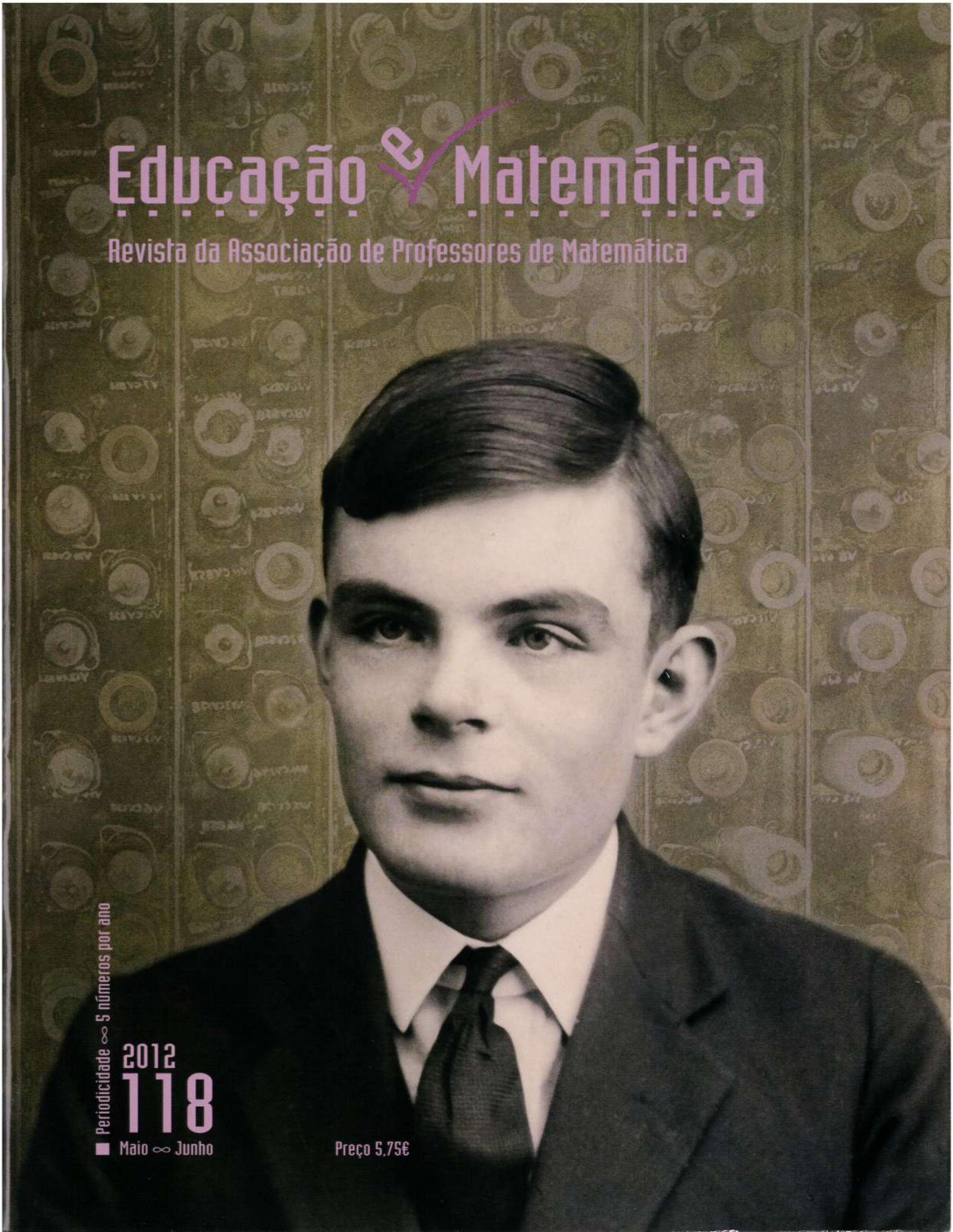
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2012
118
Maio ∞ Junho

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora Isabel Rocha
Subdiretora Manuela Pires
Redação Adelina Precatado
Ana Paula Canavarro
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Irene Segurado
Júlia Perdigão
Lina Brunheira
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Junho 2012
Tiragem 2100 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Sobre a capa

Na capa deste número:

Alan Turing (1912–1954)
Comemora-se este ano o centenário do nascimento de Alan Turing. Ele é muito justamente denominado o «pai da ciência da computação». Sendo talvez mais conhecido pelo seu brilhante desempenho na decifração dos métodos de encriptação da Máquina Enigma, a verdade é que Turing descreveu os mecanismos conceptuais que tornariam tratável do ponto de vista matemático a noção de computabilidade. O final da sua curta vida reservou-lhe enorme tormento. Revelada a sua homosexualidade (que era então ilegal em Inglaterra), para escapar à prisão, teve que aceder subter-se a um processo de castração química. Em consequência disso e da correspondente humilhação ter-se-à suicidado, ingerindo cianeto, antes de completar 42 anos.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Helena Paula Castro, Henrique Guimarães, Iranete Lima, José Paulo Viana, José Pedro Fernandes, José Tinoco, Leonor Santos, Lina Brunheira, Lurdes Serrazina, Manuel de Sousa Pereira, Susana Fernandes.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Henrique Manuel Guimarães

É [a] hora*

Nestes tempos que ainda são sombrios – e ninguém sabe por quanto tempo ainda – importa reafirmar, retomando um texto de Bertrand Russel[1], que «o professor só pode realizar o seu trabalho adequadamente, se se sentir dirigido por um impulso criador interno e se não estiver dominado e acorrentado por uma autoridade exterior» e que, por isso, o professor precisa de tempo e de «muito maior liberdade» na sua profissão, de «mais oportunidades de autodeterminação, mais independência face à interferência dos burocratas e dos fanáticos».

Não são grandes as alegrias que nestes anos mais recentes nos têm chegado. Nem pelos caminhos que nos tem apontado, e desapontado, a governança geral de quem nos governa cá dentro — para não falar na ‹lá de fora›, que também é ‹cá de dentro›, de tão perto agora que o longe é. Nem pelo que nos tem ministrado quem ministra, desde lá de cima, a Educação. Daqui, em muito do que tem sido feito, não feito e desfeito, mais do que arrumar, do que orientar e alinhar, ajudar a pôr em linha o que também sabemos que ainda não está bem nos caminhos que cremos convenientes na Educação e ao nosso trabalho de ensinar, é o resvalo para a perturbação e desarrumo.

É a burocratização crescente no trabalho dos professores e o desconcerto da sua avaliação, é a ‹examização› na avaliação dos alunos, é o desvario dos mega agrupamentos de escolas, é o 1+1+1+... alunos em cada ano que passa a crescer as turmas, é o acentuar da diferenciação precoce dos percursos escolares dos alunos, é a desafetação de professores das escolas e de tempo letivo em disciplinas, é a reorganização(?) curricular e o desmando e desconformidade das novas metas curriculares, é o desinvestimento orçamental na educação, nas escolas, nas universidades...

É assim, dizem-nos, como não pudesse deixar de ser assim. E paro aqui para tomar a palavra recente de António Nóvoa[2], Reitor da Universidade de Lisboa: «A arrogância do pensamento inevitável é o contrário da liberdade. E nestes estranhos dias, duros e difíceis, podemos prescindir de tudo, mas não podemos prescindir nem da Liberdade nem do Futuro.»

A APM já tem 25 anos, fê-los há pouco, no ano passado, mais precisamente. É jovem, portanto, mas já de idade boa. Nasceu de um exercício da liberdade que já tínhamos e de um movimento de Esperança e Desafio[3], na altura muito alargado e sentido entre os professores de Matemática, contra muita coisa do que então ainda se passava na educação, nas escolas, no ensino, entre os professores. Um movimento que traduzia e exprimia uma enorme vontade de mudança e renovação, sobretudo no que aos programas de Matemática dizia respeito — que penosamente permaneciam, obsoletos, bafientos — mas igualmente no ambiente educativo geral e escolar que continuava muito marcado pela propensão para o isolamento que vinha detrás, endémico e arreigado nos professores e nas escolas.

A APM nasceu de um movimento *contra*, é certo, mas também, e mais ainda, de um movimento *por* e de um movimento *com*.

Um movimento *por* uma matemática escolar mais ‹viva›, mais genuína e apelativa, e mais consonante com as tendências curriculares que emergiam e se difundiam. Um movimento por práticas de ensino valorizando o papel do aluno e o seu envolvimento na aprendizagem. Um movimento pela instituição e reforço de práticas de colaboração e cooperação entre professores e escolas, pela abertura e comunicação, pela afirmação das ideias e partilha de experiências, pelo seu confronto e discussão.

Um movimento *com* os professores, pelos professores, para os professores, num ímpeto, entusiasmo diria mesmo, de congregação de pessoas e de esforços para «promover o desenvolvimento do ensino da Matemática a todos os níveis», e «estimular o intercâmbio de ideias e experiências», e «apoiar e divulgar actividades», e «promover a participação activa dos professores»[4] e...

A APM daí cresceu e se foi desenvolvendo, arriscando eu a dizer, como já disse, que a sua maior contribuição terá sido, talvez, ao nível do ambiente profissional dos professores de Matemática, enriquecendo-o e dinamizando-o, mas, igualmente, ao nível do património de materiais e ideias tornando-o também mais rico e diversificado e divulgando entre os professores.

E todavia, reconheço, e sei que outros reconhecerão, que também daqui, de entre nós, não nos têm vindo grandes alegrias nos últimos anos. Há, sinto, um não sei quê de fechamento e um não sei quanto de abandono ou esmorecimento.

É hora de reunir pessoas e esforços claro, mas também de os mobilizar com (mais) abertura e comunicação, confronto e diálogo, criatividade e iniciativa, afirmação e proposição. É hora — já desde quando? — de afrontar a progressiva menorização do professor, hora também de um exercício na ‹desobediência›, interrogando e interpelando, criticando e contrapondo — e não será sempre?

É também assim, como acredito, que o professor se valoriza, é por aqui também que se valoriza o professor, a figura e o papel do professor.

Num momento, como em outro lado referi, em que todos parecem estar calados, «pacientes» — houve já quem dissesse — perante a situação global que vivemos e face ao que se passa e vai passando ‹por aí fora›, nisto que nos diz directamente respeito, na educação e no ensino da Matemática em particular, é importante encontrar a palavra e dizê-la. Cada um de nós pode ter nisso um papel importante, em cada escola, com cada professor. E volto a António Nóvoa[5]: «As palavras não mudam a realidade. Mas ajudam-nos a pensar, a conversar, a tomar consciência. E a consciência, essa sim, pode mudar a realidade.»

É hora — e desde há quanto tempo?

Quem mais do que o professor deve nisto ser exemplo e dar exemplo?

Notas

[1] Trata-se de «As funções do professor» — um texto evidentemente datado mas cuja leitura é bem recomendável — (*in* EM 91, 2007) cujo edtorial escrevi e de onde este extracto foi recolhido, com ligeira adaptação.

[2] No discurso proferido no passado dia 10 de Junho.

[3] Editorial de Paulo Abrantes (*in* EM 1, 1987).

[4] Estatutos da APM, p. 1.

[5] Ver nota 2.

Henrique Manuel Guimarães
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

* Inspirado em como termina **Nevoeiro**, o último poema da **Mensagem** de Fernando Pessoa.

Encontros imediatos de terceiro grau

José Paulo Viana

Encontro Imediato do 3° grau – Avistamento de um «ser extraterrestre» associado a um Objeto Voador Não Identificado.

«Encontros Imediatos do Terceiro Grau» (Close Encounters of the Third Kind) – filme realizado em 1977 por Steven Spielberg

Há uns tempos encontrámos na revista *Mathematics Teacher* um problema curioso que, com a ajuda da tecnologia gráfica, se transformou numa investigação bem interessante, cheia de extensões e prolongamentos.

Investigação 1

Consideremos uma função cúbica com três zeros. Seja *P* um ponto do gráfico cuja abcissa é a média de dois dos zeros. Tracemos a tangente à curva no ponto *P*. Onde é que esta tangente interseta o eixo horizontal?

Este era o problema proposto inicialmente, que vamos resolver usando uma unidade portátil TI-Nspire.

Escolhemos arbitrariamente uma função de 3.° grau, com três zeros. Uma maneira rápida de o fazer é escrevê-la decomposta em fatores. Por exemplo, com zeros 2, 4 e 7:

$$f(x) = (x-2)(x-4)(x-7).$$

Escolhemos dois zeros (por exemplo, 2 e 4), construímos os respetivos pontos (fig. 1).

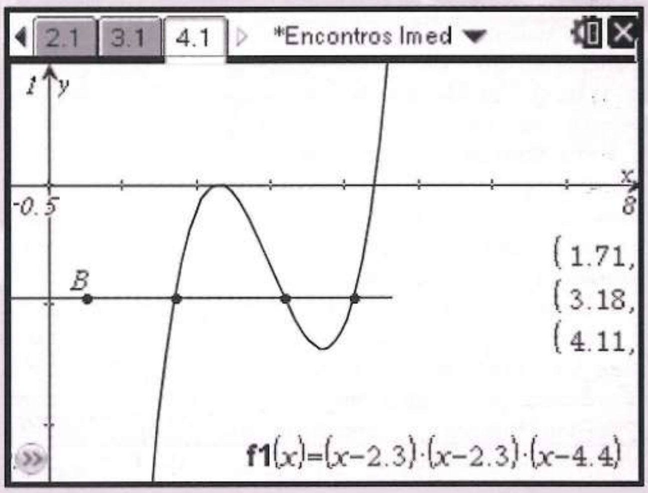


Figura 1

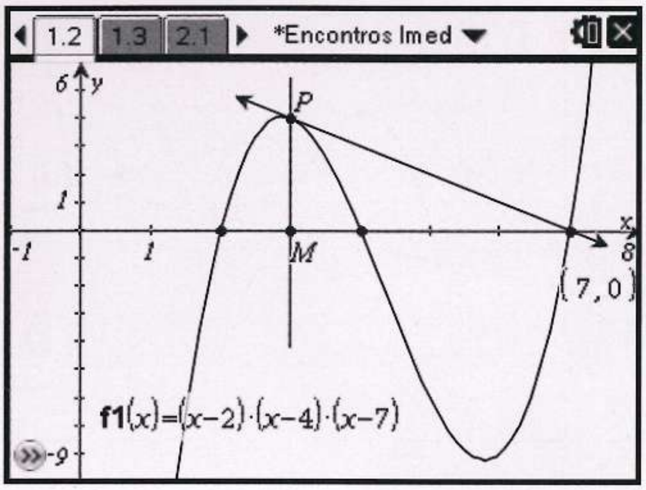


Figura 2

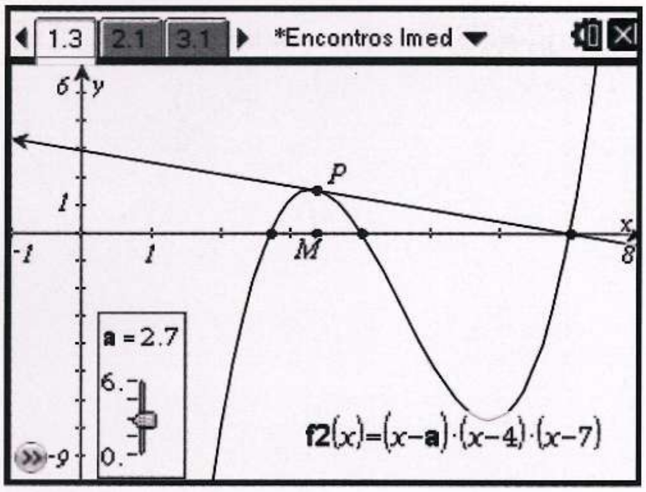


Figura 3

Para fazer o ponto médio M dos dois zeros, vamos a

b → A: Construção → 5: Ponto médio.

Depois, traçamos a linha vertical que passa em M indo a

b → A: Construção → 1: Perpendicular.

Para obter o ponto P, pedimos

b → 7: Pontos e retas → 3: Ponto[s] de interseção.

Para traçar a tangente, fazemos

b → 7: Pontos e retas → 7: Tangente.

Finalmente, determinamos a interseção da tangente com o eixo Ox em

b → 7: Pontos e retas → 3: Ponto[s] de interseção

e vemos as coordenadas deste ponto fazendo

b → 1: Ações → 7: Coordenadas e equações.

Surpresa: a tangente corta o eixo horizontal precisamente no terceiro zero (fig. 2).

Mas não terá sido um acaso? Será sempre assim? Temos de o confirmar.

Uma maneira de o fazer é ir à expressão analítica da função e alterar um dos zeros. Por exemplo, em vez de $(x-2)$ escrever $(x-1)$ ou $(x + 1)$. Mas é mais interessante criar um cursor que permita variar rapidamente um zero da função. Para isso,

b → 1: Ações → A: Inserir seletor,

escolhemos a para nome da variável e, na expressão da função, substituímos um dos zeros por a. Agora, deslocando o cursor, variamos o zero para qualquer valor desejado. E a tangente continua a passar sempre pelo terceiro zero (fig. 3)!

Podemos ainda fazer mais experiências. Por exemplo, M ser o ponto médio, não de dois zeros consecutivos, mas dos dois zeros das pontas. Ou, a função ter um zero duplo. Não precisamos de criar nova página, novas funções e novas construções. Basta simplesmente ir à expressão analítica da função e fazer as alterações desejadas (fig. 4).

Este problema pode ser proposto aos alunos do 11.º ano. Depois de eles terem descoberto esta propriedade das funções cúbicas, chegou o momento de lhes propor que demonstrem que isto é realmente verdade para uma cúbica qualquer. A demonstração não é difícil. E, reparem, para os alunos, aquilo que lhes pedimos passa a ter um significado completamente diferente, visto terem passado já pela fase da experimentação e de elaboração de uma conjetura. Desta forma, a demonstrção aparece na sequência lógica do que fizeram antes.

No caso geral, para a função $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$, é preciso trabalhar com quatro parâmetros, o que, para alguns alunos, se torna bastante complicado. A alternativa é sugerir que cada aluno escolha uma função com zeros inteiros e faça a demonstração desse caso particular. Depois, para casa, pedir que os mais interessados a façam para o caso geral.

Continuemos. Quando dispomos de uma tecnologia tão rica e tão potente como a atual, é fácil (e dá vontade) ir mais longe e colocarmos novos problemas.

Investigação 2

Que acontecerá agora se tivermos uma reta horizontal que intersete a cúbica em três pontos? A tangente à cúbica no ponto cuja abcissa é a média das abcissas de dois dos pontos de interseção irá passar no terceiro ponto?

Escolhemos uma função cúbica qualquer, colocamos um ponto B no plano (pode ser no eixo Oy ou fora dele), pedimos a reta horizontal que passa em B, determinamos as três interseções desta reta com a curva, construímos o ponto médio de dois dos pontos anteriores e depois traçamos a tangente à curva no ponto com essa abcissa.

A tangente passa no terceiro ponto (fig. 5)!

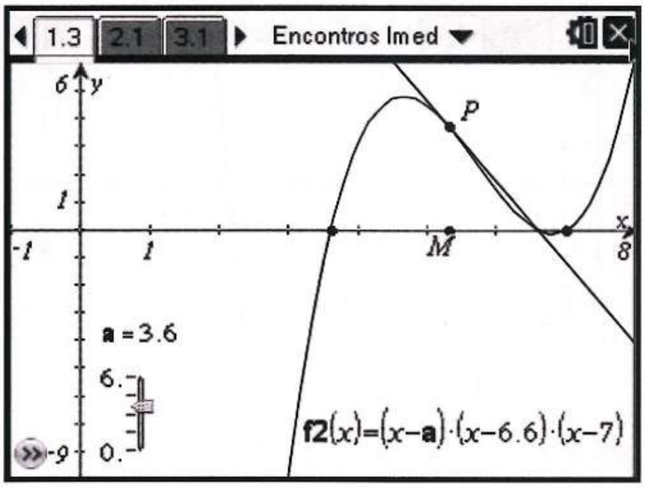


Figura 4

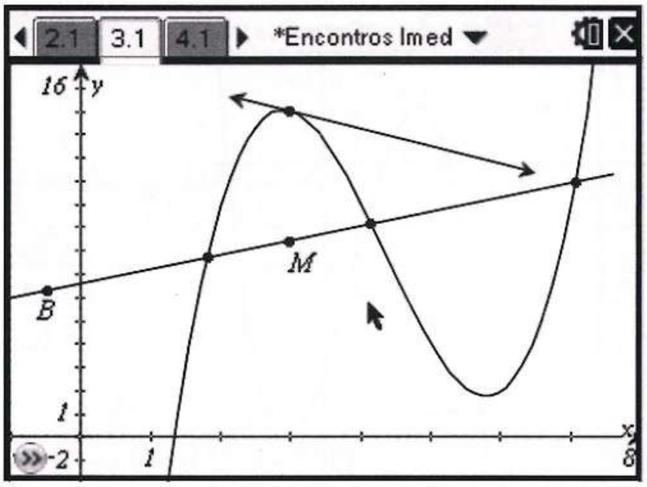


Figura 5

Bem, se tivéssemos raciocinado um pouco antes de começarmos as experiências teríamos concluído que isto iria acontecer de certeza. É que esta situação é idêntica à da primeira investigação, havendo apenas uma translação vertical (correspondente à ordenada do ponto B).

Agora não podemos parar. Pondo a imaginação a trabalhar, surgem novas questões.

Investigação 3

E se a reta for oblíqua?

Para criar a reta, vamos a

b → 7: Pontos e retas → 4: Reta.

Clicamos num sítio livre qualquer do plano e aparece um ponto (a que chamaremos B). Afastamo-nos de B, damos um clique e fazemos **d**. Aparece uma reta dependente apenas de B. Depois fazem-se as restantes construções, tal como no problema 2.

A reta pode ser alterada de duas maneiras: agarrando e deslocando o ponto B (mantém-se o declive) ou agarrando a reta longe de B e deslocando o cursor (altera-se o declive [fig. 6]).

Posso garantir-vos que foi grande a surpresa quando fiz esta experiência. A propriedade anterior mantêm-se: a tangente vai passar no terceiro ponto de interseção!

Começamos a perceber que a função cúbica tem mais propriedades curiosas do que imaginaríamos. Temos de continuar.

Investigação 4

Seja uma função cúbica com três zeros e uma reta horizontal que interseta o seu gráfico em três pontos. Que relação existe entre as abcissas destes três pontos?

Para ser mais fácil descobrir o que se procura, convém escolher uma função com zeros inteiros, por exemplo, 2, 3 e 5.

Fazemos o gráfico da função numa janela adequada, criamos um ponto B no plano, traçamos a reta horizontal a passar em B, determinamos os pontos de interseção da reta com a cúbica e pedimos as coordenadas dos três pontos obtidos, para isto, colocamos o cursor sobre um ponto e clicamos

b → 7: Coordenadas e Equações.

Para melhor analisarmos as abcissas dos pontos, o melhor é arrastar as coordenadas para uma zona livre da janela, ficando

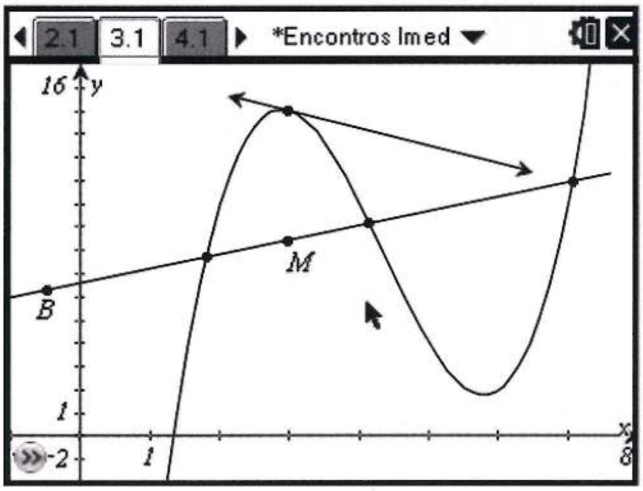


Figura 6

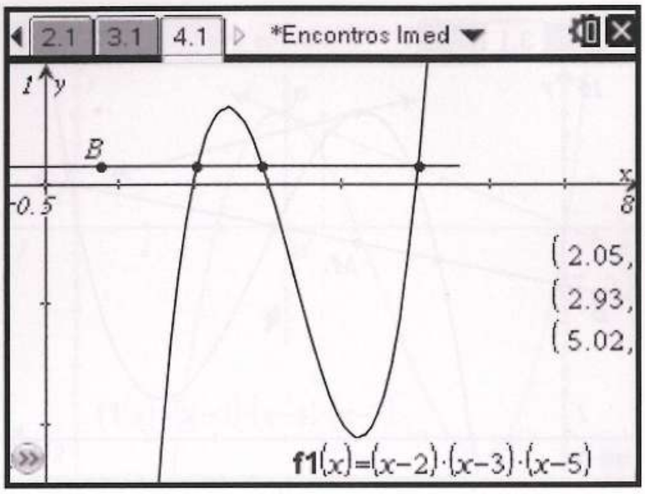


Figura 7

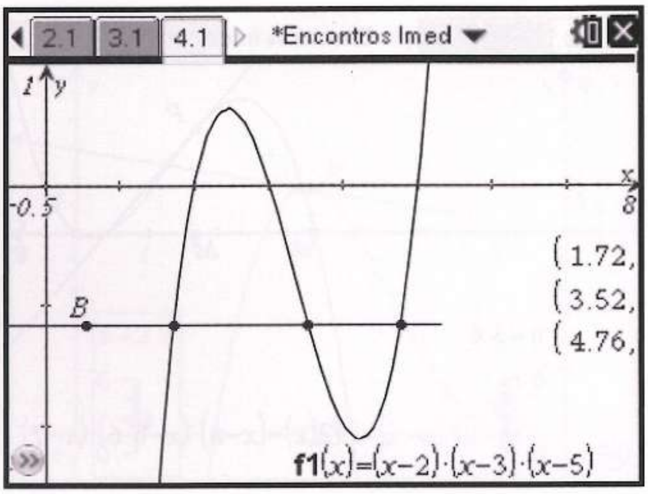


Figura 8

apenas visíveis as abcissas. Agarrando o ponto *B* podemos alterar a posição da reta e ver, em cada caso, o que acontece (figs. 7 e 8).

A partir destes exemplos consegue o leitor fazer uma conjetura sobre a relação entre as abcissas? Sim, é verdade, apenas com dois exemplos é difícil (e muito pouco seguro) fazer seja que conjetura for. Por isso o mais seguro é pegar na sua TI-Nspire e testar mais casos.

Já conseguiu? Pista: lembre-se que os zeros são 2, 3 e 5.

O resultado é uma nova surpresa: a soma das abcissas é igual à soma dos zeros (10, para esta função).

$$2,05 + 2,93 + 5,02 = 10.$$
$$1,72 + 3,52 + 4,76 = 10.$$

Podemos experimentar com outras cúbicas. Basta ir à expressão analítica e alterar os zeros. Por exemplo, para um caso mais particular, escolhemos um zero duplo (2,3) e outro simples (4,4).

A soma dos zeros é: $2,3 + 2,3 + 4,4 = 9$.

A soma das abcissas é: $1,71 + 3,18 + 4,11 = 9$ (fig. 9).

Se quiséssemos demonstrar este resultado, bem como o obtido na Investigação 3, iríamos ter algumas dificuldades. Isto porque, nos dois casos, para encontrar as abcissas dos pontos, teríamos de resolver equações de terceiro grau. Não é fácil e está completamente fora dos programas do ensino secundário.

No entanto, o facto de termos disponível esta tecnologia permite-nos ultrapassar estas dificuldades e ir muito mais longe, descobrindo propriedades e caraterísticas que estariam fora do nosso alcance e do dos alunos.

Assim sendo, não podemos parar.

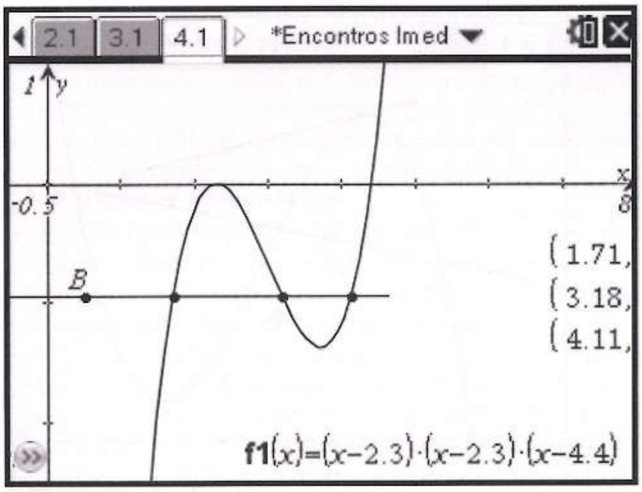


Figura 9

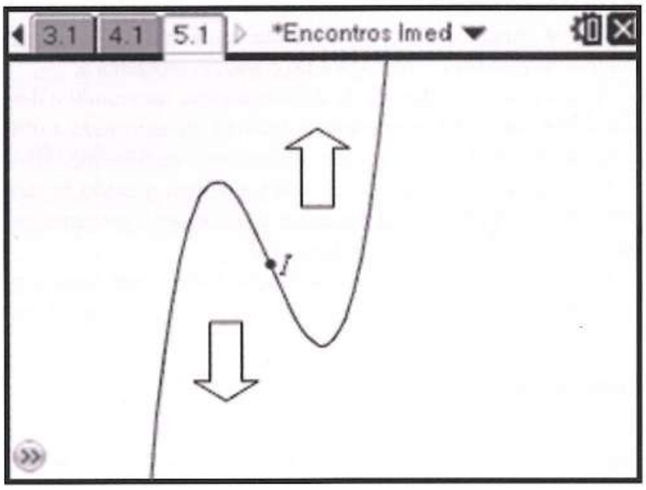


Figura 10

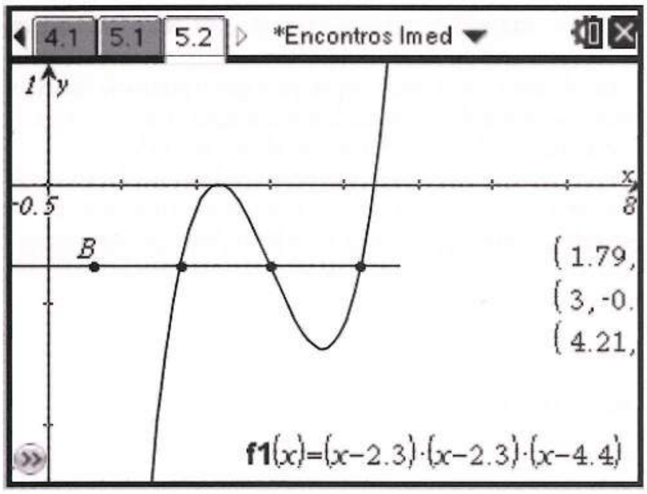


Figura 11

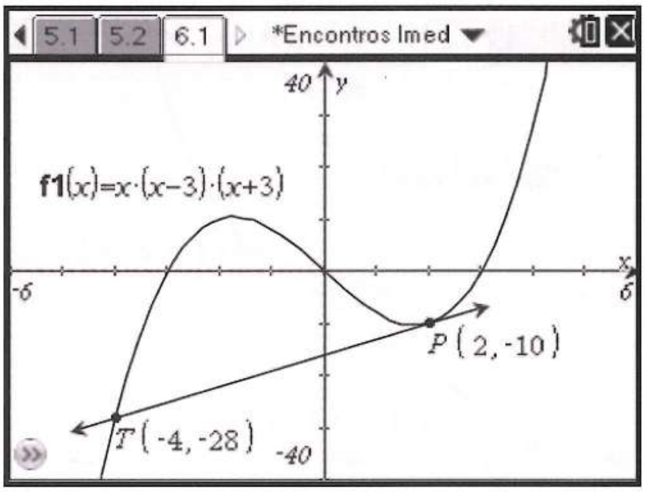


Figura 12

Investigação 5

Conhecidos os zeros de uma função cúbica, como descobrir facilmente o ponto de inflexão da curva?

Relembremos. Um ponto do gráfico de uma curva é de inflexão se aí houver alteração da concavidade. Nas cúbicas, há sempre uma parte da curva com a concavidade virada para cima e outra com ela virada para baixo. Portanto existe sempre um ponto de inflexão (fig 10).

O gráfico tem uma simetria central, cujo centro é o ponto de inflexão I. A cada ponto P do gráfico corresponde outro ponto P' em oposição ao centro e a igual distância deste.

Agora podemos usar o resultado da Investigação 4. Imaginemos uma linha horizontal a passar no ponto de inflexão. A soma das abcissas dos três pontos vai ser igual à soma dos zeros (9 no caso da última cúbica que usámos). Devido à simetria central, o ponto de inflexão fica no meio dos outros dois pontos. Logo, a sua abcissa é a média das três abcissas (e também dos três zeros [fig. 11]).

$$x_{\text{inflexão}} = \frac{2{,}3 + 2{,}3 + 4{,}4}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Conclusão, numa cúbica de zeros x_1, x_2 e x_3, a abcissa do ponto de inflexão é a média dos zeros:

$$x_{\text{inflexão}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Continuemos as nossas investigações.

Investigação 6

Numa função cúbica, a tangente ao gráfico num ponto qualquer P interseta sempre o gráfico noutro ponto T. Que relação existe entre as abcissas de P e T?

Antes de começar, uma ressalva. O enunciado tem uma incorreção, não é verdade que seja «sempre». Está o leitor a ver porquê?

Vamos fazer a investigação considerando uma função cujo ponto de inflexão do gráfico coincida com a origem do referencial e depois generalizaremos.

Para que o ponto de inflexão esteja em $(0, 0)$, basta que um dos zeros seja $x = 0$ e os outros sejam simétricos.

Seja então $f(x) = x(x-3)(x + 3)$.

Traçamos a tangente num ponto qualquer P, fazemos o outro ponto de interseção T da tangente com o gráfico e pedimos as coordenadas destes pontos (fig 12).

Agora, ou agarramos e deslocamos o ponto P, vendo o que acontece às abcissas, ou clicamos duas vezes sobre a abcissa de P e escrevemos um novo valor.

Facilmente se vê que, qualquer que seja a posição de P, x_T é o dobro do simétrico de x_P. Acontecerá o mesmo noutras funções ou dependerá o resultado dos zeros da cúbica? Experimentemos (fig. 13).

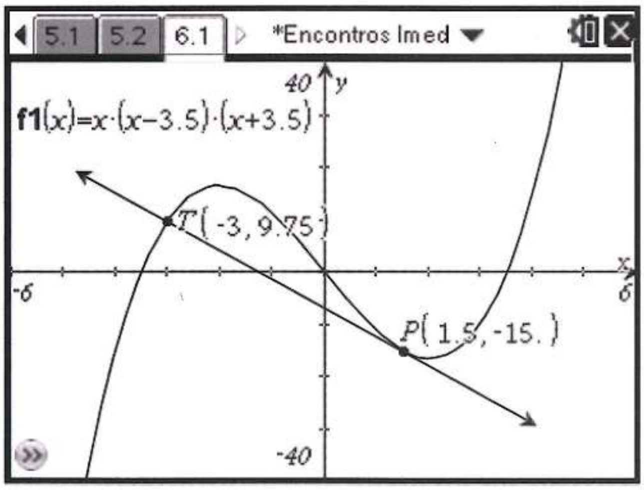


Figura 13

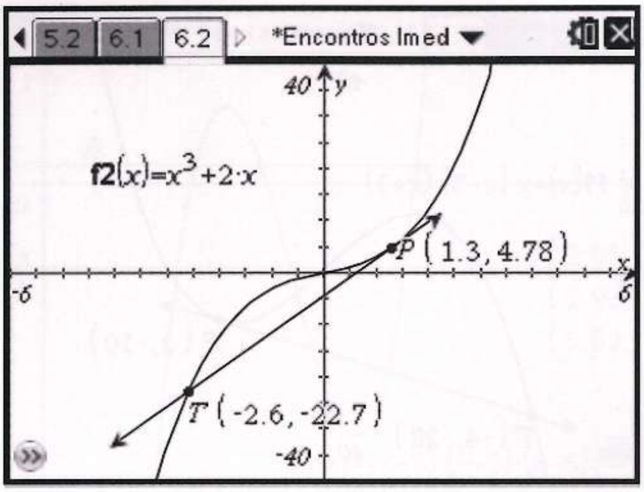


Figura 14

A relação mantém-se: $x_T = -2x_P$.

Estamos a ficar convencidos, mas temos de investigar ainda outras situações.

Será que a relação é a mesma no caso das cúbicas que são injetivas?

Escolhamos uma cúbica ímpar, para que o ponto de inflexão esteja na origem do referencial. Por exemplo, $f(x) = x^3 + 2x$.

Não há dúvida, a relação não se altera (fig. 14).

Estamos agora em condições de estabelecer a relação entre as abcissas de P, de T e do ponto de inflexão I para uma cúbica qualquer. Pensando que uma translação simples permite deslocar o gráfico da função de modo que o ponto de inflexão coincida com a origem, temos:

$$x_T = x_I + 2(x_I - x_P).$$

Conclusão final

Ao longo deste trabalho fomos tendo, nós e os leitores, vários «encontros imediatos de 3° grau». Sucederam-se os contactos com a função cúbica, que levaram à descoberta, às vezes inesperadamente, de algumas das suas propriedades. Mas a frase ganha um sentido ainda mais profundo. Tudo isto se tornou simples e possível porque dispomos de três elementos fundamentais: o poder da mente humana, o fascínio da Matemática e a tecnologia da TI-Nspire, uma máquina que é de «outro mundo».

José Paulo Viana

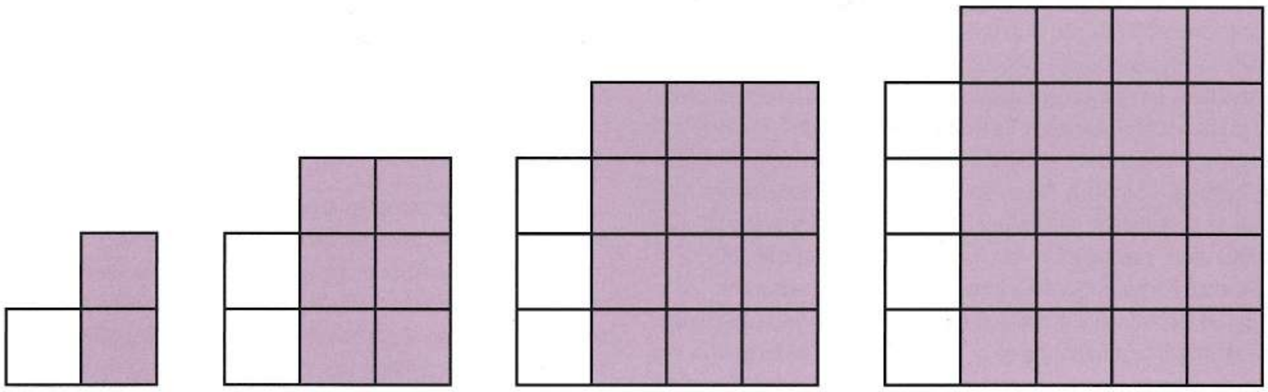
MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A tarefa desta secção vem no seguimento do Ponto de vista que apresentei no número anterior sobre o teste intermédio de 8.° ano. Nesse texto, referi que a sequência apresentada na questão 9 tinha um potencial interessante, apesar das questões formuladas não aproveitarem tal potencial. Assim, neste número apresento uma formulação alternativa, pensada numa perspetiva de trabalho a realizar numa aula de Matemática do 7.° ou 8.° ano. A tarefa foi pensada com o objetivo de promover o pensamento algébrico, o raciocínio nas suas diferentes vertentes, e a comunicação matemática. O professor decidirá qual a melhor forma de organizar o trabalho dos alunos, mas considero indispensável uma fase de trabalho autónomo e posterior discussão no grupo-turma. Essa discussão poderá revelar as diferentes formas de olhar para a sequência e respetivo termo geral: $(n+1)^2-1$ corresponde à identificação de um quadrado ao qual falta um azulejo; $n(n+2)$ resulta de mover e rodar a coluna de azulejos brancos e colocá-la numa base do retângulo cinzento, ficando com um retângulo de dimensões n por $n+2$; finalmente, $n + n(n+1)$ poderá ser antecipada pela resolução das questões anteriores, pois deriva da junção dos n azulejos brancos aos $n(n+1)$ azulejos cinzentos. Haverá ainda outras expressões possíveis e é necessário estar disponível para aceitar e discutir outras que os alunos proponham. Sendo assim, $5n-2$ é a única expressão que não corresponde a um termo geral, mas a sua análise é recomendada porque ao testar a fórmula, ela resiste aos dois primeiros termos e só se verifica falsa a partir do terceiro. No contexto do 8.° ano, pode ainda verificar a equivalência das expressões, criando um contexto favorável à aplicação das operações entre monómios e polinómios e ainda um dos casos notáveis da multiplicação.

Lina Brunheira,
Escola Secundária de Amora

Azulejos quadrados ou quadrados de azulejos?

Na figura estão representados os quatro primeiros termos de uma sequência de conjuntos de azulejos quadrados que segue a lei de formação sugerida.
Os azulejos são todos iguais, sendo uns brancos e outros cinzentos.



1.º Termo 2.º Termo 3.º Termo 4.º Termo

1. Desenha o 5º termo da sequência.
2. Quantos azulejos brancos terá o termo de ordem 99?
3. Encontra o termo geral para a sequência relativa ao número de azulejos brancos.
4. Qual o número total de azulejos que terá a figura de ordem 222? Explica como pensaste para chegar à resposta.
5. Assinala as expressões algébricas que podem ser usadas para calcular a quantidade de azulejos em qualquer figura (n representa o número de ordem da figura).
   (A) $(n+1)2-1$ (B) $5n-2$ (C) $n(n+2)$ (D) $n+n(n+1)$

Explica as tuas escolhas com base na sua composição geométrica.

De que tem medo o Sr. Ministro?

Felicito o GAVE ao incluir no planeamento da sua formação de quatro anos, dirigida aos professores classificadores, o tema da avaliação formativa. Não é novo afirmar-se que uma prática continuada de avaliação formativa contribui para as aprendizagens dos alunos. Já em 1998, uma meta-análise sobre 250 publicações sobre práticas de avaliação formativa na sala de aula, selecionadas a partir de 681 obras listadas, aponta de forma conclusiva que a avaliação formativa melhora a aprendizagem (Black & Wiliam, 1998). Não é assim de estranhar que, neste mesmo estudo, os seus autores afirmem ainda que os alunos que frequentam aulas em que existe avaliação formativa obtêm melhores resultados em avaliações externas, exames, do que aqueles que são sujeitos apenas a uma avaliação sumativa.

Neste mesmo estudo, contudo, também se alerta para que as práticas habituais não refletem de forma significativa esta realidade, reconhecendo-se que a mudança levará tempo e necessita de um apoio continuado tanto dos investigadores, como dos professores. A escassez de práticas avaliativas formativas é igualmente evidenciada em meta-análises de estudos realizados em Portugal (Barreira & Pinto, 2005; Fernandes, 2006; Santos, 2003). Esta realidade não sofreu alterações significativas nos últimos anos, como é afirmado no recente relatório da OCDE dedicado a Portugal (Santiago, Donaldson, Looney & Nusche, 2012). Tal facto explica a razão pela qual uma das propostas nele apresentadas seja o reforço de práticas de avaliação formativa nas salas de aula, de forma a promover a aprendizagem dos alunos, em vez de um uso exclusivo de avaliação sumativa que regista e reporta os resultados do desempenho dos alunos. Mais se avança, indicando a necessidade de se dar mais frequentemente feedback aos alunos e de desenvolver a interação entre professor e alunos sobre as suas aprendizagens.

Assim, a preocupação revelada pelo GAVE de contribuir para uma formação dirigida a uma prática avaliativa em falta parece desde já perfeitamente justificada. Mas poderei ainda acrescentar para fundamentar esta minha apreciação um outro argumento que decorre do expresso na atual legislação portuguesa, bem como nas orientações que se podem encontrar em diversos documentos curriculares. Pode ler-se no artigo 19 do Despacho Normativo n.º 1/2005 em vigor que a «avaliação formativa é a principal modalidade de avaliação do ensino básico, assume carácter contínuo e sistemático e visa a regulação do ensino e da aprendizagem, recorrendo a uma variedade de instrumentos de recolha de informação, de acordo com a natureza das aprendizagens e dos contextos em que ocorrem» (pp. 72–73). Do mesmo modo, por exemplo, no programa do Ensino Secundário para a Matemática A (DES, 2001, p. 13), em vigor, afirma-se que «Avaliar os conhecimentos matemáticos dos estudantes significa reunir e analisar dados sobre o que estes sabem a respeito de conceitos e métodos matemáticos. Estes dados devem ser utilizados tanto pelos professores como pelos estudantes; os professores deverão utilizá-los para ajudar os estudantes a adquirir conhecimentos profundos e ideias claras sobre os conteúdos matemáticos». Consultando o programa de matemática para o ensino básico em vigor é também possível encontrarem-se referências à avaliação formativa: «[...] é necessária uma avaliação continuada posta ao serviço da gestão curricular de carácter formativo e regulador» (DGIDC, 2007, p. 12).

Ora, qual não é o meu espanto, quando em maio do corrente ano, os professores classificadores recebem uma mensagem introduzindo uma alteração à tarefa prevista para a sua avaliação final. Não é sobre a alteração que quero aqui chamar a atenção, mas sim sobre os argumentos avançados para a justificar e que dizem o seguinte:

> Considerando que os textos apresentados nesta formação têm uma orientação marcada por conceções de avaliação muito particulares, não refletindo a diversidade de conceções sobre a avaliação mais recentes e atendendo ainda ao facto de não implicarem qualquer orientação do GAVE no sentido da adoção de práticas únicas em matéria de avaliação escolar, a apreciação crítica que se propõe como uma das tarefas que integram o relatório final não terá de traduzir as ideias expressas nos referidos textos.
>
> (texto da mensagem de email enviada aos formandos da autoria do GAVE)

Várias questões emergem da sua leitura: Que particularidades marcam a conceção de avaliação formativa dos textos apresentados? São posições exclusivas dos seus autores ou, pelo contrário, consensualizadas pela grande maioria dos peritos e investigadores desta área da avaliação, da avaliação formativa? Quais são as conceções de avaliação mais recentes, no que diz respeito à avaliação formativa? De que modo estão em contradição com as apresentadas nesses textos? O GAVE, ao trabalhar a avaliação formativa, está a defender a adoção de práticas únicas? Ou, pelo contrário, o facto de trabalhar técnicas ao serviço da avaliação apenas enquanto medida é que transmite a mensagem da adoção de uma prática única?

Esta mensagem só pode ter uma de duas possíveis leituras: Ou falta de preparação científica nos assuntos da avaliação por parte dos técnicos do GAVE ou resultado de políticas educativas definidas superiormente. Mas sendo o GAVE o serviço do Ministério da Educação que tem por principal função trabalhar as questões relativas à avaliação, especificamente a do desempenho dos alunos do ensino não superior, custa-me aceitar a primeira interpretação. Assim, não me resta outra alternativa senão optar pelo segundo cenário. Mas sendo esta a leitura, é caso para perguntar: De que tem medo o Sr. Ministro da Educação? Que os professores desenvolvam práticas que potencializem a aprendizagem dos alunos portugueses?

Referências

Barreira, C., & Pinto, J. (2005). A investigação em Portugal sobre a avaliação das aprendizagens dos alunos (1990-2005). Investigar em Educação, 4, 21-105.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. Assessment in Education, 5(1), 7-74.

DES (2001). MATEMÁTICA A 10° ANO Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directorio&pid=2&letra=M

DGIDC (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71#i

Fernandes, D. (2006). Vinte anos de avaliação das aprendizagens: Uma síntese interpretativa de artigos publicados em Portugal. Revista Portuguesa de Pedagogia, 40(3), 289-348.

Santiago, P., Donaldson, G., Looney, A., & Nusche, D. (2012). OECD Reviews of evaluation and assessment in education: Portugal. OECD.

Santos, L. (2003). A investigação em Portugal na área da avaliação pedagógica em Matemática. Actas do XIV SIEM 2003 (Seminário de Investigação em Educação Matemática) (pp. 9-27). Lisboa: APM.

Despacho Normativo n.º 1/2005 in DIÁRIO DA REPÚBLICA – I SÉRIE-B, Janeiro de 2005, 71-76.

Leonor Santos

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Exames do 4.º ano

Quando ouvi a notícia sobre os exames do 4.º ano lembrei-me, de imediato, do meu exame da 4.ª classe, realizado há mais de 50 anos na escola da sede de concelho onde residia e com um júri que excluía a minha professora. Nesse ano era já obrigatória, na lei, a 4.ª classe para as raparigas, para os rapazes tinha-o sido uns anos antes. Os nossos pais tinham-se preocupado em arranjar-nos um «fato novo», digno da ocasião, fomos de camioneta de carreira – o único transporte existente – todos juntos com a professora e conscientes da nossa grande responsabilidade. Para muitos de nós era a primeira vez que saíamos da aldeia e com a promessa que, depois do exame, se tudo corresse bem, teríamos um momento de brincadeira no parque infantil da vila.

O exame constava de uma prova escrita e de uma prova oral em Aritmética e Geometria, Língua Portuguesa, História e Geografia e Ciências. Da minha escola primária fomos fazer, naquele ano, o exame da 4ª classe um grupo de menos de 10 alunos. Os outros «não estavam preparados», ou já tinham ficado retidos em anos anteriores, e na melhor das hipóteses passaram um ou mais anos na escola até a abandonarem, muitos deles sem qualquer diploma. A aprovação no exame era considerado um marco muito importante para os alunos e para a professora. Durante meses o grupo dos alunos da quarta classe deslocou-se diariamente, após o período escolar, para a casa da professora, onde continuava o trabalho de memorização das diferentes matérias. Como recompensa «todos os que foram a exame passaram».

Nessa altura, a quarta classe representava para a grande maioria o fim da escolaridade. No meu ano e, nas cinco escolas da freguesia, apenas eu fiz no mês seguinte o exame de admissão aos liceus (realizado no liceu da sede de distrito) e continuei estudos, todos os outros foram trabalhar para a agricultura ou aprender um dos poucos ofícios possíveis: nas «pedras» (extrair pedra das pedreiras da serra), sapateiros (nas oficinas familiares onde os sapatos eram feitos por medida e manualmente), ou «navalheiros» (pequenas oficinas onde se faziam também manualmente navalhas, facas, etc.). Este era o panorama há pouco mais de 50 anos, num lugar a 80 km de Lisboa e próximo do litoral, onde se estudava à luz do candeeiro de petróleo e se trabalhava de sol a sol. Entretanto as oficinas deram lugar a fábricas, que entretanto só sobreviveram as que se modernizaram, a agricultura desapareceu, as crianças estão todas na escola e agora durante 12 anos e uma percentagem muito significativa faz um curso superior. Por tudo isto a introdução do exame do 4.º ano anunciado para 2013 não é, não pode ser, para reproduzir o exame da 4ª classe . Daí que o argumento ouvido nalguma comunicação social que «no meu tempo também fiz exame» não colhe. Esse tempo já não existe, a proposta do MEC apenas contempla exames a Português e a Matemática e estes contarão apenas 30% para a nota final. Está por explicar como irão ser contabilizados esses 30% uma vez que a avaliação no final do 1.º ciclo está definida como sendo qualitativa e globalizante.

A situação de atraso em relação à Europa, que se verificava na segunda metade dos anos 50 do século passado, mantém-se na atualidade, apesar dos esforços de muitos. Portugal tem hoje o compromisso internacional de aproximar progressivamente os 30% dos adultos em idade ativa (entre os 25 e os 64 anos) que em 2009 tinham o ensino secundário à média dos 73% dos países da OCDE. Será que a substituição das provas de aferição no 4.º ano, realizadas desde 2000, pelo exame contribui para melhorar a qualificação dos portugueses?

A OCDE realizou recentemente um estudo (Santiago et al., 2012) sobre avaliação no sistema de ensino português, cujo objetivo foi o de «explorar como é que os sistemas de avaliação podem ser usados para melhorar a qualidade, equidade e eficiência do sistema de ensino». O relatório é abrangente abordando num dos seus pontos a avaliação de alunos. Neste ponto considera que o nosso ensino é ainda muito tradicional, com limitada utilização de feedback e uma grande percentagem de retenção dos alunos (uma das mais altas da OCDE). Entre as recomendações, afirma-se que ensino e aprendizagem ponham ênfase na autêntica aprendizagem dos alunos e.uma maior ênfase na avaliação formativa dos mesmos. Considera ainda que o estigma da retenção vai contra a necessidade dos professores terem altas expetativas sobre os seus alunos.

Outros estudos mostram que as fracas expetativas sobre aquilo que os alunos são capazes de aprender é um dos problemas do nosso sistema de ensino, que se acentua na Matemática, onde as conceções dos professores e da sociedade sobre a disciplina fazem com que essas expetativas sejam ainda mais baixas. A consciência deste facto levou a que o Programa de Formação Contínua em Matemática definisse como um dos seus objetivos: "fomentar uma atitude positiva dos professores relativamente à Matemática e ao seu ensino, que inclua a criação de expectativas elevadas acerca do que os seus alunos podem aprender em Matemática". Este pretendia contrariar a ideia que os alunos não são capazes e uma certa cultura do certo e do errado defendendo que a ênfase fosse colocada na análise das produções dos alunos, de modo a identificar os erros cometidos e considerar formas de os ultrapassar. Embora este trabalho tenha sido iniciado no âmbito do PFCM, ele tem de ser continuado, pois alterar conceções e práticas é um processo lento e extremamente difícil. O referido relatório da OCDE conclui ainda que normalmente os dados do desempenho dos alunos não são analisados para se compreenderem as suas dificuldades, considerando que não existe uma verdadeira avaliação formativa. No entanto, desde o início dos anos 90 do século passado que a avaliação formativa consta nos documentos de política de avaliação dos alunos. Mas, uma coisa são os normativos legais, outra é a prática diária da sala de aula, onde é entendida com uma visao demasiado restritiva. O relatório da OCDE refere que a grande preocupação é o somativo, a atribuição de uma nota, uma atenção excessiva aos resultados. Se a prova de aferição já era, por vezes, motivo para, nas semanas anteriores, o trabalho da sala de aula ser todo dirigido nessa direção, passando os alunos semanas a resolver provas-tipo, com ênfase no resultado e não numa verdadeira compreensão da resolução, o que acontecerá com o exame? E as outras áreas disciplinares que não são sujeitas a exame, o que lhes acontece?

Referências

Santiago, P., Donaldson, G., Looney, A.,& Nusche, D. (2012). OECD Reviews of Evaluation and Assessmente in Education: Portugal 2012. OECD Publishing.

Lurdes Serrazina
Instituto Politécnico de Lisboa

Soma dos ângulos de um polígono

José Tinoco

Todos, ou quase todos, sabem que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° (um ângulo raso ou dois ângulos retos). Este é um dos resultados centrais da geometria euclidiana. Esta propriedade é uma das poucas que a maioria dos alunos nunca se esquece, embora, por vezes, quando é necessário recorrer a ela, nem todos se lembram que é um conhecimento prévio que devem mobilizar. A partir deste resultado facilmente se deduz a fórmula $(n-2) \times 180°$, que permite determinar a soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer polígono simples com n lados, convexo ou não convexo, assim como a conclusão de que a soma dos ângulos externos é igual a 360° (ou dois ângulos rasos).

O principal problema surge quando se pergunta aos alunos como é que sabiam isso ou se sabem demonstrar porque é que a soma dos três ângulos internos do triângulo é igual a 180°. A maioria não sabe ou apenas acrescenta que o professor anterior lhes tinha dito. Estamos perante mais uma abstração da matemática, que pode parecer bastante intuitiva mas que, talvez, não tenha sido trabalhada da melhor forma das primeiras vezes que foi abordada.

Como qualquer abstração matemática, convém começar por alguns casos concretos e só depois generalizá-la a todos os triângulos, até porque este assunto começa a ser abordado no 6.° ano de escolaridade e os alunos ainda não estão familiarizados com demonstrações matemáticas. Constitui mesmo uma das primeiras demonstrações formais que os alunos realizam no Ensino Básico.

Soma dos ângulos internos de um triângulo

Uma forma muito intuitiva de chegar a este resultado, começando com dados concretos e manipuláveis, tal como aparece em muitos manuais, consiste em recorrer a um triângulo de papel ou de cartolina. Pede-se aos alunos, como trabalho de casa, para construírem um triângulo com medidas à sua escolha (de preferência grandes), para que cada aluno tenha um triângulo diferente (isto é importante). O professor também deve ter o seu triângulo para explicar e mostrar a toda a turma os procedimentos a efetuarem. Atualmente, recorrendo aos Ambientes de Geometria Dinâmica, também é muito simples construir provas informais deste resultado.

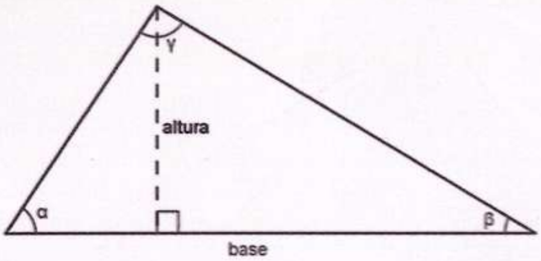


Figura 1

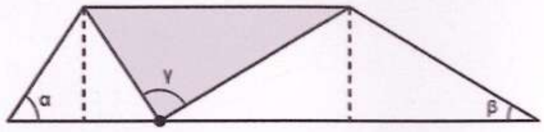


Figura 2

No triângulo de papel, começa-se por identificar a base (que, neste caso, deve ser o lado maior) e a correspondente altura do triângulo, assim como os três ângulos, como mostra a figura 1.

Como a altura tem de ser perpendicular à base, pode ser obtida através da dobra que passa pelo vértice oposto quando as duas *arestas da base* coincidem.

De seguida faz-se uma dobra do triângulo, a meio da altura, de modo que o vértice oposto coincida com o pé da altura (*ver* figura 2).

Depois fazem-se novas dobragens, perpendiculares à anterior, de forma que os três vértices do triângulo coincidam nesse mesmo ponto (*ver* figura 3).

Finalmente, obtém-se qualquer coisa parecida com um retângulo, ou melhor, o triângulo inicial ficou dobrado em dois retângulos sobrepostos. Mais importante do que isso, vemos que os três ângulos formam um ângulo raso. Desdobrando o modelo vemos que esse ângulo raso não é mais do que a junção (sem sobreposições) dos três ângulos internos do triângulo. Portanto, chegamos à conjetura: os três ângulos internos do triângulo formam um ângulo raso.

O facto importante de cada aluno ter um triângulo diferente conduz à ideia de que aquele resultado não é apenas válido para o seu triângulo e para o do professor, mas também para todos os triângulos dos colegas. Começam assim a fazer a abstração daquele resultado padrão a muitos outros triângulos.

A demonstração formal, embora dependendo do tipo de alunos a que se destina, pode ser introduzida com alguns casos particulares. Um bom exemplo é o triângulo retângulo (fig. 4)

Podemos dobrar o triângulo retângulo, fazendo coincidir os vértices dos dois ângulos agudos com o vértice do ângulo reto. Deste modo mostra-se que os dois ângulos agudos são complementares e, portanto, os três ângulos formam dois retos ou 180° (*ver* fig. 5).

Para demonstrar este caso particular com papel e lápis basta reconstruir o retângulo, traçando, pelos vértices dos ângulos agudos, paralelas aos lados que formam o ângulo reto (fig. 6).

Como $\angle\beta \equiv \angle\theta$, pois trata-se de ângulos alternos internos ($\equiv$ representa «congruente» ou «geometricamente igual»), então $\angle\beta + \angle\gamma = \angle\theta + \angle\gamma = 90°$. Adicionando o ângulo reto obtemos 180°, isto é, $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180°$.

A partir deste caso particular, facilmente se demonstra o caso geral. Considerando um triângulo qualquer, a altura em relação ao lado maior ‹cai› sempre sobre esse lado. Portanto, a altura decompõe o triângulo dado (figura seguinte) em dois triângulos retângulos.

Já sabemos que,

$$\angle\alpha + \angle\delta + 90° = 180° \text{ e } \angle\beta + \angle\theta + 90° = 180°.$$

Assim, juntando os seis ângulos temos

$$\angle\alpha + \angle\delta + 90° + \angle\beta + \angle\theta + 90° = 360°,$$

isto é, dois ângulos rasos. Eliminando os dois ângulos retos, que juntos valem 180°, em cada membro da igualdade anterior, obtemos $\angle\alpha + \angle\delta + \angle\beta + \angle\theta = 180°$. Mas temos $\angle\delta + \angle\theta = \angle\gamma$, portanto $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180°$ (*ver* fig. 7).

Outra possível demonstração da proposição 32 do livro I dos Elementos, consiste em traçar por um dos vértices, uma reta r paralela ao lado oposto (fig. 8).

Agora sabemos que $\angle\beta \equiv \angle\theta$ e $\angle\alpha \equiv \angle\delta$, pois são ângulos alternos internos. Como vemos na figura (*ver* fig 8), $\angle\delta + \angle\theta + \angle\gamma = 180°$,

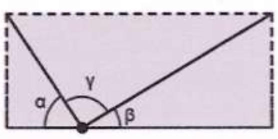


Figura 3

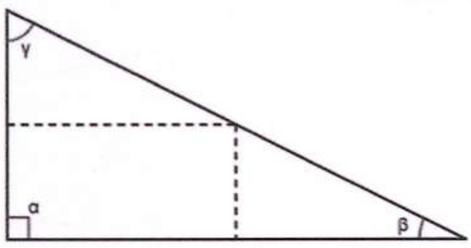


Figura 4

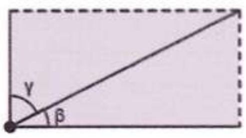


Figura 5

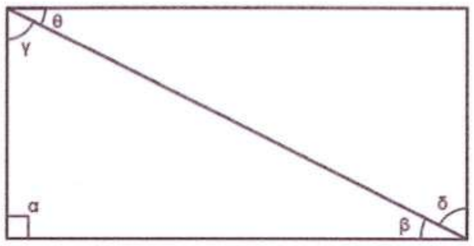


Figura 6

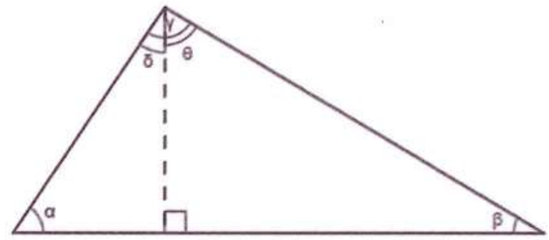


Figura 7

pois formam um ângulo raso. Atendendo às duas identidades anteriores facilmente se conclui que $\angle\alpha + \angle\gamma + \angle\beta = 180°$.

Esta prova constitui um padrão facilmente generalizado a qualquer triângulo, independentemente da sua forma e do vértice escolhido para traçar a paralela ao lado oposto. Trata-se também de uma das demonstrações mais curtas e mais elegantes que existem na geometria euclidiana, sendo facilmente compreensível por qualquer pessoa, até porque não recorre a grandes conhecimentos prévios.

Soma dos ângulos externos de um triângulo

Geralmente não nos preocupamos muito com os ângulos externos de um polígono, talvez devido ao facto de não fazerem parte do polígono (geralmente consideramos o polígono como a área limitada pela linha poligonal). Num polígono, a qualquer ângulo interno está sempre associado um ângulo externo que lhe é adjacente. A própria definição de ângulo externo de um polígono causa alguma confusão nos alunos, pois julgam que o ângulo externo é o ângulo replementar do interno que lhe é adjacente, isto é, associam o ângulo externo ao ângulo exterior que tem os mesmos lados do interno.

Define-se *ângulo externo* como sendo o suplementar do ângulo interno que lhe é adjacente. Desta definição resulta que o ângulo externo é sempre inferior a 180°, pois o ângulo interno é sempre positivo (à frente veremos que o ângulo externo até pode ser negativo). Alguns alunos não aceitam facilmente esta definição e, neste caso, é importante referir que o ângulo externo corresponde à mudança de direção que temos de efetuar em cada vértice ao percorrer os lados do triângulo, como mostram as setas da figura seguinte. Outra razão que podemos invocar é a necessidade que os matemáticos sentem de criarem definições que proporcionem propriedades interessantes e conexões entre os vários elementos que relacionam, contribuindo também para a simplificação dos cálculos, como veremos de seguida (fig.9).

Que relação existe entre o ângulo externo e os ângulos internos? Como vemos, o ângulo externo é determinado por um lado do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente. Como o ângulo externo é suplementar do interno adjacente, então $\angle\alpha + \angle\theta = 180°$. Já sabemos que a soma dos ângulos internos é igual a 180°, isto é, $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180°$. Comparando as duas igualdades anteriores concluímos que

$$\angle\alpha + \angle\theta = \angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma.$$

Eliminando $\angle\alpha$ em ambos os membros desta igualdade resulta que $\angle\theta = \angle\beta + \angle\gamma$.

Da mesma forma se conclui que $\angle\delta = \angle\alpha + \angle\gamma$ e que $\angle\varepsilon = \angle\alpha + \angle\beta$. Portanto, a amplitude de qualquer ângulo externo do triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

A proposição I.32 dos *Elementos* de Euclides mostra também outra forma, ainda mais simples, de demonstrar este resultado. Se a partir de qualquer vértice do triângulo traçarmos uma paralela ao lado oposto, o ângulo externo nesse vértice fica dividido em duas partes, como mostra a figura 10.

Sabemos que $\angle\beta \equiv \angle\eta$, por serem ângulos alternos internos, e que $\angle\alpha \equiv \angle\lambda$, por serem ângulos correspondentes. Portanto, $\angle\eta + \angle\lambda = \angle\alpha + \angle\beta$. Como $\angle\eta + \angle\lambda$ forma o ângulo externo adjacente a $\angle\gamma$, concluímos que a amplitude do ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

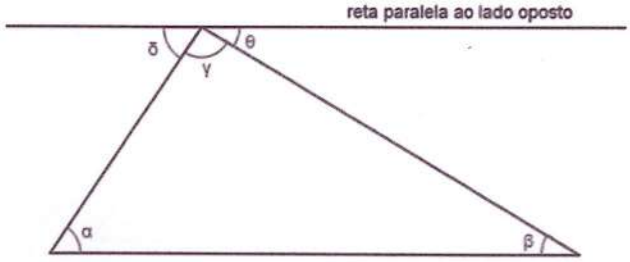


Figura 8

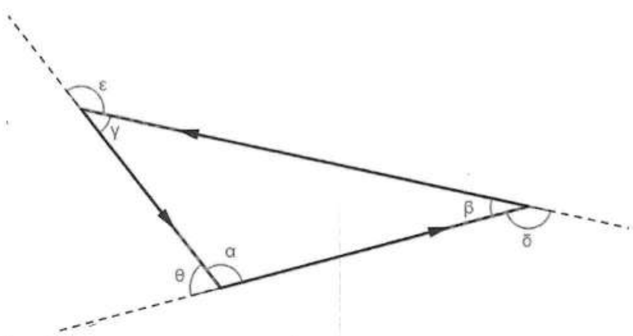


Figura 9

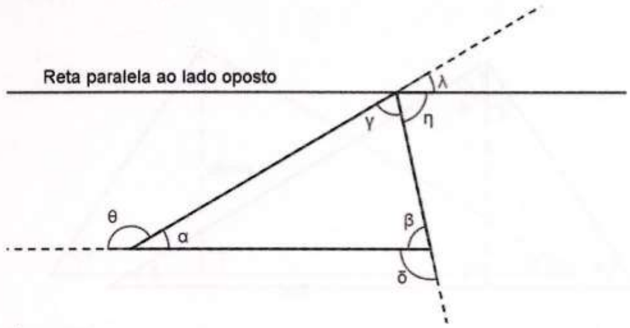


Figura 10

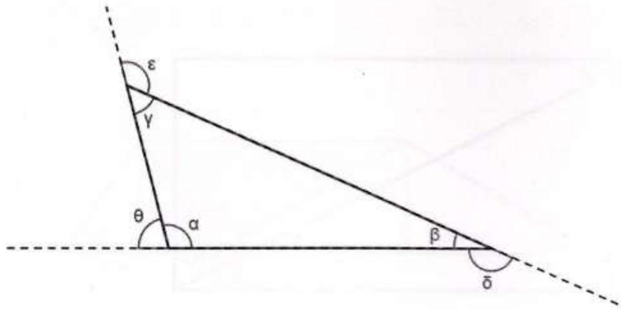


Figura 11

Da figura 10, tal como provou Euclides, também se pode concluir que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, pois $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = \angle\lambda + \angle\eta + \angle\gamma = 180°$.

Determinar a soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo constitui agora uma tarefa relativamente simples, que serve para testar o poder de argumentação, a capacidade de raciocínio e a comunicação matemática, para além de constituir uma pequena demonstração que os alunos podem fazer sozinhos.

Vejamos a elegância da resposta de uma aluna: «Como os seis ângulos do triângulo (internos e externos) formam três ângulos rasos e os três ângulos internos formam um ângulo raso, então os três ângulos externos formam dois rasos, isto é, $2 \times 180° = 360°$.» Até parece fácil! De facto, este raciocínio mostra que a matemática torna-se simples e fácil quando as ideias são estruturadas e encadeadas de forma curta.

No entanto, não podemos criar a ilusão de que este raciocínio é igualmente acessível a todos. Há alunos que não conseguem provar que a soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a dois ângulos rasos (ou um giro). Para os que não possuem tanto poder de síntese aqui fica outro raciocínio correto, embora um pouco mais elaborado.

Como cada ângulo externo é igual à soma dos internos não adjacentes, então, de acordo com a figura 11, podemos escrever:

$$\angle\theta = \angle\beta + \angle\gamma;$$
$$\angle\delta = \angle\alpha + \angle\gamma;$$
$$\angle\varepsilon = \angle\alpha + \angle\beta.$$

Adicionando, membro a membro, as igualdades anteriores, vemos que estamos a juntar os ângulos internos do triângulo duas vezes, ou seja,

$$\begin{aligned}\angle\theta + \angle\delta + \angle\varepsilon &= (\angle\beta + \angle\gamma) + (\angle\alpha + \angle\gamma) + (\angle\alpha + \angle\beta)\\ &= \angle\beta + \angle\gamma + \angle\alpha + \angle\gamma + \angle\alpha + \angle\beta\\ &= (\angle\beta + \angle\gamma + \angle\alpha) + (\angle\gamma + \angle\alpha + \angle\beta)\\ &= 180° + 180°.\\ &= 360°.\end{aligned}$$

Soma dos ângulos de um polígono convexo

Recordemos que um polígono diz-se convexo se qualquer diagonal desse polígono está inteiramente contida na região por ele limitada, isto é, no seu interior. Caso contrário o polígono é não convexo ou *côncavo*. Chama-se *diagonal* de um polígono a todo o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos do polígono. Como podemos ver pelas figuras seguintes, um polígono côncavo tem ângulos internos com amplitude superior a 180°, ou, de outra forma, tem vértices ‹reentrantes› (fig. 12).

Para deduzir a fórmula geral da soma dos ângulos internos de um polígono convexo comecemos, igualmente, por alguns casos particulares. Por exemplo, sabemos que qualquer quadrilátero pode ser decomposto em dois triângulos, traçando uma das suas diagonais. Daqui facilmente se conclui que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é $2 \times 180° = 360°$.

E qual será a soma dos ângulos externos? Podemos seguir o raciocínio usado no caso do triângulo. Agora temos quatro ângulos rasos, formados pelos quatro internos e pelos quatro

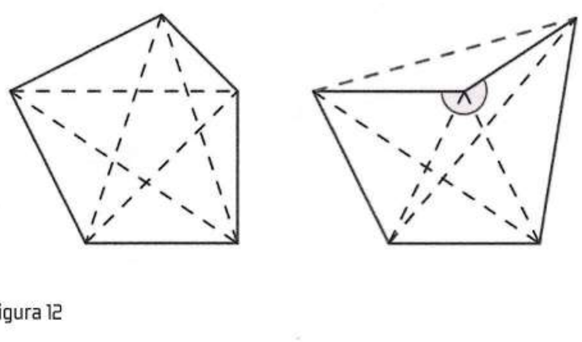


Figura 12

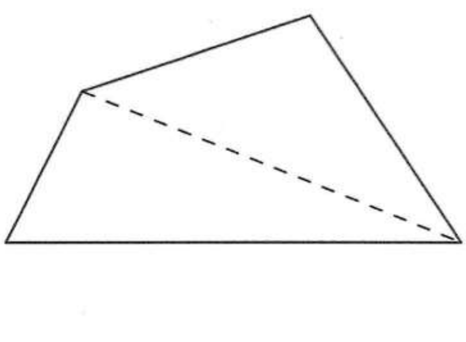


Figura 13

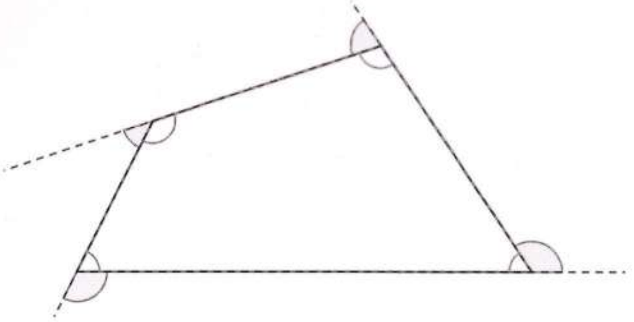


Figura 14

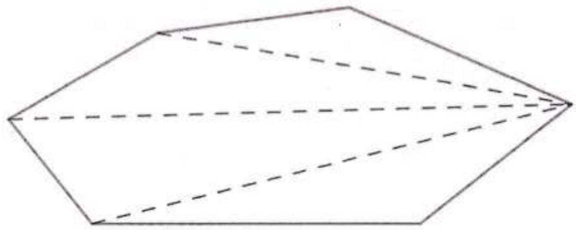


Figura 15

externos, que no total perfazem $4 \times 180° = 720°$. Como acabamos de ver que os quatro ângulos internos valem $360°$ então os quatro ângulos externos valem $720° - 360° = 360°$ (fig.14).

Tal como no triângulo, a soma dos ângulos externos continua a ser $360°$. Será que este padrão se mantém para todos os polígonos convexos? Vejamos mais um exemplo. O hexágono da figura 15 pode ser decomposto em quatro triângulos, usando as diagonais que partem do mesmo vértice.

Assim, a soma dos ângulos internos do hexágono é igual a $4 \times 180° = 720°$. E qual é a soma dos ângulos externos? Agora temos seis ângulos rasos, formados pelos seis internos e pelos seis externos, que no total perfazem $6 \times 180° = 1080°$. Como vimos que os seis ângulos internos valem $720°$ então os quatro externos valem $1080° - 720° = 360°$.

Estamos perante um belo padrão. Podemos conjeturar que soma dos ângulos externos de um polígono convexo é igual a $360°$. Tentemos o caso geral para provar a nossa conjetura. Dos exemplos anteriores, resulta que qualquer polígono convexo com n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos.[1] Portanto, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por $(n - 2) \times 180°$, em que n representa o número de lados. Para obter a soma dos ângulos externos só temos de somar todos os ângulos do polígono e subtrair os internos, como fizemos nos casos particulares. Num polígono com n lados, somando os ângulos internos com os externos obtemos n ângulos rasos, isto é, a soma de todos os seus ângulos é dada por $n \times 180°$. Subtraindo os ângulos internos obtemos,

$$n \times 180° - (n - 2) \times 180° = 360°.$$

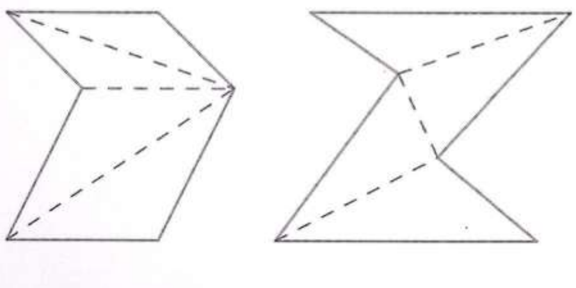


Figura 16

Afinal, não só temos uma curta prova mas também um belo padrão!

Soma dos ângulos de um polígono côncavo

Será que esta regularidade se mantém para os polígonos côncavos? Os programas de Matemática excluem sempre os polígonos côncavos. Haverá alguma razão de força maior para que isso aconteça? O facto de apresentarem um ou mais vértices «reentrantes» não causa assim tanta confusão como à partida se poderia pensar. Verificar se os padrões dos polígonos convexos se aplicam aos polígonos não convexos pode ser um bom desafio para colocar aos alunos mais empenhados.

Tal como procedemos para os polígonos convexos, podemos dividir um polígono côncavo em $n - 2$ triângulos[2], traçando $n - 3$ diagonais que não se intersetam. Agora há uma pequena diferença. As diagonais que dividem o polígono podem não partir todas do mesmo vértice. A seguir encontram-se dois hexágonos não convexos: o da esquerda pode ser decomposto em quatro triângulos traçando três diagonais que partem do mesmo vértice; o da direita também se decompõe em quatro triângulos mas agora isso não é possível com diagonais que partem do mesmo vértice.

Como podemos ver, a soma dos ângulos internos destes dois hexágonos continua a ser $4 \times 180° = 720°$. Portanto, como um polígono com n lados se pode decompor em $n - 2$ triângulos, a soma dos seus ângulos internos é igual a $(n - 2) \times 180°$.

Será que a soma dos ângulos externos continua a valer $360°$? Se o polígono é não convexo então possui vértices reentrantes ou ângulos internos superiores a $180°$. Recorde-se que o ângulo externo é formado por um lado do polígono e pelo prolongamento do lado adjacente Observando mais detalhadamente o que acontece nos vértices reentrantes (figura seguinte), vemos que existe uma mudança de orientação dos ângulos externos nesses vértices quando se percorre o polígono na direção indicada pela seta. Da definição, sabemos que cada ângulo externo é o suplementar do interno adjacente. De facto, para que isto aconteça nos vértices reentrantes a amplitude dos ângulos externos tem de ser negativa, pois os ângulos internos têm amplitude superior a $180°$. É precisamente este o significado da mudança de orientação ocorrida nos ângulos externos.

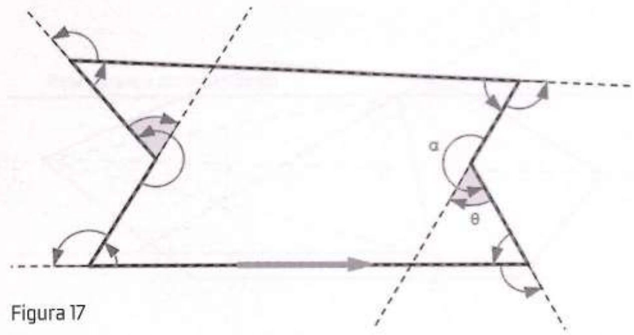


Figura 17

Vejamos: $\angle\alpha + \angle\theta = 180°$, como sugere a figura; portanto, $\angle\alpha = 180° - \angle\theta$; mas como $\angle\alpha > 180°$ temos $\angle\theta = \angle\alpha - 180° < 0$, isto é, o ângulo externo tem amplitude negativa.

Assim, no total, num polígono com n lados continuamos a ter n ângulos rasos. Sendo E a soma dos ângulos externos de um polígono com n lados e $(n-2) \times 180°$ a soma dos seus ângulos internos, temos $E + (n-2) \times 180° = n \times 180°$. Resolvendo em ordem a E obtemos $E = n \times 180° - n \times 180° + 2 \times 180° = 360°$.

Portanto, a soma dos ângulos externos continua a ser 360°. Que bela surpresa! Afinal o padrão mantém-se para os polígonos côncavos.

Parece uma contradição o ângulo externo ter amplitude negativa, mas não será menos contradição o ângulo externo estar no interior do polígono. Portanto, faz todo o sentido, que a amplitude desse ângulo seja negativa. Trata-se de uma consequência da definição de ângulo externo. Precisamente, como atrás dissemos, uma definição que proporciona um belo padrão.

Notas

[1] Prova-se que qualquer polígono (convexo ou não) de n lados pode ser decomposto em $n-2$ triângulos adjacentes, através de $n-3$ diagonais que não se intersetam. Uma demonstração deste resultado pode ser vista no livro de Elon Lages Lima, publicado pela Gradiva na coleção Temas de Matemática.

[2] Uma demonstração deste resultado pode ser vista no livro de Elon L. Lima ou no livro de David Hilbert, publicado pela Gradiva na coleção Trajetos Ciência.

Bibliografia:

Lima, E. Lages. *Matemática e Ensino*, Gradiva, 2004.
Hilbert, David. *Fundamentos da Geometria*, Gradiva, 3003.
Ponte, J. Pedro, et al. *Programa de Matemática do Ensino Básico*, ME-DGIDC, 2007.
http://alepho.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

José Tinoco
Escola EB 2,3/S de Arcos de Valdevez

Matemática e Música

Nem sempre no mundo as ligações são as mais prováveis. Procurar conexões nem sempre é fácil. Motivar ainda é mais difícil. Mas no mundo nada é impossível.

Para uma turma de Artes, do 11.º ano, a Matemática B é, muitas vezes, a obrigação sem devoção. Por isso, procurámos, no início do ano, acender uma chama de curiosidade e aproveitámos a disponibilidade do Professor Pedro Freitas, da Faculdade de Ciências de Lisboa, que veio à nossa escola proferir uma palestra intitulada Matemática, arte e música. Este foi o mote para propormos aos alunos que realizassem um trabalho de procura e descoberta da matemática numa obra de arte, na natureza, na música e no mundo que nos rodeia.

O trabalho que ora se apresenta é a resposta de um aluno, o José Pedro Fernandes, que, na sequência do estudo das Sucessões, decidiu abordar este tema, estabelecendo conexão com outra área do seu interesse: A música. Confesso que sou leiga nesta matéria, como a maioria dos alunos da turma. O trabalho do José Pedro criou, pois, a oportunidade de aprendermos algo (sou professora mas eterna aluna), respondendo ao objetivo a que nos tínhamos, todos, proposto: a motivação e a transversalidade dos saberes.

O José Pedro, além de frequentar a Escola Secundária Fernando Namora, na Brandoa, frequenta o Instituto Gregoriano de Lisboa, realizando, assim, uma ponte entre os saberes daquele Instituto e os saberes apreendidos na escola. O trabalho, como é habitual, foi apresentado à turma e da avaliação feita pelos colegas e pelo próprio aluno, que foi francamente positiva, se deixam alguns excertos:

A elaboração deste projeto correu, na minha opinião, muito bem e fiquei satisfeito com o produto final. Gostei muito de realizar este trabalho, embora no início ficasse um pouco receoso, visto que não encontrei muita informação sobre o tema. De maneira que tive de utilizar os meus conhecimentos das duas áreas e tentar juntá-los. – **José Pedro Fernandes**

O trabalho é bastante interessante. O Curso de Artes é para nós, desta forma, algo que serve como chave para abrirmos portas e libertar sentimentos. Espero que este tipo de projeto continue e evolua – **Francisco Júnior**

Adorei o projeto, embora não percebendo muito de música. Foi original e interessante... – **José Diogo Nunes**

O trabalho foi coerente: faz todo o sentido elaborarmos trabalhos de aplicação da Matemática a assuntos do nosso interesse, como foi o caso da música para o José Pedro. – **Kena Bladel**

Achei o trabalho interessante e bem elaborado e como o José Pedro toca violino apresentou o trabalho de forma explícita. – **Catarina Homem**

Percebi muito bem, não só o domínio musical como também o matemático. O trabalho foi bem construído e explicado. Dou os parabéns ao meu colega – **Joana Luís**

Nós, com este trabalho, ficamos a entender um pouco de música e melhoramos os conhecimentos sobre sucessões – **Inês Cândido**

Muito Interessante, simples e principalmente criativo – **Rafael Gonçalves**, **João Madureira**, **Ana Silva**, **Lucileida Fonseca** e **Pedro Carvalho**

A professora: Helena Paula Castro

Sucessões e Música

A matemática está inevitavelmente presente no mundo que nos rodeia. Aliás, a matemática, como ciência dos números, surge desde a mais simples planta até à mais complexa obra de engenharia acompanhando-nos por onde quer que passemos. A matemática influencia a nossa maneira de pensar e de ver o mundo.

As artes também são dominadas por esta ciência: os números podem originar combinações artísticas incríveis. Quem diria que um pensamento matemático consegue criar algo de genial, criativo e carregado de emoção? É surpreendente a maneira como a conjugação de números, fórmulas e sequências consegue pintar um quadro magnífico ou compor uma bela melodia. Sucessão de sons organizados segundo uma métrica precisa, a música, contendo, embora, uma dimensão artística, assenta, consciente ou inconscientemente, num conjunto de vibrações baseadas em cálculos geométricos e proporções precisas.

O presente trabalho pretende mostrar, precisamente, como as sucessões matemáticas podem moldar e construir músicas.

Tomemos como base a sucessão mais simples: $u_n = n$ e a cada termo da sucessão fazemos corresponder uma nota musical:

$u_1 = 1$ (Dó) $\quad$ $u_5 = 5$ (Sol)
$u_2 = 2$ (Ré) $\quad$ $u_6 = 6$ (Lá)
$u_3 = 3$ (Mi) $\quad$ $u_7 = 7$ (Si)
$u_4 = 4$ (Fá) $\quad$ $u_8 = 8$ (Dó agudo)

Sendo assim, coloquemos a sucessão numa pauta (*ver* fig. 1). Constatamos que obtivemos a escala de Dó maior. O mesmo poderia ser feito para todas as outras tonalidades (por exemplo, Ré maior ou Lá menor) e o resultado seria o mesmo: a escala dessa mesma tonalidade.

E se usássemos a sucessão definida por $u_n = 9 - n$, o que iria acontecer?

$u_1 = 9 - 1 = 8$ (Dó agudo) $\quad$ $u_5 = 9-5 = 4$ (Fá)
$u_2 = 9-2 = 7$ (Si) $\quad$ $u_6 = 9-6 = 3$ (Mi)
$u_3 = 9-3 = 6$ (Lá) $\quad$ $u_7 = 9-7 = 2$ (Ré)
$u_4 = 9-4 = 5$ (Sol) $\quad$ $u_8 = 9-8 = 1$ (Dó)

Obtivemos a mesma escala mas no sentido descendente (*ver* fig. 2).

Através das sucessões podemos ainda construir os acordes desta tonalidade usando a sucessão $u_n = u_{n-1} + 2$ em que a primeira nota do acorde obedece à seguinte ordem: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si e Dó (ver figs. 3, 4 e 5). No final desta sucessão voltamos ao primeiro acorde, mas numa oitava acima.

Podemos ainda juntar estas duas sucessões (a da escala ascendente e a dos acordes) em duas pautas, em que o baixo faz a escala e o agudo faz os acordes (ver fig. 6).

Continuando ainda nas notas musicais, podemos formar uma sucessão sonora utilizando a famosa sucessão de Fibonacci. Iremos ter a situação descrita na Figura 7. E, em Mi maior, na figura 8.

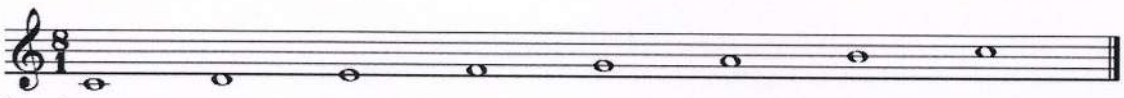


Figura 1

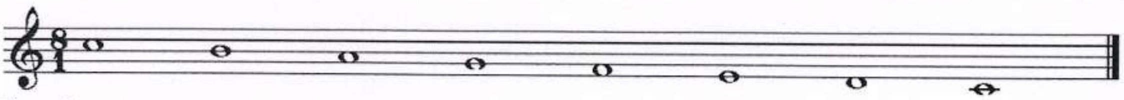
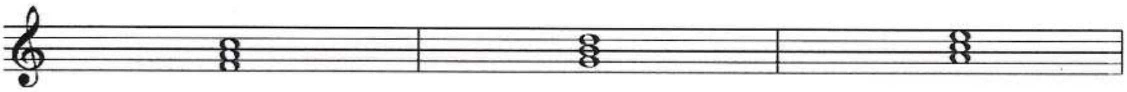


Figura 2

$u_1 = 1$ (Dó)	$u_1 = 2$ (Ré)	$u_1 = 3$ (Mi)
$u_2 = 1 + 2 = 3$ (Mi)	$u_2 = 2 + 2 = 4$ (Fá)	$u_2 = 3 + 2 = 5$ (Sol)
$u_3 = 3 + 2 = 5$ (Sol)	$u_3 = 4 + 2 = 6$ (Lá)	$u_3 = 5 + 2 = 7$ (Si)

Figura 3



$u_1 = 4$ (Fá)
$u_2 = 4 + 2 = 6$ (Lá)
$u_3 = 6 + 2 = 8$ (Dó)

$u_1 = 5$ (Sol)
$u_2 = 5 + 2 = 7$ (Si)
$u_3 = 7 + 2 = 9$ (Ré)

$u_1 = 6$ (Lá)
$u_2 = 6 + 2 = 8$ (Dó)
$u_3 = 8 + 2 = 10$ (Mi)

Figura 4

$u_1 = 7$ (Si)
$u_2 = 7 + 2 = 9$ (Ré)
$u_3 = 9 + 2 = 11$ (Fá)

$u_1 = 8$ (Dó)
$u_2 = 8 + 2 = 10$ (Mi)
$u_3 = 10 + 2 = 12$ (Sol)

Figura 5

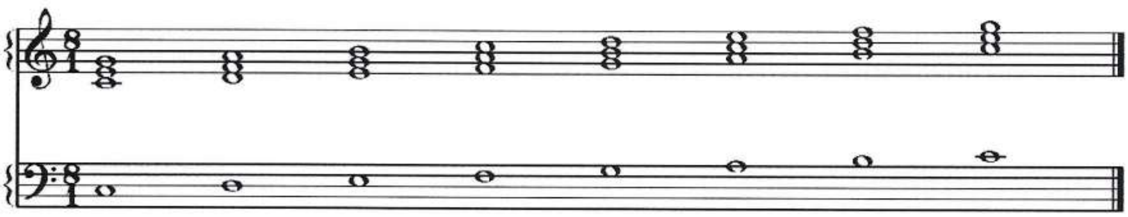
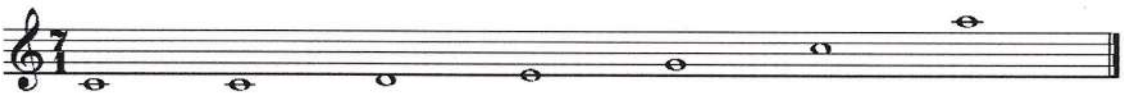
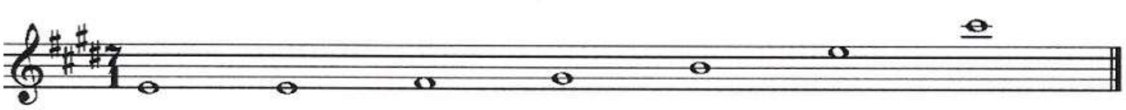


Figura 6



$u_1 = 1$ (Dó)
$u_2 = 1$ (Dó)
$u_3 = 2$ (Ré)
$u_4 = 3$ (Mi)
$u_5 = 5$ (Sol)
$u_6 = 8$ (Dó)
$u_7 = 13$ (Lá)

Figura 7



$u_1 = 1$ (Mi)
$u_2 = 1$ (Mi)
$u_3 = 2$ (Fá#)
$u_4 = 3$ (Sol#)
$u_5 = 5$ (Si)
$u_6 = 8$ (Mi)
$u_7 = 13$ (Dó#)

Figura 8

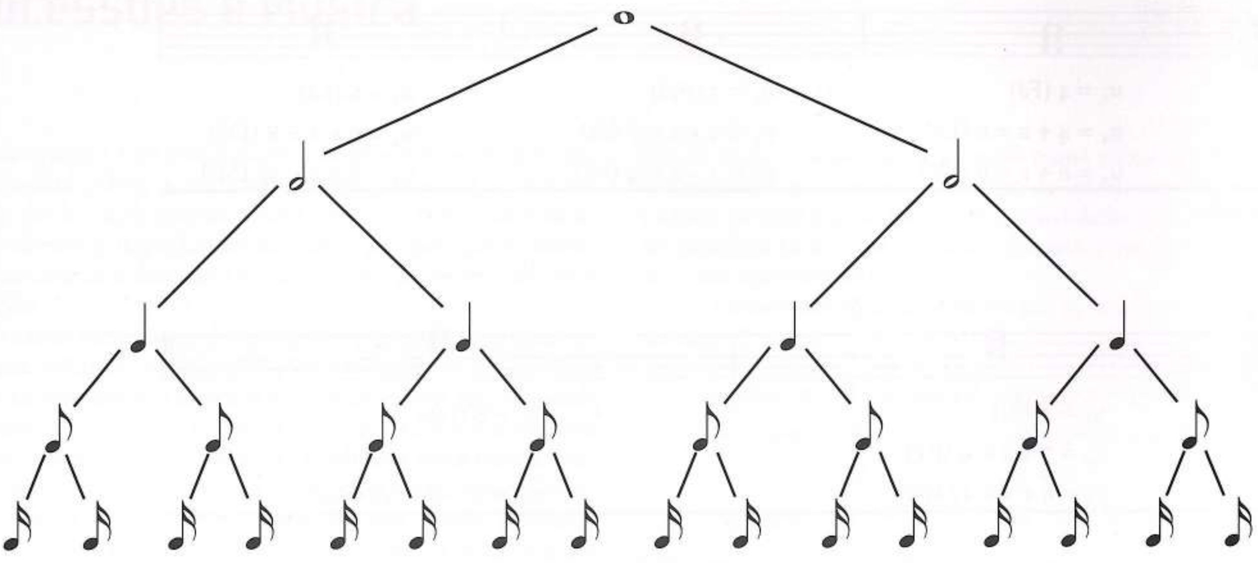
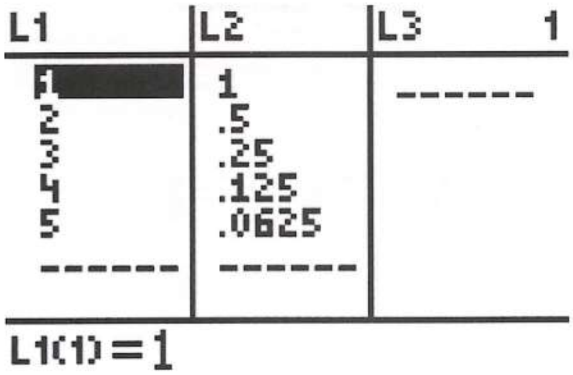


Figura 9

No que toca à parte rítmica, a sucessão vai ser diferente das que foram usadas até agora. Observemos a Figura 9. Uma *semibreve* (𝅝) tem a duração de 4 tempos; assim a *mínima* (𝅗𝅥) vale 2 tempos — o que corresponde a 1/2 da semibreve; segue-se então a *semínima* (♩) que vale 1 tempo — o que corresponde a 1/4 da semibreve; a seguir surge a *colcheia* (♪) que é metade de uma semínima — o que corresponde a 1/8 da semibreve; depois, a *semicolcheia* (𝅘𝅥𝅯) que é metade da colcheia — o que corresponde a 1/16 da semibreve. Sendo assim, temos a seguinte sucessão:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1/2,\ u_3 = 1/4,\ u_4 = 1/8,\ u_5 = 1/16.$$

Facilmente verificamos que a duração das notas diminui muito depressa. Portanto vamos ter que determinar o termo geral



desta progressão geométrica. Para tal, utilizaremos a calculadora gráfica.

1. Inserir os dados nas listas da calculadora.
2. Pressionar a tecla STAT, escolher o menu CALC e a opção 0: ExpReg. Depois, escrever L_1, L_2, Y_1 e fazer ENTER.

Para concluir, o termo geral que dá origem à sucessão das durações rítmicas é $u_n = 2 \times (0.5)^n$.

Ainda subsistem dúvidas de que a matemática é a base de toda a vida na terra? Tudo tem, ou teve, origem na matemática, e é isto que a torna tão perfeita, ao mesmo tempo que a torna uma linguagem precisa e inequívoca. (Teríamos que chegar a qualquer coisa como a música é, também ela, uma linguagem universal, subjectiva e plurívoca. Mas, sujeita às leis da matemática, a ciência que dá origem a todas as sucessões de sons possíveis.)

Concluímos que a música está também sujeita às leis da matemática. É esta que dá origem a todas as sucessões de sons possíveis.

José Pedro Fernandes

O papel do professor na aula de Matemática

Ensinar matemática é um desafio complexo pelo que o professor precisa de ter conhecimento da matemática que ensina, do programa, do processo de ensino-aprendizagem, da organização da atividade na sala de aula e dos seus alunos. É este conhecimento profissional que leva o professor a fazer uma escolha criteriosa dos recursos didáticos e a fazer uma boa gestão do trabalho em sala de aula. Recai sobre si a responsabilidade de gerir e implementar um currículo, do qual depende a qualidade das aprendizagens dos seus alunos (Moyer, Cai, Laughlin & Wang, 2009).

Neste artigo procuramos evidenciar o papel do professor nos diferentes momentos da realização de uma tarefa: (i) introdução da tarefa; (ii) trabalho autónomo dos alunos; (iii) discussão da tarefa e (iv) síntese final. Para isso recorreu-se a um episódio de sala de aula[1], de uma turma do 3.º ano de escolaridade.

A tarefa proposta aos alunos tinha como objetivos a investigação de regularidades numéricas e o desenvolvimento da capacidade de generalização, e seguiu uma abordagem de ensino-aprendizagem de cunho exploratório. Como salienta Ponte (2005), não basta selecionar boas tarefas, é preciso ter atenção ao modo de as propor e à sua condução em sala de aula, pois o que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam.

Introdução da tarefa

O professor iniciou a aula apresentando a tarefa aos alunos como sendo uma exploração matemática que iria ser realizada até ao intervalo da manhã. Enquanto distribuiu a ficha de trabalho (ver figura1), informou que o trabalho tinha uma componente inicial individual e outra em grande grupo, que envolvia a discussão e correção da tarefa com o contributo de todos. Posteriormente distribuiu aos alunos uma folha de papel quadriculado para uso facultativo, solicitando-os a registarem «muito bem» o modo como pensavam, a fim de evitar os frequentes esquecimentos aquando da discussão da tarefa.

Pudemos constatar que o professor forneceu indicações sobre o trabalho que pretendia que os alunos desenvolvessem, que passaram pela natureza da tarefa, o tempo disponível para a sua realização, os momentos da aula e distribuiu o material necessário. Relembrou a importância de fazerem registos detalhados, procurando evitar o problema detetado em aulas anteriores.

Trabalho autónomo dos alunos

Neste momento da aula o professor informou os alunos que dispunham de 30 minutos para trabalharem individualmente. Durante este período o professor circulou pela sala, observou os

Observa sequência de blocos

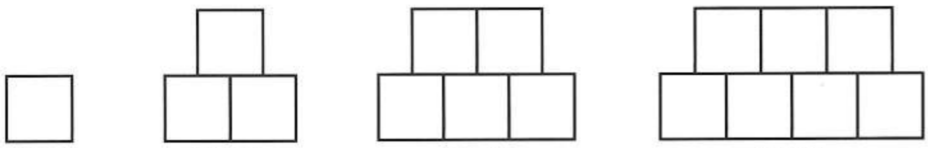


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Continua a sequência e desenha as figuras 5 and 6
b) Quantos blocos foram utilizados na construção de cada uma das figuras? Escreve a tua resposta na tabela seguinte.

Número da figura	Número de blocos
1	
2	
3	
4	

c) Sem usar desenhos és capaz de descobrir quantos blocos tem a figura 20 da sequência? Explica como pensaste.

Figura 1.–Ficha de trabalho

registos dos alunos e identificou diferentes raciocínios. Também ajudou a resolver dúvidas sem validar de imediato as respostas dos alunos. Constatou que, na sua maioria, os alunos responderam corretamente às três questões e verificou heterogeneidade no que respeita ao conhecimento matemático e à capacidade de comunicação dos alunos. Observou que as respostas à questão c, onde era solicitado o número de blocos da figura 20 da sequência sem recurso a desenhos, foram diversificadas e, embora corretas, mostraram um desempenho qualitativamente diferente dos alunos. As estratégias de generalização desenvolvidas pela maioria dos alunos foram baseadas no padrão pictórico das figuras da sequência, envolvendo apenas o número de blocos de cada figura. O professor verificou também que pedir aos alunos para continuarem a sequência pictórica de crescimento, desenhando as figuras, não foi suficiente para que todos reconhecessem uma ou mais regularidades e as utilizassem para desenvolver uma generalização.

Neste momento da aula, contrariamente ao que se possa pensar, o professor envolveu-se num trabalho ativo e exigente ao procurar conhecer os raciocínios dos alunos. A profundidade da discussão da tarefa dependeu, em grande parte, da informação que o professor recolheu aquando do trabalho autónomo dos alunos.

Discussão da tarefa

Com base na informação que recolheu anteriormente o professor pediu a um aluno para ir ao quadro explicar como tinha resolvido a questão b, pois sabia que este aluno tinha usado a estratégia mais frequente na turma. Esta consistiu numa relação de recorrência, em que o número de blocos de qualquer figura é obtido acrescentando mais dois blocos à figura anterior. A análise desta estratégia, com toda a turma, fez com que alguns alunos concluíssem que o preenchimento da tabela podia ter sido feito através de uma regularidade numérica entre o número de blocos sem ser necessário o desenho de figuras.

Para o final da discussão da questão c, o professor pediu ao aluno que tinha a estratégia mais elaborada para explicar como tinha pensado.

Pedro: Eu fiz duas maneiras de fazer isso. Fiz 8 vezes 2 igual a 16. Menos 1 é igual a 15. O menos 1 é porque aqui vai assim (refere-se às duas metades de quadrado em falta no patamar superior da figura pois desenha a figura 2 e indica-os).

Professor: Isso quer dizer que se tivesses 2 vezes 8 ou é 8 vezes o 2?

Pedro: (Desenha a figura 8 a partir da figura 2.) Oito, depois aqui. Aqui tinha 7.

Professor: Que são então 8 menos 1?

Pedro: 8 vezes 2. Menos 1 porque falta aqui e duas metades, faz 1.

Pedro: Depois a outra maneira para mais (meninos) pequenos é 8+7 que é igual a 15. Depois a figura 20.

Professor: É outro exemplo que queres mostrar.

Pedro: Na figura 20 é a da (questão) c. Fiz 20 vezes 2 menos 1 que é igual a 39. E é este o resultado da (questão) c, que eu acho.

Professor: Explica-me uma coisa. Aí a figura 8. O que é que tu queres dizer? É o dobro de 8 ou é 8 vezes 2?

Pedro: É o dobro de 8. Está trocado.

(...)

Professor: Vamos voltar aí ao 2 vezes 8 o que disseste a seguir foi menos 1, então vamos escrever isso de uma forma acertada.

Pedro: (Seguindo a informação do professor.) É mais prático.

Neste momento da aula o professor revelou grande cuidado na condução da discussão, provavelmente fruto da sua experiência profissional. Nem todos os alunos partilharam as suas estratégias porque o professor escolheu cuidadosamente só aquelas que eram diferentes entre si e organizou a sua apresentação começando pelas mais elementares (que envolviam só o número de blocos) e só depois as mais elaboradas (que estabeleciam uma relação entre o número da figura e o número de blocos). Questionou os alunos pedindo-lhes que comunicassem o modo como tinham pensado, interpelando-os quando necessário, de modo a tornarem as suas ideias percetíveis para a turma. A intenção do professor não foi forçar os alunos a desenvolverem estratégias mais sofisticadas mas sim questioná-los ajudando-os a desenvolver gradualmente estratégias mais eficientes. Este trabalho também permitiu ao professor identificar dificuldades dos alunos ainda não detetadas na fase do trabalho autónomo como, por exemplo, a situação que envolve a tradução da linguagem natural para linguagem numérica.

A criação de um ambiente de sala de aula que permitiu aos alunos envolverem-se na apresentação e defesa de ideias e comentarem as intervenções dos colegas é fundamental, como refere Boavida (2005), para se chegar a consensos sobre o significado de ideias matemáticas importantes. De facto, comunicar para aprender Matemática e aprender a comunicar matematicamente dependem das oportunidades, do encorajamento e do apoio que são dados aos alunos para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de Matemática (NCTM, 2007).

Síntese

Com base no trabalho desenvolvido em sala de aula, o professor fez uma síntese e, com a concordância dos alunos, conferiu maior eficiência a algumas das suas estratégias. A síntese foi feita oralmente e através de um texto coletivo onde os alunos registaram, entre outros aspetos, que "usar desenhos pode ajudar

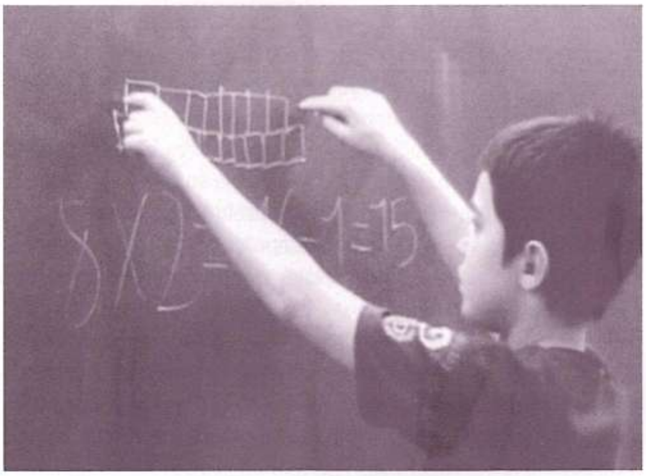


Figura 2.–Pedro explica porque subtrai uma unidade

a pensar mas que só é útil se quiserem conhecer uma figura próxima" e escreveram a lei de formação da sequência, utilizando a linguagem natural.

É de notar que a síntese da aula foi o momento importante para o professor articular as várias estratégias usadas pelos alunos e fazer emergir as ideias matemáticas principais da tarefa.

O papel do professor na condução da atividade dos alunos em sala de aula, quando trabalham com tarefas desta natureza, é determinante para o sucesso da aprendizagem a matemática dos alunos. De facto, é importante dar indicações aos alunos, durante a introdução da tarefa, sobre o modo como a aula irá decorrer (por exemplo, tempo disponível para a fase de trabalho autónomo) porque isso traduz-se na necessária tranquilidade para começarem a trabalhar com confiança e evita o questionamento em coro: "o que é que é para fazer?". É fundamental conhecer o modo como os alunos resolvem uma tarefa e como utilizar esse conhecimento para equacionar uma discussão mais rica em sala de aula. Finalmente, fazer uma síntese do trabalho realizado na aula, onde as ideias principais são focadas, não pode nem deve ser esquecido pelo professor. É neste momento que, muitas vezes, os alunos tomam consciência daquilo que a aula trouxe de novo para o seu conhecimento matemático.

Notas

1 Silvestre, A. I., Faria, A., Sousa, H., Cristo, I., Santos, I., Molarinho, M. & Veladas, M. (2010). Sequências pictóricas: Estratégias de generalização dos alunos do 2.º, 3.º e 5.º anos. In GTI (Org.) O professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico (pp. 91–122). Lisboa: APM

Referências

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. Em J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.) Atas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 13–43). Setúbal: IPS.

NCTM (2007). Princípios e normas para a Matemática escolar. (texto original publicado em inglês, em 2008). Lisboa: APM.

Moyer, J., Cai, J., Laughlin, C., & Wang, N. (2009). The effect of curriculum type on middle grades instruction. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S .Lemons-Smith (Eds.), Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 5, pp. 201–209). Atlanta, GA: Georgia State University

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ana Isabel Silvestre
Escola EB 2/3 Gaspar Correia, Portela
Grupo de Trabalho de Investigação da APM

Célia Mercê
Escola EB 2/3 Marinhais
Grupo de Trabalho de Investigação da APM

Cristina Loureiro

Estruturação espacial (3)

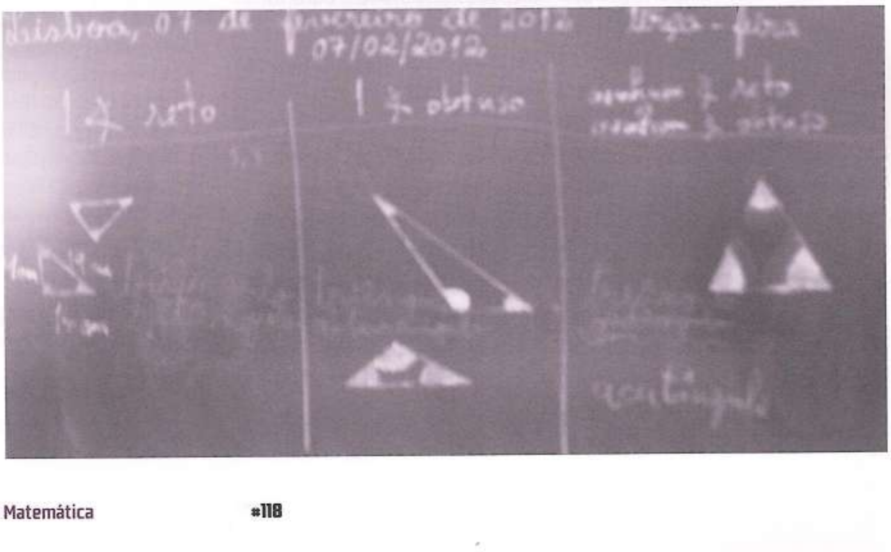
Esta seção é alimentada por um trabalho de investigação que tenho vindo a realizar há bastante tempo em várias turmas do 1º ciclo. Este trabalho centra-se na experiência de realização de atividades de geometria e medida em várias turmas, com a minha presença na sala de aula. As atividades são implementadas a partir de sequências de tarefas que, depois de experimentadas, passam a constituir o que designo por percursos didáticos. Estes percursos fundamentam-se em níveis de estruturação do raciocínio geométrico (Battista, 2008) e estas experiências têm-me permitido compreender melhor a caraterização desses níveis e as suas implicações na aprendizagem da Geometria e Medida geométrica em todo o ensino básico.

Um dos percursos (Loureiro, 2012) foca-se principalmente na estruturação espacial dos polígonos, trabalhando-os como uma combinação de ângulos e procurando estabelecer relações entre esta componente e o composto, o polígono (Quadro 1). Neste percurso começa-se por trabalhar com quadrados e outros retângulos (tarefas 1 e 2), passando por outros quadriláteros (tarefas 3 e 4) e outros polígonos (tarefa 5), para terminar com triângulos (tarefa 6). Em todas as tarefas os ângulos foram o elemento fundamental em estudo.

As tarefas desta sequência incidem articuladamente sobre a estruturação espacial e a geométrica. A primeira parte do percurso orienta-se para a estruturação espacial, procurando libertar os alunos do suporte do geoplano e do papel ponteado correspondente, para a utilização de papel branco que ocorre nas tarefas 5 e 6. A identificação de ângulos, com recurso à utilização do detetor de ângulos retos, ajuda a destacá-los como elementos de um polígono. Neste percurso, os lados, como elementos constituintes de um polígono, foram pouco significativos pois apenas tiveram alguma atenção na discussão coletiva após as duas tarefas de construção dos retângulos, quadrados ou não (tarefas 1 e 2), e nas tarefas 3 e 5, apenas como contagem. A identificação das figuras, independentemente da sua posição no plano, e o reconhecimento visual dos ângulos como parte das figuras são exemplos de estruturação espacial dos quadriláteros, dos triângulos e dos outros polígonos. Como afirma Battista (2008), a configuração visual é uma forma de estruturar espacialmente.

A estruturação geométrica começa por ocorrer na discussão coletiva no fim da tarefa 2, com a introdução de figuras que são contraexemplos e com a inclusão do quadrado como retângulo especial. A tarefa 3 e a tarefa 6 inscrevem-se também neste âmbito pelas discussões coletivas que proporcionaram e em que foram estabelecidas relações geométricas.

Propositadamente os lados, outro elemento fundamental de um polígono, estiveram quase totalmente ausentes. Esta experiência permite-me concluir que foi uma boa opção focar toda a atenção no elemento ângulo e nas relações que podem ser estabelecidas, algumas delas já referidas em outras notas anteriores.



Considero este percurso muito consistente porque, em todas as experiências realizadas, (1) as tarefas foram sempre o ponto de partida e provocaram um envolvimento generalizado dos alunos das turmas em que foram experimentadas, (2) os trabalhos realizados pelos alunos proporcionaram discussões coletivas muito ricas, (3) as atividades deram sentido ao conhecimento sobre ângulos como elemento fundamental da estrutura de um polígono e (4) deram sentido ao estabelecimento de relações geométricas interessantes bem como à necessidade de compreender e justificar essas relações. No que respeita à ligação entre as tarefas, considero que a ordem está bem delineada pois permitiu aos alunos avançar, partindo sempre do conhecimento adquirido na atividade anterior e introduzindo também novos obstáculos promotores de aprendizagem. Além disso, este percurso deixa entradas em aberto para outros percursos de estruturação espacial e de estruturação geométrica.

Este trabalho de investigação tem permitido dar especial atenção à decisão sobre se as tarefas se orientam para a estruturação espacial, para a estruturação geométrica ou, ainda, se combinam e como combinam estas duas orientações. Um outro aspeto tem sido a obtenção de tarefas, desafiantes e capazes de criar obstáculos promotores de aprendizagem, focadas principalmente na estruturação espacial. Sabendo que é muito fácil e tentador cair numa exigência de estruturação geométrica sem que os alunos tenham ainda desenvolvido uma adequada estruturação espacial, penso que vale a pena discutir o desenvolvimento do raciocínio geométrico nesta perspetiva.

Propositadamente deixo com esta nota vários pontos em aberto para discutir em notas subsequentes, nomeadamente os trabalhos realizados pelos alunos e o conhecimento que foi construído, bem como o papel da intervenção do professor na realização destas atividades.

Quadro 1

	Descrição sumária da tarefa	**Barreiras críticas**
1	Construir quadrados num geoplano de 5 por 5.	Reconhecimento de quadrados em posições não «direitas». Necessidade de recorrer a ângulos retos e de introduzir um instrumento de medida, o «detetor de ângulos retos».
2	Construir retângulos num geoplano de 5 por 5.	Utilização do «detetor de ângulos retos». Reconhecimento de retângulos em posições não «direitas». Inclusão do quadrado como retângulo especial. Introdução de figuras que são contraexemplos.
3	Construir quadriláteros com pelo menos um ângulo reto num geoplano de 5 por 5.	Construção de figuras que respeitam simultaneamente duas condições.
4	Identificar em quadriláteros construídos, ângulos agudos e obtusos.	Reconhecimento e comparação de ângulos. Aparecimento de um ângulo que gera quadriláteros não convexos, o ângulo maior que um raso.
5	Descobrir ângulos retos, agudos, obtusos e superobtusos em polígonos dados em papel branco.	Ausência da estrutura quadriculada do geoplano. O ângulo como elemento fundamental de um polígono. Relações que envolvem ângulos e lados .
6	Construir, em papel branco, triângulos com: (1) um ângulo reto, (2) um ângulo obtuso, (3) nenhum ângulo reto e nenhum ângulo obtuso.	Estruturação espacial em papel branco. Impossibilidades de construção. Triângulos: retângulos, obtusângulos e acutângulos. Relações que envolvem ângulos num triângulo.

Referências Bibliográficas

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry world. In Glendon W. Blume & M. Kathleen Heid (Eds.), Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 - Cases and Perspetives, (pp. 131-156). NCTM & IAP.

Loureiro, C. (2012). Um percurso didático de estruturação especial e geométrica. In Atas do EIEM 12

Desenvolvimento da linguagem algébrica

Manuel de Sousa Pereira

A Álgebra sempre foi considerada um importante tema nos programas de Matemática. No programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) a Álgebra foi introduzida como tema programático nos 2.º e 3.º ciclos e no 1.º ciclo já tem lugar uma iniciação ao pensamento algébrico. O conceito de pensamento algébrico foi progressivamente ganhando espaço desde o início da década de 80, do séc. XX, e vai muito além da capacidade de manipulação de símbolos (NCTM, 2007; ME, 2007; Ponte, Branco & Matos, 2009a), contrariamente ao que durante muito tempo vigorou, gerando as maiores dificuldades aos alunos, um ensino muito centralizado na manipulação simbólica.

Segundo o NCTM (2007), «os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideias e tirar ilações face a certas situações» (p. 39). Além disso, o pensamento algébrico diz respeito à simbolização, ao estudo de relações entre objetos matemáticos, generalização, ao estudo da variação e à modelação (NCTM, 2007; ME, 2007).

O processo de ensino-aprendizagem da Álgebra deve envolver, a par e de modo harmonioso, a linguagem simbólica e a sua compreensão. Assim, perseguindo um ensino-aprendizagem exploratório (Ponte, 2005), o professor deve propor tarefas adequadas a esse efeito, como explorações e investigações, para além dos exercícios e problemas de rotina. Deste modo, permitem-se verdadeiras oportunidades aos alunos de construção de conceitos, de desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemáticos e uma progressão nos modos de representação, o que deve ser feito, tanto quanto possível, com o contributo dos alunos.

Em qualquer tema as tarefas assumem um papel fundamental, mas também é muito importante o trabalho das aulas. Ora, numa aula de cunho exploratório e investigativo os alunos têm de formular estratégias próprias, ao mesmo tempo que mobilizam conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas. Assim, a aula dessa natureza estrutura-se usualmente em três fases (Ponte, Matos & Branco, 2009b): (1) apresentação e interpretação da tarefa (em coletivo); (2) desenvolvimento do trabalho autónomo dos alunos (em grupos, pares ou individual); e (3) discussão e síntese final (em coletivo).

As tarefas de natureza exploratória e investigativa (Ponte, 2005) constituem uma mais valia nas aulas de Álgebra por proporcionarem, com um verdadeiro contributo dos alunos, a construção de novos conceitos e o desenvolvimento de outros, bem como os modos de representação, passando progressivamente das representações informais, da linguagem natural ou notações criadas pelos próprios alunos para modos cada vez mais formais de uma forma natural (Ponte et al., 2009a).

Neste tipo de tarefas surgem normalmente da parte dos alunos diversas estratégias que numa exploração inicial se resumem a tentativas que evoluem geralmente para a descoberta de relações e o estabelecimento de generalizações. Ora, na fase de discussão, surgem da parte dos alunos, diversas abordagens à mesma situação proposta, revelando-se uma excelente ocasião para explorar conexões, negociar/desenvolver significados, evoluir em termos de representações, enfim, uma oportunidade por excelência para a construção/desenvolvimento do conhecimento matemático na sala de aula.

Além da tarefa e da estruturação da aula, são extremamente importantes o discurso e os papéis do professor e dos alunos. No que respeita ao discurso, refere-se ao contributo dos alunos e do professor na fase de discussão. Ora, o discurso da sala de aula não deverá ter maior predomínio da parte do professor, mas da parte dos alunos tanto quanto possível, de modo que a sua contribuição seja fortemente valorizada (Ponte et al., 2009b). Em relação aos papéis, ao aluno cabe o papel de trabalhar nas tarefas que lhe são propostas e ao professor o de propor tarefas aos alunos, estabelecer os modos de trabalho e dirigir o discurso na sala de aula. O papel de autoridade matemática, poderá ser exercido, para além do professor e do manual, também pelos alunos na medida em que a sua argumentação e raciocínios podem ser considerados uma fonte válida de conhecimento.

A seguir descrevem-se alguns episódios de uma aula para ilustrar estas ideias, onde o autor desempenhou o papel de observador participante, no âmbito de uma investigação com uma turma do 7.º ano de escolaridade. Considerou-se, como exemplo, a seguinte tarefa abaixo, de natureza exploratória, enquadrada nos objetivos de aprendizagem do programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007).[1]

Esta tarefa está estruturada em questões fechadas e abertas (quando é pedido para justificar ou para generalizar). Nesta como noutras sequências figurativas ou visuais, a professora procurou explorar a sua regra ou lei de formação que consiste em estabelecer uma relação entre a ordem das figuras e o número de elementos que as compõem. Ora, os alunos usam normalmente uma variedade de estratégias para a construção dessa relação em que assenta o padrão. Rivera e Becker (2008) estabeleceram três tipos de estratégias empregues usualmente pelos alunos: (1) *numérica*, que utiliza apenas estímulos estabelecidos a partir do padrão listando uma sequência de números ou usando uma tabela para derivar a regra a partir daí, procurando relações aritméticas entre os valores das variáveis (a ordem e o termo); (2) *figurativa*, que se aplica apenas quando se descreve a generalização do padrão utilizando diagramas, sendo a regra totalmente obtida a partir de indícios visuais estabelecidos diretamente a partir da estrutura dos dados, podendo-se recorrer à

Tarefa

1. A Joana utilizou palitos para construir uma sequência de figura as quatro primeiras figuras.[2]

(a) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Completa-a.

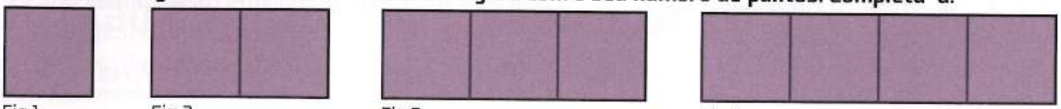


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	50
Número de palitos	4						...	

(b) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

(c) Existe, nesta sequência, alguma figura com 601 palitos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

(d) Escreve uma regra que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

(e) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

decomposição das figuras — termos; e (3) uma combinação de ambas as abordagens anteriores (*numérica* e *figurativa*).

Os alunos no seu trabalho autónomo trabalharam em grupos de três. Chegada a fase de discussão, verificou-se que na primeira questão os alunos identificaram uma relação de crescimento de figura para figura começando por verificar que podem obter a figura seguinte acrescentando três palitos à figura anterior. Este processo revela-se adequado em figuras próximas, mas para figuras relativamente distantes como a 50, o processo de se ir acrescentando sucessivamente três palitos à figura anterior não é nada prático. Os alunos verificaram recorrendo a uma estratégia figurativa que o número de palitos dispostos na horizontal corresponde ao dobro da ordem da figura e o número de palitos dispostos na vertical corresponde à soma da ordem da figura com 1. Deste modo, não precisam de desenhar mais figuras da sequência até à figura solicitada para saber o número total de palitos qua a constitui. Assim, conseguem determinar o número de palitos de qualquer figura da sequência sabendo apenas a sua ordem. Algumas respostas evidenciam esta generalização, como o grupo da Ana, Rui e Rute, na alínea d) (*ver* figura 1).

Alguns dos grupos como este, fazem referências às figuras, explicando a generalização encontrada recorrendo à linguagem natural agrupando conjuntos de palitos. Porém, outros grupos verificaram recorrendo a uma estratégia numérica que à sequência se podia associar os múltiplos de 3, com a adição de uma unidade a cada múltiplo, como ajuste de resultado. Diversas respostas refletem esta generalização, como o grupo da Inês, Isa e Luís, na alínea a), na figura distante de ordem 50 (*ver* figura 2).

Por um raciocínio análogo, na alínea b), o grupo da Ana, Rui e Rute recorreu à mesma generalização (*ver* figura 3).

Faz-se o dobro do número da figura para determinar os palitos na horizontal e o número da figura+1 dá-nos o número de palitos na vertical.

Figura 1

somamos três vezes o 50 e juntamos mais 1 porque são os M 3.

Figura 2

100 + 100 + 101 = 301

Figura 3

3 × n + 1

Figura 4

Até aqui verificou-se que os alunos generalizaram recorrendo a modos de representação em linguagem natural e numérica seguindo estratégias ora figurativas ora numéricas. A partir daqui, para a resposta da alínea e), a professora sugere que se use a letra n para representar a ordem de uma figura qualquer da sequência, tal como na tarefa da aula anterior tinha sido acordado. Assim, a professora procura, com o contributo do grupo-turma, obter uma expressão algébrica que represente o número de palitos de uma figura de qualquer ordem. Na tarefa da aula anterior já tinham generalizado e construído a respetiva expressão algébrica e por isso já estavam um pouco mais à vontade por não ser a primeira vez.

A professora questiona os alunos sobre como se pode construir uma expressão algébrica que se procura. Sugere-se a análise das respostas dadas às questões das alíneas anteriores na tentativa de serem associadas a uma expressão algébrica. Surgiu a resposta do grupo da Inês, Isa e Luís que se apresenta a seguir em conformidade com o seu raciocínio já evidenciado na alínea a) para a figura 50 (*ver* figura 4).

No caso da resposta do grupo da Ana, Rui e Rute à alínea d) e sendo n o número da figura, surgiu, com a contribuição dos alunos, a expressão $2 \times n + n + 1$. Ora, uma excelente ocasião para se estudar/verificar a equivalência entre estas duas expressões algébricas.

Os alunos chegaram desta forma a uma expressão algébrica que representa o número de palitos que constitui qualquer figura da sequência. Inicialmente, recorrem usualmente nos seus modos de representação da generalização à linguagem natural e numérica, mas de um modo natural, surge uma letra para representar a ordem da figura, como poderia ter surgido outro símbolo qualquer indicado pelos alunos de modo consensual para representar números.

Em jeito de conclusão, refere-se que na fase de discussão e síntese (em coletivo) dos resultados obtidos durante o seu trabalho autónomo (em grupo), proporcionou-se um verdadeiro contributo dos alunos, apresentando-se e discutindo-se as respostas matematicamente significativas e evitando-se naturalmente as ideias repetidas. Verificou-se que os alunos passaram da linguagem corrente e numérica para a linguagem algébrica de um modo natural, embora com alguma dificuldade inerente ao modo de representação, pois começam a interiorizar que uma letra pode representar vários números (ordens das figuras). Esta progressão nos modos de representação implica relacionar diferentes representações e converter a linguagem natural/numérica em linguagem algébrica revelando-se tarefas naturalmente difíceis, pois os alunos estão a iniciar a aprendizagem de diversos conceitos em simultâneo, nomeadamente o de variável e o de relação funcional (relação implícita entre o termo e a respetiva ordem).

Salienta-se que nas aulas de Álgebra como noutros temas, um ensino-aprendizagem exploratório aliado a tarefas adequadas (exploratórias/investigativas) constitui um terreno deveras favorável à construção/desenvolvimento do conhecimento matemático, na medida em que se podem obter discussões verdadeiramente profícuas, onde a contribuição dos alunos seja fortemente valorizada.

A tarefa e os modos de trabalho na sala de aula são extremamente importantes e constituem autênticos desafios para o(a)s professores(as), nomeadamente o de escolher/construir/adaptar tarefas que devem proporcionar aprendizagens matematicamente significativas e ir muito além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos, da previsão de extensões matemáticas interessantes a realizar pelos grupos mais rápidos, de controlar os comentários/questões que se oferecem aos alunos para não se indicar qualquer estratégia e de evitar ao máximo adiar para aula seguinte a discussão e/ou síntese dos conhecimentos produzidos pelos alunos.

Além disso, ainda, o professor deve evitar validar as respostas dos alunos durante o seu trabalho autónomo de modo a continuarem motivados para a discussão, acautelar que os alunos registem os conhecimentos coletivamente sistematizados durante a síntese da aula e que decorreram da discussão, promover um ambiente de sala de aula estimulante em que os alunos sejam encorajados a participar ativamente e evitar que a discussão e síntese se transforme simplesmente num desfile de resoluções distintas apresentadas por diferentes alunos, mas que vá muito além disso, com apresentações/discussões apenas matematicamente significativas.

Notas

[1] Para mais detalhes desta aula consultar Pereira (2011).
[2] Tarefa adaptada de Vale e Pimentel (2009).

Bibliografia

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (tradução portuguesa do original de 2000).

Pereira, M. S. (2011). *Contributo da resolução de problemas de padrão para a aprendizagem da Álgebra no 7.º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga. (Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt)

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J., Branco, N. & Matos, A. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J., Matos, A. & Branco, N. (2009b). *Sequências e Funções*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 65–82.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática – Propostas Curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Manuel de Sousa Pereira.

Agrupamento de Escolas de Celorico de Basto

A utilização do Geometer's Sketchpad na aula de matemática: O papel desempenhado pelas tarefas

António Domingos e Maria João Mendes Vieira

Neste artigo é feita referência a um conjunto de tarefas desenvolvidas para a utilização do software de Geometria Dinâmica Geometer's Sketchpad, no estudo das Pavimentações. As tarefas foram experimentadas numa turma de alunos do 10° ano que frequentam um curso de Design, procurando-se elucidar o leitor das potencialidades da utilização desta ferramenta computacional e das vantagens que esta metodologia, baseada em tarefas diversificadas, traz para a sala de aula.

As ferramentas, como os ambientes de geometria dinâmica, permitem a utilização de um conjunto de tarefas diversificadas que ajudam a explorar conceitos, a manipular diferentes representações matemáticas, favorecendo a experimentação e são uma mais-valia no que respeita à motivação dos alunos.

Os programas de Matemática do Ensino Secundário, de um modo geral e em particular os destinados aos Cursos Profissionais, apontam para a utilização de computadores e programas de geometria dinâmica de modo a concretizar as competências a adquirir.

Parece ser consensual que são várias as potencialidades da utilização de AGD em sala de aula, sempre associadas a atividades de investigação e tarefas de natureza exploratória por permitirem a realização de um grande número de tarefas num curto espaço de tempo (Veloso, 1998), favorecendo a experimentação e criando oportunidades adequadas para conjeturar, explicar e justificar resultados (Burrill 2008).

É fundamental o papel do professor quer na criação dos ambientes de aprendizagem ricos, quer na avaliação sistemática dos desempenhos dos alunos quando emersos nesses ambientes. Sendo os AGD um meio privilegiado para a realização de tarefas de investigação e exploração criam obrigatoriamente ambientes de aprendizagem em que a construção do conhecimento se faz de forma continuada e participada, de uma forma autónoma e que pode levar à utilização de argumentos mais ou menos formais como meio de convencimento.

As tarefas que se irão apresentar resultam de um estudo de investigação sobre o tema pavimentações, em particular nas pavimentações em que os ladrilhos são polígonos regulares e em que todos os pares de arestas adjacentes têm uma aresta de pavimentação comum.

Foi dada ênfase ao papel da demonstração de propriedades algébricas e geométricas das pavimentações, procurando compreender se os alunos sentem necessidade de elaborar conjeturas quando exploram resultados com características comuns (generalização) e se procuram validar as suas conjeturas passando para o processo de prova/demonstração.

As tarefas utilizadas no estudo foram elaboradas visando desenvolver uma metodologia de ensino que permitisse caracterizar a forma como os alunos mobilizam os seus conhecimentos prévios para a construção de novos conceitos apoiados por um AGD, caracterizar as suas aprendizagens e apoiar a elaboração de conjeturas que conduzam à necessidade de demonstração. Algumas são de caráter fechado condicionando os resultados a obter, funcionando como guião de trabalho e outras, mais abertas sem "instruções" pormenorizadas para a construção dos sketches e sem perguntas direcionadas para os objetivos da tarefa. O denominador comum a todas é o facto de não condicionarem a obter resultados diretamente relacionados com o estudo das isometrias nas pavimentações. Para além das tarefas de investigação foram elaboradas fichas informativas para introduzir os conceitos chave, essenciais para a compreensão das tarefas. Estas foram utilizadas como introdução a cada uma das tarefas de investigação ou exploração contendo, por exemplo, a noção de pavimentação e a nomenclatura associada ao estudo das pavimentações. Sempre que ia sendo necessário introduzir conceitos teóricos com vista a poderem ser realizadas as tarefas de investigação e exploração era fornecida uma ficha informativa a cada grupo de alunos acrescida de uma pequena explicação por parte da professora (quando solicitada) de modo a não existirem dúvidas relativamente aos conceitos envolvidos. Esta metodologia teve por objetivo evitar a aula expositiva, ganhar algum tempo e ainda promover a autonomia dos alunos. Por outro lado a decisão da aplicação destas fichas (informativas) também permitiu que os grupos não necessitassem de efetuar as tarefas em simultâneo. Foi possível que cada grupo gerisse o seu próprio tempo respeitando a planificação pré-estabelecida para a realização das tarefas.

Os alunos trabalharam em grupos (pares) de acordo com os seus ritmos, solicitavam a professora quando tinham dúvidas e muitas vezes pediam ajuda a colegas de outros grupos. Foram discutidos em grande grupo (turma) os processos utilizados na construção dos sketches. Cada grupo, no final da realização das tarefas apresentou os seus resultados à turma tendo sido feita nessa altura uma síntese dos mesmos. Esta síntese foi efetuada pela professora no quadro com o contributo dos alunos.

Esta conjugação de tarefas apoiadas pelo AGD e pela dinâmica que os diferentes grupos lhe imprimiram permitiu compreender a necessidade de os alunos precisarem de tempos próprios para a realização destas tarefas, que dependem em grande parte da capacidade de mobilizar os seus conhecimentos prévios. Os momentos de reflexão conjunta ajudaram a esbater algumas das assimetrias verificadas, permitindo que o professor tivesse em atenção que esses casos mereciam um acompanhamento mais próximo e sistemático.

A principal vantagem da utilização de AGD, neste caso o GSP é a realização de um elevado número de tarefas num espaço de tempo curto (Veloso, 1998). No caso específico das pavimentações, a utilização deste tipo de software, permite ainda a exploração de vários conceitos matemático/geométricos associados, como por exemplo as isometrias, mais concretamente rotações e translações e eventualmente reflexões utilizadas na elaboração dos sketches.

Partindo da aplicação das tarefas foi possível observar dois percursos distintos de aprendizagem. Em dois dos casos as aprendizagens foram mais significativas ao nível das propriedades geométricas relativas aos polígonos e às propriedades das pavimentações, nomeadamente aplicação de isometrias na construção das pavimentações, enquanto no outro caso foram relativas às capacidades de elaboração e validação de conjeturas, inserindo-se no âmbito do raciocínio e demonstração matemáticos.

Estas tarefas permitem dois tipos de abordagem: estudo de propriedades geométricas e estudo de propriedades algébricas relativas às pavimentações regulares e semi regulares, podendo o professor direcionar as questões consoante os objetivos e as competências a desenvolver e de acordo com o nível e ciclo de ensino a que se destinam. Podem ser adaptadas e ser aplicadas ao nível do 3º ciclo referente ao tópico das isometrias e ser utilizadas para desenvolver pequenos trabalhos de investigação pelas inúmeras potencialidades de exploração que oferecem. Ao nível do ensino secundário podem ser utilizadas para desenvolver competências no âmbito do raciocínio e demonstração matemáticos, nomeadamente no que se refere na exploração de resultados algébricos referentes às pavimentações, direcionando o estudo de acordo com os objetivos e competências do programa da disciplina em que se irá desenvolver (pode ser explorado por exemplo na Matemática B ou nos módulos para a Matemática dos Cursos Profissionais, como foi o caso do estudo referido).

TAREFAS

TAREFA 1.–PAVIMENTAÇÕES REGULARES: PAVIMENTAÇÕES COM TRIÂNGULOS

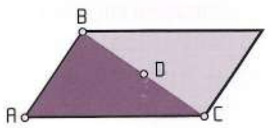
I. No canto inferior esquerdo do monitor, e usando as ferramentas adequadas, constrói um triângulo ABC. Assim que marcares os 3 vértices do triângulo, no menu Display selecciona a opção Show labels. Classifica o triângulo que obtiveste.

II. Seleciona os 3 vértices do triângulo e no menu Construct selecciona Triangle interior. Podes optar pela cor da tua preferência no menu Display.

III. Seleciona o segmento BC e no menu Construct seleciona Midpoint (Este deverá ficar marcado como ponto D).

IV. Seleciona o ponto D e no menu Transform seleciona mark as center.

V. Seleciona o triângulo interior e no menu Transform seleciona Rotate, com a opção 180° (efetua uma rotação de 180° do triângulo)

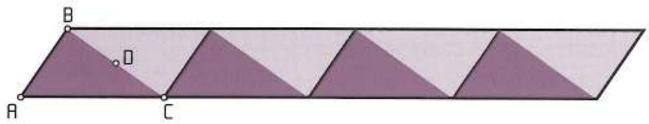


Arrasta os pontos e observa o polígono que se obtém com os dois triângulos. Classifica esse polígono.

VI. Marca o segmento AC como vetor: seleciona por esta ordem, o ponto A e depois o ponto C, depois no menu Transform seleciona Mark Vector. (Uma animação indica o vetor marcado.)

VII. Seleciona os dois triângulos interiores e no menu Transform seleciona Translate.

VIII. Repete esta operação tantas vezes quantas as necessárias de modo a pavimentar o ecrã de uma ponta a outra.
Arrasta de modo a confirmar que o topo e a base desta fila de triângulos são sempre retas.



IX. Do mesmo modo que procedeste acima, marca o vetor AB e no menu Transform seleciona Translate, para efetuares a translação de toda a linha por este vetor. Repete este procedimento (de translação) até o ecrã estar cheio.

X. Arrasta de modo a confirmar que consegues de qualquer forma obter uma pavimentação.

XI. Grava o ficheiro como pav_trig_nomes

1) Será que todo o triângulo pavimenta o plano?
2) Consegues explicar porquê?
3) Elabora uma conjectura e justifica-a.

TAREFA 2.–PAVIMENTAÇÕES REGULARES

Descobrir as pavimentações regulares/monoédricas possíveis.

I. Utilizando transformações geométricas e polígonos regulares, procede do mesmo modo que na tarefa 1 para explorar pavimentações com: Quadrados, Pentágonos regulares, Hexágonos, Heptágonos, Octógonos, ...

II. Grava cada ficheiro como pav_polígono_nomes

Descobrir as razões que fazem com que um polígono regular pavimente

1. Observa o vértice em cada uma das pavimentações obtidas.
- i) Quantos polígonos «partilham» cada vértice?
- ii) Comenta sobre a soma das amplitudes de todos os ângulos que partilham esse vértice.
- iii) Como é que o valor que obtiveste em ii) está relacionado com o facto de esse polígono pavimentar?

2.
- i) Qual é a amplitude do ângulo interno de um pentágono regular?
- ii) É possível que três pentágonos regulares, sem sobreposições partilhem um vértice?

3. Completa a tabela de modo a organizar a tua informação:

		No caso de pavimentar		
Polígono	Nº de lados do polígono	Nº de polígonos concorrentes num vértice	Amplitude do ângulo interno do polígono	Soma das amplitudes dos ângulos concorrentes num vértice
	3			
	4			
	5			
	6			
	7			
	8			
	10			

CONCLUSÕES

Observa todos os dados que registaste e responde às questões seguintes, justificando-as convenientemente

1) Qual é o nº mínimo de polígonos concorrentes num vértice? E o máximo? Justifica.
2) Quantas pavimentações regulares existem?
3) Utilizando a expressão para a amplitude do ângulo interno de um polígono regular, consegues escrever uma expressão matemática que seja condição para que esse polígono regular pavimente o plano?
4) Demonstra a tua conjetura (efetuada em 3)
5) Procura encontrar condições necessárias e suficientes para criar uma pavimentação regular

TAREFA 3.–PAVIMENTAÇÕES SEMI-REGULARES

Gravem cada sketch que construírem

I. Considerem que queremos construir uma pavimentação em que num vértice concorrem exactamente três polígonos regulares, em que um deles é um triângulo equilátero.

Conseguem descobrir todos os casos possíveis. Enumerem-nos.

II. Considerem que queremos construir uma pavimentação em que num vértice concorrem exactamente três polígonos regulares, em que um deles é um quadrado.

Conseguem descobrir todos os casos possíveis. Enumerem-nos.

III. Se polígonos regulares de lados $n_1, n_2, \ldots, n_p$ se encontram no vértice de uma pavimentação, teremos

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \cdots + \frac{n_p - 2}{n_p} = 2.$$

Com base nas observações anteriores (das tarefas I e II) conseguem dizer quantas e que escolhas são possíveis para os inteiros positivos? Elaborem um quadro onde registam a informação relevante.

Referências

Albrecht, M et al. (2001). 101 Project Ideas for the Geometer's Sketchpad. Key Curriculum Press

Burril, G. (2008). The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics, ICME 11 - TSG 22, International Congress on Mathematical Education. Mexico (Retirado de http://www.tsg.icme11.org/document/get/218 em 30/11/2010)

Christou, C. (2004). Proof through exploration in dynamic geometry environments. Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psichology of Mathematics Education, Vol2, (pp. 215-222). Bergen (Retirado de http://www.emis.de/proceedings/PME28/ em 27/11/2010)

Exploring and Creating Tessellations. Center for Technology and Teacher Education. University of Virginia, EUA. Retirado de http://www.teacherlink.org/home.html em 30/10/2010)

Hileman, L. & Loomis, K. (2004). Tessellations Using Geometer's Sketchpad, Blue Ribbon Applied Geometry Workshop, Math 693, West Virginia University, EUA (Retirado de http://www.blueribbon.ws/people/2004/Hileman%20and%20Loomis/Tessellationlessonplan.pdf em 30/11/2010)

ME (2004). Programa da disciplina de Matemática da componente científica dos Cursos Profissionais de nível secundário, Portugal: Ministério da Educação

ME (2001). Programa da disciplina de Matemática (A e B) da componente científica dos Cursos Cientifico-Humanísticos de nível secundário, Portugal: Ministério da Educação

Veloso, E. (1998). Geometria: Temas actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Whiteley, W. (2000). Dynamic geometry programs and the practice of geometry. Proceedings of the ICME 9. Tóquio (Retirado de http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Dynamic.pdf em 30/11/2010)

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa
UIED – Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento
amdd@fct.unl.pt

Maria João Mendes Vieira
Escola Secundária de Casquilhos
matmaria.essa@gmail.com

Representação Proporcional – Métodos dos Divisores

Susana Fernandes

O atual programa da disciplina Matemática Aplicada a Ciências Sociais (MACS) do ensino secundário inclui, sob o tema da teoria da partilha equilibrada, a representação proporcional, que é uma aplicação da teoria da divisão proporcional no caso discreto. Neste âmbito são abordados alguns métodos de origem norte-americana (Hamilton, Jefferson, Adams, Webster, Huntington-Hill), pelo seu interesse histórico, e os dois métodos de origem europeia mais usados atualmente (D'Hondt e Sainte-Laguë). Neste texto salientaremos que todos estes métodos, exceto o de Hamilton, são métodos de divisores e que os dois métodos europeus abordados (D'Hondt e Sainte-Laguë) são na realidade equivalentes a dois dos métodos americanos (Jefferson e Webster), diferindo apenas na forma de cálculo. *Infelizmente esta equivalência não é mencionada nos manuais escolares disponíveis.*

O que é a representação proporcional?

Nos Estados Unidos da América cada estado recebe um número de lugares no parlamento — «house of representatives» — proporcional à sua população, segundo o último censo realizado. Em inúmeros países da Europa, como é o caso de Portugal, cada partido — lista eleitoral — recebe um número de mandatos no parlamento proporcional ao número de votos obtidos nas eleições. Mais concretamente, em Portugal o número total de lugares no parlamento é distribuído pelos distritos do país (círculos eleitorais) de forma proporcional às respetivas populações, de acordo com o último censo; depois, em cada eleição, cada partido elege em cada círculo eleitoral um número de deputados proporcional ao número de votos aí obtidos. Em Portugal usa-se o método de D'Hondt tanto na determinação do número de lugares correspondentes a cada círculo eleitoral como no cálculo do número de deputados eleitos por cada partido em cada círculo eleitoral.

Porque são necessários «métodos» para determinar uma representação proporcional?

Consideremos o exemplo fictício (Balinsky and Young p. 96) de um país federal com uma população total de 100 mil habitantes distribuídos por 6 estados A, B, C, D, E e F, que pretende eleger os 36 membros do seu parlamento de forma proporcional às populações dos 6 estados (ou considerar um total de 100 mil votos válidos para distribuir 36 mandatos por 6 partidos de forma proporcional aos votos obtidos por cada partido). A seguinte tabela 1 apresenta para cada estado (ou partido), a sua população — P (ou votos), a respetiva proporção da população total (ou proporção do total de votos válidos) e a correspondente proporção dos M lugares no parlamento. As proporções são apresentadas com 5 casas decimais (tabela 1).

Ora obviamente o número de lugares no parlamento a atribuir a cada estado (ou partido) tem de ser um número inteiro não negativo. Como passamos das proporções de lugares para o número de lugares? A primeira solução que vem à ideia será arredondar a proporção de lugares de cada estado (ou partido), o que neste exemplo conduziria à seguinte distribuição de lugares no parlamento apresentada na tabela 2.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
População (P_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292
Proporção polulacional (p_i/P)	0.27744	0.25178	0.19951	0.14610	0.09225	0.03292
Proporção de lugares ($M \times p_i/P$)	9.98784	9.06408	7.18236	5.25960	3.32100	1.18512

Tabela 1.–Dados do exemplo fictício adaptado de Balinsky and Young

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
Lugares no parlamento (s_i)	10	9	7	5	3	1

Tabela 2.–Solução para o exemplo da tabela 1 obtida por arredondamento das proporções

Estado (i)	A	B	C	D	E	F	
Quota (q_i)	9.98784	9.06408	7.18236	5.25960	3.32100	1.18512	
Afectação inicial de lugares ($\lfloor q_i \rfloor$)	9	9	7	5	3	1	34
Parte decimal da quota	0.98784	0.06408	0.18236	0.25960	0.32100	0.18512	
Lugares adicionados	1.º				2.º		2
Lugares no parlamento (s_i)	10	9	7	5	4	1	36

Tabela 3.–Solução para o exemplo da tabela 1 obtida com o método de Hamilton

Mas esta *não é uma solução admissível* pois o número total de lugares atribuídos é 35, inferior aos 36 lugares que formam o parlamento. Com outros exemplos podemos encontrar situações em que arredondando as proporções de lugares seriam atribuídos mais lugares do que o total do parlamento.

Como o simples senso comum nos pode conduzir a soluções não admissíveis para o problema da representação proporcional, surge a necessidade de definir formas sistemáticas para resolver o problema.

Antes de descrever alguns dos métodos propostos, apresentamos a nomenclatura usual da representação proporcional.
P — total da população (ou total de votos válidos);
M — total de lugares (ou mandatos) no parlamento;
N — número de estados (ou número de listas eleitoras — partidos);
$D = P/M$ — divisor ou quociente eleitoral standard — representa o número de habitantes (ou votos) por mandato;
p_i, $i = 1, \dots, N$ — população do estado i (ou votos do partido i);
$q_i = (p_i /P) \times M = p_i /D$, $i = 1, \dots, N$ — quota standard do estado i (ou do partido i);
$\lfloor q_i \rfloor$ — quota mínima — quota arredondada por defeito;
$\lceil q_i \rceil$ — quota máxima — quota arredondada por excesso;
s_i — número de lugares no parlamento atribuídos ao estado i (ou partido i). Temos uma solução admissível para o problema da representação proporcional quando os s_i são inteiros não negativos, calculados com base nas quotas q_i e tais que

$$\sum_{i=1}^{N} s_i = M.$$

O método de Hamilton

Em 1791 o estadista norte americano Alexander Hamilton apresentou ao congresso dos Estados Unidos da América a seguinte proposta para resolver o problema da representação proporcional dos estados no parlamento:

- Calcular a quota *standard* de cada estado.
- Atribuir a cada estado um número de lugares igual à sua quota standard mínima.
- Se sobrarem lugares por atribuir, adicionar um lugar por estado, por ordem decrescente da parte decimal da sua quota *standard*, até completar o parlamento.

A tabela 3 apresenta a solução obtida com o método de Hamilton para o exemplo da tabela 1.

O método de Hamilton foi adotado pelo congresso norte americano de 1852 a 1900 tendo sido abandonado após ter sido detetado, e demoradamente discutido, o que ficou conhecido como o Paradoxo de Alabama. Em 1882 discutia-se a alteração do número total de lugares no parlamento americano e constatou-se que, com um total de 299 lugares o estado do Alabama receberia 8 lugares enquanto que com um total de 300 lugares no parlamento o estado do Alabama perderia um lugar. No início do século XX descobriu-se que o método de Hamilton está também sujeito aos Paradoxo da População e Paradoxo dos Novos Estados. O primeiro acontece quando tendo um estado A uma taxa de crescimento superior à de um estado B, o estado A perde um lugar para o estado B. O segundo ocorre quando a inclusão de um novo estado, sendo acrescentados ao parlamento o número de lugares correspondentes à sua quota, provoca alterações na distribuição de lugares dos restantes estados. Para exemplos da verificação dos paradoxos descritos sugere-se ao leitor interessado a consulta do livro de Tannenbaum.

O problema do método de Hamilton está na forma como se distribuem os lugares extra. Uma vez que não existem lugares extra para todos os estados, e escolhendo beneficiar os estados com maior parte decimal em termos absolutos, não se está a considerar a proporção da população de cada estado correspondente a essa parte decimal, afastando-se o método do «princípio de proporcionalidade».

O método de Jefferson e outros métodos de divisores americanos

No início do funcionamento do parlamento norte americano, o número de lugares do parlamento não era fixo, fixando-se sim o rácio do número de habitantes por lugar no parlamento (o divisor D), que não poderia ser inferior a 30 mil. Escolhido o divisor era determinada a quota de cada estado $q_i = p_i /D$ de acordo com a sua população, restando o problema de definir o número inteiro de lugares correspondente a cada quota. (Obviamente não há necessidade de arredondamentos das quotas que são um número inteiro.)
Em 1792 o estadista Thomas Jefferson propôs que o número de lugares a atribuir a cada estado fosse igual à sua quota mínima, isto é, a quota arredondada por defeito. A proposta de Jefferson foi adotada pelo congresso norte americano de 1792 a 1832.

Ao fixar-se o número de lugares no parlamento M, o número de habitantes representado por cada mandato passa a depender do total da população P, sendo o divisor standard definido por $D = P/M$.

Considerando o número de lugares fixo o método de Jefferson funciona da seguinte forma: se a distribuição de lugares aos esta-

Estado (i)	A	B	C	D	E	F	
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292	
Quota (q_i)	9.98784	9.06408	7.18236	5.25960	3.32100	1.18512	
Quota mínima ($\lfloor q_i \rfloor$)	9	9	7	5	3	1	34

Tabela 4.–Distribuição dos lugares para o Jefferson usando o divisor standard D=2777.(7)

Estado (i)	A	B	C	D	E	F	
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292	
Quota modificada (q'_i)	11.00079	9.98335	7.91079	5.79302	3.65781	1.30531	
Quota modificada mínima ($\lfloor q'_i \rfloor$)	11	9	7	5	3	1	36

Tabela 5.–Distribuição dos lugares para o exemplo da tabela 1 obtida com o método de Jefferson usando o divisor modificado D'=2522.

dos pela sua quota standard mínima é diferente de M, modifica-se o divisor D de forma adequada, isto é, por forma a que ao atribuir a cada estado um número de lugares igual à sua quota mínima modificada se totalize os M lugares do parlamento.

Observemos na tabela 4 o cálculo da solução obtida com o método de Jefferson para o exemplo fictício da tabela 1. O divisor standard é

$$D = \frac{100000}{36} = 2777.(7).$$

Como o total de lugares distribuídos é inferior ao número de lugares que compõem o parlamento, é necessário encontrar um divisor modificado adequado. Para aumentar o número de lugares distribuídos é necessário aumentar as quotas logo procura-se um divisor menor que o divisor standard. Experimentemos $D' = 2522$. A tabela 5 apresenta a solução.

Sejam D' o divisor modificado adequado, $q'_i = (p_i/D')$ a respetiva quota modificada com $a_i < q'_i < a_i + 1$ onde $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ (a quota mínima modificada) e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$ (a quota máxima modificada). O método atribui a cada estado um número de lugares $s_i = a_i$.

O método de Jefferson não está sujeito a nenhum dos paradoxos. Foi no entanto abandonado após se ter verificado em 1832 que, por vezes, o número de lugares atribuídos a um estado era superior à sua quota standard máxima (como é neste exemplo o caso para o estado A), e que tal acontecia favorecendo estados com mais população em detrimento de estados com menos população (para exemplos consultar o livro de Tannenbaum).

O método de Jefferson viola a importante *regra da quota* que estabelece que a cada estado seja atribuído um número de lugares não inferior à sua quota standard mínima e não superior à sua quota standard máxima.

Em 1832 são propostos três novos métodos de divisores modificados, diferindo do método de Jefferson apenas na forma de arredondamento da quota modificada de cada estado para obter o número de lugares correpondentes.

O estadista John Quincy Adams propôs que fosse atribuído a cada estado um número de lugares igual à sua quota máxima modificada, ou seja, a quota modificada arredondada por excesso. Isto é, com $q'_i = (p_i/D')$ a quota modificada e $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$ ($a_i < q'_i < a_i + 1$), o número de lugares a atribuir a cada estado é dado por $s_i = a_i + 1$.

A proposta de Adams nunca foi adotada pelo congresso americano.

O estadista Daniel Webster propôs que o número de lugares a atribuir a cada estado fosse igual à sua quota modificada arredondada na forma usual — por defeito quando a parte decimal for inferior a 0.5 e por excesso no caso contrário. Isto é, com $q'_i = (p_i/D')$ a quota modificada e $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$, ($a_i < q'_i < a_i + 1$); o número de lugares a atribuir a cada estado é dado por $s_i = a_i$ quando $q'_i < a_i + 1/2$ e $s_i = a_i + 1$ caso contrário. Reparemos que o ponto de arredondamento é a média aritmética das quotas modificadas mínima e máxima, isto é

$$a_i + \frac{1}{2} = \frac{a_i + (a_i + 1)}{2}.$$

A proposta de Webster foi adotada pelo congresso americano em 1852, 1901, 1911 e 1931.

O matemático James Dean propôs que o número de lugares a atribuir a cada estado fosse igual à sua quota modificada arredondada pela média harmónica das quotas modificadas máxima e mínima. Sejam $q'_i = (p_i/D')$ a quota modificada e $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$, ($a_i < q'_i < a_i + 1$); a média harmónica de a_i e $a_i + 1$ é dada por $2a_i(a_i + 1)/(2a_i + 1)$. O número de lugares a atribuir a cada estado é dado por $s_i = a_i$ quando se tem que $q'_i < 2a_i(a_i + 1)/(2a_i + 1)$ e $s_i = a_i + 1$ caso contrário.

Desde 1941 até aos dias de hoje o congresso americano adota o método de Huntington–Hill para determinar a distribuição dos lugares no parlamento pelos estados. Este método, proposto em 1911 por Joseph Hill, o estatístico chefe do gabinete dos censos populacionais, e posteriormente melhorado pelo matemático Edward Huntington, é um método de divisores modificados em que o número de lugares é obtido arredondando a quota modificada pela média geométrica das quotas modificadas máxima e mínima. Isto é, sendo $a_i = \lfloor q'_i \rfloor$ e $a_i + 1 = \lceil q'_i \rceil$, ($a_i < q'_i < a_i + 1$), a média geométrica de a_i e $a_i + 1$ é dada por $\sqrt{a_i(a_i + 1)}$ e o

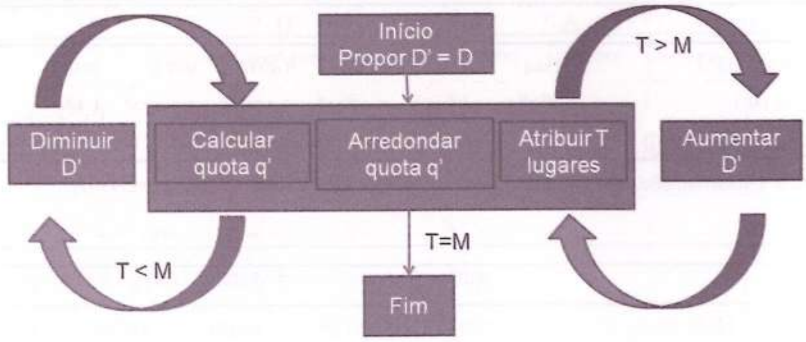


Figura 1.—Diagrama de métodos de divisores modificados.

número de lugares a atribuir a cada estado é $s_i = a_i$ quando se tem $q'_i < \sqrt{a_i(a_i + 1)}$ e $s_i = a_i + 1$ caso contrário.

Todos estes métodos necessitam de encontrar, por tentativas, um divisor modificado que conduza a que a soma das quotas modificadas arredondadas, de acordo com o método em consideração, totalize exatamente o número de lugares do parlamento. O seguinte diagrama da figura 1 esquematiza os métodos dos divisores.

A tabela 6 apresenta para cada um dos cinco métodos de divisores, ditos tradicionais, os respetivos pontos de arredondamento das quotas $d(a)$, por ordem crescente de $d(a)$.

Características dos métodos dos divisores

Algumas das características fundamentais para métodos de representação proporcional são a «imunidade» aos paradoxos, a verificação da regra da quota e o não enviesamento.

Todos os métodos de divisores estão imunes a paradoxos (Balinsky and Young p. 106).

Relativamente à verificação da regra da quota, isto é, verificar que na distribuição de lugares do parlamento pelos estados, nenhum recebe mais lugares do que a sua quota máxima nem menos que a sua quota mínima; já referimos que o método de Jefferson por vezes viola a quota máxima. No entanto este método nunca viola a quota mínima. Simetricamente, o método de Adams por vezes viola a quota mínima mas nunca viola a quota máxima. Nos restantes métodos as violações da regra da quota são menos frequentes e tanto podem ocorrer violações da quota máxima como da quota mínima; mas nunca simultaneamente (Balinsky and Young p. 130). Destes três métodos, o método de Webster é aquele em que as violações da regra da quota são mais raras (Balinsky and Young p. 132).

Relativamente ao enviesamento dos métodos, já referimos que o método de Jefferson tende a favorecer estados grandes. Simetricamente o método de Adams tende a favorecer estados pequenos. A ordem em que os 5 métodos tradicionais dos divisores ficam colocados, começando naquele que mais favorece estados pequenos e terminando no que menos favorece estados pequenos é: Adams > Dean > Huntington-Hill > Webster > Jefferson (Balinsky and Young p. 119). O método de Webster é o único método de divisores que não é enviesado, isto é, que não favorece nem estados grandes nem estados pequenos (Balinsky and Young p. 125).

O leitor interessado encontrará estas e outras propriedades dos métodos dos divisores no livro de Balinsky and Young; assim como as formulações matemáticas quer do problema de representação proporcional quer dos métodos de divisores.

Métodos dos divisores na Europa

Enquanto que os métodos dos divisores desenvolvidos por estadistas e matemáticos norte americanos determinam o total de representantes de um estado de uma só vez, os métodos desenvolvidos de forma independente na Europa, vão atri-

Métodos dos divisores	Pontos de arredondamento $d(a)$, $a = \lfloor q \rfloor$
Adams	$d(a) = a$
Dean	$d(a) = 2a(a + 1)/(a + (a + 1))$
Huntington-Hill	$d(a) = \sqrt{a(a + 1)}$
Webster	$d(a) = (a + (a + 1))/2$
Jefferson	$d(a) = a + 1$

Tabela 6.—Pontos de arredondamento para os cinco métodos de divisores tradicionais

	A	B	C	D	E	F
1	27744	25178	19951	15610	9225	3292
2	13872	12589	9975.5	7305	4612.5	1646
3	9248	8392.667	6650.333	4870	3075	1097.333
4	6936	6294.5	4987.75	3652.5	2306.25	823
5	5548.8	5035.6	3990.2	2922	1845	658.4
6	4624	4196.333	3325.167	2435	1537.5	548.6667
7	3963.429	3596.857	2850.143	2087.143	1317.857	470.2857
8	3468	3147.25	2493.875	1826.25	1153.125	411.5
9	3082.667	2797.556	2216.778	1623.333	1025	365.7778
10	2774.4	2517.8	1995.1	1461	922.5	329.2
11	2522.182	2288.909	1813.727	1328.182	838.6364	299.2727

Tabela 7.–Aplicação do método de D'Hondt ao exemplo da tabela 1. A sombreado os 36 maiores quocientes

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
Lugares no parlamento (s_i)	11	9	7	5	3	1

Tabela 8.–Solução para o exemplo da tabela 1 encontrada com o método de D'Hondt

buindo um lugar de cada vez até completar todo o parlamento, verificando a cada passo a que partido será atribuído o lugar em consideração. Num método de divisores (nas versões desenvolvidas na Europa) considera-se uma sequência de divisores $d(a)$, $a = 0, \dots, M-1$. O método seleciona os M maiores rácios $p_i/d(a)$, $i = 1, \dots, N$, $a = 1, \dots, M-1$, atribuindo por cada rácio selecionado um lugar ao partido i correspondente.

Abordaremos apenas os dois métodos mais usados atualmente: o método de D'Hondt, proposto em 1878 pelo belga Victor D'Hondt – advogado e professor de direito civil; e o método de Sainte-Lagüe, proposto em 1910 pelo matemático francês André Sainte-Lagüe.

O método de D'Hondt

Este método é atualmente usado nas eleições de Portugal, Áustria, Bélgica, Espanha, Finlândia, Grécia, Holanda, Islândia, Luxemburgo e Suíça. O método de D'Hondt é usualmente descrito pelo seguinte algoritmo:

- Apura-se, em separado, o número de votos recebidos por cada lista, no circulo eleitoral respetivo;
- O número de votos apurado por cada lista eleitoral é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respetivo;
- Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

Em caso de empate, a constituição portuguesa estabelece que o mandato seja atribuído à lista eleitoral com menos mandatos.

Apliquemos o método de D'Hondt ao exemplo fictício da tabela 1. A tabela 7 que se segue apresenta os quocientes das populações dos estados divididas pela sequência de divisores 1, 2, ... , 11.

O maior quociente é 27744/1 que corresponde ao estado A. O 2.º maior quociente é 25178/1 que corresponde ao estado B, o 3.º maior quociente é 19951/1, correspondente ao estado C, o 4.º maior quociente é 14610/1 correspondente ao estado D e assim sucessivamente até determinarmos os 36 maiores quocientes. Deste modo a distribuição pelos 6 estados dos 36 lugares no parlamento é a indicada na tabela 8.

O método de Sainte-Lagüe

O método de Sainte-Lagüe é usualmente descrito por um algoritmo análogo ao do método de D'Hondt, diferindo apenas na sequência de divisores que neste caso é 1, 3, 5, 7, etc ...

Algoritmo do método de Sainte-Lagüe

- Apura-se, em separado, o número de votos recebidos por cada lista, no circulo eleitoral respetivo;
- O número de votos apurado por cada lista eleitoral é dividido, sucessivamente, por 1, 3, 5, 7, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respetivo;
- Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

Apliquemos o método de Sainte-Lagüe ao exemplo fictício da

	A	B	C	D	E	F
1	27744	25178	19951	14610	9225	3292
3	9248	8392.667	6650.333	4870	3075	1097.333
5	5548.8	5035.6	3990.2	2922	1845	658.4
7	3963.429	3596.857	2850.143	2087.143	1317.857	470.2857
9	3082.667	2797.556	2216.778	1623.333	1025	365.7778
11	2522.182	2288.909	1813.727	1328.182	838.6364	299.2727
13	2134.154	1936.769	1534.692	1123.846	709.6154	253.2308
15	1849.6	1678.533	1330.067	974	615	219.4667
17	1632	1481.059	1173.588	859.4118	542.6471	193.6471
19	1460.211	1325.158	1050.053	768.9474	485.5263	173.2632
21	1321.143	1198.952	950.0476	695.7143	439.2857	156.7619

Tabela 9.—Aplicação do método de Sainte-Lagüe ao exemplo da tabela 1. A sombreado os 36 maiores quocientes

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
Lugares no parlamento (s_i)	10	9	8	5	3	1

Tabela 10.—Solução para o exemplo da tabela 1 encontrada com o método de Sainte-Lagüe

tabela 1. A tabela 9 apresenta os quocientes das populações dos estados divididas pela sequência de divisores 1, 3,..., 21.

O maior quociente é 27744/1 que corresponde ao estado A. O 2.º maior quociente é 25178/1 que corresponde ao estado B, o 3.º maior quociente é 19951/1, correspondente ao estado C, o 4.º maior quociente é 14610/1 correspondente ao estado D e assim sucessivamente até determinarmos os 36 maiores quocientes. Deste modo a distribuição pelos 6 estados dos 36 lugares no parlamento é a indicada na tabela 10.

O método de Sainte-Lagüe é atualmente utilizado nas eleições de Alemanha, Bósnia, Dinamarca, Polónia e Noruega. Na Suécia é usada uma versão modificada do método que considera como primeiro divisor 1.4 em vez de 1. Esta alteração tem como objetivo dificultar o acesso de partidos muito pequenos a um lugar no parlamento.

Forma recursiva do método de Jefferson a partir da quota mínima

Como referimos anteriormente, os métodos dos divisores desenvolvidos nos Estados Unidos da América atribuem a cada estado todos os lugares que lhe correspondem de uma só vez, enquanto que os métodos de divisores desenvolvidos na Europa vão atribuindo um lugar de cada vez aos diferentes partidos. Os primeiros têm a desvantagem prática de necessitar de «adivinhar» um divisor adequado, os segundos têm a morosidade de atribuir um lugar de cada vez.

Retomemos a aplicação do método de Jefferson ao exemplo fictício da tabela 1, no ponto da verificação da necessidade de alterar o divisor standard para um divisor adequado.

Observando a tabela 4 verificamos que estão atribuídos 34 lugares, faltando atribuir outros 2. O método de Jefferson atribuiu um número de lugares igual à quota mínima modificada. Então para atribuir mais um lugar, para algum estado i a quota mínima modificada terá de ser $\lfloor q'_i \rfloor = \lfloor q_i \rfloor$. Assim, por exemplo, para o estado A passar a ter 10=9+1 representantes no parlamento a sua quota modificada teria de ser pelo menos 10. Como

$$q'_i = p_i/D' \Leftrightarrow D' = p_i/q'_i$$

procuramos o divisor modificado que atribuirá 10 lugares ao estado A, dividindo a sua população por 10. Da mesma forma, para que seja atribuído mais um lugar ao estado C (7+1), a sua quota modificada terá de ser pelo menos 8 e procuramos o divisor modificado adequado dividindo a sua população por 8. Procedamos aos cálculos para encontrar o divisor modificado que traria mais um lugar a cada um dos estados, ou seja, executemos a divisão da população de cada estado pela sua atual quota mínima +1, isto é, $p_i/(\lfloor q_i \rfloor + 1)$, conforme mostra a tabela 11.

O maior dos quocientes calculados é 2774.4, correspondente ao estado A. Isto significa que diminuindo o divisor standard $D = 2777.(7)$, o primeiro valor a partir do qual se consegue distribuir mais um lugar no parlamento é $D' = 2774.4$, sendo o novo lugar atribuído ao estado A. A tabela 12 mostra a distribuição dos lugares pela quota mínima, usando o divisor modificado.

Estão agora distribuídos 35 lugares restando 1 por atribuir. Para determinar qual o estado a receber o último lugar procede-se da mesma forma que anteriormente. O estado a receber o 36.º lugar no parlamento será aquele que, ao reduzir-se o divisor, primeiro vir a sua quota mínima aumentar uma unidade. Ou seja, dividindo as populações dos estados pelo número de lugares que atualmente lhe estão atribuídos, mais um, o maior dos quocientes corresponde ao estado a quem primeiro será atribuído mais um lugar. A tabela 13 mostra os referidos quocientes na última linha.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292
Quota (q_i)	9.98784	9.06408	7.18236	5.25960	3.32100	1.18512
Quota Mínima ($\lfloor q_i \rfloor$)	9	9	7	5	3	1
$p_i/(\lfloor q_i \rfloor + 1)$	27744/(9+1)=2774.4	25178/(9+1)=2517.8	19951/(7+1)=2493.875	14610/(5+1)=2435	9225/(3+1)=2306.25	3292/(1+1)=1646

Tabela 11.–Procura de um divisor modificado que partindo do divisor standard atribui mais um lugar do parlamento ao aplicar o método de Jefferson ao exemplo da tabela 1.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F	
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292	
Quota modificada (q'_i)	10.00144	9.076424	7.192141	5.266763	3.325523	1.186724	
Quota mínima modificada ($\lfloor q'_i \rfloor$)	10	9	7	5	3	1	35

Tabela 12.–Distribuição dos lugares para o exemplo da tabela 1 obtida com o método de Jefferson usando o divisor standard.

Estado (i)	A	B	C	D	E	F
População (p_i)	27744	25178	19951	14610	9225	3292
Quota modificada (q'_i)	10.00144	9.076424	7.192141	5.266763	3.325523	1.186724
Quota mínima modificada ($\lfloor q'_i \rfloor$)	10	9	7	5	3	1
$p_i/(\lfloor q'_i \rfloor + 1)$	27744/(10+1)=2522.182	25178/(9+1)=2517.8	19951/(7+1)=2493.875	14610/(5+1)=2435	9225/(3+1)=2306.25	3292/(1+1)=1646

Tabela 13.–Procura de um divisor modificado que partindo do divisor modificado atribui mais um lugar do parlamento ao aplicar o método de Jefferson ao exemplo da tabela 1.

Métodos dos divisores	Pontos de arredondamento $d(a)$, $a = 0, 1, \ldots, M-1$	Sequência de divisores
Adams	$d(a) = a$	0, 1, 2, 3
Dean	$d(a) = 2a(a+1)/[a+(a+1)] = a(a+1)/[a+(1/2)]$	0, 4/3, 12/5, 24/7
Huntington-Hill	$d(a) = \sqrt{a(a+1)}$	$0, \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}$
Webster	$d(a) = [a+(a+1)]/2 = a+(1/2)$	1/2, 3/2, 5/2, 7/2
Jefferson	$d(a) = a+1$	1, 2, 3, 4

Tabela 14.–Sequência de divisores para os cinco métodos de divisores tradicionais

O maior dos quocientes calculados é 2522.182, que corresponde novamente ao estado A. Isto significa que diminuindo o divisor modificado $D' = 2774$, o primeiro valor a partir do qual se consegue distribuir mais um lugar no parlamento é $D' = 2522.182$, sendo o novo lugar atribuído ao estado A. A tabela 5 mostrou já a distribuição dos lugares pela quota mínima, usando o divisor modificado $D' = 2522$. Está agora esclarecida a escolha deste divisor modificado.

Forma recursiva completa do método de Jefferson

Imaginemos agora que em vez de iniciarmos o método de Jefferson com o divisor standard e as respetivas quotas, se inicia o método com um divisor tão grande que a quota mínima para todos os estados seja zero. Ou dito de outra forma, à partida considera-se que todos os estados têm zero lugares atribuídos. Para descobrir a que estado será atribuído o primeiro lugar, basta dividir as populações de cada estado pela sua quota mínima (zero) mais 1 e verificar qual o estado a que corresponde o maior quociente, isto é, o maior divisor a partir do qual se consegue atribuir um lugar do parlamento. Consideremos que o maior divisor corresponde ao estado k. Então numa primeira iteração, a todos os estados serão atribuídos zero lugares, exceto ao estado k (o estado com mais população), que terá 1 lugar atribuído. (No exemplo da tabela 1 o 1.º lugar será atribuído ao estado A.) Para encontrar o estado a que será atribuído o 2.º lugar, dividem-se as populações dos estados pelos lugares que lhe estão atualmente atribuídos, mais 1 (isto é, divide-se a população do estado k por 2 e compara-se com as populações dos restantes estados). O lugar será atribuído ao estado ao qual corresponde o maior dos quocientes calculados. (No exemplo da tabela 1 o 2.º lugar será atribuído ao estado B.) O processo repete-se até que todos os lugares do parlamento sejam distribuídos.

Relembrando que s_i, $i = 1, \ldots, N$ representa o número de lugares no parlamento atribuídos ao estado (ou partido) i e que temos uma solução admissível quando os s_i são inteiros não negativos tais que

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N} s_i = M.$$

A forma recursiva do método de Jefferson é:

(i) $s_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$

(ii) Repetir até que $\sum_{i=1}^{N} s_i = M$; seja k tal que

$$\frac{p_k}{s_k + 1} = \max \frac{p_i}{s_i + 1}.$$

Fazer $s_k = s_k + 1$ e $s_i = s_i$, para todo o $i \neq k$.

O que se traduz por ir dividindo as populações dos estados pela sequência de divisores 1, 2, 3, etc., escolhendo a cada iteração atribuir um lugar ao estado correspondente ao maior quociente. Ora este algoritmo recursivo corresponde à descrição do método de D'Hondt. Assim *os métodos de Jefferson e de D'Hondt são na realidade formas computacionais diferentes do mesmo método.*

Forma recursiva dos métodos de divisores americanos

Já vimos que no caso do método de Jefferson, a sua forma recursiva consiste em ir dividindo as populações dos estados pela sequência de divisores 1, 2, 3, etc., escolhendo a cada iteração atribuir um lugar ao estado correspondente ao maior quociente.

No método de Webster atribui-se a cada estado um número de lugares igual à sua quota arredondada da forma usual. Admitamos que temos uma solução em que a cada estado i foi atribuído um número de lugares s_i tal que $\sum_{i=1}^{N} s_i < M$, isto é, ainda estão lugares por atribuir. Para que a um determinado estado seja atribuído mais um lugar é necessário que a sua quota modificada q'_i passe a ser pelo menos $s_i + 1/2$. Usando um racicocinio análogo ao apresentado para o método de Jefferson chegamos à forma recursiva do método de Webster.

A forma recursiva do método de Webster é:

(i) $s_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$

(ii) Repetir até que $\sum_{i=1}^{N} s_i = M$; seja k tal que

$$\frac{p_k}{s_k + 1/2} = \max \frac{p_i}{s_i + 1/2}.$$

Fazer $s_k = s_k + 1$ e $s_i = s_i$, para todo o $i \neq k$.

O que se traduz por ir dividindo as populações dos estados pela sequência de divisores 1/2, 3/2, 5/2, etc., escolhendo a cada iteração atribuir um lugar ao estado correspondente ao maior quociente. Como o que interessa é a ordem de grandeza do quociente e não o seu valor exato, os estados escolhidos para atribuir mais um lugar serão exatamente os mesmos usando a sequência de divisores 1, 3, 5, etc., o que corresponde à sequência de divisores do método de Sainte-Lagüe. Assim sendo *os métodos de Webster e de Sainte-Lagüe são na realidade formas computacionais diferentes do mesmo método.*

Aplicando raciocínios análogos aos descritos para os métodos de Jefferson e Webster, chegamos às formas recursivas de todos os métodos de divisores, com as respetivas sequências de divisores que se apresentam na tabela 14.

A forma recursiva dos métodos dos divisores foi deduzida pela primeira vez em 1928 por Edward Huntington.

Repare-se que os métodos cujo primeiro divisor é zero, atribuem na primeira iteração um lugar a todos os estados, o que sendo viável na distribuição dos lugares do parlamento norte americano pelos vários estados, não o é na distribuição de mandatos por partidos eleitorais.

Referências

Balinsky, Michel L., and H. Peyton Young (2001), «Fair Representation; Meeting the Ideal of One Man, One Vote». Segunda edição Bookings Institution Press. (primeira edição em 1982)

Tannenbaum, Peter (2011), «Excursions in Modern Mathematics» (capítulo 4). Sétima edição Prentice Hall —Pearson. (primeira edição em 1992).

Huntington, Edward V. (1928) «The Apportionment of Representatives in Congress», Transactions of the American Mathematical Society, vol. 30, pg 85–110.

Susana Fernandes

Departamento de Matemática, FCT
Universidade do Algarve

José Paulo Viana

A CORRER À VOLTA DO CAMPO

Ao passar junto do campo de jogos da minha escola, vi que uma das minhas turmas estava a ter aula de Educação Física e fiquei parado a observar. A certa altura, a Ema e o João começaram a correr à volta do campo, em direções opostas e sempre à mesma velocidade. Cruzaram-se a primeira vez mesmo ao pé de mim, a segunda vez junto de uma baliza, a terceira perto de uma bola abandonada e a quarta novamente ao pé de mim.

Qual é a relação entre as velocidades da Ema e do João?

Pergunta adicional (para os mais entusiastas): E se fosse apenas no sexto cruzamento que eles voltassem a cruzar-se comigo?

(Respostas até 30 de setembro, para zepaulo46@gmail.com)

UM PARQUE COM TRÊS CAMINHOS

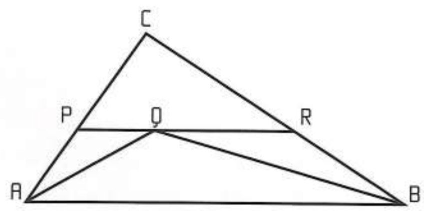
O problema proposto no número 116 de Educação e Matemática foi o seguinte:

Um parque público, com a forma de um triângulo irregular ABC, tem quatro entradas. Das entradas A e B saem caminhos que são precisamente as bissetrizes dos ângulos em A e B.

Estes dois caminhos terminam num ponto Q por onde passa um terceiro caminho, paralelo ao lado AB e que une as outras duas entradas P e R.

A distância entre os portões A e P é de 330 metros e entre os portões B e R é de 450 metros.

Qual é o comprimento do caminho PR?



Recebemos 15 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Ana Loureiro, Beatriz Conde (Torres Novas), Edgar Martins (Queluz), Ema Modesto e João Fernandes (Aveiro), Francisca Canais (Torres Novas), Francisco Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helena Rocha (Aveiro), Isabel Viana (Porto), Marcelo Gameiro (Torres Novas), Marinela St. Aubyn, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Stardust (Torres Vedras)

Com exceção de Stardust, que utilizou a trigonometria, todos os restantes seguiram o mesmo método geométrico para chegar à solução. Edgar Martins acrescentou também uma resolução trigonométrica e Ana Loureiro começou por ver o que acontecia com o Geogebra.

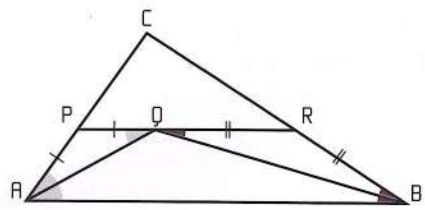
A resolução geométrica permite responder à pergunta colocada de forma muito simples. Assim, as resoluções são bastante parecidas. Demos a palavra à Helena Rocha.

Se AB//PR, BAQ e PQA são ângulos de lados paralelos e da mesma espécie, logo têm a mesma amplitude.

$\angle BAQ = \angle PQA$

Da mesma forma concluímos que $\angle QBA = \angle BQR$

Estando os caminhos de A a Q e de B a Q contidos nas bissetrizes dos ângulos em A e B, respetivamente, então $\angle QAP = \angle BAQ$ e $\angle RBQ = \angle QBA$.



Observando os ângulos que têm amplitudes iguais, podemos concluir que os triângulos AQP e QBR são isósceles. Então:

O caminho PR tem 780 metros de comprimento.

Avaliação em Matemática: um desafio para o professor

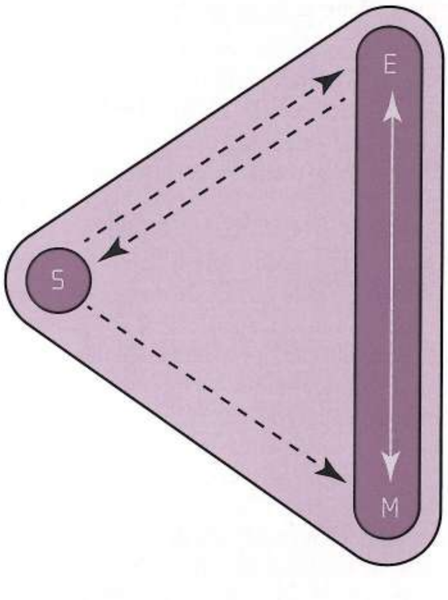
Iranete Lima

A avaliação da aprendizagem é um tema importante por ser constituinte e estruturante da prática educativa (SILVA, 2004). Avaliar nesta perspetiva requer do professor uma nova compreensão do conceito de avaliação e exige dele uma nova postura. Sendo assim, o objetivo deste artigo é fazer uma reflexão com os professores de matemática, licenciandos dos cursos de Matemática e Pedagogia sobre alguns pressupostos da avaliação no paradigma da aprendizagem significativa, na perspectiva de superação do método tradicional de avaliação que tem contribuído para o fracasso escolar, sobretudo, no ensino de matemática na educação básica.

Introdução

O tema Avaliação Educacional é vasto. Pode-se avaliar, por exemplo, o projeto político-pedagógico de uma instituição de ensino, os planej amentos dos professores de uma instituição e o aluno enquanto sujeito aprendiz. Uma leitura mais apurada da literatura em Educação e de áreas afins mostra que a avaliação sempre foi um dos temas mais discutidos pelos diversos atores do sistema educacional, tanto no Brasil quanto no estrangeiro. Pode-se facilmente constatar que essa discussão não se limita às paredes da escola, mas acontece nas universidades, seja nas pesquisas ou nos cursos de formação inicial e continuada de professores, e nas diversas esferas do sistema educacional.

Luckesi (2000) afirma que a avaliação não possui uma finalidade em si mesma e que ela só adquire sentido na medida em que se articula com o projeto pedagógico da escola e, consequentemente, com o planejamento do professor. Com efeito, é nesse momento da sua atividade que o professor delimita os objetivos de ensino e de aprendizagem e constrói as situações didáticas (Brousseau, 1998), com a intenção de levar o aluno a aprender um determinado conteúdo ou conceito.



Esquema 1.—O «milieu» do professor (Brousseau, 1998, p. 92)[1]

Nos seus escritos, Margolinas (2002, 2005) coloca em evidência que o professor, enquanto ator da relação didática está sempre em situação de aprendizagem. Brousseau (1998) representa o «milieu» no qual o professor está inserido no momento da Situação *Didática*, momento que está em interação real com o aluno, pelo esquema 1.

Sendo o professor o construtor do meio que age e retroage com o aluno, *aluno<>meio*, ele mesmo se torna sujeito de um sistema mais amplo que interage com este sistema. Assim, «o professor interage com o meio e aprende a partir desta interação» (Lima, 2009, p.37). No entanto, é preciso considerar que o professor não aprende apenas no momento em que está em interação com o aluno. Ele aprende também em outros momentos de sua atividade como, por exemplo, no momento da elaboração do plano de aula e durante todo o processo avaliativo. Sua aprendizagem torna-se ainda mais evidente neste processo, tendo em vista que ele é confrontado com suas escolhas metodológicas. Nessa perspetiva Silva ressalta que:

> O professor ao ensinar aprende o que o aluno sabe e como sabe, de onde ele vem, que desejos possui; por sua vez, o aprendente para aprender ensina o professor o que sabe e como sabe, qual é a sua história, quais são as suas aspirações. Assim sendo, quem ensina aprende e quem aprende ensina (Freire, 2000) e o processo avaliativo é o espaço privilegiado desse diálogo educativo (Silva, 2004, p. 37).

Partindo dessa premissa construímos nossa reflexão sobre a avaliação da aprendizagem, particularizando-a no contexto do ensino da matemática.

Perspetivas de avaliação em educação

É ponto consensual entre os estudiosos em Educação que, para atender às necessidades da sociedade atual, a escola precisa mudar. Dentre os aspetos apontados como fundamentais para tal mudança, aponta-se a avaliação da aprendizagem. Pergunta-se, porém, como viabilizá-la, tendo em vista os fatores que influenciam e que definem a prática avaliativa adotada pela maioria dos professores? Refletindo sobre a temática da avaliação escolar, Hoffmann (2004, p.11) ressalta que «a ansiedade e a resistência de muitos duplica quando se diz que é preciso mudá-la, transformá-la, para que se alcance uma escola verdadeiramente inclusiva». Esta resistência do professor, que na maioria das vezes tem origem na sua formação e nos modelos avaliativos vigentes, mostra que, embora necessária, a adoção de uma nova prática avaliativa nas escolas não é tarefa fácil.

O modelo de avaliação da aprendizagem utilizado em escala mundial é caraterizado pelo método de aferição de resultados através de notas ou conceitos. Sendo este bastante criticado por diversos estudiosos, em contraponto propõe-se um modelo de avaliação que leva em conta as sucessivas etapas de construção do conhecimento pelo aluno, bem como a adequação, ou não, da metodologia de ensino adotada pelo professor. Sem ter a pretensão de investir de forma minuciosa na descrição desses modelos, apresentamos a seguir alguns pressupostos das duas correntes de pensamento.

A *Avaliação tradicional* com origem nos estudos de Tyler (1949), tem como principal foco verificar em que medida os objetivos fixados no programa escolar estão sendo alcançados. Luckesi (2000, p. 72) afirma que nessa prática os professores adotam, basicamente, três procedimentos de modo sucessivo que são: *medida do aproveitamento escolar*; *transformação da medida em nota ou conceito* e *utilização dos resultados identificados*. Nessa abordagem, a aprendizagem do aluno pode ser medida através da comparação da quantidade de respostas corretas ou erradas com os parâmetros atribuídos pelas instituições[2], como, por exemplo, as secretarias de educação, as escolas e o professor. Sendo assim, o processo de aprendizagem é considerado encerrado no momento em que o professor atribui uma nota ou um conceito ao aluno. A avaliação concebida desta maneira tem a função de «julgar» o aluno, permitindo-lhe ou não o acesso a outro nível da sua escolaridade. Luckesi (Ibid.) alerta, entretanto, para o facto de que «medida é uma forma de comparar grandezas tomando uma como padrão e a outra como objeto a ser medido» (ibid.).

A *Avaliação formativa-reguladora* tem como base os seguintes pressupostos: interessa-se pelo modo como o aluno aprende, pela trajetória da sua aprendizagem e pela qualidade do que o aluno aprende (Hoffmann, 1998; Perrenaud, 1999; Silva, 2004; Zabala, 1998). Nesse modelo de avaliação, a existência de um sistema de notas é incoerente. Preconiza-se que a avaliação do aluno deve ser realizada com base na aprendizagem dos conteúdos mínimos necessários, no desenvolvimento de habilidades e competências e, também, na utilização de procedimentos de resolução dos problemas compatíveis com o seu nível de cognição. Nessa direção, a avaliação deve ser realizada de maneira contínua por meio da aplicação de instrumentos diversificados e cuidadosamente elaborados pelo professor, com vistas a levar o aluno a uma situação de aprendizagem.

Mesmo não sendo recente, a avaliação na perspetiva formativa-reguladora é considerada inovadora, na medida em que pressupõe uma prática docente comprometida com a inclusão, a diversidade e a construção coletiva (Silva, 2004). Então, para que se concretize é preciso a adesão espontânea do professor, compreendendo que também aprende no processo de avaliação, tanto sobre o aluno quanto sobre a sua atividade docente.

Embora conscientes das limitações do modelo vigente de avaliação, muitos professores ainda resistem e continuam utilizando um único instrumento de avaliação que, em geral, é aplicado de forma tradicional. Não queremos discutir a pertinência deste ou daquele instrumento, levando em conta que cada um tem a sua importância em um determinado momento do processo de ensino. Antes, porém, nos perguntamos se um único instrumento de avaliação é suficiente para evidenciar o estado de aprendizagem de um aluno ou de uma classe.

Diante desse cenário, refletimos sobre os caminhos que podem conduzir o professor a adotar uma nova postura com relação à avaliação. Estudiosos do assunto apontam a formação inicial e continuada dos professores como ponto de partida, mesmo representando um dos grandes desafios da Educação l. Hoffmann (1998) elenca alguns desafios que precisam ser enfrentados. Dentre eles, citamos:

> O desafio é justamente redimensionar essa formação, ultrapassando a análise histórica e a crítica ao processo classificatório — importante em termos de compreensão da realidade —, e aprofundando estudos sobre concepções teóricas e metodológicas de uma avaliação contínua e qualitativa, em cursos de formação de professores, sem censura de discutir a complexa realidade educacional de nossas escolas. [...] A superficialidade dos estudos na área de avaliação, em cursos de magistério e licenciatura, tende a ser um factor muito sério pelo seu reflexo na escola de 1° e 2° graus, uma vez que a prática avaliativa é um fenômeno com características fortemente reprodutivistas. Ou seja, o modelo que se instala em instituições formadoras é o que vem a ser seguido por esses alunos quando passam a exercer a docência. (Hoffmann, 1998, p. 65).

Após mais de uma década dos escritos de Hoffmann e considerando as mudanças que foram implementadas na Educação Básica e no Ensino Superior no Brasil, privilegiando a inclusão de disciplinas que abordam a avaliação educacional, os resultados ainda não são visíveis na prática dos professores e na forma como se avalia nas instituições de ensino superior. Isto se deve, muitas vezes, a crença em alguns mitos históricos que permeiam o ensino em geral, e em particular, no ensino da matemática. Por exemplo, muitos professores acreditam que a adoção de uma prática avaliativa na perspetiva formativa pode diminuir a sua credibilidade perante o aluno, uma vez que o índice de reprovação tende a diminuir. De uma forma equivocada associa-se o temor que os alunos têm da reprovação com a credibilidade do professor: um bom professor é aquele que reprova. Resultados de pesquisas mostram que a persistência dessas crenças é ainda mais forte no campo das ciências exatas, como a Matemática e a Física. Os desafios acima citados continuam, portanto, atuais, indicando a emergência da ressignificação da prática avaliativa comumente adotada nos cursos de formação de professores.

Avaliação da aprendizagem em Matemática

Analisando o processo de avaliação em matemática, Gitirana (2003) relata que na discussão com professores sobre análises de produção dos alunos, é comum ouvir perguntas do tipo:

> ‹E daí, que nota eu dou ao aluno?›, em vez de questões do tipo ‹E daí, em que posso mudar minha prática docente para que meu aluno possa alcançar os objetivos de desenvolvimento pretendidos? Que atividades eu devo trabalhar a partir de tal panorama? Ou ainda, porque o aluno apresenta tal erro e tal estratégia?› (Gitirana, 2003, p. 57).

Isto reflete a prática adotada por esses professores, apesar das recomendações contidas nos documentos oficiais e do acesso cada vez mais crescente dos professores aos cursos de formação continuada. Segundo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) para os anos finais do Ensino Fundamental, o ensino da matemática deve ser voltado para uma aprendizagem que privilegia a atividade investigativa, a formulação, a representação, o raciocínio e a aplicação de diversas estratégias pelo aluno na resolução de problemas. Desta forma, o aluno deve ser levado a desenvolver uma atitude metacognitiva, indo além da memorização e da repetição. Para atingir esta meta, o processo de avaliação precisa ser repensado pelos professores. Na perspetiva de construção de um currículo de Matemática para esse nível de escolaridade, a avaliação adquire uma nova funcionalidade, destacando-se as dimensões sociais e pedagógicas.

> No primeiro caso, atribui-se à avaliação a função de fornecer aos estudantes informações sobre o desenvolvimento das capacidades e competências que são exigidas socialmente, bem como auxiliar os professores a identificar quais objetivos foram atingidos, com vistas a reconhecer a capacidade matemática dos alunos, para que possam inserir-se no mercado de trabalho e participar da vida sociocultural. No segundo caso, cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábi-

tos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos ainda parcialmente consolidados (Brasil, 1998, p.54).

Um dos princípios norteadores do ensino da matemática é que esta pode e deve estar ao alcance de todos. Nessa perspetiva, a garantia da aprendizagem pelo aluno deve ser a principal finalidade do trabalho do professor. Em outros termos, o ensino deve garantir o desenvolvimento de competências complexas como a observação, o estabelecimento de relações, a argumentação e a validação de processos, além de estimular as formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia e estimativa.

Em síntese, o que se pretende do ponto de vista das orientações oficiais é que o ensino da matemática faça sentido para o aluno, o que traduz o pensamento do paradigma da aprendizagem significativa. Como argumenta Silva (2004), para que isso se materialize é preciso haver uma aproximação mais efetiva do professor com a produção teórico-educacional. Neste novo cenário, a escola deixa de ser um espaço voltado apenas para o ensino para ser transformada em um ambiente de investigação. Ponte et al. defendendo a importância da investigação matemática na sala de aula, afirmam que:

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na formulação de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (Ponte et al. 2006, p. 23).

A transformação da escola nesse espaço de pesquisa requer do professor a habilidade de desenvolver práticas inovadoras e de construir sequências didáticas (Brousseau, 1998) que contribuam eficazmente para a construção do conhecimento pelo aluno.

É comum na prática do professor de matemática a imposição de «problemas» que não fazem sentido para o aluno. Ponte et al. (2006) ressaltam que o primeiro passo para se realizar uma investigação matemática é a identificação do problema que deve ser resolvido, mas para que isto aconteça é necessário que o mesmo represente um verdadeiro problema para o aluno. Em consonância com Pólya (1986), os autores definem um problema como sendo «uma questão para o qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata» (Ponte et al., Ibid.). Uma vez o aluno aceitando o desafio de resolver o problema, cabe ao professor identificar os procedimentos utilizados na resolução e avaliar o desempenho desse aluno.

Sabe-se, no entanto, que a avaliação em matemática é, muitas vezes, baseada apenas na resposta final dada pelo aluno. Nesses casos ignoram-se os procedimentos utilizados para chegar a uma resposta correta ou errada (Kamii, 1995). Então, se a resposta é correta a nota é 10 (dez), se a resposta for errada a nota atribuída é 0 (zero). No caso de eventuais respostas erradas, ou mesmo quando o aluno não segue o modelo ensinado pelo professor, o erro é muitas vezes objeto de punição e considerado como sendo uma falta grave do aluno.

No paradigma da aprendizagem significativa, que adere aos pressupostos do construtivismo (Piaget, 1977, 1978), o erro adquire um novo significado. Além de constituir um momento da construção do conhecimento pelo aluno, ele é um importante indicativo para a avaliação das escolhas metodológicas feitas pelo professor e dos problemas escolhidos no encaminhamento da aprendizagem. Para Brousseau (1983), o erro nem sempre é o resultado da ignorância, da incerteza ou do acaso. Pelo contrário, muitas vezes ele é o efeito de um conhecimento anterior que tem o seu domínio de validade, entretanto para uma situação específica se revela falso ou inadequado. Dessa forma, diante de um erro cometido pelo aluno, é necessário que o professor seja capaz de reconhecer e analisar a sua origem e, também, de criar situações didáticas que auxilie o aluno a superá-lo. É nesse momento que o professor aprende com o aluno, coletando informações e dados importantes para subsidiar suas escolhas e suas decisões didáticas (Lima, 2009).

Além disso, não se pode ignorar que o erro pode ter origem em um efeito do *Contrato Didático*, na aceção de Brousseau (1990). Um exemplo clássico desta possibilidade é o problema da «idade do capitão» relatado por Baruk (1985). Em uma experiência realizada na cidade de Grenoble – França - com noventa e sete alunos de classes equivalentes ao segundo e terceiro anos do Ensino Fundamental no sistema de ensino brasileiro, resolveu-se o seguinte problema: «Em um barco existem 26 (vinte e seis) carneiros e 10 (dez) cabras. Qual a idade do capitão?». O resultado da pesquisa mostrou que 76 (setenta e seis) alunos calcularam a idade do capitão utilizando os números fornecidos no enunciado do problema. Este resultado evidencia várias regras do *contrato didático* que são implícitas, na maioria das vezes, como afirma Brousseau (ibid.). Dentre as regras de contrato identificadas nesta pesquisa, encontra-se a falta de diversificação de procedimentos de resolução pelo professor, a repetição de problemas parecidos nos quais apenas os dados numéricos são alterados e ainda a incompreensão do enunciado do problema pelos alunos. Além das regras de contrato didático destacadas, Câmara dos Santos et al. (2000) identificam outras que regem a maioria das salas de aula de matemática: «todo problema em matemática tem solução; em todo problema matemático os dados estão no enunciado; em matemática, os problemas se dividem em três etapas: sentença matemática, cálculo e resposta.» (p. 132). Regras como essas podem funcionar como factor de inibição do raciocino matemático do aluno, podendo levar o aluno a pensar que sua resposta está errada apenas porque não se enquadra em tais regras.

É necessário, então, que se diversifique o tipo de abordagem dos conteúdos e os procedimentos de resolução utilizados na sala de aula, buscando levar o aluno a desenvolver competências complexas como observar, analisar, investigar e tomar decisões, para que ele se torne autónomo no processo de construção da sua aprendizagem. O professor deve, portanto, levar em conta todos esses fatores na construção de uma sequência didática, para que se obtenha êxito no seu desenvolvimento.

4. Considerações finais

Com as considerações feitas neste artigo objetivamos fazer uma reflexão sobre a avaliação da aprendizagem, em particular daquele que ensina matemática. Ressaltamos que no processo avaliativo o professor se encontra em situação de aprendizagem visto que, nesse momento da sua atividade, ele aprende sobre o aluno e sobre a adequação ou não da metodologia de ensino adotada na sua prática em sala de aula.

Para haver uma aprendizagem significativa por parte do aluno é necessário que o professor considere a avaliação como um dos principais momentos do processo de ensino, tendo em vista que ela pode lhe fornecer subsídios importantes para o encaminhamento da aprendizagem do aluno. A adoção dessa postura pelo professor requer, no entanto, um esforço importante no sentido de abandonar o método tradicional de avaliação que privilegia a atribuição de notas ou conceitos. Neste novo cenário a aprendizagem do aluno é o centro do processo.

Entendemos que a avaliação da aprendizagem está intrinsecamente ligada às formas de ensinar e às formas de aprender e, neste contexto, o papel da avaliação tem a função de desvendar a maneira como o aluno aprende e o que ele aprende para orientar a maneira como o professor deve ensinar.

Notas

[1] Enseignant: Professor. Elève: aluno. Milieu: Meio.

[2] O termo instituição é utilizado aqui na perspetiva da Teoria Antropólogica do Didático — TAD (CHEVALLARD, 1985).

Referências

Baruk, S. *L'age du capitaine*. Paris: Eds. Seuil, 1985.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática, ensino de quinta a oitava séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Brousseau G. *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions, 1998.

Brousseau, G. Le contrat didactique: le milieu. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques — RDM*. Vol. 9, n.° 3. Grenoble: La Pensée Sauvage — Éditions, p. 309–336 , 1990.

Brousseau, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In: *Recherches en Didactiques des Mathématiques — RDM*. Vol. 4, n.° 2. Grenoble: La Pensée Sauvage — Éditions, p. 164-198, 1993.

Câmara dos Santos, M. et al. Avaliar com os pés no chão ... da classe de matemática. In: Carvalho, M. H. C.(Org.). *Avaliar com os pés no chão da escola: reconstruindo a prática pedagógica no Ensino Fundamental*. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2000.

Chevallard, Y. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

Douady, R. *Jeux de cadres et dialetique outil-objet dans l'enseignement dês matehématiques*. Tese de doutoramento. 1984. Universidade Paris-VII, 1984.

Gitirana, V., Planejamento e avaliação em Matemática. In: Silva, J; F.; Hoffmann, J.; Esteban, M; T; (orgs.). *Práticas avaliativas e aprendizagens significativas: em diferentes áreas do currículo*. Porto Alegre: Mediação, 2003.

Hoffmann, J. Prefácio: Pilares da Avaliação. In: Silva, J. F., *Avaliação na perspetiva formativa-reguladora. Pressupostos teóricos e práticos*. 2.ª ed. Porto Alegre: Mediação, 2004.

Hoffmann, J. *Pontos & contrapontos*: do pensar ao agir em avaliação. Porto Alegre: Mediação, 1998.

Kamii, C. *A criança e o número*. Campinas: Papirus, 1995.

Lima, I. *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*. Colletion Universitaire. Paris: Edilivre Editions, 2009. (Colletion Universitaire)

Luckesi, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 10. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

Margolinas, C. La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In: SIMMT, E.; DAVIS, B. (ed.). *Actes 2004 de la rencontre annuelle du groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques*, CMESG/GCEDM. Edmonton, 2005.

Margolinas, C. Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. In: Dorier, J.-L. et al. (eds.). In: *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Corps, août 2001. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 2002. p. 141–156.

Polya, G. A. *Arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1986.

Piaget, J. *Fazer e Compreender*. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

Piaget, J. *O Desenvolvimento do Pensamento*: Equilibração das Estruturas Cognitivas. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1977.

Perrenoud, P. *Avaliação*: da Excelência à Regulação das Aprendizagens: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

Ponte et al. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Silva, J. F. *Avaliação na perspetiva formativa-reguladora. Pressupostos teóricos e práticos*, 2.ª ed. Porto Alegre: Mediação, 2004.

Tyler, R. W. *Basic principles of curriculum and instruction*. Chicago: University of Chicago, 1949.

Zabala, A. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

Iranete Lima
Universidade Federal de Pernambuco
iranetelima@yahoo.com.br

APM – 2012

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2012

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2012

		Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções