fora de série.»

Acordando alagado em suores frios, o músico compreende, aliviado, que se tratou apenas de um sonho disparatado. «Claro!» pensa aliviado, «nenhuma sociedade alguma vez reduziria uma forma de arte tão bela e valiosa a uma coisa tão trivial e vazia; nenhuma cultura poderia ser tão cruel com as suas crianças que as privasse de um modo de expressão humano tão natural e gratificante. Que absurdo!»

Entretanto, num outro extremo da cidade, um pintor acaba de acordar de um pesadelo semelhante...

Fiquei surpreendido quando percebi que estava numa sala de aula normal — nem cavaletes, nem bisnagas de tinta. «Na realidade nós não pegamos em tintas até ao ensino secundário,» explicaram-me os alunos. «No sétimo ano estudamos principalmente tintas e espátulas.» Mostraram-me uma ficha de exercícios. Num dos lados, havia amostras de tinta e espaços em branco onde os alunos deviam escrever os respectivos nomes. «Gosto de pintura,» disse-me um deles, «dizem-me o que tenho de fazer e eu faço. É fácil!»

Depois da aula falei com um dos professores. «Então os vossos alunos não pintam nada realmente?» perguntei. «Bom, no próximo ano fazem a disciplina Pré-Pintura-por-Números. Isso prepara-os para a sequência principal da Pintura-por-Números no secundário. Põem em prática o que aprenderam aqui e aplicam-no a situações reais de pintura — molhar o pincel na tinta, limpá-lo, coisas deste tipo. Está claro que vamos classificando os alunos de acordo com as suas habilidades. Os que se revelam pintores excelentes — que conhecem as tintas e os pincéis de trás para a frente — vão para a pintura a sério um pouco mais cedo e alguns deles até fazem os cursos avançados que contam para

o currículo na universidade. Mas fundamentalmente o que estamos a fazer é tentar dar a estes jovens uma boa base sobre tudo que tem a ver com a pintura, e assim, quando saem daqui para o mundo real e pintam a cozinha de suas casa, não sai tudo uma desgraça.»

«Hum, aquelas disciplinas do secundário de que falou...»

«A Pintura-por-Números? Temos tido muito mais inscrições ultimamente. Julgo que isso se deve principalmente aos pais que desejam garantir que os filhos entram numa boa universidade. Nada melhor para isso do que terem na caderneta escolar do secundário Pintura Avançada-por-Números.»

«Porque é que as universidades valorizam a capacidade que eles apresentam para colorir espaços com as cores indicadas pelos números?»

«Porque isso, está a ver, revela um pensamento lógico claro. E evidentemente se um estudante tenciona frequentar um curso de ciências visuais, como moda ou decoração de interiores, então é realmente boa ideia ter já despachado as cadeiras de pintura na escola secundária.»

«Estou a ver... E quando é que os estudantes pintam livremente, numa tela em branco?»

«Até parece um dos meus professores! Estavam sempre a falar em exprimirmos a nossa personalidade e os nossos sentimentos e coisas do género — coisas abstractas bastante vanguardistas. Eu próprio tenho uma licenciatura em Pintura, mas nunca trabalhei muito com telas em branco. Uso apenas os kits de Pintura-por-Números fornecidos pela escola.»



Lamentavelmente, o nosso actual sistema de educação matemática é exactamente um pesadelo deste tipo. De facto, se eu tivesse que conceber um mecanismo com o objectivo declarado de destruir a curiosidade natural das crianças e o seu gosto pela construção de padrões, provavelmente não conseguiria fazer melhor do que o que hoje se faz — não teria simplesmente imaginação para inventar o tipo de ideias disparatadas e estupidificantes que constituem a educação matemática contemporânea.

Toda a gente reconhece que qualquer coisa está errada. Os políticos dizem, «precisamos de critérios de maior exigência». As escolas dizem, «precisamos de mais dinheiro e equipamento». Os educadores dizem uma coisa, e os professores dizem outra. Estão todos errados. Os únicos que compreendem o que se passa são precisamente os que são mais acusados e menos ouvidos: os alunos. Os que dizem: «as aulas de matemática são estúpidas e chatas,» e têm razão.

A primeira coisa que temos de compreender é que a matemática é uma arte. A diferença entre a matemática e as outras artes, como a música e a pintura, é que a nossa cultura não a reconhece como tal. Toda a gente compreende que os poetas, os pintores e os músicos criam obras de arte, e se exprimem através de palavras, imagens e sons. De facto, a nossa sociedade é particularmente generosa quando se trata de expressões criativas: arquitectos, chefes de cozinha, e mesmo realizadores de televisão são considerados artistas no seu trabalho. Porque não então os matemáticos?

Parte do problema é que ninguém tem a menor ideia do que fazem os matemáticos. A percepção mais vulgar parece ser a de que os matemáticos estão de certo modo associados à ciência — talvez ajudem os cientistas com as suas fórmulas, ou introduzam números importantes nos computadores por uma ou outra razão. Não há dúvida de que se o mundo tivesse de ser dividido entre «sonhadores poéticos» e «pensadores racionais» a maior parte das pessoas colocaria os matemáticos na segunda categoria.

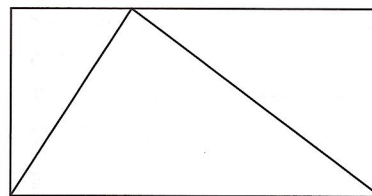
No entanto, nada tem tanto a ver com o sonho, a poesia, não há nada tão radical, subversivo e psicadélico como a matemática. É tão apaixonante sob todos os aspectos como a cosmologia e a física (os matemáticos chegaram à noção de «buracos negros» antes de os astrónomos os terem descoberto) e permite uma maior liberdade de expressão do que a poesia, a arte ou a música (que dependem fortemente das propriedades do universo físico). A Matemática é a mais pura das artes, assim como a mais incompreendida.

Seja-me pois permitido explicar o que é a matemática, e o que fazem os matemáticos. Não há melhor maneira de começar do que com a excelente descrição de G.H.Hardy:

Um matemático, tal como um pintor ou um poeta, é um criador de padrões. Se os seus padrões são mais duradouros do que os deles, é porque são feitos de ideias.

Quer dizer que os matemáticos se entretêm a criar padrões de ideias. Que espécie de padrões? Que espécie de ideias? Ideias sobre o rinoceronte? Não, deixamos isso aos biólogos. Ideias sobre linguagem e cultura? Não, normalmente não. Essas são coisas complicadas de mais para o gosto da maior parte dos matemáticos. Se há qualquer coisa de parecido com um princípio estético unificador na matemática, então será este: *o que é simples é belo*. Os matemáticos gostam de pensar sobre as coisas mais simples que há, e as coisas mais simples que há são *imaginárias*.

Por exemplo, se estou numa de pensar em formas — o que acontece frequentemente — posso imaginar um triângulo dentro de uma caixa rectangular:

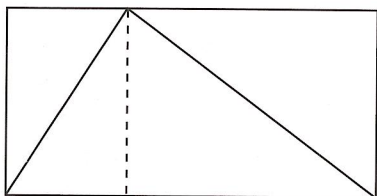


Faço conjecturas quanto à porção da caixa que o triângulo ocupa. Dois terços, talvez? O que interessa é compreender que não estou a falar deste desenho de um triângulo dentro de uma caixa. Nem estou a falar de um triângulo de metal que faz parte de um sistema de vigas de uma ponte. Não existe aqui nenhuma finalidade prática. Estou apenas a *divertir-me*. A matemática é isso — conjecturar, divagar, distrair-se com a sua imaginação. Quanto mais não seja, porque a questão de saber que espaço da caixa é ocupado pelo triângulo nem sequer faz sentido em relação a objectos reais, materiais. Mesmo o triângulo material feito com todo o cuidado continua a ser um conjunto complexo de átomos inquietos; muda de tamanho a cada minuto. A não ser que queiramos falar de algum tipo de dimensões *aproximadas*. É aqui que intervém a estética. Não é nada simples, e consequentemente é uma questão incómoda que depende de todo o tipo de pormenores do mundo real. Deixamos isso para os cientistas. A questão *matemática* é sobre um triângulo imaginário dentro de uma caixa imaginária. Os lados do triângulo e do rectângulo são perfeitos porque quero que o sejam — é o tipo de objectos que prefiro para pensar. Esta é uma característica fundamental da matemática: as coisas são aquilo que queremos que sejam. Temos infinitas escolhas; não temos a realidade a atrapalhar-nos.

Por outro lado, feitas as escolhas (por exemplo, posso escolher se o triângulo é simétrico, ou não), as nossas criações seguem o seu caminho, quer nos agrade ou não. É isso que há de espantoso na construção de padrões imaginários: eles respondem-nos! O triângulo ocupa uma certa porção da caixa, e não tenho nenhum poder para decidir que porção é essa. Há ali um número qualquer, talvez seja dois terços, talvez não seja, mas não sou eu a dizê-lo. Tenho de *descobrir* qual é.

Assim, põmo-nos a divagar e a imaginar o que quer que seja, a fazer padrões e a colocar questões acerca deles. Mas como respondemos a essas questões? De modo nenhum como na ciência. Não posso fazer experiências com tubos de ensaio e com equipamentos ou seja lá o que for que me possam dizer a verdade sobre uma criação da minha imaginação. O único processo para atingir a verdade sobre as coisas que imaginamos é usando a imaginação, e isso é difícil.

No caso do triângulo na caixa, o que vejo é qualquer coisa de simples e bonito:



Se corto o rectângulo em duas peças como na figura, vejo que cada peça é dividida diagonalmente ao meio pelos lados do triângulo. Portanto há tanto espaço dentro como fora do triângulo. Isto significa que o triângulo deve ocupar exactamente metade da caixa!

É esse o aspecto e a sensação que uma peça de matemática oferece. Esta pequena narrativa é um exemplo da arte do matemático: formular perguntas simples e elegantes acerca das criações da nossa imaginação, e elaborar explicações satisfatórias e harmoniosas. Não há realmente nada de comparável a este mundo das ideias puras; é fascinante, é divertido e é de graça!

Mas de onde terá surgido esta minha ideia? Como sabia eu traçar aquele segmento? Como é que um pintor sabe onde tocar com o pincel? Inspiração, experiência, tentativa e erro, pura sorte. É aí que está a sua arte, criar estes pequenos poemas de pensamento, estes sonetos de pura razão. Há qualquer coisa de maravilhosamente transformacional nesta forma de arte. A relação entre o triângulo e o rectângulo era um mistério, e de um momento para o outro aquele pequeno segmento tornou-a óbvia. Não era capaz de ver, e de repente passei a ser. De certo modo, consegui criar beleza pura e profunda a partir do nada, e transformar-me também a mim nesse processo. A arte não é isto mesmo?

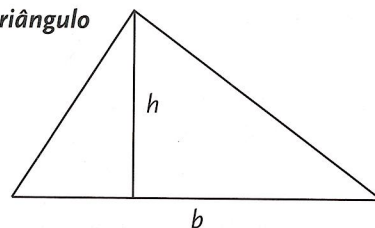
É por isso que é tão desolador ver o que está a ser feito à matemática na escola. Esta rica e fascinante aventura da imaginação foi reduzida a uma conjunto estéril de «factos» a memorizar e de procedimentos a seguir. Em lugar de uma pergunta simples e natural sobre formas, e um processo criativo e gratificante de invenção e descoberta, o que servem aos alunos é isto:

«A área de um triângulo é igual ao produto de metade da sua base pela sua altura». Aos alunos é pedido que memorizem esta fórmula e que a «apliquem» repetidamente em «exercícios». Perdeu-se a emoção, a alegria, e mesmo a frustração e o sofrimento do acto criativo. Já nem sequer é proposto um *problema*. A pergunta foi feita e respondida ao mesmo tempo — não ficou nada para o aluno fazer.

Mas permitam-me deixar claro a que é que me oponho. Não é às fórmulas, nem à memorização de factos interessantes. Isso é aceitável em contexto, e tem o seu lugar tal

Fórmula da área do triângulo

$$A = 1/2 bh$$



como a aprendizagem de um vocabulário — ajuda-nos a criar obras de arte mais ricas e elaboradas. Mas o mais importante não é o *facto* de os triângulos ocuparem metade das suas caixas. O importante é a bela *ideia* de o sectionar com um segmento, e como isso pode inspirar outras belas ideias e avanços criativos em outros problemas — o que a mera afirmação de um facto nunca nos pode dar.

Quando retiramos o processo criativo e deixamos apenas o resultado desse processo, estamos possivelmente a garantir que ninguém se vai empenhar a sério na questão. É como *dizer* que Miguel Ângelo criou uma bela escultura, sem me deixarem *vê-la*. Como pode tal coisa servir-me de inspiração? (E obviamente é ainda pior — pelo menos dá-se a entender que *existe* uma arte da escultura que não me é permitido admirar).

Se nos concentramos no *quê* e deixamos de fora o *porquê*, a matemática reduz-se a uma concha vazia. A arte não está na «verdade» mas na explicação, na argumentação. É a argumentação em si própria que fornece à verdade o seu contexto e determina o que realmente é dito e o seu significado. Matemática é a *arte da explicação*. Se negamos aos alunos a oportunidade de se ocuparem nesta actividade — propôr os seus próprios problemas, fazer conjecturas e descobertas, cometer erros, enfrentarem as suas frustrações de modo criativo, terem uma inspiração, engendramos as suas próprias explicações e demonstrações — estamos a negar-lhes a própria matemática. Por isso, não estou a lamentar a presença de factos e de fórmulas no nosso ensino, estou sim a lamentar a falta de *matemática* no nosso ensino de matemática.

Se o professor de arte nos dissesse que pintar consiste em preencher espaços numerados, percebíamos logo que havia ali qualquer coisa de errado. Temos a informação da cultura — existem museus de arte e galerias, bem como arte na nossa própria casa. A pintura é bem compreendida pela sociedade como sendo um meio de expressão do homem. Analogamente, se a professora de ciências nos tentasse convencer que a astronomia consiste em prever o futuro de uma pessoa com base na sua data de nascimento, saberíamos que estava doida — a ciência entrou de tal modo na cultura que quase toda a gente tem conhecimentos sobre átomos, galáxias e leis da natureza. Mas se o professor de

matemática, explícita ou tacitamente, nos transmitir a noção que a matemática consiste em fórmulas e definições e em memorizar algoritmos, quem nos esclarecerá?

O problema cultural é um monstro que se reproduz a si próprio: os alunos aprendem o que é a matemática com os professores, e os professores aprenderam-no com os seus próprios professores, e assim esta falta de compreensão e de apreço pela matemática reproduz-se indefinidamente. Pior do que isso, a perpetuação desta «pseudo-matemática», esta ênfase na manipulação exacta mas sem sentido de símbolos, cria a sua própria cultura e o seu próprio sistema de valores. Aqueles que se tornaram hábeis nessa manipulação colhem uma boa dose de auto-estima com o seu sucesso. A última coisa que desejam ouvir é que a matemática na verdade tem a ver com a pura criatividade e a sensibilidade estética. Muitos estudantes licenciados ficam chocados ao descobrirem, depois de passarem uma década a ouvir dizer que eram «bons em matemática», que de facto não têm qualquer talento matemático e que são apenas muito bons a seguir procedimentos. A matemática não consiste em seguir procedimentos, consiste em criar novos procedimentos.

E nem sequer mencionei a falta de crítica matemática na escola. Em nenhuma altura é concedido aos alunos acesso ao segredo de que a matemática, como toda a literatura, é criada por seres humanos para o seu próprio prazer; de que as obras de matemática são objecto de avaliação crítica; de que podemos ter e desenvolver o *gosto* matemático. Uma obra de matemática é como um poema, e podemos perguntar se satisfaz os nossos critérios estéticos: Será sólida esta argumentação? Faz sentido? É simples e elegante? Ajuda-nos a aproximarmo-nos da raiz do problema? Naturalmente, na escola a crítica não existe — não há nenhuma obra de arte para criticar!

Por que razão não queremos que os nossos alunos aprendam a fazer matemática? Será porque não acreditamos neles, porque achamos que é demasiado difícil? Se parecemos achá-los capazes de apresentar argumentos e de chegar às suas próprias conclusões acerca de Napoleão, porque não acerca de triângulos? Penso que isso se deve simplesmente ao facto de que nós como cultura não sabemos o que é a matemática. A ideia que nos transmitem é que se trata de qualquer coisa muito fria e altamente técnica, que ninguém poderia alguma vez compreender — uma profecia auto-realizada, se alguma vez houve alguma.

Seria já suficientemente mau se na cultura reinasse a ignorância matemática, mas de facto o pior é que as pessoas julgam *saber* realmente do que trata a matemática — e são dominadas pelo manifesto mal-entendido de que a mate-

mática é, de certo modo, útil para a sociedade! Esta é desde logo uma enorme diferença entre a matemática e as outras artes. A matemática é vista pela cultura como uma espécie de ferramenta para a ciência e para a tecnologia. Toda a gente sabe que a poesia e a música servem o puro prazer e a elevação e enobrecimento do espírito humano (e daí a sua virtual eliminação do currículo da escola pública), mas que, pelo contrário, a matemática é *importante*.

SIMPLICIO⁽²⁾: Será que tentais afirmar que a matemática não é útil nem tem aplicações práticas na sociedade?

SALVIATI: Claro que não. Estou apenas a sugerir que o facto de alguma coisa ter consequências práticas não significa que seja esse o seu objecto. A música pode conduzir exércitos na guerra, mas não é essa a razão que leva alguém a escrever sinfonias. Miguel Ângelo decorou um tecto, mas não estou convencido que tinha ideias mais sublimes na sua mente.

SIMPLICIO: Mas não precisamos que as pessoas aprendam essas aplicações úteis da matemática? Não precisamos, por exemplo, de contabilistas e de carpinteiros?

SALVIATI: Quantas pessoas usam realmente alguma desta «matemática prática» que se diz terem aprendido na escola? Julgais que andam por aí carpinteiros a usar a trigonometria? Quantos adultos se lembram de como se dividem fracções ou se resolve uma equação do 2º grau? É evidente que os actuais programas de ensino prático não estão a resultar, e há boas razões para tal: são incrivelmente maçadores e de qualquer modo ninguém os utiliza. Porque razão então os consideram tão importantes? Não percebo de que serve à sociedade ter os seus membros a andar por aí com vagas lembranças de fórmulas algébricas e de diagramas geométricos e com uma recordação viva do ódio que lhes tinham. No entanto, teria tido alguma utilidade mostrar-lhes qualquer coisa de belo e dar-lhes a oportunidade de sentirem o prazer de serem pensadores criativos, flexíveis, e com espírito aberto — aquilo que uma *verdadeira* educação matemática poderia oferecer.

SIMPLICIO: Mas as pessoas devem ser capazes de fazer contas ao seu dinheiro, não é verdade?

SALVIATI: Estou convencido de que a maior parte das pessoas usam a calculadora para a sua aritmética corrente. E porque não? É muito mais fácil e mais fiável. Mas o que eu pretendo mostrar não é simplesmente que o actual sistema é tremendamente mau, mas antes que aquilo que lhe falta é maravilhosa-

mente bom! A matemática devia ser ensinada como arte pela arte. Os aspectos «utilitários» deviam surgir naturalmente como produtos colaterais. Beethoven não teria qualquer dificuldade em escrever um *jingle* publicitário, mas a sua motivação para aprender música era a criação de beleza.

SIMPLICIO: Mas nem toda a gente se destina a ser artista.

Que fazer com os jovens que «não tem queda para a matemática»? Como entram no vosso esquema?

SALVIATI: Se todos experimentassem a matemática no seu estado natural, com todo o prazer do desafio e das surpresas que isso comporta, penso que veríamos uma mudança radical na atitude dos alunos em relação à matemática, e na nossa concepção do que significa ser «bom em matemática.» Estamos a perder muitos matemáticos potencialmente bem dotados — pessoas criativas e inteligentes que com razão rejeitam o que lhes aparece como uma matéria estéril e sem sentido. São simplesmente demasiado inteligentes para perderem tempo com essas tretas.

SIMPLICIO: Mas não achais que se a aula de matemática passasse a ser mais como uma aula de arte muitos alunos não aprenderiam realmente nada?

SALVIATI: Tal como agora não estão a aprender nada! Era melhor não haver sequer aulas de matemática do que

fazer o que se está a fazer. Pelo menos alguns deles poderiam descobrir por si próprios algo de belo.

SIMPLICIO: Isso quer dizer que eliminaria a matemática do currículo escolar?

SALVIATI: A matemática já foi eliminada! A única dúvida é como preencher o vazio oco e insípido que ainda resta. Obviamente preferia substituí-lo por uma experiência activa e agradável com ideias matemáticas.

SIMPLICIO: Mas quantos professores de matemática sabem o suficiente para a ensinarem desse modo?

SALVIATI: Muito poucos. E isso não passa da ponta do iceberg...

Notas

- (1) Tradução de *A Mathematician's Lament* de Eduardo Velloso (revista por José Ferreira de Lima). O tradutor escreve de acordo com a antiga grafia.
- (2) (Nota do tradutor) Diálogos imaginários entre os dois personagens *Simplício* e *Salviati* são incluídos ao longo do texto por Lockhart. Recorde-se que estes dois personagens foram utilizados por Galileu na sua obra *Diálogo sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo*, em que punha em discussão o sistema geocêntrico e o sistema heliocêntrico.

NOTA INTRODUTÓRIA

Apresentamos nesta secção um conjunto de obras — cuja escolha é naturalmente discutível — relacionadas com o tema deste número da revista e que são citadas em algum dos artigos ou referidas na bibliografia. A respeito de cada obra, apresentamos uma imagem da capa, dados identificando a obra — título, autor, editor, ... — e um texto curto descrevendo o seu conteúdo, normalmente extraído da contracapa, da introdução ou do texto de apresentação no *site* da *web* em que está disponível para aquisição.

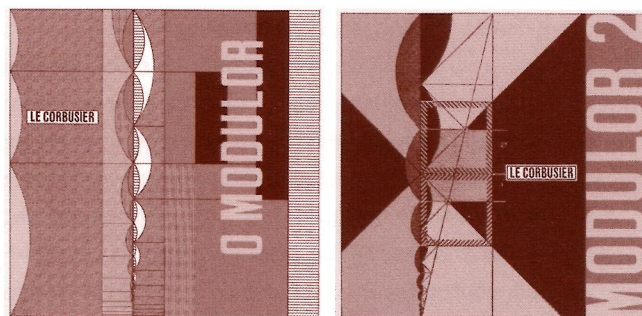
Eduardo Veloso

LE CORBUSIER, *O MODULOR*.

Tradução, introdução e notas de Marta Sequeira. Lisboa: Orfeu Negro, 2010.

ISBN: 978-989-95565-7-7.

Texto em português



O Modulor consiste num sistema de medidas concebido por Le Corbusier entre 1943 e 1950, assente nas dimensões do corpo humano e na matemática. Trata-se de uma fórmula, realizada com base no quadrado duplo, na série de Fibonacci e no rectângulo de ouro, a partir da qual seria possível gerar duas séries de medidas em harmonia com o corpo humano e entre si. Estas séries poriam em relação dois sistemas métricos - o sistema anglo-saxónico e o métrico decimal. A sua aplicação permitiria unir o mundo da construção, dividido em duas partes: a dos metros e centímetros e a dos pés-polegadas. (Do prefácio da edição portuguesa, por Marta Sequeira, Janeiro de 2009)

**MATHEMATICS IN
WESTERN CULTURE**
MORRIS KLINE

KLINE, MORRIS. *MATHEMATICS IN WESTERN CULTURE*.

Oxford University Press. 1965 (1ª ed.)

ISBN-10: 019500714X

Texto em inglês

[trata-se ainda] do melhor livro sobre história e filosofia da matemática para estudantes da licenciatura. É especialmente apropriado no que respeita ao período da Revolução Científica — Janet A. Fitzgerald, Molloy College, NY (Excerto extraído do *site* da editora)

EMMER, MICHELE;
SCHATTSCHEIDER, DORIS (ORGAN.)
M. C. ESCHER'S LEGACY

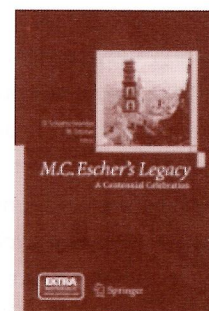
Coleção de artigos provenientes da
M.C. Escher Centennial Conference,
Roma 1998

Springer: 1ª edição 2003.

2ª edição 2005

ISBN-10: 3540201009

Texto em inglês

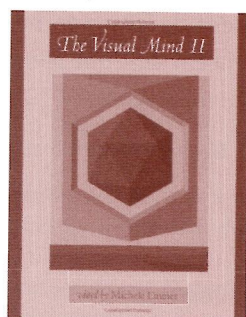


[...] existe conteúdo suficiente para proporcionar valiosas aquisições para o leitor interessado, seja qual for a sua disciplina. No interior dos vários artigos existem pequenos excertos que iluminam os propósitos de Escher, e as suas relações com os seus amigos matemáticos (Coxeter, Penrose, Ernst e todos os outros). Mesmo sendo curtos, a sua leitura é compensadora.

Se é um educador num dos campos referidos abaixo, este livro merece sem qualquer dúvida uma leitura. Se eu fosse bibliotecária de uma instituição dizendo respeito a quaisquer dois dos domínios seguintes: arte, matemática, filosofia, física, psicologia.... proporia sem hesitação a compra de três exemplares [...] o CD-ROM é um excelente complemento do livro e contém muito material adicional, incluindo excertos em vídeo de algumas das conferências. (Reza Sarhangi, *Notices of the AMS*, Abril 2003 — para o texto integral ver o *site* <http://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf>)

EMMER, MICHELE. *THE VISUAL MIND II*

(Leonardo Book Series)
MIT Press, 2006
ISBN-10: 0262550636
Texto em inglês



balta e começou um debate público que ainda está hoje vivo nos mídia. A reedição de *The Two Cultures* e da obra seguinte *The Second Look* (na qual Snow responde à controvérsia, quatro anos depois) tem uma introdução por Stefan Collini, apresentando a história e contexto do debate, as suas implicações e consequências. Os assuntos discutidos por Snow despertam hoje tanto interesse como quando ele os apresentou da primeira vez, em 1959. (Excerto da apresentação do livro, na contracapa.)

EMMER, MICHELE.
MATEMATICA E CULTURA 2011

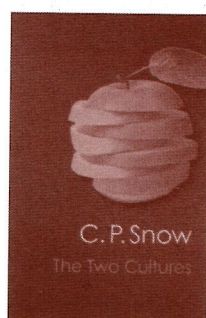
Springer, 2011
ISBN-10: 8847018536
Texto em italiano



Formas matemáticas expressas visualmente podem proporcionar prazer estético; certas obras de arte — a escultura da banda de Moebius de Max Bill, por exemplo — podem parecer matemática tornada visível. Esta colecção de ensaios por artistas e matemáticos prolonga a discussão sobre as conexões entre arte e matemática que se iniciou no amplamente lido primeiro volume do *The Visual Mind* de 1993. Ao longo da história matemáticos criaram formas e relações, e algumas destas podem ser expressas visualmente. A tecnologia da computação permite-nos visualizar formas e relações matemáticas com novos detalhes usando, entre outras técnicas, modelação 3D e animação. *The Visual Mind* propõe-se comparar ideias visuais de artistas e matemáticos — não para coleccionar ideias abstractas de um tema geral, mas para permitir que pontos de vista distintos se encontrem. Os autores dos ensaios, que incluem a historiadora de arte Linda Dalrymple Henderson e o realizador Peter Greenaway, estudam matemática e estética, geometria e arte, matemática e arte; geometria, computação gráfica e arte; e visualização e cinema. Discutem tópicos como estética para computadores, o Museu Guggenheim de Bilbao, cubismo e relatividade na arte do século XX, o valor estético da optimização geométrica e matemática e cinema. (Apresentação do livro na Amazon)

SNOW, C. P.. *THE TWO CULTURES*.

Cambridge University Press, 1998.
ISBN 978-1-107-60614-2

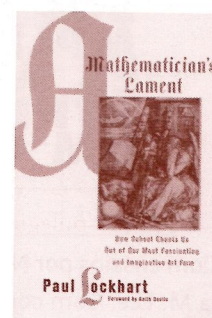


A ideia de que a nossa sociedade, o seu sistema de educação e a sua vida intelectual, é caracterizada por uma separação entre duas culturas — artes e humanidades de um lado e as ciências do outro — tem uma história já longa. Mas foi a conferência Rede em 1959 que a trouxe para a ri-

A partir de 1997 tem início o projecto Matemática e Cultura na Universidade de Ca' Foscari em Veneza, um encontro que não se dirige apenas aos matemáticos, aos professores e aos estudantes do secundário. Todos os anos se realiza um encontro sobre o tema, com matemáticos, artistas, filósofos, arquitectos, músicos, escritores, realizadores de cinema. Já intervieram 350 oradores ao longo destes anos e esse encontro tornou-se uma referência quanto aos temas aí tratados. As actas são publicadas pela Springer. (Do artigo de Michele Emmer neste número da E & M)

LOCKHART, PAUL.
A MATHEMATICIAN'S LAMENT

Bellevue Literary Press, N. York, 2009
SBN 978-1-934137-17-8
Texto em inglês



Paul Lockhart, um brilhante investigador matemático que dedicou a sua carreira a ensinar matemática nos primeiros anos, mostra a matemática como criativa e bela e rejeita os métodos de ensino que provocam a ansiedade habitual. Espirituoso e acessível, o seu controverso ponto de vista provocará um animado debate entre pais e educadores e vai alterar para sempre o modo como pensamos sobre a matemática. (Da descrição do livro, na contracapa)

HENDERSON, LINDA DALRYMPLE.
*THE FOURTH DIMENSION AND
NON-EUCLIDEAN GEOMETRY IN
MODERN ART*

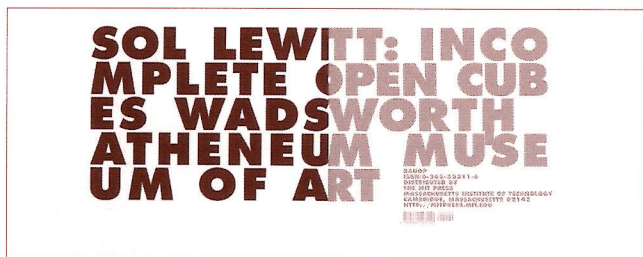
(Leonardo Book Series) MIT Press,
2ª edição revista, 2013
ISBN-10: 0262582449
Texto em inglês



Neste estudo inovador, publicado pela primeira vez em 1983 e indisponível há mais de uma década, Linda Dalrymple Henderson demonstra que dois conceitos de espaço para lá da imediata percepção — o espaço curvo da geometria não-euclidiana e, mais importante, a quarta dimensão do espaço — foram centrais no desenvolvimento da arte moderna. A possibilidade de uma quarta dimensão espacial sugeriu que o nosso mundo podia ser apenas uma sombra ou secção de uma existência a uma maior dimensão. Esta ideia iconoclasta encorajou uma inovação radical num conjunto de artistas do início do séc. XX, desde os Cubistas Franceses, Futuristas Italianos e Marcel Duchamp até Max Weber, Kazimir Malevich e os artistas do De Stijl e do Surrealismo. (Da descrição do livro, na contracapa)

BAUME, NICHOLAS. *SOL LEWITT: INCOMPLETE OPEN CUBES*

MIT Press, 2001
ISBN-10: 0262523116
Texto em inglês

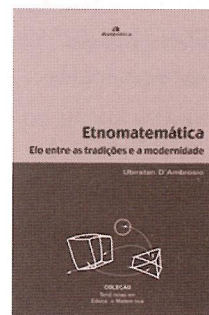


Com ensaios por Nicholas Baume, Jonathan Flatley e Pamela M. Lee. Com começo em 1974, *Incomplete Open Cubes* é uma expressão sofisticada e elaborada de um produto da arte conceptual de Sol LeWitt, um dos artistas abstractos mais influentes da sua geração. Nenhum outro «serial project» de LeWitt ou de um seu contemporâneo abarca tão eloquentemente tantas questões artísticas centrais da época. *Incomplete Open Cubes* exemplifica o desenvolvimento de uma ideia simples que se torna, nas palavras de LeWitt, «uma máquina que faz a arte.» Esta obra cria uma nova ma-

neira de fazer arte, na sua utilização ambiciosa de um sistema em série que permite uma espécie de «composição não-composicional». (Da descrição do livro feita na Amazon)

D'AMBRÓSIO, UBIRATAN.
*ETNOMATEMÁTICA — ELO ENTRE AS
TRADIÇÕES E A MODERNIDADE*

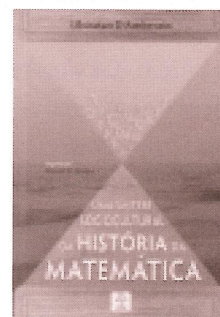
Autêntica Editora,
ISBN-9788575260197
Texto em português



Ubiratan D'Ambrosio apresenta, neste livro, seus mais recentes pensamentos sobre Etnomatemática, uma tendência da qual é um dos fundadores. Ele propicia ao leitor uma análise do papel da Matemática na Cultura Ocidental e da noção de que Matemática é apenas uma forma de Etno-Matemática. O autor discute como a análise desenvolvida é relevante para a sala de aula. Faz ainda um apanhado de diversos trabalhos, já desenvolvidos no país e no exterior, dentro dessa área. (Sinopse extraída do site da editora)

D'AMBRÓSIO, UBIRATAN. *UMA SÍNTESE
SOCIOCULTURAL DA HISTÓRIA DA
MATEMÁTICA*

Editora PROEM, 2011
ISBN-9788587564252
Texto em português



O objetivo deste livro é fazer uma revisão panorâmica e crítica, destacando momentos, indivíduos e resultados que eu considero os mais relevantes na evolução da Matemática ocidental, relacionando-a sempre com a Educação e com a Filosofia.

O livro tem caráter de guia ou manual para pesquisa. Praticamente, cada parágrafo do livro pode dar origem a uma nova pesquisa. É um convite ao leitor para continuar a explorar vários temas deixados em aberto. As notas abundantes orientam essas pesquisas. (Excerto da Introdução do livro)

Nota: o autor escreve de acordo com a antiga grafia.

APM – 2014

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo *APMinformação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2014

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento (@-sócio)	15,00 €
Estudante s/vencimento (sócio regular)	38,50 €
Professor aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	60,00 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	60,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	80,00 €
Modalidade 1 + <i>Quadrante</i>	75,00 €
Modalidade 2 + <i>Quadrante</i>	100,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço <http://www.apm.pt>

Assinaturas das revistas para 2014

		<i>Educação e Matemática</i> (inclui atas ProfMat)	<i>Quadrante</i>
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	47,00 €	28,00 €
	Estrangeiro		32,00 €

Editorial

- 01 **A cultura matemática como finalidade da educação obrigatória**
Eduardo Veloso e Rita Bastos

Artigos

- 03 **Matemática e cultura**
Michele Emmer
- 11 **Sol LeWitt — arte contemporânea e matemática**
Eliaana Manuel Pinho
- 23 **Do canto gregoriano a Jacques Brell**
Simetrias e estruturas matemáticas em música
Carlota Simões
- 35 **Da neve hexagonal**
Lurdes Figueiral
- 44 **Educação Matemática para Cidadania e Criatividade**
Ubiratan D'Ambrosio
- 51 **Uma folha de caderno diário de matemática**
Isabel Cristina Dias
- 61 **Aprender Matemática: porquê e para quê?**
Excertos das intervenções do Painel realizado no ProfMat2013

Secções

- 60 **O problema deste número** *José Paulo Viana*
O losango de Vasarely
- 10 **Materiais para a aula de Matemática**
Cubos incompletos, *Lina Brunheira*
- 56 **Materiais para a aula de Matemática**
Geometricamente falando: raízes, quadrados e números
Helena Isabel Sousa, Isabel Cristina Dias
- 78 **Leituras**
Eduardo Veloso
- 72 **Para este número seleccionámos**
Lamento de um matemático, *Paul Lockhart*
- 58 **Matemática do Planeta Terra 2013** *Joana Latas*
O sol eclipsado!, *Joana Latas, Luís Cardoso, Ricardo Gafeira*