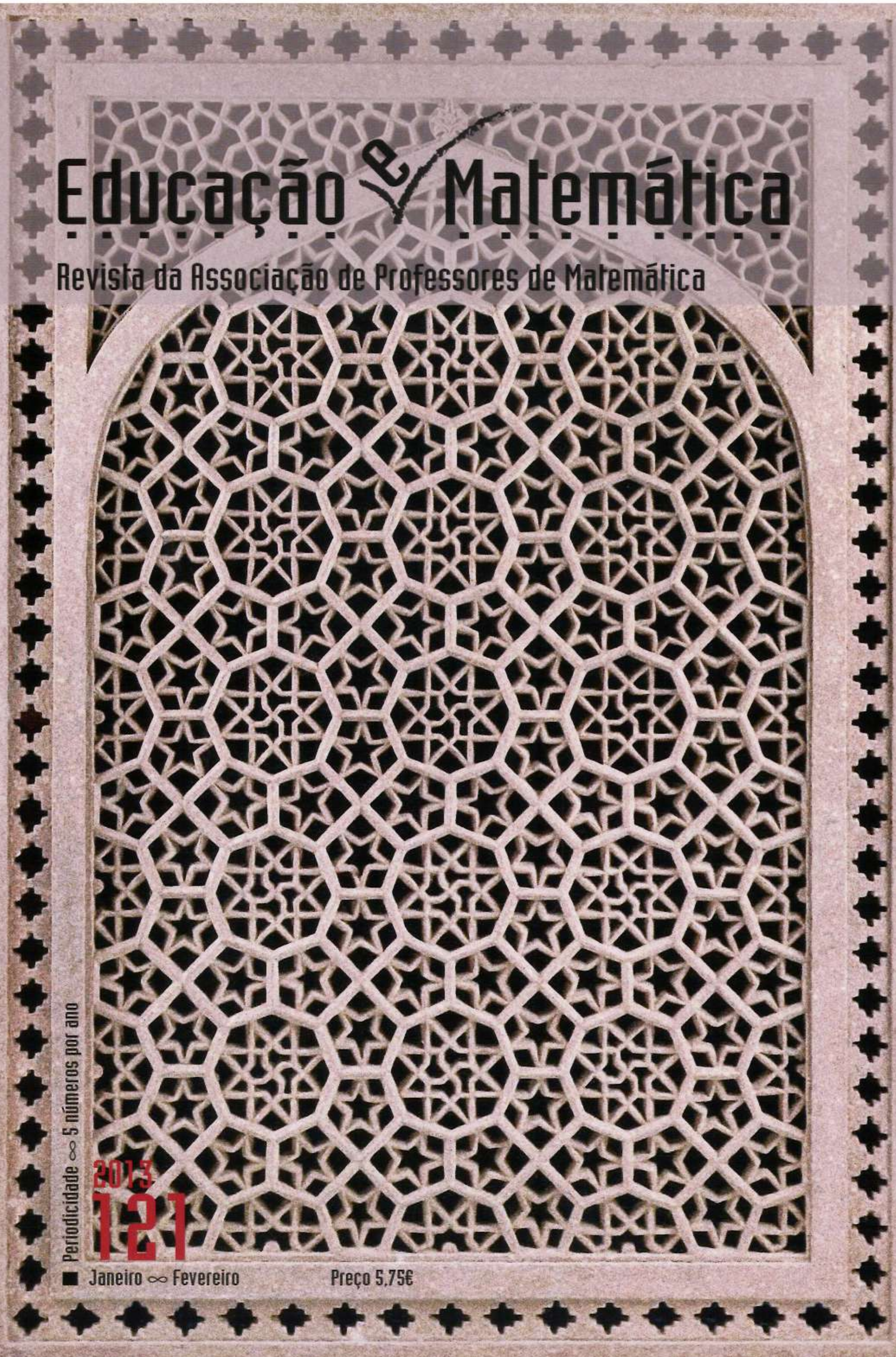
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2013

121

Janeiro ∞ Fevereiro

Preço 5,75€

Sobre a capa

Na capa, a imagem de uma janela, contendo motivos geométricos.

Jali
Arenito vermelho (185.4 cm x 130.3 cm x 8.3cm)
Terceiro quartel do século XVI (Império Mongol: India)
Fundação Rogers (1993)

António M. Fernandes

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Lina Brunheira
Subdiretora Adelina Precatado
Redação Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Irene Segurado
Isabel Rocha
Júlia Perdigão
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Alvega

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Colaboradores em 2013
Ana Paula Canavarro Estatística na Educação Matemática
Joana Latas Matemática do Planeta Terra

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Fevereiro 2013
Tiragem 2100 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Neste número também colaboraram

Ana Paula Canavarro, Atractor, Eduardo Veloso, Fátima Alexandrino, Fernando Costa, Gorete Fonseca, Joana Latas, João de Jesus Pereira, José Paulo Viana, Leonor Santos, Lígia Carvalho, Lurdes Figueiral, Lurdes Serrazina, Mónica Raquel Alexandre, Núcleo do Porto da APM, Ricardo Ferreira, Sílvia Semana.

Colaboradores em 2013

Em 2013 a revista vai contar com mais duas seções que pretendem assinalar duas iniciativas à escala mundial: o Ano Internacional da Estatística e a Matemática do Planeta Terra (MPT-2013). Esta última já divulgada na EM 119, tem como editora Joana Latas e Ana Paula Canavarro será a editora da seção Estatística na Educação Matemática.

Alterações na direção da Educação e Matemática

Isabel Rocha e Manuela Pires cessaram as funções de diretora e subdiretora, iniciadas em Janeiro de 2011, funções que são agora assumidas, respetivamente, por Lina Brunheira e Adelina Precatado.

Saiu da redação

Ana Paula Canavarro deixou de integrar a redação da revista Educação e Matemática. Durante os vinte anos em que permaneceu na redação, sendo o seu membro mais antigo, foram muitos e inestimáveis os contributos que deu à revista, merecendo especial destaque as funções de diretora, cargo que exerceu durante oito anos. Foi editora de números temáticos, escreveu artigos e editoriais, fez muitas propostas inovadoras, mas não podemos deixar de salientar o papel que teve na consolidação da equipa de redação, a quem sempre transmitiu confiança e energia. Já com saudades do trabalho regular na revista, continua agora como colaboradora permanente da seção de Estatística na Educação Matemática. Por tudo, o nosso muito obrigada.

Entrou na redação

Paulo Alvega passou a integrar a redação da revista Educação e Matemática. Esperamos que o Paulo se sinta bem num ambiente de trabalho estimulante e desafiador.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não refletindo necessariamente os pontos de vista da Redação da Revista.

Lurdes Figueiral

APM: [ainda] esperança e [sempre] desafio

O primeiro número da *Educação e Matemática*, datado de janeiro de 1987, abria com um editorial do Paulo Abrantes intitulado *Associação de Professores de Matemática: Esperança e Desafio*[1].

Volvi a esse editorial passados que são vinte e três anos sobre a data em que foi escrito e no início do ano em que recordamos os dez anos da morte do Paulo. Nesse texto podemos reencontrar e reencontrar-nos com as razões que levaram à criação da APM, com os desafios que identificávamos e assumíamos, com as esperanças que abrigávamos, com essa confiança, própria de todos os começos, própria dos tempos em que nos sabemos a sair de um longo inverno para uma primavera da qual já vemos os primeiros rebentos.

Neste janeiro de 2013, em que escrevo o editorial deste número da *Educação e Matemática*, quis revisitar esta nossa origem. Revisitar as origens é um exercício a ser feito com cuidado, para não cairmos, nem em saudosismos paralisantes, nem em historicismos estéreis. Vamos à origem sempre que nos perguntamos pela nossa identidade mais profunda, procurando ler nos começos a ideia forte que uniu as pessoas e mobilizou as vontades. Fazemo-lo quando precisamos de clarificar caminhos e opções e de retomar forças, mas fazemo-lo também conscientes de que há condições dos primeiros tempos que são irrepetíveis.

Tenho-me perguntado sobre aquelas ideias poderosas que estiveram na origem da nossa Associação; aquelas que permanecem e emergem esculpidas e limpas pelo Tempo e assim nos aparecem com mais brilho e nitidez; aquela herança que não trocamos por nenhuma outra riqueza com que nos acenam os mercadores de cada tempo. Por isso voltei ao editorial do Paulo e nele tentei vislumbrar aquilo que eu gostaria que mais nos unisse na esperança — sempre — e perante os desafios de cada momento.

E dele retomo ...

Uma História

A APM nasceu de um movimento e de um encontro: de *um movimento organizado de renovação no qual se empenharam (...) professores de diferentes graus de ensino; durante um encontro*[2] *que reuniu, ao longo de quatro dias, mais de 200 professores de Matemática de todos os graus de ensino e dos mais diversos pontos do país*. E se é certo que nem sempre é tempo de renovar, bem sabemos que o tempo é sempre de mudança há que consolidar, há que avaliar, há que ajustar e aperfeiçoar num movimento incessante que nos exige empenho, organização, reflexão. E por isso nos encontramos também: para interpelar e debater, com abertura e pluralidade, cruzando ideias, experiência e experiências, atravessando todos os graus de ensino.

Uma Esperança

Uma esperança centrada na valorização do papel do professor, *um dos aspectos decisivos no processo de renovação do ensino* — e então era de uma verdadeira renovação que se tratava — *é o que se refere ao papel dos professores*. O reconhecimento da centralidade do professor, da sua importância decisiva na sala de aula para a aprendizagem dos alunos, fazia ressaltar uma necessidade e uma constatação: a da formação, então a ganhar expressão no ensino superior, no âmbito da formação inicial para o ensino da Matemática, e que contava também com o sólido contributo de quantos tinham trabalhado na profissionalização em exercício. Mas uma formação que, com a APM, se queria que prosseguisse e se desenvolvesse, não apenas para os professores, mas com os professores, numa relação próxima e com um vínculo forte ao seu trabalho nas escolas e nas aulas, promovendo a reflexão sobre a própria prática, a partilha e o confronto de ideias e experiências. No seu editorial, o Paulo menciona, entre os objetivos da criação da APM, o de *estimular e apoiar o crescente interesse e participação* [dos professores] *em projectos de investigação pedagógica e contribuir para quebrar o isolamento a que estão geralmente sujeitos, procurando criar melhores condições para o trabalho colectivo e a troca de experiências*. É fundamental resgatar no seio da APM esse espaço formativo que passa pelo estudo e investigação, pela análise e reflexão, e pelo debate. Espaços e tempos que não podem ficar reféns do mercado da formação, antes devem recuperar aquele espírito de gratuita e grata partilha que para nós sempre foi modelo. Esta *Revista* e o *ProfMat*, que o Paulo refere como exemplos daquilo em que a APM devia apostar como coisa própria, são também exemplo e concretização desse modo de estar e de nos exercermos na Associação. E são hoje, de facto, passados todos estes anos, a nossa marca mais distintiva.

Um Desafio

O desafio que o Paulo apresentava era o do crescimento.

Na evolução histórica e no dinamismo de crescimento de grupos e pessoas há fenómenos complexos. As origens são sempre gratificantes: um pequeno conjunto de pessoas associa-se por uma causa partilhada com tanta empatia e cumplicidade que as explicitações necessárias são mínimas. Se essa causa, essa ideia, é fecunda, tenderá necessariamente a crescer. O crescimento e o passar do tempo multiplicam as forças primeiras mas distanciam-nos da fonte. Um grupo que cresce tem necessariamente um dilema permanente: a fidelidade às origens e a fidelidade ao tempo que é outro. Saber atualizar uma e outra é um discernimento que pode possibilitar o futuro de um grupo, destruí-lo ou transformá-lo noutro.

O desafio do crescimento é também o desafio de amar o tempo dos desalentos. Quando se começa, tudo é novo; quando se começa a crescer, tudo faz sentido; quando chega o tempo do desgaste, dos reveses e adversidades, do remar contra a corrente, o desalento pode invadir-nos. É hora de outros desafios e dos desafios de sempre, *hora de reunir pessoas e esforços claro, mas também de os mobilizar com (mais) abertura e comunicação, confronto e diálogo, criatividade e iniciativa, afirmação e proposição*[3].

Do Paulo aprendemos o entusiasmo contagiante por uma causa: uma APM que promova a participação ativa dos professores para a melhoria do ensino da Matemática era uma das suas grandes causas. No início deste ano em que o recordaremos de uma forma especial, neste mês de janeiro em que ele completaria 60 anos, lancemos um olhar de esperança para esta tarefa que é continuar a APM como um espaço de pertença para os professores de Matemática; um lugar de desafios que queremos assumir com a qualidade e exigência de que não podemos nunca prescindir no nosso ser e fazer.

Notas

1 Os itálicos, sem identificação no texto, são deste editorial.
2 O ProfMat de Portalegre, em 1986, onde foi fundada a APM.
3 H. M. Guimarães no editorial da EeM 118 (2012).

Lurdes Figueiral
Presidente da Direção da APM

Estatuto Editorial da Educação e Matemática

A Educação e Matemática (EM) é uma publicação da Associação de Professores de Matemática (APM). É uma publicação periódica, sai cinco vezes por ano e um dos seus números anuais é temático. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro.

Os principais objectivos da Educação e Matemática são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas actuais e importantes da educação; matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A Educação e Matemática publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias ... . A EM tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com carácter permanente.

A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista.

À semelhança das outras revistas informativas, a Educação e Matemática assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Directora da Educação e Matemática

Entrevista a Leonor Santos e Lurdes Serrazina

Nos tempos recentes, a tutela tem procurado introduzir alterações ao programa oficial de Matemática do Ensino Básico, homologado em 2007 e atualmente em vigor, através das metas curriculares e da decorrente produção de novos manuais escolares ajustados a essas metas – apesar de existirem manuais escolares certificados aprovados em 2010 por seis anos. Esta situação verifica-se sem que tenha havido uma avaliação dos investimentos anteriores e quando surgem indicadores nos estudos internacionais (TIMSS 2011; PIRLS 2011 e PISA 2009) de uma evolução muito positiva das competências dos alunos portugueses, nomeadamente em Matemática. Pareceu-nos, pois, que estas mudanças e contradições necessitam de uma profunda reflexão.

Para isso a Educação e Matemática decidiu entrevistar as colegas Leonor Santos e Lurdes Serrazina, ambas sócias fundadoras da APM, a primeira professora associada no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IEUL) e a segunda professora aposentada da ESE de Lisboa e atualmente convidada no IEUL. Este convite decorre do facto de ambas terem tido um papel relevante no desenvolvimento de medidas de política educativa dos anos anteriores a 2012, como coordenadoras, respetivamente, do Plano da Matemática I (2006 a 2009) e do Plano da Matemática II e Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (2009 a 2012) e do Programa de Formação Contínua em Matemática (2005 a 2011).

A Educação e Matemática (EM), numa entrevista via mail conduzida por Isabel Rocha e Manuela Pires, pediu-lhes que refletissem sobretudo sobre os contributos, nas mudanças educativas que se têm vindo a realizar, das duas medidas acima referidas do Plano de Ação da Matemática, as quais chegaram diretamente a tantos professores e alunos e mobilizaram as escolas a nível nacional, complementando-se na ação.

Agradecemos a ambas as colegas a sua pronta disponibilidade em responder a esta entrevista, com a certeza de que a energia, firmeza, criatividade, persistência e capacidade de análise daquelas que durante seis anos coordenaram as medidas referidas perpassa pela entrevista, e aponta caminhos para o futuro.

Neste número contamos ainda com os depoimentos de dois professores, participantes em cada um dos projetos, que nos dão o seu testemunho acerca dos contributos dos mesmos nas suas escolas e/ou no seu desenvolvimento profissional.

[EM] Foram recentemente conhecidos os resultados de dois estudos internacionais, TIMSS e PIRLS, realizados em 2011, sobre as competências em matemática, ciências e leitura de alunos de nove anos, ou seja, alunos no final do 1.º ciclo do ensino básico. Por comparação a 1995, último ano em que os alunos portugueses de nove anos foram avaliados pelo TIMSS, Portugal está no pequeno grupo de países que apresenta melhorias no desempenho dos seus alunos, tendo ficado acima da média tanto a Matemática como a Ciências. Já antes, os resultados do estudo PISA 2009, publicados em 2010, mostravam a evolução positiva dos nossos alunos de 15 anos, sendo Portugal o país da OCDE que mais progrediu no conjunto desses três domínios.

Nestes anos, que medeiam os diversos estudos, várias medidas de política educativa foram implementadas, entre elas, os programas que foram por vós coordenados. Com o distanciamento necessário conseguem refletir sobre os contributos dos mesmos na progressão dos alunos portugueses?

[Leonor Santos] Dada a complexidade dos fenómenos educativos, nunca se podem estabelecer relações lineares de causa e efeito. Contudo, é possível afirmar-se que desde 2005 até meados de 2012 houve uma orientação clara na política educativa para a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos portugueses. Arriscaria, mesmo, dizer que nunca tal tinha acontecido de forma tão assumida e ampla.

Designado por Plano de Ação da Matemática, este plano, iniciado no ano letivo de 2006/2007, incluiu diversas medidas, como seja a elaboração, experimentação e generalização de um novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, um Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (que se iniciou um ano mais cedo), a criação de um banco de recursos educativos para a Matemática e o desenvolvimento sustentado de projetos de escola que visavam a melhoria das aprendizagens em Matemática — Plano da Matemática I e II.

Parece-me adequada uma nota prévia de explicitação do modelo das medidas que nós coordenámos, antes de responder à pergunta.

O Plano da Matemática I (PM I) decorreu entre os anos letivos de 2006/2007 e 2008/2009. Abrangeu os 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico e envolveu 95% das escolas públicas de Portugal Continental com estes níveis de ensino. Iniciando com cerca de 300 000 alunos, no terceiro ano contou com mais de 400 000 alunos (valor que corresponde a 85% dos alunos inscritos nos

2.° e 3.° ciclos nas escolas que aderiram a esta medida). Nos três anos letivos seguintes (2009/2010 a 2011/2012), tomou lugar o PM II, agora passando a abarcar os três ciclos do Ensino Básico. Começou com 570 000 alunos, terminando com mais de 626 100 alunos (valor que corresponde a 80% dos alunos inscritos nos 1.°, 2.° e 3.° ciclos nas escolas que aderiram a esta medida, isto é em 93% das escolas públicas de Portugal Continental com Ensino Básico). O dispositivo de acompanhamento criado para o PM II (em tudo idêntico ao do PM I) teve também como função apoiar os Agrupamentos de Escolas/Escolas não agrupadas (AE/E) que optaram por antecipar, em um ano, a generalização do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (NPMEB). Ora, se cruzarmos estes dados com os alunos sujeitos aos dois estudos internacionais referidos, poder-se-á dizer que, no que respeita ao PISA 2009, há uma elevada probabilidade de um número significativo de alunos que participaram neste estudo terem sido abrangidos pelo PM I durante o seu 3.° ciclo de escolaridade. Já no que respeita ao TIMSS e PIRLS, alguns deles poderão ter estado abrangidos ou no PM II e/ou na antecipação da generalização do NPMEB (nos 3.° e 4.° anos de escolaridade). Deste modo, poder-se-á dizer que as medidas a que me estou a referir poderão, de algum modo, ter contribuído para a melhoria dos resultados apresentados pelos alunos portugueses.

[Lurdes Serrazina] Concordo, pois parece legítimo afirmar que a melhoria dos resultados dos nossos alunos em avaliações internacionais (PISA, TIMSS) deve-se com certeza a múltiplos fatores, sendo um deles o mais trabalho que se fez em Matemática, no ensino básico, nos últimos anos e onde o Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM) teve uma grande quota parte de responsabilidade.

Começo então por explicitar como surgiu e como se desenvolveu o PFCM que foi criado em 2005, como reação da então Ministra da Educação aos resultados do PISA 2003, onde os nossos alunos de 15 anos tinham tido resultados muito baixos. Frequentaram o PFCM desde 2005/06 a 2010/11 cerca de 14 400 professores do 1.° ciclo do ensino básico, destes mais de 3 100 participaram no programa durante dois anos letivos e mais de 2 500 professores de Matemática do 2.° ciclo. O PFCM tinha como propósito a melhoria das aprendizagens dos alunos. Entre os seus princípios orientadores destaco o de considerar o professor como um profissional com um saber e identidade próprios, considerando a formação numa perspetiva de desenvolvimento profissional.

Foram definidos um conjunto de objetivos a alcançar, entre os quais: aprofundar o conhecimento matemático, didático e curricular dos professores envolvidos; favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática, contemplando a planificação de aulas, a sua execução e reflexão, em colaboração com os seus pares e formador; e fomentar uma atitude positiva relativamente à Matemática e àquilo que os seus alunos são capazes de fazer na disciplina. Todos os dados disponíveis, apontam no sentido que o ganho de autoconfiança dos professores à medida que foram aprofundando o seu conhecimento alterou a sua atitude relativamente à Matemática e às aprendizagens que os seus alunos são capazes de fazer em Matemática, fomentando mais trabalho em Matemática nas salas de aula dos professores envolvidos. Este é um dos aspetos mais referidos nos relatórios periódicos das diferentes Instituições de Ensino Superior envolvidas no PFCM, mas também nos resultados dos diferentes trabalhos de investigação desenvolvidos no seu âmbito.

O papel da planificação das tarefas para a sala de aula e a importância da partilha de ideias e discussão interpares e com o formador são outros aspetos muito valorizados por todos. Um aspeto inovador introduzido pelo PFCM foi o do acompanhamento em sala de aula. Este resultou de no relatório do PISA 2003 se afirmar que mais de 60% dos alunos testados tinham tido aulas com a presença de outro profissional na sala de aula, enquanto que isso apenas tinha acontecido para 5% do alunos portugueses. Em alguns países essa presença chegava a ser superior a 90%. Esta ideia conjugada com os resultados de uma avaliação que concluía que muita da formação contínua que se tinha realizado em Portugal na última década não tinha chegado à sala de aula, conduziu à ideia de incluir no PFCM uma componente de acompanhamento em sala de aula. Este foi considerado por todos uma mais-valia, permitindo uma interligação entre as sessões de supervisão na sala de aula e as sessões de formação em grupo. Os professores que frequentaram o PFCM, e, em especial, os que o fizeram durante dois anos têm, indiscutivelmente, uma atitude diferente relativamente à Matemática, envolvendo-se e envolvendo os seus alunos num maior trabalho em Matemática.

Quando comparamos os resultados do TIMSS 1995 com os de 2011 (os dois em que Portugal participou), a pontuação média dos alunos portugueses subiu 90 pontos (de 442 pontos para 532), tendo sido de entre os países que participaram nas duas avaliações o que mais subiu. Este resultado coloca-nos a par da Dinamarca e da Lituânia (com classificações acima mas estatisticamente não significativas) ou da Alemanha e da Sérvia (abaixo de Portugal, mas também estatisticamente não significativas), e claramente à frente da Áustria ou da República Checa, que em 1995 eram dos países da Europa melhor classificados. Se tivermos ainda em conta os resultados do PISA 2003 e do PISA 2009, somos forçados a concluir que a melhoria se deu na segunda metade da década de 2000-2010, coincidindo com o desenrolar do PFCM e de outras medidas que conduziram a uma maior trabalho em Matemática, como referido antes.

O próprio relatório do TIMSS 2011 refere dados da investigação que reafirmam o efeito positivo da formação em Matemática, encarada numa perspetiva de desenvolvimento profissional, nos resultados obtidos pelos alunos. O relatório refere os três aspetos centrais do PFCM: conhecimento matemático, conhecimento didático e conhecimento curricular. A tabela 1 compara os valores globais, em percentagem, dos professores que afirmaram ter tido formação em cada um daqueles aspetos, nos últimos dois anos, com a percentagem dos professores portugueses, que também o afirmaram.

Como se verifica na tabela 1, acima de 50% dos professores dos alunos portugueses que participaram no TIMSS 2011, afirmaram ter participado em formação contínua em Matemática, incidindo no conhecimento matemático, na didática da Matemática ou no currículo de Matemática nos últimos dois anos, que, muito provavelmente, se realizou no âmbito do

Domínios	Percentagem global	Percentagem em Portugal
Conhecimento matemático	44	58
Conhecimento didático	46	54
Conhecimento do currículo	41	61

Retirado de Mullis, I.V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2012). *TIMSS2011 International Results in Mathematis.* IEA, Lynch School of Education, Boston College.

Tabela 1. Percentagem de professores que afirmaram ter tido formação nos últimos dois anos em cada um dos domínios[1].

PFCM. A maior percentagem atribuída à formação no âmbito do currículo pode ser devida ao trabalho desenvolvido na implementação do Programa de Matemática para o Ensino Básico pelo PFCM, mas também pelo Plano da Matemática.

[Leonor Santos] Mas tal pressuposto de que as medidas referidas poderão ter contribuído para a melhoria dos resultados carece de explicação que procurarei enunciar no que respeita ao PM I e PM II.

O enfoque do trabalho desenvolvido entre a Comissão de Acompanhamento (CA) e os professores acompanhantes (PAs) e entre estes e os professores de Matemática no terreno teve sempre em conta a investigação em educação matemática, nacional e internacional e foi estreitamente coerente com o NPMEB, tendo este servido de base a muito do trabalho realizado. Incidiu sobretudo em questões da didática da matemática, nela se trabalhando temas como métodos de ensino (o papel do professor e do aluno, formas de trabalho na sala de aula); tarefas matemáticas (tipos, propósitos distintos, sequencialidade, forma de exploração na sala de aula, análise de produções dos alunos); processos avaliativos (propósitos, instrumentos, critérios de avaliação); desenvolvimento de capacidades transversais (resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática); e de desenvolvimento curricular, muito em particular a articulação vertical. Estes temas foram trabalhados em diversos momentos, sendo revisitados e aprofundados, ao longo dos seis anos. Procurou-se trabalhá-los a partir de situações concretas, às quais a teoria permitia fazer uma nova leitura e desenvolver uma outra compreensão. A experimentação no terreno e a partilha de práticas foram estratégias de acompanhamento que se procuraram desenvolver de forma continuada nas reuniões periódicas entre cada PA e o seu grupo de AE/E.

Foram sendo produzidos relatórios, ao longo de seis anos, pela CA, que tiveram por base dados recolhidos juntos de todos os AE/E envolvidos e dos 80 professores acompanhantes que trabalharam regularmente com os professores no terreno. Estes relatórios evidenciam, de forma fundamentada, o trabalho desenvolvido e alguns efeitos destas medidas que poderão dar a perceber o seu possível contributo na melhoria dos resultados dos alunos portugueses em estudos internacionais, tal como se pode ler nos seguintes extratos ilustrativos retirados dos relatórios anuais da CA:

Ao longo destes três anos houve uma grande evolução do papel dos professores em sala de aula. A maioria dos professores do grupo preparava e dava as suas aulas de modo tradicional. (...) Atualmente os professores já questionam a eficácia deste tipo de ensino e já se nota alguma mudança (...) já existe um maior cuidado na escolha das tarefas, na forma como as trabalham com os alunos, e essencialmente na forma como se «corrigem». As «tradicionais correções» deram, muitas vezes, lugar à «discussão de estratégias», com apresentação e discussão de diferentes resoluções. (AE/E, região de LVT, 2008/2009)

Na primeira parte da aula, foi feita a distribuição e apresentação da tarefa aos alunos. Na segunda parte, os alunos trabalharam a pares e realizaram a tarefa. O professor foi observando o trabalho que os alunos estavam a realizar e sempre que se mostrou necessário interveio para ultrapassar situações pontuais de impasse, lançando questões cujas respostas permitiam desbloquear essas situações. Na terceira parte, procedeu-se à apresentação dos produtos obtidos pelos diferentes pares e à explicação dos processos utilizados e na última fase procedeu-se à sistematização. (AE/E, região do Alentejo, 2011/2012)

A existência do PM I e do PM II levou à possibilidade do aumento da carga horária do trabalho em Matemática dos alunos, possibilitada pela atribuição do Estudo Acompanhado a esta disciplina. Para além disso, por iniciativa dos AE/E, o recurso às assessorias/pares pedagógicos também em alguns tempos semanais da aula de Matemática é outra estratégia pedagógica desenvolvida, no PM I, no 2.° como no 3.°ciclo, alargando-se posteriormente ao 1.° ciclo, no PM II. Segundo os diversos autores diretamente envolvidos, esta estratégia permitiu apoiar de forma mais eficaz os alunos e contribuiu para o desenvolvimento profissional dos professores. Trouxe, contudo, maiores exigências para os professores no trabalho conjunto de planificação:

a implementação das assessorias (com a presença de dois docentes, em simultâneo, dentro da sala de aula) (...) exigiu dos professores uma maior flexibilidade e exigência, ao nível da planificação de aulas e de gestão de tempo; proporcionou uma utilização mais frequente da aprendizagem ... construtivista e sensibilizou/cons-

Lurdes Serrazina

ciencializou para a existência das múltiplas estratégias pedagógicas. (PA, região Norte, 2007/08)

Por outro lado, as assessorias fizeram com que cada um dos professores se expusesse aos colegas em contexto de sala de aula ao longo destes 3 anos e é opinião de todos que esta foi a experiência que mais contribuiu para o seu desenvolvimento profissional. (PA, região Centro, 2008/09)

Assim, a atividade letiva descentrou-se da mera utilização exclusiva dos manuais e da realização de fichas de trabalho, tentando sempre diversificar estratégias, orientando gradualmente o ensino para a resolução de problemas. Estas estratégias permitiram motivar os alunos e proporcionar-lhes uma visão diferente das aplicações matemáticas, sentindo-se os alunos mais acompanhados por beneficiarem de outro professor presente na aula. (AE, região do Algarve, 2011/2012)

Outro efeito a destacar é o desenvolvimento de uma dinâmica de cariz colaborativo do trabalho dos professores de Matemática ao longo dos seis anos de desenvolvimento destas medidas. É referido de forma sistemática em todos os relatórios elaborados pelos AE/E. Este facto parece-me importante assinalar dado todo este investimento ter por propósito ajudar os professores de Matemática a alterar as suas práticas letivas, de modo a favorecer o desenvolvimento nos alunos do que hoje se entende por saber matemática.

Em síntese, pode falar-se numa tendência de mudança de práticas de ensino da Matemática, ao longo dos seis anos. Será que se chegou a uma situação ideal? Claro que não! Muito está ainda por fazer. Por exemplo, os professores no terreno reconhecem ter havido uma evolução positiva dos seus alunos na sua atitude/motivação face à Matemática e no domínio dos conceitos e procedimentos. Expressam ainda uma evolução positiva, embora menos expressiva, no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, do raciocínio matemático e da comunicação matemática.

[EM] Nas vossas respostas têm o cuidado de salientar que não podemos nem devemos estabelecer uma relação de causa e efeito entre estes programas e os resultados obtidos pelos alunos nos estudos referidos. No entanto, ambas destacam evidências de alteração de práticas dos professores envolvidos com melhorias nas aprendizagens dos alunos, mais consistentes naqueles que participaram durante períodos mais prolongados o que nos parece apontar para uma necessidade de continuidade, sem significar que os modelos tenham de se perpetuar.

Durante os seis anos em que os programas decorreram houve ajustes decorrentes da reflexão sobre a implementação dos mesmos. Agora que eles terminaram que propostas fariam ao poder político para que o trabalho desenvolvido pudesse continuar a evoluir de forma consistente?

[Leonor Santos] As mudanças em educação, nomeadamente nas aprendizagens dos alunos, são lentas e exigem uma forma continuada e coerente de trabalho. Recordo o exemplo da Finlândia. Quando questionados os responsáveis pela educação deste país pelas possíveis razões que explicavam o elevado aproveitamento dos alunos no PISA 2006, a sua resposta foi de que há cerca de trinta anos que existia a mesma orientação de política educativa. Esta, através de um pacto de regime estabelecido entre os vários partidos políticos, tinha-se mantido, independentemente do partido político responsável pela governação. Ora acontece que, em Portugal, este cenário está longe de ser uma realidade! Parece haver a ideia de que, qualquer que seja o Ministro de Educação, a sua passagem pelo governo tem de ficar associada a medidas educativas, sejam elas de continuidade ou de rutura com as orientações precedentes. Não importa fazer avaliações intermédias, identificar o que está a correr bem e quais os desvios a corrigir, para a consecução dos objetivos acordados. Não importa anular os bons resultados intermédios atingidos, desperdiçar os dinheiros públicos gastos. Pelo contrário, parece sobreporem-se objetivos de interesse individual, em detrimento de objetivos de interesse nacional, isto é da melhoria da educação em Portugal. Assim, a primeira mensagem a dar ao poder político é da necessidade premente de pensarem no país e de estabelecerem um pacto de regime que dê sentido, coerência e eficácia à política educativa.

Uma segunda recomendação tem a ver com o aproveitamento do *know how* que tem vindo a ser criado através de diversas medidas desenvolvidas ao longo de um período de tempo longo, como seja o PM I e o PM II e a antecipação da generalização do NPMEB. É, por exemplo, o caso de um grupo de 80 professores acompanhantes que, ao longo de seis anos, acompanharam professores de Matemática de cerca de 1000 de AE/E com Ensino Básico em Portugal Continental. A sua experiência no acompanhamento é uma mais valia que não deve ser desperdiçada.

[Lurdes Serrazina] Uma das nossas preocupações, desde o início do PFCM, foi como dar continuidade ao trabalho desenvolvido e manter um investimento no ensino da Matemática, para além do fim do programa de formação, ou dito de outro modo como manter nas escolas um ambiente de trabalho colaborativo, com incidência no ensino da Matemática, entre os professores para além do horizonte do PFCM. A organização da formação em grupos relativamente pequenos (inicialmente 8 a 12 professores, a partir de 2006/07, 8 a 10) teve, a par da de possibilitar um acompanhamento mínimo em sala de aula, a preocupação de criar hábitos de trabalho colaborativo entre os professores. O balanço realizado leva-nos a concluir que este foi conseguido em muitos dos grupos envolvidos no PFCM, embora também aqui de um modo mais intenso, nos grupos que estiveram na formação pelo menos dois anos. O desafio era o de manter esse ambiente para além do PFCM.

Conhecendo as dinâmicas das escolas, entre os objetivos do PFCM, foi definido o seguinte:

Criar dinâmicas de trabalho em colaboração entre os professores de 1.° ciclo com vista a um investimento continuado no ensino da Matemática ao nível do grupo de professores da escola/agrupamento, com a identificação de um professor dinamizador da Matemática que promova um desenvolvimento curricular nesta área;

No sentido de levar à concretização deste objetivo, a Comissão de Acompanhamento do PFCM elaborou, em 2006, um perfil do professor dinamizador da Matemática, que entregou à tutela, para que pudesse ser regulamentado. De notar que a existência de um professor que é responsabilizado por promover trabalho em Matemática entre os professores do 1.° ciclo de uma dada escola ou conjuntos de escola é prática corrente, desde há décadas, em países como Inglaterra ou Estados Unidos da América, mas que tem tido pouco eco no poder político do Ministério da Educação em Portugal. Há muito que naqueles países se concluiu pela necessidade deste professor, dado o facto do professor do 1.° ciclo ser um professor generalista, que ensina as diferentes áreas disciplinares. O professor dinamizador de Matemática seria um dos professores da escola, com formação como professor do 1.° ciclo, mas com um maior gosto e apetência pelo ensino da Matemática. Este professor receberia uma formação como dinamizador, aprofundando os seus conhecimentos em Matemática, em didática e em desenvolvimento curricular. Tinha como função a promoção de trabalho colaborativo entre os diferentes professores da sua escola, nomeadamente ao nível do desenvolvimento curricular em Matemática, identificando materiais e organizando atividades que pudessem responder às necessidades do grupo de professores, recorrendo, sempre que necessário, à colaboração de especialistas exteriores.

A existência do professor dinamizador não substituía nenhum dos professores que continuariam a ser responsáveis pelo ensino da Matemática nas respetivas turmas. Aquele era um professor do 1.° ciclo, com um maior envolvimento na Matemática, mas não um professor especialista em Matemática sem formação como professor do 1.° ciclo. Um embrião do dinamizador de Matemática poderia ter sido o que aconteceu em 2009/10 aquando da implementação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), nos agrupamentos que se propuseram iniciá-lo. Cada agrupamento indicou um professor de cada ciclo responsável pela implementação do programa. Estes receberam formação como coordenadores. O professor do 1.° ciclo responsável pela implementação do PMEB exerceu, de algum modo, as funções indicadas para o dinamizador, trabalhando ainda em ligação com o acompanhante da sua escola no âmbito do Plano da Matemática. Mas, também esta medida não teve continuidade e o trabalho realizado nas escolas de apoio à implementação do PMEB foi interrompido antes sequer de ter sido concluída a sua implementação nos quatro anos do 1.° ciclo.

Leonor Santos

Em educação não existem resultados imediatos e a continuidade das ações é fundamental. Se os resultados do TIMSS 2011 revelam uma melhoria nos resultados dos nossos alunos é fundamental continuar esse caminho no sentido de um melhor desempenho e consequentemente de uma melhor aprendizagem em Matemática, procurando corresponder ao que é exigido a um cidadão do século XXI.

Para além da interrupção de todas as medidas, a situação foi ainda agravada por, entretanto ter aparecido um novo documento curricular, as metas curriculares, com conteúdos e orientações contrárias às presentes no PMEB e com uma linguagem que não é a habitual em matemática escolar quer em termos nacionais como internacionais que só serve para confundir os professores e transmitir mensagens erradas.

Muito de positivo que aconteceu no PFCM, reconhecido pelos que nele participaram e, já referido anteriormente, resultou da existência do trabalho conjunto com os colegas e com o formador. Estes espaços de trabalho têm de ser institucionalizados e promovidos nas nossas escolas. No caso dos professores do 1.° ciclo estes serão espaços privilegiados para discutir questões relativas ao ensino das diferentes áreas disciplinares e, no caso em análise da Matemática.

O poder político e os responsáveis nas escolas deveriam ter tido em conta que muito dos formadores que estiveram envolvidos no PFCM, bem como os que estiveram envolvidos no Plano da Matemática ou na implementação do PMEB, estão hoje nas suas escolas por todo o pais e são recursos em que o país investiu. O saber adquirido por aqueles profissionais só pontualmente está a ser potencializado. As autoridades educativas, aos diversos níveis, deveriam olhar para os recursos disponíveis e criar as condições para a sua rentabilidade.

[EM] E que desafios aos professores?

[Lurdes Serrazina] Sabemos que em muitas escolas os professores continuam «a lutar contra a maré» e a realizarem algum trabalho colaborativo em Matemática. É fundamental que os professores aproveitem as sinergias existentes e imponham prioridades no seu trabalho. O ensino dos seus alunos tem de ser a primeira. As reuniões por anos de escolaridade, que existem em muitos agrupamentos, têm de ir muito mais além do que a simples definição de conteúdos a trabalhar num determinado período de tempo ou a discussão de fichas de avaliação. Para que a avaliação esteja em consonância com o ensino, antes de discutir fichas de avaliação comuns às diferentes turmas é fundamental discutir os conteúdos a trabalhar e como os trabalhar na sala de aula, definindo prioridades, métodos e materiais de ensino.

Sabemos que todos os dias os professores são confrontados nas escolas com outros desafios e «obrigações», sentindo-se, por vezes, «esmagados» pelas múltiplas exigências que lhes são feitas, em detrimento de um trabalho focado na sua função de professor. As orientações superiores têm de ir no sentido do estabelecimento de espaços de trabalho dos professores para se debruçarem sobre o ensino da Matemática, estudarem as orientações curriculares e organizarem o seu ensino.

[Leonor Santos] Ao grupo dos 80 professores acompanhantes deixava-lhes o desafio de partilharem o conhecimento e a experiência que desenvolveram, quer através de comunicações em encontros — ProfMat e Encontros regionais, por exemplo — e em atividades desenvolvidas a nível de escolas ou agrupamentos, quer publicando artigos. Outra área de intervenção indispensável será a da formação, por exemplo, inscrevendo-se como formadores nos Centros de Formação.

Aos professores de Matemática das escolas deixava-lhes como mensagem principal a necessidade do desenvolvimento de uma atitude de resiliência e de persistência. É certo que muitas das condições proporcionadas no passado recente pela tutela, no âmbito do PM II, deixaram de existir. Falo, por exemplo, do crédito horário que permitiu a existência de assessorias em alguns tempos semanais do horário escolar a Matemática, da recomendação forte de um espaço livre semanal comum a todos os professores de Matemática (verificado num elevado número de AE/E, mas não na sua totalidade) que possibilitou o trabalho colaborativo de planificação, da existência de reuniões regulares com professores de Matemática de diversos agrupamentos que permitiram a discussão coletiva de questões relativas ao ensino e aprendizagem da Matemática e a partilha refletida de experiências inovadoras, e de um professor acompanhante que, para além de um apoio científico e pedagógico, ajudou a dar continuidade e a aprofundar as alterações progressivas feitas sentir na cultura de trabalho e nas práticas letivas dos professores de Matemática do Ensino Básico. Estas condições não são mais garantidas pela tutela, mas tal não implica necessariamente que deixem de existir. Acredito mesmo que os professores de Matemática dentro dos seus agrupamentos continuarão a trabalhar colaborativamente e a desenvolver práticas de ensino de Matemática na linha do que têm discutido e posto em prática nos últimos anos.

[EM] Anteriormente referiram que para além da interrupção de todas as medidas, sem uma avaliação prévia, as que surgiram, como seja a publicação das metas curriculares e materiais de apoio, parecem inverter o percurso que estava a ser feito. Que reflexos prevêem no ensino e aprendizagem da Matemática nas nossas escolas?

[Lurdes Serrazina] O trabalho que se iniciou nas nossas escolas parece estar a ter um contributo positivo para a melhoria do desempenho em Matemática dos nossos alunos. O mais elementar bom senso levava a que o poder politico, não podendo continuar as medidas na sua plenitude, desse indicações no sentido de que fossem rentabilizados todos os recursos existentes para a continuidade do trabalho.

Ao invés, o poder político introduziu uma grande perturbação no sistema ao aparecer com novos documentos curriculares, completamente contraditórios quer com o PMEB quer com as orientações emanadas de instituições nacionais e internacionais ligadas à Educação Matemática e à investigação. Embora as metas curriculares não estejam em vigor e não o possam estar naquilo que contrariam o PMEB, a forma como foram apresentadas pelo poder político e a ameaça dos exames levou a que direções de agrupamentos já estejam a exigir dos seus professores a inclusão das metas nas planificações, o que conduz a completas aberrações. Mas se as metas já colocam muitos problemas, os materiais de apoio às mesmas, entretanto divulgados pelo MEC, confirmam os piores presságios. Enquanto que o PMEB preconiza um ensino da Matemática com compreensão, nas metas e nos materiais que as suportam a ênfase é colocada quase em exclusivo nos procedimentos.

Um exemplo, no 1.° ciclo o PMEB apela ao desenvolvimento do sentido do número e à compreensão das operações e por isso propõe que os algoritmos habituais passem para mais tarde, de modo que os alunos durante os dois primeiros anos desenvolvam estratégias de cálculo aquando da resolução de problemas, desenvolvendo simultaneamente os significados das diferentes operações. Pelo contrario as metas preocupam-se, desde o 1.° ano de escolaridade com os algoritmos, dando ênfase aos procedimentos de cálculo, defendendo procedimentos únicos mesmo quando são de mais difícil compreensão para os alunos. Um exemplo ilustrativo é o modo como é abordado o algoritmo da subtração nos materiais de apoio às metas. A propósito da resolução do algoritmo da subtração por decomposição, no 2.° ano, pode ler-se nos materiais de apoio:

É desejável que este procedimento venha a ser substituído pelo algoritmo simplificado, objetivo que deverá ser atingido até ao final do próximo ano (p. 18)[1]

continuando a leitura do texto percebe-se que o que os autores designam por algoritmo simplificado é outro algoritmo da subtração, o de compensação, baseado na propriedade da subtração designada por invariância do resto. Como sabemos, tratam-se de dois algoritmos diferentes, com diferente fundamentação matemática, sendo o primeiro de mais fácil compreensão que o segundo. O que se pretende?, que os alunos decorem o algoritmo de compensação sem o compreenderem? De notar que em muitos países os alunos aprendem um único algoritmo da subtração e o mais usual é o da decomposição.

Os professores estão hoje perante um grande dilema, ou trabalham com os seus alunos com base nas propostas do PMEB, que continua em vigor, e naquilo que fizeram nos últimos anos, nomeadamente no âmbito do PFCM, e desenvolvem um ensino da Matemática com compreensão com os seus alunos, ou esquecem tudo isso e recuam aos anos 50 do século passado e ensinam um conjunto de procedimentos de cálculo e outros, preconizados nas metas curriculares e nos materiais que as apoiam. Esta situação não é propícia ao desenvolvimento de um ambiente de trabalho colaborativo em Matemática que defendi na questão anterior, até porque surgem outras pressões exteriores, como a dos exames externos.

Uma outra medida que foi incentivada pelo Despacho normativo n.º 13-A/2012 foi a permuta de áreas curriculares entre professores do 1.º ciclo, podendo a Matemática ser lecionada por um professor e a Língua Portuguesa por outro. Esta experiência, que está a ser concretizada este ano letivo em várias escolas, é do agrado daqueles que acham que o professor do 1.ºciclo devia especializar-se em determinada área, com o argumento que não pode aprofundar tudo. Espero que no final do ano os diretamente envolvidos na experiência a analisem com profundidade. A ideia que o problema do ensino da Matemática no 1.º ciclo se resolveria se houvesse um especialista de Matemática a ensiná-la é contrariada por aqueles que defendem que a monodocência é uma mais-valia para as crianças que frequentam o 1.º ciclo, sendo necessário dar formação e suporte ao professor para lecionar as diferentes areas disciplinares. Os dados do TIMSS 2011 parecem dar razão a estes últimos, mostrando que os resultados dos nossos alunos são, em média, mais altos quando estes têm um professor com formação em 1.º ciclo — 71% dos alunos testados tinham um professor com este perfil e tiveram uma pontuação média de 535 pontos — sendo seguidos por aqueles que tinham um professor com formação em 1.º ciclo e com uma especialização em Matemática (25% dos alunos) cuja pontuação média foi de 523 pontos. Estes dados são consistentes com os dados globais do estudo (Exhibit 7.3, p. 288, Mullis, Martin, Foy & Arora (2012)), que mostram ainda que, nos países em que existe um especialista em Matemática, sem formação no 1.º ciclo, a ensinar Matemática aos alunos do 4.º ano a pontuação média foi ainda mais baixa. Espero que estes resultados estejam também presentes na reflexão a fazer nos agrupamentos e pelas autoridades educativas na hora do balanço da experiência deste ano letivo e na tomada de decisões futuras.

[Leonor Santos] O que estamos a viver no presente é muito preocupante. Existe uma política educativa, em particular no que respeita ao ensino e aprendizagem da Matemática, contrária à desenvolvida nos últimos anos. As metas curriculares são um exemplo claro e indiscutível sobre o que acabo de afirmar. Não se assumindo como um novo programa de Matemática para o Ensino Básico, na prática tudo está a ser feito para que tal o seja! Senão, como se explica a necessidade de alterar os Manuais Escolares elaborados de acordo com o PMEB «ainda» em vigor? Como se explica a necessidade de dizer, e voltar a dizer, que as metas curriculares são o referencial para os exames? Como se explica que o Ministério de Educação e Ciência esteja a preparar novos documentos de apoio, agora às Metas Curriculares? O vasto material anteriormente realizado de apoio ao PMEB, muito dele experimentado e melhorado, não é suficiente? Já agora, como se explica que este material esteja disponível na página eletrónica da DGE numa pasta designada por «Histórico»? Faz parte do passado? Já não é para ser usado hoje? Como se explica que esteja a ser preparada ainda pela tutela formação de professores para as Metas Curriculares em vez de dar continuidade ao Programa de Formação Contínua de Professores de Matemática para os 1.º e 2.º ciclos de escolaridade e de o alargar ao 3.º ciclo? O povo português está a viver uma situação de austeridade, nunca antes vivida, como se explica esta despesa em medidas que são totalmente contrárias a outras que começaram a dar frutos positivos?

É nesta realidade que temo, que, no futuro próximo, com as medidas para o ensino e aprendizagem da Matemática já iniciadas e as que mais se avizinham, o trabalho desenvolvido por todas as ações do Plano de Ação da Matemática perca a sua força e se verifique mesmo um retrocesso significativo. Mas o que será de esperar de um Ministro de Educação e Ciência que, a propósito da melhoria dos resultados no estudo do TIMSS e PIRLS (de que parece ter muita dificuldade em reconhecer), esquece praticamente todas as ações deste plano? O que será de esperar de um Ministro de Educação e Ciência que das duas únicas razões que aponta para explicar estes resultados, uma delas seja a avaliação de Manuais Escolares, medida esta que não abrangeu *nem um só aluno* participante neste estudo?

Dizia anteriormente que, a diferentes níveis, podemos, e devemos, continuar a desenvolver de forma concertada um caminho já iniciado, mas que está longe de ter terminado. É possível que o pacto de regime não aconteça tão brevemente quanto seria desejável. É possível que a tutela não tire partido do conhecimento e experiência construídos ao longo destes últimos anos. Mas também é possível que o coletivo dos diferentes atores com responsabilidades no ensino e aprendizagem da Matemática saibam contrariar esta vaga que ignora tudo o que sabemos hoje sobre o que é ensinar e aprender Matemática. Os políticos entram e saem dos governos! Os professores de Matemática permanecem!

Nota

1 Ver http://www.dge.mec.pt/index.php?s=noticias&noticia=396.

Entrevista realizada por Isabel Rocha e Manuela Pires

	Ano lectivo	Nível 1 ou 2	Nível 3	Nível 4 ou 5
Sem PM	2005/06 (*)	53 %	47 % (**)	
Com 1 ano do PM	2006/07	50 %	26 %	25 %
Com 2 anos do PM	2007/08	34 %	48 %	18 %
Com 3 anos do PM	2008/09	23 %	41 %	36 %
Com 3 ou 4 anos do PM	2009/2010	22%	49%	29%
Com 2 ou 3 anos de PM	2010/2011	22%	42%	36%

(*) Nos anos letivos anteriores os resultados foram semelhantes.
(**) Os dados disponíveis indicavam apenas o número de classificações *positivas*.

Quadro 1. Análise comparativa dos resultados do 9.° ano

Os efeitos do Plano da Matemática

Como nos organizámos

Como a nossa escola é predominantemente secundária, decidimos, em reunião de grupo, que cada professor com turmas do secundário ficaria «agregado» também a uma turma do 3.° ciclo e trabalharia em colaboração com o professor titular da turma.

Cada turma, para além das aulas *normais*, tinha também uma aula (de Estudo Acompanhado ou de Área de Projeto) atribuída à Matemática. Foi decidido que essa aula seria habitualmente de tipo diferente das outras. Em cada nível de ensino (7.°, 8.° e 9.°) os professores respetivos, os titulares das turmas e os agregados, reuniam com regularidade, na maior parte dos casos quinzenalmente, a fim de preparar as atividades para essas aulas. De um modo geral, essas atividades deveriam incidir sobretudo sobre investigações matemáticas e resolução de problemas, embora pudessem ser incluídas tarefas de outro tipo, de acordo com as necessidades e caraterísticas da turma. As aulas eram depois dadas em codocência pelos dois professores.

Nas reuniões quinzenais, para além da preparação das tarefas seguintes, tentávamos sempre fazer um pequeno balanço das aulas anteriores.

Como evoluiu o processo

Com o decorrer do tempo, começámos logo a notar algumas mudanças a nível dos professores. Os do ensino básico sentiam-se mais seguros para se aventurar em tarefas diferentes, os do secundário passaram a ter uma visão da escola mais alargada e a perceber as dificuldades específicas de ensinar no básico. Para além disso, como se trabalhava em conjunto, surgiam mais ideias novas, houve um enriquecimento de todos e fortaleceu-se o espírito de grupo.

A nível dos alunos, a evolução foi sendo lenta, como não podia deixar de ser, mas sentíamos que havia melhorias. Só quando o plano estabilizasse e os alunos tivessem passado por ele nos três anos do 3.° ciclo é que se poderiam tirar conclusões fiáveis. Note-se que, em 2009/2010, alguns alunos já tinham 4 anos de Plano da Matemática (PM) por terem vindo de escolas onde ele foi aplicado no 6.° ano.

Avaliação do Plano

Em 2011, ao prepararmos o relatório final, resolvemos fazer um estudo mais aprofundado do que tinha acontecido. Sentíamos que a situação tinha melhorado bastante mas precisávamos de provas e não apenas de sensações. Começámos por analisar a evolução dos resultados dos alunos do 9.° ano ao longo do tempo (ver Quadro 1).

Constatámos que:

— O número de reprovações a Matemática, que até 2006 quase sempre ultrapassava os 50% na nossa escola, foi diminuindo ao longo dos anos letivos, estabilizando perto dos 22% a partir do momento em que os alunos passaram por três anos de PM.

— Quantos mais anos de PM os alunos tiveram, menos negativas existiram e maior foi o grupo com níveis 4 e 5.

Mas este tipo de análise está sujeito ao efeito da variabilidade dos alunos que frequentavam o 9.° ano. Decidimos estudar também o percurso dos vários grupos de alunos que iniciavam o ciclo no 7.° ano. As estatísticas mostravam que até 2006, com enorme regularidade, o número de negativas estavam na casa dos 30% no 7.° ano, subiam para a casa dos 40% no 8.° e ultrapassavam os 50% no 9.°. No Quadro 2 temos, para cada grupo de alunos, a sua evolução desde o 7° ano até ao 9.°.

Verificámos que:

— Quando não existia PM, havia, do 7.° para 9.° ano, um aumento significativo de níveis inferiores a três e uma di-

Nível	Ciclo sem PM		Ciclo com PM		Ciclo com PM		Ciclo com PM(*)	
	2003/04 7.º ano	2005/06 9.º ano	2006/07 7.º ano	2008/09 9.º ano	2007/08 7.º ano	2009/10 9.º ano	2008/09 7.º ano	2010/11 9.º ano
1 ou 2	38 %	53 %	23 %	23 %	25 %	22 %	21%	22 %
3	50 %	31 %	31 %	41 %	50 %	49 %	46%	42 %
4 ou 5	12 %	16 %	46 %	36 %	25 %	29 %	33%	36 %

(*) Neste ciclo, devido às restrições impostas pelo Ministério, apenas duas turmas com mais dificuldades tiveram PM no 8.º ano.

Quadro 2. Comparação dos resultados obtidos no 7.º e, dois anos depois, no 9.º ano (como o índice de retenção é baixo, o grupo de alunos comparado é praticamente o mesmo)

minuição acentuada do número de alunos com nível três. Ou seja, em média os resultados iam piorando ao longo do ciclo.

— A partir do momento em que os alunos passaram a ter PM durante todo o terceiro ciclo, deu-se uma estabilização dos níveis de classificação. Para além disso, logo no 7.º ano, diminui significativamente a percentagem de alunos com níveis inferiores a 3.

Conclusões

Não temos qualquer dúvida que o Plano da Matemática contribuiu para melhorar significativamente os resultados escolares dos alunos do 3.º ciclo e os números não deixam de impressionar. Para além disso, criou condições para que os professores envolvidos (que, no caso da nossa escola, foram todos) exercessem plenamente as suas funções e aperfeiçoassem de forma clara as suas práticas.

Infelizmente, em 2009, o Plano começou a ser esvaziado e em 2011 foi definitivamente fechado. É pena que, por questões que nada têm a ver com o ensino, o ministério tenha deixado de investir nos professores e tenha acabado com uma dos poucos planos de ação que estava a transformar a escola.

Sei que não é fácil mostrar isto a políticos de vistas estreitas mas, que diabo, basta um resquício de inteligência para se perceber os efeitos do Plano da Matemática e do que significou acabar com ele.

José Paulo Viana
Escola Secundária de Vergílio Ferreira, Lisboa

Programa de Formação Contínua em Matemática

A melhoria das aprendizagens dos alunos do 1.º ciclo em Matemática era um dos principais objetivos do Programa de Formação Contínua em Matemática.

Durante os quinze anos da minha prática profissional senti que os alunos revelavam algumas dificuldades/inseguranças ao nível da disciplina de Matemática. A Formação Contínua em Matemática veio precisamente ao encontro de uma das minhas dificuldades, tentar desmistificar a ideia negativa que alguns alunos tinham face à Matemática. Para além deste aspeto, contribuiu para o aprofundamento dos meus conhecimentos matemáticos, didáticos e curriculares, permitindo que eu sentisse mais confiança em mim própria e segurança na abordagem de determinados conteúdos matemáticos, conduzindo a uma mudança na minha prática profissional e consequentemente na melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos e o modo como estes passaram a encarar a Matemática.

Consciente de que um ano de formação seria insuficiente, inscrevi-me no segundo ano, o terceiro já não me foi possível pois foi dada prioridade aos professores que ainda não tinham frequentado a Formação Contínua em Matemática.

No primeiro ano de formação fui professora de uma turma com alunos do 2.° e 3.° anos de escolaridade, sentindo alguma insegurança e não sabendo se no ano seguinte iria dar continuidade à turma, iniciei o tópico da divisão, aos alunos do 3.° ano, pelo método tradicional, os alunos praticaram, mecanizaram e efetuaram o algoritmo. No ano seguinte soube que iria continuar com a mesma turma, agora de 3.° e 4.° ano, resolvi introduzir a divisão seguindo as planificações da formação. Os alunos que agora estavam no 4.° ano, conheceram dois métodos de efetuar a divisão (algoritmos) e preferiram utilizar o último método aprendido: através do cálculo de quocientes parciais que posteriormente são adicionados (por exemplo, múltiplos de 10) e através de subtrações sucessivas, registando os procedimentos utilizados. Senti que os alunos começaram a realizar a divisão com mais sentido e compreensão, não perdendo a noção dos números, das quantidades envolvidas e naturalmente demonstraram uma maior razoabilidade no resultado que obtinham.

Com o decorrer dos dois anos de formação houve vários aspetos que foram muito significativos para mim, tais como: a partilha de experiências, a colaboração existente entre formandos e formador, a implementação das tarefas na aula com a presença do formador — que contribuiu para que eu sentisse mais confiança, que fossem identificadas falhas ou dificuldades por mim sentidas, contribuindo significativamente para o meu crescimento pessoal e profissional. A planificação, a reflexão conjuntas realizada sobre a prática letiva e a vontade em alterar a minha prática fizeram com que sentisse maior facilidade em lidar com o currículo de Matemática.

Quando tarefas envolvendo situações aleatórias foram trabalhadas nas sessões conjuntas, fiquei um pouco renitente e até com algum receio de as aplicar na minha turma. Probabilidades é um conceito com algum grau de dificuldade, pensei eu, mas de facto quando nas sessões de formação foram discutidas boas ideias para abordar as tarefas e as mesmas são ajustadas ao grupo etário dos alunos, o resultado é surpreendente, os alunos conseguem mesmo atingir o que pretendemos e por vezes, vão até um pouco mais além.

A planificação, envolvendo tarefas mais diversificadas, muitas de natureza exploratória que para serem implementadas na sala de aula exigiam um modo de condução da aula diferente, prevendo as questões a colocar aos alunos, dando mais tempo para que os alunos fizessem as suas descobertas, para que explicitassem, partilhassem e justificassem os seus pensamentos e estratégias de resolução, foram aspetos que comecei a valorizar mais, facilitando o desenvolvimento de capacidades e o desencadeamento de conhecimentos, por parte dos alunos, que superaram as minhas expetativas.

Inicialmente, alguns alunos, sentiam uma enorme dificuldade em comunicar o seu pensamento, ao nível oral e escrito, com a continuidade deste modelo, os alunos despertaram ao nível da comunicação e começaram a não ter receio em comunicar matematicamente, desenvolvendo consequentemente outras capacidades ao nível dos conteúdos matemáticos e de outras áreas curriculares, devido à transversalidade da comunicação. Os alunos passaram a interagir mais uns com os outros, a explicarem o seu pensamento, mesmo os alunos com mais dificuldade, nesta disciplina, revelaram-se mais comunicativos. Para além destes aspetos foram despertados para o facto de existirem vários percursos, várias soluções para uma mesma situação ou problema, que nem sempre necessitam de fazer uma «conta», o algoritmo, e que com palavras, desenhos ou esquemas também se resolvem problemas.

Aprendi que aplicar tarefas diversificadas e significativas, estimular, insistir e persistir além de motivar os alunos, torna-os seguros de si próprios e consequentemente mais confiantes no seu percurso académico. Posso dizer que começaram a observar a Matemática com «outros olhos», criaram mais gosto pela disciplina, contribuindo para a eliminação da apreensão sentida, por alguns alunos, relativamente a esta área curricular.

Sempre que possível, proponho tarefas contextualizadas e abordo-as de forma transversal, permitindo em simultâneo o desenvolvimento de outras áreas curriculares, diminuindo as barreiras que persistem entre as várias disciplinas do Programa do 1.° Ciclo do Ensino Básico.

No decorrer das sessões os conteúdos abordados, as atividades sugeridas pela formadora facilitaram e ajudaram a promover a abertura de novos caminhos a nível pessoal e profissional, permitindo a realização de trabalhos e atividades mais interativas, situações de aprendizagem lúdicas, apelativas, diversificadas e significativas para os alunos e professores, tornando assim, o processo ensino/aprendizagem mais motivador e enriquecedor.

Refletir sobre os objetivos do ensino da Matemática, questionar um ensino por vezes rotineiro, desmobilizador e insatisfatório, procurar um ensino que privilegie a diversificação de tarefas através das quais os alunos irão conhecer procedimentos básicos, mas também desenvolver a capacidade de comunicar, raciocinar matematicamente, resolver problemas, estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas, desenvolver a autonomia e acima de tudo apreciar a Matemática, são neste momento o meu paradigma para a aula de Matemática.

Mónica Raquel Alexandre
Formanda do PFCM
EB1 de Foz, Mata Mourisca-Pombal

A secção de ouro – primeiros passos[1]

Eduardo Veloso

Introdução

A *secção de ouro* — objecto matemático que também poderia ser introduzido pelas expressões *número de ouro*, *razão de ouro*, *triângulo de ouro*, *rectângulo de ouro*, *divisão de um segmento em média e extrema razão*, e mesmo *divina* proporção — é um termo inventado no séc. XIX para designar a solução de um problema, proposto e resolvido por Euclides há cerca de 2300 anos, nos *Elementos de Geometria*. São possíveis múltiplas abordagens deste tema, tendo por objecto as conexões com outros conceitos matemáticos, a suposta relação directa do número de ouro com certas obras de arte da antiguidade, como a pirâmide de Keops, a fachada do Partenon e obras do escultor grego Fídias — relação não documentada e cada vez mais posta em questão —, a utilização da secção de ouro por artistas e arquitectos modernos, como Corbusier, e ainda as suas conexões com fenómenos da natureza vegetal e animal.

Nesta nota trataremos apenas do referido problema dos *Elementos*, não obviamente como material pronto para utilizar na aula de matemática mas sim como um meio de acedermos aos interessantes e elementares processos geométricos utilizados por Euclides, sem a facilidade tantas vezes enganadora das formulações e resoluções algébricas. Estudaremos o início da longa história matemática do número de ouro, magnificamente contada por Roger Herz-Fischler (Figura 1). Esperamos em futuras notas sobre este mesmo tema apresentar exemplos de propostas para a sala de aula.

Proposição 11 do livro II

O enunciado desta proposição é o seguinte:

Seccionar um segmento dado de tal modo que o rectângulo contido pelo todo e por um dos segmentos seja igual ao quadrado sobre o restante segmento.

Se designarmos por AB o segmento dado e por C o ponto que secciona AB (ver Figura 2), o «todo» será o segmento AB e os dois segmentos resultantes serão AC e CB. Em vez de rectângulo «contido por AB e por CB» diríamos hoje *rectângulo de lados* AB e CB e em vez de «quadrado sobre AC» diríamos hoje *quadrado de lado* AC. Na Figura 2 o segmento BD é perpendicular a AB e é igual a AB. Euclides quer portanto encontrar um ponto C tal que o quadrado $ACHG$ «seja igual» ao rectângulo $CIDB$. A principal questão na compreensão deste enunciado é esta: *que significa para Euclides a palavra «igual»?*

Não será certamente o sentido vulgar que lhe damos na frase «a figura $\mathscr{F}$ é igual à figura $\mathscr{G}$», pois aqui queremos significar que podemos levar $\mathscr{F}$ a coincidir (ponto a ponto, por assim dizer) com $\mathscr{G}$. Ou seja, no sentido habitual, mesmo em Euclides

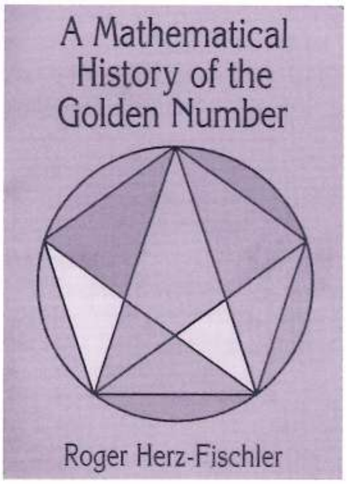


Figura 1.

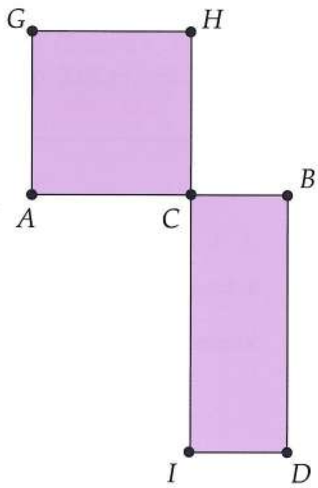


Figura 2

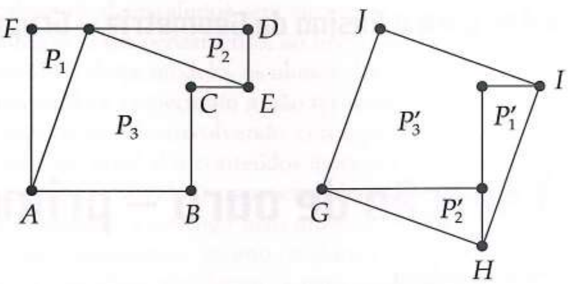


Figura 3. O hexágono *ABCDEF* foi decomposto em dois triângulos P_1 e P_2 e num pentágono P_3. Os polígonos congruentes (neste caso translações) P'_1, P'_2 e P'_3, convenientemente justapostos, formam o quadrado *GHIJ*. Então, o hexágono e o quadrado têm áreas iguais.

quando por exemplo refere a *igualdade de triângulos* em inúmeras proposições do livro I), está subjacente um movimento que leva à sobreposição exacta das duas figuras. Esta operação de sobreposição apenas ficou inteiramente resolvida quando a palavra *igual* — neste sentido — foi substituída pela palavra *congruente* com o seguinte significado: duas figuras $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ são congruentes quando existe uma isometria que transforma $\mathscr{F}$ em $\mathscr{G}$.

Do ponto de vista didáctico, no entanto, não vem mal ao mundo que nos primeiros anos os alunos utilizem a palavra «igual» com o sentido corrente que já conhecem, e que pode ser descrito, para figuras, como possibilidade de «levar à coincidência».

Mas na proposição II.11 não pode ser este o significado de «igual», pois o quadrado *ACHG* não pode obviamente ser levado à coincidência com o rectângulo *CIDB*! Na realidade, quando Euclides utiliza a palavra igual referindo-se a dois polígonos *não congruentes*, como aqui, a palavra igualdade diz respeito às áreas dos dois polígonos, em que área significa região do plano ocupada pelo polígono (e não medida *numérica* da *área*, ideia totalmente alheia aos *Elementos*).

Resta portanto a importante questão histórica e pedagógica: sem utilizar a medida numérica da área, como compara Euclides as áreas de dois polígonos não congruentes? Como pode afirmar que são iguais? De uma leitura cuidada dos *Elementos*, conclui-se que a comparação das áreas, em Euclides, é feita através da ideia da decomposição e composição de polígonos.

Sejam $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ dois polígonos. *Se for possível decompor* $\mathscr{F}$ *num conjunto finito de polígonos* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *de tal modo que* $\mathscr{G}$ *possa ser formado por um conjunto de polígonos congruentes* $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ *convenientemente justapostos, então* $\mathscr{F}$ *e* $\mathscr{G}$ *têm áreas iguais.* (Figura 3)

Dois polígonos nestas circunstâncias dizem-se *equidecomponíveis*. Pensando um pouco, o leitor poderá chegar ao significado que teria para Euclides um polígono ter área maior do que outro.

Construção e demonstração da Prop. II.11

Compreendido o significado do enunciado de Euclides da Prop. II.11, vejamos agora como Euclides determina o ponto C pedido e demonstra que C verifica as condições do enunciado.

Construção do ponto *C*

Partindo do segmento *AB* (Figura 4a), constrói o quadrado *AEDB* e o ponto médio *F* de *AE* (Figura 4b). Depois encontra a intersecção *G* da circunferência de centro *F* e passando por *B* (designada por *F*(*B*)) com a semirecta *EA* (Figura 4c). Finalmente constrói o quadrado de lado *AG*, *ACHG* (Figura 4d): o ponto *C* é o ponto de *AB* procurado, como será demonstrado a seguir.

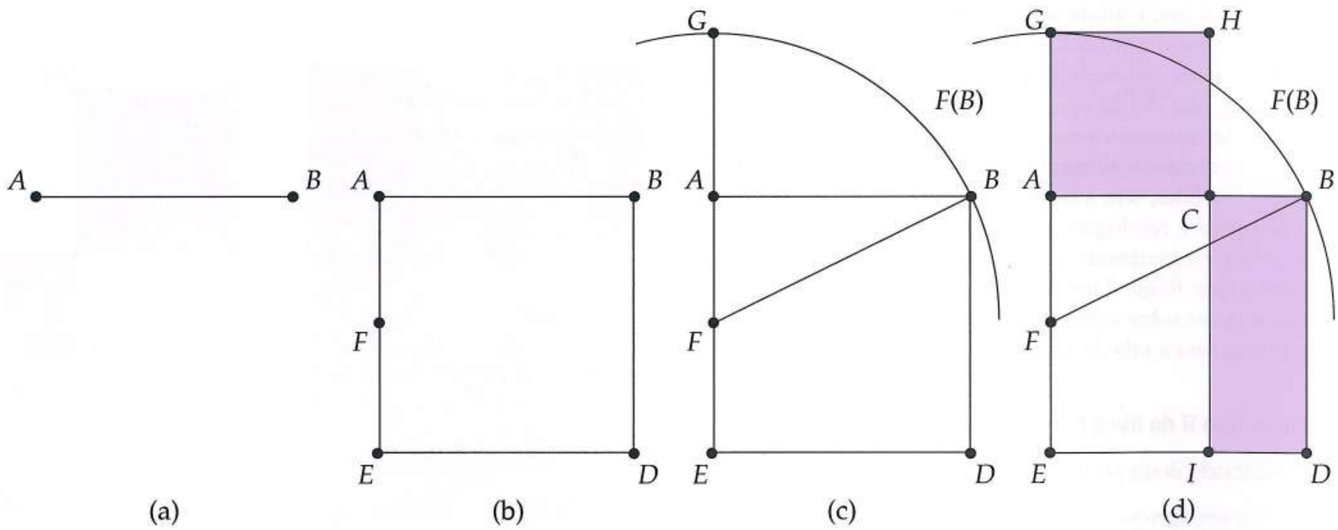


Figura 4

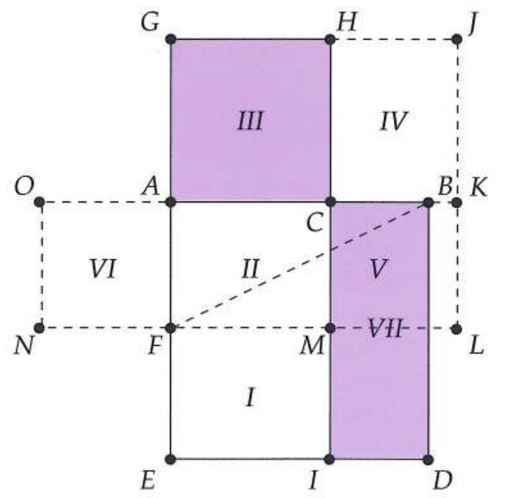


Figura 5

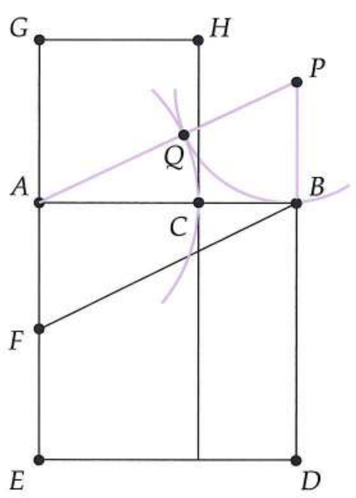


Figura 6

Demonstração

Devemos demonstrar que o ponto C é tal que o quadrado $ACHG$ é igual ao rectângulo $CIDB$ (Figura 5) (a demonstração é adaptada de Euclides, incorporando uma proposição II.6 demonstrada anteriormente no mesmo livro II). Comparando a Figura 5 com a Figura 4d, vemos que foram feitas as modificações seguintes (verifique com cuidado)

— escondemos a circunferência $F(B)$;
— acrescentámos: o quadrado $AONF$, de lado AF; o rectângulo IV, $HCKJ$, congruente com o rectângulo II; e o quadrado V, $KCML$, de lado LK igual a FA, e portanto congruente com VI.

Como o segmento FB é a hipotenusa do triângulo rectângulo FBA, e como FB é congruente com FG (ver Figura 4c), então (pelo Teorema de Pitágoras) o quadrado $GFLJ$ de lado GF é igual ao polígono $BONFED$, que resulta da justaposição dos quadrados VI e $AEDB$.

Mas retirando, tanto a $GFLJ$ como a $BONFED$, os polígonos II, IV (congruente com I) e V (congruente com VI), restam os polígonos III e VII, que são portanto iguais, como se queria provar.

Uma variante de Herão de Alexandria (séc. I d. C.)

Apresentamos uma variante de Herão da construção de Euclides, mais simples e directa.

Vamos sobrepor as duas construções o que torna a constatação da equivalência praticamente evidente (Figura 6).

A construção de Herão, a cor, consiste em construir o segmento BP, perpendicular a AB no ponto B e com metade do comprimento de AB e depois intersectar — ponto Q — a circunferência $P(B)$ com o segmento PA. O ponto C será a intersecção com o segmento AB da circunferência $A(Q)$.

A caminho da construção do pentágono regular

Uma das questões que o leitor estará talvez a colocar neste momento é a seguinte: para que introduz Euclides, nos *Elementos*, a «secção de ouro»?

Como veremos numa próxima nota, Euclides irá servir-se deste resultado para construir o triângulo de ouro e depois o pentágono regular. No livro XIII dos *Elementos*, Euclides recorrerá ainda à secção de ouro na prop. XIII.17, relativa ao dodecaedro regular.

Notas

(1) O autor escreve de acordo com a antiga ortografia.

Bibliografia

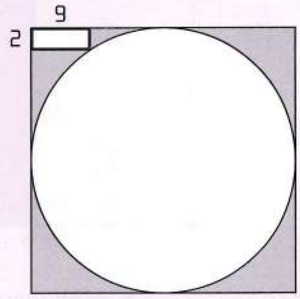
Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, 1997.

Euclides. Elements. http://alepho.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html

Eduardo Veloso

José Paulo Viana

Um quadrado, um círculo e um retângulo pequeno



Temos um círculo inscrito num quadrado e um retângulo com um dos vértices sobre a circunferência, tal como se vê na figura.

Os lados do retângulo medem 2 e 9 centímetros.

Qual é a medida do lado do quadrado?

(Respostas até 25 de Abril, para zepaulo46@gmail.com)

Tiro ao alvo

O problema proposto no número 119 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

No Grande Concurso de Tiro de Torres Novas, cada concorrente disparava cinco vezes. Acertar na mouche dava direito a 20 pontos, enquanto as restantes zonas do alvo valiam 15, 10, 5, 2 e 1.

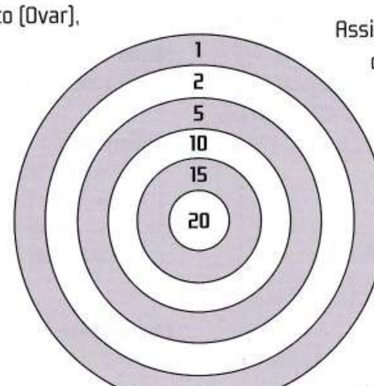
As quatro melhor classificadas ficaram empatadas com 61 pontos. Por acaso, soubemos que: O último tiro da Márcia valeu 15 pontos. Quatro dos cinco tiros da Inês acertaram na mesma zona do alvo. Nenhuma delas falhou um tiro, exceto a Sofia que errou o alvo logo no primeiro disparo. O primeiro e o último tiros da Carolina foram na mouche.

Por sorte, foi possível ordenar as quatro atiradoras aplicando a alínea do regulamento que dizia: «Em caso de empate, tem vantagem quem acertar mais vezes na mouche.»

A quem foram atribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

Recebemos 21 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Ana Sofia Bicho (Torres Novas), André Garcia, Andreia Sousa (Torres Novas), Carolina Cabeleira (Torres Novas), Carolina Felgueiras (Torres Novas), Carolina Monteiro (Torres Novas), Edgar Martins, Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Inês Delgado (Torres Novas), Joana Branco (Torres Novas), João Costa (Torres Novas), Luís Bernardino, Márcia Ferreira (Torres Novas), Mariana Sebastião & Marta Ruivo (Torres Novas), Pedro Semião (Torres Novas), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Ricardo Alves (Torres Novas), Rita Pereira (Torres Novas).

Logo a primeira resposta que nos chegou, do Pedrosa Santos, começava assim:



Só serei capaz de dar resposta ao problema proposto, admitindo que o texto apresentado na Revista tem uma gralha tipográfica; isto é, onde se lê «O último tiro da Márcia valeu 5 pontos», deverá ser «... valeu 15 pontos».

E o nosso leitor tinha toda a razão. Infelizmente, o enunciado tinha saído com uma gralha. Considerando então que «o último tiro da Márcia valeu 15 pontos», eis a sua resolução.

1.º Como o total dos pontos é de 61 para as melhores quatro concorrentes, todas as quatro tiveram um tiro apenas com 1 ponto;

2.º Tendo a Sofia falhado um tiro, os outros quatro são «20», «20», «20» e «1». (*)

3.º A Inês, com quatro acertos iguais, terá de ter a pontuação de «15», «15», «15», «15» e «1». (*)

4.º A Carolina, com dois acertos a (20) pontos cada, terá a pontuação de «20», «15», «5», «1» e «20», ou «20», «10», «10», «1» e «20».

5.º A Márcia, admitindo ter tido (15) pontos no seu último tiro, terá a pontuação de «20», «15», «10», «1» e «15». Note-se que o valor de 61 se poderia obter com 20 + 20 + 5 + 1 + 15; porém, em termos do regulamento, isso implicaria dois segundos prémios.

Assim, a Sofia teve três (20) e ganhou a medalha de ouro, a Carolina com dois (20) recebeu a medalha de prata, a Márcia com um (20) teve a medalha de bronze e a Inês sem qualquer (20) ficou em 4.º lugar.

Como muitos dos nossos leitores fizeram notar, o problema, tal como estava enunciado, não permitia ordenar completamente as quatro concorrentes. A Sofia ficaria em primeiro, a Inês em último, mas a Márcia e a Carolina ficariam empatadas em segundo lugar.

No ano internacional da Estatística, a revista Educação e Matemática adere a esta iniciativa com a secção «Estatística na educação matemática», que se concretiza nos números publicados no ano de 2013. Com esta secção pretende-se evidenciar e discutir ideias relevantes do ponto de vista do ensino da Estatística e das Probabilidades, bem como proporcionar alguns recursos que poderão ser úteis para a abordagem a estes temas na sala de aula com alunos de diferentes níveis de escolaridade. Desta forma, dá-se continuidade à revista n.º 120, a revista temática de 2012 dedicada ao ensino da Estatística e das Probabilidades, valorizando-se um tema que merece cada vez mais atenção na educação matemática.

Neste primeiro número da secção, divulgamos a iniciativa do Statistics 2013, chamando a atenção para as definições de Estatística que este evoca. Discutimos também um conceito que nos últimos anos se foi popularizando no discurso associado ao ensino da Estatística, o de literacia estatística, e apontamos algumas consequências para sala de aula associadas ao seu desenvolvimento. E como boa ilustração do que a literacia estatística envolve, incluímos um texto da autoria de José Paulo Viana, em que não falta a atitude crítica na análise da situação.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora (apc@uevora.pt)

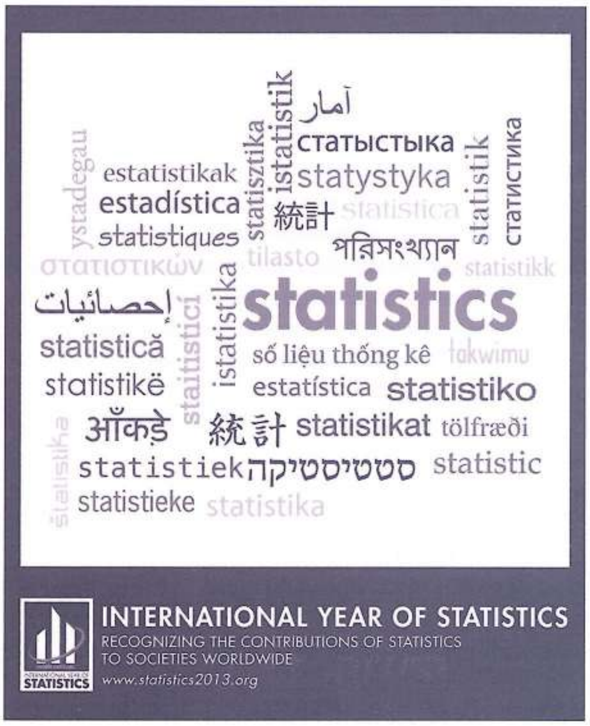
Statistics 2013

Como já foi anunciado na revista n.º 120, dedicada ao Ensino da Estatística e das Probabilidades, 2013 é o Ano Internacional da Estatística. O Statistics2013 é um evento apoiado por mais de 1400 organizações de todo o mundo, incluindo algumas portuguesas. Com ele pretende-se, como se pode ler no site http://www.statistics2013.org/, celebrar o poder e alcance dos efeitos da Estatística em todos nós e dar a conhecer como esta ciência se relaciona com a nossa vida e pode contribuir para a melhorar.

São muitas e diversas as iniciativas promovidas pelas organizações que aderiram ao Statistics2013. Numa visita ao site encontra informação mais completa sobre estas iniciativas e também conteúdos diversos, entre os quais destaco os recursos para o professor, com sugestões de ideias e tarefas para trabalhar o tema de Estatística com os alunos em aula. Aqui a referência vai para o programa internacional «*Census* na escola», um projeto no qual os alunos de escolas de diversos níveis são incentivados a resolver problemas estatísticos com base nos respetivos dados.

Chamo ainda a atenção para o folheto de divulgação do Statistics2013, em http://www.statistics2013.org/files/2012/11/STAT2013-Flyer.pdf. Na sua apresentação, refere-se a vários significados do conceito de estatística, extraídos do livro *A Career in Statistics: Beyond the numbers*, de Gerald Hahn e Necip Doganaksoy, que aqui traduzo:

- A ciência de aprender a partir de (ou retirar sentido de) dados
- A teoria ou métodos de extrair informação a partir de dados observados para resolver problemas da vida real
- A ciência da incerteza
- A ciência, por excelência, da interdisciplinaridade
- A arte de contar uma história com dados (numéricos)



No ano internacional da Estatística, questionarmo-nos sobre o que representa afinal para cada um de nós a Estatística é uma interrogação oportuna – a qual poderá ser, com interesse, estendida aos alunos do ensino básico e secundário.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Sobre literacia estatística

O termo *literacia estatística* popularizou-se nos últimos anos. Na sua essência, sublinha a ideia de que, na atualidade, todos somos consumidores de informação estatística – e não tanto seus produtores –, numa sociedade que constantemente veicula mensagens que se baseiam em dados, as quais têm impacto nas nossas vidas como cidadãos, consumidores, profissionais ou, mais globalmente, como pessoas. São múltiplos os exemplos que diariamente recorrem a dados e à terminologia estatística para comunicar ideias variadas. Estas nem sempre são fáceis de decifrar, muitas vezes tentam mostrar realidades distorcidas ou tentam credibilizar mensagens sem fundamento. A este propósito, Shaugnessy (2007) refere o caso que ficou conhecido de um congressista norte-americano que durante uma campanha eleitoral prometeu: «Legislaremos que todas as crianças das escolas do nosso estado terão classificações acima da média!»

A literacia estatística é, desde os anos 90, caracterizada como a capacidade do indivíduo compreender e avaliar criticamente os resultados estatísticos que permeiam a vida do dia-a-dia, combinada com a capacidade deste apreciar as contribuições que o raciocínio estatístico pode ter nas suas decisões, privadas ou públicas, pessoais ou profissionais. Em 2003, Iddo Gal, investigador que muito se tem dedicado ao tema, propôs uma das mais recorrentes noções de literacia estatística: «a capacidade da pessoa interpretar, avaliar criticamente e, quando relevante, expressar a própria opinião relativamente a informação estatística e mensagens baseadas em dados ou fenómenos aleatórios» (Gal, 2003, p.16). Gal chama a atenção de que o adulto deve ser capaz de (a) interpretar e avaliar criticamente informação estatística, argumentos relacionados com dados, fenómenos aleatórios relativos a contextos diversos e, sempre que relevante, (b) discutir as suas reacções a informação estatística veiculada – como, por exemplo, a sua compreeensão do significado dessa informação e das suas implicações, ou as suas preocupações acerca da aceitabilidade das conclusões apresentadas.

Ser estatisticamente literado não é, pois, o mesmo que ter conhecimentos estatísticos. É o tipo de uso que uma pessoa faz da estatística e a sua atitude perante a informação estatística com que se confronta na vida diária que determinam se a pessoa revela, ou não, literacia estatística. Para se ser estatisticamente literado é essencial adoptar uma postura de questionamento acerca da informação estatística presente em textos, tabelas ou gráficos que surgem em anúncios, notícias ou relatórios veiculados por vendedores, governos, políticos, organizações, cientistas, jornalistas ou *opinion-makers*. É ainda essencial ser capaz de identificar factores de um possível enviesamento ou falsificação dessa informação, bem como perceber o que ela realmente revela sobre o contexto a que se refere e qual a solidez dos argumentos que oferece para justificar eventuais tomadas de decisão.

A necessidade do desenvolvimento da literacia estatística que prepare jovens e futuros adultos para viver de forma responsável e participada numa sociedade que se gere por dados e em que reina a incerteza, tem inspirado uma evolução das orientações curriculares relativas ao ensino da Matemática, com o reforço da educação estatística dos alunos desde os primeiros anos de escolaridade (Batanero, Burrill, & Reading, 2011; GAISE, 2007; NCTM, 2007; ME, 2007). Mas a investigação tem mostrado que os alunos revelam bastantes dificuldades neste domínio, nomeadamente quando as situações em estudo apelam a um uso mais sofisticado do conhecimento estatístico como aquele que intervêm na literacia estatística, associado à interpretação e/ou atribuição de significados a informações estatísticas produzidas ou fornecidas, sejam expressas em números ou gráficos, ou à apreciação e juízo crítico sobre conclusões derivadas de estudos estatísticos (Shaugnessy, 2007).

O que está então em jogo quando o propósito é desenvolver a literacia estatística dos alunos? Não é expectável que os alunos desenvolvam a respetiva literacia estatística por frequentarem sequências de aulas, ainda que vastas, em que determinam medidas estatísticas e constróem gráficos diversos por solicitação do professor com o objectivo de avaliar se os conseguem fazer. Os alunos precisam de, na sala de aula, aprender os conceitos estatísticos e desenvolver a competência de os usar em condições semelhantes àquelas com que se confrontarão na vida diária, na qual usarão a estatística para resolver problemas, fundamentar opiniões e apoiar decisões. Para tal, é vital que tenham um papel relevante no desenvolvimento de estudos estatísticos, nos quais possam intervir desde a formulação das questões à escrita das conclusões. A experiência de realizar investigações estatísticas permite que os alunos reconheçam aspectos sensíveis que podem afectar a qualidade do conhecimento produzido.

De igual modo, é importante que os alunos trabalhem sobre contextos reais e para os quais se mobilizem os seus interesses. A escolha de temas pertinentes para o desenvolvimento dos estudos estatísticos é um ponto bastante sensível, que muitas vezes requer uma negociação entre as propostas do professor e as dos alunos. O professor pode começar por sugerir temas relacionados com, por exemplo, hábitos de vida, saúde, desporto, uso de redes sociais, cidadania, ecologia, economia. Os alunos poderão realizar estudos estatísticos sobre as variáveis associadas ao tema na sua turma, ou até mesmo na sua escola, e confrontar a caracterização da sua turma/escola com estudos da população portuguesa ou mesmo mundial. Para possibilitar este confronto, nada mais eficaz do que organizar uma pesquisa na internet, recorrendo a sites credíveis – o desenvolvimento da *webdata literacy* está também associada ao desenvolvimento da literacia estatística. Sem um investimento no conhecimento e aprofundamento do tema em estudo, o impacto das conclusões obtidas pelos alunos poderá ser reduzido. Temas como os que indico acima têm um grande potencial para o desenvolvimento da literacia estatística, em que o estabelecimento de relações com o contexto é fundamental. Além disso, em simultâneo, os alunos estarão a aprender sobre assuntos de interesse da sua vida, complementando a sua formação pessoal e social.

Referências

Gal, I. (2003). Expanding conceptions of statistical literacy: An analysis of products from statistics agencies. *Statistics Education Research Journal, 2*(1), 3–22.

Shaughnessy, M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957–1010). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). Overview: Challenges for Teaching Statistics in School Mathematics and Preparing Mathematics Teachers. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study. ICMI Study volume 14* (pp. 407–418). New York: Springer.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. L. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/Education/gaise/

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

ME (2007). *Programa de Matemática para o ensino básico.* Lisboa: ME.

Ana Paula Canavarro

Universidade de Évora

As notas de exame

Quando, em 2005, pela primeira vez (e, que eu saiba, a última) o Ministério da Educação mostrou os gráficos dos resultados dos exames de 12.º ano, fiquei intrigado e entusiasmado com o que vi. Eram todos estranhíssimos. Havia por ali «fenómenos impossíveis». Ora veja-se o de Matemática (figura 1).

No eixo horizontal temos as classificações, de 0 a 200, e no vertical o número de exames correspondentes (ou seja, a frequência). Estava lá indicado que se tinham realizado 49819 provas, que a média fora de 75 pontos e que o desvio padrão de 47.

Até aqui, tudo bem, mas quando olhamos para as colunas correspondentes às classificações não podemos deixar de nos surpreender: do princípio ao fim temos uma coluna alta, uma baixa, uma alta, uma baixa, ...

Esta regularidade (ou melhor, esta irregularidade) não pode ter causas naturais. Numa amostra tão grande (são quase 50000 exames), as colunas vizinhas não só deveriam ter alturas relativamente próximas mas também não se poderia verificar sistematicamente esta alternância nas frequências – a uma alta segue-se uma baixa e vice-versa.

As alturas das colunas deveriam estar próximas de uma curva, tal como se mostra no gráfico da figura 2.

Esta anomalia tem de ter causas externas àquilo que os alunos fizeram. Temos de tentar descobrir o que terá provocado este fenómeno. Se a origem não pode estar no trabalho dos examinandos, é preciso analisar as fases seguintes do processo: correção das provas e validação das classificações. Na última fase

Figura 1

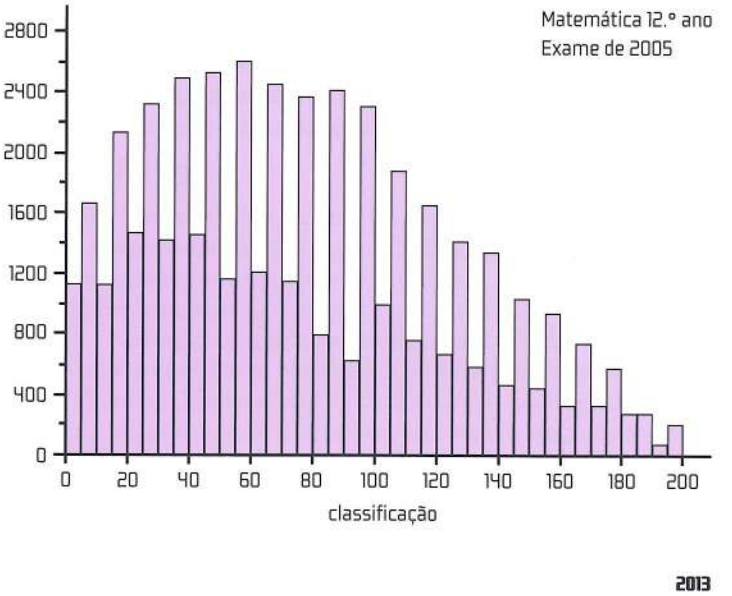
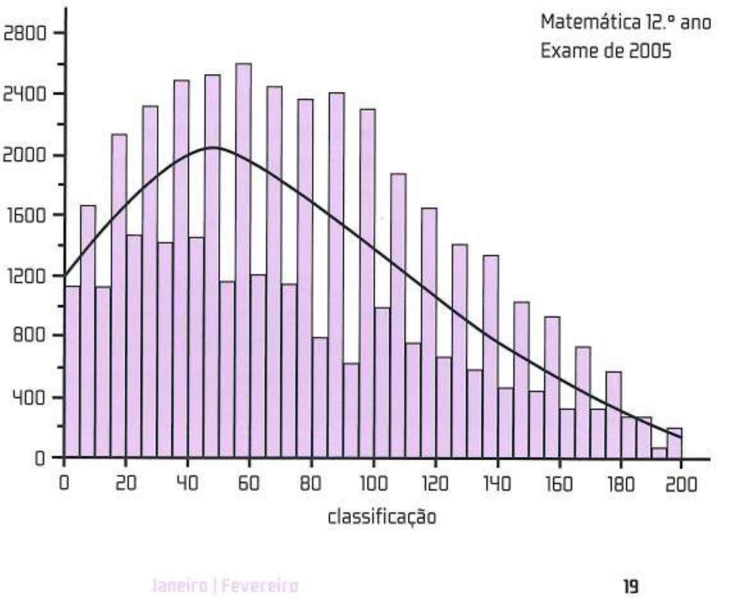


Figura 2



(validação) torna-se evidente que tal não é possível. Então, só pode ter sido na correção.

Observemos o gráfico. No eixo horizontal temos então as notas de exame, que variam entre 0 e 200. No entanto, o gráfico não está organizado com todas as classificações possíveis (seriam 201 colunas). Usou-se aqui um processo habitual, que consiste em agrupar os resultados em classes. Assim, a primeira coluna inclui todas as notas de 00 a 04, a segunda tem as entre 05 e 09, a terceira entre 10 e 14, e assim sucessivamente, até à última, onde estão as notas entre 195 e 200.

Se repararmos bem, as colunas baixas são as que correspondem a resultados cuja terminação está entre 0 e 4, enquanto as altas têm as notas terminadas entre 5 e 9.

O que terá provocado haver muito menos notas a acabar entre 0 e 4 do que entre 5 e 9? A única resposta é os professores classificadores as terem alterado propositadamente. E porquê? Porque, para a classificação final do aluno numa disciplina com exame nacional é calculada fazendo uma média ponderada da nota que ele teve no seu percurso escolar com a nota do exame, arredondada às unidades. Assim, quem teve 124 pontos no exame, irá fazer essa média usando o valor 12 como nota de exame, mas quem tiver 125 já entrará com um 13 no cálculo dessa média. Por este motivo, os professores que estão a corrigir os exames, quando encontram uma prova cuja classificação termina em 4, voltam a dar uma volta ao teste tentando encontrar uma pergunta onde possam subir um ponto, de modo a que a nota total passe a acabar em 5 e assim o aluno tenha mais um valor quando se fizer o arredondamento. Alguns professores são ainda mais benevolentes e fazem isso quando a classificação termina em 3 ou mesmo em 2.

Se voltarmos a olhar para o último gráfico, vemos claramente que o que «falta» a cada coluna *baixa* é praticamente igual ao que «está a mais» na coluna imediatamente a seguir. O caso mais flagrante é o das classes 90–94, com 628 provas, e 95–99, com 2305 provas. Se não tivesse existido uma alteração forçada, cada coluna deveria ter uma frequência próxima dos 1330. Ou seja, só aqui é de prever que tenham sido alteradas umas 700 notas. Mas, graças à boa vontade dos corretores, esses 700 alunos passaram a ter 10 no exame, em vez de 9.

Se fizermos os cálculos para todas as colunas, concluímos que entre um terço e um quarto dos exames tiveram as suas classificações alteradas para cima graças à «boa alma» dos professores que os corrigiram.

Lamentavelmente, 2005 foi um ano excecional e nunca mais consegui descobrir gráficos com os resultados globais dos exames. Ter-se-ão arrependido dessa divulgação os sucessivos ministérios da educação? E o atual ministro, que tão adepto da «transparência» era, deixa que tudo continue na mesma? É de prever que este fenómeno se continue a verificar, tanto na Matemática como nas outras disciplinas, e muitos de nós gostaríamos de o saber.

Ficam três questões em que talvez valha a pena pensar.

Primeira – Afinal, ao contrário do que muitos alunos pensam, os professores são uns «mãos largas» e muito mais amigos dos alunos do que, provavelmente, eles esperariam.

Segunda – Uma das principais funções dos exames, tal como eles são feitos atualmente, é seriar os alunos com vista sobretudo ao acesso ao ensino superior. Isto é levado muito a sério pelas autoridades escolares: há total secretismo na elaboração das provas; para garantir que não há fugas, o transporte dos enunciados até às escolas é feito pela polícia no próprio dia do exame; os critérios de correção são publicamente divulgados e têm de ser obrigatoriamente cumpridos; os professores corretores recebem previamente formação específica sobre o assunto; etc. Mas, depois disto tudo, quase um terço das provas têm a sua classificação alterada. Lá se vai a seriedade de todo o processo.

Terceira – Durante muitos anos, as classificações dos alunos nos diversos exames nacionais de 12.º ano foram «segredo». As notas eram tornadas públicas em cada escola mas era impossível saber o que tinha acontecido a nível nacional. A partir de certa altura e após inúmeras pressões vindas de vários lados, essa informação deixou de ser secreta. Os meios de informação (jornais e televisões) e as universidades, que a ela passaram a ter acesso, começaram a fazer o seu tratamento e a divulgar os resultados (médias, número de reprovações, etc.) em cada disciplina, quer a nível nacional quer a nível de escola. Infelizmente, a principal preocupação dos *media* parece ser ordenar as escolas, ver quais são as «melhores» e as «piores», comparar os colégios com as escolas públicas, e pouco mais. Da parte do Ministério, deve haver estudos mais aprofundados mas, ou são para consumo interno, ou a sua divulgação não é suficientemente alargada ou acessível. Ora, só se nós, professores, soubermos da existência dos problemas é que poderemos ir, localmente, à procura das soluções.

José Paulo Viana
Escola Secundária de Vergílio Ferreira

– E agora o que me aconselha a visitar?
– O planeta Terra – respondeu o geógrafo. É um planeta com boa reputação...

Antoine de Saint-Exupéry, «O Principezinho»

Num Planeta com tanto por descobrir, sugerimos (re)visitar a Matemática do Planeta Terra no verdadeiro sentido de Planeta, nomeadamente da Geometria do Planeta Terra.

«Como medir distâncias entre pontos na superfície terrestre?», é o mote para o primeiro artigo que a E&M, em 2013, apresenta no âmbito da Matemática do Planeta Terra.

Embora a geometria plana seja, recorrentemente, um meio de representarmos o nosso Planeta, não é esta a sua forma e isso obriga-nos a repensar as ferramentas utilizadas na resolução dos problemas e desafios com que nos deparamos. Já no séc. XVI, Pedro Nunes mostrou-nos que navegar pelas linhas de rumo, mantendo constante o ângulo da direção do movimento com o meridiano, não garante a distância mínima entre dois pontos do globo, ou seja, um arco de círculo máximo, e o conhecimento sobre loxodrómicas contribuiu mais tarde para Mercator construir o sistema de projeção de mapas com o mesmo nome e que ainda hoje é utilizado na navegação.

Este artigo que resultou de uma produtiva colaboração entre o Atractor e o Núcleo do Porto da APM leva-nos a questionar a pertinência da exploração de conceitos de Geometria Esférica ao nível da sala de aula. De facto, o percurso matemático ao longo de todo o ensino obrigatório (12 anos) apela à construção de um edifício geométrico puramente euclidiano que não corresponde à geometria do Planeta que habitamos.

Ainda que não seja um tópico contemplado nos programas de Matemática, a Geometria Esférica promove o desenvolvimento de capacidades matemáticas e o conhecimento deste legado cultural enquadra-se nas orientações curriculares atuais. Disso é exemplo o conjunto de tarefas elaboradas por esta equipa, dirigidas a alunos, apresentadas com níveis de dificuldade e complexidade adaptados a diferentes níveis de escolaridade. A secção de Materiais para a aula de Matemática apresenta uma possível abordagem da tarefa dirigida a alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico.

MPT2013 telegraficamente...

No mundo...

Começa a fazer-se sentir em diversos países a dinamização de atividades no âmbito MPE por parte das mais de 100 instituições e sociedades académicas associadas a esta causa. Para manter-se informado das novidades internacionais basta subscrever a newsletter em http://mpe2013.org, a página internacional do MPT, que está em constante atualização. Merece especial destaque a secção de Educação que tem disponível uma panóplia de recursos educativos e materiais curriculares (em inglês e francês) relacionados com a temática MPT, desenvolvidos e/ou compilados por instituições como NCTM (National Council of Teachers os Mathematics), NASA (National Aeronautics and Space Administration), AMS (American Mathematical Society), entre outras.

Em Portugal...

Em Portugal os desenvolvimentos referentes ao Ano Internacional da Matemática do Planeta Terra (AIMPT) são assinalados em www.mpt2013.pt, onde consta a informação sobre a iniciativa, os parceiros e as actividades agendadas.

No sentido de promover a dinamização do AIMPT foi constituído um Comité Nacional, o qual funcionará sob a égide da Comissão Nacional da UNESCO (CNU), ao longo de 2013.

No próximo dia 5 de Março, terá lugar o lançamento oficial do MPT2013 em Portugal, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa.

Na APM...

Concurso Matemática, onde estás? em números (até 31 de Dezembro de 2012)

- *doisdois* propostas submetidas;
- *2 dezenas* de escolas participantes;
- 2013 + 978 alunos envolvidos;
- *Menos 7 do que o número da presente E&M* corresponde ao número de professores envolvidos;
- 77% das propostas envolvem projetos (com ou sem parcerias);
- *Meia dúzia* propõe a realização de atividades e *metade do número anterior* corresponde ao número de escolas que sugerem a produção de atividades originais.
- *O menor número primo* são as parcerias estabelecidas entre escolas portuguesas e santomenses.

Os temas, esses, são diversos e originais: *Matemática e* ... ambiente; ... serviços; ... jogos; ... saber popular; ... arte; ... outras ciências ...

No próximo número da E&M iremos dar-vos mais novidades sobre o desenvolvimento das atividades em curso.

Mantenha-se atento às novidades na página do MPT da APM (http://mpt2013.apm.pt).

Joana Latas

A Geometria do Planeta Terra

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado[1]) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. O estudo da Geometria Esférica, principalmente o relacionado com triângulos esféricos, é muito antigo e foi sendo desenvolvido ao longo dos séculos devido à sua grande aplicabilidade à Astronomia e à Navegação. O português Pedro Nunes foi um dos matemáticos que se notabilizou nesta área tendo descoberto uma curva que, na época dos Descobrimentos, gerou alguma controvérsia. Em 1537, Pedro Nunes publicou dois tratados sobre alguns problemas relacionados com certas rotas de navegação que mantêm o percurso do navio num rumo magnético constante intersectando todos os meridianos segundo o mesmo ângulo. Esses percursos determinam um tipo de curva, conhecida por curva loxodrómica. Desde essa época que se sabe que um percurso mantendo um ângulo constante em relação aos meridianos não é, em geral, o caminho mais curto, pois não é um arco de círculo máximo (curva na esfera que minimiza a distância entre dois pontos, figura 1). Assim, Pedro Nunes sugeria que o barco devesse procurar seguir o rumo de um círculo máximo, efectuando as necessárias correcções a intervalos de tempo regulares para contrariar o efeito da curva loxodrómica. Para tal, o matemático português propôs um método matemático que foi alvo de duras críticas pela sua difícil aplicabilidade em alto mar. «As contribuições teóricas de Nunes para a navegação foram muito avançadas para o seu tempo. A dificuldade em as aplicar deve-se principalmente à precisão insuficiente dos instrumentos disponíveis e ao facto de a matemática da época ser demasiado pesada e laboriosa para ser usada no mar.» (Randles, 1989 [4])

Mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa para a navegação, pilotos de avião e os navegadores devem ter conhecimentos sobre a curva loxodrómica (Alexander, 2004 [1]).

Apesar de muitos resultados da Geometria Esférica serem conhecidos desde a Antiguidade, enquanto sistema axiomático, este tipo de geometria só foi formalizado no séc. XIX após a descoberta das geometrias não Euclidianas, atribuída aos matemáticos Gauss, Lobatschewski e János Bolyai (Rosenfeld, 1976 [5]).

Esta geometria difere em vários aspetos da Geometria Euclidiana e, ao longo deste artigo, são exploradas algumas dessas diferenças. No final, numa colaboração entre o Atractor e o Núcleo do Porto da APM, é apresentada uma tarefa para alunos cujo propósito principal de ensino é a abordagem e exploração de algumas diferenças entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana, incidindo na soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Geometria Esférica

Na Geometria Euclidiana, o caminho mais curto entre dois pontos é o segmento de reta determinado por eles. Na esfera, o

Figura 1. A cinzento escuro está representada uma curva loxodrómica que passa por dois pontos e a cinzento claro o menor arco de círculo máximo definido por esses pontos (caminho mais curto).

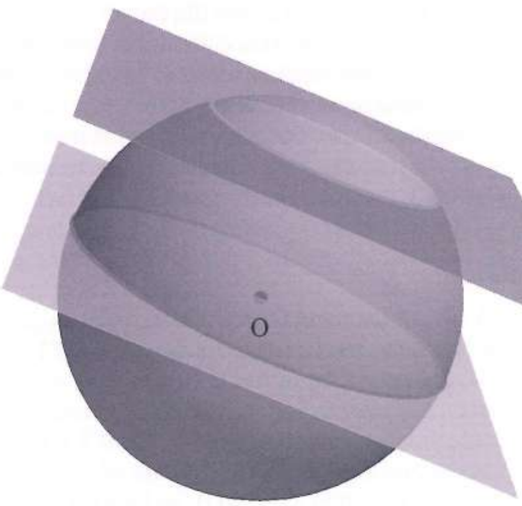


Figura 2. Uma circunferência, na esfera, pode ser obtida intersectando a esfera com um plano. Quando o plano contém o centro da esfera obtém-se um círculo máximo.

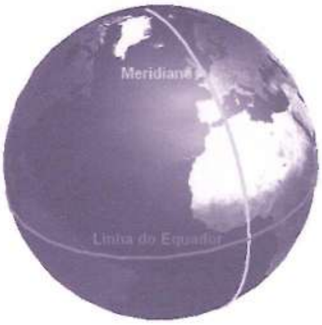


Figura 3. No planeta Terra, a linha do Equador é um círculo máximo e os meridianos são semicírculos máximos.

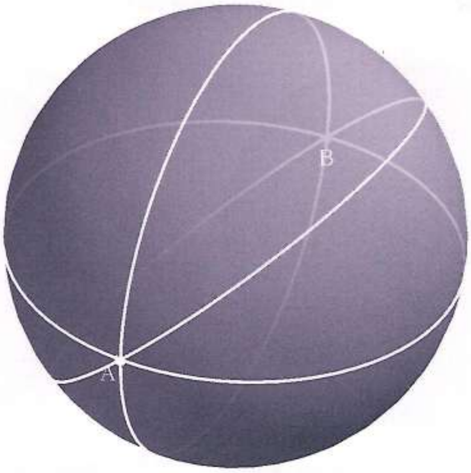


Figura 4. Dois círculos máximos intersetam-se sempre em dois pontos antípodas.

caminho mais curto entre dois pontos é dado por um arco de circunferência obtido intersetando a esfera com um plano contendo o seu centro. Essa circunferência é usualmente designada por *círculo máximo*. (Figuras 2 e 3)

Na esfera, os círculos máximos assumem o papel análogo ao das retas da Geometria Euclidiana e os arcos menores de círculo máximo assumem o papel análogo ao dos segmentos de reta.

Desta forma, na esfera, a distância entre dois pontos não antípodas[2] determina-se calculando o comprimento do menor arco de círculo máximo definido pelos dois pontos. Note-se que, se A e B são antípodas, a distância entre A e B é igual ao comprimento de um semicírculo máximo.

Numa esfera de raio r e centro O, considere-se o ângulo AOB correspondente ao menor arco AB e α a sua amplitude. Então,

$$d(A,B) = \alpha r, \ \alpha \text{ em radianos}$$

ou

$$d(A,B) = \frac{\alpha\pi}{180^\circ} r, \ \alpha \text{ em graus.}$$

Paralelismo

Podemos definir *retas paralelas* como sendo retas que não se intersetam. Na esfera, dados dois círculos máximos, estes intersetam-se sempre em dois pontos antípodas. Por exemplo, os meridianos terrestres intersetam-se no polo Norte e no polo Sul. (Figura 4)

Assim, ao identificarmos o conceito de reta na esfera com o de círculo máximo, concluímos que:

Na Geometria Esférica não existem retas paralelas!

Aqui reside uma das diferenças substanciais entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana.

Na verdade, as geometrias não Euclidianas surgiram no desenlace da longuíssima história do famoso 5.° Postulado de Euclides, mais conhecido pelo Postulado das Paralelas. Ao longo dos séculos, foram várias as tentativas de provar este postulado a partir dos restantes ou então de o substituir por outro mais simples. Um dos axiomas equivalentes que é usado nos livros modernos foi dado por Playfair: *dado um ponto P que não está numa reta r, existe uma só reta no plano de P e r que contém P e que não interseta r.* (Kline, 1972 [3]).

No início do século XIX, alguns matemáticos, incluindo o alemão Carl Friedrich Gauss (1777–1855), notaram que o Postulado das Paralelas não poderia ser provado nem como verdadeiro nem como falso com base nos outros postulados da Geometria Euclidiana, ou seja, o Postulado das Paralelas seria independente dos restantes. Seria então possível desenvolver uma nova geometria a partir de um sistema axiomático que contivesse uma alternativa ao Postulado das Paralelas. Mas foram Lobatschewski (1792–1856) e János Bolyai (1802–1860) que, de forma independente, publicaram pela primeira vez os resultados de uma nova geometria não Euclidiana (Rosenfeld, 1976 [5]), conhecida atualmente por Geometria Hiperbólica. A Geometria Hiperbólica obtém-se substituindo o Postulado das Paralelas pelo Axioma Hiperbólico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada.*

Na Geometria Esférica, o Postulado das Paralelas é substituído pelo Axioma Elíptico: *dada uma reta e um ponto exterior à reta, não existe nenhuma reta contendo o ponto dado e paralela à reta dada.*

Bernhard Riemann (1826–1866) foi o primeiro a reconhecer a Geometria Esférica como um tipo de geometria não Euclidiana onde não existem retas paralelas. (Coxeter, 1998 [2])

A descoberta das geometrias não Euclidianas teve consequências muito importantes, quer matemáticas quer filosóficas, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da matemática.

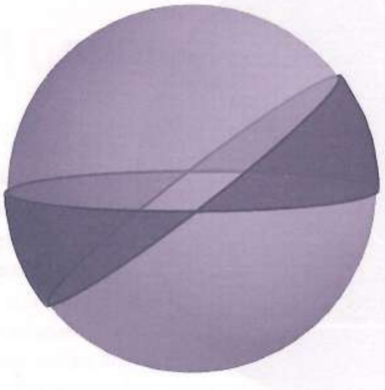
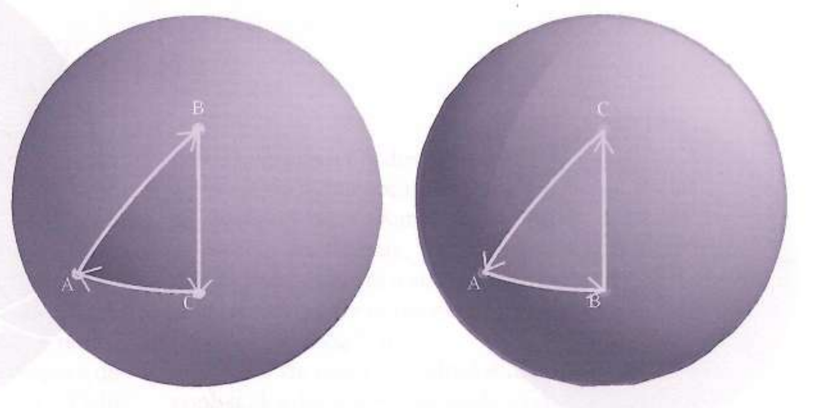


Figura 5. Biângulos determinados por dois círculos máximos.



Figuras 6a e 6b. Nestas esferas, estão representados dois triângulos diferentes (com interior a cinza escuro) definidos pelos mesmos vértices.

Biângulos

Na esfera existem polígonos com dois lados!

A explicação é simples: na esfera, os lados dos polígonos são segmentos esféricos, ou seja, arcos menores de círculo máximo; dados dois círculos máximos, estes intersetam-se sempre em dois pontos antípodas, dividindo a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados; estas regiões designam-se por *biângulos* ou *lúnulas*. (Figura 5)

Portanto, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, os biângulos, cujos vértices são pontos antípodas e cujos lados são semicírculos máximos.

Podemos calcular a área de um biângulo de forma simples, conhecendo a amplitude do seu ângulo e a área da esfera ($4\pi r^2$) e observando que a área do biângulo é diretamente proporcional à amplitude do ângulo. Assim, a área de um biângulo com ângulo α é dada por:

$$2\alpha r^2,\ \alpha \text{ em radianos} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha\pi}{90}r^2,\ \alpha \text{ em graus,}$$

onde r é o raio da esfera.

Triângulos Esféricos

Com três pontos distintos na superfície esférica podemos obter dois triângulos!

Dados três pontos, estes podem definir dois triângulos, na medida em que podem definir duas regiões limitadas na superfície da esfera (figuras 6a e 6b). Na Geometria Euclidiana isto não acontece pois, dados três pontos não colineares (não pertencentes à mesma reta) e os três segmentos de reta que os unem dois a dois, estes definem apenas uma região limitada e, por isso, um único triângulo.

A *área de um triângulo esférico* pode ser determinada conhecendo a área dos biângulos que lhe estão associados. Temos que distinguir dois casos: o caso em que o triângulo é *pequeno* (o seu interior está contido numa semiesfera) e o caso contrário.

1. Tomemos um triângulo esférico *pequeno* T. Em cada vértice do triângulo esférico, os círculos máximos que contêm os respetivos lados do triângulo formam dois biângulos congruentes com ângulos geometricamente iguais ao ângulo interno do triângulo nesse vértice. Note-se que um desses biângulos contém o interior do triângulo e o outro contém o interior do triângulo antípoda (triângulo formado pelos antípodas dos pontos do triângulo). (Figura 7a) Considerando os três vértices do triângulo, temos seis biângulos dos quais três intersetam-se no interior do triângulo e os outros três intersetam-se no interior do triângulo antípoda. Na região esférica restante, os seis biângulos são disjuntos dois a dois. Assim, estes biângulos «cobrem» o triângulo e o seu antípoda três vezes e a restante região esférica uma vez. Portanto, a soma da área dos seis biângulos é igual à área da esfera acrescida do dobro da área do triângulo esférico, A_T, e do dobro da área do seu antípoda (Figuras 7b e 7c). Notando que T e o seu antípoda têm a mesma área e fazendo alguns cálculos simples, obtém-se a fórmula da área do triângulo esférico T: $A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$, onde α, β e γ são as medidas das amplitudes dos ângulos internos do triângulo em radianos. Se as medidas das amplitudes α, β e γ forem dadas em graus, temos a fórmula
$$A_T = (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)\frac{\pi}{180^\circ}r^2.$$
Esta fórmula é conhecida por *Teorema de Girard*.
2. Se o triângulo esférico for *grande*, ou seja, se contiver uma semiesfera, podemos calcular a sua área fazendo a diferença entre a área da esfera e a área do triângulo pequeno que os seus lados e vértices também determinam. Usando o resultado anterior obtemos a mesma fórmula para a área do triângulo.

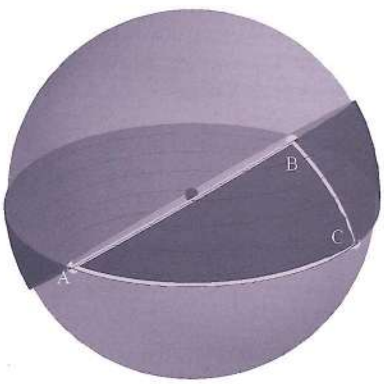


Figura 7a. Dois biângulos com vértice em *A*. Um biângulo «cobre» o triângulo [*ABC*].

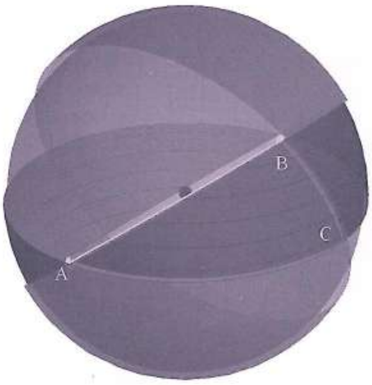


Figura 7b. Dois biângulos com vértice em *A* e dois biângulos com vértice em *B* dos quais dois intersetam-se no interior do triângulo [*ABC*] e os outros dois intersetam-se no interior do triângulo antípoda.

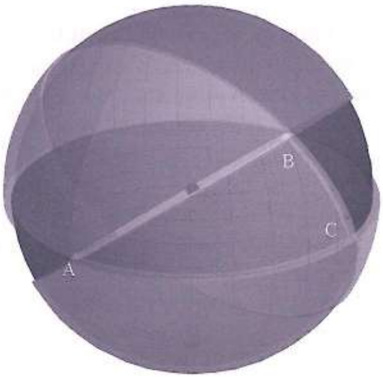


Figura 7c. Seis biângulos com vértices nos vértices do triângulo [*ABC*] dos quais três intersetam-se no interior do triângulo e os outros três intersetam-se no interior do triângulo antípoda.

Teorema de Girard: A área de um triângulo esférico é igual a $A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$ onde α, β e γ são as medidas das amplitudes, em radianos, dos ângulos internos do triângulo e r é o raio da esfera.

À diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico e a amplitude do ângulo raso chama-se *excesso angular*. A fórmula dada no Teorema de Girard indica-nos que a área de um triângulo esférico fica determinada pelo seu excesso angular e pelo raio da esfera, sendo que a área e a medida do excesso angular são diretamente proporcionais.

A área de um triângulo esférico é diretamente proporcional à medida do excesso angular.

Em particular, o excesso angular é sempre positivo, donde podemos concluir que:

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior a 180°.

Quando o excesso angular é um valor próximo de zero (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de π rad, ou 180.°), o triângulo é «quase plano» e a sua área é «quase nula». Por outro lado, quando o excesso angular é um valor próximo de 4π rad, ou 720° (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de 5π rad, ou 900°), a sua área é próxima da área da esfera.

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico varia entre π e 5π radianos, 180° e 900°.

Este é um resultado muito diferente do obtido na Geometria Euclidiana onde a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é constante e igual a 180°.

O Teorema de Girard conduz-nos ainda a outra enorme diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica:

Dois triângulos esféricos semelhantes são necessariamente congruentes!

Como a área de um triângulo esférico depende apenas da soma das amplitudes dos seus ângulos internos, na esfera todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área; logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

A Geometria do Planeta Terra na sala de aula de Matemática

De facto, enquanto humanidade, a nossa «casa» é a superfície de um planeta quase esférico, cujas propriedades geométricas particulares se destacaram desde a antiguidade, e cujo conhecimento foi — e continua a ser — crítico no desenvolvimento de áreas como a astronomia e a navegação. Ainda que exterior aos conteúdos programáticos do ensino básico, a Geometria Esférica permite aos alunos «contactar com aspetos da História da Matemática e reconhecer o papel da Matemática no desenvolvimento da tecnologia e em várias técnicas, [...] o contributo de diversos povos e civilizações para o desenvolvimento desta ciência, a sua relação com os grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, proporcionando uma perspetiva dinâmica sobre a Matemática e o seu papel na sociedade». (Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007, p. 10)

Neste contexto, e mantendo «como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos» (idem, p. 7), entendemos pertinente a apresentação de propostas de abordagem e exploração comparativas de alguns conceitos básicos (como os de reta / segmento de reta, ângulo, triângulo, distância ou área), entre as geometrias Euclidianas e Esférica, com base na manipulação de materiais ou utilização de tecnologias. O conjunto das tarefas propostas, para alunos do 1.° ao 12.° anos de escolaridade, pode ser acedido em

http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

Notas

1 Na verdade, o planeta Terra pode ser modelado de forma mais precisa por um elipsoide: o raio da Terra varia entre, aproximadamente, 6357 Km nos polos e 6378 Km na linha do Equador.

2 Pontos antípodas são pontos diametralmente opostos.

Referências

(1) Alexander, James — *Loxodromes: A Rhumb Way to Go*. Mathematics Magazine, Vol. 77, n.° 5, December 2004, pp. 349–356.

(2) Coxeter, H. S. M. — *Non-Euclidean Geometry*. Cambridge University Press, 1998.

(3) Kline, Morris — *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Volume 3. Oxford University Press, 1972.

(4) Randles, W. G. L. — *Pedro Nunes e a Descoberta da Curva Loxodrómica, ou como, no século dezasseis, a navegação com o globo não resolveu as dificuldades resultantes do uso de cartas planas*. Gazeta de Matemática, n.° 143, Julho de 2002, pp. 90–97. Tradução de Suzana Metello de Nápoles, revista por João Filipe Queiró, Henrique Leitão e pelo autor de *Pedro Nunes and the discovery of the loxodromic curve, or how, in the sixteenth century, navigating with a globe had failed to solve the difficulties encountered with the plane chart*, Revista da Universidade de Coimbra, Vol. XXXV, 1989, pp. 119–130.

(5) Rosenfeld, B. A. — *A History of Non-Euclidean Geometry*. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1988. Translation of Istoriya Neevklidovoi Geometrii. Moscow: Nauka, 1976.

Nota: Na página http://atractor.pt/mat/GeomEsf encontra-se um trabalho sobre Geometria Esférica, elaborado sob a orientação do Atractor, no âmbito de uma bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia para ações de divulgação matemática junto da Associação Atractor. Para além do texto, no qual se baseia este artigo, esse trabalho integra componentes interativas em formato CDF, preparadas com o programa *Mathematica* e cujos ficheiros são utilizados nas tarefas propostas numa colaboração entre a Associação Atractor e o Núcleo do Porto da Associação de Professores de Matemática. Para a utilização destes ficheiros, deve estar instalado no computador o *Wolfram CDFPlayer*, que pode ser importado sem encargos a partir de http://www.wolfram.com/cdf-player/.

As tarefas elaboradas no âmbito da referida colaboração podem também ser acedidas a partir da página do MPT2013 da APM, http://mpt2013.apm.pt.

Atractor e Núcleo do Porto da APM

Sendo 2013 o ano de (re)descoberta e divulgação da Matemática do Planeta Terra, propõe-se neste número da E&M, na secção materiais para a aula de Matemática, uma tarefa cujo propósito principal de ensino é a abordagem e exploração de algumas diferenças entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana.

A tarefa que aqui se apresenta foi concebida para alunos do 3.° ciclo e o seu desenvolvimento requer a utilização de computadores com instalação do software Wolfram CDF Player e do ficheiro soma_dos_ângulos_de_um_triângulo.cdf, que pode ser descarregado de http://atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino ou em http://mpt2013.apm.pt. Pressupõe-se que os alunos sejam previamente capazes de identificar os lugares geométricos esfera, superfície esférica e circunferência, conheçam a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo no plano e saibam interpretar gráficos.

Com duração prevista de 90 minutos, a tarefa visa:

- a investigação dos valores entre os quais pode variar a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico;
- a análise comparativa entre os resultados obtidos e a propriedade correspondente em Geometria Euclidiana.

Esta tarefa proporciona ainda aos alunos amplas oportunidades de argumentação e fundamentação das suas ideias, assim como de construção de modelos matemáticos elementares.

Resultados da sua aplicação experimental permitem destacar a curiosidade dos alunos face aos resultados observados, a sua vontade de saber mais e a forma como a discussão gerada contribuiu para o reforço dos seus conhecimentos prévios de Geometria Euclidiana.

Destaca-se que além da sugestão de tarefa para o aluno, existem algumas indicações para o professor.

Atractor e Núcleo do Porto da APM

Geometria do Planeta Terra

Guião para o aluno

I. O Urso

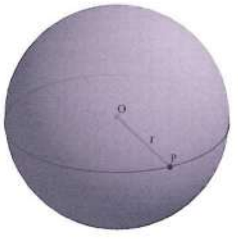
Um urso, partindo da sua toca, andou 10 Km para Sul. Depois, mudou de direção e caminhou 10 Km sempre em direção a Este. Em seguida, voltou a mudar de direção e andou 10 Km para Norte, chegando novamente à sua toca. Qual é a cor do urso?

Adaptado do livro *How to solve it*[1] do matemático G. Pólya.

Como podes verificar o percurso do urso não é possível no plano, ou seja, o urso não pode estar a caminhar numa superfície plana. E se ele estiver a caminhar numa superfície esférica como, por exemplo, a superfície terrestre?

II. Geometria Esférica

A esfera pode ser considerada um modelo (simplificado) do planeta Terra e existe uma geometria que se dedica ao seu estudo: a Geometria Esférica. Como superfície esférica de centro *O* e raio $r > 0$ consideraremos o conjunto de pontos do espaço que estão à distância *r* de *O*.



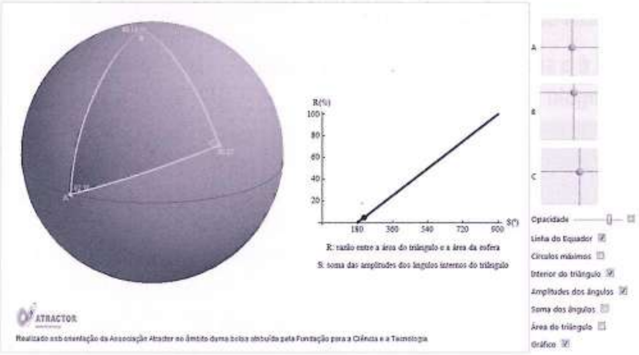
Superfície esférica de centro *O* e raio *r*.

O estudo da Geometria Esférica pode permitir a resolução de problemas ligados ao planeta Terra: por exemplo, na época dos Descobrimentos, era muito importante saber qual o caminho mais curto entre dois locais do planeta e qual a rota que se deveria seguir; mesmo atualmente, em que o sistema GPS é uma ferramenta poderosa, os pilotos de avião e os navegadores têm que ter conhecimentos sobre Geometria Esférica. No âmbito da iniciativa internacional *Matemática do Planeta Terra 2013*, propomos-te a realização de um conjunto de tarefas para iniciares o estudo da Geometria Esférica bem como para explorares algumas das diferenças (surpreendentes) entre esta geometria e a Geometria Euclidiana.

III. Tarefa

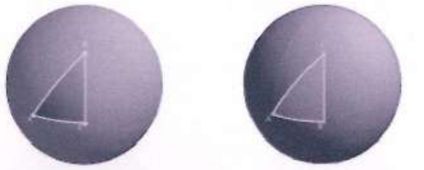
Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?

1. Abre o ficheiro *soma_dos_ângulos_de_um_triângulo.cdf*. Nesse ficheiro, encontras uma aplicação interativa que contém uma esfera de raio unitário com um triângulo esférico assinalado cujos vértices são pontos móveis: A, B e C.



Ficheiro em formato CDF disponível em http://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/MateriaisEnsino.

2. Clica na caixa *Interior do triângulo* e move os pontos através dos cursores *A*, *B* e *C*[2] que estão à direita de forma a obteres diferentes triângulos.



Três pontos distintos na superfície esférica e três lados (arcos de círculo máximo) que definem dois triângulos, na medida em que definem duas regiões limitadas na superfície esférica. O triângulo [*ABC*] que se está a considerar é o triângulo com interior mais escuro.

3. Escolhe uma posição para *A*, *B* e *C* e clica na caixa *Amplitude dos ângulos*. Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos desse triângulo esférico? Podes clicar na caixa *Soma dos ângulos* para confirmar.

4. Em Geometria Euclidiana, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. Será que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico também é constante? Move os pontos de modo a obteres triângulos esféricos diferentes e observa o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de cada um desses triângulos.

5. É possível ter um triângulo esférico com dois ângulos retos? E três ângulos retos? E três ângulos rasos?

6. Entre que valores varia a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?

7. Clica na caixa *Gráfico* e observa o gráfico da função que relaciona a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo e a sua área relativa (isto é, a razão entre a área do triângulo e a área da esfera). O que concluis?

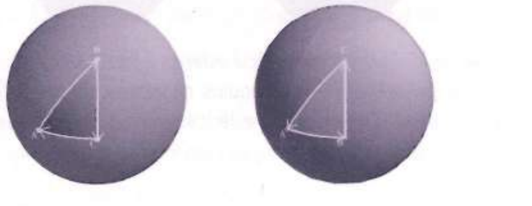
E agora, já sabes qual é a cor do urso? Para saberes mais vai a *www.atractor.pt/mat/GeomEsf*.

Desenvolvimento da tarefa

Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico?

1. O ficheiro *soma_dos_ângulos_de_um_triângulo.cdf* contém uma aplicação interativa com uma esfera de raio unitário com um triângulo esférico assinalado cujos vértices são pontos móveis: *A*, *B* e *C*. O professor pode começar por observar que um lado do triângulo é dado pelo menor arco de círculo máximo definido por dois vértices do triângulo. Clicando na caixa *Círculos máximos* podem-se ver os três círculos máximos que contêm os lados do triângulo.

2. Se se clicar na caixa *Interior do triângulo* e se mover os pontos através dos cursores *A*, *B* e *C* que estão à direita obtêm-se diferentes triângulos esféricos. O professor deve referir que, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, três pontos distintos na superfície esférica e três lados (arcos de círculo máximo), definem dois triângulos diferentes, na medida em que definem duas regiões limitadas complementares na superfície esférica.

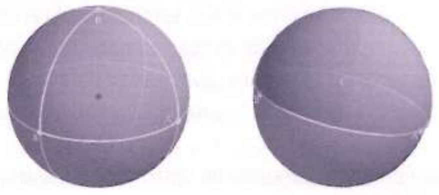


O triângulo [*ABC*] que se está a considerar é o triângulo com interior mais escuro definido da seguinte forma: estabelecendo o caminho orientado de *A* para *B*, de *B* para *C* e de *C* para *A*, consideramos a região que está sempre à direita do caminho.

3. Ao escolher uma posição para *A*, *B* e *C* e clicando na caixa *Amplitude dos ângulos*, o aluno deverá observar que a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo é superior a 180°. O professor deverá salientar o facto deste resultado ser muito diferente do correspondente na Geometria Euclidiana.

4. Considerando diferentes triângulos esféricos, o aluno deverá concluir que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior do que 180°. O professor poderá referir que a diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico e a amplitude do ângulo raso é denominada por *excesso angular*. Em Geometria Euclidiana, o excesso angular de qualquer triângulo é zero e, em Geometria Esférica, é sempre superior a zero.

5. O aluno deverá mover os pontos *A*, *B* e *C* de modo a obter um triângulo esférico com dois ângulos retos, outro triângulo com três ângulos retos e outro triângulo com três ângulos rasos. O professor deverá referir que, no último caso, os pontos são «colineares».



À esquerda: triângulo [*ABC*] com três ângulos retos. À direita: triângulo [*ABC*] com três ângulos rasos cujos vértices são colineares.

6. O aluno deverá variar os pontos *A*, *B* e *C* de modo a considerar triângulos *pequenos* (contidos numa semiesfera) e triângulos *grandes* e observar que a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor entre 180° e 900°.

7. O aluno deverá observar que: quando a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de 180°, a área do triângulo é quase nula ; quando a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de 900°, a área do triângulo é próxima da área da esfera. O professor deverá referir que a área do triângulo é diretamente proporcional ao seu excesso angular: quando o excesso angular é um valor próximo de zero (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de 180°), a área do triângulo é «quase nula»; por outro lado, quando o excesso angular é um valor próximo de 720° (isto é, a soma das amplitudes dos ângulos internos é um valor próximo de 900°), a área do triângulo é próxima da área total da esfera. Como a área de um triângulo esférico depende apenas da soma das amplitudes dos seus ângulos internos, na esfera, todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área; logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

Notas

[1] Polya, George – How to Solve It: a new aspect of mathematical method. With a new foreword by John Conway. United States of America: Expanded Princeton Science Library Edition, 2004.

[2] Para poderes mover o cursor mais lentamente carrega simultaneamente na tecla Alt. Também podes: rodar a esfera – coloca o cursor do rato em cima da esfera, clica e arrasta.

Atractor e Núcleo do Porto da APM

Sequências e Regularidades no 1.º ciclo

Relato de experiências

Gorete Fonseca e Fátima Alexandrino

O presente artigo pretende divulgar experiências resultantes da aplicação de uma tarefa de Matemática, proposta aos docentes do 1.º Ciclo do Agrupamento de Escolas da Lourinhã, pelas formadoras da Oficina de Formação, dinamizada no âmbito da integração no Projecto Mais Sucesso Escolar.

Inicialmente, daremos a conhecer os principais objectivos da tarefa, as competências específicas que se pretendem desenvolver e a forma como esta foi apresentada aos alunos. Numa fase seguinte debruçar-nos-emos um pouco mais sobre o modo como os alunos resolveram as questões, tentando perceber as estratégias que utilizaram. Concluiremos apresentando um balanço reflexivo sobre as experiências vivenciadas e aqui relatadas.

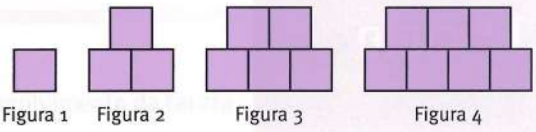
A tarefa[1] enquadrou-se no tema «Sequências e Regularidades»[2], dividida em dois blocos[3], tendo como objectivos principais:

- Investigar regularidades em sequências;
- Explorar sequências segundo uma dada lei de formação;
- Explicar ideias, justificar opiniões e descrever processos utilizados na realização da actividade.

Como objectivo último e unificador pretendeu-se propor tarefas promotoras do desenvolvimento da capacidade de generalização de modo a que os alunos desenvolvessem determinadas competências específicas, tais como:

- Reconhecer regularidades e compreender relações (continuar a representação de uma sequência – termos imediatamente a seguir aos dados);
- Usar a relação entre os termos e a sua ordem na sequência para indicar o termo de uma ordem distante;
- Comunicar, oralmente e por escrito, as estratégias utilizadas, usando a linguagem natural e simbólica (generalização).

Partindo da consciencialização de que antes de criarem representações pictóricas e padrões ao nível simbólico, as crianças devem manipular objectos variados com os quais possam construir padrões, foram apresentados e postos à disposição dos alunos, vários materiais manipuláveis, estruturados ou não, tais como azulejos, pedaços de cartão, pacotes de leite, tubos de encaixe, material cuisenaire, entre outros, de modo a facilitar a visualização e execução da tarefa.



1) Continuar a sequência desenhando as figuras 5 e 6.

2) Indicar os blocos utilizados para construir cada uma das figuras, usando uma tabela.

Número da figura	Número de peças
1	
2	
3	
4	

3) Descobrir, sem recurso ao desenho, os blocos da figura 20 da sequência. Explicar como pensou.

Figura 1. Tarefa de matemática: bloco I.

Aprendizagens realizadas

Depois de apresentada a tarefa os alunos trabalharam a pares ou em pequenos grupos de modo a permitir a troca de impressões entre si, esclarecimento de dúvidas e partilha de informações procurando promover-se momentos de trabalho cooperativo.

Tal como referido anteriormente, a tarefa foi dividida em dois blocos: Bloco I dirigido a alunos do segundo ano de escolaridade e Bloco II a alunos do terceiro e quarto anos.

Do Bloco I faziam parte as questões ilustradas na figura 1.

Efectuando uma análise às aprendizagens realizadas pelos alunos verificámos, quanto à primeira questão (*Continua a sequência desenhando as figuras* 5 *e* 6), que praticamente a totalidade percebeu a regularidade desenhando correctamente os termos 5 e 6 da sequência. Os que tiveram mais dificuldade socorreram-se do material de apoio, como supramencionado. Observou-se que a manipulação deste material contribuiu efetivamente para que os alunos com mais dificuldades se apercebessem dos «erros» cometidos durante a representação gráfica das figuras levando-os a corrigi-las. Nestes casos tiveram particular «sucesso» o uso dos cartões recortados particularmente para esta tarefa bem como a utilização/manuseamento dos pacotes de leite escolar uma vez que contribuíram para uma melhor perceção da disposição das diferentes figuras da tarefa (figuras 2 e 3)

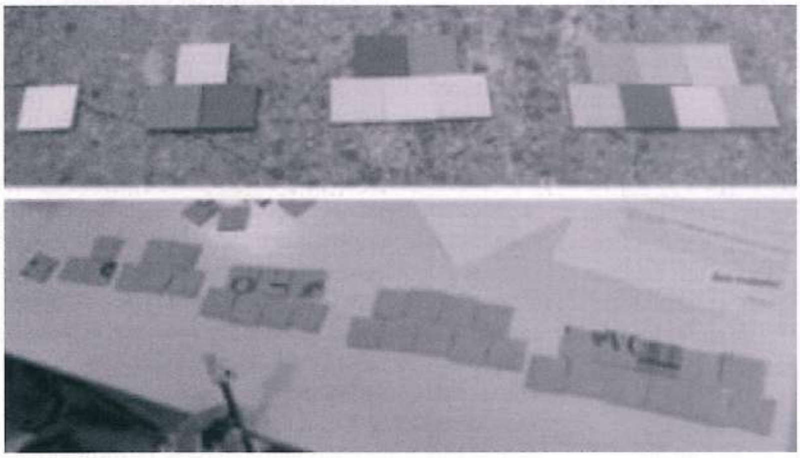
Como estratégia de resolução, alguns alunos pintaram os blocos «extra» e aplicaram a mesma regra às figuras seguintes. Ou seja, compararam os termos consecutivos e identificaram a alteração. Digamos que usaram uma estratégia aditiva recorrendo ao raciocínio recursivo. O uso das cores é elucidativo desta estratégia, tal como se apresenta na figura 4.

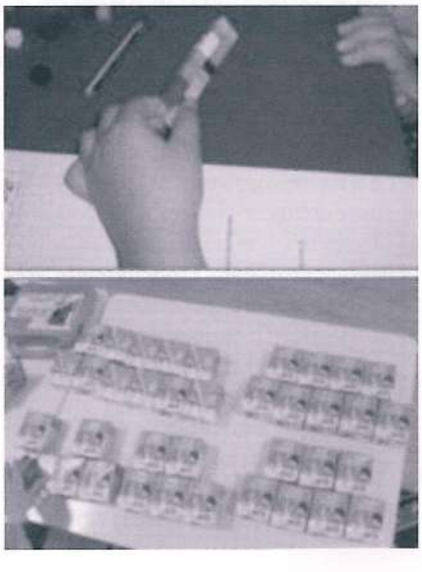
Nas resoluções não é evidente uma generalização, pelo que foi importante questionar os alunos sobre o processo usado para representar os termos da sequência. Relativamente à reprodução pictórica verificaram-se algumas incorreções na representação espacial dos blocos. Mais uma vez o material de apoio contribuiu para superar essa dificuldade.

Na resolução da questão número dois (Indica os blocos utilizados para construir cada uma das figuras, usando a tabela), todos os alunos conseguiram preencher a tabela. No entanto, apesar de alguns terem ainda sentido a necessidade de recorrer à contagem dos blocos, outros (poucos) conseguiram descobrir que existia uma sequência numérica de 2 em 2, começando a revelar alguma capacidade em usar a relação entre os termos e a sua ordem na sequência para indicar o termo de uma ordem distante.

A última questão (*Descobre, sem recurso ao desenho, os blocos da figura 20 da sequência. Explica como pensaste.*) tornou-se difícil de resolver para a maioria dos alunos. No entanto, apresentaram diversas estratégias de resolução:

a) Uns continuaram a tabela tendo sentido a necessidade de contar todos os termos da sequência até ao termo solicitado (estratégia de contagem), tal como se pode observar pela análise da figura 5;





Figuras 2 e 3. Material utilizado (azulejos, cartões, tubos de encaixe, pacotes de leite ...)

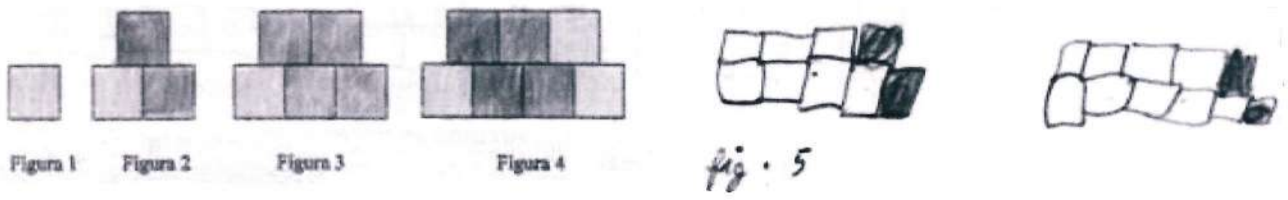


Figura 4. Exemplo de uma representação das figuras 5 e 6.

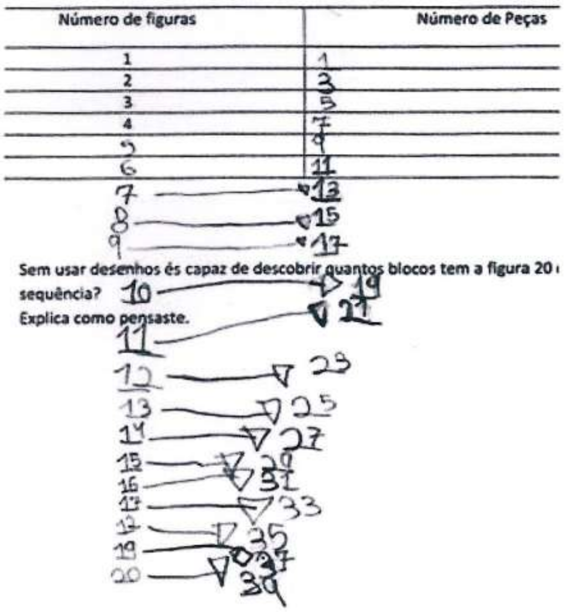


Figura 5. Exemplo de uma «descoberta» do número de blocos da figura 20.

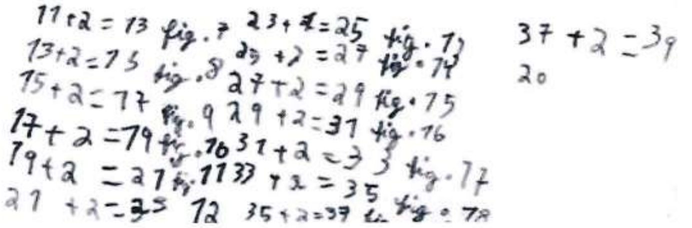


Figura 6. Utilização da estratégia aditiva na descoberta do número de blocos da figura 20.

b) Outros usaram a adição (o número de blocos da figura anterior mais 2 – estratégia aditiva) e continuaram a sequência (ver figura 6);

c) Um grupo mais reduzido «descobriu» que o número da figura era o mesmo que a quantidade de blocos da base e que o número de blocos «em cima» era sempre menos um do que «em baixo». Apesar de evidenciarem alguma capacidade de generalização, tiveram dificuldades em expressar como chegaram à «sua descoberta».

Só após a exploração coletiva foi possível chegarem às seguintes conclusões:

- De uma figura para a seguinte, em baixo, aumenta um bloco e em cima fica sempre menos 1 que em baixo;
- O número da figura tem o número de blocos da base.

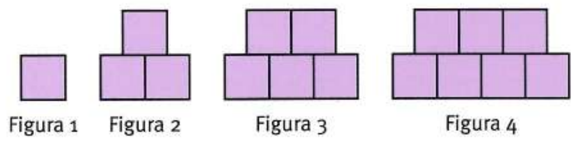
Após estas conclusões chegaram facilmente à seguinte generalização: «— *Então a figura 20 vai ter 20 blocos em baixo e 19 em cima. Então 20 mais 19 igual a 39.*»

A partir daqui um grupo significativo de alunos conseguiu identificar corretamente o número de blocos de uma qualquer figura aplicando corretamente a «expressão de generalização» a que tinham chegado.

Relativamente à exploração coletiva, a experiência mostrou-nos tratar-se de um momento muito importante, se não mesmo crucial. É no trabalho em grande grupo/turma que a partilha e a discussão sobre as dificuldades sentidas e as soluções encontradas são potenciadas. Simultaneamente permite sistematizar e institucionalizar o conhecimento. Esta exploração exige do docente uma constante interação e uma consciência muito clara i) do que se pretende que os alunos aprendam e ii) do que está em causa em cada situação; pelo que o papel do professor é essencial.

Porém, não é fácil ajudar os alunos a progredirem sem lhes dar imediatamente a solução ou o caminho para ela. Devolver as interrogações aos alunos forçando-os a reflectirem sobre a procura da solução é tarefa árdua.

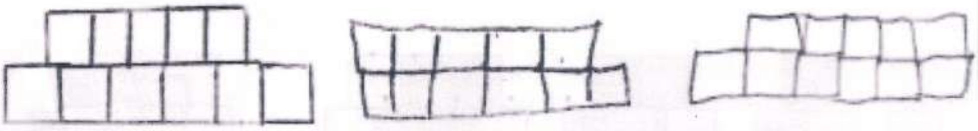
O Bloco II solicitava aos alunos o seguinte conjunto de questões descrito na figura 7.



1) Desenha a figura 6.
2) Escreve como se pode saber o número de blocos das figuras 8 e 10 sem utilizar desenhos.
3) Existe alguma figura com 41 blocos? E com 48? Justifica a resposta.
4) Escreve uma frase em que relaciones o número de blocos com o número da figura na sequência.

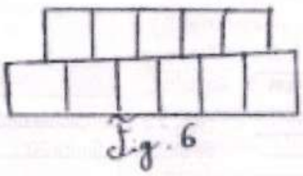
Figura 7. Tarefa de matemática: bloco II.

Figura 8. Exemplos de algumas representações da figura 6.



Início correcto, mas não consegue concluir bem

Arruma as peças alinhadas a um dos lados



Realiza correctamente

A figura 8 tem oito blocos em baixo e sete em cima

E a figura 10 tem dez blocos em baixo e nove em cima.

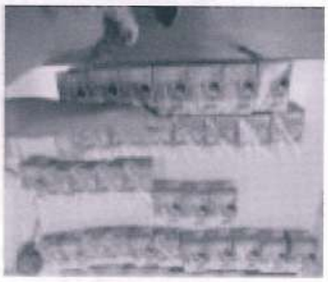


Figura 9. Exemplo da resposta dada à questão dois.

Trata-se de questões mais exigentes e com um apelo mais claro à abstração e à generalização, envolvendo uma progressão.

No que diz respeito à primeira pergunta (*Desenha a figura* 6), apesar de todos terem conseguido continuar a sequência alguns apresentaram-na, inicialmente, com algumas incorreções na representação espacial, tal como evidenciam as respostas dadas na figura 8.

Um pequeno grupo recorreu à utilização da régua para dar resposta à questão. No entanto, muitos deles reconheceram que o uso desta só complicava a realização da tarefa, tendo posteriormente abdicado dela.

No sentido de encontrarem as respostas para a segunda questão (*Escreve como se pode obter o número de blocos das figuras 8 e 10 sem utilizar desenhos*), praticamente a totalidade dos alunos reconheceu a existência de uma adição de 2 blocos de uma figura para a seguinte e que a «barra» de baixo tem mais uma do que a de cima. Esta observação revelou já alguma capacidade de relacionar elementos. Contudo, as respostas dadas indiciam que recorreram maioritariamente às mesmas duas estratégias anteriormente referidas pelos alunos do segundo ano de escolaridade, nomeadamente:

a) Alguns recorreram inicialmente à utilização de material manipulável para conseguirem visualizar na prática (ver figura 9) e, posteriormente, resolver a situação;
b) A grande maioria recorreu à estratégia aditiva utilizando uma operação (figura 10).

Na questão três (*Existe alguma figura com 41 blocos? E com 48? Justifica a tua resposta*), alguns alunos manifestaram dificuldades e perguntaram se poderiam usar os quadrados (material manipulável) ou se poderiam desenhar. Rapidamente se aperceberam que era complicado usar tantos quadrados e começaram a procurar outras estratégias de modo a resolver a situação. Um grupo de alunos recorreu à listagem da sequência, como se pode observar na figura 11.

Pela análise das várias respostas que deram, verificou-se que um grupo significativo de alunos conseguiu expressar alguma capacidade de generalização, descobrindo a relação existente e justificando como se vê na figura 12.

Relativamente à última pergunta (*Escreve uma frase em que relaciones o número de blocos com o número da figura na sequência*), houve alguma dificuldade, por parte de um grupo de alunos, em perceber o que se pretendia com a questão e, apesar da grande maioria não ter conseguido chegar à «frase chave», estiveram muito perto de o conseguir. Uma das razões mais apontadas pelos vários docentes foi a dificuldade em comunicar/expressar o seu pensamento de uma forma mais esclarecedora, tal como se pode inferir pelas respostas, como a que transcrevemos «Eu percebi que o n.º da figura é o número de blocos na fila de baixo e a fila de cima é sempre menos 1 do que a fila de baixo.»

Posteriormente, tal como se verificou no Bloco I aplicado aos alunos do 2.º ano, a discussão e exploração em grande grupo ajudou a sistematizar e institucionalizar conhecimentos bem como a encontrar expressões para a generalização. Expressões que evidenciaram também o uso de estratégias multiplicativas e que permitiram encontrarem as soluções para qualquer figura, numa linguagem «a meio caminho» entre a natural e a simbólica: «É duas vezes o número da figura menos 1» ou «Dobro do número da figura menos 1».

A figura 8 é de 15 cubos.
E a figura 10 é de 19 cubos.
Só chegamos ao 19 contando 15 + 4. **(saltaram uma figura: 2+2=4)**

A figura 8 tem 8 peças em baixo e em cima 7 peças. (8+7=15).
A figura 10 tem 10 peças em baixo e 9 em cima. (10+9=19).

Figura 10. Exemplos de respostas dadas à questão dois.

15 - 17 - 19 - 21 - 23 - 25 - 27 - 29 - 31 - 33 - 35 - 37 - 39 - 41 - 43 - 45 - 47 - 49
~~48~~

Existe figuras com 41. Mas não existe com 48.

Figura 11. Exemplo de resposta à questão dois.

O número 41 existe porque é ímpar.
O número 48 não existe porque é par.
As figuras representadas são de 2 em 2 a contar do 1 e por isso é ímpar

Figura 12. Exemplos de justificações dadas à questão três.

Balanço

De acordo com os vários docentes, os alunos revelaram bastante interesse, motivação, curiosidade e empenho durante as várias etapas de concretização da tarefa. Na sua maioria, manifestaram algumas dificuldades em generalizar fazendo o uso apropriado da linguagem natural e simbólica. Evidenciaram claramente a necessidade e a importância de existir uma continuidade na exploração de tarefas desta natureza uma vez que estas contribuem, concomitantemente, para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática.

Um dos aspectos importantes neste tipo de tarefas diz respeito ao factor «tempo». De acordo com os docentes, é fundamental que se tenha em atenção o tempo disponibilizado para a realização de qualquer tarefa (é necessário algum tempo para os alunos desenvolverem a tarefa) mas quando em «excesso» pode contribuir para a desmotivação e/ou frustração do aluno. Assume particular importância o facto de cada professor ir colocando questões pertinentes para que os alunos com dificuldades possam direcionar o seu raciocínio, permitindo igualmente que estes possam avançar nos seus conhecimentos.

A colocação de questões mobilizadoras do raciocínio que permitam desmontar processos, complementar ideias e provar afirmações são importantes na promoção da capacidade de generalização. Trata-se de um percurso demorado e exigente. É necessário dar tempo aos alunos para pensarem nas suas estratégias, incentivar a justificação com recurso à escrita e proporcionar espaços de discussão coletiva de ideias. A análise de sequências permite aos alunos progredirem de raciocínios recursivos para raciocínios que envolvem relações funcionais.

A opinião geral relativamente à aplicação deste tipo de tarefas em alunos do 1.º ciclo é unânime e bastante positiva uma vez que prepara os alunos para aprendizagens posteriores, potencia o desenvolvimento de capacidades transversais e promove a articulação de diversos saberes, bases essenciais para o desenvolvimento da capacidade de generalização.

Concluímos citando os autores Mason & Johnston-Wilder (2004) os quais referem que «uma aula que não dê oportunidade de generalizar não é uma aula de Matemática.» (p. 137)[4] Porquê? Porque os alunos devem ser questionados para que expliquem o seu raciocínio demonstrando a forma como chegaram àquele resultado. E quando isso acontece contribui-se, efectivamente, para que os alunos consigam desenvolver todas as capacidades: de abstracção, de comunicação e de raciocínio matemático.

Notas

(1) Retirada de GTI (2010). *O professor e o programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: APM.

(2) A exploração de situações relacionadas com este tema, não sendo uma inovação no 1.º Ciclo, ganhou maior expressividade no Novo Programa de Matemática, constituindo um objectivo específico referenciado explicitamente, desde logo para os 1.º e 2.º anos de escolaridade.

(3) O Bloco I dirigido a alunos do 2.º ano de escolaridade e o Bloco II para os alunos dos 3.º e 4.º anos.

(4) Mason & Johnston-Wilder (2004). *Fundamental Constructs in Mathematical Education*.

Gorete Fonseca
Fátima Alexandrino
Agrupamento de Escolas da Lourinhã — 1.º Ciclo do Ensino Básico

Rebuscando no sótão

Já vos aconteceu ir à procura de uma coisa (*rebuscar*) e aparecer outra? Pois essa outra coisa (Lei do paralelogramo), por ser antiga (*fez-me lembrar o sótão*), despertou-me (*tinha acabado de completar o Curso de Teaching Geometry with The Geometer's Sketchpad (GSP versão 5)*) o desafio de apresentar uma demonstração geométrica/algébrica. Como para demonstrar há que reconhecer o objeto, assim surge o enunciado:

A lei do paralelogramo

A soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais do mesmo.

Hipótese: Dadas as áreas dos quadrados dos lados (A_1 e A_2) de um paralelogramo bem assim como as áreas dos quadrados cujos lados são as diagonais do paralelogramo (A_3 e A_4)

Tese: Provar que $2(A_1 + A_2) = A_3 + A_4$

Nota: Atende-se que $D^2 = A_3$ e $d^2 = A_4$ e que $a^2 = A_1$ e $b^2 = A_2$

Geometricamente:

As Figuras 1,2 e 3 são o que chamo de pré-requisitos.

São construções de quadrados (8), com compasso, duas perpendiculares, uma paralela e uma intersecção.

Como poderão verificar, (*sketch* dinâmico feito em GSP 5 e apresentado no *you tube* (original)), na demonstração não aparece o quadrado da diagonal maior (D^2) do paralelogramo, mas sim a sua decomposição (pitagórica) ($(a+c)^2 + h^2$) (figura 1); o mesmo se passa com o quadrado da diagonal menor (d^2) que será substituído por ($(a-c)^2 + h^2$) (figura 3).

Na Figura 2 construíram-se quadrados dos lados maior (lado a) e menor (lado b) do paralelogramo.

As Figuras 4,5 e 6 representam a decomposição de $(a+c)^2$ em fases sucessivas.

Na Figura 4, decomposição de $(a+c)^2$ em a^2 e numa peça em L.

Na Figura 5, decomposição de a^2 em $(a-c)^2$ e outra peça em L.

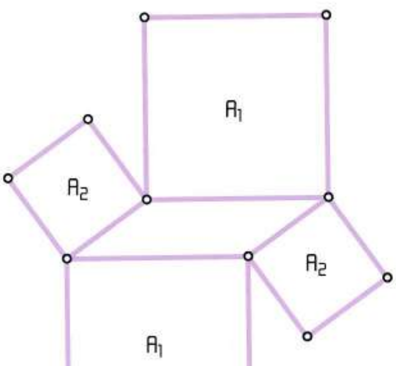
Na Figura 6, utilizando peças anteriores e/ou arcos de circunferência perpendiculares e interseções ficou assim decomposto o quadrado de lado a +c em quatro retângulos, em dois quadrados de lado a-c e dois quadrados de lado c.

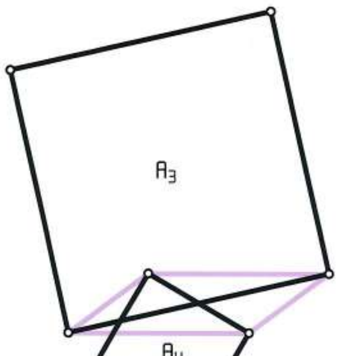
Na figura 6, $(a-c)^2 + R_1 + R_2 = a^2$ e $(a-c)^2 + R'_1 + R'_2 = a^2$.

A Figura 7 mostra a decomposição do quadrado do lado menor do paralelogramo em $h^2 + c^2$, pelo que os quadrados que sobram na figura 6 correspondem à decomposição dos dois quadrados do lado menor do paralelogramo.

Pronto está aqui tudo o que é preciso para demonstrar esta Lei. Agora é só «juntá-las» e dar-lhes movimento. Veja-o em

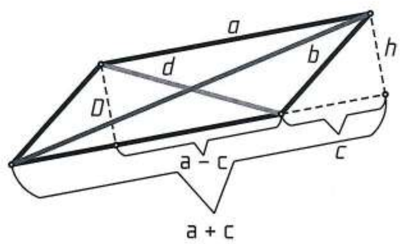
http://www.youtube.com/watch?v=wSTxWJboOPw





$2(A_1 + A_2) = A_3 + A_4$

Demonstração:



$$
\begin{aligned}
A_{(\text{soma dos quadrados das diagonais})} &= D^2+d^2 \\
&= (a+c)^2 + h^2 + (a-c)^2 + h^2 \\
&= a^2 + 2ac + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 + 2h^2 \\
\text{Como } h^2 = b^2 - c^2, \quad &= 2a^2 + 2c^2 + 2(b^2 - c^2) \\
&= 2a^2 + 2c^2 + 2b^2 - 2c^2 \\
&= 2(a^2 + b^2) \\
&= A_{(\text{soma dos quadrados dos lados do paralelogramo})}
\end{aligned}
$$

Algebricamente provado

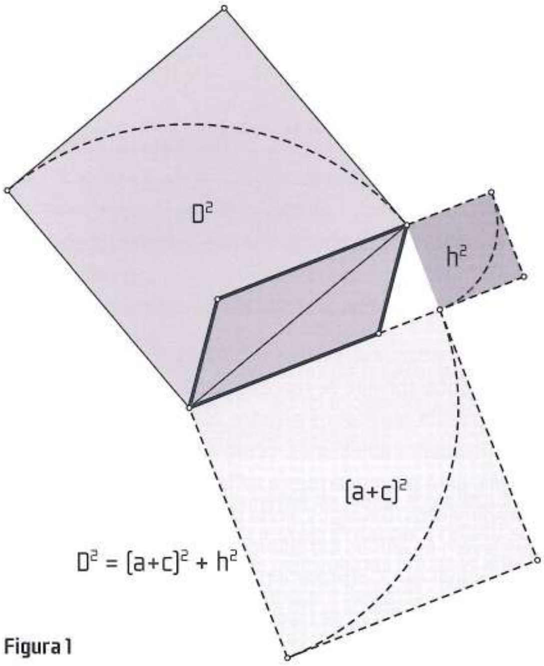


Figura 1

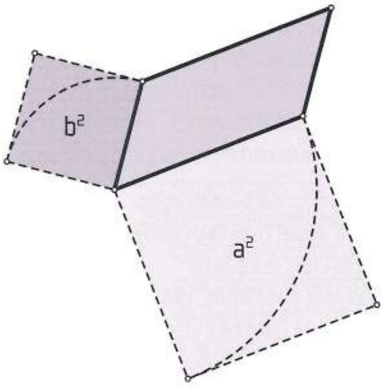


Figura 2

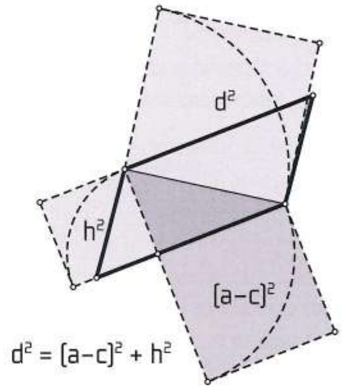


Figura 3

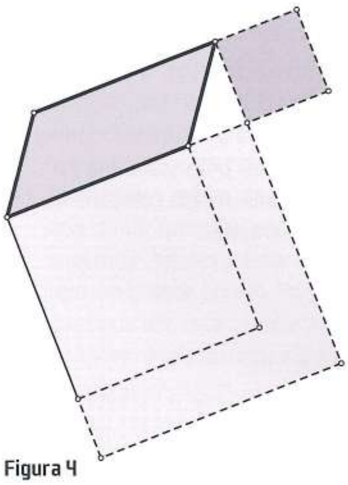


Figura 4

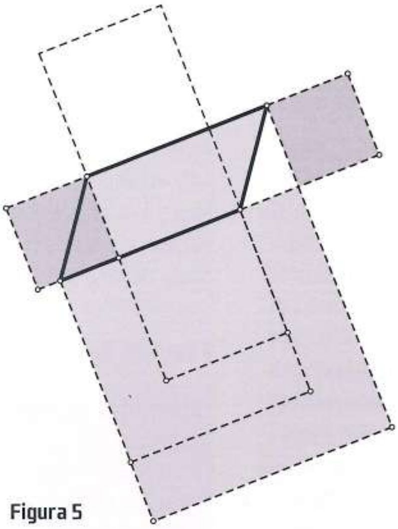


Figura 5

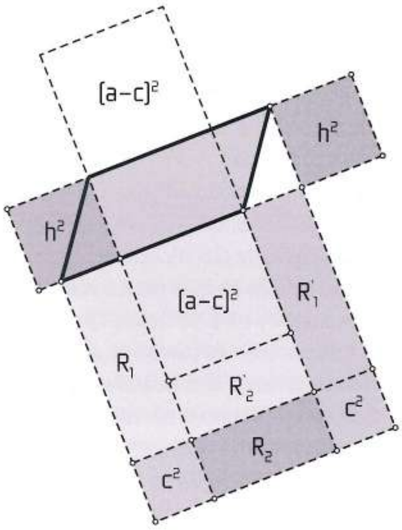


Figura 6

Decomposição do lado menor do paralelogramo

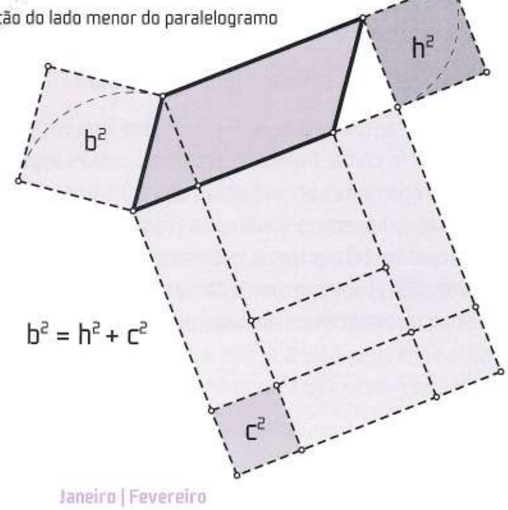


Figura 7

Geometricamente provado

Querendo ver a prova geométrica em movimento indico *youtube* (jotapecaldas) ou http://www.youtube.com/watch?v=J-VcEScj4xo, onde faço uma apresentação na horizontal, para mim mais elucidativa porque apresenta «o todo».

João de Jesus Pereira
jjesusp@gmail.com

Um plano de aula

Lígia Carvalho, Sílvia Semana[1]

Enquanto professores, cabe-nos fazer algum tipo de planificação das nossas aulas, não só a típica planificação anual mas também um plano para cada aula. Este plano pode resumir-se a uma representação mental dos tópicos ou ideias que queremos levar para a sala de aula, ser partilhado informalmente com os colegas nos corredores da escola ou na sala dos professores ou assumir um registo escrito mais ou menos formal, com mais ou menos detalhe. Nos últimos anos, a avaliação do desempenho docente colocou enfoque nesta dimensão da planificação a curto prazo, trazendo para muitas das nossas escolas a preocupação de elaborar um plano de aula formal e pré-formatado, a ser entregue ao professor avaliador por cada aula observada.

Será que a elaboração de um plano de aula «eficaz» tem que ser necessariamente um processo difícil e moroso? Como podemos organizar e sistematizar as representações mentais que temos para cada aula?

Encontrámos no texto «Planning Lessons» (Chapin, O'Connor & Anderson, 2003, pp. 131–147) um suporte para a reflexão em torno do processo de planificação e orientações para a elaboração de um plano de aula ao qual reconhecemos potencialidades. As propostas e outras considerações apresentadas pretendem orientar a elaboração de planos de aulas de modo a tirar o máximo proveito da discussão em sala de aula para a aprendizagem da Matemática. Tais considerações vão, por isso, ao encontro das atuais orientações curriculares, nomeadamente o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007). De seguida, apresentamos uma interpretação pessoal deste texto, destacando as ideias que consideramos mais significativas por cada seção: (i) Como podemos estruturar um plano de aula; (ii) Improvisar e responder durante a aula; (iii) Sintetizar e consolidar.

Como podemos estruturar um plano de aula

Quando planificamos uma aula, há múltiplos aspetos que devemos ter em conta. Podemos estruturar estes aspetos em cinco componentes principais: (i) identificar os objetivos matemáticos; (ii) prever dificuldades; (iii) preparar questões; (iv) gerir a discussão; (v) planear a implementação (Chapin, O'Connor & Anderson, 2003). É importante começar por identificar a matemática que queremos destacar na aula, como por exemplo: conceitos; procedimentos; estratégias de resolução de problemas; raciocínio matemático; formas de representação. De seguida, é igualmente importante registar os aspetos matemáticos que podem gerar dificuldades aos alunos, como noções incorretas ou erros comuns, para promovermos a reflexão sobre essas ideias ou procedimentos. Devemos ainda preparar questões para discussão que levem os alunos a evidenciar a sua compreensão e os encorajem a analisar, sintetizar e tirar conclusões. Pode ser proveitoso antecipar algumas respostas dos alunos para que possamos estar preparados com questões adicionais ou contraexemplos. Finalmente, devemos descrever a sequência e o conteúdo das atividades que iremos usar. A realização deste plano vai ajudar-nos a dirigir a aula para a matemática que queremos que os alunos aprendam, de modo a que os objetivos sejam atingidos.

Para melhor explicitar que aspetos contemplar em cada componente do plano de aula vamos ver um exemplo. O plano de aula apresentado a seguir[2] corresponde à primeira aula formal sobre a noção de *área* e foi elaborado pela professora Ana para os seus alunos do 2.º ano de escolaridade. A cada componente do plano de aula seguem-se alguns comentários.

Exemplo de um plano de aula

Identificar os objetivos matemáticos

- Os alunos irão aprender que a superfície de um objeto pode ser revestida sem buracos ou intervalos. Isto denomina-se por área da superfície.
- Os alunos irão descobrir que uns objetos cobrem uma superfície de modo mais completo do que outros (por exemplo, ladrilhos quadrados em vez de discos circulares).
- Os alunos irão aprender que para medir a área podem contar o número de unidades quadradas que revestem a superfície.
- Vocabulário: *área, revestir, superfície, unidade quadrada.*

Nesta primeira componente do plano, a professora identificou os objetivos matemáticos, nomeadamente conceitos e vocabulário, que pretendia desenvolver na aula.

Prever Dificuldades

- Os alunos podem não perceber que uma superfície pode ser completamente revestida – podem deixar buracos nas superfícies, revestir apenas as margens, ou sobrepor ladrilhos.
- Os alunos podem não compreender o significado do vocabulário.
- Os alunos devem ser capazes de revestir objetos com unidades mas podem não relacionar esta ação com a ideia de determinar a área de um objeto.

Para elaborar esta componente do plano, a professora apoiou-se em alguns recursos: usou a experiência para refletir sobre as dificuldades demonstradas pelos alunos em anos anteriores e consultou o manual do professor e livros de referência para obter informação sobre possíveis dificuldades ou conceções erradas dos alunos neste tópico.

Preparar questões

- O que significa a palavra *superfície*? Podes mostrar-me?
- O que significa revestir alguma coisa? Todas as superfícies podem ser revestidas com ladrilhos? Porquê ou por que não?
- Que objetos revestem completamente a superfície? E que objetos não o fazem? O que podes dizer das formas dos objetos que revestem completamente a superfície?
- Se os alunos não estão a revestir toda a superfície, revestindo apenas as margens, ou deixando buracos na superfície, devem colocar-se as questões: Esta superfície tem um grande buraco. Porque é que pensas que eu iria dizer que não está completamente revestida? Quando revestes uma superfície com lápis de cera e deixas um buraco, porque é que eu iria dizer que não está bem?
- E se eu usasse ladrilhos retangulares e ladrilhos na forma de ursinhos de peluche para revestir a superfície da capa do livro de matemática? Que forma revestiria completamente a superfície? Explica o teu raciocínio.

A professora escreveu questões no sentido de: (i) obter informação sobre o conhecimento dos alunos, conceções erradas ou dificuldades sobre a matemática em causa; (ii) provocar conflitos cognitivos nos alunos, levando-os a reconsiderar quaisquer respostas incorretas ou noções pré-concebidas; (iii) levar os alunos a relacionar conhecimentos de diferentes áreas, fazer conjeturas ou tirar conclusões.

Gerir a discussão

Organização dos alunos:

- A discussão começa por envolver toda a turma, em grande grupo.
- Experimentar discussão a pares no início da aula e solicitar aos alunos que reflitam sobre o que significa cobrir uma superfície.

Estratégias para apoiar o pensamento matemático:

- Colocar a mesma questão a três ou quatro alunos de modo a que todos tenham tempo para refletir sobre o que está a ser dito e também para que os alunos pratiquem a apresentação a toda a turma.

Nesta componente, a professora registou as suas opções relativamente à organização dos alunos. Com a discussão em pares, pretendia que todos os alunos partilhassem a sua interpretação do significado de *superfície* e, com a discussão em grupo-turma, que registassem conclusões partilhadas por todos. A professora registou também a intenção de colocar a mesma questão a mais do que um aluno para que os alunos tivessem mais tempo para processarem as ideias-chave e se habituassem a expor as suas ideias.

Planear a implementação

Introdução

Introduzir a tarefa de revestir a superfície da capa do livro de matemática dos alunos com ladrilhos quadrados, discos circulares e clipes grandes. Os alunos irão trabalhar em pares. Cada par deverá escrever num *post-it* o número de unidades de cada tipo que usaram para revestir a capa do livro de matemática. De seguida irão colocar os post-its no quadro, na coluna correspondente – ladrilhos quadrados, discos ou clipes.

Discutir em pares o que quero dizer com «revestir a superfície da capa do livro de matemática». Antes de usar os objetos para revestir a capa do livro, estimar, em pares, o número de unidades de cada tipo que serão necessárias. Dinamizar uma breve discussão em grupo-turma para que os pares possam partilhar as suas respostas às duas questões colocadas.

Exploração

Os pares irão agora fazer as medições, as contagens e os registos. Irei circular pelos pares, ouvir os comentários dos alunos e colocar questões clarificadoras quando necessário (especialmente quando notar algumas das confusões que antecipei, como por exemplo considerarem buracos no revestimento). Irei introduzir o termo *área* a pequenos grupos de alunos que estejam preparados para discutirem os seus resultados.

Discussão em grupo-turma
Durante a discussão quero atingir dois objetivos. Primeiro, quero que muitos pares partilhem o que descobriram relativamente ao revestimento da capa do livro com diferentes objetos. Em particular, quero ajudar os alunos a compreenderem a diferença entre revestir uma superfície com ladrilhos quadrados, com círculos ou com clipes. O objetivo é que os alunos sejam capazes de concluir que alguns objetos permitem revestir uma superfície sem buracos ou intervalos ou sobreposições mas outros objetos não permitem revestir completamente uma superfície. Quero também introduzir o termo *área* a toda a turma e levá-los a relacionar esta palavra com a ideia de revestimento de uma superfície.

Para elaborar esta secção do plano, a professora baseou-se em algumas sugestões apresentadas no manual do professor. Dado que a participação numa discussão matemática é relativamente nova para estes alunos, a partilha das suas descobertas foi especialmente valorizada pela professora, ao encorajar a contribuição de muitos pares.

Improvisar e responder durante a aula

As aulas que planificamos nem sempre se concretizam exatamente em prática. Frequentemente, temos que rever, modificar ou improvisar os nossos planos de aula, porque os alunos sabem mais, ou menos, do que esperávamos. As aulas, e principalmente as discussões, podem levar-nos por caminhos que nós não tínhamos previsto e nem sempre é claro se devemos ou não prosseguir com o inesperado. Para tomarmos este tipo de decisões, poderá ser bom pensarmos sobre a matemática em questão e sobre se é importante que os alunos a saibam. Em geral, devemos procurar promover discussões sobre ideias que os alunos não compreendem. No entanto, nem sempre é claro o que os alunos compreendem e não compreendem. Não há um mapa do caminho a seguir no que se refere a quando improvisar um plano de aula ou não, e certamente não há uma direção certa para uma discussão. Cada caso é um caso!

Sintetizar e consolidar

Muitas discussões incluem contribuições inarticuladas, não relacionadas, ou com propósitos pouco claros. É, por isso, necessário distinguir os comentários válidos e mais significativos entre tudo o que foi dito durante a discussão, consolidando o que foi discutido na aula e sintetizando os pontos-chave. Essa síntese pode acontecer no meio ou no fim da aula, no início da aula seguinte ou, quando a realização e discussão de uma tarefa leva várias aulas, só no fim desse trabalho. A síntese não tem que consumir uma grande quantidade de tempo, mas é importante que seja incluída, pois é através dela que as conclusões são enunciadas e a partilha de significados entre os alunos é desenvolvida.

Assim como existe a necessidade de ajudar os alunos a resumir a informação importante adquirida a partir das discussões em sala de aula, também é importante para nós, professores, sintetizar as questões e os comentários que tecemos e as decisões que tomamos nas nossas aulas. Podemos fazê-lo refletindo sobre a aula e tomando notas, para que possamos aperfeiçoar as nossas aulas de ano para ano. Assim, quando fazemos alterações numa aula planificada (seja por causa de uma questão que surgiu ou porque faltou tempo), é importante revermos o plano original e adicionarmos notas.

A planificação de aulas com discussão segue um ciclo semelhante à planificação de aulas em geral. Primeiro, nós, professores, devemos planear com antecedência e projetar o que vai acontecer, analisando a matemática que queremos abordar na aula, antecipando dificuldades, e depois formulando perguntas que ajudem à clarificação ou gerem mais confusão. Em segundo lugar, devemos estar dispostos a adaptar partes ou a totalidade do nosso plano de aulas para dar resposta àquilo que os alunos sabem e não sabem. Podemos ter que improvisar, avançar mais lentamente ou reorganizar. Finalmente, é importante contemplarmos momentos de síntese, tanto de pequenos pontos como de conclusões importantes. As sínteses devem ajudar não só os nossos alunos, como a nós próprios numa perspetiva de aperfeiçoarmos o nosso plano.

Notas

1 Membros do grupo de estudos do GTI.
2 O conteúdo das componentes do plano de aula apresentado é uma tradução integral do plano original (Chapin *et al.*, 2003, pp. 134-136).

Referências

Chapin, S., O'Connor, C., & Anderson, N. (2003). *Classroom discussions – Using math talk to help students learn.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H. *et al.* (2007). *Programa de matemática do ensino básico:* Ministério da Educação.

Lígia Carvalho
Sílvia Semana

Construção de polígonos regulares com régua (não graduada) e compasso:

Um problema com séculos de história

Ricardo Ferreira

Os polígonos regulares destacam-se pelas inúmeras simetrias que apresentam. Por exemplo, na Grécia Antiga, o pentágono regular assumia uma grande importância para os pitagóricos, visto que o pentagrama regular era o símbolo da confraria pitagórica. A construção de polígonos é algo que é ensinado nas disciplinas de matemática e de educação visual, mas muitas vezes, passa ao lado a sua riqueza histórica, por ser algo desconhecido por muitos. Este artigo faz referência à história da construção de polígonos regulares com régua e compasso, um problema que demorou séculos a ser resolvido.

1. Síntese histórica sobre as construções geométricas com régua e compasso

Uma construção geométrica com régua (não graduada) e compasso é todo o desenho geométrico que pode ser construído usando apenas uma régua não graduada e um compasso.

Tanto quanto se sabe, as construções geométricas com régua e compasso tiveram origem na Grécia Antiga, por volta do século V A.C.. A reta e a circunferência eram consideradas as curvas perfeitas, daí que régua e compasso fossem os instrumentos ideais para as traçar. Desde cedo, os gregos se depararam

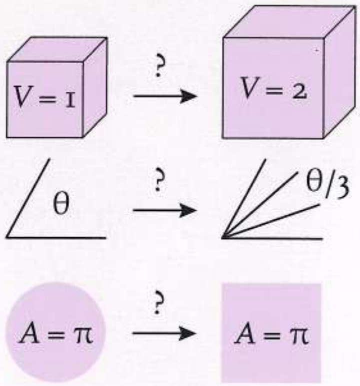


Figura 1

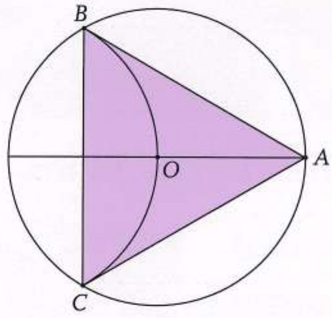


Figura 2

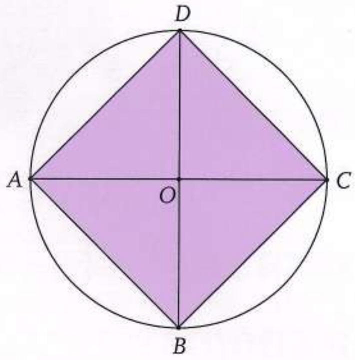


Figura 3

com a dificuldade de fazer algumas construções com régua e compasso tais como (figura 1):

- Duplicação do cubo
- Trisseção do ângulo
- Quadratura do círculo

Estes são chamados de problemas clássicos da matemática grega, tendo sido alvos de estudo por mais de 2000 anos. Apenas no século XIX, com o desenvolvimento da matemática se provou que eram impossíveis.

Os gregos ao tentarem arranjar construções para os polígonos regulares, aperceberam-se que havia problemas na construção de certos polígonos. A resposta ao problema surge quase 20 séculos depois de sua origem.

2. Polígonos regulares

Um *polígono* diz-se regular se todos os seus lados forem iguais entre si e os ângulos internos também. Um *polígono* regular diz-se inscrito numa circunferência quando todos os seus vértices pertencem a essa circunferência. Neste caso, a circunferência diz-se circunscrita ao polígono e o seu centro chama-se circuncentro do polígono.

Num polígono regular, inscrito numa circunferência, podemos notar que:

- os lados são cordas da circunferência geometricamente iguais.
- a cordas iguais correspondem ângulos ao centro iguais.
- a ângulos ao centro iguais correspondem arcos geometricamente iguais.

Assim, a inscrição de um polígono regular com n lados numa circunferência é equivalente à divisão da circunferência em n partes iguais.

Nos *Elementos*, obra de grande importância na matemática, Euclides apresenta-nos as construções para inscrever numa circunferência polígonos regulares com 3, 4, 5 e 15 lados. Acresce que os gregos, partindo de um polígono com n lados sabiam construir o polígono com $2n$ lados bissetando os ângulos ao centro do polígono com n lados, a este processo chamavam duplicação do número de lados. Assim tinham facilmente a construção de polígonos regulares com 6, 8, 10, 12, 16, 24, 30, ... lados.

Um polígono regular diz-se *construtível* se existir uma construção exata desse polígono que use apenas régua (não graduada) e compasso.

3. Construções de alguns polígonos regulares

Construção de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência (figura 2)

- Desenha-se uma circunferência e traça-se um diâmetro.
- Traça-se um arco com raio igual à metade do diâmetro desenhado e com centro num dos extremos desse diâmetro.
- Marcam-se os pontos B e C, que são os pontos de interseção da circunferência com o arco desenhado anteriormente.

Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo equilátero.

Construção de um quadrado inscrito numa circunferência (figura 3)

- Desenha-se uma circunferência de centro O e traça-se um diâmetro $[AC]$.
- Traça-se um diâmetro perpendicular ao diâmetro desenhado. Seja o segmento $[BD]$ esse diâmetro.

Os pontos A, B, C e D são os vértices de um quadrado.

Nota: Cada ângulo ao centro é reto.

Construção de um pentágono regular inscrito numa circunferência (figura 4)

- Desenha-se uma circunferência de centro O.
- Traçam-se dois diâmetros perpendiculares, $[AB]$ e $[CD]$.
- Determina-se M, o ponto médio do segmento $[OD]$.
- Com centro em M, traça-se um arco de raio $\overline{MA}$ que intersete o diâmetro $[CD]$ no ponto N.
- Com centro em A, traça-se um arco de raio $\overline{AN}$ e determina-se o ponto H.
- O segmento $[AH]$ é o lado do pentágono regular.
- Constrói-se o pentágono regular de vértices A, E, F, G e H.

Construção de um hexágono regular inscrito numa circunferência (figura 5)

- Desenha-se uma circunferência de centro O e traça-se um diâmetro $[AB]$.

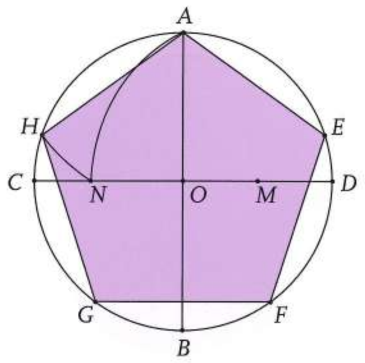


Figura 4

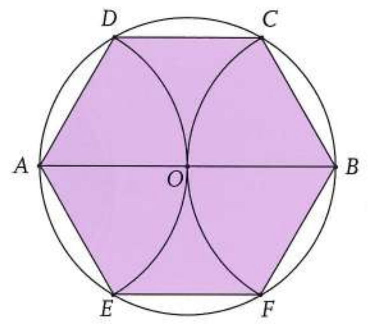


Figura 5

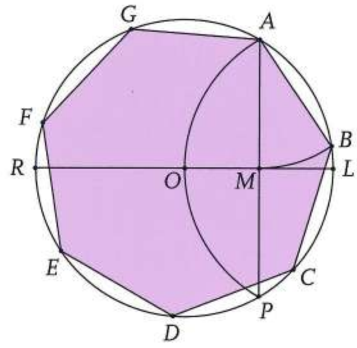


Figura 6

- Com centro em A, traça-se o arco DE que passe por O.
- Com centro em B, traça-se o arco CF que passe por O.

Os pontos A, B, C, D, E e F são os vértices de um hexágono regular.

Construção de um heptágono inscrito numa circunferência (figura 6)

- Desenha-se uma circunferência de centro O e traça-se um diâmetro $[RL]$.
- Traça-se um arco com centro em L, que passe por O e marcam-se os pontos A e P.
- Une-se os pontos A e P e marca-se M, o ponto médio do segmento $[OL]$.
- Com centro em A traça-se um arco de raio $\overline{AM}$ e marca-se o ponto B, interseção do arco desenhado com a circunferência.
- Tomando como medida o arco AB, utilizando o compasso determina-se os pontos C, D, E, F, G.

Os pontos A, B, C, D, E, F e G, são vértices de um heptágono.

Utilizando a construção acima, consegue-se obter um heptágono inscrito numa circunferência. Contudo este heptágono não é regular, pois os lados não têm o mesmo comprimento. Vejamos os dois heptágonos (figura 7) que foram construídos usando o processo descrito anteriormente.

Ambos os heptágonos têm 6 lados iguais e um que difere dos outros, assim estes heptágonos não são regulares. A construção do heptágono regular inscrito numa circunferência foi um problema para os gregos. Estes não conseguiam encontrar uma construção exata que usasse apenas régua e compasso, daí a sua construção não aparecer nos *Elementos* de Euclides. Encontrar uma construção exata para um heptágono regular foi algo que intrigou não só os geómetras, mas também físicos, padres, funcionários das finanças, etc. Todos arranjaram construções para o heptágono regular, contudo eram aproximadas ou utilizavam outros instrumentos para além da régua e do compasso. De facto, não é possível dividir a circunferência em 7 partes iguais, logo é

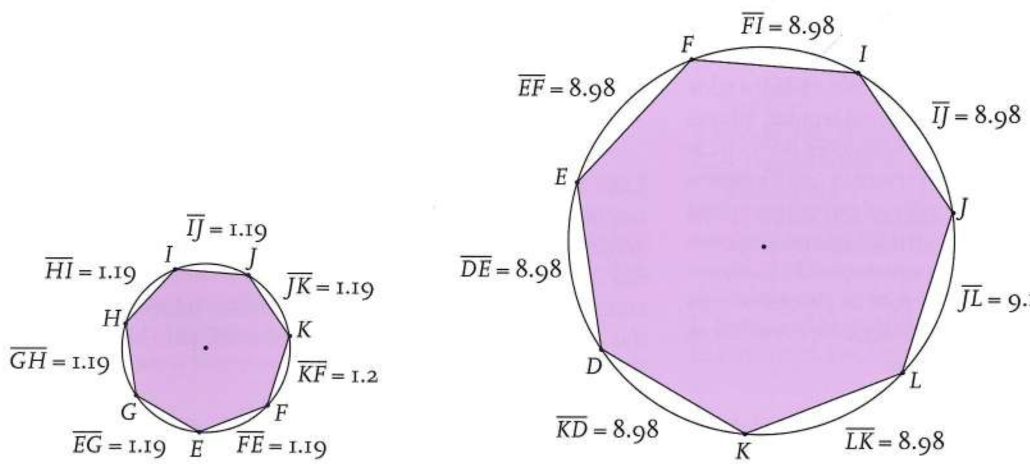


Figura 7

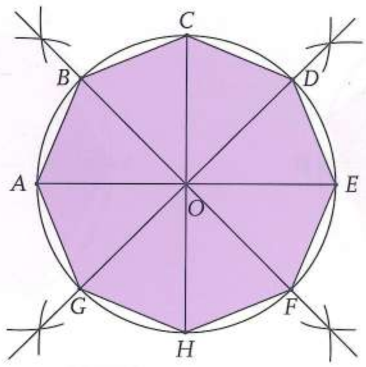


Figura 8

impossível, como veremos mais à frente, construir o heptágono regular usando apenas os dois instrumentos de desenho. O heptágono regular é o polígono com menor número de lados que não é construível, a construção dada anteriormente é apenas uma construção aproximada.

Construção de um octógono regular inscrito numa circunferência (figura 8)

- Desenha-se uma circunferência de centro *O*.
- Divide-se a circunferência em 4 partes iguais e marcam-se os pontos *A*, *C*, *E* e *G*.
- Traça-se a bissetriz de cada ângulo reto obtido no passo anterior.
- Marcam-se os pontos *B*, *D*, *F* e *G*, interseção da circunferência com as bissetrizes desenhadas.

Os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H*, são vértices de um octógono regular.

Depois do heptágono regular, surgiu dificuldade em se arranjar uma construção exata para o eneágono. A construção do decágono pode ser feita bissetando os 5 ângulos ao centro do pentágono regular. Seguiu-se a construção do undecágono, que ao longo de anos foi alvo de estudo, para se encontrar uma construção exata. A construção do polígono regular com 12 lados pode ser obtida utilizando a construção do hexágono regular, através da duplicação do número de lados. As construções do tridecágono e do tetradecágono, não estavam presentes nos *Elementos* de Euclides, e ao longo dos tempos não se encontrava uma construção exata. Uma vez que a construção de um polígono de $2n$ lados pode ser feita a partir da construção do polígono de n lados, a inexistência de construção para os polígonos com 7, 9, 11 e 13 lados, levou a que não se conseguisse construir os polígonos regulares com os seguintes lados:

7, 14, 28, 56, ...
9, 18, 36, 72, ...
11, 22, 44, 88, ...
13, 26, 52, 104, ...

Existem polígonos regulares que podem ser construídos usando a construção de dois outros polígonos regulares, como mostra o seguinte resultado.

Se os polígonos regulares com m e n lados forem construtíveis e o m.d.c$(m,n) = 1$ então o polígono regular com mn lados também é construtível.

Este resultado pode ser usado para a construção do pentadecágono regular. Como o m.d.c$(3,5) = 1$, o polígono com 15 lados pode ser construído utilizando o triângulo equilátero e o pentágono regular, como veremos a seguir.

Construção de um pentadecágono regular inscrito numa circunferência, utilizando a construção do triângulo equilátero e do pentágono regular (figura 9)

- Desenha-se uma circunferência de centro *O*.
- Desenha-se um pentágono regular de vértices *A*, *D*, *G*, *J*, *M* inscrito na circunferência desenhada.
- Desenha-se um triângulo equilátero de vértices *A*, *F*, *K*, tal que um vértice seja comum ao pentágono, neste caso o ponto *A*.
- O segmento de reta [*FG*] é o lado do pentadecágono regular.
- Constrói-se o pentadecágono regular de vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, *K*, *L*, *M*, *N* e *P*.

Com a construção do octógono, facilmente se pode construir um hexadecágono. A procura de soluções exatas para a construção de certos polígonos regulares durou quase 2000 anos, em que imensos matemáticos e não só, tentaram encontrar construções precisas, mas apenas obtinham soluções aproximadas ou que precisavam de outros materiais, para além dos dois instrumentos básicos de desenho.

4. Resposta ao problema

Em 1796, Gauss, matemático alemão, com apenas 19 anos apresentou uma construção para o polígono de 17 lados. Mais

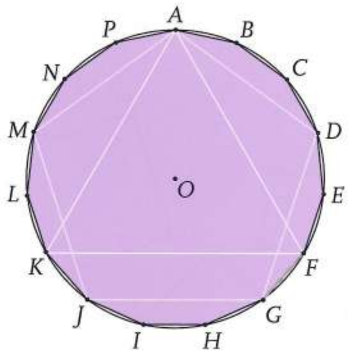


Figura 9

tarde, em 1801, Gauss deu a solução geral, pela qual ficamos a saber que polígonos regulares podem ser construídos usando apenas régua e compasso.

É possível construir, apenas com régua e compasso, um polígono regular com n lados se e só se, n for uma potência de 2 (maior ou igual a 4) ou o produto de uma potência de 2 por primos de Fermat distintos.

4.1 Primos de Fermat

Fermat, matemático francês, conjeturou que os termos da sucessão de termo geral, $u_n = 2^{2^n} + 1$ eram primos. Hoje sabe-se que a conjetura é falsa, pois:

$n = 0$	$u_0 = 3$	primo
$n = 1$	$u_1 = 5$	primo
$n = 2$	$u_2 = 17$	primo
$n = 3$	$u_3 = 257$	primo
$n = 4$	$u_4 = 65537$	primo
$n = 5$	$u_5 = 4294967297$	não é primo

Atualmente, são apenas conhecidos 5 primos de Fermat:

3 | 5 | 17 | 257 | 65537

Utilizando o resultado do Gauss, fica mostrado que realmente o heptágono regular não é construtível com régua e compasso.

Se não houver mais nenhum primo de Fermat, apenas existem 31 polígonos com um número ímpar de lados, que se podem inscrever numa circunferência:

- 5 em que o número de lados é um primo de Fermat.
- 10 em que o número de lados é produto de dois primos de Fermat.
- 10 em que o número de lados é produto de três primos de Fermat.
- 5 em que o número de lados é produto de quatro primos de Fermat.
- 1 em que o número de lados é produto dos cinco primos de Fermat.

Dados todos estes polígonos regulares construtíveis que têm um número ímpar de lados, se a estes se juntar o quadrado, então todos os outros polígonos regulares podem ser obtidos à custa destes, por sucessivas duplicações do número de lados. Existe assim, uma infinidade de polígonos com um número par de lados que são construtíveis.

Os polígonos regulares com menos de 300 lados, que podem ser construídos com régua e compasso são, os que têm:

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34,
40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128,
136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272 lados.

Foram necessários quase 20 séculos para que se conseguisse caracterizar os polígonos regulares construtíveis. Uma vez que o resultado de Gauss depende dos primos de Fermat e só são conhecidos 5, o problema não está completamente resolvido.

Referências bibliográficas

J. C. Carrega, *Théorie des Corps, la régle et le compas*, Hermann, Paris, 1981.

F. Estrada *et al*, *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.

C. B. Boyer, *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1993.

M. T. Viegas, *Divisão duma Circunferência em Partes Iguais usando apenas Compasso e Régua não Graduada (Um Problema do Tempo de Euclides que Gauss Colocou nas Mãos de Fermat)*, Atas do ProfMat98, APM, Lisboa, 1998.

E. Durão e M.M. Baldaque, *Mat 9*, Texto Editora, Lisboa, 2009.

C. Graça *et al*, *Ver, Desenhar e Criar*, Lisboa Editora, 2006.

Ricardo Ferreira
ricardoamferreira@hotmail.com

Objetos e Estruturas

«É importante entendermos que, ao recuarmos no tempo, aquilo que hoje é considerado um objecto matemático simples, como um círculo, um triângulo equilátero ou um poliedro regular, poderá outrora ter transportado o impacto psicológico de toda uma estrutura e ter exercido influência sobre a metodologia científica (por exemplo, na astronomia). Um só número, digamos, 3, era tido como uma estrutura, com as implicações místicas que daí resultavam. Isolado, um objecto matemático perde o seu significado. Esse significado resulta de uma estrutura e desempenha o seu papel apenas inserido numa estrutura.» (p. 41)

«Se uma estrutura matemática é frequentemente utilizada durante um longo período de tempo, surgirá todo um corpo de experiência e de intuição sobre essa estrutura que poderá vir a ser considerada como um objecto matemático. Assim, o conjunto R dos números reais, uma estrutura, pode ser visto como um objecto quando se toma o produto R x R para definir pares de números reais.» (p. 41)

Estes dois parágrafos da «Experiência Matemática» deixaram-me a pensar sobre as implicações didáticas desta problemática. Talvez que muitas dificuldades da didática decorram desta dupla perspetiva dos objetos matemáticos. Quando é que estamos a encarar um objeto matemático como objeto? Quando estamos a encará-lo como estrutura? Quando sobrepomos estas duas perspetivas? Que confusões e dificuldades advém disso? Em toda a matemática há exemplos destes dilemas e complexidades. Pensemos em alguns da geometria elementar.

Só é possível aceitar que um quadrado é um retângulo quando os encaramos como estruturas. Assim, aceitamos que todos os quadrados têm as propriedades dos retângulos, ou que não é possível encontrar um quadrado que não tenha as propriedades de um retângulo. O que é equivalente a dizer que a classe dos quadrados está incluída na classe dos retângulos. Ao dizê-lo desta última maneira percebemos claramente que estamos a encarar estas figuras como estruturas.

Quando trabalhamos com crianças pequenas, que ainda têm dificuldades nesta abstração de ver um objeto como uma estrutura, é importante que usemos expressões que as ajudem sem confundir. É por isso que se opta nos primeiros anos por dizer que «um quadrado é um retângulo especial». À medida que se vão conhecendo muitos quadrados e muitos retângulos, podemos passar a usar expressões como «a família dos quadrados faz parte da família dos retângulos». Esta é já uma linguagem de estrutura, que ajuda quem aprende a ver classes de objetos. A didática tem obrigação de identificar estes dilemas, de ir encontrando soluções para lidar com eles, trabalhando com os professores sobre essas soluções.

Para uma criança um quadrado é um objeto. À medida que vai vendo muitos quadrados e que vai sendo convidada a pensar sobre eles vai adquirindo a ideia de protótipo de quadrado, isto é, de figura que representa a classe dos quadrados. Se uma criança viu sempre todos os quadrados num posição direita vai construir um protótipo de quadrado direito. É por isso que é tão importante que sejam trabalhados vários exemplos de protótipos e que quando se trabalha sobre a classe dos quadrados esta seja representada por mais do que um protótipo (Figura 1).

Assim como, quando se trabalha a classe dos retângulos é indispensável que apareçam também exemplos que são quadrados (Figura 2).

Para mim também é importante que sejam realizadas tarefas em que apareçam imagens diversas em que propriedades estruturantes dos elementos estão destacadas visualmente (Figura 3 e 4).

É assim que se constrói a classe dos retângulos, inclusiva para os quadrados. A ideia de figura como uma estrutura de classe só é possível quando se conhecem as propriedades da classe. Ter os 4 ângulos retos, ter as 2 diagonais iguais e cujos pontos médios coincidem são algumas propriedades que é importante destacar. E naturalmente que os contra-exemplos também têm um papel indispensável na construção de classes.

O professor precisa de conhecer os objetos geométricos como estruturas para saber orientar o ensino no sentido de ir trabalhando sobre os objetos de modo que os seus alunos os vão encarando também como estruturas. Mas a quem elabora

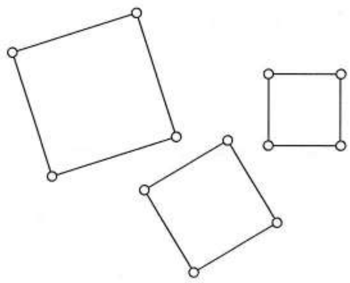


Figura 1

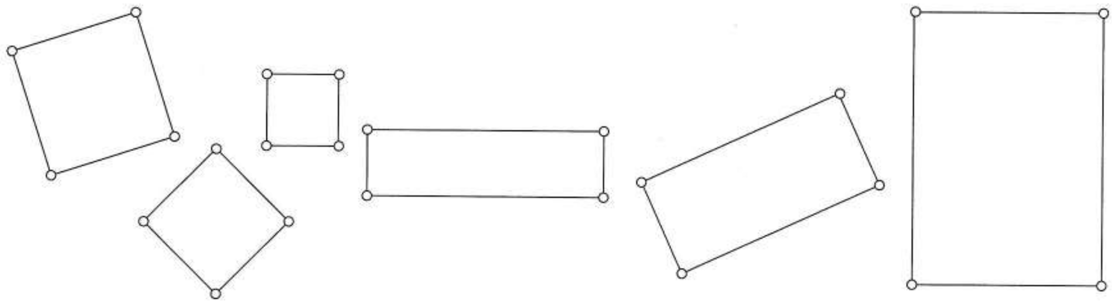


Figura 2

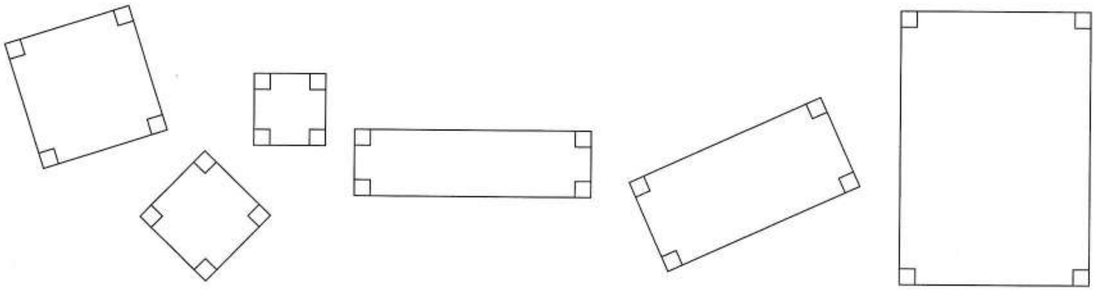


Figura 3

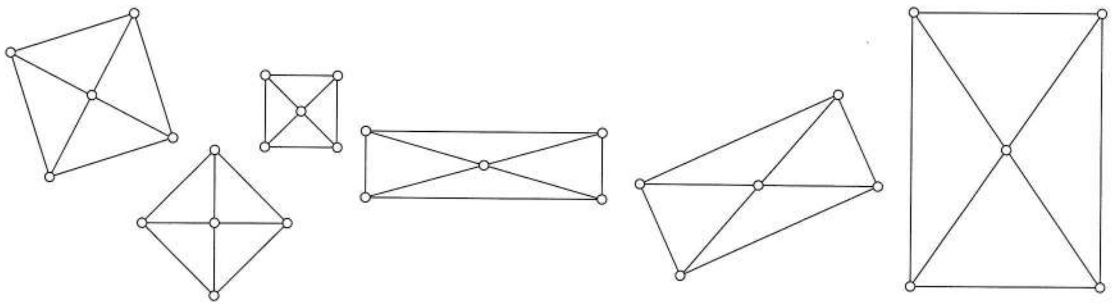


Figura 4

documentos de orientação curricular exige-se mais. Exige-se que, além do conhecimento das estruturas matemáticas, se dominem os modos possíveis de elas serem compreendidas e aprendidas. Por estas razões são inaceitáveis as actuais *Metas curriculares* da geometria. Estas metas não têm nenhum sentido didático e o seu sentido matemático é muito discutível. Ao definir inúmeras metas pontuais, semeadas ao longo dos vários anos, destrói-se totalmente a possibilidade de aprendizagem construída progressivamente. A única opção aceitável seria definir meia dúzia de metas realmente estruturantes no fim de cada ciclo de aprendizagem, como aliás é feito em alguns países em que há a preocupação de que a Matemática não sirva só para classificar alunos através da realização de exames. Uma aprendizagem estrutural e estruturante não se faz de um dia para outro, vai-se construindo. Ao estabelecer as actuais *Metas*, os autores do documento estão a mostrar o seu entendimento da aprendizagem da matemática, uma aprendizagem sem sentido e sem compreensão, em que prevalecem a mecanização de procedimentos e a memorização de factos e de regras.

Referências Bibliográficas

Davis, Philip J. e Hersh, Reuben (1995). *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Modellus, um exemplo com funções quadráticas

Vítor Teodoro

O Modellus está disponível na página http://modellus.fct.unl.pt e pode ser utilizado livremente por alunos e professores.

Neste breve texto é ilustrado como se podem explorar funções quadráticas, num contexto interdisciplinar Matemática–Física mas também num contexto exclusivamente matemático.

Uma das ideais que está na base do desenvolvimento do Modellus é a seguinte: «fazer <experiências> como modelos matemáticos». O conceito de experiência é muito mais vasto que à primeira vista se possa pensar e as potencialidades dos computadores permitiram alargar o tipo de «objetos» com que se fazem experiências.

A figura ao lado apresenta um exemplo de um modelo correspondente a um lançamento vertical de um objeto (uma maçã ...) a partir das coordenadas (50, 0). Vamos admitir que a cada pixel do ecrã corresponde 1 metro e que o tempo é medido em segundos.

É evidente que nestas condições a escala da imagem está muito desproporcionada! A maçã teria de ter vários metros de largura ... uma vez que ocupa vários pixéis. Mas, enfim, é apenas um modelo e na realidade a maçã representa apenas uma partícula!

A coordenada vertical da partícula, neste tipo de movimento e quando esta se encontra apenas sob a ação da força gravítica (portanto, já depois de ter saído do sistema de lançamento, seja a mão seja qualquer outro sistema!), pode ser descrita pela seguinte equação de posição, num referencial Oxy,

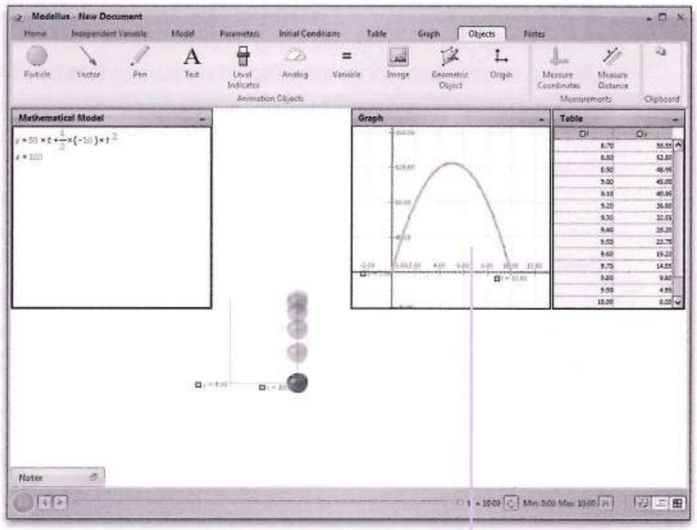
$$y = y_o + v_{o,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

onde y_o representa a coordenada inicial, $v_{o,y}$ representa a componente escalar da velocidade no instante inicial e a_y a componente escalar da aceleração (que é constante e cuja magnitude é 9,8 m/s em cada segundo, aproximadamente 10 (m/s)/s.

Considerando que o eixo Ox aponta para a direita e que o eixo Oy aponta para cima, os parâmetros do modelo representado têm os valores seguintes:

y_o = 0 m
$v_{o,y}$ = 50 m/s
a_y = −10 (m/s)/s

Com estes parâmetros, o tempo de voo é de 10 s (5 s na subida e outros 5 s na descida). Por isso, o domínio da variável independente t foi definido como sendo de 0 a 10 unidades. Vejamos como se faz este modelo.



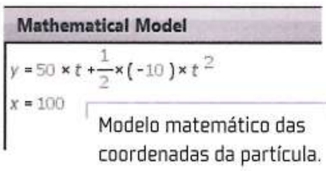
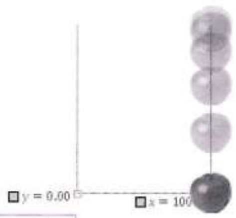


Gráfico da coordenada vertical da partícula em função do tempo t, no intervalo [0, 10] s.

Modelo matemático das coordenadas da partícula.



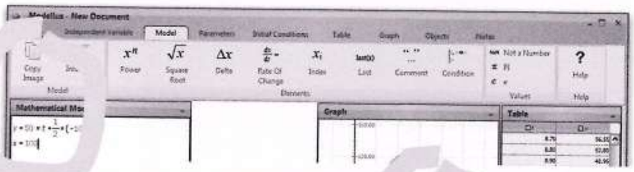
Trajectória e estroboscopia da partícula de segundo a segundo.

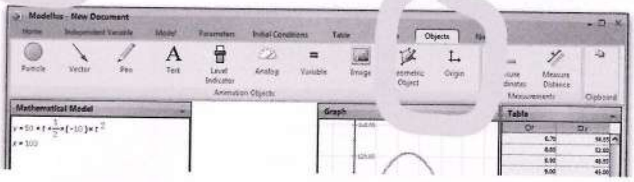
Origem do referencial da partícula.

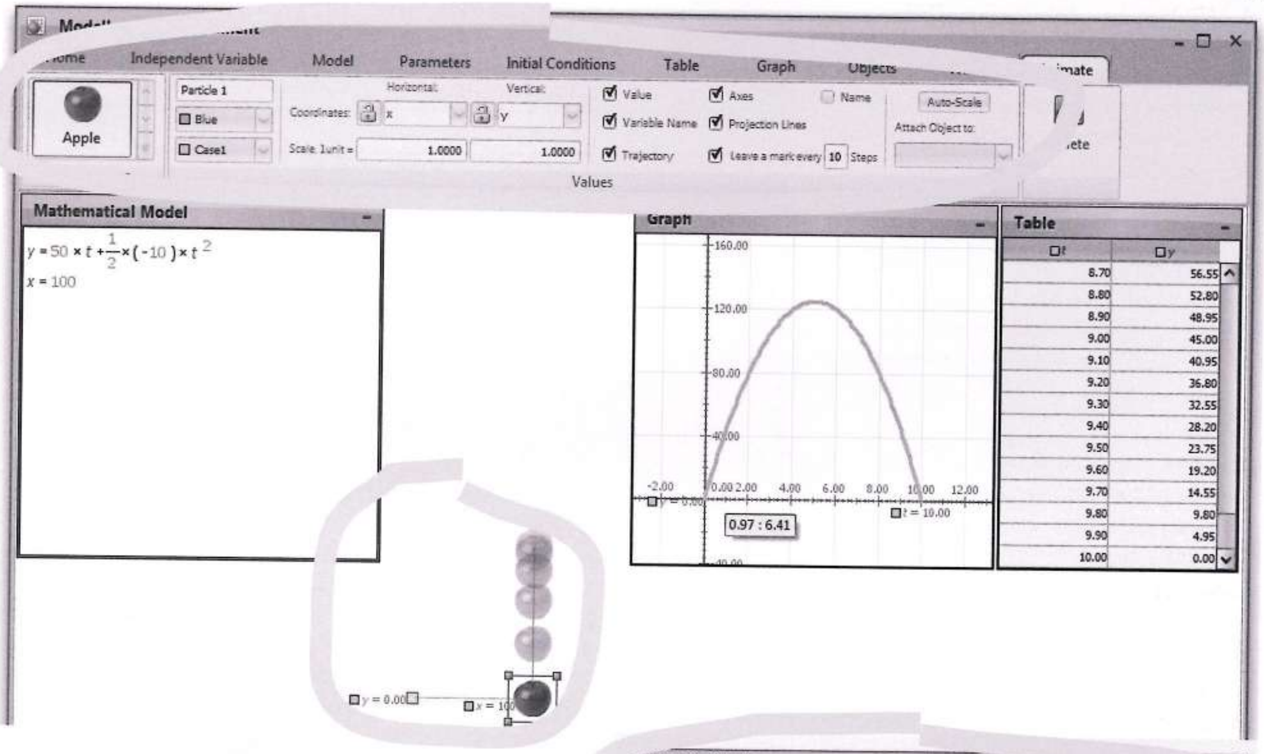
No friso «Variável Independente», verifique que a Variável Independente é «t» e altere o máximo para 10. O Passo desta variável é 0.1.

O modelo matemático escreve-se na janela «Modelo Matemático». O sinal de multiplicação pode ser obtido utilizando a barra de espaço ou «*». A potência, bem como outros operadores, podem ser obtidos utilizando os botões do friso «Modelo».

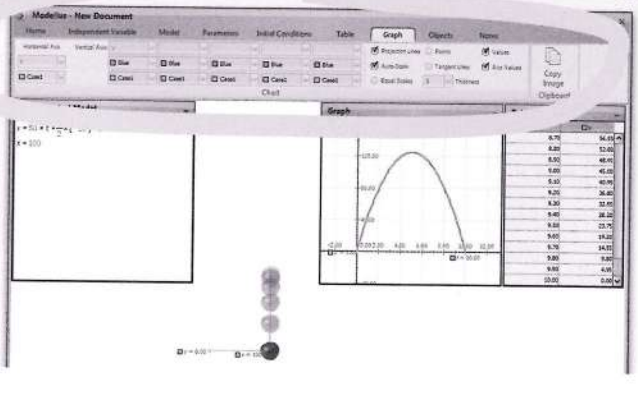
Para criar uma partícula, faça clique na área de trabalho ou no friso «Objetos»; em seguida, selecione o primeiro objeto [«Partícula»] ou utilize o botão direito do rato na área de trabalho. Passa a ter acesso às propriedades da partícula; pode, então, selecionar como coordenadas horizontal e vertical as variáveis x e y, já definidas no modelo.







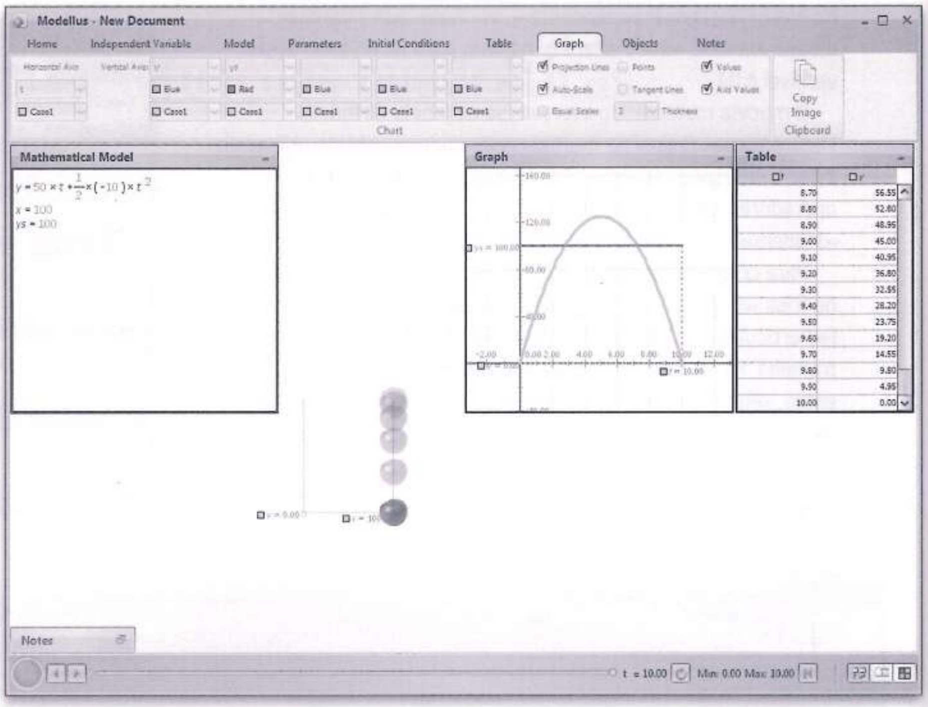
Para obter um gráfico adequado, seleccione o friso «Gráfico» e verifique se está a representar a variável y no eixo vertical e t no eixo horizontal. Depois de executar o modelo, no botão «Iniciar», pode seleccionar a opção «Escala Automática».



Botão «iniciar», antes e depois de se iniciarem os cálculos do modelo.

Botão «Reset», activo depois de se fazer os cálculos do modelo.

A partir deste modelo, podem ser construídos outros, com valores diferentes para os parâmetros e, eventualmente, para o domínio de t. Pode também explorar-se a resolução gráfica de equações (exemplo: ao fim de quanto tempo é que a partícula passa na coordenada $y = 100$? E $y = 150$?). Se necessário, cria-se uma nova variável para representar uma coordenada específica – ver imagem ao lado. E, claro, pode relacionar-se a resolução gráfica com a resolução algébrica.

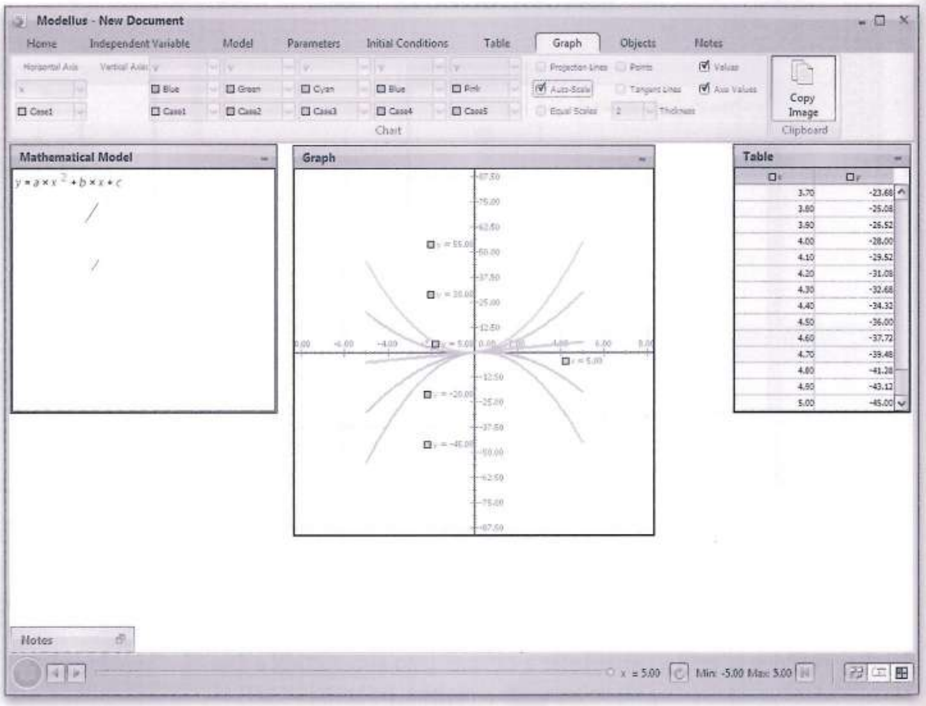


Outro exemplo com uma função y(x), com parâmetros e «casos»

Ao lado está um exemplo «tipicamente matemático»... Uma função $y(x)$, com parâmetros a, b e c e diversos «casos», isto é, conjunto de valores diferentes para os parâmetros.

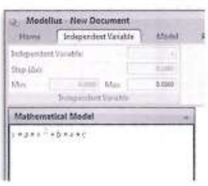
Os valores dos parâmetros são definidos no friso «Parâmetros». No friso «Gráficos» seleccionam-se os casos e as cores que se pretende.

No *link* abaixo poderá encontrar um vídeo do autor com a criação de um modelo quadrático com o Modellus:
http://www.youtube.com/watch?v=eGRSjz48hM0&feature=share&list=UURf_Idk1sxN6hw0HQMrV-uw

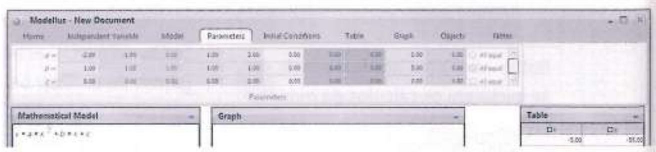


Vítor Teodoro
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

Importante: a variável independente foi definida como sendo x, tendo como mínimo 0 e máximo 5.



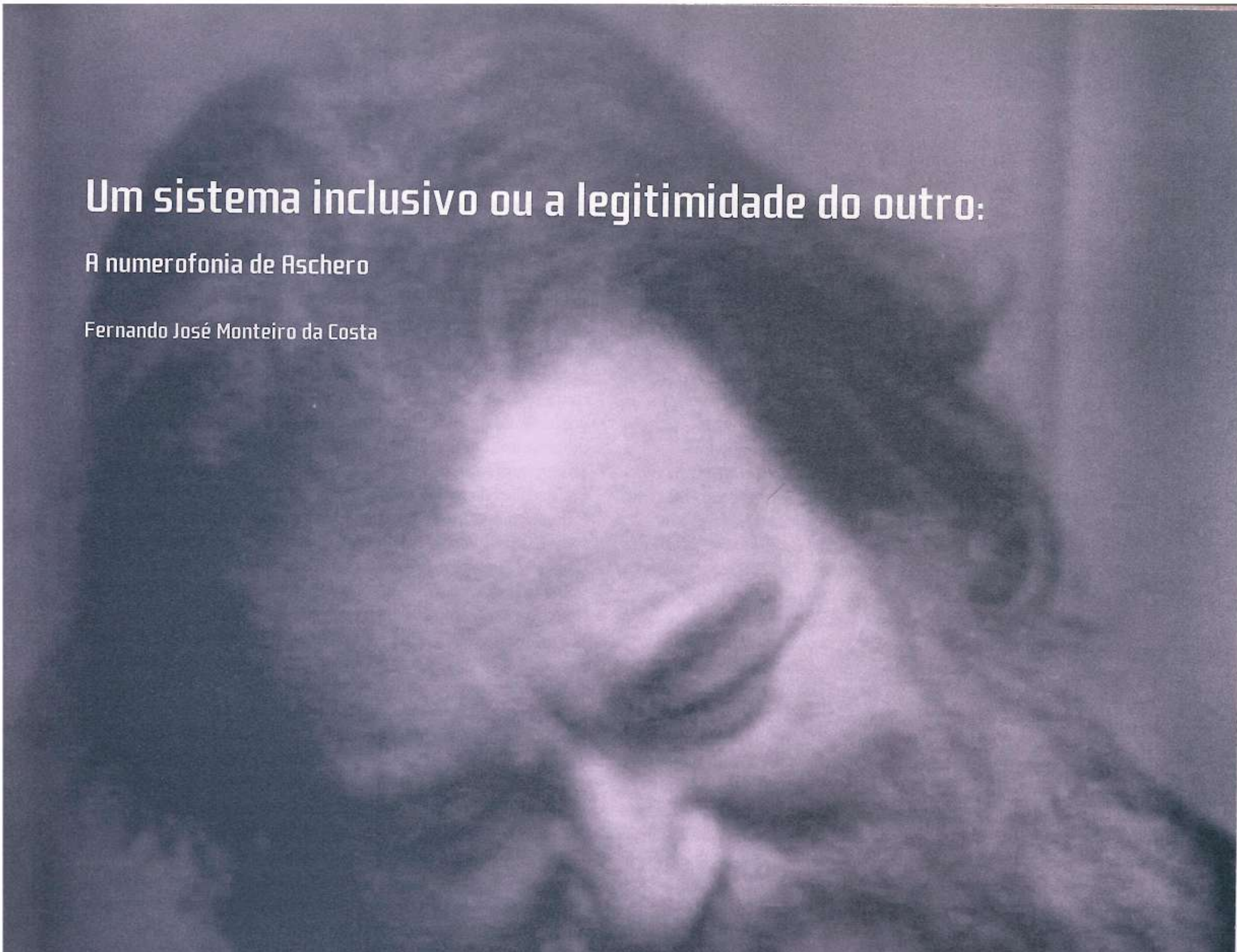
Os diversos valores dos parâmetros são indicados no friso «Parâmetros».



Um sistema inclusivo ou a legitimidade do outro:

A numerofonia de Aschero

Fernando José Monteiro da Costa



Primeiro ponto de partida

A relação curricular, como prática cultural e opção política e como algum combate às rotinas iluministas que ainda pululam por aí, deve fazer-se pelo acolhimento de todas as formas de linguagem, estorvando, deste modo, o mergulho dos alunos numa realidade doutrinada, porque se está convicto de que se deve evitar *expor* e *aculturar* crianças a uma linguagem que lhes é exterior e muito confusa. As tarefas complexas como as do raciocínio matemático, as competências de leitura, o desenvolvimento da linguagem, a prática do pensamento divergente, a socialização das atitudes, devem ser conceptualizadas à volta da ideia de *capital cultural*, acreditando-se, então, que a cultura e as diferentes experiências, devem ser um mecanismo de interacção social, conferindo-se dimensão à questão de Rousseau, quando em *Emílio, o da Educação*, através da metáfora das fábulas, acentua a necessidade da verdade ser comunicada às crianças pelo conhecimento experiencial e numa estreita relação com a natureza.

O ensino de regras precisas e de conceitos elaborados podem, por si só, não revelar-se estimulantes ao desenvolvimento do indivíduo e, pelo contrário, constituírem desmotivação suficiente para que ele se assuma como criador, donde a experimentação a partir de investigações sonoras, da utilização das cores, do uso de jogos geométricos e aritméticos, serão, por certo, estratégias naturais e significativas, aliás, na conformidade de Leibniz, quando afirma que a expressão *é a descoberta que resulta da mistura de cores, de formas, de sons e de números*. Acima de tudo, o método de comunicar com o outro, o de estabelecer vínculos é, no mínimo, um acto criativo, em torno do qual se vai construir e consolidar a matriz personalista individual. Mas as zonas de vulnerabilidade são inúmeras e a escola, frequentemente — inconscientemente ou não, propositadamente ou não — acentua os factores de bloqueio: o aluno que diverge da norma sente pressões; os ritmos de aprendizagem têm de ser os mesmos; a busca de segurança é preferível ao risco; atribui-se ênfase à razão, lógica e utilidade e desvalorizam-se as sensações e a intuição; crescem perturbações resultantes da ansiedade, do medo e da imaturidade corporal. Um novo desafio, no contexto da escola regular pública e obrigatória, deve apontar no sentido de eliminar o excesso de aspectos teóricos de que o programa de Educação Musical está imbuído, levando o aluno a descodificar os símbolos musicais, não por um mero exercício de localização espacial, mas por um sentido relacional, articular, que o novo paradigma conceptual de Sergio Aschero nos apresenta. O som e as paisagens sonoras devem estar a montante da sua representação gráfica, assim como, a noção de quantidade está antes dos números.

Muitas das funções musicais exprimem-se em números, em quantidades, em relações de ordem, em proporções e com a ajuda da física estudam-se os fenómenos acústicos e as propriedades dos sons. Um sistema notacional que se defina como criativo apoia-se, em primeiro lugar, na geometria, pois com ela, nós lidamos todos os dias e a cada momento, reconhecendo as noções de paralelismo, perpendicularidade, semelhança, proporcionalidade, espacialidade, temporalidade, simetria. A aprendizagem geométrica é necessária ao desenvolvimento global da criança, pois esta é colocada perante a resolução natural de problemas e apoia-a na percepção espacial, tanto em matemática, como na leitura e escrita. Num nível inicial, as crianças pela visualização, conseguem reconhecer ou reproduzir figuras, formas, espaços, lugares, o que, será patamar importante para a percepção do tempo e da sua unidade métrica, evoluindo este pensamento até às formas dedutivas finais, onde a intuição e dedução se vão articular (cf. Van Hiele, 1997). Funciona, desta forma a geometria, como um instrumento de compreensão da realidade natural complexa. Por isso, a *Numerofonia* de Aschero, coloca-nos perante um diferente e criativo paradigma de codificação musical, que se constrói a partir do uso da geometria, cedo para crianças de tenra idade e, mais tarde, utilizando a aritmética, quando elas começarem a sua aprendizagem através da quantificação e ordenação dos elementos. E aqui, começa um outro universo da aprendizagem, quando se percebe que a *Numerofonia* será um instrumento para a valorização da articulação entre música e matemática (geometria e aritmética), nunca perdendo de vista esse desígnio de articulação de saberes que, dificilmente, se concretiza na escola. Uma articulação inteligente, não linear e que respeita a legitimidade do outro — o aluno.

Sergio Aschero, através do seu sistema numerofónico, deu um grande contributo ao ensino da música e à compreensão da sua relação, privilegiada, com a matemática, a física e a acústica, renovando a aprendizagem da música, no sentido de David Ausubel e da sua *aprendizagem significativa*. Verifica-se, pois, que a Matemática e a Música, como diálogos sobre o tempo e o espaço, componentes da mesma literacia, discursos que descobrem e estabelecem relações dialécticas e que vivem do mesmo princípio comunicativo, estão por toda a parte e ocupam, quantas das vezes, o mesmo lugar. Elas criaram duas linguagens muito próximas, numa abrangente relação ao longo da história, facto que se pode conferir quando, por exemplo, a proporcionalidade da matemática se encontra nas escalas musicais e no ritmo, ou então, quando conhecimentos matemáticos, como o volume, o ponto, a linha, as proporções, se impregnam nos conhecimentos musicais, ou num sentido mais alargado, em toda a forma de arte. Mas a educação e a necessidade de controlo, lembraram-se de as distinguir e separar, transformando-as em saberes autónomos, por vezes, estanques na sua cientificidade.

Segundo ponto de partida

O musicólogo e matemático argentino Sergio Aschero criou um sistema de ensino da música a partir de códigos geométricos e aritméticos, num único modelo de representação simbólica e perceptiva. O seu sistema *numerofónico*, porque se centra numa perspectiva de alargamento da base de conhecimentos que o aluno tem e que, geralmente, se confina aos contactos com a família e vizinhos, enfatiza a resolução de problemas a partir de aspectos vividos no cotidiano. Apesar de a geometria configurar um certo conhecimento abstracto, a sua base conceptual baseia-se em conceitos do mundo real, encontrando patamares de aprendizagem nas formas geométricas naturais, nos fractais, nas pedras, na disposição da flores e folhas, nas habitações, nas árvores, desenvolvendo, por isso, a noção de espaço, a habilidade de observação e a relação com outras áreas (cor, acústica, desenho, grafismo, etc.). Quando Aschero propõe a substituição, por exemplo, de uma unidade de tempo tradicional por uma forma geométrica (ex.: quadrado), ou por uma flor, ou mesmo, por um animal, ele está a favorecer, de uma forma contextualizada, a relação com o cotidiano do aluno, aproveitando a convivência com as particularidades de cada região e mobilizando-o para um conhecimento acrescido. Existe, então, aquilo a que poderíamos chamar de *etno-geometria*, realçando padrões de observação e de proximidade cultural, o que, a ser trabalhado desde muito cedo, conferirá um modelo de desenvolvimento significativo.

A noção de espaço e o conceito de espacialização são, frequentemente, dificuldades detectadas nos alunos, confundindo enunciações, como acontece com *área* e *perímetro*. Ou então, a determinação de uma quarta parte de uma unidade, em que esta, geometricamente, está dividida em três porções — duas de ¼ e outra de ½ — constituiu contrariedade acrescida, ou mesmo, perceber-se o que significa a ordem *indicar a última figura da segunda linha*, provocação mental que não tem correspondência prática, no plano operativo. Pode ocorrer, efectivamente, neste caso, uma possibilidade de equívoco semântico, derivado da utilização de *último* e *segundo*, na mesma formulação, mas questiona-se por que razão, uma frase não tem equivalente directo numa acção elementar e imediata. O pensamento abstracto é fundamental e tal deve ser preparado desde a infância, despertando, desde muito cedo, processos internos de desenvolvimento, que só acontecem em interacção com outros e com outras coisas. E a geometria é ferramenta fundamental conducente ao crescimento global, que pode fazer interseccionar a acção intelectiva com a emocional e a capacidade de descobrir com a de inventar, sintaxe essencial que encontra fundamentação ajustada, na «aprendizagem ancorada» de Ausubel.

Aschero sustenta, assim, que a aprendizagem deve ser de natureza global, desde os primeiros anos de escola, por um sistema lógico, que neste caso utiliza formas geométricas e cores do espectro, que os mais pequenos, desde muito cedo, compreendem, processo que acompanhará o desenvolvimento cognitivo e corporal da criança. A *Numerofonia*, sustenta Aschero, é um código científico que se suporta nas descobertas de matemáticos e físicos, como Pitágoras, Galileu, Newton e que supera, em absoluto, a notação tradicional, em todos os sentidos, sem temor e sem exclusões. A *Numerofonia* faz parte, já, do *capital cultural* de cada pessoa e não de um grupo de elite que pode dominar a escrita e a gramática, porque ela tem códigos universais e que se iniciam com o desenvolvimento precoce de qualquer criança, como o conhecimento da geometria, das cores e mais tarde, da numeração. Ao basear-se na matemática, os símbolos da *Numerofonia* são universais e ao alcance de cada um, partindo-se do princípio que a maioria da população está, já, alfabetizada a um nível primário. Mas também, se baseia na óptica, lembra Aschero, para a construção do seu cromáfono — série de cores — utilizando as tonalidades do arco-íris e fechando o círculo com a magenta e a púrpura. Qualquer criança começa, desde muito cedo, a perceber as tonalidades, porque elas existem na natureza, nos jardins, no arco-íris, na roupa das pessoas. Então, quando perante um instrumento, qualquer criança ou adulto, em vez de ler uma partitura de cinco linhas e quatro espaços, com notas, figuras, claves, lê cores que colorem uma geometria ou aritmética, significando a altura do som e a sua duração, respectivamente. O sistema de Aschero contraria o facto de se pensar, normalmente, que o recurso a sistemas de notação facilita o pensamento, quanto à rapidez, à memória de tarefas e à sua operacionalização. Para Aschero, os códigos normativos devem ser originados na natureza, garantindo conhecimentos claros e intuitivos, como é o caso da utilização do seu cromáfono e da geometria. Daqui, é muito fácil identificar-se as alturas dos sons, em que uma cor representa um som, numa sequência a partir do primeiro som - na tradição, designando-se por DO — e percorrendo os doze sons existentes — novamente, a optar pela série dodecafónica (doze sons e não, sete mais cinco), evitando a separação e o privilégio — entre o vermelho e a púrpura, quer dizer, entre o primeiro som (DO) e o décimo segundo (SI), mas também, uma forma gemétrica indicará a unidade de tempo, sem recurso à listagem de figuras musicais obsoletas e complicadas. Na visão tradicional, a transformação histórica da notação musical foi compreendida como uma evolução no sentido de oferecer uma crescente precisão no registo, levando a suprir, eventuais, necessidades ao nível da composição e inovação musicais.

Estamos, verdadeiramente, perante uma escrita musical inclusiva que está ao alcance de qualquer um, independentemente da sua idade ou grau socioeducativo, porque a partir daqui, todos compreendem as cores e as formas elementares de geometria — sabem o que é um quadrado, conhecem uma flor, ou o desenho de um animal — podendo, de modo fácil, ler e executar um trecho musical. No sistema tradicional de escrita, a nota DO necessita de uma pauta, uma clave, um símbolo com a sua figura musical e, também, uma letra que indicará a intensidade com que se executará essa nota. Quer dizer, são precisos 5 signos para representar um som. É demais, para uma criança de três anos, mesmo que se considere que seja um bom exercício mental e tecnológico confrontá-la, desde tenra idade, com tais dificuldades. A *Numerofonia*, para representar o mesmo som, necessita, somente, do número ou da figura geométrica, pintado de cor vermelha e de um determinado tamanho, em que a figura ou o número, inteiro ou fraccionário, representará o tempo, a cor exibirá a altura do som e o tamanho, a sua intensidade. Na linguagem numerofónica a altura representa-se através da coloração interna das figuras geométricas, ou dos números inteiros e fraccionários, donde o primeiro cromáfono se obtém do princípio, em que a primeira frequência visível se equipara á menor frequência audível, fixando-se uma série de alturas determinadas, de base 12 e afinação temperada. O primeiro que se vê, é o primeiro que se ouve, donde a norma indica que a cor vermelha equivale ao primeiro cromáfono (16 Hz.).

Da figura 1, conclui-se que o número «1» (na figura) reúne uma quantidade de informações, a saber: cor vermelha (cor que era visível na figura original e que por razões técnicas não

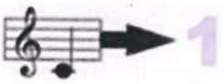


Figura 1. transcrição numerofónica.

se pode reproduzir aqui) representa o primeiro som (DO, na notação tradicional); por ser o algarismo «1», indica uma unidade de tempo (semínima, na notação tradicional); dispensa-se a indicação da clave e não é necessária a escrita da pauta. Utilizando-se a geometria, o processo passa a ser o mesmo, com as mesmas valências.

Último ponto de partida

Afinal, estes são alguns dos argumentos que a *Numerofonia* de Aschero clarifica e simplifica, tornando a escrita e leitura musicais apetecível a qualquer criança a partir dos 3 anos de idade. A notação tradicional, conforme Aschero sustenta, é lida, apenas, por 5% da humanidade, pelo que, ele contrapõe a *Numerofonia* para os outros 95% que até, aqui, estavam impedidos no acesso à leitura, escrita e prática musicais. Voltamos à questão do respeito pela legitimidade do outro — do aluno — que deve ser encarado como um potencial criador, acumulando, já, experiências de vida que devem ser aproveitadas no percurso do seu desenvolvimento. A *Numerofonia* apresenta-se como uma estratégia, não meramente, como ferramenta específica para o ensino da música, mas antes, uma espécie de *carrefour*, onde se atalham intersecções de saberes, que tecem malhas de aprendizagens que, de outra forma, seria muito difícil atingirem-se.

Assim, a *Numerofonia* de Aschero, porque nos induz ao nível pré-figurativo do conhecimento, conduz-nos a universos diferentes, a quadros relacionais inclusivos, porque desenha um modelo que permite a integração das diferenças e das capacidades, admitindo um acesso mais igualitário e mais fácil ao estudo da música, numa relação próxima com a matemática. Pelo contrário, o sistema tradicional, pela rudeza das condições histórico-sociais em que se desenvolveu, subjuga os indivíduos à condição de determinados, quadro que se ofusca quando se trata de indivíduos em desenvolvimento: crianças e jovens. E tanto pior, quando o processo de formação reitera, inadvertidamente, o estigma da inaptidão, a ponto de gerar na criança ou jovem, a sensação de que são desafinados ou desajustados, em face do sistema vigente.

Referências bibliográficas

Aschero, Sergio, www.sergioaschero.nireblog.com

Ausubel, David P. (2003), *Aquisição e Retenção de Conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Peery, J. Craig (2002), A Música na Educação de Infância, artigo in *Manual de Investigação em Educação de Infância*, Spodek B. (org.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Rousseau, Jean-Jacques (2007), *Emílio, o De la educación*. Madrid: Alianza Editorial.

Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997, *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele*. Rio de Janeiro

Fernando José Monteiro da Costa

Professor de Educação Musical. Colaborador do CITCEM (FLUP)

APM – 2013

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2012

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2012

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)</th><th>Quadrante</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sócio individual</td><td>Portugal</td><td></td><td>12,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td></td><td>15,00 €</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Instituições</td><td>Portugal</td><td rowspan="2">42,00 €</td><td>23,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td>27,00 €</td></tr>
</table>

índice

Editorial

Artigos

Secções