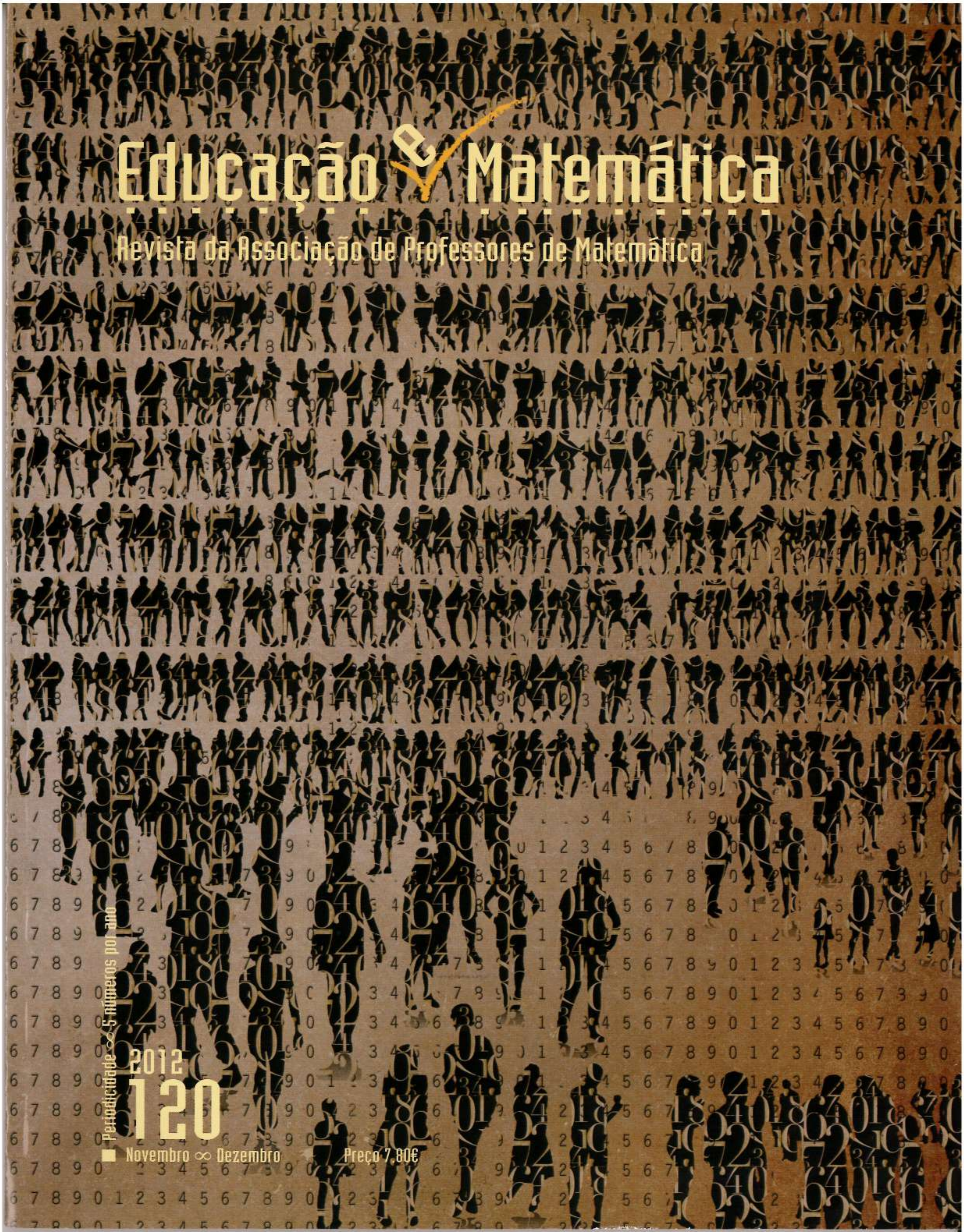
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2012
120

Novembro ∞ Dezembro

Preço 7,80€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Isabel Rocha
Subdiretora	Manuela Pires
Redação	Adelina Precatado
	Ana Paula Canavarro
	Alice Carvalho
	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Helena Rocha
	Irene Segurado
	Júlia Perdigão
	Lina Brunheira
	Nuno Candeias
	Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Junho 2012
Tiragem 2100 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Sobre a capa

A capa deste número tenta descrever, do ponto de vista gráfico, a complexidade inerente à tentativa de traduzir através de números relações de grande complexidade como o são, por exemplo, as relações de tipo sociológico.

António M. Fernandes

Sobre este número temático

Este número temático é dedicado ao ensino e aprendizagem da Estatística e das Probabilidades. A escolha do tema surgiu de uma forma natural no seio da redação, quer pela relevância que lhe reconhecemos na formação integral dos alunos, quer pela importância que os currículos lhe atribuem, particularmente reforçada no ensino básico com a introdução do novo programa. Natural foi também a escolha dos seus editores: Ana Paula Canavarro e o José António Duarte. A Ana Paula tem desenvolvido nos últimos anos um trabalho profundo nesta área, estabelecendo pontes entre a investigação e a prática de sala de aula. O José António Duarte, dedica-se há muito tempo à formação inicial e contínua de professores, tendo também este tema matemático como uma área de incidência. Ambos associam o seu interesse pela Estatística e Probabilidades ao seu gosto e conhecimento sobre tecnologias na educação, por certo reconhecido pelos nossos leitores.

Com este número temático da revista, o último de 2012, abrimos as portas a 2013, o Ano Internacional da Estatística. Agradecemos aos nossos editores todo o seu empenho e envolvimento em todas as fases de elaboração deste número, desde a sua conceção, à sua revisão.

Neste número também colaboraram

Ana Aliete, Ana Caseiro, Ana Henriques, António Domingos, Carlos Miguel Ribeiro, Conceição Rodrigues, Elsa Barbosa, Elvira Santos, Emília Oliveira, Fernando Nunes, Hélia Jacinto, Hélia Oliveira, Jaime Carvalho e Silva, Joana Brocardo, Joana Latas, João Pedro da Ponte, José António Fernandes, Leonor Santos, Lurdes Serrazina, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Helena Martinho, Nélia Amado, Paula Cristina Morais, Paulo Correia, Professores Acompanhantes do Plano da Matemática II e do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, Rosa António Ferreira, Rui Gonçalo Espadeiro, Sílvia Semana.

Saiu da redação

Paulo Dias deixou de integrar a redação da revista Educação e Matemática. Pelo contributo que deu à revista enquanto permaneceu na redação, aqui fica o nosso agradecimento.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90 Fax: (351) 21 716 64 24 E-mail: revista@apm.pt

Nota

Editorial

Estatística e Probabilidades – das orientações curriculares à prática de sala de aula

Este número temático da revista Educação Matemática é dedicado ao ensino e aprendizagem da Estatística e das Probabilidades. É, sem dúvida, um tema da maior relevância nos tempos que correm, em que o reconhecimento geral da importância do desenvolvimento da literacia estatística dos cidadãos para uma vivência plena em sociedade se refletiu nas atuais orientações curriculares para o ensino da Matemática, a nível internacional e também em Portugal.

Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, originalmente publicadas em 2000 pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), o ensino da Análise de dados e Probabilidades é proposto para todos os níveis de escolaridade não superior, incluindo o pré-escolar, enfatizando-se a importância dos alunos desenvolverem competências para lidar com dados. O NCTM defende que todos os alunos deverão ser capazes de: formular questões que possam ser abordadas por meio de dados e recolher, organizar e apresentar dados relevantes que permitam responder a essas questões; selecionar e usar métodos estatísticos adequados à análise de dados; desenvolver e avaliar inferências e previsões baseadas em dados; compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidades.

Em Portugal, a Estatística e as Probabilidades viram também, nos últimos anos, reforçada a sua presença nos documentos curriculares. No ensino secundário, a Estatística faz parte dos diversos programas de Matemática atualmente existentes. Perspetiva-se como uma ferramenta para a organização, representação e tratamento de dados relativos a situações reais, que dote os alunos da capacidade de apreciar de forma esclarecida e crítica os seus usos em diversos domínios, nomeadamente na comunicação social.

No ensino básico, a Estatística e as Probabilidades passaram a merecer destaque no atual programa de Matemática, homologado em 2007 e em vigor, a nível nacional, desde 2009/10. Neste programa, assumindo-se como Organização e Tratamento de Dados, passam a marcar presença desde os primeiros anos do 1° ciclo. De um modo geral, ampliam os conhecimentos e capacidades a adquirir pelos alunos relativamente aos anteriores programas, quer no que diz respeito à complexidade dos conjuntos de dados a analisar, como às medidas estatísticas e às formas de representação a usar, e ainda no que diz respeito ao trabalho a desenvolver pelos alunos, valorizando o planeamento e a realização de estudos estatísticos. É importante sublinhar que estas orientações visam o desenvolvimento, pelos alunos, da sua capacidade de compreender e de produzir informação estatística, bem como de a utilizar para resolver problemas do seu interesse e tomar decisões informadas e argumentadas — como é expresso no propósito de ensino relativo a cada um dos três níveis do ensino básico.

Quer as orientações curriculares propostas pelo NCTM, quer as portuguesas, têm subjacente uma ideia fundamental que aqui destacamos: o conhecimento estatístico visa o estudo de situações e problemas reais que interessam aos alunos de modo a proporcionar-lhes o seu conhecimento e, em consequência, a argumentação de opiniões, a proposta de intervenções, a sustentação de decisões. Destacamos esta ideia chave porque ela tem necessariamente reflexos no que se valoriza no trabalho com os alunos em sala de aula, ao nível das situações/contextos a estudar, do papel dos alunos nesse estudo e do recurso à tecnologia.

Não terá certamente para os alunos o mesmo valor e alcance estudar a cor dos olhos de uma turma, eventualmente inventada, ou, por exemplo, o peso das mochilas que carregam diariamente para a escola. É importante que as situações em estudo, para além de serem reais, contribuam para que os alunos conheçam melhor o que os afeta ou aquilo que afeta a sociedade em que vivemos e na qual se inserem. Só assim se pode cumprir a função da Estatística de permitir o desenvolvimento de uma cidadania mais informada — aspeto central da literacia estatística.

Não terá certamente para os alunos o mesmo valor e alcance estudar dados recolhidos por terceiros, que se lhe apresentam já limpos e organizados, ou, por exemplo, construir instrumentos de recolha de dados adequados, recolher dados e observá-los em bruto, tomar decisões sobre como os organizar, fazer contagens e construir as respetivas tabelas. É importante que os alunos tenham a possibilidade de lidar com todas as fases de um estudo estatístico, desde a elaboração de boas questões a responder e a decisão de quem lhes deve responder e como. Todas as fases são essenciais para que os alunos possam compreender o que afeta a produção de conhecimento estatístico sobre uma dada situação e como este pode ser manipulado.

Não terá certamente para os alunos o mesmo valor e alcance calcular medidas estatísticas e fazer gráficos recorrendo a papel e lápis, propositadamente restringidos a um número reduzido de dados arredondados, ou usar os computadores para, por exemplo, recorrer a dados reais obtidos em bases de dados temáticas, fazer o seu estudo calculando e conjugando medidas diversas, obter representações gráficas rigorosas e diversas a confrontar entre si. É importante que os alunos tenham a possibilidade de aprender a usar, de forma correta e segura, os recursos disponíveis na sociedade e que esta usa para comunicar e veicular informação. Para além destes permitirem ampliar as situações reais em estudo, agilizam e qualificam o trabalho que os alunos podem fazer neste domínio.

Neste número da revista, o leitor encontra artigos e reportagens que testemunham formas de levar à prática as ideias que acima sublinhamos com alunos de diferentes níveis de escolaridade, bem como artigos que discutem questões sensíveis da abordagem à estatística e probabilidades – tantas vezes consideradas erroneamente simples. Esperamos que a revista constitua um contributo que inspire o investimento a perseguir num ensino da Estatística e das Probabilidades curricularmente enquadrado e que sirva da melhor forma para qualificar as aprendizagens matemáticas dos nossos alunos.

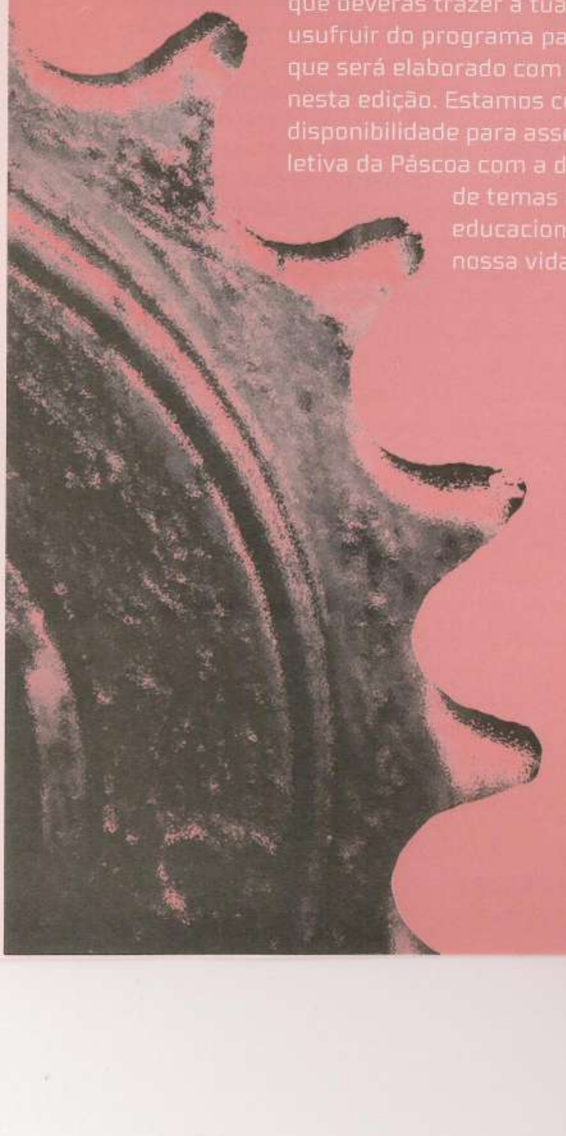
Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora e UIDEF/UL
José Duarte, ESE de Setúbal

ProfMAT2013

21 a 23 de Março

O regresso esperado ao Algarve

Catorze anos depois do maior Encontro Nacional de Professores de Matemática de sempre se ter realizado em Portimão, o maior evento nacional da Associação de Professores de Matemática regressa ao Algarve, na bonita cidade turística de Albufeira. Esperamos por ti, de 21 a 23 de março de 2013, com um sol radioso, mas ainda não muito quente, propício para a conjugação de dias de trabalho e de fins de tarde e noites de lazer, pelo que deverás trazer a tua família que poderá usufruir do programa para acompanhantes que será elaborado com especial atenção nesta edição. Estamos certos da tua vontade e disponibilidade para associares a interrupção letiva da Páscoa com a discussão e a partilha de temas matemáticos e educacionais que organizam a nossa vida profissional.



O ProfMat 2013 anuncia como temas centrais as Perspetivas Curriculares, as Diferentes Ofertas Formativas e as Capacidades Transversais, entre outros destaques, como a Matemática do Planeta Terra 2013 e uma justa homenagem a Paulo Abrantes. As Perspetivas Curriculares terão particular incidência nas atuais metas curriculares, nos exames e nos manuais escolares, que regulam as nossas atuais e futuras opções educacionais. As Diferentes Ofertas Formativas permitirão um novo olhar sobre a realidade das nossas escolas, das nossas turmas, confrontando os nossos conhecimentos, dados por adquiridos e assumidos como válidos, com novas realidades sociais e educacionais. As Capacidades Transversais — resolução de problemas, raciocínio e comunicação — que dão sentido a um dever de cidadania para com os alunos, os pais e o país, serão novamente analisadas numa altura em que parecem transfiguradas numa dicotomia entre a filosofia das orientações curriculares dos programas de matemática e os atuais instrumentos orientadores subjugados à lógica transmissiva dos saberes.

Albufeira aguarda, de braços abertos, o regresso dos sócios e não sócios da APM, de todo o país, ao Algarve, a fim de participarem no ProfMat 2013.

No dia 24 haverá cursos de formação, uns creditados e outros não creditados.

Podes ver as novidades e detalhes do programa do Profmat na página:

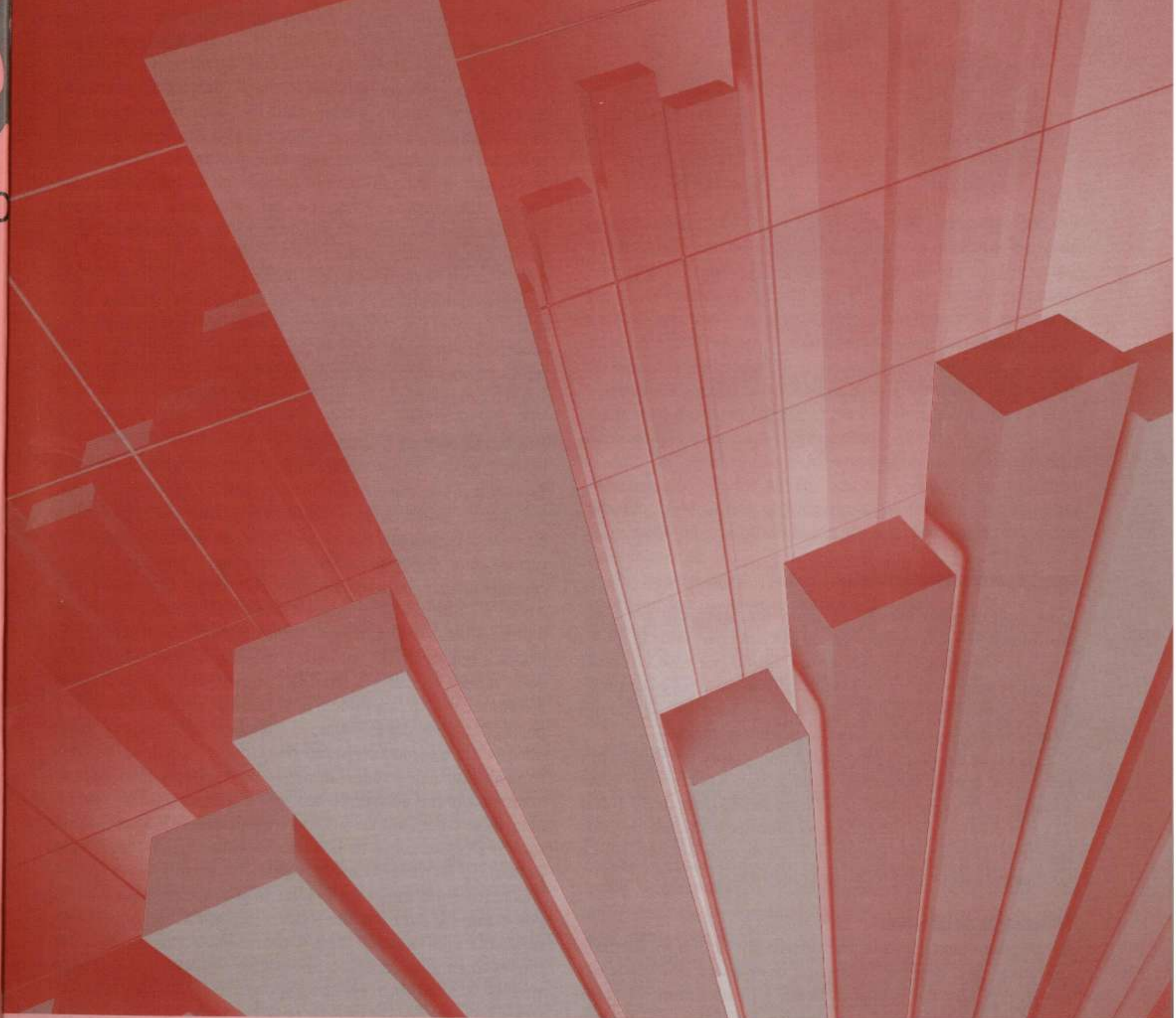
http://profmat2013.apm.pt/

Até ao Algarve, em Albufeira, à beirinha da Páscoa de 2013.

Comissão Organizadora ProfMat 2013

Investigações estatísticas: um caminho a seguir?

Ana Henriques e Hélia Oliveira



Introdução

Atualmente é inquestionável a importância de desenvolver a literacia estatística dos alunos, isto é, a capacidade de interpretar e avaliar criticamente a grande quantidade de dados que fazem parte da realidade quotidiana e de comunicar e tomar decisões informadas (Gal, 2002). Por isso, não é de estranhar que nos documentos curriculares o ensino da Estatística tenha sido reforçado, estendendo-o aos níveis mais elementares, e enfatizando abordagens *orientadas para os dados* que desenvolvam o raciocínio e o pensamento estatístico, em detrimento da aplicação de fórmulas que requerem cálculos morosos e repetitivos e sem significado para os alunos (ME, 2007; NCTM, 2007).

A investigação nacional e internacional tem vindo a defender a realização de investigações estatísticas pelos alunos, em contextos próximos do seu ‹mundo›. Neste texto, com base em diversos estudos, procuramos ilustrar que, através desta atividade, os alunos podem aprender os conceitos e processos específicos da estatística, e discutir também algumas das dificuldades e obstáculos que têm que ultrapassar.

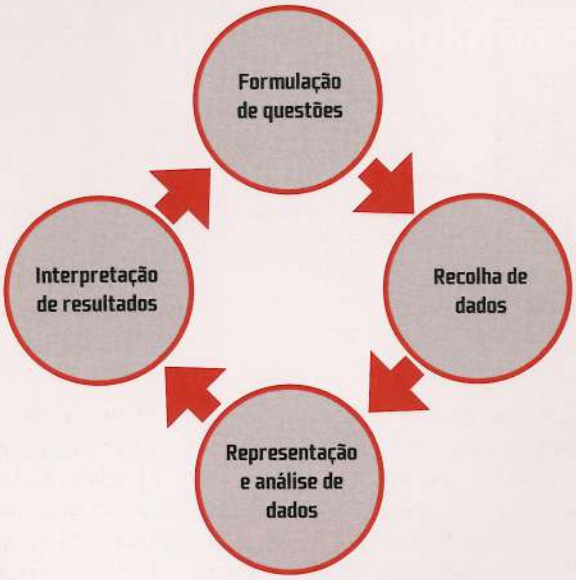


Figura 1. O ciclo investigativo (Martins & Ponte, 2010; Selmer, Bolyard & Rye, 2011).

Investigações estatísticas

Uma investigação estatística pode ser motivada por uma curiosidade sobre o mundo real ou por uma necessidade muito concreta (Martins & Ponte, 2010), tendo por base um ciclo de quatro etapas (figura 1): formulação de questões e conceção do plano, recolha de dados, representação e análise de dados e interpretação dos dados e formulação de conclusões.

Cada uma das etapas propostas é importante por direito próprio mas só quando integradas é que os alunos podem encontrar a lógica do processo estatístico. Neste sentido, expor os alunos ao ciclo do processo estatístico dá-lhes oportunidade de construir uma compreensão da importância de cada uma das fases e do propósito das várias técnicas estatísticas.

Formulação de questões

A primeira etapa consiste na formulação de um problema a investigar que, preferencialmente, deve partir dos interesses dos alunos. Um dos primeiros desafios para os alunos é transformar uma questão geral em questões estatísticas que possam ser respondidas através de dados, especialmente se antecipam a realização do estudo com o auxílio das questões que projetam para a recolha de dados (Konold & Higgins, 2003). É importante que ganhem sensibilidade à redação da questão, pensando como lhe poderiam responder, o que lhes permite descobrir não só a variedade de respostas possíveis mas também antecipar múltiplas interpretações da mesma. Por exemplo, numa turma do 8.° ano, quando foi pedido um esboço de um estudo para conhecer as práticas de higiene oral, uma aluna começou por formular questões gerais: «Costumas utilizar fio dentário? Com que frequência vais ao dentista?» (Roque & Ponte, 2012, p. 508). Ao ser interpelada pela professora sobre o significado atribuído a «costumas utilizar» e «frequência», a aluna constata que poderia obter dados, como «sim» e «regularmente» ou «com pouca frequência», com significados diversos para as diferentes pessoas inquiridas e opta pela sua reformulação, fazendo surgir a quantificação das ações referidas (figura 2).

Recolha de dados e amostragem

Nesta etapa, é feito o planeamento para selecionar e recolher dados relevantes para responder às questões formuladas. Embora a resposta a algumas dessas questões implique o recolher dados de toda a população em estudo (por exemplo, os alunos da turma), muitas outras implicam o recurso a amostras. O processo de amostragem, sendo crítico na recolha de dados, não é trivial e é fonte de dificuldades. Por vezes, os alunos rejeitam a ideia de amostragem porque subestimam as dificuldades associadas à realização de um censo, negligenciando a vantagem de se reduzir os dados a recolher, ou porque se debatem com a compreensão de como uma amostra, que não contém toda a população, pode dar informação relevante sobre esta, tal como documenta o estudo realizado por Jacobs (1999), no 5.° ano. Estes alunos, quando confrontados com resultados diferentes de amostras obtidas através de métodos distintos, não conseguem identificar os que foram sujeitos a enviesamento, baseando as suas avaliações sobre os métodos usados na sua experiência pessoal ou na forma como os resultados se ajustavam às suas expectativas ou fornecem evidência para tomar uma decisão. Por exemplo, para decidir sobre a realização de um sorteio na escola para angariar dinheiro, os alunos favoreceram um inquérito em que 100% dos inquiridos disseram comprar rifas em relação a um outro em que a opinião se dividia, justificando: «50–50 não irá decidir isso por nós» (p. 245).

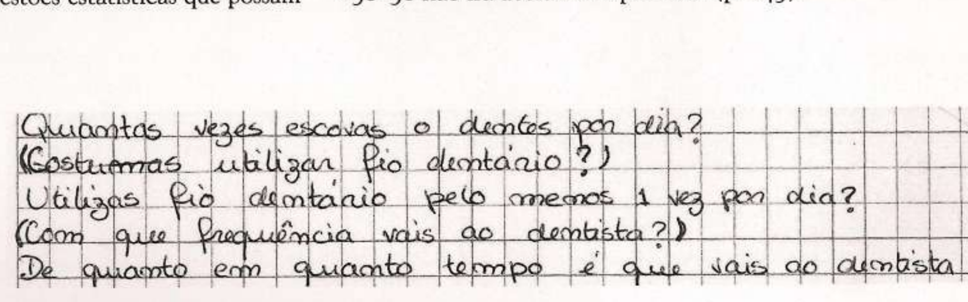


Figura 2. Questões de inquérito formuladas por uma aluna.

Figura 3. Esquema de contagem e gráfico de barras ilustrando os alimentos dominantes numa dieta (Selmer et al., 2011, p. 278-79).

No entanto, a realização em sala de aula de um trabalho envolvendo a análise de diversas situações em que é adequado o estudo de toda a população ou apenas de uma amostra, a análise crítica de estudos estatísticos face ao uso de amostras não representativas e a ponderação de elementos que afetam a representatividade de uma amostra, pode ser determinante para o progressivo reconhecimento de variabilidade, como ilustra o estudo de Roque e Ponte (2012). Estes alunos passaram a reconhecer que o aumento da precisão de uma sondagem está associado a uma maior dimensão da amostra aleatória e, ainda, a ponderar elementos que podem afetar a representatividade de uma amostra em relação à respetiva população em diferentes contextos, tomando consciência de possíveis fontes de enviesamento na recolha de dados.

Representação e análise de dados

A terceira etapa de uma investigação estatística consiste na organização e representação dos dados recolhidos, em que os alunos podem explorar a forma mais efetiva de converter dados na informação necessária para responder às suas questões e, assim, contactarem de perto com o verdadeiro trabalho estatístico (Selmer et al., 2011). Compreender a representação e análise de dados envolve muitos assuntos complexos, desde a sua ordenação, passando pelo significado dos números num gráfico e pela escolha das medidas apropriadas para sumariar e comparar grupos, até à identificação de relações entre variáveis.

Os gráficos e as medidas estatísticas (de localização, forma, dispersão e relação) são críticos na representação, redução e análise de dados, facilitando a identificação de padrões e tendências nos dados ou permitindo a descrição e comparação de distribuições. Estas ferramentas estatísticas tornam-se, assim, meios para obter respostas às questões, em vez de serem fins em si mesmo (Groth & Bargagliotti, 2012). Deste modo, o desafio começa na escolha deliberada de uma representação ou de medidas que sejam adequadas e facilitem a análise dos dados, tendo em conta a sua natureza e os objetivos em vista. Selmer et al. (2011) dão como exemplo uma situação em que um aluno coloca uma questão sobre os alimentos dominantes na sua dieta. Se este optar por um esquema de contagem de alimentos individuais (figura 3), dada a sua diversidade, pode ter dificuldade em analisar o que pretende. Ao invés, se conseguir criar categorias adequadas para os alimentos pode construir um gráfico de barras (figura 3) para analisar e interpretar mais facilmente a informação representada.

As dificuldades que os alunos revelam na seleção de gráficos adequados aos dados advêm, muitas vezes, de uma escolha baseada em critérios não intencionais como a facilidade na construção ou a familiaridade com a representação escolhida (Morais, 2010).

A compreensão dos gráficos estatísticos é fundamental para se retirar deles a máxima informação e envolve não só a sua leitura e interpretação, que permite aos alunos extrair dados do gráfico e produzir informação a partir deles, formulando opiniões sobre a informação representada, mas também a sua construção e avaliação, competências estas associadas à capacidade de saber representar ou editar dados graficamente e avaliar a precisão e eficácia de um gráfico (Wu, 2004). Se considerarmos o gráfico de barras, presente logo nos primeiros anos de escolaridade para representar frequências absolutas de dados discretos ou categorizados, este sofre uma evolução natural a partir do diagrama de pontos (ver figura 4), permite depois representar frequências relativas (onde a escala já não inclui números inteiros) e mais tarde, ainda, é introduzido para representar dados contínuos (onde o eixo horizontal se torna uma escala contínua).

De igual modo, o diagrama de extremos e quartis pode constituir uma ferramenta valiosa na análise de dados, não existindo, contudo, unanimidade sobre a sua introdução aos

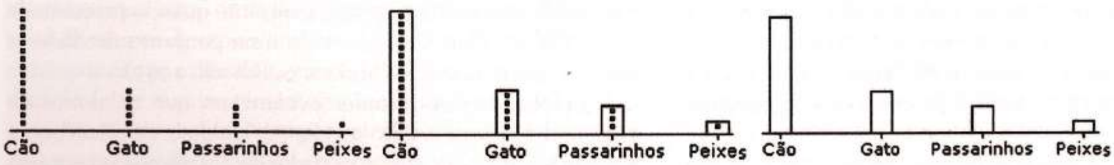


Figura 4. Evolução do diagrama de pontos para o gráfico de barras (Martins & Ponte, 2010).

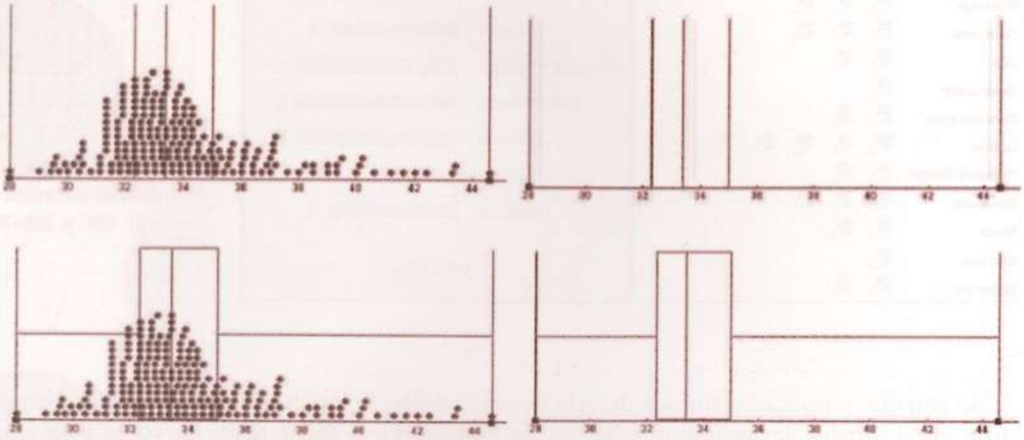


Figura 5. Opções no Minitool 2 para formar quatro grupos [linha superior], ocultar os dados [gráficos da direita] e sobrepor um diagrama de extremos e quartis [linha inferior]. [Bakker et al., 2004, p. 165].

alunos mais novos, uma vez que algumas das suas características tornam-no particularmente difícil de utilizar em contextos reais (Bakker, Biehler & Konold, 2004). Estes autores sugerem que a introdução desta representação seja inicialmente acompanhada de outras que permitam visualizar os casos individuais, como exemplificado na figura 5, onde o diagrama de extremos e quartis é sobreposto com um diagrama de pontos, com a opção de ocultar os casos representados pelos pontos (disponível em software educacional recente, como o Minitools ou o TinkerPlots).

As transições referidas nos exemplos anteriores constituem grandes saltos cognitivos para os alunos e estão na origem de muitas das suas dificuldades quando têm que realizar mais do que uma simples leitura do gráfico (Moritz & Watson, 1997). De facto, Curcio (1987) ajudou a clarificar a natureza complexa da compreensão dos gráficos, caracterizando-a de acordo com três níveis de leitura dos dados: i) *ler os dados*, nível elementar que requer apenas uma leitura direta do gráfico sem qualquer interpretação, atendendo apenas a factos representados explicitamente; ii) *ler entre os dados*, nível intermédio caracterizado por requerer o conhecimento de conceitos e habilidades matemáticas que permitem identificar relações nos dados; e iii) *ler para além dos dados*, nível avançado que exige uma ampliação dos conceitos e a capacidade de realizar inferências ou previsões com base numa interpretação dos dados. Shaughnessy (2007) considera necessário acrescentar mais um nível — *ler por detrás dos dados* — para aferir a compreensão das conexões entre o contexto e os dados e das causas da variação dos dados que diversos estudos têm revelado ser particularmente difícil (Ainley, 2000; Friel, Curcio & Bright, 2001; Morais, 2011). Estes estudos sugerem, no entanto, que o trabalho com diversos tipos de representações gráficas em contextos relevantes para os alunos e com questões dirigidas a diferentes níveis de compreensão, contribuem para ativar o processo de compreensão gráfica.

As tarefas em que os alunos têm que escolher as medidas que melhor descrevem e sintetizam a informação contida num conjunto de dados são bastante ricas, uma vez que lhes permitem contactar com os seus diferentes significados e examinar como a variação nos dados pode ter impacte nos seus valores (Selmer et al., 2011). A média aritmética de um conjunto de dados é, provavelmente, o conceito estatístico mais comum na vida quotidiana dos alunos, uma vez que ouvem falar de ordenado médio, temperatura média diária/mensal, velocidade média, entre outros exemplos. No entanto, este conceito é bem mais complexo do que a simplicidade do seu algoritmo. A maioria dos alunos parece conhecer o algoritmo e ser capaz de resolver problemas com médias, aplicando competências algébricas, mas tem dificuldade na compreensão dos seus diferentes significados. Isto é salientado, por exemplo, num estudo com uma turma do 5.º ano, quando se pede que calculem a média das temperaturas mínimas verificadas ao longo de uma semana num local específico (figura 6) e que expliquem o seu significado (Gregório, 2012, p. 78):

A maioria dos alunos calcula corretamente a média, contudo, apenas um pequeno grupo apresenta uma explicação válida, neste contexto, referindo: «A média é de 3°C, significa que se em todos os dias tivesse a mesma temperatura estaria 3°C» (p. 80). Alguns alunos respondem explicando o procedimento de cálculo da média e não o seu significado: «O seu significado é que todas as temperaturas juntas (21°C) e depois dividirmos por 7 dá 3» (p. 81). Também apresentaram dificuldade em perceber o impacte que o zero tem na média de uma distribuição porque não o consideram como um dos dados, aspeto já identificado por outros autores: «4+4+1+4+5+3=21; 21/6=3,5» (p. 81). Além disso, noutros estudos, os alunos são capazes de encontrar resultados com «adicionar todos e dividir» mas têm menos sucesso na operação contrária, quando precisam de encontrar um valor desconhecido num conjunto de dados a partir do valor da média (Mokros & Russell, 1995).

De facto, diversos estudos evidenciam que os alunos de diferentes níveis de ensino revelam dificuldade em perceber se a média resume bem ou não os dados da distribuição e, por isso, tendem, por exemplo, a usar a moda em questões que requerem

domingo	2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira	sábado
4°C	4°C	0°C	1°C	4°C	5°C	3°C

Figura 6. Temperaturas mínimas registadas ao longo da semana.

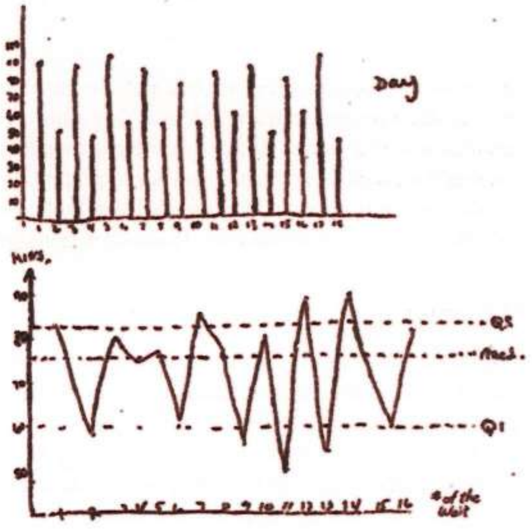


Figura 7. Gráficos usados pelos alunos para representar os dados do Old Faithful (Shaughnessy, 2007, p. 974).

a descrição do que é típico num conjunto de dados (Konold & Higgins, 2003). Proporcionar situações que apelem ao uso da média e que requeiram a negociação e debate dos seus múltiplos significados em diferentes contextos, contribuirá para a compreensão informal, conceptual e algorítmica desta medida (Watson, 2007).

O conceito de moda, por sua vez, é introduzido de um modo intuitivo, desde os primeiros anos de escolaridade e, embora a sua identificação não traga grandes dificuldades, a sua interpretação nem sempre é adequada. Um erro bastante comum, quando o foco em valores singulares dos dados transita para uma conceptualização dos dados como um agregado, é considerar a moda como a maior frequência absoluta em vez do respetivo valor da variável (Batanero, 2000).

De entre as três medidas de tendência central, a mediana parece ser a menos evidente para os alunos (Batanero, 2000). Segundo esta autora, o cálculo da mediana é complexo para os alunos, uma vez que estão habituados a métodos de cálculo e soluções únicos para os problemas matemáticos e o algoritmo para a calcular, sendo que o resultado da sua aplicação é diferente, consoante se tenha um número par ou ímpar de dados ou se tenha dados agrupados ou não. Algumas das dificuldades identificadas no cálculo desta medida são a falta de ordenação inicial dos dados, a não contabilização de valores repetidos e a utilização do dado central das frequências absolutas ou a média dos extremos (Batanero, 2000; Sousa, 2002).

Uma atenção demasiado precoce às medidas de tendência central pode resultar na não identificação de tendências importantes na variabilidade dos dados e no que esta pode revelar sobre os contextos (Shaughnessy, 2007). Como exemplo, consideremos uma situação proposta com os dados de uma série de tempos de espera entre erupções do geiser Old Faithful, correspondente a três dias, para que os alunos tomassem uma decisão sobre quanto tempo seria necessário esperar por uma erupção. Muitos começaram por calcular as medidas de tendência central (média e mediana) para cada dia, baseando nestas as suas predições (Shaughnessy, 2007). Quando posteriormente representaram os dados através de um gráfico, descobriram um padrão curto-longo alternado nas erupções, revelado em algumas representações que não é aleatório mas tem causas geológicas subjacentes (figura 7).

Os resultados deste estudo revelam que os alunos que consideraram a variabilidade dos dados tendem a apresentar uma previsão para o tempo entre erupções através de um intervalo de valores («A maioria das vezes teremos que esperar entre 60 a 85 minutos») em vez de prever, simplesmente, um número (como 77 minutos) (Shaughnessy & Pfannkuch, 2002). Este exemplo mostra bem a importância de os alunos compreenderem o papel da variabilidade nos dados.

Outros estudos, que analisam o pensamento dos alunos sobre a variabilidade entre distribuições de dados a serem comparadas, revelam que estes usam estratégias estatísticas e sumários quantitativos de dados que se centram em características incompletas dos conjuntos de dados, isto é, focam-se, com frequência, em dados particulares ou características individuais dos dados em vez de fazerem comparações globais das distribuições (Watson & Moritz, 1999; Watson, 2001). Estes autores defendem, também, que as tarefas que requerem a comparação de conjuntos de dados (por exemplo, comparar rapazes e raparigas de uma turma que surge naturalmente nos trabalhos dos alunos) permitem desenvolver a capacidade de realizar inferências informais, para os preparar para um estudo posterior mais formalizado.

Interpretação de resultados

Na última etapa do ciclo, os alunos deverão interpretar os resultados obtidos, formulando conclusões e depois refletir sobre todo o processo, nomeadamente a adequação dos dados e a eficácia da análise para fornecer respostas às questões iniciais (Selmer et al., 2011). As conclusões obtidas poderão responder ou não às questões de investigação e, neste último caso, será necessário recolher novos dados e ou reformular as questões de investigação. Também há necessidade de fornecer argumentos persuasivos baseados na análise de dados que podem permitir aos alunos fazer inferências ou levantar questões conduzindo a novas investigações (Sousa, 2002). A literatura evidencia a necessidade de contrariar a tendência dos alunos para o tratamento dos dados como simples números, esquecendo-se que eles estão inseridos em contextos que se pretendem conhecer melhor e que são a razão da análise realizada, sobretudo quando não são os próprios a recolhê-los (Konold & Higgins, 2003).

A Concluir

Os aspetos discutidos, embora de forma muito sumária e não exaustiva, evidenciam uma mudança para um modo flexível e não compartimentado de se perspetivar a aprendizagem da Estatística, valorizando as investigações em contextos diversificados, sempre que possível próximos da realidade dos alunos, e integrando os diversos tópicos do programa. Para tal podem contribuir significativamente os múltiplos recursos tecnológicos hoje disponíveis que podem ser adotados de modos diversificados: como fonte de questões, fonte de dados ou instrumento para tratamento e análise de dados (Tishkovskaya & Lancaster, 2012). O uso de tais recursos em ambientes adequados pode, ademais, potenciar o desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos, proporcionando-lhes acesso a processos estatísticos mais avançados, como por exemplo a inferência estatística informal (Makar & Rubin, 2009). Colocam-se, assim, atualmente desafios que consideramos ser estimulantes para o professor, e para a formação de professores, ao nível dos contextos a propor aos alunos, dos processos estatísticos mais avançados a explorar de modo informal e do tipo de recursos tecnológicos a usar.

Referências

Ainley, J. (2000). Transparency in graphs and graphing tasks: An iterative design process. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19(3), 365–84.

Bakker, A., Biehler, R., & Konold, C. (2004). Should young students learn about box plots? In G. Burrill & M. Camden (Eds.), *Curricular development in Statistics Education, IASE Roundtable* (pp. 163–173). Voorburg: ISI.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, 25, 41–58.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382–393.

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124–158.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1–25.

Gregório, H. M. (2012). *O desenvolvimento da literacia estatística no 5.° ano. O contributo de uma unidade de ensino* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Groth, R., & Bargagliotti, A. E. (2012). GAISEing into the Statistics Common Core. *Mathematics Teaching in Middle Schools*, 18, 38–45.

Jacobs, V. R. (1999). How do students think about statistical sampling before instruction? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(4), 240–246, 263.

Konold, C., & Higgins, T. (2003). Reasoning about data. In G. Burrill (Ed.), *Research Companion to Principles and Standards of School Mathematics* (pp. 193–215). Reston, VA: NCTM.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82–105.

Martins, M. E., & Ponte, J.P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: ME–DGIDC.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Mokros, J., & Russell, S. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 20–39.

Morais, P. (2011). *Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.° ano de escolaridade* (Tese de mestrado, Universidade do Minho).

Moritz. J., & Watson, J. (1997). Graphs: communication lines to students. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *People in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 344–351). Waikato, New Zealand: The University of Waikato Printery.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa do original de 1998).

Roque, C., & Ponte, J. P. (2012). Planeamento estatístico e análise de dados no 3.° ciclo do ensino básico. In *Atas do XXIII SIEM* (pp. 501–518). Lisboa: APM.

Selmer, S., Bolyard, J., & Rye, J. (2011). Statistical reasoning over lunch. *Mathematics teaching in the middle school*, 17(5), 274–281.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957–1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.

Shaughnessy, J. M., & Pfannkuch, M. (2002). How faithful is Old Faithful? Statistical thinking: A story of variation and prediction. *The Mathematics Teacher*, 95, 252–259.

Sousa, O. (2002). *Investigações estatísticas no 2.° ciclo do ensino básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Tishkovskaya, S., & Lancaster, G. (2012). Statistical Education in the 21st Century: a Review of Challenges, Teaching Innovations and Strategies for Reform. *Journal of Statistics Education*, 20(2).

Watson, J. (2001). Longitudinal development of inferential reasoning by school students. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 337–372.

Watson, J. (2007). The role of cognitive conflict in developing students' understanding of average. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 21–47.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 145–168.

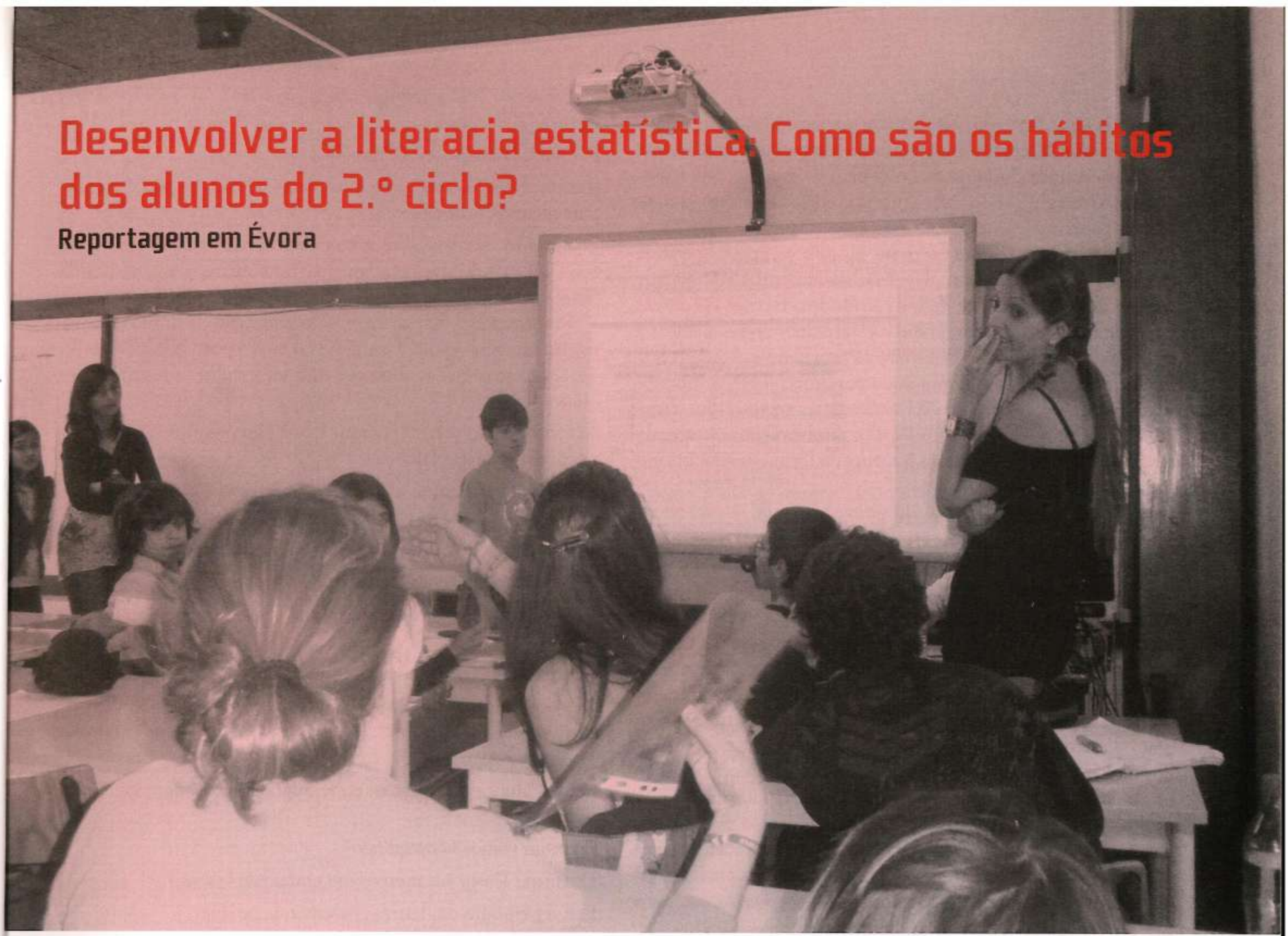
Wu, Y. (2004). *Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs*. Retirado a 16 de Junho de 2012 de http://scholar.google.pt/scholar?q=Singapore+Secondary+School+Students%E2%80%99+Understanding+of+Statistical+Graphs&hl=pt-PT&lr=

Ana Henriques e Hélia Oliveira

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Desenvolver a literacia estatística: Como são os hábitos dos alunos do 2.º ciclo?

Reportagem em Évora



29 de Maio de 2012, Escola Básica Integrada de André de Resende. São 8:15 mas os alunos do 6.º G já entram na sala cheios de energia. Nota-se-lhes o nervoso miudinho próprio de quem vai apresentar o trabalho aos colegas e à professora — e, neste dia, também a mim, e diante da câmara de filmar que me acompanhou.

A professora Mónica Patrício cumprimenta os alunos e vai dizendo:

P: Chegou o dia! Já tínhamos algumas conjeturas sobre alguns assuntos mas hoje é que vamos realmente ver como é! Como será o aluno típico da turma relativamente aos temas que investigaram?

Enquanto os alunos se sentam, a professora vai relembrando que as aulas de Matemática e de Estudo Acompanhado desse dia serão inteiramente dedicadas às apresentações dos estudos efetuados pelos grupos. O objetivo destes estudos foi caracterizar o aluno típico da turma, relativamente a diversos aspetos, e problematizar a qualidade dos seus hábitos. Cada um dos seis grupos ficou responsável por estudar a turma segundo quatro temas diferentes (tabela 1).

Os grupos construíram inquéritos, recolheram os dados, trataram-nos, determinaram medidas estatísticas, construíram gráficos que consideraram adequados e produziram conclusões sobre os temas, trabalhando autonomamente e com o apoio

Tabela 1. Temas de estudo de cada grupo.

Grupo 1	Cor dos olhos, idade, altura, consumo de fastfood.
Grupo 2	Cor do cabelo, sexo, número de pessoas do agregado familiar
Grupo 3	Animal favorito, nº do sapato, separação do lixo, tempo de sono
Grupo 4	Disciplina favorita, n.º de irmãos, profissão futura, peso das mochilas
Grupo 5	Meio de transporte para a escola, sites que visita, tempo dispendido na internet por semana, n.º de dias de estudo por semana
Grupo 6	Ocupação dos tempos livres, n.º de peças de fruta ingeridas por dia, tempo dedicado ao desporto por semana

da professora. Para tal, recorreram a conhecimentos adquiridos no ano anterior e também a novos conhecimentos que a professora introduziu, como o gráfico de caule e folhas e o circular, exemplificando para a turma como estes se construíam e acompanhando a aplicação por cada grupo aos respetivos dados. Durante a realização deste estudo, os grupos produziram uma quantidade assinalável de documentos (inquéritos, tabelas de contagem dos dados recolhidos, tabelas em Excel com tratamento de dados, gráficos estatísticos diversos feitos à mão, textos com conclusões sobre os temas investigados) que foram sendo guardados numa mica por grupo. Posteriormente, os alunos compuseram uma selecção destes recursos em slides de *Powerpoint* ou documentos *Word* e também em acetatos, de modo a fazer as apresentações à turma de forma sustentada e o mais completa possível.

Após algumas indicações de gestão da aula, a professora propõe o início das apresentações, avisando os grupos que devem apresentar dados, medidas e gráficos para cada uma das variáveis estudadas. Convida Miguel para monitorizar o uso do computador e explica-me mais tarde que esta estratégia pretende evitar que este aluno, especialmente ativo, se distraia ou distraia os colegas.

As apresentações decorreram bastante bem, apesar de serem muito detalhadas e prolongadas. Quem apresentava fazia-o com gosto e com preocupação de explicar as opções de tratamento dos dados e as conclusões; quem ouvia fazia-o com atenção e, ainda melhor, questionando e sugerindo alternativas. A professora geria as intervenções, apelava ao uso rigoroso da terminologia, pedia explicações extra sobre os procedimentos adotados, interrogava afirmações menos claras ou precisas dos alunos, dava relevo aos conhecimentos estatísticos usados e incentivava a aprofundar a exploração dos temas tratados.

De seguida reporto três episódios que ilustram o estilo das apresentações e das discussões a que deram origem.

A propósito do consumo de fastfood

O estudo do número de refeições de *fastfood* que os alunos ingerem por mês proporcionou uma discussão bastante interessante, nomeadamente em torno do conceito de média.

Coube ao aluno Dominik fazer esta apresentação, apesar das limitações que ainda sente em se exprimir em português. Ele começou por descrever a tabela projetada, construída em *Word* (figura 1) após a contagem dos dados.

Dominik: A maioria dos alunos come uma refeição de *fastfood* por mês …

Aluno: Não é a maioria!

P: É a maioria, Dominik?

Aluno: Não … é a maior parte, mas não é mais de metade … por isso não é a maioria ...

Domink: Ah pois, é isso que eu quero dizer... A maior parte dos alunos come *fastfood* uma vez por mês … .

Aluno: Mas também há muitas pessoas que comem quatro vezes, são 34%, é quase o mesmo que as que comem só uma vez …

P: Então quantas são as pessoas que comem mais do que uma refeição de *fastfood* por mês?

Aluna: Ah … 62%

P: Como chegaste a esse número?

Aluna: Fiz as contas … — e explica a adição das percentagens para além da primeira.

Entretanto, Miguel abre a calculadora do computador e faz 100−38, usando inesperadamente uma estratégia expedita de obter o mesmo resultado.

Retornando à tabela, foi curiosa a reacção da turma relativamente ao valor 3, que fora previsto como possível resposta no inquérito mas que acabou por não ser escolhido por nenhum aluno.

Aluno: Eu não percebo porque é que eles puseram a linha do 3 na tabela. Não faz falta …

Dominik: Foi porque o 3 era uma resposta mas ninguém respondeu …

Aluno: Eu acho que se ninguém respondeu, não devia estar lá.

P: Porque é que achas isso? Consegues explicar?

Aluno: Então, também não está lá o 5 e outros números que não tiveram respostas …

Dominik: Mas o 3 estava no inquérito!

Aluno: Mas não interessa. Não teve resposta … Não vês que nem sequer fizeram uma barra no gráfico?! Eu digo que não devia estar …

Outros alunos manifestam concordância, professora anui com a cabeça.

P: Então vamos ver o gráfico?

Dominik: Desta vez fizemos um gráfico de barras.

P: E o tamanho das barras corresponde ao quê?

Dominik: A ... a quantas pessoas comem *fastfood* por mês.

Aluno: A barra mais alta é a do 1, uma vez que é o que acontece mais …

P: Pois … mas também já vimos que há ali uns valores um bocadinho assustadores … não há?

Alunos: Sim, sim....

P: Vamos lá ver as medidas, agora fala o Igor. Qual é a moda, Igor?

Igor: A moda é 1 …

P: E já vimos que significa que há mais pessoas a comer *fastfood* uma vez do que outros valores mais elevados — vá lá … E a média?

Marta: A média é 5,53. Está aqui explicado no acetato como fizemos os cálculos …

P: Explica lá como foi, por favor...

Marta: Então, para calcular a média, fomos juntar todos os que comem uma vez, duas vezes, quatro vezes … e assim … e deu-nos 144. E depois dividimos 144 por 26 e deu 5,53. E a nossa conclusão é que o aluno do 6° G come em média 5 vezes *fastfood* por mês …

P: Então a média é 5?

Alunos: Não, deu 5,53 …

P: Então o valor 5 está correto?

Alunos: Não, deviam arrendondar para 6, não era para 5.

N.º de refeições de fast-food por mês

Nº de refeições de fast-food por mês	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Relativa (%)
1	10	10:26=0.38	38%
2	1	1:26=0.04	4%
3	0	0:26=0.00	0%
4	9	9:26=0.34	34%
8	1	1:26=0.04	4%
12	1	1:26=0.04	4%
16	3	3:26=0.12	12%
28	1	1:26=0.04	4%
	26	1	100%

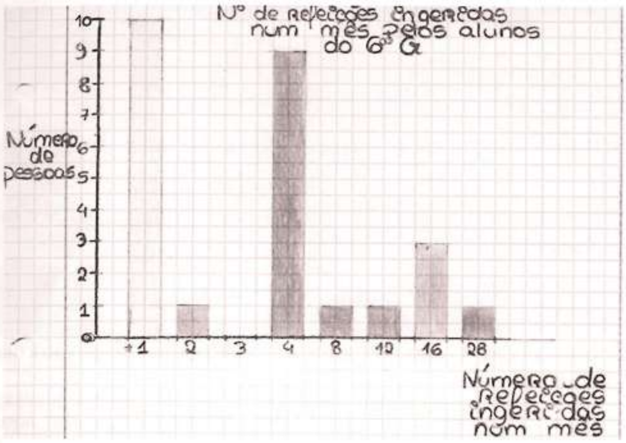


Figura 1. Projeção de ecrã com tabela e gráfico relativos a fastfood

P: Então acham que se deve arredondar a média?

Aluna: Não, porque senão não damos a ideia correta do conjunto, …

P: Então o que é que esse valor da média nos quer dizer?

Aluno: Então, quer dizer que é um valor … mais ou menos …

Aluno: É um valor que equilibra todos os pratos da balança …

P: Pois … mas neste contexto, o que é que isso significa? Manuel, queres arriscar?

Aluno: Então, estamos a distribuir … em vez de termos aqui 10 e ali outro número … em vez de termos tudo incerto, juntámos tudo e distribuímos igualmente para cada, para ver só numa pessoa, quanto é que ela vai consumir de *fastfood* … é como se todos comêssemos 5,53. Os que comem mais dão aos que comem menos …

Outro aluno: Por isso é que a média nem sempre é correta!

P: O que queres dizer com isso? Achas que eles se enganaram nas contas?

Aluno: Não, não é isso! É que a média pode-nos enganar a nós!

P: Ah! Dizes que o valor da média nem sempre pode representar bem o que acontece na generalidade dos casos … E isso acontece aqui no *fastfood*?

Aluno: Eu acho que sim!

P: E então porque é que achas isso?

Aluno: Então … porque aqui neste caso temos valores muito distantes, muito distantes entre si — aluno afasta as mãos enquanto fala, dando a entender a grande dispersão dos dados.

P: Sim, mas disseram que a moda é 1. Há muitas pessoas que apenas comem *fastfood* uma vez por mês … Porque é que a média é tão diferente?

Alunos: Porque também há muitos a comer 4 vezes … e há um que come 28 vezes!

P: Como assim? Então que valores estão a fazer com que a média seja 5,53?

Aluno: O que come 28! Pode ser só um mas o valor é muito grande … e há 3 pessoas que comem 16 vezes *fastfood*, isto também altera a média …

Aluno: Mas quem é que come 28 vezes *fastfood* por mês?!?

P: Isso interessa, António? Lembra-te que o questionário era anónimo porque o que interessa é o conjunto, estamos a estudar a turma e não os alunos individuais …

Aluno: Eu sei, professora, mas fogo … dá mesmo curiosidade em saber …

P: Bom, vamos lá … então porque é que neste caso a moda é tão diferente da média?

Alunos: Porque há uma grande diferença nos valores. Nós calculamos a amplitude e vimos que é muito grande. Porque há valores muito diferentes …

P: E como é que chamamos a essa situação?

Aluno: Há valores muito dis-per-sos! A diferença entre o máximo e o mínimo é muito grande …

P: Pois é! E têm mais alguma coisa dizer?

Aluna: Nós achamos que aqui na nossa turma nem todas as pessoas se estão a alimentar bem. Achamos que já está um bocado mal e que deviam mudar os hábitos alimentares …

P: Muito bem! Então vão investigar esse assunto mais um bocado e vão escrever uma notícia para o jornal da escola sobre o consumo de *fastfood* pela vossa turma! Têm de me enviar até quinta-feira! Tudo bem justificado, não se esqueçam!

A propósito da altura dos alunos da turma

O grupo que estudou a altura dos alunos da turma escolheu construir um gráfico de caule e folhas para representar os dados, separando raparigas e rapazes. Note-se que este gráfico constituía uma novidade para os alunos, mas foi usado por eles com bastante rigor e pertinência.

Foi Marta quem fez esta apresentação, apoiada num acetato previamente elaborado (figura 2).

Marta: Nós lembrámo-nos de comparar porque começámos a ver nos dados que havia diferenças entre as raparigas e os rapazes... as raparigas são mais altas e isso vê-se bem aqui … — E aponta para o gráfico.

P: Nesta turma as raparigas são mais altas que os rapazes … isso não é estranho?

Marta: Quando começa a pré adolescência, as raparigas começam a crescer mais …

Aluno: Mas depois vamos ultrapassar …

Aluno: Pois, os homens são mais altos que as mulheres!

Marta: Mas agora não são, agora somos nós! A maior parte das raparigas tem 1,60 a 1,69 e os rapazes só tem de 1,50 a 1,59 …

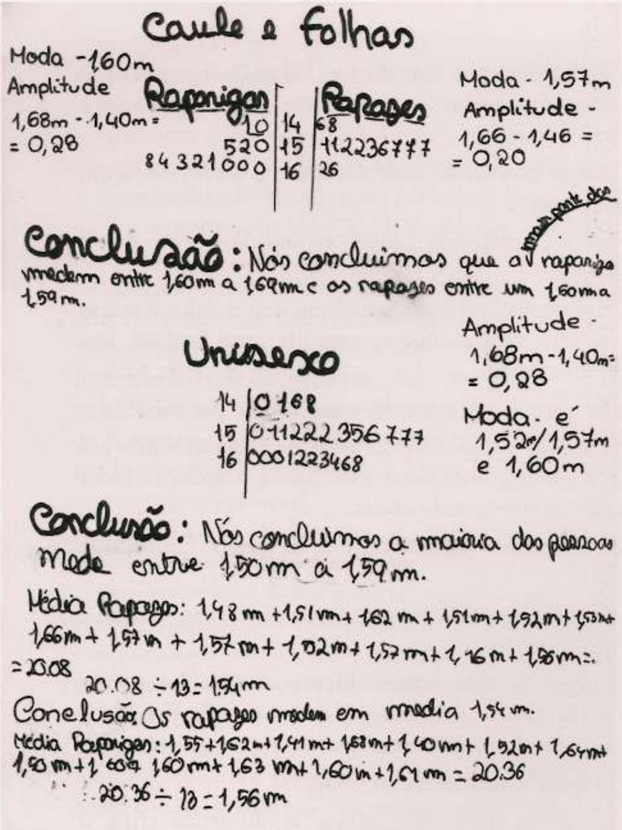


Figura 2. Acetato com tratamento da variável altura da turma

Aluno: Mas a moda da idade dos rapazes e das raparigas é quase igual, só tem 3 cm de diferença …

Marta: Mas somos nós as mais altas!

P: Os dados são os dados, os dados não mentem! E o que é que a turma tem a dizer sobre este gráfico?

Aluna: Eu acho que o gráfico está bom, está percetível … consegue-se perceber bem a diferença entre a altura dos rapazes e das raparigas.

Aluna: Eu também gosto muito destes gráficos, acho bom termos aprendido estes gráficos!

P: Mas que informação dá este gráfico? Vamos ver agora no gráfico da turma toda, que os colegas chamaram de unisexo …

Marta: É como o gráfico de barras! Até podemos virá-lo ao contrário …

Aluno: Dá a informação que o 15 é o mais frequente.

P: O 15 quê?

Marta: Um metro e meio …

P: Ah … Vamos lá ver … temos de ter sempre muito rigor ao ler o gráfico, está bem? Não é só dizer 15 … Temos de saber do que estamos a falar! Olhem lá para os dados, são dados de quê?

Marta: Da altura … é sempre um metro e tal …

P: E quantos alunos têm altura entre um metro e meio e inferior a um metro e sessenta?

Alunos começam a contar as folhas do gráfico para dar a resposta:

Alunos: São doze!

Marta: São nove rapazes e três raparigas!

P: E isso vocês conseguiam responder a partir do gráfico de barras?

Alunos: Sim, também podíamos …

Aluno: Mas no gráfico de barras não podíamos ver a moda, e aqui podemos …

P: Aqui podem ver a moda?

Aluno: Sim, podemos … está ali, são as folhas que estão repetidas …

P: Então porque é que podemos ver a moda neste gráfico e no de barras não?

Aluno: Porque este gráfico mostra os valores da altura e no de barras só mostra a barra toda inteira.

P: Muito bem! Então este gráfico acaba por dar mais informação, não é?

Marta: E também é bom para fazer comparações, como aqui, os rapazes e as raparigas … As raparigas mais altas …

A propósito da separação do lixo

O grupo que estudou a prática de separação de lixo dos alunos da turma optou por construir um gráfico circular. Foi Vasco quem iniciou a apresentação (figura 3) , com base na projeção do documento Word que incluía a tabela e a digitalização do gráfico circular respetivo (figura 4).

Vasco: Nós escolhemos o gráfico circular porque gostamos dele, achamos que é bastante organizado.

P: E o que vos parece este gráfico?

Aluna: Eu acho que sim, que está bem organizado. A legenda está boa... quer dizer … eu acho que não devia ter os riscos, devia ser só os quadradinhos com as cores. Mas as cores estão bem escolhidas, não repetiram nenhum como o outro caso que vimos há bocado …

Vasco: Os riscos foi só para fazer a legenda com a régua, assim foi mais fácil …

Aluna: Sim, mas assim parece uma barra … eu acho que devia ter só os quadradinhos

Aluno: Eu não percebo é os valores. O setor amarelo tem 112%?

P: Isso pode ser? Um setor com 112%?

Aluna: Não, não pode … o máximo é 100% e era se fosse o círculo todo...

Vasco: Isto não é 112%... é 112 graus!

Aluno: Mas não parece! Eu acho que isso não está bem feito!

P: Então explica lá a tua opinião.

Aluno: Eu acho que nos setores não se deve escrever os ângulos... isso é só para fazer o gráfico. Eu acho que ali só devia estar as percentagens … assim é muito confuso e engana-nos …

Aluna: Pois, eles puseram os ângulos com uma letra muito

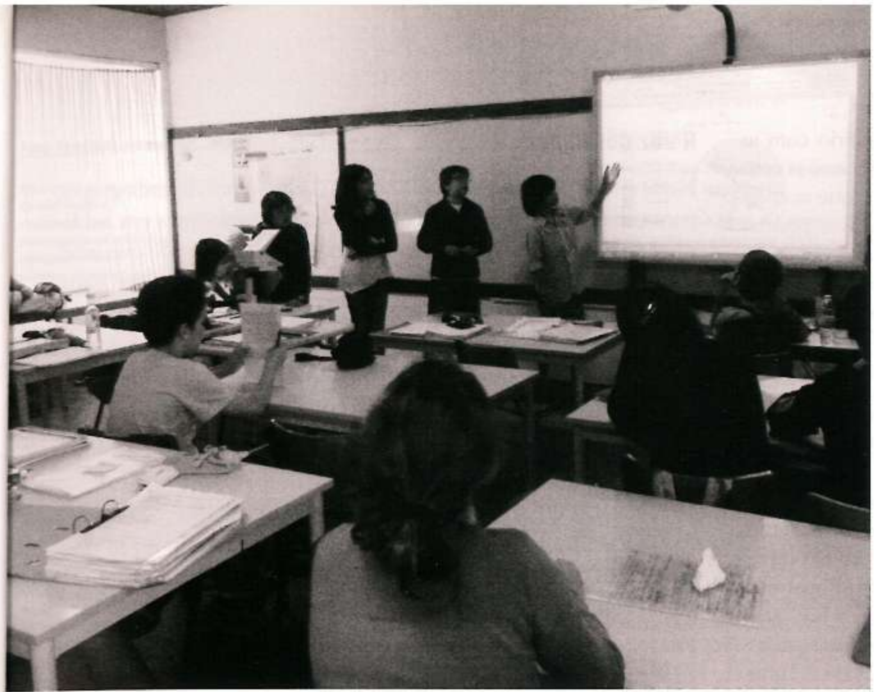


Figura 3. Alunos discutem sobre a apresentação do gráfico circular.

grande e quase não se vê as percentagens …

P: Mas então tem a ver com o tamanho da letra?

ALUNOS: Não! Eu acho que só devem estar a percentagem como está na tabela, isso é que interessa para comparar

ALUNA: Sim, o que interessa é saber que 38% das pessoas faz sempre a separação do lixo

P: E a seguir? Qual é o caso a seguir?

Vasco: É às vezes … é o segundo caso, vê-se aqui no setor amarelo — e aponta para o setor.

ALUNA: A turma não está assim muito bem.

P: O que é que o grupo conclui sobre a separação do lixo da turma?

VASCO, lendo de uma folha: O aluno típico da turma pratica sempre a separação do lixo porque a moda é a categoria mais frequente é sempre. O aluno típico da turma não é amigo do ambiente porque sempre não é a maior parte.

ALUNA: Eu nunca imaginei que ainda houvesse pessoas que não separam o lixo!

P: Pois então vão pesquisar alguma coisa sobre este assunto e fazer a notícia do jornal mas com um gráfico melhorado e entregam na próxima quinta-feira …

ALUNA: Mas com um gráfico mais apresentável!

ALUNO: Podiam pôr as percentagens por fora do gráfico ao lado dos sectores.

A voz da professora

A professora Mónica Patrício explicou como organizou este ano a abordagem à OTD no 6.° ano. Sendo adepta de tarefas de investigação, decidiu manter o mesmo espírito na estatística e planeou para tal um projeto que permitisse aos alunos ter uma experiência enriquecedora relativamente ao que é um estudo estatístico, no qual eles pudessem passar por todas as fases e concluir sobre um assunto que os interessasse: «Quis que se colocassem no papel do estatístico!» — afirma.

Foi bem acolhida pelos alunos a ideia de caracterizar o aluno típico da turma. Considera que foi fundamental ter proposto aos alunos temas de interesse que complementassem as ideias deles sobre as características a estudar — muito focadas em características físicas como a cor dos olhos, cabelo, etc. Isto ampliou o conhecimento da turma e o alcance do estudo, e enriqueceu o trabalho estatístico dos alunos que assim incidiu sobre variáveis de natureza distinta. Após a negociação e distribuição dos temas pelos grupos, passaram à fase de elaboração de instrumentos de recolha de dados, recolha propriamente dita e tratamento dos dados recolhidos:

Prática de separação de lixo

	Frequência Absoluta				
Separação do Lixo	M	F	Total	Frequência relativa	Frequência Relativa (%)
Sempre	4	6	10	10:26=0.38	38%
Quase Sempre	2	4	6	6:26=0.23	23%
As vezes	6	2	8	8:26=0.31	31%
Raramente	1	0	1	1:26=0.04	4%
Nunca	0	1	1	1:26=0.04	4%
Total	13	13	26	1	100%

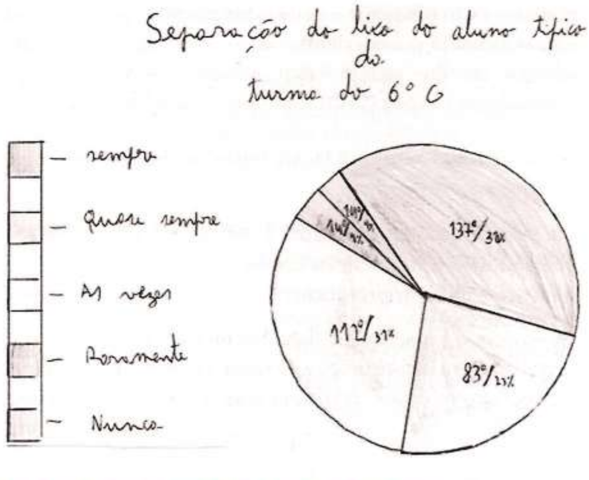


Figura 4. Projeção de ecrã com tabela e gráfico relativos a separação de lixo

Professora: Todos os grupos fizeram o seu questionário com as questões que iriam pedir aos colegas para responder. Fizeram já com algumas opções ... discutimos a vantagem das opções, que se tivessem opções de resposta isso iria facilitar a compreensão das pessoas e, depois, o tratamento dos dados. Puseram opções mas deixaram sempre um espaço para Outros, para se poder conhecer a resposta de quem não se enquadrava nas opções, vimos a importância disso. E discutimos as questões: Será que as questões estão bem formuladas? Será que todas as pessoas vão perceber? E melhorámos ...

Na fase da contagem dos dados é que houve muitos problemas ... eles enganavam-se muito, as contas não davam certo, tinham de repetir muitas vezes ... mas foi importante passarem por este trabalho, para perceberem como é importante serem organizados e sistemáticos. Foram guardando tudo, as contagens, as tabelas. Eles não estavam familiarizados em fazer as tabelas mas eu expliquei um caso em grande grupo e eles lá foram fazendo. Expliquei também aqui o que são as frequências relativas ... e as percentagens. E eles foram fazendo e eu tirava dúvidas quando havia nos grupos. Foi o mesmo com o gráfico circular e o gráfico de caule e folhas. Aparecerem porque se adequavam a uma variável e eu fui explicando quando vinha a propósito. E correu muito bem a fase de tratarem os dados, de calcularem as medidas, fazerem os gráficos... e, além disso, com estas aulas de hoje de discussão, eu também estava descansada porque sabia que teríamos oportunidade de ver tudo e corrigir algo que não estivesse bem e melhorar. Por isso é que também lhes pedi hoje tantas explicações ... para ficar tudo claro, bem esclarecido, com esta discussão muito rica. Hoje foi o culminar de tudo.

Ao focar-se nas aulas das apresentações, destaca-se a preocupação da professora com discutir e clarificar os conhecimentos estatísticos usados e também com o desenvolvimento da literacia estatística dos alunos:

Professora: Pretendia que eles divulgassem o trabalho feito, sabia que eles estavam muito entusiasmados e ansiosos para contar uns aos outros. E tentar puxar por eles e desenvolver o sentido crítico deles relativamente a se o que fizeram estava bem, se o que os colegas fizeram estava bem ... se as tabelas estavam bem construídas, se as medidas estavam bem calculadas, se os gráficos estavam bem feitos, tentar relacionar os dados com o contexto ... e puxar a parte mais do cidadão informado, puxar pela literacia estatística. Claro que eles ainda não tinham uma base muito sólida de argumentação mas agora vão pesquisar e espero que quando escreverem a notícia para o jornal já saibam melhor argumentar. [para o jornal] Vamos talvez só escolher os temas mais gritantes, onde há situações mais assustadoras (...) Peço-lhes que eles baseados nas pesquisas que efetuaram e suportados na informação estatística que recolheram, escrevam sobre a turma e façam sugestões para melhorar os problemas que encontraram.

Em jeito de balanço, sublinha a importância do processo vivido pelos alunos e também os conhecimentos que adquiriram, de estatística e da própria turma:

Professora: Eu acho que lhes deu uma visão fantástica de como se trabalha em Estatística .... O que é fazer um questionário, como se recolhem os dados, as dificuldades que existem na recolha e na contagem dos dados ... eu acho que eles ficaram já com uma ideia muito presente de tudo isso. E ficaram também com um conhecimento muito completo das características da turma ...eles valorizam muito isso e é importante para eles conhecerem-se melhor e poderem tomar decisões sobre os seus hábitos.

A voz dos alunos

No final das aulas ficaram seis alunos comigo, um de cada grupo, para uma breve entrevista coletiva. Foram unânimes em sublinhar a importância do estudo realizado, reconhecendo que este lhes permitiu ficar a conhecer melhor a turma e alertar para aspetos que desconheciam. Foram falando à vez:

Miguel: Nós gostámos muito destas aulas... foram muito interessantes e completas. Não tivemos só de usar lápis e caneta e escrever, não. Nós pudemos usar o computador, levar esta atividade para fora, para casa, fazer trabalho de grupo, experimentar muitas outras técnicas de trabalho ...

Sofia: Cada um de nós podia dar as suas opiniões ...

Andreia: E aprendemos coisas novas para nós, porque nós ainda não conhecíamos esta matéria, não conhecíamos tantas coisas assim da Estatística ...

Filipa: Não sabíamos bem o que era a Estatística e agora já sabemos ....

Ana Luísa: Eu queria dizer que a Estatística é um estudo que nos permite conhecer melhor um certo assunto, permite-nos apurar mais esse assunto, que neste caso foi a nossa turma ...

Solicitados a exemplificar o que de fato aprenderam sobre a turma, surgiram diversas respostas que apontam para aspetos muito concretos, alguns dos quais suscitam preocupações que mereceram comentários dos alunos, que assim tornam pertinentes as conclusões a que chegaram:

Filipa: Conseguimos conhecer mesmo melhor os nossos colegas ...

Andreia: Por exemplo, o número de irmãos ...

Ana Luísa: A mim a profissão futura surpreendeu-me muito. Eu nunca pensei ... Há alunos aqui com profissões futuras muito dispersas ... Surpreenderam-me muito porque nós não estávamos à espera, foram assim profissões fora do normal!

Filipa: E sobre a internet ... concluímos que há muita gente que passa tempo demasiado nas redes sociais ... a maior parte passa duas horas por dia! E isso, é muito tempo. Porque nós precisamos de nos preocupar mais em brincar, estudar, em TPCs ...

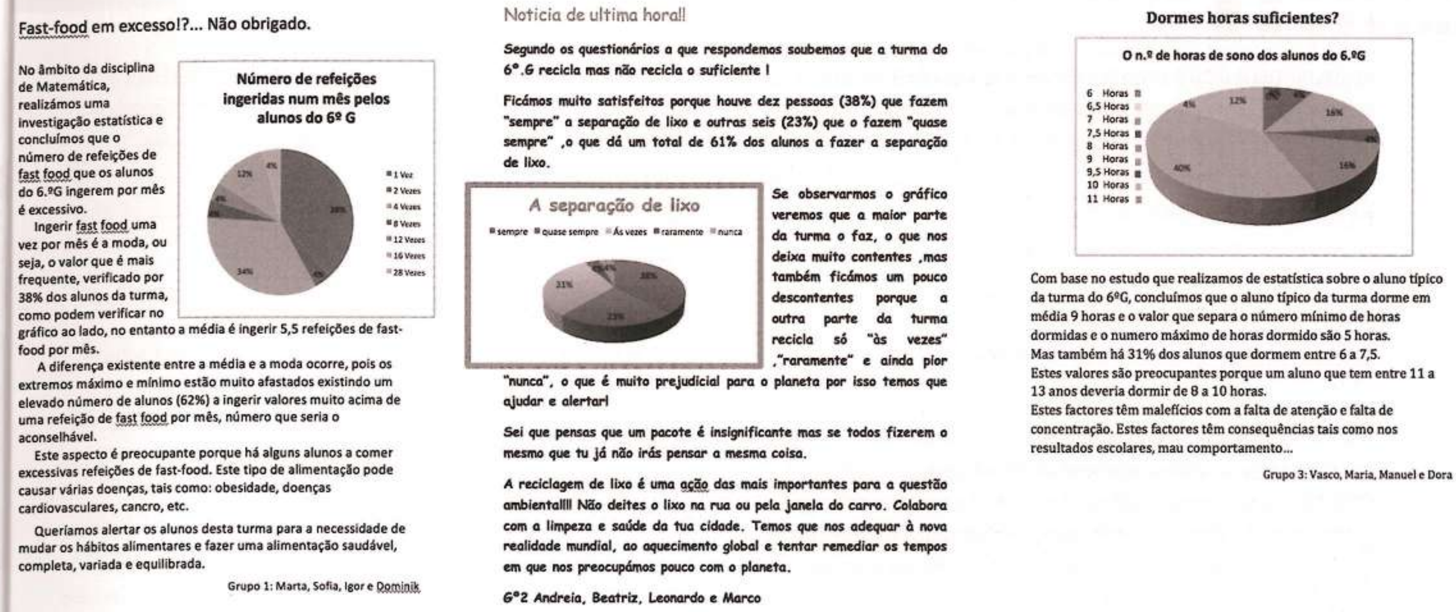
Sofia: E cada grupo ficou a saber muito bem as dificuldades que os outros têm... Por exemplo, eu acho que o estudo do agregado familiar me tocou um bocadinho porque ... saber que uma pessoa vive sozinha ... não vive sozinha mas não tem os pais por perto, amh ... pronto, isso tocou-me ....

Miguel: Também fiquei chocado ao ver que houve uma pessoa que disse que não estudava, que não estudava nada ... pôs zero horas! Espero que essa pessoa veja que os outros colegas estudam, pronto ... um tempo variável por dia mas estudam todos ... e que assim essa pessoa já queira estudar também.

Andreia: E o número de refeições de *fastfood* ...

Sofia: Sim, há uma pessoa que disse que comia 28 refeições por mês. Isso significa que no mês de Fevereiro vai todos os dias comer *fastfood*. Essa pessoa vai ter de ter muito cuidado com a sua alimentação porque senão vai ficar obesa ....

Vasco: Nós agora também vamos investigar mais, a professora de Matemática pediu, e tentar arranjar soluções para podermos tentar acabar com os aspetos negativos da turma.



Fast-food em excesso!?... Não obrigado.

No âmbito da disciplina de Matemática, realizámos uma investigação estatística e concluímos que o número de refeições de fast food que os alunos do 6.ºG ingerem por mês é excessivo.

Ingerir fast food uma vez por mês é a moda, ou seja, o valor que é mais frequente, verificado por 38% dos alunos da turma, como podem verificar no gráfico ao lado, no entanto a média é ingerir 5,5 refeições de fast-food por mês.

A diferença existente entre a média e a moda ocorre, pois os extremos máximo e mínimo estão muito afastados existindo um elevado número de alunos (62%) a ingerir valores muito acima de uma refeição de fast food por mês, número que seria o aconselhável.

Este aspecto é preocupante porque há alguns alunos a comer excessivas refeições de fast-food. Este tipo de alimentação pode causar várias doenças, tais como: obesidade, doenças cardiovasculares, cancro, etc.

Queríamos alertar os alunos desta turma para a necessidade de mudar os hábitos alimentares e fazer uma alimentação saudável, completa, variada e equilibrada.

Grupo 1: Marta, Sofia, Igor e Dominik

Noticia de ultima hora!!

Segundo os questionários a que respondemos soubemos que a turma do 6°.G recicla mas não recicla o suficiente !

Ficámos muito satisfeitos porque houve dez pessoas (38%) que fazem "sempre" a separação de lixo e outras seis (23%) que o fazem "quase sempre" ,o que dá um total de 61% dos alunos a fazer a separação de lixo.

Se observarmos o gráfico veremos que a maior parte da turma o faz, o que nos deixa muito contentes ,mas também ficámos um pouco descontentes porque a outra parte da turma recicla só "às vezes" ,"raramente" e ainda pior "nunca", o que é muito prejudicial para o planeta por isso temos que ajudar e alertar!

Sei que pensas que um pacote é insignificante mas se todos fizerem o mesmo que tu já não irás pensar a mesma coisa.

A reciclagem de lixo é uma ação das mais importantes para a questão ambiental!!! Não deites o lixo na rua ou pela janela do carro. Colabora com a limpeza e saúde da tua cidade. Temos que nos adequar à nova realidade mundial, ao aquecimento global e tentar remediar os tempos em que nos preocupámos pouco com o planeta.

G°2 Andreia, Beatriz, Leonardo e Marco

Dormes horas suficientes?

Com base no estudo que realizamos de estatística sobre o aluno típico da turma do 6ºG, concluímos que o aluno típico da turma dorme em média 9 horas e o valor que separa o número mínimo de horas dormidas e o numero máximo de horas dormido são 5 horas.
Mas também há 31% dos alunos que dormem entre 6 a 7,5.
Estes valores são preocupantes porque um aluno que tem entre 11 a 13 anos deveria dormir de 8 a 10 horas.
Estes factores têm malefícios com a falta de atenção e falta de concentração. Estes factores têm consequências tais como nos resultados escolares, mau comportamento...

Grupo 3: Vasco, Maria, Manuel e Dora

Figura 5. Três notícias elaboradas pelos alunos para o jornal da escola

Andreia: A reciclagem!

Vasco: As horas de sono! Há alunos que dormem muito pouco ...

Filipa: E outros que dormem demasiado! Eu nunca pensei que aqui houvesse alunos que dormissem 11 horas, porque ... tem de se deitar muito cedo, tem de se deitar para aí às 8 horas da noite porque nós temos aulas às oito e quarto ...

Miguel: O meu melhor amigo vive em Valverde e ele tem de apanhar o autocarro para vir para a escola. Ele acorda muito cedo, para aí às seis, e por isso ...

Vasco: Isso vai influenciar os estudos porque uma pessoa não vai ficar tão atenta nas aulas ...

Ao perguntar-lhes como tinham conseguido saber tantas coisas, referiram-se sem hesitações ao processo seguido e caracterizaram-no com quatro *fases*: a escolha dos temas, construção dos questionários e obtenção das respostas, organização primeira dos dados recolhidos em tabelas (contagem dos dados), construção de tabelas de frequência, de gráficos e cálculo de medidas.

A entrevista rematou-se com um balanço global:

Ana Luísa: Foi muito interessante, foi uma experiência nova... Deu-nos a conhecer ... deu-nos a descobrir uma melhor ideia do que se passa, como são as pessoas, isso foi muito importante porque deu-nos a conhecer ... vá ... «a parte de dentro» dos alunos cá da turma.

Miguel: Ao conhecermos aqueles dados todos, podemos saber coisas que nos ajudam a aproximar dos nossos colegas em vez de nos afastar.

A concluir

Esta reportagem ilustra bem como estes alunos do 2.° ciclo se envolveram e empenharam num trabalho estatístico significativo. Para tal contribuiu a possibilidade de poderem ter um papel de relevo desde o início do estudo, logo na definição dos assuntos a tratar, bem como o de percorrerem todas as etapas de um estudo estatístico, incluindo a divulgação das conclusões de que aqui se dá testemunho.

Sublinho que no decorrer deste trabalho, os alunos elaboraram instrumentos de recolha de dados, aplicaram-nos e contaram e classificaram os dados recolhidos, tendo assim a oportunidade de lidar com aspetos sensíveis do tratamento e organização de dados dos quais são frequentemente privados.

Além disso, ao fazerem o estudo das variáveis com vista a obter conclusões e a fazerem a sua apresentação, os alunos construíram tabelas, determinaram medidas e elaboraram gráficos, utilizando com significado os conceitos estatísticos que tantas vezes, em muitos exercícios, lhes são pedidos de forma árida e desprovida de sentido.

Posteriormente os grupos redigiram notícias para o jornal da escola, com foco nos assuntos considerados mais críticos (exemplos na figura 5). É interessante notar que optaram por incluir gráficos feitos em computador nestas notícias, curiosamente todos gráficos circulares, denotando preocupação com a apresentação — o que faz sobressair a importância de o professor proporcionar aos alunos a oportunidade de aprenderem a usar bem as tecnologias disponíveis para trabalhar em OTD.

Faço ainda notar que as escolhas dos alunos para as notícias do jornal incidiram sobre temas que os caracterizam não fisicamente, mas sim do ponto de vista dos seus hábitos. Recordo que muitos destes temas foram sugeridos pela professora no início do estudo, sendo uma das suas motivações o desenvolvimento da literacia estatística dos alunos. Sem dúvida que este estudo lhes possibilita adotar uma atitude mais informada e crítica sobre aspetos essenciais da sua vida e que podem e devem ser, desde cedo, por eles conhecidos.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Neste número desta revista temática dedicada à Estatística e Probabilidades, considerámos pertinente discutir as alterações programáticas relativas à Organização e Tratamento de Dados (OTD) que as metas de aprendizagem criadas pelo atual Ministério da Educação pretendem sobrepor ao Programa de Matemática em vigor no ensino básico. Para tal, solicitámos a entidades de relevo no domínio da educação matemática que comentassem, de forma breve mas concreta, as propostas das metas de aprendizagem relativas ao tema de OTD. Aqui ficam os respetivos testemunhos, datados de Outubro e Novembro de 2012.

Organização e tratamento de dados

O tema Organização e tratamento de dados (OTD) teve no Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) uma valorização significativa relativamente aos programas de 1990-91, muito em especial no 1.° ciclo. O documento das metas curriculares serve como lugar para uma introdução prematura e despropositada da teoria dos conjuntos logo no início do ensino básico. Nos 1.° e 2.° anos de escolaridade as metas curriculares apresentam no tema OTD dois subtemas: Representação de conjuntos e Representação de dados. No primeiro subtema do 1.° ano a meta e respetivos descritores são:

Representar conjuntos e elementos

1. Utilizar corretamente os termos conjunto, elemento e as expressões pertence ao conjunto, não pertence ao conjunto e cardinal do conjunto.
2. Representar graficamente conjuntos disjuntos e os respetivos elementos em diagramas de Venn.

(1.° ano, OTD, p. 8)

No 2.° ano, para o mesmo subtema aparecem as operações com conjuntos:

Operar com conjuntos

1. Determinar a reunião e a interseção de dois conjuntos.

(1.° ano, OTD, p. 14)

Os autores das metas parecem assim ignorar o fracasso que foi a experiência da tentativa de introdução da teoria de conjuntos no 1.° ciclo no final dos anos setenta do século passado em Portugal, mas também a nível internacional como comprovam diferentes estudos sobre a introdução da Matemática Moderna. Deste modo, o estudo da OTD, que deveria servir para desenvolver nos alunos a capacidade de compreensão e de produção de informação de natureza estatística, com forte conexão com a realidade, é usado como pretexto para abordar o assunto mais abstrato e de mais difícil aceitação pelos alunos desta faixa etária.

O planeamento, realização e análise de investigações estatísticas, como processo global, proposto no PMEB e que pode constituir uma experiência formativa muito importante para os alunos, é completamente marginalizado nas metas curriculares. Além disso, a abordagem informal à noção de probabilidade e a ideia de aleatório que o PMEB indica que seja realizada no 1.° ciclo são eliminadas com o pretexto que não pode ser devidamente ensinado neste nível.

Porquê esta desvalorização da ligação da disciplina de Matemática (através da Estatística) ao estudo de situações da realidade? Qual a razão para empobrecer o desenvolvimento das ideias intuitivas dos alunos? Porque se pretende de modo tão ligeiro repetir experiências que no passado se revelaram desastrosas?

Coordenadores da equipa de autores do
Programa de Matemática do Ensino Básico

Lurdes Serrazina,
João Pedro da Ponte

Ainda as metas de Matemática ...

Tendo feito parte da equipa que procedeu ao ajustamento do programa de Matemática do Ensino Básico, nomeadamente no tema Organização e tratamento de dados (OTD), como especialista desta área, justificava-se um olhar atento à proposta das Metas de Matemática, apresentadas em 28 de Junho e postas em discussão pública até 23 de Julho.

O facto de nenhum dos autores destas metas ter formação Estatística, pode ser sintomático e justificar o facto de no tema Organização e tratamento de dados (OTD), do documento colocado à discussão, se verificarem algumas situações menos claras e conducentes a erros, ou até erradas, que levou a Comissão Especializada de Educação (CEE) da Sociedade Portuguesa de Estatística, de que faço parte, a elaborar um parecer sobre o tema de OTD do programa[1]!

Neste documento da CEE, que pode ser consultado na página da Sociedade Portuguesa de Estatística, pronunciamo-nos sobre algumas questões de base, a par de algumas questões científicas, pontuais. De entre as questões a que se tem dado mais enfase, destacamos a discordância pela inclusão em OTD da referência à Teoria dos conjuntos e, contrariando o que está estipulado no programa em vigor, a não inclusão da referência a situações aleatórias logo nos ciclos iniciais.

Para elaborarem a versão final das metas, os autores tomaram em consideração algumas das sugestões e recomendações do parecer elaborado pela CEE, infelizmente não as seguindo totalmente, pelo que é um documento que continua, quanto a mim, a enfermar de situações preocupantes ou menos claras. A título de exemplo e sem procurar ser exaustiva, transcrevo algumas das recomendações da CEE que não foram tidas em consideração:

Página 3 do parecer da CEE «A opção dos autores pela inclusão no tema de OTD da referência à Teoria dos Conjuntos, não nos parece adequada. O termo primitivo conjunto e alguns dos conceitos que podem ser introduzidos a este nível de escolaridade, como os de pertença, inclusão e cardinal, são demasiado importantes em Matemática e poderão vir a originar confusões graves caso sejam incluídos no tema de OTD. O problema ... »

Página 3 do parecer da CEE «É também uma opção dos autores terem deixado de lado as questões relativas a ... regidos pelo acaso. Não é essa a nossa opinião. Veja-se, por exemplo, ... »

Página 5 do parecer da CEE «Quando no ponto 1.1 os autores se referem a representar números naturais em diagramas de caule-e-folhas ... estão a pensar em dados? Como é referido na citação com que se inicia este texto, dados são mais do que números .... Pode-se sugerir que a variável a estudar seja de natureza quantitativa discreta, o que satisfaz os objectivos dos autores». Comentário: Na versão final das metas os autores foram parcialmente sensíveis à recomendação anterior e escrevem «Representar conjuntos de dados expressos na forma de números inteiros não negativos em diagramas de caule-e-folhas». Não teria sido mais simples escrever «Representar conjuntos de dados discretos em diagramas de caule-e-folhas», substituindo a linguagem matemática pela linguagem estatística?

Página 8 do parecer da CEE «Quando, em Matemática, se está a representar pontos de R^2 num sistema de eixos cartesianos, não se está a representar dados! A situação é exactamente a oposta! Quando temos dados quantitativos bivariados utilizamos uma representação em sistema de eixos cartesianos para nos ajudar a fazer a sua leitura e interpretação. As ferramentas da Matemática são usadas na Estatística, mas não fazem parte da Estatística e devem, em nossa opinião, ser enquadradas num tema apropriado e não em OTD».

Página 11 do parecer da CEE «No ponto 1.1, pressupõe-se que os dados estejam organizados em classes para se proceder à sua ordenação! Não vemos essa necessidade ...»

Página 13 do parecer da CEE «Os pontos 1.1, 1.2 e 1.3 estão pouco claros e mal se percebe que o que os autores pretendem é classificar os dados em qualitativos ou quantitativos e estes em discretos ou contínuos». Comentário: Penso que é completamente errada a opção que os autores insistem em tomar, na versão final das metas, ao tentar estabelecer uma ligação entre a forma como as variáveis se classificam em discretas e contínuas a partir da forma como se organizam em classes! As variáveis não são discretas ou contínuas por se organizarem em classes da forma como os autores sugerem, mas é precisamente o contrário!

Página 13 do parecer da CEE «Em 3.5 discordamos em absoluto da necessidade de que <cada um dos casos possíveis ocorra aproximadamente com a mesma frequência ...>. Não se admitem experiências realizadas com moedas viciadas ou dados truncados, para já não falar da maioria das situações decorrentes do dia a dia?! De acordo com o preconizado no ponto 3.6, os autores pensam que não se pode utilizar os termos mais provável, igualmente provável, possível, impossível e certo sem se conhecer a regra de Laplace. Ficamos restritos a um mundo muito limitado onde quase nunca poderemos utilizar tais termos».

Notas

1 O facto de não ser especialista em nenhum dos outros temas do programa de Matemática, impede-me de comentar as propostas que os autores das metas fazem sobre esses temas, ainda que discorde que com as metas se pretenda alterar um programa que está homologado e em vigor.

Maria Eugénia Graça Martins
Membro da Comissão Especializada de Educação da Sociedade Portuguesa de Estatística

Metas curriculares ou o arrepio da investigação em educação matemática

No parecer que a SPIEM produziu relativamente à proposta de Metas Curriculares para a Matemática do Ensino Básico (disponível em http://www.spiem.pt), muitos foram os argumentos que apresentámos para sublinhar que este documento não é consentâneo com o atual Programa de Matemática e que reflete uma visão muito pobre e desfasada do que é relevante nas aprendizagens matemáticas dos alunos dos nossos dias. Além disso, tal visão é até mesmo contrária aos resultados da investigação reconhecida como credível no domínio da Educação Matemática, tanto a nível internacional como nacional.

Tendo em conta o foco desta revista, centramos este breve comentário na área da OTD para ilustrar a nossa apreciação global. Optamos por nos referir apenas às Probabilidades, tema que tem merecido menos atenção do que a Estatística mas que não é de somenos importância. Uma análise superficial é suficiente para concluir que as Metas Curriculares contrariam o Programa de Matemática em tudo o que diz respeito a este tema. Na realidade, o Programa propõe que os alunos explorem situações aleatórias que envolvam o conceito de acaso desde o 1.º ciclo, que usem de forma adequada conceitos relacionados com a possibilidade de um determinado acontecimento e que as experiências aleatórias forneçam contextos adequados para a recolha e análise de dados. No entanto, as Metas Curriculares remetem as Probabilidades exclusivamente para o 9.º ano, em formato condensado e com uma abordagem formal. O problema com esta opção não é simplesmente o de atrasar a abordagem ao tema. O problema essencial é que com este atraso se desperdiça a oportunidade de os alunos irem clarificando de forma progressiva e adequada as suas conceções intuitivas, tantas vezes erróneas, perante as situações que a realidade lhes coloca no seu dia-a-dia. É este contacto que constitui a base fundamental para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e para o reconhecimento do valor das probabilidades.

Notamos que o National Council of Teachers of Mathematics nos diversos documentos que tem produzido com orientações curriculares, defende que os alunos devem ser capazes de compreender e aplicar conceitos básicos de Probabilidades desde os primeiros anos até ao final da escolaridade não superior. Propõe que os alunos iniciem o contacto com as Probabilidades com a descrição de acontecimentos certos, prováveis ou impossíveis, e prossigam com a identificação da noção de probabilidade como medida da tendência de um acontecimento, a qual se pode até quantificar por processos adequados e articulados com a realização e análise de simulações diversas.

Estas perspectivas curriculares colhem o apoio da investigação a nível internacional. Numa ampla revisão de literatura intitulada Research in Probability, publicada em 2007 no Second handbook of research on mathematics teaching and learning, da autoria de Jones, Langrall e Mooney, pode ler-se que «existe um amplo consenso de que o ensino da Probabilidades deve começar nos primeiros anos de modo a proporcionar a construção de intuições sólidas e enraizadas no contacto com experiências aleatórias» (p.909). Mas a intencionalidade subjacente a este resultado da investigação é algo que os autores das Metas Curriculares parecem desconhecer ou querer ignorar.

A direção da SPIEM,
Leonor Santos, Ana Paula Canavarro, António Domingos, Joana Brocardo, Rosa Antónia Ferreira

Metas curriculares ou a avestruz que enfiou a cabeça na areia

A Comissão de Acompanhamento do Plano da Matemática II e do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (CA) exprime uma vez mais o seu total desacordo com as Metas Curriculares para a Matemática do Ensino Básico. Este conjunto de metas é incoerente com o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) em vigor, homologado em 2007 e generalizado em 2009/2010. Além disso, estas metas contrariam fortemente todo o trabalho que tem sido feito, junto dos mais de mil agrupamentos de escolas/escolas não agrupadas desde há vários anos, num esforço conjunto de professores (de vários níveis de ensino), órgãos de gestão e membros da sociedade em geral para melhorar as práticas letivas e as aprendizagens matemáticas dos alunos, à luz do PMEB e da investigação consolidada em Educação Matemática.

Na realidade, a promoção das capacidades transversais, tão valorizadas no PMEB, tem sido uma marca recorrente das práticas de ensino da Matemática que começou a revelar alguns frutos nas aprendizagens dos alunos. Para tal, convergiram práticas de ensino que se afirmaram, entre outros aspetos, pela diversificação das tarefas propostas aos alunos, enriquecendo-se o reportório dos exercícios com tarefas de natureza mais aberta e problemática, contextualizadoras e integradoras dos conhecimentos matemáticos em exploração.

Somos assim especialmente sensíveis ao facto de as Metas Curriculares inexplicavelmente desprezarem a realização de projetos pelos alunos, nem sequer os considerando no domínio da Estatística. Destacamos que os projetos estatísticos são apontados como fundamentais nas orientações curriculares de muitos países, em particular em Portugal que reserva ao planeamento de uma investigação estatística uma importância crucial, valorizando-se o papel do aluno desde a eleição da problemática a estudar e elaboração das questões até à divulgação das conclusões obtidas.

Mas o entendimento das Metas Curriculares parece ser outro. Para os seus autores, a Estatística surge como um domínio de aplicação de procedimentos padronizados e rígidos para a determinação de medidas (por exemplo, a média de um conjunto de dados numéricos é identificada como o quociente entre a soma dos respetivos valores e o número de dados) e o uso dos conhecimentos estatísticos é feito no quadro da resolução de problemas específicos no qual é ignorado o papel do aluno e a relação que ele deve desenvolver com o conhecimento estatístico – o qual lhe deve proporcionar, recordamos, a possibilidade de se tornar um cidadão capaz de lidar com a realidade à sua volta de forma informada, fundamentada e crítica. É caso para perguntarmos: Conhecerão os autores das Metas Curriculares o conceito de literacia estatística ou não quererão considerá-lo por não se poder determinar por via procedimental?

Comissão de Acompanhamento do Plano da Matemática e Novo Programa de Matemática do Ensino Básico
Leonor Santos, Ana Paula Canavarro, Elvira Santos, Manuela Pires, Maria Helena Martinho, Nélia Amado e Rosa Antónia Ferreira

Resolver problemas envolvendo ...

Nesta secção de pontos de vista falaremos das Metas Curriculares relativas a OTD, começando com um objetivo geral, para nós de grande importância e que não podemos dissociar de qualquer outro tema matemático: Resolver problemas. Este objetivo aparece no documento das Metas Curriculares seguido apenas de um descritor, na maior parte dos subdomínios: Resolver problemas envolvendo ... . Voltamos à introdução e procuramos algo sobre as Capacidades Transversais (PMEB), chamadas aqui de temas transversais, e nada, nenhuma referência à Resolução de Problemas. Estranhamos, ou talvez não, e considerando que a intenção seria tratar-se de um documento bastante estruturado e com princípios pedagógicos bem explícitos, assim como com descritores bem precisos, ainda nos faz estranhar mais.

Veja-se então o domínio OTD: não é muito extenso, o que nos permitiu uma análise transversal dos três ciclos. A título de exemplo, na meta OTD8 (pág. 72), subdomínio Diagramas de extremos e quartis, o primeiro objetivo é claro: Representar, tratar e analisar conjuntos de dados. Descritores: Identificar..., Reconhecer ... , Representar... Como lemos na introdução do documento « ... redigidos de forma objetiva». Quanto ao segundo objetivo, o descritor é simplesmente «Resolver problemas envolvendo a análise de dados representados em gráficos diversos e em diagramas de extremos e quartis». Ou seja, num ano em que o trabalho dos alunos se deve centrar na realização de um projeto, a resolução de problemas aparece apenas ao serviço dos mesmos conteúdos que são o único foco deste tema ao longo do documento das metas curriculares.

De um documento clarificador esperávamos mais (e melhor!). Afinal estamos a falar de resolução de problemas, aquela competência, (poder-se-á ainda usar esta palavra?) que tem vindo a ser enfatizada há décadas por educadores (e) matemáticos e que o Programa de Matemática considera fundamental. «Trata-se de ser capaz de resolver e de formular problemas, e de analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema. A resolução de problemas não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos» (PMEB, pág. 8). Como noutros temas matemáticos, OTD proporciona excelentes oportunidades de alcançar estes objetivos.

Sabemos que está previsto um caderno de apoio contendo suportes teóricos aos objetivos e descritores, bem como exemplos de concretização de alguns deles, mas a impressão que nos fica e que queremos aqui salientar é que há uma nítida desvalorização da resolução de problemas na abordagem a este tema, assim como noutros. Abordagem que poderá ser tão enriquecida com tarefas que vão além (ainda que essenciais ...) de Construir..., Identificar..., Determinar ... , Reconhecer ... , Designar. Gostaríamos que este documento também servisse para sublinhar a importância de continuar a fazer este caminho e de, voltamos ao PMEB, «proporcionar situações frequentes em que os alunos possam resolver problemas, analisar e reflectir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas ... » (Orientações Metodológicas, pág. 9).

Professores Acompanhantes do Plano da Matemática II e do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico

No mundo de hoje ... preparamos o amanhã

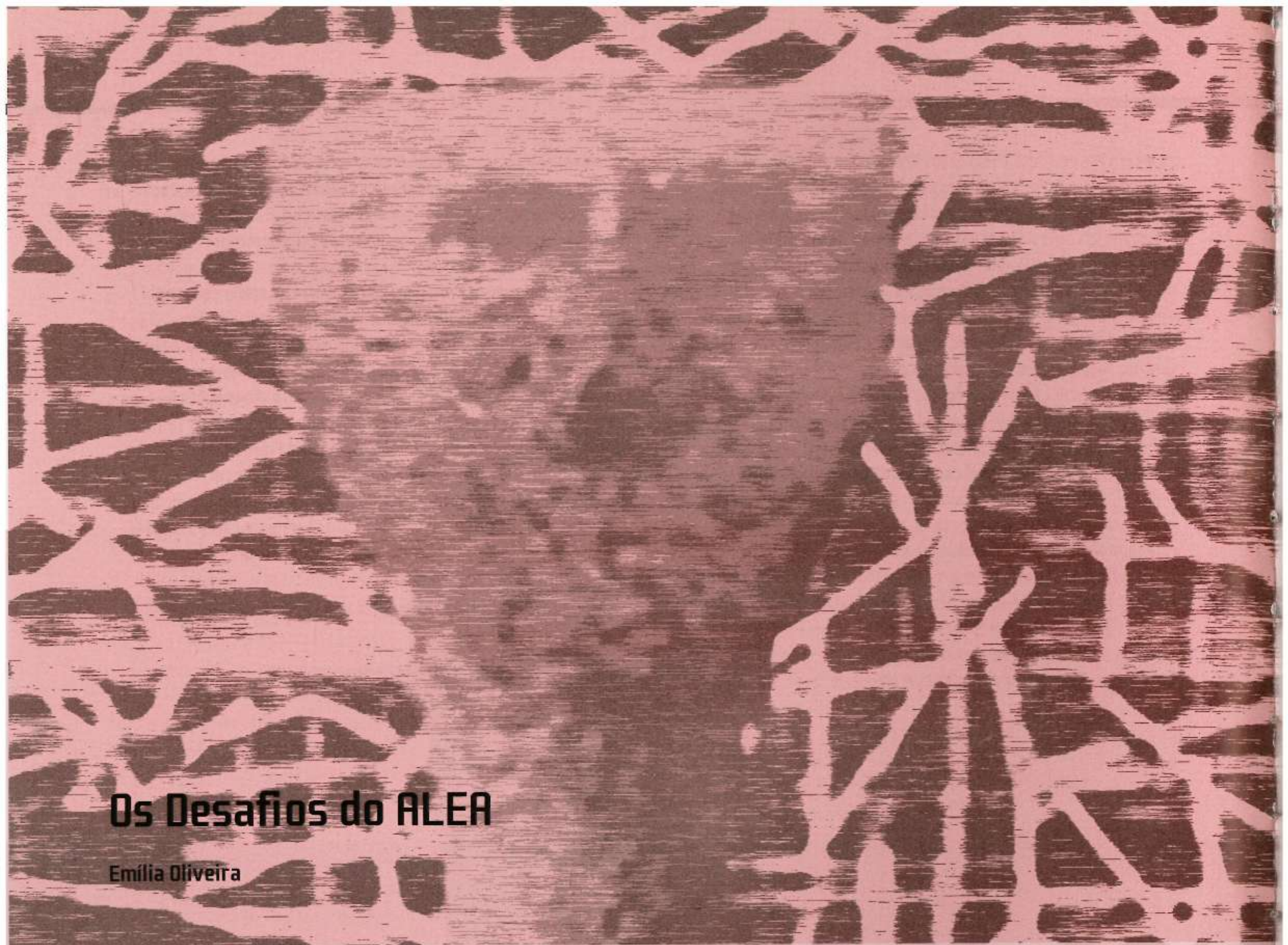
Nesta era de globalização, a informação é difundida e atualizada ao segundo e à distância de um clique. Somos bombardeados com diferentes tipos e fontes de dados que são transformados, engalanados e apresentados sob diferentes formatos, consoante a perspetiva e intenção que se pretenda.

A informação quantitativa que nos surge na forma de tabelas, gráficos, percentagens, ou simplesmente em linguagem natural com recurso a uma terminologia própria da Estatística resulta, por vezes, de uma distorção de dados manipulados por interesses do mundo da publicidade, da comunicação social, da política... Apesar de parecer uma questão de senso comum, estudos recentes salientam que os adultos não pensam estatisticamente para analisar este tipo de informação e assim decidir sobre assuntos pessoais do seu interesse. É nesse sentido que, hoje, se encara como fundamental que as crianças comecem a trabalhar com esses termos e representações o mais cedo possível, desenvolvendo de forma progressiva a capacidade de analisar, interpretar e criticar a informação recebida, e justificar a tomada de decisões. É esta a perspetiva que encontramos espelhada nas recomendações do PMEB, relativamente ao tema OTD.

Procurando dar resposta às exigências do mundo atual, o PMEB apresenta propósitos principais do ensino do tema OTD, que se centram no desenvolvimento da capacidade de ler e interpretar dados organizados na forma de tabelas e gráficos, e ainda na capacidade de os recolher, organizar e representar com a finalidade de utilizar esses conhecimentos para resolver problemas em contextos variados relacionados com o seu quotidiano. Espera-se que esse trabalho leve os alunos a compreender e produzir informação estatística e que, através da resolução de problemas, venham a ser capazes de tomar decisões informadas e argumentadas. Por seu lado, e de forma espartilhada, a terminologia presente nas Metas Curriculares – identificar... , construir ... , representar ... , designar ... , reconhecer ... – é insuficiente para evidenciar a riqueza das aprendizagens que poderão emergir do envolvimento ativo dos alunos, sugerido pelo PMEB. O planeamento estatístico e o consequente desenvolvimento de autonomia e sentido crítico perante a resolução de problemas estão ausentes nas Metas. De forma impudente e redutora, as Metas escamoteiam estas aprendizagens, desvalorizando o trabalho de alunos e professores. Procuram ser indicadores da destreza dos alunos em (re)ação a questões tipo e pretendem, sobretudo, medir o grau com que dominam procedimentos e definições.

Sabendo que as Metas são consideradas pelo Ministério da Educação e Ciência como um «documento de referência» e que divergem das orientações emanadas pelo PMEB, ocorre-nos naturalmente questionar: que visão de sociedade tem este MEC? Que cidadãos pretende formar? Com que literacia estatística?

P'la Direção da APM
Elsa Barbosa
Hélia Jacinto
Joana Latas



Os Desafios do ALEA

Emília Oliveira

Introdução

A comunicação social utiliza frequentemente gráficos para ilustrar artigos e tornar os seus pontos de vista mais convincentes. Ler e compreender este tipo de informação é, portanto, uma componente essencial da literacia estatística.

O projeto ALEA — AÇÃO LOCAL DE ESTATÍSTICA APLICADA (www.alea.pt) foi criado precisamente com o propósito de criar instrumentos relacionados com a compreensão, a utilização e o ensino da Estatística, destinados essencialmente aos docentes e alunos do ensino básico e secundário; é, pois, um instrumento para a literacia estatística neste contexto. A sua ação é exercida fundamentalmente através de páginas web, com a divulgação de diversos conteúdos: os cursos de Noções de Estatística e de Noções de Probabilidades, as fichas com atividades, tarefas, notas e propostas destinadas a sistematizar a formação básica de Estatística a nível elementar (ActivALEA), os dossiês didáticos sobre temáticas variadas, a informação estatística do INE, os jogos didáticos e cartoons humorísticos, os desafios do ALEA etc.

Os desafios do ALEA são problemas relativos a questões do dia a dia, baseados em notícias publicadas em órgãos de comunicação social, e destinam-se a alunos do ensino básico e secundário. Cada desafio tem dois níveis de dificuldade: *nível 1* — só para alunos do ensino básico e *nível 2* — para qualquer aluno. Há prémios, sorteados entre os alunos que respondem acertadamente. Os prémios são enviados para as escolas dos alunos premiados.

As questões dos desafios são, em geral, acessíveis, exigindo aos alunos conhecimentos elementares de Estatística. Na sua maioria, os problemas envolvem a leitura de dados de uma tabela e/ou gráficos, bem como a sua interpretação, o cálculo e interpretação de percentagens, o cálculo e propriedades das medidas de localização e o cálculo de probabilidades. É também frequente serem colocadas questões a partir dos títulos ou afirmações constantes nas notícias, para que os alunos reflitam e analisem a utilização correta ou incorreta das estatísticas e/ou da Estatística pelos órgãos de comunicação social.

Figura 1. Página dos desafios

Desde o início desta iniciativa foram já apresentados 35 desafios envolvendo temas como *As Energias do Século XXI*, *Mulheres ao Poder*, *Audiências de TV*, *Saúde*, *Procura de Trabalho*, *Divórcios*, etc. É lançado, em média, um Desafio por período letivo.

A página principal dos desafios está no endereço: http://www.alea.pt/html/desafios/html/desafios.html e a sua imagem é apresentada no ecrã descrito na figura 1.

As respostas são enviadas diretamente através desta página dos *desafios*. Logo a seguir às questões colocadas, surge um texto com a indicação *responder ao problema de nível 1* ou *responder ao problema de nível 2*. Ao clicar nesse texto, surge a *caixa* de resposta. Nessa *caixa*, os alunos registam o nome, ano de escolaridade, turma e escola que frequentam, escrevem as respostas às perguntas colocadas e no final carregam no botão *Enviar a resposta*.

A participação nos desafios tem crescido ao longo do tempo. No ano letivo 2011/2012, participaram, em média, 1500 alunos por desafio, pertencentes a cerca de 100 escolas nacionais. Dos alunos participantes, 84% responderam ao problema de nível 1, sendo, assim, significativamente maior a participação dos alunos do ensino básico. De notar ainda que a maioria das respostas aos problemas de nível 1 são enviadas em tempo de aula, enquanto as respostas às questões de nível 2 são enviadas maioritariamente fora do tempo de aula.

Os resultados da participação dos alunos e respetivas escolas nos desafios são publicados no *site* do ALEA. O número de respostas corretas em cada nível corresponde ao número de alunos que responderam corretamente a pelo menos duas das três questões colocadas.

De seguida, a título de exemplo, são apresentadas algumas questões colocadas nos desafios e comentadas respostas dadas pelos alunos.

A leitura de dados de uma tabela e/ou gráficos, bem como a sua interpretação

No desafio n.º 27 *Casamentos* são apresentados dois gráficos com dados relativos ao número de casamentos católicos e número de batizados no Patriarcado de Lisboa entre 1992 e 2008 (figura 2).

A partir da informação contida nos gráficos anteriores, é pedido aos alunos que respondam a três questões (em cada nível).

Destacamos as duas primeiras questões de nível 1, em que se privilegia a leitura atenta dos gráficos e a reflexão sobre uma das afirmações constantes no artigo do jornal.

Nível 1

Questão 1: Nos gráficos anteriores há uma incorreção na escala. Na escala horizontal ou na escala vertical? Justifica a tua resposta.

Questão 2: Na notícia afirma-se que «Em 2008, o número de casamentos católicos no Patriarcado de Lisboa caiu para 3456, menos 4843 do que dez anos antes.» De acordo com o gráfico respeitante ao número de casamentos, esta afirmação é verdadeira? Justifica a tua resposta.

Uma percentagem elevada dos alunos participantes identifica a incorreção nos gráficos e o erro na afirmação do jornalista:

«1 — A escala que está errada é a horizontal porque está representada a mesma distância mas com números diferentes. Por exemplo, a distância entre 1992 e 1998 é a mesma que a representada entre 1998 e 2000, no entanto, a primeira representa 6 anos e a segunda representa 2 anos».

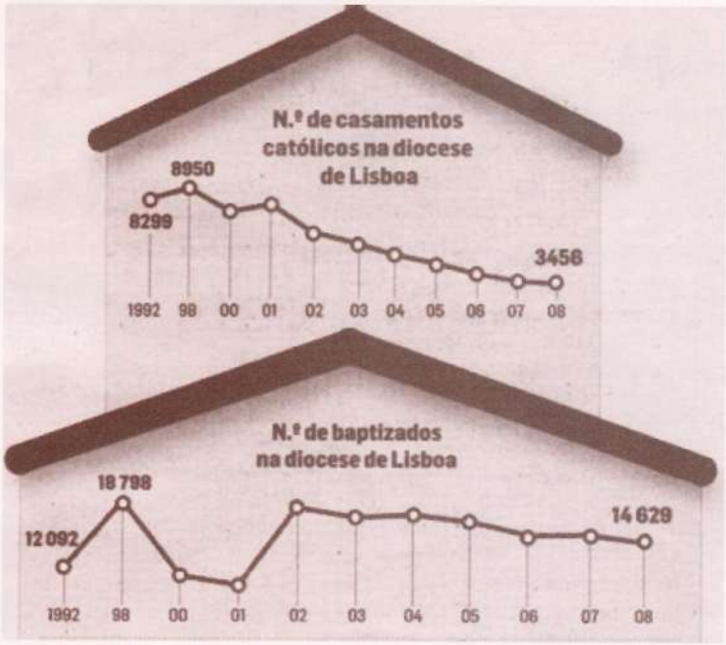


Figura 2. Fonte: Diário de Notícias in ALEA

«2 — A afirmação é falsa. A diferença do número de casamentos registados entre 1998 e 2008 foi 5494, ou seja, 8950−3456=5494.»

Neste mesmo desafio, as questões de nível 2 assentam também em afirmações da notícia, mas envolvendo percentagens, a leitura de uma tabela e o cálculo de probabilidade.

Nível 2

Questão 1: No título da notícia afirma-se que «Casamentos católicos baixam 62% em 10 anos (entre 1998 e 2008)». De acordo com o gráfico, a afirmação é verdadeira? Justifica a tua resposta.

Questão 2: Na notícia é ainda referido que os dados do Patriarcado de Lisboa referentes ao período 1998 - 2008, confirmam a tendência de redução já verificada pelo Instituto Nacional de Estatística (INE), em todo o País. Na tabela seguinte são apresentados os dados registados pelo INE em 1998 e em 2008:

	N.º de casamentos católicos em Portugal	N.º total de casamentos em Portugal
1998	14 644	66 598
2008	19 201	43 228

2.1. Com base na informação disponível, indica se as afirmações seguintes são corretas (para cada afirmação, responde «Sim» ou Não»).

(A) De 1998 para 2008, verifica-se uma descida quer no n.º de casamentos católicos, quer no n.º total de casamentos em Portugal.

(B) Em 1998, cerca de 67% dos casamentos celebrados em Portugal foram casamentos católicos; em 2008, apenas 44,4%, aproximadamente, dos casamentos celebrados em Portugal foram católicos.

2.2. Se perguntares a um casal que casou em 2008 se o seu casamento foi católico, qual a probabilidade de a resposta ser «sim»?

Na primeira questão pretende-se chamar a atenção dos alunos para a utilização dos valores percentuais no tratamento jornalístico.

Há muitos alunos a fazerem os mesmos cálculos e com opiniões contrárias no que respeita à veracidade da afirmação, mas a maioria não considera verdadeiro o título da notícia, tendo em conta a regra de arredondamento que aprenderam. Alguns exemplos de respostas:

«1— A afirmação é falsa, porque: 8950−3456= 5494, 5494/8950= 61,4% é quase verdade.»

«1— A afirmação é falsa, porque não baixara 62%, mas sim 61%. Com a regra de 3 simples, podemos exemplificar 8950 casamentos como 100% e 3456 casamentos como 38.61% que arredondando fica 39%. De 100% para 39% (arredondado) são 61%. Então desceu 61%.»

«1— Sim, é verdadeira pois houve um decréscimo de 62% no intervalo de dez anos, de 1998 a 2008. Temos 8950 casamentos em 1998 e em 2008 temos 3456 ou seja houve um decréscimo de 5494 casamentos que corresponde a 62% (valor aproximado por excesso).»

Na última questão, os alunos que correspondem positivamente utilizam explicitamente a regra de Laplace ou a regra de três simples.

«2.2. Usando a Lei de Laplace:

P (Ser um casamento católico) = 19201/43228= 0,44= 44%

19201 =N.º de casamentos católicos realizados em 2008;

43228=N.º total de casamentos, quer sejam católicos quer não, realizados em 2008;

R: Se perguntar a um casal que casou em 2008 se o seu casamento foi católico, existe 44% de probabilidade de dizer Sim.»

Cálculo e propriedades da mediana

O desafio n.º 25 *Audiências de TV* apresenta um gráfico com os valores das audiências na semana de terça-feira, dia 13, a 2ª feira, dia 19 de janeiro de 2009, dos canais da televisão portuguesa: RTP1, RTP2, SIC, TVI e dos canais de Cabo (figura 3).

A partir daqui, os alunos terão de responder a três questões conforme o nível de ensino:

Nível 1

Questão 1: Na semana considerada, houve algum dia em que dois canais tenham registado o mesmo valor de audiências? Em caso afirmativo: a) Quais foram esses canais? b) Em que dia tiveram o mesmo valor de audiências?

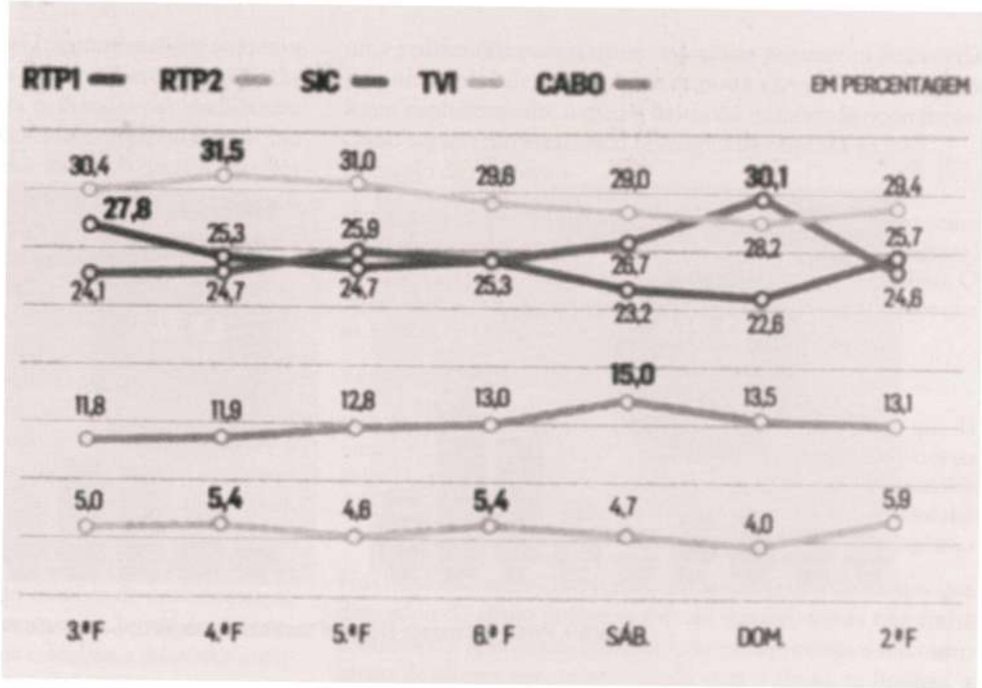


Figura 3. Fonte: E-Telereport e Mediamonitor (grupo Marketest) in ALEA

Questão 2: Considera a seguinte afirmação: Na semana considerada, a TVI manteve a liderança das audiências em Portugal, perdendo apenas num dos dias, para a SIC. Concordas? Justifica a tua resposta.

Questão 3: Na semana considerada, qual foi a média dos valores das audiências da RTP2? Justifica a tua resposta.

Nível 2

Questão 1: A partir da informação contida no gráfico de linhas, calcula para cada dia da semana a diferença entre os valores das audiências entre a RTP1 e a SIC:

	RTP1	SIC	Diferença
3ª Feira	27.8	24.1	3.7
4ª Feira			
5ª Feira			
6ª Feira			
Sábado			
Domingo			
2ª Feira			

Questão 2:

a) Calcula a mediana das diferenças obtidas na questão anterior.

b) O valor da mediana é positivo ou negativo? Tendo em consideração o valor da mediana e sem olhares para os valores da tabela, podes dizer qual dos canais, RTP1 ou SIC, teve mais dias com maior audiência? Explica o teu raciocínio.

Com estas questões pretende-se chamar a atenção para a exploração dos conceitos de percentagens, mediana e média. Em particular, a pergunta dois do nível 2 chama a atenção para o cálculo da mediana. Em concreto, pede-se aos alunos para calcularem a mediana das diferenças entre os valores das audiências da RTP1 e da SIC e, tendo em consideração o valor obtido para essa mediana, refiram se é ou não possível afirmar qual dos canais teve mais dias de maior audiência. Note-se que se pede aos alunos que não olhem para a tabela mas permite-se que relacionem este valor da mediana com a informação dada pelo gráfico, Mais de metade dos alunos responde corretamente que a mediana das diferenças das audiências é nula, mas só alguns concluem articulando o valor da mediana com a informação do gráfico, que «ambos os canais televisivos (RTP1 e SIC) tiveram o mesmo número de dias com maior audiência, pois a mediana, medida de localização, indica o *valor* que está no meio de todos e, sendo igual a zero, conclui-se que o número de vezes em que a diferença é negativa (significando, portanto, que a SIC está à frente da RTP1) é igual ao número que vezes em que esta é positiva (está à frente a RTP1).»

Alguns alunos do ensino secundário, apesar de calcularem corretamente o valor da mediana, não tiveram em consideração a informação transmitida pelo gráfico e avançaram com algumas hipóteses muito interessantes e que problematizam o conceito de mediana. Alguns exemplos:

«O valor da mediana não é positivo nem negativo, é nulo. Não é possível dizer qual dos canais teve mais dias com maior audiência. Os dados negativos significam que a SIC obteve maior número de audiências num dia e os positivos significam que foi a RTP1. Apenas sabendo que o valor da mediana é 0, os valores das posições 1, 2 e 3 apenas poderão ser negativos ou nulos e os valores das posições 5, 6 e 7 positivos ou nulos. Deste modo poderão existir várias possibilidades para que fosse um canal ou outro a ter mais dias de maior audiência.»

«Visto que a mediana é o valor central da distribuição dos dados, após ordenados os elementos da amostra: 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana. Se os restantes dados não fossem iguais a 0,

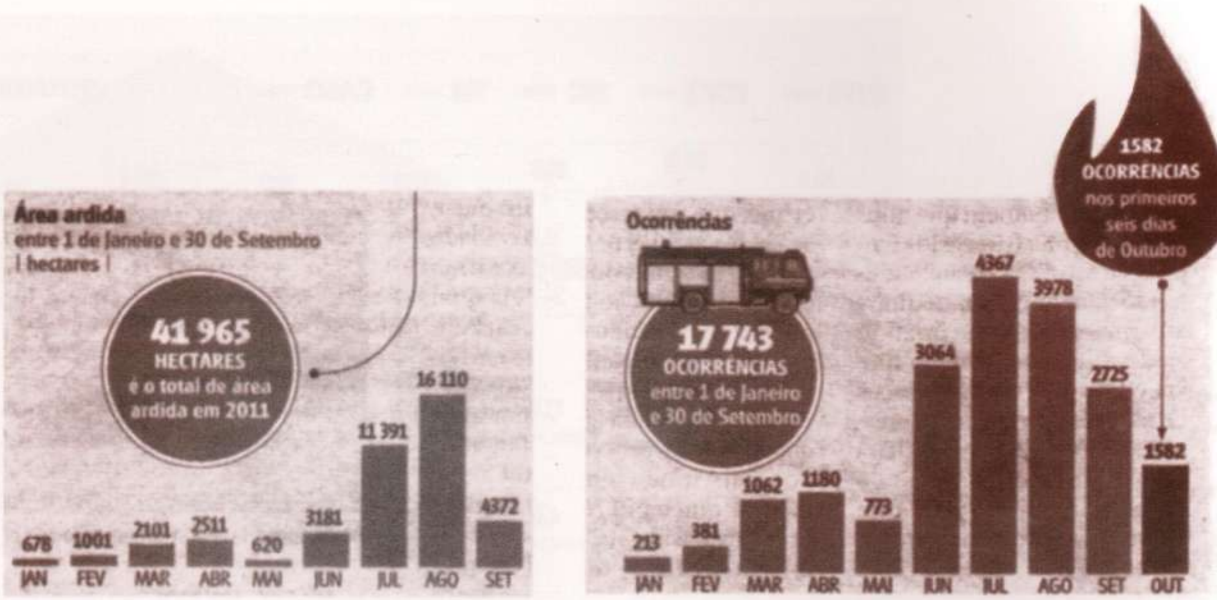


Figura 4. Fonte: Autoridade Florestal Nacional/Proteção Civil; Infografia JN in ALEA

a mediana, poderíamos saber qual dos canais teve mais dias com maior audiência, contudo sem o apoio na tabela nada é possível concluir.»

No caso da resposta que se apresenta de seguida, o aluno já teve em consideração o gráfico e não tira grande proveito da mediana. Aliás, a sua opinião final parece estar mais associada ao conceito de média:

«-7.5; -3.5; -1.2; 0; 0.6; 1.1; 3.7
Mediana: 0
RTP1 — Na Terça, Quarta e Segunda obteve maior audiência, mas só se destacou a diferença registada na Terça Feira.
SIC — Na Quinta, no Sábado e no Domingo obteve maior audiência, mas no Domingo houve uma diferença mais acentuada.
Na minha opinião, a SIC foi o canal que teve mais audiências. No entanto, ambos os canais têm o mesmo número de dias com mais audiência.»

Curiosamente, ou talvez não, a diferença das médias dos valores das audiências da RTP e SIC é diferente de zero, como se pode observar a partir do quadro seguinte:

	RTP	SIC
3ª feira	27.8	24.1
4ª feira	25.3	24.7
5ª feira	24.7	25.9
6ª feira	25.3	25.3
Sábado	23.2	26.7
Domingo	22.6	30.1
2ª feira	25.7	24.6
Média	24.94	25.91
Mediana	25.3	25.3

Os dados desta notícia deram também origem a uma ficha — ActivALEA, intitulada *Dados de Audiências da TV*, em que se integram algumas questões deste desafio e se aborda o cálculo e propriedades da média e da mediana, entre outros tópicos.

Percentagens, Média e utilização da Estatística no texto jornalístico

O desafio n.° 33 — *Incêndios florestais* tem por base uma notícia publicada no Jornal de Notícias que apresentava dados sobre os incêndios florestais registados no país até outubro de 2011 (figura 4).

Incêndios florestais. Ocorrências e área ardida em 2011.
Selecionamos as questões de nível 2 em que, a partir da informação contida nos gráficos de barras, são colocadas as questões que se seguem.

Questão 1.

Indica a variável representada em cada um dos gráficos.

Questão 2: Em agosto, o número de ocorrências diminuiu relativamente ao mês de julho. Calcula esse decréscimo, em percentagem. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

Questão 3: Esta notícia, onde se incluem os gráficos apresentados, tem como título «outubro com mais fogos do que agosto».
Utilizando apenas a informação dada, apresenta um argumento estatístico que justifique o título da notícia.

Ouvimos ou lemos frequentemente referências a aumentos ou decréscimos em termos percentuais (os combustíveis aumentaram 8% nos últimos seis meses, os salários desceram 13% relativamente a 2010, ...). No entanto, nem todos os cidadãos têm verdadeira noção dos valores absolutos correspondentes. Na questão 2 pede-se precisamente aos alunos o decréscimo, em percentagem, do número de ocorrências registado em agosto relativamente ao mês de julho.

Cerca de metade dos alunos respondeu corretamente «o decréscimo foi aproximadamente 9% porque (389/4367)×100 =9% sendo 4367−3978=389. Mas as muitas respostas erradas recebidas comprovam a dificuldade dos alunos neste tópico. Calculam bem a diferença entre o número de ocorrências entre julho e agosto, mas o erro surge no valor absoluto correspondente a 100%. Há alunos que fazem corresponder a 100% o número total de ocorrências verificado desde o início do ano, apresentando como resposta um decréscimo de 2%; outros consideram a soma do número de ocorrências de julho e agosto, dando como resposta um decréscimo de 5%. Há ainda alunos que calculam o valor percentual do número de ocorrências de julho e do mês de agosto relativamente ao n.º total de ocorrências desde o início de 2011 e depois calculam a diferença entre as percentagens obtidas... Estas situações estão representadas nas três respostas seguintes (pertencentes a alunos do ensino secundário):

« 4367−3978=389
17743−100%
389−x
x=398×100/17743=2%(2,19).»

«O decréscimo percentual do n.º de ocorrências de fogos florestais em Portugal do mês de julho para agosto foi de 5%.
(4367+3978=8345)
(4367−3978=389)
(389/8345×100=4,661=5%).»

«17743 —— 100
4367 —— X
X= 25%
17743 —— 100
3978 —— X
X= 22%;
25−22=3%. O decréscimo foi de 3%.»

Na questão 3, solicita-se ao aluno que apresente um argumento estatístico para justificar o título da notícia, tendo em conta que os dados do mês de outubro são apenas respeitantes aos primeiros seis dias e o número de ocorrências é inferior ao verificado nos trinta e um dias de agosto. Dos alunos que apresentam uma justificação para o título, a maioria argumenta através da proporcionalidade (exemplo de resposta 1) e poucos alunos utilizam explicitamente a média diária do número de ocorrências como argumento estatístico (exemplo de resposta 2).

Exemplo de resposta 1

«Em agosto não houve tantas ocorrências como em outubro como pode afirmar esta estatística: 3978 (Nº de ocorrências em agosto) está para 31(dias), assim como, x(a incógnita) está para 6(dias). O resultado é aproximadamente 770 ocorrências, o que é menor que as 1582 ocorrências nos primeiros 6 dias de outubro.»

Exemplo de resposta 2

«Em todo o mês de agosto registaram-se 3978 incêndios o que dá uma média diária de cerca de 128. Este valor é bastante inferior ao valor observado em outubro (registaram-se 1582 incêndios nos seis primeiros dias) e por isso cerca de (1582÷6) 264 ocorrências diárias. Podemos então dizer «outubro com mais fogos do que agosto.»

Nas respostas recebidas, houve ainda um grupo de alunos que discordou do título porque o mês de outubro ainda não tinha terminado e apenas era possível fazer uma previsão e um outro grupo de alunos que, concordando com o título, se limitou, a fazer uma leitura dos dados constantes no gráfico e não apresentou qualquer argumento estatístico.

Notas finais

Uma análise muito sucinta às respostas dos alunos nos desafios já realizados permite afirmar que as questões que envolvem uma leitura simples e direta de dados de um gráfico registam normalmente mais de 70% de respostas certas. Mas quando se solicita ao aluno uma leitura e interpretação da informação dada, a percentagem de respostas certas diminui consideravelmente.

Uma outra dificuldade identificada em vários desafios prende-se com o cálculo e interpretação de percentagens versus números absolutos. Nestes casos, a percentagem de respostas erradas ronda os 50%.

A leitura e a interpretação de dados organizados em tabelas são tópicos em que a maioria dos alunos do secundário corresponde bem. Nas questões que envolvem o cálculo direto da média ou da mediana não evidenciam dificuldades e, nas questões que implicam a compreensão dos conceitos e das suas propriedades (questões 2 e 3 de nível 2 dos desafios n.º 25 e n.º 33, por exemplo), identificamos respostas que evidenciam um conhecimento significativo das medidas em causa.

Emília Oliveira
Escola Secundária de Tomaz Pelayo

Caros leitores

Neste número temático procuramos diversificar as propostas para a utilização das tecnologias apresentando três textos relacionados com a Estatística.

O José Duarte mostra-nos que há uma grande diversidade de applets na Internet, com aplicações para todos os níveis de ensino, onde destaca as suas características principais; O Rui Gonçalo Espadeiro e o Paulo Correia mostram-nos como o GeoGebra possui ferramentas importantes para o estudo da estatística, aprofundando as questões dos Recursos Educativos Digitais (RED) que já abordaram em números anteriores da revista; e eu próprio destaco o papel da calculadora gráfica TI-nspire no estudo da estatística, procurando evidenciar algumas das potencialidades desta ferramenta na criação de ambientes de aprendizagem poderosos.

Esperamos assim contribuir para que a comunidade de utilizadores destes recursos continue a crescer e desafiamos os nossos leitores a dar-nos feedback das suas experiências de ensino baseadas na utilização deste tipo de ferramentas em sala de aula.

António Domingos amdd@fct.unl.pt Departamento de Matemática da FCT/UNL UIED – Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

Estatística dinâmica

O tema Estatística dos programas de Matemática dos ensinos básico (atualmente incluída no tema designado por Organização e Tratamento de Dados) e secundário, faz apelo à utilização de tecnologia na medida em que as tarefas de organização e tratamento requerem uma dose significativa de cálculos. De facto, a aceitação da utilização da calculadora no campo da Estatística tem sido consensual. Numa primeira fase o cálculo de medidas estatísticas era realizado com recurso à calculadora, mas com o registo da maioria dos cálculos intermédios em tabelas de dimensão mais ou menos significativa, e como resultado de procedimentos quase sempre algorítmicos.

A introdução de calculadoras gráficas, no ensino secundário, veio permitir um trabalho com conjuntos de dados estatísticos mais complexos e o cálculo de medidas estatísticas mais sofisticadas, antes inacessíveis, assim como o ajustamento de conjuntos de dados a modelos matemáticos, procedimentos que hoje são comuns em itens de exame nas disciplinas de Matemática e de Físico-Química.

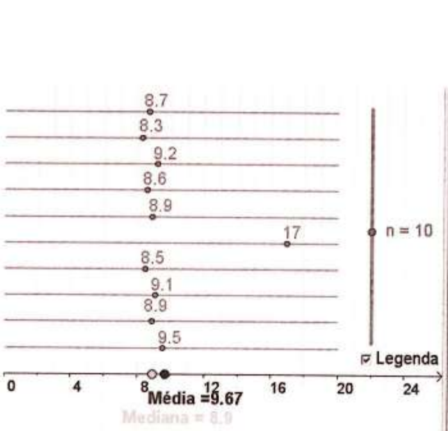
Com a generalização do acesso ao computador, a utilização da folha de cálculo foi ganhando espaço como o ambiente natural para o registo e organização de dados estatísticos. A produção de gráficos estatísticos tem sido também alocada à folha de cálculo em detrimento dos desenhos rudimentares feitos com material de desenho, ou até mesmo quando comparados com os gráficos produzidos com a calculadora gráfica. Será de salientar que a disponibilização de inúmeros tipos de gráficos estatísticos na folha de cálculo deveria ter sido acompanhada de uma sensibilização para uma seleção crítica do tipo de gráfico mais adequado a cada situação e a cada conjunto de dados, sendo esta uma competência a que muitos alunos e professores ainda são pouco sensíveis.

Existem ainda algumas applets relacionadas com aspetos da Estatística que permitem desenvolver um trabalho mais específico, com um determinado tipo de representação ou com a influência da variação de alguns elementos num contexto próprio, ou ainda para estabelecer relações entre duas medidas estatísticas.

Um ambiente dinâmico

Nos últimos anos o GeoGebra tem evoluído no sentido de disponibilizar funcionalidades que permitem uma integração do estudo da Estatística num conjunto mais amplo de ferramentas para o estudo da Matemática. Inicialmente tratou-se de um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) com uma componente algébrica valorizada. Contudo, a partir da versão 3 o GeoGebra passou a integrar uma folha de cálculo e vários comandos relacionados com estatística e probabilidades.

O conceito de Ambiente Dinâmico, antes característico da Geometria e da Álgebra, passou a estender-se à Estatística. A



	A	B
1	Lista	L. Ordenada
2	9.5	8.3
3	8.9	8.5
4	9.1	8.6
5	8.5	8.7
6	17	8.9
7	8.9	8.9
8	8.6	9.1
9	9.2	9.2
10	8.3	9.5
11	8.7	17

Figura 1. Representação dinâmica da média e da mediana
http://mat.absolutamente.net/ra_e_med.html

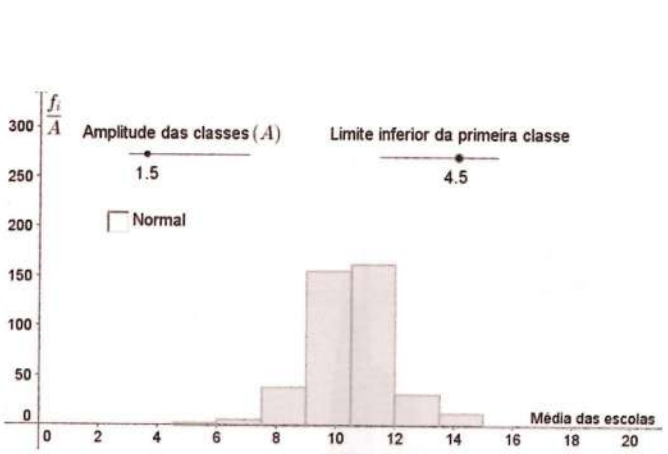


Figura 2. Histogramas dinâmicos
http://mat.absolutamente.net/ra_aprox_normal.html

variação de um elemento para evidenciar padrões, o estudo de um elevado número de casos para validar ou refutar conjeturas, ou a criação de imagens que sejam ilustrações significativas de conceitos ou relações, passaram a acontecer no âmbito do estudo da estatística ou de probabilidades.

Uma abordagem dinâmica do estudo da estatística pode consistir na variação da amostra estudada para perceber regularidades ou padrões nas medidas ou nas representações gráficas relativas a essa amostra. Naturalmente a variação da amostra não é uma ação legítima no estudo da estatística num contexto aplicado, mas se se pretende mostrar, por exemplo que a mediana não é sensível a outliers (ou valores desenquadrados dos restantes), a variação da amostra – com um suporte visual – pode fazer emergir essa ideia de uma forma muito significativa. Numa construção do GeoGebra como a da figura 1, podemos manipular a dimensão da amostra, e os valores da amostra enquanto observamos essas alterações nos valores da média e da mediana.

A manipulação de uma animação com a representação da média e da mediana pode mostrar a (in)sensibilidade da média e da mediana em relação a estas variações, mas pode transmitir ainda que a sensibilidade diminui com o aumento da dimensão da amostra. Naturalmente uma exploração deste tipo não substitui o cálculo e a interpretação dos valores da média e da mediana em contextos concretos com uma amostra fixa, mas permite uma representação alternativa e pode ser usada para permitir aos alunos melhor compreender as definições e relações das medidas, e poderá ajudar a fazer previsões e conjeturas no trabalho com amostras fixas a partir do tratamento de dados reais.
Existem ainda outras situações em que a manipulação de parâmetros permite acrescentar valor à abordagem tradicional, por exemplo na construção de histogramas.

A manipulação de parâmetros que alterem a amplitude das classes ou o limite inferior da primeira classe do histograma, permite visualizar um grande número de histogramas, construídos a partir do mesmo conjunto de dados. A manipulação de uma applet deste tipo e a discussão com os alunos sobre as alterações produzidas, contribui para clarificar que a representação de um conjunto de dados num histograma não é única, e que esta multiplicidade pode ser usada para sustentar a argumentação com propósitos que não sejam exclusivamente a melhor representação dos dados. Poder-se-á construir uma situação de aprendizagem com os alunos, no sentido de que estes escolham, com o mesmo conjunto de dados, a representação que melhor sustenta um ou outro interesse no contexto da situação. Por exemplo, no caso do histograma representado na figura 2, os dados reportam-se ao ranking das escolas (de 2010), nomeadamente as médias de cada escola nos exames do Ensino Secundário. Os alunos poderão ser convidados a argumentar no sentido de comparar a sua escola com o panorama geral, tentando evidenciar – em alternativa – um bom desempenho da escola, ou uma apreciação menos boa.

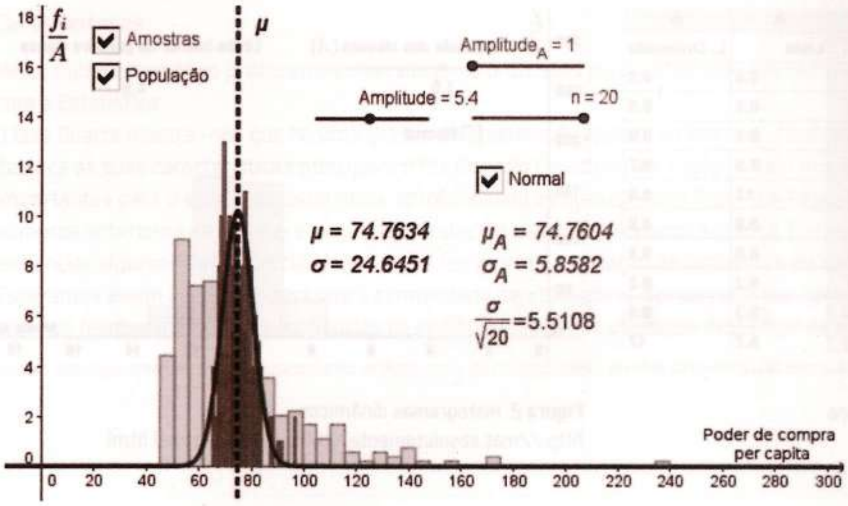


Figura 3. Ilustração do Teorema do Limite Central
http://mat.absolutamente.net/ra_t_limite_central.html

Um outro tipo de manipulação pode incidir sobre os procedimentos relativos ao processo de amostragem [Figura 3].

O gráfico da figura 3 representa o poder de compra per capita (em 2007) nos 311 concelhos do nosso país (cor clara), relativos ao índice 100 que representa a média nacional, construído com dados da página do Instituto Nacional de Estatística) e ainda uma amostra de vinte destes concelhos retirada aleatoriamente (cor escura). Neste caso, e com vista à ilustração do Teorema do Limite Central, pode ser manipulada a dimensão da amostra e a observação das implicações desta variação na distribuição das médias das amostras. Existe ainda outro tipo de dinamismo que pode ser explorado... como a seleção das amostras é aleatória, quando recalculamos todos os valores (tecla F9 no GeoGebra, em ambiente Windows ou Linux) novas amostras são obtidas, mantendo invariante a população e ilustrando a boa aproximação pela distribuição normal da distribuição das médias das amostras.

Não é o objetivo deste texto aprofundar os conceitos estatísticos, mas antes ilustrar que a variação dos elementos inerentes a cada situação pode evidenciar características invariantes ou clarificar as implicações dessa variação num seu aspeto particular; que o estabelecimento de conjeturas, a sua validação ou refutação bem como a observação de muitos casos e a seleção de alguns destes para sustentar a argumentação, pode ser característico das aulas de Estatística.

A analogia com os AGD permitirá estabelecer um contexto de Ambiente de Estatística Dinâmica ou, pelo menos, deixar propostas nesse sentido, sugerindo uma alteração (gradual e subtil) da postura dos alunos – relativamente aos dados estatísticos – de passividade no tratamento para uma intencionalidade na tomada de decisões sobre alternativas e consequências nas variações que podem ser introduzidas.

As versões mais recentes do GeoGebra integram comandos relacionados com a estatística que tradicionalmente não eram explorados em folhas de cálculo ou calculadoras, como o diagrama de extremos e quartis ou o diagrama de caule e folhas. Já nas versões anteriores existiam possibilidades de relacionar o tratamento estatístico com outras áreas da Matemática, favorecendo o estabelecimento de conexões e constituindo-se um ambiente propício à modelação, recolhendo os dados na folha de cálculo, representando graficamente os dados e criando modelos algébricos (quer por via do cálculo de vários tipos de correlação, quer por ajustamento de um modelo aos dados, por exemplo usando as medidas estatísticas calculadas a partir dos dados).

O GeoGebra integra ainda uma "calculadora de probabilidades" que permite o estudo de distribuições de probabilidade em que a variação dos diferentes parâmetros é facilitada por seletores, que podem ser também inseridos numericamente.

Na figura 4 está representada a resolução do item 2.1 do exame de Matemática A (1.ª fase do ano de 2011). Mais do que apresentar uma solução concreta para um enunciado específico, esta funcionalidade é útil para a exploração de cenários alternativos, normalmente introduzidos por "e... se..." A múltipla representação para uma mesma situação permite obter uma ideia global da distribuição em estudo e favorece o desenvolvimento de um

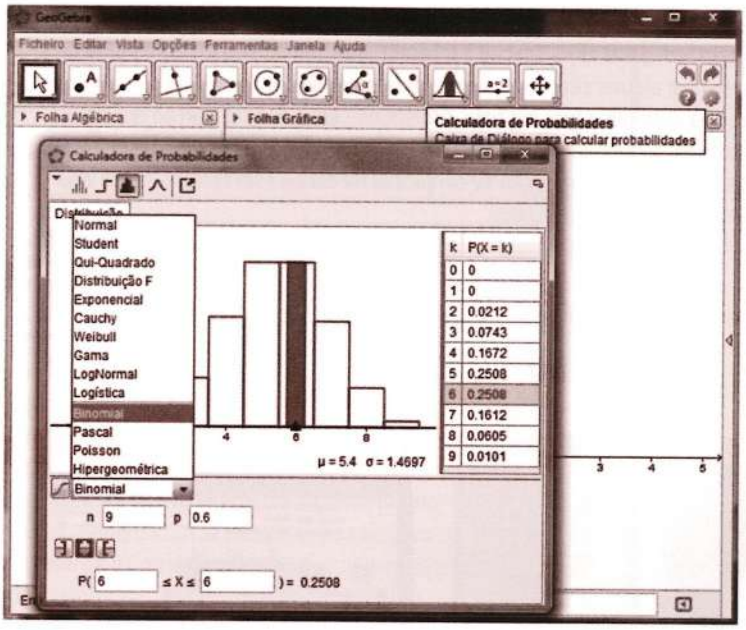


Figura 4. Calculadora de Probabilidades do GeoGebra

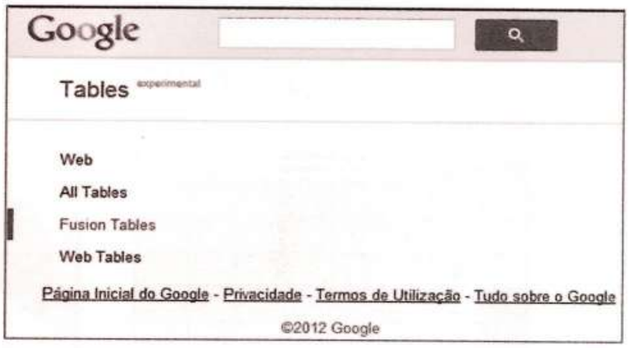


Figura 5. http://www.google.com/fusiontables/Home/

"sentido de probabilidade" apurado, por exemplo, porque enfatiza a existência de observações possíveis com probabilidades associadas muito próximas de zero.

Aquisição eletrónica de dados

A aquisição de dados, é outro aspeto da Estatística que tem vindo a sofrer alterações com o acesso a ambientes tecnologicamente mais sofisticados.

A tradicional recolha de dados por inquérito, com os processos associados de contagem e lançamento dos dados pode, atualmente, ser facilitada por métodos de recolha eletrónica dos dados em formulários eletrónicos (do google docs, do moodle, do zohoo, ou outros), com a vantagem que os dados são recolhidos em folhas de cálculo e ficam disponíveis para o tratamento, ou mesmo com algum tipo de tratamento automático.

A Internet, por outro lado, tem bases de dados disponíveis que permitem um trabalho sem que seja necessária a recolha ou o seu processamento, libertando tempo para processos de seleção crítica das medidas estatísticas, interpretação de resultados e sustentação da argumentação. Existe ainda a vantagem adicional de que os dados disponíveis na Internet podem ser relativos aos interesses dos alunos ou até mesmo referentes aos próprios (páginas de escolas com pautas que têm classificações e faltas, jornais com rankings de escolas, página do INE, PorData, etc.), facilitando a formulação de conjeturas – que por vezes já existem sob a forma de preconceções – e a respetiva validação ou refutação.

Ainda sobre dados acessíveis na Internet, existe uma ferramenta muito recente que pode vir a facilitar o acesso e o cruzamento de dados – a Google Fusion Tables é uma aplicação recente do Drive (Google Docs).

Apesar de ainda estar numa fase experimental, esta aplicação permite tratar dados já existentes e de origens diversificadas. Os dados podem ser originários de folhas de cálculo diferentes, de ficheiros csv (dados separados por virgulas), dados já tratados com outros originários da Internet obtidos a partir de pesquisas realizadas pela própria aplicação a partir de palavras-chave criteriosamente selecionadas, entre outras possibilidades.

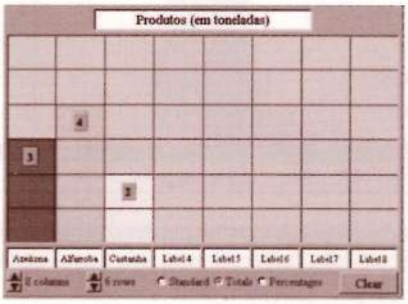
Novas possibilidades tecnológicas não resultam sempre em boas abordagens pedagógicas, mas a Estatística parece ser um campo promissor para alterar práticas no sentido de explorar mais frequentemente as ferramentas tecnológicas disponíveis (e em desenvolvimento) que permitam aos alunos aprender Matemática de forma mais eficaz, com ganhos em literacia estatística e tecnológica.

Rui Gonçalo Espadeiro – CC TIC da Universidade de Évora
Paulo Correia – Escola Secundária de Alcácer do Sal

Applets

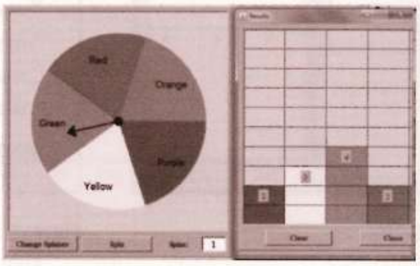
As applets são ferramentas de simples utilização e adequadas para apoiarem objetivos específicos de aprendizagem que exigem, em geral, uma ligação à Internet, pois funcionam on-line numa página Web. No entanto, já existem hoje alguns sites que permitem instalar as aplicações no computador e funcionar com elas de forma autónoma (ver em http://nlvm.usu.edu). Em relação ao ensino da Estatística e das Probabilidades, podem contribuir para realizar simulações e para ilustrar conceitos relacionados com a caraterização e representação de conjuntos de dados estatísticos. Deixo aqui algumas sugestões.

Bar chart



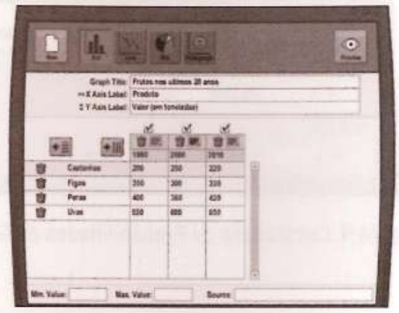
Tópico: Representação em gráfico de barras
Nível sugerido: 1.° ciclo
Descrição: Cria gráficos de barras, diretamente por arrasto, sobre uma grelha de que pode definir o número de linhas e colunas e permite indicar os valores absolutos e as percentagens.
(http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_323_g_1_t_5.html?from=topic_t_5.html)

Spinner



Tópicos: Simulações, frequências e probabilidades
Níveis sugeridos: 1.° e 2.° ciclos
Descrição: Simula uma roleta com cores, em número a definir, e representa um gráfico com a informação das frequências de ocorrência da seta em cada uma das cores, de cada vez que a roleta é acionada (Spin).
(http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_186_g_1_t_5.html?open=activities&from=topic_t)

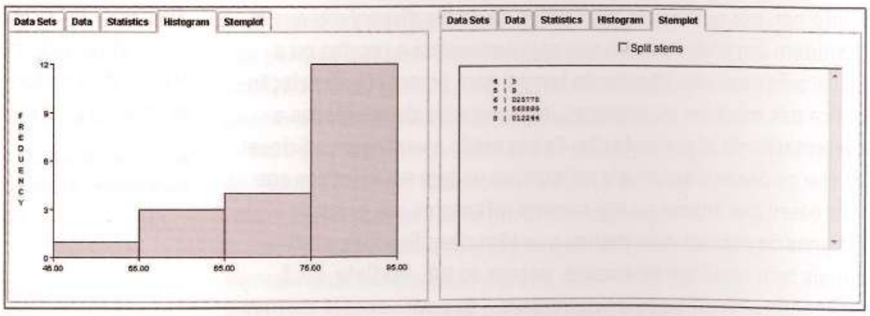
Data Grapher



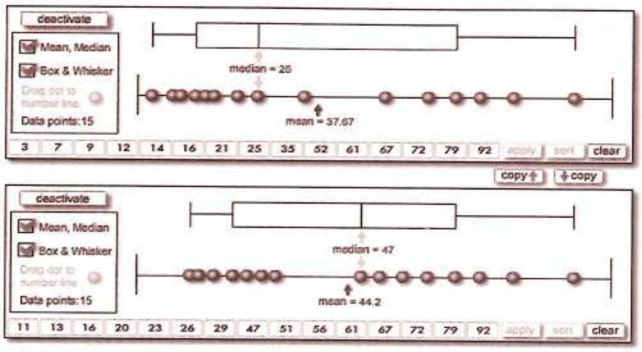
Tópicos: Gráficos de barras, de linhas, circulares e pictogramas
Níveis: 1.° e 2.° ciclos
Descrição: A partir da definição das variáveis, em coluna, e da introdução de dados, em linha, permite a representação e impressão de gráficos de barras, de linhas, circulares e pictogramas, relativamente às variáveis que selecionar. Nos gráficos pode ainda incluir os títulos identificativos, para além de etiquetas e legendas, onde fizer sentido.
(http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=204)

One variable statistical calculator

Tópicos: Representações em histograma e em diagrama de caule e folhas.
Níveis sugeridos: 2.° e 3.° ciclos
Descrição: Calcula as medidas estatísticas de localização e dispersão e permite as representações em histograma (permitindo alterar a amplitude dos intervalos) e em diagrama de caule e folhas, a partir de conjuntos de dados que disponibiliza ou de dados que o utilizador introduz.
(http://bcs.whfreeman.com/tps3e/content/cat_020/applets/histogram.html)



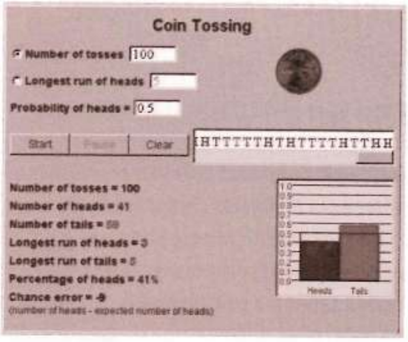
Mean and Median



Tópico: Representação em diagrama de extremos e quartis
Níveis sugeridos: 2.° e 3.° ciclos
Descrição: Permite a introdução de um máximo de quinze valores, entre 0 e 100 (escrevendo-os manualmente ou 'arrastando' uma esfera para um segmento de reta 'vazio'), gerando um série numérica que pode ser ordenada (sort), ao mesmo tempo que representa o correspondente diagrama de extremos e quartis, assinalando a média e a mediana.

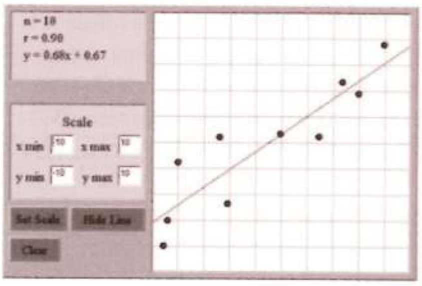
Uma mais-valia desta aplicação é facilitar a discussão e análise com os alunos do papel da distribuição dos valores na configuração do diagrama. Para isso, é necessário ativar (activate) e copiar (copy) a 1.ª distribuição para baixo e, em seguida, 'arrastar', na distribuição de baixo, alguns pontos ao longo do segmento, concentrando-os ou dispersando-os por determinadas zonas e lendo as alterações que se operam no diagrama e nos valores da média e da mediana.
(http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=160)

Coin Tossing



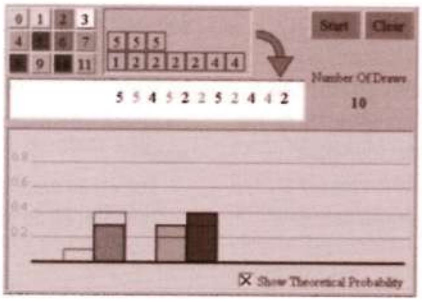
Tópicos: Simulações com moedas e probabilidades
Níveis sugeridos: 2.° e 3.° ciclos
Descrição: Simula os lançamentos de uma moeda (em número a definir), regista o número de faces saídas e faz a sua representação gráfica. Permite ainda realizar a simulação até que saia um número determinado de caras seguidas e alterar a probabilidade de sair caras, no caso de moedas viciadas.
(http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_305_g_4_t_5.html?from=topic_t_5.html)

Linear Regression I



Tópicos: Nuvem de pontos e reta de regressão linear
Nível sugerido: Secundário
Descrição: Permite a representação de pontos no plano cartesiano, após definição da escala e, em seguida, pode representar a reta de regressão. Permite adicionar pontos suplementares e averiguar as implicações no traçado da reta.
(http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=82)

Random Drawing Tools - Individual Trials



Tópicos: Simulação de experiências e probabilidade
Nível sugerido: Secundário
Descrição: Permite organizar a simulação de uma experiência aleatória, representar graficamente as frequências dos números extraídos e sobrepor a representação da probabilidade teórica.
(http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=67)

José Duarte
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Estatística com recurso à Ti-nspire

A Estatística é um tópico curricular que está presente nos programas de Matemática do ensino básico e secundário. No caso do ensino básico assume a designação de Organização e Tratamento de Dados. Propõe-se que o estudo deste tema tenha um caráter investigativo e dada a sua natureza, a tecnologia assume um papel primordial. O recurso a ferramentas como o computador e a calculadora é considerado indispensável pois espera-se que o tempo despendido seja concentrado essencialmente na escolha e justificação dos métodos a usar na análise dos dados e interpretação dos resultados em detrimento da realização repetida de cálculos rotineiros.

Há uma grande diversidade de ferramentas tecnológicas que permitem abordar o assunto. As calculadoras científicas privilegiam uma abordagem numérica e estão presentes há muito tempo entre as ferramentas mais usadas, as folhas de cálculo introduziram um avanço ao permitir tratar os dados numericamente e ao mesmo tempo facilitar a sua representação gráfica e mais recentemente têm proliferado ferramentas diversificadas (softwares, applets, calculadoras gráficas) com capacidades de tratamento e representação que tornam a aprendizagem do tema mais atrativa e dinâmica.

Neste texto daremos destaque à calculadora gráfica Ti-nspire que reúne numa só plataforma características de uma folha de cálculo e potencialidades de representação gráfica onde é possível comparar diferentes séries de dados. Serão referidos apenas alguns exemplos relativos a tópicos específicos, dado que seria inviável apresentar todas as potencialidades disponíveis na ferramenta.

O ambiente de trabalho onde os dados são introduzidos é uma folha de cálculo com todas as potencialidades que lhe são conhecidas, onde as colunas assumem o papel das listas de dados cujo nome pode ser introduzido numa célula específica para o efeito. A realização de um cálculo estatístico relativo a uma variável gera um conjunto de informações numéricas bastante completo (figura 1)[1]. De uma forma rápida são apresentadas várias medidas de localização como a média, a mediana ou os quartis e medidas de dispersão como o desvio padrão. São ainda disponibilizados alguns cálculos intermédios necessários para o cálculo de medidas de dispersão. Salientamos ainda a forma como estes cálculos são apresentados, permitindo uma leitura fácil e clara.

	A notas	B turmab	C turmac	D	E	F
◆						=OneVar('notas,'turmab):
1	3	3	3		Título	Estatísticas de uma var...
2	4	4	4		$\bar{x}$	11.6373
3	5	4	6		Σx	2374.
4	6	6	10		Σx^2	29972.
5	7	7	18		$sx := s_{n-1}x$	3.3989
6	8	12	23		$\sigma x := \sigma_n x$	3.39056
7	9	15	29		n	204.
8	10	19	31		MinX	3.
9	11	21	27		Q_1X	9.5
10	12	27	17		MedianX	12.
11	13	25	11		Q_3X	14.
12	14	19	9		MaxX	18.
13	15	16	4		$SSX := \Sigma(x-\bar{x})^2$	2345.16
14	16	11	4			
15	17	9	4			
16	18	6	3			
17						
18						
19						

D18

Figura 1

A representação gráfica dos dados estatísticos apresenta-nos outra forma de fazer a sua leitura e interpretação. Para o efeito podemos optar por colocar os gráficos e tabelas lado a lado, ou em páginas separadas. Para as dimensões do ecrã da máquina a segunda opção revela-se mais eficaz pois permite uma melhor leitura e manipulação dos referidos gráficos. Podemos observar na figura 2 o histograma correspondente a dados apresentados na figura 1, bem como o correspondente diagrama de extremos e quartis.

Por vezes pode ser útil comparar gráficos pelo que a representação de duas séries de dados podem aparecer no

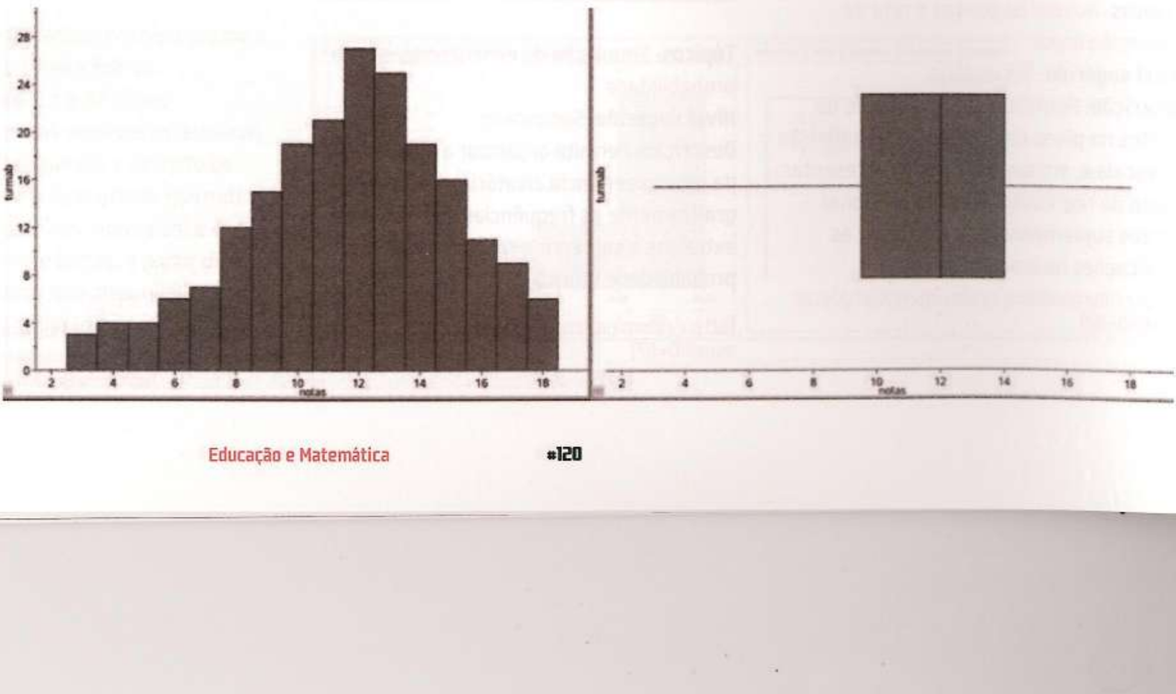
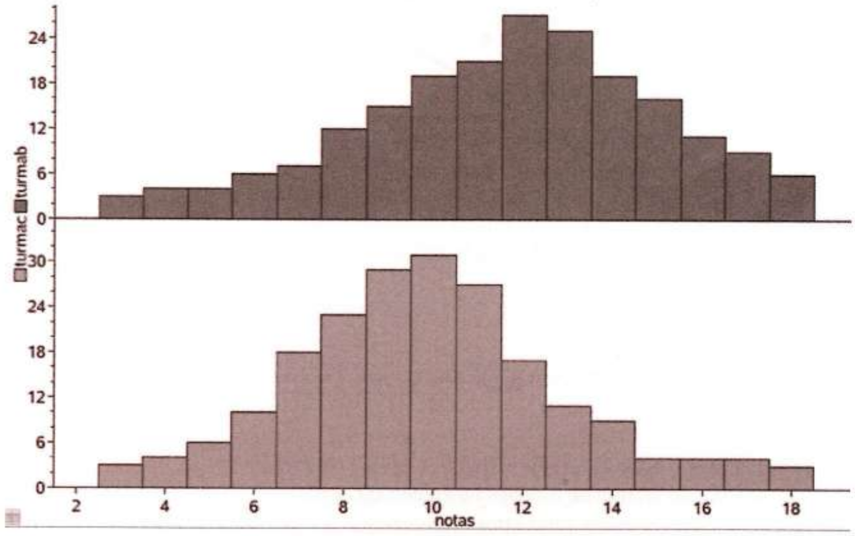


Figura 2

Figura 3



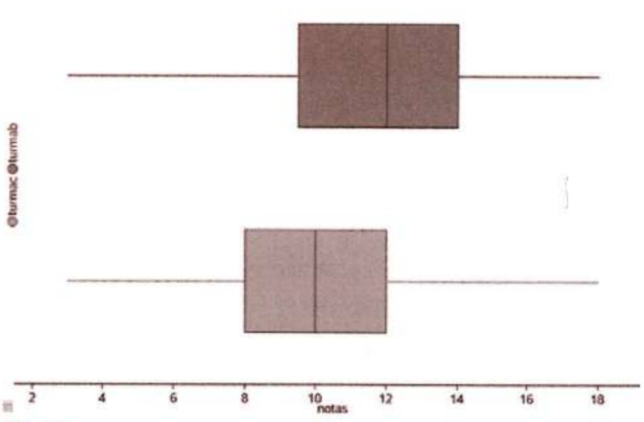


Figura 4

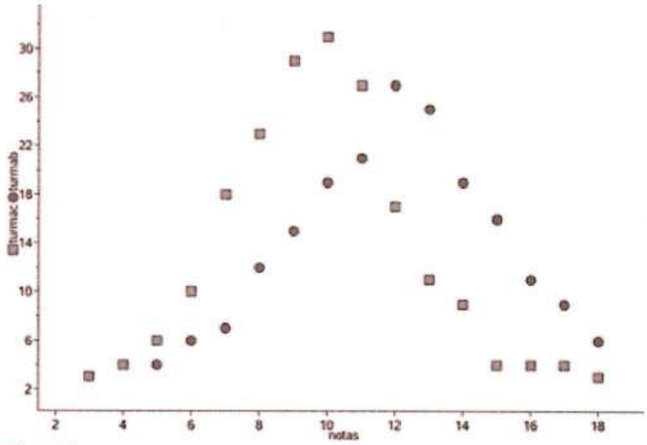


Figura 5

mesmo gráfico. Na figura 3 podemos visualizar os histogramas correspondentes aos dados das turmas b e c, apresentados na figura 1.

Outra representação pode ser feita relativa aos diagramas de extremos e quartis correspondentes (figura 4) que são obtidos a partir de um comando simples.

Podemos ainda representar no mesmo referencial os diagramas de dispersão dos dados anteriores podendo esta representação ser útil na comparação das duas amostras (figura 5).

Esta facilidade em estabelecer as diferentes representações gráficas é uma mais-valia desta ferramenta, pois vai permitir que a análise e interpretação dos dados a estudar possa ser mais facilmente compreendida pelos alunos. De salientar ainda que as diferentes medidas e valores estão acessíveis sempre que o gráfico é percorrido pelo cursor.

Fica ainda uma nota final para as distribuições bidimensionais cujo estudo também é bastante facilitado pelo uso desta ferramenta (figura 6). A visualização da nuvem de pontos facilita o estabelecimento de correlações entre as variáveis e a representação da reta de regressão pode ser baseada em diferentes abordagens, que vão desde o ajuste de uma linha amovível à introdução da expressão analítica da referida reta. O cálculo automático desta linha está sempre disponível entre as várias opções.

É ainda de salientar a importância destas representações no desenvolvimento do processo de modelação matemática. Neste campo, a calculadora gráfica permite que se possa ajustar uma função a uma determinada nuvem de pontos (figura 7), podendo este processo ser baseado essencialmente em dois tipos de ações. Podemos utilizar um ajuste automático a partir da regressão (quadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, sinusoidal, logística, etc.), ou ajustar uma qualquer função definida pela sua expressão analítica. Esta segunda possibilidade traz ao processo de modelação uma dimensão excecional para criar poderosos ambientes de aprendizagem onde os alunos são convidados a experienciar a atividade matemática.

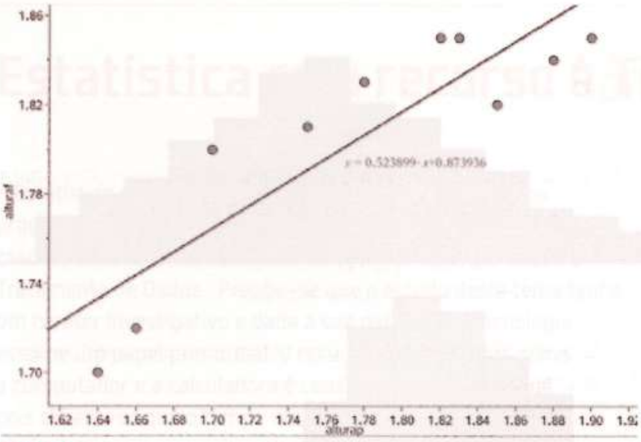


Figura 6

A calculadora gráfica ocupa atualmente um lugar de destaque quando se trata do estudo de funções no ensino secundário. Relativamente ao estudo da estatística o seu uso parece ser ainda moderado. Fica aqui o desafio à sua utilização, tendo em conta as potencialidades didáticas que ela permite concretizar no ensino e aprendizagem da estatística, quer no ensino básico ou secundário.

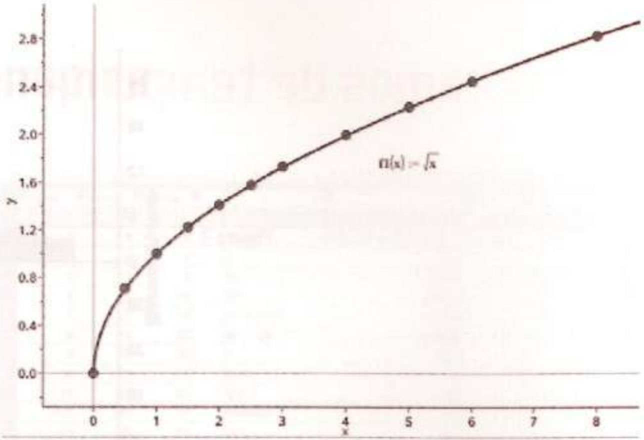


Figura 7

Notas

1 Os gráficos apresentados foram realizados no software TI-nspire desenvolvido para computador. Esta opção foi utilizada com o objetivo de obter figuras com maior grau de nitidez, quando reduzidas, mantendo estas características idênticas às provenientes da calculadora.

António Domingos [amdd@fct.unl.pt]
Departamento de Matemática da FCT/UNL
UIED – Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA
Ana Paula Canavarro

Como vamos de sono?

Esta tarefa tem uma formulação adequada para uma turma de 1° ciclo mas pode ser realizada em qualquer outro ciclo, tendo em conta o interesse do tema focado.
A versão que se apresenta nestes materiais foca-se na quantidade de tempo que os alunos dormem e, assim, pode ser realizada em cerca de 90 minutos. Foi o que aconteceu numa turma de 4.° ano, na Escola Básica da Comenda (Évora), na aula da professora Manuela Vicente. A recolha de dados foi feita numa tabela com três colunas, onde cada aluno registava o seu nome, as horas a que se deitava e as horas a que se levantava, aproximado a horas certas ou a meias horas conforme acordo prévio. Essa tabela circulou pela turma e cada um preencheu os respetivos dados, ficando a tabela completa em poucos minutos. A professora fotocopiou então a tabela e forneceu uma cópia a cada grupo de quatro alunos, que serviu de base a todo o trabalho. Foi nos grupos que os alunos calcularam as horas relativas à duração do sono de cada aluno, pois a professora quis aproveitar para que eles revisitassem o cálculo com as horas e os minutos. Alguns grupos usaram estratégias muito interessantes e expeditas como, por exemplo, adicionar o tempo de sono até à meia-noite e o que faltava até se levantarem (igual à hora a que se levantavam) – um aluno que se deitava às 22:30 e se levantava às 7:30, fazia 1:30 +7:30 = 9:00 horas. No entanto, cada aluno poderia ter registado o seu tempo de sono e isso pouparia algum tempo.
Para cada uma das variáveis referidas nas alíneas b) c) e d), os alunos determinarem a amplitude, mínimo e máximo, moda e média. Repararam que havia uma hora muito frequente para deitar, correspondente ao final da telenovela que muitos viam. Além disso, construíram diagramas de caules e folha para comparar o sono dos rapazes e das raparigas, e um gráfico de barras com três barras para responder ao solicitado na alínea f) – e aqui tiveram de tomar decisões onde incluir dois valores de 8:30 horas correspondentes a dois alunos, o que proporcionou uma excelente discussão.
A turma revelou grande interesse pela realização desta tarefa, ainda mais que aconteceu algo que ninguém previra. Descobriu-se que havia um aluno que se deitava às 2:00 e se levantava às 7:00. E tão admirados ficaram os colegas e a professora por saber o tão pouco que ele dormia diariamente, apenas cinco horas, como ficou ele ao perceber que os seus colegas dormiam tanto, em média nove horas por noite. Esse aluno era filho de pais donos de um restaurante e a professora falou posteriormente com eles com vista a que o aluno pudesse deitar-se mais cedo.
Esta tarefa pode ser facilmente adaptada de modo a estudar-se o sono de forma mais global, considerando outras variáveis para alem da duração, como por exemplo a facilidade de adormecer, a existência de pesadelos, interrupções do sono, agitação ao dormir, etc. Outra variante que poderá ter interesse é a extensão do estudo a todas as turmas de uma escola.
Na Internet encontram-se diversos artigos que podem apoiar o professor e os alunos a documentar-se sobre a qualidade do sono das crianças/jovens que se pretende com vista a uma vida saudável e a fundamentar a apreciação da qualidade do sono da turma.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Como vamos de tempo de sono?

Dormir é uma necessidade básica do ser humano. O Dia Mundial do Sono foi lançado a 14 de março de 2008, com o objetivo de chamar a atenção para a importância do sono na saúde da pessoa, seja adulto ou criança. Atualmente, as desordens do sono constituem uma epidemia global que ameaça a saúde e a qualidade de vida. Mas as desordens do sono podem ser prevenidas e devem ser tratadas, pelo que é importante que cada um conheça e tenha consciência da qualidade do seu sono.

Um aspeto muito importante é a quantidade de tempo que se dorme, ou seja, a duração do sono. Tu sabes quanto tempo dormes por noite? Será o indicado para seres saudável? E o que se passa com os teus colegas? Vamos estudar como é a duração do sono da tua turma!

a) Regista na tabela a que horas costumas deitar-te e levantar-te nos dias de escola.

b) Com base nos dados recolhidos, o que podes dizer sobre a hora a que os alunos da tua turma se costumam deitar?

c) Com base nos dados recolhidos, o que podes dizer sobre a hora a que os alunos da tua turma se costumam levantar?

d) Com base nos dados recolhidos, o que podes dizer sobre a duração do sono dos alunos da turma?

e) Existem diferenças entre a duração do sono das raparigas e dos rapazes?

f) Segundo estudos científicos,[1] é considerado que a duração do sono noturno das crianças em idade escolar (5 a 10 anos) é adequada se se situar entre 9 e 10 horas, é excessiva se for superior ou igual a 11 horas e é insuficiente se for inferior ou igual a 8 horas. Faz um gráfico que mostre quantos alunos da tua turma têm um sono com duração adequada, excessiva ou insuficiente.

g) Depois deste estudo, o que recomendas à tua turma relativamente à duração do sono?

h) E tu, como estás de sono? Precisas de dormir, menos ou mais do que atualmente?

Nota

1 http://amrf.no.sapo.pt/SonoA.pdf

Tabela para recolha de dados: Como vamos de tempo de sono?

Nome	A que horas me deito?	A que horas me levanto?	Quantas horas durmo?

Conceitos versus procedimentos

Observe os seguintes conjuntos de dados e indique, para cada caso, qual a sua média.

a)	4, 4, 4, 4, 4, 4, 4
b)	5, 3, 5, 3, 5, 3, 4
b)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
c)	3, 3, 3, 3, 3, 3, 10

Detenha-se agora a analisar a estratégia que usou para determinar a média em cada caso.

Será que por acaso pensou….

… que no primeiro caso, como os valores são constantes, então a média é 4?

… que no segundo caso os valores oscilam em torno do 4, que 5 e 3 dá média 4, que isto acontece três vezes e sobra um valor que também é 4… e então a média é 4?

… que no terceiro caso os valores se equilibram em torno do valor central, que 1 e 7 se equilibram, que 2 e 6 se equilibram, que 3 e 5 se equilibram, e que 4 está sozinho no meio… e então a média é 4?

… que no quarto caso os valores são todos constantes à exceção do último, mas se deste retirarmos 3, que é o valor dos outros, sobram 7 que podemos redistribuir, 1 por cada 3, ficando assim todos iguais a 4…e portanto, então a média é 4?

Ou será que em cada caso adicionou todos os valores e dividiu a soma obtida por 7?

Pergunto porque segundo as Metas Curriculares, a última estratégia que acima refiro é aquela que é considerada a correta.

Na página 37, relativa ao 5.º ano, pode facilmente confirmar-se que as Metas requerem que o aluno seja capaz de «Identificar a «média» de um conjunto de dados numéricos como o quociente entre a soma dos respetivos valores e o número de dados».

Perante esta definição, são de ordem vária as questões que se colocam:

O que importa é que os alunos realizem a adição e a divisão? Que conheçam e apliquem o algoritmo?

Não interessa o que os alunos entendem por média? Que lhe atribuam significado enquanto uma medida de tendência central, entendam a sua função de «representante» de um conjunto de dados?

Não interessa que os alunos sejam capazes de determinar o valor da média por estratégias devidamente apoiadas na compreensão do conceito, nomeadamente quando ele é facilmente obtido por cálculo mental ou outro processo de cálculo mais eficaz que decorra da análise dos dados?

A média é apenas um exemplo. As definições de conceitos estatísticos vinculadas pelas Metas Curriculares abordam-nos de forma procedimental, com base nos algoritmos aritméticos que querem impor, sem revelarem qualquer preocupação com a compreensão do significado desses conceitos.

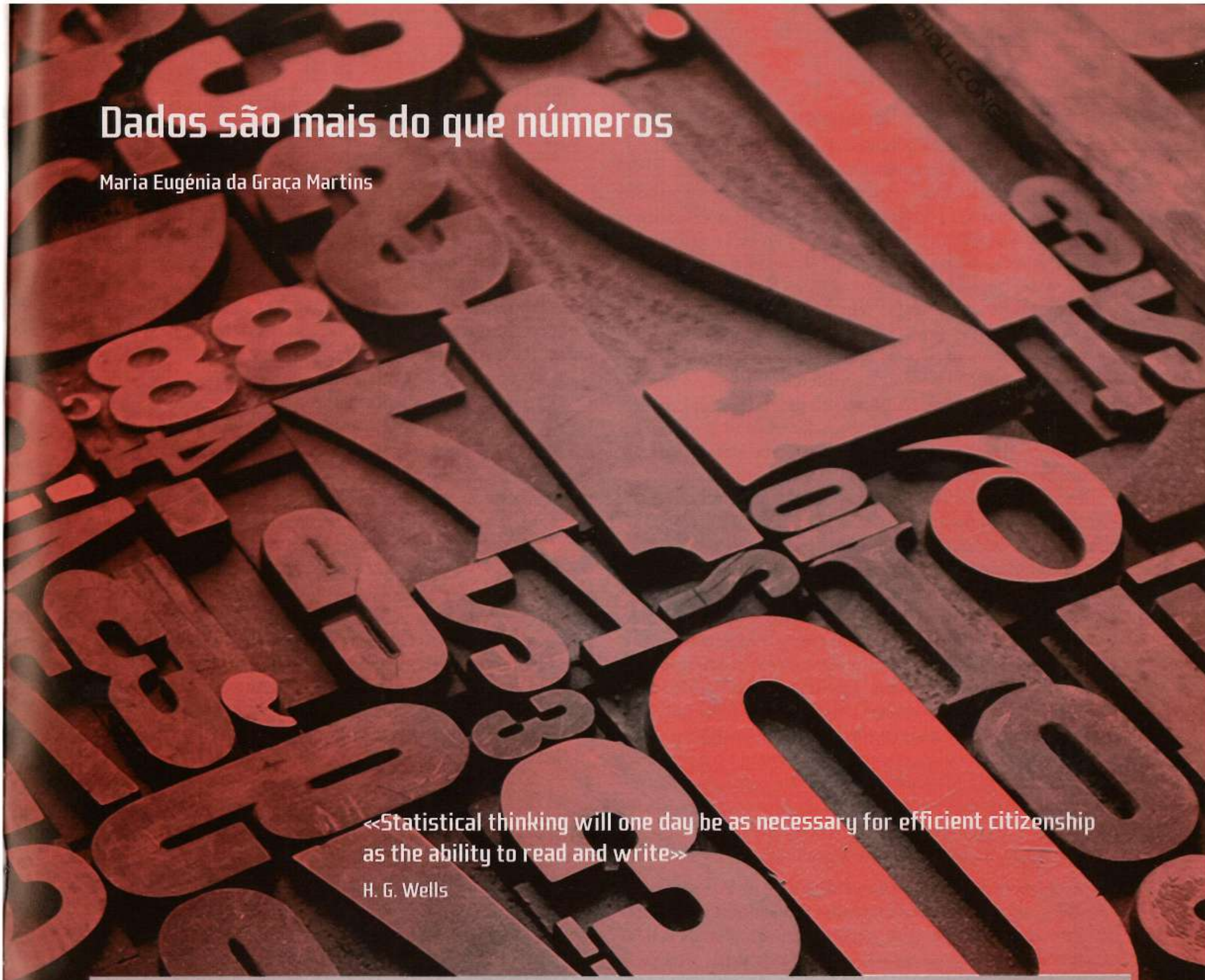
Se as Metas Curriculares para o ensino secundário chegarem a sair, será que vão exigir o cálculo do desvio-padrão e do coeficiente de correlação aos alunos?

Pense nisto!

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Dados são mais do que números

Maria Eugénia da Graça Martins



«Statistical thinking will one day be as necessary for efficient citizenship as the ability to read and write»

H. G. Wells

Introdução

Nos últimos anos tem-se assistido a um incremento de tópicos de probabilidade e estatística nos currículos de matemática, que pode ser entendido como o reconhecimento de uma profecia de H. G. Wells, que no fim do século 19 escrevia o apontamento com que iniciamos este texto.

Sendo um dos objectivos da escola, a preparação dos jovens para exercerem uma cidadania eficiente, é necessário dotá-los de meios para melhor e mais rapidamente compreenderem o mundo em que estão inseridos. A variabilidade está presente em todas as situações do mundo que nos rodeia, pelo que as conclusões que tiramos a partir da informação que se nos apresenta, na forma de *dados*, tem inerente um certo grau de incerteza. Por exemplo, é natural esperar que um pacote de açúcar que na embalagem tenha escrito um quilograma, não pese exactamente um quilograma e que ao pesar o mesmo pacote duas vezes não obtenhamos exactamente o mesmo valor. A Estatística trata e estuda esta variabilidade — permite-nos a partir dos *dados* retirar conclusões e exprimir o grau de confiança que devemos ter nessas conclusões.

Os imperativos das sociedades de hoje exigem que as pessoas sejam matemática, científica e tecnologicamente aptas para interagir com o mundo que as rodeia. O processo de democratização da matemática foi arrastado pela «quantização» da sociedade, que por outro lado nos conduziu à necessidade de novas ferramentas para melhor a interpretar e avaliar. A democratização do ensino fez com que a Matemática não seja mais uma disciplina para uma elite e tem de ser vista como fazendo parte da educação de qualquer cidadão. Vivendo numa sociedade de informação, não basta preocuparmo-nos com a literacia e a numeracia, sendo importante promovermos a literacia estatística, que abarca as competências necessárias para tratar a informação. Como refere Sheaffer (1986) «Teachers, and then students, must be trained to make intelligent decisions based on numerical information if our society is to grow and prosper» (p. 141).

Tal como foi importante para os nossos avós aprenderem a ler e a contar, faz parte da educação para a cidadania saber ler os números e os gráficos, com que somos confrontados no dia-a-dia (Martins et al, 2010, p. 7).

Estatística e Matemática

Podemos questionar-nos porque é que a Estatística surge, no ensino a nível pré-universitário, como fazendo parte do currículo de Matemática? Uma resposta possível e talvez demasiado simplista é avançada por Sheaffer (2005) «The mathematics community was well organized to make changes to their curriculum as society advanced to the information age and was open to accepting statistics as part of their charge». No entanto este acolhimento nem sempre tem sido pacífico já que, como ainda refere Sheaffer (2005) «Data analysis is about context; mathematics is about pattern and logic free of context. The data analyst must make a decision (inference) based on partial knowledge; a mathematician wants to prove (deduce) results based on a set of general principles. A data analyst is willing to make errors (the chance of which can often be measured), and the mathematician wants to reason without error».

Sendo consensual que a inclusão de Estatística no currículo escolar é fundamental, assistimos a uma reformulação dos currículos de Matemática, em que se procura realçar que um aspecto fundamental na literacia estatística, é compreender e usar o raciocínio estatístico, que é diferente do raciocínio matemático e que a educação estatística não se pode restringir a uma visão da Estatística, como um ramo da Matemática. Na verdade, enquanto o pensamento matemático se refere a relações entre conceitos abstractos, o pensamento estatístico tem sempre presente o contexto que dá origem aos *dados* que, por sua vez, permitem (ou não) responder a certas questões.

A Estatística tal como, por exemplo, a Física e a Economia, embora utilizando a Matemática, tem os seus conceitos e processos próprios. Algumas recomendações da Americam Statistical Association e da Mathematical American Association vão no sentido de que, no ensino da Estatística (Gal, 1997):

- A ênfase se deva colocar nos conceitos e no trabalho com *dados*, em detrimento de fórmulas e cálculos. Os *dados* devem ser recolhidos para responderem a questões e não unicamente para se ter um conjunto de *dados* para treinar fórmulas ou representações gráficas. A utilização de dados reais, relativos a situações interessantes para os alunos, tem a vantagem de os motivar, provocando a formulação de novas questões e eventualmente a recolha de novos *dados*. Pode haver situações em que seja útil a utilização de dados hipotéticos, nomeadamente em situações em que se procure explorar propriedades de alguns conceitos de Estatística, mas estes casos devem ser a excepção e não a regra;
- Muitos problemas estatísticos não têm uma solução matemática única. Pelo contrário, têm por base uma questão e terminam com a apresentação de uma opinião que pode ter diferentes graus de «razoabilidade» ...;
- O objectivo principal da educação estatística é tornar os estudantes capazes de exprimirem descrições fundamentadas, juízos, inferências e opiniões acerca de dados, ou argumentarem acerca da interpretação de dados, usando instrumentos matemáticos, no grau necessário;
- Os juízos e inferências que podemos esperar da parte dos alunos, a maior parte das vezes não poderão ser caracterizados como «verdadeiros» ou «falsos», tendo sobretudo de ser avaliados em termos da qualidade dos raciocínios e da adequação dos métodos utilizados e da natureza dos *dados* e muitas vezes podem depender do conhecimento limitado que os alunos têm do mundo que os rodeia.

Não obstante esta diferença, a convivência entre a Estatística e a Matemática pode ser «saudável», nomeadamente para a Matemática. É comum os jovens questionarem-se nas aulas da disciplina de Matemática «Mas para que é que isto serve, onde vou utilizar isto?». A utilização, em Estatística, de dados reais, contextualizados, pode motivar os jovens na apreensão dos conceitos matemáticos: uma fracção ou percentagem pode ser a frequência relativa com que determinado clube de futebol ganha os jogos num campeonato, um somatório pode ser a média do número de mensagens de telemóvel enviadas pelos alunos de uma turma, uma recta pode ser uma recta de regressão, que explica a relação entre os as alturas e os pesos dos alunos de uma turma, etc.

Dados com contexto

Como se frisou na secção anterior, o mundo que nos rodeia será mais facilmente compreendido se puder ser quantificado. Em todas as áreas do conhecimento é necessário saber «o que medir» e «como medir». A Estatística é a ciência que ensina a recolher dados válidos, assim como a interpretá-los.

Perante um conjunto de dados podem-se distinguir duas metodologias de aproximação:

- por vezes o estatístico é confrontado com conjuntos de dados sem ter qualquer ideia preconcebida sobre o que é que vai encontrar e então procede a uma análise exploratória de dados, quase sempre utilizando processos gráficos, análise esta que revelará aspectos do comportamento dos dados; neste caso não se fala em *amostras*, mas sim *conjuntos de dados* (Murteira, 1993) e de uma maneira geral a análise exploratória é suficiente para os fins que se têm em vista;
- em outros casos, que é de um modo geral a situação de interesse em Estatística, sendo aquela em que nos posicionamos, procede à análise de dados com propósitos bem definidos no sentido de responder a questões específicas. Neste caso os dados têm que ser produzidos por meio de técnicas adequadas de forma a que resultem dados válidos (amostras representativas). Estas técnicas, em que é fundamental a intervenção do acaso, revolucionaram e fizeram progredir a maior parte dos campos da ciência aplicada. Pode-se dizer que hoje em dia não existe área do conhecimento para cujo progresso não tenha contribuído a Estatística.

Não é demais realçar a importância desta fase, a que chamamos de Produção ou Aquisição de Dados. Como é referido em Tannenbaum (1998, p. 426): «Behind every statistical statement there is a story, and like a story it has a beginning, middle, an end, and a moral. In this first statistics chapter we begin with the beginning, which in statistics typically means the process of gathering or collecting data. Data are the raw material of which statistical information is made, and in order to get good statistical information one needs good data». Consideremos, por analogia, o que se passa quando se pretende realizar um determinado cozinhado. Começa-se por seleccionar

Ano	Freq. absoluta	Freq. relativa
5°	14	0,28 ou 28%
6°	12	0,24 ou 24%
7°	10	0,20 ou 20%
8°	8	0,16 ou 16%
9°	6	0,12 ou 12%
Total	50	1 ou 100%

Figura 1. Tabela de frequências e diagrama de barras para a variável Ano de escolaridade

os ingredientes, que serão depois manipulados de acordo com determinada receita. O resultado do cozinhado pode ser um desastre, embora de aspecto agradável. Efectivamente, se os ingredientes não estiverem em condições, resulta um prato de aspecto semelhante ao que se obteria com ingredientes bons, mas de sabor intragável. O mesmo se passa com o procedimento estatístico. Se os dados não forem bons, embora se aplique a técnica correcta, o resultado pode ser desastroso, na medida em que se pode ser levado a retirar conclusões erradas.

Antes de começar a recolha de dados é fundamental, face a determinado problema, identificar correctamente a População sobre a qual se pretende recolher informação e fazer um planeamento de recolha da amostra, onde se decide quais e como devem ser recolhidos os *dados*. De um modo geral, o trabalho do estatístico deve começar antes de os dados serem recolhidos. Deve planear o modo de os recolher, de forma a que, posteriormente, se possa extrair o máximo de informação relevante para o problema em estudo, ou seja para a população de onde os dados foram recolhidos e de modo a que os resultados obtidos possam ser considerados válidos. Vem a propósito referir a célebre frase de R. A. Fisher: «Ao pedir a um estatístico que diagnostique dados já recolhidos, muitas vezes só se obtém uma autópsia» (Tradução livre de To consult the statistician after an experiment is finished is often merely to ask him to conduct a post mortem examination. He can perhaps say what the experiment died of (Presidential Address to the First Indian Statistical Congress, 1938, Calcutta).

Resumindo, existem alguns cuidados a ter quando precisamos de recolher dados:

- Em primeiro lugar, é necessário identificar, sem origem para dúvidas, qual o conjunto de indivíduos (ou objectos, ou «coisas») que se pretende observar;
- Em segundo lugar, é necessário identificar qual a característica ou variável que se pretende observar em cada um dos elementos do conjunto anterior; o resultado dessa observação é o dado.
- Se estas etapas não ficarem muito bem definidas desde o princípio, pode ser complicado saber o que são os nossos dados.
- Em Estatística, os dados têm que ter um contexto.

Apresentamos a seguir algumas situações que concretizam o que acabamos de expor.

Exemplos

Exemplo 1.—Suponhamos que estávamos interessados em saber qual o ano de escolaridade predominante nos alunos que frequentam uma Escola Básica do 2.° e 3.° ciclos, com 565 alunos. Como não se tem tempo para fazer a pergunta a todos os alunos, selecciona-se, ao acaso, 50 alunos a quem se pergunta qual o ano que frequentam. Um conjunto de respostas possíveis poderia ser:

6.° 7.° 5.° 8.° 9.° 7.° 8.° 5.° 6.° 7.° 5.° 9.° 8.° 6.° 5.° 7.° 8.° 9.° 6.° 6.° 9.° 5.° 5.° 8.° 5.° 6.° 5.° 5.° 7.° 6.° 5.° 6.° 6.° 7.° 6.° 5.° 5.° 9.° 7.° 6.° 8.° 7.° 7.° 8.° 9.° 5.° 7.° 5.° 6.° 8.°

Neste exemplo podemos identificar:

- *População*.—Conjunto dos 565 alunos da escola, pelo que a unidade observacional, objecto do estudo, é o aluno.
- *Característica ou variável em estudo*.—A característica que se está a observar sobre cada aluno é «Ano a que pertence», sendo portanto uma variável de tipo qualitativo.
- *Dados*.—São o resultado da observação sobre cada um dos 50 alunos, seleccionados para a amostra, do ano a que pertence.

Uma vez os dados recolhidos precede-se à sua organização na forma de uma tabela de frequências e de um diagrama de barras (figura 1).

Da tabela e do gráfico na figura 1 verificamos que predominam na amostra os alunos do 5° ano de escolaridade, pelo que somos levados a «inferir» que na escola se verifica a mesma predominância.

Exemplo 2.—Suponhamos agora que fomos a uma Escola Básica do 2.° e 3.° ciclos com 565 alunos e pedimos na secretaria da escola que nos informassem sobre quantos alunos frequentaram cada ano de escolaridade, num determinado ano lectivo à nossa escolha, por exemplo 2010-2011.

Neste exemplo podemos identificar:

- *População*.—Conjunto dos 5 anos de escolaridade leccionados na escola, no ano lectivo 2010-2011, pelo que a unidade observacional, objecto do estudo, é o ano de escolaridade.
- *Característica ou Variável em estudo*.—A característica que se está a observar sobre cada ano é «Número de alunos que frequentaram o ano de escolaridade», sendo portanto uma variável de tipo quantitativo discreto.

Ano	Número de alunos
5º	158
6º	136
7º	113
8º	90
9º	68

Figura 2. Tabela com o número de alunos que frequentaram a escola no ano lectivo 2010–2011

Exemplo	Unidade observacional	Variável	Dado
1	Aluno	Ano de escolaridade	Por exemplo: 6º
2	Ano	Número de alunos	Por exemplo: 68

Figura 3. Tabela para comparação dos Exemplos 1 e 2

- *Dados*.—São o resultado da observação sobre cada um dos 5 anos de escolaridade, do número de alunos.

A secretaria forneceu-nos os dados numa tabela (figura 2).

Repare-se que a tabela (figura 2) não é uma tabela de frequências! A secretaria limitou-se a registar o valor observado pela variável que se está a estudar, que é o número de alunos, relativo à unidade observacional que é o ano de escolaridade. A secretaria poderia ter dado a mesma informação da seguinte forma: O número de alunos que frequentaram o 5.º, 6.º, 7.º, 8.º ou 9.º ano foram, respectivamente, 158, 136, 113, 90 e 68, que são efectivamente os nossos dados.

Enquanto no exemplo 1, o aluno era o objecto de estudo e a variável que se estava a estudar era o ano de escolaridade, pelo que os nossos dados são o resultado de observar qual é o ano de escolaridade de cada um dos 50 alunos, ou seja 6.º, 7.º, 5.º, ... , 6.º, 8.º, obtendo 50 dados por termos observado 50 alunos, no caso do exemplo 2, o objecto de estudo é o ano de escolaridade e o que se pretende observar ou contar é o número de alunos em cada ano, pelo que o resultado dessa observação é o dado. Os dados que obtivemos foram 68, 90, 113, 136 e 158. Só obtivemos 5 dados, porque só tínhamos 5 «coisas» a observar! A situação resume-se como indicado na figura 3.

Estes dois exemplos tiveram como objectivo mostrar que a mesma entidade tanto pode ser a unidade que se pretende observar como a variável que se está a observar sobre essa unidade. Depende do contexto em que estamos. A falta de uma identificação correcta do que é o dado, pode dar origem a situações que não se deveriam verificar, como as que se exemplificam a seguir, surgidas em livros de texto.

Confusões com dados

Uma situação que aparece frequentemente, é a confusão que se faz entre dado e frequência. Apresentamos um gráfico com barras (figura 4), que se retirou de um texto de Matemática:

De acordo com o título do gráfico, este representará o número de alunos das turmas do 5º ano de determinada escola, onde ainda se retira a informação de quantos alunos são rapazes e quantos são raparigas em cada uma das turmas. Mas então, o que temos representado no gráfico são os próprios dados e não as frequências, como está indicado no eixo das ordenadas. O gráfico anterior, apesar de ser um gráfico com barras, não é um gráfico de barras.

Outro exemplo, onde também se faz uma confusão idêntica, é o que apresenta o gráfico (figura 5) introduzido da seguinte forma:

«O gráfico representa o número de peixes que cinco amigos pescaram num dia»

Pede-se para classificar a distribuição quanto à moda, no pressuposto de que a «distribuição» é bimodal, confundindo-se dado com frequência. Por definição, a moda é o(s) valor(es) que surge(m) com maior frequência. Então teremos de ver quais os nossos dados, que são os resultados da observação do «número de peixes» que cada um dos cinco amigos pescou e que são 30, 20, 25, 25 e 30. Temos uma variável quantitativa discreta, cujas observações podem ser organizadas numa tabela (figura 6) de frequências (sem grande interesse estatístico devido ao diminuto número de dados).

Agora podemos concluir que a distribuição dos dados é efectivamente bimodal, pois apresenta duas modas.

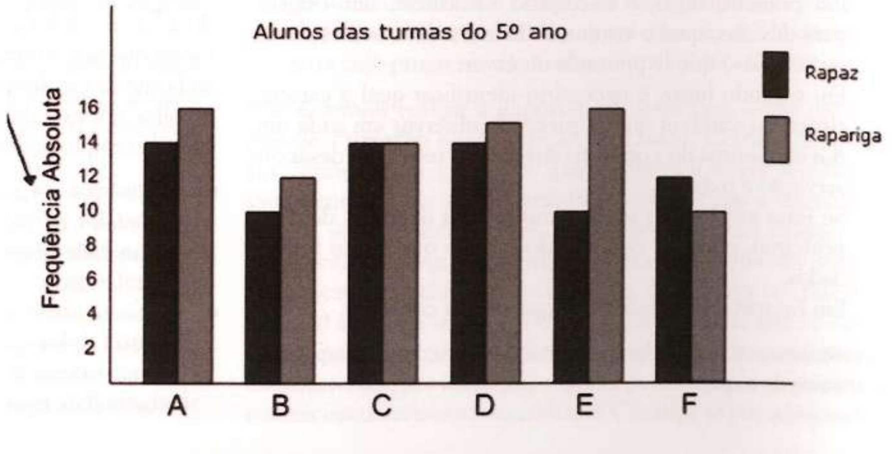


Figura 4. Gráfico apresentando o número de alunos das turmas A, B, C, D, E e F, discriminados por sexo

Figura 5. Gráfico apresentando os dados relativos à variável Número de peixes que cada um de cinco amigos pescaram num dia

Classe	Freq. absoluta
20	1
25	2
30	2

Figura 6. Tabela de frequências para a variável Nú mero de peixes que cada um de cinco amigos pescaram num dia

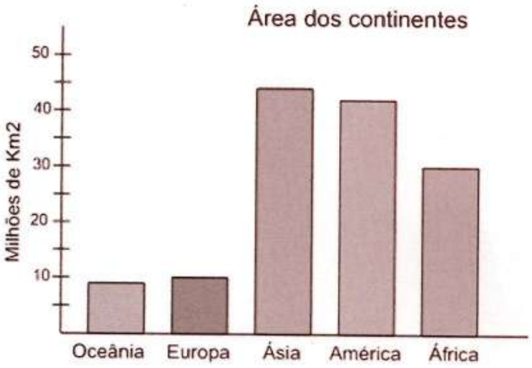


Figura 7. Gráfico apresentando as áreas dos continentes

Continente	Área
Oceânia	9
Europa	10
Ásia	44
América	42
África	30

Figura 8. Tabela apresentando as áreas dos continentes

Vejamos ainda o seguinte exemplo que também foi seleccionado de um texto de matemática, onde se lê:

«O gráfico (figura 7) representa as áreas dos continentes. Constrói uma tabela de frequências absolutas»

A solução apresentada é a tabela na figura 8.

Neste caso a unidade observacional é o continente e a variável objecto de estudo é a «Área de um continente». Assim os nossos dados são 9 km², 10 km², 44 km², 42 km² e 30 km², pelo que nem o gráfico apresentado é um gráfico de barras, nem a tabela é uma tabela de frequências.

Conclusão

Os exemplos anteriores mostram a relevância de termos sempre presente o que se está a estudar e o que são os nossos dados. Caso contrário corremos o risco de por em causa o ditado segundo o qual «Um gráfico vale mais que mil palavras». Mesmo o gráfico mais simples pode induzir em erro, se não soubermos avaliar qual a informação que se pretende transmitir!

Referências

GAISE (2005). *Guidelines for assessment and instruction is statistics education report. A pre-k-12 curriculum framework.* Available online at www.amstat.org/education/gaise

Gal, I. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), The assessment challenge in statistics education (pp. 1–13). IOS press (on behalf of the isi) (http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref)

Graça Martins, M. E., & Cerveira, A. (1999). *Introdução às Probabilidades e à Estatística.* Lisboa: Universidade Aberta.

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística — Com complementos de Excel.* Lisboa: SPE.

Graça Martins, M. E., Loura, l., & Mendes, F. (2007). *Análise de dados — texto de apoio para os professores do 1.º ciclo.* Lisboa: DGIDC/ME.

Graça Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados.* Lisboa: DGIDC/ME. Disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_npmeb/matematicaotd_final.pdf

Holmes, P. (2002). Some lessons to be learned from curricular developments in statistics. In *Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics, ICOTS 6*, Cape Town, South Africa.

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistics Review*, 65 (2), 123–165.

Sheaffer, R. (2005). In a world of data, Statistics counts. Disponível em: http://apcentral.collegeboard.com/apc/members/courses/teachers_corner/22510.html

Sheaffer, R. (1986). Statistics and Probability in the school mathematics curriculum: A review of the ASA-NCTM Quantitative Literacy Project. In *Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics, ICOTS 2*, Victoria, Canada.

Sheaffer, R. (1990). The ASA-NCTM Quantitative Literacy Project: An overview. In *Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics, ICOTS 3*, Dunedin, New Zealand.

Tannenbaum, P., & Arnold, R. (1998). *Excursions in modern mathematics.* New Jersey: Prentice Hall.

Watson, J. (1997). Assessing statistical thinking using the media. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107–121). Ios press (on behalf of the isi) (http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref)

Maria Eugénia Graça Martins
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

A Estatística premeia e ajuda a melhorar o basquetebol

Jaime Carvalho e Silva

Quem acompanha os jogos de basquetebol (por exemplo da NBA ou da WNBA, os campeonatos masculino e feminino americanos) deve saber que normalmente é escolhido um jogador ou jogadora como sendo o MVP— *Most Valuable Player* (Jogador mais valioso). Em Portugal também é assim, tanto na Liga Masculina como na Liga Feminina.

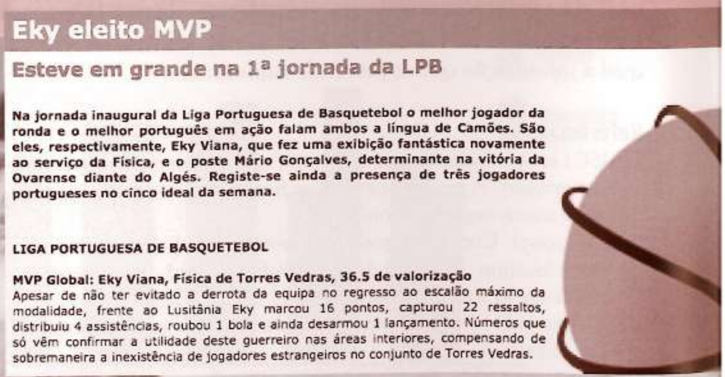
A maior parte das pessoas pensa que há um júri a escolher o melhor jogador em cada jogo, em cada semana, em cada mês e em cada campeonato. Muitas vezes o título que aparece é de »X foi eleito MVP do jogo ou da semana» (figuras 1 e 2).

Contudo, na maior parte das vezes, no basquetebol não é assim. Há muitos prémios que são atribuídos em função de votações, é verdade, mas em cada jogo e cada semana, o prémio é atribuído através de uma fórmula matemática. Esta fórmula pretende retratar o desempenho de cada jogador(a) de modo a que quem tem mais pontos seja o que melhor desempenho global teve durante o jogo. Para isso é necessário registar certos parâmetros durante o jogo, para cada jogador(a) de modo a que no fim seja possível obter o MVP desta maneira; na realidade os cálculos são feitos de forma automática, visto que os dados estatísticos recolhidos são introduzidos por uma pessoa, em tempo real, num computador através de um *software* adequado. Em Portugal são usados dois *softwares* de recolha de dados estatísticos: o GREB produzido em Portugal, e o software oficial da FIBA (Federação Internacional de Basquetebol).

Que dados estatísticos são necessários? Na realidade, os dados estatísticos escolhidos são os que são fáceis de recolher durante o jogo (que pode incluir muitas ações e ser muitíssimo rápido!) e não todos aqueles que seria idealmente interessante recolher.

Vou expor rapidamente quais são esses dados para que se possa depois entender melhor a fórmula utlizada:

- *Pontos marcados* PM são os pontos marcados pelo(a) jogador(a); no basquetebol há lançamentos que valem 1, 2 e 3 pontos;
- *Lançamentos de 2 pontos* L2C convertidos e tentados;
- *Lançamentos de 3 pontos* L3C convertidos e tentados;
- *Lances Livres* LLC (que valem 1 ponto) convertidos e tentados;



Eky eleito MVP

Esteve em grande na 1ª jornada da LPB

Na jornada inaugural da Liga Portuguesa de Basquetebol o melhor jogador da ronda e o melhor português em ação falam ambos a língua de Camões. São eles, respectivamente, Eky Viana, que fez uma exibição fantástica novamente ao serviço da Física, e o poste Mário Gonçalves, determinante na vitória da Ovarense diante do Algés. Registe-se ainda a presença de três jogadores portugueses no cinco ideal da semana.

LIGA PORTUGUESA DE BASQUETEBOL

MVP Global: Eky Viana, Física de Torres Vedras, 36.5 de valorização
Apesar de não ter evitado a derrota da equipa no regresso ao escalão máximo da modalidade, frente ao Lusitânia Eky marcou 16 pontos, capturou 22 ressaltos, distribuiu 4 assistências, roubou 1 bola e ainda desarmou 1 lançamento. Números que só vêm confirmar a utilidade deste guerreiro nas áreas interiores, compensando de sobremaneira a inexistência de jogadores estrangeiros no conjunto de Torres Vedras.

Figura 1

Morris eleito MVP

Portugueses dominam 5 ideal da jornada

A última jornada da fase regular da LPB ficou marcada pela excelente exibição do norte-americano do Vitória de Guimarães, Brian Morris, MVP Global, numa ronda onde os atletas portugueses estiveram em grande destaque, já que as restantes quatro posições do cinco ideal da semana são pertença de jogadores nacionais. Se bem que o mais valorizado acabaria por ser o extremo do Terceira Basket Frederico Tavares, fruto da sua bela prestação no jogo frente aos vimaranenses.

22ª JORNADA

MVP Global – Brian Morris, Vitória Sport Clube, 40.5 de valorização

Dupla satisfação para este norte-americano na última jornada da fase regular, uma vez que o fato de ter sido o MVP da jornada contribuiu para que o Vitória esteja presente na fase seguinte da prova. Por tudo aquilo que fez ao longo da fase regular, à semelhança do seu brilhante desempenho em termos defensivos e ofensivos na partida frente ao Terceira Basket – 30 pontos, 13 ressaltos, 3 roubos de bola e 1 desarme de lançamento –, Morris sentir-se-á nesta altura recompensado pelo seu desempenho desde que chegou a Guimarães.

Figura 2

- *Ressaltos ganhos* RG, isto é, quando a bola não entra no cesto e ressalta da tabela, quem é a primeira pessoa a apanhá-la, podendo os ressaltos ser defensivos RD ou ofensivos RO;
- *Assistências* AS quando se passa a bola ao jogador(a) que marca;
- *Perdas de bola* PB;
- *Roubos de bola* RB;
- *Desarmes de lançamento* DL, isto é, desarmes feitos quando um jogador está a efetuar o seu lançamento;
- *Faltas cometidas* FC;
- *Faltas provocadas* FP, isto é faltas que o jogador(a) sofreu.

Estas estatísticas são tornadas públicas em Portugal através da página web da FPB (figura 3).

Não são contadas, por ser muito difícil, outras jogadas importantes: tempo que uma equipa demora a marcar, bolas cortadas para fora mas sem mudança de posse de bola, faltas graves (ditas anti-desportivas), tempo que um jogador impede o outro de progredir, contra-ataque feito, etc. O tempo que cada jogador está em campo também normalmente não entra no cálculo do MVP. Em Portugal a fórmula usada é a seguinte:

$$MVP=(L2C\times 2+L3C\times 3+LLC+RD+RO\times 1{,}5+RB+AS+ \\ +DL+FP/2)-(L2F+L3F+LLF+PB+FC/2)$$

Esta fórmula significa que se contam positivamente os lançamentos, com fatores iguais ao seu valor pontual, os ressaltos (sendo os ofensivos mais valorizados), roubos de bola, assistências, desarmes de lançamento e faltas provocadas. E a fórmula conta negativamente os lançamentos falhados (sem peso diferenciador), as perdas de bola e as faltas cometidas.
Esta fórmula reflete razoavelmente bem os aspetos importantes do jogo e por isso é reconhecida geralmente como premiando com mais pontos os melhores jogadores em campo.

Contudo, se olharmos mais atentamente para a fórmula, observamos que ela valoriza mais os pontos marcados e os ressaltos ganhos. Como no basquetebol a altura é um fator importante quando se joga muito perto do cesto, a fórmula acaba por premiar os jogadores mais altos; ora, o basquetebol é um jogo de equipa e por isso a circulação eficaz da bola por todos os jogadores é essencial (por exemplo para descobrir jogadores que não estejam tão marcados pelos adversários e consigam ganhar

XV Campeonato Nacional Liga Feminina

I Fase

Escalao: **Sénior**
Nível competitivo: **Liga Fem**
Época: **2012/2013**

N. Jogo	Jorn.	Data/Hora	Recinto
585	2	20/10/2012 18.00	Pav. Multidesportos

Olivais Coimbra 77 - 66 **Algés**

Olivais Coimbra

Nº	Nome	5I	Min	Pts	2 Pts C	2 Pts T	2 Pts %	3 Pts C	3 Pts T	3 Pts %	Lances Livres C	Lances Livres T	Lances Livres %	RES Tot	RES DEF	RES OFE	AS	PB	RB	DL	FC	FP	MVP Valor
4	Afonso, Artemis	S	32:18	6	3	6	50%	0	0	0%	0	1	0%	7	6	1	0	1	0	0	2	2	8.5
5	Gonçalves, Marcy		17:33	4	2	2	100%	0	1	0%	0	0	0%	2	2	0	1	4	2	0	4	0	2
7	Filipe, Josephine		7:42	3	1	2	50%	0	0	0%	1	2	50%	0	0	0	1	0	0	0	0	1	2.5
9	Diniz, Andreia		0:0	0	0	0	0%	0	0	0%	0	0	0%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	Baptista, Adriana		0:0	0	0	0	0%	0	0	0%	0	0	0%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	Silva, Carsidália		13:32	2	1	2	50%	0	0	0%	0	0	0%	0	0	0	0	4	0	0	4	0	-5
12	Fonseca, Ana	S	34:49	22	3	5	60%	3	5	60%	7	8	88%	4	2	2	5	4	0	0	3	6	24.5
14	Cunha, Bruna		0:0	0	0	0	0%	0	0	0%	0	0	0%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	Andrade, Maria	S	28:47	13	5	11	45%	1	3	33%	0	0	0%	5	5	0	0	3	0	0	1	0	6.5
18	LADY COMFORT	S	36:16	19	8	12	67%	0	0	0%	3	4	75%	15	11	4	1	1	0	0	4	4	31
20	McIntyre, Mattilyn	S	27:38	8	2	3	67%	1	2	50%	1	2	50%	1	1	0	2	4	0	1	3	6	6.5
21	Antunes, Ana		1:25	0	0	1	0%	0	0	0%	0	0	0%	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
TOTAIS		-		77	25	44	57%	5	11	45%	12	17	71%	35	27	8	10	21	2	1	22	19	

Figura 3. Página Web da Federação Portuguesa de Basquetebol

vantagem posicional no campo). Assim, premeia-se mais o final das jogadas e menos o seu desenrolar. Talvez demasiado.

Por outro lado, a eficácia do jogador só é parcialmente capturada pela fórmula, visto que não conta o tempo que está em jogo e por isso não se contabiliza se ele marcou 10 pontos em 5 minutos ou em 20 minutos de jogo.

A fórmula usada em Portugal não é a única existente e aparecem muitas outras a ser utilizadas em diferentes países e competições. Na Euroliga de Basquetebol, a mais prestigiada competição da Europa (algo semelhante à Liga dos Campeões no Futebol), o MVP da semana é atribuído ao jogador(a) que obtiver maior índice PIR e pertença a uma equipa que ganhou o seu jogo (antes eram dados prémios a uma equipa qualquer mas depois considerou-se que era injusto premiar um jogador de uma equipa que perdia um jogo). E o que é o PIR? É um índice, conhecido por *Performance Index Rating*, que é calculado pela fórmula que a seguir apresento, onde Desarmes (que não apareciam antes) são os DL sofridos pelo jogador(a):

$$\mathrm{PIR} = (\mathrm{PM}+\mathrm{RG}+\mathrm{AS}+\mathrm{RB}+\mathrm{DL}+\mathrm{FP}) - (\mathrm{L2F}+\mathrm{L3F}+\mathrm{LLF}+\mathrm{PB}+ \\ +\mathrm{Desarmes}+\mathrm{FC})$$

Esta fórmula difere da usada em Portugal em vários aspetos: em Portugal os ressaltos ofensivos são mais valorizados (tem lógica, é mais difícil ganhar uma bola no campo do adversário), em Portugal as faltas são menos valorizadas (muito discutível ...), e na Euroliga são ainda incluídos os desarmes em ato de lançamento. A diferença não é muito grande, mas continua a ser especialmente valorizado o jogo ofensivo em termos de pontos marcados e ressaltos ganhos. Em nenhuma das fórmulas entra o número de minutos jogados. O jornalista John Hollinger da ESPN, que segue há muitos anos a NBA, desenvolveu uma fórmula diferente, que classificou de PER—*Player Efficiency Rating*. Esta fórmula inclui os minutos jogados MJ pelo jogador, assim como as médias da equipa e da liga onde a equipa joga. Uma parte da fórmula é esta:

$$\frac{1}{\mathrm{MJ}}\left[\mathrm{L3C} + \frac{2}{3}\mathrm{AS} + \left(2 - \mathrm{fact} \times \frac{\mathrm{eqAST}}{\mathrm{eqPM}} \times \mathrm{PM}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathrm{LLC}\left(1 - \frac{\mathrm{eqAST}}{\mathrm{eqPM}}\right)\right)\right] + \\ - \frac{1}{\mathrm{MJ}}\left[\cdots + \mathrm{FC}\frac{\mathrm{ligaLLC}}{\mathrm{ligaFC}} - 0.44 \times \frac{\mathrm{ligaLLCmed}}{\mathrm{ligaFC}} \times \mathrm{VOP}\right]$$

A fórmula não está completa (tem ainda mais oito parcelas) e inclui vários coeficientes que não vão ser detalhados aqui. Uma versão simplificada desta fórmula é dada por

$$[\mathrm{PM} \times 85.910 + \mathrm{RB} \times 53.897 + \mathrm{L3M} \times 51.757 + \\ + \mathrm{L3M} \times 51.757 + \mathrm{LLM} \times 46.845 + \mathrm{DL} \times 39.190 + \\ + \mathrm{RO} \times 39.190 + \mathrm{AS} \times 34.677 + \mathrm{RD} \times 14.707 - \mathrm{FC} \times 17.174 - \\ - \mathrm{LLF} \times 20.091 - \mathrm{LF} \times 30.190 - \mathrm{PB} \times 53.897] \times \frac{1}{\mathrm{MJ}}$$

A complexidade atingida por esta fórmula é tal que a análise comparativa só pode ser feita através de simulações com dados estatísticos reais. Depois dessa simulação analisa-se qual a lista de melhores jogadores obtida. Se a lista for aceitável então o método de cálculo de John Hollinger é aceitável, o que deixa alguma dose de subjetividade na avaliação da eficácia da fórmula. O próprio John Hollinger diz que «PER is not the final, once-and-for-all evaluation of a player's accomplishments during the season» (O PER não é a avaliação final, de uma vez por todas, do desempenho de um jogador durante a época). Se se pretende avaliar apenas o desempenho defensivo então o PER já não é totalmente eficaz, etc. As relações entre a Matemática e a Realidade não são relações fáceis.

Uma última nota sobre a utilização da estatística no basquetebol. Não existem apenas fórmulas para definir quais os jogadores mais valiosos, nem são feitas apenas análises estatísticas genéricas dos resultados. António Jaime Sampaio afirma que «a análise quantitativa do jogo de Basquetebol é um processo fundamental na clarificação dos factores que concorrem para o sucesso desportivo». Dean Oliver, autor da revista *The Journal of Basketball Studies*, onde se discute as aplicações da Matemática ao basquetebol, é agora Diretor de Análise Quantitativa na equipa da NBA Denver Nuggets. E afirma que «uma maioria de pessoas usa estatísticas de um modo ou de outro».

O que fazem? Para cada jogador e para cada equipa, analisa-se quais são os movimentos e ações que mais contribuem para o sucesso da equipa. Os métodos de análise são muitos. Um dos mais curiosos é o *método Pitagórico do* 16,5 que fornece a percentagem de vitórias esperadas usando o facto de a razão entre as vitórias e derrotas de uma equipa estar relacionado com os pontos marcados PM e os pontos sofridos PS através de uma fórmula em que o expoente 16,5 aparece:

Mais uma vez a justeza da fórmula só pode ser testada aplicando-a a dados estatísticos concretos. O fator sorte influencia certamente muitos resultados, mas Dean Oliver defende que a longo prazo as melhores equipas ganham independentemente de fatores imprevisíveis como é o fator sorte.

Referências

Zach Fein, "Cracking the Code: How to Calculate Hollinger's PER Without All the Mess".
http://bleacherreport.com/articles/113144-cracking-the-code-how-to-calculate-hollingers-per-without-all-the-mess

John Hollinger, "What is PER?"
http://espn.go.com/nba/columns/story?columnist=hollinger_john&id=2850240

Dean Oliver, "Pythagorean 16.5 Method".
http://www.rawbw.com/~deano/helpscrn/pyth.html

Dean Oliver, The Journal of Basketball Studies.
http://www.rawbw.com/~deano/

António Jaime Sampaio, *Os indicadores estatísticos que mais contribuem para desfecho final dos jogos de basquetebol*.
http://www.efdeportes.com/efd11/samp.htm

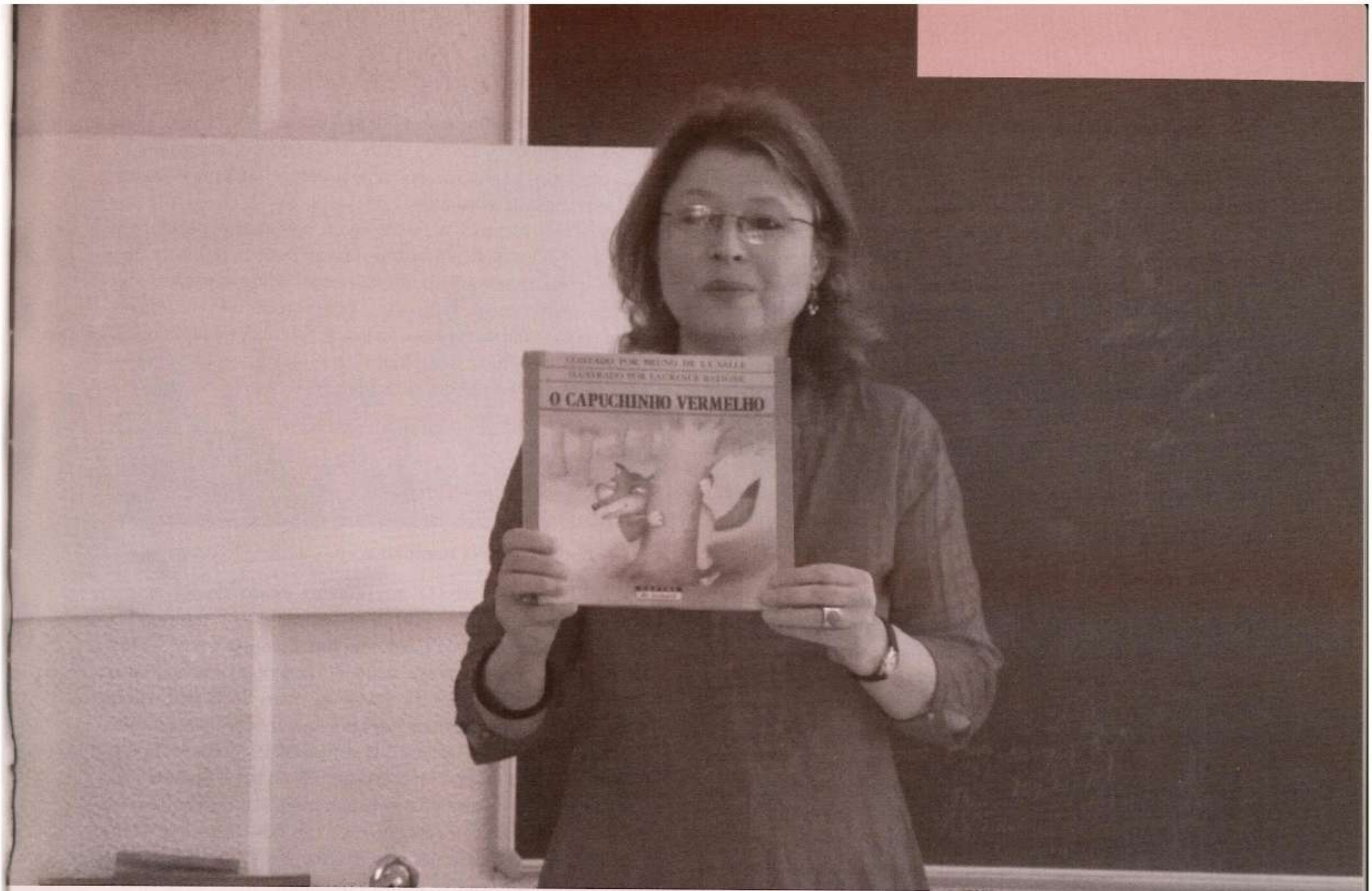
Calculating PER.
http://www.basketball-reference.com/about/per.html

FIBA Official Basketball Statistics' Manual 2012.
http://www.fibaeurope.com/cid_CLnADdofJ4MZ8xgmecgDFo.html

Player efficiency rating.
http://en.wikipedia.org/wiki/Player_efficiency_rating

Jaime Carvalho e Silva

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra



Era uma vez ... uma aula de OTD no 1.º Ciclo

Uma reportagem em Lisboa

Quando andávamos a estudar na faculdade, contava-se a seguinte piada sobre matemáticos: «Como é que um matemático conta a história dos três porquinhos? Sejam três porquinhos: P1, P2 e P3 ...». Talvez esta seja uma possível ligação da matemática à literatura infantil, mas como pudemos testemunhar na visita à EB1/JI Orlando Gonçalves, há outras hipóteses muito mais interessantes.

Como se costuma dizer «Nada acontece por acaso». E mais uma vez, não foi por acaso que fomos nós a fazer esta reportagem. Há três anos atrás, numa sessão no âmbito da formação de professores acompanhantes do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, assistimos absolutamente deliciadas a uma apresentação da Ana Paula Canavarro sobre uma tarefa que poderia servir de introdução ao tema Organização e Tratamento de Dados no 1 ° ciclo. Essa proposta consistia em, a partir da famosa história do Capuchinho Vermelho, perguntar aos alunos qual a sua personagem preferida, fazendo de seguida a organização dos resultados obtidos. Tudo tão simples quanto isto:

- Em função da escolha do aluno é-lhe dado um *post it* da cor correspondente à personagem;
- De seguida cada um cola no quadro o *post it*. Desta forma ficará, muito provavelmente, uma mancha de uma cor maior que do que a das outras. Saberemos por isso qual a personagem que colhe maior número de preferências. Mas quantos são exatamente os votos? É preciso organizar.
- Agrupam-se depois os votos por cores e com umas simples «bolas» surgirá, naturalmente, um diagrama de Venn. Os dados estão agora melhor organizados e portanto mais fáceis de «ler».
- Só que ainda é possível fazer melhor porque se forem arrumados verticalmente justapostos uns aos outros, conta-se facilmente a sua frequência. Temos agora um gráfico de pontos, em que cada *post it* é um ponto.
- Se contornarmos os votos assim arrumados, aparecem desde logo umas barras. Complementamo-las com um eixo e uma escala para fazer a sua leitura. E assim chegamos ao gráfico de barras!

Não estão maravilhados? Nós ficámos e por isso, quando nos propusemos realizar uma reportagem sobre OTD no 1.° ciclo, lembrámo-nos de sugerir à nossa colega Alice Carvalho a realização desta atividade com a sua turma de 1.° ano.

O motivo do nosso entusiasmo prende-se em primeiro lugar com o facto de OTD ser, no essencial, um novo tema no 1.° ciclo, introduzindo nos 1.°/2.° anos tópicos que eram apenas tratados muito mais tarde. É por isso natural que nos interroguemos sobre a forma de o fazer, pois a diferente idade dos alunos obriga, obviamente, a não decalcar o ensino que até agora tem sido feito no 2.° ciclo. Aquela proposta, para alunos do 1° ano, explica com uma extraordinária simplicidade porque é necessário organizar os dados e apresenta algumas das formas para o fazer.

A história da aula...

A nossa ida à turma da Alice foi no dia 29 de Maio. Estávamos já quase no final do ano letivo e algum trabalho com o tema OTD já tinha sido feito com os alunos, incluindo a construção de diagramas de Venn. Por esse motivo, a professora não utilizou os *post it* coloridos, mas sim outros só com uma cor que tinha disponíveis na sua sala. Ou seja, a metodologia seguida não foi exatamente a que atrás descrevemos mas, aproveitando a ideia, foram retirados os aspetos mais importantes.

Por tudo o que já dissemos, foi com grandes expetativas que partimos naquele dia para a escola. Temos só que confessar que tínhamos ainda outro interesse menos didático/matemático sobre esta aula ... afinal qual é a personagem que os alunos preferem no Capuchinho Vermelho? Brevemente iriamos ter resposta para a nossa curiosidade! Passados aqueles momentos de organização que marcam o início de qualquer aula e com o livro já na sua mão, a professora perguntou à turma do que iriam falar. De imediato, uma aluna respondeu «sobre um lobo e uma menina». Ela, como a maioria dos seus colegas, já conhecia a história do Capuchinho Vermelho, mas a Alice ainda lhes mostrou uma notícia do jornal Público onde se explica que foram dois alemães — os irmãos Grimm — que reuniram e adaptaram esta e outras histórias da nossa infância para um livro que ficou muito famoso. Anteriormente, estas histórias faziam apenas parte da tradição oral de vários povos e algumas das suas versões eram ainda mais assustadoras! De seguida, a professora vestiu a pele de uma contadora de histórias e prendeu-nos a todos com a sua leitura. Estava dado o mote para o trabalho que se seguiria:

— Quais são as personagens principais? — perguntou a professora.

Sem hesitar, os alunos responderam.

— Vamos escolher a personagem preferida, mas não podemos dizer aos colegas! Depois vamos colocar os votos no diagrama.

Nesta altura já todos os alunos tinham ao seu dispor um *post it* que não era mais que o seu boletim de voto. À vez, cada um levantou-se e foi cumprir o seu dever cívico (figura 1) preenchendo o diagrama, ato que observámos atentamente. Depressa se percebeu que o Capuchinho recebia as preferências femininas e que os rapazes se dividiam entre o lobo e o lenhador. Até a turma se apercebeu desta tendência, pelo que quando um dos últimos rapazes a votar escolheu o Capuchinho, não deixou de ouvir alguns comentários ... Outro aspeto que nos entusiasmou foi o facto de ninguém ter escolhido a avozinha, não pelo sinal de desvalorização da terceira idade, mas porque gostaríamos de ver como a turma reagiria ao tratamento de uma personagem com frequência de voto nula.

Acabada a votação, a Alice pediu aos alunos para observarem os resultados e perguntou-lhes quais as conclusões que podiam tirar e quais seriam as vantagens ou desvantagens que o diagrama utilizado poderia trazer. Não percebendo a intenção da professora, uma aluna disse «é que ser lenhador é mais difícil porque se pode aleijar ...». Prestados os devidos esclarecimentos, as respostas vieram em catadupa:

— O Capuchinho Vermelho tem mais votos que o lobo e o lenhador.

— O lobo tem quatro votos.

— O lenhador tem mais um voto que o lobo...

— A avó não teve nenhum voto...

Nenhum aluno se referiu ao número exato de votos no Capuchinho Vermelho (treze), nem fez qualquer referência ao tipo de representação que tinha sido escolhida para recolher as preferências dos alunos o que deu a Alice a oportunidade esperada para perguntar «É fácil contar os votos do Capuchinho Vermelho?», ao que os alunos responderam em coro: «Siiiiiim!». Esta não era bem a resposta que a professora pretendia pois, na realidade, o que tínhamos era um conjunto de *post it* «ao monte» que mostravam a personagem mais escolhida mas não revelavam de forma clara o número, o que corresponde evidentemente à desvantagem deste diagrama. No entanto, a Alice preferiu não contrariar os alunos, deixando que o decurso da aula lhes mostrasse que estavam errados. Findo este trabalho, propôs que, individualmente, construíssem uma tabela a partir dos dados organizados no diagrama. Como nos explicou depois, já tinham construído tabelas a propósito de outras tarefas, mas sempre de uma forma muito orientada, com a informação prévia do que deveria constar nas linhas e nas colunas, o que não aconteceu desta vez. Aproveitámos então o momento para circular e observar o que os alunos faziam.

A primeira impressão com que ficámos foi a diferença na abordagem de uns alunos para outros — se por um lado, houve alunos que avançaram rapidamente sobre a informação que deve constar nas linhas e nas colunas, por outro lado, alguns não souberam nem sequer como começar. O próprio desenho da tabela e o texto nela contido evidenciam a diferença no à-vontade com que lidaram com esta forma de representação (figuras 2 e 3). Além da organização da tabela, colocou-se ainda o problema do preenchimento da frequência obtida por cada personagem. Inicialmente, os alunos acharam fácil saber o número de votos de cada personagem mas isso, como já explicámos, não se aplicava ao caso do Capuchinho Vermelho. Começaram a surgir as dificuldades na contagem ... A Mafalda levantou-se do lugar e foi junto ao diagrama contar o número de *post it* do Capuchinho, um por um, mas foi a única. Os outros alunos tentaram contar a partir do seu lugar, dando lugar a erros, ou acabando por confiar na contagem do colega do lado. Outro aspeto que notámos diz respeito à utilização dos pauzinhos para realizar a contagem. Esta técnica é habitualmente utilizada para não nos enganarmos quando contamos dados totalmente desor-

Figura 1.

ganizados ou não disponíveis em simultâneo, o que não era o caso. Contudo, percebemos que nesta situação muitos alunos acabaram por utilizá-la para aproveitar a estrutura do 5 e mais facilmente adicionar os valores obtidos, o que nem sempre foi conseguido como podemos ver pela figura 3 (5+5+5=14).

Quando a turma já tinha acabado de fazer a tabela na sua folha (ou estava numa fase muito avançada), a professora pediu a uma aluna para a reproduzir no quadro. Esse momento permitiu introduzir uma nova questão para discussão coletiva: «Será que podemos afirmar que todos os meninos que estão na sala votaram?».

Foi evidente para a maioria que bastava adicionar todos os votos e verificar se coincidia com o número de alunos da turma. Aliás, alguns alunos colocaram imediatamente 22 como sendo o resultado da adição, por ser o número de alunos presentes na sala. Contudo, ao aperceber-se disso, a Alice lembrou que numa ocasião anterior nem todos tinham votado e por isso a soma não era igual ao total de alunos. Criada a necessidade de efetuar 13+5+4, a professora perguntou como tinham feito o cálculo. A estrutura do cinco, utilizada na contagem através dos pauzinhos, foi um dos suportes para a realização daquele cálculo.

Concluída a tabela, tinha chegado o momento da aula destinada à construção do gráfico de barras. Mais uma vez a proposta foi no sentido do trabalho inicial ser individual para depois haver uma resolução no quadro com a intenção de se promover, a partir dela, uma discussão com toda a turma.

— Já alguém está com ideias para fazer o gráfico de barras? — perguntou a professora.

Sem hesitações, os alunos desenharam dois eixos perpendiculares e também não observámos grandes dúvidas na decisão do que iriam representar em cada um dos eixos. No entanto, algumas dificuldades foram surgindo mesmo entre os alunos que antes tinham mostrado melhores desempenhos, o que é natural visto tratar-se de crianças que tinham realizado esta tarefa poucas vezes. A mais evidente foi a de terem limitado a numeração do eixo vertical ao valor dez. Não conseguimos explicar o porquê desta opção. Provavelmente prendia-se com as suas experiências anteriores na construção de gráficos, mas a verdade é que só com a nossa intervenção é que se apercebiam que assim não seria possível representar os treze votos do Capuchinho Vermelho. O outro problema muito comum foi o de como resolver os zero votos da avozinha. O Gabriel, com toda a convicção, defendeu que se não tinha votos, a avozinha não devia estar no gráfico e, claro, que não era o único. Esta situação acabou por despoletar uma discussão envolvendo vários alunos:

— O Gabriel não queria pôr a avó no gráfico! Porquê — perguntou a professora.

— Porque ninguém votou na avó! — defendeu o Gabriel.

— E vocês acham que não devíamos pôr a avó? — remeteu a Alice para os alunos.

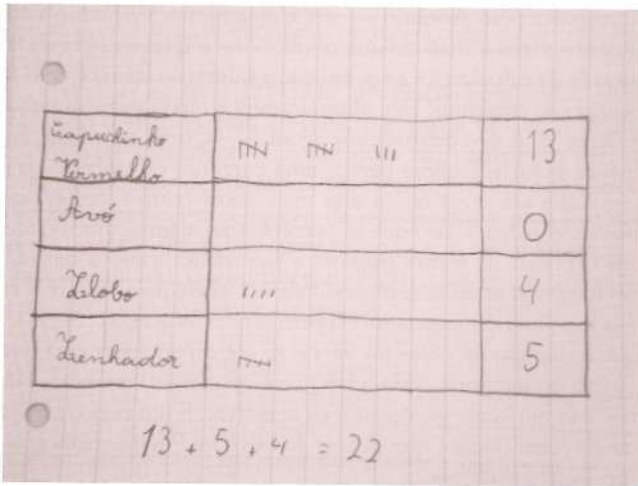


Figura 2.

Figura 3.

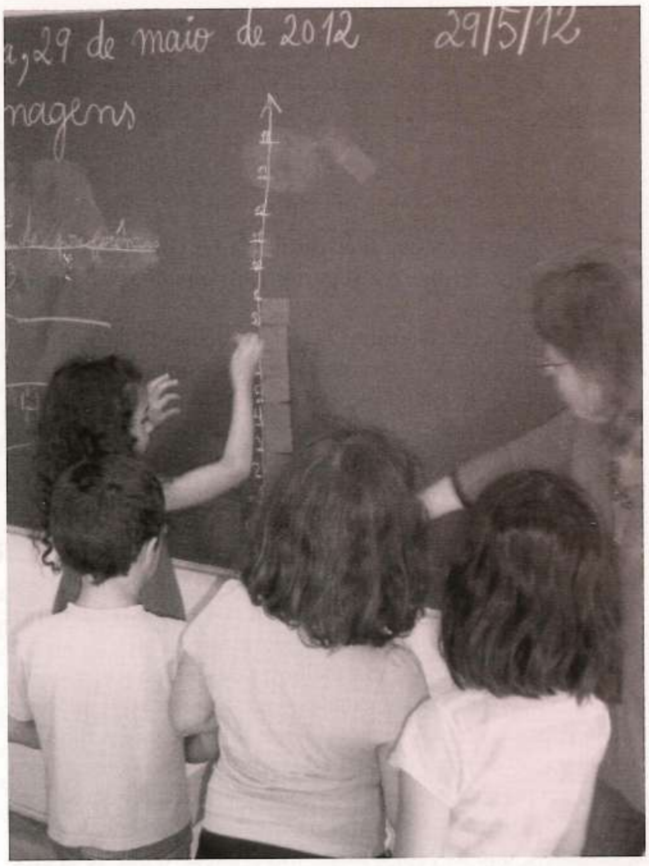


Figura 4.

Figura 5.

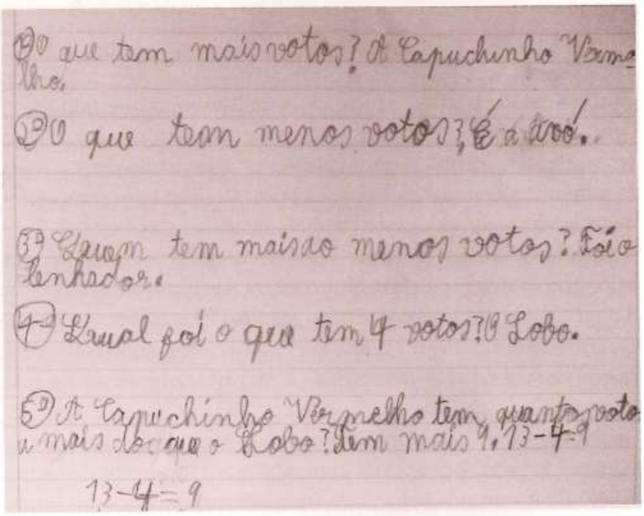

1º O que tem mais votos? A Capuchinho Vermelho.
2º O que tem menos votos? É a avó.
3º Quem tem mais do menos votos? Foi o lenhador.
4º Qual foi o que tem 4 votos? O Lobo.
5º A Capuchinho Vermelho tem quantos votos a mais do que o Lobo? Tem mais 9. 13-4=9
13-4=9

Figura 6.

— Não! — responderam eles.

— Porquê?

— Porque a avó também é uma personagem! — respondeu um dos alunos.

— E nós não podíamos votar nela? — continuou a Alice.

— Siiiim!

O desenho do gráfico no quadro foi, no nosso entender, um momento muito interessante. A professora tinha optado por pedir aos alunos para novamente colocarem outros *post it*, só que agora organizados em coluna para formarem a barra (figuras 4 e 5). Com este método, levantou-se o problema (tanta vezes mal resolvido mesmo entre alunos mais velhos) da escolha da escala no eixo vertical. Como cada espaço tinha que corresponder à largura do *post it*, parece-nos que ficou mais claro para todos a necessidade de graduação do eixo com espaços de igual medida.

A última fase da aula em torno deste assunto foi dedicada à formulação de questões que pudessem ser respondidas através da tarefa realizada anteriormente. De certa forma, a turma já tinha iniciado este trabalho durante a discussão coletiva, quando a Alice perguntou quais as conclusões que poderiam retirar do diagrama de Venn. Porém, agora esta tarefa deveria ser realizada individualmente e por escrito: as crianças teriam de registar as perguntas e respondê-las, o que ligaria de novo a matemática (através da interpretação de gráficos) à língua portuguesa (através da comunicação escrita que, lembramos, para estes alunos só se iniciou este ano).

Olhando para alguns registos que selecionámos, vemos que os alunos começam por aquelas que são as perguntas mais naturais — «Quem tem mais votos? Quem tem menos votos?» (figura 6) — as quais correspondem à nossa primeira curiosidade de saber qual a personagem preferida ou a menos apreciada. Depois surgem questões que relacionam as personagens, como a proposta pelo Adriano — «A Capuchinho Vermelho tem quantos votos a mais do que o lobo?» — a qual é respondida através do cálculo $13-4=9$, em que a subtração aparece com o sentido de comparar. Este aluno formulou ainda outra questão sobre a qual nos debruçamos agora — «Quem tem mais do menos votos?» Embora pareça uma pergunta estranha, o que pretendia era saber quem tem mais votos entre o grupo dos menos votados. Claro que se percebe aqui alguma dificuldade em exprimir de forma rigorosa a sua ideia, o que é natural devido à sua relativa complexidade e à idade do aluno, mas o que nos parece interessante é a pertinência da questão. Note-se que o número de votos foi de 13, 5, 4 e 0 para cada uma das quatro personagens, distanciando o Capuchino Vermelho. Há por isso um claro vencedor e os restantes. É um pouco como querer saber quem é que, depois do Michael Phelps, ganhou os 100 metros mariposa …

Observando o registo da Iris (figura 7), notamos uma questão semelhante — «Se nós juntarmos o lobo com o lenhador

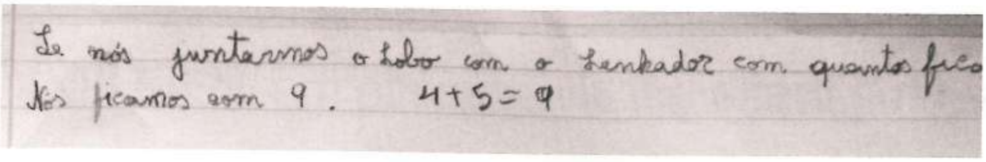


Figura 7.

com quantos ficamos?» — à qual a aluna responde fazendo $4+5=9$, onde a adição aparece precisamente com o significado enunciado pela aluna: juntar. Mais uma vez, esta é uma questão natural, pois a partir da sua resposta percebemos que o Capuchinho Vermelho tem mais votos que todas as outras personagens juntas.

Os exemplos que escolhemos mostram como, a partir de situações desafiantes para os alunos, é possível colocá-los a formular questões e a responder-lhes adequadamente, recorrendo às operações que conhecem através dos seus significados. Contudo, a Iris formulou ainda uma outra questão que relaciona as várias fases do trabalho realizado — «Qual é o que se vê melhor? É o diagrama, a tabela o gráfico de barras?» — A aluna responde o último «porque tem números». Claro que a tabela também tem números, mas embora a Iris não o diga, o gráfico de barras alia a essa informação uma leitura visual que é, como sabemos, muito poderosa.

O olhar da professora

Quando nos pudemos sentar a conversar com a Alice, quisemos conhecer melhor o enquadramento desta aula e os objetivos que definiram a sua agenda. Explicou-nos então algum do trabalho que tinha realizado anteriormente com a turma em OTD e no qual já tirara partido da ligação da matemática com outra área — o estudo do meio. Desde o aproveitamento de rotinas diárias, como o registo do estado do tempo para posterior análise, a tarefas com maior intencionalidade, como o estudo do número de pacotes de açúcar em sumos e refrigerantes vulgarmente consumidos por crianças, a professora procurou utilizar contextos familiares e onde faça sentido que os alunos recolham e registem dados. Este é um processo que valoriza bastante e que não está muito presente nas tarefas dos manuais, onde habitualmente os dados estão prontos a usar: «Este tema que é novo no 1.° ciclo é realmente fundamental porque as crianças, mesmo muito pequenas, quando estimuladas a serem elas a recolher, registar dados ... isso cria nas crianças hábitos que depois se tornam naturais ... e depois como é que trabalhamos esses dados?»

Trabalhar no tema OTD em articulação com outras áreas faz todo o sentido para a Alice, por isso a ligação à língua portuguesa apresentou-se como mais um contributo para o estabelecimento de conexões. Nesta aula, a Alice considerou ser interessante ver a ligação da matemática a uma história, onde os votos nas personagens principais se transformam nos dados. Contudo, o seu principal objetivo incidiu no trabalho com diferentes formas de representação — diagrama de Venn, tabela e gráfico de barras — merecendo este uma atenção particular. A turma já tinha contactado anteriormente com qualquer uma destas representações, mas o trabalho havia sido bastante orientado. Desta vez, a professora pretendeu que a atividade se centrasse mais nos alunos e que fossem eles a criar a tabela autonomamente, pois considera importante que se debatam com decisões como «o que vou colocar nas filas da minha tabela? E nas colunas? E qual é a relação das filas e das colunas com o gráfico?»

Finalmente, a professora vê esta atividade como uma boa oportunidade para desenvolver a comunicação, por exemplo pedindo aos alunos que vão ao quadro para explicarem o que fizeram e porque fizeram daquela forma ou pedindo-lhes para formularem questões por escrito. E se frequentemente nos referimos apenas à comunicação matemática quando apenas dizemos comunicação, vale a pena salientar que aqui o seu sentido ultrapassa aquela capacidade transversal, alcançando ainda o trabalho a realizar na área da Língua Portuguesa, numa fase em que a aprendizagem da expressão oral e escrita é o seu foco principal.

Moral da história...

Concluímos esta reportagem com algumas notas finais. Os aspetos que mais nos entusiasmaram quando partimos para esta experiência foram, por um lado, a possibilidade de ver alunos tão novos a trabalhar em OTD e, por outro, numa ligação pouco habitual a outra área — a língua portuguesa. Pensamos que pelo relato que fizemos se percebeu que as nossas perspetivas não foram defraudadas. Identificámos alunos com bons desempenhos, mas é claro que assistimos a confusões, a dificuldades e a erros, alguns deles os mesmos que reconhecemos em alunos bastante mais velhos ... Mas o mais importante é que reconhecemos na atividade realizada um contexto muito favorável de construção de conhecimento matemático, em que os alunos se envolveram dando significado ao que faziam.

Porém, não podemos deixar de notar o seguinte: o balanço tão positivo que fazemos desta aula não resulta apenas da aplicação de uma tarefa poderosa que sugerimos à Alice. Pelo contrário, é a forma como a professora a integrou no percurso dos seus alunos, tendo em conta as experiências já realizadas e uma ideia muito clara dos objetivos de aprendizagem, que tornou este trabalho tão válido.

A moral da história é a que o leitor entender, para nós talvez seja a de que não há tarefas com sucesso garantido ou à prova de professor ... há sim caminhos que são imaginados, depois refletidos e que, por isso mesmo, têm mais possibilidade de serem bem sucedidos. Mas a moral da história passa também pela lição sobre o interesse do tema OTD no 1.°ciclo. Sim, as crianças podem e devem recolher, organizar e analisar dados desde cedo. Podem formular e responder às suas questões. Podem até ser críticos quanto às representações utilizadas. O que esta aula nos mostrou é que elas podem fazer tudo isto e, sobretudo, que estas experiências podem constituir um pilar da sua formação estatística e um fator positivo no desenvolvimento de atitudes favoráveis face à Matemática. Para nós, esta é a moral da reportagem. Ah ... é isso e que ... o Capuchinho Vermelho é o máximo!

Conceição Rodrigues
Escola Secundária Prof. José Augusto Lucas

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa

ProfMat 2012 — uma visão geral

C. Miguel Ribeiro

Coimbra tem mais encanto, na hora da despedida, diz a canção. Esta mesma ideia é sentida, de forma especial, por cada pessoa que vive(u) Coimbra enquanto estudante, e tem todo o sentido de ser *aplicada* à (con)vivência que caracterizou o ProfMat 2012.

Este, como a maioria dos demais encontros de professores de matemática, vive da vontade de todos nós em discutir o que fazemos, como o fazemos e porque o fazemos, de modo a que possam(os) contribuir ativamente para um Bem maior — a melhoria das aprendizagens dos alunos. Talvez por isso, felizmente, tenham existido muitas propostas de sessões (agrupadas em simpósios temáticos de comunicações e sessões práticas) que funcionaram em paralelo — pena que este ano a participação tenha sido algo mais reduzida do que a que se espera neste tipo de encontros. Ao funcionarem desta forma, em paralelo, apesar de ilustrar a vivacidade e a vontade dos professores em partilhar e discutir aspetos do trabalho que têm vindo a desenvolver, leva a que apenas possamos ter uma perspetiva parcial do Encontro.

Neste texto, pretendendo fornecer uma visão, muito particular, irei focar alguns dos aspetos que mais me marcaram nestes dias.

Tal como tem vindo a ser já hábito, neste ProfMat participaram professores de vários níveis de ensino e diferentes pontos do país, continuando, infelizmente, os primeiros anos com pouca representatividade. As sessões dinamizadas cobriram, quanto a mim, um amplo espetro de aspetos associados ao processo de ensino-aprendizagem, o que permitiu uma reflexão centrada na prática e no que ocorre nessa prática. Tanto as sessões práticas com discussão como os simpósios de comunicações (propostas de autor) abordaram temas desde as tecnologias às relações entre a matemática e outras áreas, passando, necessariamente, pelos temas matemáticos e capacidades transversais. Foram focados também outros aspetos centrais do processo de ensino-aprendizagem e que o influenciam, tal como sejam (e enumero apenas alguns), o papel do *feedback*, diferentes metodologias de trabalho (matemático/estatístico) ou o conhecimento do professor na compreensão das dificuldades dos alunos.

Para além destas propostas de autor, a comissão organizadora do ProfMat, como tem vindo a ser apanágio, convidou um conjunto de personalidades para dinamizar outro tipo de sessões: conferências plenárias (4); sessão plenária (de apresentação de um projeto); painel plenário (as Metas Curriculares), painéis paralelos (4) e conferências com discussão. Também aqui era necessário tomar opções relativamente ao que nos era possível assistir. Por não me poder estender muito nos comentários, foco-me na sessão que, confesso, as maiores expectativas me acalentavam: o painel plenário sobre as metas curriculares. A expectativa era grande, por um lado, pela pertinência e possível impacto do tema nas escolas e na formação de professores e, por outro, pela possibilidade de diálogo que poderia vir a ser encetado. Foram efetivamente discutidos alguns dos aspetos particulares associados às Metas Curriculares e à(s) perspetiva(s) subjacentes à sua elaboração, contrapondo-a(s) com a defendida nos documentos curriculares atuais. No entanto, isso acabou por se configurar apenas como mais um momento em que duas perspetivas distintas de encarar a formação se defenderam de costas voltadas e assim continuaram. Penso que este momento poderia ter sido de profícua discussão sobre distintos aspetos que terão (e em algumas situações têm já) implicações nos objetivos, foco e forma, de como o processo de ensino-aprendizagem poderá vir a decorrer nos próximos anos. Urge, assim, que se tentem procurar pontos comuns, não na conceção, mas na concretização.

Mas, porque nem só de sessões intensivas de trabalho, discussão e reflexão, se faz um Encontro de Professores, houve momentos em que, aproveitando o *encanto* de Coimbra, foi possível conhecer melhor os diversos participantes do Encontro, dando continuidade a algumas das discussões e reflexões que se tinham iniciado durante as apresentações (sempre curtas, como sabemos).

Se Coimbra revestiu de *encanto* o ProfMat 2012, espera-se que o sol algarvio ilumine as discussões que ficaram pendentes, entre as quais as associadas às Metas Curriculares.

C. Miguel Ribeiro
CIEO, Universidade do Algarve

XXIII SIEM: em perspetiva, uma perspetiva ...

Sílvia Semana

O SIEM, Seminário de Investigação em Educação Matemática, é uma iniciativa do Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática. A sua 23.ª edição decorreu nos dias 6 e 7 de outubro de 2012, na Escola Secundária Quinta das Flores, em Coimbra, e resultou da organização conjunta com o ProfMat, tendo os dois eventos um dia de sobreposição com algumas atividades em comum.

O XXIII SIEM contou com a participação de cerca de 150 professores e investigadores, oriundos de Portugal, Espanha, Brasil, Angola e Reino Unido. Da submissão de propostas e do processo de revisão pelos pares, resultou a apresentação de 49 comunicações orais e 19 posters, organizados em seis simpósios, com focos distintos, mais ou menos definidos: Números e Operações; Geometria e Medida; Álgebra e Pensamento Algébrico; Probabilidade e Raciocínio Estatístico; Capacidades Transversais; e Formação de Professores e Identidade Profissional. Esta organização em simpósios permitiu reunir os participantes por afinidade nos temas versados nas comunicações, num espaço em que se procurou privilegiar a discussão aprofundada sobre as temáticas em foco. Houve ainda lugar a uma sessão de exposição/apresentação de posters, independentemente da sua apresentação, ou não, em simpósio.

O seminário incluiu também três conferências plenárias e dois painéis. Com o objectivo assumido de promover a reflexão em torno de temas transversais, ou ilustrar aspetos particulares ao nível da investigação e da Educação Matemática em Portugal, as conferências plenárias, proferidas por oradores convidados, incidiram sobre: (i) «Geometrical and spatial reasoning: Challenges for research in mathematics education», por Keith Jones, da Universidade de Southampton, Reino Unido; (ii) «O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais: A divisão como produto de medidas», por Hélia Pinto, da Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria; e (iii) «Contributos da participação no programa de formação contínua em matemática para o desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo do ensino básico», por Cristina Martins, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança.

Os painéis plenários chamaram à agenda outras vertentes da investigação em Educação Matemática. O primeiro painel, «Ensino e aprendizagem da Matemática: a importância das organizações internacionais», moderado por Ana Paula Canavarro, contribuiu para a divulgação de organizações internacionais que partilham a preocupação com o desenvolvimento e disseminação da investigação neste campo, nomeadamente: International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), representada por Jaime Carvalho e Silva; International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), representado por Leonor Santos; e European Society for Research in Mathematics Education (ERME), representada por João Filipe de Matos. Já o segundo painel apresentou um projeto de investigação, DROIDE II - Os robots na Educação Matemática e Informática, coordenado por Elsa Fernandes da Universidade da Madeira, também moderadora do painel, em que participaram João Filipe de Matos, Sónia Abreu, Susana Carreira e Hélia Jacinto.

Em jeito de balanço, a afluência significativa de participantes e de propostas para apresentação de trabalhos reflete, em certa medida, o sucesso de mais uma edição do SIEM e reforça o interesse e a pertinência da investigação em Educação Matemática. Indo ao encontro dos objetivos definidos, o XXIII SIEM constituiu-se como um espaço proveitoso para a divulgação, a comunicação, o confronto e a discussão de ideias e trabalhos na área da investigação em Educação Matemática, sem perder de vista a articulação com o ensino e a aprendizagem da Matemática, numa procura de aliar a investigação à prática.

Sílvia Semana
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Bolseira da FCT

O Problema do ProfMat 2012

José Paulo Viana

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2012 de Coimbra consistiu na resolução do problema *As Moedas na Balança*

Temos 15 moedas de ouro, cujo peso desconhecemos. Uma delas é falsa e pesa menos que as verdadeiras.

Dispomos de uma balança digital bastante precisa, daquelas que nos indicam o peso do que estiver colocado no seu único prato.

Como identificar a moeda falsa fazendo apenas quatro pesagens?

Recebemos dez respostas, sete das quais corretas. Destas, três seguiram uma via complicada de seguir, e as outras quatro descobriram um processo bastante simples de explicar e de acompanhar.

Começamos por numerar as moedas de 1 a 15 [mas, lembra o Avelino, *se estivéssemos a resolver o problema na realidade, teríamos de arranjar autocolantes com o mesmo peso para não influenciar as pesagens*]. Vamos definir quatro subconjuntos, todos com oito moedas:

{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15}

{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15}

{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}

Pesamos sucessivamente cada subconjunto, anotando o peso respetivo. Só podem surgir dois valores: P (pequeno) se a falsa lá estiver, e G (grande) caso contrário.

Ficamos assim a saber em que pesagens esteve a moeda falsa e em quais não esteve. Agora é só ver a qual das moedas pode corresponder essa situação. Por exemplo, se a sequência de pesagens for PGPP, procuramos a moeda que pertence aos 1°, 3° e 4° subconjuntos e não está no 2°. Seria a moeda 11.

Repare-se que, se tivéssemos escrito os números de 1 a 15 em numeração binária, esta identificação seria ainda mais rápida. A cada P corresponde um 1 e a cada G um 0. PGPP dá 1011, que é 11 em binário.

Note-se que, se todas as pesagens derem o mesmo valor, isso significa que a falsa esteve lá sempre e portanto é a 15.

Uma nota do José Artur Pinto: Devido à onda de assaltos a ourivesarias, aconselha-se o maior cuidado na realização destas pesagens.

Lista de Participantes

INDIVIDUAIS: Alice Martins, Avelino Sousa, Catarina Isabel Ferreira, J. Carlos Frias, José Artur Pinto, Nelson Mestrinho, Rui Pedro Soares.

EM EQUIPA: Circo Matemático; Corália Pimenta & Alexandra Rodrigues; Sandra Neves & Daniel Castanho.

Premiados e Prémios

Não sendo possível salientar nenhuma das quatro resoluções mais simples, foi feito um sorteio para atribuição do prémio principal.

1.° (Unidade TI-Nspire Cx, oferta Texas Instruments + 1 quebra cabeças)

Catarina Isabel Ferreira

2.° Ex aequo (1 jogo Ludu + 1 quebra cabeças + 1 livro)

Avelino Sousa
Rui Pedro Soares
Sandra Neves
Daniel Castanho

3.° Ex aequo (1 jogo Ludu + 1 jogo de madeira + 1 etiquetadora Casio)

José Artur Pinto
Nelson Mestrinho
Circo Matemático

NOTA: Os prémios devem ser levantados até 30 de Julho de 2013. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt ou 217163690).

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Lisboa)

A relação dos alunos com o telemóvel – um trabalho de projeto no 10.º ano

Lina Brunheira

É frequente ouvirmos e comentarmos que os jovens têm uma relação de dependência com o telemóvel. Não é por acaso que o fazemos: observamos a forma impressionante como escrevem mensagens à velocidade da luz sem tão pouco olharem para o teclado, notamos as suas tentativas de mexerem no telemóvel durante as aulas, pasmamos com a reação de alguns quando se têm de separar do aparelho (ou aparelhos) ... Mas afinal quão fiel é esta nossa impressão? Será mesmo que os alunos não vivem sem telemóvel? E haverá alguma diferença entre rapazes e raparigas?

Este foi o tema de partida para a realização de um projeto de estatística realizado por um grupo de dois alunos do 10.º ano, do curso profissional de Técnico de Gestão da Escola Secundária de Amora, no âmbito do módulo A3 (Estatística). A turma a que pertence o Fábio e o Vinício, os dois alunos em questão, é uma turma pequena de alunos muito heterogéneos, quer ao nível das suas atitudes, quer dos conhecimentos e capacidades. Contudo, a proposta de realização de um projeto foi bem acolhida e, de um modo geral, os alunos empenharam-se na sua realização. Os restantes alunos envolveram-se noutros temas de trabalho de que não falarei neste artigo, pois partirei apenas do projeto desenvolvido pelo Fábio e pelo Vinício para discutir os aspetos matemáticos e didáticos que se colocaram, respetivamente, aos alunos e a mim, sua professora.

O arranque do projeto

Atendendo ao problema em causa — a utilização dos telemóveis — os alunos perceberam rapidamente que deveriam ser os próprios a recolher dados, uma vez que não existem resultados de outros estudos que conheçamos em bases de dados públicas que já havíamos consultado. Discutimos então a população a estudar e o tipo de estudo — um censo ou uma sondagem. O Fábio e o Vinício decidiram estudar a população dos alunos da

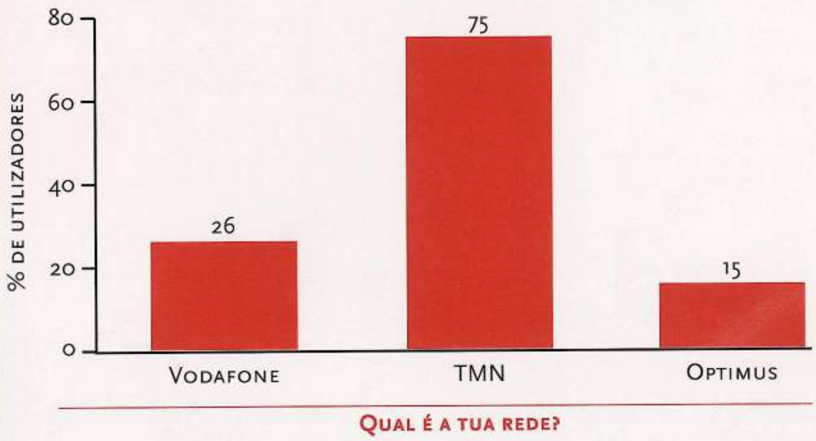


Figura 1

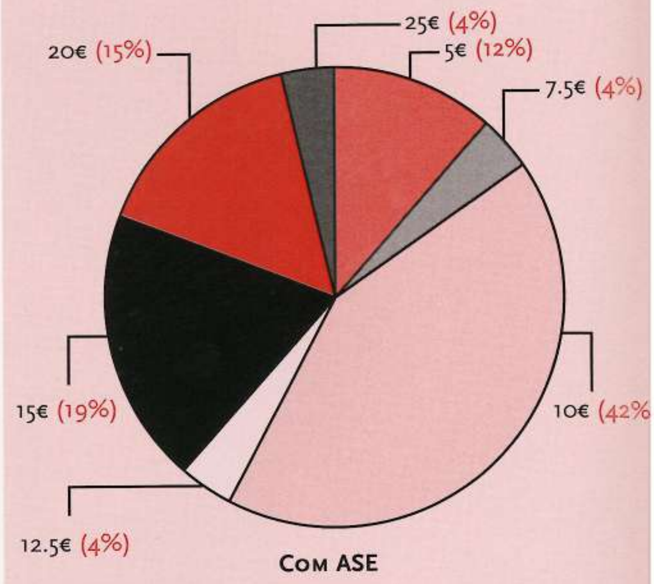


Figura 2

escola (apenas do ensino diurno) e usar uma sondagem para o fazer, uma opção claramente acertada.

O primeiro problema que se colocou aos alunos foi a escolha da amostra. Como a escola tem alunos do 7.° ao 12.° ano, com ensino regular, profissional e cursos de educação e formação, abrangendo idades e posturas diferentes, a questão da representatividade emergiu naturalmente. Quantos alunos devemos questionar? Vamos a todas as turmas ou só a algumas? Escolhemo-los por idades? Por sexo? Estas foram algumas das questões que os alunos colocaram e que discutimos. Pensámos que o ideal seria escolher os alunos aleatoriamente, por exemplo, inquirir os primeiros 100 alunos que entrassem na escola de manhã. No entanto, essa opção seria pouco prática atendendo à intenção de formular algumas questões que não queríamos que fossem respondidas à pressa e sem pensar. Como o contexto mais favorável seria o preenchimento de um questionário em ambiente de sala de aula, tivemos de chegar a uma solução de compromisso em que, assumindo que não era o nosso propósito realizar um estudo de grande rigor científico, optámos por uma amostra estratificada por ano de escolaridade. Os alunos foram então à Direção da escola pedir dados sobre o número de estudantes e de turmas por ano de escolaridade, incluindo a tipologia do ensino em que se encontravam. Desta forma, determinando proporcionalmente o número de alunos de cada ano de escolaridade, poderíamos partir do princípio que as suas idades também seriam representativas da população de estudantes. A partir desta decisão, selecionámos as turmas aleatoriamente, atendendo ainda à razão entre os alunos que pertencem ao ensino regular e ao profissional.

Em seguida, a turma passou a trabalhar nos questionários. Nesta fase o Fábio e o Vinício tinham várias ideias de perguntas um pouco avulsas que queriam fazer aos colegas, pelo que foi necessário rever com eles o problema que queriam estudar e duas ou três grandes questões a que queriam dar resposta. Concluído o questionário, os alunos foram autonomamente recolher os dados.

Os resultados obtidos

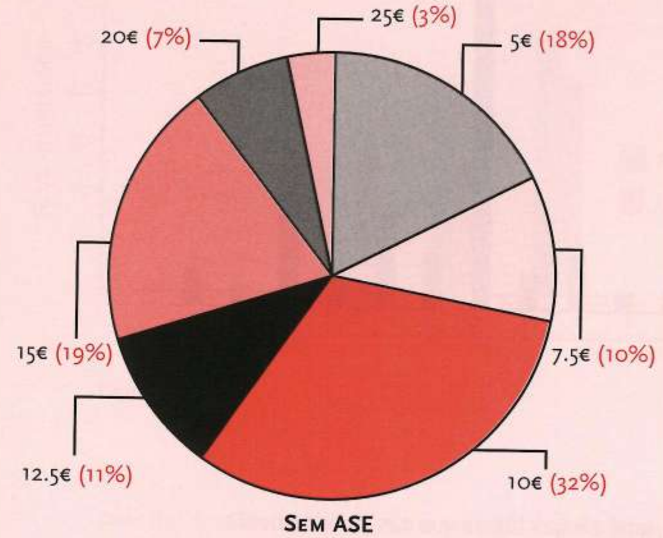
De seguida, apresentam-se alguns dos resultados obtidos e, a seu propósito, os aspetos mais relevantes que se levantaram.

Qual é a tua rede?

Com esta pergunta ficámos a saber que a TMN é claramente a rede que lidera as preferências dos alunos da escola, uma ideia que vem ao encontro às expectativas da turma. Esta foi uma das questões que surgiu facilmente na fase de formulação do questionário, mas cujo tratamento levantou um problema: se cada inquirido pode escolher mais do que uma opção porque há pessoas que usam mais do que uma rede, como calcular a sua frequência relativa? Habitualmente, os alunos dividem a frequência absoluta pelo total, neste caso o número de alunos inquiridos, o qual costuma corresponder ao somatório das frequências absolutas. Ora, neste caso, devido à possibilidade das respostas múltiplas, essa correspondência não existe. Temos portanto de dividir mesmo pelo número total de inquiridos, o que significa que a soma das frequências relativas não é igual a 100%! Como ler então os resultados? Poderemos dizer que 75% dos alunos preferem a TMN (figura 1) relativamente às outras redes? Não! Apenas podemos afirmar que 75% tem a TMN como operador de telemóveis, o que tem um significado bem diferente ...

Quanto gastas em carregamentos?

Com esta questão pretendia-se saber a quantia que os alunos despendem mensalmente com o telemóvel e, além disso, perceber até que ponto a situação económica familiar influencia tais gastos. Para esse fim, o Fábio e o Vinício usaram como indicador



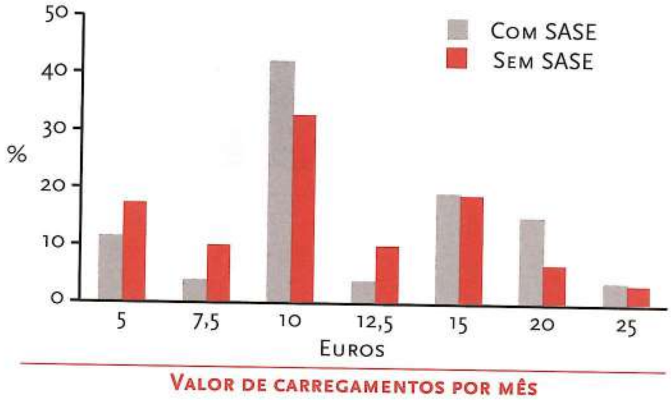


Figura 3

o facto de os alunos terem ou não direito à Ação Social Escolar (ASE), mas tiveram de perceber primeiro que para cruzarem dados precisavam de incluir questões de caracterização do inquirido, além das questões sobre o tema propriamente dito. Mais ainda, no momento de organização dos dados, precisaram ainda de separar os dois casos.

A nossa expectativa era de que os alunos subsidiados deveriam gastar menos dinheiro em telemóvel do que os outros, mas os resultados acabariam por nos surpreender ... O Fábio e o Vinício começaram por representar os dados nos diagramas circulares que aqui apresento, mas o esforço que temos de realizar para compreender a situação a partir deles, leva-nos a utilizar outro tipo de gráfico e calcular medidas adicionais (figura 2).

Como podemos observar pelo gráfico de barras (figura 3), há uma percentagem maior de alunos sem ASE que carrega o telemóvel com pouco dinheiro (5 e 7,5 euros), enquanto que nos valores maiores (20 e 25 euros) inverte-se a tendência, havendo o dobro de alunos com ASE que gasta 20€ relativamente aos que não têm apoio. Se procurarmos confirmar esta tendência, vemos que a média do valor mensal gasto pelos alunos sem ASE é de 11,29€, enquanto que os que usufruem de ASE gastam em média 12,5€. Claro que a diferença não é significativa, mas contraria o que, diria eu, seria natural esperar e é mais um elemento que confirma a importância que o telemóvel assume na nossa vida.

Usas o telemóvel na aula?

E agora o que esperar desta questão? E quem se comportará melhor, rapazes ou raparigas? O Fábio e o Vinício também quiseram conhecer esta tendência, pelo que tiveram mais uma vez de cruzar dados. Os resultados não são muito animadores (figura 4)... mas ninguém sai bem na fotografia!

Quantas mensagens envias por dia?

Mais uma vez uma questão aberta que, por ser de resposta numérica, parecia não colocar muitas dificuldades. Mas não foi bem

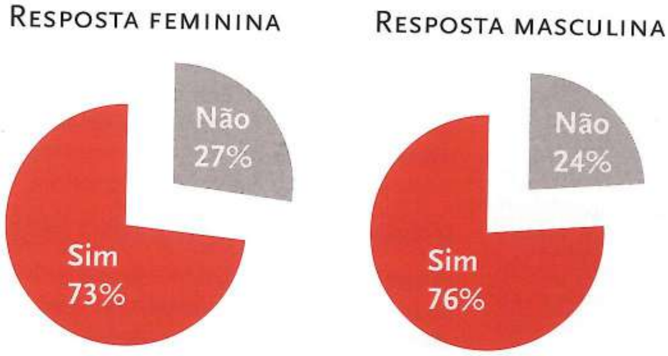


Figura 4

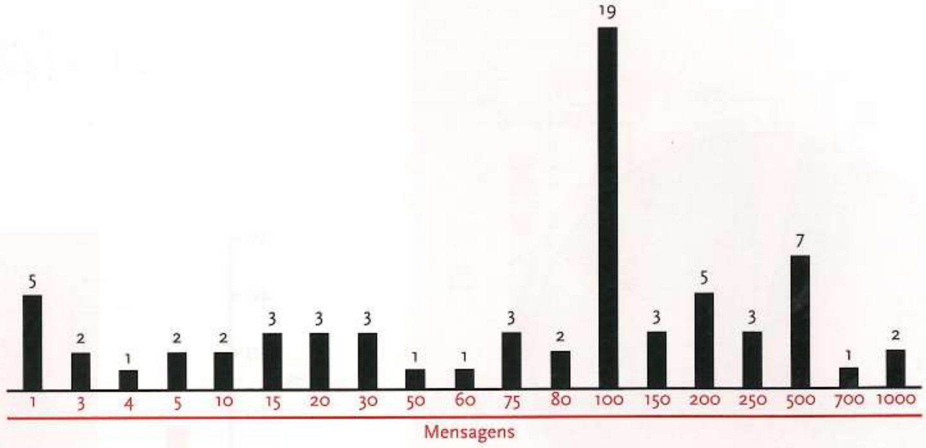


Figura 5. SMS enviadas por dia

assim, pois existem vários aspetos que nos obrigam a refletir. A primeira representação que os alunos fizeram para apresentar os resultados mostra-nos quais são esses aspetos (figura 5).

Em primeiro lugar, é evidente que a utilização de 19 valores diferentes torna a leitura do gráfico difícil e leva-nos a pensar na hipótese de agrupá-los. Contudo, a forma pouco uniforme como estão distribuídos, sendo o mínimo 1 e o máximo 1000, torna a tarefa difícil e fez-nos a ponderar a fidelidade de alguns valores. Discutimos então se seria aceitável enviar 500 ou mais mensagens por dia (em média). Até que ponto os alunos têm a noção da dimensão de tais valores? O que significa enviar 500 mensagens num dia? Estimando que cada mensagem leva 15 segundos a escrever e enviar, serão então 125 minutos, ou seja, aproximadamente duas horas a enviar sms ininterruptamente. Atendendo a que muitas mensagens enviadas são também intercaladas por outras recebidas, parece-nos que valores acima de 500 são possíveis mas não são muito credíveis e que os inquiridos que os indicaram fizeram-no por ignorância ou por responderem ao inquérito de forma pouco séria. O que fazer então? A partir desta situação, discutimos o que são *outliers* e o que se faz quando são detetados tais valores discrepantes. Se analisarmos a média e o desvio padrão com e sem valores a partir de 500, obtemos os seguintes resultados:

Com *outliers*: média=162 e desvio-padrão = 215
Sem *outliers*: média=83 e desvio-padrão =70

Ou seja, os resultados são muito diferentes, mesmo mantendo a possibilidade de envio de mais de 100 mensagens por dia!

Outro resultado que merece atenção é a elevada frequência do 100. Quando questionados sobre a razão de tamanha discrepância, os alunos foram suficientemente perspicazes para identificar que nesse caso 100 não identifica um valor exato, mas sim uma estimativa com uma elevada margem de erro. O 100 é obviamente um número especial e é quase sinónimo de dizer várias dezenas de mensagens que não conseguimos quantificar. Aliás, esta perceção, associada à existência de outros valores exagerados, faz-nos pensar que esta questão é inconclusiva. Por ignorância, por desinteresse ou por maldade, muitos dos inquiridos parecem não ter respondido realisticamente. Neste caso teremos de assumir que apesar dos nossos esforços, não fomos capazes de obter dados para dar uma resposta credível …

De 1 a 5, qual a importância que dás ao telemóvel?

Com esta pergunta procurou-se mais uma vez encontrar uma relação entre duas variáveis — o grau de valorização do telemóvel e o sexo. E se anteriormente não reconhecemos diferenças significativas, neste caso não será bem assim. Se olharmos para os níveis 4 e 5 que representam uma elevada importância, percebemos que são as raparigas que mais atribuem estes níveis. Pelo contrário, no nível 3 que representa uma importância moderada, há uma percentagem muito mais destacada de rapazes. Ninguém atribuiu grau 2 e apenas 2% (correspondente a um rapaz) atribuiu grau 1 (figura 6).

Embora já estejamos convencidos neste momento que as raparigas atribuem maior importância ao telemóvel do que os rapazes, podemos ver que outras informações retiramos se aplicarmos medidas de localização e de dispersão e se recorrermos aos respetivos diagramas de extremos e quartis (figura 7).

Como podemos ver, existe uma diferença entre a média do grau de valorização atribuído pelos rapazes (4,1) e pelas raparigas (4,5 aprox.). Comparando os diagramas, confirmamos que a escolha das raparigas (diagrama inferior) se situa mais concentrada nos níveis 4 e 5, quando comparado com os rapazes. Naturalmente, essa concentração também é percetível nos respetivos valores do desvio-padrão. No entanto, podemos ainda questionar-nos de que modo os resultados e o diagrama dos rapazes são influenciados pela escolha de um único inquirido que assinalou 1 nesta questão. Podemos então retirá-lo da distribuição como se de um *outlier* se tratasse e ver o que acontece (figura 8).

A diferença imediata que percebemos está na forma do diagrama de extremos e quartis que tem agora o valor mínimo a coincidir com Q1 e, como podíamos esperar, alguma redução no desvio-padrão. Comparando as médias não observamos diferença significativa.

Trabalho de projeto em OTD, valerá mesmo a pena?

O trabalho realizado pelo Vinício e pelo Fábio prolongou-se ao longo de algumas semanas, com momentos de trabalho na sala de aula e fora dela, intercaladas por outras nas quais foram iniciados conteúdos novos e resolvidas tarefas de natureza diferente. Foi uma aposta exigente para os alunos, que tiveram mais

Figura 6

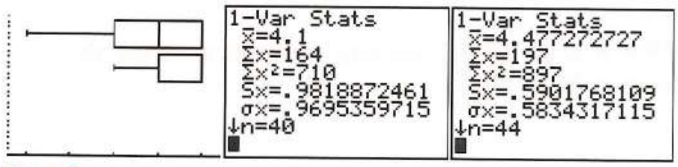


Figura 7

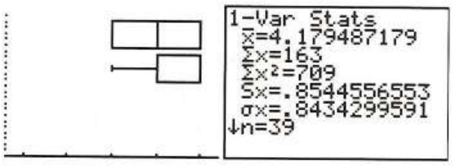


Figura 8

trabalho do que o habitual, e para mim que tive de acompanhar o projeto em articulação com a minha planificação. Tivemos ainda que lidar com situações imprevisíveis e com dados cujo tratamento não foi fácil. Cabe então a pergunta — valeu a pena? E antes que responda como o poeta, procurarei apresentar as vantagens que reconheço e confirmei nesta abordagem.

Em primeiro lugar, como será evidente concluir, há uma aprendizagem sobre a fase de planeamento, de recolha e organização de dados que nunca se realizaria se tivéssemos apenas resolvido exercícios e problemas comuns. Escolher a amostra e realizar o questionário não são tarefas assim tão simples e implicam algum conhecimento e reflexão. Por exemplo, os alunos mostraram dificuldades em formular as questões de forma clara e objetiva. Sobre a questão da importância dos telemóveis, houve várias tentativas frustradas até à última formulação, tendo os alunos discutido, por exemplo, se «bastante» significaria mais ou menos do que «muito». Já numa fase posterior, com todos os questionários preenchidos, os alunos depararam-se com problemas como: O que fazer com dezenas de questionários com várias questões e variáveis diferentes? Por onde começar? Como nos podemos organizar para trabalhar melhor? Como registar os dados para poder cruzá-los? Note-se que quando resolvemos exercícios, mesmo quando se apresenta uma lista de dados em bruto para organizar e tratar, normalmente eles dizem respeito a uma única variável em estudo e o que há a fazer é vulgarmente bastante linear.

Em segundo lugar, parece-me que as diferenças neste tipo de metodologia se estendem a outros aspetos que são também abordados em tarefas de outra natureza. Estou a falar da representação e tratamento dos dados. Contudo, ao contrário do habitual, no trabalho de projeto são os alunos que têm de decidir o tipo de gráficos que devem construir e quais as medidas que são adequadas utilizar para responder às questões do seu estudo. Dado que boa parte do trabalho é realizado autonomamente fora da aula, é dada maior liberdade aos alunos para cometerem erros e poderem aprender com eles. Foi o que aconteceu nos casos dos gráficos circulares e de barras (para o caso das mensagens) que apresentei anteriormente.

Em terceiro lugar, outra vantagem que considero importante é a maior apropriação dos dados e consequente sentido crítico que os alunos constroem sobre os resultados do estudo e os conceitos mobilizados. Neste trabalho observei como os alunos se foram tornando mais conhecedores do significado de medidas como o desvio-padrão e, perante um erro de registo na calculadora, rapidamente descortinavam que, a ver pelos resultados obtidos, teria existido algum engano.

Em quarto lugar, vou arriscar indicar um aspeto positivo que pode ser reconhecido por muitos como algo negativo. Já referi que neste projeto lidei com situações imprevistas e penso que isto acontecerá na maioria dos casos em que se desenvolvem projetos. Recebemos inquéritos mal preenchidos, respostas que não nos pareciam verdadeiras, dados que tivemos de ponderar bastante como tratar. Por vezes tive de me sentar com os alunos a pensar no que fazer, mas penso que isso só tornou o processo mais verdadeiro. O conhecimento não tem um crescimento linear, sofre avanços e recuos e isso é algo que podemos partilhar com os alunos.

Em quinto lugar, um outro aspeto interessante associado ao trabalho de projeto é a possibilidade de realizar uma apresentação à turma do percurso e conclusões de cada grupo. Se for, como é desejável, um tema do interesse dos alunos, a discussão dos processos e resultados surgirá naturalmente como aconteceu neste caso. A apresentação oral, além de desenvolver a capacidade de comunicação, faz emergir alguns aspetos que nos merecem atenção e que, de outra forma, continuariam ocultos.

Finalmente, uma vantagem que não reconheço noutras metodologias é o contributo enorme à capacidade de interpretação. Mais do que apresentar os resultados pergunta a pergunta, um projeto tem um objetivo mais global e, no fim, é preciso voltar a ele e dar resposta ao nosso problema inicial.

Assim, e terminando com a resposta ao estudo do Fábio e do Vinício, podemos afirmar que realmente os alunos dão uma importância muito grande ao telemóvel, em particular as raparigas. O telemóvel é quase considerado uma necessidade básica, o que é confirmado pelo dinheiro que gastam independentemente da sua condição socioeconómica. O telemóvel é tão importante que a grande maioria dos alunos até arrisca quebrar as regras instituídas quanto à proibição do seu uso na aula, mas isso suspeito que o leitor já sabia.

Lina Brunheira
Escola Secundária de Amora

Aproveitando o tema de OTD e as suas conexões com o Planeta Terra, a tarefa que aqui apresentamos mostra como a Matemática do Planeta Terra pode ser despertada pela análise e tratamento de dados, fundamentais na tomada de decisões e gestão do consumo energético, em situações que estão tão dependentes da nossa postura como em comportamentos, por vezes pouco refletidos, que temos em nossas casas. O objetivo é, num misto de desenvolvimento de literacia estatística, cidadania e educação ambiental, compreender como se pode "poupar" na conta da eletricidade, gastando menos energia e, consequentemente, poluindo menos o ambiente. A tarefa proposta destina-se a alunos do 3.° ciclo do Ensino Básico, tendo sido já trabalhada numa turma de 7.° ano. Dependendo das características específicas da turma, a tarefa poderá ser desenvolvida durante dois a três blocos de 90 minutos.

A natureza exploratória da tarefa supõe uma prévia recolha de dados, efetuada durante uma semana na qual cada aluno deve fazer-se acompanhar de uma fatura de eletricidade da sua casa, na qual constam elementos como os que se observam na figura 1.

De forma complementar, é ainda sugerida recolha de dados de outras fontes secundárias, nomeadamente pesquisa na Web para garantir a familiarização com alguns termos técnicos imprescindíveis no desenrolar da exploração. A tarefa propõe duas fases distintas de análise e interpretação de informação: uma primeira individual e outra em grupo. A comparação entre os resultados individuais e coletivos poderá suscitar uma apresentação de dados à turma e a avaliação conjunta de formas de reduzir gastos, no sentido de prevenir e proteger o ambiente. A tecnologia será integrada no desenvolvimento da tarefa pela necessidade de aceder à Internet na pesquisa de informação, contudo poderá (deverá?!) também ser potencializada pela utilização de uma folha de cálculo (Excel ou Geogebra, por exemplo) para análise e representação dos dados trabalhados.

No final, esperam-se alunos mais despertos para possíveis estratégias de redução do consumo de energia em casa, mas também para a fatura que o ambiente paga para que tenhamos conforto nos nossos lares. Para tal o aluno deve reconhecer e utilizar de forma crítica as ferramentas estatísticas ao seu dispor e sugerir recomendações que poderão ter um impacto visível e quase imediato. Quem sabe, uma comparação entre o consumo energético de diferentes turmas, divulgando os resultados a alunos da escola, professores e encarregados de educação, poderá ser um bom contributo para trazer para a ordem do dia o papel da Matemática nos efeitos da ação humana no nosso Planeta ...

Ana Eliete, EBI de Apelação
Joana Latas, Projecto Escola+, Instituto Marquês Valle Flôr

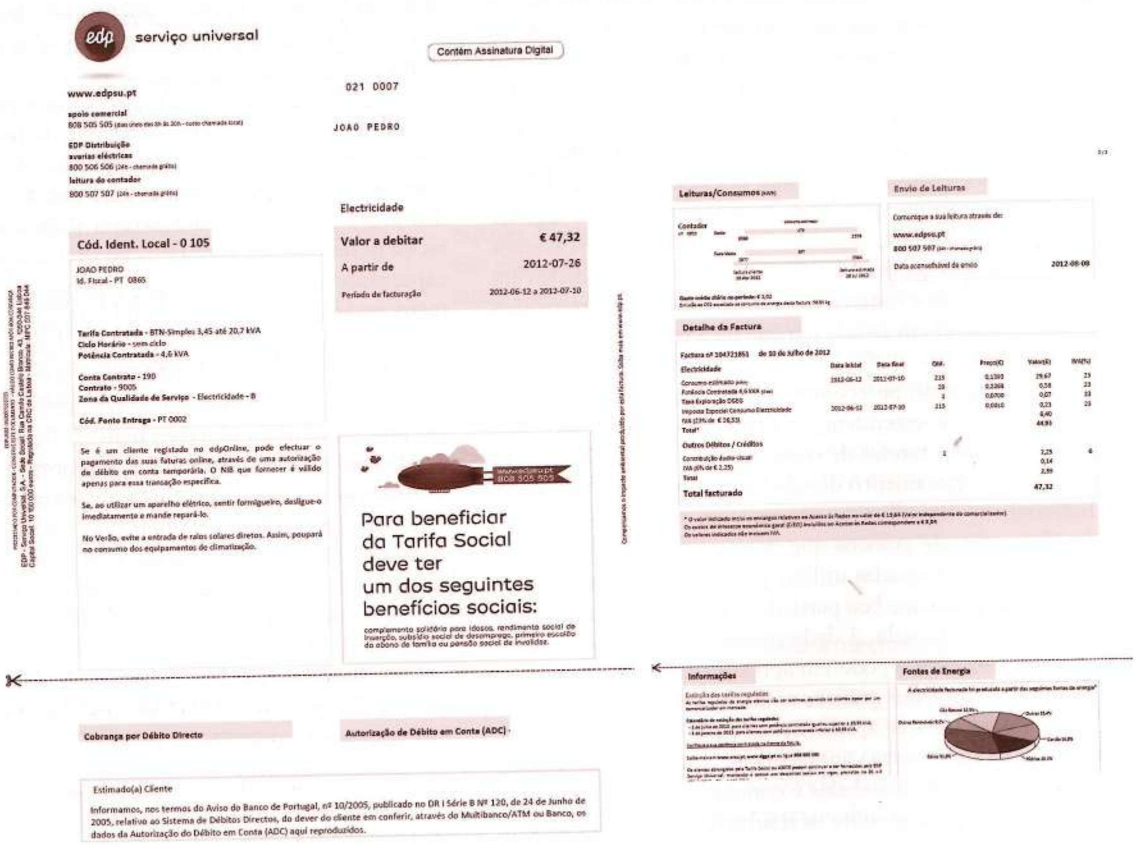


Figura 1

Como vamos de consumo energético?

A energia, em todas as suas variantes, é empregue intensivamente na sociedade em geral e em tudo o que se faz. É necessário saber usá-la de maneira inteligente e eficiente para aumentar sua disponibilidade, preservar o meio ambiente, eliminar o desperdício e, consequentemente, reduzir custos.

A Comissão Europeia está preocupada com os níveis elevados de poluição atmosférica e quer reforçar a legislação sobre a qualidade do ar. Um relatório da Agência Europeia do Ambiente, divulgado em 24 de setembro de 2012 revela que, em 2010, 21% da população urbana europeia esteve exposta a níveis de concentração de partículas poluentes superiores aos valores limite diários mais restritivos da União Europeia, estabelecidos para proteger a saúde. Este relatório é o motivo que leva a que o comissário europeu para o Ambiente pretenda que 2013 seja designado Ano do Ar.

Nesta tarefa vamos abordar não só questões de natureza económica, mas também questões de natureza ambiental, nomeadamente, como reduzir ao mínimo a poluição do ar. Sabias que o consumo de energia associado à eletricidade que consumimos em nossas casas também produz esta forma de poluição?

Assim, propomos uma análise dos gastos elétricos efetuados em casa, durante um período de tempo, de modo a perceberes como podes ser mais amigo do ambiente.

1. Consulta o site abaixo indicado e responde às questões colocadas. http://www.edpsu.pt/pt/particulares/tarifasehorarios/horarios/Pages/HorariosBTN.aspx
   a. Dentro da tarifa bi-horária há dois ciclos diferentes. Para cada um deles, indica o nome e o período (as horas) em que a eletricidade é mais barata (horas de Vazio). Não te esqueças de diferenciar os dias da semana, quando for o caso.
   b. Dentro da tarifa tri-horária há três ciclos diferentes. Para cada um deles, indica o nome e o período (as horas) em que a eletricidade é mais barata (horas de Vazio).
2. Depois deste breve estudo, já sabes em que período do dia é mais económico colocar a máquina da roupa ou da loiça a trabalhar, certo? Consegues aconselhar um novo utilizador? Sugerir uma estratégia para ele poupar na conta da luz e emitir menos CO_2 para a atmosfera?

Tarefa de Investigação

I – Tarefa individual

Passos a cumprir:

Antes de mais, vais precisar de uma fatura da eletricidade. Procura nessa fatura os seguintes dados e regista-os na tua folha:

- Utilizador
- Morada
- Tipo de tarifa contratada.
- A potência contratada.

1. Lê o contador de luz todos os dias desta semana depois do jantar, desde 2ª feira até domingo. Utiliza o número de colunas necessárias e adequadas ao teu tarifário para registar os valores recolhidos.
2. Relativamente aos dados recolhidos, identifica o dia em que gastaste mais eletricidade. Estima a eletricidade média gasta, por dia, durante o processo de recolha de dados.
3. Procura, na fatura, quais as fontes de energia utilizadas para produzir a eletricidade gasta em tua casa e regista-as na tua folha. Dessas, identifica qual contribuiu mais para a produção da eletricidade que usas em tua casa.
4. Procura, na fatura, quantos quilogramas de CO_2 (associados ao consumo de energia do utilizador) foram emitidos para a atmosfera. Regista este valor, compara-o com o dos teus colegas e escreve duas linhas com a tua opinião acerca deste assunto.
5. Estima quanto pagarás só de energia (eletricidade) no fim do mês de Dezembro, tendo em conta a média diária e o preçário atual da EDP.

II – Tarefa em grupo

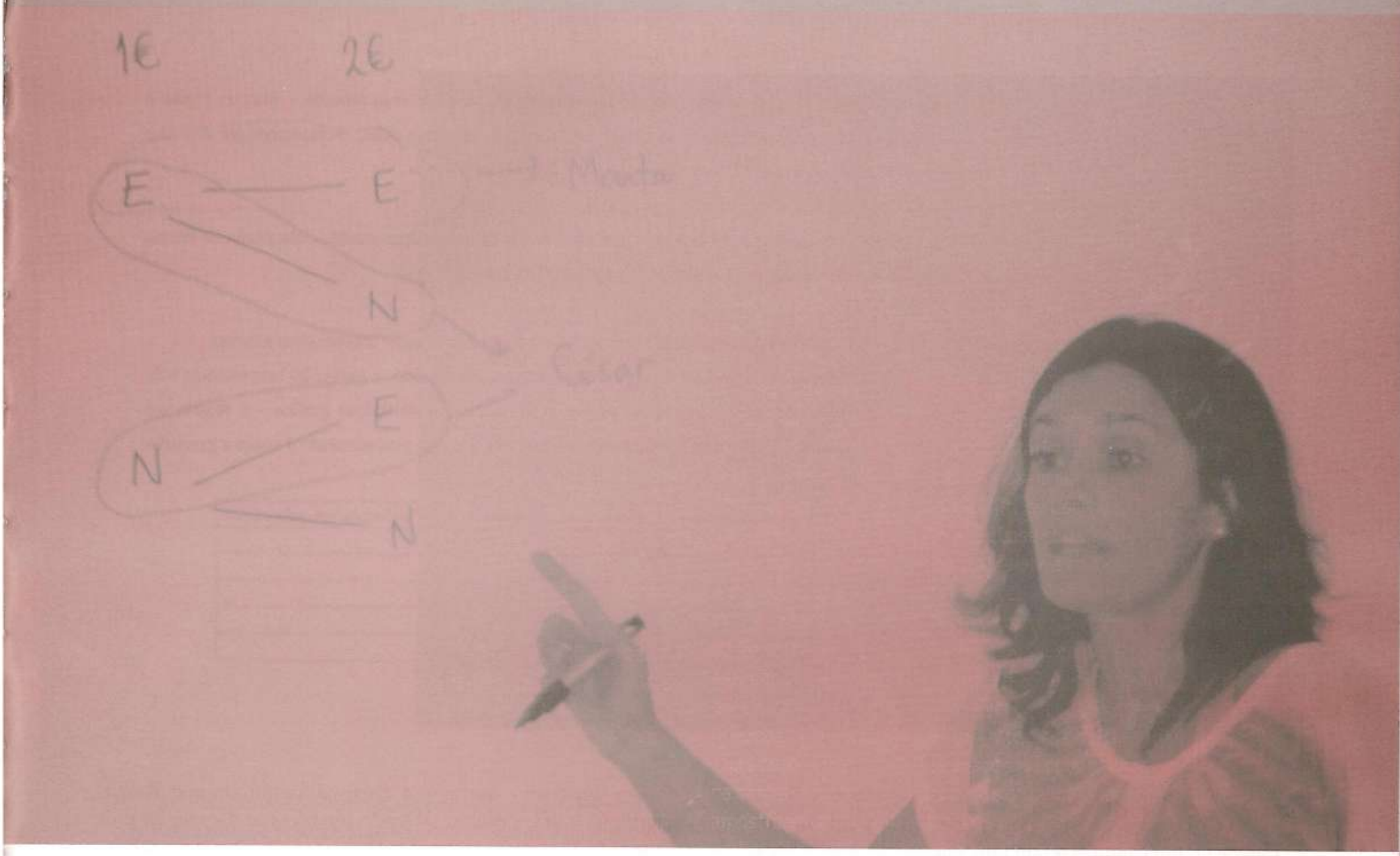
A turma deve dividir-se em grupos:

- Grupo 1: quem tem tarifa simples.
- Grupo 2: quem tem tarifa bi-horária.
- Grupo 3: quem tem tarifa tri-horária.

Em cada um dos grupos:

1. Recolhe a quantidade diária de eletricidade gasta por dia por cada um dos colegas. Calcula o gasto médio diário de eletricidade do grupo.
2. Em que dia da semana foi atingida metade da energia total registada? Consideras que os gastos energéticos foram equilibrados durante o processo de recolha? Justifica a resposta e identifica o conceito estatístico utilizado nesta questão.
3. Representa os dados recolhidos num gráfico que permita visualizar os gastos efetuados por cada elemento do grupo e interpreta os resultados obtidos.
4. Compara os resultados entre os grupos. Será que os tarifários são todos adequados? A que perfil de utilizador se adequa cada um dos tarifários?
5. Lista 3 ou 4 medidas para propores em tua casa formas de diminuir o consumo energético e, por consequência, a emissão de CO_2 para a atmosfera.

Para saberes os tarifários em vigor em 2012 consulta: http://www.edpsu.pt/pt/EDP%20Docs/Tarifario_2012_BTN.pdf



As probabilidades no Secundário:

simulações com recurso à tecnoclogia

Uma reportagem em Alcácer do Sal

Esta reportagem realizou-se no dia 1 de Outubro de 2012, na Escola Secundária de Alcácer do Sal, uma escola que beneficiou recentemente de profundas obras de remodelação e que nos oferece um espaço aberto e agradável, com muita luz, situado na zona alta da cidade, com uma ampla vista sobre o rio Sado. Foi neste contexto que a professora Ana Paula Júlio nos abriu as portas da sua sala de aula, com uma turma do 12° ano, com dezanove alunos, a trabalhar a unidade de Probabilidades e Estatística, numa aula de Matemática.

A professora dispõe de boas condições e recursos, quer ao nível dos materiais manipuláveis, quer no domínio da tecnologia — e faz questão de os usar. A sala de aula está equipada com três quadros: um quadro branco, um quadro com quadriculado e um quadro interativo onde a professora começa por projetar dois slides com os tópicos da aula: aproximações concetuais de probabilidade, conceito frequencista e simulações, tendo por base uma tarefa com dois problemas.

Nas duas primeiras semanas de aulas os alunos contactaram com experiências simples para a identificação dos espaços de acontecimentos e da probabilidade associada a determinado acontecimento elementar ou ao seu contrário. A professora começa por falar sobre a probabilidade enquanto quantificação da incerteza, sobre o aparecimento da ideia, historicamente associada aos jogos e aos seguros e refere alguns dos matemáticos mais identificados com o estudo das probabilidades como Fermat, Pascal e Laplace.

Em seguida, destaca os modelos de probabilidade e foca-se no conceito frequencista da probabilidade, por onde vai começar: «Se eu posso repetir uma experiência (aleatória) muitas vezes em circunstâncias idênticas, eu posso observar quantas vezes efetivamente ocorre determinado acontecimento e calcular a respetiva frequência relativa com que isso acontece (...) eu posso ver para que valor a frequência relativa vai tendendo, estabilizando (...) não basta só uma ou duas experiências (...) e associar a esse valor à probabilidade desse acontecimento (...) Usamos esta definição em que casos? Onde é difícil usar a definição laplaciana, a do número de casos possíveis e de casos favoráveis!»

1. Considera a experiência aleatória que consiste em lançar ao ar duas moedas - uma de 1 euro e outra de 2 euros - e registar a face virada para cima em cada uma delas. Designemos por ***E*** a face comum europeia e por *N* a face nacional, em cada uma das moedas.

A Marta e o César vão jogar um jogo: em cada lançamento das duas moedas, ela ganha se saírem **duas faces europeias** e ele ganha se sair **apenas uma face nacional**.

1.1 Qual dos dois tem maior probabilidade de ganhar o jogo? Discute com a turma.

1.2 Efetua a simulação da experiência descrita, realizando, a pares, 20 lançamentos - de duas moedas ou utilizando as potencialidades da calculadora gráfica - e regista em quantos deles ganha a Marta e/ou o César. Repete este procedimento 5 vezes e preenche a tabela:

Nº de lançamentos	Nº de lanç. em que ganha a Marta	Nº de lanç. em que ganha o César
20		
20		
20		
20		
20		

Figura 1. Enunciado da primeira situação

Com os alunos organizados a pares, a professora distribui o guião da tarefa e começa por apresentar a primeira situação (figura 1), uma simulação do lançamento de duas moedas (de 1€ e 2€), clarificando o que se pretende.

O João responde imediatamente à primeira questão: «É ele. Porque ela tem de calhar duas vezes a face europeia que é sensivelmente 25%, que é 50% para cada uma, e o outro é muito mais fácil que é metade ... as duas moedas são 50% e ela tem 25%».

A professora convida a turma a concordar ou discordar do João e Tomaz considera, hesitante, que são iguais as probabilidades de Marta e de César ganharem. Paula lembra que podemos ter uma situação em que nenhum dos dois ganha, enquanto desenha no quadro um esquema em árvore (figura 2), interagindo com a turma sobre as hipóteses vitoriosas de cada um e convidando-os a traduzir, sob a forma de fração, as probabilidades de cada um deles ganhar.

O recurso ao esquema e a discussão permitem que Tomaz clarifique a sua confusão: «Depois lembrei-me daquilo da professora fazer os pares ... nas tiragens e depois é que me lembrei que podia ser ao contrário ... e eu estava a contar só uma vez.

Em seguida, embora reconhecendo a correção da conclusão a que chegaram, a professora sugere que os grupos simulem a situação com as moedas e registem os respetivos resultados, numa série de vinte lançamentos.

Os alunos envolvem-se na tarefa e no final indicam à professora os resultados parciais obtidos que ela regista numa calculadora gráfica e que, em seguida, introduz numa tabela que preparou antecipadamente na folha de cálculo, que mostra os totais acumulados, a frequência relativa de cada um e o respetivo gráfico de linhas que revela a tendência (figura 3).

Após a comunicação dos primeiros resultados, muito diversos entre os grupos, a professora desafia-os a discutir o valor esperado como frequência absoluta para a situação da Marta,

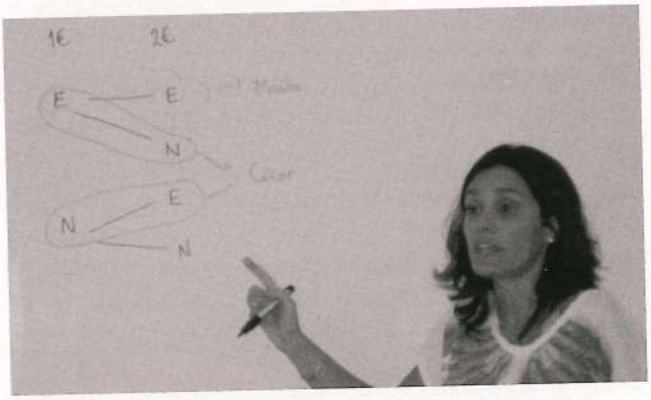


Figura 2. Esquema que traduz os vários casos da primeira situação

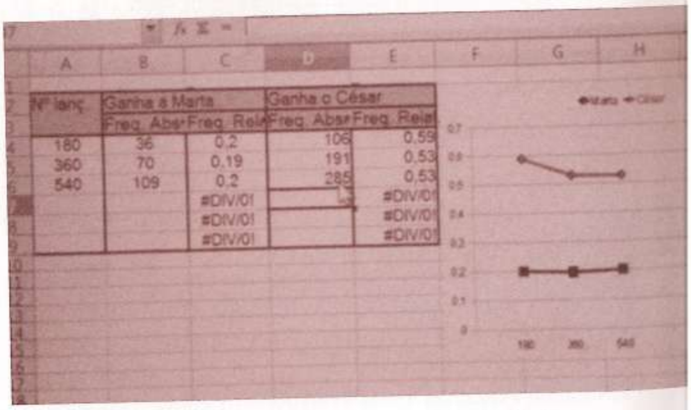


Figura 3. Síntese de resultados da simulação na folha de cálculo

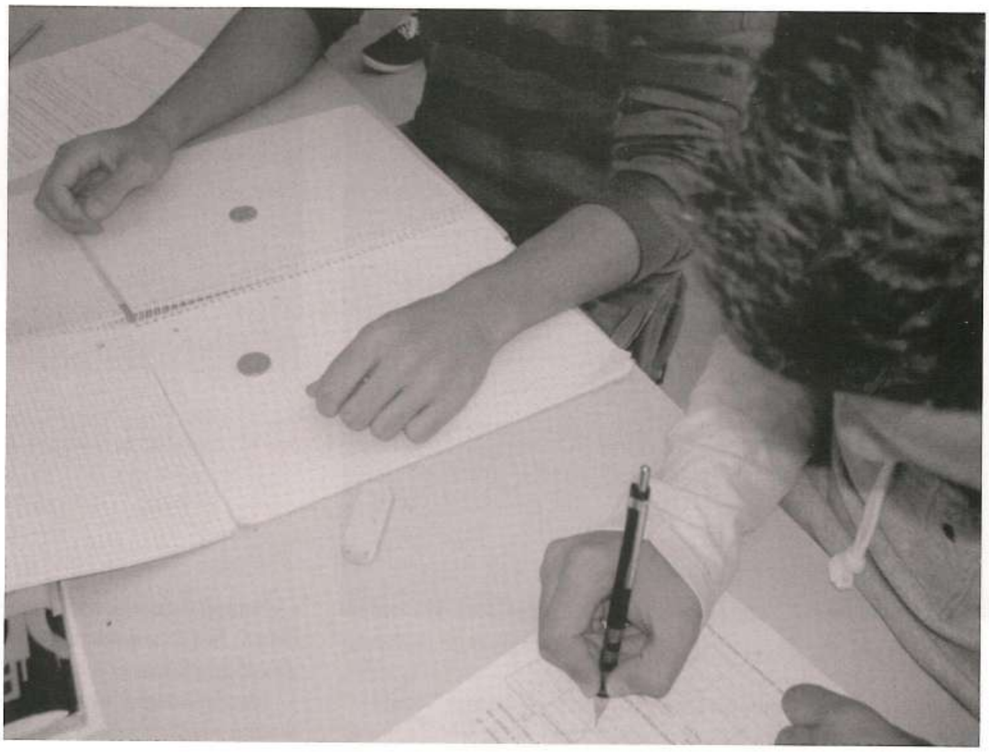


Figura 4. Lançamento das moedas e registos

em vinte lançamentos. A resposta que se ouve de vários alunos é 5. Paula propõe realizar mais uma série de vinte lançamentos e depois usar alternativas para fazer as simulações mais rápidas, enquanto se ouve um aluno dizer: «Com a calculadora gráfica!»

Enquanto os alunos concluem e registam a última série de lançamentos (figura 4), Paula abre uma aplicação do quadro interativo (TI SmartView) que emula a calculadora gráfica, procura a aplicação Prob Sim (Simulação de probabilidade) e aí sugere aproveitar uma das simulações disponibilizadas (Toss coins) e selecionar algumas opções necessárias para realizar a simulação (número de moedas, etc.).

Após as simulações dos alunos nas suas calculadoras, a professora rapidamente recolhe e regista os respetivos valores, foca a observação na tabela e no gráfico e comenta o que se está a passar: «Os resultados que vamos obtendo mostram a tendência de nos estarmos a aproximar dos valores que sabíamos serem os valores em termos teóricos ... Não quer dizer que cada vez que o façamos nos vamos aproximar desses valores, mas sabemos que irão tender para lá».

Paula propõe-se passar à situação seguinte, bem mais complicada. Lê e vai comentando o enunciado (figura 5) e pergunta: «Quantos são os casos possíveis nesta experiência aleatória?»

Um aluno responde: «Seis ao cubo!» A professora, em interação com a turma, confirma ser igual a 216 e sugere que os resultados que se obtêm são ternos ordenados: «Digam-me lá um resultado em que eu ganhe?». Ouvem-se várias respostas

2. Considera a experiência aleatória que consiste em lançar ao ar três dados cúbicos - equilibrados, não viciados, numerados de 1 a 6 - e registar o número da face virada para cima em cada um deles.

Inventei um jogo...

Em cada lançamento dos três dados cúbicos, ganho se obtiver **pelo menos uma face numerada com o número 2**, desde que **não saia o número 1** em qualquer um dos outros dados.

Mas tenho um problema... Qual é a probabilidade de ganhar este jogo?

2.1 Parece-te fácil a determinação da probabilidade pedida? Discute com a turma.

2.2 Efetua a simulação da experiência descrita, realizando, a pares, 20 lançamentos - de três dados ou utilizando as potencialidades da calculadora gráfica - e regista em quantos deles ganho e em quantos perco o jogo. Repete este procedimento 5 vezes e preenche a tabela:

Figura 5. Enunciado da segunda situação

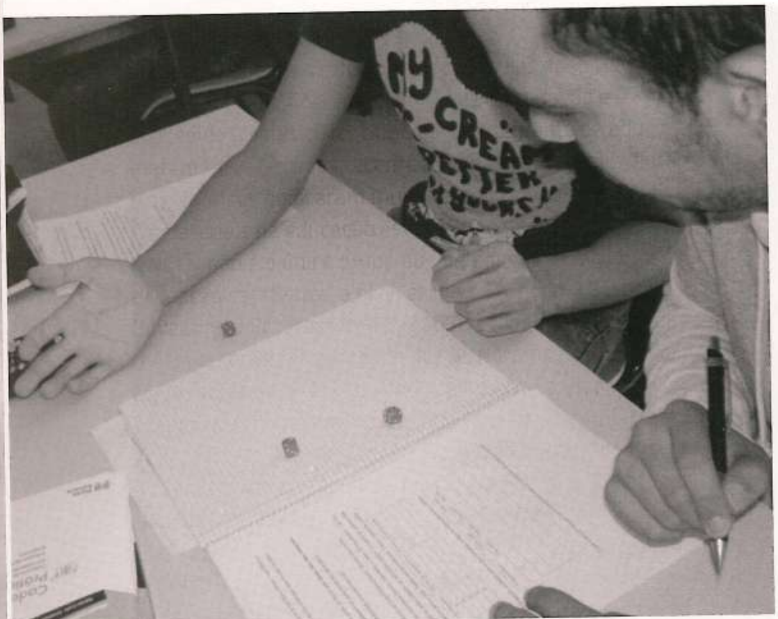
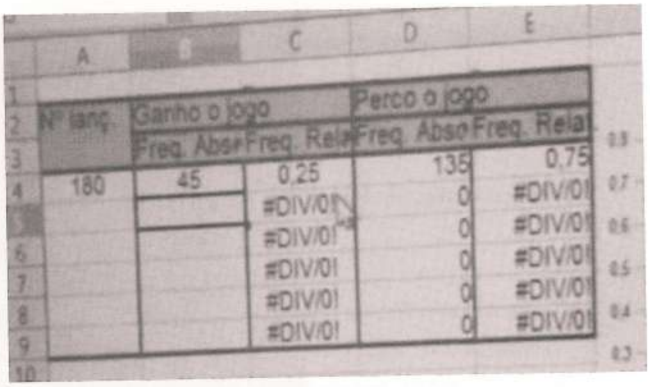


Figura 6. Lançamento de dados e registos



Nº lanç.	Ganho o jogo		Perco o jogo	
	Freq. Abs	Freq. Rela	Freq. Abso	Freq. Rela
180	45	0,25	135	0,75
		#DIV/0!	0	#DIV/0!
		#DIV/0!	0	#DIV/0!
		#DIV/0!	0	#DIV/0!
		#DIV/0!	0	#DIV/0!
		#DIV/0!	0	#DIV/0!

Figura 7. Tabela com os registos da simulação

dadas pelos alunos: «Dois, dois, quatro; dois, dois, dois; dois, três, quatro; …» E continua: «Não sei se tenho maior probabilidade de ganhar ou de perder: O que é que vos parece?» Um aluno refere: «A probabilidade é de 1/6 …», enquanto Paula comenta: «… mas em cada um deles [refere-se aos dados] …?!»

Os alunos parecem não ter pistas, mas a professora propõe-lhes que partilhem os seus pensamentos e conjeturas. Um aluno dá um conjunto de explicações que a professora devolve à turma: «Tu dizes que é mais fácil perder do que ganhar?! (…) Estamos aqui a falar de uma probabilidade de ganhar abaixo dos 50%, é isso? (…) Ele disse A gente ganha desde que saia o 2 … Mas há outras possibilidades de que nem saia nem 2, nem 1 e que a gente perde sempre … 4, 3, 5 ou 5, 6, 3 … Certo?… Parece-vos razoável abaixo de 50? Mas quanto vos parece? 5%, 10%, …?»

Os alunos hesitam e Paula adianta: «Temos uma certa ideia de que há maior probabilidade de perder, mas não temos a certeza (…) A diferença fundamental é que há bocado tínhamos uma noção da probabilidade … e agora estamos aqui um pouco à nora!»

Distribui os dados e propõe a cada grupo que faça vinte lançamentos (figura 6): «Atenção … agora o que registam é ganhos e o que não é ganhos, é perdas … agora não há uma terceira opção».

Os alunos estão bastante envolvidos na tarefa e a dado momento a professora questiona-os: «Estão a ganhar mais ou a perder?» Ouve-se um coro de vozes: «A perder!»

O registo na tabela da folha de cálculo, de 45 ganhos em 180 lançamentos, devolve automaticamente a frequência de 0,25 e mostra a representação gráfica por pontos (figura 7).

Após uma segunda série de lançamentos, a professora regista os valores acumulados (106 em 360) a que corresponde a frequência relativa de ganhar de 0,29 e de perder (0,71) e comenta: «Ainda andamos muito longe do valor … mas estamos abaixo de 50! Então vamos recorrer ao gerador de números aleatórios da calculadora».

Os alunos já tinham usado várias vezes o gerador e a professora clarifica que a sintaxe *randInt*(1,6,3) gera um terno (3 lançamentos) de números pseudoaleatórios (porque gerados por uma rotina), no intervalo de 1 a 6.

O processo repete-se. Os alunos usam as suas calculadoras, geram sucessivas sequências de lançamentos e, em seguida, a professora lança-os na tabela da folha de cálculo: «Em 540, ganhámos em 156 vezes! (…) Que corresponde a 0,29 … cerca de 30%!». O ar desconfiado com que um aluno olha este valor decimal leva a professora a comentar: «Mas as probabilidades têm que ser um número bonito? As probabilidades têm que ser bonitas?… Não têm!!»

Procurando maior rapidez e simplicidade a realizar a simulação com a calculadora, Paula introduz a função Mínimo (*Min*(*randInt*(1, 6, 3))) e desafia os alunos: «Reparem … se sair 1 eu perco logo … saia 2 ou não saia, eu perdi de certeza. Se não sair 1 e o mínimo daquela lista for 2, é significado ou não que ganhámos?» Após algum silêncio, ouvem-se vozes de concordância.

A professora sugere aos alunos que realizem vinte simulações, com recurso à nova função, após discutir alguns exemplos, em interação com toda a turma.

Registados os valores da nova série de simulações (720 … 222 ganhos … que corresponde a 0,31), os alunos revelam alguma desconfiança mas a professora sugere fazer mais: «Agora podemos fazer umas quarenta, pode ser?» Os alunos envolvem-se na experiência, até porque o uso da tecnologia permite aumentar significativamente o número de experiências sem trabalho adicional. O registo final na tabela mostra que em 1080 experiências, temos 330 casos de êxito, ou seja, 0,31: «Bem, parece-vos estranho este valor? Só houve um aluno que deu um palpite numérico … aquele de 1/6 … De resto ficámos ali abaixo dos 50%, não foi? Portanto ficámos nos 30%. Então vamos lá ver se conseguimos apurar a probabilidade teórica?!»

A professora interage com os alunos, clarificando que os casos são todos equiprováveis porque é tão provável sair (1, 1, 1)

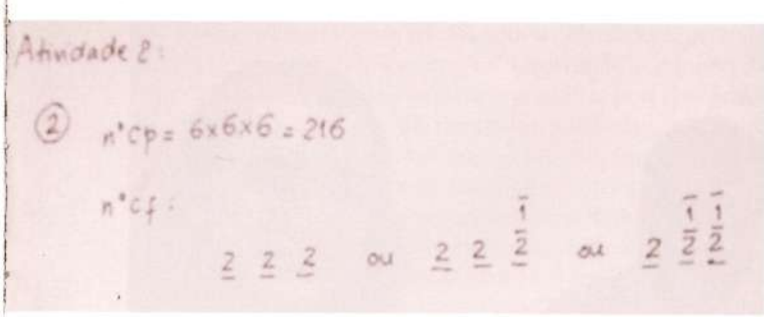


Figura 8. Esquema de apoio à determinação da probabilidade teórica

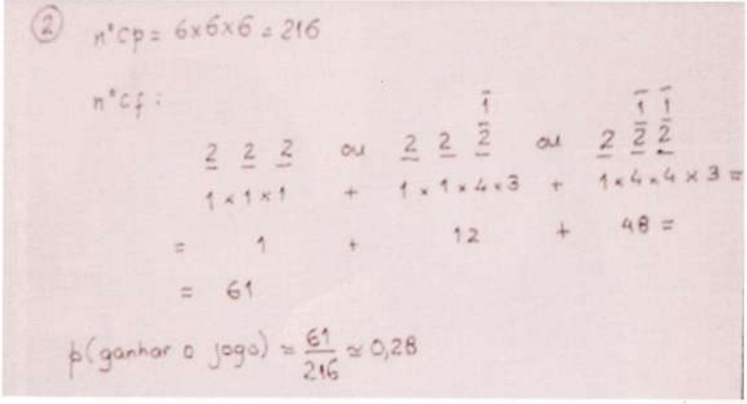


Figura 9. O cálculo da probabilidade teórica

como sair (1, 1, 2), propondo recorrer à definição clássica que os alunos já trabalharam no 9.º ano.

Escreve no quadro o número de casos possíveis e organiza um esquema para as várias situações favoráveis (figura 8), que vai discutindo com os alunos: «Podemos ter 2, 2, 2» e identifica os dados com um traço por baixo. Discute uma segunda situação possível que é saírem dois 2 e no terceiro dado não sair 2, mas também não sair 1. Neste caso, lembra que devemos ter atenção à ordem, pois pode não ser o último diferente de 2, mas sim qualquer dos dois dados anteriores. E finalmente, comenta em voz alta a terceira hipótese, enquanto escreve: «Pode sair 2, depois não sair 2, nem sair 1 e voltar a não sair 2, nem sair 1… a menos da ordem».

Como já alertou os alunos para o problema da ordem, Paula vai agora anotar por baixo do esquema, o número de casos favoráveis: «Ora se eu quero que isto aconteça (2, 2, 2) … então é $1 \times 1 \times 1$, ou seja, 1 caso». Depois de traduzir pelo operador + a disjunção ou, analisa a 2.ª sequência (2, 2 e depois, nem 1 nem 2): «É $1 \times 1 \times 4$, visto que no último dado pode ser 3, 4, 5 ou 6 (…) Mas agora tenho de considerar a possibilidade de não serem naqueles dois primeiros dados que sai o 2, mas serem o primeiro e o último ou o segundo e o terceiro». E acrescenta $1 \times 1 \times 4 \times 3$.

Finalmente discute a última situação, para a qual os alunos já contribuem claramente para escrever os vários casos possíveis ($1 \times 4 \times 4 \times 3$), após ter feito uma breve pausa comentando as 3 situações em que o 2 se pode encontrar (figura 9).

A professora conclui então que o total de casos favoráveis são 61 em 216, uma resposta partilhada pela generalidade dos alunos e resume: «A probabilidade teórica de ganhar o jogo … vejam lá quanto é que isto dá!? 0,2824 … Vamos espreitar as nossas simulações [muda para a tabela da folha de cálculo] (…) Não andámos muito longe!»

A voz da professora

No final da aula conversámos com a professora, procurando perceber as intenções que tinha com a tarefa, os papéis das simulações, dos materiais manipuláveis e da tecnologia, e a forma como conduziu a realização da tarefa, desde o seu lançamento, à exploração das simulações e ao cálculo do valor teórico.

Para a professora Paula, com a primeira parte da tarefa (as moedas) pretendia que «eles conseguissem gerir, do ponto de vista teórico, de uma forma relativamente fácil — terem alguma orientação», servindo as simulações para encontrarem a regularidade e comprovarem o esperado. Já relativamente à segunda parte (os dados) «é um cenário completamente diferente. Eles pouca noção têm do que será … a probabilidade, neste caso de ganhar o jogo. E portanto aí, a simulação leva-os a concretizar … a pouca ideia inicial que possam ter, ou a contradizer». No final, os alunos vão determinar a probabilidade teórica, orientados pela professora a partir do quadro, e confirmam que «o grande número de experiências conduzia a essa frequência relativa, nas proximidades do valor que era o teórico».

O interesse de utilizar simulações, na aprendizagem das probabilidades, está presente nas palavras da professora quando afirma: «Ver os resultados numa tabela [num manual escolar] com as respetivas frequências relativas, às vezes com alguns artifícios pelo meio (Calcula a frequência, completa a tabela!) … eu acho que é completamente diferente serem eles próprios, a pares, que vão trabalhando os valores com a turma e veem aparecer esses valores … tanto os resultados absolutos que obtiveram, como esse serpentear da frequência relativa em torno de um valor».

A professora reconhece que eles inicialmente têm dificuldade nos registos das contagens e na sua organização e por isso considera indispensável a utilização de materiais: «Eu gosto que eles façam mesmo. Fiz com moedas, já fiz com piunaises … Acho útil eles lançarem e sentirem os dados e poderem explorar por eles».

Quando solicitada a discutir o que se acrescenta à simulação com a integração da tecnologia, não tem dúvidas: «Com recurso à calculadora, conseguem poupar tempo, conseguem fazer mais simulações e mais rápido … e podem tomar consciência das potencialidades que a calculadora tem …». Com a calculadora gráfica, a professora usou o gerador de números aleatórios e, em seguida, utilizou o mínimo da lista. A sua convicção é de que

Figura 10. A Catarina e o Tomaz

Figura 11. O Zé Duarte e a Beatriz

esta última opção teve objetivos simultaneamente matemáticos e de evidenciar a diversidade de potencialidades da calculadora, que alguns já conhecem e outros se vão apropriando.

Quando lança a tarefa, Paula começa por solicitar dos alunos, em grande grupo, hipóteses de resultados possíveis, procurando que eles identifiquem o número total de possibilidades e aquelas que conduzem a ganhar ou perder. Com isto pretende observar se os alunos perceberam o que se pretende com o jogo, o que torna um resultado ganhador ou uma situação favorável, ao mesmo tempo que aplicam aprendizagens que fizeram nas semanas anteriores sobre experiência aleatória, espaço de acontecimentos e acontecimentos equiprováveis.

Quando, após as simulações, chegam ao cálculo do valor teórico de cerca de 0,28, a professora considera que eles o aceitaram e não desconfiaram: «Penso que o valor não lhes causou estranheza! Se calhar, se se acercasse dos 40% ou se fosse um valor muito baixo, aí sim! Ficariam mais admirados». No entanto, face aos valores encontrados nas simulações, os alunos preferiam os *mais bonitos*, como referiu uma aluna: «Era ... os primeiros que deram 25% e ela acreditava porque era um número mais bonito ... (...) Bonitos, redondos, parece que dá a ideia de que devem ser mais prováveis ... 25% deve ser mais bonito do que 28 ou 29 ... Mas ao fim de tantas experiências eles acreditam *Bom é capaz mesmo de ser isto!*».

O tempo é uma variável que regula as opções da professora e, para poupar tempo nos cálculos intermédios que acumulam as frequências absolutas e relativas das sucessivas séries de lançamentos dos dados, usa tabelas que já tem preparadas e gráficos que dela dependem, na folha de cálculo. As vantagens da folha de cálculo sobre a calculadora gráfica são, para a professora, fazer mais rapidamente os gráficos e ter os eixos identificados, o que facilita a observação e compreensão pelos alunos.

A voz dos alunos

Conversámos também com quatro alunos numa meia hora que nos cederam com gosto: a Catarina, o Tomaz, o Zé Duarte e a Beatriz (figuras 10 e 11).

Procurámos perceber o que representaram para eles as simulações com materiais e com a tecnologia, como sentiam este tipo de aulas e as dificuldades que sentiram entre as simulações e o aparecimento do valor teórico.

De um modo geral, os alunos identificam-se bem com este trabalho com as simulações, iniciado com os próprios materiais físicos e passando depois para a utilização da calculadora. Para Tomaz, lançar as moedas «é uma boa experiência para cativar os alunos e assim prestamos mais atenção à matéria que estamos a aprender, do que ser só o professor a explicar». Catarina concorda e refere que «é mais fácil perceber os conceitos sendo nós a fazer a experiência e a analisar depois os resultados e a chegar lá ... É melhor do que ser a professora logo a dar a conclusão e depois explicar». Comentando o lançamento dos dados, Beatriz considera que «estivemos a ver os resultados todos, que apesar de serem diferentes, depois tudo junto, como era um grande número de pessoas a fazer as probabilidades davam mais ou menos o mesmo ... e era para termos aquele conceito que tínhamos de fazer as experiências várias vezes».

Quando comparam com as simulações, recorrendo à tecnologia, Catarina prefere começar por sentir os próprios materiais: «Para mim é mais fiável, sermos nós a lançar... (risos) estamos a fazer e a ver com os nossos olhos ... termos a certeza que ocorrem dentro das condições que se querem». No entanto, reconhece que depois, «para um elevado número de experiências, de repetições ... tornava-se mais chato e (...) com a calculadora é mais rápido». Estas palavras são apoiadas pelos restantes alunos e Zé Duarte acrescenta: «É como ela estava a dizer. Se tivéssemos possibilidade de o fazer ... se calhar o mais real era mais aconselhável».

Os alunos sentem-se confortáveis com a calculadora gráfica e isso tem muito a ver com o papel que a professora lhe atribui, pois desde que a compraram, no 10.º ano, que ela os acompanha sempre ao longo das aulas e nos testes: «A professora explica na teoria a resolução à mão mas depois explica na calculadora para simplificar os testes ... E depois não serve só para a Matemática, serve para a Físico-Química e assim ... » (Catarina).

Face aos dois processos usados com a calculadora, gerando aleatoriamente os três números ou devolvendo o mínimo da lista, Tomaz e Zé Duarte preferem o primeiro, pois têm «mais o controle do conjunto de resultados possíveis», enquanto Catarina e Beatriz consideram que «o Mínimo é mais rápido».

Estas aulas, com recurso a simulações constituem para os alunos um *corte* com as aulas consideradas mais tradicionais e reúnem as suas preferências. Beatriz considera «que é [uma forma] mais intuitiva e é depois mais fácil lembrar no futuro», enquanto Zé Duarte refere «que é uma boa maneira de trabalhar e aprendemos mais rápido». Para Catarina trata-se de «sair um bocado daquela aula típica, do professor estar a explicar, estar a escrever, fazer as atividades em grupo, a pares e depois apresentar uma conclusão conjunta. São atividades diferentes... Para mim foi importante pela professora que tivemos ... porque estamos muito ativos nas aulas percebemos o que a professora diz e depois para concretizar é mais fácil. Algumas questões vamos fazendo e tiramos as dúvidas ...».

Os alunos identificam algumas dificuldades que vão ultrapassando pelo confronto entre a experiência com as simulações e o cálculo dos valores teóricos, num processo mediado pela comunicação entre eles e a professora. Enquanto na primeira parte da tarefa, relativa às moedas, os alunos revelam facilidade na tradução da situação e na conjetura acerca da probabilidade, na segunda parte, sobre os dados, incomparavelmente mais complexa, têm pouca ideia do valor da probabilidade. Apenas admitem ser abaixo dos 50% e concordam, aparentemente sem argumentos, com um palpite de um colega de que pode ser 1/6 (cerca de 17%), embora a sua explicação não seja nada convincente. Beatriz justifica que «ele só estava a pensar num dado (...) [aquele palpite correspondia a] sair o 2 ... e ele disse que só lhe faltava subtrair a probabilidade de sair o 1», enquanto Tomaz, considera que «isso anulava-se porque era 1/6».

Perante o valor teórico calculado (cerca de 0,28) e confrontando-o com os valores obtidos nas simulações que realizaram (entre 25% e 30%), os alunos não se surpreendem, pois esperavam um valor abaixo de 50%, mas são unânimes em considerar que, neste caso, foi o cálculo da probabilidade teórica que os convenceu e não tanto o valor obtido através das simulações: «Faz mais sentido, parece-nos mais fiável ... » (Catarina), «porque não era aquela coisa de lançar os dados e os dados estarem viciados» (Tomaz) e porque «lançar mil e oitenta vezes não chega para provar que é 30% ou não» (Catarina).

No entanto, as várias parcelas que resultam do esquema que permite o cálculo do valor teórico, não são todas óbvias, e confirmam uma dúvida já expressa pela professora, relativamente ao entendimento do cálculo desse valor: «Por exemplo, saía um 2... tinha uma probabilidade, depois o outro tinha outra e depois o outro não podia sair o 2 nem o 1 ... depois vezes o 3, podia não chegar lá ...» (Zé Duarte). Embora agora, visto mais à distância pareça ter uma explicação clara: «Se há 3 dados ... são elementos independentes ... portanto, se há 3 dados a ordem pode ser trocada e são três, nesse caso, diferentes ... 2, 2, 3 ou 2, 3, 2 ou 3, 2, 2 são três casos diferentes. São três trios diferentes não é um» (Catarina). Para Tomaz, a aprendizagem nesta aula resume-se a uma aplicação do que já conhecia: «Casos prováveis sobre casos possíveis ... está sempre correto!».

A concluir

Esta reportagem revelou-nos uma aula dinâmica, onde o conhecimento resulta de uma construção simultaneamente pessoal e social desenvolvida a partir da realização e discussão de experiências aleatórias, propostas pela professora como estratégia para que os alunos compreendam e «sintam» o significado do conceito de probabilidade, bem como se confrontem com as suas conceções, por vezes erróneas, sobre os valores das probabilidades. Para tal muito contribuiu as perspetivas da professora sobre este tema, bem como a preparação de materiais adequados e a mobilização de recursos diversos, e ainda a sua capacidade de gerir a aula, equilibrando as ações e vozes dos alunos com as suas sínteses. É um bom exemplo de como apesar da falta de tempo e da exigência geralmente associada ao 12.° ano, é possível o envolvimento ativo dos alunos na exploração e na experimentação de situações problemáticas que dão sentido ao conhecimento matemático em que a tecnologia é um recurso insubstituível.

José Duarte
ESE de Setúbal

STATISTICS2013.ORG
INTERNATIONAL YEAR OF
STATISTICS
PARTICIPATING ORGANIZATION

2013 é o Ano Internacional da Estatística!

O Statistics2013 é um evento apoiado por mais de 1400 organizações de todo o mundo, incluindo algumas portuguesas. Com ele pretende-se, como se pode ler no site http://www.statistics2013.org/, celebrar o poder e alcance dos efeitos da Estatística em todos nós e dar a conhecer como esta ciência se relaciona com e melhora a nossa vida.

Ao longo deste ano, muitas serão as iniciativas promovidas pelas organizações aderentes ao Statistics2013. Para já, convidamo-lo a visitar o site, no qual poderá encontrar informação muito diversa, incluindo recursos para o professor, com sugestões de ideias para trabalhar o tema de Estatística com os alunos de modo a promover a sua literacia estatística.

Sentido de gráfico: um exemplo com um gráfico circular

Paula Cristina Morais e José António Fernandes

O sentido de gráfico

Nos dias de hoje, vivemos numa sociedade altamente tecnológica em que a análise de dados estatísticos está fortemente relacionada com as representações gráficas (Friel, Curcio & Bright, 2001). Segundo Doig e Groves (1999), são os gráficos com que nos deparamos diariamente para ler e interpretar aqueles que devem ser explorados nas escolas, por forma a desenvolver nos alunos elevados níveis de literacia gráfica visando a compreensão de diferentes tipos de gráficos e a interpretação de cada um deles.

São os gráficos que nos permitem representar de forma reduzida dados estatísticos, requerendo na sua análise o desenvolvimento do sentido crítico e do raciocínio estatístico (Shaughnessy, 2007). Na generalidade dos países, a importância dos gráficos vem sendo reconhecida nas mais recentes reformulações dos programas escolares de Matemática, tal como aconteceu em Portugal com o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007).

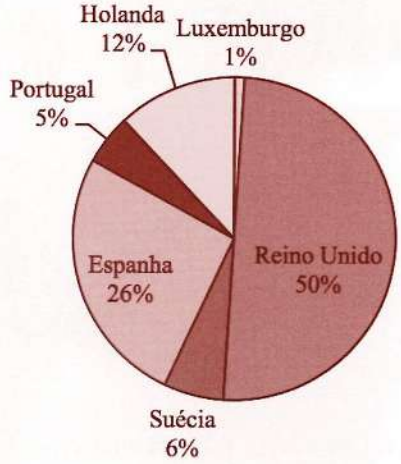
Um modo de contribuir para a promoção do raciocínio estatístico é reconhecer que os gráficos são um modo de comunicar e clarificar a informação neles contida (Curcio, 1989). Tal como salientam Monteiro e Selva (2001), os gráficos são uma *ferramenta cultural* que nos permite ampliar a nossa capacidade de tratar informação estatística e estabelecer relações entre diferentes tipos de informação. Os gráficos permitem-nos comparar e mostrar relações matemáticas que muitas vezes não podem ser facilmente reconhecidas na forma numérica (Curcio, 1989).

O potencial máximo de um gráfico, segundo Curcio (1989), é realizado quando através da sua observação se consegue interpretar e extrair conclusões relativamente aos dados nele representados. A este respeito, Friel et al. (2001) referem que a capacidade do leitor para atribuir significado aos gráficos, construídos por outros ou por si mesmo, implica a sua compreensão.

Curcio (1989) reporta-se à ideia de *sentido de gráfico*, distinguindo três níveis hierárquicos de compreensão de um gráfico: *ler os dados*; *ler entre os dados*; e *ler além dos dados*. No primeiro nível, *ler os dados*, o leitor faz uma leitura literal do gráfico, que se concretiza através da leitura direta dos dados representados,

Automóveis vendidos em 2008 em alguns países europeus

No gráfico circular seguinte estão representadas as percentagens de automóveis de passageiros vendidos em alguns países da Europa. Sabe-se que, em 2008, no Reino Unido foram vendidos 2131794 automóveis. Analisa o gráfico e responde às questões que se seguem.



a) Qual a percentagem de automóveis vendidos em Portugal?
b) Quantos automóveis foram vendidos em Portugal?
c) O número de automóveis vendidos em Espanha é superior ou inferior a 50% do número de automóveis vendidos no Reino Unido?
d) Sendo o Luxemburgo considerado um país rico, porque é que o número de automóveis vendidos é o menor de todos? Indica uma justificação possível para esta situação.

Figura 1

bem como da escala e unidades de medida usados. Neste nível não é exigida a interpretação do gráfico.

No segundo nível, *ler entre os dados*, o leitor consegue relacionar os dados entre si bem como interpretar a informação por eles fornecida. Neste nível combina-se e integra-se a informação e identificam-se relações que permitem, por exemplo, identificar tendências no gráfico.

O terceiro nível, *ler além dos dados*, pressupõe que da leitura do gráfico, o leitor retire informação relevante sobre a situação a que o gráfico se reporta, o que poderá requerer algum conhecimento sobre o assunto referente aos dados do gráfico. Neste nível, o leitor deve ser capaz de responder a questões cujas respostas requerem o uso de informação implícita no gráfico, extrapolando, predizendo ou fazendo inferências. Ou seja, como refere Curcio (1989), pretende-se que o leitor se projete no futuro e, até mesmo, que coloque questões relativas aos dados e ao modo como foram obtidos e são representados.

Alguns estudos realizados em torno desta taxonomia de Curcio acerca da compreensão dos gráficos revelaram que os alunos do ensino básico (4.° ano e 7.° ano) apresentam poucas dificuldades no primeiro nível, relativo à leitura direta dos dados. No entanto, quando se deparam com questões do segundo e terceiro níveis, é frequente que os alunos cometam erros ou não sejam bem-sucedidos nas respostas (Friel et al., 2001). Para estes autores, estes erros podem estar relacionados com fragilidades nos conhecimentos matemáticos necessários para interpretar o gráfico, com a própria leitura e linguagem dos gráficos ou com conhecimentos do contexto em que se insere o gráfico.

Um exemplo com o gráfico circular

Com o objetivo de descrever, compreender e comparar a realização de alunos do 9.° ano de escolaridade na resolução de tarefas sobre a construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos, foi realizado um estudo (Morais, 2010) com 108 alunos que em 2009/10 frequentavam o 9.° ano de escolaridade numa escola básica e secundária do distrito de Braga. Os alunos tinham uma média de idades de 14 anos, idade normal para a frequência do 9° ano, distribuíam-se em igual número pelos sexos feminino e masculino e tinham um aproveitamento médio na disciplina de Matemática.

Neste artigo analisamos as respostas dos alunos a uma das tarefas usadas no estudo referido para ilustrar o seu sentido de gráfico. A tarefa «Automóveis vendidos em 2008 em alguns países europeus», adaptada de GAVE (2009), envolve a leitura e interpretação de um gráfico circular dado. Foi proposta aos alunos numa aula regular de Matemática em que estes puderam usar calculadoras para efetuar cálculos (figura 1).

Na Tabela 1 apresenta-se a distribuição das percentagens de alunos segundo a correção das respostas destes às quatro questões da tarefa, as quais foram codificadas em corretas, parcialmente corretas e incorretas, considerando-se também o caso de não respostas.

Por observação da Tabela 1, verificamos que quase todos os alunos responderam corretamente à questão a), menos de metade respondeu corretamente à questão b) e menos de um quarto respondeu corretamente às questões c) e d). Seguidamente analisam-se os diferentes tipos de respostas dos alunos em cada uma das questões incluídas na tarefa.

Respostas	Percentagem de alunos			
	a)	b)	c)	d)
Correta	96	39	23	23
Parcialmente correta	-	3	9	-
Incorreta	2	34	55	41
Não resposta	2	24	13	36

Tabela 1. Distribuição da percentagem de alunos segundo a correção de resposta nas questões a), b), c) e d) (n=108)

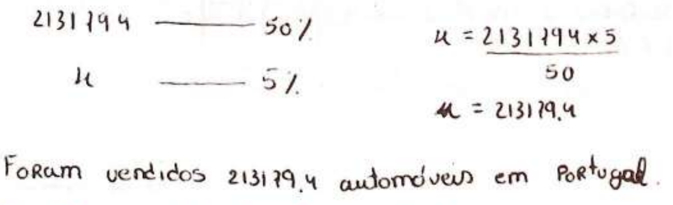


Figura 2. Resposta dada pelo aluno A_1 na questão b).

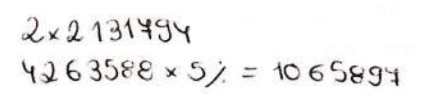


Figura 3. Resposta dada pelo aluno A_{42} na questão b).

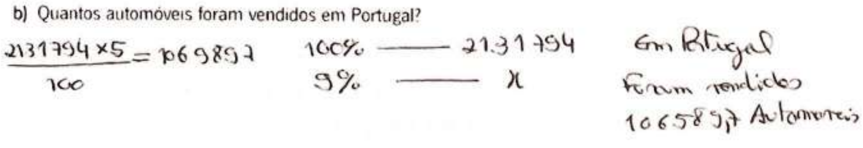


Figura 4. Resposta dada pelo aluno A_{63} na questão b).

Questão a). A obtenção da resposta correta nesta questão apenas requer que os alunos leiam o valor 5% no gráfico dado. O facto de esta informação estar explícita no gráfico, correspondendo ao nível de compreensão do gráfico de *ler os dados*, explica que a quase totalidade dos alunos (96%) tenha respondido corretamente. Apenas dois alunos não responderam e outros tantos responderam incorretamente. Destes últimos alunos, um apresentou o valor 54% (do qual não se percebe a origem) e o outro não interpretou corretamente o que era pedido, aplicando a regra de três simples para determinar o valor absoluto de automóveis correspondente.

Questão b). Nesta questão, a obtenção da resposta correta requer a transformação de dados fornecidos no gráfico, o que corresponde ao segundo nível de compreensão do gráfico de *ler entre os dados*. Especificamente requer-se a determinação de uma frequência absoluta a partir do conhecimento de uma percentagem. Neste caso, mais de metade dos alunos responderam incorretamente ou não responderam.

Relativamente aos alunos que responderam corretamente ou com correção parcial, um apresentou apenas o resultado final e 41 recorreram à regra de três simples para determinar o valor em causa. Destes últimos, 28 partiram do número de automóveis vendidos no Reino Unido (2131794) e 13 começaram por calcular antes o número total de automóveis vendidos na Europa (4263588), correspondente ao dobro do número de automóveis vendidos no Reino Unido. Nenhum aluno adotou a estratégia de dividir por 10 o número de automóveis vendidos no Reino Unido, que decorre da relação entre as percentagens de automóveis vendidos em Portugal e no Reino Unido.

Verificou-se ainda que, de todos estes alunos, 28 não apresentaram uma solução inteira, como se exemplifica na figura 2, questionando-se assim o sentido que atribuíram aos valores calculados.

No caso das respostas consideradas parcialmente corretas, os três alunos calcularam o número total de automóveis vendidos (4263588), mas determinaram incorretamente 5% desse valor, como se ilustra na figura 3.

Em relação às respostas incorretas, dos 24 alunos que recorreram à regra de três simples, 21 erraram por fazerem corresponder o número de automóveis vendidos no Reino Unido a 100% (figura 4), um aluno fez corresponder metade do número de automóveis vendidos no Reino Unido a 50% e dois associaram a percentagem do número total de automóveis vendidos à amplitude total do círculo (360° em vez de 100%).

Por último, dois alunos dividiram o número total de automóveis vendidos no Reino Unido por 45 e 5, respetivamente, e os restantes onze alunos apresentaram respostas curtas em que não se vislumbrava a origem dos valores indicados.

Nesta questão, os erros dos alunos parecem ter origem na dificuldade em dar sentido aos valores apresentados no gráfico, em especial, no que se refere ao total de dados.

Questão c). Tal como na questão anterior, também nesta questão a obtenção da resposta correta requer a transformação de dados fornecidos no gráfico, o que corresponde ao nível de compreensão do gráfico de *ler entre os dados*. Nesta questão, É superior, porque metade de 50% é 25% e em Espanha foi vendido 26%.

Figura 5. Resposta dada pelo aluno A_{70} na questão c).

4263588 — 100%
x — 26%
x = 1108532,88

4263588 — 100%
x — 50%
x: 2131794,00

Figura 6. Resposta dada pelo aluno A_{16} na questão c).

O Luxemburgo em relação aos outros países, é um país mais pequeno, com menos habitantes, logo tem menos vendas.

Figura 7. Resposta dada pelo aluno A_{102} na questão d).

porque é um país que usa bastante os transportes públicos e há poucas pessoas que andam em carro privados.

Figura 8. Resposta dada pelo aluno A_{59} na questão d).

cerca de dois terços dos alunos responderam incorretamente ou não responderam, podendo o maior número de respostas nestas categorias, relativamente à questão anterior, dever-se aos cálculos mais elaborados apresentados nas respostas dos alunos. Relativamente aos 25 alunos que responderam corretamente, seis recorreram à regra de três simples, tendo determinado a frequência absoluta correspondente a 26% dos automóveis vendidos em Espanha e comparado de seguida esse valor com metade do número de automóveis vendidos no Reino Unido, enquanto os restantes 19 alunos obtiveram as suas respostas por comparação de metade da percentagem de automóveis vendidos no Reino Unido, 25%, com a percentagem de automóveis vendidos em Espanha, 26%. Na figura 5 apresenta-se a resposta de um aluno que adotou o segundo processo de resolução.

No caso das respostas parcialmente corretas, embora quatro desses alunos também tenham recorrido à regra de três simples, dois não comparam os valores obtidos, como se exemplifica na resposta da figura 6, e os outros dois compararam com o número de automóveis vendidos no Reino Unido e não com metade desse número. Os restantes seis alunos limitaram-se a apresentar a resposta «superior» sem qualquer justificação. Apesar destes alunos não apresentarem qualquer tipo de justificação, estas respostas foram consideradas parcialmente corretas porque por observação do gráfico circular o aluno poderia ter comparado mentalmente, sem registar por escrito, que a percentagem da Espanha (26%) é superior à metade da percentagem do Reino Unido (25%), pensando de modo análogo aos alunos que o referiram explicitamente (ver figura 5).

Nas respostas incorretas, sete alunos recorreram à regra de três simples, dos quais quatro determinaram o número de automóveis correspondentes a 26% e 50%, mas erraram ao considerarem o número de automóveis vendidos no Reino Unido como sendo o número total de automóveis vendidos, dois alunos determinaram 26% e 50% do ângulo de 360° (amplitude total do círculo) e um não respondeu à pergunta formulada. Das 52 restantes respostas incorretas, 49 alunos responderam que o número de automóveis vendidos em Espanha é inferior ao do Reino Unido sem justificar a sua resposta e três alunos não apresentaram qualquer explicação para os 1108532,88 automóveis vendidos em Espanha.

Questão d). Nesta questão, a obtenção da resposta correta implica ir além dos dados apresentados, requerendo o estabelecimento de relações com conhecimentos do contexto da situação representada no gráfico, o que corresponde ao nível de compreensão do gráfico de *ler além dos dados*. Em termos de percentagens de respostas corretas e parcialmente corretas, constata-se que o total é um pouco inferior ao que foi obtido na questão c).

Considerámos corretas as respostas adequadas no contexto da situação apresentada, tendo-se verificado que todos os 25 alunos associaram a percentagem de automóveis vendidos no Luxemburgo às dimensões do país e/ou ao seu reduzido número de habitantes, como ilustra a seguinte resposta (ver figura 7).

No caso das respostas incorretas, nove alunos associaram a pequena percentagem de automóveis vendidos no Luxemburgo ao uso de outro tipo de transporte, em especial os transportes públicos, o que foi considerada uma razão possível mas que envolve apenas o Luxemburgo, sem qualquer relação com outros países ou com a totalidade dos países (ver figura 8).

Das restantes respostas incorretas, verificou-se que 14 alunos associaram a pequena percentagem de automóveis vendidos no Luxemburgo ao seu elevado custo, seis alunos relacionaram a baixa venda de automóveis com o facto de o Luxemburgo não necessitar de investir na produção de automóveis (ver figura 9).

Ainda 14 alunos referiram o facto de os luxemburgueses já terem carro (ver figura 10) ou não os adquirirem devido à crise económica. Por último, destaca-se ainda, nesta questão, que cerca de um terço dos alunos não apresentou qualquer resposta, correspondendo à maior percentagem de não respostas das quatro questões da tarefa.

Porque sendo um país rico não precisa de investir muito no negócio dos automóveis.

Figura 9. Resposta dada pelo aluno A_{47} na questão d).

É porque provavelmente a maior parte da população já tem carro.

Figura 10. Resposta dada pelo aluno A_{13} na questão d).

Algumas conclusões e implicações para o ensino

Globalmente verificou-se um fraco desempenho dos alunos na leitura e interpretação do gráfico circular relativo à tarefa proposta. Ora, tratando-se de alunos que não estudariam mais o tema de Estatística no ensino básico, este resultado é problemático face à importância que é reconhecida aos gráficos enquanto componente da literacia estatística (Gal, 2002).

Quando se consideram os três níveis de compreensão dos gráficos proposta por Curcio (1989), na tarefa analisada distingue-se claramente o sucesso dos alunos no nível *ler os dados*, em que quase todos responderam corretamente, seguindo-se o nível *ler entre os dados*, em que apenas cerca de um em três alunos respondeu corretamente e, por último, o nível *ler além dos dados*, em que apenas cerca de um em quatro alunos respondeu corretamente. Este resultado é compatível com o grau de dificuldade crescente desses níveis de compreensão de um gráfico (Curcio, 1989).

Tal como foi verificado por Friel et al. (2001), o fraco desempenho dos alunos no nível *ler entre os dados* poderá estar relacionado com a própria leitura e linguagem dos gráficos ou com os conhecimentos matemáticos necessários para produzir respostas corretas às questões. Especificamente, a complexidade dos cálculos envolvidos parece ter-se repercutido numa menor percentagem de respostas corretas da questão c) quando comparada com a questão b).

O ensino que os alunos experienciaram nas aulas de Matemática poderá também explicar a sua elevada adesão à regra de três simples, sobretudo nas questões do nível *ler entre os dados*. Embora o recurso às proporções, enquanto igualdade de duas razões, torne mais explícito o raciocínio proporcional, a maior ênfase dada à regra de três simples nas aulas, muito provavelmente, fez com que eles adotassem tal regra nas suas resoluções.

Refira-se ainda a possibilidade de o fraco desempenho dos alunos na leitura e interpretação de gráficos estatísticos ter também origem no próprio ensino da Estatística por que passaram, como referem Fernandes, Carvalho e Ribeiro (2007). Nesse estudo, envolvendo três turmas do 7° ano de escolaridade, constatou-se que as três professoras participantes no estudo desenvolviam um questionamento centrado apenas nos dois primeiros níveis de Curcio.

Em relação às tarefas que se realizam na sala de aula, Curcio (1989) recomenda que elas devem permitir aos alunos interpretar gráficos e devem incluir questões que envolvam diferentes níveis de compreensão. De entre os diferentes níveis de compreensão, uma atenção especial no ensino deve ser dada aos níveis *ler entre os dados* e *ler além dos dados* uma vez que foi neles que os alunos revelaram mais dificuldades, no primeiro caso devido às exigências matemáticas, apesar de ser frequentemente tratado na sala de aula (Friel et al., 2001) e, no segundo caso, por ser menos frequentemente abordado na sala de aula.

Assim, para os alunos melhorarem as capacidades de leitura e interpretação de gráficos, devemos pedir-lhes que falem e escrevam sobre os gráficos, o que lhes permite clarificar e partilhar as suas ideias, bem como solicitar-lhes que façam inferências a partir da representação do gráfico com a finalidade de interpretar os dados.

Referências

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension: elementary and middle school activities*. Reston, VA: NCTM.

Doig, B. & Groves, S. (1999). Putting meaning behind bars: Children´s interpretations of bar graphs. *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*, Melbourne, Australia, November 29–December 2, 1999. Consultado em Maio 15, 2010, em http://www.aare.edu.au/99pap/gro99317.htm

Fernandes, J, A., Carvalho, C. & Ribeiro, S. (2007). Caracterização e implementação de tarefas de Estatística: um exemplo no 7° ano de escolaridade. *Revista Zetetiké*, 15(28), 27–61.

Friel, S., Curcio, F. & Bright, G. (2001). Making Sense of Graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124–158.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), pp. 1–25.

GAVE (n.d.). Banco de Itens. Consultado em setembro 10, 2009, em http://bi.gave.min-edu.pt/bi/3eb/802/.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Monteiro, C. & Selva, A. C. V. (2001). Investigando a atividade de interpretação de gráficos entre professores do ensino fundamental. *Anais da XXIV Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, Caxambu, Brasil. Consultado em Setembro 20, 2010, em http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/investigando.pdf.

Morais, P. C. (2011). *Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9° ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Eds.) *Second Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957–1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Paula Cristina Morais
Agrupamento de Escolas de Cabeceiras de Basto

José António Fernandes
Universidade do Minho

À volta da mesa ou como resolver problemas de probabilidades

José Paulo Viana

Quase todos os problemas de probabilidades podem ser resolvidos de várias maneiras diferentes, resultantes de abordagens ou formas de raciocinar diferentes. Como, perante um problema, o objetivo é chegar à solução, é evidente que todos esses processos de resolução são bons. No entanto, alguns deles podem ser mais vantajosos do que outros por cinco motivos:

- envolvem raciocínios mais simples ou menos rebuscados,
- têm menos cálculos ou passagens intermédias;
- são mais fáceis de perceber (por quem ouve ou lê);
- são mais fáceis de explicar (por quem ensina);
- permitem generalizações e posterior aplicação a outros problemas.

O que nos propomos aqui fazer é, perante cada problema, vermos diferentes formas de o abordar, analisar diferentes estratégias e discutir as suas vantagens e inconvenientes.

Questões prévias

- Se quisermos usar a lei de Laplace, devemos começar sempre por calcular o número de Casos Possíveis (CP). Depois, para determinar o número de *Casos Favoráveis* (CF), é obrigatório seguir o mesmo método usado para o cálculo dos casos possíveis.
- Quando empregamos o cálculo combinatório, é muitas vezes possível seguir duas vias diversas: tendo em conta a ordem (arranjos) ou não (combinações).
- Em vez de usarmos a Lei de Laplace, pode ser conveniente subdividir o problema, aplicando a Lei do Produto (primeiro tem de acontecer isto, depois aquilo, etc.).
- Há várias situações onde, em vez de calcular a probabilidade pedida, pode ser mais fácil determinar a probabilidade do acontecimento contrário.

Ponto de Partida

Oito amigos (Ana, Brás, Carla, Dinis, Eva, Filipe, Graça e Hugo) vão jantar juntos. A mesa do jantar é retangular, com quatro lugares de cada lado, e os lugares vão ser distribuídos ao acaso (figura 1).

Podemos começar por determinar de quantas maneiras diferentes se podem sentar à mesa estas oito pessoas, ou seja, calcular o número de casos possíveis para uma situação genérica. Como são oito amigos (diferentes entre si), temos:

$CP = 8! = 40320$

No entanto, como veremos, há problemas em que nem sempre é preciso trabalhar com estes casos todos, ou porque não interessam todas as pessoas ou porque não interessam todos os lugares.

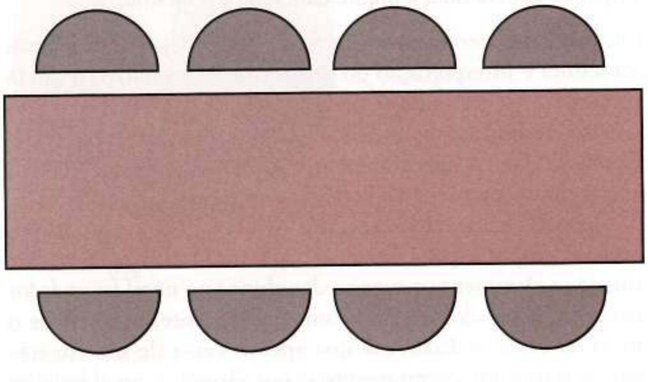


Figura 1

Problema 1.—Qual é a probabilidade de a Graça e o Hugo ficarem um em frente ao outro?

1º Método

Tendo toda a gente em conta, temos:

$CP = 8! = 40320$

Para os casos favoráveis, há 8 lugares possíveis para a Graça, 1 para o Hugo (em frente a ela), e os restantes amigos podem trocar entre si.

$CF = 8 \times 1 \times 6! = 5760$

Probabilidade pedida $= 5760/40320 = 1/7$

2º Método

Não precisamos de considerar as oito pessoas. Só nos interessam a Graça e o Hugo, as outras seis irão ficar nos lugares que sobram.

$CP = 8 \times 7 = 56$ porque a Graça tem 8 lugares disponíveis e o Hugo 7 (ou ${}^{8}A_2$ porque eles vão ocupar 2 dos 8 lugares, interessando a ordem).

$CF = 8 \times 1$ (a Graça tem 8 possibilidades e depois o Hugo já só tem uma, em frente a ela).

Probabilidade pedida $= 8/56 = 1/7$.

3º Método

Vamos pensar apenas nos dois lugares que eles vão ocupar, não interessando a ordem com que eles os ocupam (isto é, não nos preocupando em qual dos dois lugares se irá sentar a Graça):

$CP = {}^{8}C_2 = 8 \times 7/2 = 28$.

$CF = 4$ (4 pares de lugares frente a frente).

Probabilidade pedida $= 4/28 = 1/7$.

4º Método

Pode ser feito mentalmente, sem cálculos, «sentando» uma pessoa de cada vez.

A Graça pode ficar num lugar qualquer, porque todos são equivalentes entre si (os lugares são do mesmo tipo, visto que cada uma das cadeiras tem outra em frente). Dos 7 lugares que restam para o Hugo, só um é em frente ao da Graça, logo:

Probabilidade pedida = 1/7.

Como vemos, estão aqui quatro maneiras diferentes de resolver o problema (todas boas, claro, e portanto aceitáveis), mas a quarta é a mais «simples». Nas aulas, é provável que os alunos cheguem à solução seguindo diversas vias. Depois, valerá então a pena apresentá-las todas para que eles se apercebam da variedade de raciocínios, se habituem aos vários métodos de resolução e, eventualmente, escolham o que melhor se adapte à sua forma de pensar.

Problema 2.—Qual é a probabilidade de a Eva e o Filipe ficarem um ao lado do outro?

Dos vários processos de resolução, vejamos dois.

1º Método

No Problema 1, o último método era o mais simples, mas agora, para «sentarmos» uma pessoa de cada vez, temos de ter cuidado. É que os lugares são diferentes: os quatro das pontas só têm um vizinho, os quatro do meio têm dois. A Eva pode ficar na ponta, com probabilidade 1/2 (e para o Filipe já só serve um dos 7 lugares que restam), ou no meio, com igual probabilidade (e para o Filipe serve 2 dos 7 lugares).

Probabilidade pedida = $(1/2)\times(1/7)+(1/2)\times(2/7)=3/14$

2º Método

Pensando apenas nos dois lugares que eles vão ocupar, não nos interessando se o Filipe fica à esquerda ou à direita da Eva:

$CP = {}^8C_2 = (8\times 7)/2 = 28$.

Numerando os lugares de 1 a 4 de um lado e de 5 a 8 do outro, os seis casos favoráveis são 1–2, 2–3, 3–4, 5–6, 6–7 e 7–8.

Probabilidade pedida = 6/28 = 3/14.

Problema 3.—Qual é a probabilidade de nenhum rapaz ficar sentado ao lado de outro?

Dos vários métodos, o mais simples parece ser considerar apenas os quatro lugares que vão ser ocupados por rapazes, independente da ordem (depois, as raparigas ocuparão os lugares que sobrarem).

$CP = {}^8C_4 = 70$.

Os rapazes, para estarem separados, vão ter de ficar dois de um lado da mesa e dois do outro. De um lado da mesa há três possibilidades: 1–3, 1–4 e 2–4. A cada uma destas possibilidades correspondem outras três do outro lado: 5–7, 5–8 e 6–8.

$CF = 3\times 3 = 9$

Probabilidade pedida = 9/70.

Problema 4.—O Brás e o Dinis estão de relações cortadas e portanto não querem ficar nem lado a lado nem frente a frente.

Qual é a probabilidade de isso acontecer?

1º Método

Para «sentarmos» uma pessoa de cada vez, temos de ter cuidado porque os lugares não são todos equivalentes. Vamos considerar primeiro os lugares das pontas e depois os do meio. Se o Brás ficar numa ponta, há cinco lugares disponíveis para o Dinis, se ficar num do meio, há quatro.

Probabilidade pedida = $(1/2)\times(5/7)+(1/2)\times(4/7)=9/14$.

2º Método

Pensando apenas nos dois lugares que eles vão ocupar, sem considerar a ordem:

$CP = {}^8C_2 = 8\times 7/2 = 28$.

Há dez casos não favoráveis: 1–2, 1–5, 2–3, 2–6, 3–4, 3–7, 4–8, 5–6, 6–7 e 7–8. Logo os favoráveis são 18.

Probabilidade pedida = 18/28 = 9/14.

Problema 5.—Qual é a probabilidade de cada pessoa ter ao lado e em frente apenas pessoas do sexo oposto?

Se designarmos pelas letras A e B cada um dos sexos, as pessoas de um lado da mesa ficarão na forma ABAB e do outro lado BABA.

1º Método

Vamos considerar os oito amigos, logo CP = 40320.

Como os 4 rapazes podem trocar entre si (4!), as quatro raparigas também (4!), e em cada caso os rapazes podem trocar de posição com as raparigas, temos:

$CF = 4!\times 4!\times 2 = 1152$

Probabilidade pedida = 1152/40320 = 1/35

2º Método

Vamos sentar uma pessoa de cada vez, partindo de uma ponta. No 1.º lugar, serve qualquer uma das 8 pessoas. No 2.º, das 7 restantes servem 4. No 3.º, das 6 que restam servem 3. No 4.º, das 5 servem 3, e assim sucessivamente.

Probabilidade pedida = $(4/7)\times(3/6)\times(3/5)\times(2/4)\times$
$\times(2/3)\times(1/2)\times(1/1)=1/35$.

A situação complica-se

Agora, aos oito amigos juntaram-se mais dois, a Isabel e o Jorge, e a mesa é circular (figura 2).

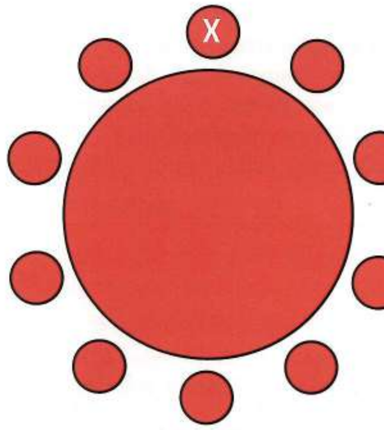


Figura 2

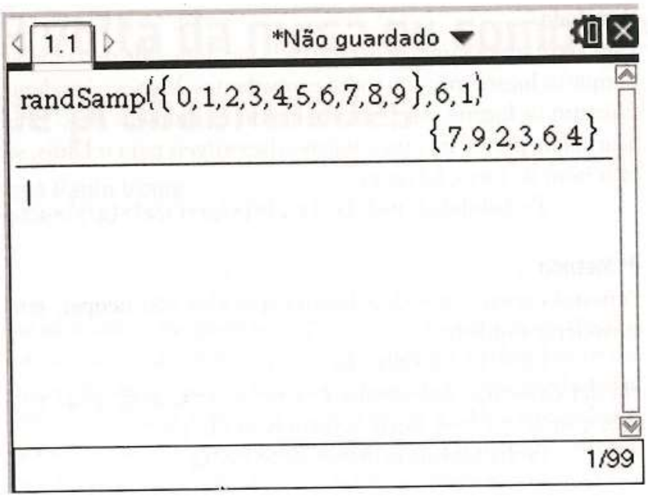


Figura 3

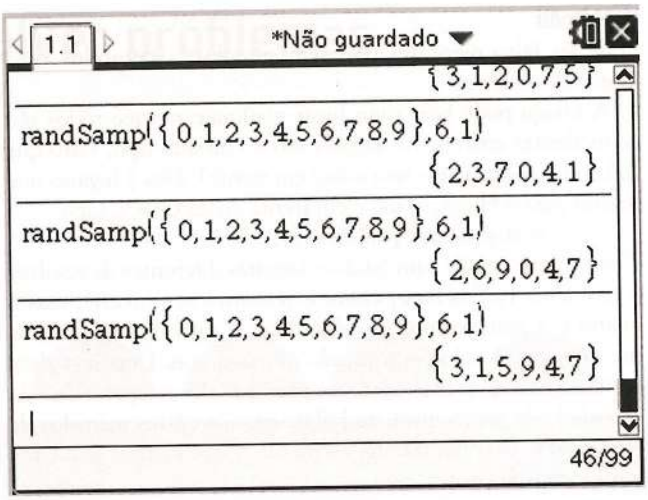


Figura 4

Problema 6.—De quantas maneiras diferentes se podem sentar os dez amigos à mesa?

Não há uma resposta única para esta formulação da pergunta. Imaginemos que as pessoas, que representaremos pelas iniciais dos respetivos nomes, se colocam a partir do lugar assinalado com «x» e no sentido do movimento dos ponteiros do relógio.

O caso ABCDEFGHIJ será diferente de BCDEFGHIJA?

Depende.

Se os lugares não forem todos semelhantes — por exemplo, se estivermos no inverno e «x» for a cadeira mais perto da lareira — no primeiro caso é a Ana que está mais quentinha, no segundo é o Brás. Nesta situação, o número de casos possíveis é $CP = 10! = 3628800$.

Se os lugares forem todos do mesmo tipo, ter ABCDEFGHIJ ou ter BCDEFGHIJA é a mesma coisa, basta rodar a mesa de um lugar. Agora, para determinar o número de casos possíveis, podemos fixar uma das pessoas ao lugar «x» e considerar apenas as outras. Assim, $CP = 9! = 362880$.

Problema 7.—Qual é a probabilidade da Ana não ficar nem ao lado da Carla nem do Dinis?

Das várias estratégias possíveis, a que parece mais rápida e simples é «sentar» estas três pessoas, uma de cada vez, e pela ordem que estão no enunciado. A Ana pode ficar num lugar qualquer. Para a Carla, servem 7 dos 9 lugares restantes, para o Dinis servem 6 dos 8 que sobram. Então:

$$\text{Probabilidade pedida} = (7/9) \times (6/8) = 7/12.$$

Problema 8.—Numeraram-se os lugares, de 1 a 8, e colocaram-se num saco oito papelinhos com os mesmos números. A primeira pessoa a tirar um papel foi o Jorge, seguindo-se a Isabel, o Hugo e a Graça. Qual é a probabilidade de a Isabel ficar longe da Graça e do Jorge?

Se quisermos resolver o problema colocando as pessoas nos lugares pela ordem com que o sorteio foi feito, iremos ter grandes dificuldades. Depois de colocada a primeira pessoa, os lugares deixam de ser equivalentes: uns têm dois vizinhos livres, outros têm só um.

Repare-se, no entanto, que à partida, qualquer que seja a ordem do sorteio, a probabilidade de a Isabel ficar longe da Graça e do Jorge é sempre a mesma. Não há qualquer razão para que esta probabilidade seja diferente caso se comece pelo Jorge ou pela Ana ou por qualquer outro.

Portanto, este problema é idêntico ao anterior e a probabilidade pedida é $7/12$.

Nota: como alguns alunos têm dificuldade em notar que as probabilidades de um acontecimento são independentes da ordem pela qual o sorteio é feito, vale por isso a pena confrontá-los com questões deste tipo.

Problema 9.—A Ana é namorada do Brás, a Carla namora com o Dinis. Qual é a probabilidade de os namorados ficarem sentados lado a lado?

Podemos seguir uma estratégia mista.
Comecemos pela Ana e pelo Brás. A Ana pode ficar em qualquer lugar, para o Brás só servem 2 dos restantes 9. A probabilidade de ficarem juntos é $2/9$.

Podemos imaginar que eles ficaram sentados um ao lado do outro nos lugares 9 e 10, sobrando 8 lugares para o outro par. O número de casos possíveis para esse par é $CP = {}^8C_2 = 8 \times 7/2 = 28$. Os casos favoráveis são sete (1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–6, 6–7 e 7–8). A probabilidade do par ficar junto é $7/28$ ou $1/4$.

$$\text{Probabilidade pedida} = (2/9) \times (1/4) = 1/18.$$

Problema 10.—Qual é a probabilidade de a Carla ficar longe do Dinis e a Ana ao lado do Brás?

Se começarmos por sentar a Carla e o Dinis, tudo se complica (mas é possível ...). É muito mais fácil sentar a Ana e o Brás juntos (a probabilidade é $2/9$, como vimos).

Para os outros dois, sobram 8 lugares, pelo que $CP = {}^8C_2 = 8 \times 7/2 = 28$. Agora, os casos não favoráveis são 7, como vimos no problema anterior, logo $CF = 28 - 7 = 21$.

Probabilidade pedida = (2/9) × (21/28) = 1/6.

Problema 11.—O Filipe quer ficar longe do Jorge, a Eva longe do Hugo. Qual é a probabilidade de isto acontecer?

Um Método Errado

A probabilidade do Filipe ficar longe do Jorge é 7/9.
A probabilidade da Eva ficar longe do Hugo é 7/9.

Probabilidade pedida = (7/9) × (7/9) = 49/81 ≈ 0,6049.

O que está errado nesta resolução?

Realmente, à partida, a probabilidade do Filipe ficar longe do Jorge é 7/9 e a probabilidade da Eva ficar longe do Hugo é também 7/9. Só que os dois acontecimentos não são independentes e portanto as probabilidades não se podem multiplicar.

1° Método (correto)

A probabilidade do Filipe ficar longe do Jorge é 7/9.

Para Eva e Hugo, há 8 lugares disponíveis, logo CP = $^8C_2$ = = 8×7/2 = 28. Imaginemos que o Filipe ficou no lugar 10. O Jorge estará num dos lugares, do 2 ao 8. Será que a posição do Jorge influencia o número de casos favoráveis? Vamos ver que não.

Se o Jorge estiver na posição 2, a situação é

1–J–3–4–5–6–7–8–9–F.

Para o par Eva-Hugo separado temos:

1 com 3 a 9 (7 casos);
3 com 5 a 9 (5 casos)
4 com 6 a 9 (4 casos)
5 com 7 a 9 (3 casos)
6 com 8 a 9 (2 casos)
7 com 9 (1 caso)

Total = 7+5+4+3+2+1 = 22

Se o Jorge estiver na posição 3, a situação é

1–2–J–4–5–6–7–8–9–F.

Seguindo o mesmo processo, teremos para o par Eva-Hugo separado:

Total = 6+6+4+3+2+1 = 22

E o mesmo aconteceria nas outras posições do Jorge, logo a probabilidade de a Eva e o Hugo ficarem separados é 22/28.

Probabilidade pedida = (7/9) × (22/28) = 11/18 ≈ 0,6111.

Relembre-se que este é o valor correto, embora bastante próximo do obtido anteriormente (0,6049).

2.° Método

É muito fácil chegar à solução utilizando a probabilidade do acontecimento contrário e os resultados dos problemas anteriores.

Do problema 9, sabemos que P(Perto–Perto) = 1/18.

Do problema 10, sabemos que P(Perto–Longe) = 1/6.

O acontecimento contrário de «Longe–Longe» é «Perto–Perto ou Perto–Longe ou Longe–Perto». Então:

P(Longe–Longe) = 1 − [P(Perto–Perto) + P(Perto–Longe) +
+ P(Longe–Perto)] = 1 − (1/18) − (1/6) − (1/6) = 11/18.

As complicações aumentam

Por vezes, o cálculo do valor teórico de uma probabilidade é muito difícil, complicado ou trabalhoso. Nesses casos, e se for possível, organiza-se um conjunto de simulações da experiência aleatória. Se o número de experiências for suficientemente «grande», podemos usar a Lei dos Grandes Números e obter um valor aproximado da probabilidade.

Problema 12.—O Filipe quer ficar longe do Jorge, a Eva longe do Hugo, e a Isabel longe da Carla. Qual é a probabilidade de isto acontecer?

Se o problema 11 já tinha sido um pouco complicado, agora a situação é muito mais difícil de analisar (embora não impossível, claro). Então, uma boa estratégia é criar uma simulação da situação que seja fácil e rápida de executar. Isto é relativamente simples com as tecnologias atualmente disponíveis.

Vamos usar uma TI–Nspire. Abrimos a máquina numa página de *Calculadora*. Vamos ao *Menu* e fazemos *5:Probabilidades*, *4:Aleatório*, *5:Amostra*. O comando *randSample* permite, a partir de uma lista de elementos, obter uma amostra aleatória de dimensão escolhida. A nossa lista será constituída pelos números de 0 a 9 (que têm de ficar separados por vírgulas e o conjunto todo entre chavetas), que representam os lugares à volta da mesa. A dimensão da amostra vai ser de 6, que serão os lugares ocupados pelas seis pessoas referidas no enunciado (o 1.° número indica o lugar do Filipe, o 2.° o do Jorge, e assim sucessivamente). Acrescentamos «,1» para indicar que queremos uma amostra sem repetição.

No exemplo da figura 3, o par Filipe-Jorge está longe (nos lugares 7 e 9), tal como o par Isabel-Carla (lugares 6 e 4), mas o par Eva-Hugo está lado a lado (lugares 2 e 3).

Cada vez que fizermos *Enter*, aparece uma nova amostra. É aconselhável fazer *Enter* quatro vezes seguidas e só então registar os resultados porque assim desaparecem os resultados anteriores e há menos risco de erros. No registo dos resultados, pomos um tracinho em «Sim» se os pares ficarem todos afastados ou um tracinho em «Não» se houver pelo menos um par junto. Não esquecer que o lugar 0 tem como vizinhos o 1 e o 9.

Por exemplo, as quatro simulações da figura 4, correspondem respetivamente a *Sim* (aparecem os lugares 1 e 2 seguidos mas não correspondem ao mesmo par), *Não* (par 2-3), *Não* (par 9-0) e *Sim*.

Se estivermos numa turma de 28 alunos e cada um fizer 60 simulações, não demora muito tempo e obtemos um total de 1680, que é já um número razoável.

Resolvemos levar isto à prática e, em 1400 experiências, os três pares ficaram afastados 682 vezes. Isto corresponde à frequência 682/1400 ≈ 0,487.

É então de esperar que a probabilidade procurada esteja próxima deste valor. Se calcularmos o intervalo de confiança a 95% para esta experiência, vemos que a probabilidade deverá estar situada entre 0,461 e 0,513.

Por curiosidade, calculámos (com bastante trabalho e um certo risco de enganos ...) o valor exato da probabilidade. Obtivemos 61/126 ≈ 0,4841.

Para finalizar

Como se viu, existem muitas e diferentes formas de abordar um problema de probabilidades. Cada uma delas tem vantagens e desvantagens, que podem variar de uma situação para outra. Ou seja, um método pode funcionar muito bem num problema mas tornar-se difícil e complicado noutro. No nosso trabalho como professores, parece-nos importante ir familiarizando os alunos com estes factos de modo a que, perante um problema novo, consigam analizá-lo e escolher o método mais adequado. Além disso, em vez de decorar receitas, os alunos habituam-se a relacionar conhecimentos anteriores e a integrá-los na questão que têm de resolver. E não há nada melhor que esta ginástica mental.

José Paulo Viana
Escola Secundária de Vergílio Ferreira

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

As sandes

A seguinte proposta de tarefa foi inspirada numa aula de mestrado lecionada pela professora Cecilia Monteiro que vivenciei enquanto aluna. A proposta tem por objetivo discutir a importância da forma como a informação é apresentada. Destina-se a alunos do 2.º ciclo, mas pode igualmente ser aplicada noutros ciclos. A partir de uma situação familiar aos alunos (a festa de anos) pretende-se explorar a importância das representações selecionadas e a(s) mais valia(s) associada(s) a cada caso.

A tarefa deve ser distribuída a cada grupo de alunos de forma a que todos tenham a introdução da tarefa, mas cada grupo tenha apenas umas das representações dos dados apresentadas sem ter conhecimento de que os colegas possuem uma representação diferente da sua. De seguida, devem ser colocadas algumas questões que irão permitir salientar as diferenças entre as diversas representações disponibilizadas aos grupos. (Ver tabela 1.)

Após estas questões, de certo que alguns alunos irão ficar certamente apreensivos quanto ao facto de alguns grupos terem demorado muito mais tempo do que outros a lhes conseguir dar resposta, agravado pelo facto de alguns grupos não terem sido capazes de dar resposta a algumas das questões, enquanto que outros colegas foram capazes de o fazer sempre. Nesse momento devem ser mostradas todas as representações distribuídas e deve ser promovida uma discussão sobre o tipo de representação e as questões que, associadas a cada representação, são possíveis de ser respondidas de forma mais direta. Poder-se-á organizar essa informação numa tabela como a tabela 1.

Por uma questão de organização deste espaço, apresentamos todas as representações na mesma página, devendo o professor cuidar que cada grupo tenha apenas a introdução e uma das representações. Também é possível dar a ficha com todas as representações a cada grupo e, na fase de questionamento, deixar que sejam os alunos a encontrar a representação que melhor responde ao pedido – no entanto, o impacto causado nos alunos será bastante diferente.

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

Tabela 1

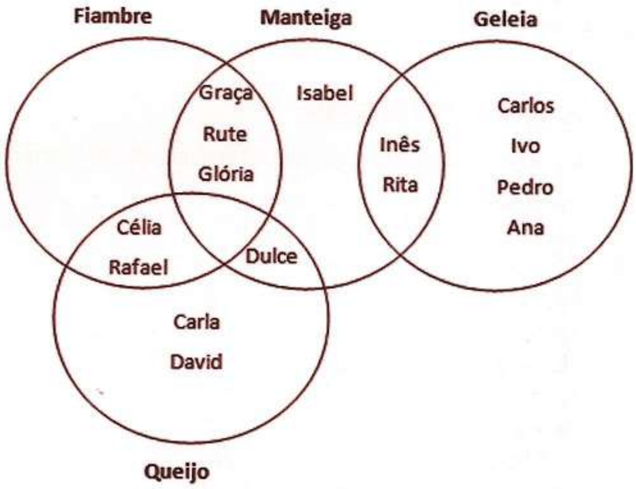
Questões	Texto	Tabela de frequências	Gráfico de barras	Diagrama de Venn
Quantos amigos da Maria vão à festa?	Possível Lento	Possível Rápido	Possível Médio	Possível Médio
Quantas são as sandes que contêm manteiga?	Possível Lento	Possível Médio	Possível Médio	Possível Rápido
Qual a sandes preferida pela maioria dos amigos da Maria?	Possível Lento	Possível Rápido	Possível Rápido	Possível Rápido
Quantos são os amigos da Maria que preferem sandes com geleia?	Possível Lento	Possível Médio	Possível Médio	Possível Rápido
Qual(is) a(s) sandes menos preferida(s) pelos amigos da Maria?	Possível Lento	Possível Rápido	Possível Rápido	Possível Rápido
Quem são os amigos da Maria que preferem sandes apenas com geleia?	Possível Lento	Impossível	Impossível	Possível Rápido

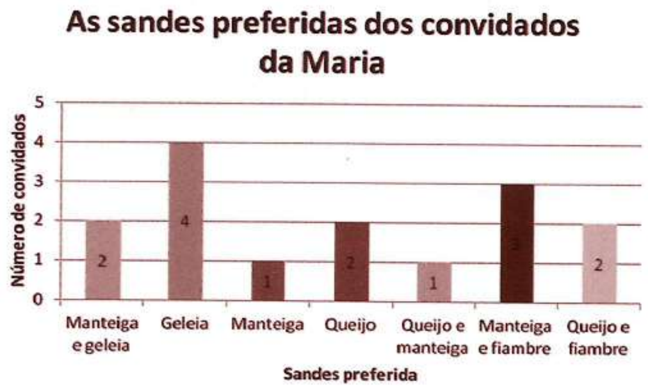
As sandes

Para a sua festa de aniversário a Maria decidiu convidar os colegas da escola e os restantes amigos para irem lanchar a sua casa. A mãe pediu-lhe que soubesse qual a sandes preferida dos seus convidados. Abaixo encontra-se o registo efetuado pela Maria relativamente à informação que recolheu sobre as preferências dos seus amigos.

A Inês e a Rita preferem sandes com manteiga e geleia e o Carlos prefere-as somente com geleia, assim como o Ivo, o Pedro e a Ana. A Isabel prefere só com manteiga. No entanto, a Carla e o David escolhem-nas apenas com queijo e a Dulce com queijo e manteiga. A Graça, a Rute e a Glória têm um fraco por sandes com manteiga e fiambre, enquanto que a Célia e o Rafael têm um gosto especial em misturar queijo e fiambre.

Os ingredientes preferidos





Ingredientes preferidos	Número de pessoas
Manteiga e geleia	2
Geleia	4
Manteiga	1
Queijo	2
Queijo e manteiga	1
Manteiga e fiambre	3
Queijo e fiambre	2
Total	15

Responde às seguintes questões

Quantos amigos da Maria vão à festa?

Quantas são as sandes que contêm manteiga?

Qual a sandes preferida pela maioria dos amigos da Maria?

Quantos são os amigos da Maria que preferem sandes com geleia?

Qual(is) a(s) sandes menos preferida(s) pelos amigos da Maria?

Quem são os amigos da Maria que preferem sandes apenas com geleia?

Piquenique nas lagoas

A família Barbosa e a família Cruz resolveram fazer um piquenique nas lagoas de Bertiandos. Quando chegaram ao local combinado, cada homem cumprimentou os homens da outra família com um aperto de mão e as mulheres com um beijo. Cada mulher trocou um beijo com as mulheres da outra família.

Deram-se 35 apertos de mão e trocaram-se 86 beijos.

Quantos homens lá estavam? E mulheres?

Quantos elementos tinha cada família?

(Respostas até 19 de fevereiro, para zepaulo46@gmail.com)

A correr à volta do campo

O problema proposto no número 118 de Educação e Matemática foi o seguinte:

Ao passar junto do campo de jogos da minha escola, vi que uma das minhas turmas estava a ter aula de Educação Física e fiquei parado a observar. A certa altura, a Ema e o João começaram a correr à volta do campo, em direções opostas e sempre à mesma velocidade. Cruzaram-se a primeira vez mesmo ao pé de mim, a segunda vez junto de uma baliza, a terceira perto de uma bola abandonada e a quarta novamente ao pé de mim.

Qual é a relação entre as velocidades da Ema e do João? Pergunta adicional (para os mais entusiastas): E se fosse apenas no sexto cruzamento que eles voltassem a cruzar-se comigo?

Recebemos 5 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Edgar Martins (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Sérgio Rosa (Pinhal Novo). A quantidade de resoluções foi pequena, mas a qualidade foi alta, como se irá ver.

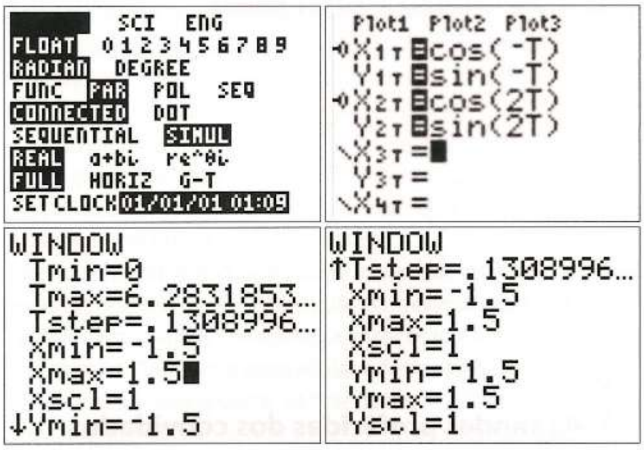
À primeira pergunta, é possível responder sem fazer cálculos (e foi assim que todos lá chegaram). Entre dois cruzamentos sucessivos, a distância total percorrida pelos dois corredores é equivalente a uma volta completa. Demos a palavra ao Alberto:

Como o 1º e o 4º cruzamento se dão no mesmo local, a Ema e o João cruzaram-se 3 vezes, o que significa que percorreram 3 perímetros do campo (e cada um deles um número inteiro de perímetros). Portanto, um deles percorre 2 perímetros e o outro 1 perímetro no mesmo intervalo de tempo. Logo um deles tem o dobro da velocidade do outro.

O Sérgio explicita:

Neste caso não haverá outra possibilidade a não ser que eles se encontrem sucessivamente a: 1/3 (2º vez); 2/3 (3º vez); 3/3 (4º vez) de uma volta, para o caso da Ema e 2/3 (2º vez) ; 4/3 (3º vez) ; 6/3 (4º vez) de uma volta, para o caso do João, ou seja duas voltas.

A Graça raciocina da mesma forma e constrói mesmo duas belas simulações visuais da situação, uma com o Geometer's Sketchpad, outra usando uma TI-84. Eis as instruções para esta última. Vale a pena ver!



Pergunta adicional

Depois do 1º cruzamento, eles voltaram a cruzar-se 5 vezes e por isso, no total, deram cinco voltas ao campo. Se representarmos o número de voltas de cada um deles pela respetiva inicial, temos:

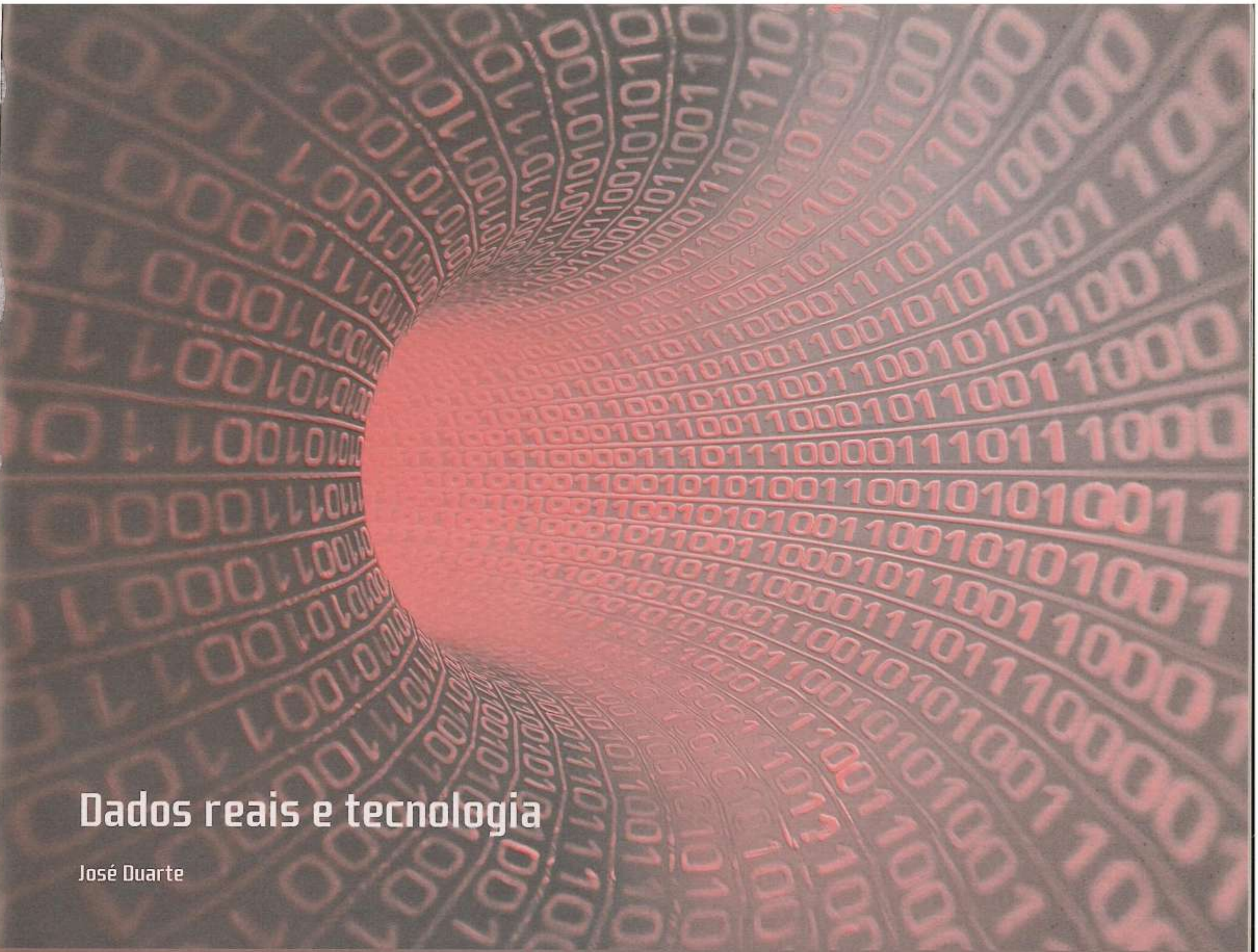
$E + J = 5$

Como E e J são inteiros (cada um começa e acaba no mesmo ponto do campo), as possibilidades são

$1 + 4$ ou $2 + 3$

A relação entre as velocidades pode portanto ter dois valores: 4/1 ou 3/2.

O Alberto e o Sérgio vão ainda mais longe e generalizam o problema para qualquer número de cruzamentos entre duas passagens simultâneas pelo mesmo ponto. Por exemplo, se a passagem pelo local do observador se desse aos 1º e 13º cruzamentos, eles teriam dado um total de 12 voltas. Seria E+J=12 mas só servem as soluções em que E e J sejam primos entre si (caso contrário a fração simplifica-se). Há então apenas duas soluções, com a relação entre as velocidades a poder ser 11/1 ou 7/5.



Dados reais e tecnologia

José Duarte

O acesso a dados reais através das bases de dados

Desde o início da escolaridade que o programa de Matemática do ensino básico, no que diz respeito a OTD, refere a importância de recolher, ler, organizar e interpretar dados (1.º ciclo), compreender e produzir informação estatística com vista à tomada de decisões (2.º ciclo) e conduzir estudos estatísticos, formulando questões, planeando a recolha e a representação de dados, com vista à tomada de decisões informada e argumentada (3.º ciclo). No ensino secundário, o trabalho em Estatística aprofunda o que foi realizado anteriormente, acentuando o desenvolvimento da capacidade de análise crítica dos dados e suas representações, com vista a fornecer aos alunos ferramentas de análise e desenvolver capacidades de argumentação informada face a afirmações e informações com que se confronta no quotidiano, nomeadamente através dos *media*.

Nos últimos anos desenvolveram-se, principalmente através de *sites* na Internet, conjuntos de bases de dados nacionais e internacionais que constituem um enorme manancial de informação colocada à disposição de todos os utilizadores. Essa informação é hoje um capital de grande importância na vida das empresas para identificarem tendências e desenharem cenários de evolução e desenvolvimento. Também a educação, com o acesso progressivo a computadores e à Internet, pode beneficiar destes recursos em situação de sala de aula, permitindo que os alunos sejam confrontados com dados reais, suscetíveis de fornecer contextos significativos para trabalhos e projetos, ponto de partida para boas e desafiantes tarefas matemáticas.

O portal do Instituto Nacional de Estatística (INE)

O portal do INE (www.ine.pt) apresenta um extenso repositório de dados estatísticos em permanente atualização, relativos a diferentes variáveis e indicadores como a população residente, o número de alojamentos ou a taxa de desemprego. Também oferece o acesso a *Publicações*, como o *Boletim Mensal de Estatística*, onde pode encontrar dados estatísticos mensais e trimestrais organizados por temas como a população e condições sociais, a agricultura, a indústria, o comércio ou os serviços.

Recentemente ficaram disponíveis os resultados preliminares do Recenseamento da População e Habitação de 2011 (Censos 2011), em todas as unidades estatísticas (indivíduos, famílias,

› Incluir/retirar indicadores › Alterar condições de seleção › Alterar formato do quadro › Visualizar quadro › Visualizar gráfico

Local de residência	População residente (N.º) por Local de residência e Sexo; Decenal (1) — Período de referência dos dados — 2011 — Sexo		
	HM	H	M
	N.º	N.º	N.º
Portugal	10 561 614	5 047 387	5 514 227
Continente	10 047 083	4 799 593	5 247 490
Região Autónoma dos Açores	246 746	121 533	125 213
Região Autónoma da Madeira	267 785	126 261	141 524

População residente (N.º) por Local de residência e Sexo; Decenal - INE, Censos - séries históricas

Nota(s):

(1) Dados Provisórios

Última atualização destes dados: 07 de dezembro de 2011

Figura 1. Quadro da população residente (INE, 2011)

alojamentos e edifícios) das diferentes zonas geográficas em que se encontra dividido o país (NTUS).

Por exemplo, em População residente pode visualizar um quadro com dados por região e por sexo (figura 1).

No entanto esta informação não é estática, pois nela pode incluir outros indicadores (por exemplo, o número de alojamentos), alterar as condições de seleção (por exemplo, selecionando algumas regiões ou algum período de tempo, em particular) ou visualizar um gráfico que ainda pode personalizar (formato, eixos e legenda).

Mas não fica por aqui: estes dados podem ser exportados diretamente para formato Excel e, em seguida, editados na folha de cálculo. Da mesma forma, os gráficos podem ser também exportados por este processo ou em formato de imagem (JPG ou PDF). Note que, quando edita na folha de cálculo um ficheiro de dados importado do INE, ele integra duas folhas: a folha com o quadro de dados e uma folha de metainformação que contém informação específica acerca dos dados (conceitos envolvidos, amostra, processo de recolha, etc.).

A base de dados PORDATA

Outro site de referência que oferece um conjunto significativo de dados estatísticos reais é a PORDATA (www.pordata.pt), uma base de dados sobre Portugal, organizada pela Fundação Francisco Manuel dos Santos (Figura 2). Aqui pode encontrar dados globais sobre Portugal e cada um dos seus municípios, mas também a possibilidade de os comparar com dados de outros países europeus, organizados por temas como população, educação, saúde, emprego, ambiente e território e ciência e tecnologia.

Em cada um desses temas, pode ainda aceder a um conjunto de subtemas. Por exemplo, em *Educação* pode escolher *Escolaridade da população*, *Alunos matriculados no ensino superior* ou *Despesas com a Educação*, só para referir alguns exemplos. Se no tema *População*, escolher *Óbitos e Esperança de vida*, tem ainda acesso a um conjunto e categorias de informação como *Esperança de vida à nascença por sexo*, *Óbitos por algumas causas de morte por 100.000 habitantes* ou *Taxa bruta de mortalidade e taxa de mortalidade infantil*.

Se aceder a qualquer destas categorias como, por exemplo, *Esperança de vida à nascença por sexo*, surge um quadro como na figura 3.

Esse quadro pode ser personalizado de acordo com as suas necessidades, introduzindo mais anos ou removendo anos que não pretende, introduzindo as variações em valor absoluto ou percentual, de ano para ano ou a partir de um ano que considere como base de comparação (índice 0), e visualizando a informação sob a forma de gráficos estáticos ou dinâmicos. Nestes últimos pode selecionar diferentes tipos de gráficos e escalas, assim como introduzir variação na variável independente (por exemplo, ano) e visualizar o correspondente efeito. E tal como já acontecia com o portal do INE, os dados podem ser exportados em formato *xlsx* (para a folha de cálculo) ou *pdf*.

Mas, para além dos dois grandes portais de dados acima referidos (INE e PORDATA), existem hoje inúmeros *sites* que disponibilizam dados, focados sobre temáticas específicas como, por exemplo, as bases de dados dos Jogos Olímpicos (em http://www.databaseolympics.com ou http://jogos-olimpicos.terra.com.br), os sites sobre a liga americana de basquetebol NBA (em http://www.nba.com/ ou http://pt.global.nba.com/) ou a Agência Portuguesa do Ambiente (http://www.qualar.org).

Em resumo, longe vão os tempos em que tínhamos de inventar valores ou recolhê-los de um manual escolar, quantas vezes desatualizados ou despropositados, para os usar em tarefas de estatística na sala de aula. Hoje, as grandes bases de dados ou os *sites* de natureza temática permitem-nos aceder e trabalhar com dados reais e em tempo quase real, criando oportunidades ao professor para criar tarefas com sentido, suscetíveis de envolver os alunos em atividades significativas. Além do acesso aos dados em bruto, a própria tecnologia tem vindo a disponibilizar ferramentas e opções que permitem organizar, comparar

Figura 2. Página de entrada do site PORDATA (Portugal)

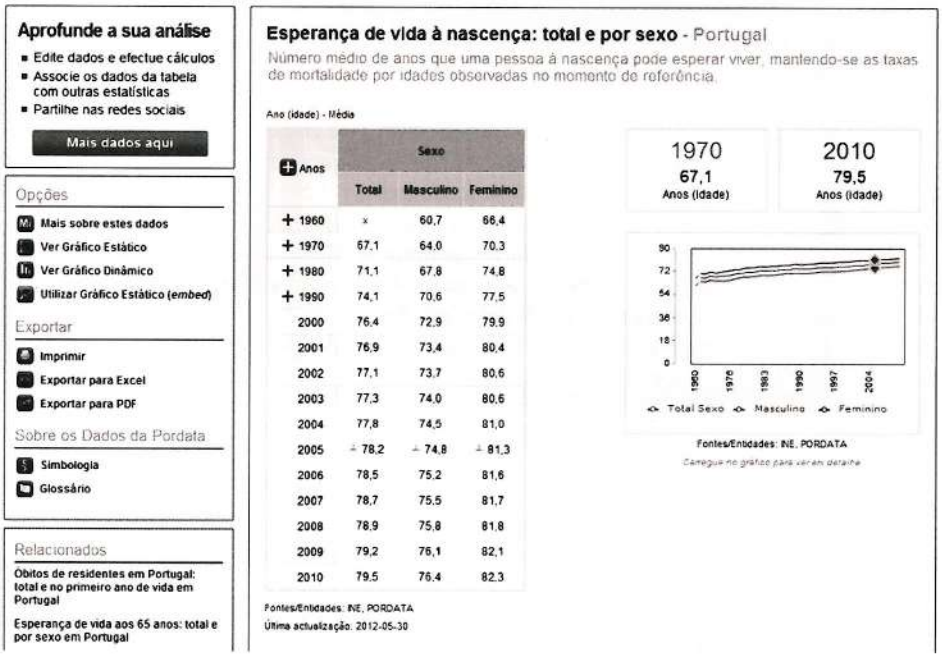


Figura 3. Quadro de dados do PORDATA que pode ser personalizado

e personalizar a informação apresentada, adequando a oferta às necessidades da procura e facilitando a análise e interpretação dessa mesma informação.

O acesso a dados reais através de questionários a distância

A própria turma pode oferecer um excelente contexto para aceder a dados reais dos alunos. Quantas vezes já solicitámos, através de recolha realizada em papel ou de um simples braço no ar, dados como idade, peso, opiniões sobre eventos, ou preferências culturais ou desportivas? Mas se quisermos alargar a amostra a todas as turmas de um ano de escolaridade ou a toda a escola, este processo é de todo desaconselhado. O mesmo se passa se quisermos aceder a dados de amostras não directamente acessíveis, como os elementos das equipas que participam num torneio, por exemplo, ou os alunos participantes numa excursão de finalistas.

Esse trabalho pode agora ser desenvolvido de forma eficaz com o recurso a tecnologia que permite a construção de formulários *on-line*. O *Google Docs* (em docs.google.com) é um dos serviços da denominada Web 2.0. que oferece essa possibilidade, desde que crie uma conta (grátis). Não há nada para instalar. Das várias opções que surgem, desde permitir carregar ou criar documentos e apresentações, apenas nos interessa, neste momento, uma: criar um formulário. Posso dar-lhe um

Figura 4. Questões do tipo escolha múltipla e selecionar a partir de uma lista

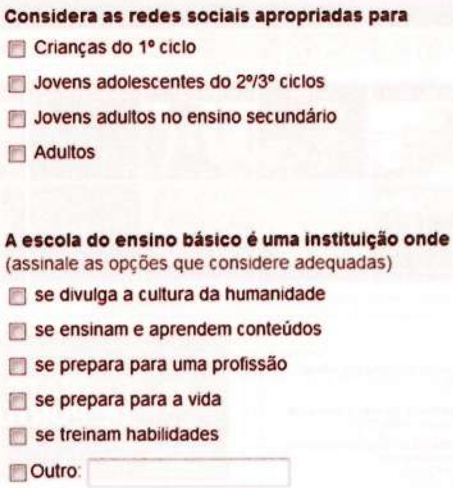


Figura 5. Questões do tipo caixa de verificação

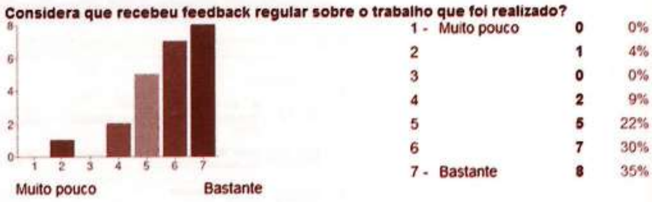


Figura 6. Exemplo de resumo da resposta a uma questão

ar mais profissional, escolhendo um tema (formato e fundo) e os dados recolhidos através das perguntas que formulo são simultaneamente adicionados a uma folha de cálculo (lida pelo Excel) e sobre os quais são gerados, de forma automática, gráficos e tabelas síntese da informação recolhida.

Como em todos os questionários, a dificuldade está nas perguntas a colocar e na forma de o fazer, face ao objetivo pretendido. O *Google Docs*, para a criação de formulários, permite sete diferentes tipos de perguntas. No entanto, por razões de espaço e de interesse, foco-me aqui apenas em três deles: *escolha múltipla*, *selecionar a partir de uma lista* e *caixas de verificação*.

Os tipos escolha múltipla e selecionar a partir de uma lista permitem que o respondente se posicione relativamente a uma e só uma das opções, como acontece por exemplo com a variável sexo ou com a variável idade (figura 4).

Como resultado, a soma dos totais parciais, em valor absoluto e em percentagem, dão respetivamente o total de respondentes (se a pergunta for de resposta obrigatória) e a percentagem de 100%.

Já no que respeita a uma pergunta do tipo *caixa de verificação*, o respondente pode optar por assinalar mais do que uma opção, o que tem implicações na análise dos resultados. É o que acontece, por exemplo, quando construímos perguntas que admitem mais do que uma escolha para a mesma pergunta, como é o caso dos dois exemplos abaixo (figura 5). As implicações são que provavelmente a soma do total de respostas, em todas as categorias, ultrapassa o número total das pessoas inquiridas (100%), o que requer cuidados nos comentários interpretativos relativos aos dados recolhidos.

Após todos os alunos da turma terem preenchido o formulário, no instante imediato pode aceder-se a todos os dados disponíveis numa folha de cálculo do *Google Docs* e a um resumo (*Formulário — Mostrar resumo das respostas*), em tabela e na forma de gráficos (figura 6), que a ferramenta gera de forma automática, permitindo uma primeira análise e discussão.

No entanto, os dados podem ser transferidos para o formato Excel (*Ficheiro — Transferir — Formato Excel*) e, na folha de cálculo, serem organizados de forma personalizada em tabelas e gráficos, de modo a melhor corresponderem aos objetivos do professor.

Se bem que esta recolha de dados tenha bastante valor, quando a amostra se encontra a distância e sempre que se quer preservar o anonimato, ela também pode ser usada para recolher dados na aula, quando exista acesso a computadores com ligação à Internet, pois permite uma rápida introdução dos dados e proporciona, de imediato, um primeiro tratamento da informação que até pode ser suficiente para os objetivos que o professor tenha em vista.

Representar e tratar dados reais com a tecnologia

Discutido o acesso a dados reais, na era da tecnologia, o professor decide o resto, talvez mesmo o essencial: o que fazer aos dados e como utilizar a tecnologia na organização, representação e apresentação da informação?

O tratamento de um grande volume de dados reais não dispensa o uso da tecnologia, pela diversidade de representações que proporciona, pela versatilidade na transição entre elas e pela facilidade no cálculo de medidas estatísticas. E essa tecnologia pode ser bem diversa, desde o *software* mais clássico, como a folha de cálculo ou as calculadoras gráficas, às *applets*, acessíveis mesmo a alunos bastante jovens.

Diagramas para caraterizar conjuntos de dados

As *applets* são ferramentas simples e adequadas para apoiarem objetivos específicos de aprendizagem e para ilustrarem conceitos relacionados com a caraterização de distribuições estatísticas. Os diagramas de caule e folhas e os diagramas de extremos e quartis são representações particularmente importantes para comparar duas distribuições, o que pode acontecer quando

	A	B	C
1	Esperança de vida à nascença, por ano e por sexo		
2		Idade	
3		Sexo	
4	Ano	Homens	Mulheres
5	1990	70,6	77,5
6	1991	70,6	77,6
7	1992	70,8	78
8	1993	71	78,2
9	1994	71,5	78,5
10	1995	71,8	79
11	1996	71,7	79
12	1997	71,9	79,1
13	1998	72,2	79,4
14	1999	72,5	79,6
15	2000	72,9	79,9
16	2001	73,4	80,4
17	2002	73,7	80,6
18	2003	74	80,6
19	2004	74,5	81
20	2005	74,8	81,3
21	2006	75,2	81,6
22	2007	75,5	81,7
23	2008	75,8	81,8
24	2009	76,1	82,1
25	2010	76,4	82,3
26	Dados obtidos de www.pordata.pt em 2012-09-17		

Figura 7. Dados importado do PORDATA

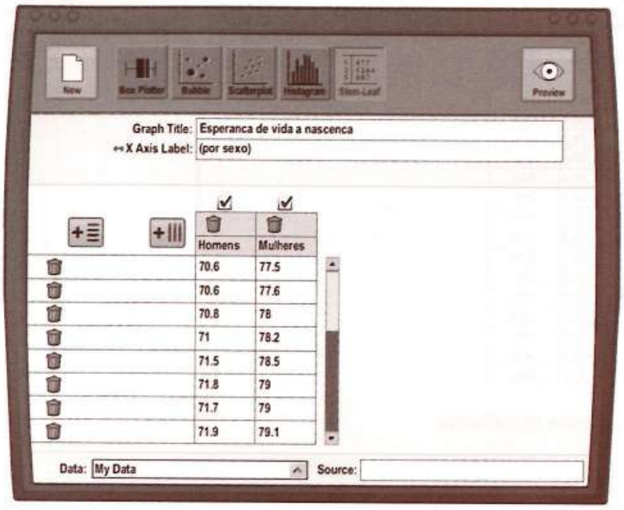


Figura 8. Tabelas com os dados na applet

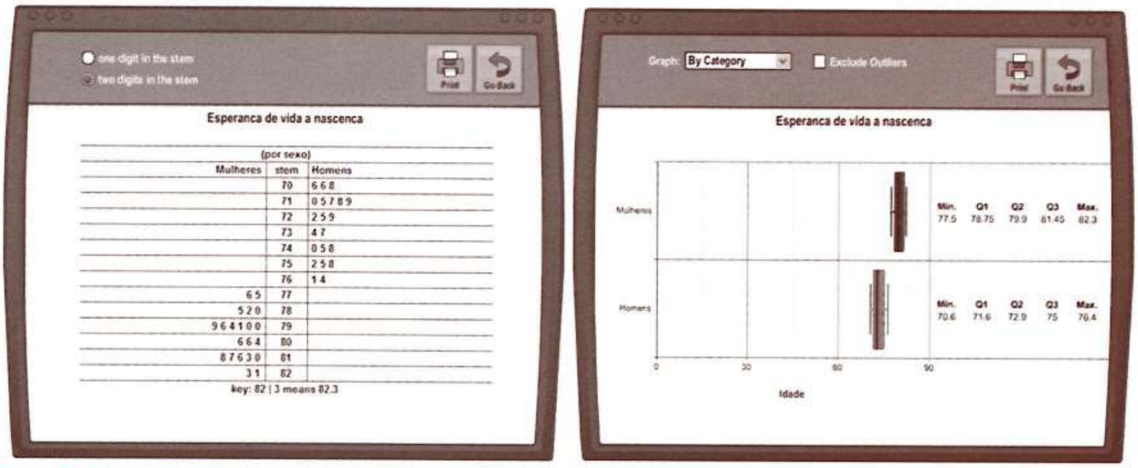


Figura 9. Diagrama de caule e folhas e diagrama de extremos e quartis

queremos comparar a esperança média de vida de alguns países europeus e africanos ou a mesma variável, em Portugal, ao longo de duas décadas, mas analisando a diferença entre homens e mulheres.

Assim, na base de dados PORDATA, procuramos pelo indicador *Esperança de vida à nascença (total e por sexo)* e aprofundamos a nossa análise, personalizando a informação que queremos em *Mais opções aqui*. Dispensamos o *total* e ficamos só com a informação de duas décadas (1990 a 2010), em cada um dos sexos. Exportamos a informação para o Excel e obtemos algo parecido com a figura 7.

Posteriormente, podemos introduzir esses dados na tabela da *applet Advanced Data Grapher*, em http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=220 (figura 8).

Esta aplicação, constitui um exemplo de uma ferramenta simples que após introdução dos dados disponibiliza as duas representações (diagrama de caule e folhas e diagrama de extremos e quartis), entre outras, e permite a comparação e análise das distribuições e a sua discussão na sala de aula (figura 9).

Relações e associação entre variáveis

Se pretendermos estudar a existência de associação estatística entre duas variáveis quantitativas e determinar o coeficiente de correlação r (de *Pearson*) que a carateriza, podemos, por exemplo, usar a folha de cálculo. Consultando uma base de dados brasileira sobre os últimos Jogos Olímpicos, realizados em Londres, em 2012 (http://jogos-olimpicos.terra.com.br/medalhas/), podemos aceder, por exemplo, ao número de medalhas

Os 15 países mais medalhados - Jogos Olímpicos de Londres (2012)

País	Medalhas de ouro	Total de medalhas	Estimativa teórica	Ouro/Total (%)
Estados Unidos	46	104	107,5	44%
China	38	88	90,5	43%
Grã-Bretanha	29	65	71,4	45%
Rússia	24	82	60,8	29%
Coreia do Sul	13	28	37,4	46%
Alemanha	11	44	33,1	25%
França	11	34	33,1	32%
Itália	8	28	26,8	29%
Hungria	8	17	26,8	47%
Austrália	7	35	24,6	20%
Japão	7	38	24,6	18%
Cazaquistão	7	13	24,6	54%
Holanda	6	20	22,5	30%
Ucrânia	6	20	22,5	30%
Nova Zelândia	6	13	22,5	46%

Figura 10. Tabela com as 15 equipas mais medalhadas (Londres, 2012)

DECLIVE	2,13
INTERCEPTAR	9,77
PEARSON	0,94

Figura 12. Valores das funções na folha de cálculo

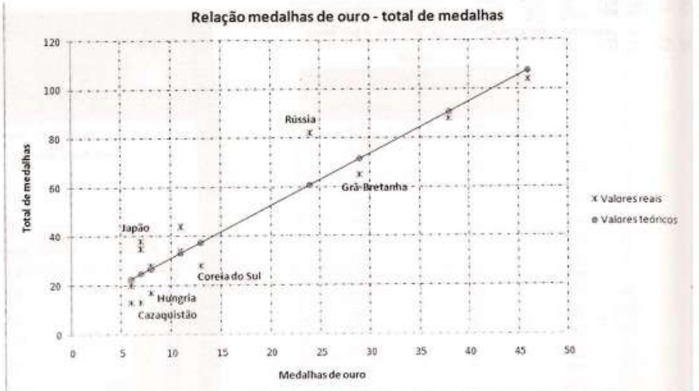


Figura 11. Gráfico que mostra a relação ouro-total

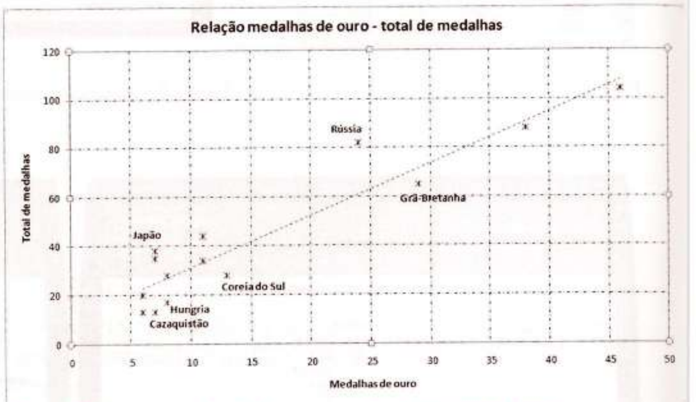


Figura 13. Representação gráfica, com a reta de regressão linear

de ouro e ao número total de medalhas, atribuídas aos países participantes.

A partir dos dados reais registados nas colunas B e C (figura 10), podemos obter um primeiro esboço gráfico da forma como os valores se distribuem, o que nos dá uma primeira *leitura* intuitiva sobre a existência de uma relação positiva forte, aliás esperada, entre as variáveis, medalhas de ouro e total de medalhas (figura 11), visível na forma como os pontos se alinham em redor de uma hipotética reta (a tracejado).

Do gráfico e da sua confirmação na tabela podemos ainda observar que existem alguns países (Cazaquistão, Hungria, Coreia do Sul e Grã-Bretanha) que se *descolam mais* da zona central da nuvem de pontos, para a parte inferior do gráfico, o que quer dizer que têm, entre os três tipos de medalhas possíveis (ouro, prata ou bronze), um maior rácio ouro — total de medalhas, visível na coluna E da tabela (figura 10). Pelo contrário, países com o Japão ou a Rússia, encontram-se na zona superior, o que revela uma percentagem baixa de medalhas de ouro obtidas, quando comparadas com o número total de medalhas que alcançaram.

Uma vez que a leitura do gráfico nos induz uma forte associação entre as variáveis, visível pela distribuição linear dos pontos em torno da reta que melhor se lhes ajusta, podemos confirmá-la, calculando o coeficiente r de Pearson (função PEARSON, da folha de cálculo) que mede essa associação. Este valor, que pode variar entre −1 e 1, reflete a força, dada pelo valor absoluto, e o sentido da associação, dado pelo sinal, que indica o sentido da variação. Neste caso concreto, o valor do coeficiente (+0,94), confirma a forte associação positiva entre o nº de medalhas de ouro (variável independente) e o total de medalhas (variável dependente).

Com este valor, faz todo o sentido representar a reta de regressão linear que mostra a tendência e permite fazer estimativas para além dos valores registados. A partir dos valores reais podemos calcular o declive (função DECLIVE) e a ordenada na origem (função INTERCEPTAR) da reta que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos (reta de regressão linear).

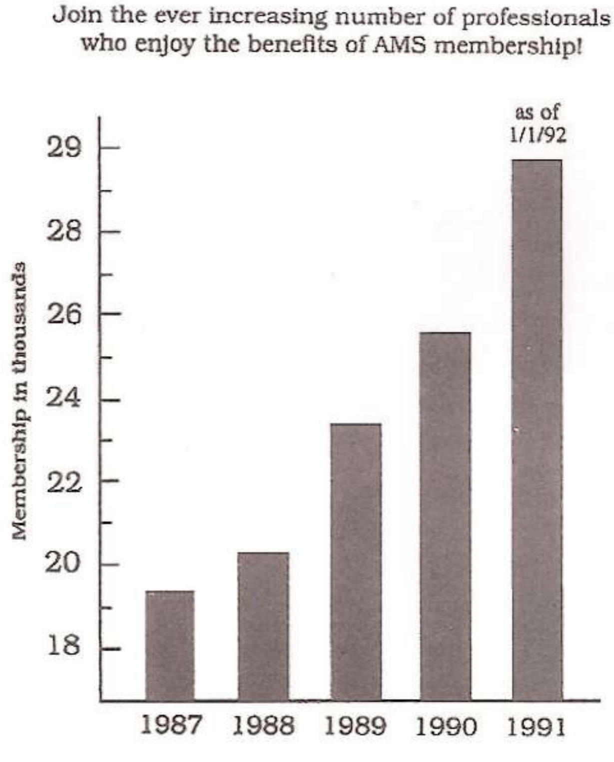
Com esses parâmetros e as abcissas reais (coluna B), calculamos os valores teóricos estimados (y=DECLIVE*x+INTERCEPTAR) na coluna D e, em seguida, acrescentamo-los ao gráfico e pedimos a linha de tendência ou simplesmente unimos os pontos. É mais visível agora que os pontos relativos aos valores reais se distribuem bastante próximos, acima e abaixo da reta que passa pelos valores teóricos estimados (Figura 13).

Em resumo, dados reais e tecnologia constituem hoje recursos do professor de Matemática que representam uma mais-valia para o trabalho de organização e tratamento de dados. As diferentes ferramentas tecnológicas permitem o acesso a grandes volumes de dados, em portais e sites generalistas ou temáticos, facilitam a organização dos dados e a sua representação sob diferentes formas e possibilitam o cálculo de indicadores estatísticos que melhor os caraterizam.

A diversidade e flexibilidade das representações da tecnologia acrescentam compreensão na apropriação dos conceitos, com o professor no papel de orquestrador de boas discussões que permitam estabelecer as *pontes* necessárias entre os conceitos 'vistos' através da tecnologia e os mesmos conceitos quando trabalhados apenas com lápis e papel.

José Duarte
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Aumentos significativos?



A figura mostra um gráfico de barras incluído num folheto de divulgação de uma organização. Ele tenta realçar o crescente número de sócios. A posição errada do 29 (milhares) no eixo vertical e, sobretudo, o facto deste eixo relativo ao número de sócios se iniciar no 17 (milhares), em vez de se iniciar no zero, são responsáveis por uma ilusão. No que diz respeito aos últimos dois anos representados, e considerando valores aproximados, podemos estimar um aumento não superior a 15% de um ano para o outro; contudo, se atendermos à altura das barras, o aumento parece ser superior a 45% – e, na realidade, é este o efeito visual que percecionamos ao olhar para o gráfico. Todos sabemos que existem muitos exemplos deste tipo de situações. O aspeto original neste caso é que provém de uma poderosa organização de matemáticos profissionais!

Paulo Abrantes
(tradução de Ana Paula Canavarro)

Fonte

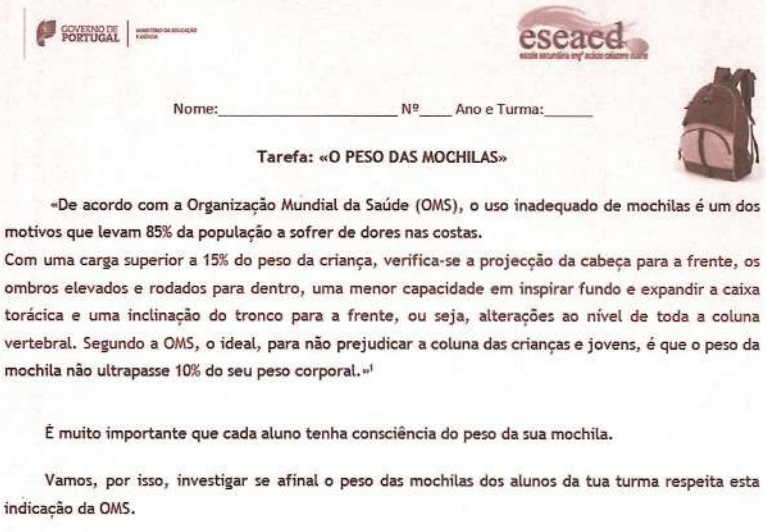
Abrantes, P. (2002). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. Educational Studies in Mathematics, 47, 125–143.

A OTD no 3.º Ciclo

O peso das nossas mochilas

Uma reportagem na Marinha Grande

Terça-feira, dia 16 de Outubro, 8h 20m, encontro da equipa de reportagem na Escola Sec. Eng. Acácio Calazans Duarte, na Marinha Grande, que neste caso estava *em casa*. O dia previa-se longo pois, para além da participação na aula de 90 minutos, que se iniciaria com a pesagem, pelos alunos, das suas mochilas, iríamos fazer as entrevistas no final da tarde a alguns alunos do 8.º A e à professora Silvéria Sabugueiro. A turma já tinha sido sua no 7.º ano e manteve-se praticamente inalterada do 7.º para o 8.º ano, contando este ano com 28 alunos. Antes da aula começar, a professora ligou a sua calculadora *TI 84 Plus* ao *viewscreen* que já estava sobre o retroprojetor. Colocou as calculadoras a entregar aos alunos em cima da secretária. No quadro, desenhou um eixo horizontal, nele os alunos representariam o peso da sua mochila. Falámos um pouco sobre como seria a escala: com intervalos de 0.5kg ou de 0.25kg? É que o resultado da pesagem era uma verdadeira incógnita: a amplitude dos dados seria grande ou pequena? E os pesos seriam elevados? De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), o uso inadequado de mochilas é um dos motivos que levam 85% da população a sofrer de dores nas costas. Segundo a OMS, o ideal, para não prejudicar a coluna das crianças e jovens, é que o peso da mochila não ultrapasse 10% do seu peso corporal. Era este o mote para a investigação que os alunos iam fazer. Será que o peso das suas mochilas ultrapassaria os 10% indicados pela OMS, do peso dos respectivos alunos? Estas eram algumas das preocupações da professora nos dias que antecederam a aula onde iríamos fazer a reportagem. O maior receio era de que a tarefa não fosse significativa para os alunos por essa relação, entre o peso da mochila e o seu próprio peso, ser abaixo daquele valor. Ao fim e ao cabo, no início do 8.º ano os alunos já têm pesos à volta de 50kg! O peso das mochilas é um problema a ter em consideração em alunos mais novos … mas teria significado para estes?


GOVERNO DE PORTUGAL

eseacd

Nome:____________________ Nº____ Ano e Turma:______

Tarefa: «O PESO DAS MOCHILAS»

«De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), o uso inadequado de mochilas é um dos motivos que levam 85% da população a sofrer de dores nas costas.
Com uma carga superior a 15% do peso da criança, verifica-se a projecção da cabeça para a frente, os ombros elevados e rodados para dentro, uma menor capacidade em inspirar fundo e expandir a caixa torácica e uma inclinação do tronco para a frente, ou seja, alterações ao nível de toda a coluna vertebral. Segundo a OMS, o ideal, para não prejudicar a coluna das crianças e jovens, é que o peso da mochila não ultrapasse 10% do seu peso corporal.»[1]

É muito importante que cada aluno tenha consciência do peso da sua mochila.

Vamos, por isso, investigar se afinal o peso das mochilas dos alunos da tua turma respeita esta indicação da OMS.

Figura 1.

Figura 2.

Seleção da tarefa

Quando a professora começou a pensar numa tarefa enquadrada no tema *Números Racionais*, em que os alunos trabalhassem aqueles números na forma de percentagem e de dízima e mobilizassem os conhecimentos sobre Organização e Tratamento de Dados trabalhados no final do 7.° ano a partir de uma situação de recolha real de dados, surgiu a tarefa *O peso das mochilas*[1]. O contexto parecia significativo para os alunos e os dados eram números racionais, sendo possível explorar relações entre variáveis. O tratamento de dados e o cálculo das medidas estatísticas, seria feito com o apoio da calculadora gráfica que os alunos já tinham utilizado no 7.° ano, embora apenas em duas tarefas sobre funções. Como pano de fundo estava o objetivo geral do Programa de Matemática: «Compreender a informação de natureza estatística e desenvolver uma atitude crítica face a esta informação», cuja abordagem proposta para este tema é a realização de «investigações estatísticas baseadas em situações reais, onde utilizam esses novos conceitos estatísticos assim como os que já aprenderam nos ciclos anteriores».

Mas persistia a dúvida sobre a relevância dos dados que seriam obtidos. Assim, a professora resolveu fazer uma experiência prévia, pesando a mochila do filho (aluno do 9.° ano de outra escola com tempos de 50 minutos) todos os dias. Surpresa, afinal havia dias em que pesava 7kg, apesar de ter comprado só cadernos leves! Estava decidido, ia realizar a tarefa!

Pensar a aula

A realização da tarefa implicava alguma logística na recolha de dados, pesar alunos e mochilas, introduzir listas na calculadora, copiar para as calculadoras dos alunos — envolvia muito tempo. E, como promover a discussão? Como levar a que os alunos relacionassem os dois pesos? Na escola, a procura da balança para pesar as mochilas levou a conversas com professores de Educação Física e à descoberta de que já tinham pesado todos os alunos no início do ano. Assim, antes da aula, a professora recolheu a lista com os pesos dos alunos para a lista L2 da sua calculadora, colocando em L1 os respetivos números de ordem. As listas foram copiadas para as 14 calculadoras, duas por grupo, com que os alunos iriam trabalhar. Pensou que seria bom pedir a estimativa do peso da mochila para ganharem sensibilidade para estes dados. Os pesos, estimado e real, seriam escritos em dois *post it* de cor diferente e cada aluno identificaria os seus com o respectivo número de ordem. Os do peso real das mochilas seriam colados no quadro num eixo graduado e, após as pesagens, haveria um momento de discussão coletiva sobre a interpretação do gráfico. De seguida os alunos tratariam os dados em pequenos grupos, seguindo as questões orientadoras e as instruções técnicas relativas ao uso da calculadora que constam da ficha de trabalho (figura 1). Por fim, far-se-ia a discussão final, tendo como objectivo responder à questão de partida: Afinal o peso das mochilas dos alunos do 8.° A respeita a indicação da OMS?

Viver a aula

8h 30min, entrada. A cada aluno foram dados dois *post it*, um amarelo e outro cor de rosa. Aos alunos só tinha sido pedido que não fossem ao cacifo antes da aula. A professora começou por apresentar a equipa de reportagem e introduzir a atividade, dizendo que fizessem a estimativa do peso da sua mochila e o registassem no post it cor-de-rosa (figura 2) com o seu número de ordem. Em seguida, por ordem, cada aluno foi pesar a sua mochila, (figura 3) disse o valor à professora que o introduziu na lista L3 da calculadora e escreveu no *post it* amarelo o peso real da mochila, indo de seguida afixá-lo no lugar correto do eixo horizontal graduado com intervalos de 0.25kg, representado no quadro (figura 4).

Terminada a recolha de dados, foi tempo de copiar a lista L3 para as 14 calculadoras e também de decidir não registar os pesos estimados na lista L4, pois isso iria demorar bastante tempo e esses dados não iriam ser analisados estatisticamente. Houve também um acidente de percurso, pois faltou um aluno, o n.° 26, e as listas ficaram com dimensão diferente, problema

Figura 3.

Figura 4.

resolvido pela professora e equipa de reportagem. Concluídos os pontos 1 e 2 da ficha às 8h 55m, distribuíram-se as calculadoras aos alunos com os dados recolhidos.

Primeiro momento de discussão

Antes do início do trabalho em grupo, foi o tempo do primeiro momento de discussão coletiva, com a interpretação dos dados representados no quadro (figura 5) sobre os pesos reais das mochilas. A professora Silvéria colocou algumas questões de interpretação sobre os dados representados, também com a intenção de saber de que modo recordavam os alunos os conceitos trabalhados no 7.º ano e se os sabiam aplicar neste contexto.

Professora: Esta organização dos dados o que vos faz lembrar?

Bárbara: Um histograma.

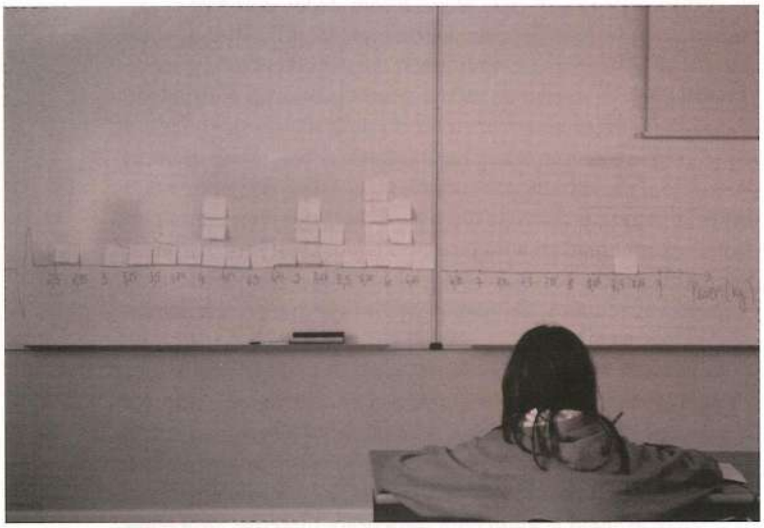


Figura 5.

Professora: O que mais vos dizem estes dados?

João Silva: A maioria tem peso inferior a 7kg.

Afonso: A moda é 5.

Tomás Oliveira: 14 alunos têm peso a mais.

Professora: E quantos são vocês?

João Francisco: 27, é um pouco mais de metade.

Professora: E o que vêem mais?

Nuno: Entre o 5 e o 6,5 estão a maioria dos alunos.

Francisca: Há aí uma concentração dos dados.

Duarte: Valor máximo 8,5 e o valor mínimo parece 2,5, daqui não sei bem.

João Serrão: A amplitude é 6.

Francisco: Até parece que toda a gente tem o mesmo peso na mochila.

Vários alunos: Não concordo.

Professora: Porquê?

Tomás: Se tirarmos um peso que está um bocado isolado…

Professora: E como se chama esse?

Mariana Marrazes: É daqueles que fazem subir a média, porque a média é influenciada por valores muito altos ou muito baixos.

Professora: E que tal estimarem a média?

Duarte: 5,5.

Professora: E a mediana?

Aluno: Vão ficar vários no meio. Se cortarmos um de cada lado até chegar ao meio, vai ficar no 5.

No final deste momento, trocámos impressões. Afinal a escala tinha sido apropriada, pois o gráfico construído permitiu uma fácil leitura.

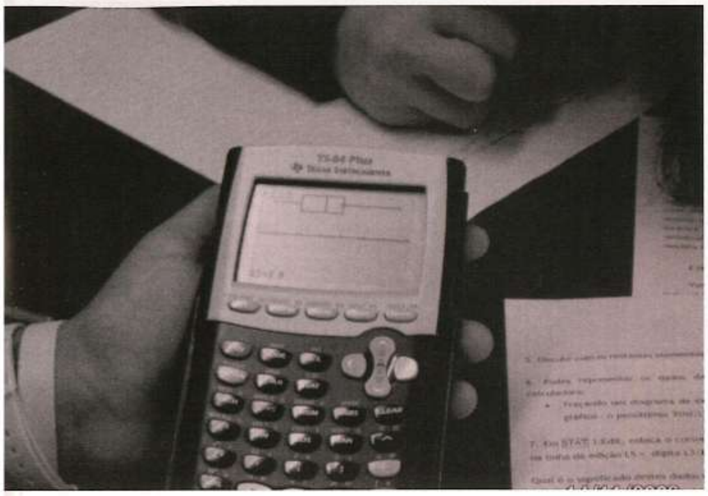
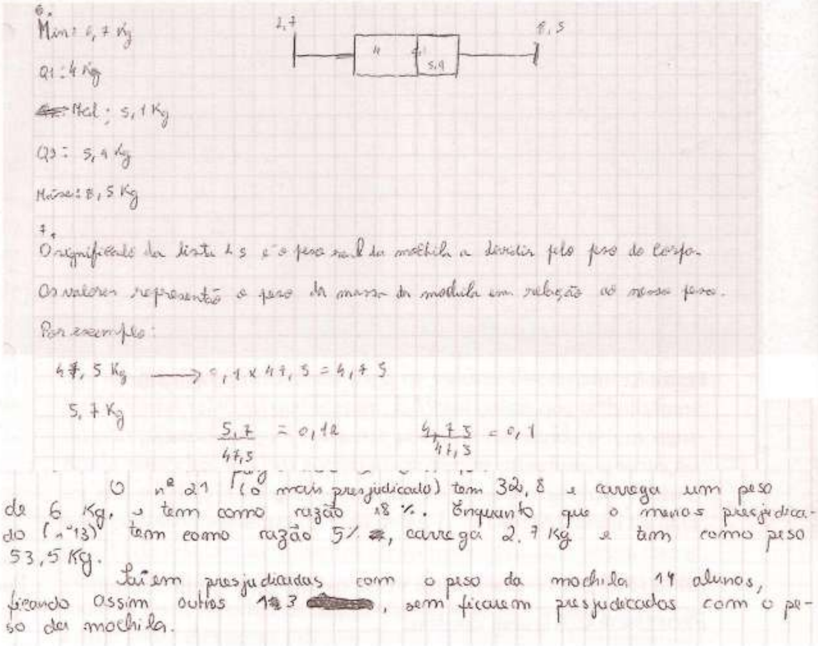


Figura 6.


6.
Mín: 2,7 Kg
Q1: 4 Kg
Med: 5,1 Kg
Q3: 5,9 Kg
Máx: 8,5 Kg

7.
O significado da lista L5 é o peso real da mochila a dividir pelo peso do corpo.
Os valores representão o peso da massa da mochila em relação ao nosso peso.
Por exemplo:
47,5 Kg ⟶ 0,1 x 47,5 = 4,75
5,7 Kg
$\frac{5,7}{47,5} = 0,12$ $\frac{4,75}{47,5} = 0,1$
O nº 21 (o mais prejudicado) tem 32,8 e carrega um peso de 6 Kg, e tem como razão 18 %. Enquanto que o menos prejudicado (nº13) tem como razão 5%, carrega 2,7 Kg e tem como peso 53,5 Kg.
Saíram prejudicadas com o peso da mochila 14 alunos, ficando assim outros 13, sem ficarem prejudicados com o peso da mochila.

Figura 7.

Trabalho em grupo

Cerca das 9h 10m, a professora introduziu a parte de trabalho em grupo, projetando os dados que tinham sido copiados para as calculadoras. Imediatamente um aluno questionou: «Oh professora, como é que soube os nossos pesos?», ao que a professora respondeu: «Pedi ao vosso professor de Educação Física. Os pesos estão na lista L2 da calculadora e o respetivo peso da mochila está em L3.» Em seguida, a professora fez um diagrama de extremos e quartis dos pesos dos alunos e colocou algumas questões para tomar *o peso* ao estado da turma face a esta representação gráfica. Os alunos reconheceram que o peso mediano é 49,1, o mínimo é 32,8 e o máximo é 68,6.

Durante 30 minutos os alunos representaram o diagrama de extremos e quartis (figuras 6, 7 e 8) respeitante ao peso das mochilas, seguindo as orientações técnicas da ficha, interpretaram-no e compararam com o histograma da mesma distribuição construído no quadro. Na lista L4 calcularam o quociente entre L3 e L2 e discutiram o que significava; fizeram ainda o gráfico de pontos que representava os quocientes entre os pesos das mochilas e os respectivos pesos, para cada um dos alunos. Foi com alguma surpresa que viram aparecer os 27 pontos no écran da calculadora e a linha horizontal $y=0,1$. Os dois momentos mais significativos foram a discussão sobre o significado dos dados da lista L4 e sobre o que estava a acontecer no gráfico de pontos. Os grupos registaram as conclusões e discutiram algumas medidas que pudessem prevenir os efeitos negativos do excesso de peso. Foram estes registos e conclusões que alimentaram o debate que se seguiu.

Segundo momento de debate

Pelas 9h 40m iniciou-se o segundo momento de discussão colectiva, onde informalmente os alunos foram dizendo as conclusões tiradas nos grupos.

Professora: O que é a lista L4? (figura 9)

João Silva: É a relação entre o nosso peso e o peso da mochila.

Professora: Os valores são maiores ou menores que 1?

Nuno: Não, L4 é a relação entre o peso da mochila e o nosso peso.

Tomás: Estes valores são percentagens; no caso do primeiro, 0,066 é 6,6%; os que derem mais de 10%, têm peso a mais.

Em seguida, a professora mostrou o gráfico de pontos (figura 10) que os alunos também tinham construído para facilitar a apresentação das conclusões.

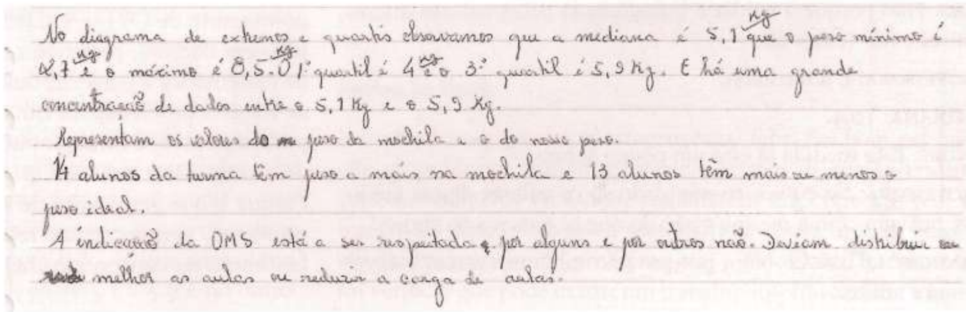

No diagrama de extremos e quartis observamos que a mediana é 5,1 kg e o peso mínimo é 2,7 kg e o máximo é 8,5 kg. O 1º quartil é 4 kg e 3º quartil é 5,9 Kg. E há uma grande concentração de dados entre o 5,1 Kg e o 5,9 Kg.
Representam os valores do peso da mochila e o do nosso peso.
14 alunos da turma têm peso a mais na mochila e 13 alunos têm mais ou menos o peso ideal.
A indicação da OMS está a ser respeitada por alguns e por outros não. Deviam distribuir melhor as aulas ou reduzir a carga de aulas.

Figura 8.

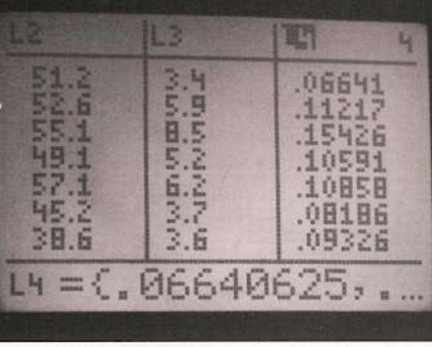


Figura 9.

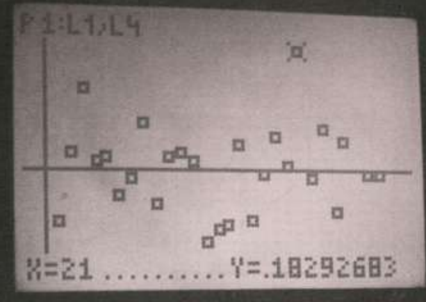


Figura 10.

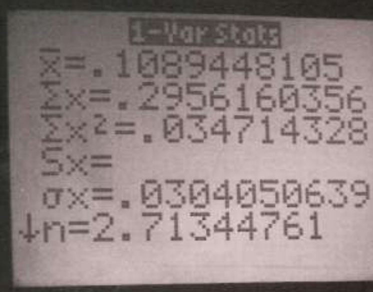


Figura 11.

Jorge: No gráfico dos pontos vê-se os que estão muito acima.

Professora: Alguém contou?

Em coro: 14 acima e 13 abaixo. O mais prejudicado é a Mariana Marrazes, n.º 21.

Tomás: A Mariana carrega quase 20% do peso.

Bárbara: E é a mais pequena e a mais leve.

Professora: E ela é a que tem mais peso na mochila?

Coro: Não.

Professora: Pesa 32kg e carrega 6kg de peso.

André: o n.º 3 carrega 8,5kg.

Professora: Porque é que não é o n.º 3 que tem a razão mais elevada?

Carlos: Porque ele é mais pesado.

Professora: E alguém calculou médias ou medianas? É que no início vocês disseram que a média do peso da mochila é mais ou menos 5,5kg. Alguém calculou o peso médio? Calcularam o quê?

Francisca: A média das percentagens foi o que calculámos. Deu-nos 10%.

Como apenas um dos grupos tinha calculado a média das razões, Silvéria de seguida explicou como se poderia calcular a média das razões obtidas com o auxílio da calculadora. Confirmou-se a média de 10%. (figura 11)

Professora: Vocês não acham curioso este valor? Será que podemos afirmar que no 8.º A os alunos respeitam as orientações da OMS?

Tomás: Não, porque metade não respeita.

João: Não porque a média é influenciada pelos valores discrepantes e nós temos um.

Professora: E a mediana?

Mediana: 10,3.

André: Esta medida já está um pouco acima.

Professora: Se eu vos tivesse dado só os valores destas medidas, ficavam com a mesma visão do que se passava na turma?

Francisca, Tomás: Não, porque não sabíamos quem estava acima e abaixo.

Professora: E no caso do diagrama de extremos e quartis para o peso da mochila, que outras conclusões tiraram? Qual a vossa maior preocupação?

João: Concentração entre 5,1 e 5,9.

Professora: Qual foi a vossa maior preocupação: Com o vosso peso? Com o peso da mochila? Com a razão entre os pesos? A situação da turma é boa?

Tomás: Não, porque mais de metade não respeita a regra.

Professora: Então que medidas sugerem?

Vários alunos referiram medidas que se sintetizam abaixo:

- A organização dos horários ser diferente pois há dias em que trazemos mais;
- Pôr livros no cacifo;
- Haver 2 livros a Matemática; 2 a Português; 2 a Ciências;
- Engordar para baixar a média;
- Os livros, como o de Português, deviam estar organizados como os de Matemática do ano anterior, porque este tem mais de 300 p. e os de Matemática eram vários e pequenos. As editoras deviam dividir os livros como era o ano passado a Matemática;
- Deviam reduzir a carga horária.

O que pensam os alunos

Procurámos saber junto de quatro alunos indicados pela professora, Afonso, Bárbara, João e Nuno, se gostam de Matemática, o que acharam da aula e o que aprenderam.

O gosto pela Matemática é comum, mas relativamente a áreas diferentes. Enquanto o Afonso gosta de OTD: «Até queria seguir Economia e, por isso, como tem a ver com Economia, gosto muito de OTD. A aula foi interessante», outros, como o João e a Bárbara, preferem a resolução de problemas: «Gosto de matemática e gostei da aula de hoje mas o que mais gosto é de resolver problemas, de olhar para as várias maneiras como se podem resolver e arranjar outros métodos» (Bárbara); «Gosto de matemática mas não gosto tanto da área da estatística. Porque o que gosto mais de matemática é ler, olhar para um problema, pensar, tentar resolvê-lo e quando consigo acho fantástico ter conseguido chegar ao resultado final» (João).

Quanto à apreciação da aula destacam a investigação com dados reais: «Pesquisar o peso de cada mochila foi interessante ... como hei-de dizer ... porque eu não sabia que o Figueiredo andava com todo aquele peso na mala, 8,5 kg — diz o João que ele lhe disse que não tirou os livros do dia anterior e veio com todos» (Afonso). Fizeram também referência ao colega cuja mochila tinha o peso mínimo (pouco mais de 2kg): «É que ele vai almoçar a casa e além disso tem uns dossiers muito leves pequenos para cada disciplina. Se não fosse a tarefa continuávamos a ignorar esta situação» (João).

O peso excessivo das mochilas é sentido também a nível das famílias e a atividade da escola vai ao encontro dessas preocupações, bem como de medidas que podem ser tomadas para minorar os problemas, como referiu o Nuno: «A minha avó já dizia, no ano passado, que ia ficar marreco com o peso a mais que levava nas costas. Noto diferença este ano no peso da mochila. Parece que os horários estão mais bem feitos porque este ano trago menos peso». Enquanto o João referiu que «a aula alertou para o peso que trazemos nas costas e o que pode acontecer, fazer mal».

Também a estimativa os cativou de imediato para a tarefa e foi importante porque referiram durante a aula que as estimativas que tinham feito não eram boas, tomando assim consciência da sua própria *inconsciência* do peso da mochila: «Eu pensava que o peso da minha mala fosse metade do que na realidade era» (Bárbara); «Eu também pensava que a minha pesasse menos de 5kg e pesou mais de 6kg» (Nuno).

Também apreciaram ter trabalhado em grupo e com a calculadora gráfica, apontando muitas vantagens para o trabalho realizado, como a obtenção das medidas estatísticas, mas também as dificuldades na sua utilização que advém do reduzido contacto com este tipo de máquinas: «Achei a aula interessante. No ano passado já tínhamos trabalhado com a calculadora mas hoje fizemos novas coisas com ela. Foi o gráfico de pontos e aprendemos funções novas da calculadora. E também aprendemos que trazemos muito peso na mochila.» (Bárbara); «A calculadora é mais rápida, eficaz e rigorosa. A maior dificuldade seria construir os gráficos sem a calculadora e os cálculos também levariam muito tempo» (Afonso).

Trabalhar com vários tipos de gráficos foi uma mais-valia valorizada pelos alunos: «Esta aula também serviu para recordar tudo o que tínhamos aprendido no ano passado. Já conhecia a maior parte dos gráficos, a novidade foi mesmo o gráfico com os pontos dispersos. Com este é mais fácil identificar os dados de cada um. Alguns gráficos complementam os outros». (João)

Tentámos ainda perceber se esta valorização dos gráficos tinha a ver com o facto, explorado na aula, de estes contrariarem a informação dada pelas medidas de tendência central, quando o João concluiu que: «Mais de metade da turma anda com mais peso do que devia e não quero que sejamos conhecidos pela geração dos marrecos». A equipa questionou se teria sido pela média e mediana que chegaram a essa conclusão, pois a média era mesmo os 10% que a OMS recomenda e mediana 10,3%. O João confirmou que não, salientando que tinha sido através dos gráficos, tendo a Bárbara reforçado referindo-se aos dois gráficos: «Pois no digrama de extremos e quartis vimos que havia mais concentração para um lado do que para outro, era entre a mediana e o 3.º quartil, entre 5.1 e 5.9 e no outro de pontos os valores que estavam acima da linha era mais de metade da turma, 14 — e nós somos 27 — e abaixo eram 13».

O que pensa a professora

Na opinião da professora Silvéria, a aula foi significativa para os alunos:

Acho que a aula correu muito bem. Fiquei muito contente pois estava preocupada mas eles conseguiram mobilizar muitos conhecimentos, saberes, os nomes dos gráficos que não estavam na tarefa, das medidas e identificaram logo os valores discrepantes, o 8.5, foram várias relações que fizeram. E foram coisas que trabalhámos no ano passado e fiquei contente por as coisas ainda terem significado para eles. (...) os racionais estiveram presentes, a situação ser real e deles, já sei que os pais me vão falar no assunto. E isto é bom pois são problemas da vida deles. (...) Destaco ainda da aula o facto de relacionarem muitas ideias matemáticas, o serem dados deles, que eles recolheram, o facto de numa aula se terem feito todas as fases, recolher os dados, trabalhar sobre os dados, tratá-los e falar sobre eles antes e depois de eles trabalharam. Conseguiu-se fazer de tudo o que pode ser o trabalho em OTD.

Quanto a dificuldades a professora referiu a gestão da discussão na aula: «Procuro sempre ter uma influência mínima e ir conduzir para abordar algo que esteja a escapar. Mas faltou tempo e vou voltar a trabalhar com os dados, faltou analisar caso se retirasse aquele valor discrepante, (8,5), o que iria acontecer. Se olharmos para a média, ficamos contentes que está tudo bem (eles até falaram do exemplo do ano passado do meio frango) mas pensei que eles ficassem mais *escandalizados* com esse valor e não houve essa reação. É um exemplo muito rico».

Quanto ao trabalho de planificação no âmbito do tema OTD, Silvéria destaca como grande vantagem: «é que é mais fácil ir buscar situações da vida real, problemas que eles podem ter necessidade de resolver e têm de recorrer a muitos conceitos de matemática, logo põem-nos em ação e há muitos dados na comunicação social que se podem ir buscar para analisar na aula.»

Para nós, equipa de reportagem, num olhar de fora, foi evidente a adequada mobilização de conhecimentos em torno de OTD, tema trabalhado no ano letivo anterior. Tendo em conta a importância desta competência para abordar situações e problemas do quotidiano, procurámos saber que tipo de abordagem didática teria a professora privilegiado.

«Fizemos muitos problemas para interpretar informação e não aqueles de calcular só médias, medianas. As médias eram dadas e os quartis e tinham de os comparar e tirar conclusões. Incidi muito na interpretação e na comunicação e rigor da linguagem. Não gosto de dizer calculem a média, mas sim o vencimento médio, o peso médio, ... »

Reflexão final

E no final a equipa de reportagem ficou feliz. Foi bom ver que não só os alunos tinham ganho em termos da sua aprendizagem dos números racionais, trabalhados em contexto real e integrados com outro tema matemático, como tinham ficado sensibilizados para um problema real e seu. Como importante foi verificar que pode existir um trabalho interdisciplinar muito frutuoso, neste caso a nível da Matemática e Educação Física, pois além da ajuda com os dados recolhidos, ficou a vontade de desenvolver um trabalho no âmbito da actividade físico-motora. Outros professores de Matemática e Educação Física querem desenvolver esta tarefa e está a germinar a ideia de servir de tema ao projeto estatístico a desenvolver no 8.° ano, relacionando com os horários diários e o tipo de disciplinas, vantagens das aulas de 90m em vez dos 50 minutos, etc. A tarefa teve significado para estes alunos e não só para os mais pequenos, pelo que se coloca a questão de que também pode ser apropriada para alunos do secundário. Afinal, qual o peso que carregam às costas os nossos alunos ao longo da escolaridade?

Parabéns aos alunos do 8.° A pela sua cidadania atuante, evidenciada nas propostas pertinentes que resultaram da sua análise crítica do problema identificado *O peso das nossas mochilas*.

E o nosso agradecimento à colega Silvéria Sabugueiro pela sua total disponibilidade.

Nota

1 Adaptada do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1° e 2° Ciclos da Universidade de Évora

Isabel Rocha, ESECS/IPLeiria
Manuela Pires, ES E. A. Calazans Duarte

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A Autoridade Nacional de Segurança Rodoviária produz regularmente relatórios com os principais indicadores de sinistralidade nas estradas portuguesas, os quais estão disponíveis ao grande público em http://www.ansr.pt/default.aspx?tabid=57. Esta informação chegou-me de um muito estimado colega professor de Matemática, também sócio da APM, o Adérito Araújo, atual presidente da GARE, a Associação para a Promoção de uma Cultura de Segurança Rodoviária, sediada em Évora, que se constituiu com a principal finalidade de favorecer a mudança social e individual de comportamentos e atitudes com vista à diminuição de riscos inerentes ao ambiente rodoviário, como pode ler-se em http://www.gare.pt/.

Uma forma de sensibilizar os jovens para estas questões é proporcionando-lhes o contacto com dados reais e atualizados relativos à sinistralidade rodoviária. Este é precisamente a finalidade maior da tarefa que aqui propomos para o ensino secundário. De resto, a tarefa proporciona um bom contexto para que os alunos interpretem dados e explorem as suas relações, nomeadamente através da análise da correlação. A tarefa proporciona também a perspetivação da reta de regressão como modelo explicativo da evolução da sinistralidade quer com motorizadas, quer com automóveis, prestando-se a uma discussão dos limites da adequação deste modelo.

A tarefa deve ser realizada com o recurso à calculadora gráfica ou a um software adequado, pois envolve uma boa dose de cálculos que permitem fundamentar as conclusões. Os alunos deverão concluir que dos acidentes com motorizadas resulta um número mais elevado de vítimas graves do que dos acidentes com automóveis e este facto merece ser problematizado, nomeadamente numa fase da vida dos alunos em que as motorizadas são tão apetecíveis.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

Duas rodas ou automóvel: Vítimas em acidentes?

A Autoridade Nacional de Segurança Rodoviária produz regularmente relatórios com os principais indicadores de sinistralidade nas estradas portuguesas, os quais estão disponíveis ao grande público em http://www.ansr.pt/default.aspx?tabid=57.

Estes relatórios contêm dados diversos sobre os sinistros ocorridos desde 1999, e apresentam os dados organizados de múltiplas formas (por local de ocorrência, por tipo de estrada, por tipo de veículo, por tipo de vítima, etc ...).

Do relatório de janeiro de 2012 (datado de abril de 2012) extraíram-se dados que se apresentam na tabela 1, relativos aos acidentes, em que se verificaram vítimas mortais ou feridos, com veículos motorizados de duas rodas e com automóveis ligeiros, nos meses de janeiro de todos os anos entre 2003 e 2012.

	Acidentes com motorizadas			Acidentes com automóveis ligeiros		
Ano	Nº total de acidentes	Nº de vítimas mortais	Nº de feridos graves	Nº total de acidentes	Nº de vítimas mortais	Nº de feridos graves
2003	694	18	59	2802	60	163
2004	697	18	82	2601	53	173
2005	643	16	63	2408	38	133
2006	576	10	37	2408	32	161
2007	531	13	45	2163	37	100
2008	501	6	40	2081	26	92
2009	386	8	25	2189	26	86
2010	466	12	23	2424	37	93
2011	465	7	28	2152	44	79
2012	522	9	41	1927	18	64

1. Sinistralidade com motorizadas

a) Como tem evoluído ao longo dos últimos anos a sinistralidade com motorizadas? Faz o estudo estatístico desta variável e representa-a de modo a revelares a evolução verificada.

b) Será a reta de regressão linear um bom modelo para prever a evolução do número de acidentes com motorizadas? Justifica a tua resposta.

2. Sinistralidade com automóveis ligeiros

a) E como tem evoluído nos últimos dez anos a sinistralidade com automóveis? Faz também um estudo estatístico desta variável, incluindo uma representação gráfica que ilustre a evolução verificada.

b) Será a reta de regressão linear um bom modelo para prever a evolução do número de acidentes com motorizadas? Justifica a tua resposta.

3. Motorizadas ou automóveis ligeiros

a) Qual dos dois veículos ocasiona um maior nº de vítimas mortais? Faz um estudo comparando a percentagem de vítimas mortais ocorrida nos acidentes com motorizadas e com automóveis e regista as tuas conclusões.

a) E qual dos dois veículos ocasiona um maior nº de vítimas mortais ou feridos graves? Faz um estudo comparando a percentagem dos dois tipos de vítimas nos acidentes com motorizadas e com automóveis e regista as tuas conclusões.

c) Com base nas conclusões a que chegaste nas alíneas anteriores, que recomendações farias a um amigo teu que esteja indeciso entre adquirir uma motorizada ou um automóvel? Apresenta argumentos que apoiem essa recomendação.

Para este número selecionámos a introdução de um relatório encomendado pela Associação Americana de Estatística a um conjunto de especialistas[1], intitulado Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report, o qual foi publicado em 2007 e constitui obra de referência em muitas publicações desde então. O relatório reflete sobre o ensino e a avaliação em Educação Estatística, desde o pré-escolar ao 12.º ano. Inicia-se com uma discussão sobre a importância da literacia estatística olhando para as múltiplas formas como a Estatística e as Probabilidades entram nas nossas vidas, a sua relação com a matemática e o papel do contexto. Estas ideias fundamentam a construção de um quadro de referência que é apresentado no relatório mas que, pela sua extensão, optámos por não incluir nesta secção[2]. Contudo, consideramos que a introdução que aqui incluímos, mesmo que situada no contexto dos EUA, mantém todo interesse e adequação à nossa realidade e representa, por si só, um documento de referência quando falamos de educação estatística. O documento integral está disponível, a esta data, no endereço http://www.amstat.org/education/gaise/.

Linhas Orientadoras para a Avaliação e o Ensino em Educação Estatística – O «GAISE report»

Introdução

A finalidade última: literacia estatística. Todas as manhãs, os jornais e outros meios de comunicação social confrontam-nos com informação estatística sobre temas que vão desde a economia à educação, do cinema ao desporto, da alimentação à medicina e da opinião pública ao comportamento social. Essa informação orienta decisões nas nossas vidas pessoais e habilita-nos para cumprirmos as nossas responsabilidades enquanto cidadãos. No trabalho, podem apresentar-nos informação quantitativa sobre orçamentos, fornecimentos, especificações de fabrico, exigências dos mercados, previsões de vendas ou cargas máximas. Os professores podem ser confrontados com estatísticas de educação sobre o desempenho dos alunos ou sobre a sua própria responsabilidade. Cientistas do ramo da saúde têm de compreender os resultados estatísticos de experiências realizadas para testar a eficácia e a segurança de medicamentos. Os profissionais das forças policiais dependem das estatísticas criminais. Se equacionarmos a mudança de emprego e a instalação noutra comunidade, então a nossa decisão pode ser influenciada por estatísticas sobre o custo de vida, os índices de criminalidade e a qualidade da educação.

As nossas vidas são governadas por números. Todos os alunos que completam o ensino secundário devem ser capazes de usar um sólido raciocínio estatístico para lidarem de modo inteligente com as exigências da cidadania, do emprego e da família, preparando-se para uma vida saudável, feliz e produtiva.

Cidadania

As sondagens de opinião pública são os exemplos mais visíveis de uma aplicação estatística que tem impacto nas nossas vidas. Além de informarem de forma direta o cidadão individual, as sondagens são utilizadas por outros, de maneiras que nos acabam por afetar. O trabalho político utiliza as sondagens de opinião de maneiras diversas. Os candidatos a lugares políticos usam as sondagens para direcionarem a sua estratégia de campanha. Uma sondagem pode determinar os pontos fortes que os eleitores vêem no candidato e que podem ser enfatizados durante a campanha. Os cidadãos também podem ficar desconfiados sobre a forma como os resultados de sondagens podem levar os candidatos a tomar certas posições, apenas pelo facto de elas serem populares.

Um cidadão informado por sondagens tem de compreender que os resultados foram achados a partir de uma amostragem da população em estudo, que a fiabilidade desses resultados depende da forma como a amostra foi selecionada e que esses resultados estão sujeitos a erros de amostragem. O cidadão estatisticamente alfabetizado deve perceber o comportamento de amostragens «aleatórias» e ser capaz de interpretar a «margem de erro da amostragem».

O governo federal americano tem utilizado a estatística desde a sua criação. O U.S. Census foi fundado em 1790, para estabelecer uma contagem oficial da população, com a finalidade de indicar os representantes no Congresso. Além do papel do U.S. Census Bureau ter sido largamente ampliado, de modo a incluir um amplo espetro de dados socioeconómicos, foram criados outros departamentos federais que também produzem estatísticas «oficiais» extensas versando a agricultura, saúde, educação, meio ambiente e o comércio. A informação recolhida por estes departamentos influencia a decisão política e ajuda a determinar prioridades para as despesas do governo. Também está disponível para utilização geral, por parte de particulares ou grupos privados. Assim, as estatísticas compiladas pelas agências governamentais têm um impacto enorme na vida do cidadão normal.

Escolhas pessoais

A literacia estatística é necessária para as escolhas pessoais do dia a dia. As estatísticas fornecem informações sobre a qualidade nutricional dos alimentos e portanto influenciam as nossas escolhas na mercearia. As estatísticas ajudam-nos a demonstrar a segurança e eficiência de medicamentos, o que auxilia os médicos na prescrição de tratamentos. As estatísticas também contribuem para demonstrar a segurança de brinquedos, assegurando que as nossas crianças não correm riscos. As nossas escolhas de investimento são orientadas por informação estatística abundante sobre ações e títulos. Os níveis de audiência ajudam a decidir que programas televisivos permanecerão no ecrã, influenciando o que ficará disponível. Muitos produtos têm uma história estatística e as nossas escolhas podem ser influenciadas pelo conhecimento dessas histórias. O desenho de um automóvel é auxiliado pela antropometria – a estatística do corpo humano – para aperfeiçoar o conforto dos passageiros. Os índices estatísticos da eficácia de combustíveis, segurança e resistência são disponibilizados para nos ajudarem na escolha de um veículo.

Local de trabalho e profissões

Quem estiver preparado para utilizar o pensamento estatístico na sua carreira terá a possibilidade de aceder a cargos mais compensadores e exigentes. Uma força de trabalho estatisticamente competente permitirá que os Estados Unidos possam competir de modo mais eficaz no mercado global, melhorando a sua posição na economia internacional. Um investimento na literacia estatística é um investimento no futuro económico da nossa nação, assim como no bem-estar das pessoas.

O mercado competitivo exige qualidade. Os esforços para melhorar a qualidade e o nível de conhecimento destacam-se entre as diversas maneiras que o pensamento e as ferramentas da estatística podem ser utilizados para melhorar a produtividade. Práticas de controlo de qualidade, como a monitorização dos processos de conceção e de fabrico, identificam onde é que se pode melhorar, levando a um produto de qualidade superior. Sistemas de avaliação podem ajudar a criar empregados e organizações mais eficazes, mas muitos desses sistemas usados atualmente não estão baseados em sólidos princípios estatísticos e podem realmente ter o efeito oposto. Bons sistemas de avaliação necessitam do uso adequado de ferramentas estatísticas na determinação e aplicação de critérios apropriados.

Ciência

A esperança de vida nos EUA quase duplicou durante o século XX. Este rápido aumento dos anos de vida é uma consequência do avanço científico. A ciência tornou-nos capazes de aperfeiçoar os cuidados de saúde e respetivos procedimentos, a produção alimentar e a deteção e prevenção de epidemias. A estatística desempenha um papel proeminente neste progresso científico.

A Administração para a Alimentação e Medicamentos dos EUA exige uma testagem extensa aos medicamentos para determinar a eficácia e os efeitos secundários, antes de serem colocados no mercado. Um anúncio recente de um medicamento indicado para evitar a formação de coágulos no sangue afirmava que «PLAVIX, junto com aspirina e a sua medicação habitual, ajuda a aumentar a proteção contra ataques cardíacos e acidentes vasculares cerebrais». No entanto, a publicidade também avisava que «O risco de hemorragias pode aumentar com PLAVIX...».

A literacia estatística implica uma dose saudável de ceticismo sobre descobertas «científicas». Será que a informação sobre os efeitos secundários do tratamento com PLAVIX é de confiança? Uma pessoa estatisticamente letrada deve colocar questões deste tipo e ser capaz de as responder de forma inteligente. Um aluno do ensino secundário estatisticamente letrado será capaz de compreender as conclusões de investigações científicas e exprimir uma opinião sobre a legitimidade dos resultados anunciados. Segundo Mathematics and Democracy: The Case for Qualitative Literacy (Steen, 2001), este conhecimento «capacita as pessoas dando-lhes ferramentas para pensarem por si próprios, colocarem questões inteligentes de especialistas e confrontarem a autoridade com confiança. Estas são proficiências necessárias para sobreviver no mundo moderno».

A literacia estatística é essencial nas nossas vidas pessoais como consumidores, cidadãos e profissionais. Um raciocínio estatístico sólido leva tempo a ser desenvolvido. Esse nível de desenvolvimento, necessário no mundo atual, não se consegue através de uma disciplina anual no ensino secundário. A maneira mais segura para ajudar os alunos a conseguirem o nível necessário consiste em iniciar o processo da educação estatística no 1º ciclo do ensino básico e continuar a consolidar e ampliar as competências do pensamento estatístico durante os restantes anos do ensino básico e no ensino secundário. Um aluno estatisticamente letrado com o diploma do ensino secundário saberá interpretar os dados do jornal da manhã e formular as perguntas pertinentes sobre as reivindicações estatísticas. Ele ou ela sentir-se-ão confortáveis na utilização de decisões estatísticas que surjam no trabalho e serão capazes de tomar decisões informadas sobre questões relacionadas com a qualidade de vida.

O que resta deste documento estabelece uma base para os programas escolares da educação de infância e escolaridade básica e secundária, concebidos para ajudarem os alunos a alcançar a literacia estatística.

Porquê a educação estatística

Durante os últimos trinta anos, a estatística (normalmente denominada análise de dados e probabilidades) tornou-se uma componente chave dos currículos da matemática, do jardim de infância ao secundário. Os avanços tecnológicos e os modernos métodos de análise de dados, nos anos 80 do século passado, conjuntamente com a enorme quantidade de dados numa sociedade na era da informação, conduziram ao desenvolvimento de materiais curriculares dirigidos para a introdução de conceitos estatísticos nos currículos, desde os primeiros anos de escolaridade. Este esforço fundamental foi sancionado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) quando, na sua influente publicação Normas para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar (NCTM, 1989, tradução da APM, 1991), foi incluído a «Análise de dados e probabilidades» como um dos cinco capítulos temáticos. Como este documento e o que o substituiu em 2000, Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2000; tradução da APM, 2007), foram assumidos como a base para a reforma dos currículos da matemática em muitos estados, ficaram fortalecidas a aceitação e a importância concedida à estatística, como parte integrante da educação matemática. Em anos recentes, muitos educadores matemáticos e estatísticos dedicaram muito do seu tempo ao aperfeiçoamento de materiais de educação estatística e de técnicas pedagógicas. O NCTM não é o único grupo que defende uma melhoria da educação estatística, a nível escolar. O National Assessment of Educational Progress (NAEP, 2005) foi desenvolvido à volta dos mesmos temas de conteúdo que as Normas do NCTM, sendo que as questões de análise de dados e probabilidades têm vindo a assumir um papel mais relevante no exame do NAEP. Em 2006, o College Board (Conselho dos Colégios do ensino superior) publicou os College Board Standards for College Success™: Mathematics and Statistics que incluíam «Dados e Variabilidade» e «Acaso, Equidade e Risco», dentro da sua lista de oito áreas temáticas que são «centrais para o conhecimento e as capacidades desenvolvidas nos anos de escolaridade básica e secundária». O exame das normas recomendadas neste documento revela uma ênfase consistente na análise de dados, probabilidades e estatística em cada nível de escolaridade.

O emergente movimento para a literacia quantitativa defende uma ênfase maior nas capacidades práticas relacionadas com o quantitativo, o que ajudará a assegurar o sucesso dos alunos que terminem o ensino secundário na sua vida e trabalho. Muitas destas capacidades são de natureza estatística. Citando de Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy (Steen, 2001):

> «A literacia quantitativa, por vezes também referida por «numeracia» ou «numerismo», é a ferramenta natural para compreender a informação na era do computador. A expetativa de que o cidadão médio seja quantitativamente letrado é sobretudo um fenómeno dos finais do século XX ... Infelizmente, apesar de anos de estudo e de uma experiência de vida num contexto rico em informação, muitos adultos com formação permanecem funcionalmente analfabetos... A literacia quantitativa capacita as pessoas, dando-lhes ferramentas para pensarem por si próprias (sic), colocarem questões inteligentes de especialistas e confrontarem a autoridade com confiança. Estas são proficiências necessárias para sobreviver no mundo moderno».

Um estudo do American Diploma Project, de título Preparado ou não: Criação de um diploma do ensino secundário com significado (www.amstat.org/education/gaise/1), recomenda competências «indispensáveis» e que são necessárias para que os alunos do secundário «sejam bem sucedidos nos estudos pós-secundários ou que tenham bons desempenhos em empregos exigentes». Estas competências incluem, além das algébricas e geométricas, aspetos de análise de dados, estatística e outras aplicações que são de importância vital para outras disciplinas, assim como para o mercado de trabalho na economia rica em informação que hoje existe.

A educação estatística proposta neste quadro pode promover estas competências «indispensáveis» para os alunos «prosperarem no mundo moderno».

Normas do NCTM e o Quadro de Referência

A principal finalidade deste documento é fornecer um Quadro conceptual para a educação estatística, do pré-escolar ao final do ensino secundário. As bases deste Quadro encontram-se nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 200; APM, 2007).

Pretende-se que o Quadro complemente as recomendações dos Princípios e Normas do NCTM e não que se sobreponha a elas. Os Princípios e Normas descrevem a sequência de conteúdos da secção referente à estatística da seguinte forma:

Análise de Dados e Probabilidades

Os programas de ensino do pré-escolar ao 12º ano deverão habilitar todos os alunos para:

- formular questões que possam ser abordadas por meio de dados e recolher, organizar e apresentar dados relevantes que permitam responder a essas questões;
- selecionar e usar métodos estatísticos adequados à análise de dados;
- desenvolver e avaliar inferências e previsões baseadas em dados;
- compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidades.

A norma «Análise de Dados e Probabilidades« recomenda que os estudantes formulem questões que possam ser respondidas utilizando dados e apontem para formas sensatas de os recolher e utilizar. Os alunos devem aprender a reunir dados, organizar os seus dados, ou dados de outros, e mostrar esses dados em gráficos ou tabelas que sejam úteis na resposta às questões colocadas. Esta norma também inclui a aprendizagem de métodos de análise de dados e formas de fazer inferências e retirar conclusões desses dados. Os conceitos básicos das probabilidades também são tratados, com o acento no modo como as probabilidades e a estatística se relacionam.

Os Princípios e Normas do NCTM discutem estes temas e dão exemplos de lições e propostas de trabalho que podem ser usadas na sala de aula. Exemplos mais completos podem ser encontrados nas publicações do NCTM, (2002-2004), Navigation Series on Data Analysis and Probability. No entanto, a estatística é um assunto relativamente novo para muitos professores que não tiveram a oportunidade de desenvolver um conhecimento sólido dos princípios e conceitos subjacentes às práticas de análise de dados que agora são chamados a ensinar. Estes professores não compreendem de forma clara a diferença entre estatística e matemática. Não vêem o currículo da estatística, do pré-escolar ao 12º ano, como um ramo curricular sólido e coerente. Estes professores podem não ver como o currículo da estatística, na sua globalidade, fornece uma sequência crescente de experiências de aprendizagem.

Este Quadro disponibiliza uma estrutura conceptual para a educação estatística que dá uma imagem coerente do currículo na sua totalidade.

A diferença entre estatística e matemática

« A estatística é uma disciplina metodológica. Não existe por si própria, mas antes para dar a outros campos de estudo um conjunto coerente de ideias e ferramentas para lidar com dados. A necessidade desta disciplina provém da omnipresença da variabilidade». (Moore e Cobb, 1997).

Um objetivo central da educação estatística consiste em ajudar os alunos a desenvolverem um raciocínio estatístico. Este raciocínio, em grande parte, deve lidar com esta omnipresença da variabilidade. A resolução de problemas estatísticos e a tomada de decisões dependem da compreensão, explicação e quantificação da variabilidade presente nos dados.

É esta incidência na variabilidade dos dados que distingue a estatística da matemática.

A natureza da variabilidade

Existem várias fontes de variabilidade nos dados. Algumas dessas fontes importantes são descritas a seguir.

Variabilidade de medição – Medições repetidas no mesmo ente variam. Por vezes, duas medições produzem resultados diferentes porque o instrumento de medida não nos dá resultados de confiança, como acontece por exemplo quando tentamos medir um comprimento grande com uma régua pequena. Outras vezes, essa variabilidade resulta de mudanças no sistema que está a ser medido. Por exemplo, mesmo utilizando um instrumento de medida rigoroso, a sua pressão arterial pode divergir de um momento para o outro.

Variabilidade natural – A variabilidade é inerente à natureza. Os indivíduos são diferentes. Quando medimos uma mesma grandeza em vários indivíduos, temos a certeza de que vamos obter medidas diferentes. Apesar de algumas diferenças serem causadas pelo instrumento de medida, a maioria advém do facto dos indivíduos serem diferentes. As pessoas têm naturalmente alturas diferentes, aptidões e capacidades diferentes e opiniões e respostas emocionais diferentes. Quando medimos qualquer um destes aspetos, sabemos que vamos ter uma variabilidade nas medidas. Sementes diferentes, de uma mesma variedade botânica, crescerão em tamanhos diferentes, mesmo quando sujeitas ao mesmo meio ambiente, porque não existem duas sementes rigorosamente iguais. Podemos estar certos de que existirá diferença de semente para semente, no seu crescimento.

Variabilidade induzida – Se semearmos uma embalagem de feijões num terreno e fizermos o mesmo noutro local, com clima diferente, a diferença que se poderá observar entre o crescimento das plantas num sítio e no outro pode ser causada pela diferença inerente aos feijões (variabilidade natural) ou pode ser devida ao facto da localização não ser a mesma. Se for usado um tipo de fertilizante num dos terrenos e um diferente no outro terreno, então as diferenças observadas podem ser consequência da diferença entre os fertilizantes. Em última análise, as diferenças observadas podem ser causadas por um fator que ainda não tenha sido identificado. Uma experimentação cuidadosamente concebida pode ajudar-nos a determinar os efeitos dos diferentes fatores.

Esta ideia básica, a comparação da variabilidade natural com a variabilidade induzida por outros fatores, é o núcleo da estatística moderna. Foi ela que viabilizou que as ciências médicas concluíssem que certos medicamentos são eficazes e seguros, enquanto outros não são eficazes e têm efeitos secundários nocivos. Foi utilizada por agrónomos para demonstrar que uma dada variedade de milho cresce melhor num clima do que noutro, que um fertilizante é mais eficaz que outro ou que um tipo de ração para o gado é melhor que outro.

Variabilidade de amostragem – Numa sondagem política, parece ser razoável que se utilize a proporção dos eleitores questionados (uma amostragem estatística) para estimar a razão desconhecida, relativa a todos os eleitores, que apoiam um determinado candidato. No entanto, se usarmos uma segunda amostra do mesmo tamanho, é quase certo que não existiria exatamente a mesma proporção relativa aos eleitores que apoiam o tal candidato. O valor da proporção na amostra varia de uma amostra para outra. Este facto é conhecido como variabilidade de amostragem. Então, que impedirá que uma amostra leve a estimar que a verdadeira razão é 0,60, enquanto outra permite concluir que é 0,40? Isto é possível mas pouco provável, se forem utilizadas técnicas corretas de amostragem. As sondagens são úteis porque estas técnicas aliadas a um tamanho adequado da amostra podem assegurar que diferenças inaceitáveis entre amostragens sejam muito pouco prováveis.

Uma discussão excelente sobre a natureza da variabilidade pode ser encontrada em Seeing Through Statistics (Utts, 1999).

O papel do contexto

«A incidência na variabilidade dá à estatística, de modo evidente, um conteúdo particular que a distingue da própria matemática e de outras ciências matemáticas. Mas não é apenas o conteúdo que distingue o pensamento estatístico da matemática. A estatística exige um tipo de pensamento diferente, porque os dados não são apenas números, são números num determinado contexto. Na matemática, o contexto obscurece a estrutura. Na análise de dados, o contexto atribui significado.» (Moore e Cobb, 1997).

Muitos problemas matemáticos surgem de contextos aplicados, mas o contexto é retirado para revelar os padrões matemáticos. Os estatísticos, como os matemáticos, procuram padrões, mas o significado desses padrões depende do contexto.

Um gráfico que aparece ocasionalmente na secção de economia de jornais mostra a linha do índice industrial Dow Jones (Dow Jones Industrial Average – DJIA) ao longo de 10 anos. A variação dos preços atrai a atenção dos investidores. O índice pode subir ou descer, em intervalos de tempo, e pode ter uma súbita queda ou subir repentinamente, num intervalo curto. Tomado em contexto, o gráfico levanta questões. Um investigador sério não está apenas interessado em saber quando e quão rapidamente o índice sobe ou desce. Também está interessado em saber porquê. O que se passava no mundo quando o mercado subiu; o que estava a acontecer quando desceu? Retire agora o contexto. Retire o tempo (anos) do eixo horizontal e designe-o «x», apague o valor do índice (DJIA) do eixo vertical e coloque «y». Fica um gráfico muito pouco interessante e de fraco conteúdo matemático!

Probabilidades

As probabilidades são ferramentas para a estatística.

As probabilidades são uma parte importante de qualquer forma de educação matemática. É uma parte da matemática que torna rico o assunto no seu todo, via as interações com outras utilizações da matemática. As probabilidades são ferramentas essenciais na matemática aplicada e na modelação matemática. Também são uma ferramenta essencial na estatística.

O uso das probabilidades como um modelo matemático e a sua utilização como ferramenta na estatística empregam não só abordagens diferentes mas também estilos diferentes de raciocínio. Dois problemas e a natureza das soluções ilustrarão as diferenças.

Problema 1: Assuma que tem uma moeda «calibrada».
Pergunta: Se eu lançar a moeda cinco vezes, quantas caras vou obter?

Problema 2: Pegue numa moeda.
Pergunta: Será que a moeda está equilibrada?

O problema 1 é um problema matemático de probabilidades. O problema 2 é um problema estatístico que pode utilizar o modelo matemático de probabilidades que terá sido usado na resolução do problema 1.

Nenhuma das respostas às perguntas é determinística. O lançamento de moedas tem resultados aleatórios, o que sugere que a resposta é probabilística. A resolução do problema 1 começa com suposição de que a moeda está equilibrada e continua para a dedução lógica das probabilidades numéricas para cada um dos números possíveis de caras: 0, 1,..., 5.

A resolução do problema 2 começa com uma moeda não familiar. Não sabemos se está ou não equilibrada. A procura da resposta é experimental: lancemos a moeda e vejamos o que acontece. Observemos os dados resultantes para ver se parece tratar-se de uma moeda equilibrada ou desequilibrada. Existem várias hipóteses possíveis de aproximação, incluindo cinco lançamentos e o registo do número de caras. Repetir 100 vezes. Compilar as frequências dos resultados possíveis, para cada um deles. Comparar esse resultados com as frequências previstas pelo modelo matemático para uma moeda equilibrada, usado no problema 1. Se as frequências empíricas da experiência forem muito diferentes das previstas pelo modelo matemático para uma moeda equilibrada, e não parecer serem causadas por uma variação aleatória nos lançamentos, concluiremos então que a moeda não está equilibrada. Neste caso, inferimos uma resposta estabelecendo uma conclusão geral a partir da observação dos resultados experimentais.

Probabilidades e variabilidade aleatória

Duas utilizações importantes dos processos aleatórios no trabalho estatístico acontecem na amostragem e na conceção de experiências. Quando definimos a amostra, «selecionamos ao acaso», e nas experiências escolhemos de forma aleatória indivíduos para tratamentos diferentes. Os processos aleatórios fazem muito mais do que evitar o enviesamento nas seleções e escolhas. Esses processos aleatórios levam a uma variabilidade aleatória em resultados que podem ser descritos com modelos probabilísticos.

A probabilidade de um acontecimento informa-nos sobre a percentagem de vezes que se espera que esse caso aconteça, quando o processo básico se repete uma e outra vez. A teoria das probabilidades não nos diz muito sobre um lançamento da moeda. Faz é previsões sobre o comportamento continuado em muitos lançamentos.

As probabilidades dizem-nos pouco sobre as consequências da escolha aleatória de uma amostra, mas descrevem a variação que se espera observar em amostras, quando o processo de amostragem é repetido um grande número de vezes.

As probabilidades dizem-nos pouco sobre as consequências da escolha aleatória para uma experiência, mas descrevem a variação que se espera observar nos resultados , quando a experiência é replicada um grande número de vezes.

Quando o caráter aleatório está presente, o estatístico quer saber se o resultado observado se deve ao acaso ou a outra coisa. Esta é a ideia da significância estatística.

O papel da matemática na educação estatística

As provas de que a estatística é diferente da matemática não foram apresentadas para defender que a matemática não é importante para a educação estatística ou que a educação estatística não deve ser uma parte da educação matemática. Pelo contrário, a educação estatística vai sendo cada vez mais matemática, à medida que o nível de compreensão aumenta. No entanto, a recolha de dados, a exploração dos dados e a interpretação de resultados devem ser enfatizadas em educação estatística, tendo em vista a literacia estatística. Estes temas estão muito dependentes do contexto e, a um nível introdutório, envolvem a matemática formal de modo muito limitado.

As probabilidades desempenham um papel importante na análise estatística, mas a probabilidade matemática formal deve ter um lugar próprio no currículo. A educação estatística no básico e secundário deve enfatizar os modos de utilização das probabilidades no pensamento estatístico. Nestes níveis, uma compreensão intuitiva da probabilidade será suficiente.

Notas

1 Christine Franklin, Gary Kader, Denise Mewborn, Jerry Moreno, John Carroll, Mike Perry, Richard Scheaffer

2 Apesar da não inclusão, encontrará breves referências no texto a este quadro de referência.

Tradução de Fernando Nunes

APM - 2013

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2013

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2013

		Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções