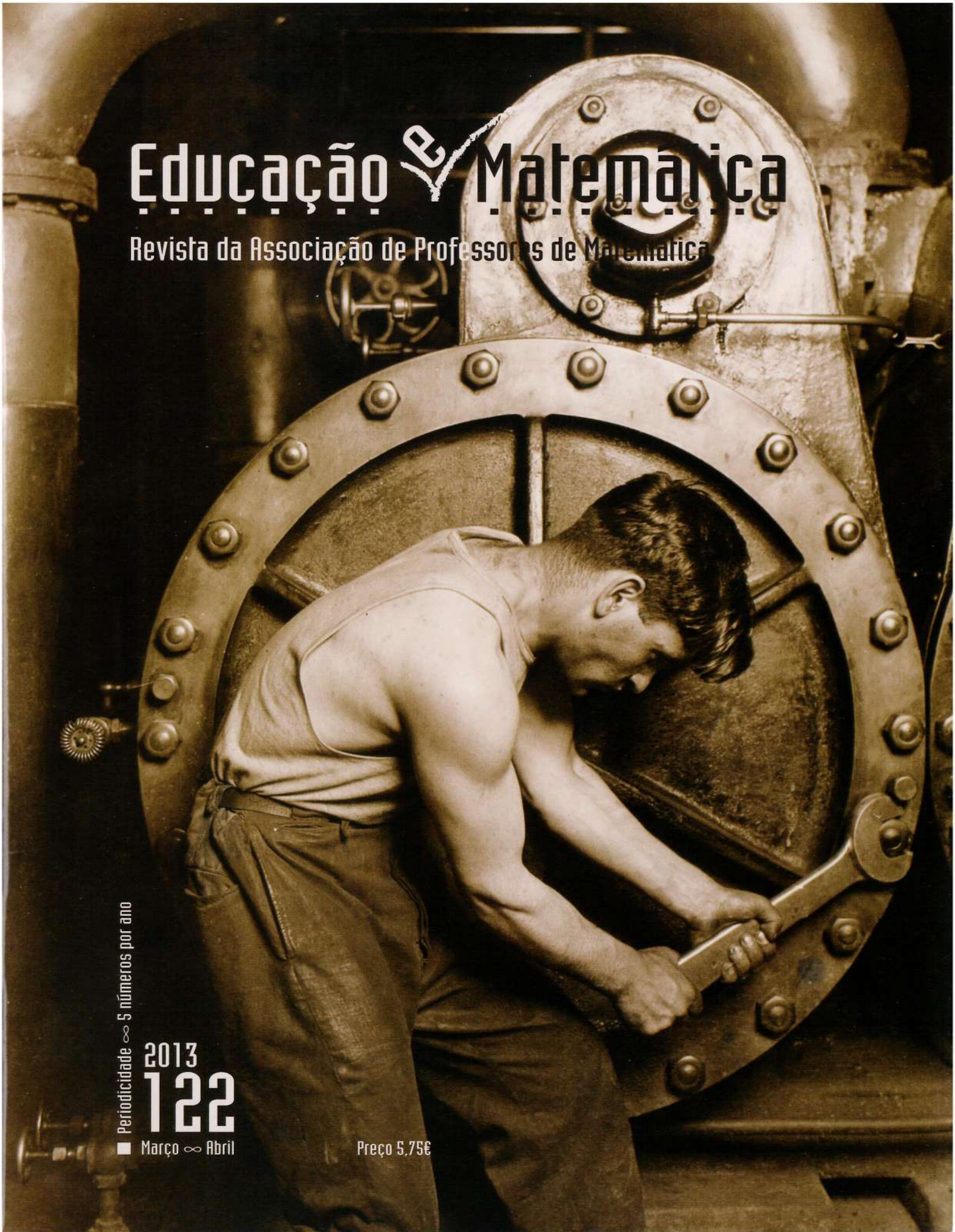
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



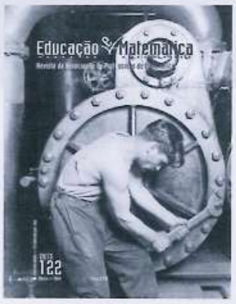
Periodicidade ∞ 5 números por ano

2013

122

Março ∞ Abril

Preço 5,75€



ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Lina Brunheira
Subdiretora Adelina Precatado
Redação Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Irene Segurado
Isabel Rocha
Júlia Perdigão
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Alvega

Colaboradores Permanentes

António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2013

Ana Paula Canavarro Estatística na Educação Matemática
Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Abril 2013
Tiragem 1800 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Sobre a capa

A capa deste número reproduz uma fotografia de Lewis W. Hine, trata-se de uma obra com o título «Powerhouse mechanic» de 1920. Hine, sociólogo e professor, integrou os movimentos progressistas do início do séc. XX.

A razão pela qual decidi adoptar esta imagem como capa não são as mesmas que motivaram Hine. Decidi usá-la pelo seu valor metafórico e, de certa forma, dar expressão a duas ideias que têm dominado as reflexões sobre educação nos tempos mais recentes — retorno ao passado e retrocesso (mecanização).

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Célia Mestre, Cristina Leandro, Edite Bolacha, Eduardo Veloso, Filipa Dionísio, Helena Moita de Deus, Inês Cruz, Isolina Oliveira, José Manuel Cascalho, Lurdes Figueiral, Mónica Martins Pinto, Paulo Emanuel Fonseca, Paulo Machado, Pedro Mendes, Renata Carvalho, Ricardo Cunha Teixeira, Ricardo Melo, Rui Mendes, Susana Fernandes, Vanda Belém, Vitor Teodoro.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Exames, metas e um <novo> programa – a trilogia do regresso ao passado

Há cerca de ano e meio, uma amiga disse-me «Vamos retroceder 50 anos na educação em Portugal». Na altura achei que exagerava, mas hoje tenho de admitir que os riscos são cada vez maiores. Primeiro vieram os exames no 2.º ciclo e, pasme-se, no 1.º ciclo. Teremos de viajar umas décadas no tempo para regressar à fase em que no nosso país se usavam exames naquele nível de ensino. Eu própria tenho de voltar às minhas memórias de infância para recordar as palavras da minha avó paterna, uma professora primária do Alto Alentejo, que me explicava que antigamente «os meninos eram levados a fazer o exame da 4.ª classe e a professora só levava a exame quem ela sabia que estava bem preparado, caso contrário a professora ficava mal vista». Este ano os meninos do 4.º ano também ‹vão ser levados› a exame, já que nem na própria escola ficam para realizar a prova, não vão as paredes cometer alguma fraude… Antigamente os docentes ficavam mal vistos se um aluno não tivesse um bom desempenho. Também hoje a pressão dos resultados se faz sentir, já que dos mesmos dependem os créditos horários das escolas e, consequentemente, os empregos de muitos professores. Aliás, não posso deixar de notar que esta relação é de uma enorme perversidade uma vez que seria de esperar que, ao contrário, escolas em que os alunos revelam piores desempenhos devessem ser mais apoiadas financeiramente, tal como acontece, por exemplo, na Holanda. Poucos dias depois de se conhecerem os resultados de um estudo[1] que revela que os alunos de meios socioeconómicos mais desfavorecidos tendem a ter piores resultados, a manutenção desta política reforça ainda mais a desigualdade que a escola se deveria esforçar por minimizar.

Os exames foram desde o início uma bandeira deste ministro, colando-os à ideia de uma política de rigor que nunca explicou em que consiste. Mas todo o enviesamento das práticas que os exames implicam, centrando o ensino em aspetos avaliáveis naquele tipo de prova, estabelecendo-se na prática como um novo currículo, não é suficiente para esta tutela. Por isso encomendou as Metas Curriculares (MC), um documento marcado pelo formalismo excessivo, redução da compreensão, desprezo pelas capacidades transversais, remetendo a resolução de problemas para a simples aplicação de conhecimentos adquiridos, e que antecipa conceitos e procedimentos próprios de idades mais avançadas. As MC, anunciadas como estando em consonância com o programa de matemática em vigor, são na verdade a sua completa antítese. Mas há um anúncio associado às metas para ser levado mais a sério: elas «constituem-se como um referencial para a avaliação interna e externa, com especial relevância para o GAVE». E assim se aumentam as angústias dos professores que se dividem entre o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) que sugere um tipo de trabalho e as MC que propõem outro completamente diferente.

Mas a tutela quis acabar com estas angústias e com o problema da incoerência entre os dois documentos e assim revogou o PMEB. Segundo argumenta o despacho, as suas indicações metodológicas — aquelas que se fundamentam em investigação nacional e internacional, as mesmas que nos últimos anos têm vindo a ser alvo de trabalho e formação com milhares de professores, as metodologias que têm vindo a entrar progressivamente na aula de matemática com resultados positivos nos últimos estudos internacionais (PISA e TIMMS) são afinal de «fundamentação puramente ideológica». Mas qual será o fundamento desta revogação, senão um ato puramente ideológico? O que poderá levar um governo a revogar um programa que só neste ano letivo termina a sua generalização, em que se investiu muito trabalho e que custou muito dinheiro ao Estado?

O atual PMEB, diz ainda o despacho, «é demasiado rígido nas indicações metodológicas», pelo que agora nos vamos libertar daquele ‹espartilho› e orientarmo-nos pelos escassos 190 objetivos e as centenas de descritores que as MC contêm, identificando exatamente o que os alunos devem aprender e, frequentemente, como devem ser ensinados… Estas MC, segundo a opinião da tutela agora confirmada em despacho, até já estão a produzir «resultados muito positivos», embora ninguém conheça nenhum estudo ou sequer ecos da sua implementação.

Aquele ao qual ainda há pouco chamámos novo, fica agora decretado velho. A proposta de novo programa confirma, numa primeira análise, o que esperávamos: um documento que se traduz mais numa listagem de conteúdos, sem quaisquer referências à história da matemática ou à tecnologia, a não ser para desaconselhar a utilização da calculadora. Um programa que admite com alguma cautela que os alunos produzam conjeturas, mas que nunca fala em atividades de investigação ou projetos. Este sim é um programa velho, com objetivos que não servem as necessidades de literacia matemática atuais. Um verdadeiro regresso ao passado. Será? A esperança reside nos professores. Podemos ver os programas revogados, os materiais que foram disponibilizados no *site* da ex-DGIDC escondidos no ‹histórico› numa espécie de nova censura, os manuais alterados contra a lei que os determina válidos por seis anos, mas ninguém poderá revogar o conhecimento e a experiência que foi construída pelos professores. Por isso, não deixemos que o tempo volte atrás porque, como dizia Paulo Abrantes num editorial desta revista, «Os bons velhos tempos, são velhos mas não eram bons» — e isso até a minha avó sabia.

Nota

[1] O estado da educação 2012. Autonomia e Descentralização. Conselho Nacional de Educação. http://www.cnedu.pt/images/Docs_CNE_estadoEdu2012/EE_2012_Web3.pdf

Lina Brunheira
Diretora da Revista Educação e Matemática

Posição da direção da Associação de Professores de Matemática (APM) sobre o despacho de revogação do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB)

A direção da APM, confrontada com a publicação do Despacho n.º 5165-A/2013 de 16 de abril que revoga o PMEB, manifesta a sua mais profunda discordância e indignação.

1. Pela (falta de) oportunidade: O PMEB, homologado em 2007, teve como referência resultados de investigação reconhecida internacionalmente e foi elaborado por uma equipa de autores composta por matemáticos, professores de matemática dos três ciclos do Ensino Básico e investigadores no domínio do ensino e da aprendizagem da Matemática. Passou por um período alargado de discussão pública donde provieram inúmeros pareceres e de que resultou a integração de diversas contribuições; por um período de lecionação em turmas piloto de várias escolas do país, com a elaboração e teste de materiais didáticos, que envolveu professores selecionados pela sua grande experiência; e, por fim, pelo período de generalização, faseada, com o acompanhamento do trabalho dos professores nas suas escolas, incluindo a observação de aulas; só em 2012/2013 termina a sua generalização. Um processo, portanto, que envolveu um forte investimento humano e financeiro e de que um conjunto de despachos sucessivos faz tábua rasa, numa atitude inédita em equipas do Ministério da Educação, profundamente desrespeitadora do trabalho dos professores e alunos e propondo uma calendarização para a apresentação, discussão, homologação e aplicação de outro programa que é ela própria reveladora da forma precipitada e ligeira com que se encara um assunto tão sério como o que está em causa.
2. Pela forma, nomeadamente os considerandos que não são mais que um conjunto de juízos valorativos impróprios de um normativo da República.
3. Pelo conteúdo, que nos merecerá pronunciamento mais detalhado, mas do qual queremos, desde já, destacar alguns aspetos:
   a) Não vemos fundamento para a afirmação de que a «utilização (das Metas Curriculares) teve resultados muito positivos nas escolas e nas turmas em que as mesmas foram usadas»; ao contrário, no contacto e trabalho que temos desenvolvido com professores de Matemática em encontros nacionais e regionais, em seminários, ações de formação e debates, temos sentido incompreensão perante o aparecimento do documento das Metas e muita perplexidade e preocupação face ao que nelas é proposto, tendo em conta o trabalho que os professores têm vindo a realizar no âmbito do PMEB.
   b) A alegada «rigidez» do PMEB frente à «liberdade» que este despacho defende não tem fundamento. A título de exemplo, o PMEB não apresenta um roteiro anual, dentro de cada ciclo de ensino, «por considerar que na sua definição as escolas e agrupamentos têm um papel importante a desempenhar». As Metas, pelo contrário, com a determinação de um percurso curricular único por ano, recorrendo a cerca de 190 objetivos «gerais» e a mais de 900 descritores fortemente prescritivos, limita a autonomia dos professores na gestão do programa, dificultando assim a adequação do seu trabalho às características e percursos escolares dos seus alunos.
   c) A afirmação de que as indicações metodológicas do PMEB são «frequentemente de fundamentação puramente ideológica», é totalmente despropositada. Essas indicações baseiam-se em investigação acumulada nacional e internacional no domínio do ensino e da aprendizagem da Matemática e acompanham orientações curriculares internacionais presentes em muitos países.
   d) Consideramos que não há opções educativas neutras e é bem visível a ideologia que preside às Metas Curriculares e ao programa que agora se anuncia: retoma uma pedagogia por objetivos há muito abandonada; enfatiza aprendizagens baseadas na mecanização de procedimentos e rotinas; desvaloriza capacidades de exigência cognitiva mais elevada, como a compreensão e a aplicação de conhecimentos e a resolução de problemas. Que dizer da ideologia subjacente às Metas quando os seus autores assumem que elas adoptam «uma abordagem diretiva que procura evitar os erros decorrentes das descobertas dos alunos»? Evocamos aqui o matemático português de renome internacional, Sebastião e Silva para quem «só errando se aprende verdadeiramente» e que também considerou que a apresentação de uma pretensa Matemática «bacteriologicamente pura» não conduz à aprendizagem, mas sim ao desinteresse e à incompreensão.

A direção da APM considera que o sistema educativo estava a revelar uma evolução positiva, como mostram os indicadores da aprendizagem matemática dos alunos portugueses que os testes internacionais mais recentemente divulgados (PISA e TIMMS) têm evidenciado e teme que as medidas que esta equipa ministerial tem vindo a tomar representem uma ameaça séria a essa evolução, podendo mesmo invertê-la.

A direção da APM convida os professores de Matemática a fazerem uma leitura das Metas Curriculares e dos respetivos

Cadernos de apoio. Convida-os a alargar o debate. E desafia o MEC a dar razão fundamentada das afirmações que consagra neste infeliz documento normativo elaborado no dia 15 de abril e publicado em suplemento ao «Diário da República» no dia seguinte.

A APM, através de todos os seus órgãos de participação, continuará a explicitar a sua posição e a acompanhar os professores nas reflexões, nos debates e mútuo esclarecimento.

A direção da Associação de Professores de Matemática

Desvalorizar por despacho

Dia 16 de abril de 2013, é o dia em que por despacho (Despacho n.º 5165-A/2013) mais uma vez se ignorou todo o esforço dos professores para melhorar o ensino da Matemática em Portugal. Desconheço qualquer argumento baseado na investigação mais atual que justifique a revogação do PMEB. Ignoram-se estudos internacionais que valorizam a melhoria dos resultados a Matemática. Em vez de se enaltecer todo o esforço que tem sido feito ao longo dos últimos anos por escolas, professores, alunos e até encarregados de educação, o que se ouve é que estamos perto dos «medíocres». O mesmo acontece com a investigação em Educação Matemática, quer nacional quer internacional.

Primeiro publicam-se metas curriculares que introduzem novos conteúdos ao Programa de Matemática em vigor e quando, finalmente, se reflete acerca deste ato inconsciente, não se reformulam metas mas cria-se um novo programa sem que o atual termine a sua generalização. Muda-se um programa com introdução de novos conteúdos sem qualquer mecanismo de acompanhamento à sua entrada em vigor. Impressionante.

Enquanto professora de Matemática do 2.ºciclo, coordenadora do Plano da Matemática durante vários anos na minha escola, experimentadora do PMEB e formadora, assisti ao empenho de muitos professores na atualização de conhecimentos científicos e pedagógicos. Mudaram-se práticas e trabalhando colaborativamente, numa lógica de agrupamento, melhoraram-se resultados na Matemática. Mas parece que nada disto importa.

Enquanto experimentadora do PMEB presenciei a mudança, para melhor, no ensino e na aprendizagem da disciplina. Foi notória a diferença de postura de alunos desmotivados, em aulas de ensino exploratório e em aulas de «resolução de exercícios», mais participativos e interessados. Os alunos não podem ser meros recetores de conhecimento, eles são os intervenientes principais na produção desse conhecimento. Fui aluna do memoriza e aplica há mais de 30 anos. Hoje os tempos são outros, com outras crianças e jovens numa sociedade mais exigente onde o memorizar e aplicar não chega para aprender efetivamente Matemática.

Um olhar sobre as metas curriculares e o programa a entrar em vigor no próximo ano letivo (sim porque o «programa» não é mais do que as metas acrescidas de uma lista de conteúdos) leva-me a questionar se os responsáveis que tomam estas decisões têm a noção do quão complexa é a aprendizagem dos números racionais positivos e suas operações. Esta aprendizagem é remetida para o 1.º ciclo com grande ênfase na representação fracionária. E a representação decimal onde os alunos revelam dificuldades? E a representação em percentagem não são igualmente importantes? No 2.ºciclo a referência ao trabalho com percentagens praticamente não existe.

Nos últimos anos, tenho estado a realizar um estudo sobre o cálculo mental com números racionais. Não posso deixar de realçar o facto de que, ao longo de todo o programa, a referência ao «cálculo mental» surge 6 vezes enquanto a palavra «algoritmo» surge 31 vezes. Dois anos de investigação na sala de aula mostraram-me o quanto o desenvolvimento do cálculo mental dos alunos é importante para a compreensão dos números e das operações. E como um ensino centrado na memorização e aplicação de algoritmos leva os alunos a operar recorrendo a uma miscelânea de procedimentos incorretos fruto de uma memorização sem compreensão.

Por último, quero desmistificar a ideia de que o PMEB é prescritivo a nível metodológico. Os professores continuam a desenvolver o seu trabalho na sala de aula de acordo com o que acreditam. Convido os mais distraídos a lerem os cadernos de apoio às metas curriculares e a procurar evidências da «apregoada» liberdade metodológica, liberdade esta que se coordena em pleno com a não utilização da calculadora. A questão não é usar ou não as tecnologias, mas sim saber como as usar em prol da melhoria da aprendizagem dos alunos.

Sou professora de Matemática. Acredito e continuarei a acreditar nas potencialidades do PMEB em detrimento do programa que agora nos querem fazer acreditar ser melhor, sem qualquer argumento e com evidências da inadequação de algumas propostas. A minha função é preparar da melhor forma possível futuros cidadãos capazes de resolver problemas, raciocinar, comunicar e relacionar a Matemática que nos rodeia. Sim, porque a Matemática na nossa vida não se resume a uma folha de Excel...

Renata Carvalho
Professora de 2.º ciclo de Matemática e Ciências da Natureza

Revogação do PMEB
Que significado para a educação?

Os recentes acontecimentos na Educação Matemática em Portugal são preocupantes a diversos níveis. Numa fase ainda de apropriação de um «novo» programa, homologado em 2007 e com generalização faseada, a sua revogação e consequente criação de um novo programa nesta altura do ano letivo, não pode deixar os professores indiferentes.

Em Educação as mudanças são lentas, já o sabemos! Os processos de apropriação e a mudança de atitudes e comportamentos precisam de tempo. Falo dos professores, mas também dos alunos. É, acima de tudo, dos alunos que quero falar aqui!

A minha conceção de Educação, desde muito cedo nesta profissão que assumo, não se restringe àquilo que faço em sala de aula ou na escola. A minha ação vai para além disso. A Educação formal tem a missão de «formar» os cidadãos da sociedade a que pertencem de acordo com uma qualquer ideologia que acarreta a imagem do que se pretende que estes cidadãos sejam enquanto membros dessa sociedade. A Educação não é neutra, nem neutros são os currículos e outros normativos que a guiam. Assim, a questão «Que cidadão se pretende construir para o futuro?» pode ser respondida, em parte, pelas opções que se assumem na Educação.

Enquanto professora do 1.º Ciclo do Ensino Básico tenho assistido com algum agrado à ainda recente (e agora drasticamente interrompida) atenção que tem sido dada à importância das aprendizagens deste nível de ensino. Têm sido crescentes as investigações nacionais que têm como interesse este período da escolaridade, centrando os olhares para o «básico» enquanto fundamental alicerce no percurso de aprendizagens dos alunos. O básico deixava de ser encarado, a pouco e pouco, como o «apenas» *saber contar e escrever*, integrando não só a sua importância como a complexidade inerente do ensinar esse básico.

Foi com imenso agrado e responsabilidade que aceitei ser professora experimentadora do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) de 2007. Tinha uma turma de 3.º ano de escolaridade e percorremos esse caminho, eu e os meus alunos, nos últimos dois anos do 1.º ciclo. No entanto, esse caminho começou mais cedo. No 1.º ano dessa mesma turma, integrei enquanto formanda uma turma do Programa de Formação Contínua de Matemática. Frequentei esta formação durante dois anos letivos, correspondendo aos 1.º e 2.º anos da turma que lecionava. Desta forma, o percurso da minha formação foi acompanhando a formação dos meus alunos, do 1.º ao 4.º ano, inicialmente no programa de formação e posteriormente na experimentação do novo programa. Durante esse percurso, os conteúdos matemáticos e a forma de os lecionar ganharam novo corpo! Mas, não tanto, por serem conteúdos mais ou menos novos... As aulas onde eram trabalhados eram momentos de envolvência, de entrega total na resolução conjunta de tarefas desafiadoras, exigentes, onde ninguém podia ficar de fora e todos eram chamados a participar. A pouco e pouco, fui percebendo nos meus alunos uma maior capacidade de comunicar os seus raciocínios, de questionar os colegas colocando-lhes dúvidas, exigindo maior clarificação, não se contentando com perceber «mais ou menos», exigindo apropriar-se do que em conjunto era discutido, trabalhado. A par e passo, a sua capacidade de resolução de problemas cada vez mais exigentes foi melhorando e os raciocínios que revelavam, gradualmente mais complexos e pertinentes, orientados pela capacidade crítica de perceber a pertinência e validade dos processos que usavam e resultados que atingiam. E os alunos mais fracos (porque não somos todos iguais) foram também evoluindo, a seu ritmo, aprendendo uns com os outros.

Se voltar à questão da conceção da Educação e se pensar um bocadinho mais longe no tempo, as capacidades de cidadania que estes alunos foram desenvolvendo não dizem respeito «apenas» à Matemática. Dizem respeito ao cidadão na sua conceção mais ampla e à grandeza da pessoa como um todo, íntegro. Para mim, enquanto professora, e sendo do 1.º Ciclo, dita de «ensino generalista», interessa-me muito esta ideia do todo e pouco a disciplinaridade, atomizada de pensar as pessoas aos bocadinhos...

Poderia falar aqui de imensas coisas. Dos percursos de aprendizagem pensados em cada um dos temas matemáticos de forma a proporcionarem a compreensão da Matemática e não a sua utilização como disciplina de memorização de factos e de aplicação oca de sentido de procedimentos... Poderia falar da liberdade dada aos professores e às escolas de definirem esses percursos, tendo em conta a realidade onde se inserem... Poderia falar também das dificuldades que estão inerentes a este processo da construção de outra identidade de professor... Poderia falar que as aprendizagens acontecem na sala de aula e não com a aplicação de exames... Mas fico-me por aqui, deixando a pergunta no ar: «Que cidadão se pretende construir para o futuro?» e desafio-vos, se me permitem, a comparar as primeiras páginas do programa de 2007 com esta proposta que agora nos apresentam...

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada

Da secção de ouro ao pentágono regular[1]

Eduardo Veloso

Introdução

Numa Nota anterior (*Secção de ouro — primeiros passos*, E&M n.º 121) mostrámos como Euclides introduz a construção da secção de ouro de um segmento AB, ou seja a divisão de AB, por meio de um ponto C, em dois segmentos AC e CB, de tal modo que o quadrado de lado AC tem área igual à do rectângulo de lados AB e CB. Mantivémo-nos escrupulosamente no âmbito dos *Elementos* de Euclides, e assim *área* de uma figura significa «região do plano ocupada pela figura» e não medida numérica, e a *comparação de áreas* entre duas figuras faz-se por meios puramente geométricos (de preferência, leia essa Nota anterior antes de prosseguir). E revelámos que a secção de ouro (embora sem este nome) foi incluída nos *Elementos* como preparativo para a construção do pentágono regular.

O objectivo da presente Nota é precisamente mostrar como Euclides se serve da razão de ouro para construir o pentágono regular. No entanto, embora nos mantenhamos no âmbito da geometria euclidiana, os pressupostos e recursos que iremos utilizar não são apenas os de Euclides ao escrever os *Elementos*, como fizemos na Nota anterior. 2300 anos depois, e sobretudo depois da construção dos números irracionais por Dedekind e outros matemáticos, é possível hoje partir de axiomáticas da geometria euclidiana diferentes da de Euclides, que foi revista por Hilbert no início do séc. XX. Na axiomática proposta por Moise, em 1982, os postulados não são os de Euclides nem de Hilbert, mas sim os postulados métricos, «que envolvem a ideia de medida, em números reais, de distâncias, ângulos e áreas»[2]

Entendemos que os professores de matemática do ensino básico e secundário têm hoje estas duas vias à sua disposição, quando estão a propor actividades em geometria euclidiana aos seus alunos. De acordo com os objectivos de natureza cultural que defendemos para a educação matemática, a experiência dos alunos deve desenvolver-se em diferentes contextos históricos — como são por exemplo o contexto dos *Elementos* e o contexto de uma abordagem moderna de tópicos incluídos, ou não, nos *Elementos*. O essencial é que o professor — e não necessariamente os alunos, antes de terem maturidade para isso — esteja consciente do contexto axiomático em que está a trabalhar, pois disso dependem o significado dos conceitos e os métodos utilizados. Por esta razão, esta segunda nota, embora trate da utilização da secção de outro na construção do pentágono regular — um tópico do livro IV dos *Elementos* — será apresentada no contexto moderno dos postulados métricos da geometria euclidiana. Isso significa por exemplo que no enunciado da proposição II.11, que em linguagem moderna se escreve

Dado um segmento AB, determinar um ponto C em AB tal que a área do rectângulo de lados AB e CB seja igual à área do quadrado de lado AC

a palavra *área* significa *valor numérico da área*, ou seja o produto dos comprimentos de AB e CB ou o quadrado do comprimento de AC.

O leitor não deixará de constatar outras diferenças de terminologia e processos entre as duas notas.

Do rectângulo de ouro ao triângulo de ouro

Seja $ABFG$ um rectângulo verificando a seguinte propriedade (figura 1):

Se construirmos sobre o lado AG o quadrado $ACDG$, então os rectângulos $ABFG$ e $BFDC$ são semelhantes.

É quase imediato que o *ponto C que assim obtemos em AB tem exactamente a propriedade exigida por Euclides para o ponto C na poposição II.11 referida acima*. Na realidade, se os rectângulos $ABFG$ e $BFDC$ são semelhantes, então $AB/BF = AG/CB$. Mas

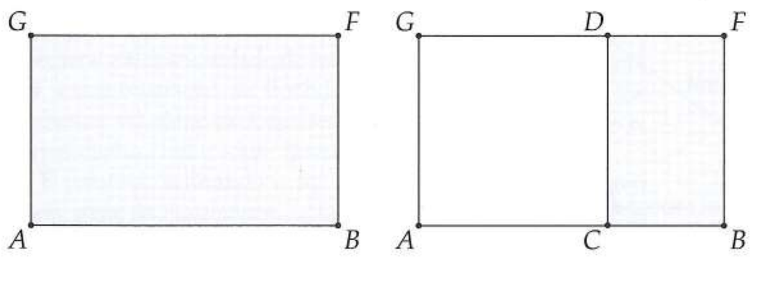


Figura 1

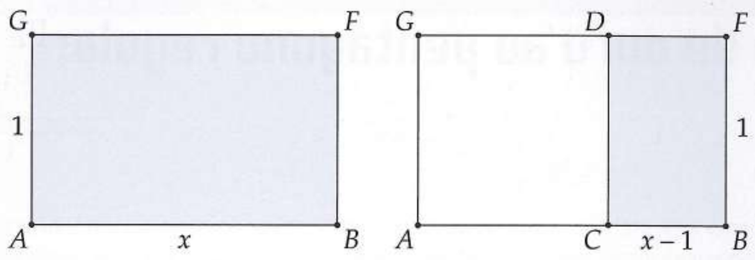


Figura 2

como $BF = AG$, da proporção anterior resulta que $AG^2 = AB.CB$, ou seja, a igualdade das áreas do quadrado e do rectângulo referidos por Euclides. A um rectângulo verificando aquela propriedade passou no séc. XIX a designar-se por *rectângulo de ouro*.

Além disso, a secção do segmento AB de acordo com a proposição II.11 passou a chamar-se *secção de ouro* e à razão entre o lado maior e menor do rectângulo de ouro chama-se agora *razão de ouro*. Um pouco de álgebra permite-nos encontrar o valor numérico da razão de ouro.

Tomemos para unidade de medida o lado menor do rectângulo de ouro, e designemos por x o lado maior (figura 2).

Então teremos $x/1 = 1/(x-1)$ ou $x(x-1) = 1$ e a raíz positiva desta equação é $(1+\sqrt{5})/2$, ou seja o irracional, habitualmente designado pela letra grega ϕ,

$$\phi = 1.61803\ldots$$

Este número é habitualmente designado por *número de ouro*.

Como iremos ver, uma das construções que Euclides pretende fazer, no livro IV dos Elementos, é a do pentágono regular. Foi para isso que enunciou a prop. II.11 e chegou ao que hoje chamamos razão de ouro. Para ter tudo o que precisa para construir o pentágono regular, apenas lhe falta construir um triângulo isósceles especial a que hoje chamamos *triângulo de ouro*. É o objectivo da proposição IV.10:

Construir um triângulo isósceles em que cada um dos ângulos da base seja duplo do restante ângulo.

Nota. Como dissemos na Introdução, iremos realizar esta construção no contexto dos postulados métricos, e portanto afastamo-nos da construção descrita por Euclides nos *Elementos*.

Seja AB um segmento qualquer e seja C um ponto que divide o segmento AB na secção de ouro (figura 3a). Construamos o ponto D, intersecção da mediatriz do segmento CB com a circunferência de centro C e raio CA. Se unirmos os pontos A, C e B com D, como o ângulo ABD é comum aos triângulos ABD e DCB e se verifica (pela razão de ouro) a proporção $AB/BD = BD/CB$, aqueles triângulos são semelhantes e portanto têm os ângulos iguais dois a dois. Logo, o ângulo BCD, externo do triângulo isósceles ACD, é igual ao dobro do ângulo CDB, como pretendíamos. Construímos assim um triângulo nas condições da proposição IV.10.

Do triângulo de ouro ao pentágono regular

Euclides pretende em seguida construir um pentágono regular; é a proposição IV.11:

Inscrever um pentágono regular numa dada circunferência.

Seja dada então a circunferência c_1. O primeiro passo a dar é inscrever nessa circunferência um triângulo de ouro. Para isso construímos um qualquer triângulo de ouro, por exemplo PQR. E depois construímos a respectiva circunferência circunscrita, seja c_2. Como duas circunferências são sempre homotéticas, determinamos o centro de homotetia construindo a semirecta

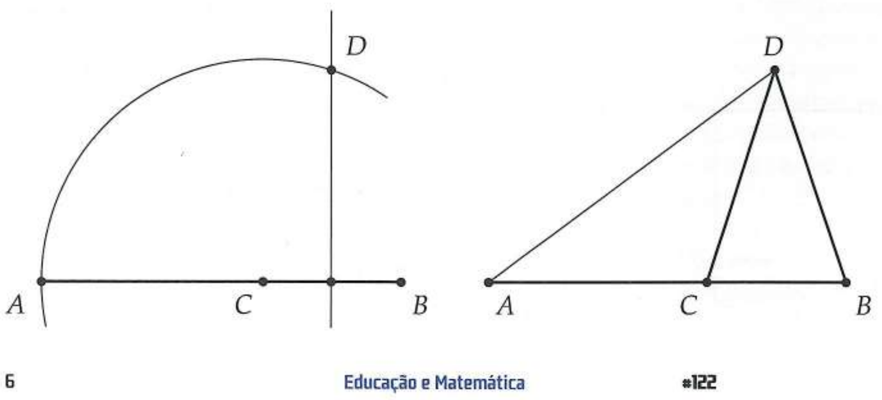


Figura 3

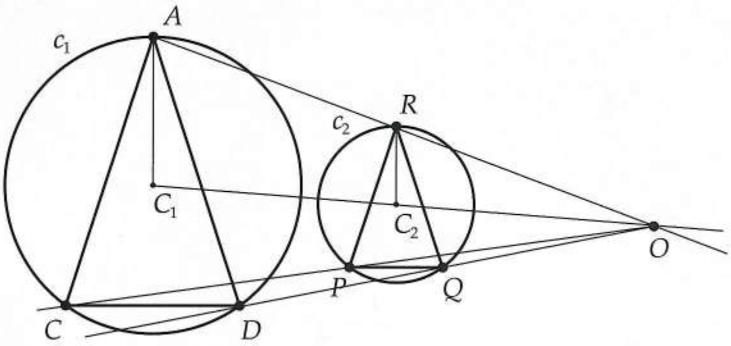


Figura 4

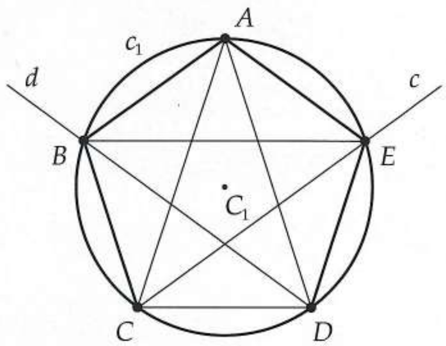


Figura 5

Prop.IV.11. Inscrever um pentágono regular numa circunferência					
Prop. I.9. Construir a bissectriz de um ângulo dado.	**Prop.III.26.** Em circunferências iguais, ângulos iguais subtendem arcos iguais, estejam os vértices nos centros ou sobre as circunferências.	**Prop.III.27.** Em circunferências iguais, ângulos que subtedem arcos iguais são iguais, estejam os vértices nos centros ou sobre as circunferências.	**Prop.III.29.** Segmentos de circunferências semelhantes em segmentos de recta iguais são iguais entre si.	**Prop.IV.2.** Construir uma corda numa dada circunferência igual a um segmento dado que não seja maior do que o	**Prop.IV.10.** Construir um triângulo isósceles em que cada ângulo interno da base é igual ao dobro do terceiro ângulo.
I.1 I.8 Def 20 Pos 1 I.3	I.4 III 24 Def 11	I.23 I.26 III 20	I.4 III 1 III 27	I.32 III 16 III 32 Def 2	I.5 I.6 I.32 II 11 III 32 III 37 IV 1 IV 5

...

Tabela 1

dos centros, C_1C_2 e a semirecta AR que une as extremidades de dois raios paralelos. AC_1 e RC_2. O centro de homotetia é a intersecção O dessas duas semi-rectas, e o factor de homotetis é AC_1/RC_2. O triângulo de ouro procurado é então a imagem por essa homotetia, CDA, do triângulo PQR.

O pentágomo regular procurado inscrito na circunferência c_1 é agora de construção imediata (figura 5). Basta determinar as bissectrizes d e c dos ângulos da base do triângulo CDA, e construir as intersecções dessas bissectrizes, B e E, com c_1, encontrando assim os cinco vértices A, B, C, D, E do pentágono procurado. A prova de que obtivémos assim realmente um pentágono regular é, tendo em conta a construção feita, quase imediata, e fica ao cuidado do leitor. O leitor interessado poderá ver a demonstração de Euclides, recorrendo à tradução dos *Elementos* tal como está apresentada na *web* por David Joyce, http://alepho.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html.

É possível, utilizando o *site* de Joyce, e interessante, *para quem gosta de matemática*..., fazer um trabalho (pelo menos iniciá-lo) de reconstituição de todas as proposições, definições e postulados de Euclides necessários para a construção do pentágono regular dos *Elementos*. A tabela seguinte mostra o início dessa pesquisa.

Na primeira linha vemos a Proposição IV.11 (livro IV, proposição 11) com o pedido de construção de um pentágono regular inscrito numa circunferência. Na segunda linha escrevemos as proposições a que recorre Euclides (I.9, III.26, III.27, III.29, IV.2 e IV.10), na demonstração de IV.11. Na terceira linha, por óbvia falta de espaço, apenas escrevemos os números das proposições, definições e postulados a que Euclides recorre para demonstrar cada proposição da linha 2. E a pesquisa não terminaria aqui, obviamente...

Notas

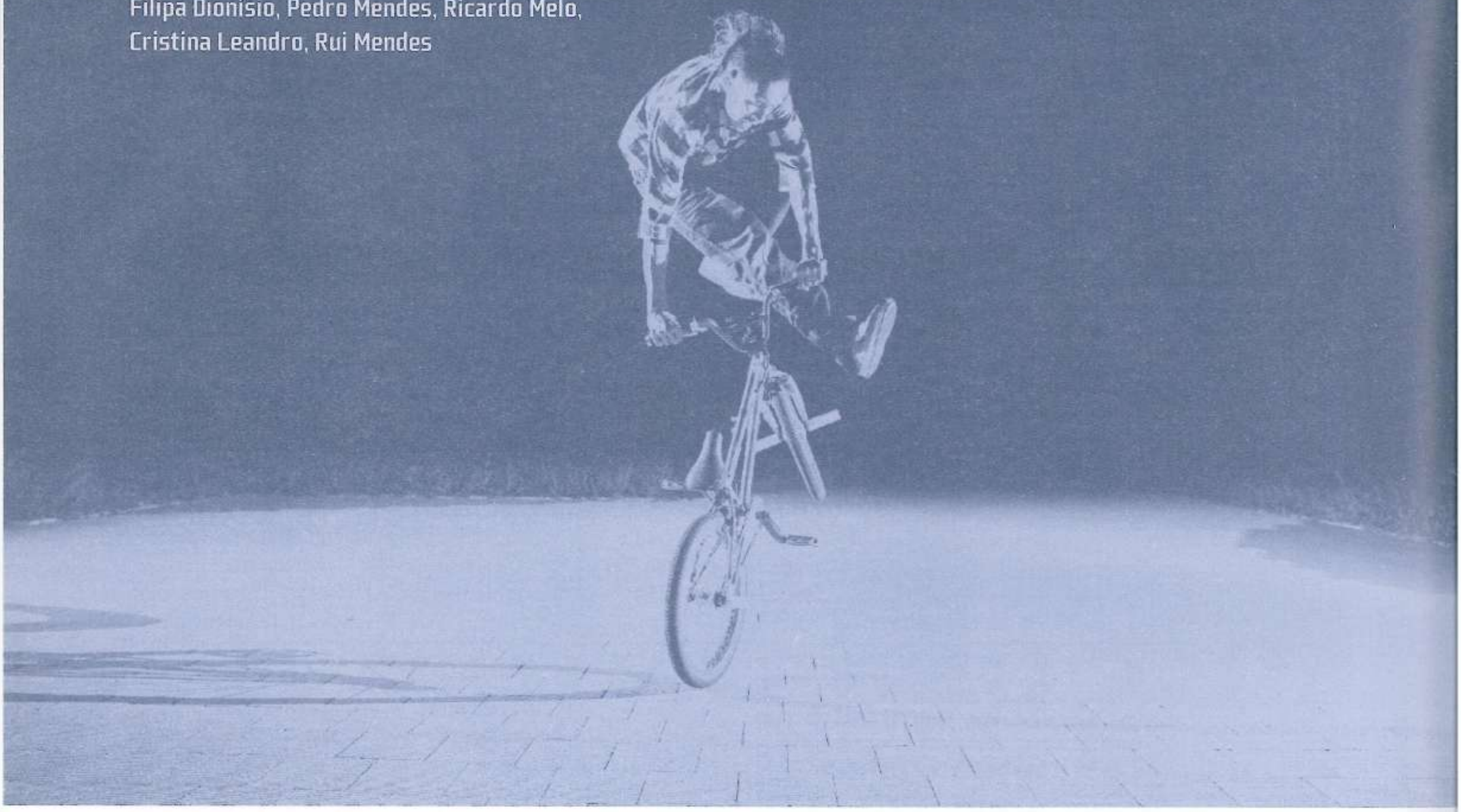
(1) O autor escreve segundo a anterior ortografia

(2) Geometry, Edwin E. Moise e Floyd L. Downs, Jr., Teacher's Edition, pág. 11. O magnífico livro sobre a *Geometria Euclidiana*, de Franco de Oliveira, segue também a via métrica.

Eduardo Veloso

A Flatland, a Roamer e o Corpo – exemplo de uma aprendizagem interdisciplinar para o 1.º Ciclo do Ensino Básico

Filipa Dionísio, Pedro Mendes, Ricardo Melo,
Cristina Leandro, Rui Mendes



Enquadramento

O presente artigo descreve uma experiência realizada, através de uma metodologia interdisciplinar, em 6 turmas do 3.º ano de escolaridade, envolvendo um total de 87 alunos, com idades compreendidas entre os 8 e 9 anos, oriundas de 5 escolas do concelho de Coimbra.

Desenvolveu-se, a partir da articulação entre a Matemática e a Expressão e Educação Físico-Motora, uma actividade lúdica tendo subjacente uma adaptação da história, *Flatland*, e a participação de um recurso tecnológico, a tartaruga *Roamer*. A sessão foi concebida de modo que os alunos apreendessem conceitos de Geometria e Medida, através de propostas corporais e motoras, usando o corpo como veículo de aprendizagem, aprendendo através do concreto, experimentando e «fazendo».

Descrição da actividade – Conteúdos e metodologia

A conexão entre a Matemática e o Corpo procurou explorar o conceito de dimensão através das grandezas — comprimento, área e volume, associadas, respectivamente, aos «Mundos Linear, Plano e Tridimensional». Os exercícios do corpo basearam-se nas tarefas corporais e motoras referidas no Programa de Expressão e Educação Físico-Motora, englobando os blocos «Actividades Rítmicas Expressivas — Dança» e «Perícia e Manipulação». O Quadro 1 apresenta os conteúdos desenvolvidos, nas duas áreas disciplinares, durante a sessão.

As sessões foram dinamizadas na sala das respectivas turmas, no período das Actividades de Enriquecimento Curricular, com a duração de 45 minutos. Tal procedimento implicou a reorganização da sala de aula, de forma a criar um espaço livre de 4m × 7m. O facto de a sala apresentar reduzidas dimensões e o número médio de alunos por turma situar-se sensivelmente nos 20 alunos, deu origem à divisão das turmas em 2 grupos, o que permitiu trabalhar, no máximo, com 10 alunos de cada vez. O primeiro grupo funcionou das 15h45 às 16h30 e o segundo das 16h35 às 17h20.

A Sessão

A sessão foi desenvolvida em três partes correspondendo, respectivamente, aos «mundos linear, plano e tridimensional».

Conteúdos	
Matemática	Expressão e Educação Físico-Motora
Geometria **Orientação espacial** Situar-se no espaço em relação aos outros e aos objectos, relacionar objectos segundo a sua posição no espaço; visualizar e descrever posições, direcções e movimentos. **Figuras no plano e sólidos geométricos** Reconhecer propriedades de figuras no plano; construir sólidos geométricos analisando as suas propriedades; resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais. **Medida** Compreender as noções de comprimento, área e volume; realizar medições utilizando unidades de medida convencionais (SI); realizar estimativas.	**Actividades Rítmicas Expressivas (Dança)** **Movimentos locomotores** Andar, andar de cócoras, deslizar, quatro apoios, rastejar. **Movimentos não locomotores** Gestos **Equilíbrios** Representação corporal **Perícia e Manipulação – bolas** Lançar, receber, ressaltar e equilibrar a bola com diferentes partes do corpo. Saltar com a bola «presa» em diferentes partes do corpo.

Quadro 1. Conteúdos da Matemática e de Expressão e Educação Físico-Motora abordados na sessão (Adaptado de: Organização Curricular e Programas do Ensino Básico – 1.º Ciclo, 2004; Programa de Matemática do Ensino Básico, 2009).

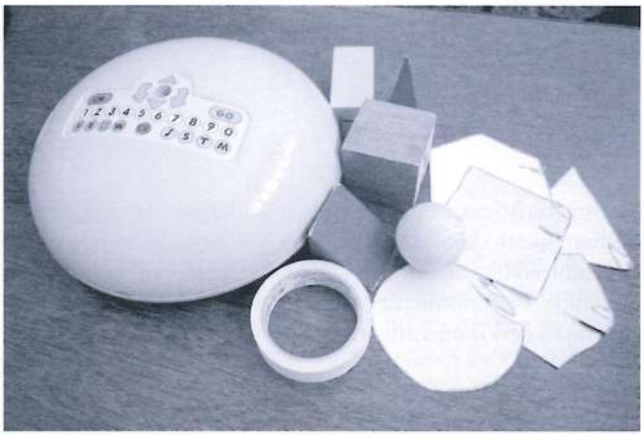


Figura 1. Materiais utilizados na actividade – tartaruga *Roamer*, sólidos geométricos, personagens da *Flatland* em cartolina e fita adesiva.

Figura 2. O deslocamento no «Mundo Linear»

A introdução a cada «mundo» ocorreu através da audição de uma parte da história, seguida da tarefa matemática e corporal/motora. (Figura 1)

Mundo Linear

Iniciou-se a sessão com a seguinte narrativa:

Era uma vez um Quadrado que vivia na *Flatland*, o País Plano. Para além do Quadrado viviam neste país Segmentos de Recta, Triângulos, Quadrados, Pentágonos, Hexágonos, Círculos e outras figuras. Certa noite, o Quadrado sonhou que tinha ido viajar até ao País Linear. Verificou que os habitantes deste país se deslocavam ao longo de uma linha recta. Nenhum podia mover-se para a direita ou para a esquerda para dar passagem aos outros. Vizinhos uma vez, vizinhos para sempre.

Após ouvirem a história, os alunos formaram grupos e cada um criou o seu «Mundo Linear», usando, para o efeito, a tartaruga *Roamer*, a qual foi programada para se deslocar 3 metros. Previamente as crianças tinham sido ensinadas a trabalhar com este recurso. À medida que a *Roamer* se deslocava os alunos, usando fita adesiva, marcavam o seu trajecto, construindo um hipotético segmento de recta.

De seguida, os alunos imaginaram que seriam habitantes do «Mundo Linear», deslocando-se, a andar, só ao longo do segmento de recta para a frente, para trás e lateralmente. Facilmente concluíram o quanto seria redutor viver num mundo com estas características. (Figura 2)

Procurou-se, ainda na tarefa corporal/expressiva, que os alunos imaginassem o modo de comunicação usado pelos habitantes deste «mundo». Para além dos sons que cada um podia emitir para se fazer reconhecer, foi realizada a seguinte tarefa: o primeiro elemento da coluna realizou vários gestos, com a intenção de transmitir uma mensagem ao colega do

Figura 3. Os alunos no interior do polígono junto de uma figura plana.

Figura 4. A introdução da bola e o deslocamento no «Mundo Tridimensional»

lado pois não podia sair do segmento de recta, terminando a sua acção com uma palma. O elemento seguinte repetiu esta proposta, transmitindo a informação ao outro colega e assim sucessivamente. Quando «chegou» ao último elemento, este deslocou-se, a andar, até à extremidade do segmento de recta e os outros seguiram-no. A mensagem tinha chegado ao destino e foi executada.

Mundo Plano

A narrativa continuou com seguinte trecho:

Quando acordou, o Quadrado reflectiu sobre a monotonia do País Linear. No País Plano a liberdade de movimentos era bastante superior, podiam mover-se livremente, sobre toda a superfície plana, não tendo a capacidade de se elevar ou mergulhar abaixo dela.

Partindo do segmento de recta já traçado, cada grupo programou a tartaruga para que sequencialmente marcasse 3 segmentos de recta colocados topo a topo, desenhando um polígono, tendo sido igualmente delimitado com fita adesiva. Estava concebido o «Mundo Plano». No interior de cada polígono foram colocados alguns «habitantes» deste «mundo», peças de um tangram chinês.

Finalizada a tarefa de matemática, os alunos deslocaram-se, a andar, pelo interior do polígono e quando ouviram uma palma, posicionaram-se junto de uma figura plana dispersa no seu mundo. (Figura 3)

Seguidamente, as crianças realizaram, no soalho, a figura plana seleccionada, com os deslocamentos possíveis atendendo às características deste «mundo»: andar, andar de cócoras, deslizar, quatro apoios e rastejar. A vivência do mundo plano terminou com os alunos a representarem corporalmente a figura escolhida. Posteriormente, e mantendo a posição corporal, realizaram os deslocamentos anteriores.

Mundo Tridimensional

A história chegou ao seu final:

Certo dia, o Quadrado recebeu a visita de uma esfera que lhe falou do País das Três Dimensões. Neste país a diversidade de movimentos ainda é superior, é possível deslocar-se para cima e para baixo de uma superfície.

Os alunos facilmente perceberam que neste caso não podiam conceber o «Mundo Tridimensional» através da programação da tartaruga *Roamer*, uma vez que esta não pode efectuar movimentos ascendentes nem em profundidade. Também concluíram que vivem num mundo tridimensional e como tal os objectos apresentam três dimensões, sendo possível executarem uma multiplicidade de movimentos com o seu corpo. Assim, efectuaram as seguintes acções de perícia e manipulação com a bola: ressaltos e lançamentos verticais com recepção; equilíbrio da bola em diferentes partes do corpo (cotovelo, cabeça, joelho e costas) e saltos com a bola «presa» em diferentes partes do corpo (queixo, cotovelos, joelhos e tornozelos). (Figura 4)

O desfecho da actividade ocorreu com a representação corporal e em grupo, de um sólido geométrico. (Figura 5)

Figura 5. Inicio da construção corporal de um cubo

Conclusão

Esta experiência pretendeu promover aprendizagens através da articulação de saberes, para que os alunos experimentassem diferentes modalidades de trabalho e situações de ensino alternativas. Englobou, assim, três vectores de actuação que incidiram em experiências de aprendizagem activas (envolvem o corpo como instrumento de aprendizagem), integradas (partilha entre áreas disciplinares) e criativas (a descoberta de novas soluções é conduzida pelo corpo e imaginação), podendo ser adoptada como uma ferramenta pedagógica na prática lectiva pelos actores educativos.

Referências

Abbott, E. (2006). *Flatland — Uma aventura em muitas dimensões*. Tradução de Hélder Moura Pereira, Assírio & Alvim.

Ashlock, R. & Humphrey, J. (1976). *Teaching elementary school mathematics through motor learning*. Springfield, IL: Charles C Thomas.

Cone, T, Werner, P. & Cone, S. (2009). *Interdisciplinary Elementary Physical Education*. Second Edition. Human Kinetics. USA.

Cratty, B. (1985). *Active learning: gamesto enhance academic abilities*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Del Grande, J. (1990). Spacial Sense. *Aritmetic Teacher*, 37 (2): 14–20.

Gilbert, A. (1977). *Teaching the three Rs through movement experiences*. New York: Macmillan.

Griss, S. (1998). *Minds in Motion. A Kinesthetic approach to teaching elementary curriculum*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Humphrey, J. (1974). *Child learning through elementary school physical education*. Duduque, IA: Brown.

Lindqvist, G. (2001). The relationship between play and dance. *Research in Dance Education*, 2 (1): 41–52.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E.G. & Oliveira, P.A. (2009). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação. Lisboa: DGIDC

Ministério da Educação (1992). *A Educação Física no 1.º ciclo do Ensino Básico*. Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário. Lisboa.

Ministério da Educação — Departamento da Educação Básica. (2004). Organização curricular e programas — Ensino Básico — 10.º Ciclo. 4.ª Edição. Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2006). *Relatório Intercalar de Acompanhamento das Actividades de enriquecimento curricular*. Comissão de Acompanhamento do Programa (CAP). Acedido em: 24 de Maio de 2010, em: http://www.drealentejo.pt/upload/aec/AEC_Relatorio_Intercalar_CAP.pdf

Ministério da Educação — Departamento da Educação Básica. (2007). Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais. 2.ª Edição. Lisboa: Ministério da Educação.

Minton, S. (2003). Using movement to teach academics: An outline for success. *Journal of Physical Education, Recreation & Dance*. 74 (2): 36–40.

Pomba, A., Guimarães, H.M. & Levy, T. (1993). *A interdisciplinaridade. Reflexão e experiência*. 1.ª Edição. Lisboa: Texto Editora, Lda.

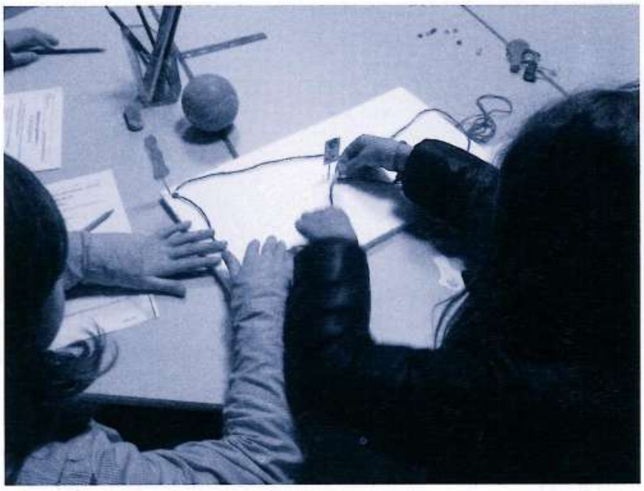
Werner, P. & Burton, E. (1979). *Learning through movement*. St. Louis: Mosby.

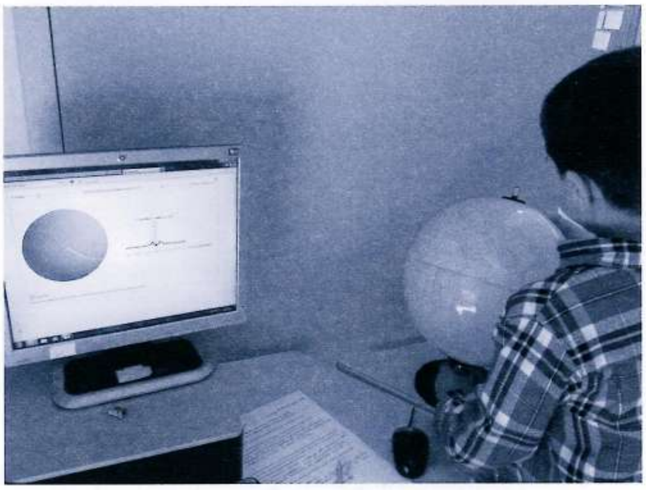
Filipa Dionísio
Área Científica de Matemática
ESE de Coimbra

Pedro Mendes, Ricardo Melo, Cristina Leandro, Rui Mendes
Área Científica de Educação Física e Desporto
ESE de Coimbra

Matemática, onde estás?

Na revista n.º121 foram apresentadas algumas tarefas referentes à Geometria do Planeta Terra. Deixamos agora um breve testemunho da implementação de adaptações dessas tarefas na Escola da Ponte.





A tarefa do 1.º Ciclo, «O Principezinho», foi adaptada e desenvolvida pelos alunos do Núcleo de Iniciação (maioritariamente, alunos do 2.º ao 4.º anos), no âmbito do Problema da Quinzena, momento de resolução de problemas matemáticos. O recurso a materiais manipuláveis foi promotor da compreensão mais profunda das noções geométricas em estudo. A avaliação desta tarefa é, portanto, bastante positiva.

Relativamente às tarefas do 3.º Ciclo, optamos por desenvolver «O caminho mais curto». Esta tarefa foi desenvolvida, individualmente, por alunos dos Núcleos de Consolidação e de Aprofundamento (maioritariamente, alunos do 2.º e 3.º Ciclos). A reação dos alunos foi bastante positiva, tendo sido necessária uma maior orientação para encontrarem a forma de calcular a distância entre dois pontos na superfície esférica. Esta tarefa constituiu um momento matematicamente interessante, tendo permitido aos alunos um primeiro contacto com a Geometria Esférica.

Paulo Machado
Escola da Ponte

Descobrir o planeta Terra: o Tempo e o Espaço em Geologia

Neste número da E&M desafiámos o *Laboratório de Geologia Experimental* (LabGExp), da unidade de investigação *Centro de Geologia da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*, a integrar uma perspetiva matemática no trabalho que tem desenvolvido para melhor compreendermos o Planeta Terra.

A evidência da evolução num Planeta por descobrir emergiu, desta vez, de uma feliz colaboração entre a Geologia e a Matemática.

O *LabGexp*, tem vindo a desenvolver, desde há alguns anos, atividades práticas e experimentais para aplicação no Ensino e na Divulgação da Geologia. As atividades são, em geral, de fácil execução e utilizam materiais acessíveis e pouco dispendiosos (Bolacha *et al.*, 2006).

No artigo que se segue são apresentadas conexões entre a Geologia e a Matemática, onde a relatividade da medida do tempo em Geologia tem consequências no desenvolvimento de sentido de número ao nível do 1.º ciclo e da relação funcional na formação da zona externa de cadeias de montanhas ao nível do 3.º ciclo e do Ensino Secundário.

Joana Latas

A Geologia estuda os processos externos e internos que decorrem no nosso planeta. Os primeiros como, por exemplo, a erosão e a sedimentação, são, em geral, observáveis. O mesmo não se passa com a grande maioria dos processos internos, como a dinâmica do manto ou da crusta inferior, o que obriga à utilização de métodos indiretos, como a geofísica ou às simulações em laboratório ou computacionais.

Os processos internos são, usualmente, muito lentos, levando milhões de anos a decorrer, como a formação de uma cadeia de montanhas ou a abertura de um oceano. Para além disso, estes processos decorrem em áreas geográficas da ordem dos milhares de quilómetros. Mas enquanto decorre, por exemplo, a formação de uma cadeia de montanhas, no seu *interior*, ocorrem transferências de materiais que são transformados e transportados para fora da área que está a ser comprimida (Ribeiro, 2002) como uma esponja ao ser espremida. Isto modifica, física e quimicamente, os minerais que constituem as rochas tendo repercussões a várias escalas: à escala megascópica, neste caso, da cadeia de montanhas; à escala macroscópica, ao nível da amostra de rocha que cabe na palma da mão, a chamada amostra de mão; e mesmo à escala microscópica, unicamente observável em lâmina delgada com o auxílio de um microscópio.

As grandes dimensões espácio-temporais, como no caso da cadeia de montanhas, são assim comuns em Geologia, circunstâncias em que a quantificação matemática é importante para a compreensão de processos a diversas escalas, e em que a compreensão dos famosos números muito grandes é crucial (Deus *et al.*, 2011). Assim, a quantificação e outros métodos matemáticos permitem complementar a descrição e a observação, métodos em que sempre se baseou a Geologia.

Conexões entre a Geologia e a Matemática

A Matemática é uma ferramenta fundamental utilizada profusamente pelos cientistas, embora, seja comum o equívoco de, no Primeiro Ciclo do Ensino Básico, assumir-se que quando os alunos estão a estudar Ciências (Estudo do Meio) não precisam de usar as competências que desenvolvem na Matemática. No documento oficial de Orientações Curriculares e Programas para o 1.º Ciclo do Ensino Básico (ME, 2004) para o Estudo do Meio menciona-se que os alunos deverão, a partir desse contexto, «aprender a organizar a informação e estruturá-la de forma que ela se constitua em conhecimento». Em determinado tipo de investigações, esta afirmação está claramente a apelar ao uso de competências e conhecimentos sobre análise quantitativa de dados. Por outro lado, tem-se verificado que a aplicação da Matemática em atividades integradas noutras áreas disciplinares prepara os alunos a pensarem de forma analítica e crítica, o que virá a ter um bom efeito a longo prazo no desenvolvimento e aplicação do raciocínio matemático e na respetiva capacidade de o transferir para múltiplos contextos da vida (Kelsey & Steel, 2001).

Os *currículos* em anos subsequentes ocultam a relevância da Matemática para *descobrir o planeta Terra*, nomeadamente as Orientações Curriculares do 3.º ciclo de Ciências Naturais (ME, 2001a), os programas de Biologia e Geologia do Ensino Secundário (Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias), disciplina específica de prosseguimento de estudos (ME, 2001b, 2003). Esta situação permite que um estudante chegue à Universidade, tenha acesso, por exemplo, a um curso de Geociências sem ter experimentado a real importância da análise e dos métodos quantitativos no estudo da Terra.

Algumas ideias de interpretação matemática da Geologia ao longo do percurso escolar

Exemplo 1: Construção de um friso cronológico sobre a História da Terra

Os fenómenos geológicos podem ter durações muito variáveis como, por exemplo:

Figura 1. Alunos e professora a analisarem uma carta geológica.

i) menos de um segundo (velocidades subsónicas), instalação de kimberlitos — as rochas portadoras de diamantes;
ii) breves segundos a minutos, sismos e algumas torrentes de lama, os *lahares*;
iii) anos, inclinação de árvores por deslizamento do substrato e assoreamento de rios;
iv) décadas, deslocamentos dos glaciares (alguns quilómetros);
v) séculos, formação de lagunas como a Ria de Aveiro ou o crescimento visível (alguns cm) de estalactites e estalagmites;
vi) milhares de anos, alteração da forma e erosão de algumas cadeias de vulcões.
vii) milhões anos, formação de cadeias de montanhas e de oceanos.

Algumas destas unidades de contagem do tempo são familiares para os alunos da segunda metade do Primeiro Ciclo do Ensino Básico. Umas são de uso diário e outras são abordadas no estudo da História da Humanidade. Porém, tudo se torna mais vago quando, por exemplo ao estudar o Sistema Solar (Estudo do Meio — 3.° e 4.° anos) se trabalha com fenómenos que duram vários milhões de anos (idade da Terra — 4600 milhões de anos). Milhões de anos é a unidade de tempo mais utilizada em Geologia.

Com efeito, só a «dilatação» da escala do tempo permite abordar a História da Terra de um modo pleno e verdadeiramente dinâmico. De facto, alguns dos episódios mais mediatizados da história deste planeta decorreram ao longo de muitos milhões de anos. Disto são exemplos: a origem dos primeiros seres vivos (microrganismos), a fragmentação da *Pangea*, a extinção dos dinossáurios, a origem e evolução dos seres humanos (género *Homo*) e o momento a partir do qual eles foram capazes de controlar o fogo.

O uso de analogias pode ser de grande utilidade para potenciar a imaginação dos alunos, especialmente se o conceito científico a abordar for muito abstrato. A grandeza «tempo» assume um caráter tanto mais abstrato quanto menor for a idade dos alunos. Por essa razão, pode-se recorrer a analogias para ajudar os alunos a perceberem a ordem de grandeza dos números envolvidos quando se estuda a História da Terra, por exemplo bagos de arroz. Pode-se posteriormente construir um friso cronológico sobre a História da Terra, no qual se representam, com rigor matemático, alguns episódios reais evita conceções alternativas.

O estudo dos principais tipos de rochas e de alguns aspetos geomorfológicos das várias regiões do território português, continental e insular (Estudo do Meio — 3.° e 4.° anos), pode também tornar-se muito mais interessante se os alunos perceberem alguns aspetos da história geológica desses locais. Uma vez que o curriculum refere o uso de mapas para localizar e estudar os principais rios e serras de Portugal, pode utilizar-se uma carta geológica simplificada de uma região para saber o tipo de rochas aí existentes, bem como as suas idades (figura 1).

Colocando uma maior ênfase nas conexões entre as várias áreas curriculares e os tópicos matemáticos, ao nível do 1.° ciclo, propõe-se conjugar as propostas curriculares da Matemática, no tema Geometria, e a área curricular de Expressão e Educação Plástica, no Bloco 2 (Descoberta e organização progressiva de superfícies — 3.° e 4.° anos). Para tal, sugere-se a exploração didática de documentos gráficos, tais como frisos, mapas e plantas, recorrendo a construções geométricas e aos instrumentos

Figura 2. Rochas deformadas, na Praia de Monte Clérigo (concelho de Aljezur), com mais de 300 Ma (foto cortesia do Prof. Nuno Pimentel).

fundamentais da construção geométrica (régua, esquadro e compasso).

O programa de Matemática (ME, 2007) refere que o propósito principal do tema de ensino «Números e Operações» é o de «desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos.» Para tal, sugere-se que os alunos realizem atividades que envolvam: contar, comparar números, ler e representar números até ao milhão, compreender e usar a regra de multiplicar um número por 10, 100 e 1000. Ao mesmo tempo, espera-se que os cálculos tenham uma aplicação prática nas atividades propostas.

Exemplo 2: Formação da zona externa de uma cadeia de montanhas

Os oceanos e as cadeias de montanhas podem ser, ao longo do tempo, duas faces da mesma moeda, porque é vulgar que, enquanto um oceano se fecha, se vá formando uma cadeia de montanhas, ao longo de muitos milhões de anos. Assim acontece porque a Terra tem volume e perímetros constantes (i.e. não se contrai nem se dilata).

As zonas externas das cadeias de montanhas formam-se por deformação dos sedimentos que se vão acumulando na zona imersa dos continentes e nos fundos oceânicos. À medida que o processo de subducção vai puxando a placa litosférica em que esses sedimentos (constituídos predominantemente por areias e argilas) se acumulam, os mesmos vão sofrendo enrugamento e fracturação.

A deformação e compensações isostáticas são responsáveis pelo levantamento da cadeia, permitindo que esses sedimentos aflorem à superfície, transformados em rochas metamórficas, por pressão e temperatura a que foram sujeitos. Hoje podemos observar o resultado das transformações que aconteceram num passado longínquo, em diversas regiões do país, como por exemplo, na Costa Sudoeste do país — ou Costa Vicentina (figura 2).

Apresentamos uma experiência (Malavieille, 2010; Bolacha *et al.*, 2011), desenvolvida no LabGExp, que simula a formação da parte externa de uma cadeia de montanhas, associada a uma zona de subducção, como a que terá levado à formação de rochas que hoje se observam na Costa Vicentina (figura 2).

Trata-se de uma simulação análoga, na qual se comparam alguns aspetos do modelo com o que acontece na realidade. As areias simulam os sedimentos reais enquanto a rampa simula parte da cadeia de montanhas já formada (figura 3). O modelo tem limites, como as paredes (transparentes) que não existem na realidade. Torna-se assim necessário discutir com os alunos as principais diferenças e semelhanças entre o modelo e o processo real. A caixa tem os topos libertos e o acetato (figura 3A), sobre o qual se despejam camadas de areias (figura 3B), simula a placa em subducção. Este é puxado lentamente à mão, processo durante o qual é possível observar a formação de figuras geométricas como dobras e falhas, bem como a evolução da deformação (figuras 3 e 4).

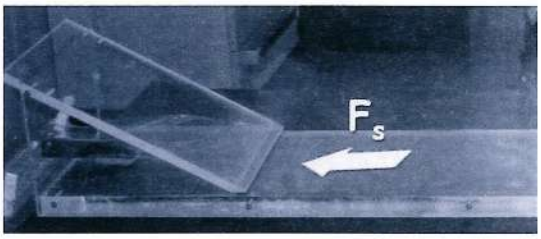


Figura 3a. As areias são despejadas em cima de um acetato. Este passa por baixo da rampa, e é puxado lentamente à mão. O acetato simula a placa de subducção. F_s = Força exercida sobre o acetato.

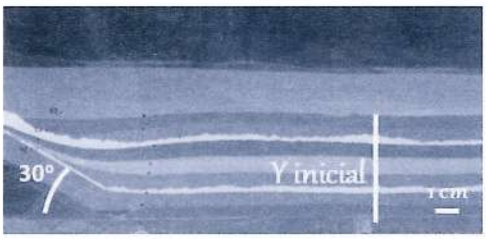


Figura 3b. Y inicial = Espessura inicial da pilha de areias (entre 3 e 4 cm). O pó branco (gesso) entre camadas de areia permite evidenciar melhor as dobras e falhas que se formam.

Figura 4. Aspecto final da simulação da zona externa da cadeia de montanhas. À medida que se puxa o acetato, a pilha de areias encurta (*x*) e aumenta a espessura (*y*).

Tabela 1. Exemplo de tabela a elaborar durante a experiência.

Tempos	t0	t1	t2	t3	t4	t5	t6
Encurtamento (cm)	0	3	12	19,5	28,5	37	50
Espessamento (cm)	0	0,5	2,8	3	4,8	4,8	4,8
Número de falhas	0	1	3	4	8	8	8

A aplicação da matemática nesta experiência é útil por várias razões. A primeira, e mais evidente, é de o modelo ser geometricamente à escala, 1 cm no modelo corresponde a 1 km na realidade. O modelo representado na figura tem 150 × 20 cm, e a multicamada de areias tem cerca de 4 cm de espessura.

Para além disso, é possível estabelecer diversas relações ao longo do processo de simulação, como a relação encurtamento (diminuição do comprimento da pilha de areia) – espessamento (aumento da espessura máxima da pilha de areias).

Os dados a obter serão do tipo dos que constam na Tabela 1, e que foram registados durante a experiência realizada no LabGExp, em intervalos de tempo não regulares, definidos a partir da formação das falhas.

Com estes dados projetados em gráfico Excel® de linhas, pode-se obter o que se observa na figura 5. E projetando as três variáveis em função dos tempos num gráfico de barras obtêm-se as projeções da figura 6.

De modo simplificado é possível verificar, por leitura do gráfico da figura 5, que o espessamento varia (quase) linearmente com o encurtamento até cerca dos 10 cm, valor a partir do qual até cerca dos 30 cm, aumenta mais o encurtamento do que o espessamento. A partir deste valor, só se regista encurtamento, deixando de ocorrer espessamento.

O gráfico da figura 6 reforça o que já se tinha inferido do primeiro gráfico, no entanto, torna-se ainda mais nítida a diferença de variação de valores entre o encurtamento e o espessamento. A relação entre a variação do número de falhas e o espessamento é evidente, sendo que, entre os 20 e os 30 cm de encurtamento, o aumento significativo do número de falhas não se reflete no espessamento.

Possíveis abordagens em sala de aula

Os exemplos apresentados exigem um tipo de raciocínio comum em Geologia, o raciocínio por analogia (Jee *et al.*, 2010). Comparam-se alguns aspetos de objetos e processos que nos são mais familiares com os daqueles que nos interessa compreender, recorrendo a analogias e modelos. Os modelos utilizados no

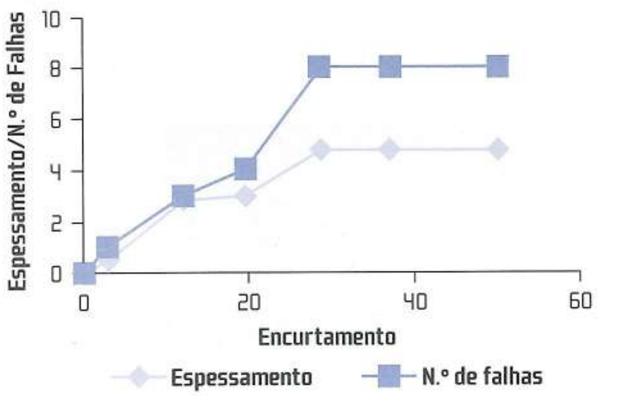


Figura 5. Gráfico Espessamento/Encurtamento e Espessamento/N° de Falhas.

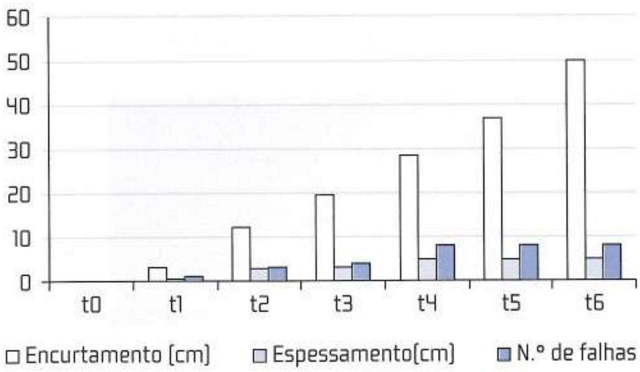


Figura 6. Variação das variáveis Encurtamento, Espessamento e número de falhas ao longo do tempo.

Ensino das Ciências representam, de forma simplificada, objetos e processos naturais. Nestes exemplos, o número de bagos de arroz, no primeiro, é comparado com os números (de anos) do tempo geológico longo, enquanto as areias, utilizadas no segundo exemplo, simulam alguns tipos de rochas (litologias) terrestres. É com base nessas similaridades que utilizamos arroz em vez de números, e areias no lugar de rochas.

Cada exemplo foi explorado no formato de tarefa para sala de aula. A primeira, dirigida a alunos do 1.° Ciclo do Ensino Básico está disponível em página no MPT2013 na APM (mpt2013.apm.pt), e a segunda, por exigir um maior grau de abstração, é dirigida a do 3.° Ciclo do Ensino Básico ou do Secundário, de preferência de forma interdisciplinar, Matemática e Ciências Naturais ou Matemática e (Biologia e) Geologia. Esta última é apresentada na secção de materiais para sala de aula neste número da E&M.

Referências bibliográficas

Berna, F., Goldberg, P., Horwitz, L. K., Brink, J., Holt, S., Bamford, M., and Chazan, M. (2012). Microstratigraphic evidence of in situ fire in the Acheulean strata of Wonderwerk Cave, Northern Cape province, South Africa. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 109, n°. 20, p. E1215–E1220.

Bolacha, E.; Moita de Deus, H.; Dias, R.; Fonseca, P.E. (2011). Modelação Análoga de um Episódio da Geologia de Portugal. *Modelação de Sistemas Geológicos. Livro de homenagem ao Professor Manuel Maria Godinho*. Laboratório de Radioactividade Natural da Universidade de Coimbra. Coimbra. pp. 125–140.

Bolacha, E.; Moita de Deus, H. A.; Caranova, R.; Silva, S.; Costa, A. M.; Vicente, J.; Fonseca, P. E. (2006). Uma Experiência na Formação de Professores: Modelação Analógica de Fenómenos Geológicos — A Geologia no Laboratório. Geonovas, 20. pp 33–56.

Deus, H. M.; Bolacha, E.; Fonseca, P.E. (2011). Contribuição da Modelação Análoga para a compreensão dos colossais números do Tempo e do Espaço. Resumo no livro de actas do I Congresso Nacional Jovens Investigadores em Geociências, LEG 2011, Estremoz, pp. 43–46.

Jee, B. D.; Uttal, D. H.; Gentner, D.; Manduca, C.; Shipley, T. F.; Tikoff, B.; Ormand, C. J.; Sageman, B. (2010). *Commentary*: Analogical Thinking in Geoscience Education. Journal of Geoscience Education, v. 58, n. 1 p. 2–13.

Kelsey, K., & Steel, A. (2001). *The truth about science — A curriculum for developing young scientists*. Arlington, VA: NSTA. pp. 95–101.

Malavieille, J. (2010). Impact or erosion, sedimentation, and structural heritage on the structure and kinematics of orogenic wedges: Analog models and case studies. GSA *Today*, v.20, n°1. pp. 4–10.

ME (2001a). Orientações curriculares do 3° ciclo do Ensino Básico — Ciências Físicas e Naturais. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

ME (2001b). Programa de Biologia e Geologia. 10.° ou 11.° ano. Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

ME (2003). Programa de Biologia e Geologia. 11.° ou 12.° ano. Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

ME (2004). *Organização Curricular e Programas*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ribeiro, A. (2002). *Soft Plates and Impact Tectonics*. Berlim: Springer-Verlag.

Agradecimentos: A experiência descrita faz parte dos trabalhos de investigação da primeira autora que beneficiou da bolsa da FCT, ref. SFRH/BD/43297/2008 e de concessão de equiparação a bolseiro pelo Ministério da Educação e Ciência.

Edite Bolacha

LabGExp [Laboratório de Geologia Experimental]/Centro de Geologia, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa; Escola Secundária de D. Dinis, Lisboa

Helena Moita de Deus

LabGExp [Laboratório de Geologia Experimental]/Centro de Geologia, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa; Escola EB2,3 Dom Domingos Jardo

Inês Cruz

CREMINER – LARSyS [Centro de Recursos Minerais, Mineralogia e Cristalografia], Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Paulo Emanuel Fonseca

LabGExp [Laboratório de Geologia Experimental]/Centro de Geologia, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa; Departamento de Geologia da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A tarefa que aqui propomos está enquadrada pelo artigo: *Descobrir o planeta Terra: o Tempo e o Espaço em Geologia.*

Nas Ciências Naturais, esta tarefa é perfeitamente enquadrável no programa de 7.°, enquanto no Secundário, é adequado quer no contexto do programa do 10.° como no do 11.° ano [Biologia-Geologia do Curso Humanístico de Ciências e Tecnologias].

Quanto à Matemática, enquadra-se preferencialmente no 3.° Ciclo, 7.° e 8.° anos de escolaridade: conceito de função, função de proporcionalidade direta, estatística – para tratamento de dados com a folha de cálculo. Trabalha também a comunicação matemática, uma vez que o aluno terá de justificar as conclusões obtidas.

Para além destas duas disciplinas poderão contribuir outras, como a Física ou a Geografia, desde que os conteúdos se cruzem.

As propostas que fazemos não passam disso mesmo, permitindo que cada professor explore a experiência de acordo com um sem número de conteúdos e de possibilidades, que passam pelos programas e objetivos das diversas disciplinas bem como pelo nível de complexidade. Aqui demos primazia, como é óbvio, à Matemática.

Edite Bolacha, Helena Moita de Deus, Inês Cruz, Paulo Emanuel Fonseca

Guião para o aluno

A zona externa de uma cadeia de montanhas forma-se por deformação dos sedimentos que se vão depositando nas margens submersas dos continentes e nos fundos oceânicos. Essas margens são ativas, ou seja, fazem parte de uma placa que está a ser subductada. À medida que vai ocorrendo a subducção, os sedimentos vão-se deformando, e a cadeia de montanhas vai aumentando em altura.

Podemos simular este processo através de um modelo análogo. Uma caixa em acrílico, uma pilha de areias e pós, um acetato por baixo dela que a puxa contra uma rampa. A pilha de areias e pós simulam os sedimentos, o acetato simula a placa em subducção e a rampa, parte da cadeia de montanhas já formada.

Com base na experiência que vais observando, propomos que resolvas a seguinte questão:

«Como varia, ao longo do tempo, o espessamento (y) da cadeia de montanhas em função do seu encurtamento (x)?»

1. Começa por fazer uma previsão da relação entre o encurtamento (x) e o espessamento (y) da pilha de areias ao longo do tempo.

2. Com uma régua, um metro ou uma fita métrica, começa por medir o comprimento e a altura inicial da pilha de areias e pós.

Tem em atenção que todos os dados devem ser inseridos em tabelas previamente traçadas, como a que abaixo exemplificamos, em que as variáveis sejam *encurtamento* (x) e *espessamento* (y_1), ou *encurtamento* (x) e *número de falhas* (y_2).

Tempos	t0	t1	t2	t3	t4	t5	t6
Encurtamento (cm)							
Espessamento (cm)							
Número de falhas							

Nota: Os momentos (t0, t1...) em que são registados os valores de x e y não têm valor quantitativo, pois o objetivo é relacionar as outras variáveis.

3. Estabelece um determinado valor de incremento de encurtamento (por exemplo, por cada 1 cm), e faz medições a intervalos regulares do acréscimo do encurtamento relativamente ao inicial, enquanto outro colega (ou grupo de alunos) vai registando o número de falhas formadas para os mesmos valores de encurtamento (figura 1).

4. No final da experiência representa os dados obtidos encurtamento (x) e espessamento (y_1) num referencial cartesiano, e encurtamento (x) e número de falhas (y_2), num outro referencial.
   Escolhe as escalas mais apropriadas, assim como o papel (quadriculado, milimétrico ou semi-log) em que vais representar o gráfico, de modo que ele tenha leitura. Podes também utilizar um programa informático de folha cálculo (ex. Excel®)

5. Responde agora às seguintes questões:
   - **5.1.** Analisa e descreve os gráficos: variação de y em função de x.
   - **5.2.** Explica porque se pode afirmar que o gráfico representa uma função.
   - **5.3.** Identifica as variáveis independentes e as varáveis dependentes, justificando as tuas opções.
   - **5.4.** Existe uma parte do gráfico em que há uma relação de proporcionalidade direta. Identifica para que valores de x isso se verifica e escreve a respetiva expressão algébrica.
   - **5.5.** Compara os teus gráficos com os dos teus colegas, discute com eles os resultados obtidos e justifica eventuais diferenças.

6. No final confronta os dados obtidos com as previsões que tinhas feito no início da experiência. Se não estiverem de acordo tenta explicar porquê, tendo em atenção alguns fenómenos que aconteceram, como a formação das falhas e a diminuição dos espaços entre os grãos de areias, ou seja, a deformação interna da cadeia de montanhas.

Figura 1. Algumas falhas, marcadas a tracejado, que se vão formando à medida que se vai fazendo o encurtamento, e que a deformação vai progredindo. As setas indicam o sentido do deslocamento.

Para além destas tarefas, outro grupo de alunos pode-se encarregar de medir a inclinação de cada falha formada em cada momento do encurtamento. A inclinação da falha é o ângulo que ela faz com a horizontal, e mede-se com um transferidor. Essa variação também pode ser utilizada para a discussão final.

Desenvolvimento da tarefa

Os objetivos da tarefa (que se podem dividir entre as várias disciplinas que contribuam para a resolução do problema como a Geologia, a Matemática, a Física) poderão ser os seguintes:

- Descrever a informação contida no gráfico, isto é, a variação do *espessamento* em função do *encurtamento*, ao longo do tempo, até que o encurtamento deixe de se conseguir fazer;
- Perceber que as variáveis *espessamento* e *número de falhas* são dependentes do *encurtamento*.
- Compreender que a proporcionalidade direta entre os pares de variáveis (x/y) só se verifica até certo ponto, a partir do qual a variação não será linear e tenderá para a estagnação.
- Formular conjeturas que expliquem a variação do *espessamento* em função do *encurtamento* ao longo do tempo, tendo em conta, para além da diminuição do espaço *interno* da pilha de areia, o papel das falhas inversas.
- Comparar os resultados obtidos com o que ocorre na realidade, de acordo com o conhecimento atual, fazendo a devida extrapolação.
- Comunicar as conclusões a que chegou, de uma forma clara e correta, aos seus pares.

Tratando-se de uma simulação de um fenómeno real é importante também investigar em que medida a relação obtida se assemelha à relação real. Esta exigência obriga a que se proceda à comparação do modelo com o que se passa, ou passou, na realidade, inferido principalmente por estruturas (falhas e dobras) que se observam no campo ou nas praias da Costa Vicentina, de contrário a experiência em Geologia não terá sentido.

Da análise dos resultados deve ressaltar a questão:

Mas como se interpretam e justificam todos estes resultados, que, *a priori*, não são os previstos por alunos e professores?

À medida que o acetato é puxado, a pilha de areias vai sendo comprimida contra a rampa. A areia sofre compressão e, atingido o limite de resistência frágil, formam-se falhas.

O encurtamento é feito à custa da diminuição dos espaços vazios entre os grãos de areia e simultaneamente pela formação de falhas e dobras. As falhas mais inclinadas, formadas nos primeiros incrementos, contribuem mais para o espessamento do que as últimas falhas formadas, que são mais *deitadas*. A partir de uma certa altura, o espessamento pára porque a compressão deixa de ser possível: a areia não pode ser mais compactada, até porque o modelo tem limites laterais que por si só, já provocam compressão.

E que dizer quanto ao que se passa na realidade, fazendo a extrapolação?

Bom, na natureza (quase) não existem limites físicos, e o modelo é apenas uma representação à escala megascópica. Por outro lado, a compressão faz-se a todas as escalas. É possível comprimir a rede cristalina, ou seja, diminuir os espaços entre átomos e moléculas. É, por essa razão, e também devido à influência de fatores como a temperatura e a circulação de fluidos, que durante o processo de formação de montanhas, rochas que eram sedimentares ou magmáticas se transformam em rochas metamórficas. Este aspeto reflete-se depois em toda a cadeia de montanhas, permitindo que a compressão continue para além do limite verificado na experiência.

Acabámos de fazer a extrapolação da experiência para o fenómeno real. A que podemos acrescentar outras diferenças entre o modelo e a realidade, como o tempo durante o qual o processo decorre. Não se conhecem outros aspetos como, por exemplo, se todo o fenómeno da formação da zona externa de uma cadeia de montanhas decorre de uma vez só, ou por diversas vezes, de forma descontínua. Não é pois possível conhecer muitos aspetos dos fenómenos geológicos passados, mas apenas simular aproximações que podem ser interpretadas através de métodos quantitativos e gráficos de fácil aplicação.

José Paulo Viana

Coincidências

O Tiago escreveu a idade dele e a do irmão, uma encostada à outra. Ao olhar para o único número assim obtido, o Daniel comentou:

– Repara na coincidência: está aqui precisamente o quadrado da idade do nosso pai.

– Pois é, – disse o Tiago. – Mas o mais curioso é que daqui a onze anos isto volta a acontecer.

Que idades têm eles?

(Respostas até 12 de julho, para zepaulo46@gmail.com)

Piquenique nas lagoas

O problema proposto no número 120 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

A família Barbosa e a família Cruz resolveram fazer um piquenique nas lagoas de Bertiandos. Quando chegaram ao local combinado, cada homem cumprimentou os homens da outra família com um aperto de mão e as mulheres com um beijo. Cada mulher trocou um beijo com as mulheres da outra família.

Deram-se 35 apertos de mão e trocaram-se 86 beijos. Quantos homens lá estavam? E mulheres?

Quantos elementos tinha cada família?

Recebemos 9 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Ema Modesto e João Fernandes (Aveiro), Francisco Estorninho (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Isabel Viana (Porto), Luís Ferreira (Vila Verde), Pedro Teixeira e Sérgio Rosa (Pinhal Novo).

Todas as resoluções, exceto uma, seguiram a mesma via: Sejam b e c o número de homens de cada família e x e y os correspondentes números de mulheres.

Os dados do problema dão origem a duas equações:

$$b.c = 35$$
$$b.y + c.x + x.y = 86$$

Da primeira equação conclui-se que $b = 7$ e $c = 5$ (a Graça e a Isabel também analisaram o caso 1 e 35, que não conduz a nenhuma solução). A segunda equação fica:

$$7y + 5x + x.y = 86$$

e agora trata-se de procurar soluções inteiras e positivas, por tentativas ou através de uma tabela. Mas o Luís Ferreira segue uma via simples e original que deve ser partilhada com todos os leitores:

1) Os homens cumprimentaram-se 35 vezes. Só há uma conjugação de fatores possível: 5 x 7. Assim, uma família tem 5 homens e a outra 7. Até aqui nada de especial.
2) Agora vem o «truque». Reparemos que todos os membros de uma família cumprimentam os outros, sejam beijos ou abraços: Total de cumprimentos = beijos + abraços = 35 +86 = 121
   Vamos decompor em fatores. Reparo que só já uma conjugação possível: 11 x 11=121
3) Então cada família tem 11 membros. Como já sabemos os homens, então por diferença vem:
   11 – 7 = 4 mulheres
   11 – 5 = 6 mulheres
   Uma família tem 7 homens e 4 mulheres, a outra tem 5 homens e 6 mulheres.

ProfMat – um encontro onde nos [re]encontramos
Albufeira 2013

No editorial da *Educação e Matemática* número 1, Paulo Abrantes considerava a *Revista* e o *ProfMat* como as duas realizações distintivas da recém-criada Associação de Professores de Matemática, chamadas a corporizar uma forma de ser e de estar, pautada pela especificidade do trabalho dos professores de Matemática em prol de um ensino de qualidade para todos, com um trabalho de sala de aula capaz de proporcionar aos alunos aprendizagens significativas e despertar neles atitudes positivas para com esta disciplina, frequentemente tão mal amada.

Vem esta referência a propósito, não só da memória do Paulo que, ao longo deste ano temos tão presente, como sobretudo da realização do ProfMat 2013 em Albufeira.

Várias vezes referi que a realização deste ProfMat era um desafio para a APM: sabemos que a possibilidade de datas para a realização do nosso encontro nacional nos foi empurrando para a interrupção letiva da Páscoa e que, tendo-se realizado o anterior, o de Coimbra, em outubro de 2012, isso nos deixava um curto intervalo de pouco mais de quatro meses entre os dois encontros. Curtíssimo intervalo, quer para a comissão organizadora, quer para os participantes, tendo em conta sobretudo as dificuldades de ordem económica que transversalmente nos afetam. Mas a nossa aposta associativa foi o de não deixar de realizar o ProfMat de 2013 e manter assim o ritmo anual, ininterrupto desde 1985, anterior ao nascimento da própria APM.

O *ProfMat de Albufeira*, cuja realização tanto nos deve alentar, foi sinal de que somos capazes de resistir às adversidades. Enquadrou-se numa matriz muito querida à APM, de reflexão e de debate sobre as questões mais prementes da Educação Matemática do momento. Não foi por acaso que as sessões que diziam respeito a estas questões — centradas nas metas curriculares e nas suas relações com os exames e os manuais — encheram salas e auditórios. Mas também olhou mais longe, com perspetiva de intervenção, com visão para lá das dificuldades presentes: a partilha de projetos, experiências, investigações, saberes, continua a ser uma vertente de que não abdicamos; o debate sobre as grandes questões de fundo, como revisitar os objetivos do ensino da Matemática, alertam-nos para a necessidade de não nos gastarmos com as dificuldades do presente e termos sempre presente um horizonte para o qual nos queremos dirigir e pelo qual nos desejamos nortear.

Mas o *ProfMat de Albufeira* valeu também como *encontro*. Talvez um menor número de participantes, da ordem dos primeiros ProfMats, nos tenha facilitado o encontrar-nos mais, nos tenha aproximado dessa sensação de grupo identitário que se reconhece quando se cruza nas salas, nos corredores, nos átrios, nas ruas que percorríamos entre a escola secundária de Albufeira e o auditório municipal. Encontro e debate numa concorrida e participada Assembleia Geral; encontro e descontração no jantar, nos intervalos, nos *coffee-break* que, à chegada e na despedida, a comissão organizadora e os alunos de cursos profissionais da Escola que tão simpaticamente nos proporcionaram.

E o *ProfMat de Albufeira* deve dar-nos também matéria para reflexão. Aqui retomo algumas questões que temos percebido

estar no ar, nas conversas, até em tomadas de posição que vão sendo explicitadas. Uma delas é o próprio formato do encontro em que começamos a detetar alguma dificuldade entre o equilíbrio das ofertas do programa e o número de participantes. A par dos convites que estruturam a oferta, mantém-se significativo o número de sessões que resultam da iniciativa dos participantes e que a enriquecem. Assim, a busca desse equilíbrio terá que ter em conta pelo menos três aspetos: a possibilidade que hoje temos de escolhas cada vez mais variadas e profícuas sem cair na tentação de querer chegar a tudo e a todos; o estímulo da iniciativa de apresentação de trabalhos no ProfMat por parte dos professores; e o ajustamento do número de sessões em paralelo, ao número de participantes. Conseguir este equilíbrio é fundamental, não apenas para um bom ambiente e global e dinâmica das sessões, mas também para corresponder aos interesses dos professores participantes e intervenientes.

A outra questão, porventura mais polémica (embora, em minha opinião sem grandes efeitos práticos) é a da acreditação — do encontro, como se passou a dizer e que eu, a bem da verdade, prefiro especificar como, *de algumas das sessões do encontro*. Entre os que defenderam esta iniciativa e os que a criticaram fortemente, está o debate lançado. É uma questão polémica, repito, não pelas consequências práticas, mas pelas razões de fundo. Ignorar ou desvalorizar os argumentos que, saudavelmente no seio da APM coexistem divergindo para diferentes posições, não me parece acertado. Não será certamente no âmbito deste artigo que vou enunciar qualquer tipo de argumentação. Fica apenas a constatação de que será bom não darmos por adquirida nenhuma decisão, sem sermos capazes de nos ouvirmos, de debatermos, de entendermos as razões (e as interrogações) que mutuamente nos colocamos.

Pensemos o ProfMat com esta memória que a lembrança do Paulo Abrantes nos traz, desejando que seja algo muito próprio e significativo da APM. Um encontro nacional de professores de vários graus de ensino que, todos os anos, numa diferente cidade do país, se juntam para partilhar e debater. Partilha entre sócios que assim se enriquecem mutuamente e a alargam também a outros professores que, não sendo sócios, a nós se juntam para pensar a educação matemática dos alunos das nossas escolas. Encontro feito de momentos de reflexão, momentos de conversas e memórias e sonhos, momentos de convívio e festa. Encontro que deve capitalizar as condições de cada momento, podendo tirar partido, nestes tempos em que somos menos, de maior proximidade e interação.

Reflexão, partilha, debate são condições sem as quais não há formação que nos capacite a entrar numa sala de aula com a autoridade e a sabedoria que nos torna educadores, formadores de gerações, para além dos bons ou maus momentos, das boas e das más políticas educativas. E este é o âmago mais profundo do ProfMat, este evento fundante onde somos convidados a (re)encontrar-nos, uns com os outros, e todos com os ideais e as ideias fortes que nos deram, e têm que continuar a dar, consistência e relevância.

Para o ano, encontramo-nos em Braga. No Profmat 2014.

Lurdes Figueiral
Escola Artística de Soares dos Reis

Matemática para todos, Matemática com todos

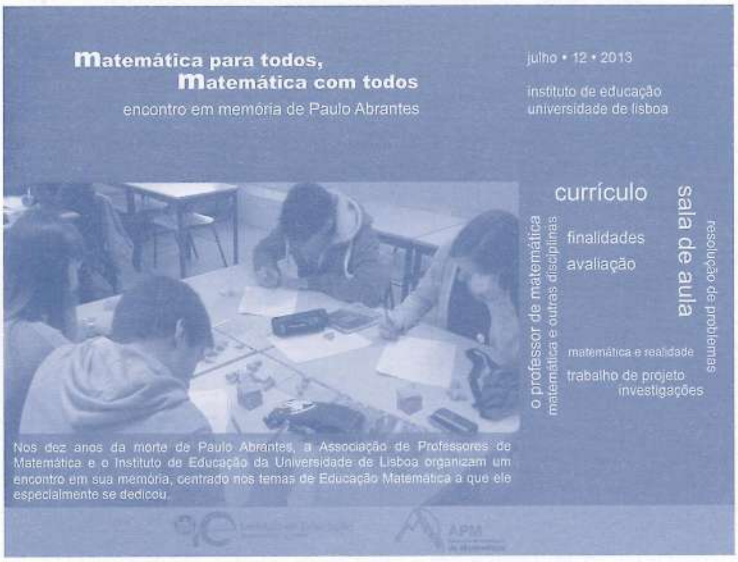
Encontro em memória de Paulo Abrantes

Em julho de 2013 cumprem-se 10 anos sobre a morte de Paulo Abrantes e a 12 desse mês irá realizar-se um encontro em sua memória promovido pela Associação de Professores de Matemática e pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Está a ser preparado, para este encontro, um programa científico constituído por dois simpósios em torno de dois dos grandes temas em que Paulo Abrantes trabalhou: a Matemática na sala de aula e a Matemática no currículo escolar. Cada simpósio terá participantes portugueses e estrangeiros (estes, através de um sistema de vídeo conferência) especialmente convidados para intervenções específicas seguidas de debate.

Haverá ainda um programa evocativo da pessoa, do professor, do colega, do amigo, para quem a educação matemática e a APM foram duas das suas grandes causas.

O encontro realizar-se-á no Instituto de Educação prevendo-se ainda que possa haver inscrições para ser acompanhado via *internet*.



XXIV SIEM

Seminário de Investigação em Educação Matemática

Braga, Universidade do Minho, Instituto de Educação
16 e 17 de novembro de 2013

Este ano realiza-se o XXIV SIEM, que acontecerá nos dias 16 e 17 de novembro, no Instituto de Educação da Universidade do Minho e, como habitualmente, pretende-se que ele constitua um espaço de divulgação, partilha e debate de ideias e de trabalhos realizados pela comunidade de investigação em Educação Matemática, esperando-se que dele resultem contributos para a promoção da articulação entre a investigação e a prática.

Em termos do seu programa científico, como tem acontecido nos últimos anos de realização, o Seminário incluirá conferências plenárias dinamizadas por convidados nacionais e estrangeiros, um painel temático e vários simpósios de apresentação de comunicações e *posters*.

Assim, tratando-se de uma oportunidade importante em termos de investigação e também de formação, convidam-se vivamente professores e investigadores a apresentarem os seus trabalhos concluídos ou em curso no âmbito da Educação Matemática.

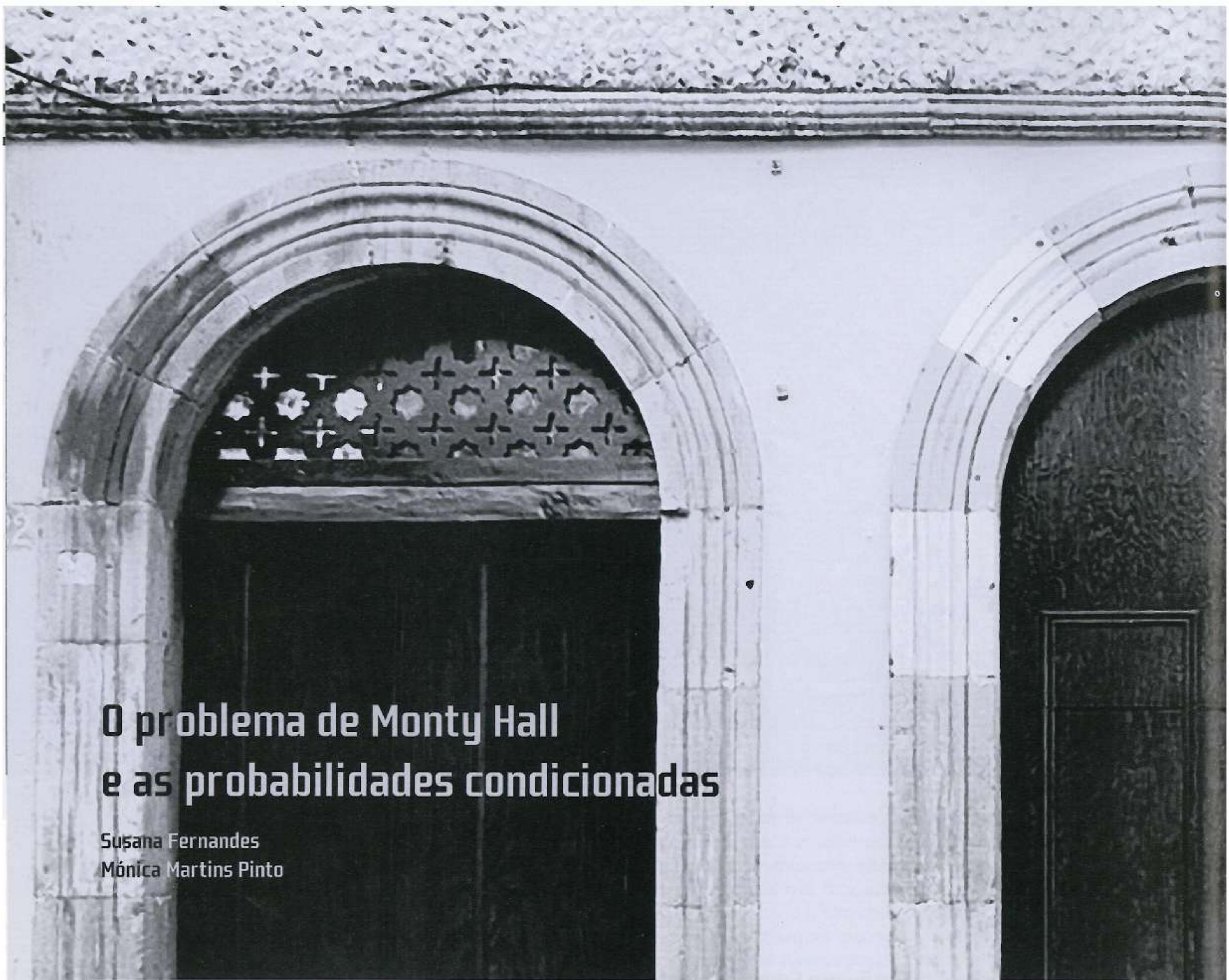
Datas importantes
Submissão de comunicação ou poster: até 20 julho 2013
Resposta aos autores: até 15 setembro 2013
Inscrição: até 20 setembro 2013

Pode encontrar mais informações na página:

http://xxivsiem.apm.pt/

E pode contactar a organização através do email:

siemxxiv@apm.pt



O problema de Monty Hall e as probabilidades condicionadas

Susana Fernandes
Mónica Martins Pinto

O Problema de Monty Hall

O problema de Monty Hall, também conhecido como o problema das 3 portas, surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos apresentado por Monty Hall na década de 1970. O concurso chamava-se «Let's Make a Deal» e incluía o seguinte jogo:

São apresentadas ao concorrente três portas fechadas e este é informado que atrás de uma das portas existe um bom prémio (automóvel) e atrás das outras duas estão prémios sem valor. Numa primeira etapa o concorrente deverá escolher uma das portas para ficar com o prémio que esta oculta. Na segunda etapa, após a escolha do concorrente, o apresentador, que sabe onde está o bom prémio, abre uma das portas não escolhidas, que não esconda o automóvel. Na terceira etapa do jogo o concorrente pode optar por manter a porta que escolheu no início ou trocar a sua escolha para a outra porta não aberta.

Coloca-se a questão: O que será mais vantajoso para o concorrente, manter a escolha que fez na primeira etapa ou trocar a porta escolhida para abrir?

Intuitivamente somos levados a pensar que, em termos probabilísticos, será indiferente trocar ou não a porta escolhida, mas na verdade o concorrente tem mais hipóteses de ganhar se decidir trocar a sua escolha inicial.

A ideia da igualdade de hipóteses de ganhar trocando ou não de porta «esquece-se» que o apresentador não abre uma das portas não escolhidas ao acaso, mas sim garantido que não mostra o automóvel escondido.

O Problema de Monty Hall nos manuais de matemática

Este problema (na sua forma original ou com pequenas variações) é apresentado em alguns manuais de matemática, quer do 3.º ciclo do ensino básico quer do ensino secundário, embora nem sempre apresentem a resolução e um deles sugira uma solução que não é a correcta.

O manual *XeqMat*, 12.º ano, Volume 1 apresenta o problema e sugere a seguinte resolução:

Sem perda de generalidade, suponha-se que o concorrente escolhe a porta 1. Na tabela 1 encontram-se todas as possibilidades existentes.

	Porta 1	Porta 2	Porta 3
Caso 1	Automóvel	x	x
Caso 2	x	Automóvel	x
Caso 3	x	x	Automóvel

Tabela 1

Se o concorrente mantém a sua escolha, só ganha no caso 1 enquanto que, se trocar, ganha nos casos 2 e 3. Assim, as probabilidades de sucesso mantendo ou trocando a escolha inicial são 1/3 e 2/3, respetivamente.

No manual *PI9*, do 9.º ano, o problema surge com uma variação e é apresentada uma solução errada.

O enunciado trata também de um concurso em que um concorrente tem de escolher uma das três portas, onde apenas uma esconde um automóvel. Após a escolha da porta e supondo que o concorrente escolhe a porta 3, o apresentador do concurso abre a porta 1, mostrando que esta nada escondia.

Ele pergunta ao concorrente se pretende trocar esta montra por outra com 5 portas, onde duas delas escondem um automóvel, mas as restantes três escondem um espaço vazio. A questão final é qual a decisão mais acertada a tomar pelo concorrente.

A solução apresentada pelo manual é que o concorrente não deve trocar de montra. Ora tal não está correto pois a probabilidade de ganhar dado que não troca de montra é a mesma, isto é 1/3, e a probabilidade de ganhar ao trocar de montra passa a ser 2/5, sendo por isso mais vantajoso trocar de montra.

Este problema de probabilidades, por ter uma solução contra-intuitiva, gera alguma confusão e a resolução apresentada (em tabela) muitas vezes «vence mas não convence» algumas mentes, quer de alunos quer de professores.

O manual *Projeto Desafios, Matemática 12.º ano*, Volume 1 também apresenta este problema (na versão original) mas com uma resolução diferente. O livro foi editado recentemente (ano 2012) e é o único, de que temos conhecimento, a referir as probabilidades condicionadas na resolução do problema.

De seguida apresentamos uma resolução do problema utilizando as probabilidades condicionadas e a regra das probabilidades totais. Será talvez útil recordar estes conceitos antes de apresentar a resolução.

Revisão de conceitos de probabilidades

Dados dois acontecimentos não impossíveis A e B a probabilidade condicionada de A sabendo B representa-se $P(A/B)$ e é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

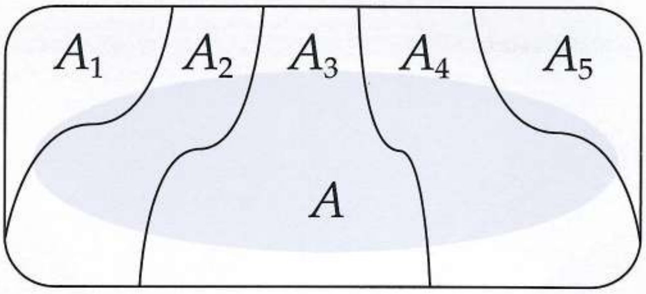


Figura 1. Ilustração de uma partição.

Repare-se que a equação pode ser escrita na forma $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$.

Analogamente, considerando a probabilidade condicionada de B sabendo A, podemos escrever $P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$.

A regra das probabilidades totais diz que dada uma partição $(A_1, A_2, \ldots, A_n$ com $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ e $\bigcup A_i = \sigma)$ do espaço de resultados Ω, a probabilidade de qualquer acontecimento $A \subseteq \Omega$ é dada por

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \times P(A_i).$$

A Figura 1 apresenta um exemplo de um espaço de resultados onde existe uma partição com 5 elementos.

O teorema de Bayes estabelece que dados dois acontecimentos não impossíveis A e B a probabilidade condicionada de A sabendo B pode ser escrita recorrendo à probabilidade condicionada de B sabendo A da seguinte forma:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \times P(A)}{P(B)}.$$

Resolução do problema de Monty Hall

Admitamos, sem perda de generalidade, que *o automóvel está por detrás da porta 1*. Consideremos o esquema do jogo que se apresenta na Figura 2, onde $(E\ Pi)$ representa o concorrente escolhe a porta i e $(A\ Pi)$ representa o apresentador abre a porta i.

Repare-se que a decisão do apresentador sobre qual a porta a abrir na segunda etapa do jogo é condicionada pela escolha feita pelo concorrente na primeira etapa. Quando o concorrente escolhe uma porta que não esconde o automóvel, o apresentador só pode abrir uma das restantes portas sem o mostrar. Repare-se também que a decisão do concorrente na terceira etapa do jogo é condicionada pelo fato de se ter aberto uma das portas. Mas a probabilidade de decidir trocar (ou não) é sempre a mesma, sejam quais forem as portas escolhida e aberta nas etapas anteriores.

Para responder à questão «O que será mais vantajoso para o concorrente, manter a escolha que fez na primeira etapa ou trocar a porta escolhida para abrir?» vamos comparar a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se trocar de porta escolhida $P(\text{GANHAR/TROCA})$ com a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se não trocar a porta escolhida $P(\text{GANHAR/NÃO TROCA})$.

Comecemos por calcular a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se trocar de porta escolhida utilizando a definição de probabilidade condicionada

$$P(\text{GANHAR/TROCA}) = \frac{P(\text{GANHAR} \cap \text{TROCA})}{P(\text{TROCA})}.$$

Relembrando que assumimos que *o automóvel está ocultado por detrás da porta 1* e usando os conceitos de probabilidades já revistos e os valores das probabilidades apresentados no esquema da Figura 2 temos:

$$\begin{aligned}
P(\text{GANHAR} \cap \text{TROCA}) &= P((EP2 \cap AP3) \cap \text{TROCA}) + \\
&\quad + P((EP3 \cap AP2) \cap \text{TROCA}) \\
&= P(\text{TROCA}/(EP2 \cap AP3)) \times P(EP2 \cap AP3) + \\
&\quad + P(\text{TROCA}/(EP3 \cap AP2)) \times P(EP3 \cap AP2) \\
&= \frac{1}{2} \times P(AP3/EP2) \times P(EP2) + \frac{1}{2} \times P(AP2/EP3) \times P(EP3) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Obviamente, a probabilidade do concorrente trocar de porta é 1/2 mas apresentemos os cálculos, apenas para, mais uma vez, ilustrar o uso da regra das probabilidades totais.

$$\begin{aligned}
&P(\text{TROCA}) = P(\text{TROCA} \cap (EP1 \cap AP2)) + \\
&+ P(\text{TROCA} \cap (EP1 \cap AP3)) + \\
&P(\text{TROCA} \cap (EP2 \cap AP3)) + P(\text{TROCA} \cap (EP3 \cap AP2)) = \\
&P(\text{TROCA}/(EP1 \cap AP2)) \times P(EP1 \cap AP2) + \\
&+ (\text{TROCA}/(EP1 \cap AP3)) \times P(EP1 \cap AP3) + \\
&P(\text{TROCA}/(EP2 \cap AP3)) \times P(EP2 \cap AP3) + \\
&+ P(\text{TROCA}/(EP3 \cap AP2)) \times P(EP3 \cap AP2) = \\
&\frac{1}{2} \times P(AP2/EP1) \times P(EP1) + \frac{1}{2} \times P(AP3/EP1) \times P(EP1) + \\
&\frac{1}{2} \times P(AP3/EP2) \times P(EP2) + \frac{1}{2} \times P(AP2/EP3) \times P(EP3) = \\
&\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Assim

$$P(\text{GANHAR/TROCA}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

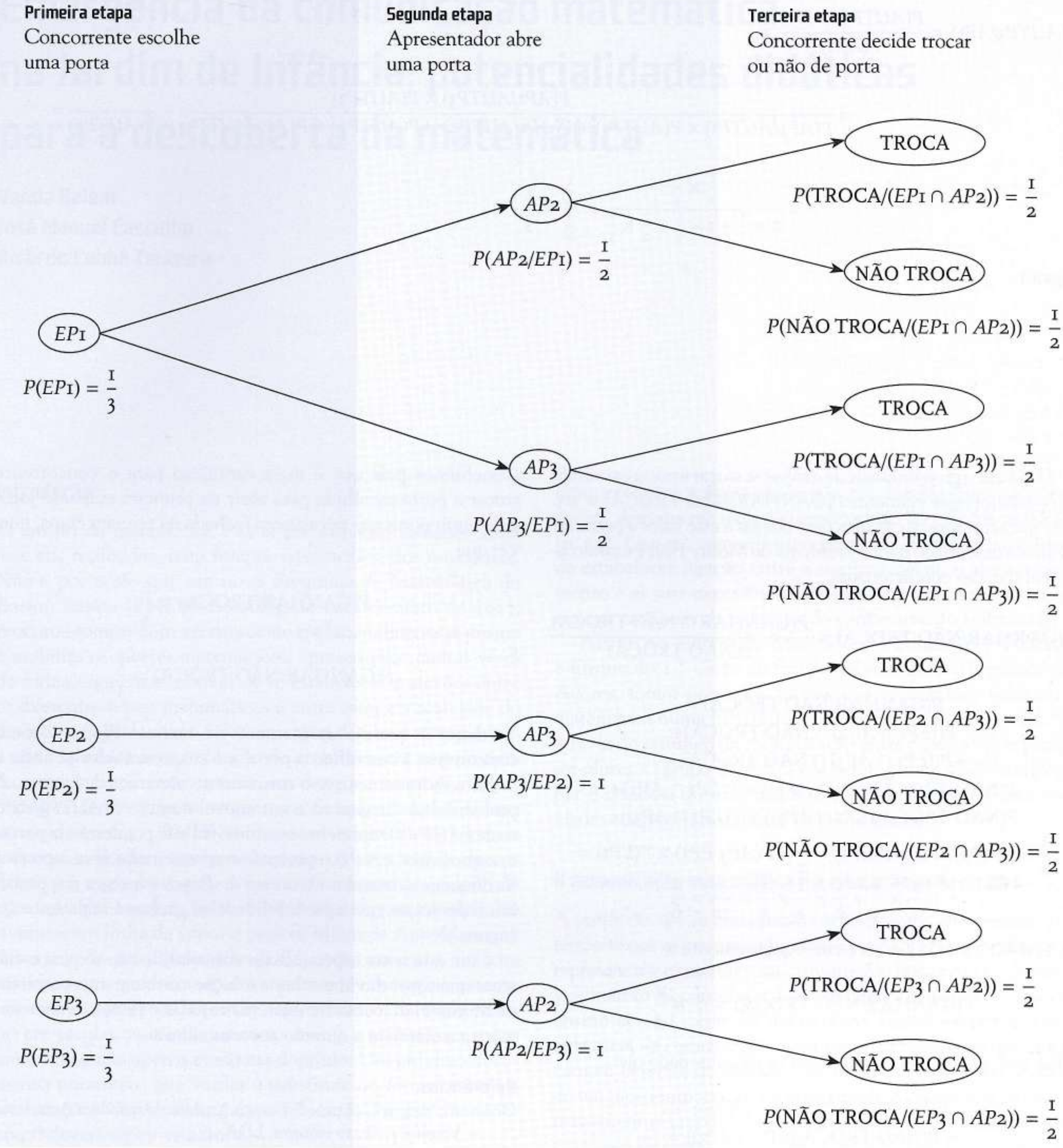


Figura 2. Esquema do problema de Monty Hall

Repare-se que uma vez que

$$P(\text{TROCA}/(EP1 \cap AP2)) = P(\text{TROCA}/(EP1 \cap AP3)) =$$
$$= P(\text{TROCA}/(EP2 \cap AP3)) =$$
$$P(\text{TROCA}/(EP3 \cap AP2)) = \frac{1}{2} = P(\text{TROCA})$$

temos então, de forma simplificada,

$$P(\text{GANHAR/TROCA}) = P(AP3/EP2) \times P(EP2) +$$
$$+ P(AP2/EP3) \times P(EP3) =$$
$$1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Vejamos agora a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se não trocar a porta escolhida.

$$P(AUTP3/AP1) = \frac{P(AUTP3 \cap AP1)}{P(AP1)} =$$

$$= \frac{P(AP1/AUTP3) \times P(AUTP3)}{P(AP1/AUTP1) \times P(AUTP1) + P(AP1/AUTP2) \times P(AUTP2) + P(AP1/AUTP3) \times P(AUTP3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Figura 3

Dado que a probabilidade de ganhar se trocar a porta escolhida é 2/3 então obrigatoriamente P(GANHAR/NÃO TROCA) = 1/3, mas apresentemos os cálculos para chegar a este valor a partir do esquema desenhado para o problema de Monty Hall e usando as probabilidades condicionadas.

$$P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = \frac{P(\text{GANHAR} \cap \text{NÃO TROCA})}{P(\text{NÃO TROCA})}$$

$$\begin{gathered} P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = \\ P((EP1 \cap AP2) \cap \text{NÃO TROCA}) + \\ +P((EP1 \cap AP3) \cap \text{NÃO TROCA}) = \\ P(\text{NÃO TROCA}/(EP1 \cap AP2)) \times P(EP1 \cap AP2) + \\ P(\text{NÃO TROCA}/(EP1 \cap AP3)) \times P(EP1 \cap AP3) = \\ \frac{1}{2} \times P(AP2/EP1) \times P(EP1) + \frac{1}{2} \times P(AP3/EP1) \times P(EP1) = \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{gathered}$$

A P(NÃO TROCA) = 1/2 e consequentemente a

$$P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Mais uma vez podemos simplificar os cálculos dado que

$$\begin{gathered} P(\text{NÃO TROCA}/(EP1 \cap AP2)) = \\ = P(\text{NÃO TROCA}/(EP1 \cap AP3)) = \\ P(\text{NÃO TROCA}/(EP2 \cap AP3)) = \\ = P(\text{NÃO TROCA}/(EP3 \cap AP2)) = \frac{1}{2} \\ = P(\text{NÃO TROCA}) \end{gathered}$$

E então

$$\begin{gathered} P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = P(AP2/EP1) \times P(EP1) + \\ +(P(AP3/EP1) \times P(EP1) = \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{gathered}$$

Concluímos pois que é mais vantajoso para o concorrente trocar a porta escolhida para abrir na primeira etapa do jogo, pela outra porta que permanece fechada na terceira etapa, uma vez que

$$P(\text{GANHAR/TROCA}) = \frac{2}{3}$$

e

$$P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = \frac{1}{3}$$

Voltemos à questão apresentada no manual *PI9*, em que o concorrente já escolheu a porta 3 e o apresentador já abriu a porta 1. Admitamos que o concorrente não troca de montra. A probabilidade de ganhar o automóvel é então $P(AUTP3/AP1)$ onde ($AUT\ Pi$) representa o automóvel está por detrás da porta i e, como antes, ($A\ Pi$) representa o apresentador abre a porta i. Verifiquemos, usando o teorema de Bayes e a regra das probabilidades totais, que a probabilidade de ganhar é realmente 1/3 (figura 3).

Com este texto esperamos ter contribuído não só para esclarecer quaisquer dúvidas sobre a solução correta para o problema de Monty Hall, como também para ajudar o professor de matemática a clarificar a questão aos seus alunos.

Referências

Gomes, F., Viegas, C., Lima, Y. (2005). *XeqMat, Matemática A 12.º ano* — Volume 1, Texto editores, LDA

Magro, F., Fidalgo, F., Louçano, P. (2012). *PI9, caderno de atividades*. Edições ASA II, S.A.

Negra, C., Martinho, E. (2012). *Projeto Desafios Matemática A 12.º ano* — Volume 1. Santillana Constância.

Susana Fernandes

Mónica Martins Pinto

Departamento de Matemática, FCT, Universidade do Algarve

Emergência da comunicação matemática no Jardim de Infância: potencialidades didáticas para a descoberta da matemática

Vanda Belém
José Manuel Cascalho
Ricardo Cunha Teixeira

Introdução

O ensino da matemática é uma preocupação bastante atual face aos resultados, nem sempre satisfatórios, dos estudantes. Não é por acaso que um novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), homologado em dezembro de 2007, procurou romper com a forma como tradicionalmente se ensina e mobiliza os saberes matemáticos, apresentados muitas vezes de forma segmentar, em vez de se estabelecer conexões entre os diferentes temas matemáticos e entre estes e a realidade do dia a dia. Aspetos como a comunicação de ideias matemáticas e não matemáticas, a resolução de problemas e a importância do raciocínio matemático estão em destaque no programa por corresponderem a áreas transversais de aprendizagem. Como seria de esperar, o PMEB (ME, 2007) também tem vindo a influenciar, desde a sua homologação, os objetivos de aprendizagem a estabelecer para o ensino da matemática a nível da educação pré-escolar. Tal facto é evidente, por exemplo, se tivermos em linha de conta o projeto Metas de Aprendizagem, desenvolvido pelo Ministério da Educação em 2010. Embora não constitua um documento normativo, é notória a crescente importância atribuída ao ensino-aprendizagem da matemática no pré-escolar, nomeadamente ao definir a matemática como uma área, e não apenas como um domínio. Um próximo documento normativo que venha a substituir no futuro as atuais Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (ME, 1997) deverá seguir esta linha.

Este papel de maior destaque da matemática nos primeiros anos vem ao encontro das preocupações expressas por diferentes organismos, nacionais e internacionais, entre os quais o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que alerta para o facto de «durante os primeiros anos de vida ocorrer um desenvolvimento matemático muito importante nas crianças. Quer fiquem em casa, com os membros da família durante os anos correspondentes ao pré-escolar, quer recebam cuidados de atenção por parte de pessoas exteriores à família, é necessário que o seu desejo inato de aprender seja estimulado e apoiado» (2007, p. 83). Por outro lado, como refere Cândido (2001), «a oralidade é o único recurso quando a escrita e as representações gráficas ainda não são dominadas ou não permitem demonstrar toda a complexidade do que foi pensado» (p. 17). Este ato comunicativo permite à criança a capacidade de estabelecer ligação entre a sua linguagem, o seu conhecimento e as suas experiências pessoais, e a linguagem do grupo em que está inserida e da área do conhecimento trabalhada.

Assim, no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, da Universidade dos Açores, foram propostas tarefas que procuraram valorizar a matemática numa EB1/JI dos Açores, em contexto pré-escolar, através do estímulo da comunicação entre pares, e entre professor-aluno. O grupo de alunos era heterogéneo, sendo composto por 8 crianças do sexo masculino e 6 do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 3 e os 5 anos.

A comunicação matemática e a educação pré-escolar

A partir do ato de comunicar em linguagem matemática, pretende-se que as crianças adquiram as capacidades de interpretar, representar e expressar o seu pensamento matemático. O desenvolvimento da comunicação é fundamental para o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Como referem Ponte e Serrazina, «a comunicação das nossas ideias permite que elas se tornem objectos de reflexão, discussão e refinamento. Trata-se de um passo importante na organização e clarificação do nosso pensamento» (2000, p. 60). Referem ainda que a língua materna é suporte de todo o pensamento, incluindo o matemático. De facto, Lopes afirma que a

> aliança entre português e matemática é natural. Trata-se de linguagens complementares, já que ambas vivem uma da outra: a língua materna, apoiada na gramática do português, empresta à comunicação matemática as palavras e as regras, através das quais as ideias matemáticas são transmitidas e verbalmente compreendidas, e apoia a aprendizagem da matemática; a linguagem matemática, enquanto língua racional e suportada por uma gramática própria — métodos de pensamento e signos —, apoia a tradução verbal do raciocínio e fornece instrumentos de compreensão e comunicação universais. (2007, p. 99)

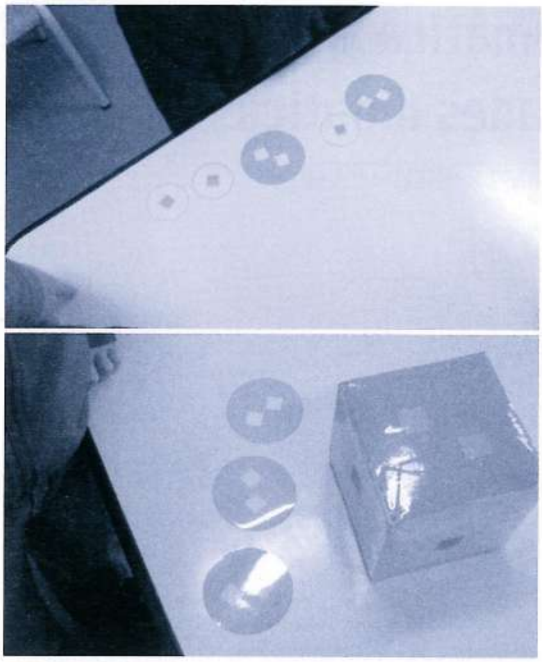


Figura 1

— Então, quem ganhou?
— Fui eu! — disse o T.
— Eu acho que fui eu. — afirmou o F.
— Porquê?
— Porque tenho mais fichas! — respondeu T e F fica a pensar.
— E vocês o que acham? — Perguntamos.
— Eu acho que foi o T. — disse MI.
— Porquê? — perguntamos.
— Porque tem mais fichas.
— Será? — voltamos a questionar e ficam pensativos.
— Eu acho que foi o F.
— Mas, porque?
— Porque as fichas do F são maiores e ele tem três e o T só tem duas.
— Então, vamos fazer o seguinte! Contem quantas pintas tem cada menino. — A maioria começou a contar e responderam:
— Foi o T!
— Porquê? — Insisti.
— Porque ele tem 7 pintas e o F só tem 6.

Figura 2

Apesar de a maioria dos autores citados se debruçar sobre a comunicação matemática ao nível do ensino básico, a relação com a educação pré-escolar é evidente e muito relevante, porque as crianças desde o seu nascimento começam a adquirir competências linguísticas ao nível da compreensão e expressão oral. Mesmo antes de falarem, as crianças em tenra idade «produzem sons denominados como discurso pré-linguístico, sons esses que são ricos em expressão emocional» (Papalia, Olds, & Feldman, 2001, p. 215). É este o seu primeiro ato comunicativo que não deixa de ser compreendido pelos seus progenitores ou adultos próximos destes, pois revelam padrões sonoros que associados a comportamentos e expressões do bebé são entendidos por parte do adulto. Ao longo dos primeiros anos, o desenvolvimento cognitivo da criança atinge padrões comunicativos e de raciocínio lógico significativos para com o mundo que a rodeia.

Independentemente da metodologia utilizada, a comunicação oral pode ser desenvolvida em muitos contextos mas, nem sempre se valoriza a comunicação oral como meio fundamental para uma aprendizagem significativa da matemática. Para que se torne significativa para a criança, cabe ao educador o papel de garantir que a comunicação oral se processe entre educador/criança, criança/educador e criança/criança, e de escolher criteriosamente as tarefas a propor para que as crianças possam ter uma participação ativa no processo e, por conseguinte, ter a oportunidade de construir o conhecimento lógico-matemático (Kamii & Housman, 2000).

O papel do educador deve ser de mediador e promotor de situações em que a criança participe ativamente. O educador deve saber ouvir com atenção as crianças e promover o diálogo interpares de modo a que estas aprendam a se exprimir e a justificar as suas ideias. Como refere o NCTM (2007), «os adultos poderão estimular o desenvolvimento matemático das crianças, proporcionando-lhes um ambiente rico em linguagem, onde o pensamento é encorajado, onde a originalidade é valorizada e as explorações apoiadas» (p. 84). Ao promover o papel ativo da criança, o educador está a permitir o desenvolvimento do discurso da criança e o seu aperfeiçoamento, tornando, assim, a sua aprendizagem mais significativa. Esta visão é a oposta à ideia de crianças espetadoras passivas e recetoras de informação previamente estruturada pelo educador.

Nos exemplos que apresentamos em seguida, procurámos que o uso da linguagem oral e escrita se estabelecesse como um «motor do desenvolvimento de um discurso matematicamente produtivo e de um ambiente de sala de aula em que falar faz parte do «fazer matemática»» (Boavida *et al.*, 2008, p. 63).

As tarefas propostas para a promoção da comunicação matemática

A comunicação utilizada nas diferentes áreas e domínios, tal como a protagonizada na comunicação matemática, apresenta aspetos similares, nomeadamente a discussão oral, a reflexão e o recurso ao registo, que permitem dotar a criança de estratégias e instrumentos essenciais ao ato de comunicar. Foi nosso objetivo desenvolver uma diversidade de atividades promotoras da comunicação matemática. Por isso, sugerimos ao grupo de crianças situações envolvendo jogos, histórias, resoluções de problemas e projetos, das quais destacamos, de seguida, algumas que tiveram como fio condutor a aprendizagem do sistema monetário.

O Jogo do Banqueiro

O material para este jogo, pensado e adaptado a partir de uma versão conhecida no ensino básico, era constituído por cartões circulares (tipo moeda), de uma e de duas pintas, e por um dado. O dado em forma de cubo tinha faces com uma pinta, faces com duas pintas e uma face de cor diferente sem pintas. Seguindo o

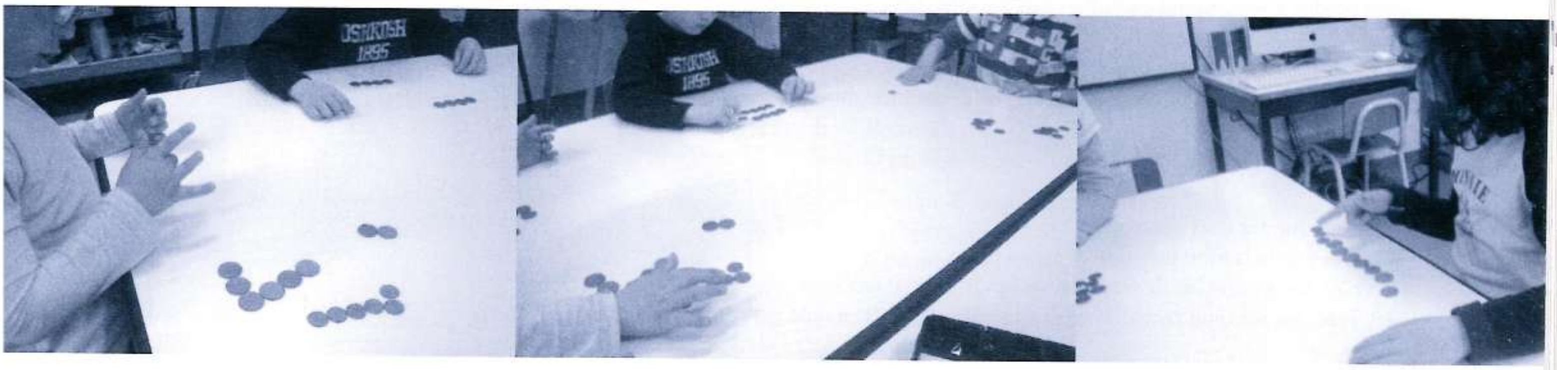


Figura 3

sentido dos ponteiros do relógio, cada criança lançava o dado alternadamente e recebia os cartões correspondentes: podia ganhar um cartão de uma ou de duas pintas ou não recebia cartão, conforme a face que saía do dado. No final de cada ronda, as crianças tinham a oportunidade de trocar 2 cartões de uma pinta por 1 cartão de duas pintas.

Dedicou-se particular atenção à discussão em torno dos resultados obtidos. Pretendia-se que as crianças procurassem associar o número de pintas ao valor obtido. No decorrer do jogo, pudemos verificar que as crianças que efetuavam a troca de fichas eram sobretudo as de 5 anos. As restantes crianças não trocavam as fichas. Muitas argumentavam que se trocassem fichas ficariam com uma menor quantidade e que isso não era vantajoso para elas. Já com o grupo de crianças de 5 anos, as trocas foram sendo feitas e, no final do jogo, houve a preocupação de contar e comparar os resultados para descobrir o vencedor.

Podemos observar na figura 1 a situação em que ambas as crianças afirmavam que haviam ganho e para a qual se estabeleceu o diálogo patente na figura 2.

Ao longo do diálogo pudemos constatar que várias crianças, nomeadamente as de 3 e 4 anos, ficavam caladas quando se pretendia que descrevessem e explorassem as hipóteses possíveis e, por conseguinte, que demonstrassem o seu pensamento matemático. No entanto, dentro do grupo de 5 anos, a maior parte das crianças já revelava competências de análise e discussão dos dados. Foram elas que promoveram o debate de ideias e que, imediatamente após a sugestão apresentada, contaram o número de pintas, identificando a vencedora. O diálogo mostra como as crianças tinham a capacidade de abstração para associar a quantidade ao número de pintas, souberam fazer a comparação e, mesmo antes da sugestão, apresentavam diferentes justificações que permitia perceber que estabeleciam uma relação hierárquica. Na verdade, para qualquer uma das justificações existia um argumento lógico, ou com base no número de objetos ou com base na dimensão dos objetos, mas o que apresentámos situava-se a um nível mais abstrato — o número de pintas obrigava-os a olhar para os símbolos.

À descoberta das moedas

Prosseguimos para mais uma atividade, desta feita de exploração do sistema monetário. Propusemos às crianças de cinco anos um trabalho de contagem e agrupamento de moedas. Inicialmente, colocámos no centro da mesa as diferentes moedas de Euro.

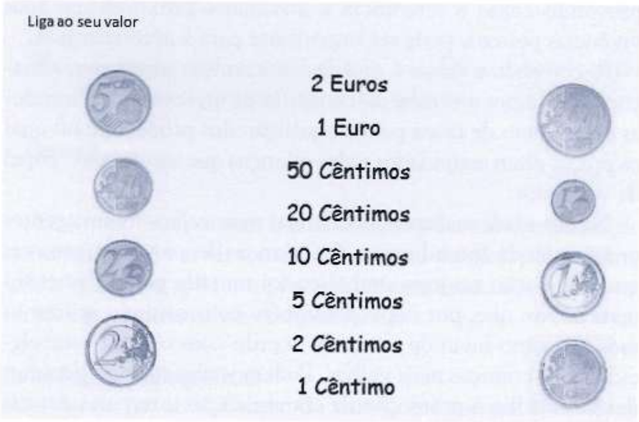


Figura 4

Pedimos às crianças que retirassem um montinho de moedas. Logo aqui, surgiu a questão «Ele tem mais do que eu!». Dissemos, então, que não se preocupassem com a quantidade, pelo que lhes pedimos que contassem quantas haviam tirado. Depois sugerimos que observassem as moedas e questionámos o grupo se estas eram todas iguais, ao que responderam que não.

Seguimos o trabalho com a proposta de observação e identificação das semelhanças e diferenças. Após este trabalho que envolveu a manipulação de moedas plásticas (figura 3), representativas do sistema monetário europeu, procedemos ao registo de associação (figura 4) da imagem ao valor correspondente.

Simulação de compra e venda na mercearia

Nesta atividade, as crianças aplicaram os conhecimentos que tinham adquirido em relação às moedas. Foi nossa intenção aumentar o grau de dificuldade do jogo simbólico através da adoção de moedas de plástico a imitar as moedas de 1 euro e de 2 euros. Como consequência da introdução destas moedas, as crianças passaram a dramatizar as situações de compra e venda diariamente. Primeiro participaram as crianças de 5 anos e depois, as de 3 e 4 anos, que imitavam os colegas mais velhos. De uma forma lúdica, as crianças foram desenvolvendo nesta simulação competências associadas ao cálculo, usando como base as moedas que tinham. E fizeram-no de forma natural, associando a atividade à sua experiência pessoal, tal como podemos

Comprador 1 — Quanto custa?
Vendedor — Custa 5 euros (o comprador dá-lhe 5 moedas de 1 euro)
Comprador 2 — Quanto custa?
Vendedor — Custa 3 euros (o comprador dá-lhe uma moeda de 2 euros e uma de 1 euro)

Figura 5

— Tem que ter dois quartos.
— Um é para o filho e o outro para os pais.
— Eles (quartos) têm de estar no andar de cima e um ao pé do outro.
— Tem que ter uma cozinha, uma sala com televisão e uma garagem para o pai pôr o carro.

Figura 6

ver no exemplo da figura 5. As crianças utilizaram a sua capacidade de perceção, reorganização e estruturação do pensamento, provando como a referência a atividades próximas das suas vivências pessoais pode ser importante para a aprendizagem.

Recorrendo a notas e moedas, as crianças simularam situações de compra e venda, no cantinho da mercearia, utilizando-as como meio de troca para a aquisição dos produtos e no qual os preços eram estipulados pelas crianças que assumiam o papel de vendedor.

Na atividade realizada, as crianças mais velhas foram agentes promotores da aprendizagem das crianças de 4 e 5 anos, uma vez que a sua ação no jogo simbólico foi imitada pelos elementos mais novos, que, por sua vez, também começaram a utilizar as moedas como meio de troca, de acordo com o valor estabelecido pelas crianças mais velhas. Pudemos observar, no decorrer das atividades, a promoção da comunicação interpares e a sua aprendizagem ativa.

Construção da casa

Este projeto também surgiu das vivências do grupo, particularmente de uma situação real vivida por uma das crianças que se ia mudar para uma casa nova. Foi nossa preocupação estabelecer a conexão entre essa realidade e o fio condutor comum às restantes atividades. Assim, num momento em grande grupo, relembrámos a novidade da semana, a casa nova do colega. De seguida, lançámos as questões: «Como se constrói uma casa?», «Quem o faz?», «Que profissões são necessárias para a sua elaboração e construção?», «Quais as divisórias da casa?», «Qual a função de cada espaço?» Ao longo do debate que se gerou, efetuámos a síntese das ideias que iam surgindo. Quando surgiu a intenção da construção de uma casa, questionámos as crianças sobre quantas divisórias e quais deveriam existir. Na figura 6 selecionámos algumas respostas representativas das ideias transmitidas.

Surgiram respostas interessantes dentro das diferentes faixas etárias. A capacidade de verbalização e a exatidão com que o faziam permite concluir que, quando o tema em estudo está intimamente ligado à sua experiência e interesse pessoal, a criança mostra facilidade em selecionar, estruturar e verbalizar o seu pensamento.

Este trabalho permitiu aos participantes aplicar os seus conhecimentos e, fazendo uso do domínio da expressão plástica, construir em três dimensões uma casa pensada e idealizada pelo grupo (figura 7). Foi um trabalho interessante e ao qual as crianças aderiram entusiasticamente. Até porque, se fosse por sua vontade, teríamos passado todo o dia a trabalhar no projeto da casa, em detrimento das outras atividades diárias.

Como forma de consolidação do trabalho realizado em momentos anteriores, concretamente no domínio específico da matemática, as crianças realizaram duas atividades distintas, de acordo com a sua faixa etária. Ao grupo de 3 e 4 anos, apresentámos a tarefa na qual os alunos tinham de associar imagens a figuras geométricas. E aos alunos de 5 anos, lançámos o seguinte desafio: *Os pais do Diogo foram comprar móveis para a casa nova. Ajuda-os no pagamento*. A cada criança foi entregue uma ficha com dois elementos a comprar e o respetivo valor. Tinham de descobrir formas de pagamento usando as moedas de 1 euro e de 2 euros. O registo consistia na colagem das respetivas moedas (figura 8). Cada criança teve a oportunidade de manipular as moedas até chegar ao valor pedido. Depois, confrontámos as crianças com os seus registos, tendo surgido alguns diálogos interessantes (figura 9).

Figura 7

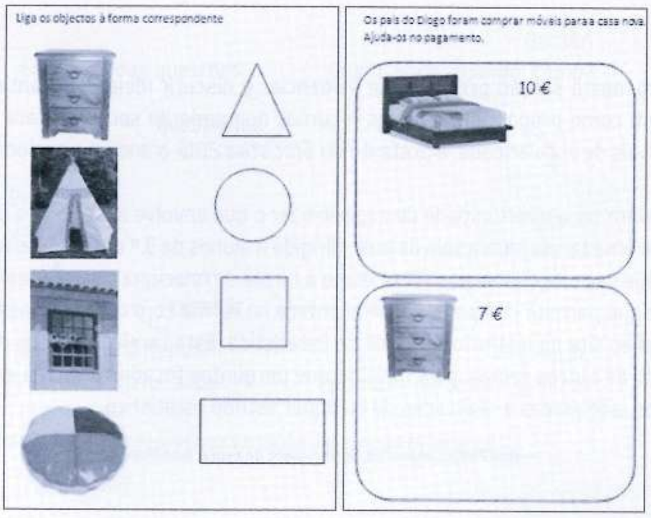


Figura 8

E — Ó F, qual é o valor da tua cadeira?
F — Ela custa 6 euros.
E — Que moedas usaste para pagar?
F — Usei três moedas de 2 euros.
E — Porquê?
F — Ó professora, porque 2+2+2 dá 6.
E — Então V, quanto custa a cama?
V — 10 euros.
E — Que moedas usaste para pagar?
V — 2, 2, 1, 2, 2, 1.
E — Porquê?
V — Porque dá 10.
E — Ó JP, qual é o valor da tua mesa?
F — É 4 euros.
E — Que moedas usaste para pagar?
F — 1+1+1 e +1.
E — Porquê?
F — Ó professora, porque 1, 2, 3 e 4. Dá 4 euros. (conta apontando para cada uma das moedas)

Figura 9

Os diálogos mostram o raciocínio matemático envolvido. Note-se o nível estruturado com que aplicam o conceito de adição, em resultado do facto de se ter convidado os alunos a utilizar apenas moedas de um e dois euros. Existe já a capacidade de verbalizar a forma como o cálculo foi efetuado.

Reflexões finais

A diversificação de situações permitiu, através da comunicação oral, criar diálogos enriquecedores. Consideramos que as atividades propostas e a sequência de tarefas realizadas, destacando-se a manipulação das moedas para efetuar os cálculos e a explicitação oral desses cálculos, fomentaram nas crianças o desenvolvimento de competências essenciais.

Verificamos que o trabalho desenvolvido permitiu que todo o grupo aperfeiçoasse o seu discurso oral, embora com as limitações próprias de cada faixa etária. A atitude e interesse demonstrado face às atividades desenvolvidas permite-nos afirmar que as crianças interessam-se por atividades que lhes sejam familiares e/ou representativas do seu dia a dia. Consideramos que as crianças de 5 anos tiveram um papel preponderante na aprendizagem das crianças mais pequenas, integrando-as, de uma forma natural no trabalho desenvolvido, tal como sucedeu em algumas atividades em que as crianças de 3 e 4 anos «imitaram» os colegas mais velhos.

Ao longo das tarefas propostas, houve uma evolução significativa ao nível da participação, da elaboração do discurso oral, da discussão de ideias, da argumentação e da própria análise do trabalho desenvolvido. Esta evolução, quanto a nós, deve-se ao ambiente criado, no qual o educador tem um papel preponderante, simultaneamente de «líder e participante» (Boavida *et al.*, 2008, p. 64). De facto, cabe ao educador o papel de provocar a verbalização do pensamento, tal como defende Cândido (2001). Ao fazê-lo «estamos permitindo que [as crianças] modifiquem conhecimentos prévios e construam novos significados para as ideias matemáticas» (p. 17).

Em suma, entendemos que atividades ricas em comunicação matemática devem ser fomentadas no pré-escolar, pois estimulam a criança a aplicar e aprofundar conceitos, a testar novas ideias e a adquirir novas competências.

Referências bibliográficas

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiencia Matemática no Ensino Básico — Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Cândido, P. (2001). Comunicação em Matemática. *In* K. Smole, & M. Diniz, *Ler, escrever e resolver problemas — Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 15–28). Porto Alegre: Artmed.

Kamii, C., & Housman, L. (2000) *Young Children Reinvent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory*. Second Edition. New York: Teachers College Press.

Lopes, E. (2007). Porque um conto alude ao mistério. *In* M. Migueis, & M. Azevedo, *Educação Matemática na Infância — Abordagens e desafios* (pp. 95–104). Vila Nova de Gaia: Gailivro.

ME. (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Papalia, D. E., Olds, S. W., & Feldman, R. D. (2001). *O Mundo da Criança*. Lisboa: McGraw Hill.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. D. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.° Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em matemática (tradução). *Journal for Research in Mathematics Education* 27(4), 458–477.

Vanda Belém

EBI/JI Professor Maximino Fernandes Rocha

José Manuel Cascalho

Departamento de Ciências da Educação da Universidade dos Açores

Ricardo Cunha Teixeira

Departamento de Matemática da Universidade dos Açores

Como foi anunciado no número anterior da *Educação e Matemática*, nesta secção pretende-se evidenciar e discutir ideias relevantes do ponto de vista do ensino da Estatística e das Probabilidades, bem como proporcionar alguns recursos que poderão ser úteis para a abordagem destes temas na sala de aula com alunos de diferentes níveis de escolaridade, a pretexto do *Statistics 2013*, o ano internacional da estatística.

Neste número da secção, defendemos a ideia de que os alunos devem ter a oportunidade de experienciar o que envolve a realização de um estudo estatístico em todas as suas fases. Apresentamos também uma tarefa para a sala de aula, dirigida a alunos de 3.º ciclo ou ensino secundário, na qual se propõe a realização de um estudo estatístico que permita conhecer melhor como a turma se relaciona com um tema – neste caso, os resíduos urbanos produzidos e a sua separação – e que permita comparar o que acontece na turma com o que se passa globalmente na sua região e/ou em Portugal, recorrendo-se para tal ao site do Instituto Nacional de Estatística. Esta tarefa constitui, de alguma forma, um guião que pode ser adotado e adaptado ao estudo de outros temas, pois mais do que perguntas focadas no tema em estudo, contem indicações para o trabalho a desenvolver pelos alunos, adequadas à realização de qualquer estudo estatístico.

– **Ana Paula Canavarro**, Universidade de Évora (apc@uevora.pt)

Sobre estudos estatísticos: do questionar à recolha de dados

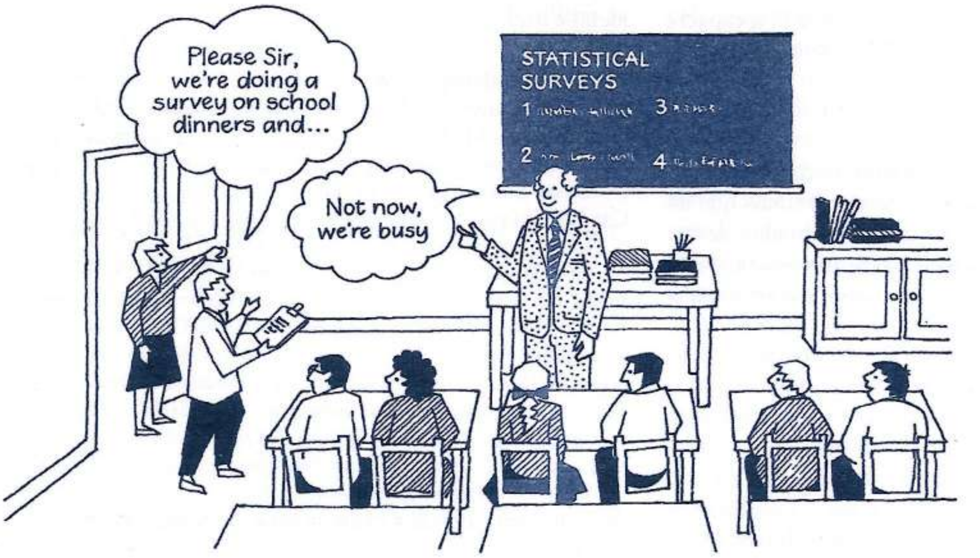


Figura 1. O ensino dos estudos estatísticos nas aulas (Open University, 1987)

No número 122 da *Educação Matemática*, no texto «Sobre literacia estatística», argumentei a favor da realização de estudos estatísticos por parte dos alunos, nos quais possam ter um papel relevante, intervindo desde o seu planeamento até à sua divulgação, passando por todas as fases desde a formulação das questões à escrita das conclusões.

Esta situação não é, no entanto, muito frequente no ensino da Estatística, como se satiriza na figura 1, publicada na obra clássica *Statistical Investigations in the Secondary School*, da Open University (1987). Em geral, mesmo quando os alunos trabalham em situações reais, fazem-no frequentemente a partir de dados já recolhidos, não tendo oportunidade de experienciar o que está envolvido no planeamento do estudo, em especial em tudo o que é preciso pensar e ponderar antes da obtenção dos dados.

A explicá-lo poderão estar diversas razões: implica um investimento considerável para a sua preparação por parte do professor; implica uma dose de tempo também considerável para concretizar pelos alunos, podendo requerer diversas aulas e trabalho extra-aula; implica disponibilidade para, professor e alunos, lidarem com situações bastante abertas na aula, porquanto é necessariamente na aula que se tomam coletivamente decisões importantes para o progesso do trabalho – relativas às questões a fazer, aos dados a recolher, a como tratá-los. Estes aspetos são fundamentais para uma completa experiência estatística e, além disso, marcam decisivamente a qualidade do conhecimento estatístico que é produzido. Assim, é importante que os alunos tenham a possibilidade de desenvolver estudos estatísticos não só para que possam viver tudo aquilo que

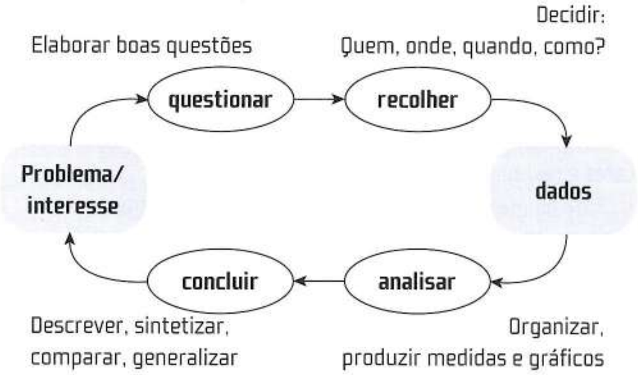


Figura 2. Fases e respetivos focos de um estudo estatístico.

envolve a realização de um estudo, como para que possam ter a oportunidade de reconhecer aspectos sensíveis que podem afetar a qualidade do conhecimento produzido.

Em geral, as caracterizações dos estudos (ou investigações) estatísticos referem-se a quatro fases, que aqui sintetizo por: 1) questionar; 2) recolher; 3) analisar; e 4) concluir. Na figura 2 incluo o principal foco do trabalho a realizar em cada uma das fases.

Neste texto refiro-me em particular às duas primeira fases, deixando o aprofundamento relativamente às duas últimas fases para a próxima edição desta secção no n.º 123 da EM.
Ao iniciar um estudo estatístico, tendo como ponto de partida uma situação que, por alguma razão, se pretende conhecer melhor, há que elaborar boas questões que permitam ampliar, de forma objetiva, o conhecimento sobre aquilo que se pretende aprofundar. Mas não servem umas questões quaisquer. As questões devem dizer realmente respeito ao que se pretende conhecer e não a aspetos acessórios que lhe estejam associados; devem ser claras evitando ambiguidade de interpretações; devem poder ser respondíveis por quem é alvo do estudo; devem permitir evidenciar regularidades entre a diversidade de respostas obtidas.

Por exemplo, se pretende estudar (como proponho na tarefa incluída nesta secção, dirigida ao 3.º ciclo ou ensino secundário) a quantidade de resíduos sólidos urbanos produzidos pelos alunos e identificar os seus hábitos relativamente à separação de lixo, exemplos de questões pouco úteis são as seguintes: «Concordas com a reciclagem do lixo?» ,«Costumas fazer separação de lixo?», «Achas que és cuidadoso com a separação do lixo?». Enquanto que a primeira questão não diz sequer respeito aos hábitos dos alunos, as respostas às duas últimas questões são altamente subjetivas, não permitindo caracterizar a realidade da separação do lixo. A questão «Na tua família todos os elementos separam o lixo?», é um exemplo de uma questão a que muitos alunos podem não saber ou querer responder, criando-se assim a possibilidade de muitas não respostas que nada acrescentam ao estudo. Já a questão «Quais os resíduos sólidos que separas?», permite obter informação objetiva, concreta e fiável pois diz respeito ao próprio respondente.

Note-se que a forma como uma questão é colocada, aberta com vista a posterior análise para obter categorias que contemplem as respostas obtidas, ou fechada com categorias oferecidas à partida (por exemplo, papel, vidro, plástico, metais, pilhas), deve também ser alvo de ponderação por parte dos alunos. Estes devem ser capazes de reconhecer as vantagens e as desvantagens de uma e outra hipóteses — como, por exemplo, que quando se oferece um leque fechado de respostas, o que se recebe em troca é a auscultação de como os respondentes se ajustam às nossas respostas e não exatamente as respostas que genuinamente dariam. Muitas vezes serão coincidentes, outras nem por isso. Importante é também considerar se se deve ou não, no caso de oferta de respostas múltiplas, proporcionar a possibilidade ao respondente de não responder, incluindo a opção «não sei», a possibilidade de responder algo diferente do que é oferecido, incluindo uma opção aberta para que o respondente registe a sua resposta real, ou ainda a possibilidade de o respondente se manifestar com uma resposta não afirmativa — no exemplo acima referido, deveria existir uma categoria que fosse «nada», para permitir a resposta a quem não separa lixo nenhum.

Outro aspeto a considerar é a forma como as questões se apresentam aos respondentes. Entrevistas, questionários em papel ou *on line*, identificados ou anónimos? Todas estas opções devem ser ponderadas e é importante que os alunos sejam capazes de discutir vantagens e desvantagens de cada uma em vez de optarem acriticamente ou correspondendo sem pensar a uma sugestão do professor.

Ainda antes da recolha de dados é preciso decidir a quem as questões devem ser colocadas, por quem e quando. Pode haver interesse em que a recolha de dados, para que seja sustentada, assente num registo que envolva um tempo dilatado e uma recolha sistemática. Por exemplo, para que um aluno possa indicar com um fundamento mínimo qual a quantidade que lixo que produz por dia, tem interesse discutir se, por exemplo, é indiferente responder com base em um qualquer dia da semana ou, se pelo contrário, convém ter por base o que acontece em toda uma semana, pois a quantidade de lixo produzido nos dias úteis e nos do fim de semana poderá diferir significativamente — uma opção mais cuidada seria determinar o peso médio por dia com base nos registos do peso do lixo produzido diariamente. Naturalmente que o peso do lixo produzido pelo aluno também é influenciado pelo número de pessoas que «partilham» esse lixo, pelo que será simultaneamente mais fácil e rigoroso determinar o peso do lixo produzido por todo o agregado familiar a que o aluno pertence e depois determinar o que corresponde ao aluno através de uma divisão. Para fazer recolhas que permitam estes cálculos, pode ser eficiente produzir tabelas para registar diariamente o peso do lixo produzido por uma família, podendo inclusivamente aproveitar-se também para fazer registos relativamente ao lixo que é separado.

Ainda relativamente à recolha de dados, é importante considerar o interesse de ter dados provenientes de fontes primárias, que se obtêm em primeira mão dos respondentes, ou provenientes de fontes secundárias, que já foram antes recolhidos e organizados por alguém, em geral uma entidade, que os dispensa ao grande público através de alguma publicação ou site. Quando o estudo recai sobre a turma, caso muito frequente nos estudos desenvolvidos no ensino da matemática, em contexto de sala de aula, é natural e indicado recolher dados diretamente. Mas mesmo nestes casos pode sempre avaliar-se a possibilidade de confrontar a caracterização da turma relativamente ao tema em estudo com a caracterização do que acontece com a região, o país, ou mesmo internacionalmente relativamente ao mesmo assunto – como é sugerido na tarefa «O lixo à nossa volta». Isto permite aos alunos aprofundarem os seus conhecimentos sobre as temáticas estudadas mas também os seus conhecimentos estatísticos, uma vez que este confronto potencia discussões bastante enriquecedoras acerca do que pode influenciar as conclusões obtidas num estudo estatístico, nomeadamente quando as conclusões do estudo local diferem de algum modo das conclusões do estudo mais geral. Por exemplo, será expectável que no estudo realizado pelos alunos se obtenha um valor inferior ao que é fornecido pelo INE para a quantidade de resíduos urbanos produzidos por habitante na mesma unidade de tempo, pois os alunos terão dificuldade em recolher dados sobre todo o lixo que produzem. Poderão facilmente aceder ao que produzem no contexto da sua vida familiar, mas terão mais dificuldade em contabilizar aquele que é gerado por cada um em outros contextos em que participa, como a escola, centros desportivos, cafés e restaurantes, cinemas, hospitais, etc...

Esta hipótese de trabalho era, até há relativamente poucos anos, muito mais difícil do que na atualidade, em que entidades idóneas disponibilizam imensas quantidades de dados, mais ou menos organizados, acessíveis a partir de qualquer computador. Para além de permitir enriquecer a experiência estatística dos alunos e de ampliar os seus horizontes, esta possibilidade permite que todos, professores e alunos, desenvolvamos a capacidade de ser «detetives dos dados», pesquisando e escolhendo os dados relevantes nas situações a estudar.

Naturalmente que desenvolver estudos estatísticos na aula envolve lidar com dificuldades que nunca surgem quando apenas se resolvem exercícios. Mas qual seria então o propósito de ensinarmos estatística aos alunos?

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
Unidade de Investigação do IE/UL

PENSE NISTO

Qual é a média das idades dos membros da sua família?

O Pedro tem 10 anos e os seus familiares têm as seguintes idades: avó: 65; pai: 41; mãe: 40; irmão: 7. Calcula a média das idades dos membros da família do Pedro.

Provavelmente não sabe a resposta à questão que dei ao título deste Pense Nisto. Provavelmente não a saber não lhe tirou o sono, nem sequer constituiu alguma preocupação, nem mesmo nunca precisou desse valor para nada, nem nunca acordou a sonhar com ele. Arrisco mesmo em que nunca teve sequer alguma irresistível curiosidade em saber quanto era...

Provavelmente, isto significa que conhecer a média das idades dos membros da própria família não só é desinteressante, como absolutamente inútil e irrelevante. Significa que conhecê-la não melhora a nossa relação com a vida do dia-a-dia, não nos torna cidadãos mais informados e preparados, não acrescenta nada à nossa literacia estatística. Nem mesmo nos adianta algo inédito acerca da família a que pertencemos, pois não?

Naturalmente que cada um se pode entreter a calcular as médias que entender, há gostos para tudo. Mas dar isto como um exemplo de exercício no domínio da Organização e tratamento de dados (Caderno de apoio às metas curriculares – OTD5 – pág. 32)?!? O que revela esta proposta acerca dos propósitos do ensino da Estatística que lhe estão implícitos? Que pertinência têm na atual sociedade? Que contributos têm na melhoria das aprendizagens de conhecimentos matemáticos significativos dos alunos?

Provavelmente este exercício tem apenas uma ambição modesta e visa proporcionar mais uma oportunidade para exercitar o cálculo da média. Mas, a assim ser, poderia ter sido evitado pois nos referidos cadernos já existem muitos exemplos em que a «realidade» é artificial ou desprezada, com dados estritamente numéricos e descontextualizados destinados estritamente ao treino dos procedimentos e sem qualquer incentivo à interpretação. É este o ensino da Estatística que defende? Pense nisto.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
Unidade de Investigação do IE/UL

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa

O lixo à nossa volta

Costumamos chamar «lixo» aos resíduos sólidos urbanos (RSU) que são produzidos nas nossas casas, nomeadamente os resultantes da preparação de alimentos e da limpeza das habitações. Mas os RSU englobam ainda resíduos provenientes do setor de serviços, como a restauração, ou de estabelecimentos comerciais ou industriais e de unidades de saúde não contemplando os resíduos hospitalares perigosos nem os tóxicos, que têm um tratamento diferenciado e especial.

Todos precisamos de estar alerta e de contribuir para reduzir o problema do que fazer aos resíduos. Mas talvez vivas o teu dia-a-dia sem te aperceberes do que se passa com o lixo à nossa volta. Sabes quanto lixo produzes, por dia, por mês, por ano? Tens o hábito de separar o lixo? E a tua família? E a tua escola?

Propomos-te a realização de um estudo estatístico que te permita conhecer melhor esta realidade e comparares o que acontece no meio onde vives com o que se passa a nível nacional. Este estudo tem por base a quantidade de lixo que, em média, é produzida por cada aluno, diária ou anualmente, e os seus hábitos relativos à separação de lixo (tipos de resíduos separados, sua quantidade, regularidade,...).

1. **Pensar a recolha de dados – trabalho de grupo**
   a) Redige, com os teus colegas de grupo, três questões que consideres importantes neste estudo;
   b) Redige, com os teus colegas de grupo, uma proposta de como fazer a recolha dos dados necessários, indicando quem, quando e onde deve responder às questões.

2. **Decidir a recolha de dados – discussão na turma**
   a) Apresenta as questões do teu grupo à turma, explicando a sua intenção, e adapta-as conforme as sugestões de modo a ficarem mais claras;
   b) Conjuntamente com a turma, participa na elaboração de um questionário comum composto pelas questões que na discussão anterior foram consideradas mais adequadas;
   c) Conjuntamente com a turma, participa na decisão de como deverá ser aplicado o questionário, a quem e quando.

3. **Realizar a recolha de dados – trabalho individual**
   a) Recolhe os dados respeitando o que foi combinado na turma, cuidando que os registos sejam rigorosos.

4. **Organizar os dados recolhidos – discussão na turma e trabalho de grupo**
   a) Combina com a turma quais as questões do questionário que correspondem a cada grupo de modo a que cada questão seja tratada apenas por um grupo;
   b) Recolhe todas as respostas relativas à(s) questão(ões) que vais tratar, analisa-as e decide como organizar os dados – podes ter de organizar categorias para as variáveis em estudo em função da tua análise das respostas;
   c) Organiza e preenche tabelas de frequência relativas a cada variável em análise, contando com atenção os dados.

5. **Tratar e representar os dados recolhidos – trabalho de grupo**
   a) Determina as medidas estatísticas que te permitam tirar conclusões acerca das variáveis que estudaste;
   b) Representa graficamente os dados, escolhendo gráficos adequados.

6. **Elaboração de conclusões – discussão na turma**
   a) Discute e conclui sobre a quantidade de lixo produzida, em média, por cada aluno da tua turma;
   b) Discute e conclui sobre a separação de lixo que é ou não feita pelos alunos da tua turma;

7. **Comparação da tua turma com o teu concelho – trabalho de grupo**
   a) Consulta o site do Instituto Nacional de Estatística (INE) em http://www.ine.pt/
   Neste site, no menu, à esquerda, de informação estatística, seleciona a opção dados estatísticos e, nesta, seleciona o tema «ambiente», o subtema «resíduos» e o nível geográfico de «município» (equivalente a concelho). Escolhe depois a opção
   «Resíduos urbanos recolhidos por habitante (kg/ hab.) por Localização geográfica; Anual».
   Usa a opção «alterar condições de seleção» para escolheres, na «localização geográfica», o concelho onde vives e visualiza os quadros e gráficos respetivos.
   b) Compara os valores que obtiveste no teu estudo relativo à quantidade média de lixo que cada aluno da tua turma produz com a indicação do site do INE para o concelho em que habitas. Os valores são iguais ou diferentes? A que se poderá ficar a dever uma eventual diferença?
   c) Ainda no mesmo site, pesquisa a informação disponível sobre a separação do lixo relativa ao concelho em que habitas;
   d) Compara as conclusões do teu estudo relativo à separação do lixo realizada pelos alunos da tua turma com a informação do site do INE para o concelho em que habitas. As conclusões são iguais ou diferentes? A que se poderá ficar a dever uma eventual diferença?

8. **Apreciação do estudo estatístico realizado – discussão na turma**
   a) Identifica as opções que foram feitas no estudo realizado pela tua turma e que influenciam as conclusões, nomeadamente no que diz respeito à recolha de dados (amostra, instrumentos e procedimentos) e ao seu tratamento;
   b) Discute de que modo se poderia melhorar o rigor do estudo que realizaste!

A escola que eu (não) quero

Há 16 anos atrás, Paulo Abrantes publicou na revista n.°43 um editorial intitulado «As duas faces da escola». Na altura, o texto serviu para expressar os sentimentos contraditórios que duas realidades distintas associadas à escola lhe provocavam. Recentemente, a expressão «as duas faces da escola» surgiu-me espontaneamente na minha cabeça a propósito de duas situações que vivi num curto espaço de tempo.

A primeira situação diz respeito à forma como algumas escolas do 1°. ciclo da minha área de residência têm lidado com a realização de testes de avaliação. Ao que soube, ficou estipulado que o professor titular da turma não deve estar presente no momento em que os alunos fazem o teste, nem tão pouco é responsável pela sua correção. Este procedimento foi adotado desde o 1°. ano de escolaridade e abre assim as portas ao ambiente formal dos exames, em nome da isenção, do rigor e da preparação das crianças para futuras avaliações externas. Muitas crianças reagem com nervosismo, receando cometer quaisquer erros e duvidando dos seus conhecimentos, mesmo aqueles que já pareciam mais do que interiorizados. Ficarão então preparadas para quê? Dominarão melhor os conteúdos por começarem a ser pressionadas desde os 6 anos? Terão desenvolvido melhor as suas capacidades? E a avaliação das suas aprendizagens será mais fiável por ser outro professor a vigiar e corrigir os testes? Qual será a imagem do professor titular que se transmite aos encarregados de educação com este procedimento? Não será a de alguém tendencioso a quem não se pode confiar a avaliação dos seus alunos? Significa então que a avaliação das aprendizagens se restringe aos testes?

A segunda situação ocorreu-me quando assisti à apresentação dos meus alunos do 3°. ano da licenciatura em Educação Básica sobre os seus projetos interdisciplinares que irão realizar com as crianças num ambiente de jardim de infância ou de 1°. ciclo, durante o mês de estágio. Nas semanas anteriores estiveram a observar atividades nos contextos e com as crianças com quem vão trabalhar para assim poderem partir dos seus interesses e questões e delinearem um projeto que vá ao encontro desses mesmos interesses. As propostas apresentadas têm temáticas, dimensões e graus de envolvimento diferentes. Alguns alunos mostraram-se mais entusiasmados, outros mais preocupados. Entre estes, três alunas estavam muito desanimadas porque a turma de 2°. ano com quem vão trabalhar realizará em maio o teste intermédio, pelo que a professora cooperante lhes pediu para «darem matéria» e não fazerem um projeto. Com esta limitação, o melhor que as alunas conseguiram produzir no momento foi a ideia de que o projeto pudesse ser a «preparação para o teste intermédio». Entre os alunos mais entusiasmados estava um par que também irá trabalhar com uma turma de 2°. ano, mas desta vez sem a perspetiva de um teste intermédio no horizonte. Contaram-nos que o seu projeto tinha como ponto de partida uma quinta pedagógica onde as crianças estão muito envolvidas, não porque a avistem diariamente ou tenham pontualmente semeado algo que nunca mais viram crescer, mas porque efetivamente tratavam do que tinham cultivado e já sabiam muito sobre a produção daqueles legumes. Os futuros professores perceberam que tinham ali um ponto de partida excelente para um projeto, mas souberam estar atentos aos genuínos interesses dos alunos que agora queriam saber coisas relacionadas com a fase anterior ao cultivo (como por exemplo, como se prepara o estrume) ou posterior (o que fazer aos produtos depois de apanhados, como transportá-los, etc). Tinham também várias entradas para a matemática: como podemos estimar a quantidade produzida de um legume num determinado espaço de tempo? Se quisermos vender os produtos, qual o valor aceitável a pedir? Quanto dinheiro poderemos fazer? E para cozinhar um prato para a turma, quais as quantidades que precisamos? ...

As duas faces da escola, pensei eu... estas duas apresentações, cenários tão distintos embora com crianças das mesmas idades, tinham algo que as separava de forma evidente — o teste intermédio. No primeiro caso, não havia tempo para que crianças com 7 anos pudessem realizar um projeto e assim aprender de forma significativa a partir dos seus interesses. Havia que trabalhar para o teste, tudo estava pronto para isso. Até os alunos já tinham os livros de preparação que as editoras tão prontamente disponibilizam numa livraria perto de nós (ou à distância de um clic). No segundo caso, a metodologia de projeto parecia ajustar-se perfeitamente às aprendizagens visadas, até os conceitos de área e perímetro, planificados para o 3.° período, se articulavam facilmente com o tema do projeto e as questões formuladas, sem necessidade de forçar ou distorcer a matemática para marcar presença num trabalho interdisciplinar.

Volto então à questão que Paulo Abrantes colocava naquele editorial: «Quando falamos da escola, estamos a referir-nos a quê?» À escola onde os alunos são «formatados» para terem um bom desempenho num exame ou teste, treinando-os em questões tipo que uma editora achou representativas daquela prova? Ou à escola onde os professores praticam um ensino com base em metodologias adequadas que visam uma aprendizagem com sentido e onde os alunos possam efetivamente estabelecer pontes entre aquilo que já sabem e o que devem aprender? À escola onde os professores são meros executores das decisões superiores? Ou à escola onde os professores têm voz, sentido crítico e participação na gestão do currículo?

Diz-se que o governo tem aplicado a austeridade como o tratamento para a doença do défice e com isso está a matar o país. Eu digo que o governo aplica o tratamento dos exames para (alegadamente) tratar as falhas nas aprendizagens dos nossos alunos e com isso está a matar o ensino. Se não podemos recusar o tratamento, pelo menos não sejamos nós a aumentar-lhe a dose.

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa

Um olhar encantado[1] sobre o GTI

Isolina Oliveira

As políticas educativas nos últimos anos, em Portugal, têm percorrido diversas vagas que deixam um rasto de desencanto nos professores, nomeadamente, nos que se envolvem com a melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem, em geral, e da matemática em particular. É neste pano de fundo que escrevo sobre o GTI e o que representa(ou) para os professores que têm a oportunidade de nele participar, do ponto de vista da aprendizagem profissional.

Antes, porém, revejo o pensamento que ancorou a minha participação no GTI e que suscitou pequenas e enraizadas mudanças, inovações didáticas ao nível da aula de matemática que tiveram consequências na construção reflexiva da identidade, entendida como um processo dinâmico, instável, em que o *self* se constitui como um projeto reflexivo contínuo. A convicção de que a investigação e o desenvolvimento do currículo faziam parte do trabalho do professor e que havia condições para que isso viesse a concretizar-se era, para mim, essencial quando se iniciou a ligação ao GTI. Com o domínio por parte do professor desse campo da investigação acreditava que a imagem profissional que o professor tem de si e as suas condições de trabalho viriam a ser modificadas.

O «profissional amplo» (expressão usada por Laurence Stenhouse) refere-se ao professor com uma compreensão alargada do currículo e uma atitude questionante face à profissão e ao desempenho pessoal. Este professor tem certas capacidades, perspetivas e compromissos, de que se destaca a capacidade para o autodesenvolvimento profissional através de um processo sistemático de autoanálise, do estudo do trabalho desenvolvido pelos pares e da concretização de ideias por meio de procedimentos de investigação na aula. Esta conceção de professor tem implícito que o desenvolvimento curricular se deve basear nos estudos de sala de aula, e de outros cenários educativos, e que os professores são capazes de os realizar, marcando a agenda e definindo as questões que consideram importantes para a investigação. Até então, a investigação curricular valorizava os estudos realizados por investigadores externos, o que trazia constrangimentos de diversa natureza e nem sempre traziam respostas às questões com que os profissionais se debatiam. Esta nova posição traça uma rutura com o que era habitual em termos da investigação e do processo de desenvolvimento curricular e faz emergir o conceito de «professor como investigador».

A abordagem assente no professor como investigador coloca duas condições que são essenciais para que os profissionais realizem investigação: a primeira tem a ver com a compreensão e o conhecimento de como se investiga e a segunda com a assunção de que os resultados dessa investigação constituem informação fundamental para que o professor possa tomar medidas para melhorar o ensino. Há, então, que desenvolver certas competências de investigação e experiência que permitam ao professor percecionar ações inovadoras, transformando-se em questionador da sua própria prática. Deve ser claro para o professor que ao assumir este papel está a contribuir para o desenvolvimento do ensino e a aperfeiçoar a sua prática profissional. Contudo, neste papel de investigador, o professor precisa ser auxiliado pelos seus pares e confrontar-se com outras práticas e novos conhecimentos.

Um desenvolvimento do currículo com qualidade depende dos professores serem capazes de adotar uma atitude investigativa em relação ao seu modo de ensinar, ou seja, de analisar sistematicamente e com sentido crítico a sua própria atividade prática. Esta atitude investigativa não é isenta de problemas. Por um lado, os problemas teóricos que têm a ver com a necessidade de conceitos para que o professor possa expressar a compreensão da sua prática; por outro, os problemas metodológicos, relacionados com a recolha dos dados. Na medida em que se pretende melhorar as práticas, aceita-se que a perceção subjetiva do professor é crucial para a prática, interessando, então, o desenvolvimento de uma perspetiva subjetiva, sensível e autocrítica. Este trabalho torna-se complexo pois é preciso controlar permanentemente a presença de hábitos, crenças, ilusões e desânimos, passando a ter um função importante a autorreflexão, o trabalho conjunto com colegas, a utilização de diversos instrumentos na recolha de dados, a par das opiniões dos alunos. Todavia, a melhor forma de avançar no sentido de que o ensino e a aprendizagem melhorem significativamente é a participação em comunidades de aprendizagem assentes no trabalho colaborativo e cooperativo, de mútuo apoio, em que professores e equipas de investigação trabalham em conjunto.

A profissionalidade do professor está ligada à investigação e à procura de aperfeiçoar a sua prática de ensino. A investigação é uma forma de obter conhecimento profissional e desenvolve-se através da experiência do questionamento. O professor tem um novo papel, tornando-se crucial na produção de inovação nas escolas, mas o trabalho individual pode não ser completamente eficaz se não for apoiado.

Encarar o currículo como uma prática permanentemente em deliberação e em negociação, tem consequências a nível da sala de aula, o que significa considerar a interação entre professores e alunos. Há necessidade de tomar decisões sobre os propósitos, os conteúdos, o desenvolvimento curricular e, neste caso, valoriza-se a interpretação que é negociada e o ato pessoal de construção de significado. O currículo como projecto constitui-se como instrumento de comunicação entre a teoria e a prática, como quadro conceptual que sustenta a prática e, então, a inovação e renovação pedagógica ganham uma nova dimensão. Estimula uma nova visão sobre a profissionalidade docente, os professores são investigadores e reflexivos sobre a sua prática profissional.

O Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) em Educação Matemática foi criado na APM (http://www.apm.pt/portal/index.php?id=20891) em 1991, com a intenção de reunir pessoas interessadas na investigação em Educação Matemática. Desde a sua origem teve a preocupação em integrar professores dos diversos níveis de ensino e promover atitudes de investigação como forma de melhorar o ensino da Matemática. As primeiras reuniões em que estive presente e que ocorriam na sequência dos Seminários de Investigação em Educação Matemática (SIEM) foram essenciais para a minha adesão e envolvimento posterior. Na verdade, a reflexão em torno dos trabalhos que tinham sido apresentados no Seminário e a troca de ideias e experiências entre os professores presentes, pertencentes a diferentes instituições, proporcionava um aprofundamento de conhecimento, para além do que seria possível no quotidiano escolar. Esta forma de participação viria a alargar-se mais tarde com a criação do grupo de estudos «O professor como investigador», em abril de 2000.

Este grupo emerge da necessidade de tornar mais forte a ligação entre a investigação e o desenvolvimento curricular e, na sua criação, definem-se como objetivos do grupo os seguintes:
i) Proporcionar uma reflexão aprofundada entre os seus membros acerca do tema «O professor como investigador» (propósito, natureza e variedade, fundamentos, metodologias, alcance...);
ii) Contribuir para a divulgação da perspetiva que a investigação sobre a prática faz parte da atividade profissional do professor.
O grupo de estudos transforma-se numa unidade de formação e investigação traduzindo, claramente, o que são os fundamentos do GTI. Constitui-se como uma comunidade de aprendizagem profissional onde os temas a trabalhar emergem do que são as preocupações e interesses dos professores, e em que a publicação continuada dos estudos desenvolvidos em livros, a par de outras iniciativas, permite a divulgação de certas práticas de sala de aula junto dos professores de Matemática.

Passadas duas décadas sobre a fundação do GTI e uma sobre a criação do GE podemos conhecer o trabalho deste grupo, não só através da coleção de livros já publicados, o primeiro com o título «Reflectir e investigar sobre a prática profissional», editado em 2002, e o último «O professor e o programa de Matemática do ensino básico», editado em 2010 mas, também, se prestarmos atenção ao modo colaborativo como hoje, em muitas escolas, os professores de Matemática trabalham. Tornou-se evidente como a investigação dos professores sobre a sua própria prática lhes confere protagonismo no campo curricular e contribui para o seu desenvolvimento pessoal e profissional; por outro lado, este campo de investigação com raízes sólidas noutros países ganhou espaço em Portugal, nomeadamente, na área da Educação Matemática.

Esta reflexão pessoal, a que acedi com gosto, aspira a deixar claro que não basta ter em conta o conhecimento, as capacidades e competências próprias dos professores, é preciso, também, considerar as intenções, as esperanças e os seus desejos sobre o futuro. A aprendizagem profissional proporcionada pelo envolvimento no GTI constituiu o cadinho para a melhoria da minha prática nos diversos contextos, por permitir a reflexão continuada sobre a mesma, e orientada pela melhoria das aprendizagens dos alunos.

Nota

[1] Este título é inspirado no artigo de António Bolívar «Um olhar actual sobre a mudança educativa: onde situar os esforços de melhoria?» *In Escola, currículo e formação de identidades*. Porto: ASA, 2007.

Isolina Oliveira
Universidade Aberta

Objetos geométricos e raciocínio geométrico

O que distingue estas as figuras 1 e 2? A primeira é uma obra do artista plástico Robert Mangold (n. 1973) que pode ser vista na Tate Collection (http://www.tate.org.uk/art). A segunda é uma composição geométrica. A primeira foi escolhida para ilustrar o modo como um artista pode relacionar várias figuras para elaborar uma obra esteticamente atraente. Ela faz parte de um conjunto de seis composições nas quais, para além da variação da cor, é possível identificar pequenas variações no desenho do quadrado (figura 3).

A figura 2 mostra o ponto de partida que Arquimedes usou para estabelecer relações entre a área do círculo e as áreas do quadrado inscrito e circunscrito. Os objetos artísticos permitem-nos uma fruição estética. Os objetos matemáticos, geométricos ou não, também podem proporcionar essa fruição, porém encerram outras possibilidades. Aprender geometria é abrir as portas dessas possibilidades.

Obtenha várias relações entre os elementos das figuras que formam a composição, bem como entre as suas áreas e os seus perímetros.

Do ponto de vista geométrico, esta composição pode ser encarada de forma dinâmica em que se procura uma posição mais favorável (figura 4). A terceira imagem permite afirmar que o diâmetro da circunferência é igual ao lado do quadrado exterior e à diagonal do quadrado interior. Esta circunferência permite assim estabelecer relações entre os dois quadrados, sem ela não seria possível estabelecê-las.

Com mais elementos na composição esta complica-se visualmente, porém a informação que proporciona permite avançar mais (figura 5). A área do quadrado exterior é o dobro da área do quadrado interior. Ao destacar agora um novo quadrado, a sombreado, vemos que a sua área é o quadrado do raio da circunferência. Concluímos que a área do círculo está entre $2r^2$ e $4r^2$, num valor que deverá estar próximo de $3r^2$. Esta é a aproximação mais simples da relação entre a área de um círculo e o seu raio.

Arquimedes (287-212 A.C.), considerado como um dos maiores matemáticos de todos os tempos e possivelmente o maior da antiguidade, recorreu aos perímetros de polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência e obteve a primeira aproximação rigorosa de π, $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$. Para chegar a este enquadramento partiu de hexágonos e recorreu sucessivamente a polígonos com um número de lados 6×2^n (figura 6). Obteve estes valores na quarta ordem com polígonos de 96 lados.

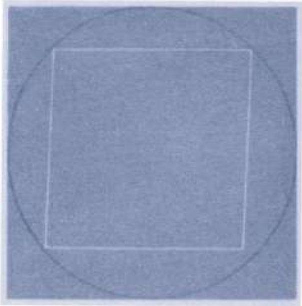


Figura 1

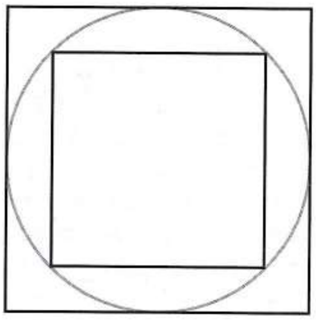


Figura 2

Este exemplo ilustra o papel da geometria no desenvolvimento do raciocínio geométrico, bem como no estabelecimento de conexões. Para mim é um bom exemplo do que Howard Eves considera a geometria inconsciente e a geometria científica. Este matemático considera que a história da geometria é composta por dois caminhos entrelaçados. Um narra o crescimento do conhecimento geométrico e o outro a mudança da natureza do objeto de estudo. Ao desenvolver estas duas narrativas, Howard Eves fala-nos da geometria subconsciente e da geometria científica. Considera que a primeira tem origem em observações simples decorrentes da capacidade humana para reconhecer figuras e comparar as suas formas e tamanhos. Foi esta geometria que desde sempre foi utilizada pelo homem para obter decorações e padrões. De certa forma esta arte inicial fez muito pelo desenvolvimento posterior da geometria. A evolução da geometria subconsciente nas crianças é bem conhecida e facilmente observável. Progressivamente, o Homem foi sendo capaz de extrair de um número de observações relacionadas com formas, tamanhos e relações espaciais dos objetos físicos certas propriedades e relações gerais, das quais as primeiras eram casos particulares. Assim, foi introduzida a vantagem de organizar problemas geométricos práticos em classes de problemas, de tal modo que numa classe os problemas são resolvidos pelo mesmo procedimento geral. Por exemplo, a comparação do comprimento de uma circunferência com o seu diâmetro levou, ao fim de algum tempo, à lei geométrica que estabelece uma razão constante entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Howard Eves considera que esta evolução conduziu à geometria científica. Nesta, a indução, a tentativa erro, os procedimentos empíricos são os instrumentos de descoberta.

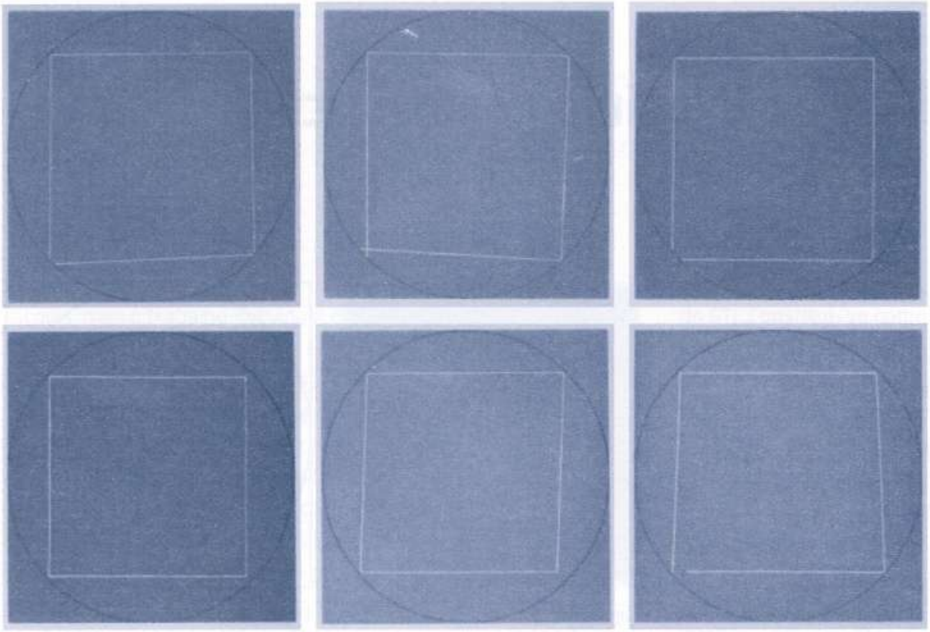


Figura 3

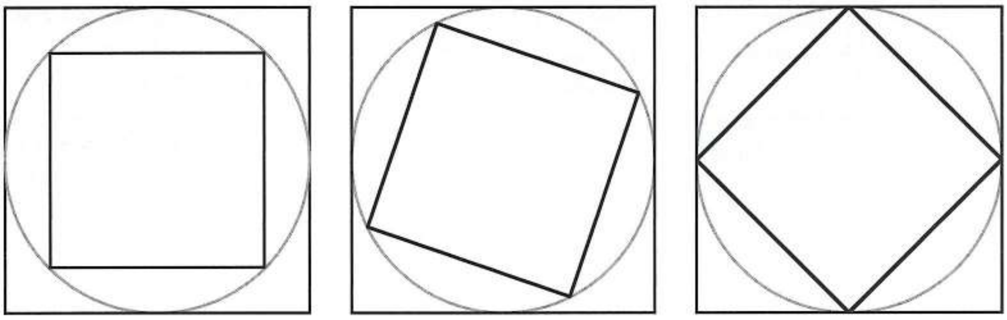


Figura 4

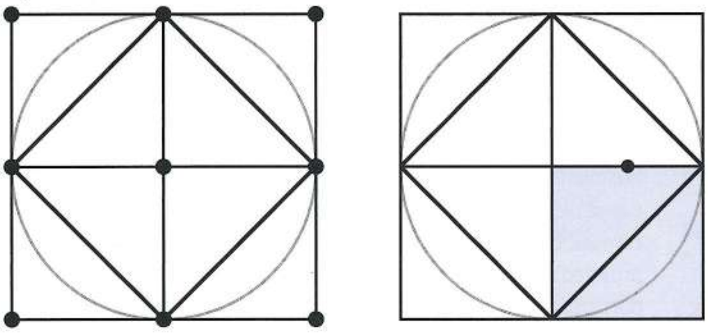


Figura 5

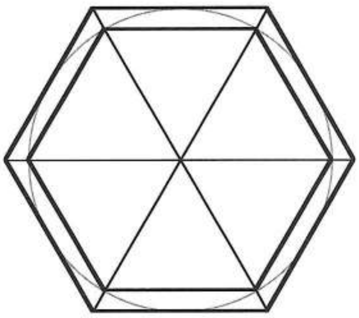


Figura 6

A perspetiva destas duas narrativas históricas é coerente com um dos propósitos atualmente dominante para o ensino da ensino da geometria, o de desenvolver o raciocínio geométrico. As metas curriculares têm por base apenas uma perspetiva dedutiva e ignoram totalmente as duas narrativas históricas referidas por Howard Eves, bem como o propósito de desenvolvimento do raciocínio geométrico que a investigação em didática preconiza. Ao fazê-lo comprometem mortalmente o ensino da geometria e por arrasto o ensino da matemática.

Referências Bibliográficas

Eves, Howard (1989). The history of geometry. In NCTM (Ed.), *Historical topics for the Mathematics classroom.* (pp. 165–192). Reston: NCTM.

Caros leitores, Depois de termos dedicado o número anterior ao programa Modellus, desenvolvido pelo colega Vitor Teodoro, voltamos neste número ao mesmo tema. Na Revista 121 foi apresentado um exemplo com funções quadráticas, onde se evidenciam algumas das potencialidades do software enquanto ferramenta interdisciplinar (Matemática – Física), baseado na ideia de que é possível fazer experiências com base nos modelos matemáticos. A exposição apresentada é fortemente apoiada por imagens do ambiente Modellus podendo o leitor aceder a um vídeo explicativo construído pelo autor.

Neste número, pretendendo ampliar e familiarizar os leitores com o uso desta ferramenta, voltamos a apresentar uma abordagem ao Modellus, agora centrada na utilização das funções sinusoidais. Esperamos desta forma poder contribuir para uma maior divulgação das potencialidades desta ferramenta computacional.

Deixo aqui um desafio aos leitores para que nos façam chegar os relatos das suas experiências pedagógicas acerca da utilização desta ou de outras ferramentas computacionais.

Modellus, exemplos com Funções Sinusoidais

Vítor Teodoro

Um exemplo simples (figura 1), com uma família de funções sinusoidais: três funções, definidas por «y1», «y2» e «y3», com uma parâmetro «A» que condiciona o contradomínio, mantido constante, e com diversos valores do parâmetro que define a frequência da oscilação (o argumento do co-seno está em radianos).

Um exemplo um pouco mais complexo (figura 2), ilustrando como se pode criar um oscilador com um período definido pelo parâmetro *T* (não confundir com *t*, a variável independente).

Criou-se uma partícula com uma coordenada definida por *x*, que oscila para um lado e para o outro...

Além da partícula, há também um «Objecto Analógico» – um ponteiro que representa o ângulo argumento da função sinusoidal. Pode assim acompanhar-se o ângulo em rotação e ver como uma rotação pode ser utilizada para descrever uma oscilação num eixo.

O terceiro exemplo (ver figura 3) mostra como se pode colocar um ângulo a rodar, com uma certa «velocidade angular», definida pelo parâmetro «omega».

Em simultâneo, criaram-se três «Objectos Geométricos»: um para representar o círculo trigonométrico, outro para representar o segmento seno e outro ainda para representar o segmento «co-seno».

Na figura, a rapidez de rotação é de 1 radiano por unidade de tempo e estão representados os gráficos do ângulo descrito na rotação, da coordenada *x* (neste caso, igual ao seno do ângulo porque *r* = 1) e da coordenada y (igual ao co-seno do ângulo, também porque *r* = 1).

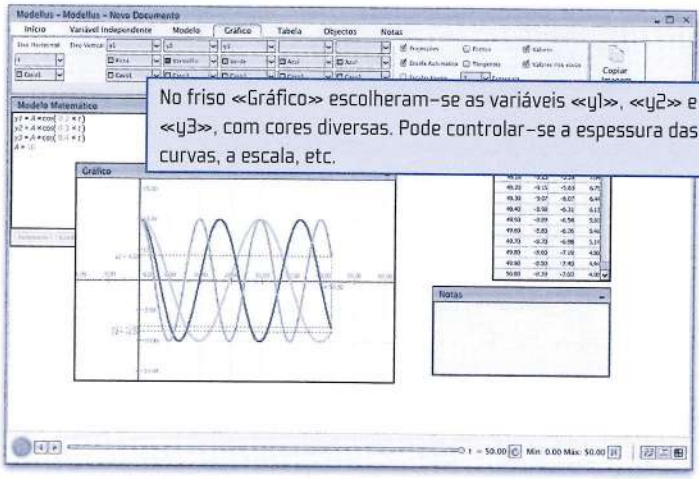


Figura 1

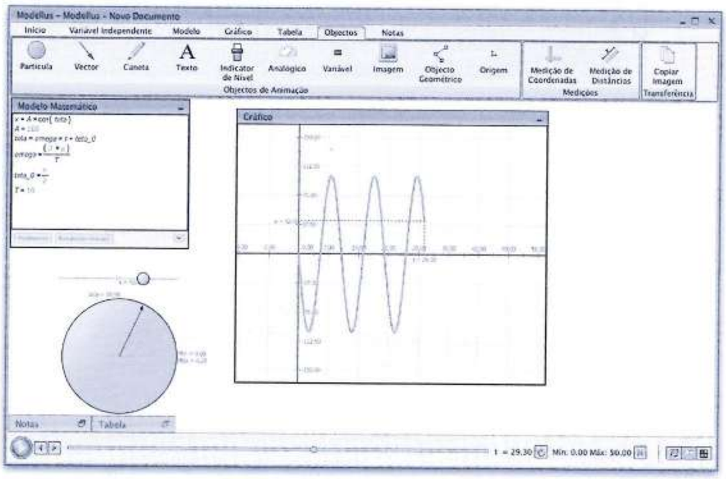
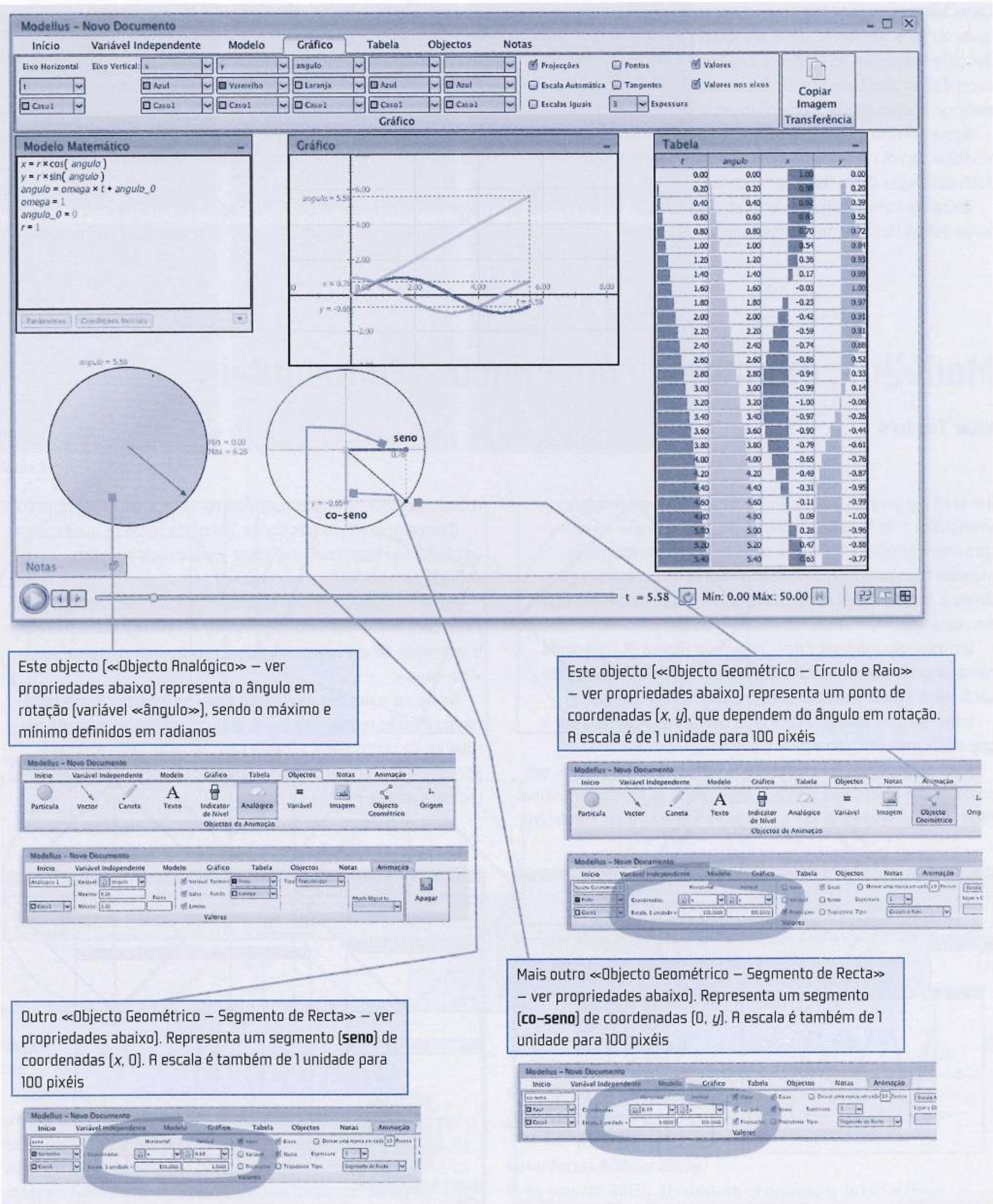


Figura 2

Figura 3



Vítor Teodoro

Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade Nova de Lisboa

APM - 2013

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2013

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2013

		Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções