

# Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

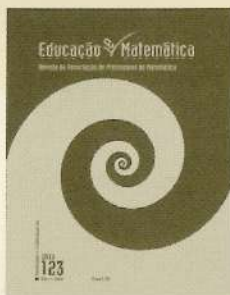


Periodicidade  $\infty$  5 números por ano

2013  
**123**

■ Maio  $\infty$  Junho

Preço 5.75€



## EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Lina Brunheira
Subdiretora	Adelina Precatado
Redação	Alice Carvalho
	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Helena Rocha
	Irene Segurado
	Isabel Rocha
	Manuela Pires
	Nuno Candeias
	Paulo Alvega

### Colaboradores Permanentes

António Domingos Tecnologias na Educação Matemática  
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria  
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI  
José Paulo Viana O problema deste número

### Colaboradores em 2013

Ana Paula Canavarro Estatística na Educação Matemática  
Joana Latas Matemática do Planeta Terra

**Capa** António M. Fernandes

**Paginação** Gabinete de Edição da APM

### Entidade Proprietária

Associação de Professores de Matemática  
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

**Data da publicação** Junho 2013

**Tiragem** 1800 exemplares

### Periodicidade

Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

### Impressão

Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S.A.  
Fonte Santa, Paúl  
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal n.º 72011/93

Registo no ICS n.º 124051

ISSN 0871-7222

Porte Pago

## Sobre a capa

Na capa encontra-se representada uma curva bem conhecida — a espiral logarítmica. Esta curva é a que se obtém, por projecção, da curva loxodrómica que, por sua vez, é uma curva sobre a superfície esférica que mantém um ângulo constante com os meridianos.

Foi Pedro Nunes o primeiro matemático a estudar sistematicamente esta curva e a demonstrar que se trata de uma curva que aproxima assintoticamente o pólo.

António M. Fernandes

## Neste número também colaboraram

Alexandra Pinheiro, Ana Isabel Silvestre, António M. Fernandes, Graciosa Veloso, Ilda Rafael, Jaime Carvalho e Silva, João Pedro da Ponte, José Xavier, Lina Brunheira, Margarida Rodrigues, Maria de Lurdes Serrazina, Maria Manuel da Silva Nascimento, Patrícia Azinhaga, Paulo Afonso, Vanda Rosa.

## Correspondência

Associação de Professores de Matemática  
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A, 1500-236 Lisboa  
Tel: (351) 21 716 36 90  
Fax: (351) 21 716 64 24  
E-mail: revista@apm.pt

## Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista.



# Intermezzo

Há cerca de 40 anos, em reação ao movimento internacional de renovação curricular da matemática moderna, registou-se um forte movimento de «back to basics». Isso ocorreu em numerosos países, mas não se verificou em Portugal. No nosso país, os programas baseados na Matemática moderna duraram longos anos, até ao início dos anos 90, altura que foram substituídos por programas baseados numa perspetiva multidimensional valorizando conhecimentos, capacidades, aptidões, atitudes, valores e também a resolução de problemas.

Agora, o *back to basics* finalmente chegou a Portugal, e em força. O que defende esta perspetiva? Essencialmente que a aprendizagem tem por base a memorização de longas listas de «conhecimentos básicos» e procedimentos de cálculo, cuja ligação e razão de ser, os alunos, mais tarde, poderão vir a compreender. Se não chegarem a compreender, também não faz mal, pois sempre terão aprendido alguma coisa. No fundo, trata-se do regresso às perspetivas de ensino dos anos 40 e 50 do século XX, anteriores à Matemática moderna.

Este movimento não é especificamente português nem se restringe à disciplina de Matemática. É um movimento que se desenvolve em vários outros países, é transversal a todas as áreas da educação e quer fazer crer que o ensino do passado, baseado na memorização acrítica, no treino de exercícios repetitivos, no ouvir e calar, na submissão à autoridade do professor e do manual, seria o mais adequado para os nossos dias. A verdade é que o ensino do passado foi criticado na sua altura por educadores e políticos responsáveis. Além disso, é completamente desadequado para a sociedade de hoje, que tem outras formas de comunicação, outras tecnologias, outros valores e, não esqueçamos, outros alunos.

Os promotores desta política desastrosa para o ensino da Matemática não têm qualquer seriedade na sua argumentação. Pelo contrário, na sua propaganda assumem que vale tudo, inventando as histórias mais impensáveis.

Assim, defendem que o programa de 2007:

- é prescritivo, coartando a liberdade de ensino do professor — *quando a verdade é que as metas curricula-*

*res, essas sim, são profundamente prescritivas, indicando ano a ano o que o professor tem de lecionar, indicando mesmo a forma de abordagem de assuntos como o ensino dos algoritmos da adição e subtração, as operações com números racionais e muitos outros.*

- assume que os alunos aprendem todos os conceitos e procedimentos matemáticos por descoberta, de forma natural, sem grande intervenção do professor — *deturpando grosseiramente as propostas do programa que valoriza a exploração e a descoberta, mas nunca diz que toda a aprendizagem é feita dessa forma, sublinhando pelo contrário a importância do papel do professor propor tarefas adequadas e introduzir e sistematizar a informação pertinente.*
- afirma que a memorização não é necessária para a aprendizagem — *outra mistificação, uma vez que no programa se aponta claramente a necessidade dos alunos compreender e memorizarem factos básicos como as tabuadas da adição e da multiplicação.*
- defende o uso indiscriminado da calculadora — *quando este programa defende exatamente o contrário, considerando que a calculadora não deve ser usada para a realização de cálculos imediatos ou em substituição de cálculo mental mas sim em cálculos complexos, na exploração de regularidades e na resolução de problemas.*
- baseia-se em teorias «antigas» — *quando este programa se apoia na investigação nacional e internacional atual sobre a aprendizagem dos conceitos e processos matemáticos.*

Portugal é uma sociedade democrática mas isso não significa que o debate político se faça em condições de igualdade. Há quem tenha condições para dizer as mais extraordinárias mentiras sem ser contrariado e há quem tenha poucas oportunidades para fazer valer os seus argumentos. Mas, diz o ditado, a verdade é como o azeite — há de vir ao de cima.

Como aconteceu com anteriores movimentos curriculares do mesmo género, este *back to basics* irá para o caixote de lixo da história.



Até lá, o que fazer?

Antes de responder, recordemos que a missão fundamental do professor é promover a aprendizagem dos alunos. O programa de 2013 e as metas curriculares são de cumprimento inviável, indicando aprendizagens que não são realistas para a generalidade dos alunos de cada nível etário. Além disso, estão escritos numa linguagem imprópria para o contexto escolar e para o público em geral. Mas o mais grave é que estes documentos:

- têm subjacente uma perspetiva de ensino atomizada, por objetivos específicos, que conduzem a aprendizagens fragmentadas e não significativas;
- desvalorizam a importância do trabalho do aluno a partir de contextos do quotidiano, promovendo a formalização precoce a todo o custo;
- deixam de lado capacidades fundamentais como a comunicação, reduzem o raciocínio matemático ao seu aspeto dedutivo e limitam a resolução de problemas à aplicação de procedimentos e técnicas;
- são para implementar com base num sistema de terror gerado por exames em todos os ciclos, provas de entrada na profissão, e sistemas precários de contratação de docentes.

Na sua prática profissional os professores de Matemática irão fazer com estes documentos o que sempre têm feito com os documentos curriculares — adaptá-los aos seus contextos, às necessidades dos seus alunos, ao que a sua capacidade profissional indicar como o mais apropriado para cada circunstância. Farão isso tanto melhor quanto melhor estudarem estes documentos com atenção, percebendo a sua lógica e as suas contradições, analisando a sua inadequação, e discutindo as suas consequências para a aprendizagem dos alunos com os professores de outras disciplinas, os diretores escolares, os encarregados de educação e com outros elementos da comunidade.

O *back to basics* irá gerar necessariamente uma reação de afirmação de valores educativos positivos, centrados na compreensão, no gosto pela Matemática, no prazer da descoberta, na capacidade de afirmação dos alunos de raciocinarem matematicamente pela sua própria cabeça.

Não tenhamos dúvidas. Estamos num *intermezzo* de curta duração. O caráter extremista e obsessivo desta política não fará mais do que apressar o seu fim e gerar anticorpos que evitarão o seu regresso por muitos e bons anos.

**JOÃO PEDRO DA PONTE**

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

# CASIO é muito +

## CASIO A CORES PARA TODOS OS NÍVEIS DE ENSINO



**FX-CG20**

Aprovada para o Secundário



**CLASSPAD 400**

- Calculadora tátil
- Ecrã de grandes dimensões e com uma alta definição de imagem
- Ecrã rotativo
- Geometria dinâmica
- Disponível a partir de Junho de 2013

**Com CAS para  
Ensino Superior**

CASIO Portugal  
Tel.: 21 893 91 70 • Fax: 21 893 91 79  
email: [casioportugal@casio.pt](mailto:casioportugal@casio.pt)  
[www.casio.pt](http://www.casio.pt)

**CASIO** +



# A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas

GRACIOSA VELOSO · LINA BRUNHEIRA · MARGARIDA RODRIGUES



Este artigo teve como ponto de partida o parecer que o Domínio de Matemática da Escola Superior de Educação de Lisboa elaborou na fase de discussão pública da proposta de Programa de Matemática do Ensino Básico. Corresponde a uma análise que, não podendo ser exaustiva, procura tocar os vários temas matemáticos e outros aspetos curriculares que consideramos relevantes. Da leitura conjunta da proposta de Programa, Metas Curriculares e Cadernos de Apoio, resultam conclusões que na nossa perspetiva são preocupantes e que quisemos partilhar com outros colegas, o que justifica a publicação deste texto.

A recente revogação do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), homologado em 2007, constitui uma

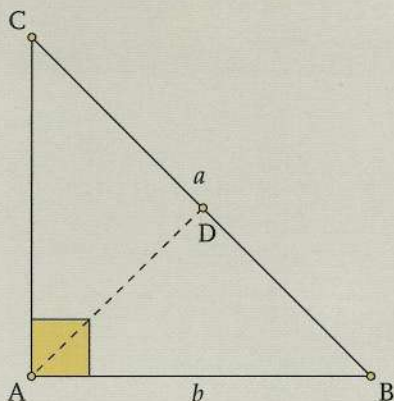
medida que surge de forma completamente despropositada numa altura em que ainda não se tinha concluído um ciclo completo de implementação. Vemos, assim, o ensino básico à mercê de medidas que impõem um caráter pouco duradouro a tudo quanto foi desenvolvido anteriormente. Assumir a educação como um objeto pueril a reboque da dança dos sucessivos governos é, em última análise, brincar, de forma perigosa, com os alunos e professores portugueses.

Passando à análise da proposta do Programa de Matemática para o Ensino Básico, note-se que o mesmo consiste essencialmente numa lista de conteúdos, sem a enunciação de objetivos de aprendizagem. Uma vez apresenta



Na figura está representado um triângulo retângulo isósceles.

Justifica que a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles não são comensuráveis percorrendo os seguintes passos:



- Prova que a altura do triângulo [ABC] relativa ao vértice A divide o triângulo em dois triângulos retângulos isósceles iguais [ABD] e [ACD].
- Prova que quaisquer dois triângulos retângulos isósceles são semelhantes e conclui que os três triângulos [ABC], [ABD] e [ACD] são semelhantes.
- Supondo que a hipotenusa e um cateto do triângulo são comensuráveis, numa dada unidade, as medidas de comprimento de [BC] e [AB] são dadas, respetivamente, pelos números naturais  $a$  e  $b$ . Utilizando a alínea anterior, completa a seguinte proporção:
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$
- Deduz que  $a^2 = 2b^2$  e conclui que o cateto e a hipotenusa de um triângulo isósceles não são comensuráveis.

Figura 1. Exemplo do Caderno de Apoio do 3.º Ciclo (GM7, p. 23)

os conteúdos curriculares definindo o seu alcance, outras vezes são apresentados como mero tópico cujo sentido se não percebe.

Nas páginas iniciais do programa há várias ideias que pensamos serem consensuais: desenvolvimento da compreensão, o gosto pela matemática, a importância da resolução de problemas, do raciocínio e da comunicação, são hoje ideias-chave na educação matemática. Contudo, se formos além do seu enunciado e olharmos com atenção para a forma como se propõe concretizar estas ideias, percebemos que o seu sentido é muito diferente daquele que defendemos. No que respeita à resolução de problemas, esta é encarada numa lógica de problemas de aplicação, nunca aparecendo como ponto de partida para a aprendizagem, como forma de dar sentido aos conceitos e procedimentos, nem se valoriza a importância da procura de estratégias ou o papel da resolução de problemas na motivação dos alunos. Sobre o raciocínio, verifica-se uma ênfase exagerada na demonstração e no raciocínio dedutivo, associados a afirmações matemáticas que são apresentadas aos alunos, ao invés de decorrerem do trabalho investigativo dos estudantes e da validação das conjecturas por eles formuladas. Mas mais do que uma insistência, há também uma desadequação das propostas às capacidades que são exetáveis que os alunos desenvolvam em cada etapa, como ilustra o exemplo da demonstração da incomensurabilidade da hipotenusa e do cateto de um triângulo retângulo isósceles, proposto para alunos de 7.º ano com nível de <desempenho regular> (Figura 1).

## NÚMEROS E OPERAÇÕES

A proposta de programa relativa ao tema Números e Operações valoriza sistematicamente e quase exclusivamente a mecanização de procedimentos de cálculo algorítmico, fazendo supor que não há necessidade de orientar aprendizagens relativas aos conceitos nem de número inteiro, nem de número racional. Neste âmbito, e quanto ao desenvolvimento de sentido de número inteiro, parece desconhecer-se a importância de nos anos iniciais, 1.º e 2.º, se valorizar, explicitamente,

- o estabelecimento de factos numéricos de referência ancorado em números de referência 5 e 10, que vão ser muito úteis no desenvolvimento do cálculo mental;
- a representação de números naturais na reta numérica, auxiliar na compreensão da ordenação e nas contagens progressivas e regressivas;
- as relações numéricas de dobros e quase dobros.

Quanto ao conceito de número racional, são ignoradas a delicadeza e a complexidade da aprendizagem e a consequente necessidade de organizar uma iniciação com abordagens informais. Despreza-se a experiência de qualquer criança, de 2.º ano ou de 3.º ano, em situações de partilha equitativa de unidades discretas, potenciadora de desafios matemáticos, nomeadamente o da necessidade de proceder ao alargamento do conjunto dos números naturais pelo facto de se deparar com um resto não nulo na divisão inteira. Sem qualquer preocupação de articulação com a divisão



b\* Completa a igualdade  $\frac{1}{3} : 2 = ?$

R.:

b.  $\frac{1}{3} : 2$  é o número que se deve multiplicar por 2 para obter  $\frac{1}{3}$ . Portanto,  $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{2 \times 3}$

Figura 2. Exemplo do Caderno de Apoio do 1.º Ciclo (NO4, p. 75)

inteira, surge, abruptamente, a fração como representando uma medida de uma grandeza (Programa, p. 9). A este propósito, é de lembrar que Wu (2011) apresenta dois estádios, propondo explicitamente que as abordagens iniciais se façam de forma informal e como suporte a posteriores formalizações.

A compreensão de cada operação aritmética requer um ensino focado em (i) resolução de situações problemáticas com significado para as crianças; (ii) determinação de valores numéricos usando estratégias de cálculo mental e (iii) organização de algoritmos. Constata-se a subvalorização do papel dos problemas de contexto, remetendo-os exclusivamente para uma função de aplicação de conhecimentos. No respeitante aos números racionais, nem sequer é proposta, no 1.º ciclo, qualquer resolução de problemas remetendo-a para o tema Medida.

Relativamente às orientações sobre o desenvolvimento do cálculo mental, conclui-se que está previsto, apenas, nos três primeiros anos de escolaridade e somente aplicado a números naturais. A insistência, desde o 1.º ano, no valor de posição dos algarismos constituintes dos números contrária didaticamente uma das características do cálculo mental. Não há qualquer referência à determinação de somas em que as duas parcelas envolvem, na posição das unidades, algarismos cuja soma é 10; não é apresentado nenhum exemplo que envolva a linha numérica vazia como auxiliar na determinação de somas ou de diferenças; nunca é valorizada a estratégia aditiva na obtenção de uma diferença. Nem as propriedades da adição nem as da subtração são invocadas, remetendo-as para o domínio da Álgebra no 2.º ciclo. Quanto à multiplicação e à divisão, os casos que envolvem potências de base 10 e expoente natural têm tanta expressão que ficam por valorizar casos particulares como:

- A determinação de dobros, de quádruplos e, reciprocamente, determinação de metades, de quartas partes de números racionais;
- A determinação do quociente de um dividendo inteiro por um divisor na forma de fração unitária. A tradução de expressões como, por exemplo,  $1 : 1/2 = 2$ ,

por «uma unidade tem duas metades» permite desenvolver estratégias de cálculo mental adequadas às outras divisões aqui referidas;

- A determinação de percentagens de referência, 10%, 20%, ..., 5%.

O cálculo mental surge sistematicamente ao serviço do cálculo algorítmico, apenas com números naturais, e não como ferramenta de desenvolvimento de sentido operatório, nem como um processo de cálculo com raciocínio. O ensino dos algoritmos das quatro operações aritméticas pressupõe um percurso pautado pela experiência e pela compreensão matemática dos alunos, em situações cujas regularidades existentes, por generalização, são resolvidas por um conjunto de procedimentos que aplicados conduzem sempre a um resultado, o da operação em causa. Esta generalização não deve, contudo, apelar a que seja aplicado um algoritmo a qualquer tipo de expressão numérica. Considere-se o exemplo (figura 2) apresentado no Caderno de Apoio do 1.º Ciclo. Nas operações com frações é evidente que a proposta é uniforme e pela via dos algoritmos.

Este exemplo apresenta um caso de determinação de metade por um processo que não é adequado por ser tão distante dos raciocínios das crianças. A atribuição de significado para a expressão  $\frac{1}{3} : 2$ , num contexto de divisão por partilha equitativa é muito mais adequada aos alunos e estes pensariam na resposta de  $\frac{1}{6}$  como fazendo sentido.

A concluir pode afirmar-se que estes documentos menosprezam o papel formativo do cálculo mental porque não o consideram no cálculo que envolve números racionais e porque, como já foi discutido, no cálculo com números naturais apenas explicitam exemplos de produtos envolvendo os fatores 10, 100 e 1000. Não encaram o cálculo mental como um contributo autónomo, valendo por si, para o desenvolvimento das capacidades de cálculo, de crítica de resultados e da compreensão das estruturas operatórias, através da utilização de propriedades das diversas operações nas estratégias usadas.



Na grelha representa-se o bairro onde vive a Micaela, correspondendo os segmentos de reta do quadriculado às ruas.

O quadrado M representa a casa da Micaela, o quadrado E a escola que ela frequenta, o A a casa da avó, o R a casa da prima Rita e o quadrado P o parque de diversões.

- a. A Micaela, no percurso de casa para a escola, passa pela casa da prima Rita que a acompanha a partir daí. Desenha um possível percurso efetuado pela Micaela desde casa até à escola. Quantos quartos de volta tem esse itinerário? É um número par ou ímpar? O que se pode dizer acerca da posição relativa das ruas da escola e da casa da Micaela?

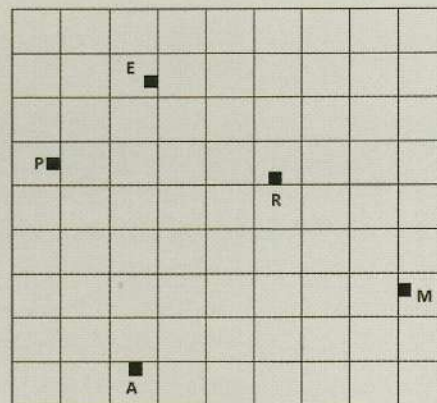


Figura 3. Exemplo do Caderno de Apoio do 1.º Ciclo (GM3, p. 58)

## GEOMETRIA E MEDIDA

A abordagem atomizadora de se iniciar nos primeiros anos do 1.º ciclo pelos objetos e conceitos elementares como pontos, colinearidade de pontos, direções, retas, semirretas e segmentos de reta, contraria a investigação realizada em educação matemática, segundo a qual, é fortemente recomendado que a aprendizagem da geometria nos anos iniciais tome como ponto de partida a perceção do mundo que rodeia as crianças (Freudenthal, 1973), tendo por pressuposto que o desenvolvimento do sentido espacial se baseia na observação, manipulação e transformação de objetos concretos, bem como das suas representações, conduzindo estas à construção de relações espaciais. Ou seja, o pensamento geométrico desenvolve-se através do raciocínio acerca de objetos e do raciocínio com representações (Battista, 2007). Há nesta proposta uma lógica de mente adulta ao considerar-se que se tem de partir do elemento mais básico linear para chegar aos elementos bidimensionais e tridimensionais, como se a perceção de um todo se fizesse pela composição das suas partes atómicas. Ora o que a investigação nos diz, nomeadamente no domínio da psicologia e da neurociência (Kosslyn, 1994; Posner & Raichle, 1994), é precisamente o contrário: no reconhecimento de um objeto, a forma global é processada primeiro e só depois é que são processadas as partes e as suas características.

São exemplos de conteúdos desadequados à maturidade dos alunos no 1.º ciclo: (i) *Retas e semirretas* (2.º ano); (ii) *Planos paralelos* (4.º ano), uma vez que o conceito de infinito subjacente bem como o paralelismo de planos são demasiadamente abstratos para alunos destas faixas etárias; (iii) *milésimo da unidade* como *Subunidades de comprimento* (2.º ano), por se tratar de uma subdivisão ínfima que deveria ser abordada apenas no ano seguinte. O formalismo encontra-se bem expresso nos seguintes exemplos retirados das Metas:

- «Identificar dois segmentos de reta numa grelha quadriculada como paralelos se for possível descrever um itinerário que começa por percorrer um dos segmentos, acaba percorrendo o outro e contém um número par de quartos de volta» (GM3. 1.1, p. 19). O modo como este descritor é entendido pelos autores das Metas fica bem visível no Caderno de Apoio do 1.º Ciclo (Figura 3).
- «Reconhecer dois ângulos, ambos convexos ou ambos côncavos, como tendo a mesma amplitude marcando pontos equidistantes dos vértices nos lados correspondentes de cada um dos ângulos e verificando que são iguais os segmentos de reta determinados por cada par de pontos assim fixado em cada ângulo, e saber que ângulos com a mesma amplitude são geometricamente iguais» (GM4. 2.11, p. 25). Se reconhecer, para os autores da proposta, significa «reconhecer intuitivamente a veracidade do enunciado em causa em exemplos concretos» (Programa, p. 3), levanta-nos muitas reservas assumir que este critério de congruência de ângulos é intuitivo para alunos de 4.º ano. Este critério acaba por relacionar-se com o critério de congruência de triângulos LLL, implicando, neste caso, partir desse critério para deduzir a igualdade de amplitudes de ângulos, e por fim, a congruência de ângulos.

Se a inclusão de certos conteúdos nos preocupam, a omissão de outros também nos levanta sérias reservas. Por exemplo, os frisos e as rosáceas estão ausentes nesta proposta. Sendo estes objetos matemáticos potenciadores do gosto dos alunos pela disciplina, dada a sua ligação com trabalhos de arte decorativa, sugestiva da apreciação dos aspetos estéticos da matemática, consideramos que os mesmos deveriam ser objeto de estudo relativamente à identificação das



- Calcula o produto  $3 \times \frac{1}{3}$  e deduz o valor do inverso de 3 e do inverso de  $\frac{1}{3}$ .
- O que entendes pelo quociente de 1 por  $\frac{4}{7}$ ? Conclui que se pode escrever o inverso de  $\frac{4}{7}$  como o quociente de 1 por um número.

**Figura 4.** Exemplo do Caderno de Apoio do 2.º Ciclo (ALG5, p. 28)

respetivas simetrias. Outra omissão que nos levanta reservas é o facto de, no 1.º ciclo, não existir nenhuma menção à resolução de problemas geométricos.

Esta proposta representa o regresso a um passado bem distante de um ensino formalizado da geometria que teve como consequência, nessa altura, o ódio dos alunos por este ramo da matemática. A aprendizagem da geometria deve partir das ideias intuitivas das crianças e, estando ancorada na compreensão das propriedades geométricas bem como das relações espaciais, deverá evoluir para uma progressiva formalização.

## ÁLGEBRA

A abordagem que é feita ao domínio da Álgebra tem implícita uma visão restrita da mesma, ao considerar, no 3.º ciclo, o domínio Funções, Sequências e Sucessões como distinto do domínio Álgebra, e não integrante deste último. Hoje em dia, existe uma visão mais ampla deste domínio, que subscrevemos, entendendo-se que os seus objetos centrais constituem as relações matemáticas abstratas, nas quais se incluem, não apenas as equações, mas também as funções e outras estruturas definidas por relações ou operações em conjuntos. Este domínio surge na proposta de programa nos 2.º e 3.º ciclos. Ao analisarmos o caderno de apoio do 2.º Ciclo, não existe um único exemplo relacionado com o item *Sequências e regularidades* incluído no 6.º ano. No 5.º ano, os exemplos incidentes nas expressões algébricas são de um formalismo atroz e dão uma clara evidência da visão redutora deste domínio. Vejamos o exemplo ilustrativo (figura 4) do descritor ALG5 1.5 «Identificar dois números racionais positivos como «inversos» um do outro quando o respetivo produto for igual a 1 e reconhecer que o inverso de um dado número racional positivo  $q$  é igual a  $\frac{1}{q}$ » (p. 35):

O facto do item *Sequências e regularidades* se encontrar incluído no domínio *Álgebra* no 2.º ciclo para deixar de o ser no 3.º ciclo, ao integrar o domínio *Funções, Sequências e Sucessões* parece revelar alguma incoerência. Outro aspe-

to pouco claro na presente proposta é o facto do item *Sequências e regularidades* se encontrar contemplado no 2.º ano mas ausente nos anos subsequentes do 1.º ciclo. Esta ausência cria uma descontinuidade de trabalho pois o referido item surge depois apenas no 6.º ano. Se um dos grandes objetivos do estudo da Álgebra, no currículo escolar, é o de desenvolver nos alunos o seu pensamento algébrico, e sendo a generalização e a formalização de padrões, um dos seus aspetos essenciais, encaramos com preocupação esta descontinuidade. Consideramos que o estudo das relações, designadamente as relações funcionais, e a modelação na descrição de fenómenos ou situações devem ser feitos desde o 1.º ciclo, partindo duma abordagem informal, e necessariamente ancorada na linguagem natural e na ênfase na semântica, e progressivamente ir evoluindo para a adoção de abordagens mais abstratas e formais.

## ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS

No que respeita à Organização e Tratamento de Dados, consideramos desadequada a introdução de conteúdos que não são específicos deste tema, como é o caso dos aspetos relacionados com a Teoria de Conjuntos (1.º ano) em que se aproveita para «fornecer algum vocabulário básico da Teoria dos Conjuntos, necessário à compreensão dos procedimentos efetuados.» (Programa, p. 6). Nos cadernos de apoio são sugeridas tarefas como a apresentada na figura 5 que vão ao encontro do descritor «Utilizar corretamente os termos «conjunto», «elemento» e as expressões «pertence ao conjunto», «não pertence ao conjunto» e «cardinal do conjunto»» (OTD1. 1.1, p. 8). Questionamos então: qual o conteúdo ou tarefa requer que uma criança do 1.º ano utilize a expressão *cardinal do conjunto*? Não será prematura e exagerada esta preocupação com a linguagem matemática?

Ainda no que respeita a este tema, consideramos que a proposta de programa desvaloriza a importância de os alunos percorrerem os vários passos de uma investigação estatística — formulação do problema, recolha, tratamento, representação e análise de dados — colocando a ênfase na realização de exercícios de aplicação de procedimentos. Aliás, os exemplos de tarefas que são apresentados nos cadernos de apoio insistem no cálculo de medidas estatísticas, sem nunca ser pedida a interpretação do resultado obtido. Esta opção acaba por valorizar mais uma vez as ferramentas matemáticas, em detrimento da atenção que deveria ser dada ao tratamento e interpretação de informação estatística.

No que respeita ao tratamento das probabilidades, a exclusão das situações que lidam com o acaso, remetendo-as apenas para o final do 3.º ciclo, parece-nos inapropriada



Coloca na etiqueta o cardinal do conjunto.

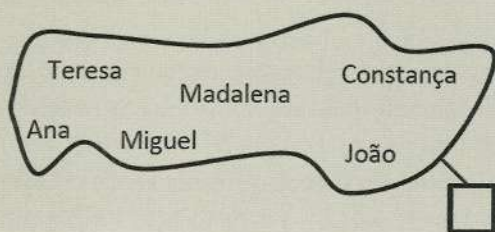


Figura 5. Exemplo do Caderno de Apoio do 1.º Ciclo (OTD1, p. 14)

na medida em que é através do tratamento destas situações que os alunos vão construindo progressivamente o conceito de probabilidade e não por poderem finalmente aplicar a Lei de Laplace. Além deste adiamento, a exclusão das experiências aleatórias em que os casos possíveis não são equiprováveis, vem reforçar algumas conceções erradas dos alunos que utilizam a Lei de Laplace indiscriminadamente. Na nossa perspetiva, também esta proposta desvaloriza a intuição e o trabalho com situações reais e próximas dos alunos, o que empobrece decisivamente as suas aprendizagens.

Desta forma, consideramos que fica seriamente comprometida uma aprendizagem que sirva os interesses de um cidadão estatisticamente literado, que seja capaz de ler, analisar e criticar a imensa quantidade de informação estatística com que hoje é confrontado.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

O programa que nós agora discutimos é um programa para o ensino básico, ou seja, para todos os alunos. É fundamental ter isso em conta e pensar que o que ensinamos não se deve justificar sistematicamente por uma esperança adiada de que um dia tais ferramentas sejam necessárias. É claro que esta será também a formação dos alunos que prosseguirão estudos e esse aspeto deve ser tido em conta. Mas deve justificar-se também no quadro de uma formação cultural e no âmbito de uma formação para a cidadania. E nesse sentido não basta anunciar a importância da matemática nessa formação. É preciso que os alunos se envolvam em atividade matemática, que lidem com situações desafiantes dentro e fora da matemática e que desenvolvam sentido crítico.

O papel do professor também deve ser considerado, mesmo além da liberdade metodológica. Contudo, a presente proposta retira autonomia aos professores relativamente à gestão curricular em cada um dos ciclos do Ensino Básico,

ao prescrever de forma rígida os conteúdos a lecionar em cada ano de escolaridade.

Em certa medida — no que toca ao grau de formalismo, tecnicismo e abstração — este programa é demasiado ambicioso, ultrapassando os limites do que podemos pedir aos alunos do ensino básico. Contudo, em muitos outros aspetos, este programa é muito mais pobre. É pobre por não reconhecer a relevância de experiências fundamentais para uma aprendizagem significativa, como a resolução de problemas, investigações ou o trabalho de projeto. Por ignorar o papel da tecnologia. Por não compreender a importância da utilização de diferentes representações, linguagens ou processos informais. Por desvalorizar a intuição. Por não reconhecer que além de aprender matemática, é preciso aprender o que é a matemática e isso não se consegue explicando a diferença entre um lema ou um corolário, como se propõe nas metas.

Este programa ignora muito do que se tem investigado sobre o valor de uma experiência matemática rica e significativa desde os primeiros anos da escola e que não decorre de uma ideologia, mas sim de uma ciência reconhecida há vários anos chamada Didática da Matemática. A razão invocada para revogar o anterior programa — dar liberdade aos professores para usarem a metodologia que entenderem, revela-se totalmente falsa. Este programa e as metas que lhe estão associadas tem subjacente um metodologia única, metodologia esta que leva ao insucesso em matemática e que destruirá o caminho de sucesso que vinha sendo construído.

### Referências

- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–909). Reston, VA: NCTM.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.
- Kosslyn, S. (1994). *Image and brain*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Posner, M., & Raichle, M. (1994). *Images of mind*. New York: Scientific American Library.
- Wu (2011). Wu, H. (2011). Teaching Fractions According to the Common Core Standards. (<http://math.berkeley.edu/~wu/CCSS-Fractions.pdf>), abril de 2013

GRACIOSA VELOSO

LINA BRUNHEIRA

MARGARIDA RODRIGUES

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA



## Matemática, pinguins e cadeias alimentares!?

Num Planeta que suporta vida, a Biologia desempenha um papel fundamental na explicação de fenómenos e na compreensão de problemas que afetam o Planeta Terra. Por exemplo, as cadeias alimentares da Antártica são afetadas pelas alterações climáticas, estando por vezes associadas ao degelo que se faz sentir nesta região. Nestas questões, a Ciência Polar em Portugal tem vindo a desenvolver progressos consideráveis nestes estudos.

Qual o papel da Matemática no conhecimento e compreensão desses mesmos fenómenos biológicos? Uma forma de divulgar e comunicar ciência é promover o diálogo entre diferentes áreas ou mesmo entre temas de diferentes anos internacionais.

Se 2013 é um ano especialmente dedicado à Matemática do Planeta Terra, 2007–2008 foi o *Ano Polar Internacional* (API). O API foi preponderante para o avanço da Ciência Polar no mundo, e também em Portugal. Foram mais de 200 projetos científicos e educacionais que reuniram mais de 50000 cientistas de cerca de 60 países. Desde então há projetos e organismos que continuaram a desenvolver trabalho nesta área. No âmbito destas iniciativas, um grupo de cientistas polares reserva, todos os anos por altura dos equinócios (março e setembro), uma semana para a divulgação da ciência polar nas escolas. A iniciativa é a *Semana Polar Internacional* (*Polar Weeks*) que é parte dos projetos «Profissão: Cientista Polar» e *EDUCAÇÃO PROPOLAR*, com o Programa Polar Português *PROPOLAR* (ver também <http://www.propolar.org/>), a APECS PORTUGAL (Associação de Jovens Investigadores Polares de Portugal; <http://www.portalpolar.com/apecs-portugal.html>), a APECS internacional (<http://apecs.is>) e a associação *Polar Educators Internacional* (PEI) (<http://www.polareducator.org/>). Durante esta semana, alunos e professores de várias escolas estabelecem contacto com investigadores através de conferências, painéis de discussão e *skype calls* para escolas localizadas em Portugal, e em todo o mundo, incluindo Brasil, Reino Unido, Canadá, Austrália, França e S. Tomé e Príncipe. Evidenciar o papel dos jovens cientistas polares portugueses na ciência polar, dar a conhecer o seu trabalho científico realizado e mostrar a importância das regiões polares para compreender os efeitos das alterações climáticas na biodiversidade, o degelo e a degradação do *permafrost*, como se

estudam gases que causam o efeito de estufa na Antártica, são alguns dos objetivos desta iniciativa.

José Xavier, investigador do Instituto do Mar da Universidade de Coimbra e da *British Antarctic Survey*, é um biólogo marinho e já efetuou 8 campanhas científicas na Antártida. À questão «José, porque estás sempre de bom humor e com um sorriso?», a resposta é simples.... «todos os dias sinto que sou um privilegiado em estar na Antártica e que estou a ter uma oportunidade única de viver ao vivo um mundo diferente. Quero simplesmente aproveitar todos os minutos!!!!». Patrícia Azinhaga é professora de Biologia e Geologia no Externato Cooperativo da Benedita. Ambos pertencem à coordenação do Projeto «Profissão: Cientista Polar» e «Educação PROPOLAR».

Neste número da E&M, José e Patrícia elucidam-nos quanto ao papel de diferentes espécies de peixes na cadeia alimentar na Antártida e da importância da matemática para avaliarem a sua distribuição e para fazer previsões ao nível das consequências das alterações climáticas na mesma.

Qual a presença da Matemática na vida e no trabalho destes investigadores? Como podem as ciências matemáticas contribuir para o desenvolvimento da ciência polar? Como é que isso se pode tornar visível aos olhos de todos?

Para promover a Ciência Polar nas gerações mais novas, a equipa tem também investido na elaboração de alguns recursos educativos, como é o caso do jogo Jenga, explicado ao longo do artigo. Embora esta variante do jogo Jenga sugira uma actividade para uma aula de Biologia, a verdade é que, com base nas cadeias alimentares da Antártida e no jogo Jenga, a Matemática e a Biologia podem surgir como complementares na compreensão deste fenómeno, nomeadamente na noção da proporção que determinadas espécies ocupam na cadeia alimentar da Antártida e na interpretação de dados da ciência polar através de representações estatísticas. Convidamos o leitor a deliciar-se com a leitura deste artigo, posteriormente apreciar uma versão interdisciplinar do jogo Jenga na secção Vamos Jogar... e, finalmente, enriquecer o leque de tarefas de sala de aula com uma possibilidade de exploração deste jogo na secção *Materiais para a aula de Matemática*.

JOANA LATAS



# Dos Pinguins aos Ursos Polares

## O Papel das Ciências Matemáticas em Ciência Polar

As regiões polares são partes do planeta que nos podem ajudar a compreender fenómenos científicos muito importantes. Questões como o degelo, o aumento do nível médio da água do mar, as alterações climáticas e o buraco na camada do ozono são assuntos abordados regularmente quando nos referimos às regiões polares. Perceber que as regiões polares são apenas parte de um puzzle em que Portugal (e a Europa) é mais uma peça, é essencial para mostrar como o nosso planeta é pequeno. Por exemplo, as alterações que ocorrem nas correntes frias do Antártico podem ter implicações na produtividade das nossas águas Europeias. Uma evidência da importância destes assuntos, é a referência regular aos mais recentes desenvolvimentos na área nos noticiários ou jornais diários. Conclusão: compreender os fenómenos que afetam as regiões polares é extremamente importante para perceber o que poderá vir a acontecer em Portugal e noutras partes do mundo. E para compreender o que se passa é necessário caracterizar o que se passa, através de estudos científicos...em que as ciências matemáticas são *fundamentais* na quantificação dos resultados obtidos.

Portugal possui atualmente cerca de 50 cientistas, de 15 Universidades e Institutos superiores, que fazem ciência no Ártico e na Antártica, de uma forma regular, em áreas que vão desde as ciências do mar, às ciências terrestres, sociais e até às da atmosfera (Xavier, Vieira & Canário, 2006). Politicamente as regiões polares são também muito interessantes. Portugal aderiu ao Tratado da Antártida em 2010, que advoga que este continente deverá ser devotado à ciência e à paz, e onde o uso militar não é permitido. É incrível que atualmente exista uma área do tamanho da Europa (semelhante também aos Estados Unidos da América), que não seja pertença de qualquer nação, não é?

A ciência feita nas regiões polares, principalmente na Antártida, possui uma forte componente internacional, e os

projetos são geralmente interdisciplinares, pois reduzem os custos associados às campanhas dos vários países e maximizam os produtos (produção de artigos científicos, maior conhecimento, soluções a problemas, desenvolvimento de novas tecnologias, ...), e todos estes usam matemática!

O caso particular dos estudos em ciência marinha Antártica do Instituto do Mar da Universidade de Coimbra, com a *British Antarctic Survey*, e com várias Universidade e institutos estrangeiros, foca-se nos efeitos das alterações climáticas na cadeia alimentar marinha, em particular nos animais que vivem no topo desta. Por exemplo, colegas investigadores descobriram que um dos predadores de topo do Ártico, os ursos polares, tem de nadar cada vez mais distâncias mais longas à procura de alimento (podem chegar a nadar 450 km em 10 dias sem parar) há medida que o derreter do gelo do Ártico aumenta (Pagano *et al.*, 2012). Os nossos estudos mostram que espécies de pinguins se estão a deslocar mais para sul à medida que a Península Antártica aquece, e conseqüentemente a competição por comida com outras espécies de pinguins que vivem a sul, aumenta. Como a sua comida (nomeadamente o camarão (*Krill*) do Antártico) está a diminuir, é previsível que estas espécies de pinguins venham a ter problemas na procura de alimento. No caso dos albatrozes é notável. Apesar de serem pre-



**Figura 1.** Albatrozes de cabeça cinzenta.



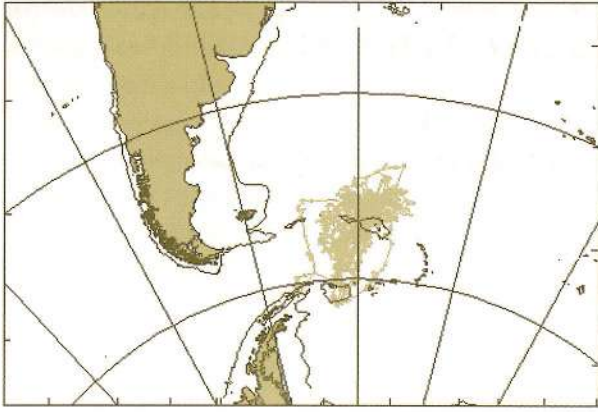


Figura 2. Ano «bom».

dutores de topo (e logo se pensaria que seriam capazes de se alimentarem bem independentemente das variações de algumas das suas presas), não são capazes de lidar com a ausência das suas principais presas como se pode observar pelas imagens seguintes. Ambas ilustram as áreas onde os albatrozes se deslocam para procurar alimentos, na figura 2 num ano «bom» e na figura 3 num ano «mau» (Xavier, Trathan & Wood, 2003).

Num ano «mau» das condições ambientais, os nossos estudos de rastreio via satélite mostram que os albatrozes de cabeça cinzenta tentam procurar presas alternativas, mas o problema é que só as encontram a distâncias demasiado longínquas da sua colónia de reprodução. Quando regressam com as presas alternativas para alimentar os seus filhotes, estes já morreram. Em conclusão, caso estes anos «maus» se tornem cada vez mais frequentes, as populações destes albatrozes, e possivelmente outros, podem vir a sofrer um declínio das suas populações. É através das ciências matemáticas, particularmente a estatística, que conseguimos quantificar a comida ingerida pelos animais em estudo, avaliar qual a duração das suas viagens à procura de alimento e até testar se as variações entre anos são significativas ou não. Aliás, resultados preliminares dos estudos mais recentes de nossos colaboradores, utilizam modelos matemáticos para prever o que poderá acontecer a várias espécies, quer de predadores (como os pinguins e albatrozes) quer de presas (como as lulas, peixe e crustáceos), à medida que a temperatura do nosso planeta vai aumentando (Jenouvrier, 2012). Por exemplo, para algumas espécies de pinguins, como o pinguim imperador, prevê-se uma diminuição da sua população de cerca de 81% em 2100. É essencial que as comunidades científicas, de todas as áreas (matemáticas, biológicas, ...), estimulem os seus cientistas a comunicar a sua ciência de um modo simples, acessível e compreensível, para que o público em geral, habi-

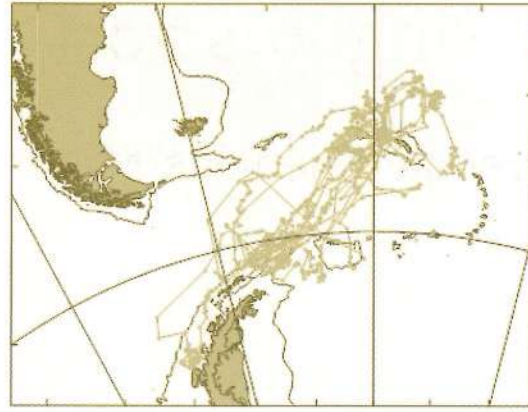


Figura 3. Ano «mau».

tantes do nosso planeta compreendam as transformações que se vão revelando. De momento, como biólogo, as diversas linguagens me parecem de tão difícil compreensão como comprar um jornal desportivo e este só conter equações matemáticas incompreensíveis sem legendas...

### CIÊNCIA POLAR NA SALA DE AULA: TEIA ALIMENTAR JENGA

Através de um simples jogo os alunos poderão explorar conceitos importantes relacionados com a biologia marinha da região antártica, tais como biodiversidade, alterações climáticas, efeitos de sobrepesca e espécies chave do ambiente marinho. Para que se compreenda «quem come quem» na teia alimentar da região antártica, é essencial ter em atenção os seguintes conceitos:

- Os animais e plantas que habitam na região Antártica possuem adaptações às baixas temperaturas, aos longos períodos sem luz e à extensão sazonal de gelo marinho.
- O fitoplâncton (algas), conhecido como produtor, está na base das cadeias e teias alimentares da Antártida. O fitoplâncton é ingerido por consumidores, tais como o *Krill* do antártico, *Euphausia superba* (uma espécie pequena de camarão) e zooplâncton herbívoro (ex. Copépodes). Por sua vez, estes são consumidos por uma grande variedade de espécies de peixes, lulas e predadores de topo, como baleias, focas, pinguins e albatrozes.
- A transferência de energia do fitoplâncton para os predadores de topo pode ser bastante rápida. Por exemplo, uma das cadeias alimentares mais simples da Antártida é a seguinte, o fitoplâncton é comido por *krill* do antártico e esta espécie, por sua vez, é comida por um predador de topo, as baleias de barbatanas.





Figura 4. Exemplo do jogo Jenga.

- O *Krill* do antártico é considerado uma espécie chave (espécie que tem um papel crucial na manutenção da estrutura de um ecossistema) no ecossistema marinho antártico. Caso o *krill* seja removido do ecossistema marinho antártico, este ecossistema entraria em colapso e experimentaria uma mudança dramática na sua estrutura.
- A exploração dos recursos marinhos da Antártida (pesca e caça a baleias e focas) teve início no século XIX com um interesse evidente na caça à baleia e focas e na pesca, levando algumas espécies ao risco de extinção. Hoje em dia, a caça à baleia, focas e pinguins é proibida e há uma gestão mais sustentável da pesca (focada maioritariamente em peixe e *krill* do antártico).
- As alterações climáticas têm impacto no ecossistema marinho antártico. Exemplo disso é o efeito negativo que o aumento da temperatura global exerce na abundância, distribuição e capacidade reprodutiva de várias espécies deste ecossistema, tais como o *krill* do antártico, peixes e espécies bentónicas (ou seja, aquelas que vivem no fundo do mar).

#### UMA POSSÍVEL ABORDAGEM ...

No início da atividade pode explorar a torre Jenga completa que pretende representar a teia alimentar antártica em equilíbrio (espécies diferentes alimentam-se de outras espécies). O primeiro conceito a explorar será o facto de a teia alimentar antártica poder ser relativamente simples ou tornar-se bastante complexa (diferentes espécies alimentam-se de espécies variadas).

À medida que se vão removendo peças Jenga da torre (recorde que devem colocar-se no topo da torre) vão aparecendo lacunas na estrutura da torre tornando-a mais »frágil«. Esta fragilidade permite ilustrar os efeitos negativos da extinção/remoção de espécies do ecossistema marinho antártico resultantes da sobrepesca ou das alterações climáticas.

À medida que o jogo vai decorrendo haverá uma peça Jenga que ao ser removida fará a torre colapsar. Essa peça representa o *krill* do antártico, a espécie chave da teia alimentar. Sem a sua presença toda a teia alimentar irá colapsar.

#### SUGESTÕES PARA O PROFESSOR

A complexidade do jogo Jenga deverá ser adaptada à idade dos alunos. Aos alunos mais novos poderá ser entregue uma peça Jenga onde poderão desenhar o seu organismo favorito da teia alimentar antártica à medida que os conceitos gerais relativos às teias alimentares e à relevância do *Krill* do antártico vão sendo explicados. Para os alunos com idade superior (nível Secundário e Universitário) deverá ser feito um enquadramento teórico comparando teias alimentares de diferentes áreas da Antártida (ex. Mar de Scotia versus Mar de Ross).

Caso não seja possível usar um jogo Jenga, pode realizar a atividade recorrendo a um jogo mikado ou um conjunto de pequenas varas. Neste caso, inicialmente todas as varas deverão estar em contacto com outras varas para que seja demonstrada a complexidade que uma teia alimentar antártica pode conter (qualquer vara tocando noutra poderá representar a espécie que é «comida» ou que «irá comer» a outra espécie). Neste caso, os estudantes desempenham o papel da «pesca» ou das «alterações climáticas» à medida que vão retirando as varas do conjunto...até que se corra o perigo de não existir mais nenhuma espécie.

#### Referências bibliográficas

- Jenouvrier S, Holland M, Stroeve J, Barbraud C, Weimerskirch H, Serreze M, Caswell H (2012). Effects of climate change on an emperor penguin population: analysis of coupled demographic and climate models. *Global Change Biology*, 18, 2756–2770.
- Pagano, A.M., Durner, G.M., Amstrup, S.C., Simac, K.S., and York, G.S. Long-distance swimming by polar bears (*Ursus maritimus*) of the southern Beaufort Sea during years of extensive open water. *Canadian Journal of Zoology* 90(5): 663–676, 2012.
- Xavier, J.C., Croxall, J. P., Trathan, P. N. & Wood, A. G. (2003). *Feeding strategies and diets of breeding grey-headed and wandering albatrosses at South Georgia.*



## AROMAS DA MATEMÁTICA NUMA PARCERIA ENTRE A EBI DA APELAÇÃO E A ESCOLA SECUNDÁRIA DO PRÍNCIPE

«Para que serve afinal aprender Matemática?», «Porque preciso eu de estudar isto?», «Com que finalidade?». Estas e muitas outras questões semelhantes são ouvidas todos os dias, vindas dos nossos alunos. De facto, os jovens conseguem mil e uma desculpas para justificar a sua pouca vontade de aprender e conhecer a matemática.

Desmistificar a Matemática não é tarefa fácil, mas este grupo de professores aproveitou o mote da Matemática do Planeta Terra, e particularmente o concurso *Matemática, onde estás?*, para proporcionar uma Matemática mais humana e experimental para os seus alunos. Assim surgiu o projeto *Saudinha*.

Este projeto consiste na recolha e tratamento de dados relativos ao tema saúde na comunidade escolar e na produção de produtos de higiene, a partir de ingredientes do dia a dia. As fases do mesmo passam, por um lado, pela elaboração, implementação de inquéritos por questionários incidindo nas práticas de saúde oral, acesso a serviços de saúde e alimentação saudável e respetivo tratamento dos dados estatísticos e, por outro, pelo incentivo a práticas de higiene sustentáveis. Sendo uma parceria entre uma escola em Portugal e outra na ilha do Príncipe, os resultados e conclusões finais serão comparados, assim como as recomendações de melhoria nestas duas realidades.

Do desenvolvimento do projeto, destacamos nesta partilha a experiência de produção de sabão artesanal, de óleos vegetais e de detergentes. Para isso, colocámos a Matemática ao nosso serviço, nomeadamente, a transversalidade da Matemática às disciplinas de Química e Ciências Naturais.

A matemática passou a ter cor, forma, aromas e espuma. Como assim?

A resposta é fácil... Através de fórmulas cuidadosamente elaboradas, e tendo em conta a sustentabilidade ambiental, foram criados sabões e detergentes pelos alunos e profes-

sores do 2.º ciclo, no Agrupamento de Escolas de Apelação, em Portugal, e também na Escola Secundária do Príncipe, em S. Tomé e Príncipe.

E afinal, onde está a Matemática?

Os alunos, em laboratório fazem cálculos de volume e de proporções, tendo como objectivo encher um recipiente. Dependendo do volume do recipiente, é necessário calcular a quantidade de cada ingrediente a usar. Por exemplo: «Para encher esta forma, que tem um volume de 1 litro, dado que a receita é para 700 ml de sabão, quanto é necessário de cada ingrediente?» ou «Para uma garrafa de 2 litros, dado que a receita é para ½ litro de lixívia, que quantidade precisamos de cada ingrediente?». Depois de calculadas as quantidades necessárias, é preciso pesar os ingredientes e medir as quantidades de líquido usando uma pipeta. De seguida, depois de todos os ingredientes pesados e medidos, dá-se início à preparação: aquecer e misturar ingredientes controlando as temperaturas e o pH dos produtos. O produto final é depois colocado nos recipientes e fica em repouso durante o tempo especificado. Depois, é usar!

A matemática é assim mais facilmente colocada em prática e com resultados palpáveis e úteis.

Quanto às recomendações... terão que ficar para depois. De momento, estamos a tratar os dados recolhidos nos inquéritos e a construir gráficos comparativos que ilustrem duas realidades diferentes.

Ana Eliete Reis, 3ºciclo, EBI da Apelação

Dulce Mourato, 2ºciclo, EBI da Apelação

Joana Latas, Projecto Escola+

Partilhe connosco a experiência do concurso *Matemática, onde estás?* na sua escola.

Escreva-nos para [mpt2013@apm.pt](mailto:mpt2013@apm.pt).

Xavier, J. C., Vieira, G. T. & Canário, A. (2006). *Portuguese science strategy for the International Polar Year*. Centre of Marine Sciences, University of Algarve and University of Lisbon, 42pp.

Xavier, J. C. & Peck, L. (2013). *Antarctic Marine Ecosystems*. In Antarctic Research, Liggett, D. (ed), Springer-Verlag, New York (Book chapter; in press).

**JOSÉ XAVIER**

INSTITUTO DO MAR DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

**PATRICIA AZINHAGA**

EXTERNATO COOPERATIVO DA BENEDITA



# Jogo Jenga da Antártica

O Jenga da Antártica pretende simular algumas situações que decorrem de alterações em cadeias alimentares da Antártica. Quando o número de animais de determinada espécie que integra uma cadeia alimentar sofre alterações em função de fatores como alterações climáticas ou pesca excessiva, o jogo reflete essas alterações e sobreviver, ou seja, continuar em jogo, pode tornar-se mais difícil.

**Nº de jogadores:** 2 a 5

**Nível de ensino:** 2.º ou 3.º ciclo

**Conteúdos matemáticos envolvidos:** Leitura de gráficos

**Material necessário:** jogo Jenga (figura 1), baralho de cartas Animais da Antártica, pequenas etiquetas autocolantes de quatro cores diferentes (encarnado, azul, verde e amarelo), um dado — icosaedro com vinte faces coloridas (oito faces encarnadas, seis faces azuis, quatro faces amarelas e duas faces verdes) ou um baralho de cartas Uno, conforme sugerido mais abaixo nas variantes apresentadas.

**Objetivo do jogo:** utilizando apenas uma mão retirar uma peça da torre Jenga (que se encontre abaixo do nível superior da torre) e colocá-la no topo da torre sem que esta se desmorone.

## Preparação do jogo

O jogador mais novo (ou, se já tiver sido realizada uma partida, o vencedor do jogo anterior) retira, sem ver, uma carta do baralho Animais da Antártica e coloca-a sobre a mesa para que todos a possam ver. A partir da análise dessa carta os jogadores organizam-se para colarem nos dois extremos de cada peça Jenga um autocolante com a cor da espécie que esta irá representar.



Figura 1

Por exemplo, se a carta retirada for a constante da figura 2, os alunos deverão colocar etiquetas amarelas nos dois extremos de cinco peças, etiquetas azuis nos dois extremos de oito peças, etiquetas encarnadas nos dois extremos de trinta peças e etiquetas verdes nos dois extremos de onze peças.

Preparadas as peças os jogadores devem construir em conjunto a torre.

## Modo de jogar

O primeiro a jogar é o jogador que na fase de preparação do jogo retirou a carta do baralho, seguindo-se os restantes pela ordem em que se encontram sentados. Na sua vez, cada jogador lança o dado e, utilizando apenas uma das mãos, retira da torre (de um nível abaixo do último que se encontra totalmente construído) uma peça da cor indicada pelo dado. A jogada termina com a colocação dessa mesma peça sobre a torre.

Se a torre se desmoronar, o último jogador que lhe tocou perde.

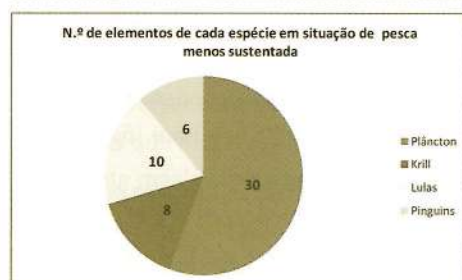
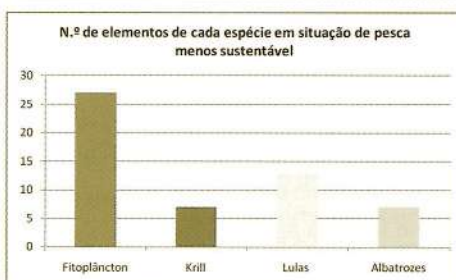
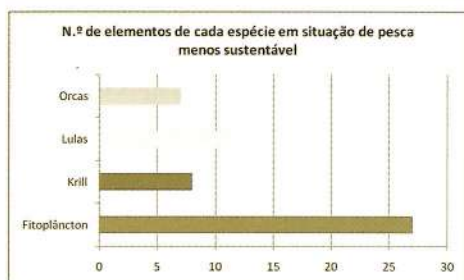
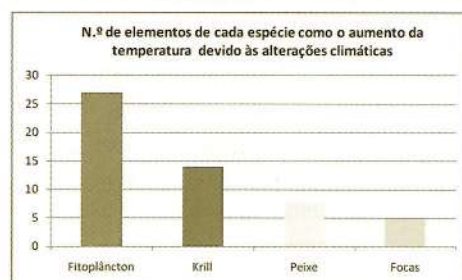
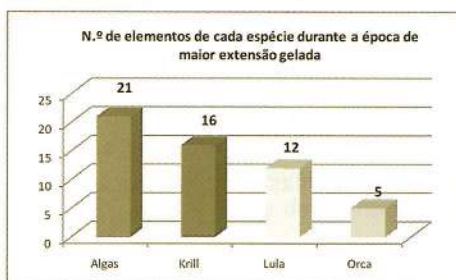
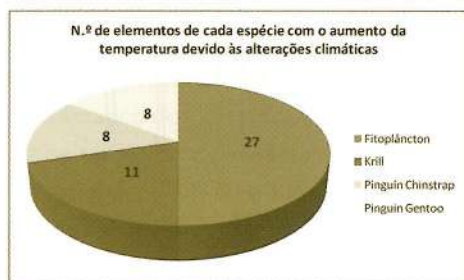
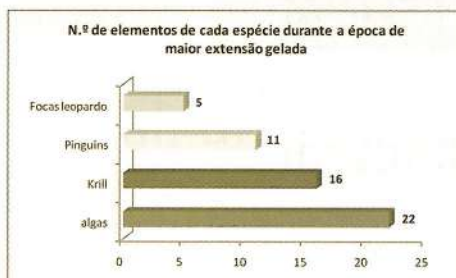
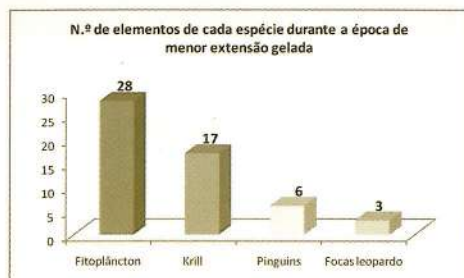
## O contexto associado ao jogo

Neste jogo as cores do dado representam as diferentes espécies que integram a cadeia alimentar que está a ser considerada e o número de vezes que se repetem representa a proporção existente entre essas espécies numa situação normal ou de equilíbrio. As cartas do baralho Animais da Antártica apresentam situações anormais onde o equilíbrio do ecossistema foi perturbado, o que originou alterações no número de animais de cada uma das espécies. Assim, o número de exemplares de uma determinada espécie pode



Figura 2





ter aumentado ou diminuído, fazendo com que a espécie indicada pelo dado seja muito mais comum ou muito mais rara na torre Jenga. Como é óbvio, estas alterações traduzem-se em facilidades ou dificuldades acrescidas para os jogadores que têm que remover da torre uma peça representando determinada espécie. O jogo permitirá assim aos jogadores alguma perceção sobre o impacto que tem a variação do número de animais de uma espécie.

### Variantes

No baralho de cartas são considerados diferentes tipos de gráficos como forma de dar a informação aos alunos (circulares e de barras). Na versão que aqui se apresenta optou-se por usar apenas a frequência absoluta e por fazer o total de dados coincidir com o número de peças do jogo. Mas não tem que ser necessariamente assim. A informação pode ser dada recorrendo à frequência relativa, nomeadamente sob a forma de percentagem. O total de dados pode também ser diferente do número de peças do jogo, obrigando a atender à proporção existente. Deste modo poderiam ser trabalhados outros conceitos matemáticos. Ao ponderar estas possibilidades convém no entanto ter presente que se trata de um jogo e que, como tal, o foco da atividade dos alunos deve estar na realização do jogo e não na sua fase inicial de preparação.

Uma outra variante interessante consiste na substituição do dado por um baralho de cartas tipo Uno, com a quantidade de cartas de cada cor adaptada à proporção de elementos de cada espécie existentes na situação de equilíbrio. As cartas seriam distribuídas entre os jogadores e seria a cor da carta Uno jogada que determinaria a peça que devia ser retirada da torre. Esta variante dá ao jogador alguma hipótese de escolha da cor da peça a retirar, obviamente dentro das possibilidades permitidas pelas cartas de que dispõe.

### O baralho de cartas Animais da Antártica

O baralho de cartas que aqui se apresenta é constituído por nove cartas. Todas exibem um gráfico com o número de elementos de cada espécie em função de determinada situação. Nalguns casos a leitura da informação é direta e imediata, noutros é necessário recorrer à escala apresentada. Estes aspetos podem obviamente ser alterados e adaptados às características dos alunos envolvidos, tornando a leitura da informação mais simples ou complexa, conforme seja considerado conveniente.

**HELENA ROCHA, JOANA LATAS,  
JOSÉ XAVIER E PATRÍCIA AZINHAGA**



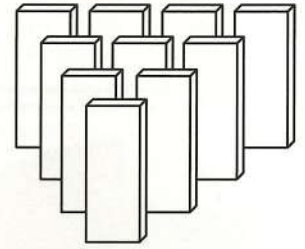
# Dominós em cascata

A Sandra comprou uma série de caixas (menos de 60), cada uma com 30 peças parecidas com dominós.

O objetivo é criar uma instalação com uma peça na primeira linha, duas na segunda, três na terceira e assim sucessivamente, cada fila com mais uma peça que a anterior. Quando tudo estiver montado, empurra-se a primeira peça, que fará cair todas as outras, num efeito em cascata. Feita a instalação, sobraram duas peças.

Quantas caixas comprou a Sandra e quantas filas tem a instalação?

(Respostas até 17 de Outubro para zepaulo46@gmail.com)



## UM QUADRADO, UM CÍRCULO E UM RETÂNGULO PEQUENO

O problema proposto no número 121 de *Educação e Matemática* foi o seguinte (figura 1):

Temos um círculo inscrito num quadrado e um retângulo com um dos vértices sobre a circunferência, tal como se vê na figura. Os lados do retângulo medem 2 e 9 centímetros. Qual é a medida do lado do quadrado?

Recebemos 16 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Catarina Ferreira (Lamego), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva, Inês Guimarães (Riba de Ave), Jorge Filipe (Lisboa), Lisa Marques, Miguel Bento, Pedro Perdigão (Lourinhã), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Sandra Azevedo, Sandra Campelos (Rio Tinto), Sérgio Rosa (Pinhal Novo).

Os métodos utilizados, quase equivalentes, foram dois:

A) escolher um referencial e usar a equação da circunferência, ou B) utilizar o teorema de Pitágoras. Demos a palavra à Inês e ao Carlos, que seguiram a segunda opção. De acordo com a figura 2, onde  $r$  representa o raio do círculo, vamos ter um triângulo retângulo ABO cujos catetos medem

$(r-2)$  e  $(r-9)$  e a hipotenusa é igual a  $r$ . Assim, pelo Teorema de Pitágoras, ficamos com:

$$(r-2)^2 + (r-9)^2 = r^2$$

Desenvolvendo e simplificando obtemos uma equação do 2.º grau em  $r$ :

$$r^2 - 22r + 85 = 0$$

$$r = 5 \text{ ou } r = 17$$

Sendo o raio maior do que 9, vem  $r = 17$  cm. Deste modo, como o lado do quadrado corresponde ao diâmetro do círculo, ou seja, ao dobro do raio, conclui-se que o quadrado tem  $2 \times 17 = 34$  centímetros de lado.

O Alberto chama a atenção para um aspeto muito curioso: *Ambas as soluções obedecem às condições matemáticas impostas, embora só a primeira corresponda à figura do enunciado. A segunda solução corresponde à situação apresentada na figura 3.*

O Sérgio generaliza o problema: Também se observa que  $\overline{AB} = 15$  e  $\overline{AO} = 8$ . Assim o triângulo retângulo ABO tem os lados 8, 15, 17.

Como consequência, para se criar problemas semelhantes ao proposto, mas com medidas diferentes para o retângulo, basta utilizar os ternos pitagóricos.

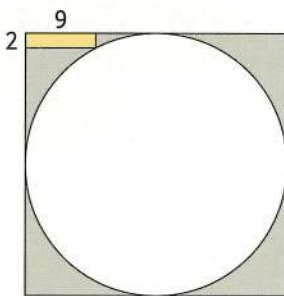


Figura 1

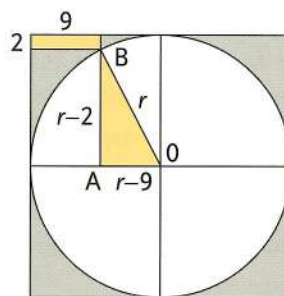


Figura 2

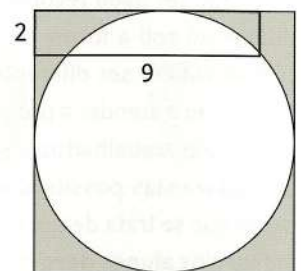


Figura 3



# Raciocínio proporcional: uma perspectiva atual

ANA ISABEL SILVESTRE • JOÃO PEDRO DA PONTE

O raciocínio proporcional é essencial no desenvolvimento matemático dos alunos. Esta capacidade é importante não só na resolução de problemas do quotidiano mas também na aprendizagem de outras noções matemáticas e de outras áreas do saber como a Física. Porém, os alunos revelam com frequência dificuldades na resolução de problemas envolvendo, por exemplo, a identificação da relação de proporcionalidade direta e o cálculo do valor omisso.

A investigação sobre o raciocínio proporcional tem vindo a delinear os vários aspetos de que este se reveste, salientando a importância da compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta. Ao mesmo tempo, a investigação tem alertado para a morosidade e a forte influência da experiência escolar no seu desenvolvimento. Contudo, a perspectiva simplista que associa o raciocínio proporcional ao uso eficiente da regra de três simples continua a prevalecer nos manuais escolares, configurando um aspeto problemático no ensino da Matemática (Norton, 2005). Neste artigo abordamos vários aspetos do raciocínio proporcional evidenciados pela investigação.

## RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: DE QUE FALAMOS?

Nos últimos anos temos procurado enunciar os aspetos que caracterizam o raciocínio proporcional. Na nossa opinião, este raciocínio envolve três aspetos principais: (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade para resolver vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões) (Silvestre & Ponte, 2011; Silvestre, 2012). Ao indicar estes diferentes aspetos que envolvem o raciocínio proporcional, pretendemos contribuir para uma configuração de indicadores capazes de orientar o ensino-aprendizagem, de modo a desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos.

## SER OU NÃO SER UMA RELAÇÃO PROPORCIONAL

Ser capaz de distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outras relações que não o são é um aspeto fundamental do raciocínio proporcional. Para isso, durante a aprendizagem formal da proporcionalidade direta os alunos devem trabalhar também com problemas que não envolvem a relação de proporcionalidade direta. Em particular, o trabalho de sala de aula deve envolver problemas pseudoproporcionais, isto é, problemas que não envolvem uma relação de proporcionalidade direta mas geram nos alunos uma forte tendência para assumir a sua existência. Estes problemas apresentam uma relação aditiva, uma relação de proporcionalidade inversa ou outras situações em que não existe uma relação de proporcionalidade direta. A semelhança da estrutura sintática dos problemas pseudoproporcionais e de valor omisso (o tipo mais comum de problema de proporcionalidade direta) é responsável pelo evocar a proporcionalidade direta. «Um pianista precisa de 5 minutos para executar uma peça musical. Quanto tempo precisam três pianistas para executar o mesmo tema?» é um exemplo de um problema pseudoproporcional em que não existe relação de proporcionalidade direta entre as variáveis do problema, ou seja, o número de pianistas não está relacionado de forma proporcional com o tempo de execução da peça musical.

## A NATUREZA MULTIPLICATIVA DA RELAÇÃO DE PROPORCIONALIDADE DIRETA

Os alunos lidam no seu quotidiano com situações que envolvem a relação de proporcionalidade direta. Antes do seu ensino formal, até mesmo antes de aprenderem a multiplicação, resolvem problemas que envolvem esta relação, por exemplo, quando calculam o preço de bens ou serviços. No entanto, aquando da aprendizagem formal da proporcionalidade direta, os alunos devem compreender a relação multiplicativa que lhe está subjacente.

Nos primeiros anos de escolaridade os alunos usam estratégias de composição/decomposição, frequentemente



A MARGARIDA COMPROU 3 LIVROS DA COLEÇÃO «ERA UMA VEZ» POR 12 EUROS. QUANTO CUSTAM 9 LIVROS?

A JOANA NA AULA DE EDUCAÇÃO FÍSICA CORRE 100 METROS EM 20 SEGUNDOS A UMA VELOCIDADE CONSTANTE. CALCULA A DISTÂNCIA PERCORRIDA PELA JOANA EM 50 SEGUNDOS.

Carolina: Se fossem 6 livros era o do dobro do dinheiro, 24. E se fossem 9 livros era 24 mais 12 euros. (Escreve a resposta falando baixinho.)

3 livros - 12 €  
 6 livros - 24 €  
 9 livros - 36 €  
 R: 9 livros eram 36 €.

Carolina

Quantidade (Livros)	Tempo (segundos)
100	20
250	50

$\times 2,5$

R: Ela percorre 250 metros

Manuel

$$\begin{array}{r} 100 - 20 \\ 250 - 50 \\ \hline 0,2 \end{array}$$

R: Em 50 segundos a Joana percorreu 250 metros.

Figura 1. Estratégia de composição usada por Carolina

Figura 2. Estratégias de resolução de Carolina e de Manuel

te não proporcionais (aditivas) ou pré-proporcionais (por exemplo, estratégias aditivas e com recurso ao dobro) para resolver problemas de proporcionalidade direta, como mostra a figura 1.

O uso desta estratégia nem sempre permite aos alunos resolver com sucesso o problema.

O ensino formal da proporcionalidade direta tem de dar ênfase à sua natureza multiplicativa, levando os alunos a usar estratégias proporcionais (multiplicativas). Esse trabalho pode passar inicialmente pela mobilização das estratégias usadas anteriormente pelos alunos (não proporcionais), explorando a partir delas a relação multiplicativa, levando-os a apreciar a eficiência das estratégias multiplicativas (escalar e funcional) comparativamente às estratégias aditivas que usavam anteriormente. Deste modo, sugere-se ao aluno o uso da estratégia proporcional escalar (ver a estratégia da Carolina na figura 2) pelo refinamento de estratégia de composição/decomposição (aditiva) e, em simultâneo, a estratégia proporcional funcional (ver a estratégia do Manuel na figura 2).

Os alunos que usam o operador escalar, aplicam  $\times b$  (ver a figura 3) dentro do mesmo espaço de medidas ( $a \times b = x$ ), como mostra a estratégia de resolução de Carolina. O operador escalar ( $b$ ), por se tratar de uma razão entre valores da mesma grandeza, não possui dimensão.

Os alunos usam o operador funcional quando aplicam  $\times a$  (ver a figura 4) entre diferentes espaços de medida ( $b \times a = x$ ), como mostra a estratégia de resolução de Manuel.

O desenvolvimento do raciocínio proporcional passa do pensamento qualitativo para estratégias de composição e destas para estratégias que envolvem raciocínio multiplicativo. Estas estratégias são as mais representativas de um elevado nível de sofisticação do raciocínio proporcional. No

quadro um apresentamos uma proposta para a análise das estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade direta, tendo em vista o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

De salientar que os alunos podem resolver corretamente alguns problemas de proporcionalidade direta sem usar estratégias proporcionais.

## TIPOS DE PROBLEMAS E A SUA COMPLEXIDADE

Os problemas de valor omissivo e de comparação são os problemas mais comuns de proporcionalidade direta. Os problemas de comparação podem ser numéricos ou não e podem envolver um julgamento qualitativo de acordo com o respetivo contexto (por exemplo, «No recipiente A dissolveram-se 10 gramas de sal em 2 litros de água. No recipiente B dissolveram-se 20 gramas de sal em 10 litros de água. Em qual dos recipientes a água é mais salgada?»). Os problemas de comparação numérica apresentam os quatro valores numéricos da proporção e solicitam ao aluno que indique se uma das razões é maior, menor ou igual à outra. Por sua vez, os problemas de valor omissivo apresentam três dos quatro valores da proporção e solicitam ao aluno que determine o valor omissivo (por exemplo, «Com 3 euros compro 2 chocolates. Quantos chocolates posso comprar com 21 euros?»).

Os fatores que geram complexidade nos problemas de proporcionalidade direta são o contexto, os números e a estrutura numérica, as grandezas e as representações. O contexto dos problemas diz respeito ao fenómeno exposto, que pode ser um sistema físico complexo (por exemplo, a balança de braços). Os números utilizados nos problemas são mais um fator que influencia a complexidade dos proble-



$$\times b \quad \left( \begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline 1 & a \\ b & x \end{array} \right) \times b$$

**Figura 3.** Operador escalar (Vergnaud, 1983, p. 130)

$$\left( \begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline 1 & \times a \\ b & \times a \end{array} \right) \begin{array}{l} a \\ x \end{array}$$

**Figura 4.** Operador funcional (Vergnaud, 1983, p. 130)

**Quadro 1.** Estratégias de resolução (Silvestre, 2012, p. 81)

Descrição dos procedimentos dos alunos	Estratégia
<p>Não revela compreensão da relação de covariação e/ou invariância das variáveis</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliza apenas parte dos dados do problema.</li> <li>Utiliza procedimentos de cálculo sem sentido</li> </ul>	Não definida
<p>Não revela compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliza composição/decomposição numérica envolvendo procedimentos aditivos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos.</li> <li>Utiliza procedimentos de contagem associados à representação pictórica e/ou contagem unitária.</li> </ul>	Não proporcional
<p>Revela compreensão da relação de covariação e/ou invariância das variáveis</p> <p>Não revela clara compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliza a composição/decomposição numérica envolvendo procedimentos aditivos e multiplicativos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos.</li> <li>Utiliza a razão unitária e procedimentos aditivos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos.</li> <li>Determina a razão unitária mas nem sempre sabe explicar o seu significado.</li> </ul>	Pré-proporcionais
<p>Revela clara compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliza o fator escalar ou funcional. Compreende e utiliza as propriedades da multiplicação.</li> <li>Determina a constante de proporcionalidade e descreve o seu significado. Escreve a razão e descreve o seu significado.</li> </ul>	Proporcional

mas e, conseqüentemente, as dificuldades dos alunos. As grandezas discretas e contínuas são ainda outro fator com impacto na complexidade dos problemas, sendo de referir que a natureza das grandezas está estreitamente relacionada com o fenómeno descrito no contexto do problema. As grandezas têm também uma natureza extensiva (referem-se apenas uma única entidade, por exemplo, 6 livros) ou intensiva (envolvem uma razão entre duas entidades, por exemplo, 12 garrafas por caixa) que deve ser tida em consideração. Finalmente, as representações presentes no problema são igualmente um fator que influencia a complexidade dos problemas. O conhecimento por parte dos professores dos fatores que geram complexidade nos problemas de proporcionalidade direta permite a organização estruturada das tarefas a propor aos alunos de modo a desenvolver o seu raciocínio proporcional.

Concluindo, para conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos, o professor deve analisar as estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade direta que estes usam. Durante o ensino formal da proporcionalidade direta o professor deve escolher criteriosamente as tarefas a apresentar aos alunos, para que estes compreendam a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e aprendam a resolver problemas progressivamente mais complexos.

#### Referências

Norton, S. J. (2005). The Construction of Proportional Reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, p. 17-24). Melbourne, Australia: PME.



Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2011). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 185–192). Ankara, Turquia: PME.

Silvestre, A. I. (2012). O desenvolvimento do raciocínio proporcional: Trajetórias de Aprendizagem de Alunos do 6.º Ano de Escolaridade (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Org.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). New York, NY: Academic Press.

**ANA ISABEL SILVESTRE**

ESCOLA BÁSICA 2,3 GASPAR CORREIA

UNIDADE DE INVESTIGAÇÃO DO INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

**JOÃO PEDRO DA PONTE**

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

## MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A tarefa que aqui propomos é uma possível exploração do Jogo Jenga, apresentado na secção *Vamos Jogar* deste número, que por sua vez tem como base o artigo da secção MPT2013 intitulado: Matemática, pinguins e cadeias alimentares!?

Esta tarefa apresenta uma forte componente interdisciplinar, pelo que aconselhamos vivamente que a exploração resulte de um trabalho conjunto entre professores de Matemática e de Biologia.

As questões apresentadas exploram simultaneamente tópicos de Biologia e Matemática. Na Biologia destacamos a exploração dos conceitos de teia e cadeia alimentar, níveis tróficos, alterações, fatores de perturbação e alterações no equilíbrio dos ecossistemas, conceitos que se podem enquadrar ao nível dos 5.º e 8.º anos de escolaridade na área das Ciências da Natureza (Naturais). A Matemática poderá, através da análise estatística e do estudo de proporções, enfatizar o impacto das alterações do número de cada espécie nas cadeias alimentares. Neste sentido, a Matemática surge como uma forma de fundamentar as conclusões obtidas na área da Biologia.

Antes de iniciar esta exploração, e uma vez que esta é uma tarefa que exige um trabalho conjunto entre professores de Biologia e Matemática, será importante que todos estejamos familiarizados com os conceitos aqui envolvidos. Salientamos, como referência que:

1. Numa cadeia alimentar, quanto mais próximo da base alimentar mais abundante é a espécie em número. Da base para o topo da cadeia, o número de exemplares em cada espécie deve ser menor que o anterior, de forma a garantir alimento disponível e a evitar o possível colapso da cadeia alimentar;

2. Ponto de desequilíbrio verifica-se quando o número de exemplares da espécie seguinte se torna semelhante ou menor que o anterior. Ou seja, uma cadeia alimentar entra em desequilíbrio se uma das espécies, da base para o topo da cadeia, não apresentar consecutivamente um número menor de exemplares que o que estiver no nível seguinte. Quando esse número é bastante inferior a cadeia poderá colapsar;
3. Admitamos que uma cadeia alimentar entra em colapso se uma das espécies presente na cadeia alimentar representar uma percentagem inferior a 5 em relação às outras espécies da cadeia.

Por exemplo, o *krill* do Antártico é uma espécie chave em todas as cadeias alimentares do Oceano Antártico; se removido do ecossistema, todo o ecossistema poderá colapsar. Já o fitoplâncton é a base da teia alimentar antártica, classificado como produtor (produzem o seu próprio alimento), pelo que deve ser o que mais existe no habitat por ser a base da teia alimentar antártica.

**JOANA LATAS**

PROJECTO ESCOLA+

**JOSÉ XAVIER**

INSTITUTO DO MAR DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

**PATRÍCIA AZINHAGA**

EXTERNATO COOPERATIVO DA BENEDITA



## RELAÇÕES TRÓFICAS ENTRE AS DIFERENTES ESPÉCIES DA CADEIA ALIMENTAR DA ANTÁRTICA

1. Que situações/ cenários podem colocar em perigo o equilíbrio nas relações tróficas existentes na região Antártica?
2. No caso de existir uma gestão menos sustentável das pescas na região, uma cadeia alimentar pode apresentar os seguintes valores:

Fitoplâncton	55
<i>krill</i>	15
peixe	10
focas	20

- 2.1. Determina a relação entre as quantidades das seguintes espécies: focas/peixe; peixe/*krill*; (peixe + focas + *krill*)/fitoplâncton. O que te sugerem os dados obtidos quanto a pontos de (des)equilíbrio nesta cadeia alimentar?
  - 2.2. Qual a relação entre a quantidade representada pelo peixe relativamente a cada uma das outras espécies que fazem parte desta cadeia alimentar?
  - 2.3. Considerando o cenário de uma gestão menos sustentável das pescas, classifica, quanto à sua possibilidade de ocorrência, o acontecimento: as relações tróficas entrarem em desequilíbrio, justificando a tua opção.
3. Que espécies seriam mais afetadas pelo colapso de peixe/*Krill*/Lula?
  4. Que regularidade se pode identificar na presença de espécies que constituem as cadeias alimentares apresentadas no jogo Jenga?
  5. Tendo por base as cartas do jogo, determina a percentagem que os pinguins representam entre as diferentes espécies na região Antártida.
  6. Responde a uma questão idêntica à anterior, mas agora tendo em consideração a espécie Fitoplâncton/*Krill*.
  7. Refere a(s) espécie(s) que consideras mais abundantes nas cadeias alimentares da Antártica, justificando a tua resposta.



RELÓGIOS MATEMÁTICOS

A Matemática, como ciência, possibilita que muitos dos seus conceitos, de natureza abstrata, possam ser estudados numa perspetiva de trabalho investigativo. Baseado neste pressuposto, e dando-lhe um cunho marcadamente lúdico, poder-se-á propor aos alunos a realização de uma pequena investigação envolvendo apenas quatro vezes o número 3 para se obter o valor 3. Para tal é permitido a utilização do cálculo aritmético simples (adições, subtrações, multiplicações e divisões), parêntesis curvos e retos, a raíz cúbica, o fatorial, a junção de alguns destes números 3 para obter, por exemplo, 33 ou 333 ou potências de base três e expoente três.

A título de exemplo, o 3 pode ser obtido através dos seguintes cálculos:

$$3 = (3+3+3) : 3 \quad 3 = 3! - (3:3) \times 3 \quad 3 = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3}$$

De facto, usando-se apenas as operações aritméticas (exemplo da esquerda) ou o fatorial (exemplo do meio) ou o radical de índice 3 (exemplo da direita), obtém-se sempre o valor 3.

E se o desafio fosse, agora, o de se obter o valor 11, usando o mesmo critério anterior?

Eis três exemplos, que voltam a utilizar alguns conceitos matemáticos, além de se poder visitar a ideia de priorização de algumas operações aritméticas em relação a outras. Refiro-me ao conceito de fatorial de um número e às potências de base três com expoente três:

$$11 = 3! + 3! - 3 : 3 \quad 11 = (3^3 + 3!) : 3 \quad 11 = 3 \times 3 + (3! : 3)$$

Será que este desafio também obtém resposta favorável para os restantes números pertencentes a um mostrador de relógio, isto é, será possível obter os números, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 12 usando o critério agora utilizado para a obtenção dos números 3 e 11?

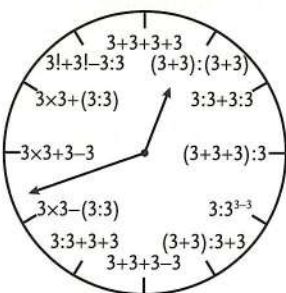


Figura 1

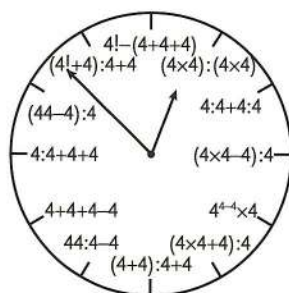


Figura 2

Esta tarefa de recreação matemática, em contexto de sala de aula, pode suscitar a divisão da turma em pequenos grupos, de modo que haja divisão dos números que são objeto de investigação.

Eis uma possível solução para a tarefa proposta:

1 = (3 + 3) : (3 + 3)	7 = 3 : 3 + 3 + 3
2 = 3 : 3 + 3 : 3	8 = 3 x 3 - (3 : 3)
4 = 3 + 33 - 3	9 = 3 x 3 + 3 - 3
5 = (3 + 3) : 3 + 3	10 = 3 x 3 + (3 : 3)
6 = 3 + 3 + 3 - 3	12 = 3 + 3 + 3 + 3

Sendo assim, eis como poderia ficar um hipotético relógio de parede de uma sala de aula de Matemática, elaborado apenas com quatro vezes o número 3 para cada valor do mostrador (figura 1).

Será que é possível conceber um relógio semelhante a este, mas envolvendo sempre quatro vezes o valor 4 para cada valor do respetivo mostrador?

Após nova investigação, seria interessante que surgisse uma proposta semelhante à que apresentamos na figura 2.

Nota: Estas propostas de tarefas de investigação foram recentemente colocadas em prática numa formação contínua proposta pelo Núcleo de Castelo Branco da APM a um grupo de professores de Matemática. A opinião geral foi muito positiva pela multiplicidade de conceitos que as tarefas permitiam visitar. Além disto, também serviam como bons exemplos para apelar às capacidades transversais de promoção da comunicação oral, do desenvolvimento do raciocínio matemático e de resolução de problemas.

Relativamente ao conceito de número fatorial, foi opinião unânime que o mesmo pode ser facilmente entendível por alunos que não careçam de estar a finalizar o Ensino Secundário. Logo, estas tarefas não devem ficar «reféns» do 12.º ano.

Desafio: Faça-se um estudo semelhante para um novo mostrador de relógio, formado apenas por quatro vezes o número 5 para cada valor desse mostrador.

PAULO AFONSO

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO



# 360° Ciência Descoberta

## Entrevista com Henrique Leitão

Comissário da Exposição

ANTÓNIO M. FERNANDES E ILDA RAFAEL

**360°**  
CIÊNCIA DESCOBERTA  
SCIENCE DISCOVERED

360° Ciência Descoberta é uma exposição sobre ciência no período dos grandes viagens oceânicas dos séculos XV e XVI. Documenta o momento de portugueses e espanhóis com um mundo novo. Discorre os progressos técnicos, as novas ideias e as novas ideias entre portugueses. Também o confronto com o saber antigo e como as novidades observadas revolucionaram o modo de pensar a natureza. A descoberta de um Novo Mundo trouxe também uma Nova Ciência.

360° Science Discovered is an exhibition about science during the period of the great oceanic voyages of the fifteenth and sixteenth centuries. It covers the meeting of the Portuguese and Spanish with a new world. It reveals the technical developments, new theories and new ideas. It reveals the confrontation with old knowledge and how the scientific discoveries revolutionized the way of thinking nature. The discovery of a New World also brought a New Science.

 FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

360° Ciência Descoberta é o título de uma exposição, sobre a Ciência Ibérica dos séculos XV e XVI, que esteve patente na Fundação Calouste Gulbenkian. Nela se procura iluminar uma parte mal conhecida da História de Ciência, durante o período dos descobrimentos, onde portugueses e espanhóis surgem como precursores da Ciência Moderna do século XVII.

De acordo com o seu comissário, «nunca descobrimos o tom certo para contar esta história onde não há génios como Copérnico, Galileu ou Kepler, mas onde se assistiu a um modo fascinante de acumular e gerir o conhecimento, que se tornou caso único na Europa.»

Para conversar acerca destes assuntos, o Prof. Henrique Leitão, investigador da Secção Autónoma de História e Filosofia da Ciência da FCUL e que, na qualidade de comissário da exposição, já havia proporcionado aos sócios da APM uma visita guiada, teve a amabilidade de nos receber no seu gabinete.

O resultado desta interessante conversa segue-se.

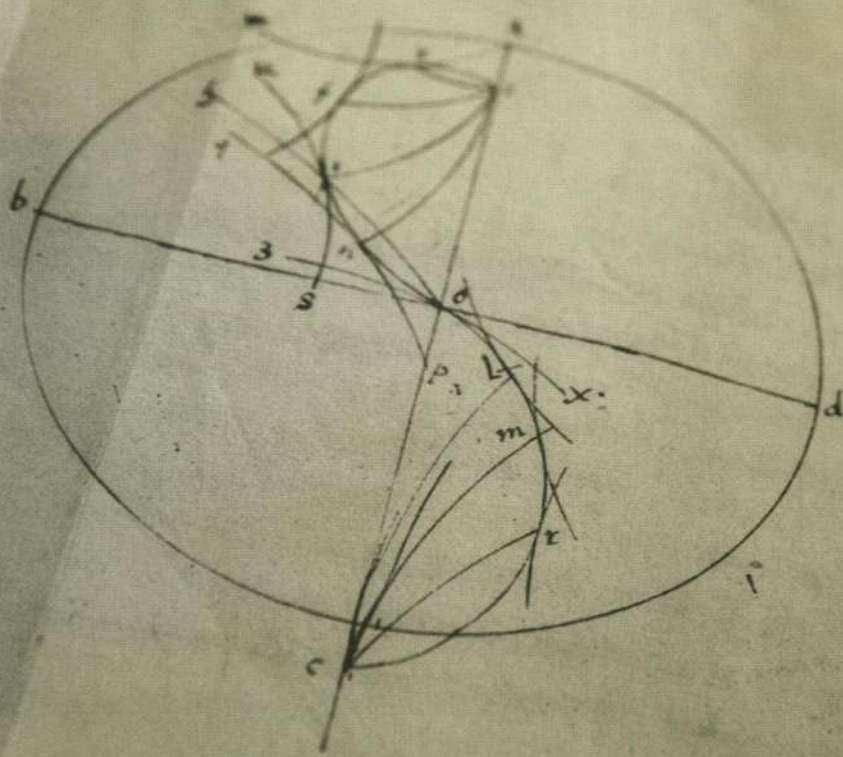
ANTÓNIO M. FERNANDES

DEP. DE MATEMÁTICA, INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

ILDA RAFAEL

ESCOLA SECUNDÁRIA DE D. DINIS





*que se encontra a...*  
*o círculo ab d. diz que repre...*  
*sente ao polo oriente. a o c...*  
*ad meridiano. e. c. polos...*  
*do mundo. p. o. polo do ho...*  
*rizonte. Alinha curva...*  
*f. s. o. m. e. he ho R. uo...*  
*q quer pronar q cher...*

*Figuras do 3º cap. na qual*  
*o círculo ab d. diz que repre...*  
*sente ao polo oriente. a o c...*  
*ad meridiano. e. c. polos...*  
*do mundo. p. o. polo do ho...*  
*rizonte. Alinha curva...*  
*f. s. o. m. e. he ho R. uo...*  
*q quer pronar q cher...*

PEDRO NUNES Séc. XVI  
 BIBLIOTECA NAZIONALE CENTRALE, FIRENZE

**MANUSCRITO DE FLORENÇA** — O único manuscrito sobrevivente de Pedro Nunes, encontra-se em Florença pois foi oferecido a Cosme III de Médici (1642–1723), durante uma visita que este fez a Portugal. O facto é relevante em si mesmo, na medida em que, o património que na época se julgou digno de um representante dos Médici foi precisamente o trabalho de um matemático. Ao mesmo tempo, esta situação revela bem a importância de Pedro Nunes no contexto científico do seu tempo.

**EeM:** A exposição inicia-se com uma esfera e uma semi-esfera cavada num cubo. A esfericidade da Terra não representava em si mesma uma grande constatação. Por que razão foi escolhida como um símbolo? Já agora, qual o simbolismo da semi-esfera cavada no cubo?

**HL:** A esfera (e os 360°) foi sempre um símbolo da exposição porque nós queríamos explicar que os ibéricos tinham sido os primeiros a dominar a Terra na totalidade, quer dizer, a navegar na Terra na totalidade, a ir ao outro lado, digamos assim, aos antípodas. Os primeiros a receber produtos vindos de todos os pontos da Terra. A Terra considerada como uma coisa só, a sua completude foi, pela primeira vez, um desafio que portugueses e espanhóis tiveram que enfrentar. Esta ideia da esfera foi sempre importante; por isso, existiam várias esferas na exposição. Os globos foram uma peça importante na exposição. Quanto à esfera cavada no cubo isso foi uma sugestão dos arquitectos (não foi ideia minha que não sou artista) representava a massa do desconhecido da qual foi arrancada esta esfera, significan-

do as coisas conhecidas. Ou seja uma massa contendo um oco esférico, esfera essa que se encontrava fora da sala e que representava o que se sabia.

Por ocasião da visita dos professores de Matemática dei mais detalhes, em particular, mencionei a curva loxodrómica, para recordar que não se domina a Terra toda sem Matemática.

**EeM:** Das seis grandes áreas temáticas da exposição — O saber pela palavra; O espanto da novidade; Do Mediterrâneo ao mundo todo; Cada estrela é um número; Planear: a gestão do saber; Do Mundo Novo, uma Ciência Nova — em quais se pode identificar uma maior ruptura com o «estado das coisas», digamos assim?

**HL:** Do meu ponto de vista são duas. Uma é a cartografia, que é importantíssima. Ela sofre literalmente uma revolução: começa a ver-se a Terra de uma maneira que nunca se tinha visto, numa escala que nunca se tinha visto. Adicionalmente ocorre uma grande mudança nas técnicas carto-





FABRICANTE NÃO IDENTIFICADO Séc. XVI  
COLECÇÃO DO MUSEU DE CIÊNCIA DA UNIV. DE COIMBRA

FABRICANTE NÃO IDENTIFICADO 1575 (Séc. XVI)  
MUSEU DE MARINHA (LISBOA)

**ASTROLÁBIOS** — O astrolábio à esquerda é um instrumento sofisticado, destinado a ser utilizado por um especialista. O da direita constitui uma simplificação significativa, necessária de modo a que o instrumento pudesse ser utilizado por marinheiros, sem grande sofisticação matemática, e também para que pudesse ser utilizado a bordo em condições muitas vezes adversas.

gráficas. Este é sem dúvida um dos aspectos muito importantes. Por outro lado, pessoalmente, gosto muito da parte relacionada com os instrumentos matemáticos. Essencialmente devido a algo que me esforcei por explicar durante a exposição: uma das coisas mais interessantes do séc. XVI português reside no facto de muitas pessoas, de extractos sociais muito baixos, terem manuseado instrumentos matemáticos e terem contactado com algumas ideias de Matemática e de Astronomia. Eu acho que isto é muito importante na História da Europa porque depois todos, os espanhóis, os franceses, os ingleses e os holandeses vão fazer isto ... , ou seja, a partir da segunda metade do séc. XVI a Matemática, que era apenas trabalhada em núcleos muito restritos, passa a ser comentada e discutida por muita gente. Era tudo muito rudimentar, mais foi suficiente para as pessoas terem uma introdução à Matemática. Do meu ponto de vista, este aspecto é muito inovador

**EeM:** Ocorre portanto uma certa reorganização social ...

**HL:** Exactamente, e além disso uma disseminação de saber matemático por toda a sociedade, que ocorre fora dos sistemas de ensino tradicionais: não se processa através de universidades mas através de artífices que têm que aprender mais Matemática.

**EeM:** Qual o papel da Matemática neste grande empreendimento? Mais precisamente: reduz-se às questões astronómicas (algo que já vinha dos gregos) ou estende-se a outros domínios?

**HL:** Toda a gente tem que perceber (e isso mesmo já era dito por Pedro Nunes, e por outros) que não se tinham feito estas grandes navegações, estes grandes descobrimentos, sem um domínio técnico e científico e matemático. Isto é dito por todos. Muitas vezes pensa-se que como foi um empreendimento português, foi tudo uma consequência de um certo aventureirismo irreflectido. Nada mais falso, eles próprios tinham consciência de que tudo isto estava ao seu alcance porque dominavam melhor a Tecnologia e a Matemá-



À ESQUERDA: MAPA DO SÉC. XV PRODUZIDO A PARTIR DE INFORMAÇÃO CONTIDA NA COSMOGRAPHIA DE CLAUDIUS PTOLOMAEUS (87-150).

À DIREITA: PLANISFÉRIO DE CANTINO, DA AUTORIA DE UM ANÓNIMO PORTUGUÊS (1502).

Em poucos anos a compreensão do mundo mudou radicalmente: de um mundo fechado, local, centrado no Mediterrâneo, passa-se a uma concepção mais global numa escala muito maior. (Um facto que se pode constatar através da cartografia.)



tica (Pedro Nunes diz: «sabiam mais Matemática»).

A Matemática sempre se aplicou em diversos domínios, por exemplo, os artifices. Quando estes constroem catedrais, com é óbvio fazem cálculos matemáticos. Em todo o caso tratava-se de grupos sociais muito fechados. Agora, como navegar envolve muita gente (as pessoas que vão nos barcos atingem as dezenas de milhar de passageiros), todos eles vêem operações matemáticas a serem efectuadas. Outro exemplo: a construção de barcos que é uma indústria enorme. Mas de facto é a navegação que envolve cálculos astronómicos que expõe mais o uso da Matemática. Mas não se deve desprezar o desenvolvimento da aritmética comercial que se adaptou a um crescimento muito grande do próprio comércio. Em todas estas áreas a Matemática se vai desenvolver.

**EeM:** Citando Pedro Nunes: «Estes descobrimentos não se fizeram indo a acertar». Mas poder-se-á dizer que se fizeram indo para acertar?

**HL:** Não se pode cair no outro extremo. Não se trata aqui de uma aventura à sorte, mas também não foi um programa científico. Foi algo intermédio. Ou seja, envolveu gente arrojada, desejo de fazer negócio e de missionar e desejo imperial mas com uma base técnica. Sabiam que tinham que ter mapas melhores, sabiam que eram necessários instrumentos mais precisos, tabelas mais bem calculadas, sabiam que os regimentos que possuíam podiam ser melhorados. Ou seja, não sendo uma coisa científica, foi uma aventura cientificamente fundamentada.

**EeM:** O que determina esta situação? Foi uma opção inicial? Foi-se consolidando com o desenrolar do programa? Foi condicionada pela natureza prática do problema?

**HL:** Sim, foram razões práticas ... a natureza do problema. Esta selecciona o tipo de solução: ao chegar a um local onde a natureza apesar de toda nova, se percebe que é possível ganhar dinheiro com alguns daqueles produtos naturais, o que é que imediatamente se começa a fazer? As pessoas começam a experimentar, a comparar a novidade com o conhecido. O móbil é provavelmente ganhar dinheiro, mas isso induz a experimentação, ou seja, é a natureza do problema que condiciona esta metodologia. Não se tratou de uma elaboração teórica, temos muito poucos textos teóricos sobre isto.

**EeM:** As navegações revelaram um mundo novo. Era apenas novo, ou era contraditório com o mundo tal como se concebia até então?

**HL:** Muitas vezes era apenas novo, mas outras vezes era contraditório com o que se sabia, o que ainda era mais perturbador. Ser novo já causa surpresa mas, ser ao contrário do que se pensava causa imensa perturbação e isso aconteceu algumas vezes. Por exemplo, descobrir vida onde se supunha não ser possível; navegar onde se supunha ser impossível; descobrir raças que se supunha que não pudessem existir; fenómenos atmosféricos que se julgavam impossíveis, etc. Em consequência disto começou-se a olhar com alguma suspeição para o saber antigo dos livros. Uma segunda consequência, tão importante quanto esta, foi o facto de se começar a atribuir imenso valor à opinião de







Contratación», em Portugal os «Armazéns da Índia». Eram instituições que faziam a logística: planeavam, administravam, contratavam as tripulações mas também são estas instituições que vão agrupar esta informação. Toda a informação nova, chega e é acumulada lá, é analisada e é usada para preparar as navegações seguintes. No fundo fizeram-se várias coisas mas a mais importante reside na criação destas novas instituições de gestão de informação o que é muito importante na história da Europa isto, a esta escala, é um fenómeno completamente novo. São laboratórios? Não, não são. São instituições de investigação? Não, não são. São casas administrativas que se encarregam da logística, ou seja, ocupam-se de coordenar aspectos práticos ao mesmo tempo que geriam informação. Os relatos das viagens eram todos lidos, analisados, e o que se aprende com cada relato é usado na preparação das expedições seguintes.

**EeM:** Na parte final da exposição, pode ver-se uma enorme lista de nomes. Qual é o simbolismo desta lista? Foi uma homenagem?

**HL:** Sim, foi uma homenagem a toda aquela gente mas, ao mesmo tempo, foi também para que os visitantes se dessem conta de que esteve muita gente envolvida, muita gente que não é conhecida. Eu gostava que no final o visitante fosse confrontado com a seguinte situação: olha conheço aquele e conheço aqueloutro, mas não conheço este, nem aquele ... e esses o que é que terão feito? E todos eles fizeram coisas importantes ...

**EeM:** Ainda na parte final inclui-se o frontispício do *Novum Organum*. Sugere-se assim uma relação entre o novo método científico descrito por Francis Bacon a metodologia adoptada no programa das navegações ibéricas. Qual é exactamente a natureza dessa relação?

**HL:** As navegações forneceram ao programa baconiano algumas práticas metodológicas, algumas maneiras de fazer. Francis Bacon, por exemplo, vai dizer que a ciência deve estar no coração das sociedades. As sociedades desenvolvem-se mais, na medida em que possuam mais técnica e mais ciência. Mas isto mesmo tinha sido experimentado e dito, 100 anos antes, na Península Ibérica. Ele, muitas vezes não faz referência directa aos ibéricos, mas o que se passa é que, naquela altura, em Inglaterra, estava a viver-se aquilo que a Península Ibérica já tinha vivido. A Inglaterra começa a fazer viagens em larga escala na segunda metade do século XVI enquanto nós começamos na segunda metade do séc. XV. Francis Bacon (que é do princípio do séc. XVII) presenciou o tipo de experiência que foi vivido pelos ibéricos. Uma experiência que revelou a necessidade de conhecer Matemática (como dizem vários ingleses:

se os nossos pilotos não souberem Matemática como os espanhóis e os portugueses, nunca seremos capazes de navegar como eles). Os navegadores ingleses quando chegam a uma terra nova experimentam, trazem plantas, acumulam-nas em instituições em Inglaterra, ou seja tudo aquilo que já havíamos visto. Bacon presencia tudo isto. Não é portanto estranho que ele se oriente neste sentido: as sociedades devem estar organizadas em torno da Ciência. Bacon fala de uma *casa do saber* — a casa de Salomão —, uma casa onde deviam estar todos os sábios e isso colhe de forma evidente inspiração nestas instituições: a Casa da Índia e a Casa de Contratación (muitos historiadores defendem esta posição).

**EeM:** De que forma é que nós que iniciámos e liderámos este desenvolvimento acabámos por perder importância.

**HL:** Para responder a essa questão seria necessária outra exposição. Várias pessoas me fizeram essa pergunta: isto é fantástico, extraordinário, tantas coisas que desconhecia, sentimo-nos mesmo bem ao ver estas realizações mas, porque é que, depois, parece que desaparecemos? Eu acho que há várias justificações para esse facto. A primeira é: a ciência «anda» onde está o dinheiro — é uma coisa de gente rica, se há dinheiro há ciência, se não há dinheiro não há ciência. A inversa não é obviamente verdadeira, isto é, pode haver muito dinheiro e nenhuma ciência. Ora, enquanto que no século XVI os países ricos são os da Península Ibérica, no séc. XVII os fluxos monetários deslocam-se todos para o norte da Europa e a ciência do século XVII desloca-se da mesma forma. Não é nenhum acaso que os melhores cientistas do séc. XVII passem a ser ingleses e holandeses correspondendo à grande saúde financeira desses países. Esta é uma primeira razão. Eu acho que há uma segunda. Ao contrário da ciência do século XVI, a ciência do século XVII precisa de escolas. Trata-se de um saber mais sofisticado que necessita de instituições de ensino e aí, surpreendentemente a Península Ibérica falha. Quando são necessárias as instituições de ensino, a história portuguesa, geralmente, não as revela. Portugal tem uma história contínua de um fraco sistema educativo. É uma questão secular, não de agora nem de ontem.

A Espanha é parecida conosco. Ramón y Cajal (prémio Nobel da Medicina) dizia que «a história científica da Espanha consiste numas arrancadas enormes de cavalo e de umas travagens de burro». Olhando para a nossa história, tudo é semelhante.

**EeM:** Na exposição estão destacadas várias frases, uma delas em particular, revelando um grande optimismo: «O que hoje não sabemos, amanhã saberemos» ...



**HL:** Essa frase, do Garcia da Orta, é muito importante, tem muito a ver com a exposição. Tem a ver com uma das coisas mais importantes que os ibéricos oferecem à Europa, que reside numa confiança, na capacidade de saber, de resolver problemas e descobrir coisas novas. Quando acaba o séc. XVI existe na Europa uma espécie de excitação que está precisamente ligada a estas palavras proferidas (em 1563) pelo Garcia da Orta: «O que hoje não sabemos, amanhã saberemos». Este estado de espírito é essencial para se ter ciência. Se duvidamos disto, não se faz ciência.

**EeM:** Mas houve momentos em que a humanidade duvidou desta possibilidade?

**HL:** Sim. Na Grécia Antiga, a ciência desaparece. Na Índia a ciência desaparece. Na China a ciência desaparece. Isto sucede por razões diferentes mas todos viveram hesitações relativamente à possibilidade de conhecer. Na Grécia, por exemplo, e aqui o fenómeno é mais ou menos bem conhecido, os Gregos começaram a desenvolver uma espécie de aversão ao trabalho material, o saber era apenas uma coisa teórica, desligada da realidade. Isto foi fatal para a ciência. Na Índia muitas correntes filosóficas consideram o mundo essencialmente caótico, o que significa que não vale sequer a pena tentar compreender o mundo, dado que o caos não se entende. Se se aceita este facto, nunca se desenvolve apetência pela ciência.

**EeM:** O que o motivou, na concepção desta exposição?

**HL:** Na Gulbenkian pediram-me uma exposição sobre ciência portuguesa no século XVI.

**EeM:** Poderia pensar-se que se trata de um evento destinado a levantar a moral dos portugueses, face ao momento que atravessamos ...

**HL:** Não! Fiquei contente que as pessoas tivessem feito essa associação, mas a ideia original da exposição tem 4 anos. Ainda sem ter ideias concretas disse que gostaria de fazer uma exposição falando da importância das navegações e dos descobrimentos portugueses e espanhóis. E eles disseram: «ótimo!» Entretanto veio a crise e a exposição esteve parada durante um ano porque se chegou a pensar que não haveria dinheiro para a concretizar. Depois decidiu-se levar o projecto adiante mas com um orçamento mais reduzido.

Mas, como já disse, fiquei contente com essa associação. Muitas pessoas saíram dali «oxigenadas» ...

**EeM:** Pudémos ouvi-lo no vídeo de promoção da exposição dizendo «se um visitante não for surpreendido por nada nesta exposição, nós falhámos.» Da nossa observação pareceu, contudo, suceder o contrário, i.e., em boa quantidade os vi-



Henrique Leitão

sitantes pareciam surpreendidos com muita coisa. Justifica-se pois a pergunta: em que é nós (a Sociedade) falhámos?

**HL:** A coisa que mais me perturba é exactamente essa: como é que as pessoas hoje não têm noção destes acontecimentos? Eu acho que enquanto este problema não for resolvido nós nunca teremos uma boa cultura científica. A falta de consciência histórica tem sido desastrosa para as ciências portuguesas. Porquê? ... porque um miúdo pequeno, desde que anda na escola, anda sempre a ouvir dizer, directa ou indirectamente, que os portugueses nunca fizeram nada importante em ciência e que esta não é para nós portugueses. É para os alemães, os ingleses e para os franceses. Nós não. Nós somos bons a «jogar à bola». De mil e uma maneiras esta ideia ressoa dentro dele e a possibilidade de desenvolver uma vocação científica é assim desfeita por uma visão histórica. Uma visão histórica completamente errada. Desta forma, esta ignorância não constitui apenas um problema teórico: «olha que chatice nós não conhecermos bem a nossa história». É muito mais grave: por não conhecermos bem a nossa história estamos a comprometer as gerações actuais — os miúdos não querem ser cientistas.

Nós estamos a começar a atingir os níveis de alfabetização da Europa (95% ou 98% da população) o que se passa, por exemplo, é que em França já é assim há 4 gerações. Ou seja um miúdo que hoje sabe ler, vive numa casa onde os pais têm pouca instrução e onde não existe um livro. Ao passo que um miúdo francês que sabe ler muito provavelmente os seus pais têm cursos superiores, os avós já sabiam ler e os bisavós já tinham livros. Isto é uma enorme diferença.

**EeM:** Muito obrigado!





## EIEM 2013 com neve

ALEXANDRA PINHEIRO

É verdade! Foi pela primeira vez, num ambiente rodeado de neve, clima propiciador para ótimos momentos de discussão e de convívio, que decorreu, no fim de semana de 18 e 19 de Maio de 2013, nas Penhas da Saúde, o Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM), promovido pela Sociedade Portuguesa de Investigadores em Educação Matemática (SPIEM), sobre o tema *Raciocínio Matemático*.

Os estudos e resultados da investigação em educação matemática têm evidenciado que o raciocínio matemático é fundamental, é um alicerce, da aprendizagem matemática. Deve ser uma parte integrante, sistemática e consistente da atividade matemática dos alunos ao longo dos diferentes níveis de ensino. Para compreender e, consequentemente, aprender matemática é necessário que os alunos participem na construção dos significados para as ideias matemáticas e essa construção, para que aconteça, tem de se basear no conhecimento dos alunos e nas suas formas de raciocínio.

Nos programas de matemática do ensino básico e secundário o raciocínio matemático é considerado uma capacidade transversal a qualquer tema matemático. Contudo, a experiência tem mostrado que esta capacidade é complexa de ser desenvolvida em sala de aula.

O Seminário começou com uma evocação a Paulo Abrantes, neste ano em que passam dez anos após a sua morte, proferida de uma forma tão eloquente por Leonor Santos, Presidente da SPIEM. Este momento, para além de provocar saudade para quem conviveu com Paulo Abrantes, foi sobretudo, como disse Leonor Santos, dirigido aos jovens investigadores — que eram um número significativo de participantes. Relembrou o seu vasto e marcante trabalho em educação Matemática reconhecido a nível nacional e internacional. Foi impressionante recordar os diversos projetos liderados e coordenados por Paulo Abrantes e a sua influência na área do desenvolvimento curricular. Por outro lado, focando o tema do encontro, Leonor Santos destacou, segundo a sua interpretação, o que para Paulo Abrantes era o raciocínio matemático: «considerou-o sempre uma capacidade de ordem superior indissociável de uma verdadeira atividade matemática». Por isso, atribuiu sempre tanta importância e preocupação em compreender de que forma é possível desenvolver nos alunos esta capacidade.

Foram realizadas duas sessões plenárias dinamizadas por professores convidados. Na primeira sessão, *Mathematical Reasoning: Conjecturing and Proving in a Dynamic Geometry Environment*, Alessandra Mariotti, da Universidade



de Siena (Itália), focou a complexidade do funcionamento, no sentido da pontencialidade, dos ambientes de geometria dinâmica, com o propósito de discutir as possibilidades didáticas oferecidas pelas diversas ferramentas que lhe estão associadas. Por outro lado, baseando-se na Teoria de Mediação Semiótica, analisou como os significados emergem da modalidade particular do arrastamento, com respeito à noção de conjetura geométrica, e como se relacionam com o significado matemático das premissas, das conclusões e das ligações condicionais entre elas.

No segundo dia, Ana Barbosa, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, realizou a outra conferência plenária, *O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional*, incidindo num estudo, com alunos do 6.º ano de escolaridade, em que procurou compreender o modo como esses alunos resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais. Dos resultados apresentados, salientou que as tarefas que incluem a exploração de padrões em contexto visual proporcionam a existência de várias estratégias de generalização, otenciando, assim, o desenvolvimento de um raciocínio mais flexível. Por outro lado, salientou que dependendo do modo como os alunos olham para um padrão, as abordagens de natureza visual podem conduzir à descoberta de diferentes expressões para o representar.

Durante estes dois dias foram, também, apresentadas comunicações, divididas por três grupos de discussão.

No Grupo de Discussão sobre o Raciocínio em Geometria, dinamizado por Rosa Antónia Ferreira e Isabel Vale, sublinhou-se a importância de discutir o que significa raciocinar em Geometria, o que caracteriza e distingue os vários tipos de raciocínio (geométrico, visual, espacial, etc...), o papel das tarefas e dos recursos tecnológicos no desenvolvimento desses raciocínios e qual o papel do professor na promoção do raciocínio matemático dos alunos.

A discussão em torno do que se entende por raciocinar em Geometria foi intensa, não se chegando a um significado, mas sublinhou-se que envolve a experimentação e a exploração de meios para que se possa investigar as formas e o espaço. Pelo que realçou-se a importância da visualização no raciocínio geométrico. Contudo, nesta sequência, levantaram-se outras questões: o raciocínio visual e o raciocínio espacial são distintos? O raciocínio espacial é potenciador para outros raciocínios? Qual o papel da intuição e da visualização no desenvolvimento do raciocínio em geometria?

Sobre o papel do professor foi salientado a importância de ter uma atitude de mediação, por exemplo, a nível das questões a colocar na discussão das ideias e na escolha das tarefas. Referiu-se, ainda, a necessidade de estar prepara-

do para contextos emergentes da discussão ou da atividade dos alunos.

No Grupo de Discussão sobre Raciocínio em Números e Álgebra coordenado por Manuel Saraiva e Maria Cecília Costa, o tema foi discutido em termos teóricos, focando a prática profissional do professor de Matemática e o desenvolvimento curricular. Foram levantadas questões sobre os raciocínios colocados em movimento na sala de aula: raciocínio multiplicativo, raciocínio funcional, raciocínio matemático criativo, raciocínio imitativo, raciocínio dedutivo, raciocínio indutivo, raciocínio abdutivo e raciocínio algébrico. Foi também levantada a questão, sobre o significado de raciocínio matemático e pensamento matemático.

Neste Grupo realçaram, ainda, que relacionar o raciocínio com as representações e a significação [processo pelo qual o indivíduo estabelece relações entre aspetos do seu conhecimento para desenvolver a compreensão de uma situação, contexto ou conceito] é essencial para desenvolver o raciocínio dos alunos e que a generalização e a justificação são processos centrais do raciocínio matemático.

No Grupo de Discussão sobre Raciocínio e Demonstração, coordenado por António Domingos e Margarida Rodrigues, foi discutido em termos teóricos, históricos e de ensino e aprendizagem, desde o 5.º ano de escolaridade até ao ensino superior: a demonstração; a complexidade do pensamento matemático; e, pensamento matemático, foi dada, também, uma atenção especial a questões de natureza didática, tais como: Que dificuldades manifestam os alunos na mobilização de raciocínio dedutivo ao nível da construção de demonstrações? Como se processa a mobilização, pelos alunos, de diferentes tipos de raciocínio e como se articulam? Quais as implicações do uso de inteligências múltiplas na aula de Matemática? Podemos aferir a qualidade das aprendizagens a partir dos raciocínios apresentados pelos alunos? De que forma é que o raciocínio mobilizado pelo professor potencia os raciocínios dos alunos?

Para terminar, as tarefas foram uma temática comum nos Grupos de Discussão e nas Conferências Plenárias. Foi focado o papel fundamental das tarefas no desenvolvimento do raciocínio matemático, em que se destacaram aspetos relacionados com a importância de se conceber tarefas adequadas ao desenvolvimento desta capacidade transversal, nomeadamente a nível do tipo de questões que integram essas tarefas. Realmente, é muito importante a discussão sobre as tarefas. É exatamente as Tarefas Matemáticas o tema do EIEM 2014, que decorrerá em Setúbal. Promete! Até ao próximo ano!

ALEXANDRA PINHEIRO



O concurso apresentado aos participantes no ProfMat2013 consistiu na resolução do problema «Cinco Placas de Titânio»:

*Temos cinco pequenas placas de uma liga de titânio, etiquetadas com as letras A, B, C, D e E. São aparentemente iguais, mas uma delas pesa menos um grama e outra pesa mais um grama que as três restantes.*

*Usando uma balança de dois pratos, qual é o mínimo de pesagens necessárias para identificar sempre a mais pesada e a mais leve?*

Recebemos dez respostas, das quais oito corretas, uma errada e outra incompreensível.

As resoluções certas mostraram que serão precisas três pesagens. Duas vias foram seguidas.

Primeiro processo: Na 1ª pesagem, pôr uma placa em cada prato.

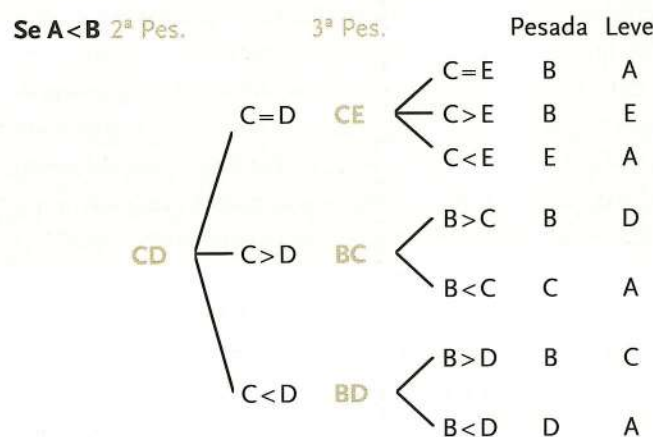
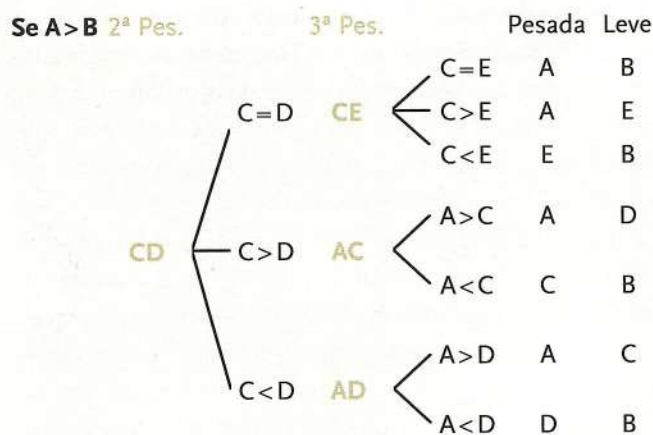
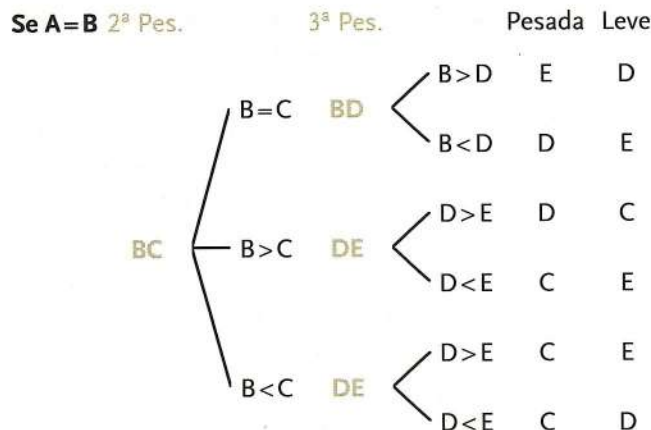
Segundo processo: Na 1ª pesagem, pôr duas placas em cada prato.

A resolução do Francisco Aranda, que segue o primeiro processo, está organizada de forma sistemática e é fácil de acompanhar. Vejamos então o que fez.

Note-se que, quando se coloca uma placa em cada prato (por ex., A e B) as conclusões a tirar são:

- Se  $A = B$ , então A e B são placas normais.
- Se  $A > B$ , três casos possíveis: (A pesada, B normal) ou (A pesada, B leve) ou (A normal, B leve)
- Se  $A < B$ , três casos possíveis: (A leve, B normal) ou (A leve, B pesada) ou (A normal, B pesada).

1ª Pesagem: **AB**.



**Lista de Participantes**

*Individuais:* Catarina Isabel Ferreira, Eric Flores Medrano, Fausto Barros da Silva, Francisco Aranda, José Artur Pinto, José Luis Huitrado, Patrícia Sampaio, e ainda o Sócio n.º 2640.

*Em equipa:* Célia Silvestre, Fernanda Menina & Sandra Guerreiro; Ilca Cruz, Isabel Santos, Liliana Amado & Fernanda Santos.

**Premiados e Prémios**

- 1.º (Unidade TI-Nspire Cx, oferta Texas Instruments)  
Francisco Aranda
- 2.º (Livro «Matemática Elementar de um ponto de Vista Superior» de Felix Klein + 1 jogo Ouri)  
José Luis Huitrado
- 3.º (1 jogo Ouri + 1 jogo Hex)  
Célia Silvestre, Fernanda Menina & Sandra Guerreiro

*Nota:* Os prémios devem ser levantados até 31 de Dezembro de 2013. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt ou 217163690).



# O ensino da Matemática em Singapura

JAIME CARVALHO E SILVA

Singapura é um pequeno País, independente desde 1963, com cerca de 5 milhões de habitantes. Está situado no extremo Sul da Península da Malásia, muito perto da Indonésia, com uma área de 713 km<sup>2</sup>, espalhado por 63 ilhas. Singapura é o segundo país com mais alta densidade demográfica do mundo, e um dos mais desenvolvidos do mundo: é o quarto principal centro financeiro do mundo, o terceiro maior centro de refinação de petróleo do mundo e o porto de Singapura é um dos cinco portos mais movimentados do mundo.

Singapura tem um grande desenvolvimento industrial e comercial, oferecendo atrações únicas: a roda gigante *Singapore Flyer*, com 165m de altura, é a mais alta do mundo, o jardim botânico *Gardens by the Bay* tem uma desenho fu-

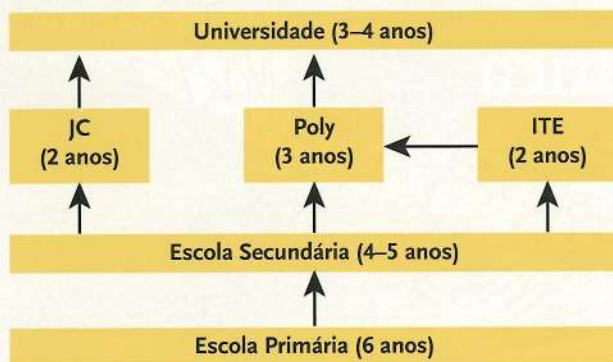
turista oferecendo as famosas Super Árvores de metal com 25m a 50m de altura e uma cascata artificial de 35m.

Singapura rege-se por características únicas no mundo atendendo à sua diversidade cultural. Tem 11 feriados oficiais na sua maioria associados a diferentes religiões: o Ano Novo Chinês, um feriado Budista, dois feriados Muçulmanos, um feriado Hindu e dois feriados Cristãos (a Sexta-Feira Santa e o Dia de Natal). Singapura tem quatro línguas oficiais: Inglês (Singapura é uma antiga colônia Britânica e faz parte da *Commonwealth*), Malaio, Chinês e Tamil. A língua principal de ensino é o Inglês, mas os alunos estudam também a sua língua nativa.

O ensino obrigatório é apenas o Ensino Primário que tem 6 anos, dividido em 2 ciclos. Os 4 primeiros anos são comuns a todos os alunos e os dois anos seguintes são divididos em dois grupos conforme o desempenho dos alunos. No fim do Ensino Primário há um exame nacional, o PSLE (*Primary School Leaving Examination*). Em função do seu desempenho neste exame os alunos são colocados em 3 tipos de Escolas Secundárias, havendo uma liberdade limitada de escolha por parte dos Pais dos alunos. Existem pontes entre as diferentes vias, podendo os alunos transitar sob certas condições. Apesar de não ser obrigatório, quase

Some rights reserved by travelourplanet.com





todos os alunos completam alguma via do Ensino Secundário. O Ensino Secundário tem uma duração de 4 ou 5 anos e é seguido por várias vias que podem durar 1 a 5 anos; umas dão acesso ao Ensino Superior após um exame nacional final, outras podem dar acesso ao Ensino Superior com um exame nacional intermédio e outro final e outras desembocam diretamente no mercado de trabalho.

A visão oficial do Ministério de Educação de Singapura é expressa pela fórmula: «Thinking Schools, Learning Nation» (Escola Pensante, Nação que aprende) e pretende traduzir o objetivo de preparar uma geração de cidadãos pensantes e empenhados que sejam capazes de contribuir para o contínuo crescimento e prosperidade de Singapura.

Os programas oficiais de Singapura iniciam-se no Pré-Escolar porque os estudos existentes provam que experiências de qualidade nos anos do pré-escolar revelaram ter influência no desempenho posterior das crianças. Os programas baseiam-se no princípio de que as crianças são estudantes curiosos, ativos e competentes e os professores são facilitadores da aprendizagem das crianças. Os professores devem alimentar o desenvolvimento harmonioso das crianças organizando o espaço de aprendizagem e desenhando experiências de aprendizagem apropriadas de modo que as crianças aprendam o necessário conhecimento, capacidades e hábitos.

Os atuais programas do Ensino Primário começaram a ser aplicados em 2007 e está prevista a entrada de novos programas em 2013, começando sequencialmente pelo primeiro ano de escolaridade. Os programas enfatizam a compreensão dos conceitos, as capacidades procedimentais e as capacidades de pensamento no ensino e aprendizagem da Matemática. Estas componentes são consideradas partes integrais do desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. O raciocínio, as aplicações e o uso de tecnologia também são incentivados. O programa considera que os avanços da tecnologia mudaram o modo como se ensina e aprende matemática: o computador e a calculadora de bolso, por exemplo, oferecem um grande potencial

para melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática.

O programa determina que os estudantes devem ter oportunidades de descobrir, raciocinar e comunicar matemática; para isso o ensino deve incorporar metodologias baseadas nas atividades e centradas no estudante.

Segundo o programa oficial a resolução de problemas de matemática está no centro da aprendizagem da matemática. O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas está dependente de cinco componentes inter-relacionadas: Conceitos, Procedimentos, Processos (raciocínio, comunicação e conexões, hábitos de pensamento e heurísticas, aplicações e modelação), Atitudes e Metacognição («pensar sobre o pensar»).

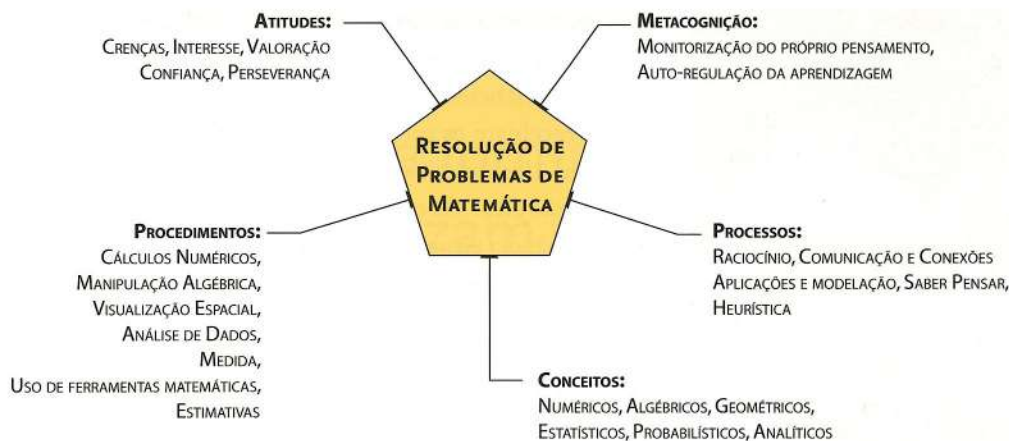
Na secção sobre as heurísticas refere-se que se deve usar um modelo de resolução de problemas como o de Polya; indica-se ainda que se devem usar heurísticas como desenhar um diagrama, tabelar, tentar e verificar, andar para trás, simplificar o problema ou considerar casos particulares.

Neste programa as calculadoras são obrigatoriamente introduzidas no 5.º ano de escolaridade e têm como objetivo conseguir um melhor equilíbrio entre a ênfase nos procedimentos computacionais e as capacidades de resolução de problemas, ajudando a incluir no ensino investigações e resolução de problemas em situações autênticas e ajudando os alunos a desenvolver maior confiança na sua capacidade de fazer matemática. O programa inclui os temas clássicos de aritmética, geometria e organização e tratamento de dados, a um nível mais elementar do que estamos habituados em Portugal. As frações são introduzidas no 2.º ano de escolaridade como «partes de um todo» mas nunca até ao 5.º ano são usadas frações com denominador superior a 12. No 5.º ano começam a ser usadas frações com denominador superior a 12 com o uso da calculadora. Há capítulos específicos para o cálculo mental, para a descoberta e elaboração de padrões geométricos; há itens para padrões numéricos, estimativas e verificação da razoabilidade das respostas.

O programa estabelece como um dos seus objetivos a criação de gosto pela Matemática. Podemos ler: «A Matemática é também um tema de prazer e emoção, que oferece aos estudantes oportunidades para trabalho criativo e momentos de ilustração e alegria. Quando as ideias são descobertas e as compreensões interiorizadas, os estudantes são estimulados a buscar matemática para além das paredes da escola.»

No fim do Ensino Primário os alunos têm de fazer o exame nacional PSLE, que inclui várias disciplinas: Inglês, Língua Materna, Matemática e Ciências. O exame de Matemática tem duas partes: uma parte de 50m com 15 questões de





escolha múltipla e 15 questões de resposta curta; uma segunda parte com 1h 40m com 5 questões de resposta curta e 13 questões de resposta estruturada/longa. Na primeira parte não é permitido o uso de calculadora; na segunda parte é obrigatório o uso de calculadora científica.

O programa para o Ensino Secundário (7.º ao 10.º ano) obedece a princípios semelhantes aos enunciados atrás e começa no 7.º ano com o estudo dos Números e Álgebra, incluindo números primos, fatores e múltiplos, cálculos com a calculadora, aproximações, arredondamentos e estimativas, razões e proporções, percentagens, velocidades, manipulação algébrica, funções e gráficos, equações e inequações. A Geometria e Medida inclui o estudo de ângulos, triângulos e polígonos, áreas e volumes. Há ainda um capítulo de Organização e Tratamento de Dados com a construção e interpretação de diagramas estatísticos.

Estes tópicos são desenvolvidos nos anos seguintes, sempre numa perspetiva de perceber/utilizar/interpretar, com poucas demonstrações. Aparecem capítulos novos como os relativos a Matrizes e Vetores em duas dimensões. Um dos capítulos mais diferentes do que estamos habituados intitula-se «Aplicação da matemática em situações práticas» e inclui problemas de tipo financeiro e interpretação de tabelas e gráficos em situações práticas. No final do 10.º ano os alunos que não estejam em programas integrados (estes entram diretamente no 11.º ano) devem fazer um exame com duas partes (uma de 2h e outra de 2h 30m) onde é permitido o uso de calculadoras científicas. Este exame determina que tipo de instituição o estudante pode frequentar a seguir.

No ensino pré-universitário (11.º e 12.º anos) os programas são definidos pelo enquadramento do exame, que é diferente conforme os cursos que o estudante pretende sejam de economia e ciências sociais, ou de ciências e tecnologia. Neste último caso o programa inclui funções e gráficos (é

permitido o uso de calculadora gráfica), sucessões e séries numéricas, derivadas, integrais, análise combinatória, equações diferenciais e modelos matemáticos. O exame tem a duração de 3h e inclui 8 questões de diferentes dimensões.

O panorama escolar de Singapura é muito variado e existem muitas vias que não vou poder referir. Anoto apenas que algumas escolas oferecem a possibilidade de realizar o exame internacional conhecido como *International Baccalaureate*.

O currículo de Singapura está focado em 4 áreas principais mas não esquece outras áreas importantes para a formação de um futuro cidadão, seja a educação para a saúde, seja a educação física seja a orientação vocacional. Uma das atividades incluídas no currículo é o *Trabalho de Projeto*, definido como «uma experiência de aprendizagem que pretende fornecer aos estudantes a oportunidade de sintetizar o conhecimento de várias áreas da aprendizagem, e criticamente e criativamente aplicá-la a situações da vida real.»

Em 1992 a *resolução de problemas* tornou-se o objetivo principal do curriculum oficial de Matemática em Singapura. Não foi o primeiro País a tomar tal decisão mas hoje é difícil encontrar um País onde a resolução de problemas não desempenhe um papel de relevo no ensino da Matemática. O curriculum oficial foi já revisto em 2001, 2007 e 2013 mas a resolução de problemas manteve-se sempre como o objetivo central do currículo de matemática.

Ao longo dos anos os investigadores em educação matemática de Singapura têm produzido investigação que tem ajudado a evolução do currículo. A investigação está essencialmente centralizada no NIE (*National Institute of Education*), que faz parte de uma das seis universidades de Singapura. Esta instituição é também a instituição encarregue da formação inicial e contínua de professores.

O sistema educativo de Singapura tem estado em evidência desde que há estudos internacionais, pois tem esta-





Some rights reserved by luca sartori

do sempre nos primeiros lugares. No estudo do TIMSS de 2011 estava em primeiro lugar em Matemática no 4.º ano e em 2.º lugar no 8.º ano; em Ciências estava em segundo lugar no 4.º ano e em 1.º lugar no 8.º ano. No estudo PISA de 2009 Singapura estava em 6.º lugar em leitura, 2.º lugar em matemática e 4.º lugar em ciências.

Por isso o currículo de Singapura tem sido objeto de estudo aturado, tendo mesmo algumas regiões nos Estados Unidos adotado esse currículo (ou pelo menos uma parte).

Os bons resultados são em parte devidos a diferenças culturais entre os países do Ocidente e do Oriente; na realidade apenas entre o Ocidente e os países orientais de tradição Confuciana, pois países como a Indonésia (38.º no TIMSS 2011 de Matemática 8.º ano) ou a Tailândia (28.º no TIMSS 2011 de Matemática 8.º ano) estão muito abaixo da média do estudo. Nos países onde os ensinamentos de Confúcio deixaram raízes, as famílias encaram o conhecimento de outro modo, havendo por exemplo muitos jogos tradicionais de raciocínio, que envolvem miúdos e graúdos.

Não se pense com tudo isto que o currículo de Singapura e os resultados internacionais satisfazem totalmente os responsáveis de Singapura. Podemos entrever algumas dificuldades com os comentários contidos na introdução ao novo currículo de 2013. Nesse documento existe um apelo a uma maior integração da avaliação e da instrução. Aparece um novo capítulo intitulado «Experiências de Aprendizagem» onde se defende que o modo como os estudantes aprendem é importante e tentam influenciar os professores de modo que estes propiciem aos estudantes experiências de aprendizagem cuidadosamente preparadas, de modo a que os estudantes sejam encorajados a descobrir por si resultados matemáticos.

Também observo que os professores universitários não estarão totalmente satisfeitos com o panorama que se lhes

oferece. Num congresso do ICMI em Singapura, em que tive oportunidade de participar, alguém questionou uns colegas matemáticos de Singapura que eles tinham muita sorte pois recebiam os melhores alunos do mundo no ensino superior. Um dos visados respondeu: «Melhores alunos? Onde estão eles? Os que eu recebo estão mal preparados!» A discrepância entre as expectativas do ensino superior e o desempenho real dos alunos no final do secundário é universal (e aqui se pode recordar o trabalho clássico de Miguel de Guzmán, Bernard Hodgson e outros). Mas esse é um tema para outro trabalho.

#### REFERÊNCIAS

- Frederick K.S. Leung, Klaus-D. Graf and Francis J. Lopez-Real (eds) (2006), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions — A Comparative Study of East Asia and the West: The 13th ICMI Study*, Springer.
- Miguel de Guzmán, Bernard R. Hodgson, Aline Robert and Vinicio Villani (1998), *Difficulties in the Passage from Secondary to Tertiary Education* Doc.Math.J.DMV Extra Volume ICM III, 747–762.
- Ministry of Education (2011), *Education in Singapore: Findings from international benchmarking studies*, Singapore.
- Ministry of Education (2012), *Nurturing early learners — A curriculum framework for Kindergartens in Singapore*, Singapore. <http://www.ecda.gov.sg/>
- Ministry of Education (2012), *Education in Singapore — MOE corporate brochure*, Singapore. <http://www.moe.gov.sg/>
- Ministry of Education, NIE, AME (2012), *Mathematics Education in Singapore*, Singapore.
- Ministry of Education (2006), *Mathematics Syllabus Primary*, Singapore. <http://www.moe.gov.sg/>
- Ministry of Education (2006), *Secondary Mathematics Syllabuses*, Singapore. <http://www.moe.gov.sg/>
- Ministry of Education (2013), *MATHEMATICS HIGHER 1 (Syllabus 8864)*, Singapore. <http://www.seab.gov.sg/>
- Ministry of Education (2013), *MATHEMATICS HIGHER 3 (Syllabus 9824)*, Singapore. <http://www.seab.gov.sg/>
- Ministry of Education (2012), *Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus*, Singapore. <http://www.moe.gov.sg/>
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., and Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Chestnut Hill, MA: Boston College, TIMSS and PIRLS International Study Center. <http://timssandpirls.bc.edu/>
- Singapore, Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/Singapore>

JAIME CARVALHO E SILVA

DEP. DE MATEMÁTICA/CMUC, UNIVERSIDADE DE COIMBRA



# O Navigator e a forma como os alunos de 10.º ano utilizam a calculadora gráfica

VANDA ROSA • ANTÓNIO DOMINGOS

A utilização da calculadora gráfica no ensino secundário, em Portugal, é uma realidade desde a década de 90, do século passado.

Poucos estudos têm sido feitos sobre a utilização desta ferramenta e o desenvolvimento do pensamento matemático. A prática profissional quotidiana mostra-nos que se vai construindo conhecimento e melhorando a efetiva utilização das calculadoras, independentemente da formação especializada que os docentes venham a frequentar. A calculadora na sala de aula tem vindo a constituir-se numa preocupação constante associada a um entusiasmo em fazer deste instrumento uma ferramenta que facilite e rentabilize o processo de ensino e aprendizagem.

Se atendermos a que nos últimos anos surgiram no mercado modelos diferentes de calculadoras gráficas, com novas potencialidades, considera-se que é pertinente fazer estudos sobre os benefícios que estas novas máquinas podem trazer para a aprendizagem da Matemática. Para tal, é necessário conhecermos melhor a forma como lidam os alunos com as potencialidades da calculadora, que uso lhe dão, que esquemas desenvolvem com vista a executar uma determinada tarefa e qual a qualidade das aprendizagens realizadas.

Neste artigo damos conta de alguns resultados de um estudo realizado com recurso à calculadora gráfica TI-Inspire apoiada pelo sistema TI\_Navigator que permitiu gravar, em vídeo, os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de um conjunto de tarefas. A Texas lançou um sistema de rede sem fios — TI-Navigator — (Figura 1) formado por um *software* próprio que se instala num computador, um *router* e adaptadores *wireless* que se encaixam nas calculadoras dos alunos.

Este sistema possibilita a professores e alunos trabalharem num ambiente comum partilhado, permitindo assim acompanhar e avaliar melhor o progresso dos alunos. É pos-

sível visualizar no computador do professor os ecrãs das unidades portáteis dos alunos e verificar o desempenho de um aluno em particular ou da turma em geral. Os alunos podem mostrar os seus trabalhos ou passos da resolução de um problema projetando o ecrã da sua máquina para a turma. É possível fazer uma avaliação dos conhecimentos dos alunos, em qualquer momento da aula, enviando para as calculadoras destes perguntas de resposta aberta ou de escolha múltipla. O professor pode guardar, no computador ou na calculadora, as resoluções dos alunos, sob a forma de vídeos ou numa base de dados própria criada pelo *software*. Estamos perante uma tecnologia avançada que poderá rentabilizar muito mais as aulas e melhorar a aprendizagem, mas, de momento, as escolas ainda tardam em possuir este equipamento o que torna difícil a sua utilização generalizada.

Como referido acima, pretende-se apresentar alguns resultados de uma investigação que teve por base a realização de tarefas diversificadas com recurso à calculadora ligada a uma rede sem fios do TI\_Navigator. Visto este sistema possibilitar a gravação em vídeo dos ecrãs das calculadoras



Figura 1. Sistema TI\_Navigator



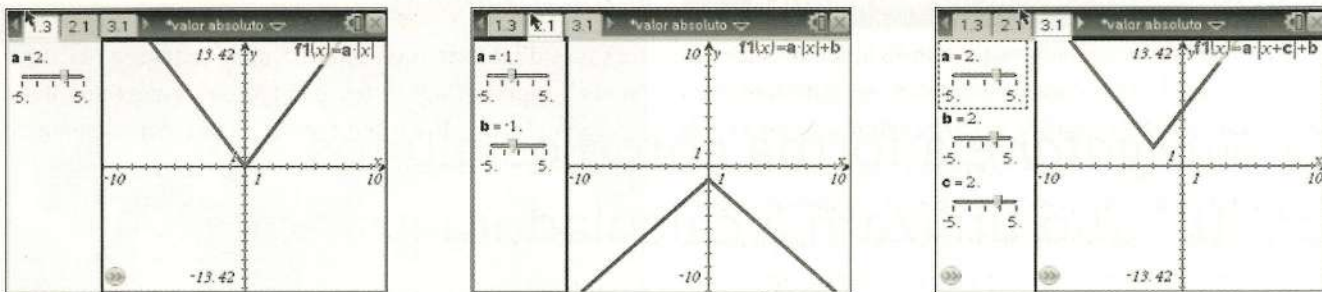


Figura 2. Documento da tarefa: Transformações da função módulo

dos alunos, considerou-se que seria uma ferramenta fundamental para a concretização do estudo. Todos os procedimentos realizados pelos alunos com a calculadora gráfica foram gravados em vídeo, pelo próprio sistema. Como só é possível gravar a atividade de um aluno de cada vez, as tarefas foram resolvidas em aulas diferentes, assumindo a sua realização um carácter de entrevista semiestruturada. A metodologia usada no estudo é de natureza qualitativa, configurando um estudo de caso (Rosa, 2013).

O estudo incidia na aprendizagem das funções, no 10.º ano de escolaridade e envolvia quatro tarefas diversificadas e dirigidas para o uso da calculadora gráfica. As duas tarefas aqui analisadas procuram evidenciar o papel desempenhado pela tecnologia em uso e os seus objetivos eram os que a seguir se descrevem. Uma tarefa centrava-se nas transformações da função módulo. Passou-se para as calculadoras dos alunos um documento dinâmico que permitia analisar, em páginas diferentes, os gráficos de três famílias de funções:  $f_1(x) = a|x|$ ;  $f_2(x) = a|x + b|$  e  $f_3(x) = a|x + c| + b$  (Figura 2). Com o cursor os alunos variaram o valor dos parâmetros a fim de perceberem a sua influência.

A outra tarefa envolvia questões diversas sobre funções (ver anexo). Adaptou-se um problema apresentado pelo GAVE em 2010 (itens de preparação para o teste intermédio). Criou-se um documento dinâmico para a calculadora (em substituição da figura da versão original) que foi passado para as calculadoras dos alunos (Figura 3).

Todas as questões dependiam das coordenadas de um ponto móvel  $P$ , como tal, os alunos exploravam o documento movimentando o ponto e depois efectuavam a resolução analítica, utilizando o parâmetro « $a$ » como abcissa do ponto.

Após uma análise pormenorizada dos vídeos, constatou-se que as tarefas foram bastante facilitadas pela apresentação dos documentos dinâmicos. Foi a primeira vez que os alunos resolveram tarefas com a ajuda de uma aplicação dinâmica nas suas calculadoras. Trabalharam no próprio documento, pois criaram páginas novas para efectuar

cálculos ou para visualizar gráficos e em qualquer página abriam a linha de entrada das funções para introduzir uma nova. Os documentos dinâmicos fornecidos aos alunos foram artefactos usados de forma integrada para potenciar a aprendizagem — sistemas de artefactos (Rabardel, 1995).

Constatou-se que os alunos com a calculadora tiravam conclusões sobre o estudo das funções, demonstrando uma compreensão acrescida, nomeadamente associada à variação dos parâmetros. Dificilmente resolveriam algumas das tarefas propostas sem a calculadora gráfica, como por exemplo, a determinação de  $a$ ,  $b$  e  $c$  de modo a que  $a|x + b| + c > 0 \Leftrightarrow x \in ]2, 4[$ . A utilização do documento em que era possível conhecer o gráfico de  $y = a|x + b| + c$  variando os parâmetros, foi suficiente para os alunos obterem o resultado pedido. Por outro lado, quando resolverem qualquer inequação terão consciência de que não se trata de um exercício meramente de cálculo, mas associado a uma função e à sua representação gráfica.

Foi interessante constatar que os alunos se aperceberam de que a segunda tarefa não era de fácil resolução, no entanto, foram resolvendo as álgebras e, quando terminaram, sentiram satisfação e entusiasmo. O Rui pediu para levar a ficha para casa e a Joana quando resolveu a última questão disse «Oh, já acabou? Posso ficar com o documento na calculadora?». O Pedro quando chegou ao fim disse: «Achava que não ia conseguir resolver esta ficha.» Perante estes factos, partilha-se a opinião de Stein & Smith (1998) quando referem que as tarefas apresentadas para estimular o pen-

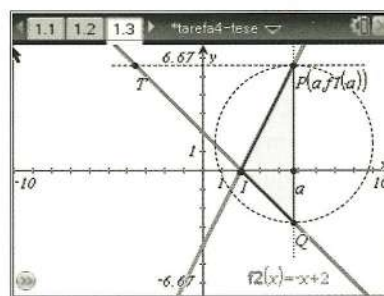


Figura 3. Documento da tarefa: Estudo de funções



samento dos alunos em níveis elevados de exigência cognitiva mudam drasticamente de natureza quando os alunos trabalham realmente sobre elas. Nesta segunda tarefa, os alunos tiveram oportunidade de trabalhar num nível cognitivo elevado, de uma forma incentivadora, que se traduziu em ganhos na aprendizagem. A utilização sistemática e diversificada de documentos dinâmicos na sala de aula, tornam a interação entre os alunos e a calculadora mais rica, dando origem a uma aprendizagem mais profunda, aperfeiçoando os esquemas de compreensão algébrica. Se a tarefa for bem conduzida e com um bom documento de apoio gráfico, o aluno vai melhorando o conhecimento matemático, para além do esperado, desenvolvendo um sentido de satisfação pessoal e confiança nas suas capacidades.

Parece-nos assim que o uso integrado da tecnologia onde as diferentes representações dos conceitos estão efetiva-

mente presentes e onde é possível fazer uma tradução entre essas diferentes representações, se configura num ambiente de aprendizagem rico, que apresenta elevados níveis de exigência cognitiva e que conduz ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

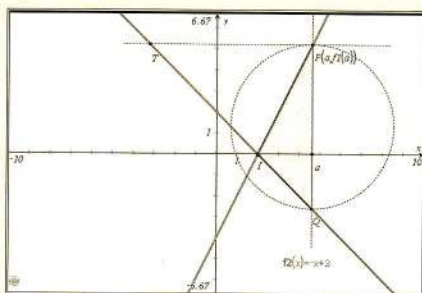
### Referências bibliográficas

- Rabardel, P. (1995), *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Rosa, V. (2013), *A utilização da calculadora gráfica no estudo de funções do 10.º ano*. Tese de mestrado. Monte da Caparica: Universidade Nova de Lisboa.
- Stein, M & Smith, M. (1998), Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão. *Educação e Matemática* n.º 105.

## Anexo

### Estudo de Funções

Na figura, estão representadas, num referencial o.n.  $xOy$ , as retas de equações  $y=2x-4$  e  $y=-x+2$ . Estas duas retas intersectam-se no ponto I.



Um ponto P desloca-se sobre a reta  $r$  e um ponto Q desloca-se sobre a reta  $s$ , acompanhando o movimento do ponto P, de forma que P e Q tenham sempre abcissas iguais. Designemos por  $a$  a abcissa do ponto P.

- 1.1. Para  $a=4$ , determine:
  - 1.1.1. As coordenadas de P e de Q.
  - 1.1.2. A distância de P a Q.
- 1.2. Considere  $a$  a abcissa de P.
  - 1.2.1. Determine, em, função de  $a$ , as coordenadas de P e de Q.
  - 1.2.2. Mostre que a distância de P a Q é dada, em função de  $a$ , por  $d(a) = |3a-6|$ .

- 1.3. Criando uma nova página na calculadora, represente graficamente a função  $d$  e explique o significado do seu zero no contexto do problema.
- 1.4. Determine o valor positivo de  $a$ , para o qual se tem  $\overline{PQ} = 3$ .
- 1.5. Determine os valores de  $a$  para os quais o perímetro da circunferência de diâmetro  $[PQ]$  é igual a  $12\pi$ .
- 1.6. Determine as coordenadas do ponto I.
- 1.7. Determine uma expressão que defina a área  $A$  do triângulo  $[PQI]$ , em função de  $a$ , ( $a > 2$ ).
- 1.8. Considere um outro ponto, T, que se desloca sobre a reta  $s$ , acompanhando também o movimento do ponto P, de forma que P e T tenham sempre ordenadas iguais.
  - 1.8.1. Se as coordenadas de P forem  $(4,4)$ , quais serão as coordenadas de T?
  - 1.8.2. Exprima as coordenadas do ponto T, em função de  $a$ .

Adaptado de «Matemática A – Itens 10.º ano de escolaridade. GAVE-2010.

**VANDA ROSA**

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE ALMEIRIM

**ANTÓNIO DOMINGOS**

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNL

TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

António Domingos

MAIO :: JUNHO

#123

39





## As voltas que o currículo dá — recordando Paulo Abrantes

Recordar Paulo Abrantes é lembrar o seu envolvimento na organização do 1.º ProfMat em 1985 e todo o seu trabalho e empenho no desenvolvimento da APM, mas também o seu envolvimento na inovação e melhoria do ensino da Matemática. O Paulo está ligado a muitas iniciativas na APM e fora dela, onde os aspetos curriculares estão quase sempre presentes, quer seja especificamente o currículo de Matemática quer na sua aceção mais ampla.

É no âmbito curricular que se insere a investigação que realizou para a obtenção do seu doutoramento em Didática da Matemática, tendo por base a implementação de um currículo experimental ao nível do 3.º ciclo do ensino básico — Mat<sub>789</sub><sup>1</sup>. Este projeto, que desenvolveu com um conjunto de colegas, maioritariamente professoras do 3.º ciclo, assumia um conjunto de princípios ou «ideias iniciais» como a de que a aprendizagem da Matemática deve constituir uma experiência rica e estimulante, valorizando os aspetos afetivos e pessoais (e não apenas cognitivos), considerando que a aprendizagem da Matemática deve ter valor próprio

na altura em que se desenvolve e não ser entendida como uma preparação para o futuro, como à época era referido. O Mat<sub>789</sub> valorizava a resolução de problemas e as aplicações da matemática, preconizando a utilização de meios tecnológicos como a calculadora e o computador.

Para Paulo Abrantes a matemática constituía um património cultural da humanidade e um modo de pensar. Sendo assim, era, para ele, impensável que não se proporcionasse a todos os alunos uma aprendizagem da matemática de modo significativo e que fizesse sentido no momento em que a estavam a aprender. Daí a preocupação que tinha com a forma como os alunos aprendem, que está claramente expressa no livro *A Matemática na Educação Básica*<sup>2</sup>, que escrevemos em conjunto com a Isolina Oliveira, mas que teve contributos de vários outros colegas que conosco discutiram os diferentes capítulos.

A ideia que o aluno é um recipiente que vai acumulando conhecimento e que a função do professor é a de transmitir corretamente essa informação, que parece voltar a



estar presente nos atuais documentos curriculares, era rejeitada por ele. Pelo contrário, o Paulo procurava concretizar os contributos da investigação em educação matemática, nomeadamente quando afirmava que para haver uma apropriação de novas ideias e novos conhecimentos não basta que o aluno participe em atividades concretas, é preciso que se envolva num processo de reflexão sobre essas atividades. Uma outra sua ideia, contrária a uma que volta a estar em voga (que primeiro aprendem-se as rotinas e procedimentos e depois aplicam-se na resolução de problemas), era que «não é por fazer muitas contas que os alunos aprendem a identificar quais as operações que fazem sentido numa situação nova» (p. 25), ou ainda «não é por fazer muitos exercícios repetitivos que os alunos adquirem a capacidade de resolver problemas» (p. 25). Isto não significava uma desvalorização das rotinas e procedimentos em Matemática, mas sim que estes não podem estar separados dos da compreensão, afirmando-se ainda no referido livro que:

A ausência de elementos de compreensão, raciocínio e resolução de problemas nas atividades dos alunos, pode mesmo ser responsável por grande parte das dificuldades que muitos sentem em realizar procedimentos aparentemente simples. Quando um aluno realiza uma tarefa matemática de forma mecânica e sem lhe atribuir qualquer sentido, é muito provável que ele seja incapaz de reconstituir aquilo que parecia saber fazer perante uma situação que apresenta alguma diferença (mesmo que ligeira) ou que esteja colocada num contexto diferente (ainda que familiar) (p. 25).

O papel do rigor e do formalismo em Matemática mereceu também a sua atenção. Era sua convicção que, à medida que os alunos progredem na educação básica, o modo como as suas afirmações são formuladas e justificadas, no contexto da atividade matemática, devem ser progressivamente mais precisas. Mas o rigor e o formalismo devem corresponder a «uma necessidade sentida e não a uma imposição arbitrária». Assim, considerava essencial a introdução de tarefas que implicassem a comunicação matemática e o seu desenvolvimento tanto escrito como oral para que a linguagem se fosse progressivamente tornando mais rigorosa.

O raciocínio era uma outra capacidade que Paulo Abrantes muito valorizava. Para ele, os raciocínios informal e intuitivo deviam ser privilegiados nos primeiros anos e sempre que um conceito se alargasse, ajudando os alunos a atribuir significado à matemática. Considerava ainda que os alunos na educação básica deviam compreender as noções de conjectura e de teorema e distingui-las e ainda compreender o que é uma demonstração. Já lhe parecia menos razoável que os alunos deste nível «compreendam com alguma profundidade o carácter axiomático da matemática» (p. 36).

Relativamente à aprendizagem da geometria considerava-a um tema central no currículo do ensino básico, referindo, nomeadamente, a importância de «desenvolver as capacidades de visualização espacial e de verbalização, a intuição e a utilização destas na resolução de problemas» (p. 67).

Para terminar, não posso deixar de referir, quando se justifica a revogação do Programa do Ensino Básico, homologado em 2007, por não ser suficientemente prescritivo<sup>3</sup> e por isso poder dar lugar a diferentes interpretações pelos professores, o empenhamento, do Paulo Abrantes no projeto Gestão Flexível do Currículo do Ensino Básico. Este projeto, iniciado em 1997/98, foi entusiasticamente acolhido por ele quando assumiu o cargo de Diretor do Departamento de Educação Básica em 1998. No que se refere ao currículo de Matemática, uma das preocupações centrais deste projeto era deixar espaço para que os professores e as escolas pudessem, para além daquilo que era essencial todos os alunos adquirirem como formação matemática, fazer adaptações do currículo ao meio local onde a escola se inseria e aos alunos concretos que a frequentavam.

A concluir, parece-me poder afirmar que o percurso percorrido, no que se refere ao currículo de Matemática para o ensino básico desde os anos 80, e para o qual Paulo Abrantes deu um grande contributo, conduziu indiscutivelmente a melhores aprendizagens em Matemática dos nossos alunos, como o revelam uma melhoria significativa no sucesso escolar confirmada nos resultados dos alunos portugueses nas avaliações externas nacionais e internacionais. Perante este cenário, porquê uma interrupção no percurso que vinha a ser seguido, introduzindo novas orientações curriculares num sentido diferente?

Pense nisto!

#### Notas

- 1 Abrantes, P. Leal, L. C., Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *MAT<sub>789</sub>, Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- 2 Abrantes, P. Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- 3 Na opinião dos autores do programa atualmente em discussão pública.

**MARIA DE LURDES SERRAZINA**

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO,  
INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA



Dando continuidade ao conteúdo da secção temática publicada no n.º 122 da EM, no presente número reforçamos a ideia de que a escola deve proporcionar aos alunos a oportunidade de experienciar o que envolve a realização de um estudo estatístico em todas as suas fases. Para tal, completamos o texto então publicado *Sobre estudos estatísticos: do questionar à recolha de dados*, incidindo desta vez no que de essencial se joga, e que por isso deve ser conhecido e compreendido pelos alunos, desde o tratamento dos dados até à produção e divulgação de conclusões.

Apresentamos também uma tarefa para a sala de aula, que pode ser usada com alunos desde o 1.º ciclo ao ensino secundário, bastando para tal alguma eventual adaptação do vocabulário. Na realidade, a diferença do seu uso com alunos de diferentes níveis reside no tipo de ferramentas estatísticas que pode ser mobilizado pelos alunos, nomeadamente nas justificações solicitadas nas questões. Trata-se de uma tarefa muito simples, que se realiza em pouco tempo, mas permite percorrer o ciclo estatístico desde a recolha de dados até à produção de conclusões. Além disso, possibilita, como muitas tarefas estatísticas, o estabelecimento de conexões matemáticas, evocando os conceitos de medir e medida e a capacidade de estimar medidas de comprimentos. Favorece também a relação com a realidade, permitindo ao aluno ficar a conhecer a medida geral do palmo da mão e, em particular, do seu, o que lhe poderá eventualmente vir a ser útil.

Ainda nesta secção divulgamos a Competição Internacional de Posters do Instituto Internacional de Literacia Estatística, e os posters que Portugal já apurou para estarem presentes na fase internacional da competição, que decorre durante o Verão de 2013. Sejam os posters dos nossos alunos bem sucedidos!

Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora [apc@uevora.pt]

## Sobre estudos estatísticos: dos dados às conclusões

Nos números anteriores desta secção, argumentei a favor da realização de estudos estatísticos por parte dos alunos, nos quais possam ter um papel relevante, intervindo desde o seu planeamento até à sua divulgação, passando por todas as fases desde a formulação das questões à escrita das conclusões. No texto «Sobre estudos estatísticos: dos dados às conclusões», publicado na EM 122, incidi em especial sobre as duas primeiras fases dos estudos (ou investigações) estatísticos, a de questionar e a de recolher dados. No presente texto, aprofundo algumas ideias essenciais sobre as duas últimas fases destes estudos, a de análise de dados recolhidos e a de produção de conclusões e sua divulgação, nas quais os alunos devem participar de forma consciente e crítica.

Note-se que as duas fases que atrás referi estão, aparentemente, contempladas na maior parte dos exercícios e questões que surgem em muitos manuais e outros recursos educativos. No entanto, frequentemente é pedido aos alu-

nos que respondam de forma essencialmente técnica, tratando os dados como se fossem uns quaisquer números sem contexto e sem qualquer consideração de qual o motivo pelo qual se pretendem analisar os dados. Todos conhecemos tarefas em que, dados os dados, se pede ao aluno para construir a tabela de frequências absolutas, relativas, simples e acumuladas, ou se pede para os organizar em classes prévia e acriticamente definidas. Mas o motivo do estudo importa e é inteligente tê-lo em atenção desde a organização de dados. Por exemplo, retomando o estudo sobre «o lixo à nossa volta» (EM 122), perante os dados recolhidos relativamente ao peso dos resíduos sólidos urbanos separados por cada aluno, uma organização de dados pertinente poderá ser considerar apenas três categorias, a dos alunos que separam um peso próximo do peso médio nacional, a dos que ultrapassam significativamente esse valor e a dos que estão significativamente abaixo dele. Com estas três categorias, os dados ficam organizados de modo a per-



mitir diretamente retirar as conclusões que se procuram.

Uma outra questão fundamental na organização dos dados recolhidos, com a qual os alunos pouco lidam, tem a ver com a limpeza dos dados. Todos sabemos que os dados recolhidos relativos a situações reais não são tão bem comportados como os que se pede aos alunos para tratar nos exercícios dos manuais. Por um lado, os dados relativos a variáveis quantitativas contínuas são sensivelmente sujeitos a erros de medição que facilmente fazem aparecer *outliers* que convém analisar e, eventualmente, desprezar, se tal se justificar. Por outro lado, a amplitude e dispersão dos dados reais não é muitas vezes, equilibrada, criando necessidade de tomar opções nem sempre fáceis. Por exemplo, no estudo já referido, o que fazer perante um dado relativo a um aluno que indica separar uma quantidade de lixo muito acima da maioria dos valores indicados pelos seus colegas? E pode ainda acontecer que nos dados recolhidos constem dados que se percebe serem fruto de interpretações erróneas por parte dos respondentes, obrigando a ponderar a sua eventual não consideração. Todas estas situações podem acontecer quando se recolhem dados reais; as decisões que se tomam para apurar os dados a tratar não são neutras relativamente ao prosseguimento do estudo e, por tal, é importante que os alunos possam com elas ter contacto e ser chamados a decidir de forma consciente.

Uma outra questão importante tem a ver com o cálculo de estatísticas relativas aos dados recolhidos. São frequentes os exercícios que numa alínea solicitam aos alunos, por exemplo: «Calcula a média e a moda» ou «Determina o terceiro quartil». Muitas destas questões surgem completamente descontextualizadas e sem qualquer preocupação com a interpretação, servindo quanto muito para verificar se o aluno conhece e sabe executar os algoritmos subjacentes ou carregar nas teclas certas da calculadora. É importante que os alunos consigam por eles próprios decidir quais as medidas estatísticas que fazem falta para melhor compreender a situação e para retirar conclusões em função dos objetivos do estudo. Se retomarmos o exemplo da turma que pretende conhecer os hábitos de separação de lixo dos seus alunos, os alunos devem reconhecer a pertinência da escolha da moda do resíduo mais separado, ou da amplitude e do valor médio da quantidade de resíduos separados, por exemplo. No fundo, trata-se de desenvolver nos alunos algo que aqui designo como *sentido de medida estatística*. Nesta perspetiva, é também importante que seja pedido aos alunos que interpretem o significado das medidas calculadas — em vez de apenas indicarem o seu valor.

Uma outra questão nesta fase tem a ver com a representação gráfica. Como sabemos, os gráficos conferem aos da-

dos uma leitura reduzida e organizada, reveladora de tendências que importa saber ler. Mas mais uma vez muitos exercícios pedem aos alunos para construir este ou aquele gráfico, de forma avulsa, e sem qualquer preocupação de os tornar significativos, nem sequer deles retirar qualquer informação. Importa que os alunos conheçam distintos gráficos e quais as potencialidades de cada um, quais os mais indicados em função do estudo a fazer. Pedir aos alunos que decidam por uma representação adequada é tanto ou mais importante do que saber executá-la, já que para tal podem sempre recorrer a *software* disponível como a folha de cálculo, que é importante que saibam usar de forma eficaz. Deixar os alunos optar por representar os dados de diversas formas e compará-las, discutindo coletivamente, constitui uma excelente oportunidade de estes experimentarem e se aperceberem não só do que os gráficos revelam, mas também de como se podem manipular de forma a mostrarem diferentes realidades — alterando escalas, truncando eixos, escolhendo figuras planas ou simulando 3D, etc...

Note-se ainda que o «sentido de gráfico» que os alunos devem desenvolver envolve saber ler diretamente um gráfico, reconhecendo o que está representado e entre que valores varia, mas também saber ler dentro do gráfico, identificando as tendências que ele revela, ler além do gráfico, colocando questões sobre os dados e, ainda, ler por detrás do gráfico, estabelecendo conexões com o tema a que os dados dizem respeito. Assim, é importante que ao realizar-se um estudo estatístico, seja acautelado o acesso a conhecimento extra-matemático fiável e relevante que permita conhecer melhor o contexto do estudo, sem o qual mais dificilmente se consegue interpretar e questionar os resultados que se obtêm durante o estudo, bem como contextualizar as suas conclusões. Felizmente, hoje em dia podemos encontrar fácil e rapidamente a informação que procuramos através da internet, sendo também uma mais valia para os alunos o desenvolvimento da competência de a consultar de forma expedita e crítica, nomeadamente aprendendo como selecionar sites credíveis.

Por último, refiro-me à produção de conclusões, que tem uma enorme importância em qualquer estudo estatístico — no fundo, é esse o seu objetivo, e não o do cálculo de medidas avulsas ou do esboço de um dado gráfico. É importante que os alunos consigam, a partir do tratamento de dados que realizaram, reunir e conjugar o que dizem as medidas e os gráficos produzidos, de modo a retirarem sentido sobre a situação em estudo e ficarem, de facto, a conhecê-la. Para tal, será interessante que confrontem os seus estudos com outros sobre o mesmo tema mas com âmbito mais alargado, aos quais se pode ter acesso em si-



tes diversos. Por exemplo, concluir que o peso médio dos resíduos sólidos urbanos recolhidos pelos alunos de uma turma num ano foi de 300 kg (kg/aluno) tem certamente interesse, mas tem um outro impacto se comparado com o valor médio de 487 kg/habitante que se verifica em Portugal (fonte: <http://www.ine.pt/>), convidando desde logo à compreensão das razões da diferença dos valores e à adoção de medidas que permitam melhorar o desempenho dos alunos no que diz respeito à sua relação com o lixo.

Ainda no que diz respeito às conclusões, é igualmente importante que os alunos equacionem a sua divulgação, seja para um público próximo ou mais alargado. Eleger quais as formas mais adequadas de apresentar as ideias estatísticas exige aos alunos a compreensão de quais as representações mais eficazes para vincular essas ideias. Além disso, é mais uma oportunidade de promover o desenvolvimento da sua comunicação matemática, em que as explicações e justificações se apoiam em resultados e argumentos estatísticos.

## Portugal na Competição Internacional de Posters

Pela segunda vez consecutiva, Portugal participa na 2.<sup>a</sup> Competição Internacional de Posters do Instituto Internacional de Literacia Estatística (ISLP, International Statistical Literacy Project, do IASE, International Association for Statistical Education), que decorreu em 2012/13, concluindo-se em 2013, no Ano Internacional da Estatística [[http://iase-web.org/islp/Poster\\_Competition\\_2012-2013.php](http://iase-web.org/islp/Poster_Competition_2012-2013.php)].

Esta competição tem como objetivos apoiar, criar e dinamizar atividades de literacia estatística em todos os países do mundo, concretizando-se através da realização de um trabalho de projeto em estatística e da sua divulgação em forma de poster.

O trabalho deve ser realizado por equipas de alunos, organizadas em duas categorias, sensivelmente correspondentes a alunos do ensino básico (nascidos até 1997) e alunos do ensino secundário (nascidos até 1994). As equipas são compostas por, no máximo, três alunos, que trabalham sob a orientação dos professores que na respetiva Escola se dispuserem a orientá-los. Todos os concursos são subordinados a um tema, disponibilizando o ISLP, normas de orientação, quer para os professores, quer para os alunos.

Concluo este texto retomando o seu objetivo, o de valorizar a realização, por parte dos alunos, de estudos estatísticos sobre situações reais, em que sejam chamados a ter um papel significativo em todas as fases, intervindo desde o seu planeamento até à sua divulgação. É sem dúvida uma experiência essencial que pode contribuir para que os alunos lidem com os conhecimentos de forma a desenvolver as competências necessárias para serem estatisticamente literados. Além disso, é a realização destes estudos que permite aos alunos captarem o que tem de essencial a estatística, e que retomo de algumas definições que referi na EM 121, que a caracterizam como a «ciência de aprender a partir de (ou retirar sentido de) dados» ou a «arte de contar uma história com dados (numéricos)».

**ANA PAULA CANAVARRO**  
UNIVERSIDADE DE ÉVORA



Em cada país são, numa primeira fase, apurados dois posters, um por categoria, que competem num processo anónimo e seguindo as normas internacionais do ISLP. O júri nacional tem uma composição diversificada e especializada, e, este ano, foi composto por: Arsélio Martins, Jaime Carvalho e Silva, Irene Oliveira, José Alexandre Martins, Margarida Abreu, Olga Alves e Pedro Campos. A todos se agradece o seu trabalho, bem como aos professores e alunos que participam nesta competição pois, de acordo com as normas do ISLP, a execução deste poster é um trabalho de projeto motivador mas trabalhoso!

O tema desta segunda competição foi a Agricultura. Apesar de Portugal estar inscrito com 123 alunos, apenas 15 grupos, envolvendo 40 alunos, acabaram por submeter posters para a competição. A fase da competição a nível nacional já está concluída, tendo conquistado o primeiro lugar, para as duas categorias, os posters que aqui se apresentam.

Na categoria dos alunos mais novos, Diogo Queirós Pinto, Juliana Maria Pereira Ferreira e Rita Bateira Costa, do 6.º ano da Escola Básica 2,3 de Souselo, do Agrupamento de Escolas de Souselo, entregaram o poster intitulado



«Passado, presente e futuro da Agricultura» (figura 1), realizado sob a orientação do professor Ricardo Filipe Campos Poças. Este professor descreve aqui o trabalho realizado na turma:

A turma, após discussão do tema e do que se poderia querer investigar ou conhecer sobre questões relacionadas com a agricultura e a região, dividiu-se em três grupos, cada um com uma questão ou problema em estudo.

O grupo vencedor investigou «O passado, o presente e o futuro da Agricultura» na região de Souselo, para isso elaboraram um questionário que procurava saber nos alunos da turma se os seus avós são ou foram agricultores (o passado), se os seus pais são ou foram agricultores (o presente) e se eles gostariam ou se viam a ser agricultores mais tarde (o futuro). O grupo escolheu uma amostra em cada turma da escola e depois dos dados recolhidos fizeram a sua organização em tabelas e gráficos e, por fim, a construção do poster respondendo ao problema inicial. Este poster foi elaborado pelos alunos Juliana Ferreira, Diogo Pinto, Rita Costa, Bruna Costa, Diogo Alves, Carla Sousa, Lúcia Pinto e Marta Ferreira.

O segundo grupo investigou as «Práticas Agrícolas» das pessoas da região, para isso também elaboraram um questionário que vários alunos levaram para casa e pediram a familiares e vizinhos para preencher, no seu poster apresentaram as suas conclusões sobre se as pessoas da região praticam agricultura, em que tipo de terrenos e para que fins.

O terceiro grupo investigou «O consumo de produtos agrícolas» também com a utilização de um questionário procurou conhecer onde a população local realiza a suas refeições diárias e que tipo de produtos consome e onde os compra ou produz. As conclusões foram bastante interessantes e deram-nos a conhecer um pouco mais das pessoas da nossa comunidade educativa.

Com a colaboração de todos conseguiram-se mais de 300 questionários a adultos e 100 questionários a alunos. A turma do 5.º D para isso contou com a ajuda dos alunos do 5.º C. Agora desejamos uma boa viagem do nosso poster vencedor até à China e quem sabe seja este ano o vencedor internacional da escola de Souselo.

Na categoria dos alunos mais velhos, ganharam, a nível nacional, os alunos Ana Beatriz Sousa Pinto, Ângela Sofia Santos Leite e Beatriz Cecília Santos Leite, de 11.º ano, que trabalharam sob a orientação dos professores Paulo Duarte Bastos Gil, Rui Moreira e Vasco Filipe de Magalhães Ribeiro, da Escola Básica e Secundária de Pinheiro do Agrupamento de Escolas de Pinheiro, Penafiel, que realizaram o poster intitulado «A Quinta da Estatística» (figura 2). É dos alunos o texto que explica o seu trabalho:

Atualmente, e talvez desde os primórdios da Humanidade, a agricultura é uma atividade à qual o ser humano se dedica intensamente. E isto deve-se ao facto de esta prática possibilitar a obten-

## O passado, o presente e o futuro da Agricultura

A nossa escola está situada num meio rural. Antes as pessoas trabalhavam já na agricultura, depois apareceram as fábricas. Mas agora existe muito desemprego e emigração. Será que ainda há futuro na agricultura na nossa região?

Para respondermos a essa questão, decidimos investigar e fizemos um questionário para o saber.

Questionário «O passado, o presente e o futuro da Agricultura»

Sexo  Masculino  Feminino Idade \_\_\_\_\_ Ano de escolaridade \_\_\_\_\_

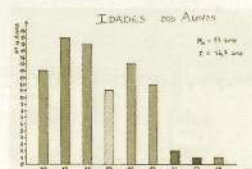
Questão	Sim	Não
1. Gostaria de no futuro ser agricultor?		
2. Vês-te no futuro a ser ou ter de ser agricultor?		
3. Os meus pais são (ou foram) agricultores?		
4. Os tios avós são (ou foram) agricultores?		

O questionário foi aplicado aos alunos da escola, mas para não termos de perguntar a todos os alunos, escolhemos uma amostra. Em cada uma das quatro turmas, do 5.º ao 9.º ano (20 turmas), selecionámos que iria responder os alunos como números que fossem múltiplos de 4, se não houvesse, respondia o anterior.

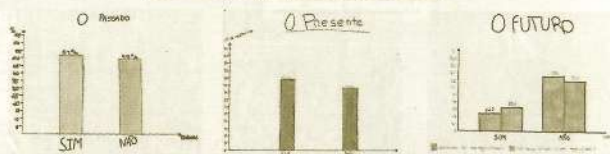
Como nem todas as turmas tinham o mesmo número de alunos, recolhemos, durante o mês de abril de 2013, 93 inquéritos preenchidos e todos eles foram considerados válidos.

### Participantes

SEXO	FREQUÊNCIA ABSOLUTA	FREQUÊNCIA RELATIVA
MASCULINO	50	54%
FEMININO	43	46%
TOTAL	93	100%



### Dados recolhidos



### Conclusão do nosso estudo

Dos 93 alunos que responderam ao questionário, a maioria foram rapazes. Os alunos tinham entre 10 e 18 anos, mas com média de idade 12,7 anos. Quer no passado (51%) e no presente (53%) a maioria dos avós e pais dos alunos da escola são ou foram agricultores, apenas 22% e 30% dos alunos indicou que gostaria ou considerava que iria ser agricultor, ou seja, a grande maioria dos alunos da nossa escola indicaram que no futuro não gostariam de ser agricultores nem se vêm a sê-lo. Afinal pode não haver futuro na Agricultura na nossa região.

Figura 1

ção de alimentos, que, obviamente, garantem a sobrevivência da nossa espécie.

Aos agricultores, a atividade agrícola, para além de permitir o abastecimento pessoal de frutas e legumes, que asseguram o fornecimento de vitaminas e nutrientes necessários ao desenvolvimento de uma vida saudável, garante o seu sustento, pela venda desses produtos. Assim, a agricultura é, também, uma atividade que emprega imensas pessoas no nosso país.

Contudo, como é do conhecimento geral, tem-se verificado que o número de pessoas empregadas no setor agrícola tem vindo a diminuir drasticamente, pois a população tem vindo a procurar empregos mais estáveis e com salários mais elevados.

Atentas a este facto, perguntámo-nos se, com o contínuo decréscimo dos agricultores, ainda haverá agricultores no futuro. Porque, se não houver agricultores suficientes, nos próximos anos, o fornecimento de alimento estará em risco, e a nossa saúde também.

Para investigar esta situação, recorremos a um estudo estatístico dos jovens de hoje, que irão constituir os futuros empregados



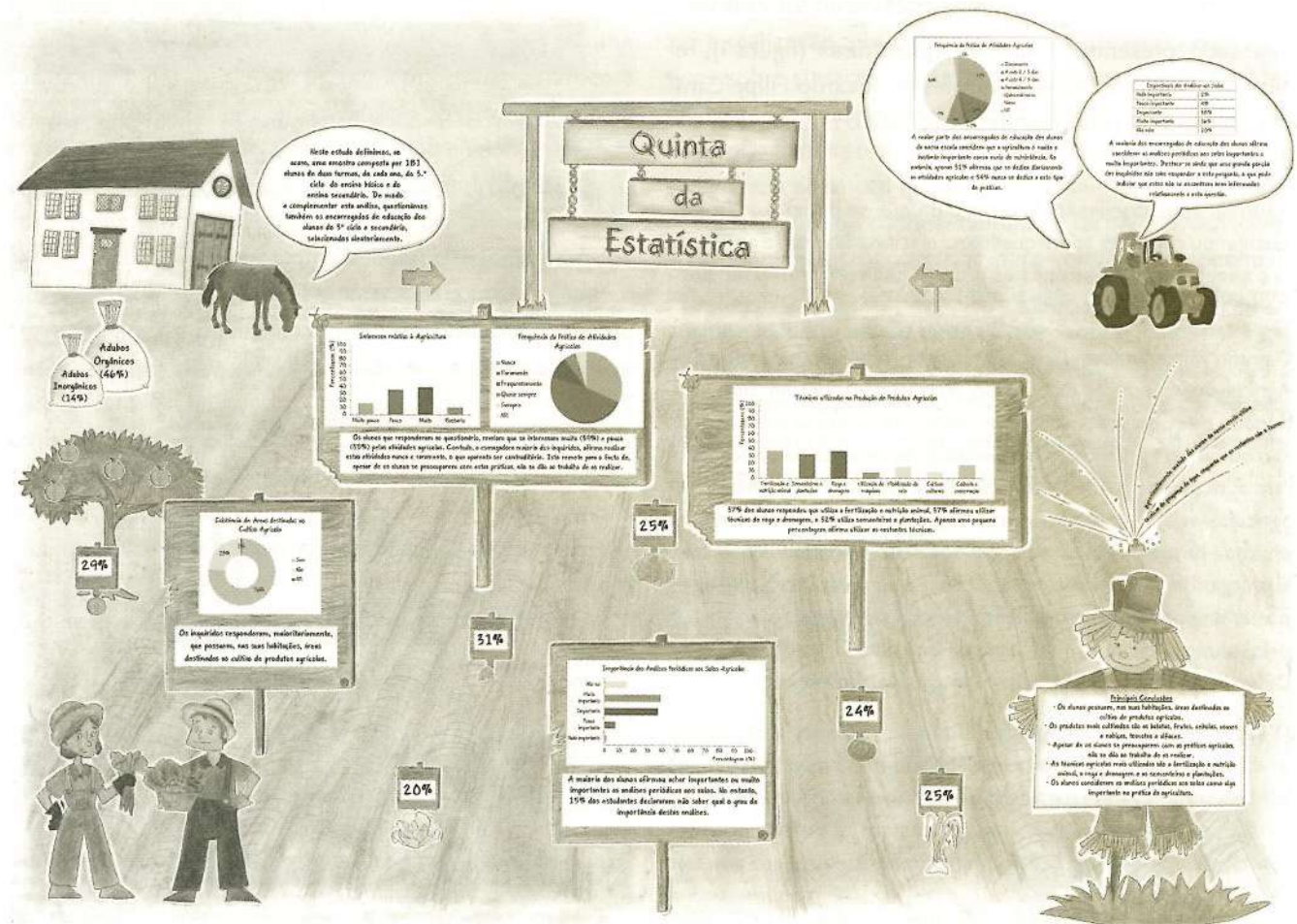


Figura 2

e empregadores. Investigámos, essencialmente, qual o interesse dos jovens na agricultura, como e com que frequência a praticam, e se ponderam usá-la como emprego futuro. Para tal, seleccionámos aleatoriamente duas turmas de cada ano, do 7.º ao 12.º ano de escolaridade, e aplicámos o questionário, por nós elaborado, aos mesmos. Decidimos, também, investigar as práticas agrícolas dos seus encarregados de educação, para conhecer o que é feito atualmente pelos adultos, no que toca à agricultura.

Tendo consciência desta problemática, decidimos participar neste concurso, com esperança de, não só conseguir uma boa classificação, mas também de voltar a atenção de todos os que observarem este poster para o problema do presente e do futuro da agricultura.

Portugal está de parabéns por participar nas Competições Internacionais de Literacia Estatística do ISLP do IASE. Cabe realçar aqui que no ano letivo de 2011/12, aquando

da 1.ª CIP-ISLP, os dois segundos lugares a nível internacional foram atribuídos a equipas de alunos portugueses! Esperamos que 2013 traga também sorte aos posters portugueses agora aqui divulgados. Os vencedores a nível internacional serão anunciados em Agosto de 2013, no decurso do 59º Congresso do International Statistical Institute, em Hong Kong, onde os posters vencedores em todos os países estão expostos.

**MARIA MANUEL DA SILVA NASCIMENTO**  
 UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO  
 COORDENADORA NACIONAL DA 2.ª COMPETIÇÃO  
 INTERNACIONAL DE POSTERS DO ISLP/IASE







# Raciocínio hipotético-dedutivo

No futuro programa do Ensino Básico elege-se o raciocínio hipotético-dedutivo como o raciocínio matemático por excelência e afirma-se que o objetivo geral dedicado à axiomática da geometria constitui um terreno propício ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos.

Quem o faz ignora totalmente tudo o que tem sido pensado, experimentado, refletido e avaliado ao longo de décadas de evolução do conhecimento sobre aprender e ensinar matemática, a que hoje chamamos Didática da Matemática.

Para fundamentar a minha posição revi uma publicação marcante, «Ensino da Geometria no virar do milénio», com contributos significativos de especialistas internacionais no ensino da geometria. Neste documento podem ser destacadas algumas ideias dominantes: (1) a relação entre a intuição e a dedução; (2) a importância da experimentação e do trabalho de cunho investigativo; (3) as conexões entre a geometria e as outras áreas; (4) as aplicações da geometria; (5) os contributos da tecnologia.

Na análise que faço do programa em debate, não encontro nenhum eco destas ideias. Uma pesquisa simples de ocorrências permitiu-me obter os resultados expressos na tabela 1.

Destaco que as quatro referências à intuição que encontrei têm como preocupação justificar a importância da dedução ou servem para chamar a atenção para o seu caráter enganador. Para quem ainda não conhece, os cadernos de apoio são explicitamente assumidos pelos autores do Programa e das Metas como um documento elaborado para apresentar «sugestões de exercícios, problemas e atividades, alguns com propostas de resolução, esclarecimentos relativos a algumas opções tomadas no documento principal e informações complementares para os professores».

Tabela 1.

Palavras-Chave	PM	CA1	CA2	CA3
Intuição	0	0	1	3
Experimental ou palavras derivadas	2	0	0	0
Conexões	0	0	0	0
Investigação	0	0	0	0
Programas de geometria dinâmica	1	0	0	1

PM=Programa e Metas, CA1=Caderno de apoio do 1.º ciclo; CA2=Caderno de apoio do 2.º ciclo; CA3=Caderno de apoio do 3.º ciclo

Para ilustrar a minha total discordância do programa em debate e de todos os documentos que lhe estão associados, sugiro um conjunto de problemas muito simples.

Dividir em duas partes equivalentes um triângulo isósceles. Investigar várias soluções e desenvolver o problema passando a outras figuras nomeadamente, um triângulo qualquer, um trapézio e um paralelogramo.

Estes problemas e as investigações associadas são ricos e adequados ao ensino básico. Admitem vários níveis de exploração e permitem trabalhar, ou não, sobre conhecimentos de geometria como por exemplo o Teorema de Tales. Combinam muito bem intuição e dedução. Constituem um desafio muito acessível e aliciante com recurso a um ambiente de geometria dinâmica, sem o qual se tornam inacessíveis. São um exemplo, mas há centenas deles. Escolhi este porque a sua resolução e discussão são muito interessantes.

O grande problema do futuro novo programa de Matemática para o Ensino Básico não é que o que não está lá e que os seus autores justificam como ausente para dar espaço a que as metodologias livres dos professores possam implementar. O maior problema é a visão estreita, limitada e retrógrada da matemática, subjacente às ideias expressas na introdução, nas finalidades e nos objetivos e bem patente nas metas e nos cadernos de apoio ao professor. Em meu entender, a obsessão cega do raciocínio hipotético-dedutivo, que domina a orientação dos conteúdos de geometria deste programa, pode ser mortal para o ensino da Matemática na escolaridade básica. Quem defende e persegue esta ideia, posta em causa há tanto tempo, torna-se responsável por destruir todo o caminho que vem sendo construído para que a geometria tenha o papel que lhe é devido no ensino básico.

Já ninguém tem dúvidas de que o raciocínio hipotético-dedutivo não pode ser o motivo para que as crianças e jovens aprendam Matemática na escolaridade básica. A demonstração formal, baseada num sistema axiomático, poderá vir apenas no fim de uma longa sequência de modos de raciocínio muito menos sofisticados e em níveis de escolaridade mais avançados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Veloso, E., Fonseca, H., Ponte, J. P. & Abrantes, P. (org.) (1999). *Ensino da Geometria no virar do milénio*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.



# APM – 2013

## Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

## Modalidades de associado e seus direitos

### Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo *APMinformação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

### Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

### Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

### Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

### Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

## Preço da quota anual em 2013

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + <i>Quadrante</i>	71,00 €
Modalidade 2 + <i>Quadrante</i>	95,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço <http://www.apm.pt>

## Assinaturas das revistas para 2013

		<i>Educação e Matemática</i> (inclui atas ProfMat)	<i>Quadrante</i>
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €



## Editorial

- 01 *Intermezzo*  
João Pedro da Ponte

## Artigos

- 03 **A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas**  
Graciosa Veloso, Lina Brunheira, Margarida Rodrigues
- 23 **360° Ciência Descoberta**  
*Entrevista com Henrique Leitão (Comissário da Exposição)*  
António M. Fernandes, Ilda Rafael
- 31 **EIEM 2013 com neve**  
Alexandra Pinheiro
- 33 **O ensino da Matemática em Singapura**  
Jaime Carvalho e Silva

## Secções

- 16 **O problema deste número** *José Paulo Viana*  
Dominós em cascata
- 32 **O problema do ProfMat2013** *José Paulo Viana*  
Cinco Placas de Titânio
- 37 **Tecnologias na educação matemática** *António Domingos*  
O Navigator e a forma como os alunos de 10.º ano utilizam a calculadora gráfica,  
*Vanda Rosa, António Domingos*
- 21 **Materiais para a aula de Matemática**  
Relações Tróficas entre as diferentes espécies da cadeia alimentar da Antártica,  
*Joana Latas, José Xavier, Patrícia Azinhaga*
- 02 **Pontos de vista, reações e ideias...**  
Relógios matemáticos, *Paulo Afonso*
- 40 **Pense Nisto**  
As voltas que o currículo dá — Recordando Paulo Abrantes, *Maria de Lurdes Serrazina*
- 17 **Espaço GTI**  
Raciocínio proporcional: uma perspectiva atual, *Ana Isabel Silvestre, João Pedro da Ponte*
- 48 **Caderno de apontamentos de geometria** *Cristina Loureiro*  
Raciocínio hipotético-dedutivo
- 42 **Estatística na Educação Matemática** *Ana Paula Canavarro*  
Sobre estudos estatísticos: dos dados às conclusões, *Ana Paula Canavarro*  
Portugal na Competição Internacional de Posters, *Maria Manuel da Silva Nascimento*  
Materiais: Quanto mede o teu palmo?
- 09 **Matemática do Planeta Terra 2013** *Joana Latas*  
Matemática, pinguins e cadeias alimentares!?, *Joana Latas*  
Dos Pinguins aos Ursos Polares: O Papel das Ciências Matemáticas  
em Ciência Polar, *José Xavier, Patrícia Azinhaga*
- 14 **Vamos Jogar** *Helena Rocha*  
Jogo Jenga da Antártica