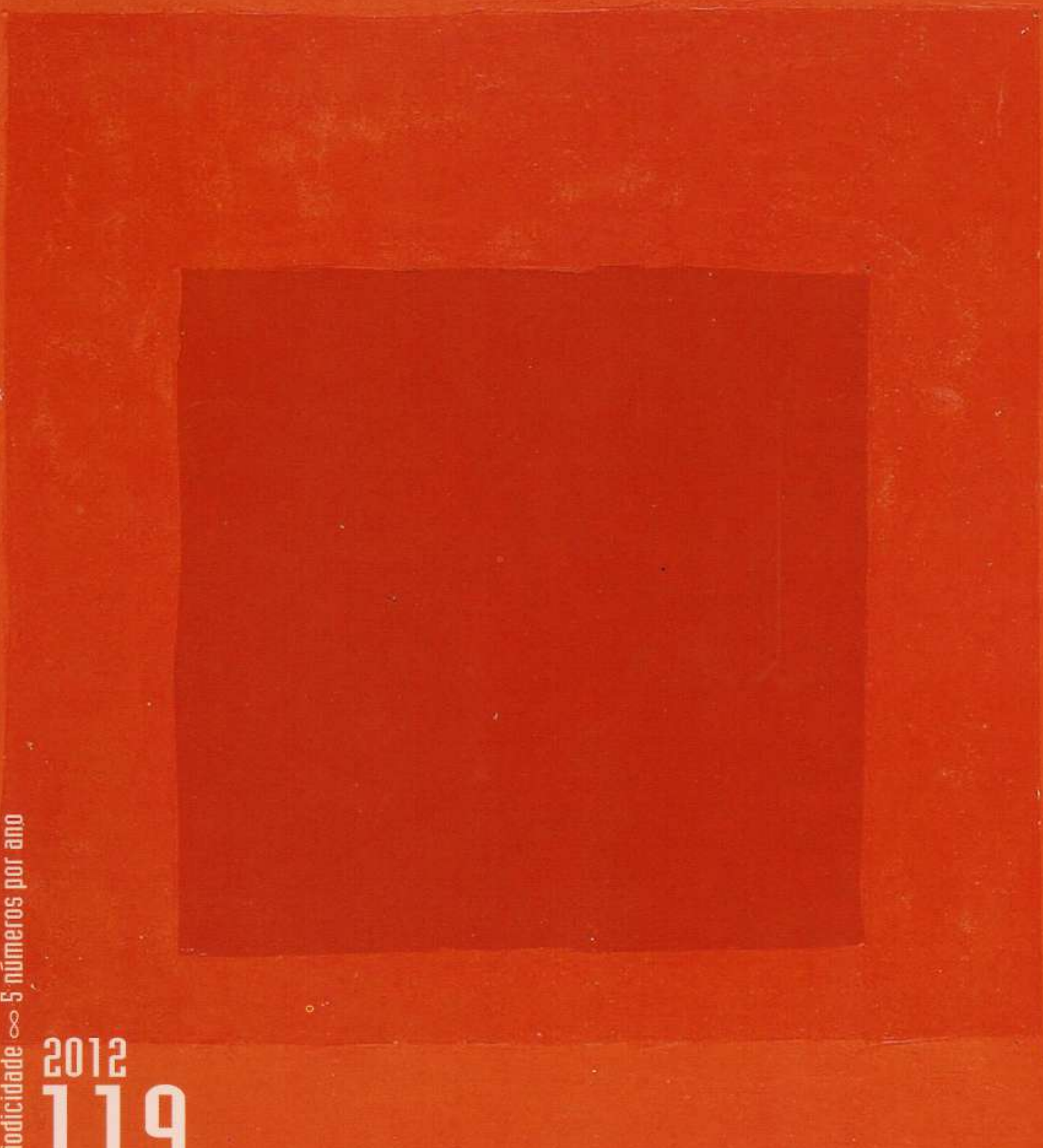
# Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2012

119

Setembro ∞ Outubro

Preço 5,75€


# ficha técnica

**EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA**

Diretora Isabel Rocha
Subdiretora Manuela Pires
Redação Adelina Precatado
Ana Paula Canavarro
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Irene Segurado
Júlia Perdigão
Lina Brunheira
Nuno Candeias
Paulo Dias

**Colaboradores Permanentes**
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

**Capa** António M. Fernandes
**Paginação** Gabinete de Edição da APM

**Entidade Proprietária**
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
**Data da publicação** Outubro 2012
**Tiragem** 2100 exemplares
**Periodicidade**
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

**Impressão**
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

## Sobre a capa

«O bom ensino consiste mais em apresentar boas questões que em fornecer boas respostas.» – Joseph Albers

Na capa deste número:
Estudo de cor para a pintura: **Homage to a square** (1959) de Joseph Albers

António M. Fernandes

## Neste número também colaboraram

Ana Isabel Felgueiras; Cecília Costa; Corália Maria Pimenta; Henrique Guimarães; Jaime Carvalho e Silva; Joana Latas; João Pedro da Ponte; José Paulo Viana; Lurdes Serrazina; Manuel Joaquim Saraiva; Manuela Ribeiro; Nélia Amado; Paula Catarino; Paulo Jorge Lourenço; Susana Carreira

## Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

## Nota

# «Só neste País!»

É frequente ouvir a expressão do título quando alguém, resignadamente mas com veemência, denuncia uma situação que considera inadmissível. Está também subentendido nesta expressão que o nosso País não tem remédio pois é tão tacanho que «só neste País» alguém teria a desfaçatez de promover ou pactuar com tal situação.

Confesso que tal expressão me irrita solenemente. Não considero o meu País tacanho nem um caso desesperado. Claro que temos problemas, mas Portugal sempre teve problemas. Posso recordar Eça de Queirós: «Portugal tem atravessado crises igualmente más ... esta crise me parece a pior — e sem cura» (1891) ou Rómulo de Carvalho «A crise é uma doença permanente da humanidade» (1970).

Acho que o problema que afeta as pessoas está num ponto delicado: não fazem ideia do que se poderá fazer para sair da crise. Se fosse uma situação simples de resolver, a crise desapareceria rapidamente. O reconhecimento da complexidade da situação é o primeiro passo para se poder pensar nalguma solução, nem que seja apenas numa luzinha no fundo do túnel.

Penso que olhar para o que se passa à nossa volta na cena internacional será uma grande ajuda para percebermos melhor os nossos problemas e refletirmos sobre cada crise que atravessarmos. Sempre foi essa uma das minhas principais preocupações mas, depois de estar 6 anos no ICMI–Comissão Internacional para a Instrução Matemática, ainda fiquei mais firmemente convencido disso.

Vou dar um exemplo. Muita gente pensa que o ensino no Oriente é baseado em repetições sistemáticas, sem recurso à tecnologia, com muitos exames e que no final os alunos orientais podem dominar muitas técnicas mas não sabem sequer resolver problemas não rotineiros. Esta ideia é completamente errada. Em Singapura, o primeiro exame nacional aparece no final do 6° ano de escolaridade e desde 2009 que é obrigatório o uso de calculadora. Qual o objetivo? Para facilitar «o uso de abordagens mais exploratórias na aprendizagem de conceitos matemáticos». Sendo Singapura um país tão bem classificado nos estudos internacionais, dá que pensar, não dá? E se...

A Coreia do Sul foi o país mais bem classificado no último estudo do PISA. Qual a razão? Há muitas, desde a organização das escolas à formação de professores, passando por revisões curriculares feitas de 5 em 5 anos com a liderança de um grande instituo a trabalhar para o desenvolvimento curricular e a análise e avaliação do sistema educativo, o KICE (Korea Institute for Curriculum and Evaluation). A Matemática ocupa um lugar importante no curriculum coreano, contribuindo para atingir vários objetivos como «cultivar a capacidade de pensar e comunicar matematicamente de modo a investigar matematicamente fenómenos e problemas diversos para obter soluções práticas». Dá que pensar não dá?

A minha opinião é: nunca percam uma oportunidade de observar o que se passa num país ou região. Não dará para imitar, obviamente, mas ajuda a perceber o que outros fizeram, como resolveram certos problemas, que problemas ainda têm (todos os países têm problemas!) e, sobretudo, dá-nos ângulos diferentes para pensar em questões que também nos afligem.

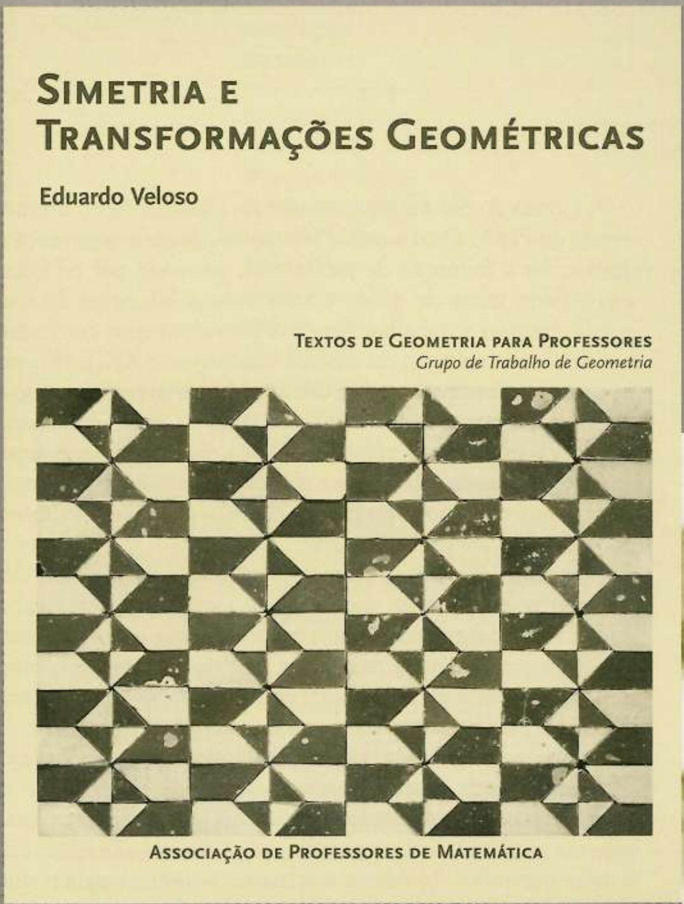
Recusemos o que Eça de Queirós já identificava em 1845: «A nossa pobreza relativa é atribuída a este hábito político e social de depender para tudo do Governo, e de volver constantemente as mãos e os olhos para ele como para uma Providência sempre presente». Tomemos iniciativas, pensemos pela nossa própria cabeça, matutemos permanentemente em ideias para possíveis soluções (dando uma espreitadela em outras realidades) e não desistamos enquanto não conseguirmos avançar significativamente.

**Vamos lá melhorar «este País!»**

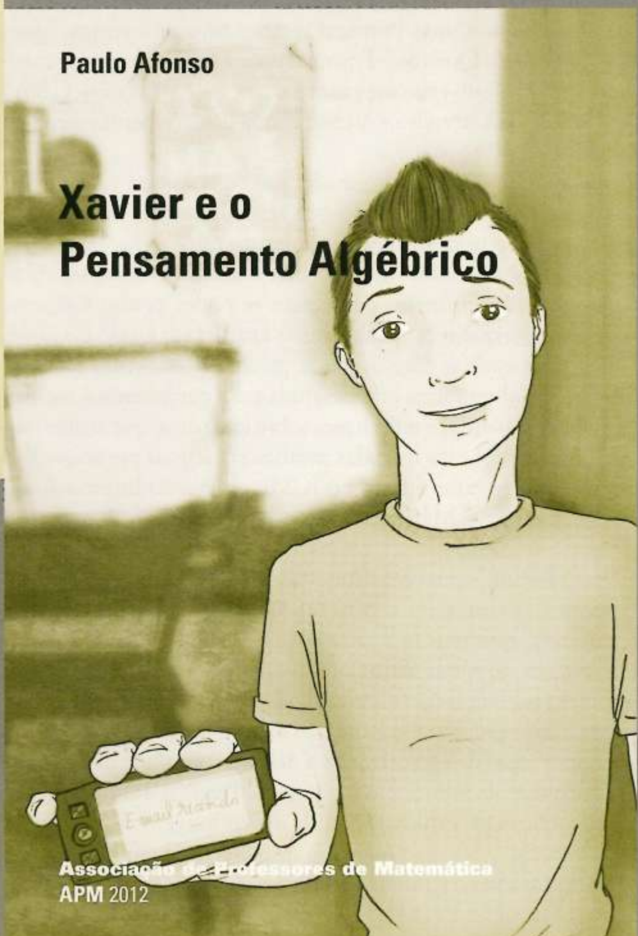
**Jaime Carvalho e Silva**
Departamento de Matemática da FCTUC

Próximas edições da APM: [Lançamento no ProfMat 2012]

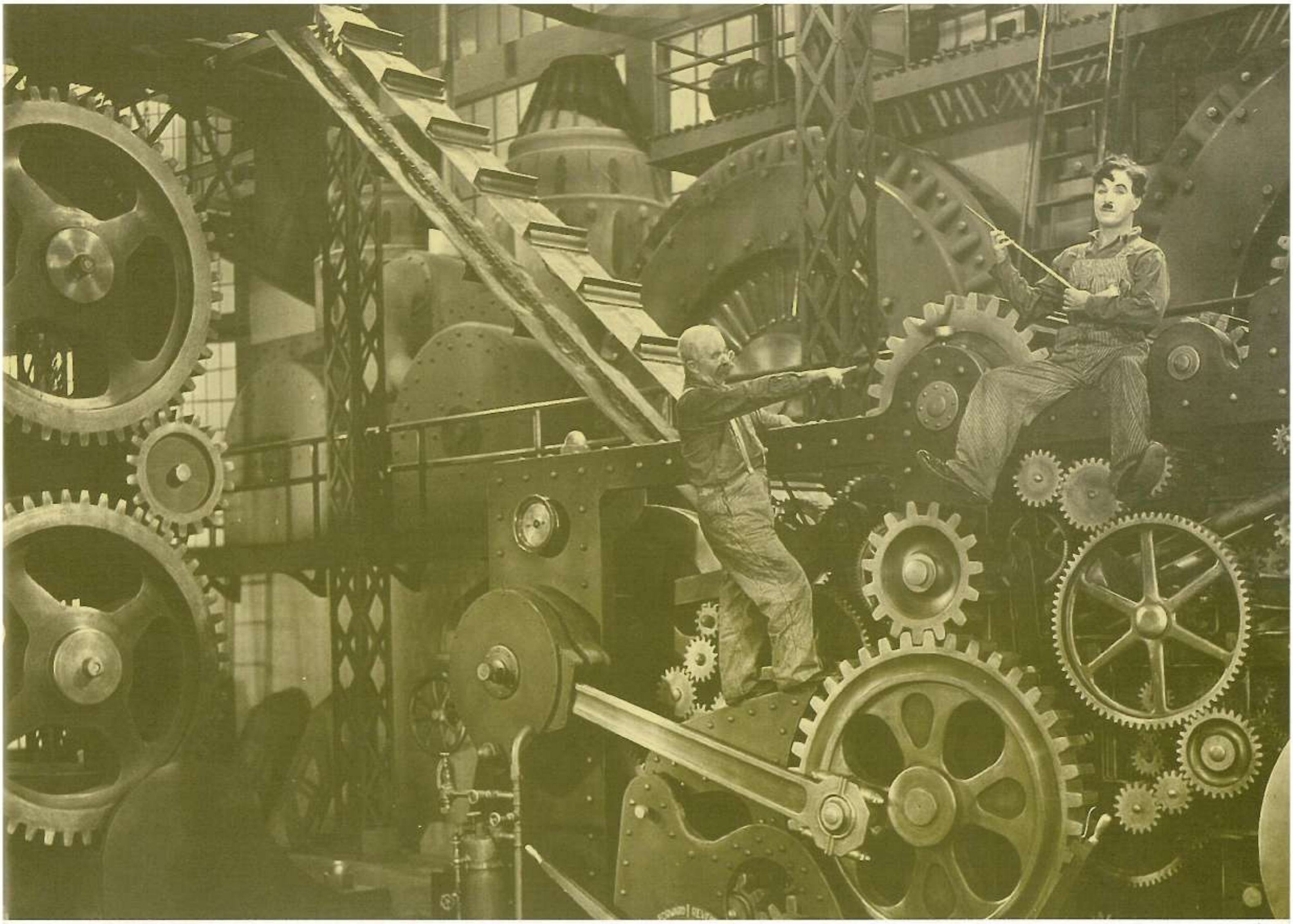
## Títulos disponíveis a partir de Outubro de 2012




**Autor:** Eduardo Veloso
**Título:** Simetria e Transformações Geométricas
**Editora:** Associação de Professores de Matemática




**Autor:** Paulo Afonso
**Título:** Xavier e o Pensamento Algébrico
**Editora:** Associação de Professores de Matemática



# As Metas Curriculares de Matemática: Um tremendo retrocesso no ensino da disciplina

João Pedro da Ponte, Henrique Manuel Guimarães e Lurdes Serrazina

Contrariando afirmações recentes do Ministério da Educação, segundo as quais o atual *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) não iria ser alterado, as novas Metas Curriculares para esta disciplina constituem um novo programa muito distinto que contraria o anterior, tanto na sua estrutura e lógica global, como em aspetos importantes dos conteúdos matemáticos. As metas curriculares agora estabelecidas constituem uma extensa listagem de objetivos muito específicos, determinando para cada ano da escolaridade básica um único percurso curricular a nível nacional, com uma acentuada rigidez e fragmentação. Além disso, os objetivos específicos definidos para cada assunto matemático apelam tendencialmente a desempenhos de baixa exigência cognitiva e não mencionam elementos fundamentais da aprendizagem matemática, quer relativamente a aspetos do conhecimento e da experiência matemáticos, quer no que se refere ao desenvolvimento de capacidades nos alunos nesta disciplina.

No que respeita aos assuntos matemáticos a ensinar, as novas metas não se limitam a desdobrar ou detalhar os tópicos que o atual programa propõe, acrescentam novos tópicos e fazem-no de tal modo que transformam completamente o espírito deste programa. Isso não seria negativo, se representasse um aperfeiçoamento do programa existente. Infelizmente, representa um tremendo retrocesso, que não deixará de causar sérios danos no ensino da disciplina.

## Números e operações

As alterações ao programa de Matemática no tema Números e operações são inúmeras e muito profundas. Neste tema, uma das ideias centrais do programa — a par com o desenvolvimento da compreensão das operações e da fluência de cálculo — é o desenvolvimento do «sentido de número»[1] nos alunos. Esta ideia, cuja importância é hoje largamente aceite na comunidade internacional da educação matemática, não tem qualquer visibilidade nas metas propostas. A expressão «sentido de número» não aparece em qualquer passagem do documento e, em contrapartida, sobrevaloriza-se a memorização e realização de procedimentos, para além de se assumirem opções inadequadas para a abordagem aos números racionais e aos números inteiros.

### Sobrevalorização do trabalho com os algoritmos e desvalorização do cálculo mental

No 1.º ciclo, uma das alterações importantes que as novas metas introduzem tem a ver com o ensino dos algoritmos das quatro operações aritméticas básicas e com a ausência de qualquer referência ao desenvolvimento de destrezas de cálculo mental. O programa atual indica que um dos objetivos gerais é «desenvolver destrezas de cálculo mental e escrito» (p. 13) e preconiza que a «aprendizagem dos algoritmos com compreensão, valorizando o sentido de número, deverá desenvolver-se gradualmente para as quatro operações», propondo que, «num primeiro momento, os alunos devem ter a possibilidade de usar formas de cálculo escrito informais, de construir os seus próprios algoritmos ou de realizar os algoritmos usuais com alguns passos intermédios» (p. 14). As metas, pelo contrário, apontam para a introdução dos algoritmos canónicos (eufemisticamente designados por «representação vertical do cálculo») logo desde o 1.º ano, sem qualquer referência ao desenvolvimento de destrezas de cálculo mental:

> Adicionar dois quaisquer números naturais cuja soma seja inferior a 100, adicionando dezenas com dezenas, unidades com unidades com composição de dez unidades em uma dezena quando necessário, e privilegiando a representação vertical do cálculo. (1.º ano, NO, p. 5)

> Subtrair dois números naturais até 1000, privilegiando a representação vertical do cálculo. (2.º ano, NO, p. 9)

A introdução muito precoce dos algoritmos relativos às operações aritméticas e a insistência na sua rápida aprendizagem contraria décadas de investigação em educação matemática (Kamii & Dominik, 1997, 1998). Esta opção promove uma aprendizagem puramente mecanizada desses algoritmos que não favorece a sua correta utilização em situações novas e de maior complexidade, prejudica o desenvolvimento do cálculo mental e cria dificuldades ao uso com compreensão dos números e das suas representações. Esta forma de entender a Matemática como algo mecânico cujas regras é preciso memorizar, sem as compreender, está bem patente na meta seguinte:

> Reconhecer que o resultado da multiplicação ou divisão de uma dízima por 10, 100, 1000, etc. pode ser obtido deslocando a vírgula uma, duas, três, etc. casas decimais respetivamente para a direita ou esquerda. (4.º ano, NO, p. 23) [a que se segue uma outra meta com 0,1, 0,01, 0,001, etc.]

Isto contraria os resultados das investigações em educação matemática que associam a compreensão conceptual e o desenvolvimento da fluência nestes procedimentos de cálculo a uma boa compreensão das frações decimais e das representações decimais dos números (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

### Abordagem limitada e formal dos números racionais

Uma outra alteração extremamente importante constante nas metas curriculares diz respeito à introdução de números racionais na sua representação por frações a realizar no 1.º ciclo. O programa de Matemática preconiza uma abordagem intuitiva deste tipo de números, começando-se (1.º–2.º anos) com situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais e recorrendo, numa segunda fase (3.º–4.º anos), a problemas que permitam trabalhar outros significados das frações, como relação parte-todo, quociente e operador. No programa, o significado de fração como medida e as operações com frações são trabalhados apenas no 2.º ciclo. As metas, pelo seu lado, estabelecem que, no 1.º ciclo, para a introdução das frações, apenas deve ser tomado em consideração o seu significado como medida e no contexto da medida do comprimento de segmentos de reta:

> Fixar um segmento de reta como unidade e identificar 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10, 1/100, 1/1000 como números, iguais à medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta resultantes da decomposição da unidade em respetivamente dois, três, quatro, cinco, dez, cem e mil segmentos de reta de igual comprimento. (2.º ano, NO, p. 10)

> Fixar um segmento de reta como unidade e identificar uma fração *a*/*b* (sendo *a* e *b* números naturais) como um número, igual à medida do comprimento de um segmento de reta obtido por justaposição retilínea, extremo a extremo, de a segmentos de reta com comprimentos iguais medindo 1/*b*. (3.º ano, NO, p. 17)

Para além disto, enquanto no programa, para o trabalho com as operações com números racionais se recorre apenas à representação decimal, deixando as operações com frações para o 2.º ciclo, nas metas, este estudo com frações é antecipado para o 1º ciclo, recorrendo estritamente ao significado da fração como medida no caso da adição e da subtração:

> Identificar somas de números racionais positivos como números correspondentes a pontos da reta numérica, utilizando justaposições retilíneas extremo a extremo de segmentos de reta, e a soma de qualquer número com zero como sendo igual ao próprio número.

> Identificar o ponto da reta numérica que corresponde à diferença de dois números positivos utilizando justaposições retilíneas extremo a extremo de segmentos de reta. (3.º ano, NO, pp. 17–18)

Do ponto de vista matemático, a opção das metas será uma abordagem interessante. Do ponto de vista educacional, dificilmente poderia ser mais inadequada. São amplamente reconhecidas as grandes dificuldades que os alunos manifestam na aprendizagem dos números racionais e das operações com estes números, mesmo com o recurso a abordagens informais e intuitivas que fazem apelo aos significados e representações mais próximos da experiência diária dos alunos (Verschaffel, Greer, & Torbeyns, 2006). Com o que as metas estipulam, tais dificuldades só se poderão agravar.

### Desvalorização das dificuldades de aprendizagem no conjunto dos números inteiros

A compreensão do conjunto dos números inteiros (conjunto Z) representou um difícil processo para a Matemática, só se concretizando plenamente no século XIX. São bem conhecidas as dificuldades dos alunos no trabalho com estes números, que se acentuam na aprendizagem das operações neste universo numérico, com frequente confusão das respetivas regras de cálculo em muito devida à presença dos sinais qualificativos dos números, até agora conhecidos dos alunos apenas como sinais operatórios. Por isso, o programa em vigor, tal como já acontecia em programas anteriores, dá destaque a este tópico com o cuidado de dividir a sua aprendizagem em duas etapas, a primeira, envolvendo a noção de número inteiro e a representação na reta numérica, com comparação e ordenação, e adição e subtração (a fazer no 2.° ciclo); e a segunda etapa, envolvendo a multiplicação e divisão e respetivas propriedades (a fazer no 3.° ciclo).

Nas metas curriculares esta questão é aparentemente desvalorizada, o tópico *Números inteiros* a que o programa dá relevo desaparece e este tipo de números, que é novo para os alunos do 2.° ciclo, passa a ser abordado como um simples subtópico do estudo dos números racionais. Isto é explícito no 6.° ano (e apenas implícito no 7.° ano):

Identificar o conjunto dos «números inteiros relativos»[2] (ou simplesmente «números inteiros») como o conjunto formado pelo 0, os números naturais e os respetivos simétricos, representá-lo por $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos naturais por $\mathbb{N}$ (6.° ano, NO, pp. 38-39)

No 7.° ano e em todo o 3.° ciclo existem unicamente referências a números racionais mas é indicado que a multiplicação de números inteiros é para ser aprendida sabendo que:

Identificar, dados dois números racionais positivos $q$ e $r$, o produto $(-q)\times(-r)$ como $q\times r$, começando por observar que $(-q)\times(-r)=$ $=(q\times(-1)\times(-r)$. (7.° ano, NO, p. 50).

De facto, as metas não preveem o estudo autónomo dos números inteiros e não se encontra entre elas uma referência a situações que motivem o estudo destes números e possam servir de suporte à aprendizagem das suas operações e propriedades. Os números positivos e negativos e as operações com estes números são logo à partida trabalhados no conjunto dos números racionais, com início no 2.° ciclo (adição e subtração) — opção que também conflitua com o que está estabelecido no programa, que preconiza que o estudo dos números racionais negativos só se inicia no 3.° ciclo. Esta opção minimiza as reconhecidas dificuldades dos alunos no estudo dos números inteiros (Gallardo, 2000), sem qualquer vantagem para a sua aprendizagem.

### Exigência de conhecimentos para além do programa

No tópico dos Números e operações, são numerosos os exemplos de conhecimentos matemáticos que as metas curriculares estipulam para aprendizagem que se situam muito para além do que é indicado no programa em vigor. Eis alguns casos em diversos ciclos:

Decompor uma fração superior a 1 na soma de um número natural e de uma fração própria utilizando a divisão inteira do numerador pelo denominador. (3.° ano, NO, p. 18)

Calcular aproximações, na forma de dízima, de números racionais representados por frações, recorrendo ao algoritmo da divisão inteira e posicionando corretamente a vírgula decimal no resultado, e utilizar adequadamente as expressões «aproximação à décima», «aproximação à centésima» e «aproximação à milésima». (4.° ano, NO, p. 23)

Saber, dado um número natural superior a 1, que existe uma única sequência crescente em sentido lato de números primos cujo produto é igual a esse número, designar esta propriedade por «teorema fundamental da aritmética» e decompor números naturais em produto de fatores primos. (6.° ano, NO, p. 38)

Saber que o algoritmo da divisão nunca conduz a dízimas infinitas periódicas de período igual a «9». (8.° ano, NO, p. 62)

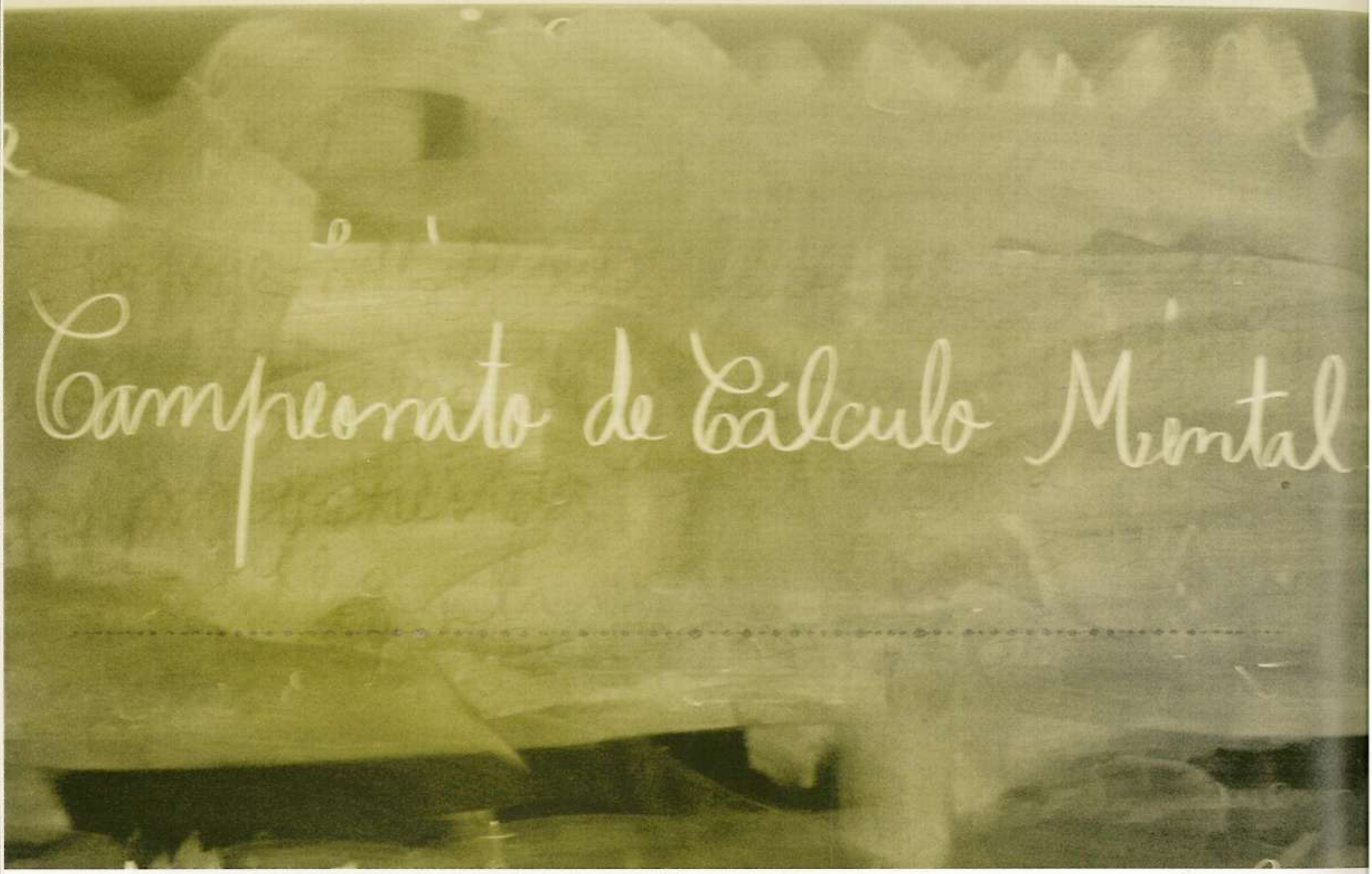
Saber que se pode estabelecer uma correspondência um a um entre o conjunto das dízimas finitas e infinitas periódicas com período diferente de 9 e o conjunto dos números racionais. (8.° ano, NO, p. 62)

Reconhecer que um ponto da reta numérica à distância da origem igual ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 não pode corresponder a um número racional e designar os pontos com esta propriedade por «pontos irracionais». (8.° ano, NO, p. 63)

Reconhecer, dado um ponto A da semirreta numérica positiva que não corresponda a uma dízima finita, que existem pontos de abcissa dada por uma dízima finita tão próximos de A quanto se pretenda, justapondo $a_0$ segmentos de reta de medida 1 a partir da origem tal que A esteja situado entre os pontos de abcissa ao e $a_0+1$, justapondo em seguida, a partir do ponto de abcissa $a_0$,$a_1$ segmentos de medida 1/10 tal que A esteja situado entre os pontos de abcissa $a_0+a_1/10$ e $a_0+(a_0+1)/10$ e continuando este processo (...) (8.° ano, NO, p. 63)

Ainda a propósito de conhecimentos a ensinar que constam nas metas e que o programa não contempla, vale a pena referir o caso de «Conhecer e utilizar corretamente os numerais romanos» incluído nas metas como um objetivo de aprendizagem no 1.° ciclo (3.° ano, NO, p. 15). A numeração romana é um tema interessante do ponto de vista histórico, podendo ser usada para comparar este sistema e o sistema decimal, mas por questões de prioridades o programa em vigor não considera o seu estudo como um objetivo em si mesmo. Nas metas, o conhecimento e uso deste sistema de numeração passa a ser um objetivo de aprendizagem, o que, dadas as limitações de tempo será certamente em detrimento de outras aprendizagens mais relevantes na educação matemática dos alunos nos dias de hoje. Do mesmo modo, as questões da decomposição em fatores primos e da análise de dízimas proporcionam situações interessantes para explorações — o problema é tornar estes tópicos em matéria obrigatória dentro do sistema de ensino existente.

Não vemos qualquer vantagem em antecipar o ensino de conhecimentos matemáticos como as operações com frações (adição e subtração, do 2.° ciclo para o 3.° ano; multiplicação e divisão do 2.° ciclo para o 4.° ano), a simplificação de frações (também do 2.° ciclo para o 4.° ano) e os números racionais negativos (do 3.° ciclo para o 6.° ano). Estas antecipações só




agravam as dificuldades dos alunos, para além de sobrecarregarem o programa nos dois primeiros ciclos de escolaridade.

## Álgebra

No programa de Matemática, a abordagem à Álgebra, baseada no estudo de sequências e na exploração de propriedades e relações matemáticas, tem por finalidade induzir uma iniciação informal ao pensamento algébrico. A ideia fundamental é promover o desenvolvimento deste tipo de pensamento matemático, através de situações suscetíveis de criar oportunidades para o estabelecimento de generalizações, relações e representações progressivamente mais sofisticadas. O pensamento algébrico é assumido no programa como um dos eixos principais em torno dos quais o ensino-aprendizagem na escolaridade básica se deve desenvolver, adotando uma perspetiva que vê a Álgebra mais como forma de pensar em Matemática, do que apenas o domínio dos símbolos matemáticos e das regras e técnicas para a sua manipulação (Kaput, 1999).

Nas metas curriculares, no 3.° ciclo, por razões não explicadas, a Álgebra surge dividida em dois temas, um com a designação de «Funções, Sequências e Sucessões» (ainda que as sequências e sucessões só sejam mencionadas no 7.° ano) e outro sob a designação de «Álgebra». Com circunscrição da Álgebra ao estudo de expressões, de equações (1.° e 2.° graus) e sistemas de equações (lineares) e de inequações[3] inerente a esta subdivisão e com as especificações das metas apresentadas em cada caso é veiculada uma visão da Álgebra muito limitada, essencialmente centrada no cálculo simbólico. Para além disso, introduzem-se novos conteúdos matemáticos que pressupõem uma acentuada formalização das noções a abordar no âmbito deste tema.

### Insistência em conhecimentos fatuais, terminologia, memorização e formalização

Uma preocupação que perpassa as metas de uma ponta à outra refere-se ao conhecimento terminológico e factual por parte dos alunos, convidando à formalização prematura das noções matemáticas e à mecanização de regras e procedimentos. Isso é bem visível logo na opção escolhida na definição dos objetivos para alguns dos principais conceitos deste tema — «Definir» [funções; sequências e sucessões]... (7.° ano, FSS pp. 56, 57 e 81) — como também no modo como os objetivos do tema são descritos: insistência em formulações muitas delas fazendo quase exclusivamente apelo à designação terminológica, como a seguir se exemplifica agrupando algumas dessas formulações:

> [Designar...] «objeto», «imagem», «domínio», «conjunto de chegada», «variável», «função f de A em B», «contradomínio», «variável independente», «variável dependente», «função numérica», «função de variável numérica», «gráfico cartesiano», «gráfico de f», «equação de G» (como conjunto de pontos), «função constante igual a b», «função linear», «forma canónica da função linear», «coeficiente de f», «função afim», «forma canónica da função afim», «coeficiente de x», «termo independente» (7.° ano, FSS, p. 56)

> [Designar...] «sequência de N elementos» (como função), «termo de ordem n da sequência», «termo geral da sequência», «sucessão», «un», «termo de ordem n da sucessão», «termo geral da sucessão» (7.° ano, FSS, p. 57)

> [Designar...] «fatores numéricos», «constantes», «variáveis» e «indeterminadas», «parte numérica», «coeficiente», «monómio nulo», «monómio constante», «parte literal», «monómios semelhantes», «forma canónica de um monómio», «monómios iguais», «grau», «soma algébrica» (8.° ano, ALG, p. 68)

### Nível de profundidade inadequado para o ensino básico

Como já referimos, as metas curriculares estipulam o ensino de assuntos matemáticos que não constam no programa em vigor. São muitos os exemplos no tema da Álgebra que ultrapassam o âmbito do programa e que não se afiguram apropriados para o ensino básico como, por exemplo, o caso da introdução das «sucessões» no 3.° ciclo, sobretudo pela forma como é feita, apelando ao conceito de função, o que aliás é também proposto para o caso mais geral das «sequências»:

> Identificar, dado um número natural $N$, uma «sequência de $N$ elementos» como uma função de domínio $\{1,2, \ldots, N\}$ (...).(7.° ano, FSS, p. 56)

> Identificar uma «sucessão» como uma função de domínio $N$, designando por $u_n$ a imagem do número natural $n$ por $u$ (...) (7.° ano, FSS, p. 56)

Estes exemplos mostram melhor a desconformidade do que é proposto se atendermos que nas metas para o 3.° ciclo «identificar» e «designar» devem ser entendidos como: «O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente» (p. 48).

Na verdade as metas não se limitam a introduzir novos conhecimentos que o programa não contempla. Introduzem, por vezes, conhecimentos cuja compreensão está manifestamente para além das capacidades dos alunos do ensino básico. Por exemplo, apontam para uma compreensão das propriedades de uma função de proporcionalidade direta própria de uma disciplina de Álgebra Linear do ensino superior:

> Reconhecer, dada uma grandeza diretamente proporcional a outra, que, fixadas unidades, a «função de proporcionalidade direta $f$» que associa à medida $m$ da segunda a correspondente medida $y=f(x)$ da primeira satisfaz, para todo o número positivo $x$, $f(xm)=xf(m)$ (ao multiplicar a medida $m$ da segunda por um dado número positivo, a medida $y=f(m)$ da primeira fica também multiplicada por esse número) e, considerando $m=1$, que $f$ é uma função linear de coeficiente $a=f(1)$. (7.° ano, FSS, p. 57)

A Matemática, e a Álgebra em particular, é por excelência o domínio dos símbolos, da abstração e da formalização. A terminologia e os símbolos matemáticos, e as regras da sua utilização na atividade matemática, constituem um património de inquestionável importância na Matemática e fora dela. A Álgebra, todavia, vai muito além do mero conhecimento e manipulação desses símbolos e os alunos «necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem a manipulação simbólica e o modo como os próprios símbolos podem ser usados» (NCTM, 2007, p. 39). Esta preocupação, que não é manifesta nas metas, e não apenas no que se refere à Álgebra, é hoje largamente aceite em educação matemática e tem vindo a ser incorporada de forma muito generalizada nas orientações e propostas programáticas para o ensino da disciplina.

## Geometria

Na Geometria, ao estudar as figuras geométricas no plano e no espaço, através da identificação e compreensão das suas propriedades, o programa de Matemática tem como ideia fundamental o desenvolvimento do sentido espacial, com ênfase na visualização. Estes termos não surgem nas metas e estas ideias não merecem aí qualquer relevo. Em contrapartida, tal como na Álgebra, abundam as referências a terminologia e a conhecimentos matemáticos inexistentes no programa e desadequados neste nível de escolaridade.

### Formalização do ensino da Geometria, sobrecarregando-o com a memorização de terminologia

A ênfase nos aspetos formais e na memorização, exigindo-se um domínio exagerado e despropositado de terminologia, atravessa fortemente as metas para este tema. Eis alguns exemplos do que é proposto, logo nos 1.° e 2.° anos de escolaridade:

> Utilizar corretamente os termos «segmento de reta», «extremos (ou extremidades) do segmento de reta» e «pontos do segmento de reta». (1.° ano, GM, p. 6)

> Saber que duas figuras equidecomponíveis têm a mesma área e designá-las por figuras «equivalentes». (1.° ano, GM, p. 7)

> Identificar a reta determinada por dois pontos como o conjunto dos pontos com eles alinhados e utilizar corretamente as expressões «semirretas opostas» e «reta suporte de uma semirreta». (2.° ano, GM, p. 12)

Esta valorização excessiva do conhecimento terminológico, logo nos primeiros anos, é bem visível até ao 3.° ciclo como a seguir se exemplifica agrupando algumas das descrições dos objetivos propostos:

> Designar, dados dois pontos O e M, o ponto M' por «imagem do ponto M pela reflexão central de centro O» quando O for o ponto médio do segmento [MM'] e identificar a imagem de O pela reflexão central de centro O como o próprio ponto O. (6.° ano, GM, p. 42)

> [Designar...] «ângulo de dois semiplanos», «semiplanos perpendiculares», «planos perpendiculares», «reta perpendicular a um plano», «pé da perpendicular», «projeção ortogonal do ponto no plano» e «reta normal ao plano em A», «plano perpendicular (ou normal) a *r* passando por *p*», «plano normal a *r* em *p*», «plano mediador», «projeção ortogonal da reta *r* no plano $\alpha$», «distância entre a reta r e o plano $\alpha$», «distância entre os planos $\alpha$ e $\beta$». (9.° ano, GM, p. 77-78)

> [Designar...] «arco menor *AB*», «arco *AB*», «arco maior *AB*», «corda *AB*», «arcos subtensos pela corda *AB*», «arco correspondente à corda *AB*», amplitude de um arco de circunferência *APB*», «ângulo inscrito», «arco capaz do ângulo inscrito», «arco compreendido entre os lados», «segmento de círculo», «segmento de círculo maior» «segmento de círculo menor», «ângulo ex-inscrito num arco de circunferência» (9.° ano, GM, pp. 80–81)

No programa, as transformações geométricas, são introduzidas de modo intuitivo logo no 1.° ciclo, com crescente formalização ao longo dos ciclos seguintes, o que constitui uma alteração relativamente a programas anteriores em linha com as orientações internacionais atuais (NCTM, 2007). Nas metas curriculares surgem apenas no 6.° ano, privilegiando sobretudo os aspetos mais formais, como ilustram os exemplos seguintes:

> Reconhecer, dado um ponto O e as imagens A' e B' de dois pontos A e B pela reflexão central de centro O, que são iguais os comprimentos dos segmentos [*AB*] e [A'*B*'] e designar, neste contexto, a reflexão central como uma «isometria» (6.° ano, GM, p. 42).

> Reconhecer, dado um ponto O e as imagens A', *B*' C' e três pontos A, *B* e C pela reflexão central de centro O, que são iguais os ângulos *ABC* e A'B'C' (6.° ano, GM, p. 42).

Esta ênfase na linguagem formal desde o 1.° ano de escolaridade contraria a ideia hoje bem assente que também em Geometria é necessário partir da linguagem informal para chegar à linguagem formal, e esquece o papel da visualização na identificação das propriedades das figures e na evolução do raciocínio geométrico, ignorando completamente a investigação já realizada sobre o ensino e aprendizagem da Geometria (ver, por exemplo, Battista, 2007).

### Exigência de conhecimentos para além do programa

Na Geometria são numerosos os exemplos de conhecimentos matemáticos completamente à margem do programa a par de outros que são antecipados para o ciclo anterior. É assim que, por exemplo, as noções de ângulos verticalmente opostos e de ângulo côncavo são antecipadas para o 1.° ciclo e os critérios de congruência de triângulos para o 2.° ciclo e que, mais inapropriadamente, logo no 2.° ano, se estipula que os alunos sejam capazes de:

> Identificar e representar triângulos isósceles e equiláteros, reconhecendo os segundos como casos particulares dos primeiros. (2.° ano, GM, p. 12)

> Identificar e representar losangos e reconhecer o quadrado como caso particular do losango. (2.° ano, GM, p. 12)

> Identificar e representar quadriláteros e reconhecer os losangos e retângulos como casos particulares de quadriláteros. (2.° ano, GM, p. 12)

Trata-se, nestes casos, de relações complexas, que implicam a identificação das propriedades das figuras e as suas relações, pressupondo a classificação hierárquica que, de acordo com a investigação em educação matemática, só é adquirida muito mais tarde (Villiers, 2010).

Como exemplos de conhecimentos que o programa não contempla estão casos como «Construir e reconhecer propriedades de homotetias» (7.° ano, GM, p. 54) ou «Provar que a amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm» (9.° ano, GM, p. 81). A este respeito, porém, o caso mais significativo é a inclusão do tópico «Axiomatização das teorias matemáticas» (9.° ano, GM, p. 75). Com o que é estipulado para o ensino neste novo tópico e a perspetiva que lhe está subjacente — que também se estende aos tópicos subsequentes — as metas curriculares induzem uma abordagem da Geometria em completa desconformidade com o programa e hoje reconhecida como desadequada neste nível etário.

## Organização e tratamento de dados

Este tema do programa, que tinha conhecido uma significativa valorização relativamente aos programas de 1990–91, serve, nas metas curriculares, como lugar para uma introdução prematura e despropositada da teoria dos conjuntos. Isso acontece logo desde o 1.° ano, com referências aos termos e expressões «conjunto», «elemento», «pertence ao conjunto», «não pertence ao conjunto», «cardinal do conjunto» e «conjunto vazio», chegando-se mesmo ao ponto de se estipular que os alunos devem «associar o conjunto vazio ao número zero» (NO1, p. 4). No 2.º ano continua-se com as operações com conjuntos:

Associar pela contagem diferentes conjuntos ao mesmo número natural, o conjunto vazio ao número zero e reconhecer que um conjunto tem menor número de elementos que outro se o resultado da contagem do primeiro for anterior, na ordem natural, ao resultado da contagem do segundo. (1.º ano, NO, p. 4)

Utilizar corretamente os termos «conjunto», «elemento» e as expressões «pertence ao conjunto», «não pertence ao conjunto» e «cardinal do conjunto». (1.º ano, OTD, p. 8)

Determinar a reunião e a interseção de dois conjuntos. (2.º ano, OTD, p. 14)

O planeamento, realização a análise de investigações estatísticas, como processo global, é marginalizado nas metas curriculares. A abordagem informal às noções relativas às probabilidades que o programa indica que deve ser realizada no 1.º ciclo é eliminada com o pretexto que não podem ser devidamente ensinados neste nível.

Deste modo, o estudo da OTD — Organização e Tratamento de Dados, que deve servir para desenvolver nos alunos a capacidade de compreensão e de produção de informação natureza estatística em forte conexão com a realidade, é usado para abordar o assunto mais abstrato e de mais difícil acolhimento por parte dos alunos, a teoria dos conjuntos, como ficou amplamente demonstrado em diversas experiências realizadas no século passado, durante o período da Matemática Moderna (1960–80), com resultados desanimadores.

## Capacidades transversais

As capacidades transversais desempenham um papel fundamental no programa. Nas metas curriculares são completamente desvalorizadas. A resolução de problemas é limitada ao papel de aplicação de conhecimentos e o raciocínio e comunicação são indicados na introdução das metas como «indispensáveis ao cumprimento dos objetivos elencados» (p. 1) e nunca mais referidos. Outras capacidades que o programa também refere como lidar com as representações e conexões matemáticas não merecem qualquer atenção. Referências a cálculo mental aparecem apenas de forma episódica e nunca como capacidade geral a desenvolver.

Há um aspeto do raciocínio matemático, no entanto, que é referido com grande destaque, relativo à demonstração. O programa aponta para que no processo de argumentação e justificação matemáticas, os alunos, «produzindo pequenas cadeias dedutivas, familiarizam- se com o processo de demonstração e iniciam o raciocínio geométrico dedutivo (p. 51). As metas vão muito além disto, indicando que os alunos devem «Utilizar corretamente o vocabulário próprio do método axiomático (9.º ano, GM, p. 75) e serem capazes de «Identificar factos essenciais da axiomatização da Geometria (9.º ano, GM, p. 75) bem como «Caracterizar a Geometria Euclidiana através do axioma das paralelas» (9.º ano, GM, p. 76). Assim, referem, por exemplo, que os alunos devem:

Saber que, entre outras possibilidades, existem axiomáticas da Geometria que tomam como objetos primitivos os pontos, as retas e os planos e outras apenas os pontos, e que a relação «*B* está situado entre A e C» estabelecida entre pontos de um trio ordenado (A, B C), assim como a relação «os pares de pontos (*A*,*B*) e (*C*,*D*) são equidistantes», entre pares de pontos podem ser tomadas como relações primitivas da Geometria. (9.º ano, G. p. 75)

O estudo do método axiomático em detalhe, com o formalismo técnico indicado de que este enunciado é um exemplo, é totalmente deslocado no ensino básico, como o são objetivos de aprendizagem que as metas estabelecem a associados a esse estudo.

## Perspetiva educacional

Num documento de cinco páginas enviado como resposta a alguns contributos ao projeto inicial das metas curriculares, os responsáveis pela sua elaboração procuram responder a algumas críticas, detendo-se muito em especial naquelas que se relacionam com a noção de compreensão e o papel das situações contextualizadas na aprendizagem, e também com a resolução de problemas. Contrariando a ideia anteriormente defendida pelo Ministério da Educação segundo a qual a pedagogia deve ser deixada para o professor, apresentam uma perspetiva sobre o ensino e a aprendizagem que não é mais do que a visão do senso comum, hoje em dia amplamente reconhecida como geradora de insucesso em sucessivas gerações de alunos em todos os níveis de ensino.

### Prática e compreensão

Para os responsáveis pelas metas curriculares, a prática e a manipulação de objetos (sem qualquer preocupação explícita de compreensão) são os processos fundamentais na aprendizagem matemática:

A compreensão, objetivo de qualquer aprendizagem, resulta do desenvolvimento contínuo e gradual de um conjunto de conhecimentos adquiridos previamente e que incluem regras, procedimentos e conceitos. (...) [Para a compreensão] a prática e a manipulação continuada dos diferentes conceitos matemáticos têm um papel fundamental. (pp. 1–2)

Múltiplas investigações sobre o ensino e a experiência profissional dos professores demonstram que esta perspetiva é errada. Na verdade, da prática e manipulação de objetos não resulta necessariamente compreensão — muitas vezes resultam incompreensões profundas e quase sempre uma relação muito difícil com esta disciplina. Não se tem em conta que a compreensão tem um carácter holístico e que se desenvolve por etapas em interação com os conceitos e objetos a que respeita, através de processos de atribuição de significado que percorrem todo o processo de aprendizagem (Bruner, 1990; Pirie & Kieren, 1989; Sierpinska, 1994).

### Contexto, concreto e abstrato

Em segundo lugar, os responsáveis pelas metas curriculares consideram que, na aprendizagem da Matemática, é preciso caminhar o mais rapidamente possível para a abstração:

Uma aprendizagem muito contextualizada não favorece a transferência. (...) A capacidade para aplicar conhecimentos matemáticos a novas situações é facilitada pela aprendizagem de conhecimentos abstratos. (p. 2)

A desvalorização da importância do trabalho em contextos significativos para os alunos como ponto de partida para o desenvolvimento das abstrações é um erro educativo repetidamente cometido no passado, correspondendo igualmente ao senso comum sobre a aprendizagem, e grandemente responsável pelo insucesso na aprendizagem da Matemática (Gravemeijer, 2005). Sebastião e Silva (1965–66) entendia que o professor de Matemática é em primeiro lugar um «professor de matematização», considerava que entre os «exercícios que podem ter mais interesse, figuram aqueles que se aplicam a situações reais, concretas» e que o ensino da Matemática carecia de um maior «contacto com o húmus da intuição e da realidade concreta» (pp. 4–5). Esta mobilização da intuição é aliás considerada determinante para a aprendizagem da Matemática, sem a qual, como diz Henri Poincaré (2010/1905), os alunos «não teriam meios de aceder ao entendimento da Matemática, não aprenderiam a gostar dela» e, como acrescenta, «nunca viriam a ser capazes de aplicar a Matemática» (pp. ??)

## Resolução de problemas

Em terceiro lugar, os responsáveis pelas metas curriculares apresentam a sua visão sobre a resolução de problemas que encaram como simples atividade de aplicação de conhecimentos, prévia e isoladamente aprendidos:

A resolução de problemas requer que o aluno adquira e automatize, primeiramente, conhecimentos, regras e procedimentos. (...) Uma estratégia psicopedagógica estruturada em torno de problemas, cuja resolução os alunos devem descobrir [leva a que], muitas vezes [os alunos não chegam] a ter contacto com aquilo que se pretende que aprendam. Pela descoberta, podem adotar procedimentos errados e encontrar falsas soluções (p. 3)

Trata-se de uma perspetiva igualmente decorrente do senso comum que ignora não só que os alunos são capazes de construir estratégias próprias para resolver problemas, como através desse processo se apercebem do significado e alcance de certos conceitos e representações matemáticas. Evidencia-se aqui uma perspetiva sobre o papel dos problemas em Matemática muito limitada e redutora, bem distante da de matemáticos como George Pólya (1945, 1981), autor cujas ideias fundamentais são hoje amplamente reconhecidas no campo da educação matemática.

Os responsáveis pelas metas justificam as suas posições principalmente com argumentos de índole psicológica. Usam a teoria do processamento de informação para argumentar com as limitações da memória de trabalho, tese que assumida de forma simplista implica a impossibilidade de qualquer pessoa resolver qualquer problema minimamente complexo. Esquecem-se que a teoria do processamento de informação é apenas uma teoria entre muitas outras, que tem as suas potencialidades mas também as suas limitações, e que não é no campo da capacidade de resolução de problemas dos alunos em Matemática que tem conhecido as suas aplicações mais significativas.

Estes responsáveis referem-se também à «análise cognitiva das tarefas», como uma «estratégia pedagógica essencial no ensino da Matemática», que «possibilita o treino de procedimentos e operações básicas» (p. 4). Não se trata, evidentemente, de nenhuma novidade, e todo o professor sabe que antes de propor uma tarefa deve fazer a sua análise, procurando identificar que conhecimentos matemáticos lhe podem estar associados e também que estratégias podem usar os alunos para a resolver e eventuais dificuldades para a sua resolução. Isso faz parte da indispensável preparação das suas aulas. Evidencia-se, portanto, a total incompreensão por parte de quem redigiu este documento de que, para além dos conhecimentos formalmente apreendidos pelos alunos, estes são capazes de mobilizar muitas outras ideias e representações, umas mais formais, outras mais informais, e é nessa mobilização em contextos variados e na reflexão sobre essa atividade, os seus resultados e a sua coerência que se joga o essencial da aprendizagem.

Os responsáveis pelas metas fazem, deste modo, uma má utilização das teorias psicológicas no modo como as procuram aplicar à educação. No fundo, perfilham a teoria irrealista que é possível aprender a Matemática sem erros, bastando para isso que aos alunos sejam ensinados os conceitos e procedimentos, desde o início, com todo o rigor matemático. José Sebastião e Silva dizia que «o extremo rigor lógico em vez de formativo pode ser perigosamente deformador» (1965-66, p. 5), que «só errando se aprende verdadeiramente» (1964, p. 5), considerando que a apresentação de uma pretensa Matemática «bacteriologicamente pura» não conduz à aprendizagem mas sim ao desinteresse e à incompreensão.

## Conclusão

Em vários aspetos, as metas curriculares assumem opções que contrariam o espírito e dimensões essenciais do conteúdo do programa em vigor. Desde logo, sobressai o carácter espartilhado e fragmentado do que é proposto para o ensino e a aprendizagem, no estilo da «pedagogia por objetivos» dos anos 70 e 80 que se traduz na formulação de objetivos comportamentais muito específicos, prescritos para cada assunto e ano de escolaridade, prejudicando uma aprendizagem matemática integrada e articulada e limitando acentuadamente a margem de atuação do professor no desenvolvimento curricular. Acresce que o estabelecimento de percursos curriculares obrigatórios por ano de escolaridade a nível nacional contradiz também, frontalmente, a muito apregoada defesa da autonomia das escolas e dos professores e prejudica a conveniente adequação desses percursos curriculares aos alunos, conforme a escola que frequentam e o seu trajeto escolar.

Importa ainda salientar a ênfase nos processos de memorização que as metas curriculares privilegiam, bem evidente nas dezenas de ocorrências das palavras «designa» e «identifica» e outras com o mesmo sentido. Uma expetativa também desadequada do que pode ser a atividade dos alunos em Matemática no ensino básico é denunciada pela profusão dos termos «provar» e «demonstrar». Claramente, a inspiração pedagógica destas metas é a de professores do ensino superior — onde aliás escasseia a reflexão sobre os fracos resultados dos alunos desse nível de ensino e os seus baixos níveis da satisfação — com manifesto desconhecimento dos problemas educativos e de aprendizagem na escolaridade básica.

Importa por fim chamar a atenção que as metas curriculares, tal como são formuladas, ignoram que a Matemática escolar já vem desenvolvendo desde há muito uma linguagem própria que alguns matemáticos consideram pouco rigorosa por não seguir de perto a linguagem da Matemática mais avançada, mas que serve de forma bem mais eficaz para orientar o ensino e a aprendizagem, nomeadamente no ensino básico. Com a opção tomada, mais do que proporcionar algum apoio e clarificação efetivamente úteis, estas metas com que os professores são agora confrontados surgem como um corpo estranho, desenquadrado do nível de escolaridade a que se dirigem que, a manter-se a intenção da sua concretização, causará, sobretudo grande perturbação no trabalho dos professores com consequências muito negativas na aprendizagem dos alunos. Com estas metas, o ensino da Matemática em Portugal retrocede aos anos 40 do século passado (no que respeita à Álgebra e Geometria), aos anos 60 (no que respeita à teoria dos conjuntos) e aos anos 70 (em termos pedagógicos). Entretanto, passaram mais de 40 anos, mudou o mundo e a sociedade, e o que na altura não serviu (a não ser para uma pequena minoria), hoje em dia, servirá certamente muito menos.

## Notas

[1] Noção entendida como dizendo respeito à capacidade de reconhecer a grandeza relativa e absoluta dos números e que estes podem assumir diversos significados — designação, quantidade, localização, ordenação e medida —, de decompor números e usar como referência números particulares, e de usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas e de realizar cálculos por estimação (ME, 2007, p. 13).

[2] A qualificação dos números inteiros como «relativos» — utilizada nas metas curriculares (também no caso dos números racionais) não é atualmente seguida na generalidade dos países e não nos parece ter utilidade.

[3] É também incluído o estudo da potenciação nos universos numéricos estudados no ciclo anterior, bem como das raízes quadradas e cúbicas e das grandezas inversamente proporcionais.

## Referências


Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.

Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gallardo, A. (2000). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171-192.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(1), 51-61.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp.130-140). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 7-11.

Poincaré, H. (2010). Intuição e lógica em matemática (cap. I de *La valeur de la science*, 1905). Em A.F. Oliveira (Ed.) *Filosofia da Matemática — breve antologia de textos de Henri Poincaré*, pp. 37-53. Lisboa: CFCUL.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery* (ed. original 1962/1965). New York, NY: Wiley.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer.

Silva, J. S. (1964a). *Compêndio de Matemática* (1.° vol. – 6.° ano). Lisboa: MEN.

Silva, J. S. (1965-66). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (2.°e3.° Vol. – 7.° ano). Lisboa: MEN.

Verschaffel, L., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 51-82). Roterdham: Sense.

Villiers, M. (2010). Some reflection on the Van Hiele theory. Invited plenary presented at the 4th *Congress of Teachers of Mathematics* of the Croatian Mathematical Society, Zagreb.



**João Pedro da Ponte**

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

**Henrique Manuel Guimarães**

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

**Lurdes Serrazina**

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

José Paulo Viana

## TIRO AO ALVO

No Grande Concurso de Tiro de Torres Novas, cada concorrente disparava cinco vezes. Acertar na mouche dava direito a 20 pontos, enquanto as restantes zonas do alvo valiam 15, 10, 5, 2 e 1.

As quatro melhor classificadas ficaram empatadas com 61 pontos. Por acaso, soubemos que:

O último tiro da Márcia valeu 5 pontos.

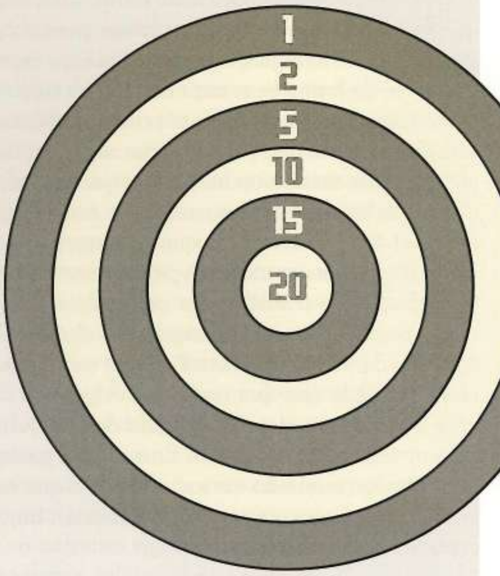
Quatro dos cinco tiros da Inês acertaram na mesma zona do alvo.

Nenhuma delas falhou um tiro, exceto a Sofia que errou o alvo logo no primeiro disparo.

O primeiro e o último tiros da Carolina foram na mouche.

Por sorte, foi possível ordenar as quatro atiradoras aplicando a alínea do regulamento que dizia: «Em caso de empate, tem vantagem quem acertar mais vezes na mouche.»

A quem foram atribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?




*(Respostas até 30 de setembro, para zepaulo46@gmail.com)*

### UM RETÂNGULO E MAIS OUTRO

O problema proposto no número 117 de Educação e Matemática foi o seguinte:

Numa aula, a Catarina desenhou um retângulo ABCD, traçou a diagonal BD e, a partir dela, construiu um novo retângulo BDEF, de tal modo que o ponto C passou a pertencer ao lado EF.

As opiniões da turma dividiram-se quando os presentes começaram a pensar nas áreas respetivas.

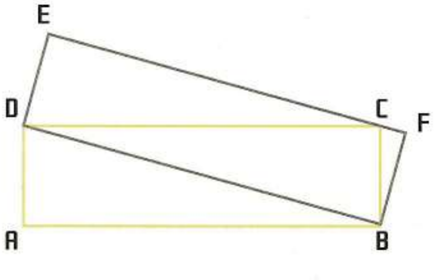
– O segundo retângulo tem maior área que o primeiro – disse o Francisco.

– Não, o primeiro é maior – contrapôs o João.

– Nada disso – sentenciou a Patrícia. – Ambos têm a mesma área.

– Tudo depende do retângulo inicial – discordou a Lena. – Nuns casos é ele o maior, noutros é o segundo.

Quem tem razão?




Recebemos 22 respostas: Adriana Brites (Torres Novas), Adriana Macedo, Alice Martins (Torres Novas), Andreia Sousa, Carlos Dias, Carolina Cabeleira e Márcia Ferreira (Torres Novas), Fátima Coelho, Ema Modesto e João Fernandes (Aveiro), Francisco de Matos Branco (Ovar), Francisco Vicente, Graça Braga da Cruz (Ovar), Ilca Cruz, Joana Branco e Rita Pereira (Torres Novas), Inês Delgado e Sofia Bicho (Torres Novas), João Simões, Isabel Viana (Porto), José Tinoco (Arcos de Valdevez), Luís Bernardino, Mariana Sebastião e Carolina Monteiro (Torres Novas), Paulo Correia, Pedro Semião (Torres Novas), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Metade das respostas começaram por usar o programa Geogebra para chegar à solução. A partir de um retângulo ABCD que possa ser alterado, constrói-se o segundo retângulo BDEF de acordo com as condições do problema. Pede-se as áreas dos retângulos e depois, alterando as dimensões do primeiro, rapidamente se tiram conclusões. Claro que isto não é uma prova e alguns juntaram uma demonstração do resultado, tal como fizeram os restantes leitores que nos enviaram soluções.

Os métodos seguidos podem variar bastante: partição de figuras, igualdade de triângulos, geometria analítica, trigonometria.

De todas estas resoluções gostámos especialmente, pela sua simplicidade, das da Adriana Macedo e do Francisco Vicente. Apreciem.

A área do triângulo BCD é metade da área do retângulo ABCD porque BD é uma diagonal.

A área do triângulo BCD é metade da área do retângulo BDEF porque têm a mesma base e a mesma altura.

Conclusão, os retângulos ABCD e BDEF têm a mesma área.

# Um olhar sobre uma competição matemática na Web – A resolução de problemas para além da sala de aula

Nélia Amado e Susana Carreira

## Novos formatos e novos propósitos das competições matemáticas

Em Portugal, tal como em todo o mundo, o número de competições matemáticas tem aumentado, assumindo as mais diversas formas, conteúdos e durações e dirigindo-se a grupos de alunos cada vez mais alargados. São exemplos de competições bem conhecidas, as Olimpíadas Portuguesas de Matemática e as Olimpíadas Internacionais de Matemática, destinadas a alunos especialmente talentosos, acontecendo a par de outras como o concurso Canguru Matemático e os Campeonatos de Matemática SUB12 e SUB14[1] que, em contrapartida, têm um caráter marcadamente inclusivo, isto é, são abertos a alunos com diversos graus de aptidão para a resolução de problemas.

Um caso paradigmático, de um país com uma longa e arreigada tradição de competições matemáticas, fortemente vocacionadas para a descoberta de talentos e para a formação de futuros matemáticos, é o da Hungria que mostra atualmente uma alteração na forma de entender o alcance deste tipo de projetos. Neste país, ainda que a competição continue a ser vista como um meio essencial para envolver os alunos e motivar o seu interesse pela matemática, o lançamento de novos formatos, bastante mais abertos e menos seletivos, refletem uma mudança no foco e objetivo das competições, que se afastam de um modelo estrito de procura de talentos e se aproximam de uma abordagem mais inclusiva centrada na ideia de «enriquecimento» da formação matemática dos jovens (Stockton, 2012).

Muitos estudos internacionais, como o PISA, revelam que os alunos também aprendem matemática fora do currículo escolar, designadamente em atividades extracurriculares, clubes de matemática, feiras de ciências, semanas da matemática, escolas de verão, em sítios da Internet e em competições matemáticas. Tal aprendizagem tem como paralelo uma mudança positiva nas atitudes dos alunos, aumentando o seu gosto pela disciplina de matemática e desenvolvendo a sua autoconfiança.

Resultados de estudos recentemente produzidos (entre os quais estão trabalhos levados a cabo por investigadores do Canadá, EUA, Israel, Itália, Suíça e Dinamarca) mostram que a participação dos alunos em competições matemáticas, seja qual for o seu formato, tem um efeito positivo na sua motivação para a aprendizagem da matemática. Também foi observado que tanto os alunos muito bons como aqueles que revelam algumas dificuldades na matemática escolar obtêm benefícios em participar neste tipo de atividades para além da sala de aula.

A aprendizagem da matemática para além da escola tem sido, por outro lado, particularmente encorajada através do uso de ambientes tecnologicamente versáteis. Os campeonatos SUB12 e SUB14 são um exemplo de tais ambientes pois decorrem a partir da Internet, usando o correio eletrónico como veículo de comunicação à distância entre os participantes e a equipa organizadora. Outros projetos que revelam algumas caraterísticas semelhantes e que tiram partido dos ambientes digitais, designadamente, da Internet, do e-mail e do chat são, por exemplo, o projeto CAMI (em curso no Canadá) e o projeto Virtual Maths Teams (desenvolvido nos Estados Unidos da América).

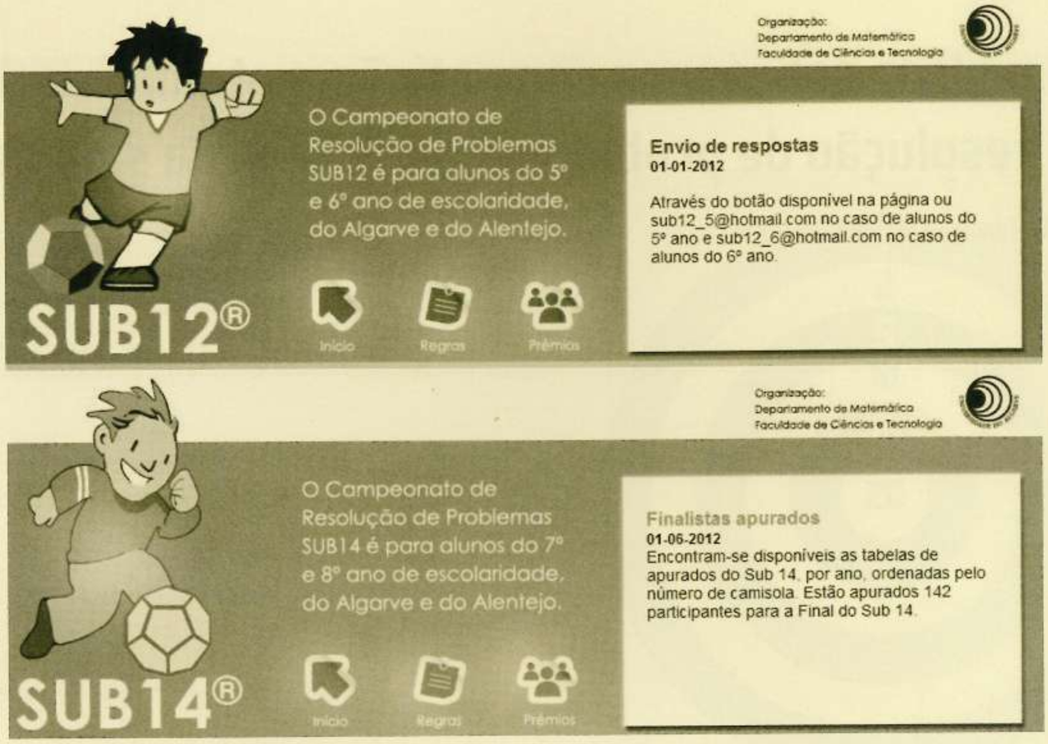



**Figura 1.**—Imagens das páginas dos campeonatos SUB12 e SUB14

## Um estilo de competição matemática online

Os campeonatos SUB12 e SUB14, em funcionamento desde 2005, são competições online de resolução de problemas que decorrem anualmente, entre janeiro e junho, com a colocação online de um problema de matemática, de quinze em quinze dias. O SUB12 destina-se a alunos dos 5.º e 6.º anos de escolaridade e o SUB14 dirige-se a alunos dos 7.º e 8.º anos; ambos os campeonatos abrangem os alunos das regiões do Algarve e do Alentejo. Os concorrentes resolvem cada um dos problemas, em casa ou na escola, enviando as suas respostas, por correio eletrónico, para o e-mail do respetivo campeonato (Fig. 1).

Uma característica distintiva do SUB12 e do SUB14 está no feedback que é disponibilizado regularmente aos participantes. A organização envia uma resposta por e-mail a cada aluno participante, informando se a resolução está certa ou se, pelo contrário, é necessário acrescentar algum aspeto ou rever o processo apresentado. Os comentários enviados às respostas recebidas encorajam os participantes, sugerem a revisão da resolução, se for o caso, e fornecem algumas pistas que os podem ajudar a ultrapassar dificuldades. Esta característica, quando interiorizada pelos participantes, dá-lhes o ânimo necessário para não baixarem os braços e solicitarem ajuda perante qualquer obstáculo na resolução do problema.

A página Web inclui um espaço para notícias que chamam a atenção para detalhes organizativos e informações importantes. Apresenta periodicamente as tabelas de classificação dos participantes, o que permite a alunos, professores e familiares estarem a par do desempenho dos concorrentes ao longo do campeonato. Além disso, é ainda publicada uma seleção de resoluções de diferentes alunos, que pretende ser fiel ao trabalho feito por cada um e ilustrar a variedade de abordagens possíveis para chegar à solução do problema.

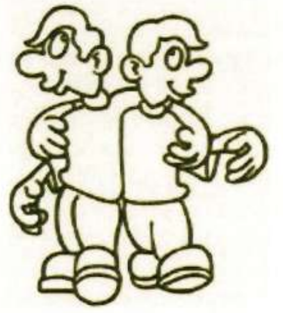
Os participantes podem comunicar o seu raciocínio, na resolução dos problemas propostos, de forma inventiva, recorrendo às ferramentas tecnológicas que preferirem. As tecnologias digitais de uso quotidiano (especialmente o computador) desempenham um papel importante na resolução dos problemas e na expressão dos processos utilizados. Por isso, o estudo da utilização das tecnologias no âmbito da participação dos jovens no SUB12 e no SUB14, tanto para a resolução dos problemas como para a expressão e explicação do raciocínio seguido, é da maior importância.

Como a participação na competição consiste em resolver problemas matemáticos a distância, os alunos podem beneficiar da ajuda de colegas, professores ou membros da família. Além disso, podem participar na fase de apuramento, individualmente ou em grupos de dois ou três alunos. Atualmente, perto de 2000 alunos começam o campeonato SUB12 e perto de 1000 alunos entram no SUB14.

Após a fase de apuramento — cujo teor é essencialmente formativo e representa a oportunidade de adquirir conhecimento e experiência na resolução de problemas matemáticos — tem lugar a final que é presencial e decorre na Universidade do Algarve. Qualquer participante atinge a final se enviar respostas corretas e completas a pelo menos oito dos dez problemas propostos durante a fase de apuramento. Na final, os alunos têm de resolver um conjunto de quatro ou cinco problemas, trabalhando individualmente e usando apenas papel e lápis. Um júri constituído por professores de matemática, englobando docentes do ensino básico, do secundário e do superior, avalia e classifica as respostas dos finalistas, apurando três vencedores que são premiados em cada um dos campeonatos.

Os problemas utilizados nos campeonatos não têm a preocupação de se ajustarem aos temas curriculares, mas antes pretendem que os alunos mobilizem conceitos, procedimentos e formas de raciocínio matemático. Além disso, os problemas são projetados para dar aos alunos a possibilidade de usar diferentes abordagens (papel e lápis, recurso às TIC, uso de materiais concretos, etc), diversas estratégias (tentativa e erro, procedimentos algébricos ou numéricos, propriedades geométricas, etc), e várias representações (figuras, tabelas, diagramas, linguagem simbólica e natural, resultados obtidos com o computador, etc), permitindo assim o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, em sentido amplo. Os alunos têm total liberdade relativamente ao modo de apresentar as suas soluções (escritas à mão e digitalizadas, usando o computador — com ou sem a ajuda de software específico —, recorrendo a imagens, etc.) A qualidade das respostas dos alunos não é aferida em função das suas escolhas de abordagens, estratégias, representações e formas de apresentação da solução, mas sim em termos da exatidão e justificação do processo de resolução. Neste sentido, independentemente do grau de sofisticação matemática, todas as respostas corretas e completas são igualmente valorizadas.

**Problema 1.—E lá se encontraram...**



O Alexandre e o Bernardo vivem a uma distância de 22 km um do outro e querem encontrar-se mas só têm uma forma de fazer o caminho ... a pé!
Nas férias decidem que irão ao encontro um do outro logo de manhã. O Alexandre parte da sua casa às 8 horas da manhã e vai caminhando a uma velocidade de 4 km por hora. O Bernardo sai de casa uma hora mais tarde e caminha a uma velocidade de 5 km por hora.
Nenhum dos dois amigos levou relógio mas é possível saber a que horas se encontraram. Que horas eram?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

**—Enunciado do Problema 1 do SUB14, edição de 2011/12**

## A resolução de problemas para além do aspeto competitivo

De modo semelhante ao que é argumentado por outros investigadores, a propósito da competição Rally Matemático Transalpino (RMT), também aqui estamos a falar de muito mais do que uma competição matemática; podemos asseverar que se trata de uma experiência de educação matemática e de aprendizagem através da resolução de problemas: «O RMT não é apenas uma competição, é também a oportunidade de analisar detalhadamente os resultados e de dar destaque a diferentes procedimentos, representações e dificuldades» (Grugnetti e Jaquet, 2006, p. 3). Esta e muitas outras competições de caráter inclusivo e desafiador, como acontece com os campeonatos SUB12 e SUB14, abraçam objetivos educacionais relevantes dos quais sobressai a consciência clara de que resolver problemas é fazer matemática.

A aprendizagem da matemática, como bem sabemos, não é apenas o domínio de cálculo e de técnicas nem equivale a saber o que está no manual. A resolução de problemas constitui o objetivo e o alicerce da aprendizagem por experiência, que dá um sentido às situações que se podem resolver matematicamente. O contexto do RMT é estimulante, os problemas propostos são significativos e originais, os alunos envolvem-se e aprendem a ser responsáveis. Na verdade, os problemas propostos não são simplesmente exercícios de aplicação do último capítulo que foi estudado, mas situações originais a resolver matematicamente (Grugnetti e Jaquet, 2006, p. 2).

A resolução de problemas é atualmente reconhecida como uma atividade relevante na matemática escolar, em Portugal tal como em muitos países do mundo. Porém, estudos comparativos de larga escala, como o TIMSS ou o PISA, apontam a resolução de problemas como uma das capacidades em que os alunos portugueses revelam um desempenho mais baixo.

A resolução de problemas de matemática exige mais do que conhecimento de procedimentos e técnicas, exige a capacidade de os mobilizar e colocar em ação, de pensar em estratégias, que à partida não são diretas nem pré-estabelecidas, e de recorrer a diversas formas de comunicar o raciocínio e o processo de resolução. Enfim, implica mobilizar e desenvolver uma variedade de competências para atingir um fim. O indivíduo não tem, de antemão, qualquer algoritmo ou procedimento já construído que lhe garanta a solução (*ver* problema 1).

O design das competições SUB12 e SUB14 proporciona aos alunos oportunidades para a transferência de conhecimentos e habilidades entre a matemática escolar e a matemática para além da escola. Os resultados de investigações realizadas mostram que os participantes usam frequentemente os conhecimentos adquiridos na sala de aula mas também revelam sinais de criatividade, quer porque os alunos podem escolher livremente a abordagem a seguir, em particular lançando mão das tecnologias de uso quotidiano ou mesmo de software mais específico, quer ainda porque não têm restrições de tempo significativas para resolver os problemas (Jacinto, Amado & Carreira, 2009; Amado, Amaral & Carreira, 2009; Moyer, Niezgoda & Stanley, 2005). De uma forma breve, com base numa pequena seleção de respostas dos participantes ao problema 1 do SUB14, é possível obter uma ideia clara de como as estratégias variam, de como os modos de exprimir o raciocínio são diversos e de como os modelos concetuais presentes na abordagem ao problema demonstram formas de compreender a situação proposta e de a resolver matematicamente.

O participante A1 optou por traduzir o problema por uma equação, começando por definir a variável $t$ como sendo o tempo que o Alexandre leva a percorrer o caminho até ao ponto de encontro e deduzindo que o tempo do Bernardo será $t-1$. Depois foi traduzindo as diversas informações do problema para linguagem simbólica e estabeleceu uma condição que envolve as velocidades de deslocamento de cada amigo e a distância total (figura 2).

A opção por resolver uma equação foi a estratégia menos frequente nas cerca de mil resoluções recebidas a este primeiro problema. A grande maioria dos participantes apresentou uma resolução escrita, muitas vezes na própria janela de texto do e-mail, sem grande recurso a formalismo matemático, usando apenas a simbologia das operações elementares, como no caso da resolução do grupo de alunos A2. Apesar da sua simplicidade, a resposta deste grupo demonstra a compreensão do problema, a noção de que os dois amigos se deslocam em sentidos opostos, de que há um desfasamento no tempo de partida de ambos e de que o somatório das distâncias percorridas terá de ser igual à distância que os separava inicialmente (figura 3).

Por vezes, alguns alunos, ao efetuarem uma resolução semelhante à anterior, com papel e lápis, optam por digitalizar a folha com a resolução e enviar em anexo. Foi esta a decisão do participante A3 para enviar a sua resposta (figura 4).

O participante A4 apresenta uma forma diferente de exprimir o raciocínio que utilizou. Construiu um esquema em que foi ilustrando, a cada meia hora, o caminho que os dois amigos percorreram e a posição em que cada um se encontrava relativamente ao outro e ao ponto de partida. Para além de uma clara intenção de tornar a resolução visualmente expressiva, este aluno mostra a capacidade criativa de imaginar um esquema estático que representa eficazmente um processo dinâmico e que torna clara a sua resolução e a solução do problema. A esta situação não é alheio o facto de os participantes disporem de um período de duas semanas para pensarem e criarem resoluções que se destacam pela originalidade das representações usadas e das suas formas de expressão do pensamento matemático. É uma das características da competição que se traduz numa diferenciação daquilo que os alunos conseguem produzir comparativamente com o trabalho mais habitual na sala de aula (figura 5).

Outros exemplos de utilização de esquemas em que os participantes revelam bastante criatividade e cuidado no modo como explicam detalhadamente o seu raciocínio, estão presentes nas resoluções dos participantes A5 e A6. Estes participantes, à semelhança do anterior, evidenciam a sua preocupação em criar um cenário do problema — aquilo a que alguns autores designam por um «modelo real» da situação —, o que permite imediatamente perceber a importância de se considerarem contextos reais como promotores da atividade matemática dos alunos (figuras 6 e 7).

Nestes três últimos casos os participantes apenas necessitaram de recorrer a programas informáticos de uso geral, como o processador de texto e as ferramentas de desenho para expressarem os seus raciocínios e as suas estratégias de resolução. Estas resoluções exemplificam também a destreza que muitos destes jovens «nativos digitais» têm na utilização de ferramentas tecnológicas. Para além de saberem resolver o problema de matemática, estes jovens tiram partido de diversas ferramentas do editor de texto, como por exemplo, a edição de imagens, a utilização de objetos de desenho ou a composição e tratamento gráfico do texto.

Outra resolução interessante foi a da equipa de participantes A7 que recorreu ao Geogebra. O grupo de alunos que apresentou esta resolução percebeu que existia uma relação entre o tempo decorrido e a posição de cada um dos amigos que caminhavam um ao encontro do outro. A representação gráfica num sistema de eixos permitiu encontrar o ponto de intersecção dos gráficos lineares que representam a posição de cada amigo ao longo do tempo e proporcionou a solução do problema. O ponto de intersecção deu-lhes a hora e a posição em que os amigos se encontraram (figura 8).

O recurso a tabelas foi também uma estratégia frequente entre os participantes no campeonato. Na resolução seguinte, apresentada pelo participante A8, os dados do problema surgem «arrumados» numa tabela de dupla entrada. O aluno colocou, na vertical, o tempo (em horas) e, na horizontal, a distância percorrida por cada um dos amigos. Na linha inferior da tabela é feito o controlo da soma das distâncias percorridas por cada um dos amigos (figura 9).

## Em conclusão

O projeto de investigação sobre competições matemáticas *Problem@Web*,[2] atualmente em curso, tem como um dos seus focos de investigação as estratégias utilizadas na resolução de problemas de matemática, as formas de representação e expressão do pensamento matemático, designadamente do ponto de vista da criatividade matemática dos jovens, e o uso das tecnologias como ferramentas para a resolução de problemas.

No âmbito deste projeto, os resultados obtidos mostram que os participantes nos campeonatos de resolução de problemas SUB12 e SUB14, conseguem, efetivamente, delinear e pôr em prática as mais diversas estratégias e exprimir com eficácia e desembaraço o seu pensamento em torno da resolução de cada problema. Assim, muito para além do aspeto competitivo, estes são contextos reveladores do modo como a resolução de problemas abre caminho ao desenvolvimento de modos de pensar matematicamente e são também elucidativos do desenvolvimento da compreensão matemática.

As resoluções apresentadas são exemplos de como é importante, enquanto experiência de aprendizagem, a participação dos jovens em competições desta natureza, que permitem mostrar habilidades dos alunos que nem sempre seriam visíveis. Estas soluções destacam a variedade de abordagens, estratégias e representações que os alunos usam na resolução de um problema de uma competição como o SUB12 ou o SUB14. As resoluções também ilustram e dão relevo a um dos aspetos enfatizados nestas competições: a explicação e a comunicação do raciocínio subjacente à determinação da solução de um problema. A preocupação dos alunos com o uso de representações significativas parece ser outra característica predominante das suas respostas. A maioria das soluções enviadas incluem figuras, esquemas, tabelas ou gráficos e uma maior ou menor presença de linguagem algébrica, em todos os casos reveladores da compreensão do problema e da solução alcançada.

O projeto Poblem@Web procura obter uma perspectiva alargada sobre o modo como os estudantes lidam com a resolução de problemas matemáticos, para além da escola, em especial dentro do contexto de uma competição matemática inclusiva. Até agora, os resultados suportam duas ideias principais: (1) os alunos usam matemática que não é apenas subordinada aos currículos escolares, e (2) porque têm a liberdade de escolher

tempo que o Alexandre leva a fazer o percurso=t
tempo que o Bernardo leva a fazer o percurso=t-1
percurso feito pelo Alexandre= 4t
percurso feito pelo Bernardo= 5(t-1)
a soma destes percursos=22km

$4t+5(t-1)=22$
$4t+5t-5=22$
$9t=27$
$t=3$

R: Quando o Alexandre andou 3h e o Bernardo 2h encontraram-se, isto é às 11h.

**Figura 2.**–Resolução do participante A1

Date: Fri, 13 Jan 2012 20:29:13 +0000
Subject: Resposta_SUB14
To: sub14_7@hotmail.com
From: xxxxxxxxxxxxxxx

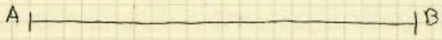
| Camisola | Nome | Turma | Escola | Concelho | E-mail |
|---|---|---|---|---|---|
| xxx | xxxxxxxxxxx | xx | xxxxxxxxxxxx | xxxxxxx | xxxxxxxxxxxxxxxxxxx |
| xxx | xxxxxxxxxxx | xx | xxxxxxxxxxxx | xxxxxxx | xxxxxxxxxxxxxxxxxxx |
| xxx | xxxxxxxxxxx | xx | xxxxxxxxxxxx | xxxxxxx | xxxxxxxxxxxxxxxxxxx |

Resposta:
O primeiro a partir é o Alexandre, que sai de casa às 8 horas, andando 4 Km/h. Passado 1 hora, às 9 horas, andou 4 Km. Como a distância que separa os dois é de 22 Km, subtraimos 4 Km a 22 Km, cujo resultado é 18, ficando assim a distância entre os dois de 18 Km. Às 9 sai de casa o Bernardo, andando 5 Km/h, e passado uma hora, às 10 horas, ele e o Alexandre andaram os dois em direçao um ao outro, (4+5=9). Retira-se assim à distância entre eles (18 Km) os 9 Km (18-9=9), ficando assim às 10 horas a uma distância de 9 Km um do outro. Às 11 horas, encontram-se finalmente, pois andando novamente o Alexandre 4 Km e o Bernardo 5 Km (9Km) 9-9=0, por isso o Alexandre andou 12 Km e o Bernardo 10 Km, durante 3 e 2 horas repectivamente, encontrando-se às 11 horas.

**Figura 3.**–Resolução da equipa de participantes A2

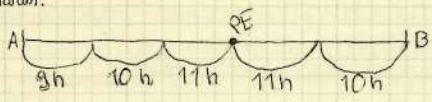
Resolução do 1º Problema

Após uma leitura do enunciado e da interpretação do mesmo, percebi que o Alexandre e o Bernado estavam a uma distância de 22 Km e queriam-se encontrar. O Alexandre anda 4 Km por hora e sai às 8 horas de casa. O Bernardo sai uma hora depois do Alexandre, ou seja, sai às 9 horas de casa e demora 5 Km por hora.
A seguinte linha reta representa a distância que distancia o Alexandre do Bernardo.




A = Alexandre
B = Bernardo

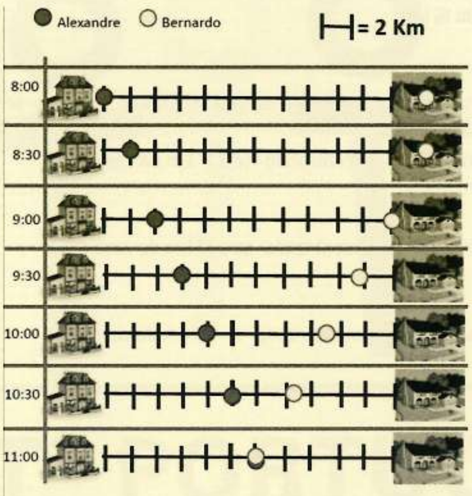
Em seguida, utilizaremos as "ondinhas" e avanceremos quatro ou cinco quadrados dependentemente do rapaz que for. Assim descobriremos a que horas se encontraram.




A = Alexandre
B = Bernardo
PE = Ponto de encontro, onde os amigos se encontraram.

R.: Com este esquema podemos afirmar que o Alexandre e o Bernardo se voltaram a encontrar às 11horas.

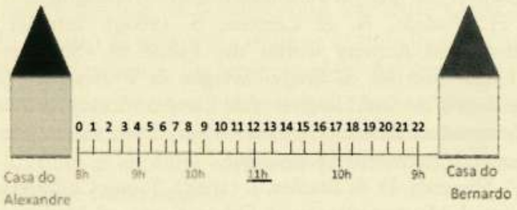
**Figura 4.**–Resolução do participante A3




**R: Encontrar-se-ão às 11 h**

**Figura 5.**–Resolução do participante A4

**R: Os dois amigos encontraram-se às 11:00 horas da manhã.**




**- O Alexandre saiu de casa às 8:00h da manhã, às 9h tinha andado 4km, às 10h tinha andado 8km, ás 11h tinha andado 12km.**
**- O Bernardo saiu de casa às 9h da manhã, às 10h tinha andado 5km. Às 11h tinha andado 10km.**
**- Logo:**

$$10+12=22km$$

**Ou seja encontraram-se às 11h da manhã.**

**Figura 6.**–Resolução do participante A5


O Alexandre abalou de casa ás 8h, a cada hora que passa ele percorre 4km.
O Bernardo abalou uma hora depois, percorrendo 5km por hora.
Quando o Bernardo abalou de casa, o Alexandre já tinha percorrido 4km. Quando o Alexandre completa 8km, o Bernardo está a completar 5km.
As setas vermelhas significam que essas distâncias foram percorridas na mesma hora.
As setas verdes significam que essa distâncias foram percorridas na mesma hora.
O Alexandre percorre 12km e o Bernardo percorre 10km. Os dois amigos encontram-se ao fim de três horas, ou seja, encontram-se às 11horas.

**Figura 7.**–Resolução do participante A6

**Alexandre - 4 km/h**
**Bernardo - 5 km/h**

| | Horas / Km | 8 horas | 9 horas | 10 horas | 11 horas |
|---|---|---|---|---|---|
| Alexandre | 4 Km/h | 0 km | 4 km | 8 km | 12 km |
| Bernardo | 5 Km/h | 0 km | 0 km | 5 km | 10 km |
| Total | | 0 km | 4 km | 13 km | 22 km |

**Figura 9.**–Resolução do participante A8

**Alexandre:**
Às 8 horas foi quando ele saiu de casa, não percorreu nenhum km.
Às 9 horas tinha andado 4 km.
Às 10 horas tinha andado 8 km.
Às 11 horas tinha andado 12 km.
Ao meio dia tinha andado 16 km.

**Bernardo:**
Sai de casa 1 hora mais tarde que o Alexandre, ou seja às 9 horas encontra-se a 22 km da casa do Alexandre.
Às 10 horas tinha percorrido 5 km, encontrando-se a 17 km da casa do Alexandre.
22 - 5 = 17
Às 11 horas tinha percorrido 10 km, encontrando-se a 12 km da casa do Alexandre.
17 - 5 = 12
Ao meio dia tinha percorrido 15 km, encontrando-se a 7 km da casa do Alexandre.

Graficamente:

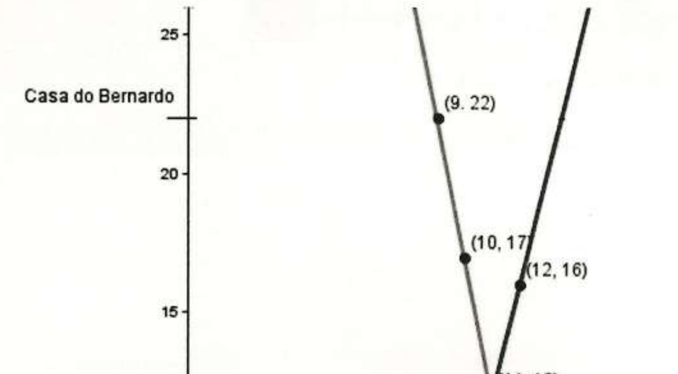



**Figura 8.**–Resolução da equipa de participantes A7

qualquer abordagem, estratégia, ou representação para resolver os problemas, há uma ampla gama de respostas para cada problema que não apenas são válidas mas também valorizadas. Há também evidências de um aumento no número de alunos que tira partido das tecnologias digitais. As soluções que fazem uso da tecnologia tendem a afastar-se mais de uma perspetiva tipicamente escolar e a envolver um pensamento matemático interessante, sobretudo do ponto de vista da capacidade representacional envolvida na interpretação e análise das situações propostas.

## Notas

[1] O SUB12 e SUB14 são Campeonatos de resolução de Problemas organizados pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/

[2] Projeto nº PTDC/CPE-CED/101635/2008, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia. https://www.sites.google.com/site/problematweb/

## Referências

Amado, N., Amaral, N. & Carreira, S. (2009). A liberdade que as tecnologias permitem: Trabalhando os números e as capacidades matemáticas transversais. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Orgs.). *Números e Estatística: reflectindo no presente, perspectivando o futuro*. Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Grugnetti, L. & Jaquet, F. (2006). The transalpine mathematics rally in primary and low secondary school: a problem-solving and a maths education experience. Artigo aceite no ICMI Study 16 – Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. [Disponível em: http://www.amt.edu.au/icmis16pitagrugnetti.pdf].

Jacinto, H., Amado, N. & Carreira, S. (2009). Internet and Mathematical Activity within the Frame of «Sub 14». In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.) *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1221–1230). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Moyer, P., Niezgoda, D. & Stanley, J. (2005). Young Children's Use of Virtual Manipulatives and Other Forms of Mathematical Representations. In W. J. Masalski & P. C. Elliot (Eds.), *Technology-supported Mathematics Learning Environments* (pp. 17–34). Reston: NCTM.

Stockton, J. C. (2012). Mathematical Competitions in Hungary: Promoting a Tradition of Excellence & Creativity. *The Mathematics Enthusiast*, 9(1–2), p. 37–58.

Nélia Amado e Susana Carreira

Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade do Algarve & UIDEF da Universidade de Lisboa

# 15 Anos $T^3$

**José Paulo Viana**

Almada, novembro de 1996. Éramos uma meia dúzia. No meio da azáfama do ProfMat, resolvemos à última hora fazer uma sessão especial, já depois de todos os trabalhos do encontro do dia, para apresentarmos aos professores interessados um projeto a que a APM tinha aderido pouco antes. Iríamos falar de uma tecnologia quase desconhecida que tinha aparecido pouco tempo antes. A sessão foi anunciada no boletim do Profmat para o dia seguinte às 19h.

Quando, uns 15 minutos antes da hora marcada, chegámos à sala que nos tinha sido destinada, ficámos um pouco aflitos. Em vez de uma sala de aulas normal para acolher os 10 ou 20 professores que, em vez de ir descansar um pouco ao hotel ou a casa, arriscavam ir ouvir-nos, tinham-nos destinado uma sala enorme com quase 100 lugares. Psicologicamente, desmoraliza sempre um pouco falar para uma sala quase vazia.

As pessoas começaram a chegar e, de repente, apercebemo-nos que a sala estava à cunha. E assim, no meio de um interesse generalizado e de muito entusiasmo, apresentámos o Projeto $T^3$ (Teachers Teaching with Technologie). Foi uma surpresa (e um prazer) ver ali reunidos tantos professores que não tinham cristalizado no tempo e nas rotinas e que continuavam prontos a experimentar, a testar e a integrar novas práticas de ensinar Matemática.

Mas tudo tinha começado uns tempos antes.

Há já uns anos que, com a APM a servir de elo de ligação, alguns professores andavam a usar calculadoras científicas, e muito raramente as gráficas, nas aulas com os seus alunos. Iam-se fazendo experiências e ia-se discutindo em torno delas.

Em 1995, dois professores da APM foram convidados para ir a Columbus, Ohio, frequentar um curso integrado no $T^3$, um projeto inovador, criado na universidade daquela cidade dos Estados Unidos por Bert Waits e Frank Demana e cujo lema era «O Poder da Visualização». Lá fui eu, meio deslumbrado com tudo o que me ia acontecendo. De entre várias opções, escolhi o curso de geometria onde se ia trabalhando com uma calculadora gráfica e um computador. As sessões do curso alternavam com reuniões mais alargadas onde se discutia como integrar estas tecnologias no ensino, que atividades propor aos alunos, como as explorar com eles, que metodologias seguir, o que ensinar e como fazê-lo.

Passaram-se quatro dias e, quando o curso acabou, a minha vida tinha mudado. Nunca mais seria o mesmo professor.

Com o regresso a Portugal, o espírito do grupo informal «das calculadoras» fortaleceu-se e o objetivo passou a ser trazer o $T^3$ para o nosso país ou então desenvolver por cá um projeto do mesmo tipo. A primeira hipótese não dependia de nós e para a segunda faltavam-nos os meios. Mesmo assim, nos Profmats de 1995 (Évora) e 1996 (Almada), foi possível preparar e apresentar dois cursos e várias sessões práticas ligados à tecnologia gráfica.

**$T^3$ PORTUGAL**
**QUINZE ANOS**

Em Julho de 1996, alguns de nós foram ao Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME) de Sevilha. Numa das sessões é comunicada a criação do $T^3$ Internacional e a sua introdução na Europa. Claro que, mal isto foi anunciado, apresentámos a candidatura do nosso grupo e já regressámos a Lisboa cheios de planos e entusiasmo. Criámos o Grupo de Trabalho $T^3$ na APM e iniciámos todas as diligências necessárias para que se tornasse possível arrancar com a formação de professores de forma regular, alargada e intensiva.

Nos primeiros dias de Maio de 1997 é assinado o primeiro contrato entre a APM e a Texas Instruments, o que nos permitiu ter acesso aos meios materiais necessários para iniciar as formações. A 17 de Maio começava em Lisboa o primeiro curso $T^3$, de 25 horas. As solicitações para novos cursos foram muitas, o número de inscritos em cada um deles excedeu largamente as nossas capacidades. Com isto, o grupo de trabalho foi crescendo naturalmente, chegando a ultrapassar os 30 formadores.


**Figura 1.**–Distribuição geográfica dos cursos e sessões de apresentação T[3]

E assim se passaram 15 anos.

As mudanças foram enormes, quer na tecnologia (não há comparação possível entre as performances das velhinhas TI-81 e TI-82 e as da atual TI-Nspire), quer na sua utilização na sala de aula (cada vez mais a máquina é um instrumento de investigação dos alunos e não apenas uma «ilustração animada» de conteúdos matemáticos).

Nesta década e meia muito trabalho foi feito.

- 114 cursos creditados de 25 horas
- 22 cursos de 12 horas
- 98 sessões de apresentação de 3 horas
- 26 sessões práticas de 3 horas
- 6118 participantes nos cursos e sessões
- 6 «Dias T[3]», com um total de 764 participantes
- Publicação de 5 brochuras e de mais de uma dezena de artigos na revista Educação e Matemática
- 14 Seminários T[3]
- Participação em 24 encontros internacionais
- Centenas de reuniões informais dos elementos do Grupo de Trabalho T[3] para discutir estratégias e preparar materiais para cursos e sessões.

Se esperamos que tudo isto tenha contribuído para o enriquecimento da maioria dos participantes nas nossas sessões, de uma coisa estamos certos: aquilo que ganhámos com este trabalho coletivo é enorme e, graças a isso, somos hoje muito melhores professores que há 15 anos.

Nos últimos anos, a coordenadora do grupo foi a Branca Silveira mas, desde maio de 2012, temos o Manuel Lagido a assumir essas funções.

## Slalom

Do muito material produzido pelo grupo, há certas atividades que são da predileção de alguns de nós.

Após se terem dado as funções quadráticas, uns 15 ou 20 minutos antes do final de uma aula faz-se a seguinte proposta aos alunos.

Numa página de gráficos, define a janela $x \in [-2, 10]$ e $y \in [-1, 7]$.
Marca os pontos de coordenadas $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(7, 4)$ e $(8, 4)$.
Com uma função quadrática faz um slalom passando nas duas «portas» sem lhes tocar.

O slalom é uma prova de esqui em que o concorrente tem de passar série de portas ou pórticos definidos por duas hastes. Os esquis têm de passar entre essas hastes sem lhes tocar.

O que se segue foi pensado para uma máquina TI-Nspire mas pode ser adaptado a uma calculadora gráfica qualquer.

Os pontos (que definem as hastes) podem ser rapidamente marcados. Por exemplo, para o ponto (2,4) fazemos: menu 1:Ações, 8:Coordenadas e Equações ( 2 enter 4 enter (ver figuras 2 e 3).

A função quadrática a encontrar vai definir a trajetória do slalom e portanto não pode tocar nos pontos. Convém salientar que a palavra «tocar» tem, neste contexto, um sentido visual, ou seja, no ecrã tem de haver um espaço visível entre o ponto e a curva.

Há uma infinidade de soluções e os alunos não terão grande dificuldade em encontrar uma delas. Nessa altura, anuncia-se que afinal há uma restrição a impor. A zona acima da linha $y = 6$ destina-se aos espetadores e portanto as trajetórias não podem invadir essa zona. É preciso encontrar nova solução.

Para definir o espaço destinado à assistência, fazemos tab para aceder ao editor de funções. Quando aparecer f2(x)=, apagamos o sinal de = com del e escrevemos $\geq 6$. Depois, é procurar uma parábola de concavidade virada para baixo que sirva (figura 4).

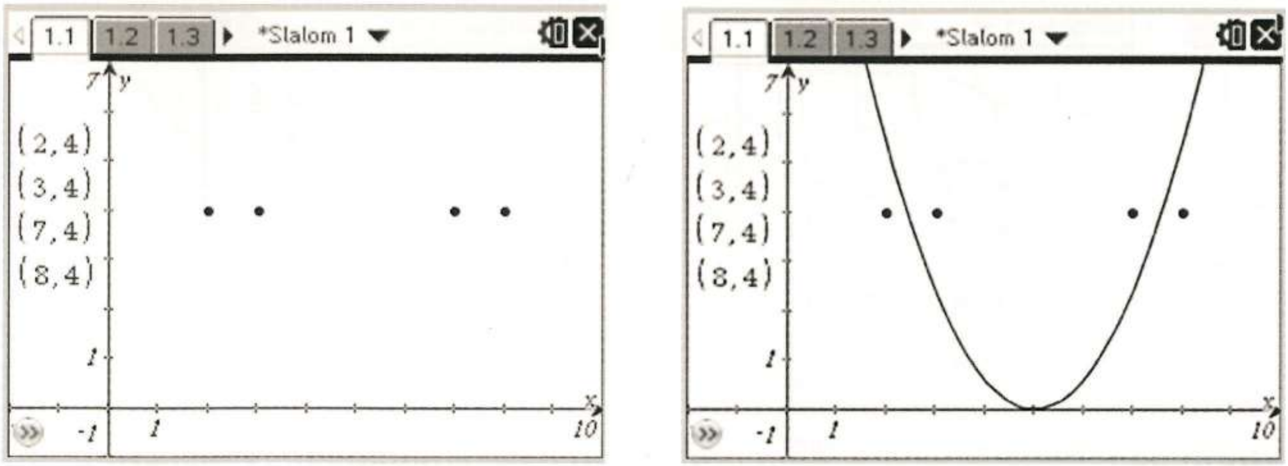



Figura 2 e 3

Nesta altura, podemos discutir com a turma as várias maneiras de definir uma função quadrática que ajudam a encontrar a parábola que passa nas portas:

— pelas coordenadas do vértice: $f(x) = a(x-h)^2 + k$
— através dos zeros: $f(x) = a(x-z_1)(x-z_2)$
— a passar em dois pontos de abcissas $z_1$ e $z_2$ e com a mesma ordenada $k$: $f(x) = a(x-z_1)(x-z_2) + k$

Nesse dia, o trabalho de casa é fazer na máquina o slalom de uma quadrática que passe nas portas definidas pelos pontos (2,5), (3,5), (7,1) e (7,2) (figura 5).

No início da aula seguinte, os alunos ligam a máquina, põem-na em cima da carteira e o professor percorre rapidamente todas as mesas verificando se está certo. Esta operação demora menos de dois minutos.

A partir daqui, com certa regularidade (de cada vez que se estudar uma nova família de funções ou sempre que o professor achar conveniente), o trabalho de casa é a criação de um slalom com um determinado tipo de função.

As vantagens são muitas:

— Gasta-se muito pouco tempo de aula,
— Para um mesmo tipo de função, é possível ir pedindo vários slaloms bastante diferentes desde que os pontos sejam colocados em posições devidamente escolhidas (ver os exemplos 3 e 4 que se seguem),
— Este tipo de atividade pode ir sendo proposta ao longo de todo o ano letivo e em vários anos letivos diferentes,
— Para encontrar uma solução, o aluno tem de perceber a influência de cada um dos parâmetros da função e portanto reforçar o que aprendeu,
— A maioria das pessoas gosta deste tipo de desafios (lembro-me de, num ano, de cada vez que propunha um slalom no final da aula, haver duas alunas que transformavam isto numa competição e não saíam da sala sem ver quem tinha ganho).

Podemos propor slaloms para funções polinomiais, racionais, irracionais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e outras mais de que nos lembremos. Apresentamos aqui alguns exemplos (figuras 6–12).

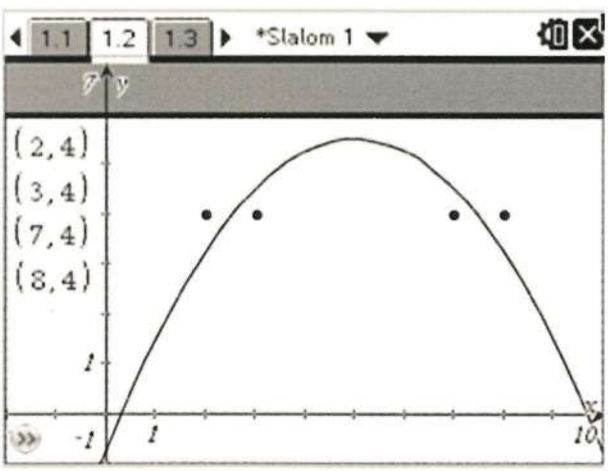



Figura 4

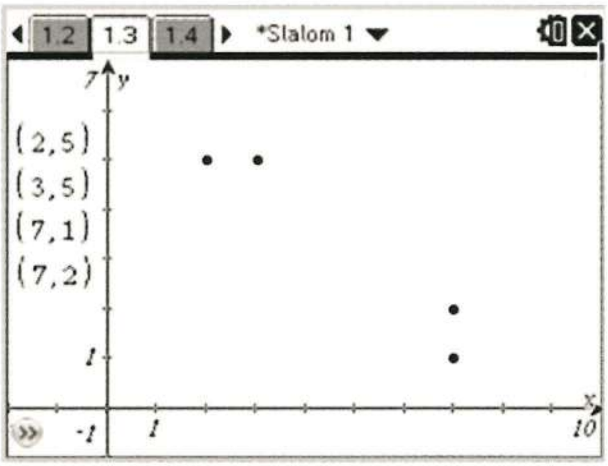
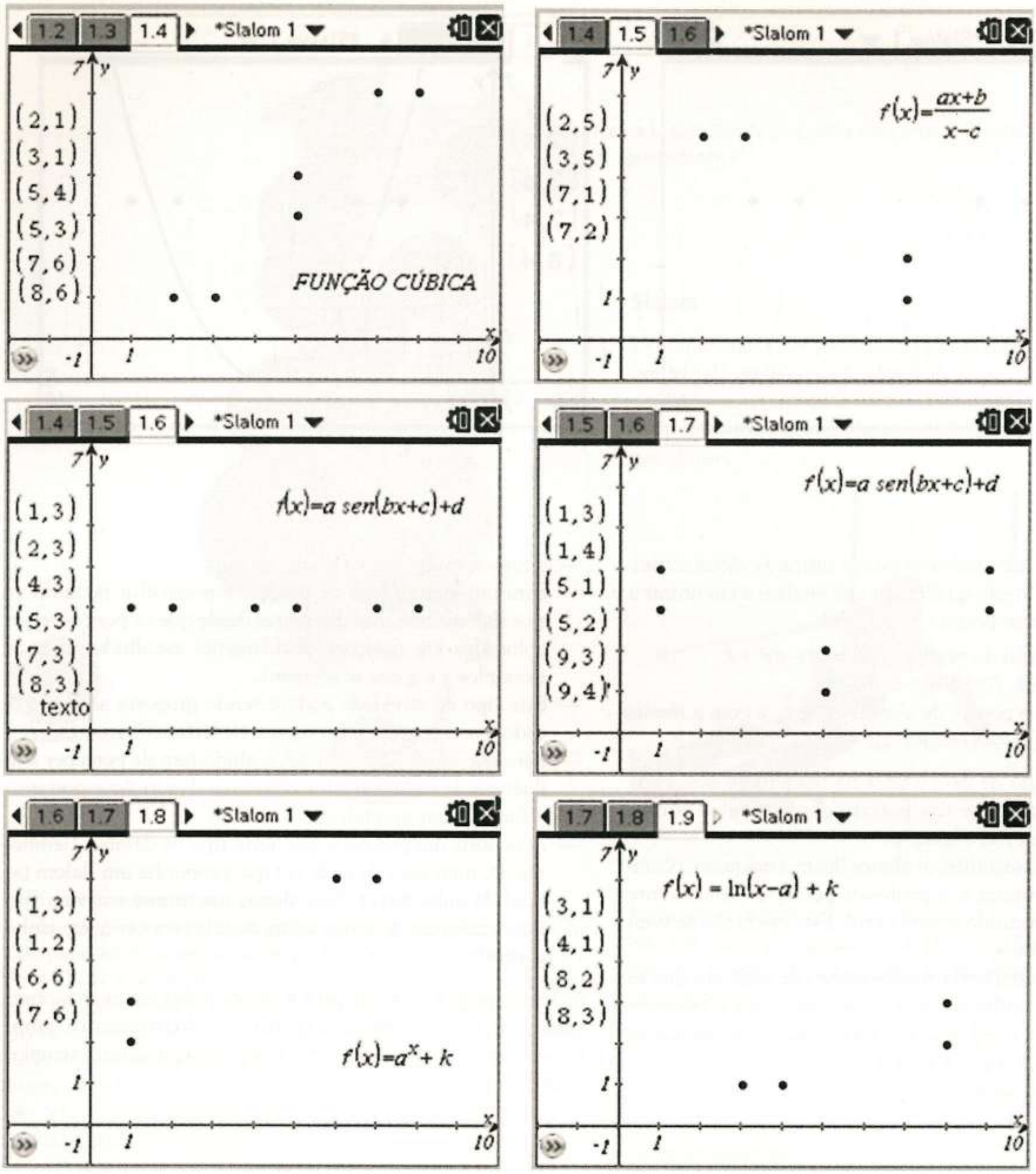



Figura 5




Figuras 6–12

## Padrões

Outro tipo de atividade que pode ser feita uma vez na sala de aula e depois várias vezes como trabalho de casa ao longo do ano letivo, de acordo com as funções que se forem estudando, é a criação de padrões.

Cria uma página de gráficos e não alteres a janela.
Escolhe funções convenientes de modo a obteres um padrão como o da figura.
Oculta os eixos em menu 1:Ações, 3:Ocultar/Mostrar.

Seguem-se alguns exemplos (figuras 14–19) em que se foram usando sucessivamente funções afins, racionais, quadráticas, trigonométricas, exponenciais e, o último, é para o leitor descobrir.

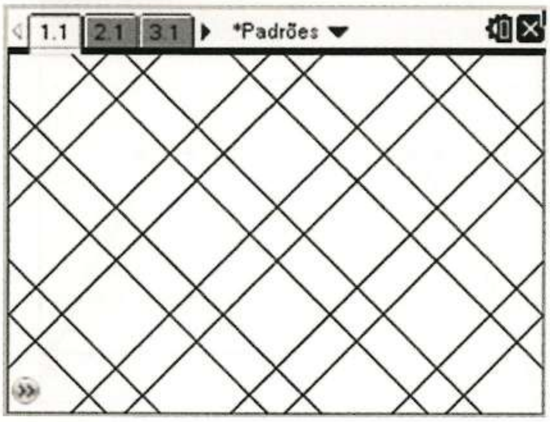
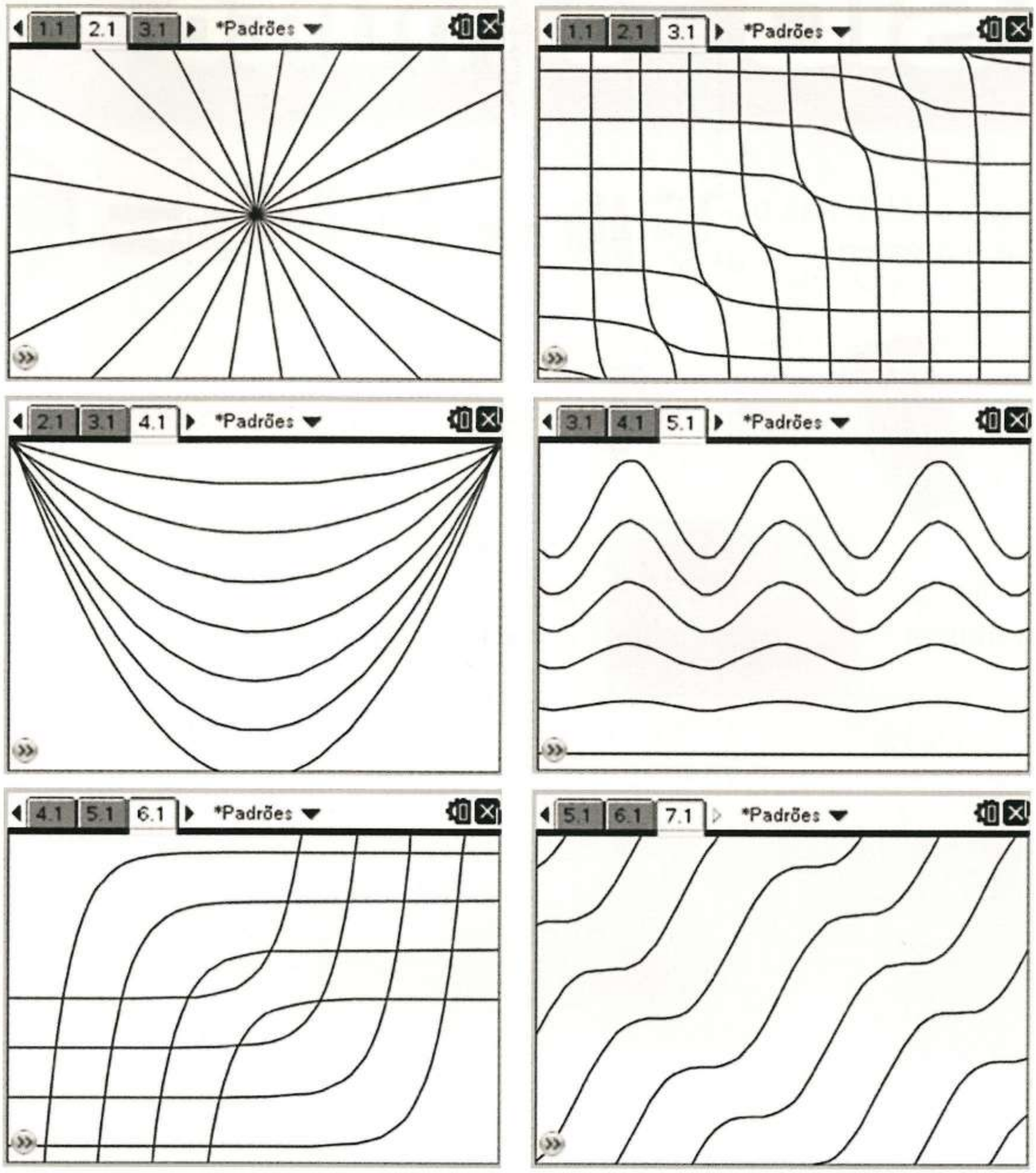



Figura 13




Figuras 14–19

José Paulo Viana
Escola Secundária de Vergílio Ferreira

## Próximas edições da APM:

[Lançamento no ProfMat 2012]

Autoras: Cecília Monteiro e Hélia Pinto

Título: Sequência de tarefas para o ensino e aprendizagem da multiplicação e da divisão de números racionais não negativos

Editora: Associação de Professores de Matemática

# Metas Curriculares – Que sentido?

De quantas maneiras diferentes:

- consegues dobrar um quadrado (ou retângulo, triângulo equilátero, pentágono regular, etc.) de modo que as duas partes obtidas possam ser sobrepostas e coincidam totalmente? Que nova forma geométrica se obtém quando são sobrepostas?
- podes fazer um corte a direito num folha de papel retangular de modo que as duas partes resultantes possam ser novamente justapostas para formar um triângulo?

Estas duas situações simples ajudam a justificar o porquê de ensinar geometria. É fácil concordar que estes dois problemas podem ser desafiantes em qualquer nível escolar. Para resolvê-las não são necessários conhecimentos prévios, basta aceitar o desafio proposto. Para isso é preciso desenvolver o hábito de pensar em desafios e ir construindo hábitos de pensamento que ajudem a não desmoralizar perante os desafios e que sejam eles próprios estímulos para pensar. Ninguém aprende a enfrentar desafios se sair frustrado sempre que se depara com algum, além disso, quando se tem gosto em pensar procuram-se novas situações para pensar.

Estas duas situações partem das figuras e do seu conhecimento global. Sugerem a experiência, a observação dos resultados e a procura de invariantes. A formulação «de quantas maneiras diferentes» apela à necessidade da prova. A resolução de cada um dos problemas pode, assim, ser mais ou menos exigente conforme o nível de desenvolvimento dos alunos. No 1.º ciclo podemos ficar-nos por descobrir várias maneiras diferentes, mas num nível mais avançado já podemos exigir um raciocínio que nos garanta que descobrimos todas e por isso que temos a garantia de saber exactamente quantas são. O sentido dos problemas apresentados está na facilidade de os entender e ser capaz de avançar alguma coisa na sua resolução, no desafio de descobrir maneiras diferentes de obter resultados análogos, na estranheza das situações que leva à necessidade de experimentar com outras figuras e procurar compreender por que razão estas coisas acontecem, na confiança no raciocínio próprio, independente de formalismos desnecessários.

Estas situações, para além da sua simplicidade e acessibilidade, são potencialmente muito ricas porque permitem estabelecer conexões interessantes e porque são bons veículos para desenvolver hábitos de pensamento. Duas boas razões que Goldenberg, Cuoco & Mark (1998) defendem como as fundamentais para ensinar geometria. Estes autores destacam o carácter especial da geometria como «território intelectual», é esta expressão que usam, para realizar experiências, desenvolver raciocínios com uma forte componente visual, procurar invariantes e usar várias formas de raciocínio para expandir argumentos construtivos.

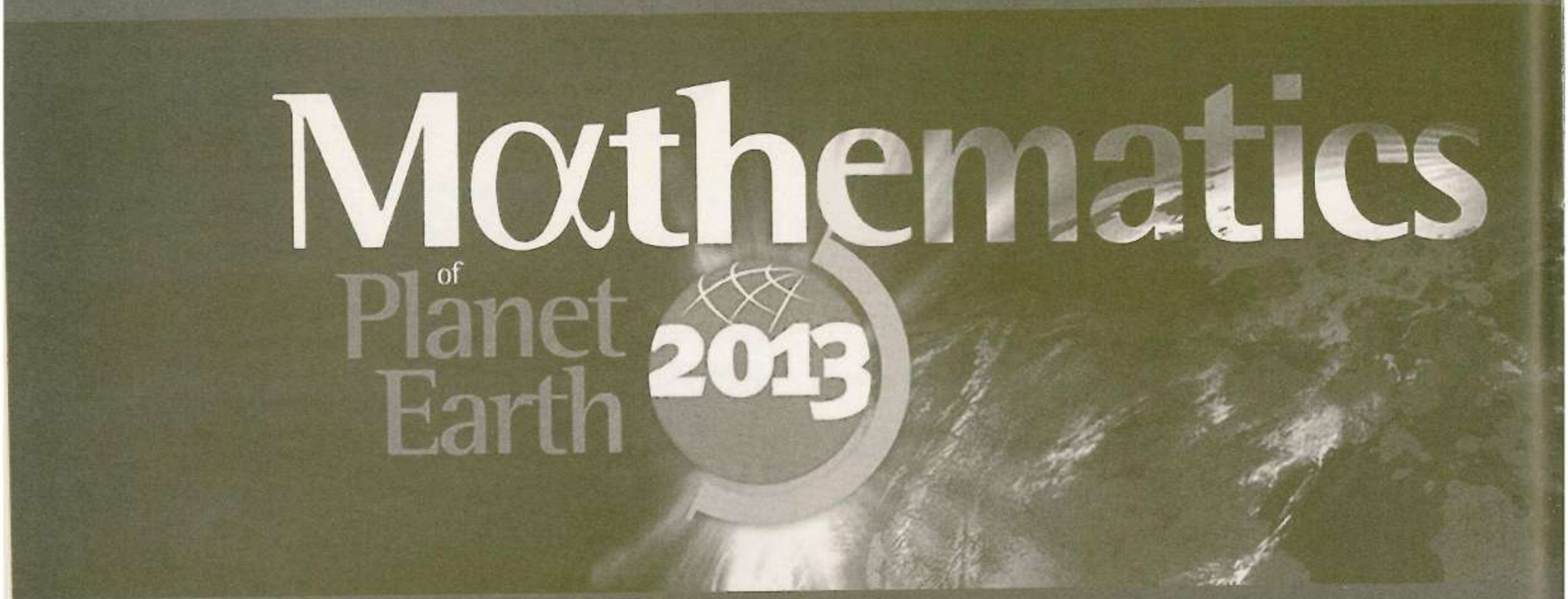
Este tipo de orientação pressupõe uma abordagem holística, que parta das situações. É uma orientação para os problemas e que dá sentido à geometria. Não é essa a orientação da Metas Curriculares. Estas estão construídas numa lógica totalmente atomista de soma de conhecimentos de factos, expressos sob a forma de descritores, organizados numa hierarquia rígida estabelecida ano a ano, que culminam, para o 9.º ano, com a «Axiomatização das teorias Matemáticas» e a caraterização da Geometria Euclidiana. Começando a ler pelo fim as metas para a Geometria e Medida entende-se melhor a lógica que presidiu à sua organização. Temos uma lista, constituída por 444 descritores, 305 só para a geometria, totalmente espartilhados e estéreis, e, por isso mesmo, em que o sentido das aprendizagens está completamente ausente. Por ciclo, são 151 descritores para o 1.º ciclo, 114 para o 2.º e 179 para o 3.º. Esta longuíssima lista pretende munir o aluno de conhecimentos sobre figuras geométricas, supostamente para saber reproduzir mais tarde raciocínios formais segundo a lógica rígida hipotético-dedutiva da geometria euclidiana escolar. Nada vale por si.

Uma análise cuidada e atenta das Metas Curriculares é um acto confrangedor e arrepiante, que, passo a passo, nos revela um total desrespeito dos seus autores pela inteligência das crianças e dos jovens e pelo seu interesse em aprender. Desrespeitados os alunos, estão automaticamente desrespeitados os professores. É uma falácia afirmar-se que o professor «deve selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização». Não há estratégia possível para concretizar estas metas quando se pretende fazer um ensino da geometria com sentido! Só com má fé e total ignorância do que é a prática de ensino se pode afirmar que «os documentos das metas representam um meio privilegiado e fundamental de apoio à planificação e organização do ensino, constituindo uma ajuda para o professor na escolha das estratégias a seguir».

## Referências Bibliográficas

Goldenberg, P, Cuoco, A. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In Richard Lehrer e Daniel Chazan (Eds.) Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space, 3-44. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

# Em 2013, é tempo de explorar a Matemática do Planeta Terra!




## MPE-2013, o que é?

Mathematics of Planet Earth 2013[1] (MPE-2013) ou, numa versão portuguesa, Matemática do Planeta Terra 2013 (MTP-2013) é um desafio à escala mundial que consiste no desenvolvimento de atividades científicas e de divulgação, que tornem visível o papel que a matemática desempenha em questões que afetam o nosso Planeta Terra, sensibilizem e consciencializem no sentido de melhor o compreendermos e podermos agir de acordo com a sua preservação e proteção. Assim, durante o ano de 2013, pretende-se envolver investigadores, professores, estudantes, bem como o público em geral nestas atividades. Para isso, a comissão internacional do MPE-2013 sugere quatro grandes temas onde se podem enquadrar muitos outros tópicos:

- um planeta para descobrir;
- um planeta suportado por vida;
- um planeta organizado por humanos;
- um planeta em risco.

Vejam-se alguns exemplos que poderão servir de inspiração: A Matemática do Planeta Terra, compreendida na sua forma mais abrangente, pode levar-nos a um conceito de Planeta por descobrir. A Teoria da Relatividade Geral (RG) desenvolvida por Einstein nas primeiras décadas do século XX é hoje utilizada no Sistema de Posicionamento Global – GPS. De facto, a RG permite fazer as correções da medição de tempo realizada pelos relógios dos satélites e os relógios da Terra afetados pela gravidade e torna possível conhecer a localização real do recetor GPS. Num Planeta que sustenta a vida, podemos assinalar o contributo da Matemática utilizada nos modelos populacionais que nos permitem analisar a variabilidade e evolução de espécies invasoras. Por vezes, o resultado da ação humana no Planeta Terra leva-nos a questionar a gestão que é feita dos recursos naturais ou os consumos energéticos efetuados. Outras vezes é a própria Natureza que se encarrega de nos surpreender com catástrofes naturais que ainda teimam em escapar a previsões e colocam em risco o nosso Planeta. Em qualquer destes casos, os modelos matemáticos permitem antecipar algumas consequências, prevenir e proteger o mundo em que vivemos.

2013 será portanto um ano de reflexão e de (re)descoberta do nosso Planeta em que a Matemática será protagonista em workshops, colóquios, encontros temáticos, exposições. Entre outras atividades internacionais destaca-se a competição de criação de módulos virtuais que já está a decorrer e se prolonga

[1] www.mpe2013.org

até 20 de Dezembro de 2012 (www.mpe2013.org/competition). Estes módulos serão apresentados numa exposição cuja inauguração terá lugar em simultâneo com o início oficial do ano MPE-2013. Além de uma vertente de divulgação, esta exposição tem como objetivo consciencializar para a premente necessidade de proteger o Planeta. Merecedora de destaque é também a enciclopédia "Encyclopedia of Mathematics and Planet Earth" iniciada em Scholarpedia (http://www.scholarpedia.org/article/Scholarpedia:Mathematics_of_Planet_Earth)

Esta iniciativa mereceu o apadrinhamento da UNESCO que reconheceu 2013 como o ano da Matemática do Planeta Terra. O seu lançamento oficial terá lugar em França, a 5 de Março, na sede desta Organização das Nações Unidas.

## Do MPE-2013 ao MPT-2013

Em Portugal três instituições tornaram-se parceiras do MPE-2013, a Associação de Professores de Matemática (APM) http://www. mpt2013.apm.pt, o Centro de Investigação Matemática (CIM) http://sqig.math.ist.utl.pt/cim/mpe2013/ e a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM). Cada um dos parceiros portugueses está a desenvolver atividades, autonomamente e/ou em colaboração, que podem ser consultadas nas páginas próprias.

Outras instituições estão também a envolver-se nesta iniciativa, nomeadamente o Atractor e alguns Centros de Ciência Viva, a Fundação Calouste Gulbenkian e o Museu da Ciência da Universidade de Coimbra (http://www.museudaciencia.org/index.php?iAction=Actividades&iArea=52&iId=431) já têm agendadas para 2013 atividades relacionadas com o MPT-2013. Pretende-se que nestas iniciativas os vários parceiros partilhem e articulem conhecimento e recursos de forma complementar e harmoniosa. Desde conferências internacionais e escolas temáticas de matemática avançada, passando por diversos projetos, por concursos vários e exposições distintas, a panóplia de opções será suficientemente abrangente para que o público de todas as idades possa desvendar a Matemática do Planeta Terra. Mantenha-se atento às novidades...

## A APM no MPT-2013

"A Matemática está em todo o lado!" é uma resposta de algibeira a que alguns de nós recorremos quando somos questionados relativamente à finalidade ou aplicação da Matemática. Mas o que significa isso? Conseguimos dar um exemplo? E se forem dois exemplos, ainda seremos capazes? Vamos experimentar mais e mais exemplos...

Foi com o intuito de explorar a Matemática do Planeta Terra e apreciá-la no seu esplendor, dando significado a todas as manifestações matemáticas do nosso Planeta, das mais pequenas às maiores, que a APM se associou a esta causa. Em particular, espera-se que as escolas proponham as atividades a desenvolver de acordo com as especificidades dos contextos e dinâmicas. O objetivo é que, depois de selecionarem os temas a trabalhar, possam envolver professores de diferentes disciplinas (Matemática, Física, Química, Biologia, Geografia,...) ou articular com outros projetos (Programa Eco-Escolas, projetos de empreendedorismo ou de gestão de consumos energéticos). A adaptação da informação a ser trabalhada à(s) faixa(s) etária(s) do público-alvo, sugere a possibilidade de trabalhar um mesmo tema com diferentes níveis de complexidade ao longo do Ensino Básico e do Ensino Secundário.

Além de outras iniciativas que estão a ser desenvolvidas em parceria com outras instituições já mencionadas, a APM delineou outras no raio de ação da Associação, nomeadamente:

- Elaboração de tarefas de sala de aula, abrangendo os níveis de escolaridade desde o 1.º ciclo até ao secundário, subordinadas ao tema "Geometria do Planeta Terra", desenvolvidas pelo Núcleo do Porto em colaboração com Delegação do Norte da SPM e Atractor. Estas tarefas serão já apresentadas numa sessão prática no ProfMat2012.
- Lançamento do concurso "Matemática, onde estás?" para professores e alunos dos Ensinos Básico e Secundário. Este concurso proporcionará a elaboração de trabalhos/projetos subordinados ao tema MPT-2013, bem como a comunicação virtual entre escolas em Portugal e escolas nos países da Comunidade de Países de Língua Portuguesa (CPLP), nomeadamente em escolas de São Tomé e Príncipe através do Escola+ (projeto implementado pelo Instituto Marquês Valle Flôr). No entanto, continuamos a negociar com instituições com representação em outros países da CPLP a participação de outras escolas. E claro, estamos recetivos a todas as escolas que se aventurem neste aliciante projeto e se inscrevam neste concurso!
- Publicação na revista Educação & Matemática (E&M) da APM, durante o ano de 2013. Será publicada uma secção dedicada a artigos relacionados com MPT e a secção dos Materiais para a aula de Matemática será direcionada

também a este tema, de forma a promover e a relatar experiências nas escolas.

## O MPT-2013 na E&M

Como já foi referido a revista E&M irá ter uma participação muito especial no MPT-2013 no âmbito das atividades desenvolvidas pela APM.

Falemos então sobre a secção dedicada ao tema MPT-2013. Ao longo dos cinco números do ano de 2013, serão abordados cinco temas diferentes sob perspetivas de educadores matemáticos, matemáticos e alguns especialistas como astrónomos, biólogos ou geólogos, em relação a fenómenos passíveis de análises que se complementem e cujo ponto de vista matemático nos permita compreender melhor o mundo em que vivemos e que continuamente (des)construímos. Para cada um dos temas tratados, será apresentada uma abordagem didática do mesmo, constituindo a secção de Materiais para a aula de Matemática do respetivo número da revista.

Pretendemos ainda reservar um espaço para as notícias e desenvolvimentos relativos aos concursos e projetos do MPT-2013. Neste sentido, lançamos o mote para que professores e alunos das escolas participantes nos enviem testemunhos de experiências e resultados de implementação de tarefas cujos desenvolvimentos das iniciativas nas diversas escolas dos diferentes países ao longo do ano letivo possam ser partilhados.

Contamos também com o contributo de professores de Matemática, matemáticos e especialistas no sentido de aumentar a oferta de sessões de divulgação que abordem temáticas integradas na MPT, nos encontros da APM, durante o ano de 2013. Em http://www.mpt2013.apm/pt está disponível a informação referente aos eventos onde a APM está a participar no âmbito do MPT-2013.

**Uma boa dose de inspiração, muita imaginação e mãos à obra!**

**Joana Latas**
Editora da secção MPT-2013 da E&M

## MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Em 2013, é tempo de explorar a Matemática do Planeta Terra! é o desafio feito na apresentação do projeto MPT-2013 neste número da E&M. Para responder ao desafio, propomos, para os materiais para a sala de aula deste número, um projeto para redescobrir um pouco de matemática no nosso planeta.

Em 2006, no âmbito do projeto Pencil, dinamizado em parceria pelo Pavilhão do Conhecimento, pela APM e outras entidades, foram produzidas e experimentadas várias tarefas de sala de aula, publicadas no site do Pavilhão em http://gam.pavconhecimento.pt/projectos/pencil/pt/home/home.html. Nesse contexto, Eduardo Veloso e Rita Bastos desenharam um projeto, que teve por base atividades sugeridas pelo prof. Máximo Ferreira, do Centro de Ciência Viva de Constância e redigiram um texto publicado em http://gam.pavconhecimento.pt/projectos/pencil/pt/outras_actividades/outras_actividades.html, onde as visões astronómica e matemática complementam e justificam os procedimentos sugeridos nas tarefas do projeto. O referido texto, cuja leitura recomendamos, está também disponível no site da APM, junto dos materiais para a sala de aula da revista nº 119.

Nesse projeto propõe-se a determinação experimental do perímetro da Terra e outras experiências envolvendo o Sol e as suas sombras. As propostas foram pensadas para serem concretizadas por professores e alunos de escolas localizadas em diferentes pontos de Portugal. Na adaptação realizada restringimos a escolas com a mesma longitude, mas, tal como é referido no texto que serve de suporte à atual proposta, as medições podem ser feitas em escolas que se encontrem em meridianos diferentes. Note-se que o processo proposto para medição experimental do perímetro da Terra, tem pequenas modificações em relação ao método seguido por Eratóstenes, pois num dos locais de observação escolhido por Eratóstenes, Sienne, ao meio-dia solar o Sol estava no Zénite (portanto com uma altura do Sol igual a 90°) e, na nossa proposta, nenhuma das escolas estará nessa situação, pelo que teremos que utilizar a diferença das alturas (e não apenas o ângulo de 7° 12' medido em Alexandria por Eratóstenes).

Este é um projeto a calendarizar ao longo de um ano letivo, pois é necessário efectuar os contatos com as escolas, planificar as três tarefas propostas, preparar as leituras necessárias à compreensão dos conteúdos envolvidos, prever tempos de discussão nas aulas e o trabalho a realizar fora da sala de aula. Reforçamos, por isso, o desafio feito na apresentação da secção MPT-2013: mãos à obra, já este ano letivo!

Irene Segurado
Joana Latas
Manuela Pires

# Determinação experimental do perímetro da Terra e outras propostas de experiências envolvendo o Sol e as suas sombras[1]

Este projeto deve envolver alunos e professores de duas ou mais escolas afastadas em latitude, mas situadas no mesmo meridiano[2] e envolve três partes:

I. Determinação da direção Norte-Sul em cada escola;
II. Determinação da altura do Sol ao meio-dia solar em cada escola e;
III. Determinação do comprimento do Meridiano Terrestre.

Nas duas primeiras partes são feitas certas construções e medições e na terceira calcula-se o comprimento do meridiano terrestre utilizando os resultados obtidos nessas medições. A precisão com que este comprimento é obtido depende do cuidado e rigor colocados nas medições.

A iniciativa parte da escola A, que convida a escola B (e eventualmente as escolas C, D, etc.) para a execução em conjunto do projeto. Vamos considerar para simplificar que a escola A (em Lisboa) convida a escola B (em Viana do Castelo).

O processo usado nesta proposta inspira-se na determinação do perímetro da Terra realizado por Eratóstenes no terceiro século antes da nossa era.

## I – Determinação da direção Norte-Sul em cada escola e do meio-dia solar

Para esta determinação, é necessário:

a) Colocar uma estaca vertical num ponto de um local limpo, plano e horizontal, iluminado pelo Sol durante a manhã e o início da tarde (por exemplo, entre as 10h da manhã e as 16h).
b) Periodicamente (por exemplo, de 30 em 30 minutos), durante o período de tempo escolhido, assinalar no chão o ponto correspondente à sombra da extremidade da estaca. Obtêm-se desta forma os pontos S1, S2, S3, etc. (ver figura 1)
c) Depois de assinalados todos os pontos, traçar a curva definida por eles.

Com centro na base F da estaca traça-se uma circunferência (linha fina na figura) que intersecta o ramo de hipérbole nos pontos C e D. Unindo o ponto médio do segmento CD com o ponto F, encontra-se a direção Norte-Sul verdadeira (diz-se "verdadeira" para distinguir da direcção N-S magnética, que poderia ser determinada por uma bússola, e que não serviria, naturalmente, para determinar o meio dia solar). Nas nossas latitudes, as sombras estão sempre para norte, e o meio-dia solar é a hora a que a sombra da estaca, produzida pelo Sol, coincide com a direcção N-S que determinámos.

Com esta atividade pretende-se determinar a direção Norte – Sul, calculando o meio-dia solar.

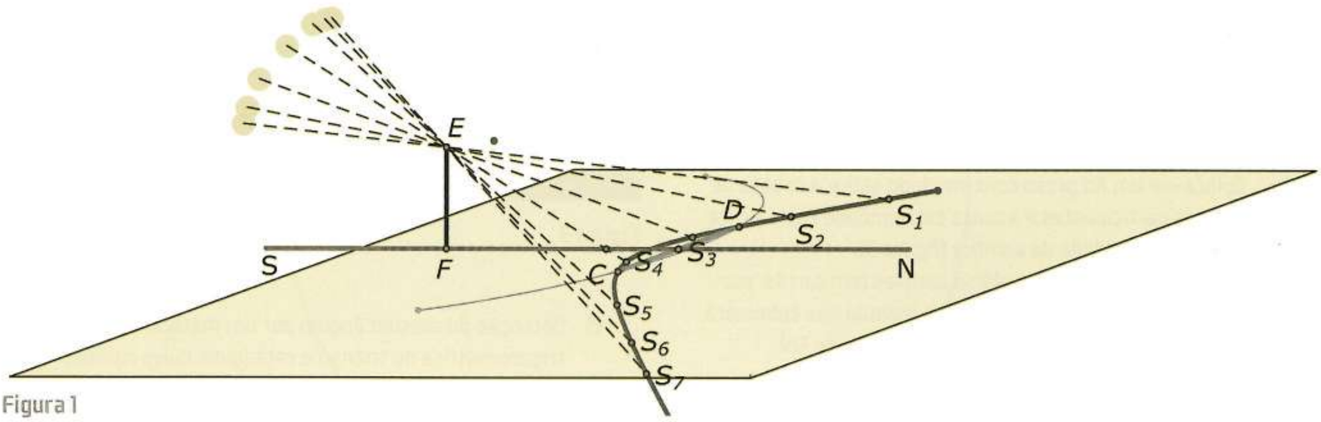



Figura 1

[1] Propostas adaptadas de um conunto de actividades sugeridas pelo prof. Máximo Ferreira, do Centro de Ciência Viva de Constância, no âmbito do ProjetoPencil, do qual a APM foi parceira. O enquadramento foi realizado por Eduardo Veloso e Rita Bastos e encontra-se num texto publicado emhttp://gam.pavconhecimento.pt/projectos/pencil/pt/outras_actividades/outras_actividades.html e que está online no site da APM, junto dos materiais para a sala de aula da revista nº 119

[2] Para desenvolver o projeto entre escolas com longitudes diferentes, consultar o texto acima referido

## II – Determinação da altura do Sol ao meio-dia solar em cada escola

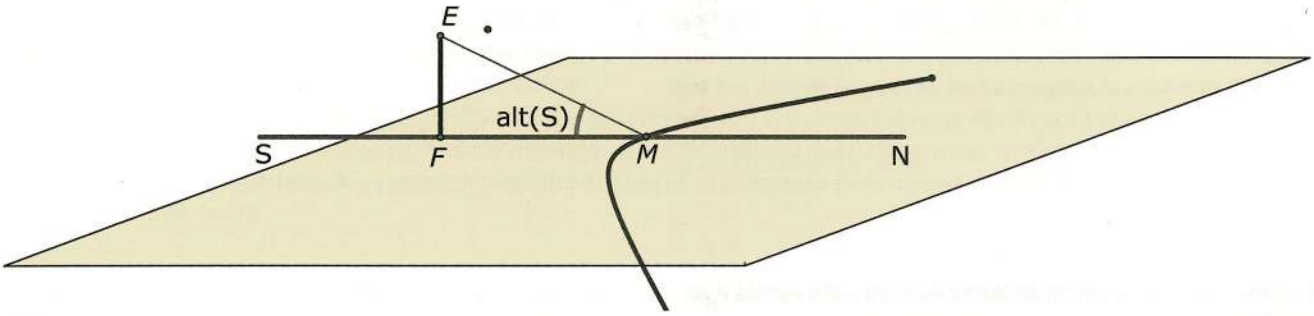



Figura 2

A altura de um astro, num determinado ponto da superfície terrestre, é por definição a amplitude do (menor) ângulo formado pela semireta com origem nesse ponto e passando pelo astro e o plano do horizonte (plano tangente à Terra nesse ponto). Durante o dia, a altura do Sol num determinado local da Terra (exceto nos pólos) está sempre a variar, sendo nula ao nascer e ao pôr-do-sol e máxima ao meio-dia solar. Traçada a linha N-S, para obter a altura do sol ao meio dia solar basta esperar pelo meio-dia solar e medir esse ângulo, que designamos por alt(S) (figura 2).

O processo de medição do referido ângulo depende do nível de escolaridade dos alunos. Sugerem-se três métodos:

a) Medição direta do ângulo com o auxílio de um transferidor. Para obter o ângulo correspondente à altura do Sol, coloca-se um fio preso com um dedo sobre a cabeça de um dos participantes e a outra extremidade coincidente com a extremidade da sombra (figura 3).

b) A construção de um astrolábio simples (em cartão, por exemplo) constituirá um trabalho manual que culminará com a sua utilização na medição da altura do Sol. (no Kit Latitude Longitude, editado pelo Ciência Viva, disponível em http://www.cienciaviva.pt/equinocio/lat_long/indice.asp, encontram-se procedimentos para a construção de vários instrumentos, incluindo o astrolábio).

Figura 3

c) Obtenção do mesmo ângulo por um método de resolução trigonométrica do triângulo retângulo, cujos catetos são o observador e a sua sombra, ou o comprimento da estaca vertical e o comprimento da respectiva sombra coincidente com a direção N-S, o que conduzirá a uma melhor aproximação.

## III – Determinação do comprimento do Meridiano Terrestre.

A determinação deste comprimento faz-se utilizando as construções e medições anteriores, nas duas escolas A e B:

a) Em cada um dos locais foi determinada a direção Norte-Sul e a hora das medições das alturas do sol poderá ser diferente nos dois locais, pois coincidirá com o momento em que, nesse local, a sombra da estaca estará sobre a linha N-S.

b) Assim, o que há a fazer é medir as alturas do Sol, no mesmo dia, em cada uma das escolas, nas respetivas horas correspondentes ao meio-dia solar. Portanto, se em dois locais de latitudes diferentes, ao meio-dia solar em cada um dos locais, se executa o procedimento proposto no ponto II, a diferença entre as alturas do Sol é igual à diferença das latitudes dos dois locais, e daí esse valor é a diferença angular, medida sobre um meridiano, entre as duas latitudes. O esquema da figura 4 mostra claramente essa situação.

Nesta figura as escolas estão supostamente no mesmo meridiano, e conclui-se imediatamente que a diferença das alturas do Sol (ao meio-dia solar, neste caso coincidente nas duas escolas) é igual á diferença das latitudes. Conhecida a diferença das latitudes entre as escolas A e B, procura-se a quando equivale essa diferença em distância (por exemplo em km) medida sobre um mesmo meridiano. Esta pesquisa pode fazer-se através de mapas convenientes ou por exemplo no Google Earth. Depois, com uma proporção em tudo similar à utilizada por Eratóstenes, determina-se o comprimento do meridiano terrestre.

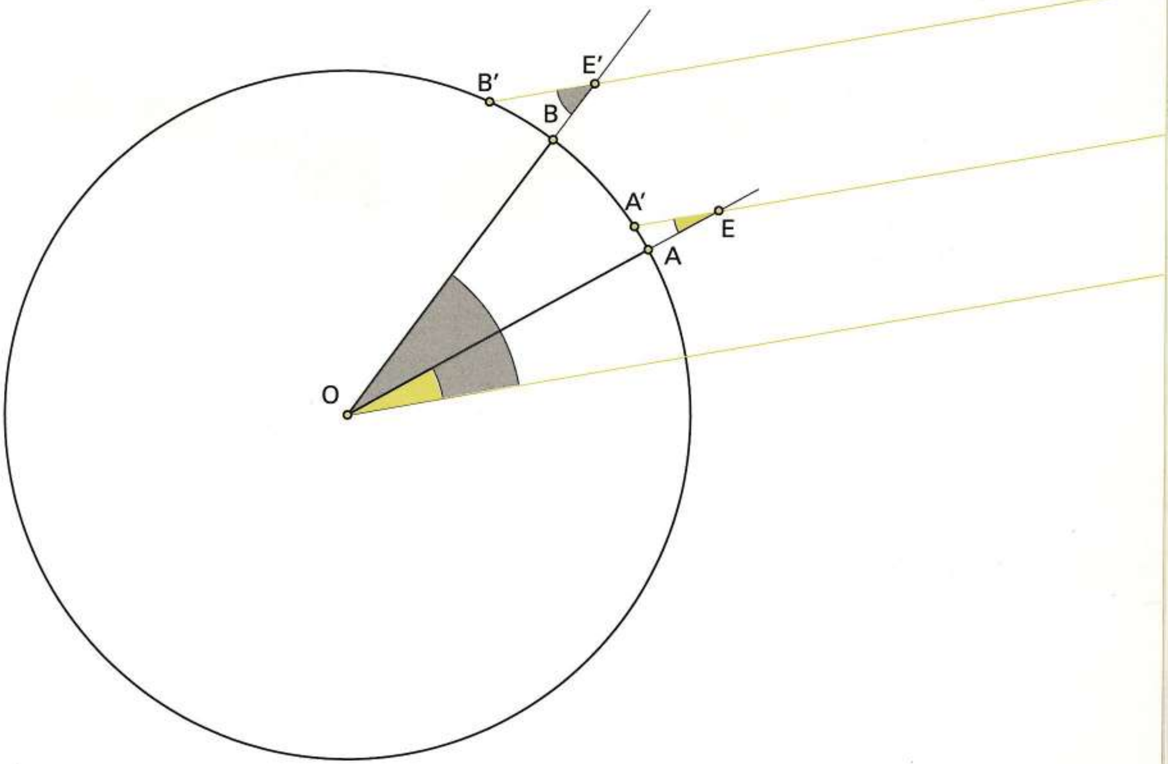



Figura 4.–Os ângulos marcados com a mesma cor são iguais por serem alternos internos logo BOA=BE'B'-AEA'

# A arte de alinhavar curvas (II)

Manuela Ribeiro

**Na Educação e Matemática n.° 109 em <<A arte de alinhavar curvas (I)>> alinhavámos curvas tendo como base um ângulo: a parábola e várias outras curvas em que a parábola se multiplica. Vamos hoje alinhavar curvas tendo como base uma circunferência. Eis quatro das mais simples.**

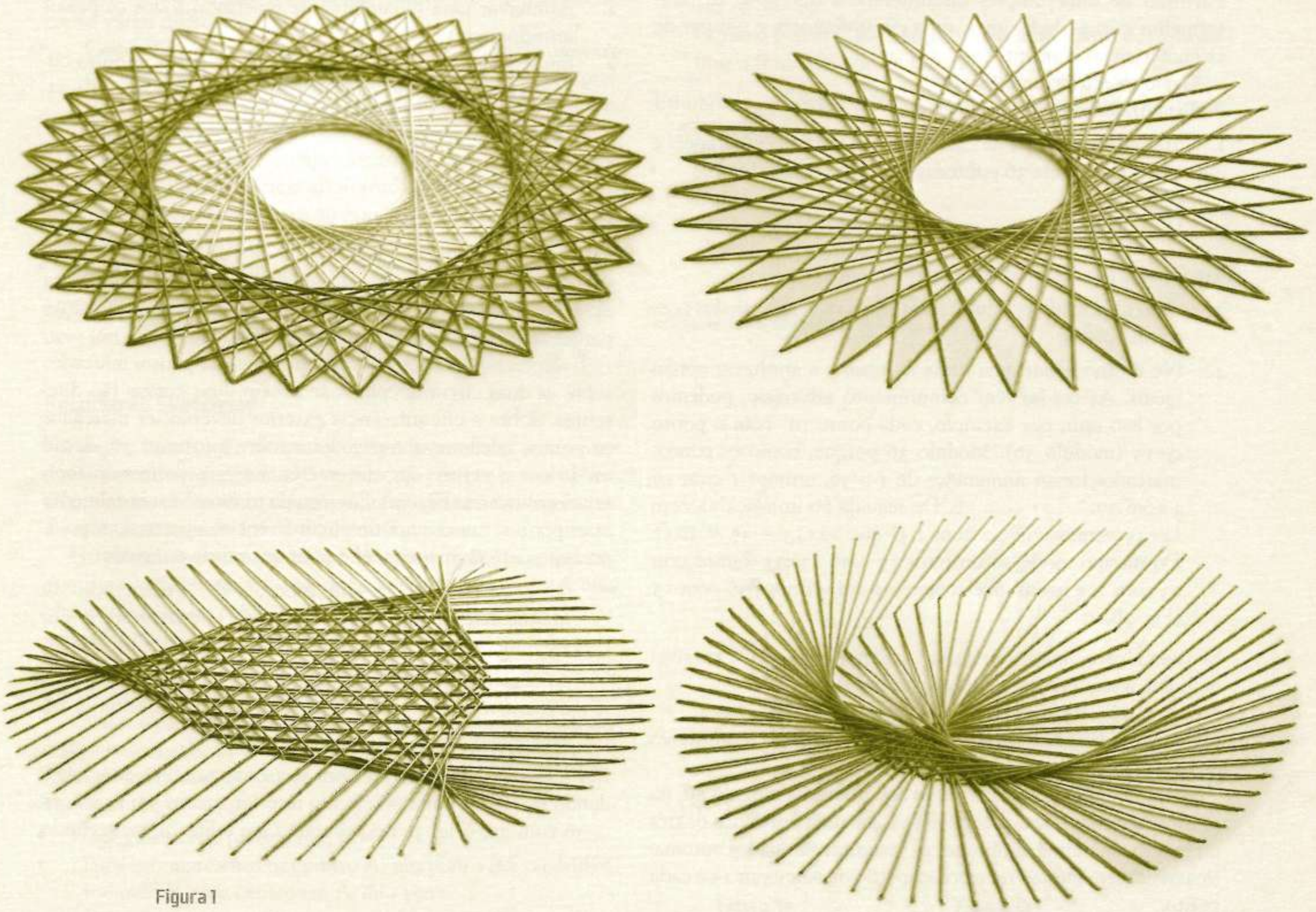


Figura 1

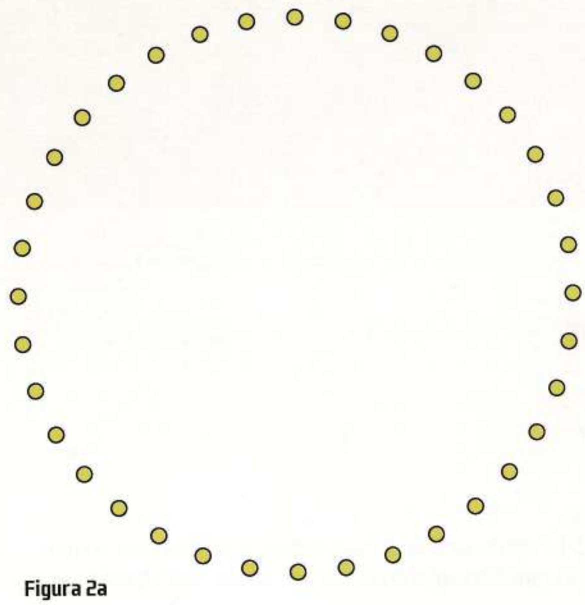


Figura 2a

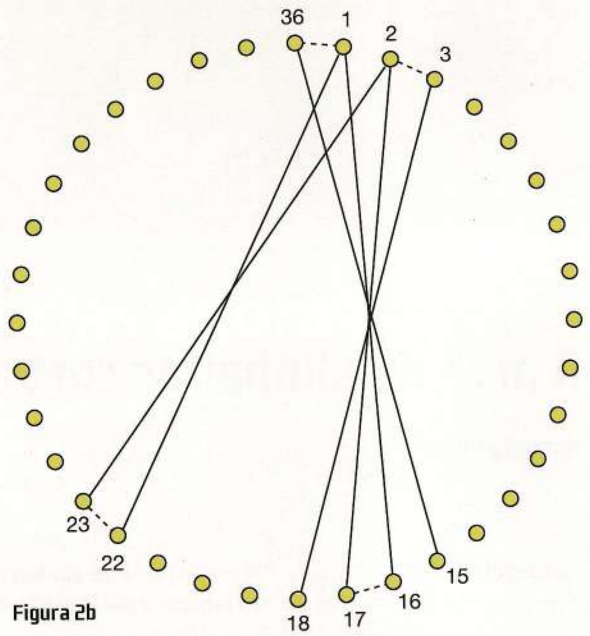



Figura 2b

## Circunferências

Partindo de uma simples circunferência obtêm-se as duas primeiras curvas da figura 1, uma circunferência e um par de circunferências concêntricas.

*Como obter a circunferência?*

Para iniciar o trabalho:

1. Traçar, numa folha de cartolina A4, uma circunferência e marcar sobre ela 36 pontos igualmente espaçados; (Fig. 2a)
2. Numerar mentalmente esses pontos de 1 a 36.

Em seguida para alinhavar a circunferência:

3. Com uma agulha perfurar a cartolina em cada um dos pontos marcados;
4. Por último enfiar uma linha na agulha e alinhavar cordas iguais. As cordas têm comprimento arbitrário, podemos por isso unir, por exemplo, cada ponto n com o ponto n+15 (módulo 36). Módulo 36 porque, como os pontos marcados foram numerados de 1 a 36, unimos 1 com 16, 2 com 17, ..., 21 com 36. De seguida ao unirmos 22 com 22+15 vamos unir 22 com 1 já que 22+15 = 37 = 36+1. Do mesmo modo ao unirmos 23 com 23+15 vamos unir 23 com 2, e assim sucessivamente até unirmos 36 com 15. (Fig. 2b)

Se tiver a preocupação de gastar a menor quantidade possível de linha, a sequência de alinhavos a dar será

$$1–16 = 17–2 = 3–18 \cdots 21–36 = 1–22 = 23–2 \cdots.$$

em que – identifica alinhavo dado pela frente e = alinhavo dado por trás.

Embora estejam subjacentes as congruências módulo 36, na prática não trabalhamos com elas já que uma vez dados os três ou quatro primeiros alinhavos, os restantes são dados automaticamente sem mesmo ter a preocupação de adicionar 15 a cada ponto.

*E como obter as duas circunferências?*

Traçando dois conjuntos de cordas iguais. Para isso:

1. Alinhavar uma circunferência repetindo todos os passos anteriores;
2. Em seguida, usando linha de cor diferente traçar outra circunferência, unindo cada ponto $n$ com o ponto $n + 11$, por exemplo.

## E não só!

Partindo não de uma circunferência mas de duas circunferências concêntricas em que o raio de uma é o dobro do da outra obtêm-se as duas últimas curvas da Fig. 1: curvas sem designação particular, embora a primeira lembre uma cardióide.

É surpreendente, como a partir dos mesmos pontos marcados sobre as duas circunferências, se obtêm duas curvas tão diferentes. Sobre a circunferência exterior deverão ser marcados 72 pontos igualmente espaçados e sobre a interior 36, de tal modo que o centro das circunferências e os pontos do topo sejam colineares (Fig. 3a). Em seguida numera-se mentalmente esses pontos, numa e noutra circunferência, a partir do topo. É precisamente na maneira de o fazer que reside o segredo:

- no primeiro caso deverá proceder-se à numeração no mesmo sentido em ambas as circunferências, horário por exemplo;
- no segundo caso deverá fazer-se em sentidos contrários, a circunferência exterior no sentido horário e a interior no sentido antihorário, por exemplo.

Resta por fim alinhavar 1 com 1, 2 com 2, ..., 36 com 36, e dando mais uma volta no círculo interior, 1 com 37, 2 com 38, ..., 36 com 72. (Fig. 3b no primeiro caso e Fig. 3c no segundo caso.)

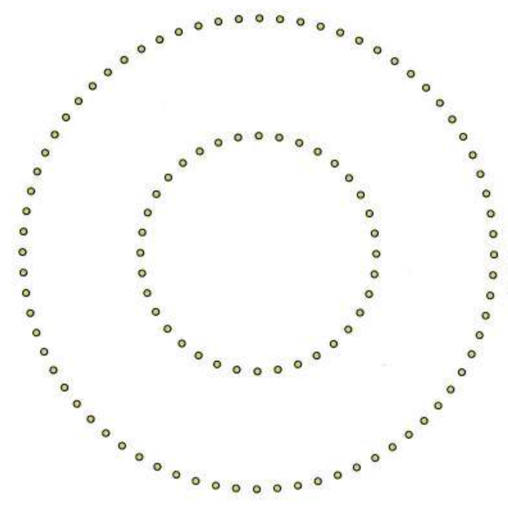


Figura 3a

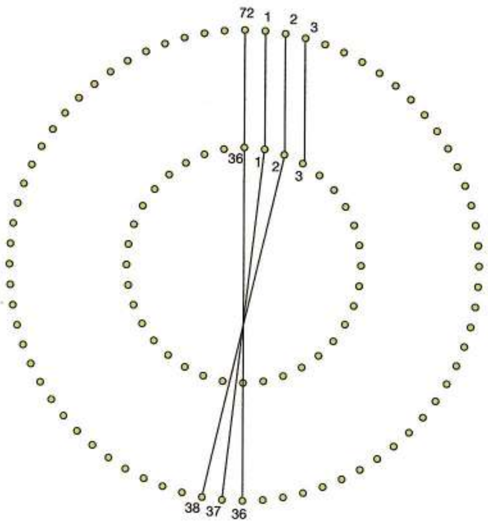



Figura 3b

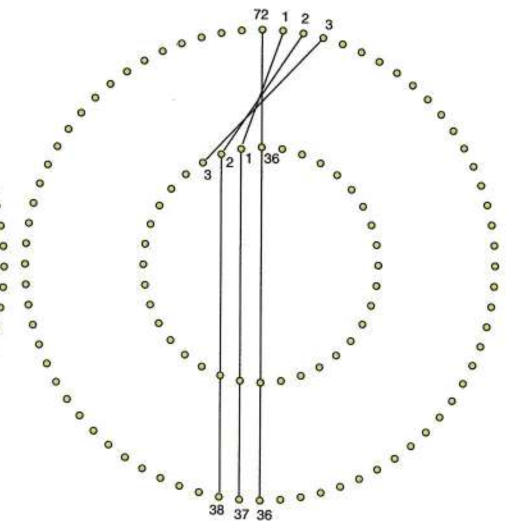



Figura 3c

## Sugestões de trabalho com os alunos

1. Uma vez alinhavada a circunferência da Fig.1 podem colocar-se várias questões:

- Como explicas que ao alinhavar cordas iguais de uma circunferência se obtenha outra circunferência? (Tem presente a posição relativa de cada uma dessas cordas e a circunferência alinhavada)
- Como fazer variar o comprimento das cordas de modo que o raio da circunferência alinhavada aumente?
- Se as cordas forem iguais ao raio, qual a razão entre os raios da circunferência de partida e da alinhavada?
- E se as cordas forem iguais ao diâmetro, o que acontece?

2. Outro desafio a lançar aos seus alunos é a construção de qualquer um dos modelos apresentados com recurso ao Sketchpad.

## Recurso ao Sketchpad

Porque na construção de qualquer um dos modelos apresentados se parte de um segmento de recta, cuja posição se multiplica de um modo ordenado e repetitivo, temos toda a vantagem em recorrer ao comando *Iterate* do menu *Transform*.

No primeiro caso vamos partir do segmento *BC* (Fig. 4a) em que *B* e *C* são pontos de uma circunferência de centro A que obedecem à lei de formação enunciada (alinhavam-se cordas iguais unindo cada ponto $n$ com o ponto $n + 15$ (módulo 36)), pontos 1 e 16. Os segmentos seguintes unem os pontos 2 e 17, 3 e 18, … , respectivamente (Fig. 2b).

Qual a lei geométrica de iteração? Muito simples, rodando o segmento 1–16, com centro em *A*, de −10°, obtém-se 2–17, rodando agora este da mesma maneira obtém-se 3–18, …
Vamos então construir:

- O segmento de partida *BC*.
- Para isso marcamos um ponto *A*, um ponto *B* e o ponto C rodando *B*, com centro em *A*, de −150°.
- Por último traçamos o segmento *BC* (Fig. 4a).
- O segmento transformado de *BC* pela rotação com centro em A, de −10°.
  Como o ponto C foi definido à custa do ponto *B*, basta definir o transformado de *B* — *B*'.

Estamos agora em condições de recorrer ao comando *Iterate*.
Para isso:

- Seleccionamos os pontos A e B;
- *Iterate*;
- Preenchemos a caixa de diálogo com
  A — A
  *B* — *B*'

São traçadas três linhas. (Fig. 4b)

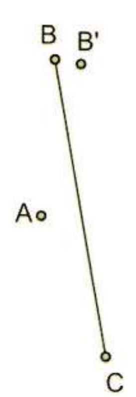



Figura 4a

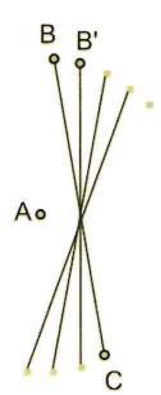



Figura 4b

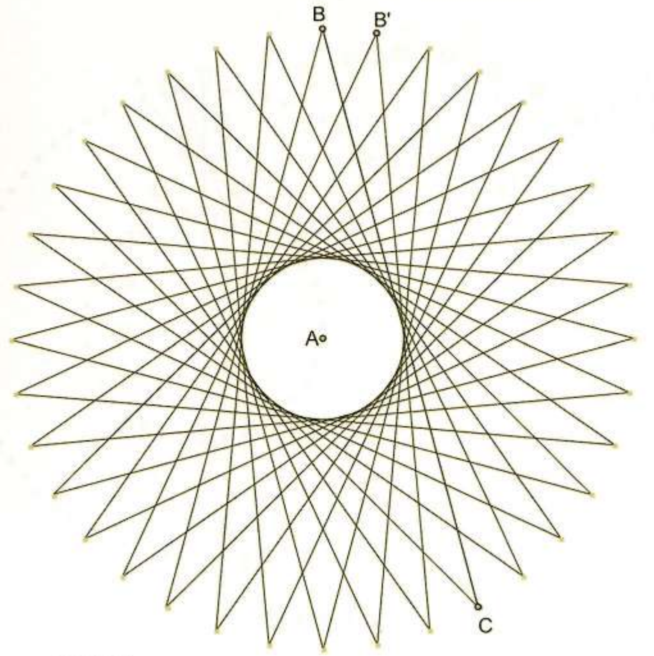



Figura 4c

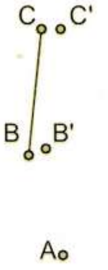



Figura 5a

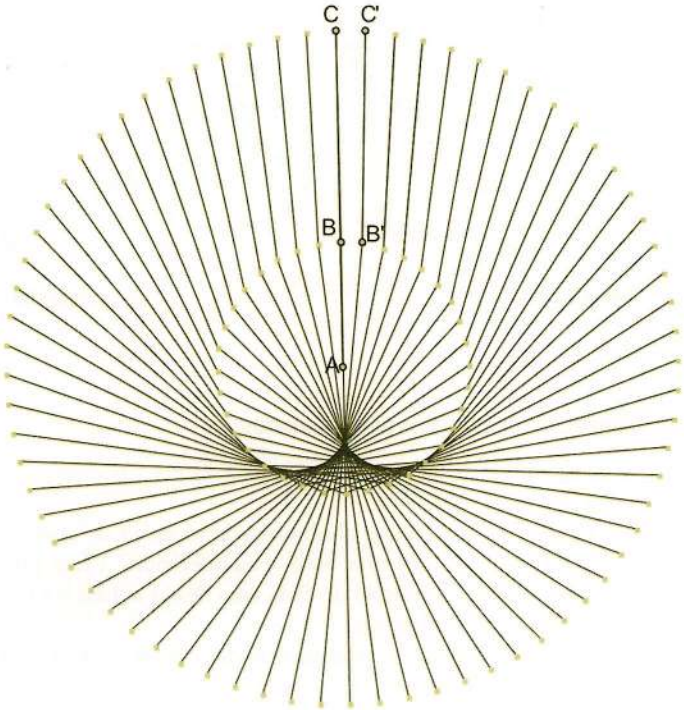



Figura 5b

Para obtermos mais linhas devemos pressionar + (Fig. 4c).

No terceiro caso partimos igualmente de um segmento *BC* (Fig. 5a) em que *B* e *C* são pontos de duas circunferências de centro A que obedecem à lei de formação enunciada (alinhavar 1 com 1, 2 com 2, ...), pontos 1 e 1. Os segmentos seguintes unem os pontos 2 e 2, 3 e 3, ... , respectivamente (Fig. 3b).

Qual a lei geométrica de iteração? Mais uma vez muito simples, agora rodando o extremo superior C, com centro em A, de $-5°$ e o extremo inferior *B*, também com centro em A, de $-10°$ obtém-se o segmento 2 — 2. Rodando agora este da mesma maneira obtém-se 3 — 3, ...

Vamos então construir:

- O segmento de partida *BC*.
  Para isso marcamos um ponto A, um ponto *B* e um ponto C.
  Por último traçamos o segmento *BC* (Fig. 5a).
  NB: Como vê não tivemos a preocupação de marcar os pontos *B* e *C* como pontos de duas circunferências em que o raio de uma é o dobro do da outra. Só assim, no entanto, estaremos em condições de recorrer ao comando *Iterate*, já que este apenas funciona com pontos independentes. Verá mais adiante como ultrapassaremos essa limitação.
- O segmento transformado de *BC*.
  Para isso rodamos *B*, com centro em A, de $-10°$ — B' e **C**, com centro em A, de $-5°$ — C'.

Estamos agora em condições de recorrer ao comando *Iterate*. Para isso:

- Seleccionamos os pontos A, B e C;
- *Iterate*;
  Preenchemos a caixa de diálogo com

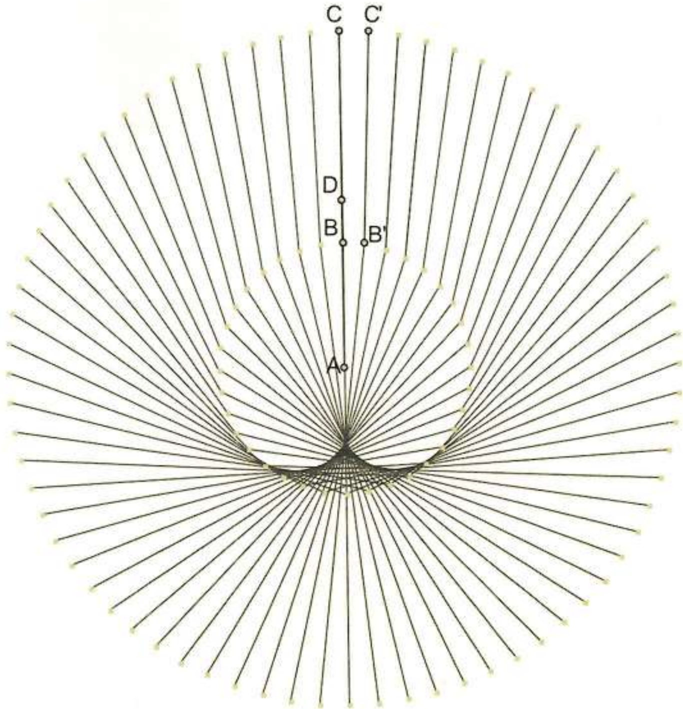



Figura 5c

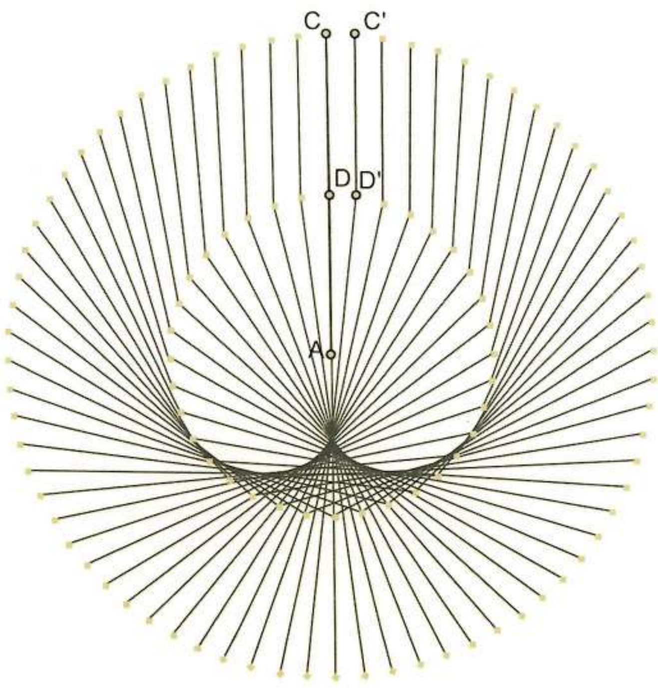



Figura 5d

A — A
B — B'
C — C'

São traçadas três linhas. Para obtermos mais linhas devemos pressionar + (Fig. 5b).

Vamos agora tratar de corrigir a posição do ponto *B* de modo que o raio de uma das circunferências seja o dobro do da outra. Para isso:

- Construimos o ponto médio do segmento *AC* — *D* (Fig. 5c);
- Levamos o ponto *B* a ocupar a posição *D*. Para isso:
  seleccionar os pontos *B* e *D*
  *Edit*
  *Merge Points*

Agora sim a curva está construída correctamente (Fig. 5d).

## Nota

As fotografias da figura 1 são da autoria de Margarida Dias.

## Bibliografia e links

Millington, John. *Curve Stitching: The art of beautiful mathematical patterns.* Tarquin Publications: St Albans, 2007

http://math.youngzones.org/Curve_stitching.html

Manuela Ribeiro

Grupo de Trabalho de Geometria da APM

# Pavimentações com o Geometer's Sketchpad – Um estudo no 10.º ano de escolaridade

**António Domingos e Maria João Mendes Vieira**

Este artigo pretende dar conta dos principais resultados da aplicação das tarefas apresentadas no número anterior da Revista, nesta mesma secção. Pretende-se analisar o impacto que o Geometer's Sketchpad (GSP) tem na aprendizagem da Geometria, quando associado à demonstração de propriedades algébricas e geométricas relativas às pavimentações.

Procura-se compreender de que forma um ambiente de geometria dinâmica como o GSP influencia o estudo das pavimentações regulares e semi regulares, nomeadamente que tipo de aprendizagens estão associadas ao estudo das pavimentações, que conhecimentos os alunos mobilizam para a construção de pavimentações e de que forma a utilização do GSP desencadeia a necessidade de validação das conjeturas e demonstração (no contexto das propriedades das pavimentações).

Trata-se de um estudo de natureza qualitativa (Vieira, 2012) baseado na realização de tarefas no contexto de aula e que recorre a estudos de caso. Foram analisadas em particular as respostas às tarefas propostas, realizadas por três grupos de alunos (A, B e C) de uma turma do 10.º ano de escolaridade de um curso profissional (técnico de Design Gráfico). Os alunos manifestaram algumas dificuldades no cumprimento das tarefas, em especial na compreensão do papel da demonstração. Apenas um grupo reconheceu a importância das funções de validação e explicação. A maior parte revelou dificuldade em formular conjeturas e manipular resultados algébricos.

## Aprendizagens associadas ao estudo das pavimentações com GSP

Todos os grupos em estudo conseguiram construir as pavimentações que lhes foram propostas nas tarefas, facilitados pelo uso do GSP. Desta forma, restou mais tempo para analisar as propriedades e focalizar o estudo em algumas propriedades algébricas referentes às pavimentações embora nalguns casos tenham sido as propriedades geométricas, o foco dessas aprendizagens. O fato de os alunos manipularem as construções permitiu a exploração de resultados e da procura de propriedades quando distinguem o que «mexe» e o que permanece invariante.

O nível de conhecimento dos alunos foi determinante para a concretização das tarefas propostas (Whiteley, 2000) uma vez que os alunos que compreendem bem a noção de rotação e translação, realizam as tarefas com facilidade enquanto os que não dominam bem os conhecimentos, demoram mais tempo em explorações e consequentemente a realizar as tarefas. Um dos grupos (Grupo A) domina bem os conhecimentos que têm apreendido sobre isometrias mobilizando-os na realização das tarefas e por isso concretizam-nas com sucesso, antes dos restantes grupos, e têm mais tempo disponível para responder às questões que são colocadas. Recorrem igualmente aos conhecimentos relativos às propriedades dos polígonos, no que respeita aos ângulos, para concretizar as tarefas e encaram-nos como tarefa rotineira, construindo e explicando relações geométricas (Jones, 2005).

As alunas dos restantes grupos não tinham os conhecimentos consolidados no que diz respeito ao estudo das isometrias e portanto revelaram dificuldades na sua aplicação na construção das pavimentações solicitadas. Neste caso, a utilização do GSP permitiu, através da exploração, a consolidação destes conceitos sendo que com o decorrer do tempo estes conhecimentos iam sendo aplicados sem qualquer dificuldade indo de encontro ao que diz Abrantes (1997), o AGD serviu de suporte para que estas alunas se apropriassem de processos fundamentais no que diz respeito a estes (isometrias) conceitos geométricos.

O Grupo A, manipula as figuras e testa as conjeturas que vão elaborando sucessivamente, sem se aperceberem disso, apenas por manipulação dos sketches e portanto, por vezes, torna-se difícil distinguir entre o processo de elaboração de conjetura e o processo de teste da conjetura. Estes dois alunos manipulam as figuras que construíram, fazem medições, procuram regularidades e formulam conjeturas testando-as seguindo o processo descrito por Machado (2005): desenvolveram a atividade a partir de uma tarefa, geraram exemplos a partir da análise da situação, organizaram e analisaram esses exemplos procurando regularidades e relações e posteriormente testaram as suas conjeturas tentando encontrar um contra exemplo. Neste processo verificaram-se duas situações distintas em tarefas diferentes: (a) encontraram um contraexemplo e reformularam a conjetura (b) a conjetura resistiu a vários testes.

Quando responderam à questão «será que todo o triângulo pavimenta o plano?», este grupo seguiu o percurso (b) e houve necessidade de partir para a sua demonstração, em grande parte por ser um dos objetivos da tarefa mas também porque se sentiram motivados a justificar o seu raciocínio. Para isso apresentaram argumentos e justificações formais, utilizando as propriedades dos triângulos relativas aos ângulos internos para justificarem a conjetura formulada (Fig.1)

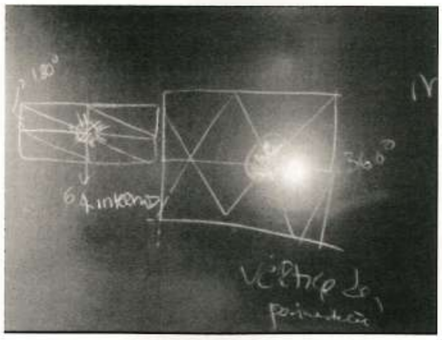


Figura 1

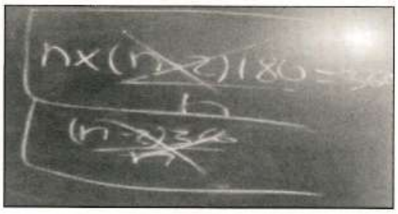


Figura 2

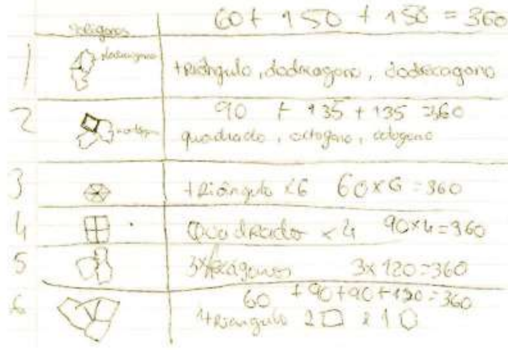


Figura 3

Uma das alunas deste grupo utiliza claramente as diferentes funções da demonstração: explicação, descoberta, verificação, desafio intelectual e sistematização (De Villiers, 1999) e para si a demonstração surge como um processo de busca do porquê de determinada conclusão, segundo ela «explicar como chegamos ao resultado» motivada pelo convencimento obtido com o GSP no caso, por exemplo, da pavimentação com triângulos.

No que se refere à tarefa sobre pavimentações regulares, o Grupo A utiliza o GSP para a construção das pavimentações. No entanto a sua utilização não influencia diretamente o processo de elaboração da conjetura, uma expressão matemática que relaciona o número de lados e os ângulos internos de um polígono regular que seja condição para que esse polígono pavimente o plano. Os alunos testam a conjetura (Fig.2) sem utilizar o software, e abandonam as conjeturas cada vez que arranjam um contra exemplo. Quando verificam que a conjetura é válida para todos os casos dão o trabalho como concluído e não sentiram necessidade de apresentar mais nenhum tipo de justificação.

Com o decorrer do tempo, estes alunos, não sentem necessidade em medir e manipular as figuras para elaborar as conjeturas e apresentam argumentos dedutivos para as suas explicações. Aliás, na última tarefa dispensam a utilização do GSP para a construção das pavimentações e apenas apresentam argumentos que justifiquem as suas generalizações (Fig.3)

Os outros dois grupos tiveram muita dificuldade em elaborar conjeturas sendo que esta foi uma das competências que não ficou adquirida. O Grupo B, esboçou uma tentativa para elaborar a conjetura no caso da pavimentação com triângulos, mas com uma linguagem confusa em que as ideias estão pouco claras e que contém erros, não desenvolvendo argumentos (formais ou informais) para a justificação do que tinham escrito. A tarefa seguinte foi cumprida no que diz respeito à construção dos skeches, sendo esta a preocupação constante das alunas desde o primeiro momento. Apesar de descobrirem e investigarem relações e propriedades geométricas, no caso específico das pavimentações (Jones, 2005) não são levadas a elaborar conjeturas sobre os seus resultados. Em termos de raciocínio demonstrativo não desenvolveram competências ao nível do desenvolvimento e justificação de argumentos.

O Grupo C, mobiliza corretamente os conhecimentos que têm sobre rotações e translações para a construção das pavimentações. Sobre a questão «será que todo o triângulo pavimenta o plano?» efetuam a generalização mas, no entanto, não desenvolvem qualquer tipo de justificação para a mesma o que poderia indiciar que tenham respondido aleatoriamente à questão.

Estes dois Grupos (B e C) apesar de iniciarem um processo de investigação: observaram, registaram e manipularam, não passaram à fase seguinte, a de conjeturar, testar e desenvolver teorias como explicação num processo como o que sugere Olive (2002). No que se refere à tarefa onde se pedia uma condição para que um polígono pavimente o plano, estes dois grupos, utilizaram a função de arrastamento do software para investigar propriedades aproveitando as potencialidades do mesmo no que diz respeito à verificação de casos particulares mas não conseguiram elaborar conjeturas a partir daí (generalização), grande parte das vezes foram registando as experiências realizadas como conjeturas mas nunca as formalizaram nem apresentaram raciocínios que de alguma forma as justificasse (validação). O Grupo C, efetuou as construções com relativa facilidade, entenderam os conceitos teóricos mas provavelmente confundiram entre o que é experimentação e demonstração, como refere Hanna (2000).

O que se observou nestes dois grupos vai de encontro à preocupação manifestada por Mariotti (2010) quando refere que a facilidade de utilização do software «para compreender tais propriedades pode inibir alguns processos de argumentação que conduzem à procura de elementos úteis para a construção da demonstração» referindo-se às propriedades que permanecem invariantes.

A motivação para a demonstração não surgiu em todos os grupos como se descreveu no ponto anterior. Apenas o Grupo A elaborou conjeturas condicionados pela realização das tarefas e pela atribuição de tarefas por parte do professor (Takác, 2009). A vertente exploratória deste software permitiu um maior convencimento sobre a veracidade dos resultados que iam sendo apresentados (Hull e Brovey, 2004) fato que se constatou em todos os grupos relativamente à aplicação da primeira tarefa.

Na globalidade, a utilização do GSP orientada por tarefas específicas contribuiu para a investigação de relações e propriedades geométricas no decurso da construção das pavimentações, nomeadamente no caso das isometrias e num dos casos (Grupo A) contribuiu de forma bastante acentuada para a elaboração de conjeturas e demonstração como forma de justificação de raciocínios.

Em síntese, observam-se comportamentos distintos nos alunos envolvidos no estudo relativamente às aprendizagens que a utilização do GSP proporcionou. Para os alunos do Grupo A, a utilização do software teve um papel mais preponderante no que se refere à elaboração e validação de conjeturas tendo sido utilizado como um meio para atingir um fim. Estes alunos utilizam as funções de validação e explicação como funções da demonstração. Não têm dificuldades em apresentar e justificar os seus raciocínios embora apresentem alguma relutância em começar mas, quando iniciam sabem que resultados devem utilizar e não revelam dificuldade em manipular expressões algébricas redigindo-as de forma organizada. Para as alunas dos grupos B e C, as aprendizagens situaram-se ao nível da exploração das propriedades geométricas, nestes casos a utilização do GSP permitiu uma consolidação de conceitos referentes à geometria que não tinham sido bem apreendidos e serviu de motivação para o estudo de um tema que as alunas consideravam difícil e a que tinham alguma resistência aquando do início deste estudo. No final apresentaram como vantagens da utilização do software a compreensão de conceitos geométricos e inclusive referem uma melhoria no desempenho na disciplina de Geometria Descritiva. Em relação à demonstração matemática estas alunas revelaram bastantes dificuldades em elaborar conjeturas considerando a maioria das vezes que as experiências que realizavam eram justificações claramente confundindo entre o que é experimentação e validação. Em termos de motivação a utilização de tecnologia foi um fator positivo no estudo tendo sido referido por todos os alunos por considerarem as aulas mais estimulantes e «divertidas» e por tentarem «descobrir como é que são as coisas, em vez de ser a professora a explicar».

Considera-se que o GSP enquanto tecnologia no ensino da Matemática desempenha um papel motivador das aprendizagens, criando hábitos de trabalho autónomo e a efetiva compreensão dos conceitos geométricos envolvidos nas tarefas quer pela própria filosofia do programa que «obriga» ao conhecimento de conceitos básicos para realizar as construções, quer pela facilidade com que se podem efetuar construções sucessivas, por experimentação num curto espaço de tempo. Por outro lado conjugado com a aplicação de tarefas de natureza investigativa pode proporcionar aos alunos o desenvolvimento de competências ao nível da elaboração e justificação de raciocínios como forma de convencimento das situações que experienciam.

## Referências Bibliográficas


Abrantes, P. (1997) A tecnologia no currículo de Matemática: dez anos de investigação em Portugal. *Educação e Matemática*, 45, pp. 27-31. Lisboa: APM

Baccaglini-Frank, A. e Mariotti, M. (2010) Conjecturing and proving in dynamic geometry:the elaboration of some research hyphoteses, . *Proceedings of CERME 6 – working group 2*. Lyon

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. Emeryville CA: Key Curriculum Press.

Hanna, G. (2000a). Proof and its classroom role: A survey. *Actas do IX encontro de investigação em educação matemática* (pp. 75-104). Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.

Hull, A.N. e Brovey, A.J. (2004) The Impact of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Attitudes towards Mathematics. *ARE– Action Research Exchange*, Vol3 (1) USA: Department of Curriculum & Instructional Technology at Valdosta State University, Valdosta, Georgia (Retirado de http://teach.valdosta.edu/are/vol3no1/pdf/anhull-article.pdf em 27/11/2010)

Jones, K. (2005), Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom. Em, Edwards, J. and Wright, D. (Eds.), *Integrating ICT into the Mathematics Classroom*, pp.18-20. Derby, UK, Association of Teachers of Mathematics, 27-29 18(3)

Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad* (tese de mestrado) Lisboa: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa

Olive, J. (2002). Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning. *Actas do IX Encontro de Investigação em Educação Matemática – Fundão 2003*. Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Takác, Z. (2009). Influence of MRP Tasks on Students' Willingness to Reasoning and Proving. In F-L. Lin, F-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. (Vol. 2, pp. 202-207). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Vieira, M. J. (2011). *O estudo de Pavimentações Regulares e Semi-Regulares com Ambiente de Geometria Dinâmica*. (tese de mestrado) Monte da Caparica: Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

Whiteley, W. (2000) Dynamic geometry programs and the practice of geometry. *Proceedings of the ICME 9*. Tóquio (Retirado de http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Dynamic.pdf em 30/11/2010)



**Maria João Mendes Vieira**

Escola Secundária de Casquilhos (matmaria.essa@gmail.com)

**António Domingos**

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa (amdd@fct.unl.pt)

# Afinal, o ouro estava lá!

**Ana Isabel Felgueiras, Corália Maria Pimenta, Manuel Joaquim Saraiva e Paulo Jorge Lourenço**

## Introdução

Reza a História da Matemática que Pitágoras de Samos, famoso matemático e filósofo grego, foi o primeiro, depois de uma longa batalha de cálculos e ideias miraculosas, a conseguir demonstrar uma relação que o próprio supôs existir entre os quadrados dos lados de um triângulo retângulo.

Apesar do tempo que nos separa, foi este mesmo sentimento reiterativo, esta necessidade insaciante de provar aquilo que os nossos olhos teimam em ver, que nos conduziu à demonstração do limite desta bela sucessão de razões numéricas (entre cada par de números consecutivos da sucessão de Fibonacci) que também a natureza, sob diversas formas, nos decidiu oferecer.

Confrontados, na aula de Complementos de Didática da Matemática I, 3.° ciclo em Didática da Matemática, UBI, com o desafio de provar que tal limite era $\Phi$, assolámo-nos do mesmo espírito de Pitágoras e procurámos, com determinação e persistência, uma demonstração. Porém, à medida que caminhávamos para a «meta», deparámo-nos com a seguinte questão: Atenção, o limite da sucessão só pode ser o número de ouro se tal limite existir. Afinal, o limite existe mesmo? A esta dúvida também tivemos de fazer prova.

Com a elaboração deste texto, o nosso principal objetivo é partilhar com o leitor a nossa experiência matemática na resolução deste desafio muito conhecido mas, e quanto a nós, usualmente abordado de forma incompleta: parte-se do princípio de que o limite da sucessão existe. Utilizar propriedades, teoremas ou resultados baseados apenas em suposições, originará, com toda a certeza, uma *não demonstração*. Há que aliar a componente dedutiva da demonstração matemática a um significado, bem como dar sentido a todo o processo demonstrativo: a lógica, sendo muito importante na demonstração, precisa da intuição e da constante colocação de questões.

## O desafio inicial

Os números de Fibonacci são os números que compõem a sucessão 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … , sendo obtidos, a partir do terceiro, pela soma dos dois números anteriores. Formalmente, a sucessão de Fibonacci é definida recursivamente da seguinte forma:

$$f_1 = 1;\ f_2 = 1;\ f_i = f_{i-1} + f_{i-2}\ (\text{se } i > 2).$$

Numa das primeiras aulas da disciplina foi-nos colocada a seguinte questão:

*Considere a sucessão das razões entre dois números consecutivos de Fibonacci.*

*Designe-a por* $t_i = f_{i+1}/f_i$, *para* $i \geq 1$.

*Calcule* $\lim_{i\to+\infty} t_i$.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | TERMOS DA SUCESSÃO | | | | RAZÕES | | | | | | |
| 2 | 1º | 1 | | Pelo termo geral | | Subsucessão termos ímpares | | | Subsucessão termos pares | | |
| 3 | 2º | 1 | 1º | 1,000000000000000000 | 1,000000000000000000 | 1,000000000000 | | M | | | M |
| 4 | 3º | 2 | 2º | 2,000000000000000000 | 2,000000000000000000 | | 0,50000 | | 2,000000000000 | | |
| 5 | 4º | 3 | 3º | 1,500000000000000000 | 1,500000000000000000 | 1,500000000000 | | C | | -0,333333 | |
| 6 | 5º | 5 | 4º | 1,666666666666670000 | 1,666666666666670000 | | 0,10000 | | 1,666666666667 | | D |
| 7 | 6º | 8 | 5º | 1,600000000000000000 | 1,600000000000000000 | 1,600000000000 | | C | | -0,041667 | |
| 8 | 7º | 13 | 6º | 1,625000000000000000 | 1,625000000000000000 | | 0,01538 | | 1,625000000000 | | D |
| 9 | 8º | 21 | 7º | 1,615384615384620000 | 1,615384615384620000 | 1,615384615385 | | C | | -0,005952 | |
| 10 | 9º | 34 | 8º | 1,619047619047620000 | 1,619047619047620000 | | 0,00226 | | 1,619047619048 | | D |
| 11 | 10º | 55 | 9º | 1,617647058823530000 | 1,617647058823530000 | 1,617647058824 | | C | | -0,000866 | |
| 12 | 11º | 89 | 10º | 1,618181818181820000 | 1,618181818181820000 | | 0,00033 | | 1,618181818182 | | D |
| 13 | 12º | 144 | 11º | 1,617977528089890000 | 1,617977528089890000 | 1,617977528090 | | C | | -0,000126 | |
| 14 | 13º | 233 | 12º | 1,618055555555560000 | 1,618055555555560000 | | 0,00005 | | 1,618055555556 | | D |
| 15 | 14º | 377 | 13º | 1,618025751072960000 | 1,618025751072960000 | 1,618025751073 | | C | | -0,000018 | |
| 16 | 15º | 610 | 14º | 1,618037135278510000 | 1,618037135278510000 | | 0,00001 | | 1,618037135279 | | D |
| 17 | 16º | 987 | 15º | 1,618032786885250000 | 1,618032786885250000 | 1,618032786885 | | C | | -0,000003 | |
| 18 | 17º | 1597 | 16º | 1,618034447821680000 | 1,618034447821680000 | | 0,00000 | | 1,618034447822 | | D |

Começámos por calcular os primeiros termos da sucessão, tendo, mesmo, recorrido à Folha de Cálculo[1] (Fig. 1).

Por observação direta da tabela e da representação gráfica, ganhámos a convicção de que tal limite seria o número de ouro. Designámo-lo por $a$ e, depois, mostrámos que a era $\Phi$, da seguinte forma:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, \dots$$

A sucessão $(t_i)$ pode escrever-se da seguinte forma:

$$t_1 = \frac{f_2}{f_1} = 1, t_2 = \frac{f_3}{f_2} = 2 = 1 + \frac{1}{t_1}, t_3 = \frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{t_2}, \dots$$

$$\dots, t_i = \frac{f_{i+1}}{f_i} = 1 + \frac{1}{t_{i-1}}.$$

De um modo geral,

$$t_{i+1} = \frac{f_{i+2}}{f_{i+1}} = \frac{f_{i+1} + f_i}{f_{i+1}} = 1 + \frac{1}{f_{i+1}/f_i} = 1 + \frac{1}{t_i}.$$

Passando ao limite do quociente referido, obtemos:

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{f_{i+2}}{f_{i+1}} = \lim_{i \to +\infty} t_{i+1} = \lim_{i \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t_i}\right).$$

Considerando que

$$\lim_{i \to +\infty} t_{i+1} = \lim_{i \to +\infty} t_i = a$$

então,

$$a = 1 + \frac{1}{a}, \text{ para } a > 0.$$

Temos então a seguinte equação do segundo grau

$$a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

o que implica que

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ pois } a > 0.$$

Depois de todo este trabalho, alguém questionou:

Atenção, atenção! Estamos a partir do princípio de que o limite existe, apenas com base na observação de uma tabela e de uma representação gráfica. Mas isso não chega, embora seja importante para ganharmos convicções! Lembram-se do polinómio com que trabalhámos numa das primeiras aulas? Tratava-se do polinómio

$$p(n) = n^7 - 28n^6 + 322n^5 - 1960n^4 + 6769n^3 - 13132n^2 + 13069n - 5040.$$

Ao considerarmos a seguinte afirmação, «Em $p(n)$, ao substituirmos n por um número natural obtém-se sempre o próprio número natural», e depois de experimentarmos para os casos $n = 1$, $n = 2$, $n = 5$, fomos tentados a responder que a afirmação era verdadeira. Porém, ela era falsa. Cuidado com as generalizações!

Nessa altura até conseguimos encontrar um polinómio de grau 100000 em que $p(n) = n$, para todo o $n \leq 100000$, mas para o qual $p(100001) \neq 100001$.

E assim começámos a resolver um novo desafio!

## O novo desafio – a prova da existência do limite

Esta demonstração levou-nos a mais umas semanas de trabalho. Tínhamos a «certeza» que o limite existia. Tínhamos a «certeza» que haveríamos de demonstrá-lo. Havia que demonstrar que a sucessão das razões $t_i = f_{i+1}/f_i$ era convergente. Como? Que caminho seguir?

Tivemos a sorte de encontrar dois resultados que nos levaram à resposta pretendida. Um deles foi desenvolvido por Albuquerque[2] e o outro por Machado[3].

*O que nos diz Albuquerque*: Seja $t_i = f_{i+1}/f_i$, em que $f_i$ são os números de Fibonacci. Considerem-se as subsucessões dos termos de ordem par $(t_{2i})$ e a dos termos de ordem ímpar $(t_{2i-1})$. Apesar da sucessão $(t_i)$ não ser monótona per si, ambas as subsucessões $(t_{2i})$ e $(t_{2i-1})$ o são, sendo uma delas monótona crescente e a outra monótona decrescente. Além disso, ambas as subsucessões são limitadas.

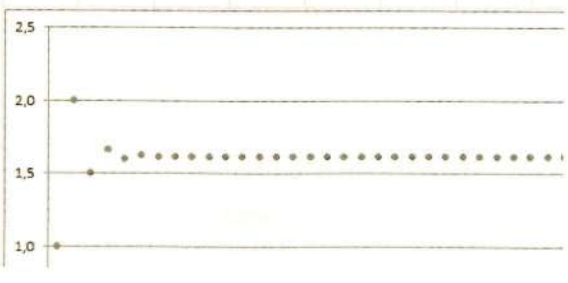
Considere-se a subsucessão $(t_{2i})$. Em Albuquerque está provado que $(t_{2i})$ é monótona decrescente. Assim sendo, $t_2 = 2$ é um majorante, donde pode-se concluir que $0 < t_{2i} \leq 2$, isto é, $(t_{2i})$ é limitada.

Sendo $(t_{2i})$ monótona e limitada, é convergente para um dado valor $\alpha$, isto é,

$$\lim_{i \to +\infty} t_{2i} = \alpha.$$

De modo análogo, Albuquerque prova que a subsucessão $(t_{2i-1})$ é monótona crescente. Recorrendo ao método de indução matemática, Albuquerque demonstra que $(t_{2i-1})$ é limitada: $0 < t_{2i-1} < 3$. Deste modo, $(t_{2i-1})$ também é monótona e limi-

Figura 1




tada, ou seja, converge para um dado valor $\beta$, isto é,

$$\lim_{i \to +\infty} t_{2i-1} = \beta.$$

Albuquerque, acaba por demonstrar que as subsucessões $(t_{2i})$ e $(t_{2i-1})$ são convergentes para um mesmo valor, ou seja, $\alpha = \beta$.

Neste momento do processo gostaríamos de poder generalizar para a sucessão das razões aquilo que já sabíamos sobre duas das suas subsucessões — ambas convergiam para o mesmo valor. Mas com que autoridade matemática? Quem nos garantia que toda e qualquer outra subsucessão da sucessão das razões que considerássemos também convergia para esse mesmo valor, ou, mesmo, se era convergente? Tínhamos a consciência de que o resultado já obtido ainda não era suficiente para dar uma resposta convincente à nossa questão — a existência do limite.

Tivemos a felicidade de encontrar, após uma árdua procura, o resultado apresentado por Machado[3]. Segundo ele, se tivermos uma sucessão de números reais $(x_n)$ e se $J'$ e $J''$ forem dois subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tais que as subsucessões $(x_n)_{n \in J'}$ e $(x_n)_{n \in J''}$ convirjam ambas para um mesmo limite $x$ (que pode ser um número real, $+\infty$ ou $-\infty$), então, se $J = J' \cup J''$, tem-se que a subsucessão também converge para $x$. Em particular, no caso em que $\mathbb{N} = J' \cup J''$, a sucessão de partida também tem limite $x$.

Tal resultado levou-nos a «ver» que a reunião do subconjunto dos números pares com o subconjunto dos números ímpares era o conjunto dos números naturais! Assim, o facto das duas subsucessões $(t_{2i})$ e $(t_{2i-1})$ da sucessão $(t_i)$ convergirem para um mesmo limite levava a que também a sucessão $(t_i)$ convergisse para esse mesmo valor. Conseguimos, desta forma, mostrar a existência do $\lim\limits_{i \to +\infty} f_{i+1}/f_i$. Ficámos felizes.

## Comentários finais

O conceito de demonstração matemática tem, naturalmente, sofrido alteração de acordo com as épocas e com a perceção de quem as concretiza. Sendo a demonstração uma prova da veracidade de proposições, tem características muito próprias, exigindo, com maior ou menor intensidade, capacidade de abstração, formalização, axiomatização e a cobiçada dedução. A demonstração tem por missão validar e certificar determinadas propriedades que, intuitivamente, parecem verificar-se. Deve, por isso, ter o poder de melhorar a compreensão, afastando-nos de ambiguidades ou equívocos.

Em determinada etapa da nossa demonstração, talvez pela ânsia de deduzir aquilo que já nos parecia óbvio, fomos conduzidos pela regularidade do «fenómeno», confirmada através do computador, e aceitámos ingenuamente a existência do limite:

$$\lim_{i \to +\infty} t_{i+1} = \lim_{i \to +\infty} t_{i+1} = a.$$

Constate-se então que, se porventura não existir este limite, será interrompida a cadeia de raciocínios que julgámos bem estabelecidos e rigorosos. Sem a demonstração de existência desse limite, continuamos sem ter certezas quanto à convergência da sucessão dos quocientes de dois termos consecutivos.

Confrontados com a dúvida de existência desse limite, procurámos provar a igualdade supracitada. Tivemos a sorte, por que procurada, em encontrar os resultados de Albuquerque e Machado, que nos permitiram resolver a dúvida instalada. Houve satisfação quando tal aconteceu. Rejubilámos, como diz Pólya.

Permitam-nos, ainda, que coloquemos a seguinte questão/desafio: Será que considerando uma qualquer sucessão gerada da mesma forma que a de Fibonacci, isto é, sendo os dois primeiros termos números quaisquer e a partir do terceiro sendo obtidos pela soma dos dois anteriores, a nova sucessão das razões obtida também tem por limite $\Phi$?

## Notas

[1] http://paulojorgelourenco.do.sapo.pt/CDMI_UBI/sucessoes.zip
[2] http://www.ptmat.fc.ul.pt/~albuquer/fibonacci/trabalho/limite.htm
http://www.lmc.fc.ul.pt/~albuquer/fibonacci/trabalho/limite.htm
[3] http://www.lmc.fc.ul.pt/~armac/Analise_I/NotasAM1.pdf

Ana Isabel Felgueiras
Escola Superior de Tecnologia e Gestão (Instituto Politécnico de Leiria)

Corália Maria Pimenta
Instituto Educativo de Lordemão

Manuel Joaquim Saraiva
Departamento de Matemática (Universidade da Beira Interior)

Paulo Jorge Lourenço
Escola Secundária Doutor Ramiro Salgado (Agrupamento de Escolas de Torre de Moncorvo)

# [Etno]matemática no Redondo e a Matemática no Planeta Terra!

Nos passados dias 7,8 e 9 de Maio, decorreu no Redondo o Encontro Aprendizagem Formal e Informal (AFI) onde mais de 4 dezenas de professores apresentaram e partilharam experiências ao nível das aprendizagens dos alunos em contextos letivo e extra letivo.

Uma dessas apresentações focou o projeto, DIZRedondo, desenvolvido pelo Projeto Matemática Ensino (PmatE) da Universidade de Aveiro. Este projeto dirige-se a alunos do 1.° ciclo do Ensino Básico e destina-se a avaliar, com recursos educativos interativos, a compreensão dos alunos redondenses em relação ao meio local onde estão inseridos, especialmente os envolvidos nos conteúdos programáticos da área de Estudo do Meio, interligando-a com o quotidiano no intuito de tornar as aprendizagens mais significativas.

Antecipando o questionamento em relação à opção da incidência no estudo do meio, foi justificada a ausência de uma vertente matemática por «não existir uma etnomatemática no Redondo». Esta afirmação fez-me «voar» para outras reflexões, muito para além do projeto DIZRedondo.

Será que não existem práticas culturais no Redondo que tenham implícitas ideias matemáticas ou apenas ainda não foram reconhecidas e exploradas? Com um superficial conhecimento do Redondo, lembrei-me de algumas práticas que utilizam certamente ideias matemáticas como as flores de papel das conhecidas Festas das Flores do Redondo, os Jogos tradicionais, eventualmente a confeção de queijos por exemplo.

Numa vertente de aplicações da matemática a uma realidade local e não deixando o (bom) vinho alentejano esquecido, poder-se-ia explorar também a matemática presente por exemplo na cultura das vinhas, na tecnologia dos processos de produção do vinho ou na própria gestão e tomada de decisão numa cooperativa.

Contudo estas práticas culturais poderão não ser conhecidas e partilhadas por uma geração juvenil, não tendo para os jovens em idade escolar particular significado por lhe parecerem tão estranhas como por exemplo os desenhos sona do povo quioco que vive no nordeste de Angola. Qual o significado que tem para os alunos a prática do jogo da malha ou a construção de flores de papel? Será que os alunos da região têm ainda as suas raízes culturais nestas práticas? Até que ponto o estudo de aplicações da Matemática em elementos do quotidiano contribui para a construção de uma identidade cultural dos alunos? E como é que podemos tornar visível essa matemática? Em qualquer turma?

É neste sentido que concordo que possa não estar ainda explorada uma etnomatemática no Redondo baseada nas raízes culturais primárias com significado para os alunos do 1.° ciclo e passível de ser avaliada em contexto escolar sem intervenção prévia.

A eventual (des)ligação dos mais jovens a estas raízes culturais deu lugar a outras vivências, partilhas e aprendizagens que poderão caraterizar determinado público-alvo. Essas caraterísticas são assumidas como traços culturais de um determinado grupo de pessoas? As práticas culturais que partilham têm implícitas ideias matemáticas?

Deveremos investir na «recuperação» desses conhecimentos e na (re)construção de uma identidade cultural? Como deveremos gerir a valorização dessa identidade e promover, simultaneamente, o respeito pela diversidade cultural e formar cidadãos participativos e integrados na sociedade globalizada onde vivemos? E qual é/ deve ser o papel da Matemática nesse processo?

De facto, existe uma variedade de ideias, práticas e estratégias matemáticas utilizadas para responder a situações do quotidiano que se colocam na comunidade, na família ou na sociedade em geral que pertencem ao conjunto de vivências dos alunos. A discussão e exploração de estratégias informais na sala de aula pode constituir um meio de ajudar os alunos a tomarem consciência e a construírem conceitos matemáticos a partir do seu conhecimento informal implícito, compatibilizando uma aprendizagem matemática com significado e o desenvolvimento dos jovens.

Impõe-se, assim, conceber e implementar projetos cujos objectivos e conteúdos proporcionem a valorização da diversidade identitária e cultural por um lado, e por outro que desmistifiquem e tornem visível a matemática implícita nos mais diversos contextos.

Em boa hora o projeto Matemática no Planeta Terra (MPE2013 – www.mpe2013.org) vem incentivar a valorização do papel fundamental da Matemática em inúmeros processos que afetam o Planeta Terra, tanto como uma disciplina fundamental quer como um componente essencial da pesquisa multidisciplinar e interdisciplinar.

Fica um (meu) ponto de vista e quiçá um desafio para que no Redondo em particular e por todo o país fora em geral compreendamos melhor o mundo através de um olhar matemático!

**Joana Latas**
Maio 2012

# Critérios e critérios

**6.** Na Figura 4, está representado o quadrado $[ABCD]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- $x$ é a amplitude, em radianos, do ângulo $EAB$
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

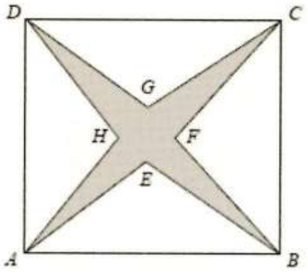



Figura 4

**6.1.** Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de $x$, por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

**6.2.** Mostre que existe um valor de $x$ compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual a área da região sombreada é $5$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

**Figura 1**

Vejamos a última pergunta da prova de Matemática A da 2ª fase de 2012 (Fig. 1).

Um número elevado de alunos seguiu o seguinte método de resolução do item 6.2.

$$a(x) = 5 \Leftrightarrow 16(1 - \operatorname{tg} x) = 5 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 11/16 \Leftrightarrow x \approx 0{,}602$$

$$\pi/12 < 0{,}602 < \pi/5 \quad \text{porque } \pi/12 \approx 0{,}262 \text{ e } \pi/5 \approx 0{,}628.$$

Os critérios de correção divulgados pelo GAVE apenas prevêem a resolução aplicando o Teorema de Bolzano. Então, como classificar esta questão? A única forma é ver se ela está correta do ponto de vista matemático e se o aluno cumpre as restrições que eventualmente o enunciado imponha.

A resolução não tem qualquer erro e a calculadora foi usada apenas para cálculos numéricos. Sim, porque não há qualquer diferença entre usar a máquina para calcular $\operatorname{tg}(\pi/12)$ (como nos critérios do GAVE) ou usá-la para determinar $\operatorname{tg}^{-1}(11/16)$ (como fizeram muitos alunos). Não foram utilizadas as capacidades gráficas da calculadora, mas apenas as numéricas.

Perante isto, temos de aplicar o nº 4 dos Critérios Gerais de Classificação:

4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.

É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo examinando.

Por motivos que não consigo compreender completamente, alguns colegas nossos consultaram o GAVE sobre o que deveriam fazer neste caso. Infelizmente, e como sucede com frequência, a resposta foi autoritária, irrevogável e não sujeita a discussão: Não é de aceitar este processo. Conclusão: pelo menos os alunos avaliados por estes corretores tiveram apenas 3 pontos e não os 15 previstos.

6.2. ........................................................................................................ 15 pontos

Referir que a função $a$ é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$ (ver notas 1, 2 e 3) .................. 3 pontos

Calcular $a\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ........................................................................ 3 pontos

Calcular $a\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ........................................................................ 3 pontos

Escrever $a\left(\frac{\pi}{5}\right) < 5 < a\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (ou equivalente) ........................................ 4 pontos

Referir que o pretendido resulta do teorema de Bolzano ................................ 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir que a função é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.
2. Se o examinando referir que a função é contínua em $\left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[$, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.
3. Se o examinando referir que a função é contínua no domínio, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

**Figura 2**

Nós, professores, sabemos que quem elaborou o exame queria que fosse usado o Teorema de Bolzano. Estão lá aqueles «sinaizinhos», que é explicitado nos critérios (Fig. 2) a indicar o processo pretendido. Mas o aluno não tem de fazer o que estava na mente do autor da pergunta, tem apenas de responder à pergunta nas condições impostas.

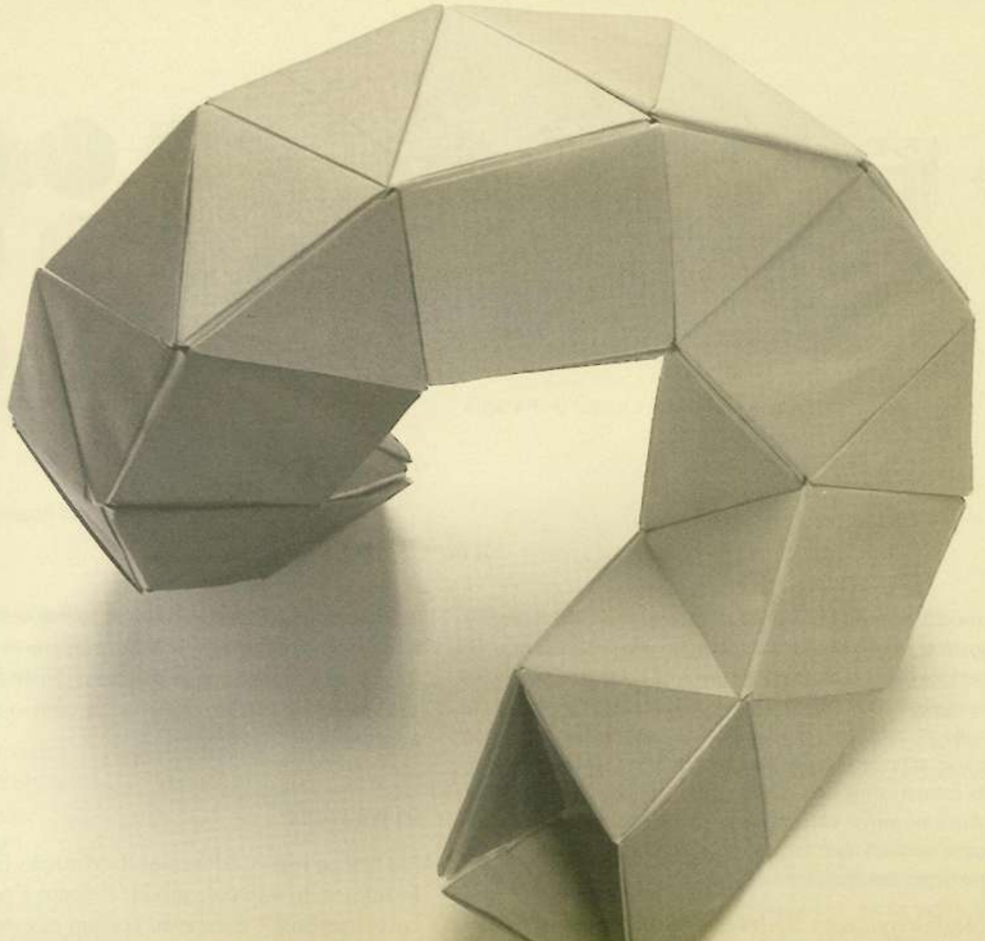
Sabemos também que é impossível prever todos os métodos de resolução de um item, que nunca se poderão fazer critérios de classificação perfeitos que agradem a todos e que, na altura dos exames, as equipas do GAVE ficam sujeitas a muitas pressões, reclamações e pedidos de esclarecimento a que têm de dar rápida resposta. Mas não é obrigatório refugiarem-se numa posição autoritária (nós é que podemos, nós é que sabemos). Seria muito mais inteligente e justo reconhecer que não foi prevista uma situação (como neste caso) ou que não se escolheu a melhor alternativa (não é este o caso, mas já aconteceu). Para além disso existe o tal critério geral nº 4 para aplicar nestas situações. Ficaríamos todos bem mais satisfeitos por trabalhar com o GAVE, e não para o GAVE.

Gostava finalmente de esclarecer que estou à vontade para falar deste assunto. Não estive a corrigir exames – fui excluído[*] da Bolsa de Corretores –, nenhum aluno me veio pedir opinião sobre esta questão e não apoiei ninguém na apresentação de um recurso.

## Notas

(*) Não, não é "graças a deus" ou a eles, é graças a mim, que não aceitei a forma como tudo isto nos foi imposto.

**José Paulo Viana**
Escola Secundária de Vergílio Ferreira



# Anti prismas à conquista do 1.º Ciclo do Ensino Básico

**Paula Catarino e Cecília Costa**

## Introdução

Atualmente encontram-se disponíveis, para os professores, muitas e variadas propostas de tarefas destinadas aos alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico relacionadas com os diversos temas de geometria. No entanto, são raras, se não mesmo inexistentes, propostas de tarefas usando anti prismas neste e noutros ciclos de ensinos. O objetivo principal deste artigo é o de mostrar aos professores como pode ser enriquecedor trabalhar estes objetos geométricos com os alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico e motivar-lhes o gosto pelo seu estudo. Apresentaremos algumas sugestões de tarefas adequadas a este nível de ensino para uma possível implementação em ambiente de sala de aula. As propostas de tarefas serão de índole variada, umas usando material manipulável, outras usando as novas tecnologias.

## Um pouco de História

É difícil saber-se com exatidão quando começou e se desenvolveu o interesse pelos poliedros. Alguns elementos bibliográficos dão-nos conta de que existem fontes egípcias, chinesas, babilónicas, entre outras, onde já encontramos problemas relacionados com pirâmides. Veloso (2000) refere que já no *Papiro de Rhind*, datado de cerca de 2000 a.C. a 1800 a.C., «(…) existem diversos problemas relativos ao declive das faces de uma pirâmide (…)» (p. 231) que eram importantes na construção de pirâmides. Também no *Papiro de Moscovo* se encontra a fórmula para a determinação do volume de um tronco de pirâmide quadrangular. A palavra *poliedro* tem sido usada em diferentes épocas por diferentes pessoas com variados significados (muitas vezes, incompatíveis entre si). Não é raro que uma mesma pessoa use o mesmo termo com interpretações diferentes em momentos diferentes. Desde cedo que os poliedros despertaram a atenção dos matemáticos, interesse que, como Grünbaum explica, se manteve ao longo de séculos:

(…)Desde a Grécia antiga, matemáticos tentam determinar o número de poliedros regulares. Um estudo dos cinco «sólidos platônicos» é o tópico final dos Elementos de Euclides. Embora esta lista de poliedros regulares fosse considerada completa, dois milênios depois, Kepler encontrou dois outros poliedros regulares e,


**Figura 1.**—Sólidos Platónicos

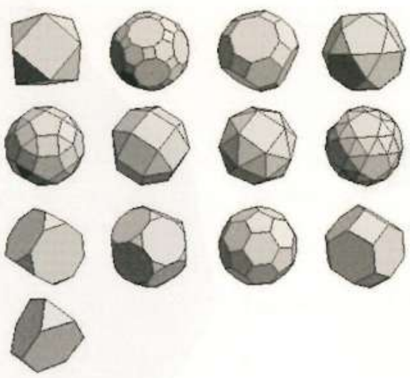


**Figura 2.**—Sólidos Arquimedianos

no início do sécul o XIX, Poinsot encontrou mais dois; Cauchy então demonstrou que não existiam outros. Mas, na década de 1920, Petrie e Coxeter encontram três novos poliedros regulares e provaram a completude desta enumeração. Contudo, em 1977 eu descobri uma nova classe de poliedros regulares e, em seguida, Dress provou que acrescentando mais um poliedro, a lista de poliedros regulares estava completa. Então, cerca de dez anos atrás, eu encontrei mais uma nova categoria de poliedros regulares e, até agora, ninguém afirmou que todos os poliedros regulares foram finalmente encontrados. (Grünbaum, 2003)

A continuação da explicação de Grünbaum ilustra uma situação em que o facto de o significado do termo poliedro ter mudado levou a diferentes conclusões/confusões:

Como a contagem do número de poliedros regulares estabelecida por matemáticos distintos como Euclides, Cauchy, Coxeter e Dress é logo desmentida a seguir? A resposta é muito simples — todos os resultados estão corretos; o que mudou é o significado do termo «poliedro» adotado por cada um destes matemáticos. Enquanto pessoas diferentes interpretarem o conceito (de poliedro) de maneira diferente, sempre existirá a possibilidade de que resultados sejam verdadeiros sob uma interpretação e sejam falsos sobre outra interpretação. De fato, mesmo variações sutis na definição podem produzir mudanças significativas na validade dos resultados.(...) (Grünbaum, 2003)

Tal como é referido em (Veloso *et al*, 2008), os poliedros «(...) tomando na natureza, sob a forma de cristais, as mais variadas formas, a sua classificação em famílias com propriedades comuns tem sido empreendida, pelo menos desde a Grécia antiga, pelos matemáticos profissionais e amadores (...).» (p. 28)

São conhecidas várias classificações dos poliedros, tendo em conta critérios diferentes. Referimos em seguida uma das classificações, associada aos matemáticos que os estudaram/descobriram, e que detalharemos mais adiante. Comecemos pelos *Sólidos Platónicos*, descritos por Platão no século IV a.C. Ao longo da História foram várias as identificações entre estes sólidos e simbologias diversas. Por exemplo, ao cubo foi atribuído o símbolo TERRA, ao tetraedro o símbolo FOGO, ao octaedro o símbolo AR, ao dodecaedro o símbolo UNIVERSO e ao icosaedro o símbolo ÁGUA (ver figura 1).

*Sólidos Arquimedianos*, descritos por Arquimedes no século III a.C. e mais tarde também estudados por Kepler nos finais do século XVI e princípios do século XVII (ver figura 2).

Relacionados com outros poliedros temos não só o matemático Eugène Charles Catalan, a quem se devem os chamados *sólidos de Catalan*, mas também Norman Johnson a quem se devem os sólidos designados com o seu nome: *sólidos de Johnson*.

## Os poliedros

No que se segue, adotamos a definição (Lima, 2006) que sintetizamos do seguinte modo: *Poliedro* é um sólido geométrico cuja superfície é composta por um número finito de faces, em que cada uma das faces é um polígono, sendo os seus elementos mais importantes, as faces, as arestas e os vértices.

São várias as definições e propriedades envolvidas quando se abordam poliedros, tais como: convexidade, regularidade, dualidade, entre outras. Em seguida, referimos algumas: Um poliedro diz-se *convexo* quando qualquer segmento de reta que una dois quaisquer dos seus pontos está contido no interior do poliedro ou numa das regiões poligonais (ver figura 3) e que um poliedro diz-se *regular* quando é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares, todos iguais e onde em cada um dos vértices concorre o mesmo número de arestas. Na última proposição do livro XIII de *Os Elementos* de Euclides, demonstra-se que só há 5 poliedros regulares: os Sólidos Platónicos.

Quanto à *dualidade*, o dual de um poliedro constrói-se fazendo corresponder a cada face um vértice e a cada vértice uma face. Na figura 4 temos um exemplo de dois poliedros que são dual um do outro: o cubo e o octaedro. A correspondência entre os vértices do cubo e as faces do octaedro está indicada por números e a correspondência entre as faces do cubo e os vértices do octaedro está indicada por letras.

## Classificação dos poliedros

Os poliedros são, no espaço tridimensional, análogos aos polígonos, no plano. Os poliedros classificam-se de diversas formas e segundo variados critérios.

Uma das classificações mais simples tem como critério subjacente o número de faces do poliedro, por exemplo um poliedro com 4 faces designa-se por tetraedro, um com 5 designa-se por pentaedro e um com 20 designa-se por icosaedro.

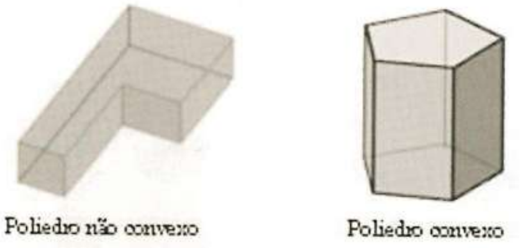



**Figura 3.**–Exemplos de Poliedros

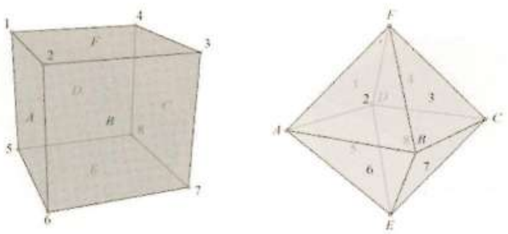


**Figura 4.**–O cubo e o octaedro – duais entre si

Outra classificação possível é a que agrupa os poliedros em conjuntos de sólidos que têm certas características comuns e que passamos a detalhar:

- Sólidos Platónicos
- Sólidos de Arquimedes ou Arquimedianos
- Prismas e Anti Prismas
- Sólidos de Johnson
- Sólidos de Catalan
- Deltaedros
- Dipirâmides e Deltoedros
- Esferas e Domos Geométricos.

Convém referir que a interseção de algumas destas famílias de sólidos é não vazia. Por exemplo existem sólidos Platónicos que são um tipo de deltaedros, existem anti prismas que também são sólidos de Johnson, entre outros exemplos. Vamos recordar de forma sucinta as propriedades que caracterizam alguns destes grupos de sólidos.

*Sólidos Platónicos*: Poliedros convexos regulares, todas as faces são polígonos regulares e congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

*Sólidos de Arquimedes* (ou sólidos Arquimedianos): Poliedros convexos tais que as faces são polígonos regulares de mais de um tipo e cujos vértices são todos congruentes, isto é, existem o mesmo arranjo (número e ordem) de polígonos em torno de cada vértice.

*Prismas*: Poliedros formados por duas faces poligonais, paralelas e congruentes, chamadas bases diretrizes do prisma, que dão o nome ao prisma, e vários paralelogramos (faces laterais do prisma), em número igual ao dos lados da face diretriz.

De acordo com o polígono que constitui as bases ditas diretrizes do prisma, os prismas designam-se: prisma triangular (as bases são triângulos), prisma quadrangular (as bases são quadrados), prisma pentagonal (as bases são pentágonos), prisma hexagonal, etc.

*Anti Prismas*: poliedros constituídos por duas faces poligonais iguais e paralelas chamadas bases diretrizes, ligadas por triângulos (ver figura 6). Tal como acontece com os prismas, o número de lados dos polígonos das bases diretrizes define o nome do anti prisma.

Os anti prismas têm duas bases poligonais assim como os prismas, mas os seus vértices são ligados alternadamente gerando faces laterais triangulares.

O número de triângulos de um anti prisma é o dobro do número de lados do polígono da base. Assim, por exemplo, um anti prisma pentagonal (ver figura 7) compõe-se de 2 pentágonos e 10 triângulos; tem 10 vértices e 20 arestas.

*Sólidos de Johnson*: Poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares e todas as arestas possuem o mesmo comprimento, excluindo-se os sólidos Platónicos, os sólidos Arquimedianos e as duas famílias infinitas de prismas e anti prismas. Muitos destes sólidos são derivados dos platónicos, dos Arquimedianos, dos prismas e anti prismas, por adição ou remoção de partes.

*Sólidos de Catalan*: Poliedros duais dos sólidos Arquimedianos.

*Deltaedros*: Família de poliedros cujas faces são triângulos equiláteros todos iguais.

**Figura 5.**–Prisma pentagonal

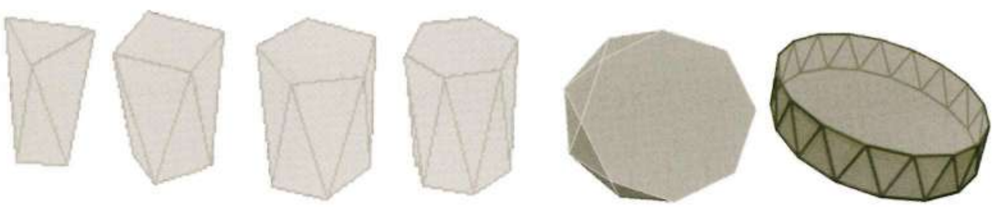


**Figura 6.**–Exemplos de anti prismas

Figura 7.–Anti prisma pentagonal

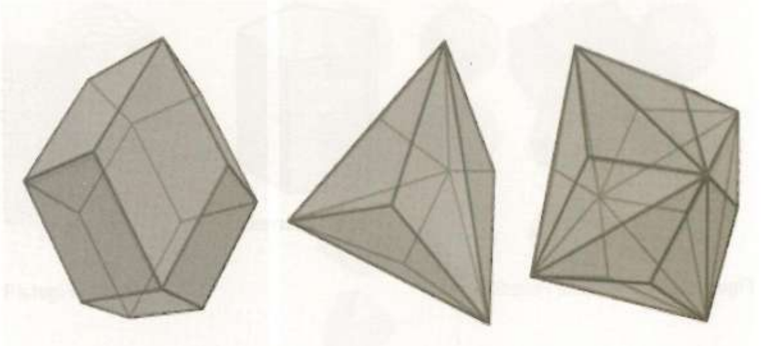


Figura 8.–Três exemplos de Sólidos de Johnson

*Dipirâmides e Deltoedros*: As dipirâmides são sólidos duais dos prismas e os deltoedros são duais dos anti prismas.

*Esferas e Domos Geométricos*: Uma esfera geodésica é uma estrutura composta de uma rede de triângulos que dá forma a uma superfície aproximadamente esférica. Quanto maior o número de triângulos na rede, mais próxima a esfera geodésica estará de uma esfera. Domos geodésicos são partes fracionadas da esfera geodésica.

## Os anti prismas no 1.º ciclo do Ensino Básico

Nesta secção dedicamos a nossa atenção à exploração de tarefas envolvendo anti prismas que possam ser implementadas com alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico. Começamos por selecionar aspetos das orientações oficiais que possam apoiar essas propostas.

### As orientações oficiais

O conceito de *anti prisma* não aparece explicitamente no atual programa de matemática para o Ensino Básico (Ponte et al, 2007). Este facto, para alguns pode ser justificação suficiente para não ponderar sequer a sua abordagem/utilização neste nível de ensino, para outros pode não constituir obstáculo para o fazer. Apresentamos argumentos, baseados no programa de matemática que validam a utilização dos anti prismas no ensino e aprendizagem da geometria no 1.º ciclo.

Começamos por destacar a finalidade do ensino da matemática que preconiza o reconhecimento dos aspetos históricos e estéticos da Matemática, dois pontos em que os anti prismas são ótimos exemplos. A secção 2 e as imagens de anti prismas apresentadas comprovam a importância que os anti prismas podem ter em termos históricos (em particular de evolução da história da matemática) e estéticos.

Passando a aspetos mais particulares, percebemos que os objetivos gerais de aprendizagem do tema Geometria e Medida admitem a utilização de anti prismas ao preconizar a representação, descrição e identificação de figuras no plano e no espaço. Os anti prismas podem ser usados para a criação de tarefas que contribuam para a consecução dos objetivos específicos referidos em (Ponte et al, 2007, pp. 22–23).

### Sugestões de tarefas envolvendo anti prismas

Nesta subsecção apresentamos oito tarefas suscetíveis de serem implementadas em sala de aula do 1.º ciclo do Ensino Básico. Indicamos o material necessário e descrevemos de forma sucinta a atividade a desenvolver com os alunos.

Figura 10.–Esfera Geodésica

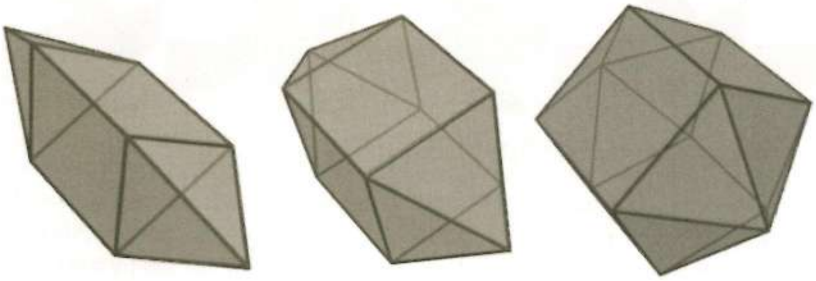


**Figura 9.**—Três dos sólidos de Catalan: Dodecaedro Rômbico; Tetraedro Triakis; Octaedro Triakis

Tarefa 1.—*Classificação de sólidos geométricos*

*Material de apoio*: Sólidos geométricos de diversas famílias (entre os quais prismas e anti prismas); ver, por exemplo, a figura 11.
*Desenvolvimento*: O professor coloca o conjunto variado de sólidos geométricos de modo a que os alunos os possam manipular. Solicita-lhes que organizem os sólidos segundo algum critério (*ver* figura 11).

Tarefa 2.—*Distinguir prismas de anti prismas*

*Material de apoio*: Prismas e anti prismas (ver figura 11)

*Desenvolvimento*: O professor coloca o conjunto variado de prismas e anti prismas de modo a que os alunos os possam manipular. Solicita-lhes que organizem os sólidos de acordo com as duas condições (em simultâneo):

1. terem duas bases paralelas
2. as faces laterais serem triângulos.

Tarefa 3.—*Construção e planificação de anti prismas*

*Material de apoio*: Polydron (ver figura 12)

*Desenvolvimento*: O professor coloca à disposição dos alunos polydrons de modo a que eles construam vários anti prismas diferentes. Em seguida solicita que os desmanchem com cuidado de modo a obter a sua planificação. Registar numa folha o desenho do anti prisma e a respetiva planificação. Repetir a atividade procurando encontrar planificações diferentes.

Tarefa 4.—*Exploração dos polígonos existentes nas planificações de anti prismas*

*Material de apoio*: Fotocópias com a planificação de anti prismas.
*Desenvolvimento*: Mostrar cada planificação ao aluno e pedir para identificar os polígonos que a constituem e registar os elementos importantes que o levaram à classificação dada. De

**Figura 11.**—Sólidos geométricos

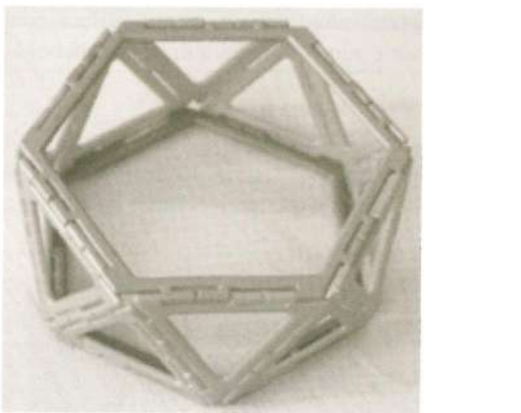


**Figura 12.**—Anti prisma hexagonal construído com polydron

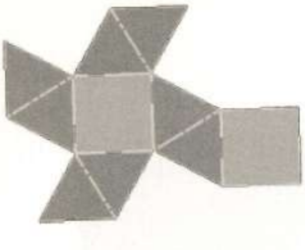


**Figura 13.**–Planificação de um anti prisma quadrangular

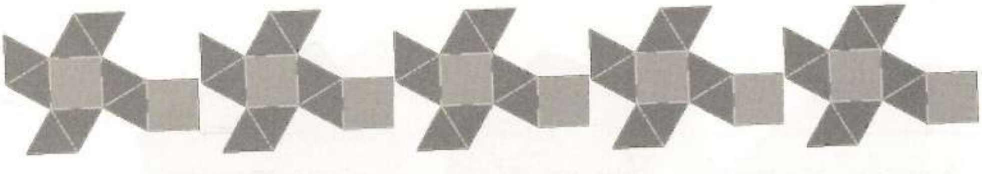


**Figura 14.**–Exemplo de um friso elaborado com a planificação da figura 13

seguida tentar identificar o anti prisma a que corresponde essa planificação (*ver* figura 13).

Tarefa 5.—*Construção de frisos com planificações de anti prismas*
*Material de apoio*: Planificação de anti prismas em cartolina, papel vegetal e cartolina branca.
*Desenvolvimento*: O professor distribui a cada aluno a fotocópia da planificação de um anti prisma e meia folha de cartolina. Cada aluno decalca essa planificação em papel vegetal e constrói um friso ao seu gosto.
Com a planificação de um anti prisma quadrangular apresentamos um friso a título de exemplo (*ver* figura 14).
**Tarefa 6.**—*Construção de anti prismas*
*Material de apoio*: Cartolinas, tesoura, cola, fotocópias com a planificação de anti prismas.
*Desenvolvimento*: O professor distribui a cada aluno a fotocópia da planificação de um anti prisma e meia cartolina. Cada aluno cola a planificação sobre a cartolina, recorta-a e monta o anti prisma. Deste modo a turma fica com um belo conjunto de anti prismas para usar noutras atividades.

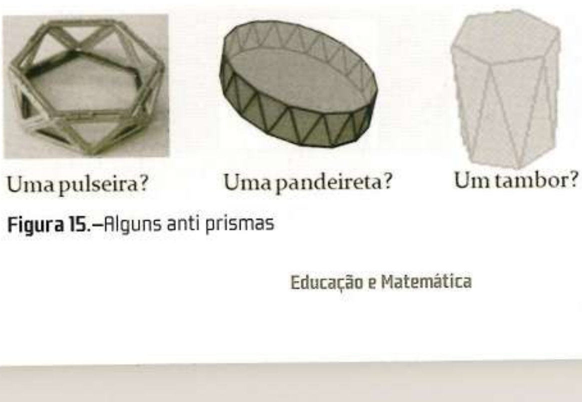
Tarefa 7.—*Criar objetos com a forma de anti prismas*
Material de apoio: Anti prismas em cartolina branca
Desenvolvimento: Cada aluno inventa um objeto com a forma de um anti prisma. Decora o anti prisma em cartolina de modo a construir esse objeto. Explicar por escrito o funcionamento do objeto tendo em conta a sua forma. Apresentamos a título ilustrativo, os exemplos representados na figura 15.

Tarefa 8.—*Estudando os anti prismas com o uso de software*
*Material de apoio:* Computador Magalhães com ligação à internet.
*Link:* http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html
*Desenvolvimento:* Professor e alunos observam anti prismas com a possibilidade de mover e aumentar/diminuir as formas.

## Nota final

Os anti prismas à conquista do 1.° ciclo do Ensino Básico é um desafio que aqui lançamos e que pretendemos continuar a incentivar. Ao contrário dos prismas que são formas geométricas que nos cercam em quase todos os lugares, de anti prismas temos pouquíssimas representações em objetos de uso comum. Este aspeto que pode ser entendido como uma desvantagem, pode constituir uma novidade em termos de criação matemática. Aspeto que, entendemos, também ter interesse desenvolver nos alunos, para um entendimento mais alargado da matemática.

Selecionámos alguns pontos do atual programa de matemática que entendemos validarem a viabilidade de usar anti prismas neste nível de ensino. Esperamos que as tarefas apresentadas possam ser motivadoras para alguns professores as experimentarem em sala de aula.



Uma pulseira? Uma pandeireta? Um tambor?

**Figura 15.**–Alguns anti prismas

## Notas

A seguir indicam-se os sites da internet de onde foram retiradas as figuras que constam no texto.

[1] http://www.es.iff.edu.br/poliedros/solidos_platonicos.html
[2] http://pichardolandia.wordpress.com/2011/09/10/el-pecado-original-en-la-teoria-de-los-poliedros/
[3] http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/poliedros.htm
[4] http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/definicoes-br.html#dualidade
[5] http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro#Prismas_e_Antiprismas
[6] http://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lidos_de_Johnson
[7] http://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lidos_de_Catalan
[8] http://www.es.iff.edu.br/poliedros/esferas_domosgeodesios.html
[9] http://biblioteca.uam.es/ciencias/Exposiciones/matematicas/imagenes/antiprisma.jpg

## Referências


Grünbaum, B. (2003). Are Your Polyhedra The Same as My Polyhedra?. In B. Aronov, S. Basu, J. Pach, & M. Sharir (eds). Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift (pp. 461-588). New York: Springer-Verlag.

Lima, E. L. (2006). A Matemática do Ensino Médio. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E.G. & Oliveira, P.A. (2007). Programa de Matemática para o Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Veloso, E., (2000). Geometria. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. & Viana, J. P., (2008). Um cubo primo (Desafios VI), Biblioteca Desafios Matemáticos. Barcelona: RBA Coleccionables, S. A.



**Paula Catarino e Cecília Costa**
Departamento de Matemática
Escola de Ciências e Tecnologia da UTAD

# APM - 2012

## Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

### Modalidades de associado e seus direitos

#### Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

#### Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

#### Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

#### Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

#### Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

### Preço da quota anual em 2012

| Modalidades de associado individual | |
|---|---|
| Professor | 50,00 € |
| Estudante s/vencimento | 35,00 € |
| Aposentado | 38,50 € |
| @-sócio | 38,50 € |
| Residente no estrangeiro | 53,50 € |

| Modalidade de associado institucional | |
|---|---|
| Modalidade 1 [1 exemplar EeM] | 55,00 € |
| Modalidade 2 [2 exemplares EeM] | 77,00 € |
| Modalidade 1 + *Quadrante* | 71,00 € |
| Modalidade 2 + *Quadrante* | 95,00 € |

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

### Assinaturas das revistas para 2012

| | | *Educação e Matemática* (inclui atas ProfMat) | *Quadrante* |
|---|---|---|---|
| Sócio individual | Portugal | | 12,00 € |
| | Estrangeiro | | 15,00 € |
| Instituições | Portugal | 42,00 € | 23,00 € |
| | Estrangeiro | | 27,00 € |

# índice

## Editorial



## Artigos



## Secções