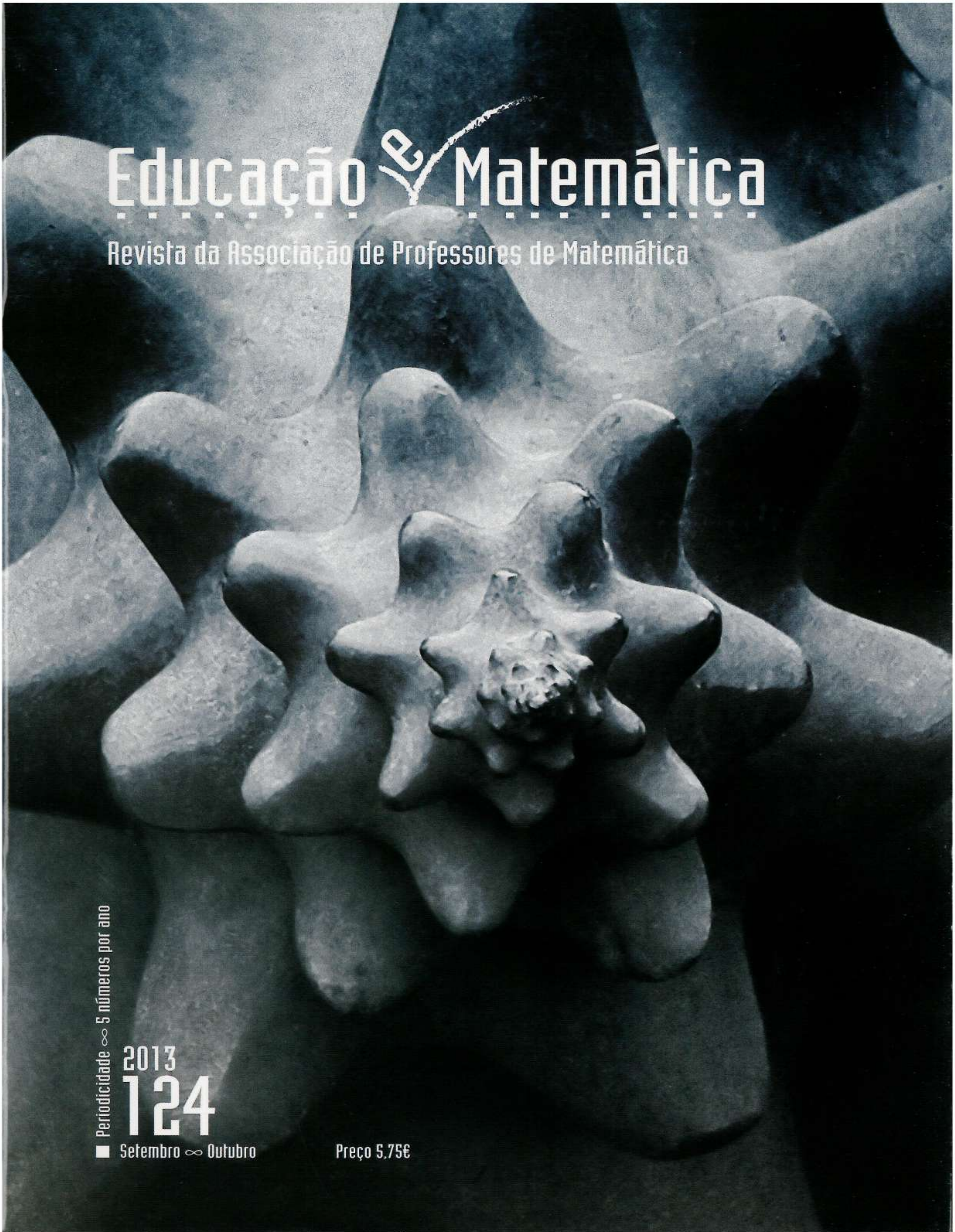
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2013

124

Setembro ∞ Outubro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Lina Brunheira
Subdiretora Adelina Precatado
Redação Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Irene Segurado
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Alvega

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2013
Ana Paula Canavarro Estatística na Educação Matemática
Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa
Data da publicação Outubro 2013
Tiragem 1800 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
ASPRINT, Apolinário Silva, Unipessoal Lda
Núcleo Empresarial de Mafra
Av. Dr. Francisco Sá Carneiro, Bloco C – 12 cave
2644–006 Mafra

Depósito Legal n.º 72011/93
Registo no ICS n.º 124051
ISSN 0871–7222
Porte Pago

Sobre a capa

O capa deste número é uma alusão ao evento «Matemática do planeta Terra».

Trata-se de um detalhe de uma concha marinha, cuja estrutura irradia «Matemática» em diversas formas: para lá dos óbvios aspectos geométricos, uma menos óbvia presença de aspectos recursivos e auto-referentes.

Sendo verdade que as leis da ciência governam o funcionamento do universo. A um nível mais profundo tudo parece ser governado pelas leis da Matemática.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Paula Canavarro, Fernando Luís Santos, Hélia Gonçalves Pinto, Hélia Oliveira, João Paz, José Cascalho, José Luiz Pastore Mello, Leonor Santos, Marisa Gregório, Nélia Amado, Pedro Sarmento, Ricardo Teixeira, Rogério Ferreira, Rosa Antónia Tomás Ferreira, Sónia Barbosa, Tânia Melo.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista.

Quem quer (ou pode) ser professor?

A vaga de exames que assolou o nosso sistema educativo estende-se agora ao acesso à profissão docente. Existe a ilusão, ou talvez não, que através da introdução de exames se poderá «assegurar que o exercício efectivo de funções docentes fica reservado a quem possui todos os requisitos necessários a um desempenho profissional especializado e de grande qualidade», segundo o decreto regulamentar aprovado em conselho de ministros. Uma tremenda falácia!

Quais são os requisitos necessários a um desempenho profissional de grande qualidade? O professor precisa, naturalmente, ter bom domínio da língua portuguesa, conhecimento especializado, no caso que nos ocupa de matemática, e conhecimento didático. As questões que se levantam à *possibilidade* e à *oportunidade* de tais provas conduzirem à identificação da posse de tais requisitos são, no entanto, muitas e de natureza diversa.

Da possibilidade: A visão subjacente a este decreto ancora-se numa perspectiva tecnicista da profissão, segundo a qual o profissional especializado adquire um conjunto de conhecimentos que deve ser capaz de reproduzir num tempo limitado que, obviamente, provas escritas impõem. Ora, o que é um professor? Um técnico especializado? Um intelectual? Um educador?

Bem sabemos que a profissão de professor é, na sua essência, relacional. Há muito conhecimento técnico especializado que lhe é requerido? Sem dúvida! Mas há um saber dizer, um saber estar, um saber olhar e compreender. Querer, imaginar mas também acalentar, incentivar, fazer sonhar, disciplinar e cuidar. Há dias e dias a resistir porque se acredita que o crescimento se dará. Há a matemática. Claro. Há a vontade de fazer compreender, descobrir e ter prazer em aprender matemática. Ajudar a descobrir que todos, de algum modo, podemos pensar matematicamente. Como se aprendem tais coisas? Como se avaliam tais coisas?

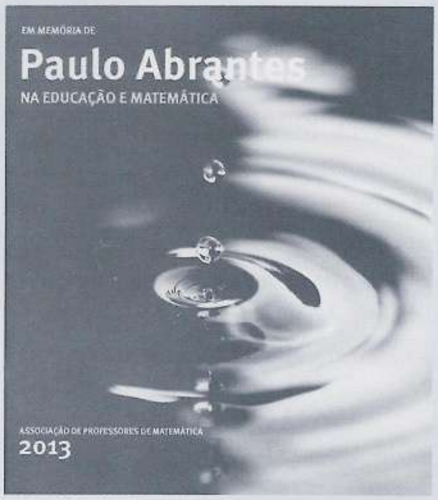
Convém recordar que o futuro professor tem atualmente uma formação com o nível de mestre, cujo ingresso em diversas instituições de ensino superior, está dependente da aprovação numa prova escrita de língua portuguesa. De acordo com o nível de ensino que irá leccionar, possui uma formação mais ou menos extensa em matemática, cujo peso está regulamentado pelo Ministério da Educação. Tem também uma formação na área da educação e em didática da matemática de muitas horas. Tem, ainda, práticas de ensino supervisionada por orientadores cooperantes da escola e de supervisores das instituições de ensino superior. É, consequentemente, avaliado em todas estas componentes. Chegamos, assim, à questão *da oportunidade:* qual o sentido de voltar a ser avaliado em algumas dessas componentes, tanto mais que de uma forma necessariamente redutora? Há desconfiança do Ministério relativamente às instituições que o próprio tutela?

Poderemos questionar-nos: «Não há outros países com estas provas?». Haverá diversos modelos, mas convém reter que, em muitos países, chegam ao ensino pessoas com baixas qualificações académicas dado existir uma grande carência de professores no sistema. Os estados têm, assim, possibilidade de aferir os conhecimentos mínimos dos candidatos a professores. Como bem sabemos, tal situação nada tem a ver com a do nosso país, portanto, para quê uma medida como esta no nosso contexto?

De que precisamos então? Não se trata de uma questão de quem pode ser professor mas de quem quer ser professor. Aqueles que o querem ser, querem aprender a ser bons professores e não, simplesmente, professores com a classificação de Bom que as provas exigem. Precisamos implementar o período de indução, há muito previsto, mas nunca posto em marcha. Os recursos financeiros que vão ser usados para implementar as provas de admissão à profissão, poderiam ser canalizados para medidas que ajudassem à integração dos jovens professores e a garantir condições de trabalho e desenvolvimento profissional aos professores. Como diz o poeta, «as pessoas não estão sempre iguais, ainda não foram terminadas»[1]. Porque assim é na profissão de professor, em que a aprendizagem é um ato contínuo, há que apoiar e ajudar a crescer os que querem entrar nesta profissão.

[1] O mais importante e bonito do mundo é isto: que as pessoas não estão sempre iguais, ainda não foram terminadas — mas que elas vão sempre mudando. Afinam ou desafinam. Verdade maior. É o que a vida me ensinou. (in *Grande Sertão: Veredas, de Guimarães Rosa*)

HÉLIA OLIVEIRA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA



Em memória de Paulo Abrantes na Educação e Matemática

Henrique Manuel Guimarães (Org.) (APM, 2013)

68 pp. Preço: 8,00€ / Preço Sócio: 5,00€

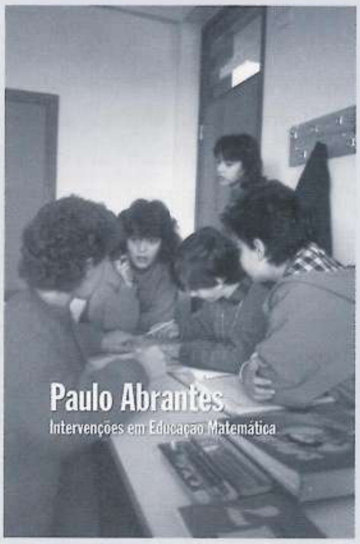
Paulo Abrantes foi um dos directores da *Educação & Matemática* e tudo aquilo em que se envolveu na APM — e envolveu-se em muita coisa e em muitos momentos — a *Educação & Matemática* tinha para ele um significado particular. Integrar a redacção de que fez parte desde o primeiro número, dirigir a Revista quando foi director durante quase cinco anos, e participar nos trabalhos de elaboração dos diferentes números foram expereiências que viveu com intensidade e de que retirava uma gratificação especial.

Viagem de ida e volta

Paulo Abrantes (APM, 2005, 2.ª ed.)

54 pp. Preço: 6,00€ / Preço Sócio: 4,00€

Este livro foi reeditado a propósito da organização do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes «Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas». Este trabalho consiste na resolução de um único problema no contexto de ensino e aprendizagem de Matemática. Com esta publicação, o autor transmite a sua experiência pessoal junto dos alunos, em diversas épocas, no estudo, discussão e exploração de um problema.



Paulo Abrantes: Intervenções em Educação Matemática

Henrique Manuel Guimarães, *et al.* (Org.) (APM, 2005)

200 pp. Preço: 5,00€ / Preço Sócio: 5,00€

Paulo Abrantes foi uma figura de primeiro plano da Educação Matemática portuguesa e internacional. A par dos seus dotes de orador excepcional e de organizador com qualidades fora do comum, manifestou sempre grande dinamismo e capacidade de realização nos grupos e projectos colectivos em que se envolvia. Este livro contém diversos dos seus escritos mais relevantes, cobrindo as áreas a que deu mais atenção: desenvolvimento curricular e avaliação, experiência matemática e formação de professores. Os textos são apresentados seguindo a ordem cronológica de publicação.

Matemática para todos, Matemática com todos

Do acreditar ao querer: A interpelação de Paulo Abrantes

LEONOR SANTOS · ANA PAULA CANAVARRO

Para todos aqueles que conheceram e trabalharam de perto com Paulo Abrantes, 2013 é um ano particularmente marcante. Dez anos decorreram após a sua morte. Muito embora ao longo deste ano, em diversos encontros de educação matemática se tenham criado espaços para o evocar, sentimos imperioso criar um espaço próprio para discutirmos e refletirmos sobre a aprendizagem e o ensino da Matemática, inspirando-nos e tomando como ponto de partida algumas das suas ideias. O Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IEUL) e a Associação de Professores de Matemática (APM), numa iniciativa conjunta, permitiram a concretização do *Encontro em memória de Paulo Abrantes. Matemática para todos, Matemática com todos*, que se realizou nas instalações do IE, no dia 12 de julho. O encontro durou um dia, organizando-se em simpósios, e contou com a contribuição de diversos colegas entre os que de mais perto lidaram profissionalmente com Paulo Abrantes. Para além disso, os participantes puderam (re)visitar a exposição em memória de Paulo Abrantes, recriada para esta ocasião, à qual se associa a brochura que se divulga nesta revista.

Paulo Abrantes é uma figura marcante da educação matemática, reconhecida a nível nacional e internacional. Pessoa de elevada inteligência e capacidade de perspetivar o futuro, orador excecional, de trato fácil e cativante, Paulo Abrantes nunca se confinou à região onde trabalhava, Lisboa, mas antes tinha uma visão ampla do mundo, estabelecendo laços de amizade e de trabalho muito para além das fronteiras do seu país. Procurámos respeitar esta sua característica internacional, optando por recorrer às potencialidades dos meios tecnológicos, de modo a permitir alargar a possibilidade de participação efetiva de colegas, não a restringindo àqueles que vivem numa zona próxima de Lisboa, mas sim alargando-a não só a quem se encontre noutras regiões de Portugal, mas também noutros países. Por outras palavras, demos um carácter universal ao encontro, permitindo que participassem todos aqueles que o quisessem, independentemente do local do mundo onde se encontrassem.

Quanto ao conteúdo do encontro, uma primeira nota para o seu título. Paulo Abrantes defendeu de forma inequívoca, ao longo dos anos, o princípio de que num currículo a Matemática deve ser para todos, isto é, que a Matemática deve garantir: «(i) que nenhum aluno se sinta com frequência excluído das atividades matemáticas, (ii) que qualquer aluno, face a cada proposta, seja sempre capaz de, em maior ou menor grau, realizar algum trabalho matemático, e (iii) que cada aluno encontre, ao longo do currículo, e por diversas ocasiões, prazer nas atividades que desenvolve na aula de Matemática, em particular porque sente crescer, por pouco que seja, a sua autoconfiança perante a Matemática» (Abrantes, Leal, Teixeira & Veloso, 1997, p. 33). Assumindo que «aprender Matemática é um direito básico de todas as pessoas — em particular, de todas as crianças e jovens — e uma resposta a necessidades individuais e sociais» (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 17), Paulo Abrantes reafirma este princípio no *Currículo Nacional do Ensino Básico* (DEB, 2001), enquanto diretor do Departamento da Educação Básica: «A matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar. A sua apropriação é um direito de todos» (DEB, 2001, p. 57).

O título deste encontro deve-se assim à importância que Paulo Abrantes atribuiu a este princípio de uma matemática para todos, que não só foi enunciando mas que concretizou também, em particular na forma como concebeu e desenvolveu um currículo para o 3.° ciclo do Ensino Básico juntamente com outros colegas, no âmbito do projeto MAT789 (Abrantes *et al.*, 1997). Destacar este princípio pareceu-nos tanto mais importante quando na atualidade parece querer voltar-se a uma escola seletiva e elitista. Medidas como a reintrodução de exames nacionais nos finais dos ciclos do ensino básico, após dezenas de anos[1], e a tendência emergente de reduzir as condições da escola pública e aumentar a sustentabilidade da escola privada, são exemplos disso. Muito embora Paulo Abrantes tivesse tido uma atividade profissional ampla, há dois temas a que se dedicou com particular atenção e, como tal, foram destacados neste encontro: a *Matemática no currículo escolar* e a *Matemática na sala de aula*. O primeiro tema está associado às questões do desenvolvimento curricular, o segundo à valorização da importância da sala de aula como espaço privilegiado da aprendizagem matemática pelos alunos, que é estruturante da vida da escola e, portanto, estruturante da vida dos alunos na escola e das aprendizagens que nela fazem. Debruçar-nos-emos nas linhas seguintes sobre algumas ideias de Paulo Abrantes relativas a cada um destes temas, procurando também relacioná-las com a situação atual que se vive em Portugal, em particular no contexto da educação matemática.

A Matemática no currículo escolar

Em diversos dos seus escritos, pode ler-se que, para si, um currículo se desenvolve «a partir de objetivos e orientações curriculares que se baseiam numa determinada visão do que é a Matemática e em pressupostos educativos sobre a aprendizagem da Matemática» (Abrantes *et al.*, 1997, p. 21). Encara «a Matemática como uma ciência viva, em construção e em permanente evolução e como realização humana envolvida em todos os domínios da atividade humana e a que todas as pessoas podem ter acesso» (Abrantes *et al.*, 1997, p. 21), e associa a aprendizagem matemática à «*intencionalidade* da atividade dos alunos (...) e que salienta a natureza interativa, cooperativa e reflexiva da aprendizagem da Matemática» (Abrantes, 1994, p. 584, itálico no original). No documento resultante do Seminário de Milfontes (APM, 1990), ainda nos finais dos anos 80 do séc. XX, de que foi um dos seus principais responsáveis, se podem ler os grandes objetivos para o ensino da Matemática. Em particular, é dito que:

> O ensino da Matemática, em todos os níveis, deve proporcionar aos alunos experiências diversificadas em contextos de aprendizagem ricos e variados, contribuindo para o desenvolvimento de capacidades e hábitos de natureza cognitiva, afetiva e social. (APM, 1990, p. 39)

No desenvolvimento destas ideias, e passados mais de dez anos, na mesma linha, Paulo Abrantes afirma: Todas as crianças e jovens devem ter possibilidade de:

> — Contactar, a um nível apropriado, com as ideias e os métodos fundamentais da matemática e apreciar o seu valor e a sua natureza;
> — Desenvolver a capacidade de usar a matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a autoconfiança necessária para fazê-lo. (DEB, 2001, p. 57)

O que questionamos é até que ponto os objetivos para o ensino da Matemática, sucessivamente definidos ao longo de mais de uma década, não estão hoje a ser postos em causa. Será que o Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) não representa um retrocesso geracional? Será que as suas linhas orientadoras não contrariam, de forma inequívoca, o que era já nos anos 80 claramente afirmado: «Esta visão opõe-se totalmente a uma aprendizagem baseada na acumulação de conhecimentos fatuais e de técnicas, e a um ensino orientado para os conteúdos e para as aptidões cognitivas dos níveis mais baixos» (APM, 1990, p. 39)? Que implicações acarreta para os jovens portugueses este retrocesso?

Uma componente indissociável do currículo é a avaliação das aprendizagens dos alunos. Também nesta área, Paulo Abrantes deixou-nos um importante legado através das suas ideias e escritos. Assumindo a avaliação como parte constitutiva do currículo (Abrantes, 1996), era claro, para si, que a avaliação é parte integrante do processo de aprendizagem (Leal & Abrantes, 1993). Por outras palavras, o objetivo a perseguir é a aprendizagem e não a avaliação. É neste quadro de referência que assenta o desenvolvimento de uma prática avaliativa desenvolvida no âmbito do Projeto Mat789, em que os instrumentos de avaliação são concebidos e explorados com os alunos de forma a constituírem novos momentos de aprendizagem (Abrantes *et al.*, 1997). Não se pense, contudo, que esta prática é isenta de problemas. Entre as diversas questões que então se colocavam pode ler-se, a título de exemplo, a dificuldade de encontrar um meio de gerir a tensão entre uma avaliação resultante de uma abordagem integrada da avaliação e aprendizagem e a avaliação sumativa (Leal & Abrantes, 1994). Uma vez mais a nível das políticas educativas, no momento atual ignora-se o avanço do conhecimento de que Paulo Abrantes foi um importante autor. Nada melhor do que as suas palavras para questionar o que hoje estamos a assistir:

> É muito triste ver como algumas pessoas, desprezando o enorme esforço que se tem feito para a renovação (mais do que necessária) do ensino da Matemática, em vez de ajudarem a corrigir os erros e a encontrar as condições que permitam essa renovação, mais não fazem afinal do que advogar o retorno àquilo que consideram os «bons velhos tempos» dos exames em todos os níveis de ensino (...)
>
> O exame torna-se o objetivo, o que vem para o exame o programa, o ensino da matéria para exame o método — escreveu Freudenthal há mais de 20 anos. (Abrantes, 1996, p. 1)

Note-se que a importância atribuída à Matemática e à Língua portuguesa, destacando-as de todas as outras disciplinas do currículo escolar dos alunos do ensino básico, através da realização de exames nacionais apenas para estas, tem subjacente uma ideia de compartimentação do saber que em tudo contraria, uma vez mais, a perceção de Paulo Abrantes. Recordamos que na legislação que regulamentava a avaliação das aprendizagens dos alunos, quando Paulo Abrantes era responsável pelo Departamento da Educação Básica, pode ler-se a intenção de levar os alunos a desenvolver um trabalho de projeto para conclusão do ensino básico:

> 31. A avaliação sumativa, no final do 9.° ano de escolaridade, inclui, ainda, a realização de uma ou mais provas globais ou de um trabalho final incidindo sobre as aprendizagens e competências previstas para o final do ensino básico
>
> 32. As provas globais referidas no número anterior deverão progressivamente evoluir para provas que incidam sobre aprendizagens e competências desenvolvidas no âmbito de várias áreas curriculares e disciplinas. (Desp. Normativo n.° 30/2001)

Tal opção tem subjacente uma ideia holística do saber. O destaque do estabelecimento de relações entre a Matemática e outras disciplinas e a vida real são outros exemplos que podemos encontrar em Paulo Abrantes nos seus escritos sobre questões de desenvolvimento curricular em matemática:

> Uma visão da Matemática muito ligada às aplicações, dando especial ênfase ao seu papel na compreensão e resolução de problemas do dia-a-dia e de outras disciplinas, será uma consequência dos aspetos valorizados pelo currículo. (Abrantes, 1994, p. 601)

Por último, ao apresentarmos algumas ideias de Paulo Abrantes relativas à Matemática no currículo escolar não podíamos deixar de falar do papel do professor no processo de desenvolvimento curricular. Estando totalmente em desacordo com uma visão do professor como mero aplicador do currículo, Paulo Abrantes defendeu que:

> Um elemento fundamental tem a ver com o papel do professor que não pode ser um mero consumidor de um produto de que não conhece as origens, os processos de construção ou mesmo a lógica interna (...) Desenvolver não significa meramente ‹aplicar›, como sucede geralmente no dia-a-dia dos professores mesmo em períodos de alegada «experimentação». Desenvolver significa que o currículo é construído na interação das referências e perspetivas iniciais com a prática, através de um processo que implica observação, reflexão e discussão e que passa por sucessivos refinamentos não só das propostas e dos materiais de trabalho mas também das próprias conceções teóricas. (Abrantes, 1994, pp. 608–609)

Ao olharmos para o Programa e as Metas Curriculares para o Ensino Básico (MEC, 2013), perguntamo-nos se voltámos, uma vez mais, a um retrocesso conceptual, agora de currículo, encarando-o como um currículo à prova de professor? É este entendimento defensável no séc. XXI?

A Matemática na sala de aula

Ao eleger a Matemática na sala de aula como um tema central do encontro, valorizamos a importância da sala de aula como espaço privilegiado da aprendizagem da Matemática pelos alunos, que é estruturante da vida da escola e, portanto, estruturante da vida dos alunos na escola. Esta ideia de vida dos alunos na escola, vida dos alunos nas aulas, procura ir ao encontro do modo como Paulo Abrantes encarava a escola e aulas: um espaço de vida e não de preparação do que ela viria a ser. Certamente também por isso, no editorial que escreveu para um número da revista *Educação e Matemática*, precisamente dedicada à aula de Matemática, faz-nos uma interpelação: «Temos de viver e pensar a aula de matemática» (Abrantes, 1995, p. 1).

Este desafio de Paulo Abrantes reflete a ideia de que o que se passa na aula afeta a matemática que os alunos aprendem. O modo como o professor ensina, ou melhor, o modo como dá a aprender aos alunos, não é neutro:

- — Não é neutro relativamente ao conteúdo do que aprendem e às conceções que sobre esse conteúdo desenvolvem;
- — Não é neutro relativamente à relação que criam com o conteúdo aprendido e à consequente atitude que desenvolvem face a ele.

Por isso, Paulo Abrantes chama a atenção para a importância de os alunos terem, nas salas de aulas, a oportunidade de viver uma experiência matemática que seja intelectualmente desafiante, na qual contactem com a matemática como um conhecimento em construção; e também de viver uma experiência matemática que seja pessoalmente gratificante, da qual retirem gosto e não desgosto, com a qual desenvolvam a auto-confiança e não a rejeição:

A experiência matemática deve constituir o paradigma das atividades escolares nesta disciplina. Desde o princípio da escolaridade até ao fim do ensino secundário, e de acordo com o nível de desenvolvimento e maturidade dos alunos, estes deverão estar mergulhados num ambiente intelectualmente estimulante, no qual experimentar e fazer matemática sejam atividades naturais e desejadas. (Abrantes *et al.*, 1997, p. 41)

Por experiência matemática, Paulo Abrantes referia-se a muito mais do que ao conhecimento de termos, factos e procedimentos — contrariamente às Metas Curiculares este ano em vigor, que transmitem claramente a ideia de que o que importa são estritamente os conhecimentos matemáticos e que pouco ou nada interessa o modo como são aprendidos. Mas Paulo Abrantes acreditava e queria que os alunos tivessem a possibilidade de ter acesso a aspetos essenciais do fazer matemática, como conjeturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar:

É possível, de maneira sustentada e com alunos do ensino básico, criar um ambiente na aula que os leve a conjeturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar, ou seja, experimentar e fazer matemática. (Abrantes et al., p. 42)

Além disso, tinha a expectativa de que a experiência matemática pudesse ser acessível a todos os alunos, a cada um dos alunos, acreditando que era viável criar na sala de aula condições para que os alunos, mesmo os que à partida revelam mais dificuldades, não se sentissem excluídos nas aulas de Matemática. Recusava a ideia da fatalidade do insucesso daqueles a quem faltam os chamados pré-requisitos ou não são calhados para a Matemática, devendo por isso escolher desde cedo outras vias, como se começa a delinear em 2013 em Portugal.

Subjacente à importância que atribuía à experiência matemática, estão as conceções de Paulo Abrantes acerca da aprendizagem, à qual sempre se referiu como um processo de construção ativa do conhecimento por parte dos alunos:

A aprendizagem tem a ver com os significados matemáticos que cada aluno vai construindo como resultado das actividades que realiza e do modo como elas se relacionam com os seus conhecimentos anteriores, do ambiente que se vai desenvolvendo na turma, da comunicação e das interações que se vão estabelecendo entre os alunos e entre estes e o professor. (Paulo Abrantes, 1995, p. 1)

Neste excerto, Paulo Abrantes associa a aprendizagem matemática a um processo de construção de significado matemático, que tem de ser vivido por todos os alunos, por cada aluno, na sala de aula. Além disso, identifica aspetos essenciais da aula de matemática que influenciam a aprendizagem matemática que os alunos têm oportunidade de realizar:

i) as atividades realizadas pelos alunos, que decorrem das tarefas que lhe são propostas e dos recursos que lhe são proporcionados para nelas trabalhar;
ii) a relação do conhecimento em construção com os conhecimentos anteriores dos alunos (que podem ser matemáticos ou não...);
iii) o ambiente que se desenvolve na turma, com ênfase na comunicação e interação entre os diversos intervenientes;
iv) o professor e o seu papel na aula, enquanto promotor da experiência matemática que os alunos vivem.

No que diz respeito aos dois primeiros pontos, vale a pena sublinhar numa nota a importância que Paulo Abrantes reservava ao papel da matemática na relação com os outros saberes, seja com as outras disciplinas ou com a própria realidade, espaço simultâneo de exercício de uma realidade genuína e de desenvolvimento de competências relevantes por parte dos alunos:

A escola pode e deve proporcionar aos alunos experiências de utilização da Matemática em contextos reais. Se o não fizer, estará a esconder um dos aspetos importantes da própria matemática e a limitar a formação dos alunos quanto à compreensão do que é a matemática e quanto à capacidade de usá-la com espírito crítico e auto-confiança. (Abrantes, 1989, p. 322)

No que diz respeito ao terceiro ponto, o ambiente de sala de aula, Paulo Abrantes sempre foi sensível a que este fosse um espaço de bem estar para os alunos, em que se sentissem bem e com possibilidade de interagir naturalmente e em colaboração para a construção do conhecimento matemático, argumentando a favor do trabalho de grupo:

O trabalho de grupo é uma metodologia susceptível de influenciar positivamente o modo como os alunos enfrentam as tarefas que lhes são propostas na aula de matemática, em especial a realização de projetos e as atividades de exploração e resolução de problemas. O desenvolvimento simultâneo do hábito e da capacidade de cooperar com os colegas, apresentar, ouvir, e criticar argumentos, explicar raciocínios e pedir explicações, constitui (...) não uma metodologia possível, mas sim uma forma de trabalho insubstituível (Abrantes *et al.*, 1997, p. 64)

No que diz respeito ao quarto ponto, sublinhamos de Paulo Abrantes a importância que ele atribuiu ao papel do professor como protagonista da preparação e condução de tudo o que se passa na aula, nas propostas de trabalho que os alunos desenvolvem, no ambiente em que o fazem, nos recursos que mobilizam, nas aprendizagens que sistematizam:

Reconhecer que a aprendizagem é um processo que requer o envolvimento dos alunos em atividades significativas e que é fortemente influenciado pela cultura da sala de aula não retira importância ao professor. O professor é o elemento-chave na criação do ambiente que se vive na sala de aula. Cabe-lhe a responsabilidade de propor e organizar as tarefas a realizar e de coordenar o desenvolvimento da atividade dos alunos. (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999, p. 28)

Naturalmente que não podemos deixar de notar a diferença manifesta entre esta valorização do papel do professor na aula sublinhada por Paulo Abrantes e a indiferença que lhe reserva o programa do ensino básico em vigor em 2013/14 (MEC, 2013).

A concluir

Não se podem ler as propostas de Paulo Abrantes e seus colegas sem se deixar de reparar em como as orientações que em 2013/14 vigoram para o ensino da Matemática fazem tábua rasa do que em tempos ele defendeu e que foi continuado e aperfeiçoado no período de investimento na Matemática escolar que se seguiu em Portugal até à recente publicação das metas curriculares. Retomar o pensamento de Paulo Abrantes na atualidade convoca-nos de especial maneira nestes tempos difíceis que vivemos, em particular para o ensino da Matemática em Portugal.

Mas para além das ideias do Paulo, há que manter vivo em nós o seu exemplo. Paulo Abrantes foi, testemunham-nos todos os que com ele lidaram de perto, um homem de crer, que acreditava, e um homem de querer, que tinha vontade de mudar e melhorar as aprendizagens matemáticas dos alunos portugueses. Acreditava profundamente que podíamos proporcionar a todos os alunos uma aprendizagem matemática que contribuísse para serem, individual e socialmente, melhores pessoas e cidadãos, e empregou a sua energia positiva, o seu olhar de frente com um sorriso, nessa empreitada, que reconhecia requerer esforço continuado, mas ser possível com a colaboração de todos. Esta mensagem é hoje, e talvez sempre, de grande atualidade e pertinência, e fica nestas linhas como incentivo e inspiração para todos.

Nota

[1] Em 1968 foi extinto o exame de admissão aos liceus; em 1978, o exame da 4.ª classe; e em 1977, o exame do 6.° ano (Leal, 1991).

Referências

Abrantes, P. (1989). Matemática e realidade nas aulas do 7.° ano num ambiente de inovação curricular. *Actas do ProfMat n.° 5*, pp. 331–342. Viana do Castelo: APM.

Abrantes, P. (1990). Diz-me como avalias, dir-te-ei como ensinas... *Educação e Matemática, 16*, 1.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a Matemática. A experiência do projeto* Mat_{789}. (Universidade de Lisboa, Tese de doutoramento)

Abrantes, P. (1995). Viver e pensar a aula de Matemática. *Educação e Matemática, 35*, 1.

Abrantes, P. (1996). Os «bons velhos tempos» são velhos mas não eram bons. *Educação e Matemática, 39*, 1.

Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P., & Veloso, E. (1997). Mat_{789}, *Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: ME, DEB.

APM (1990). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico, Competências essenciais*. Lisboa: DEB/ME.

Leal, L. (1991). Evolução e problemática do sistema de avaliação em Portugal. In H. M. Guimarães, L. Leal, & P. Abrantes (Orgs.), *Avaliação: uma questão a enfrentar. Atas do Seminário sobre Avaliação* (pp. 9–31). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Leal, L., & Abrantes, P. (1993). Assessment in an innovative curriculum in Portugal. In M. Niss (Ed.), *Cases of assessment in mathematics education. An ICMI Study* (pp. 173–182). Netherlands: Kluwer.

Leal, L., & Abrantes, P. (1994). Is it possible to integrate learning and assessment? In L. Grugnetti (Ed.), *Assessment focussed on the Student. 45th CIEAEM Meeting*. (pp. 46–56) Cagliari, Italy, July 1993. Bergamo: CLAS.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática — Ensino Básico*. Lisboa: Ministério de Educação e Ciência. (disponível em http://www.dge.mec.pt/index.php?s=noticias&noticia=396)

Legislação referida: Despacho Normativo n.° 30, publicado em Diário da República a 22 de junho de 2001.

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Problemas de contexto no ensino-aprendizagem da divisão de números racionais: o caso da divisão como medida

Hélia Gonçalves Pinto

Neste artigo apresento e discuto uma proposta para uma primeira abordagem à divisão de frações como medida, com recurso à exploração de problemas de contexto. Esta abordagem, que emana de um estudo que realizei (Pinto, 2011), revelou-se profícua no ensino-aprendizagem daquele significado da divisão. Assim, tendo por base o trabalho realizado em sala de aula, apresento exemplos de produções dos alunos que evidenciam a importância da exploração de problemas de contexto no ensino-aprendizagem da divisão de frações como medida.

Problemas de contexto

Segundo Gravemeijer e Terwel (2000) as estratégias dos alunos, suas construções e produções próprias pavimentam o caminho para o desenvolvimento do conhecimento matemático abstrato, pelo que o seu conhecimento e estratégias informais[1] devem ser o ponto de partida para o desenvolvimento de mais conhecimento e estratégias formais. Referem que a diversidade de estratégias, em sala de aula, revelam diferentes níveis de aprendizagem dos alunos, que deve levar o professor a refletir sobre o trajeto de aprendizagem a proporcionar-lhes. Assim, consideram que o professor deve encontrar uma forma de conciliar orientação com a diversidade de estratégias apresentadas pelos alunos, salientando que para uma discussão produtiva na turma é essencial que sejam apresentadas e discutidas diferentes estratégias.

Por conseguinte, os autores sugerem que se explorem problemas de contexto, que devem permitir uma grande diversidade de procedimentos e induzirem uma trajetória de aprendizagem, baseada nos objetivos que se pretendem atingir. Deste modo, os problemas de contexto não devem consistir na mera aplicação de uma regra mas em fatores ricos de aprendizagem, procurando envolver o contexto no raciocínio e nos cálculos. Salientam que estes problemas devem ser naturais e motivadores de modo a que os alunos possam usar o seu conhecimento e a sua experiência pessoal como meio/contexto para desenvolver mais conhecimento, e não um camuflado para apresentar uma aritmética simples e preconcebida.

Uma primeira abordagem à divisão de números racionais em situações de medida

A divisão como medida envolve situações que requerem que se determine o número de grupos, sabendo a dimensão de cada grupo, pelo que o dividendo e o divisor são da mesma natureza (e.g. Vergnaud, 1988). Por exemplo,

«1. Na festa de aniversário da Ana havia 2 l de sumo de maçã.
1.1. Quantos copos de 1/3 l se poderiam encher com sumo de maçã?
1.2. Só alguns amigos da Ana gostavam de sumo de maçã. Destes, cada um bebeu 2/3 l do sumo de maçã que havia. Quantos eram os amigos da Ana que gostavam de sumo de maçã?».

Quanto aos procedimentos de resolução de problemas que envolvem este significado da divisão, Vergnaud (1988) refere como sendo de caráter multiplicativo os que envolvem uma multiplicação ou divisão, considerando esta última como uma estratégia mais exigente, do ponto de vista cognitivo. Refere também a adição ou subtração sucessivas, mas como procedimentos de caráter aditivo, procedimentos menos exigentes do que os multiplicativos.

No estudo que realizei com uma turma de 25 alunos do 6.º ano de escolaridade (Pinto, 2011), iniciou-se o ensino-aprendizagem da divisão de números racionais, em situa-

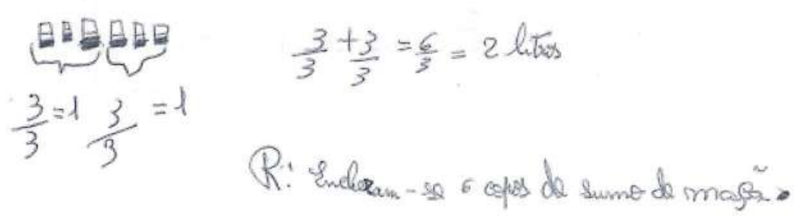


Figura 1. Produção para a resolução da questão 1.1. com recurso a esquemas e a adições sucessivas

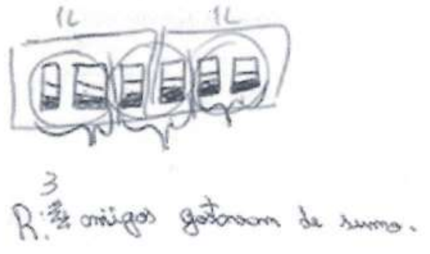


Figura 2. Produção para a resolução da questão 1.2. com recurso a esquemas

ções de medida, com a exploração do problema de contexto apresentado anteriormente. O problema foi entregue a cada um dos pequenos grupos de trabalho (sete grupos de três elementos e um de quatro), numa folha A4, onde foi solicitado aos alunos que registassem a estratégia usada pelo grupo para a resolução do problema, bem como a sua justificação. Foram informados que teriam vinte minutos para resolverem o problema e que após este tempo, se procederia à apresentação e discussão em plenário das (diferentes) estratégias de resolução com o contributo de todos. Durante o tempo dado para a exploração do problema em pequenos grupos, a professora da turma acompanhou e orientou o trabalho dos mesmos, esclarecendo dúvidas sem corrigir de imediato as respostas dos alunos. Observou ainda, as produções dos diferentes grupos, o que lhe permitiu identificar diferentes raciocínios e pensar numa estratégia para a exploração do problema em plenário, que lhe permitisse conciliar orientação com a diversidade de estratégias apresentadas pelos alunos. Assim, constatou que sete dos oito grupos optaram por recorrer a esquemas e a adições sucessivas para a resolução da questão 1.1. (Figura 1), e a esquemas para a resolução da questão 1.2. (Figura 2).

Constatou ainda, que apenas um grupo de alunos recorreu à divisão como estratégia de resolução da questão 1.1 (Figura 3), o mesmo grupo que recorreu à multiplicação como estratégia de resolução da questão 1.2. (Figura 4). Deste modo, nenhum grupo identificou a divisão como estratégia de resolução desta última questão.

Estes resultados evidenciam a pouca familiaridade destes alunos com o significado de divisão como medida, já que a maioria dos grupos não conseguiu identificar a divisão como estratégia de resolução e os que a identificaram, não o fizeram sem antes modelarem a situação com recurso a procedimentos aditivos. Assim, revelaram raciocínio aditivo em situações, que de acordo com Vergnaud (1988), requerem raciocínio multiplicativo. Porém, estes resultados evidenciam ainda, a importância da resolução de problemas de contextos reconhecíveis, com significado para os alunos, como ponto de partida para a exploração e desenvolvimento de conceitos, dado que lhes permitiram a construção de estratégias próprias, através das quais chegaram à solução, conforme preconizado por Gravemeijer e Terwel (2000).

Por conseguinte, com a exploração em plenário a professora pretendia levar os alunos a progredirem das suas estratégias informais para as formais, ou seja dos esquemas e procedimentos aditivos para os procedimentos multiplicativos e no âmbito destes, para a divisão. Assim, a exploração teve início com a apresentação da produção de um dos grupos que recorreu a esquemas e procedimentos aditivos para a resolução da questão 1.1. (Figura 1). Após a discussão desta produção, concluiu-se que a estratégia adotada consistiu em adicionar copos com 1/3 de litro até chegar aos 2 litros, já que se pretendia saber quantos copos de 1/3 de litro se poderiam encher com 2 litros de sumo de maçã. Após esta síntese passou-se à apresentação e discussão da segunda estratégia (Figura 3) para a resolução da mesma questão. Aquando da sua discussão no quadro, os alunos Jacinta, Bernardo e Mafalda (nomes fictícios) do único grupo que recorreu à divisão, esclareceram:

Jacinta: Aqui (apontando para os dois retângulos, cada um dividido em três partes iguais (Figura 3)) estão as duas garrafas de sumo. Depois dividimos cada garrafa em 3 partes iguais!

Professora: Porquê?

Jacinta: Para ver quantos copos de um terço cabiam numa garrafa!

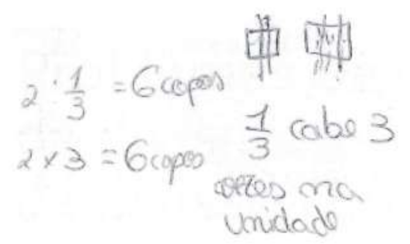


Figura 3. Produção para a resolução da questão 1.1 com recurso a esquemas e à divisão

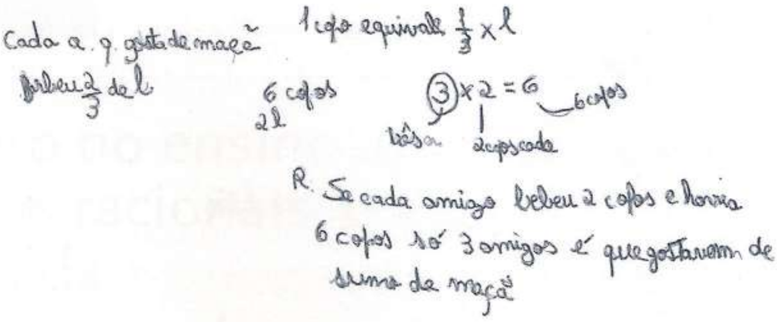


Figura 4. Produção para a resolução da questão 1.2. com recurso à multiplicação

Mafalda: Se podiam encher com um litro de sumo!

Professora: E o que concluíram?

Bernardo: Que se podiam encher 3 copos!

Professora: Mas, o que eu vejo na vossa produção são 6 copos?

Jacinta: Porque se numa garrafa cabem 3 copos de um terço em duas garrafas cabem 6 copos de um terço (apontando para a multiplicação — Figura 3)!

(...)

Mafalda: Com dois litros de sumo de maçã podem encher-se 6 copos de um terço (apontando para a divisão — Figura 3).

(...)

De salientar, que estes alunos usaram o algoritmo da divisão de números racionais, multiplicar pelo inverso do divisor, com significado.

Depois de esclarecidas todas as dúvidas relativas à resolução apresentada, com a orientação da professora, a turma confrontou as duas produções apresentadas no quadro (Figura 1 e 3), concluindo que adicionar copos de um terço de litro até perfazer um litro (Figura 1), é equivalente a dividir um litro em 3 partes iguais (Figura 3) e ainda, que adicionar 3 copos de um terço de litro a 3 copos de um terço de litro (Figura 1), é equivalente a duplicar os 3 copos de um terço de litro, ou seja 2×3 (Figura 3). Deste modo, os alunos foram orientados para a conexão das duas estratégias e posteriormente, na progressão dos procedimentos, ao concluírem que adicionar 1/3 de litro até perfazer 2 litros é equivalente a dividir os 2 litros por copos de 1/3 de litro, já que se pretendia saber quantos copos de 1/3 de litro se poderiam encher com 2 litros de sumo de maçã. Verificaram ainda, que a resolução do algoritmo resultou na multiplicação de 2 por 3, ou seja, que $2:1/3=2\times 3=6$ (Figura 3), dado que se 1/3 cabe 3 vezes em uma unidade, em duas unidades cabe o dobro das vezes.

Seguiu-se a exploração das produções para a resolução da questão 1.2., primeiro com a apresentação e discussão da estratégia com recurso a esquemas, seguindo-se a apresentação da estratégia com recurso à multiplicação. Da apresentação e discussão da primeira estratégia (Figura 2), conclui-se que esta consistiu em agrupar os copos de 1/3 de litro, dois a dois (já que cada amigo da Ana que gostava de sumo de maçã bebeu 2/3 de litro e que $1/3+1/3=2/3$), e voltar a adicionar os agrupamentos resultantes, pelo que foram 3 os amigos da Ana que gostavam de sumo de maçã. Após esta síntese passou-se à apresentação e discussão da segunda estratégia (Figura 4) para a resolução da mesma questão. Desta vez, para além da progressão dos procedimentos aditivos para os multiplicativos, pretendia-se ainda, uma progressão no âmbito destes últimos, ou seja, da multiplicação para a divisão. Assim, perante a produção no quadro (Figura 4), os alunos do grupo esclareceram:

Mafalda: Nós pensamos que cada amigo da Ana que gosta de sumo de maçã bebeu dois copos de sumo! (...) Porque bebeu dois terços e um copo é um terço!

(...)

Jacinta: Como o sumo de maçã dava para seis copos, só três amigos é que gostavam de sumo de maçã, porque duas vezes três são seis!

Professora: Então, mas na tarefa 1.1. (apontando para as produções e conclusões que continuavam no quadro

— Figuras 3), para saberem quantos copos de um terço se enchiam com dois litros de sumo de maçã, o que fizeram?

Jacinta: Dividimos dois por um terço!

Professora: E concluíram?

Jacinta: Que cabem seis copos! Porque se numa garrafa cabem três copos em duas, cabem duas vezes mais!

Professora: Então, com dois litros de sumo encheram-se seis copos de um terço. E na questão 1.2. o que queremos saber afinal?

Bernardo: Quantos dois terços cabem em duas garrafas!

Professora: Porquê?

Bernardo: Porque queremos saber quantos amigos da Ana gostam de sumo de maçã (...) sabendo que cada um destes amigos bebeu dois terços do sumo.

Professora: Então como podemos representar?

Bernardo: Dois a dividir por dois terços! (Regista no quadro 2:2/3)

Professora: E quantos são os amigos?

Bernardo: Três!

Professora: (Apontando para os esquemas representados no quadro (Figura 3 e 4). Podemos então concluir que se um terço cabe seis vezes em duas unidades, dois terços cabem metade das vezes, metade de seis, que são três, dois terços!

(...)

Professora: Então, dividir por dois terços é o mesmo que multiplicar por 3 e depois por 1/2, que é o mesmo que multiplicar pelo inverso de dois terços (enquanto registava no quadro $2:2/3=2\times3\times1/2=2\times3/2=3$). Logo, são três os amigos da Ana que só gostam de sumo de maçã!

A professora deu continuidade à discussão em plenário, questionando outros alunos, solicitando-os a compararem as diferentes estratégias de resolução e orientando-os para a divisão. De salientar, a exploração do algoritmo multiplicar pelo inverso do divisor desde o início do ensino-aprendizagem da divisão como medida, mas sem grande ênfase nesta fase inicial, já que o primeiro objetivo era o de familiarizar os alunos com o significado da divisão como medida. Posteriormente foram explorados mais problemas de contexto que lhes permitiram trabalhar o algoritmo multiplicar pelo inverso do divisor, bem como outros algoritmos alternativos, sugeridos por alguns investigadores (e.g. Pinto, 2011; Pinto e Monteiro, 2008).

NOTA FINAL

Esta primeira abordagem ao estudo da divisão de números racionais parece ter sido facilitada pela resolução de problemas de contexto reconhecível, com significado para os alunos, já que, como ponto de partida, lhes permitiu a construção de estratégias originais, através das quais se aperceberam da razão de ser e do alcance dos conceitos e representações matemáticas. Assim, este resultados parecem contrariar as orientações dos recentes documentos curriculares (MEC, 2013) quando referem que «a resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, (...) a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada (...) (p.5)», ou seja, uma visão dos problemas como simples campo de aplicação de conhecimentos prévios e isoladamente aprendidos e ainda, a de que uma aprendizagem muito contextualizada não favorece a progressão das estratégias informais para as formais.

Notas

[1] Conhecimentos dos alunos antes do ensino-aprendizagem do conteúdo em sala de aula.

Referências

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32, 777–796.

MEC (2013). *Programa e metas curriculares*. Matemática: Ensino Básico. Lisboa: DGE

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais* (Tese de Doutoramento), Universidade de Lisboa, Lisboa: Instituto de Educação.

Pinto, H & Monteiro, C. (2008). A divisão de números racionais. In J. Brocardo, L, Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 201–219). Lisboa: Escolar Editora.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hilbert & M. Behr (Org.), *Number concepts and operations in the middle grades* VII (pp. 141–161). Reston, VA: NCTM & Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hélia Gonçalves Pinto

ESECS do Instituto Politécnico de Leiria

helia.pinto@ipleiria.pt

Estabelecer conexões com outras áreas e domínios do currículo

Uma forma de cativar as crianças para a aprendizagem da matemática

José Cascalho · Tânia Melo · Ricardo Teixeira

Neste artigo, apresentam-se propostas de tarefas de conexão entre a matemática e outras áreas e domínios, para serem desenvolvidas desde o pré-escolar ao 1.º ciclo do ensino básico. Analisa-se, também, de que forma este tipo de tarefas pode influenciar a predisposição das crianças para a aprendizagem da matemática, salientando-se a sua relevância para que se fomente nos jovens um conhecimento mais profundo acerca do que é a matemática e da sua utilidade no dia a dia.

As tarefas apresentadas foram desenvolvidas em contexto de estágio, no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, da Universidade dos Açores.

As conexões na promoção de um diálogo interdisciplinar

As conexões matemáticas, enquanto processo matemático promotor de aprendizagens, estão contempladas de forma inequívoca no Programa de Matemática do Ensino Básico que foi homologado em dezembro de 2007. No ponto 7 dos objetivos gerais do ensino da matemática, refere-se que os alunos devem ser capazes de «identificar e usar conexões entre ideias matemáticas; compreender como as ideias matemáticas se inter-relacionam, constituindo um todo; reconhecer e aplicar ideias matemáticas em contextos não matemáticos» (p. 6). Nesse documento, destaca-se, também, que o estabelecimento de conexões é fundamental para uma aprendizagem com compreensão e para o desenvolvimento do gosto pela matemática e da capacidade de a apreciar.

As conexões são, também, valorizadas nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, documento traduzido pela APM em 2008. Nele, defende-se a promoção de conexões matemáticas e a sua importância para as aprendizagens dos alunos, a nível escolar, pessoal e profissional. Como refere o documento, a matemática deve ser aprendida com compreensão, pois só assim os alunos terão a capacidade de utilizar posteriormente os conhecimentos adquiridos. Para tal, salienta-se a necessidade de se estabelecer relações matemáticas, partindo das experiências das crianças e dos seus conhecimentos prévios.

No que concerne às Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (ME, 1997), a ideia de «conexão» é transversal a todo o documento. Clarifica-se que as diferentes áreas e domínios não devem ser consideradas como compartimentos estanques, pelo que se acentua «a importância de interligar as diferentes áreas de conteúdo e de as contextualizar num determinado ambiente educativo» (p. 22).

Este processo matemático tem vindo a ganhar destaque no ensino da matemática em Portugal e no estrangeiro, tendo em conta diversos estudos elaborados por professores e investigadores (Ponte, 2010). Em contraste com uma matemática vista como um edifício isolado, sem comunicação com outras áreas disciplinares ou mesmo com a realidade, as conexões vêm abrir caminho à construção de pontes profícuas entre diferentes temas matemáticos, entre a matemática e outros saberes e entre esta e a realidade do dia a dia, que se traduz num benefício para as aprendizagens dos alunos.

Entendemos como sintoma do isolamento a que a disciplina é, por vezes, sujeita ou encarada, o facto de muitas crianças a considerarem difícil e desligada do dia a dia. Tal pode ser interpretado como um sinal de que os alunos não participam ativamente nas aprendizagens e que as situações problemáticas que resolvem em contexto de sala de aula nem sempre são significativas (Lesh & Doerr, 2002).

Através da exploração das diferentes vertentes das conexões matemáticas, os alunos poderão estabelecer a ligação desta ciência com as outras áreas do saber e assim, também, tomar consciência da sua importância no quotidiano, bem como ligar diferentes conceitos e temas matemáticos.

A importância de aplicar a matemática em outras disciplinas escolares e na vida diária é inquestionável. Para que os alunos compreendam a sua importância e para que percebam que a matemática é uma ferramenta útil na resolução de situações problemáticas que extravasam o espaço específico da disciplina, os educadores/professores devem tirar partido das conexões com o quotidiano, de forma a que os alunos percebam que a matemática está, também, ligada às outras áreas curriculares.

Na perspetiva de Silva (2005), «uma alternativa que tem-se mostrado bastante interessante e que tem despertado a curiosidade do aluno é a da contextualização, onde os conteúdos da Matemática aparecem vinculados a outras áreas de conhecimento e a situações do cotidiano dos alunos» (p. 8). Nesta linha, Narciso e Paulus (2005) apresentam exemplos de práticas em que a relação com o quotidiano está bem presente e cuja participação ativa dos alunos se torna fundamental para o desenrolar das tarefas propostas, tornando-se exemplos paradigmáticos no que respeita às conexões que se podem estabelecer na matemática e entre a matemática e outras áreas disciplinares.

Quando um professor procura promover o aprofundamento de conexões entre a matemática e outras áreas, as suas planificações devem ter essa intencionalidade, querendo com isso dizer que nem as outras áreas devem ser simplesmente «usadas» para atingir objetivos matemáticos, nem a matemática deve ser considerada «incluída» sem que haja na planificação objetivos explícitos respeitantes a esta área disciplinar. Nesse sentido e a título de exemplo, Moreira e Oliveira (2003) apresentam possíveis pontes de ligação entre a matemática e a expressão musical através do estudo dos sons e dos ritmos, pela exploração da altura, da intensidade, da duração e do timbre, permitindo trabalhar os padrões. Ora, se o professor não apontar a exploração de padrões como um dos objetivos específicos no plano, poder-se-á perder a reflexão em torno de conceitos relativos à noção de padrão, eventualmente trabalhados numa sessão anterior de matemática. Se, pelo contrário, incluir esses objetivos, pode estabelecer uma relação interessante entre a matemática e a expressão musical, em que são igualmente valorizados e trabalhados conteúdos de ambas as áreas.

É importante que o desenvolvimento de conexões se faça tanto no pré-escolar como no 1.° ciclo do ensino básico. No entanto, não é menos importante que se perspetive esse desenvolvimento de forma transversal aos dois níveis de ensino e aos que a estes se ligam. Por exemplo, ao trabalhar os padrões no contexto de uma história, o educador está a proporcionar um trabalho preparatório para conceitos relacionados com o estudo de padrões no 1.° ciclo, que nesse nível serão trabalhados de forma mais sofisticada. A integração dos saberes entre estes dois níveis de ensino, permitindo um desenvolvimento dos conhecimentos, capacidades e competências dos jovens, está explicitamente expresso no perfil do professor do 1. ° ciclo do ensino básico, quando se refere que um dos objetivos é promover a «integração de todas as vertentes do currículo e a articulação das aprendizagens do 1.° ciclo com as da educação pré-escolar e as do 2.° ciclo» (Decreto-Lei n.° 241/2001).

Ao longo dos últimos anos, diversos autores têm vindo a defender, de forma mais incisiva, a importância do estabelecimento de conexões para o desenvolvimento das crianças. Quando Ponte (2010) refere que «a valorização das conexões matemáticas faz parte do bom ensino da disciplina, largamente documentado em manuais escolares e noutros testemunhos do passado» (p. 3), naturalmente nos questionamos sobre o papel do educador/professor nesse desiderato, pois é a este que cabe a função de «decidir as tarefas a propor, as conexões a valorizar e os modos de trabalho a usar, tendo em vista a aprendizagem dos alunos» (p. 6), de acordo com as suas experiências e conhecimentos. Esse é também um dos objetivos deste artigo.

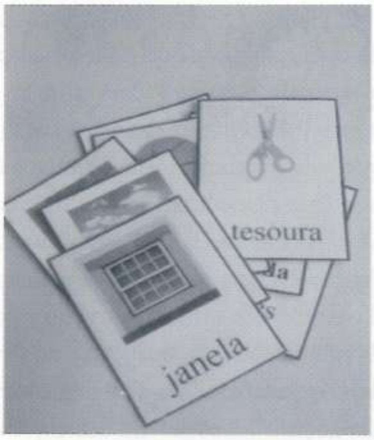


Figura 1. Jogo de consciência fonológica.

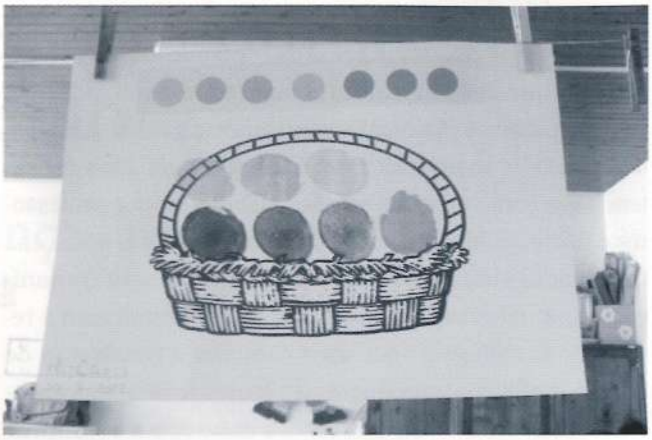


Figura 2. Registo da tarefa «Estampando ovos da Páscoa».

Tarefas desenvolvidas

Em primeiro lugar, apresentam-se as tarefas desenvolvidas no pré-escolar, seguindo-se as implementadas no 1.° ciclo. Para cada tarefa proposta, indicam-se os objetivos, faz-se uma descrição concisa dessa tarefa e, finalmente, apresenta-se uma breve reflexão. Das tarefas realizadas, foram selecionadas três para cada um dos níveis de ensino.

Jogo de consciência fonológica (pré-escolar)

Este jogo consistia em mostrar a cada criança uma imagem e pedir para que fizesse a divisão silábica da palavra correspondente (figura 1). O participante tinha de contabilizar o número de sílabas de cada palavra e, depois, todo o grupo era convidado a bater palmas acompanhando a leitura em voz alta das sílabas, como forma de confirmar a resposta apresentada. Em seguida, a criança colocava a sua palavra dentro de uma das caixas consoante o número de sílabas (as caixas estavam identificadas com os numerais um, dois, três, quatro e cinco, correspondentes ao número de sílabas de cada uma das palavras trabalhadas).

Através desta tarefa, pretendia-se que as crianças desenvolvessem a capacidade de segmentar silabicamente as palavras e de contagem de objetos, proporcionando algum treino para a identificação dos numerais.

As crianças mostraram empenho na realização do jogo. As imagens nos cartões, por facilitarem a identificação das palavras, muito contribuíram para esse sucesso. Todas as crianças fizeram a divisão silábica das palavras corretamente. Porém, em algumas palavras com cinco sílabas, várias crianças mostraram dificuldade na contagem até 5. O facto de a atividade se realizar em grande grupo, permitiu que essas crianças fossem ajudadas pelos colegas.

Estampando ovos da Páscoa (pré-escolar)

Nesta tarefa, as crianças tinham de reproduzir uma sequência de círculos coloridos através da técnica de estampagem, com batatas cortadas a meio e guaches.

Os círculos coloridos e a cesta da Páscoa estavam representados numa folha A3 (figura 2). Antes de iniciar a tarefa, as crianças tinham de contar o número de círculos, identificar as cores respetivas e contar quantos existiam de cada cor. Cada criança tinha uma folha, 4 pratos de plástico com os guaches das respetivas cores, 4 metades de batata e pincéis. Com a ajuda do pincel, colocavam o guache na batata e faziam a estampagem.

As crianças conseguiram identificar as cores, o número de círculos da mesma cor e o total de círculos, resultante da adição do número de círculos de uma cor com o número de círculos de outra cor.

Mais uma vez, com a execução desta tarefa pretendia-se que as crianças treinassem a contagem de objetos, mas agora formando conjuntos segundo determinadas categorias, categorias essas definidas pela cor dos círculos, treinando também a relação parte-parte-todo.

Uma forma de enriquecer esta tarefa pode passar por propor a construção e identificação de padrões. Por exemplo, as crianças podem ser convidadas a acrescentar círculos a uma determinada sequência, de acordo com uma regra previamente estabelecida. Ou podem mesmo ser desafiadas a construir as suas próprias sequências. De facto, nas Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar, alerta-se para a importância «de encontrar e estabelecer padrões, ou seja, formar sequências que têm regras lógicas subjacentes» (ME, 1997, p. 74). Esta pode constituir uma excelente oportunidade para uma introdução ao tema

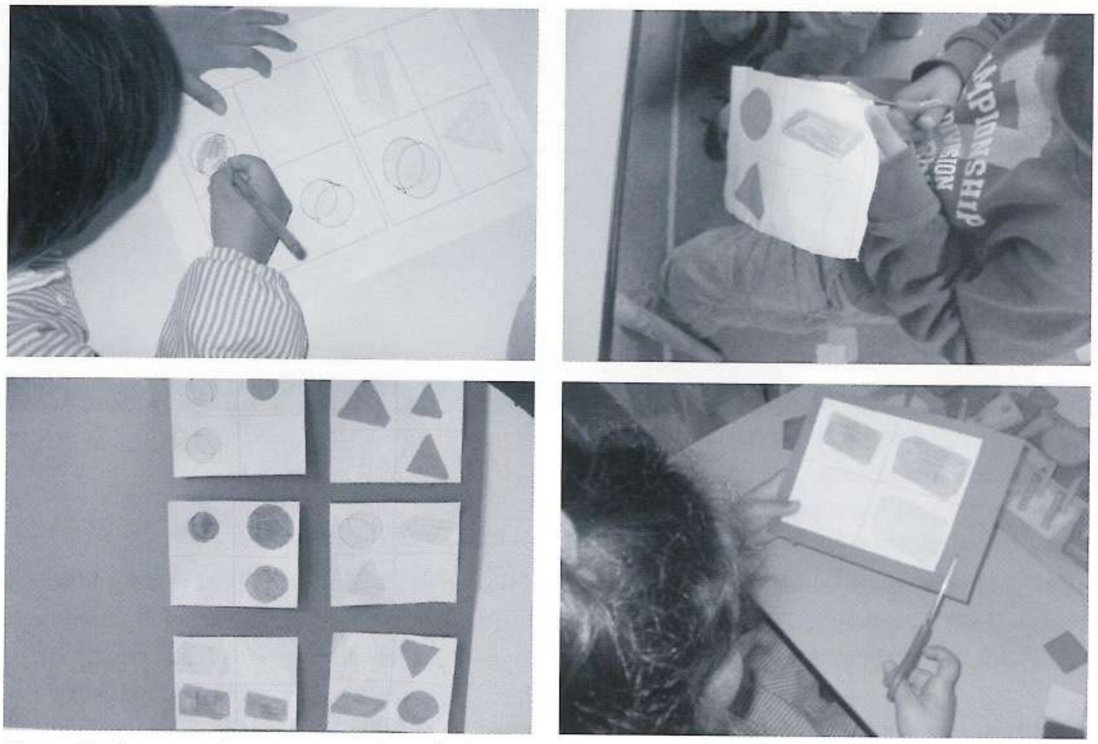


Figura 3. Processo de construção dos tabuleiros para jogar com os blocos lógicos.

Sequências e Regularidades, que ganhou considerável destaque desde 2007, com a implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007).

Construção de tabuleiros para o cantinho da matemática (pré-escolar)

No estágio desenvolvido no pré-escolar, criou-se um cantinho da matemática no qual foram colocados ficheiros de trabalho e jogos, entre outros materiais. Foram, também, pensadas algumas estratégias para reaproveitar e promover o uso de materiais manipuláveis existentes na sala, como foi o caso dos blocos lógicos.

Neste contexto, as crianças construíram vários tabuleiros de jogo, em que se pretendia verificar o que tinham aprendido com a exploração livre dos blocos lógicos. Façamos uma breve apresentação do trabalho desenvolvido pelo grupo de crianças. Os tabuleiros, como podemos observar na figura 3, eram constituídos por quatro casas. Foi pedido às crianças que pintassem os esboços das peças patentes em três das quatro casas, recorrendo umas vezes a uma só cor, outras vezes a diferentes combinações de cores. Em cada tabuleiro, uma casa foi deixada em branco. Posteriormente, os tabuleiros foram plastificados.

As crianças tinham de encontrar a peça que estava em falta tendo em conta as três já existentes, de acordo com as características que conheciam dos blocos lógicos (figura 4). Esta tarefa permitiu às crianças desenvolver a concentração e o raciocínio lógico-matemático.

Aprender geometria a cantar (1.° ciclo)

Com a letra «oh senhor quadrado, oh senhor retângulo» e a conhecida música infantil «A Machadinha» foi possível desenvolver diversas conexões matemáticas. Primeiramente, os alunos fizeram uma leitura silenciosa do texto que acompanhava a música. Seguiu-se uma leitura individual, em que cada criança deveria identificar o tipo de texto e as rimas que o compunham, bem como as palavras que caraterizavam as duas figuras geométricas. Perguntou-se, em seguida, se conheciam a música «A Machadinha». As crianças foram desafiadas a cantá-la com a letra adaptada, mudando algumas vezes o andamento musical. Por exemplo, cantando de forma mais rápida (*allegro*) ou mais lenta (*lento*). Em seguida, foram distribuídas clavas e pandeiretas por todos os alunos, indicando-se que no refrão todos tocariam, enquanto que nas estrofes apenas tocava um instrumento específico.

Os objetivos pretendidos com esta tarefa foram os de: usar expressões matemáticas para caracterizar figuras geométricas, no caso concreto, o quadrado e o rectângulo; identificar características de um texto; e desenvolver competências no domínio da expressão musical.

Figura 4. Jogando com os blocos lógicos.

Os alunos conseguiram aprender a canção desde o início com facilidade, talvez por ter uma melodia conhecida, por envolver conteúdos já tratados e por ter estrofes repetidas. A turma cantou e utilizou os instrumentos ao ritmo da música.

Um dos aspetos que mais valorizámos foi o facto de os alunos terem fixado a letra e a associado à música, tanto que muitos continuaram a cantarolar a música mesmo depois de concluída a tarefa, durante o tempo de recreio. A letra utilizava palavras com significados precisos, que irão naturalmente ser utilizadas muitas vezes no seu futuro para caracterizar figuras geométricas, constituindo esta tarefa mais uma etapa para a compreensão do seu significado.

O conceito de padrão foi explorado na tarefa realizada. Como referem Moreira e Oliveira (2003), através da altura, da intensidade, da duração e do timbre, é possível identificar padrões. No desenvolvimento da atividade, a intensidade e a duração foram exploradas. Através de registos, foi possível procurar intencionalmente padrões. Por exemplo, associando o «F» ao *forte* e o «P» ao *piano* no modo como cada estrofe foi cantada, registaram-se padrões «FPF». Naturalmente este é o ponto de partida para realizar o mesmo tipo de tarefas com outras músicas, explorando formas diferentes de as cantar, reorganizando a letra e/ou propondo novas estrofes.

Os azulejos na nossa história (1° ciclo)

No seguimento do conteúdo tratado em estudo do meio, «Os Muçulmanos», e uma vez que os azulejos constituem um dos vestígios deixados por este povo, cada aluno estampou um azulejo, com um *stencil*, criando um painel de turma. Foi necessário preparar duas mesas de trabalho, protegidas com jornais. Colocou-se à disposição dos alunos, em cada mesa, um prato com tinta azul, esponjas, azulejos e stencil, como mostra a figura 5. Com a esponja, os alunos fizeram a estampagem no azulejo.

Com esta tarefa estabelecemos como objetivos desenvolver a capacidade de cálculo mental, com vista à resolução de problemas em contextos diversos. Outro objetivo passou pelo desenvolvimento da expressão plástica. Foram, portanto, abordadas situações de descoberta e de exploração de conexões entre a matemática, a expressão plástica e o estudo do meio.

Como forma de explorar os conceitos de perímetro e de área, os alunos foram convidados a medir cada azulejo e a encontrar os respetivos perímetros e áreas, quer de um azulejo, como de dois, de quatro e do painel completo. Esta tarefa deu lugar a diversos cálculos por parte dos alunos, sendo os mesmos explorados aquando das correções em grupo.

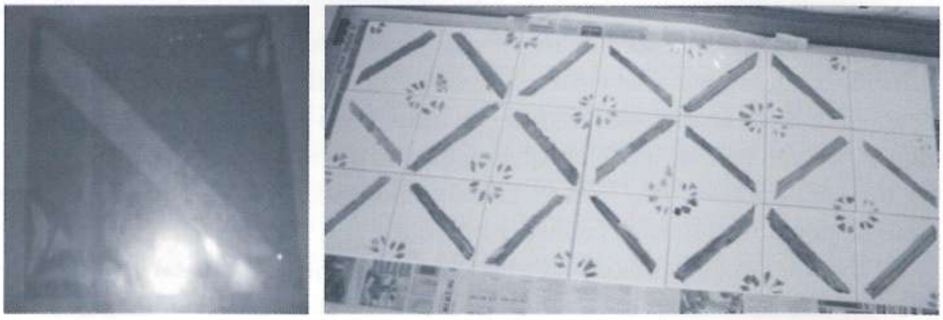


Figura 5. *Stencil* utilizado na estampagem do azulejo e o painel criado.

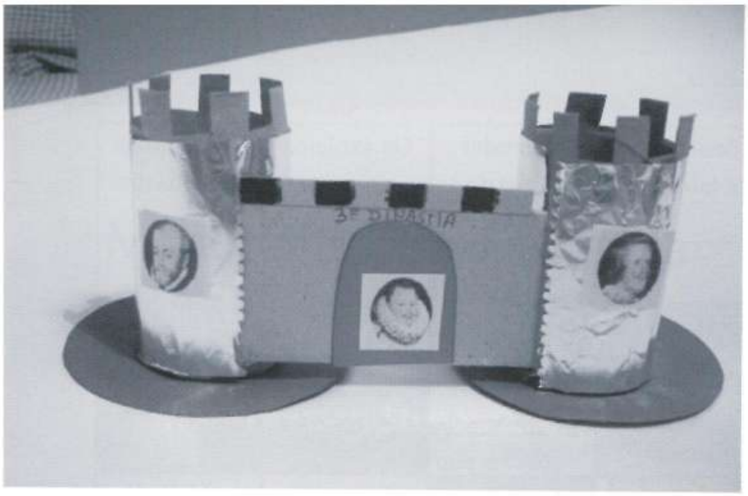


Figura 6. Castelo da 3.ª Dinastia.

Ao refletir sobre o que foi feito, damo-nos conta que algumas etapas desta tarefa poderiam ter sido melhoradas e exploradas com maior profundidade. Por exemplo, poderíamos ter organizado uma visita de estudo de forma a possibilitar que os alunos observassem azulejos presentes na freguesia da sua escola, estabelecendo assim ligações com o meio envolvente e com os objetos que observam no dia a dia. Na Ilha de São Miguel, nos Açores, há mesmo um Museu do Azulejo, que poderia ter constituído uma boa oportunidade para completar essa visita de estudo. Além disso, a partir daí, tal como foi feito com os azulejos criados pela turma, poderia ter sido proposto às crianças que tentassem encontrar uma estimativa para a área ocupada por um determinado conjunto de azulejos. Outra alternativa poderia ter passado por lançar o desafio à turma de se verificar se essa área e o correspondente perímetro eram maiores ou menores que as medidas do painel criado anteriormente pela turma, fazendo-se posteriormente as devidas comparações.

É importante salientar que, nesta tarefa, todas as áreas foram exploradas envolvendo conteúdos específicos. De fato, a tarefa permitiu trabalhar conteúdos matemáticos e de estudo do meio. Além disso, a conexão com a expressão plástica foi muito apreciada pelos alunos, tornando-se uma aliada fundamental na aprendizagem da matemática.

O tema «Azulejos» pode também ser aproveitado para explorar o conceito de pavimentação, bem como diferentes tipos de simetria, constituindo assim o mote para outras interessantes conexões.

O castelo da 3.ª Dinastia (1.º ciclo)

Outra tarefa que possibilitou o estabelecimento de conexões entre a matemática e outras áreas foi «O castelo da 3.ª Dinastia». Nesta tarefa, os alunos tinham de construir um castelo, com diversos materiais, no qual iriam colocar as fotos dos três reis, ficando, assim, com um registo deste conteúdo abordado.

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos: trabalhassem conteúdos de geometria, nomeadamente as propriedades do círculo e da circunferência; e pudessem contactar com novas situações de descoberta e de exploração de conexões entre a matemática, a expressão plástica e o estudo do meio.

Cada aluno teve de colar a porta do castelo no retângulo de cartão. Depois, teve de desenhar uma circunferência numa cartolina verde e recortar o círculo correspondente. Para a circunferência, foi dito que esta deveria ter um raio de 3 cm. De seguida, cada participante fazia um corte, na vertical, em dois rolos de papel higiénico e media 1 cm em cada extremo para fazer pequenos cortes, imitando assim a parte de cima das torres do castelo. As torres foram forradas com papel de alumínio, previamente recortado. Posteriormente, cada criança colou os círculos nas bases das duas torres, unindo as torres com o retângulo de cartão. Por fim, ordenaram-se as fotos dos três reis e colaram-se no castelo. Por cima das fotos, as crianças escreveram o nome de cada rei, como podemos observar na figura 6.

Para a concretização desta tarefa, os alunos tinham de dominar alguns conteúdos e procedimentos. Assim, tinham de conhecer os reis que compõem a 3.ª Dinastia e ordená-los por ordem temporal. No que diz respeito a conteúdos matemáticos, trabalharam conceitos de geometria e medida (nomeadamente, o conceito de comprimento), cuja aprendizagem foi estimulada pela necessidade de desenharem duas circunferências e por terem de fazer medições utilizando o centímetro como unidade de medida.

Esta tarefa permitiu consolidar conteúdos de estudo do meio e de matemática, através da expressão plástica. Consideramos que foi uma boa estratégia, pois os alunos demonstraram interesse na sua concretização e isso permitiu a aferição da mobilização dos conhecimentos em matemática, bem como da sua destreza na manipulação dos materiais.

A tarefa pode ser adaptada à faixa etária das crianças. Por exemplo, aos alunos mais velhos pode ser proposta a construção de um castelo mais sofisticado, que envolva mais cálculos e medições.

Considerações finais

Através das tarefas desenvolvidas, constatou-se que é possível diversificar as estratégias de ensino-aprendizagem, e que as conexões matemáticas promovem essa diversificação.

	Pré-Escolar			1.º Ciclo		
	Jogo de consciência fonológica	Estampando ovos da Páscoa	Construção de tabuleiros	Aprender geometria a cantar	Os azulejos na nossa história	O castelo da 3.ª Dinastia
Linguagem Oral e Abordagem à Escrita / Português						
Conhecimento do Mundo / Estudo do Meio						
Expressão Plástica						
Expressão Musical						

Quadro 1. Áreas e domínios envolvidos nas tarefas apresentadas.

Também ficou claro que o recurso a conexões permitiu trabalhar diversos tópicos numa só tarefa. Isto fez com que algumas das tarefas ocupassem mais tempo, mas em contrapartida envolvessem mais as crianças e permitissem desenvolver aprendizagens mais significativas.

Esta estratégia de trabalho ajudou na mudança de atitude face a esta área do saber, por parte dos alunos, uma vez que permitiu uma exploração mais livre, na qual se incluíram momentos lúdicos, mas que obedeceram a objetivos de aprendizagem matemática bem definidos. Este aspeto permitiu motivar os alunos para o ensino-aprendizagem da matemática. Somos levados a dizer que muitos a «redescobriram», pelo entusiasmo e dedicação que mostraram.

Valorizamos o facto de os alunos terem utilizado a matemática em situações concretas e acreditamos que este aspeto contribuiu para a mudança das suas representações sobre esta disciplina.

O quadro 1 apresenta uma síntese das áreas e domínios envolvidos nas tarefas apresentadas.

Com este artigo, foi nosso objetivo apresentar um leque diversificado de tarefas que mostram que é possível e praticável um ensino baseado no estabelecimento de conexões, tanto no pré-escolar como no 1.º ciclo do ensino básico. Além disso, este tipo de tarefas de conexão podem constituir uma fonte inesgotável de ideias para diferentes explorações que conduzam a aprendizagens integradas e significativas.

Referências Bibliográficas

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Ed.) *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching.* MahWah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ministério da Educação (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Narciso, M., & Paulus, P. (2005). *Histórias de matemática: Uma abordagem da didáctica experimental da matemática.* Carnaxide: publicação de autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.ª ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Moreira, D., & Oliveira, I. (2003). *Iniciação à matemática no jardim de infância.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2010). Conexões no programa de matemática do ensino básico. *Educação e Matemática* 110, 3–6.

Silva, J. A. (2005). *Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na matemática: algumas considerações.* Brasília: Universidade Católica de Brasília.

José Cascalho, Tânia Melo, Ricardo Teixeira
Universidade dos Açores

Matemática e a Natureza

Porque é que o tigre tem riscas e o leopardo tem manchas?, Porque é que os nós de marinheiro se assemelham à ação de um vírus?

Sabia que... a explicação do big bang e a inspiração de Escher na obra «Limites de Círculos» têm em comum basearem-se em geometrias não planas, nomeadamente no conceito da geometria curva do espaço tempo que sustenta a relatividade geral descrita por Einstein?

Já experimentou... estimar o comprimento de uma corda enrolada num retângulo, a partir da média de pontos de contacto resultantes da sobreposição de uma folha de papel com a corda?

A sequência de Fibonacci na Natureza, a sua relação com o número de ouro e deste último com a concha de um molusco, o empilhamento de laranjas ou as projeções de mapas, as (as)simetrias na Natureza ou o coloração de mapas são alguns exemplos de relações onde a Matemática explica a Natureza ou onde a última desperta na primeira a busca de padrões e regularidades que despoletam o avanço da Ciência.

Estas e muitas outras curiosidades estão patentes na exposição «Matemática e a Natureza», reformulada numa parceria entre a APM e o Matemática do Planeta Terra 2013 e com o apoio do Ciência Viva.

A exposição «Matemática e a Natureza» surge na APM em 2001 como resultado do trabalho subordinado ao tema orientador desse ano «Matemática e Natureza», adaptada, por sua vez, da exposição «Mathématiques dans la nature» desenvolvida em 2000, Ano Mundial da Matemática. Uma dúzia de anos mais tarde, a temática Matemática e a Natureza volta a estar na ordem do dia na APM, desta vez no âmbito do Ano da Matemática do Planeta Terra.

A exposição, constituída por 12 cartazes, incide em quatro grandes temáticas:

— Matemática e o Reino Animal;
— Matemática e o Reino Vegetal;
— Matemática e os Mapas;
— Matemática e Curiosidades

Cada cartaz apresenta um breve enquadramento da Matemática nos diferentes temas da Natureza que são abordados. Informação que é complementada em «Para saber mais». Para terminar têm ainda associados um desafio «Mexer e aprender» que, acompanhado de materiais manipuláveis adequados, incentiva o público a envolver-se em experiências matemáticas relacionadas com os diferentes temas. A exposição «Matemática e a Natureza» foi inaugurada no passado dia 5 de Setembro no Museu Nacional de História Natural e Ciência (MUNHAC) por ocasião da Escola de Verão de Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática, dedicada este ano ao tema Matemática do Planeta Terra http://mpt2013.apm.pt/index.php/exposicoes?id=99

Para conhecer um pouco melhor a exposição poderá consultar na página da APM em http://www.apm.pt/portal/index.php?id=22445. Esta exposição itinerante está já disponível para percorrer escolas, bibliotecas e outras instituições que venham a mostrar interesse na sua exibição.

Para requisitar esta ou outra exposição APM, contacte crecursos@apm.pt.

JOANA LATAS

Num Planeta em risco, a Biologia desempenha um papel fundamental na explicação de fenómenos e na compreensão e resolução de problemas do Planeta Terra e a Matemática será crucial para apontar orientações e linhas de atuação na definição de políticas de conservação e preservação de espécies em vias de extinção.

Depois de uma visita até à Ciência Polar pelas mãos do José Xavier e da Patrícia Azinhaga, nesta edição o Rogério Ferreira e o Pedro Sarmento, dois biólogos e investigadores, explicam como é que as decisões que tomam nas investigações em que estão envolvidos estão impregnadas de Matemática. É na Estatística que é apoiada toda a análise dos dados que recolhem no terreno e é a partir dela que emergem as resultados e recomendações. Neste artigo, são retratadas as questões e as tomadas de decisão inerentes a um método de investigação quantitativa na área da biologia marinha. Vamos levantar um pouco o véu dos bastidores da investigação e tornar explícita a interdependência entre a Matemática e, neste caso, a Biologia marinha.

JOANA LATAS

Pesca de espadarte e conservação de tartarugas marinhas

A Zona Económica Exclusiva Portuguesa, especialmente a área ao redor do arquipélago dos Açores, é um importante habitat de desenvolvimento de juvenis de tartaruga careta (*Caretta caretta*). Contudo, além do impacto crescente da ingestão e emaranhamento em plásticos e outros resíduos, estes e outros animais ameaçados (como algumas espécies de tubarões) são afetados pelas atividades pesqueiras que os capturam em números preocupantes, acidentalmente ou acessoriamente.

No início dos anos 80, quando os biólogos começaram a trabalhar com estas tartarugas nos Açores, a pergunta principal que faziam era: de onde vêm estas tartarugas marinhas? Afinal Portugal não tem praias de desova... Com a ajuda de estudos de marcação/recaptura e genética descobriu-se que estas tartarugas provinham de praias de desova dos EUA, principalmente da zona entre Florida e Carolina do Norte. As tartaruguinhas recém-eclodidas são transportadas por correntes até ao outro lado do Atlântico (figura 1), onde os juvenis se desenvolvem nesse ambiente pelágico[1] durante uma década, alimentando-se principalmente de cnidários[2] (e.g. águas-vivas/medusas), antes de regressarem para viverem perto das suas praias de origem.

Nos anos 90, os investigadores Alan Bolten, Helen Martins e Karen Bjorndal alertaram a comunidade científica que estas tartarugas se encontravam ameaçadas pela pescaria de espadarte (Xiphias gladius) no Atlântico Norte, com relevância para a área ao redor do arquipélago dos Açores onde a interacção aparentava ser elevada. A arte de pesca utilizada, o palangre de superfície, é composta por uma *linha madre*, onde se acoplam os estralhos com os anzóis, suspenso à superfície por boias e deixado à deriva durante a noite. As embarcações de maiores dimensões e autonomia podem facilmente largar mais de 50km de linha e 2000 anzóis e estender o seu esforço por todo o Atlântico.

Nos Açores, eram as maiores tartarugas presentes na área que estavam a engolir o isco dos anzóis, logo aquelas que estavam prestes a regressar aos EUA. Esta classe de tamanhos é considerada como das mais importantes para a sobrevivência da população Norte Atlântica de tartarugas careta, pois nestes tamanhos a mortalidade natural é insig-

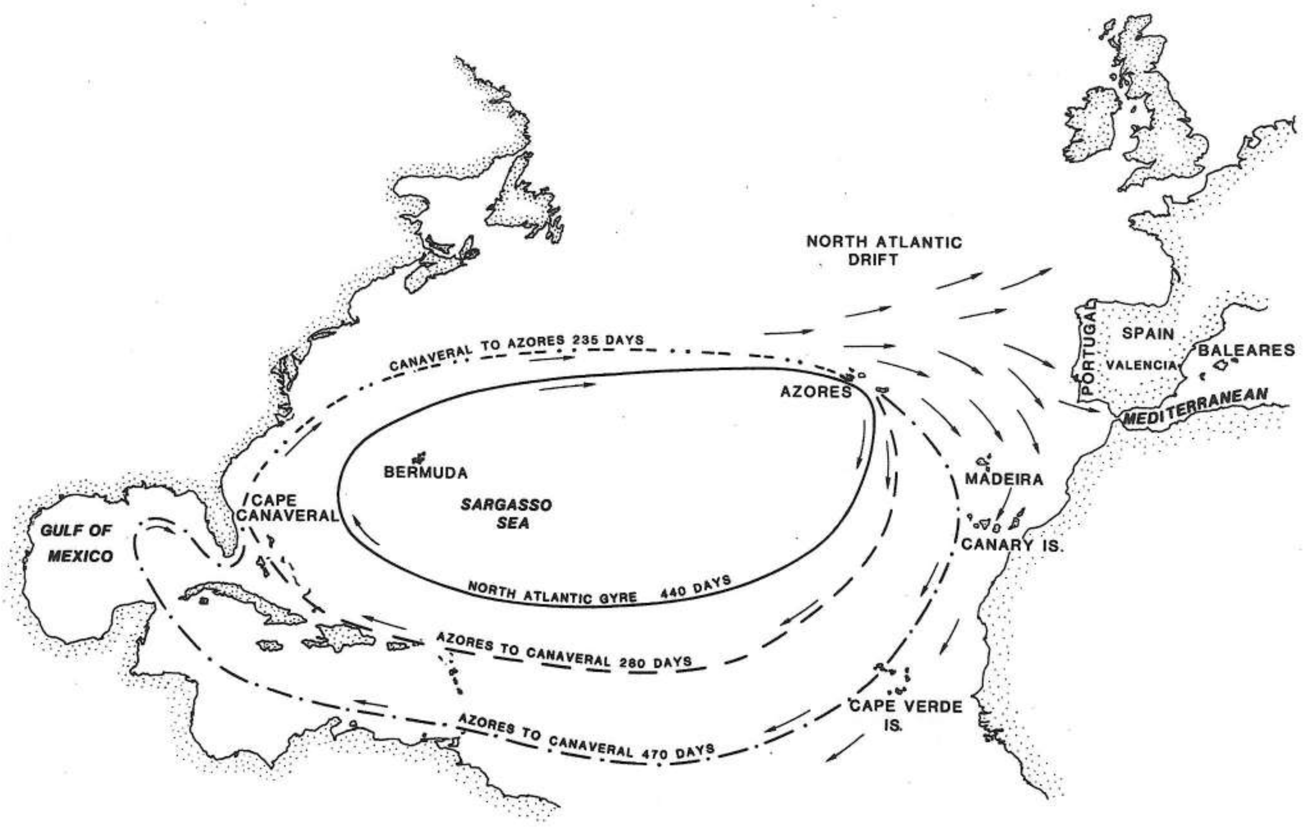


Figura 1. Rotas de migração de tartarugas entre Flórida e Açores e entre Açores e Flórida (Cortesia da NOAA Fisheries).

nificante. Na última década, assistiu-se a um declínio bastante acentuado no número de fêmeas desta espécie a desovar na Florida, um declínio que poderá estar associado ao aumento da pesca de espadarte no Atlântico Norte. Com isto em mente, foram realizadas experiências em embarcações comerciais de modo a investigar formas de reduzir a captura destes animais.

PONTO DE PARTIDA

Sabia-se que a captura de tartarugas na pesca ao espadarte nos Açores era mais elevada em determinados meses e locais que noutros. Desta forma, os investigadores averiguaram o porquê dessas diferenças.

As hipóteses iniciais seriam que os parâmetros investigados (variáveis independentes) não teriam efeito na variação observada no número de tartarugas capturadas, por 1000 anzóis, (variável dependente) para cada lance de pesca.

A IDENTIFICAÇÃO E DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS

As variáveis neste estudo concreto foram obtidas paralelamente a uma experiência de modificação da arte de pesca. A metodologia utilizada na experiência foi igual em todos os lances de pesca. Dentro das variáveis disponíveis, tanto ambientais como pesqueiras, foram seleccionadas apenas as que poderiam afetar o número de tartarugas capturadas por lance.

Temperaturas do mar, à superfície, foram recolhidas através de deteção remota, no âmbito do projecto «AVHRR Oceans Pathfinder» desenvolvido pela NASA e NOAA e disponibilizado gratuitamente (http:// podaac.jpl.nasa.gov).

A profundidade foi medida com uma sonda, apenas durante a largada, no início e final de cada segmento do aparelho de pesca. Como variáveis utilizaram-se as profundidades média e a mínima.

O estado do tempo foi calculado através da Escala de Beaufort e consistiu na observação média da velocidade do vento e seus efeitos na superfície do mar.

A área varrida, ou deslocação do aparelho de pesca, foi calculada através das posições de GPS (Global Positioning System) do início e final de cada segmento do aparelho de pesca, durante a largada e recolha.

O tempo de imersão corresponde ao tempo que cada segmento do aparelho de pesca permaneceu a pescar.

A fase lunar foi calculada através da fração iluminada da lua para cada lance de pesca e disponibilizada pelo sítio da USNO (http://aa.usno.navy.mil/).

OS INSTRUMENTOS

A obtenção de dados em cooperação com as actividades pesqueiras resulta ser um método de estudo bastante eficaz e não dispendioso. Por exemplo, os estudos sobre a distribuição das tartarugas e identificação de habitats pelágicos são normalmente efetuados através de transmissores de satélite, de elevado custo, logo condicionado ao número de transmissores financiados.

Os instrumentos utilizados foram essencialmente três e todos eles precisam de matemática ou para funcionar ou para interpretarmos os dados que nos fornecem. A saber:

Sonda: emite um som perpendicular e através do tempo que o seu eco demora a ser recebido dá-nos a distância da embarcação ao fundo do mar.

GPS: utiliza o posicionamento entre 4 satélites para nos dar a posição no globo terreste.

Detecção remota: neste caso obtido por sensores instalados nos satélites, é necessário à análise e calibração dos dados com valores obtidos em estações terrestes e a correcção dos espaços em branco e erros, para tal desenvolvem-se algoritmos.

A ESCOLHA DE DISTRIBUIÇÃO PARA ANÁLISE DOS DADOS AO LONGO DO PROCESSO

O *statistica* é um programa de tratamento de dados. Permite aplicar uma considerável bateria de testes que vão desde estatística descritiva até modelos de elevada complexidade. No entanto, neste momento o programa de estatística mais utilizado é o R. Funciona em plataforma aberta e tem mais de 500 pacotes adaptados a diversos fins que vão desde modelos simples até aplicações em geo-estatística. Inicialmente, houve alguma resistência na sua utilização pelo facto de exigir que os utilizadores saibam programação (linguagem R), mas devido às suas enormes potencialidades veio para ficar.

Regra geral, estes tipos de dados pesqueiros não obedecem a distribuições normais. Os modelos lineares generalizados (GLM) são métodos estatísticos muito flexíveis que surgem como uma alternativa não paramétrica da regressão linear e que permitem que as variáveis de resposta tenham uma distribuição não normal, o que se verifica na maior parte dos casos. Ao generalizarem as regressões lineares entre as variáveis explicativas e as de resposta permitem a linearização do modelo através de uma função de ligação (log, logit, etc.). Com alguma facilidade pode determinar-se quais as variáveis que têm uma influência significativa sobre a variável de resposta, atuando isoladamente ou em combinações.

Como as variáveis em estudo são contínuas, a distribuição de Poisson é adequada, por isso pode ser usada em GLMs (Poisson). Esta distribuição pode causar-nos desvios acentuados no modelo, devido ao excesso de zeros. Por esse motivo, podem usar-se modelos zero-inflacionados que permitem a presença de um elevado número de zeros.

Tabela 1. Valores de probabilidade (p), erro padrão (ep) e estimativa obtidos para os 7 parametros investigados através da análise GLM em relação ao CPUE (n ind./1000 anzóis) de tartarugas careta, tubarões azuis e espadartes. Os parâmetros significativos (alfa < 0.01) encontram-se em negrito.

Parametros	CPUE tartaruga careta			CPUE tubarão azul			CPUE espadarte		
	p	ep	estimativa	p	ep	estimativa	p	ep	estimativa
Prof. minima	0.595	0.00	–0.0002	0.272	0.00	0.0001	0.007	0.00	0.0005
Prof. média	0.002	0.00	0.0014	0.000	0.00	0.0014	0.059	0.00	-0.0004
Temperatura do mar	0.000	0.09	0.5773	0.000	0.02	–0.3359	0.055	0.03	–0.0632
Estado do tempo	0.712	0.09	–0.0262	0.000	0.03	0.1230	0.738	0.04	0.0127
Área varrida	0.127	0.00	0.0018	0.013	0.00	0.0009	0.683	0.00	0.0002
Tempo de imersão	0.167	1.54	2.1274	0.000	0.56	2.7612	0.012	0.82	2.0699
Fase lunar	0.032	0.26	-0.5615	0.016	0.07	–0.1781	0.140	0.11	0.1696

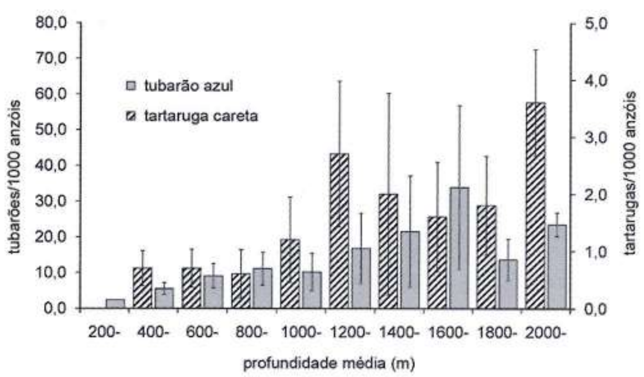


Figura 2. Número de tubarões azuis e tartarugas careta por 1000 anzóis (CPUE) e por classe de profundidade média (m). Barras representam o erro padrão.

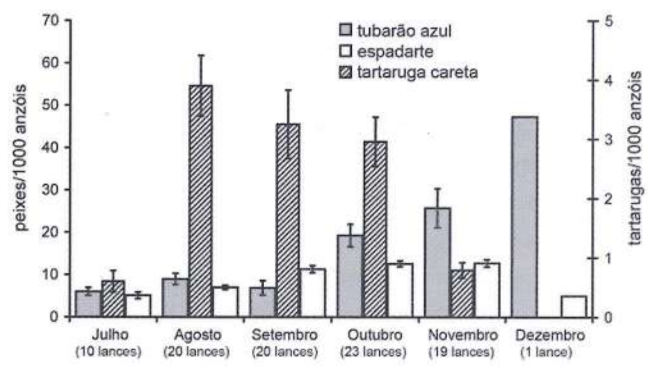


Figura 3. Número de indivíduos por 1000 anzóis e por mês para tubarões azuis, espadartes e tartarugas careta. Número de lances é apresentado dentro de parêntesis e as barras representam o erro padrão.

OS RESULTADOS

É com base na análise estatística que os investigadores podem aceitar ou rejeitar as hipóteses iniciais. Neste caso, da análise GLM resultou a tabela apresentada (Tabela 1).

Consideramos que aceitamos a hipótese se o nível de significância, representado por p, for inferior a 0,01. Quanto à escolha do nível de significância ser 0,01 ou vez do habitual 0,05, podemos verificar que a variável fase da lua, com o nível de significâncias escolhido não sugere relação com a captura de tartarugas, enquanto, se fosse considerado o valor 0,05, tal relação já seria considerada significativa. Esta opção evita assim erros do tipo 1 (acreditar que existe relação quando afinal não existe).

O estudo também indicou uma maior sobreposição de habitats entre as tartarugas careta e os tubarões azuis (*Prionace glauca*) do que entre as tartarugas e os espadartes. Esta relação está relacionada com a conjugação de vários fatores (análise de gráficos dos meses de maior captura de tartarugas e a análise GLM da profundidade média e da temperatura, esta última sugere-nos que a relação foi oposta entre as duas espécies).

Simplificando, se olharmos apenas para os meses de maior captura de tartarugas, a captura de tartarugas é mais elevada se a pesca se dirigir ao tubarão, que se diferencia da pesca dirigida ao espadarte fundamentalmente em relação à localização. Esta relação é sugerida pela profundidade média (local) que está relacionada positivamente entre as capturas das duas espécies (figura 2), embora a relação da temperatura (sazonal) seja oposta (figura 3).

De outros estudos já se sabia que as tartarugas estavam presentes nos Açores em maior número quando a temperatura da água é mais elevada (Agosto a Outubro). Esta conclusão é suportada pela última informação com a análise da tabela GLM na variável temperatura da superfície do mar estava positivamente e significativamente relacionada com a captura de tartarugas (mais tartarugas nesta região mais interacções com a pesca)

No entanto, há que ter em atenção na interpretação dos resultados que as embarcações de maior capacidade alternam a espécie alvo entre espadarte e tubarão azul. Quando a pesca é direcionada para o espadarte, a atividade termina mais cedo e menos tartarugas são capturadas. Por sua vez, quando a pesca é dirigida ao tubarão, a pesca é mais lenta (devido ao maior número de animais capturados e muitos ainda estarem vivos) e mais tartarugas são capturadas. Isto porque as tartarugas estão mais activas durante o dia.

RECOMENDAÇÕES

As tartarugas juvenis agregam-se perto de estruturas oceanográficas, como frentes termais e redemoinhos, relacionadas com grandes correntes e características topográficas do fundo e em intervalos de temperatura específicos e necessários para o seu metabolismo, visto serem animais de sangue frio. Contudo, estas áreas de elevada produtividade são também as áreas utilizadas pela frota de pesca. A sugestão principal do artigo apontou para, através da previsão da distribuição espácio-temporal das tartarugas careta, reduzir as interacções com a pesca.

A interação deste tipo de pesca com as tartarugas marinhas nos Açores poderia ser diminuída através da regulação da pesca de tubarão azul que, como a tartaruga careta, é uma espécie ameaçada devido à sobre-exploração e que utiliza as águas dos Açores como zona de maternidade.

Outras experiências paralelas, utilizando vários tipos de anzóis, mostraram que com o uso de anzóis circulares se capturam menos tartarugas e é mais fácil libertar as mesmas, pois são capturadas predominantemente pela boca, apresentando menos ferimentos graves. Por outro lado, suspeita-se que a utilização de anzóis circulares nos Açores poderia levar ao aumento da captura de tubarões azuis, isto porque o anzol circular é mais indicado para tubarões do que para espadartes e isso poderá ter alguma influência na selecção da espécie alvo da pescaria.

Outra medida identificada para reduzir o impacto desta pescaria nas tartarugas seria aumentar a consciencialização dos pescadores para a sua conservação. Se a embarcação parar e gentilmente se puxar a tartaruga, içando-a com um camaroeiro, o impacto físico nas tartarugas reduzir-se-á drasticamente. O uso de técnicas de remoção de anzóis, desenvolvidas especialmente para causarem menos dano nas tartarugas, também reduzirá a mortalidade das mesmas.

Além destas, a definição de uma política de mitigação das capturas acessórias que requeresse que as embarcações após elevada captura de tartarugas procurassem outra área de pesca, ou mesmo a proibição da pesca em áreas espacio-temporais identificadas como de elevada probabilidade de agregação de tartarugas careta, poderia também complementar o propósito de reduzir a captura de tartarugas.

Claro que, na prática, primeiro há que sensibilizar os pescadores para que tratem com cuidado os animais capturados. Depois, seguir a pescaria, através da colocação de observadores em grande parte da frota, e só aí implementar as proibições e obrigações que se provem necessárias.

Notas

[1] Ambiente pelágico: zona ecológica ocupada por organismos que não dependem diretamente do fundo do mar.

[2] Cnidaria: é o Filo onde se incluem os mais simples animais marinhos. Deve o seu nome às células urticantes que possuí, os cnidócitos.

Referências

Figura 1 obtida na publicação Carr, A. (1986). New perspectives on the pelagic stage of sea turtle development. *NOAA Technical Memorandum* NMFS-SEFC-190: 36pp.

Artigo e restantes figuras e tabelas baseado e obtidas, respectivamente, na publicação

Ferreira, LR, HR Martins, AB Bolten, MR Santos & K Erzini (2011). Influence of environmental and fishery parameters on loggerhead sea turtle by-catch in the longline fishery in the Azores archipelago and implications for conservation. *Journal of the Marine Biological Association of the United Kingdom* 91 (8): 1697–1705. Publish online on 17 Jun 2010.

Para informações mais completas, em português, consultar: https://sapientia.ualg.pt/handle/10400.1/1782

Rogério Ferreira
Biólogo Marinho e Pesqueiro
Bolseiro de Doutoramento pela Fundação para a Ciência e Técnologia
CCMAR — Centro de Ciências do Mar, Universidade do Algarve, Portugal
ACCSTR — «Archie Carr Center for Sea Turtle Research», Universidade da Florida, EUA

Pedro Sarmento
Fundação Essentia-Príncipe; Departamento de Biologia da Universidade de Aveiro

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A captura acidental de tartarugas associada à pesca de espadarte e de tubarão ao largo dos Açores é preocupante para a comunidade científica, assistindo-se posteriormente a um declínio acentuado do número de tartarugas fêmeas desta espécie aquando da desova na Florida. Para estudar o fenómeno um grupo de biólogos e investigadores partiram para uma investigação onde a estatística esteve sempre presente. Os resultados do estudo sugerem que as variáveis *temperatura superficial do mar* que foi recolhida através de deteção remota, no âmbito do projeto «AVHRR Oceans Pathfinder» desenvolvido pela NASA e NOAA (http:// podaac.jpl.nasa.gov) e *profundidade média* que foi medida através de uma sonda são as que influenciam na captura de tartaruga.

Nesta tarefa propomos uma abordagem desses dos dados recolhidos no referido estudo. Esta tarefa dirige-se especialmente a alunos do Ensino Secundário, em particular de Matemática B e MACS no estudo de distribuições bidimensionais em articulação com medidas de localização e representação de dados em diagramas de extremos e quartis. Para a realização da atividade é necessário descarregar o ficheiro *temperatura_profundidade* que está disponível junto à versão *online* da revista E&M http://www.apm.pt/portal/em.php e na página do MPT na APM http://mpt2013.apm.pt/index.php/mpt-na-e-m.

Agradecemos ao Rogério Ferreira por ter partilhado connosco os dados para a elaboração desta tarefa.

Sónia Barbosa
Agrupamento de Escolas Álvaro Velho

VAMOS AJUDAR A SALVAR AS TARTARUGAS CARETAS

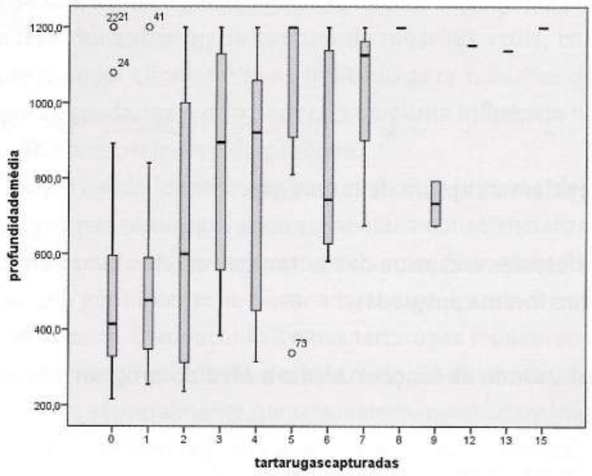
1. Classifica, quanto à sua natureza, as variáveis que influenciam a captura de tartarugas.

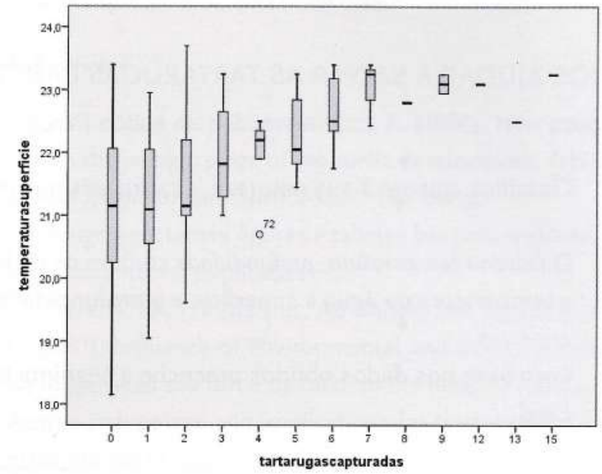
2. O ficheiro *temperatura_profundidade* contém os dados referentes à captura das tartarugas caretas tendo em conta a temperatura da água à superfície e a profundidade a que foram capturadas.

   Com base nos dados obtidos preenche a seguinte tabela usando as funções *Média* e *Med* do programa *Microsoft Excel*.

Número de tartarugas caretas capturadas	Média da temperatura da água	Mediana da temperatura da água	Média da profundidade da água	Mediana da profundidade da água
0			518,4	414,4
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
15				

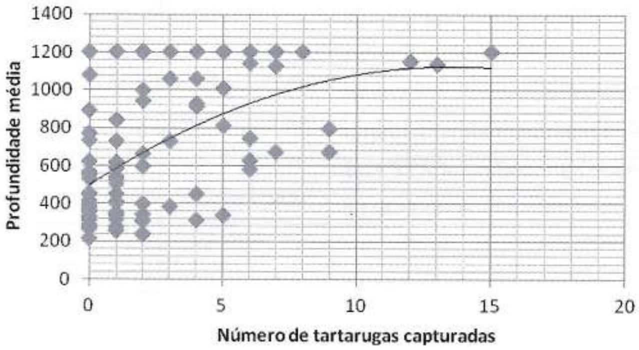
3. Com base nos dados do estudo foram construídos os seguintes diagramas de extremos e quartis das duas variáveis que sugerem influenciar a captura das tartarugas caretas.





Tendo em conta os resultados obtidos nas medidas de localização, o que se pode concluir acerca da influência da temperatura da água e da profundidade a que a pesca se realiza na captura das tartarugas?

4. Com o objetivo de verificar o tipo de associação quadrática entre a captura das tartarugas e a profundidade da água, foi elaborado um diagrama de dispersão.



Qual dos valores apresentados foi o coeficiente de correlação entre a temperatura à superfície da água e o número de tartarugas caretas capturadas? Numa pequena composição, explica porque não pode ser nenhum dos outros três, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual rejeita.

A) $R = -0{,}4$ B) $R = 0{,}99$ C) $R = 0{,}54$ D) $R = 0$

5. Com recurso aos dados do ficheiro *temperatura_profundidade* representa no programa *Microsoft Excel* um diagrama de dispersão que relacione o número de tartarugas caretas capturadas e a temperatura da água à superfície.

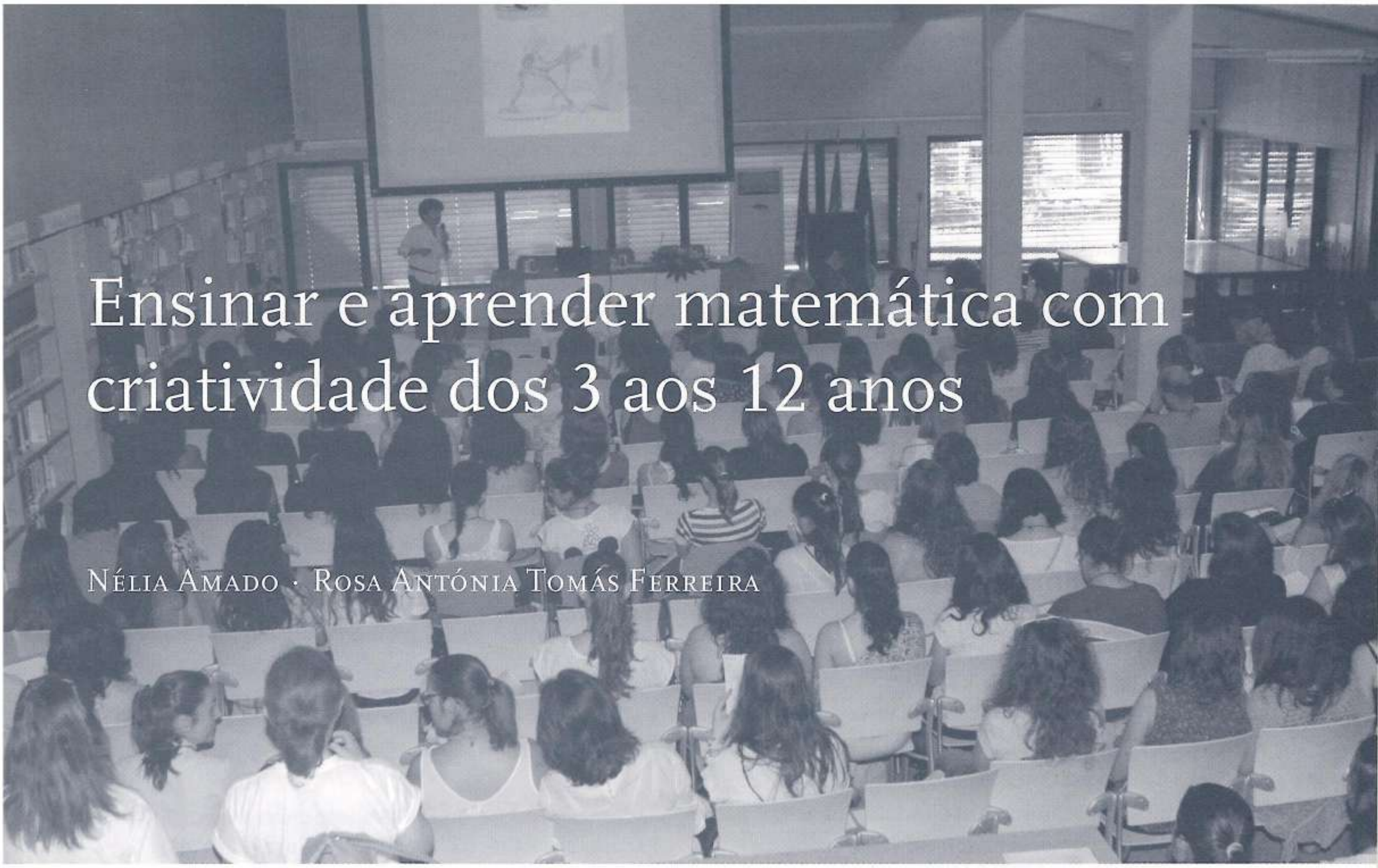
5.1. Qual o valor do coeficiente de correlação linear encontrado? Classifica o tipo de associação e o grau de associação linear entre as duas variáveis.

Nota: para determinar o coeficiente de correlação linear deve ser usada a seguinte sequência de comandos; ferramenta de gráfico → estrutura → esquema de gráfico 3. Selecionar a reta e escolher «mostrar o valor de R^2 no gráfico».

5.2. Considera a equação $y=ax+b$, reta de regressão linear das variáveis número de tartarugas capturadas (x) e temperatura à superfície da água (y). Determina os valores a e b. Faz uma estimativa para o número de tartarugas capturadas se a temperatura à superfície da água é igual a 23°C.

Nota: Selecionar a reta e escolher «mostrar equação no gráfico».

6. Com base neste estudo poderão ser dadas recomendações para as frotas pesqueiras de espadarte e de tubarões aquando da pesca. Assim, indica algumas recomendações a dar para a preservação das tartarugas caretas.



Ensinar e aprender matemática com criatividade dos 3 aos 12 anos

Nélia Amado · Rosa Antónia Tomás Ferreira

Realizou-se no passado dia 28 de junho de 2013, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, o 1.° Encontro Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade dos *3* aos *12* anos.

A criatividade matemática tem vindo a merecer grande relevo nos últimos anos tanto entre matemáticos como entre educadores matemáticos, existindo mesmo uma Conferência Internacional sobre Criatividade em Matemática que vai já na sétima edição e diversos grupos que refletem e debatem regularmente este tema, por exemplo no ICME (*International Congress of Mathematics Education*) ou no CERME (*Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*).

A criatividade é uma característica inerente ao saber matemático e embora esteja, muitas vezes, associada à genialidade ou a habilidades excecionais, ela pode ser amplamente estimulada na população escolar em geral. É uma capacidade que nem sempre é visível em contexto de sala de aula, sobretudo devido à falta de tempo e de espaço para atividades livres, bem como para reflexões informais, dois aspetos, entre outros, importantes para desenvolver ideias espontâneas e iluminações que provêm do senso comum.

Os alunos têm imensas capacidades naturais de inovação, pensamento criativo e formas alternativas de ver as coisas que devem ser estimuladas para que se possam revelar e desenvolver. O processo de ensino-aprendizagem da matemática deve, assim, incluir atividades que estimulem o desenvolvimento da criatividade de todos os alunos, tanto os mais fluentes e com melhor desempenho na disciplina, como também aqueles que, tendo potencial matemático, se veem impedidos de manifestar as suas habilidades devido a condicionalismos curriculares.

O 1.° Encontro *Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade dos 3 aos 12 anos* procurou sensibilizar a comunidade educativa, particularmente educadores de infância e professores dos 1.° e 2.° ciclos do ensino básico em Portugal, para a necessidade de valorizar a criatividade no processo de ensino-aprendizagem da matemática, destacando algumas estratégias que contribuem para o desenvolvimento da criatividade matemática dos nossos alunos.

O programa do encontro foi bastante rico e diversificado: duas conferências plenárias, catorze comunicações orais e dezassete em poster, quatro sessões práticas e ainda uma *Feira de Ideias Criativas* que contou com uma dúzia de propostas inovadoras.

Após a sessão de abertura, teve lugar a primeira conferência a cargo de Maria de Fátima Morais, da Universidade do Minho, que abordou o conceito de criatividade em geral e apresentou formas de o desmistificar e operacionalizar na escola. Na parte da tarde foi a vez de Susana Carreira, da Universidade do Algarve, realçar a importância da criatividade na resolução de problemas e destacar que esta não é uma característica exclusiva dos alunos mais dotados ou de desempenho mais elevado em matemática.

As sessões práticas captaram a atenção dos participantes e rapidamente encheram. Numa delas fez-se *Uma viagem pela Geometria*; noutra tudo girou em torno de uma história: *Era uma vez ... a matemática!* A sessão sobre *O Scratch na aula de matemática*, debruçou-se sobre a criatividade e as tecnologias e, por último, noutra sessão prática ficou a questão *Não sou nada criativo... e agora?*

Após o almoço, o programa do Encontro prosseguiu com a apresentação e discussão dos vários posters expostos, seguindo-se um conjunto largo de comunicações orais organizadas em sessões paralelas, sempre com espaço para discussão e troca de ideias.

Os participantes foram ainda convidados a apresentar a construção original de um cubo ou uma construção com vários cubos. A criatividade foi o fator determinante para a avaliação das diversas produções apresentadas, de diferentes tamanhos, construídas com diferentes materiais e com propósitos de uso também bastante diversificados. Os cubos estiveram expostos durante todo o Encontro e no final do dia foram sujeitos a votação pelos participantes em relação à sua originalidade. Houve ainda um desafio proposto a todos os participantes logo no início do Encontro. Depois da *Feira de Ideias Criativas*, durante o lanche de encerramento, foram anunciados os nomes dos vencedores destas duas *competições* e feita a entrega dos respetivos prémios.

O número de participantes neste Encontro excedeu as expetativas da organização. Estiveram presentes cerca de 200 participantes de todo o país e de todos os níveis de ensino, o que sugere que, de facto, os agentes educativos compreendem o valor da criatividade na matemática escolar.

Para terminar, deixamos uma palavra de apreço aos elementos da organização deste Encontro pelo excelente trabalho realizado e fazemos votos para que este tenha sido o primeiro, de muitos encontros, dedicados à criatividade matemática.

Nélia Amado
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade do Algarve

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Na ilha de Boole

A ilha de Boole é habitada por duas tribos: os Verks, que dizem sempre a verdade, e os Falks, que mentem sempre. Quando lá estive, fui jantar com quatro habitantes chamados Aok, Bok, Cok e Dok.

Quando me interroguei sobre as respetivas tribos, disse-me Aok: «Exatamente um de nós os quatro é falk».

Bok acrescentou: «Nós os quatro somos falks».

Baralhado, perguntei a Cok: «Aok é verk?». A resposta que ele deu não me permitiu ficar a saber o que era Aok.

A que tribo pertence Dok?

(Respostas até 31 de dezembro para zepaulo46@gmail.com)

COINCIDÊNCIAS

O problema proposto no número 122 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O Tiago escreveu a idade dele e a do irmão, uma encostada à outra. Ao olhar para o único número assim obtido, o Daniel comentou:

— *Repara na coincidência: está aqui precisamente o quadrado da idade do nosso pai.*

— *Pois é, – disse o Tiago. — Mas o mais curioso é que daqui a onze anos isto volta a acontecer.*

Que idades têm eles?

Recebemos 15 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias (Torres Vedras), Catarina Ferreira (Lamego), Elsa Oliveira, Ema Modesto & João Pineda (Aveiro), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva, João Barata (Castelo Branco), Luís Lopo (Montijo), Paulo Gouveia, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Sílvia Neves, e Telma Carneiro (Braga)

Apareceram duas estratégias de resolução.

O Hugo, a Alice e o Luís usaram a folha de cálculo. Demos a palavra ao Hugo:

Para responder a esta questão recorri a uma folha de cálculo, como por exemplo a do Microsoft Excel. Numa coluna (A) coloquei idades que considerei aceitáveis para se ser pai. Noutra (B), coloquei o quadrado dessas idades. Depois criei funções que separavam do quadrado da idade do pai, as idades dos irmãos (naturalmente considerei que as idades de cada irmão não poderia ter mais que dois algarismos). Por fim e por inspeção, encontrei as idades dos irmãos que satisfaziam a segunda condição do enunciado.

Os restantes seguiram por via analítica, raciocinando de formas muito semelhantes. Eis a resolução da Graça e do Pedrosa Santos:

Comecemos por admitir que as idades dos dois irmãos são números de dois algarismos.

Sejam:

n o número obtido pelo Tiago ao escrever a idade dele e a do irmão uma encostada à outra,

p a idade atual do pai.

Então,

$$n = p^2$$

Onze anos depois, p aumenta 11 e n aumenta 1111, logo:

$$n + 1111 = (p+11)^2 \Leftrightarrow n + 1111 = p^2 + 22p + 121 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{(substituindo } n) \Leftrightarrow p^2 + 1111 = p^2 + 22p + 121 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1111 = 22p + 121 \Leftrightarrow p = 45$$

O pai tem 45 anos.

Como $45^2 = 2025$, o Tiago tem 20 anos e o Daniel 25.

O presente número da secção tem dois conteúdos distintos. Um deles procura reforçar a divulgação de algumas iniciativas relacionadas com o Statistics2013, o outro é um artigo da autoria de Marisa Gregório, da EB. E,3 da Pontinha. Queremos no entanto chamar a atenção para a secção dos Materiais para a sala de aula incluídos na secção Matemática do Planeta Terra 2013, apresentada por Sónia Barbosa e intitulada *Vamos ajudar a salvar as tartarugas caretas*, que constitui um excelente recurso para trabalhar em modelação estatística no ensino secundário.

Entre as iniciativas relacionadas com o Statistics2013 — que, relembramos, tem um site http://www.statistics2013.org/ com diversos recursos que podem ser mobilizados para trabalhar com alunos de diversas idades, sublinhamos a disponibilização das *estatísticas do dia*, que , para além do seu carácter informativo, podem inspirar investigações estatísticas para a aula de Matemática.

Já o artigo de Marisa Gregório, com o título *Média: O procedimento e a compreensão*, discute o conceito de média e a sua utilização pelos alunos, sublinhando a necessidade de estes aprenderem a usá-lo com espírito crítico. Corresponde a um bom prolongamento e aprofundamento das ideias que o *Pense Nisto*, publicado nesta secção na *EM122*, quis interpelar, ao desafiar as metas curriculares no que diz respeito à estatística.

Divulgamos ainda a ICOTS 2014, a maior conferência internacional sobre o ensino da Estatística.

Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora [apc@uevora.pt]

Estatísticas do dia

No site do ano internacional da Estatística são diariamente disponibilizadas estatísticas por diversas entidades oficiais que produzem estatística um pouco por todo o mundo. Essas estatísticas referem-se em geral a aspetos da sociedade de um país ou do mundo, e algumas delas podem ser bons pontos de partida para tarefas de investigação ou projetos mais alargados e até interdisciplinares com interesse para os alunos. Pode consultar-se em http://www.statistics2013.org/statistic-of-the-day/ o arquivo das estatísticas já publicadas.

Nos dias 19 e 20 de Outubro foram dadas a conhecer as seguintes:

19/10/2013 O século 20 assistiu ao maior crescimento que alguma vez se tinha verificado na população mundial durante um século. No início, existiam 1.6 biliões de pessoas; no final, o número era de 6.1 biliões. Fonte: Human Population Growth and International Migration.

20/10/2013 Espera-se que a população mundial aumente outro bilião em 12 anos, criando necessidades sem precedentes a nível de alimentação, água, energia e emprego. Fonte: The Millennium Project.

Deixamos aqui o desafio de usar estas estatísticas para trabalhar com os seus alunos — quem sabe poderá elaborar uma tarefa e devolver à revista Educação Matemática....

A ICOTS — *International Conference on Teaching Statistics* — iniciou-se em 1982 e desde aí teve oito edições. De alguma forma, corresponde aos «Jogos Olímpicos» das conferências no domínio, não só porque se realiza apenas de 4 em 4 anos, como porque reúne os maiores especialistas e um enorme número de participantes. A próxima, ICTOS 9, realiza-se em Flagstaff, no Arizona, entre 13 e 18 de Julho, e tem como tema «A sustentabilidade da Educação em Estatística». A quem possa interessar: http://icots.net/9/

Média: O procedimento e a compreensão

MARISA GREGÓRIO

O conceito de média é largamente utilizado pelos mais variados meios de comunicação, jornais, revistas, televisão, internet. Este conceito estatístico é usado na vida quotidiana bem como em outras disciplinas e o seu conhecimento é necessário em muitas profissões. Conhecer bem o conceito de média, saber o que significa e quando se deve ou não usar é muito importante para o desenvolvimento do espírito crítico.

A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE MÉDIA

O simples conhecimento de conceitos e procedimentos não é sinónimo da sua compreensão. Isso acontece com todos os conceitos, incluindo, naturalmente, o de média. Muitas vezes, o primeiro contacto dos alunos com informação e com conceitos estatísticos não é feito na escola mas sim fora desta, mas isso não é garantia da compreensão do seu significado. O conceito de média, como muito outros, é mais complexo do que pode parecer à primeira vista, razão pela qual é necessário um cuidado especial ao trabalho desenvolvido na sala de aula a seu respeito.

Saber construir um gráfico não é garantia da sua compreensão, assim como saber calcular a média não é prova do reconhecimento do seu significado. Quando questionamos os alunos acerca da média, muitos irão indicar o procedimento para calcular a média de dois valores. Muitos dirão até corretamente que para calcular a média de um grupo de valores somam-se todos os seus elementos e divide-se o resultado da soma pelo número de elementos. Mas terão dificuldade em responder a questões como: O que significa esse procedimento? Que informação nos dá? O que é que podemos saber através dele? Será sempre possível calcular a média de um conjunto de dados? É sempre um bom indicador acerca das características de um grupo de dados?

A média é a medida de localização mais vulgarmente utilizada para sintetizar informação contida num conjunto de dados. É um bom representante de um conjunto de dados quando estes se distribuem de forma aproximadamente simétrica com uma zona central de maior concentração e sem valores muito grandes ou muito pequenos relativamente à maior parte dos dados. No entanto é necessário ter alguns cuidados quer na sua utilização e na sua interpretação, pois existe o risco da informação que ela traduz não ter qualquer utilidade ou ser enganadora.

Este artigo relata uma sequência de aprendizagem sobre o tema da Organização e Tratamento de Dados que visou a exploração do conceito de média privilegiando a sua compreensão e não apenas a aprendizagem do procedimento para a sua determinação. Tratou-se de uma experiência de ensino no âmbito do Mestrado de Educação, tendo por base diversas tarefas cujo objetivo era contribuir para desenvolvimento da literacia estatística em alunos do 2.° ciclo. Pretendia-se fomentar o sentido crítico dos alunos e promover o desenvolvimento de capacidade de argumentação para as suas tomadas de posição e fundamentação das suas opiniões sobre os mais variados temas relacionados com a sua vida cívica ativa atual e futura.

DINÂMICA DAS AULAS

A atividade realizada na sala de aula envolveu diferentes modos de trabalho dos alunos, em especial o trabalho de grupo e o trabalho individual, tendo sempre por base a abordagem de ensino exploratório. O trabalho em grupo, já familiar aos alunos, por ter sido implementado desde o início do ano e frequentemente utilizado em todos os temas lecionados incidiu em tarefas de introdução e consolidação. Esta opção teve como objetivo possibilitar aos alunos a aquisição dos conhecimentos e procedimentos matemáticos com significado e desenvolver capacidades como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. O trabalho individual ocorreu nos momentos de aplicação e verificação da aprendizagem dos conceitos, o que permitiu dar visibilidade aos progressos ou dificuldades dos alunos, uma vez que o trabalho em grupo pode diluir as fragilidades individuais e realçar as capacidades dos elementos com melhor desempenho.

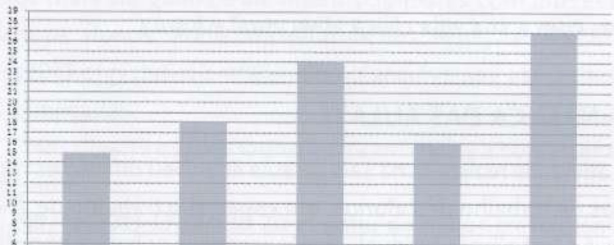
As aulas decorreram em quatro fases: (i) Apresentação da tarefa; (ii) Trabalho autónomo dos alunos, (iii) Discussão coletiva e (iv) Síntese final (Ponte, 2005). Nas discussões coletivas, os alunos apresentavam aos colegas o seu trabalho. Com estas discussões pretendia não só que os alunos conhecessem, discutissem e validassem os processos utilizados na resolução da tarefa, mas também que argumentassem as conclusões retiradas, de modo a fomentar a participação crítica de todos os alunos, desenvolvendo desta forma processos de comunicação. A dinamização destas discussões procurou seguir as indicações do modelo apresentado por Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008). Este modelo é constituído por cinco práticas: (1) antecipar as resoluções dos alunos; (2) monitorizar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento nas tarefas; (3) selecionar determinados alunos para apresentarem o seu trabalho; (4) sequenciar as resoluções dos alunos que serão apresentadas; (5) estabelecer conexões entre resoluções e ideias matemáticas. De realçar este último momento como primordial para a reorganização das ideias preconcebidas dos alunos e para a formalização dos conceitos e construção de novos conhecimentos.

Neste artigo serão apresentadas algumas tarefas trabalhadas ao longo da sequência de aprendizagem que teve início no 5.° ano e seguimento no 6.° ano. Elas pretendem exemplificar a tipologia de tarefas e o trabalho desenvolvido pelos alunos.

A Inês, a Sara, o Raul, o André e a Eva estão a angariar dinheiro para uma viagem de estudo. Observa as quantias que cada uma das crianças conseguiu angariar.

1.1. Os cinco amigos decidiram juntar todo o dinheiro obtido e dividir igualmente pelos cinco. Com que dinheiro ficou cada uma das crianças?

1.2. Observa o gráfico que representa a quantia que cada uma das crianças tinha no seu mealheiro.



1.2.1. Assinala a vermelho a linha correspondente à quantia com que cada uma das crianças ficou no final da divisão.

1.2.2. Explica uma possível forma de distribuir a quantia existente em cada um dos mealheiros para que cada criança ficasse exatamente com a mesma quantia.

TAREFA: POUPAR PARA PARTILHAR

TAREFA: POUPAR PARA PARTILHAR

A primeira tarefa (Poupar para partilhar) teve como objetivo introduzir o conceito de média explorando a compreensão da sua representação num gráfico de barras. A tarefa procurava salientar que no cálculo da média intervêm todos os valores da amostra e que esta é o número que «equilibra» os grandes valores com os pequenos valores.

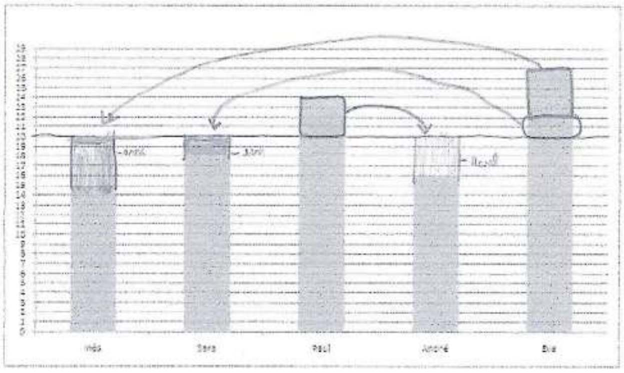
Em relação ao item 1.1. os alunos não revelaram qualquer dificuldade. Os valores em causa eram simples, pelo que, nas suas resoluções os alunos recorreram ao algoritmo da divisão da soma de todos os valores pelos cinco amigos. O item 1.2.1. também não suscitou dificuldade, tendo todos os grupos assinalado corretamente uma linha horizontal representando o valor pedido (20€).

Em resposta ao último item (1.2.2.), os alunos fizeram diferentes distribuições das quantias pelos cinco amigos e todos os grupos chegaram ao valor correto (20 euros). Este item tinha por objetivo levar os alunos a compreenderem a dinâmica subjacente ao conceito de média. Da discussão resultante da apresentação das resoluções dos diversos grupos, os alunos revelam a compreensão da média como distribuição equitativa dos valores da amostra. Atribuindo o seguinte significado: «Se todos os alunos tivessem obtido a mesma quantia, cada um teria obtido 20 euros.»

Durante a síntese da tarefa foi apresentado aos alunos o significado matemático desse valor e apresentada a designação de média.

OUTRAS TAREFAS

Ao longo da sequência didática foram trabalhadas várias tarefas com o objetivo de explorar as propriedades e o signi-



O raul dá 4€ ao andré
A eva deu 2€ a sara
e deu 5€ a Inês

Item 1. As temperaturas mínimas que se verificaram durante a primeira semana de janeiro na Serra de Monchique estão registadas na tabela seguinte:

dom	2.ª f	3.ª f	4.ª f	5.ª f	6.ª f	sáb
4°	4°	0°	1°	4°	5°	3°

Item 1.1. Entre que valores variou a temperatura mínima na Serra de Monchique nesta semana?

Item 1.2. Qual foi a temperatura mínima mais frequente, nesta semana, na Serra de Monchique?

Item 1.3. Calcula a média das temperaturas durante esta semana, na Serra de Monchique. Explica o seu significado.

TAREFA: TEMPERATURAS NA SERRA

ficado da média em contexto concreto:

(i) A média é um valor compreendido entre os valores extremos dos dados, nunca podendo ser menor que o mínimo nem maior que o valor máximo;
(ii) Que o valor médio é influenciado por todos os valores dos dados;
(iii) Que não tem de ser igual a um dos valores dos dados;
(iv) Que o valor da média pode ser um número fracionário que não tenha sentido no contexto;
(v) Que há que ter em conta os valores nulos no cálculo da média;
(vi) Que o conhecimento da média permite determinar a soma de todos os valores da amostra.

Os exemplos que seguem ilustram tarefas onde foram trabalhadas algumas das propriedades enunciadas.

TAREFA: TEMPERATURAS NA SERRA

Esta tarefa tinha como objetivo verificar se os alunos eram capazes de identificar os extremos e a moda de um conjunto de dados e detetar a média bem como possíveis dificuldades dos alunos no seu cálculo, tendo em conta a existência de um valor nulo no conjunto de dados. Pretendia-se, também, perceber qual a sua compreensão do conceito de média e que significado e adequação lhe atribuem num dado contexto. Esta tarefa foi realizada individualmente.

Os alunos revelaram alguma dificuldade na interpretação do enunciado do item 1.1., associada ao significado da palavra «variação» no contexto da linguagem corrente e ignorando parte do enunciado, obtendo-se as seguintes respostas: «Subiu e desceu», «Variou 21°» (que corresponde à soma de todos os dados), outros apresentaram todos os elementos do grupo de dados e outros ainda ignoraram o valor nulo justificando uma razão intencional durante a discussão da resolução da tarefa. Para estes alunos o valor nulo seria em si uma razão plausível para o rejeitar. Esta situação repetiu-se no cálculo da média (item 1.3.). Em relação ao item 1.2. os alunos não revelaram grande dificuldade, contudo, alguns associaram o conceito «moda» ao maior valor (5° C) ou à categoria que apresenta maior temperatura (sexta-feira).

Relativamente ao item 1.3. os alunos mostraram facilidade no procedimento, mas apenas alguns apresentaram significado válido no contexto da questão:

4+4+0+1+4+5+3=21

$$\begin{array}{r|l} 21 & 7 \\ \underline{-21} & 3 \\ 00 & \end{array}$$

A média é de 3 °C, significa que se todos os dias tivesse a mesma temperatura tinha estado 3 °C.

Esta tarefa mostra a importância e o cuidado que os professores devem de ter ao introduzir os conceitos matemáticos e à sua associação a termos utilizados no contexto da linguagem corrente. Tornando-se premente a explicitação da dualidade das expressões amplitude/variação e moda/valor mais frequente. Revela também a insistência que deve ser dada à exigência do significado na formulação das questões associadas ao conceito de média e não apenas ao pedido da sua determinação. As dificuldades e erros aqui apresentados foram identificados como erros comuns por Batanero (2001).

TAREFA: CONCERTO DE PRIMAVERA

Esta tarefa, realizada em grupo, tinha como objetivo consolidar as aprendizagens dos alunos sobre o conceito de média e verificar de que forma essas aprendizagens são mobilizadas num determinado contexto e ainda identificar a dinâmica subjacente à compreensão e ao procedimento do cálculo da média.

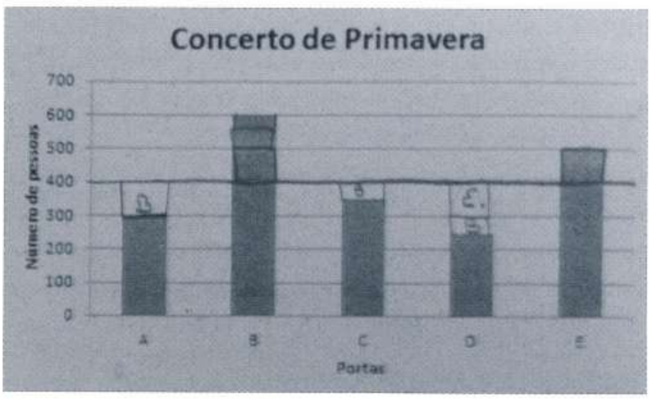
Para assistir ao concerto de Primavera no Estádio Nacional os espectadores podiam escolher entrar por uma das cinco portas possíveis. No gráfico está registado o número de entradas em cada uma das cinco portas existentes no Estádio Nacional.

Qual foi a média de entradas registadas nas portas do Estádio? Explica o significado desse valor no contexto do problema.

TAREFA: CONCERTO DE PRIMAVERA

Muitos dos alunos obtiveram a resposta através do gráfico, operacionalizando a compreensão sem sentir necessidade de realizar mecanicamente o seu cálculo.

«A média de entradas registadas é de 400, porque se a média é para dividir igualmente, tiramos, 100 do B e pusemos no A, depois voltamos a tirar 50 e pusemos no C, a seguir retiramos mais 50 e pusemos no D, e por fim, tiramos 100 no E e pusemos no D.».



Estes alunos não atribuíram um significado ao valor da média, no entanto a sua resolução dá indicadores da compreensão do mesmo.

Na resolução seguinte os alunos utilizam corretamente o algoritmo e atribuem um significado válido no contexto do problema:

$$\bar{x} = \frac{300+600+350+250+500}{5} = \frac{2000}{5} = 400$$

1500 1200 600 2000

R: A média é de 400, ou seja, se todas as pessoas tivessem entrado em número igual nas 5 portas, teriam entrado 400 pessoas em cada porta.

Na discussão da tarefa foi trabalhado o significado deste valor e qual a sua utilidade, nomeadamente na obtenção do número total de espetadores do concerto: «Ah, então se não tivéssemos os dados do gráfico e apenas a média de entrada nas cinco portas, bastava fazer 5 Σ 400 para sabermos quantas pessoas tinham ido ao concerto!»

De realçar que durante a discussão, os alunos que utilizaram exclusivamente o gráfico para determinar a média sem apresentar por escrito a explicação do valor obtido no contexto dado, foram capazes de o fazer oralmente.

Este tipo de trabalho tem de ser repetido de forma consistente com vista a resultados na progressão da aprendizagem e no desenvolvimento da literacia estatística. Ao longo do 6.° ano este trabalho foi consolidado e desenvolvido.

Os exemplos que se seguem ilustram alguns exemplos de tarefas realizadas pelos alunos, individualmente, durante o 6.° ano e que tinham por objetivo a aplicação do conceito de média a novas situações:

O João fez dois testes de Matemática e obteve as seguintes classificações: 58% e 67%.

Que nota terá de ter no próximo teste para que a sua média seja exatamente 70%?

As três resoluções ilustram a aquisição do conceito e da compreensão do conceito de média como valor que equilibra todos os dados da amostra. Gostaria de realçar a última resolução que revela um raciocínio mais elaborado e esclarecedor da aquisição significativa da compreensão do conceito.

58% 67% ?* → 70% 70% 70% → média

$\underbrace{58\% \quad 67\%}_{125}$ 85% $\underbrace{70\% \quad 70\% \quad 70\%}_{210}$

R: Para que a média dê 70% terá de ter 85% no próximo teste. 210 − 125 = 85*

58 + 67 = 125 3 × 70 = 210 210 − 125 = 85%

R: O Jaime terá de ter 85% no próximo teste.

70 − 58 = 12 12 + 3 = 15
70 − 67 = 3 70 + 15 = 85

R: Terá de ter 85%

O exemplo seguinte refere-se, mais uma vez, à importância do conceito de média para a resolução de problemas de aplicação do seu significado:

> *A mãe do Teófilo tem quatro filhos. A Carolina, a Paula, a Sandra e o Teófilo. A média das idades das filhas é 11 anos. A média dos quatro filhos é 10 anos. Que idade tem o Teófilo? Explica como chegaste à tua resposta.*

A mãe do Teófilo tem quatro filhos. A Carolina, a Paula, a Sandra e o Teófilo.
A média das idades das filhas é de 11 anos.
A média das idades dos quatro filhos é de 10 anos.
Que idade tem o Teófilo?
Explica como chegaste à tua resposta.

$\bar{x}$ = 10 anos → a soma dos 4 filhos é 4 × 10 = 40

4 filhos < 3 raparigas, 1 rapaz

Carolina + Paula + Sandra

40 − 33 = 7 anos

$\bar{x}$ = 11 anos → a soma das idades das 3 raparigas é 3 × 11 = 33

R: O Teófilo tem 7 anos.

11 11 anos 11 anos ? Teófilo

11 + 11 + 11 = 33 30 − 33 = 3
10 + 10 + 10 = 30 10 − 3 = 7 anos

R: O Teófilo tem 7 an

Com estes exemplos pretendo mostrar as possibilidades de envolver os alunos do 2.° ciclo na compreensão do conceito de média que vai para além da sua tradicional abordagem, que envolve apenas o procedimento de cálculo.

Contudo volto a afirmar a necessidade de um trabalho sistemático que apele à compreensão e comunicação de resultados.

CONCLUSÃO

O desenvolvimento deste trabalho teve aspetos bastantes enriquecedores. Os alunos desenvolveram capacidades de comunicação e de aplicação do conceito de média a novas situações e revelaram uma evolução muito significativa no desenvolvimento da literacia estatística. Nos resultados obtidos, o trabalho de planificação e seleção das tarefas por parte do professor assume uma grande importância, assim como todo o trabalho de dinamização das discussões coletivas e estabelecimento de conexões entre os conhecimentos adquiridos. É de estrema relevância que o ensino deste conceito não se centre apenas na apresentação de algoritmos e fórmulas e na sua aplicação a casos estereotipados.

Referências

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, 2000, 25, 41–58.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313–340.

Marisa Gregório
Escola Básica 2,3 da Pontinha

Raciocínio hipotético-dedutivo (2)

Como dividir o bolo ao meio?

Este problema foi apresentado no apontamento anterior com uma formulação menos apetitosa.

Dividir em duas partes equivalentes um triângulo isósceles.

Investigar várias soluções e desenvolver o problema passando a outras figuras nomeadamente, um triângulo qualquer, um trapézio e um paralelogramo.

Recorrendo a um ambiente de geometria dinâmica (AGD), começando pelo triângulo isósceles obtém-se rapidamente um ponto que permite obter um corte que decompõe o triângulo em duas partes equivalentes, o corte [DE] na figura 1. Claro que estamos a pensar numa solução em que o corte não contêm nenhum dos vértices do triângulo. Neste caso o triângulo [ADE] e o trapézio [DBCE] são equivalentes ou, dito de outro modo, a área de um é igual à área do outro.

Qual é a posição exacta do ponto E no lado [AC]? As medições que o AGD nos oferece permitem obter uma razão interessante $AC/AE \approx 1{,}42$.

A razão entre AC e AE é igual à razão entre a diagonal e o lado de um quadrado. Assim, o ponto E será o ponto que determina AE como um segmento igual ao lado de um quadrado cuja diagonal é AC. A figura 2 mostra essa construção. Obtido o ponto E, tem-se imediatamente o ponto D por paralelismo dos segmentos DE e BC. É o paralelismo que vai garantir as razões entre os vários segmentos presentes. É o teorema de Tales que está presente, ainda que não seja preciso recorrer a ele como ponto de partida. Será esta solução independente da forma do triângulo (figura 3)? Por mais estranha que seja a forma do triângulo a solução mantém-se.

Toda esta exploração seria árida se recorrêssemos à resolução algébrica, envolvendo várias razões de segmentos e cálculos de áreas. Com o recurso a um AGD resolvemos o problema original e fizemos uma generalização muito poderosa. O caminho da resolução obrigou-nos a resolver um problema auxiliar interessante (Construir um quadrado dada a sua diagonal). No GeoGebra, por exemplo, este problema

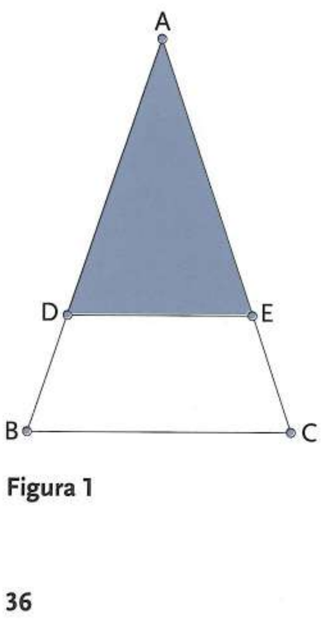


Figura 1

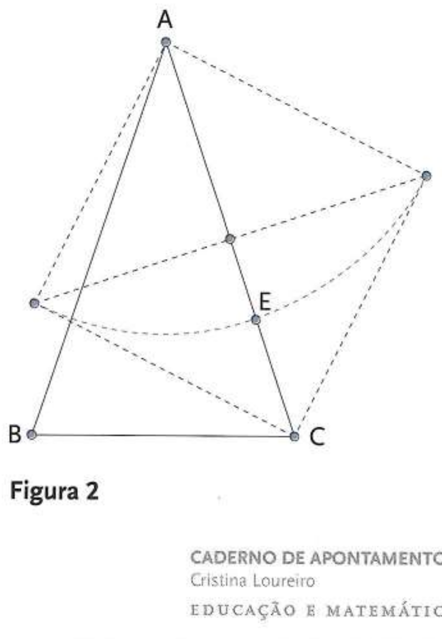


Figura 2

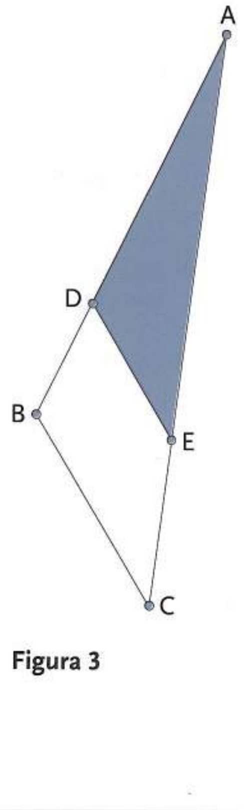


Figura 3

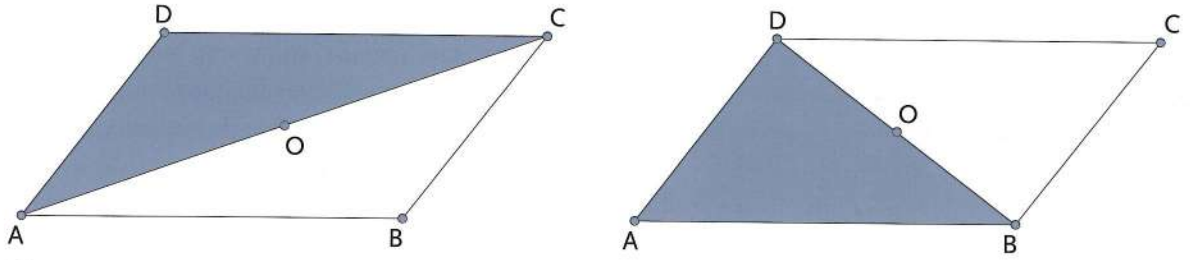


Figura 4

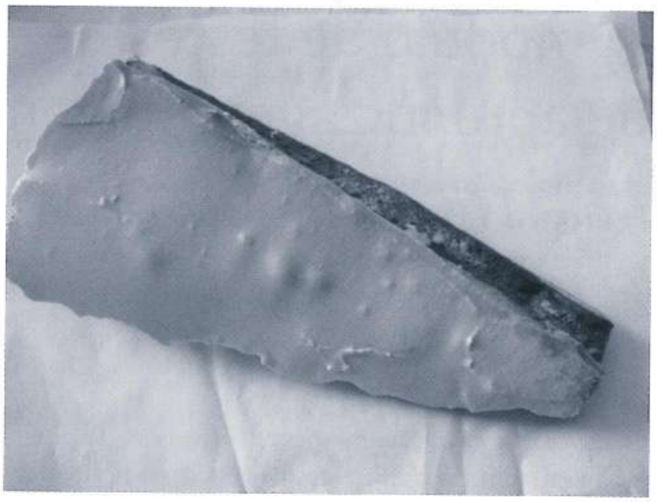
de construção não é de solução imediata pois este AGD tem a construção do quadrado pré definida a partir do lado.

A resolução dinâmica rapidamente provoca o interesse em passar a outras figuras.

O paralelogramo tem uma generalização interessante e acessível de obter. Para além das duas soluções particulares obtidas a partir de cada uma das diagonais (figura 4), qualquer segmento de reta que contenha o centro do paralelogramo divide-o em dois quadriláteros congruentes e, por isso, também equivalentes (figura 5). Em qualquer dos casos, a congruência das duas partes pode ser demonstrada recorrendo a uma rotação de 180° cujo centro é o centro do paralelogramo. No caso do paralelogramo pode ser mais acessível partir de paralelogramos particulares, como um retângulo qualquer ou mesmo um especial, o quadrado.

O trapézio vai complicar muito a situação e tornar o problema muito difícil de generalizar e, por isso, de obter uma solução. Passa a haver mais variáveis em jogo, como ilustram os trapézios da figura 6. No entanto o problema pode ser igualmente apetitoso.

Afirmei então que estes problemas constituem um desafio muito acessível e aliciante com recurso a um AGD, sem os quais se tornam inacessíveis. Esta apresentação pretende ilustrar essa acessibilidade e servirá de mote para discutir a dominância do raciocínio visual na geometria, que se opõe à álgebra em que domina o raciocínio sequencial.



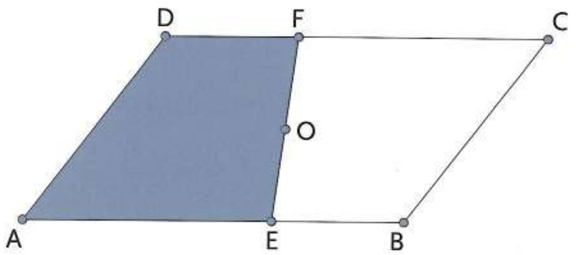


Figura 5

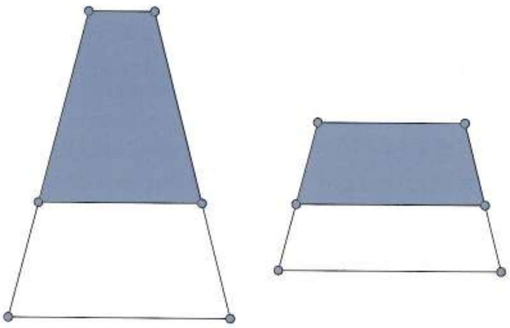


Figura 6

Caros leitores,

Esta secção pretende dar a conhecer aos seus leitores experiências diversas sobre a utilização das tecnologias nas suas mais variadas facetas. Dada a grande diversidade de ferramentas que temos ao dispor, tem sido abordada uma variedade de temas, tendo sempre em vista as suas potencialidades em termos de ensino e aprendizagem da matemática.

O uso de plataformas de ensino a distância tem vindo a ganhar cada vez mais adeptos, ao mesmo tempo que estas se modernizam e ampliam as suas potencialidades didáticas. Neste número apresentamos um exemplo do uso da plataforma Moodle, mostrando algumas das suas potencialidades no domínio da avaliação dos alunos, nomeadamente na vertente formativa.

Esperamos assim poder contribuir para um maior e melhor esclarecimento da comunidade de utilizadores destes recursos, de modo que esta continue a crescer e desafiamos os nossos leitores a dar-nos *feedback* das suas experiências de ensino baseadas na utilização deste tipo de ferramentas em sala de aula.

António Domingos
amdd@fct.unl.pt
Departamento de Matemática da FCT/UNL
UIED – Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

O módulo de testes no *Moodle* como ferramenta de aprendizagem matemática

FERNANDO LUÍS SANTOS • JOÃO PAZ

INTRODUÇÃO

Existem várias aplicações que permitem a realização de testes *online*, com graus diferentes de versatilidade e profundidade. Algumas delas estão incluídas nos LMS, como no caso do Moodle, sendo mais vantajoso para o professor a sua utilização nestas plataformas do que de modo isolado devido, entre outros, à possibilidade de integração e avaliação sistemática de um conjunto de atividades educacionais (Lagarto & Andrade, 2009).

O módulo de testes do Moodle permite ao professor desenvolver e realizar testes com um variado número de tipos de questões, incluindo escolha múltipla, verdadeiro e falso e resposta aberta. Estas questões são guardadas numa base de dados de perguntas e podem ser reutilizadas em múltiplos testes. Os testes podem ser configurados para permitir várias tentativas. Cada tentativa é automaticamente guar-

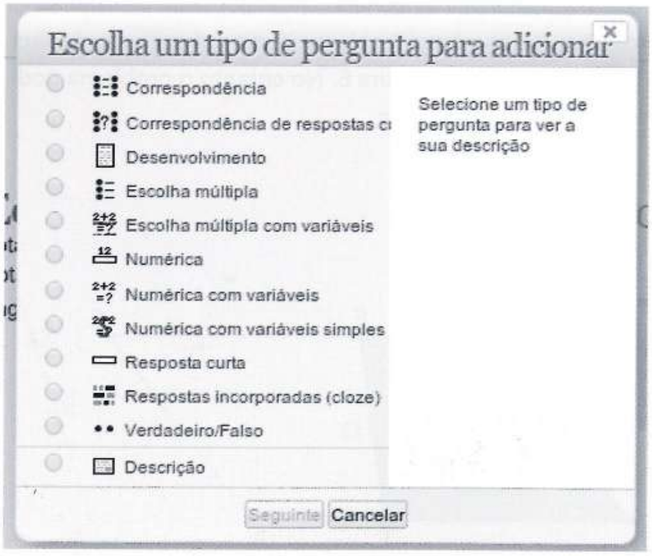


Figura 1. Tipos de perguntas possíveis no módulo de testes.

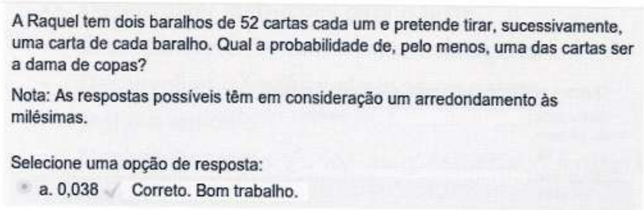


Figura 2. Exemplo de *feedback* para uma resposta correta.

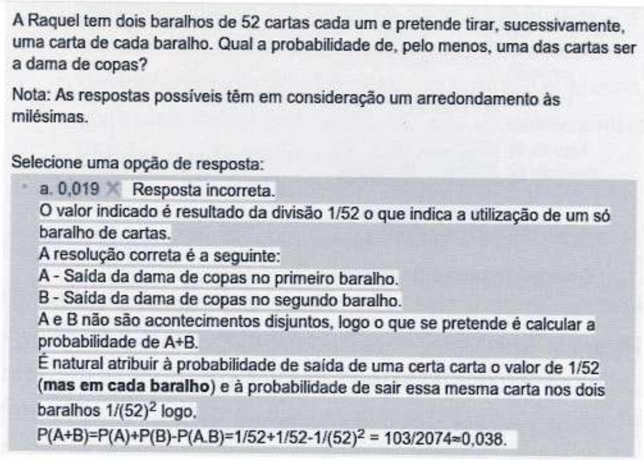


Figura 3. Exemplo de uma resposta incorreta com *feedback*.

dada, e o professor pode escolher aquela a que dá *feedback* e/ou mostrar as respostas corretas.

Em geral, os testes ajudam a determinar o que os alunos aprenderam. Um teste bem delineado pode fornecer informação crítica sobre a compreensão que um aluno tem dos conteúdos lecionados. O *feedback* sobre o desempenho e a sua contribuição para a auto-regulação da aprendizagem são partes importantes do ambiente educativo.

Existem várias formas de fornecer *feedback* aos alunos: em cada questão ou de forma geral. O módulo de testes pode disponibilizar esse *feedback* e classificações em alturas diferentes durante o teste, utilizando a opção de revisão. Este *feedback* pode ser alargado para incluir explicações de respostas corretas e incorretas de modo a reforçar a aprendizagem, especialmente quando se referencia uma explicação mais detalhada (indicações bibliográficas, ligações, etc.)

Uma variedade de relatórios (avaliação item-a-item, comparação que respostas, avaliação global, etc.) sobre o teste (juntamente com a classificação) estão disponíveis. Por exemplo, testes com vários tipos de questões podem ser gerados aleatoriamente a partir de categorias de questões. Os alunos podem ser autorizados a repetir uma questão; podem mesmo ser autorizados a repetir um teste várias vezes.

A utilização do método de classificação «Nota mais alta» encoraja a aprendizagem por tentativa e erro, pois os alunos perdem o medo de errar visto que esse erro não se reflete na avaliação. A associação de tentativas sucessivas com questões aleatórias permite que estes identifiquem áreas ou tópicos que necessitam de maior atenção, potenciando a regulação da sua aprendizagem.

Para além disso, há a possibilidade de alinhar diferentes configurações do mesmo teste. Isto pode ser efetuado na ferramenta de visualização. Deste modo, pode mesmo substituir um teste de papel e lápis.

A sua utilização antes da avaliação sumativa permite ao aluno a prática de situações de teste e exercitar-se relativa-

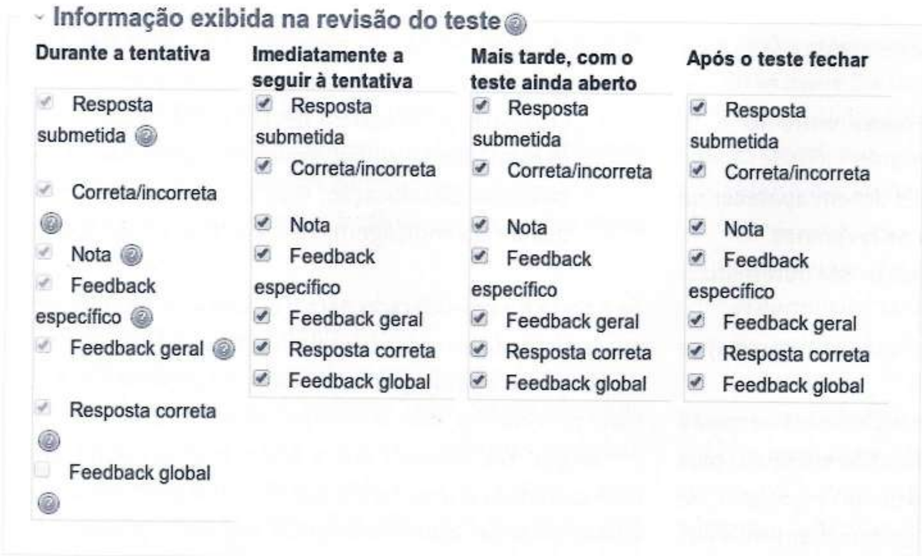


Figura 4. Opções de revisão e informação disponibilizada ao aluno.

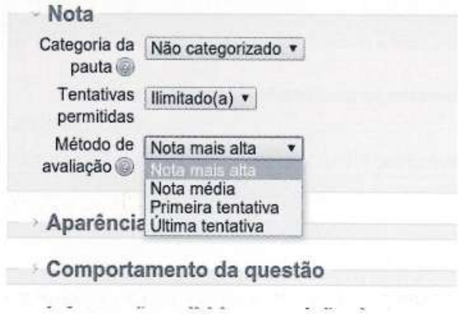


Figura 5. Categorias e tipos de classificação disponíveis.

Figura 6. Configuração do fator de penalização.

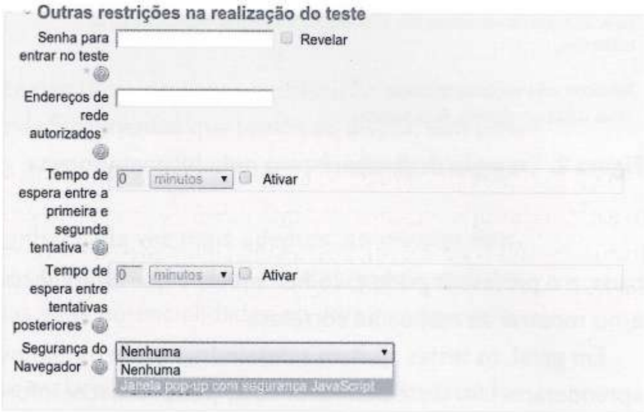


Figura 7. Restrições na realização do teste.

mente a conteúdos específicos, salientando os tópicos que necessitam de clarificação o que pode contribuir para diminuir a ansiedade e melhorar os resultados finais.

Utilizar testes online: Os testes *online* oferecem oportunidades de forma mais maleável do que os testes ou mini-testes presenciais, por exemplo:

- *Modularidade:* Podem ser criados vários formatos e combinações de testes. A utilização de múltiplos mini-testes pode facilitar a gestão de conteúdos, atividades de aprendizagem e de avaliação.
- *Flexibilidade:* Os alunos podem participar nos testes em qualquer altura, gerindo desta forma o seu tempo, em vez de uma determinada hora marcada numa aula presencial.
- *Gestão:* Um exemplo de tipo de testes, para facilitar a gestão da disciplina, pode ser o seguinte:
  - Mini-testes com 10 questões (as questões devem ter em consideração que o teste é feito com consulta).
  - Limite de tempo (geralmente entre 10 e 15 minutos).
  - De preferência as questões devem aparecer de forma aleatória, tal como as respostas.
  - Os tipos de questões deverão ser automatizadas:
  - Escolha múltipla (uma resposta correta) e Verdadeiro/Falso.
  - Escolha múltipla (com mais de uma resposta correta). Há que ter o cuidado de configurar para haver penalização para respostas incorretas, de outra forma, os estudantes escolhem todas as opções e obtêm a classificação máxima.
  - Questões abertas, tipo ensaio. Estas devem ser corrigidas pelo professor (não são passíveis de correção automática).

Em termos de vantagens para o professor, uma vez os testes realizados permitem que fique instantaneamente disponível uma visão global dos resultados destes, o que possibilita focar as aulas seguintes nos conteúdos onde os alunos manifestam mais dificuldades.

Segurança: A segurança dos teste *online* é uma das preocupações constantes. Deve-se ter em consideração as seguintes indicações:

- Existe a necessidade de equilibrar a importância didática do *feedback* dado aos alunos com a minimização de oportunidades de comportamentos de desonestidade intelectual (por exemplo, na partilha de respostas por aqueles que ainda não fizeram o teste). O sublinhar da dimensão formativa dos testes deve fazer diminuir este tipo de comportamentos.
- Os testes (mini-testes) devem ter um peso diminuto na avaliação global, assim os alunos não os realizam pela classificação, mas sim pelas potencialidades de aprendizagem e esclarecimento de dúvidas.

Se o teste for considerado para a avaliação sumativa, deverá ser efetuado em ecrã completo e de preferência protegido por palavra-passe (a eficácia deste dispositivo não é total mas, pelo menos, tem efeitos psicológicos dissuasores).

Tarefas: De salientar que a elaboração de testes *online* com qualidade é uma tarefa que requer algum tempo. Esta gestão pode ser optimizada pelos seguintes passos:

- Criar um teste como experiência.

- Desenvolver instruções para o teste.
- Criar/converter/importar/inserir imagens.
- Desenvolver o *feedback* dado às respostas.
- Testar o modelo.
- Negociar com os alunos as questões e o *feedback* dado.

Uma vez criados (um processo que pode ser moroso e sujeito a constante aperfeiçoamento mas que é um investimento frutuoso para o professor), os testes *online* oferecem uma metodologia relativamente eficiente e modular para avaliar certas componentes da disciplina.

Vantagens: As vantagens para o professor na utilização de testes online passam por:

- O tempo despendido na classificação é significativamente reduzido, apesar do tempo inicial de otimização das questões e do modelo de teste.
- Ao providenciar componentes mais pequenas e regulares de avaliação obtém-se mais *feedback* sobre a aprendizagem dos alunos.
- É mais fácil verificar os progressos individuais dos alunos pela utilização regular de pequenos testes *online*.

Percepções dos alunos: Relativamente ao seu valor como instrumento de regulação da aprendizagem, um estudo em que se avaliou a utilização do módulo de testes num módulo de Cálculo, num curso de Engenharia Civil na Catalunha, os resultados mostraram que este se revelou um bom instrumento para informar os alunos do seu desempenho ao longo do processo de aprendizagem. (Blanco Abellán *et al*, 2009).

Alguns estudos (Vale, 2007, Pennington, 2013) apontam para um grau de satisfação elevado por parte dos alunos, mas ainda com espaço para melhorias em termos do *feedback* dado.

Os aspetos positivos apontam para:

- Os testes *online* encorajam os alunos a manterem-se atualizados com os conteúdos da disciplina.
- Os alunos apreciam o *feedback* regular sobre a sua prestação.

Os aspetos negativos apontam para:

- Dificuldade e ambiguidade de algumas questões.
- Serem avaliados em todos os testes sem a possibilidade de substituírem uma das avaliações mais baixas, ou anular a mais baixa.
- Oportunidades reduzidas de rever os itens dos testes.
- Serem avaliados em todos os itens na avaliação presencial, não existindo a possibilidade de substituírem ou anularem as classificações das avaliações presenciais mais baixas por outras classificações mais altas obtidas nos testes *online*.

CONCLUSÃO

Os testes *online* podem ajudar os alunos a obter *feedback* significativo sobre os seus progressos auxiliando-os a estudarem de forma mais eficaz. Podem também fornecer informações importantes para os professores sobre a forma como os alunos estudam, e o que aprendem.

Pela implementação dos testes *online* o professor pode fornecer *feedback* frequente e automatizado sem sacrificar tempo e em simultâneo fornecer classificações imediatas libertando-o para tarefas mais produtivas como a análise das respostas.

A nossa experiência na utilização de testes *online* em matemática faz-nos acreditar que estas técnicas conduzem a uma eficiência na melhoria da aprendizagem dos alunos, apesar da morosidade que o processo de construção inicial ocupa ao professor.

Referências

Blanco Abellán, M., Estela Carbonell, M. R., Ginovart Gisbert, M., & Saà Seoane, J. (2009). Computer assisted assessment through moodle quizzes for calculus in an engineering undergraduate course. *CIEAEM61*.

Lagarto, J. R., & Andrade, A. (2009). Sistemas de Gestão e Aprendizagem em E-learning. *Ensino online e aprendizagem multimédia*, pp. 56–80.Lisboa: Relógio de Água.

Pennington, K. (2013). *Improving College Algebra Grades Using Online Homework Completion as a Prerequisite for Quizzes.* (Electronic Thesis or Dissertation). Visualizado em https://etd.ohiolink.edu/

Vale, C. (2007), Pedagogical practices with digital technologies : pre-service and practicing teachers, in *Mathematics : essential research, essential practice : proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Mathematics Education Research Group of Australasia, Adelaide, S. Aust., pp. 727–734.

Fernando Luís Santos
Instituto Piaget, ESE Jean Piaget de Almada

João Paz
Instituto Piaget

Polígonos de Reuleaux e a generalização de π

José Luiz Pastore Mello

Um mecanismo muito conhecido desde os tempos antigos para o transporte de blocos de pedra consiste em apoiá-los sobre cilindros rolantes. Tal método, usado, por exemplo, pelos antigos egípcios durante a construção das pirâmides, permitia que imensos monolitos fossem deslocados de maneira relativamente estável por conta de que cilindros são sólidos formados por figuras de diâmetro constante (círculos) ao longo do seu comprimento, e isso assegura que o bloco arrastado fique sempre à mesma distância do chão durante o transporte. A figura 1 mostra, em vista lateral, um monolito sendo transportado sobre cilindros de diâmetro da base igual a 1 m.

A pergunta que proponho ao leitor, para início da nossa investigação, é a seguinte: além da forma circular, existe alguma outra que, ao «rolar», também preserve fixa a distância do bloco transportado até o solo?

Por estranho que pareça, além do círculo, existem infinitas outras formas geométricas planas de diâmetro constante e, sendo assim, qualquer sólido reto com secções paralelas à base (e que seguem seu comprimento) com uma mesma dessas formas geométricas planas de diâmetro constante

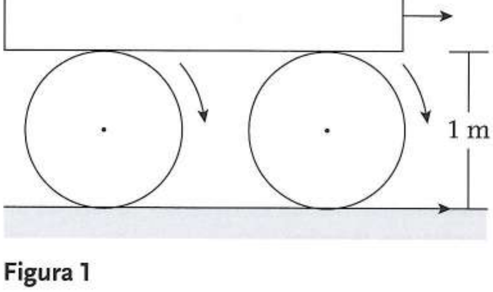


Figura 1

será um substituto do cilindro no problema em questão.

O triângulo de Reuleaux é um exemplo simples de forma geométrica plana não circular de diâmetro constante. O nome desse triângulo foi dado em homenagem ao engenheiro alemão Franz Reuleaux que, no século 19, projetou mecanismos envolvendo essa forma geométrica. Reuleaux é considerado por muitos historiadores da ciência como sendo o pai da cinemática por suas contribuições a essa área da física.

Apesar do nome, o triângulo de Reuleaux não é propriamente um triângulo, mas, sim, uma curva formada a partir de um triângulo equilátero da seguinte maneira: partindo de um triângulo equilátero ABC de lado L, fazemos três arcos de circunferência de raio L, centrados em A, B e C, conforme indica a figura 2; a figura obtida é chamada de triângulo de Reuleaux.

Não é difícil imaginar um sólido reto — com triângulos de Reuleaux nas secções paralelas — substituindo o cilindro no problema do transporte do bloco. Ao «rolar» esse sólido sobre o chão, a distância entre o ponto do bloco em contato com o sólido e o chão será sempre de 1 m (figura 3)

Normalmente os textos de matemática se referem às figuras como o círculo e o triângulo de Reuleaux como formas de largura constante, porém, por razões particulares que ficarão claras ao final deste artigo estamos dizendo que são formas de diâmetro constante. Neste caso, é importante que seja esclarecido o que estamos chamando de diâmetro de uma figura plana.

Sem apelo ao rigor matemático, imaginemos a seguinte situação: sejam r e s retas paralelas girando em torno de uma curva fechada convexa λ de forma que λ sempre fique «perfeitamente espremida» entre r e s, sendo P e Q os pon-

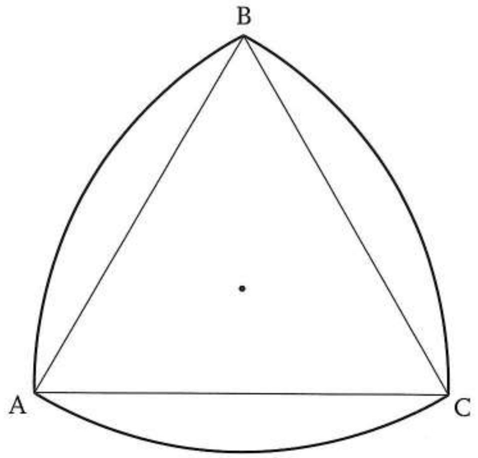


Figura 2

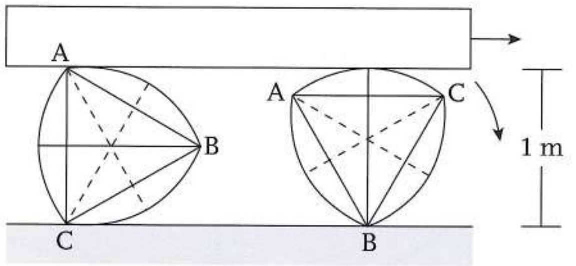


Figura 3

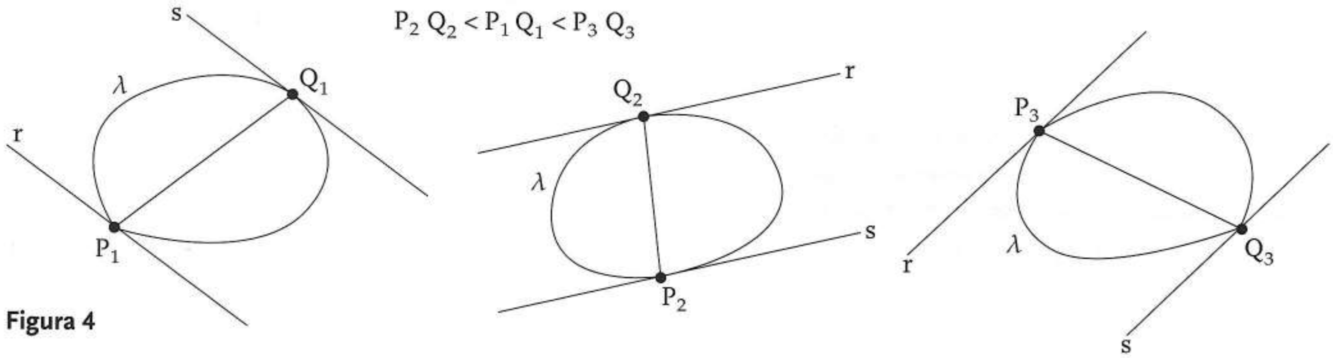


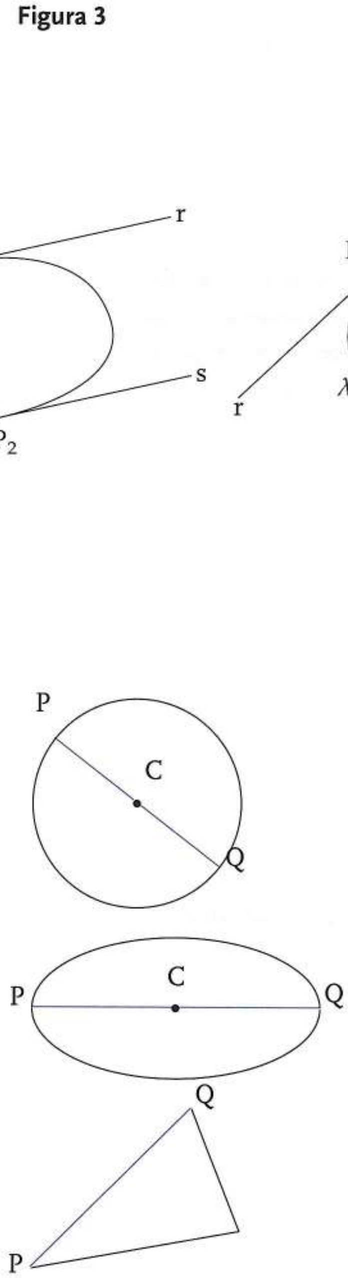
Figura 4

tos de intersecção de r e s com λ (assuma que esses pontos sejam únicos). Nesse caso, chamaremos a distância entre P e Q de um diâmetro de λ. Ao girarmos r e s na condição estabelecida, podemos verificar «intuitivamente» que o diâmetro de λ poderá ser constante, como no caso do círculo e do triângulo de Reuleaux, ou não, como no caso da figura 4.

Aos leitores interessados em uma definição precisa de curvas de largura (diâmetro) constante envolvendo conhecimentos elementares de cálculo recomenda-se a referência [1].

A título de ilustração, na figura 5 indicamos o maior diâmetro de três curvas fechadas convexas.

De forma geral, chamamos de polígono de Reuleaux a uma curva particular do universo das curvas de diâmetro constante, obtida a partir de um polígono convexo com a regra descrita a seguir. O polígono de Reuleaux tem que ser formado por arcos circulares, de mesmo raio, centrados nos vértices opostos aos lados do polígono. Algumas consequências e desdobramentos da definição dada são:

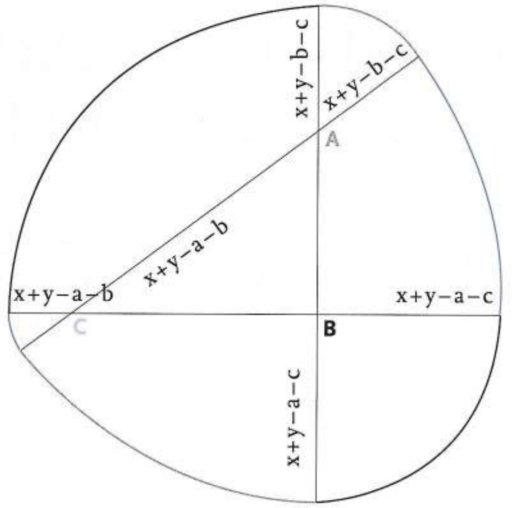


Círculo de centro C
(os diâmetros são constantes e iguais a PQ)

Elipse de centro C e eixo maior $\overline{PQ}$
(diâmetros não constantes sendo o maior deles de medida PQ)

Triângulo qualquer
(o maior diâmetro é PQ, que é o maior lado do triângulo)

Figura 5



x = soma dos maiores lados do triângulo ABC (no caso da figura, x=a+b)

Figura 6

1. Só existem polígonos de Reuleaux obtidos a partir de polígonos com número ímpar de lados.
2. É possível construir curvas de diâmetro constante a partir de triângulos irregulares, porém, para que um triângulo possa ser usado como referência para a construção de um triângulo de Reuleaux ele tem que ser regular (isso porque polígonos de Reuleaux têm que ser formados por arcos circulares de mesmo raio). Veja na figura 6 uma curva que, apesar de ter diâmetro constante, e de ter sido obtida a partir da referência de um triângulo, não é denominada de triângulo de Reuleaux.

Observe que a figura 6 descreve um procedimento geral para construção de curvas de diâmetro constante a partir de triângulos quaisquer. No caso particular em que o triângulo ABC é regular, com a=b=c, a construção descrita produzirá três arcos de mesmo raio, formando um triângulo de Reuleaux.

Encontramos curvas de diâmetro constante e, em particular, polígonos de Reuleaux em vários contextos aplicados como, por exemplo, nas moedas britânicas de 20 e de 50 pence, que são aproximadamente heptágonos de Reuleaux. No caso dessas moedas, consegue-se uma estética diferente do padrão circular mantendo-se o diâmetro bem determinado, que é um imperativo para o seu uso em máquinas de refrigerantes ou de jogos. Uma curiosa aplicação do triângulo de Reuleaux se deve ao engenheiro inglês Harry James Watt, que, em 1914, aproveitando as propriedades da curva, concebeu uma broca de furadeira com eixo flexível para fazer furos com a forma aproximada de um quadrado. A forma aproximada do triângulo de Reuleaux também é usada na fabricação de algumas palhetas de violão, e em alguns tipos de lápis e lapiseiras. Em ambos os casos o que se supõe é que curvas de diâmetro constante são mais ergonômicas para o manuseio.

Atividades com curvas de diâmetro constante no Ensino Fundamental[1]

Nós, professores, frequentemente nos vemos diante de temas matemáticos de grande potencial para mobilizar o interesse matemático do aluno e, por vezes, desperdiçamos a oportunidade em mergulhar no assunto por julgá-lo complexo. Em alguns casos, esse receio está associado ao fato de que o professor de matemática não se sente confortável em contextos onde tem que abrir mão da precisão da linguagem, do rigor conceitual ou das demonstrações. Outro ponto de vista, do qual compartilho, é o de que não devemos perder a oportunidade de abordar temas complexos se por meio deles for possível fazer matemática interessante e desafiadora com nossos alunos. Nesse caso, é decisivo para o êxito da aula que o professor faça uma boa seleção dos problemas que serão propostos aos alunos, e que faça uma escolha cuidadosa da escala de aprofundamento, abrangência e rigor que irá utilizar.

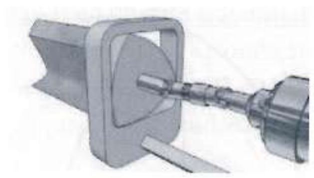
A seguir são sugeridas algumas atividades com curvas de diâmetro constante no Ensino Fundamental que, se por um lado abrem mão do aprofundamento que o tema exigiria no escopo de uma pesquisa matemática, por outro tem o mérito de colocar o aluno na linha de frente de interessantes problemas matemáticos. Ao final de cada problema segue a resposta e um comentário para aprofundamento do professor no assunto em questão.

1) Calcule e compare as áreas de um triângulo de Reuleaux (A_T), formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e de um círculo (A_C) de diâmetro 1.

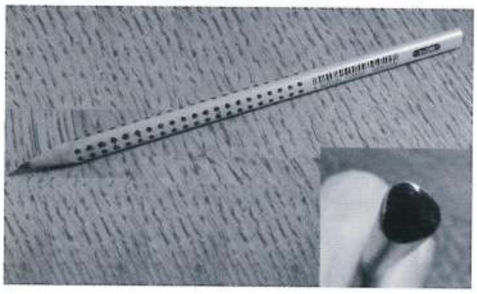
   Resposta: $A_T = \dfrac{\pi - \sqrt{3}}{2} < A_C = \pi$

Comentário: Das curvas planas fechadas convexas de uma dada largura constante, o triângulo de Reuleaux é a de menor área, o que é conhecido como teorema de Blaschke-Lebesgue. Na terceira dimensão, dentre todos os sólidos de uma mesma largura constante dada, ainda não se sabe qual é o de menor volume. Curiosamente, o tetraedro de Reuleaux (ou tetraedro esférico), que seria o sólido obtido a par-

(a) Moeda inglesa de 50 pence (heptátogo de Reuleaux)



(b) Broca com a forma de triângulo de Reuleaux para fazer furos «quadrados» (o eixo é flexível devido ao fato de que não há um centro em posição fixa)



(c) Lápis cujas secções transversais têm a forma aproximada de um triângulo de Reuleaux

(d) Palheta em forma aproximada de um triângulo de Reuleaux

Figura 7

tir da intersecção de quatro esferas de raio r centradas nos vértices de um tetraedro regular de aresta r, sequer é um sólido de largura constante. Tal resultado foi demonstrado em 1911 pelo matemático suíço Ernest Meissner, que também propôs os ajustes necessários ao tetraedro de Reuleaux para transformá-lo em um sólido de largura constante (sólido de Meissner). Um caso particular do problema em questão cuja solução já é conhecida é: dentre os *sólidos de revolução* que têm uma mesma largura constante dada, o de menor volume é aquele obtido por meio da rotação do triângulo de Reuleaux em torno de um de seus eixos de simetria. Para mais detalhes, ver referência [2].

2) Calcule e compare os perímetros de um triângulo de Reuleaux (P_T), formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e de um círculo (P_C) de diâmetro 1.

   Resposta: $P_T = P_C = \pi$

Comentário: curvas de mesmo diâmetro, como no caso das figuras deste problema, apresentam sempre o mesmo perímetro. Esse resultado é conhecido como teorema de Barbier.

3) Construa com régua e compasso um pentágono de Reuleaux.

   Resposta: o procedimento é análogo ao do triângulo de Reuleaux, partindo de um pentágono regular.

Comentários: É possível construir curvas de diâmetro constante (formas de Reuleaux) a partir de qualquer polígono, desde que ele tenha um número ímpar de lados (figura 8).

4) Construa em papel cartão um triângulo de Reuleaux e um círculo. As duas figuras têm que ter mesmo diâmetro. Recorte-as com tesoura e mostre experimentalmente que, quando colocadas entre duas réguas

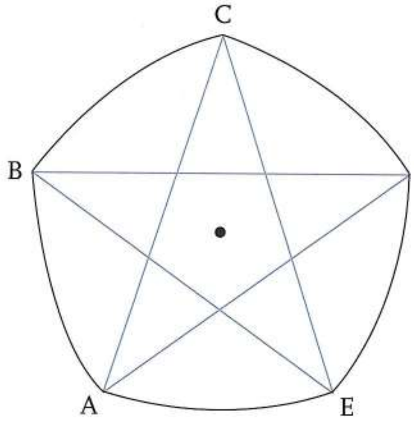


Figura 8

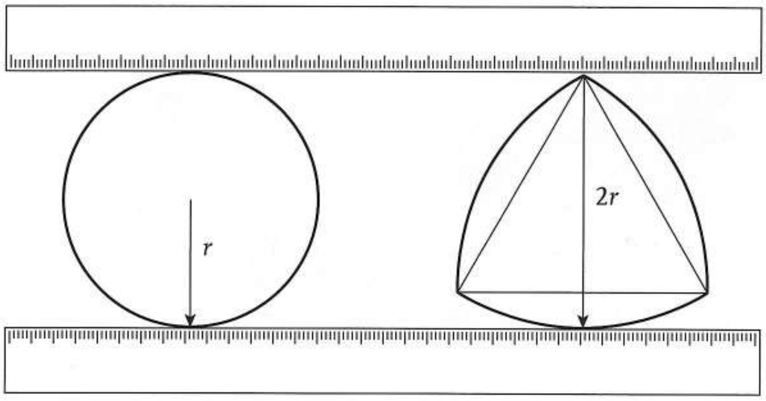
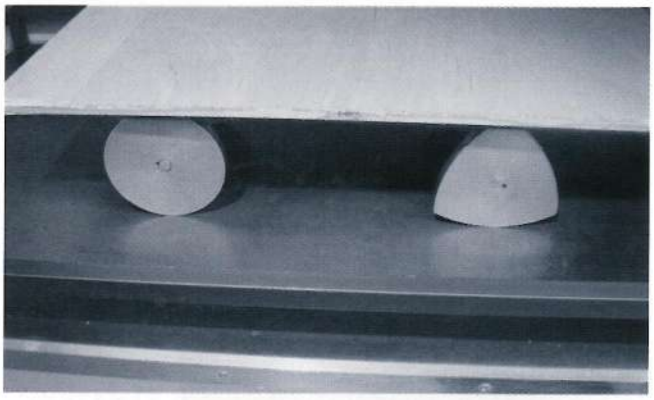


Figura 9



Sólidos em metal construídos a partir de moldes de círculo e de triângulo de Reuleaux.

posicionadas em paralelo, as réguas deslizam suavemente sobre as figuras, seja qual for sua posição.

Resposta: ver figura 9.

Comentário: Havendo possibilidades, recomendo a construção de peças em madeira ou metal a partir dos moldes em papel cartão obtidos pelos alunos. A respeito disso, não deixe de visitar a página-web indicada na referência [3].

Uma generalização de π

No círculo, a razão entre o perímetro e o diâmetro é denotada por π. Agora que ampliamos a definição de diâmetro de uma curva plana, é natural que se tenha interesse em saber se a razão entre o perímetro e o diâmetro é igual para todas as curvas planas fechadas, limitadas e convexas mesmo sem diâmetro constante.

Para essa investigação, a partir de agora denotaremos a generalização dessa razão por pi, e a definiremos da seguinte maneira:

$$pi(curva) = \frac{\text{perímetro da curva}}{\text{diâmetro da curva}}$$

(*) aqui chamaremos de diâmetro da curva ao valor *máximo* dos diâmetros de que havíamos definido anteriormente.

Com essa definição, o valor de pi depende apenas da forma da curva, e não do seu tamanho. Por exemplo, verifique você que:

pi (círculo) $= \pi$

pi (triângulo equilátero) $= 3$

pi (triângulo retângulo isósceles) $= 1 + \sqrt{2} \approx 2,414$

$$\text{pi (triângulo qualquer)} = \frac{\text{perímetro do triângulo}}{\text{comprimento do maior lado*}}$$

(*) Pode-se demonstrar que o diâmetro de um triângulo qualquer sempre será seu maior lado

pi (quadrado) $= 2\sqrt{2}$

(no quadrado, o diâmetro é a sua diagonal)

Talvez, neste momento, o leitor esteja levantando a hipótese de que, dentre todas as curvas de mesmo diâmetro, o círculo seja a de maior valor de pi. Isso de fato é verdadeiro, porém, é necessário ressaltar mais uma vez que as curvas permitidas nessa «disputa» devem ser fechadas, limitadas e convexas, caso contrário seria perfeitamente possível encontrar uma curva de mesmo perímetro de um círculo e com valor de pi maior do que π, como se vê na figura 10.

Pode-se demonstrar que, se o domínio de pi estiver restrito às curvas fechadas, limitadas e convexas, então o círculo será a curva que maximiza o valor de pi.

Ao analisarmos pi para os quadriláteros convexos, é fácil demonstrar que os losangos não quadrados têm pi menor do que pi dos quadrados de mesmo perímetro, como se vê na figura 11.

Um pouco mais difícil seria a demonstração do seguinte resultado: dentre todos os retângulos de lados x e y, o de maior pi será aquele com x=y, ou seja, o quadrado. Para uma demonstração desse resultado, consulte a referência [4].

Além daquilo tudo que já foi dito, um resultado verdadeiramente surpreendente é o de que o quadrado, que tem o maior pi dentre os quadriláteros usualmente chamados de notáveis, não é o quadrilátero convexo de maior pi. O quadrilátero convexo de maior pi é uma pipa[2], cuja investigação será proposta em um dos exercícios sugeridos a seguir.

Círculo de perímetro 1 e diâmetro AB e curva não convexa de perímetro 1 e diâmetro AB<AB. Segue que:

$$pi = \frac{1}{A'B'} > \frac{1}{AB} = \pi$$

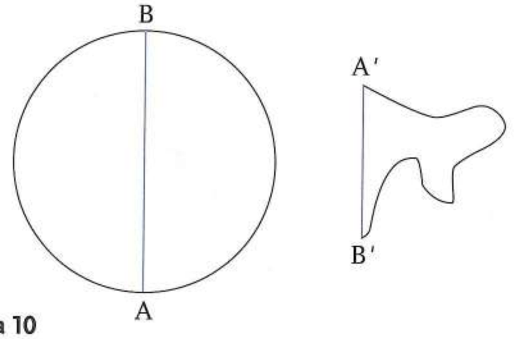


Figura 10

Quadrado de lado ℓ, perímetro 4ℓ e diâmetro $AB = \ell\sqrt{2}$.
Losango de lado ℓ, perímetro 4ℓ e diâmetro AB>AB.
Note que $AB < 2\ell$ (condição de existência do triângulo).
Segue que $\ell\sqrt{2} < AB < 2\ell$ e, portanto,
pi(quadrado) > pi(losango).

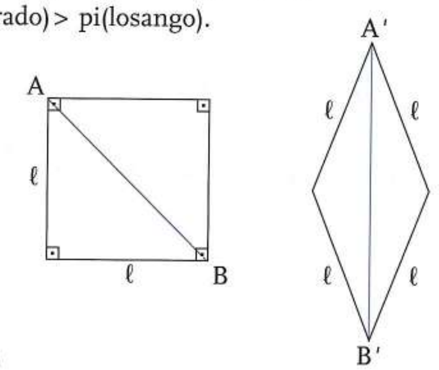


Figura 11

Atividades com a generalização de π no Ensino Médio[3]

Inúmeros problemas interessantes a respeito de curvas de diâmetro constante, e da generalização da razão entre o perímetro e o diâmetro de uma curva, podem ser propostos para alunos do Ensino Médio, seja em aulas regulares do curso, ou em clubes de matemática. A seguir, apresento alguns exemplos.

1) Dado um retângulo em que o lado maior mede o dobro do lado menor, calcule pi desse polígono.

   Resposta: pi (retângulo x por 2x) $= \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

Comentário: A atividade pode ser repetida para retângulos com lados consecutivos de medidas cada vez mais próximas uma da outra como, por exemplo, x e 3x/2, x e 5x/4, ou x e 9x/8. Em seguida, pode-se conjecturar que, quando o comprimento do retângulo se aproxima de sua largura, pi (retângulo) aumenta e se aproxima, no limite, a pi (quadrado).

2) A pipa PQRS está inscrita no quadrado ABCD de lado ℓ, conforme figura abaixo. Se PQ=PS = ℓ, mostre que pi (pipa) será maior do que pi (quadrado). (Figura 12)

   Resposta: Prove inicialmente que os ângulos internos da pipa medem 60°, 75°, 75° e 150°. Com uso da trigonometria os cálculos conduzem ao seguinte resultado: pi (pipa) $= 2 + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3,035 >$ pi (quadrado) $= 2\sqrt{2} \approx 2,828$.

Comentário: O caminho da demonstração de que pi da pipa analisada nesse problema é o maior valor possível de pi de um quadrilátero convexo pode ser encontrado na referência [4].

3) Mostre que podemos inscrever a pipa do exercício anterior em um triângulo de Reuleaux. Faça essa construção com régua e compasso.

   Resposta: ver figura 13.

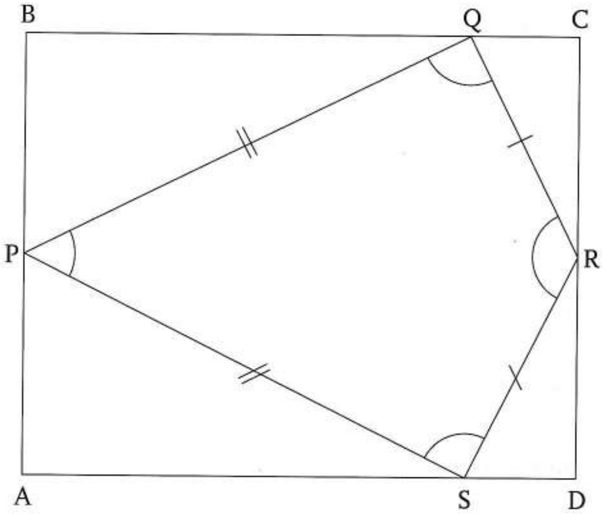


Figura 12

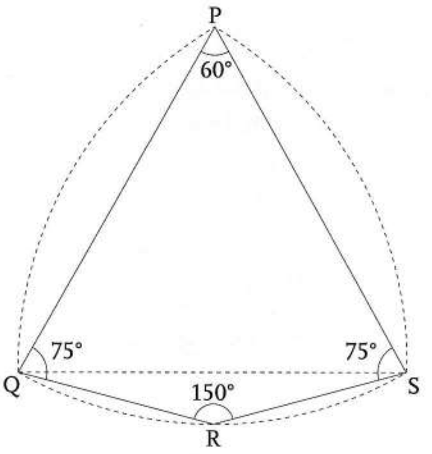


Figura 13

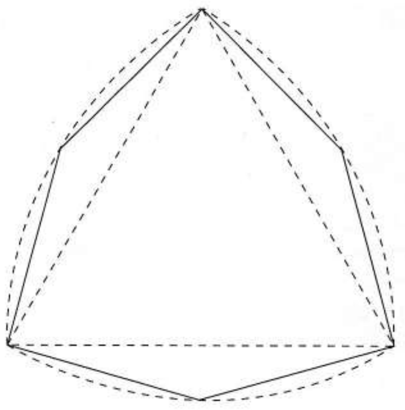


Figura 14

Comentário: Outro exercício interessante seria o da inscrição de um hexágono em um triângulo de Reuleaux. O hexágono obtido dessa maneira não será regular (é equilátero, porém não é equiângulo). Interessantes extensões dessa ideia podem ser encontradas na referência [5]. (Figura 14)

4) Compare os valores de pi de um triângulo de Reuleaux e de um círculo, ambos calculados por meio de uma nova fórmula, indicada por pi*:

$$\text{pi}^* \text{ (curva)} = \frac{4 \times \text{Área da curva}}{(\text{diâmetro da curva})^2}$$

Resposta: Sendo C uma curva fechada, limitada, convexa e de diâmetro constante (largura constante), então pi(C) $=\pi$. A fórmula pi*(C) = (4 × área interior a curva)/(diâmetro da curva)^2 é equivalente à pi(C) = perímetro/(diâmetro da curva) para o caso em que C = círculo. No caso do triângulo de Reuleaux (TR), a comparação entre pi e pi* é:

pi(TR) = pi(círculo) $= \pi =$ pi*(círculo) >
> pi*(TR) $= (2\pi - \sqrt{3})$

Desdobramentos desse resultado podem ser encontrados em [4].

5) Seria possível construir uma bicicleta cujas rodas tenham a forma de triângulos de Reuleaux?

Resposta: Sim. Ver o vídeo de uma bicicleta assim na referência [6].

Comentário: A principal dificuldade nessa construção é a de que, diferentemente de um círculo, o triângulo de Reuleaux não tem um centro fixo. Ver referência [7]. Recomendamos também ao leitor que assista ao episódio de Isto é Matemática , apresentado por Rogério Martins, que trata do tema explorado neste artigo [8]

Agradecimento. O autor agradece ao Prof. Sérgio Alves do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelos comentários e sugestões à redação final do artigo.

Notas

1 No Brasil, o Ensino Fundamental corresponde aos primeiros 9 anos de escolaridade do estudante que, em situação normal, conclui esse ciclo escolar com 14/15 anos de idade.

2 No Brasil, o termo pipa é utilizado para designar um papagaio. [Nota do editor]

3 No Brasil, o Ensino Médio corresponde aos 3 últimos anos da escola básica. Em situação normal o estudante conclui esse ciclo escolar com 17/18 anos de idade.

Bibliografia recomendada

[1] Voloch, J. F. *Curvas de largura constante.* Matemática Universitária, no. 5, junho de 1987, IMPA, Rio de Janeiro. (disponível em http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n05/n05_Artigo05.pdf)

[2] Anciaux, H., Georgiou, N. *The Blaschke-Lebesgue problem for Constant width bodies of revolution.* Cornel University Library, 2009. (disponível em http://arxiv.org/pdf/0903.4284.pdf).

[3] http://www.youtube.com/watch?v=OdY9Y-6DsgU

[4] Ball, Derek G. *A generalisation of π.* The Mathematical Gazette, vol. 57, no. 402, December 1973. (pode ser obtido gratuitamente em http://www.jstor.org/ mediante cadastro do visitante).

[5] Griffiths, D., Culpin, D. Pi-Optimal Polygons. *The Mathematical Gazette*, vol. 59, no. 409, October 1975. (pode ser obtido gratuitamente em http://www.jstor.org/ mediante cadastro do visitante).

[6] http://www.youtube.com/watch?v=Xq4fNhtKjus .

[7] http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html .

[8] https://www.youtube.com/watch?v=fK_v-hyMrUo (consultado em 17/09/2013)

Todas as restantes referências da internet citadas acima estavam ativas e foram consultadas em 18/03/2013.

José Luiz Pastore Mello
Colégio de Santa Cruz, São Paulo, Brasil

APM – 2013

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2013

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2013

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Educação e Matemática
(inclui atas ProfMat)</th><th>Quadrante</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sócio individual</td><td>Portugal</td><td></td><td>12,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td></td><td>15,00 €</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Instituições</td><td>Portugal</td><td rowspan="2">42,00 €</td><td>23,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td>27,00 €</td></tr>
</table>

índice

Editorial

Artigos

Secções