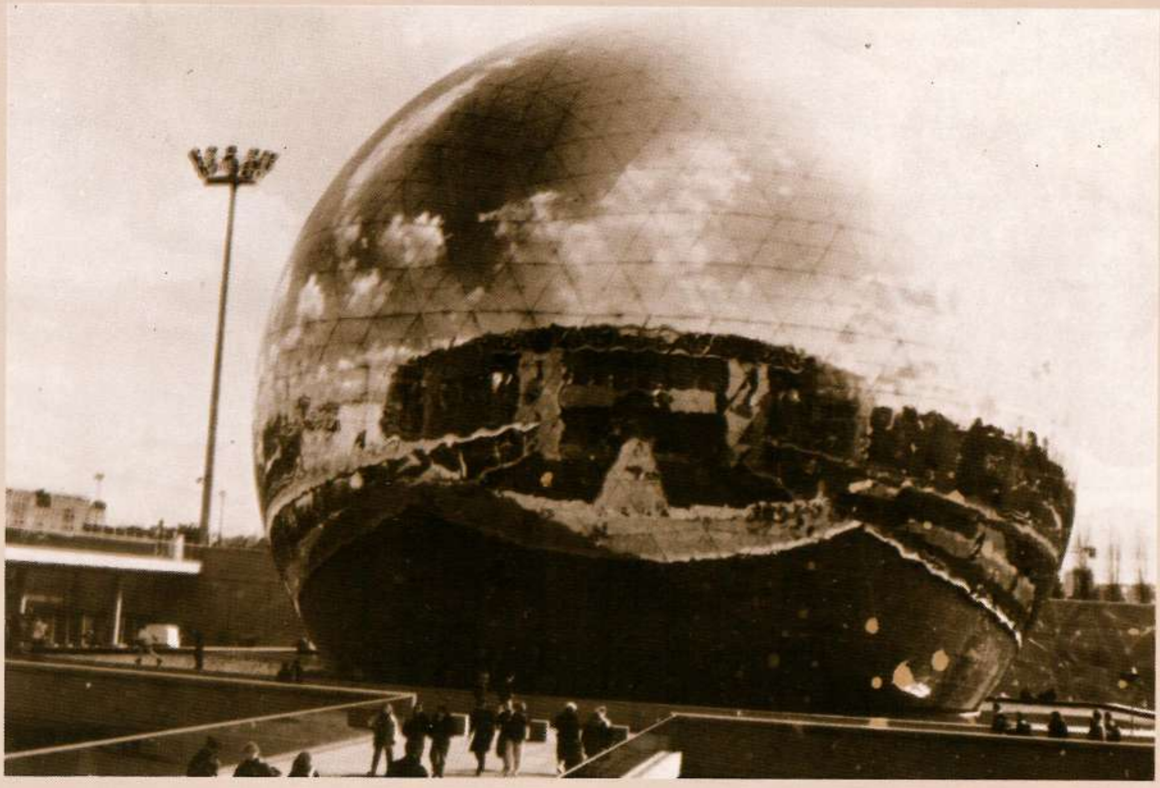
Educação e Matemática

N.º 10

2.º Trimestre de 1989



Núcleo do Porto visita La Villette

250$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

PUBLICAÇÕES APM

Agenda do Professor de Matemática
Ano Lectivo 1989/90

* Autores: Ana Vieira Lopes, António Bernardes, José Manuel Varandas
* 53 Páginas com: Problemas
Curiosidades Matemáticas
Sugestões de Actividades
História da Matemática
* Páginas para a sua planificação diária e anual — Set. 89 a Set. 90
* Páginas com: Calendários Civil e Escolar
Indicações Úteis
Actividades da A.P.M.
* Páginas para: Notas Pessoais
Horário Lectivo
Nomes, Moradas e Telefones
Notas

Dia-a-Dia com a Matemática é uma das secções regulares da revista «Educação e Matemática». Nela, a resolução de problemas tem tido lugar de destaque, a par de curiosidades matemáticas e de breves referências históricas.

Dia-a-Dia com a Matemática é agora uma nova publicação da APM que procura ir mais além na exploração destes temas. Foi nossa preocupação que os variados tópicos que aqui são abordados possam constituir sugestões de trabalho para o dia-a-dia dos professores de Matemática dos vários níveis de ensino.

☐ 1.ª Edição, Agosto 1989: 140 pp.; preço 360$00 (sócios 300$00)

- *Agenda para a Acção* — recomendações para o ensino da Matemática nos anos 80
  ☐ 4.ª Edição, Fevereiro 1988: 58 pp.; *preço: 180$00 (sócios 150$00)*
- *O Computador na Aula de Matemática* — Eduardo Veloso
  ☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 73 pp.; *preço: 300$00 (sócios 250$00)*
- *Jogos, Enigmas e Problemas* — Odete Bernardes e Paula Teixeira
  ☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 48 pp.; *preço: 180$00 (sócios 150$00)*
- *A Matemática na Vida das Abelhas* — Ana Luísa Teles, Ana Vieira, Aniss Ali e Fátima Tavares
  ☐ 2.ª Edição, Julho 1988: 80 pp.; *preço: 300$00 (sócios 250$00)*
- *O Problema da Semana* — Maria João Costa
  ☐ 5.ª Edição, Julho 1988: 86 pp.; *preço: 240$00 (sócios 200$00)*
- *PROFMAT N.º 3*
  ☐ 1.ª Edição, Setembro 1987: 188 pp.; *preço: 480$00 (sócios 400$00)*
- *PROFMAT N.º 4*
  ☐ 1.ª Edição, Janeiro de 1989: 269 pp.; *preço: 600$00 (sócios: 500$00)*
- *O Geoplano na Sala de Aula* — Lurdes Serrazina e José Manuel Matos
  ☐ 2.ª Edição, Abril 1989: 276 pp.; *preço: 600$00 (sócios 500$00)*
- *Viagem de Ida e Volta* — Paulo Abrantes
  ☐ 1.ª Edição, Agosto 1988: 63 pp.; *preço: 300$00 (sócios 250$00)*
- **Educação e Matemática,** disponíveis exemplares dos números 2, 3, 4 e 7. *Preço de cada número: 200$00 ou 250$00 (N.ºs 7, 8, 9 e 10)*
  Outros números disponíveis em fotocópia a 200$00 cada um.
- *Renovação do Currículo de Matemática / documentos para Discussão*
  ☐ 2.ª Edição, Novembro 1988: 89 pp.; *preço: 240$00 (sócios 200$00)*
- *Cadernos de Educação e Matemática - n.º 1 / A Natureza da Matemática*
  ☐ 1.ª Edição, Setembro 1988: 75 pp.; *preço: 420$00 (sócios 350$00)*

Estes e outros materiais podem ser pedidos pelo correio, utilizando fotocópia da ficha publicada noutros números e segundo as condições habituais.

FICHA TÉCNICA

Título da publicação:

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 10, 2.º trimestre de 1989

Directora: Leonor Moreira

Redacção:

António Bernardes
Eduardo Veloso
Fernando Nunes
Henrique Guimarães
José Manuel Duarte
Paulo Abrantes

Colaboraram neste número:

Albano Silva, Alberto Canelas, António Bernardes, Branca Silveira, Conceição Mesquita, Cristina Loureiro, Fernando Bensabat, Fernando Duarte, Fernando Nunes, Jorge Maia, José Manuel Varandas, José Paulo Viana, Leonor Moreira, Lúcia Grugnetti, Luís Carmelo, Manuel Saraiva, Maria José Costa, Sérgio Valente, Teresa Barandela.

Capa: A fotografia da capa foi realizada pelo Núcleo do Porto

Entidade Proprietária:

Associação de Professores de Matemática

Periodicidade: Trimestral

Tiragem: 2000 exemplares

Fotocomposição, montagem e fotolito:

Execução e oferta da Texto Editora, Lda.

Impressão: Costa e Valério

N.º de Registo: 112807

Correspondência:

Associação de Professores de Matemática
a/c de Leonor Moreira
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

Editorial

As aplicações da matemática em foco

Quando, de volta a casa, pagamos as hortaliças no minimercado da nossa rua, quando pensamos mudar a alcatifa a que o triciclo e os patins apressaram a ruína, quando, num exercício de dificuldade extrema, conseguimos que o ordenado nos chegue até ao fim do mês, quando, em semana de *Jackpot*, traçamos nove cruzinhas no boletim do totoloto, estamos a fazer matemática.

Quando um qualquer Taveira concebe umas Amoreiras ou uma ponte, quando um Cadilhe faz previsões (ainda que erradas) sobre a taxa de inflação, quando a análise dos sinais obtidos em estudos de terreno nos nega o petróleo tão desejado, quando um jogador inveterado arrisca uma ficha «gorda» no preto, porque já saiu sete vezes o vermelho, é mais uma vez a matemática que está por detrás das decisões.

O nosso mundo seria bem diferente se a matemática não existisse. Sem a álgebra linear a sonda Voyager II que há doze anos desvenda segredos do nosso sistema solar, não teria, sequer, descolado, não haveria, mesmo, aviões supersónicos, nem computadores. Sem a análise de Fourier, os nossos telhados estariam virgens de antenas parabólicas, porque a transmissão por satélite não passaria de ficção. O sintetizador de voz seria, igualmente, ficção pura e, só nos filmes de espionagem, as chaves seriam objectos insólitos, porque as portas não se abririam ao reconhecerem a voz do dono. Sem o desenvolvimento de novos modelos de simulação e de métodos de cálculo em tempo real, qualquer programa de defesa estratégica, como o denominado Guerra das Estrelas, não passaria de um *war game*.

Que seria da física sem o cálculo das trajectórias das partículas, da medicina sem a tomografia, da aeronáutica, da biologia, da química, da economia, etc., sem os modelos de simulação?

É, assim, um facto que a evolução da ciência matemática tem condicionado (pelo menos, parcialmente) o progresso das outras ciências.

A matemática que, no fim do século passado, abrangeria uma dúzia de ramos e 38 subcategorias, tem, hoje, 60 ramos que se dividem em mais de 3400 subcategorias com aplicações, necessariamente, diferentes.

O ensino/aprendizagem da matemática não pode, por isso, desprezar uma área de trabalho tão rica e tão relevante como a das aplicações da matemática. Nesse sentido, Educação e Matemática vai dedicar um dos próximos números a esse tema. Aqui fica, desde já, o convite e o pedido de colaboração.

Leonor Moreira

A importância do problema

Lucia Grugnetti, Universidade de Cagliari (Itália)

Ao fazer, ainda que em traços gerais, a história da Matemática desde os Babilónios e dos antigos Egípcios, a importância atribuída ao problema como caminho preferencial para a transmissão do saber, aparece de forma absolutamente clara. De facto, grande parte das matemáticas antigas foi-nos transmitida exactamente sob a forma de problemas.

O contexto histórico sublinha também a importância do recurso a problemas não como fins em si mesmos, mas que estejam pertinentemente integrados na realidade quotidiana.

Fala-se actualmente com muita frequência de «problem-solving»(1) e de contexto real, e está certo que se fale mas, na minha opinião, tendo consciência do passado que a história das matemáticas nos proporciona, é interessante ir aí procurar alguns exemplos notáveis.

Devemos, pois, fazer frente a esta temática do ponto de vista da sua actualização; é exactamente nesse sentido que considero os novos programas(2) satisfatoriamente adequados.

Transcrevo a seguir, as passagens mais relevantes relativamente ao papel do problema nos programas de Matemática da Escola Primária, da Escola Média e nas propostas para o Ensino Superior(3).

Escola Primária

O pensamento matemático é caracterizado por uma actividade de resolução de problemas e isto vem ao encontro da tendência da criança de fazer perguntas e de procurar as respostas. Portanto, as noções matemáticas básicas devem ser fundadas e construídas a partir de situações problemáticas concretas, provenientes de experiências reais da criança e que proporcionem, também, a oportunidade de verificar os conhecimentos matemáticos anteriores, os instrumentos e as estratégias utilizadas, bem como, as dificuldades com que a criança se confronta.

Escola Média

É necessário lembrar que «resolver» um problema não significa só aplicar regras fixas a situações já esquematizadas, mas significa, também, abordar os problemas de raiz, e pedir ao aluno que se encarregue totalmente da tradução em termos matemáticos.

No quadro deste trabalho de tradução, encontrar-se-á, entre outras, uma motivação concreta para a construção de expressões aritméticas e para as convenções da escrita.

Também para as equações e inequações se encontra motivação na resolução de problemas adequados.

Ensino Superior

Ao tratar os vários temas, o professor deve ter presente que o que qualifica, de forma pertinente, a actividade matemática é a formulação e a resolução de problemas no sentido mais lato do termo.

Consequentemente, cada tema deve ser considerado prioritariamente como um campo de problemas. Sem negar totalmente a presença de exercícios de tipo repetitivo como suporte da aprendizagem, não resta qualquer dúvida que a educação matemática se realiza, essencialmente, no desafio de resolver problemas novos.

Quando da verificação, é então necessário controlar até que ponto o aluno transfere os conhecimentos que tem, para situações diferentes das já encontradas.

Da análise do problema surgirá a exigência de uma teoria que permita a sua resolução e assim, à medida que as noções teóricas vão sendo assim apreendidas, deverão ser oportunamente relacionadas e ordenadas.

Pondo em evidência estas passagens relativas aos diferentes programas, não quero com isso afirmar que a única via da didáctica da Matemática seja a que «passa» pelos problemas. Como com todos os aspectos do ensino, o do ensino por problemas comporta muitos riscos quando exagerado, quando se torna um assunto rotineiro e, principalmente, quando é a única proposta de trabalho.

Creio, apesar de tudo, que os problemas têm um papel muito importante no ensino, se forem considerados como uma descoberta de estratégias, de uma via para ultrapassar um obstáculo, como uma forma de construir um conceito (partindo de um contexto real) e, portanto, como uma interpretação pensada e crítica da realidade.

Neste contexto, creio não ser inútil prestar atenção ao papel que o problema tem tido ao longo da História.

O problema na História

Como se sabe, na tradição matemática anterior aos Gregos (Babilónios e antigos Egípcios), encontra-se, essencialmente, a resolução de problemas.

Não temos, dessa época, tratados com teoremas, mas sim, problemas, muitas vezes acompanhados da indicação do procedimento a seguir para a sua resolução.

Esses problemas estão, em geral, relacionados com a realidade e os temas, em torno dos quais são construídos são, principalmente, de ordem alimentar (o pão e a cerveja no caso dos antigos Egípcios), de ordem comercial ou financeira, ou ainda relativos à partilha de terras entre herdeiros, etc.

Alguns especialistas deste período da história da matemática julgaram que a aplicação prática era, talvez, uma roupagem de carácter pedagógico; tratava-se de tornar atractivo o esforço que era exigido ao aluno.

O texto dos problemas compreende geralmente um enunciado que, depois de uma referência ao concreto, é do tipo: «Acrescentei ao meu quadrado o seu lado obtive tanto» (subentendido: qual é o lado?).

Segue-se uma série de instruções expressas na segunda pessoa do singular, chega-se ao resultado e, no fim, temos a «prova», verificar se o resultado permite reconstituir os dados.

No caso da matemática dos antigos Egípcios e do Papyrus Rhind, em particular, que remonta a cerca de 1600 a.C., pode-se notar que a maioria dos 87 problemas apresentados, são de natureza prática, mas, nalguns casos, parece que o escriba (Ahmes) teve a intenção de propor adivinhas ou jogos matemáticos. É o caso do problema 79 que considera «7 casas, 49 gatos, 343 ratos ...» e que encontramos com uma forma parecida, no Liber Abbaci[4] (de Leonardo Pisano) escrito em 1202.

Leonardo Pisano (dito Fibonacci) recorre ao mesmo problema com a forma «7 velhinhas vão viajar para Roma, cada uma com 7 machos ...» (que encontramos também em vários contos bem conhecidos) como um exemplo de progressão geométrica com 6 termos em que o primeiro é 7 e cuja razão é 7.

É interessante salientar que Fibonacci, a propósito deste problema e de quase todos os outros do seu Liber Abbaci, apresenta mais do que um processo de resolução.

Encontra-se frequentemente escrito «est enim alius modus in solvendo similes questiones».

Não é raro que um problema seja resolvido por via algébrica e por via geométrica, explorando o uso de quadros, esquemas e de representações gráficas adequadas[5].

No Liber Abbaci há também um outro aspecto fundamental, no que se refere à resolução de um problema, que é a possibilidade de, nalguns casos, para certos valores dos dados ou devido a condições especiais, o problema não ser resolúvel (ou a solução não ter sentido).

Fibonacci fala de «questio insolubilis» relativamente a certos problemas de partilha de dinheiro entre várias pessoas.

A maioria dos «Traités d'Abaque» tanto da Idade Média como da Renascença são, de facto, recolhas de problemas.

Neles se encontram problemas práticos e problemas recreativos que, devido às argumentações e às estratégias interessantes a que fazem apelo, ainda hoje são apresentados.

Por exemplo, incluem-se nesta tradição os problemas relacionados com pesagens dispondo de um número limitado de pesos[6].

Numa época anterior, encontram-se as curiosas e famosas «Propositiones ad acuendos juvines» (para tornar os jovens inteligentes) D'Alcuin (que viveu na corte de Carlos Magno).

As «Propositiones» são uma recolha de questões «matemáticas» que influenciaram, durante alguns séculos, os autores dos manuais escolares. Entre outros, encontra-se o subtil problema, conhecido sob diversas formas, cujo enunciado é frequentemente «Um lobo, uma cabra e uma couve...»

Em épocas mais recentes, matemáticos célebres como Descartes, Leibnitz, Newton, Euler, deram bastante atenção à resolução de problemas.

Euler, no seu tratado de Álgebra, interessante também do ponto de vista didáctico pela variedade e elegância dos problemas discutidos, recorre a uma apresentação «agradável» dos problemas. Por exemplo, o problema no 50 do quarto capítulo é apresentado da forma seguinte:

> Um macho e um burro transportavam um carregamento de alguns meios quintais.
>
> O burro queixava-se da sua carga e disse ao macho: «Só preciso de meio quintal da tua carga para que a minha seja o dobro da tua».
>
> O macho respondeu: «Sim, mas se me deres meio quintal da tua carga, eu ficarei três vezes mais carregado do que tu».
>
> Quantos meios quintais transportava cada um?

Segue-se uma explicação muito clara e detalhada da resolução do problema em que Euler «ensina» a equacionar e a resolver um sistema de equações lineares.

O papel actual do problema

No breve percurso histórico manifestaram-se alguns aspectos do ensino em que houve recurso aos problemas.

Fiz alusão a problemas com várias estratégias de resolução, a problemas «impossíveis», à tradução de problemas descritos verbalmente em problemas descritos por equações e sistemas de equações.

Evidenciou-se um recurso constante aos problemas como campo de aplicação de conceitos e de regras.

Esses aspectos, importantes, não são de certo exaustivos, pelo menos actualmente.

Como é sabido, a partir dos anos setenta, em vários países do mundo, tem havido quem se bata, com uma ênfase cada vez maior, por uma metodologia por problemas.

«Partidários» de um pragmatismo acentuado (e talvez limitativo), por um lado, e «bourbakistas» convictos, por outro lado, encetaram uma polémica muito viva.

Sem entrar no âmago desta discussão que, em alguns casos tem sido muito animada, quero aqui pôr em evidência o ponto de vista do Centro de Investigação e Experimentação de Educação Matemática (CRSEM) de Cagliari, onde trabalho, que é o nosso ponto de vista sobre o papel do problema no mundo actual.

Acreditamos que o problema ou um problema em si mesmo não é importante, mas sim um conjunto coordenado de problemas, na acepção mais ampla do termo e, ainda melhor, um conjunto de situações problemáticas que, a partir da realidade (que, por vezes, pode mesmo ser uma situação de jogo) permite abrir caminho, progressivamente, até uma generalização a que não se pode renunciar.

Compreende-se, facilmente, que se trata de um processo indutivo em cujo quadro um conceito se constrói por «aproximações sucessivas».

Com este sentido mais amplo, a metodologia por problemas não corre o risco apontado por alguns matemáticos e, em particular, por Luigi Pepe que, numa conferência em Janeiro de 1985[7] para o seminário didáctico de Ferrara, disse, entre outras coisas: «um ensino por problemas, mesmo engenhosa e brilhantemente resolvidos, fora de um quadro disciplinar, pode concretamente conduzir a uma forma nova e mais perigosa de nocionismo...»

Neste ponto parece fundamental um entendimento claro sobre o sentido a atribuir à metodologia por problemas ou ao papel do problema na didáctica.

Uma coisa é resolver mecanicamente muitos problemas (algumas das práticas escolares recusam problemas que não se enquadrem rigorosamente em esquemas pré-estabelecidos), outra coisa bem diferente é partir de uma discussão crítica sobre uma ou várias problemáticas (também sobre a forma de problema) para atingir gradualmente, por formas e tempos adequados ao nível de escolaridade, um conceito.

A seguir, o conceito poderá, ou melhor, deverá ser, por sua vez, aplicado à análise da realidade.

Considero oportuno proporcionar aqui uma ilustração desta metodologia desenvolvida no quadro do CRSEM dirigido pelo Prof. Oscar Montaldo.

O aspecto principal do projecto de investigação e experimentação matemática, iniciado há já alguns anos pelo Centro, é uma renovação didáctica coordenada desde a escola primária até aos níveis superiores da escola secundária, caracterizada por uma aproximação em espiral aos diferentes temas que vão sendo convenientemente alargados e aprofundados, à medida que se avança nos níveis de escolaridade.

O exemplo diz respeito à didáctica das «probabilidades» na Escola Primária e na Escola Média.

As minhas colegas Carla Caredda e Maria Polo que coordenam os grupos da escola primária ligados ao CRSEM, tratando este tema, observaram que as crianças muito novas (5-7 anos), em presença de uma situação problemática (mesmo de jogo), dificilmente conseguiam distinguir a sua experiência pessoal da situação a analisar.

Pelo contrário, acontece frequentemente que, ao procurar a forma de resolver a situação, as crianças «forçam» a escolha dos algoritmos de resolução exactamente porque relacionam tudo com a sua experiência anterior.

Ultrapassada esta fase, as situações problemáticas, que pressupõem escolhas e previsões em condições de incerteza, podem proporcionar um bom contributo.

Para adoptar uma atitude didacticamente correcta, é fundamental interrogarmo-nos sobre quais são as «situações de incerteza» para a criança.

De certeza que não são as mesmas do professor ou dos adultos que as rodeiam (de qualquer forma, todas as situações problemáticas, sob aspectos diferentes, são situações de incerteza para alguém).

A criança, da escola pré-primária está num ponto máximo (relativo) de «situação de incerteza», dado que a ultrapassagem de uma situação problemática não é só a «descoberta» da solução (ou soluções) mas é, principalmente, a formação de conceitos.

É necessário, então, evitar demorar muito tempo na fase das operações concretas, qualquer que seja o objectivo da actividade; arriscar-nos-íamos, assim, a só favorecer os processos repetitivos que não coincidem com a aquisição de conceitos.

«A situação problemática» quase nunca coincide com um único problema, mas sim, com a passagem (principalmente no que se refere às crianças) de um problema concreto (por exemplo, de caracter lúdico) a um problema de nível «formal».

Que questões se põem à criança na passagem do primeiro ao segundo nível?

No contexto de uma experiência realizada em aulas do terceiro ano de escolaridade (8 anos), os alunos começaram por trabalhar, a nível lúdico, em actividades de extracção de bolas coloridas, no decurso das quais se observou, em especial, os momentos de previsão das cores das bolas a extrair.

Na fase seguinte, não tendo o material concreto à disposição, foi-lhes proposta a seguinte ficha:

Neste saco há uma bola branca e uma preta. O Pedro vai extrair só uma bola.

Lê com atenção e marca com uma cruz o caso que consideras correcto.

Qual das três afirmações é, com certeza, impossível?

O Pedro tirou uma bola preta.
O Pedro tirou uma bola vermelha.
O Pedro tirou uma bola branca.

Qual é, com certeza, verdadeira?

O Pedro tirou uma bola preta.
O Pedro tirou uma bola branca ou uma bola preta.
O Pedro tirou uma bola amarela.

Qual é possível?

O Pedro tirou uma bola preta.
O Pedro tirou uma bola vermelha.

Dos dados recolhidos, foi possível constatar-se como uma «certeza» e, portanto, um «conhecimento», que se poderia considerar adquirido ao nível da experiência concreta, não estava de forma nenhuma adquirido ao nível das operações mentais que requerem o recurso à «simulação pensada» da actividade concreta.

A razão apresentada por um aluno que tinha assinalado o primeiro caso da ficha, foi: «lembro-me muito bem que no último jogo a primeira bola que tirei era branca».

No momento em que a criança faz a passagem correcta do problema concreto ao problema formal, aquela situação pode ser considerada ultrapassada.

Ao nível da escola média, tendo em conta os programas em vigor, pensamos que só devem ser formalizadas as noções mais simples de cálculo das probabilidades e favorecer, sobretudo, a formação do pensamento «probabilístico»(8).

Pensamos que uma intervenção susceptível de atingir este objectivo se deveria fazer a partir de uma problemática concreta (mais do que por uma abórdagem da probabilidade através dos «jogos clássicos»), o que pode constituir um itinerário rico em estruturas conceptuais.

Neste quadro, para chegar à probabilidade como medida da incerteza, teve um papel fundamental a necessidade de uma amostra casual numa pesquisa não exaustiva.

Tendo em consideração o itinerário didáctico (descrito a seguir) depois de aplicado um inquérito que atingiu todos os elementos de uma população (um pequeno centro agrícola de cerca de 800 famílias) pôs-se-nos a questão da sua transferência para uma população mais vasta (uma cidade com cerca de 250 000 habitantes: Cagliari).

Como proceder?

A impossibilidade (ou pelo menos a dificuldade) de chegar directamente a todos os membros da população pareceu imediatamente evidente.

Daí, a necesidade de recorrer a uma «amostra».

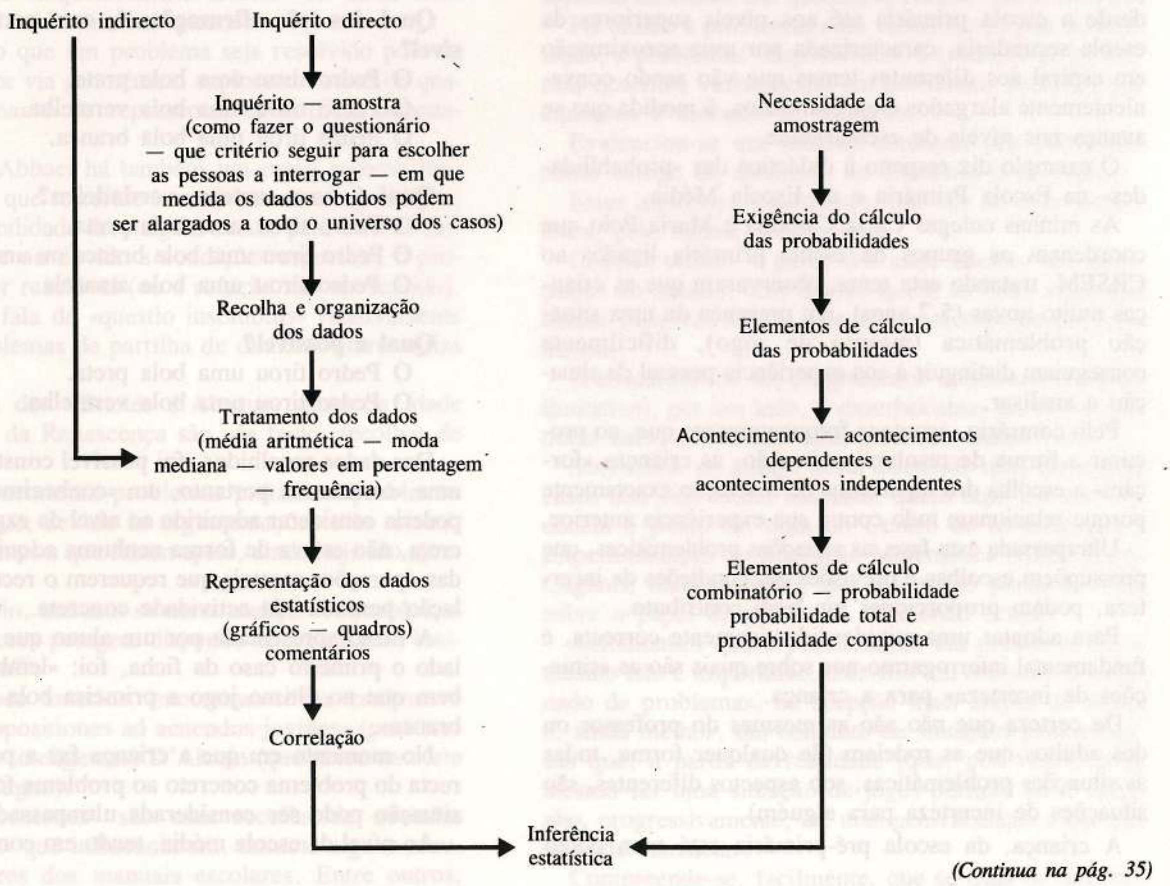
Depois de um inquérito preliminar nas aulas, verificou-se que o significado deste termo não era, em geral, conhecido dos alunos. Recorremos então a exemplos, como: «o costureiro mostra ao cliente uma amostra de tecido para que este possa escolher», «para uma análise de sangue, colhe-se uma amostra», «se uma discoteca quer saber qual é a música preferida dos jovens, interroga uma amostra», etc.

Voltando ao problema em causa, pediu-se aos alunos que discutissem e respondessem à seguinte questão:

«Será correcto escolher como amostra:
a) os habitantes de um quarteirão?
b) os empregados de determinado escritório?
c) algumas pessoas cujos nomes figuram na lista telefónica?»

As respostas, como era de prever, foram as mais díspares; desenvolveu-se, então, um trabalho guiado que permitiu pôr em evidência que, se queremos uma amostra representativa de toda a população da cidade, é difícil que as suas características se encontrem todas num só quarteirão. Não se pode, portanto, excluir *a priori* um habitante qualquer, por não pertencer àquele quarteirão. Todos os habitantes devem estar, à partida, em iguais condições de ser recolhidos.

Desta forma, começa a precisar-se a ideia de «igual possibilidade», e a procura das condições que definem esta «igual possibilidade» conduz à exigência de uma medida adequada e, portanto, à exigência do cálculo das probabilidades.



(Continua na pág. 35)

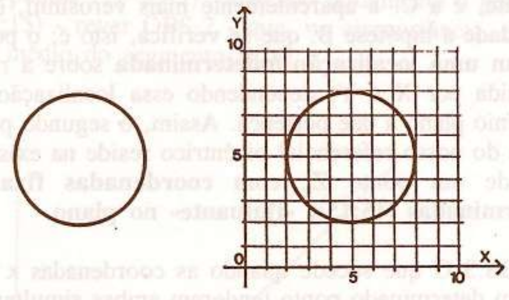
As mais belas rectas do mundo

Fernando Bensabat, E. Secundária Sebastião e Silva

Como professor do 5.º grupo do Ensino Secundário — área das chamadas Artes Visuais — tive recentemente necessidade de explorar mais detalhadamente uma rubrica do programa da disciplina de Teoria de Design, intitulada «Métodos de Desenho». Apesar da designação, estes Métodos de Desenho não são mais que processos controlados, que recorrendo a um encadeamento de operações de carácter gráfico ou geométrico, visam alterar formas previamente definidas. Assim, por exemplo, a texturização de superfícies, de natureza acentuadamente gráfica, transforma profundamente a qualidade perceptiva dos objectos.

Contudo, para além da simples utilização de grafismos, há nos Métodos de Desenho outros processos mais aliciantes - refiro-me às operações de simetria (translações, rotações, simetrias central e axial) e, sobretudo, a um método que desde logo me fascinou: **Alteração da Malha Geradora**. No âmbito das geometrias alternativas, que assentam em axiomáticas não-euclideanas, este método parece abrir interessantes perspectivas no domínio da organização métrica do plano, pelo que passarei a expor uma das suas inúmeras possibilidades.

Chamo **malha geradora** (fig. 1) a uma estrutura linear constituída por linhas referenciais que servem de suporte a uma dada forma e que permite transitar do plano da expressão para o plano da compreensão. Chamo «compreensão de uma forma» à intuição racional das suas características qualitativas e quantitativas.



Expressão Compreensão

Fig. 1

A malha geradora mais óbvia e conveniente corresponde, naturalmente, ao referencial cartesiano ortonormado. Que acontecerá, no entanto, se o modificarmos qualitativamente?

Seja o referencial cartesiano ortonormado. Chamo «linhas de referência das abcissas» a todas as rectas de abcissa constante, ou seja, a todas as rectas verticais. Do mesmo modo, chamo «linhas de referência das ordenadas» a todas as rectas de ordenada constante, isto é, a todas as rectas horizontais. Desta forma, podemos considerar que o plano cartesiano é resultante da intersecção de dois feixes ortogonais de rectas paralelas. As linhas de referência das abcissas intersectam-se num ponto impróprio do plano, situado a uma distância não finita da origem das coordenadas, a que chamarei ponto X; as linhas de referência das ordenadas irão igualmente intersectar-se num ponto impróprio do plano, que designarei por Y.

Localizemos agora esses pontos X e Y a uma distância finita da origem das coordenadas. Sejam X e Y os pontos médios de dois lados consecutivos de um quadrado com 10 de lado, com lados horizontais e verticais e com um vértice na origem das coordenadas (fig.2).

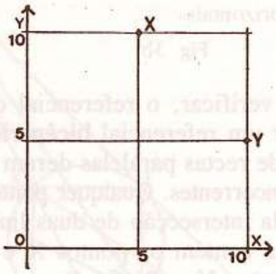
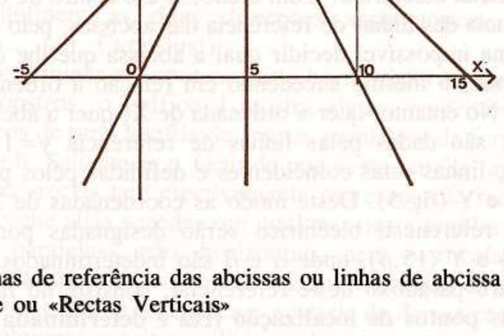


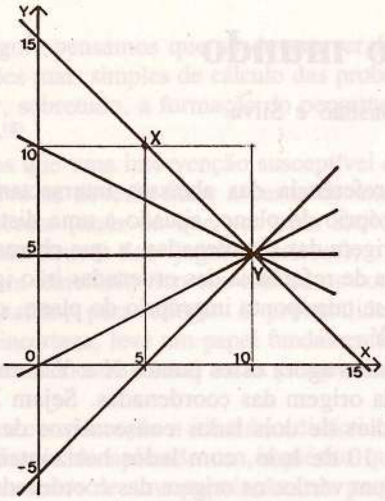
Fig. 2

Tal como foi atrás mencionado, as linhas de referência das abcissas intersectam-se em X, do mesmo modo que as linhas de referência das ordenadas se intersectarão em Y (fig. 3a e 3b).



Linhas de referência das abcissas ou linhas de abcissa constante ou «Rectas Verticais»

Fig. 3 a



Linhas de referência das ordenadas ou linhas de ordenada constante ou «Rectas Horizontais»

Fig. 3b

Como se pode verificar, o referencial ortonormado foi substituído por um referencial **bicêntrico** e os dois feixes ortogonais de rectas paralelas deram lugar a dois feixes de rectas concorrentes. Qualquer ponto P do plano ficará definido pela intersecção de duas linhas de referência: a recta que contém os pontos X e P e a recta que contêm os pontos Y e P (fig.4).

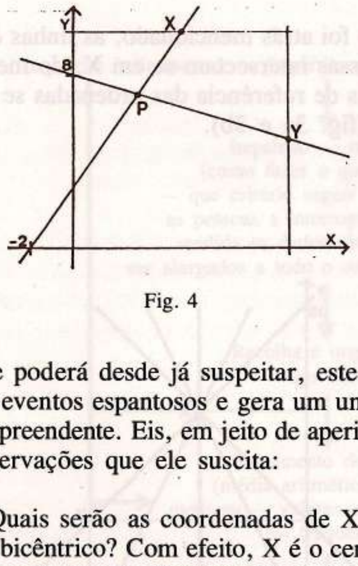


Fig. 4

Como se poderá desde já suspeitar, este referencial é fértil em eventos espantosos e gera um universo geométrico surpreendente. Eis, em jeito de aperitivo, as primeiras observações que ele suscita:

OBS.1 Quais serão as coordenadas de X e de Y no referencial bicêntrico? Com efeito, X é o centro de convergência das linhas de referência das abcissas, pelo que se torna impossível decidir qual a abcissa que lhe corresponde, o mesmo sucedendo em relação à ordenada de Y. No entanto, quer a ordenada de X, quer a abcissa de Y, são dadas pelas linhas de referência $y=15$ e $x=15$, linhas estas coincidentes e definidas pelos pontos X e Y (fig.5). Deste modo as coordenadas de X e Y no referencial bicêntrico serão designadas por X $(\alpha;15)$ e Y $(15;\beta)$, onde α e β são indeterminados. O primeiro paradoxo deste referencial, consiste no facto de dois **pontos de localização fixa e determinada do plano terem coordenadas «flutuantes»**, já que as coordenadas α e β estarão dependentes do domínio plano em que X e Y estejam contidos.

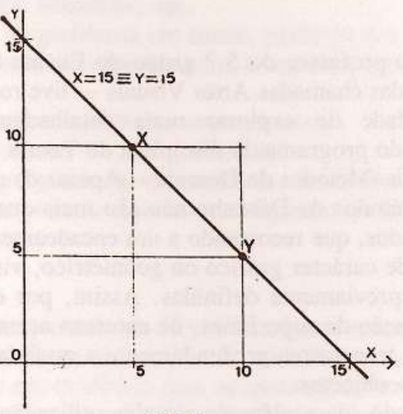


Fig. 5

OBS.2 Como consequência imediata da observação anterior, surge uma outra questão embaraçosa: onde se encontra localizado o ponto Z(15;15) no referencial bicêntrico? Três situações alternativas poderão ser consideradas:

A. o ponto Z(15;15) **é a própria recta que une X e Y**, domínio plano resultante da intersecção das linhas de referência $x=15$ e $y=15$ (rectas coincidentes);

B. o ponto Z(15;15) **não existe** no plano ordenado pelo referencial bicêntrico ou, pelo menos, **tem uma localização indeterminada**;

C. o ponto Z(15;15) **é um ponto determinado** situado algures sobre a recta definida pelos pontos X e Y.

Embora a hipótese A. seja, sem dúvida, a mais fascinante, e a C. a aparentemente mais verosímil, é na realidade a hipótese B. que se verifica, isto é: o ponto Z **tem uma localização indeterminada** sobre a recta definida por X e Y, dependendo essa localização do domínio plano a que pertença. Assim, o segundo paradoxo do nosso referencial bicêntrico reside na existência de um ponto Z, **com coordenadas fixas e determinadas (15;15), «flutuante» no plano**.

OBS.3 O que sucede quando as coordenadas x e y de um determinado ponto tenderem ambas simultaneamente para infinito, independentemente do seu sinal? Obviamente, a linha de referência das abcissas torna-se paralela ao primitivo eixo das abcissas, o mesmo sucedendo à linha de referência das ordenadas, que se torna paralela ao primitivo eixo das ordenadas (fig.6). As duas linhas de referência mencionadas intersectam-se no ponto I, cujas coordenadas, por esse facto, são ambas ∞, sem sinal determinado. Temos, assim, **a uma distância finita dos pontos X e Y, um ponto de coordenadas não finitas!** Terceiro paradoxo... ou o infinito mesmo à mão de semear?

Após estas primeiras observações - que normalmente deveriam suscitar um apreciável acréscimo na produção de adrenalina... - irei procurar mostrar alguns dos surpreendentes resultados obtidos na representação gráfica de funções lineares neste referencial.

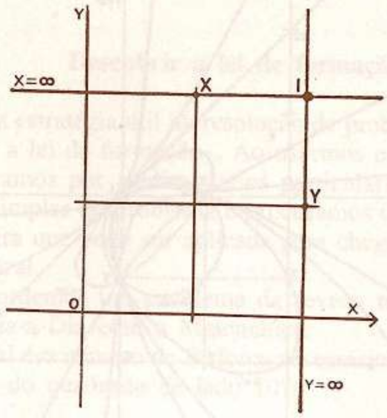


Fig. 6

Sejam então as rectas dadas na forma $y=mx+b$ e representemos no referencial bicêntrico as bissectrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente $y=x$ e $y=-x$.

Como podemos observar no gráfico 1, as duas «rectas» apresentam configurações diferentes: ao passo que a «recta» $y=x$ mantém (orgulhosa) a sua representação rectilínea, a «recta» $y=-x$ tem uma sedutora representação elíptica. Trata-se de duas «rectas perpendiculares» **que se intersectam em dois pontos**: o ponto O (0;0) e o ponto I (∞;∞). Refira-se que a «recta» $y=x$ tem um ponto localizado a uma distância não finita de X e Y, o «ponto» P (–5;–5), contendo igualmente o ponto Z (15;15) - rever OBS.2 - que, na circunstância, é o ponto médio do segmento [XY].

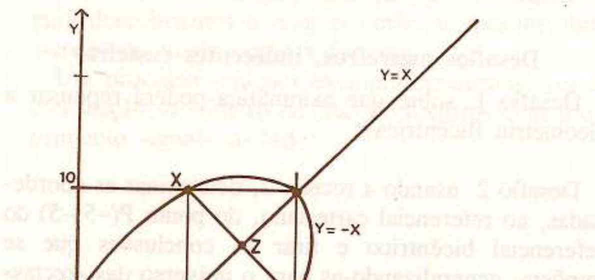


Gráfico 1

Note-se ainda que a «recta» $y=-x$ contém os pontos X e Y cujas coordenadas são, por tal motivo, X(–15;15) e Y(15;–15): $\alpha=\beta=-15$ — rever OBS. 1.

Sejam agora as duas «rectas paralelas» $y=-x+10$ e $y=-x+30$. Como facilmente se verifica no gráfico 2, a «recta» $y=-x+10$ tem uma representação circular, contendo os pontos X(–5;15) e Y(15;–5) - OBS.1 com $\alpha=\beta=-5$. A segunda «recta», com uma representação rectilínea, contém o tão enigmático ponto Z(15;15), desta feita situado **a uma distância não finita de X e de Y**. As duas «rectas paralelas» intersectam-se no ponto I(∞;∞), como aliás convém a duas paralelas que se prezem...

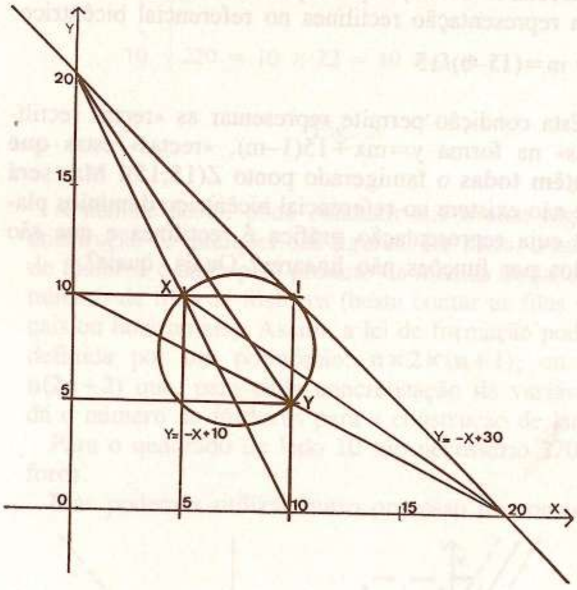


Gráfico 2

Surge-nos finalmente um exemplar mais sofisticado, a «recta» $y=2x$, representada por dois ramos hiperbólicos (duas «semi-rectas»?!). Esta «recta» contém os pontos X(15/2;15) e Y(15;30) - OBS.1, com $\alpha=15/2$ e $\beta=30$ (gráfico 3), contendo ainda dois pontos situados a uma distância não finita de X e de Y, os pontos P_1 $((15-5\sqrt{33})/4;\ (15-5\sqrt{33})/2)$ e P_2 $((15+5\sqrt{33})/4;\ (15+5\sqrt{33})/2)$, pontos esses **cujas linhas de referência** são paralelas (a linha de abcissa x_1 e a linha de ordenada y_1, a linha de abcissa x_2 e a linha de ordenada y_2). Estes dois pares de linhas de referência paralelas definem as duas direcções assimptóticas da «recta»... (ah, Cartesius!).

Para terminar em apoteose esta breve visita à galeria dos monstros, o gráfico 4 mostra alguns respeitáveis membros de uma família de «rectas paralelas» da forma $y=-x+b$. Saliente-se o facto de que nesta família, apenas uma «recta» tem efectivamente representação rectilínea, o que aliás sucede com qualquer outra família de «rectas paralelas», não «horizontais» nem «verticais».

Em jeito de conclusão desta viagem aventureira às terras da «rectolândia bicêntrica», gostaria de deixar como bónus algumas receitas utilitárias, bem como os inevitáveis desafios aos mais temerários.

«Receitas da Avó»

Receita 1: coordenadas α e β, no referencial bicêntrico, de um ponto P(x;y) do referencial cartesiano ortonormado:

- $\alpha=(10x-5y)/(10-y)$ • $\beta=(10y-5x)/(10-x)$

Receita 2: coordenadas, no referencial cartesiano ortonormado, de um ponto P(α;β) do referencial bicêntrico:

- $x=(100\alpha+50\beta-10\alpha\beta)/(75+5\alpha+5\beta-\alpha\beta)$
- $y=(50\alpha+100\beta-10\alpha\beta)/(75+5\alpha+5\beta-\alpha\beta)$

Receita 3: condição para que a recta y=mx+b tenha uma representação rectilínea no referencial bicêntrico:

- $m=(15-b)/15$

Esta condição permite representar as «rectas rectilíneas» na forma $y=mx+15(1-m)$, «rectas» estas **que contêm todas** o famigerado ponto Z(15;15)! Mas será que não existem no referencial bicêntrico domínios planos cuja representação gráfica é rectilínea e que são dados por funções não lineares? Quais, quais?

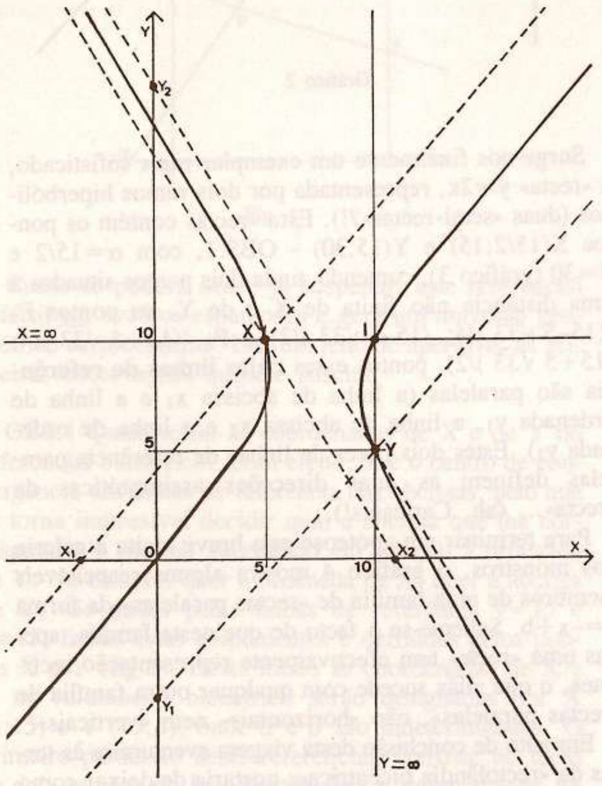


Gráfico 3

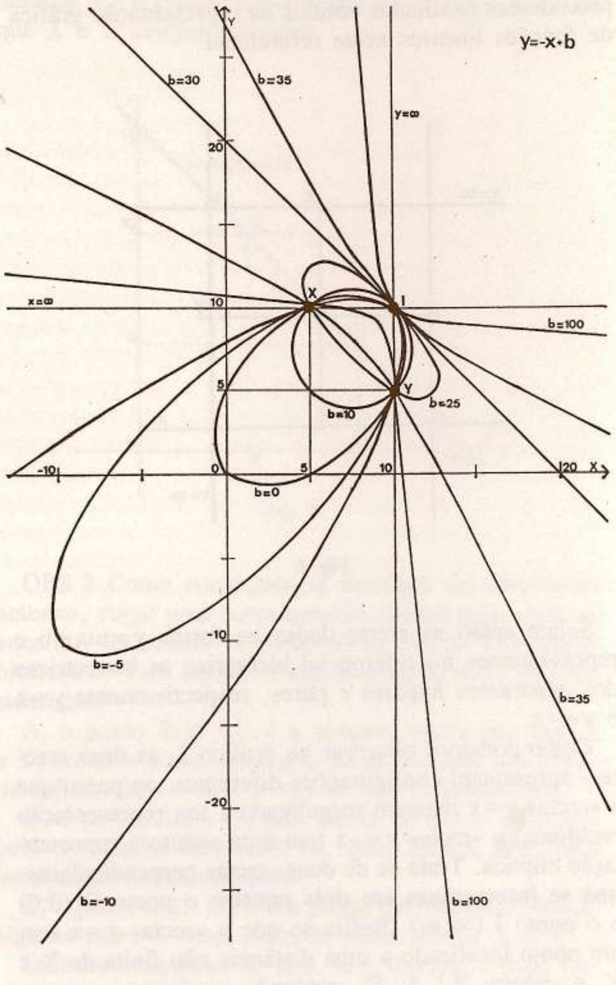


Gráfico 4

Desafios matreiros, indecentes rasteiras

Desafio 1: sobre que axiomática poderá repousar a Geometria Bicêntrica?

Desafio 2: usando a receita 2, determinar as coordenadas, no referencial cartesiano, do ponto P(–5;–5) do referencial bicêntrico e tirar as conclusões que se impõem, generalizando-as para o universo das «rectas» bicêntricas.

Desafio 3: determinar qual a relação que deve existir entre m e b para que a «recta» y=mx+b seja representada por uma circunferência.

Desafio 4: resolver os desafios 1, 2 e 3!

!selpmis saim a é erpmes men asse ,atcer ed otnemges mu ed otnemirpmoc olep adad ajes sotnop siod ertne aicnâtsid atruc siam a arobmE
(Quando se muda de referencial…)

A região perdida

António Bernardes, Esc. Sec. Gil Vicente

Descobrir a lei de formação

Uma estratégia útil na resolução de problemas é «descobrir a lei de formação». Ao usarmos esta estratégia, começamos por analisar casos particulares ou versões mais simples do problema e procuramos descobrir a lei ou regra que pode ser aplicada para chegarmos à solução geral.

Recordemos um problema da revista n.º 6, da secção Dia-a-Dia com a Matemática:

«Qual é o número de fósforos necessários para a construção do quadrado de lado 10?»

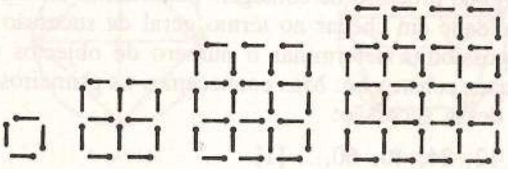


Fig. 1

O estudo dos casos mais simples é o melhor caminho para chegarmos à solução do problema. Contar o número de fósforos nas primeiras construções não oferece grande dificuldade, mas se queremos que essa contagem sirva para descobrirmos a «regra» então há que ter alguma atenção ao modo como a fazemos.

Um processo será por exemplo contarmos, em cada construção, o número de filas de fósforos com o comprimento «igual» ao lado:

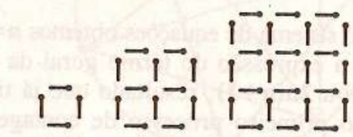


Fig. 2

A organização dos dados obtidos por este processo de contagem pode ser feita na seguinte tabela:

n	f(n)
1	$4 = 1 \times 4 = 1 \times 2 \times 2$
2	$12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$
3	$24 = 3 \times 8 = 3 \times 2 \times 4$
4	$40 = 4 \times 10 = 4 \times 2 \times 5$
.	
.	
.	
10	$220 = 10 \times 22 = 10 \times 2 \times 11$

Fig. 3

A análise desta, pode conduzir-nos a uma regra de construção de qualquer das figuras. De facto, o número de fósforos é dado pelo produto da medida do lado pelo número de filas de fósforos (basta contar as filas verticais ou horizontais). Assim, a lei de formação pode ser definida por um polinómio, $\mathbf{n \times 2 \times (n+1)}$, ou seja, $\mathbf{n(2n+2)}$ que, para cada concretização da variável $\mathbf{n}$, dá o número de fósdoros para a construção de lado $\mathbf{n}$.

Para o quadrado de lado 10 são necessário 220 fósforos.

Mas podemos utilizar outro processo de contagem:

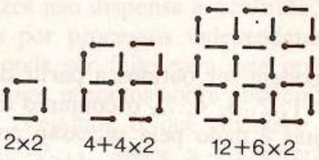


Fig. 4

A figura mostra como é possível construir cada quadrado a partir do quadrado anterior, ou seja, contamos o número de fósforos que é necessário «juntar» a um quadrado para se obter o quadrado seguinte. Tal como anteriòrmente, podemos organizar as nossas observações numa tabela:

n	f(n)
1	$4 = 2 \times 2$
2	$12 = 4 + 4 \times 2$
3	$24 = 12 + 6 \times 2$
4	$40 = 24 + 8 \times 2$
.	.
.	.
.	.

Fig. 5

Assim, conseguimos descobrir uma lei de formação, agora definida por recorrência:

$$\begin{cases} \mathbf{u(1)=4} \\ \mathbf{u(n+1)=u(n)+4(n+1),\ n \geqslant 1} \end{cases}$$

Definida a regra desta forma, para calcularmos o número de fósforos do quadrado de lado 10, temos de determinar os nove primeiros termos da sucessão definida por recorrência. Pouco prático e bastante monónoto.

Que fazer então?

A Matemática pode dar uma ajuda.

O método das diferenças finitas

Trata-se de uma ferramenta poderosa na resolução de problemas que envolvam sequências de números definidas por um polinómio, das quais se conhecem termos consecutivos. Este método é muito útil, principalmente quando a lei de formação é dada por recorrência, e não é óbvia a sua passagem para termo geral, como no caso da segunda contagem do problema anterior.

Consideremos uma sucessão qualquer:

$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots$

O conjunto das primeiras diferenças finitas é formado pelos termos da sucessão

$a_2-a_1,\ a_3-a_2, \ldots,\ a_n-a_{n-1}, \ldots$

O conjunto das segundas diferenças finitas é constituído, analogamente, a partir do conjunto das primeiras diferenças.

Para a sucessão

1, 5, 9, 13,...

cujos termos podem ser obtidos a partir do polinómio $\mathbf{4n-3}$, para $n=1, 2, 3, 4, \ldots$, o conjunto das primeiras diferenças finitas é dado pela sucessão constante

4, 4, 4,...

Não é por acaso que isto acontece. Uma sucessão cujos termos são gerados por um polinómio do 1.º grau do tipo $\mathbf{an+b}$, ou seja,

$a+b,\ 2a+b,\ 3a+b,\ 4a+b, \ldots$

terá sempre o conjunto das primeiras diferenças dado por uma sucessão constante:

$a,\ a,\ a, \ldots$

A constante será o coeficiente real da variável **n**.

A expressão $\mathbf{n^2+n-2}$ gera a sucessão

0, 4, 10, 18, 28,...

Os conjuntos das primeiras e segundas diferenças finitas são formadas, respectivamente pelas sucessões

4, 6, 8, 10,...

e

2, 2, 2,...

Uma sucessão gerada por um polinómio do 2.º grau produzirá sempre uma sucessão constante como conjunto das segundas diferenças finitas. De facto, qualquer polinómio do tipo $\mathbf{an^2+bn+c}$, gera a sucessão

$a+b+c,\ 4a+2b+c,\ 9a+3b+c,\ 16a+4b+c, \ldots$

O conjunto das primeiras diferenças é

$3a+b,\ 5a+b,\ 7a+b, \ldots$

e o das segundas

$2a,\ 2a, \ldots$

Do mesmo modo, a investigação sobre uma determinada sucessão de números definida por polinómios do 3.º ou 4.º graus, leva-nos a conjuntos das terceiras ou quartas diferenças constituídos por sucessões constantes. E assim sucessivamente...

O método das diferenças finitas baseia-se neste facto e permite, quando uma sucessão origina um conjunto de diferenças constante, descobrir a expressão que a gerou.

Voltemos ao problema dos fósforos. Ao utilizarmos o segundo processo de contagem poderíamos ter alguma dificuldade em chegar ao termo geral da sucessão que nos possibilita determinar o número de objectos para qualquer construção. Mas conhecemos os primeiros termos dessa sucessão:

4, 12, 24, 40, 60,... [1]

Apliquemos então o método das diferenças finitas. Os conjuntos das primeiras e segundas diferenças são formados, respectivamente, pelos termos das sucessões

8, 12, 16, 20,... [2]

e

4, 4, 4,... [3]

A segunda sucessão é constante. Donde, o termo geral da sucessão é definido por um polinómio do 2.º grau. Como determiná-lo?

O primeiro termo de qualquer sucessão de termo geral $\mathbf{an^2+bn+c}$ é, como já vimos, $\mathbf{a+b+c}$, o primeiro das primeiras diferenças é $\mathbf{3a+b}$ e o primeiro termo das segundas diferenças $\mathbf{2a}$.

Para as sucessões [1], [2] e [3], teremos

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ 3a+b=8 \\ 2a=4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações obtemos $\mathbf{a=2}$, $\mathbf{b=2}$ e $\mathbf{c=0}$. Logo, a expressão do termo geral da sucessão [1] é $\mathbf{2n^2+2n}$ ou $\mathbf{2n(n+1)}$, resultado que já tinha sido atingido com o primeiro processo de contagem.

Mas é preciso ter cuidado!

A região perdida

«Dados 30 pontos de uma circunferência, tracemos todos os segmentos de recta que têm como extremos dois desses pontos. Qual será o número máximo de regiões em que o círculo fica dividido?»

Analisando o problema a partir das situações mais simples, a primeira sensação que se tem é que o número de regiões pode ser obtido com a expressão $\mathbf{2^{n-1}}$, sendo **n** o número de pontos sobre a circunferência. De facto, para n=1, 2, 3, 4, 5 tudo corre bem:

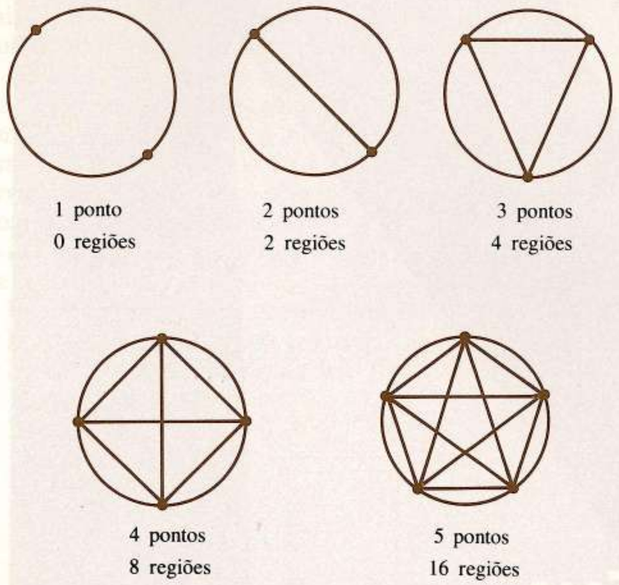


Fig. 6

Uma dúvida surge então:

Foi muito fácil. Será mesmo assim?

Os caminhos da Matemática não têm que ser necessariamente tortuosos e complicados, mas as generalizações apressadas podem ser perigosas.

Consideremos então 6 pontos e contemos as regiões.

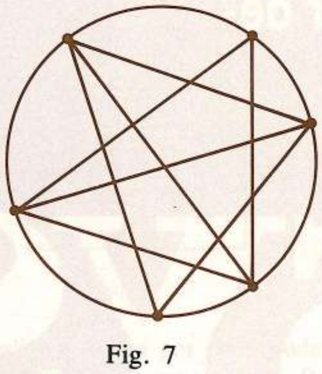


Fig. 7

Uma, duas, três,... trinta e uma! Haverá algum engano? Não, são mesmo 31 regiões.

Abordemos então o problema utilizando o método das diferenças finitas:

n	R(n)	1.as dif.	2.as dif.	3.as dif.	4.as dif.
1	1				
		1			
2	2		1		
		2		1	
3	4		2		1
		4		2	
4	8		4		1
		8		3	
5	16		7		.
		15		.	
6	31		.		.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Fig. 8

Admitindo que as 4.as diferenças vão ser sempre iguais, o valor seguinte nas 3.as diferenças será 4, 11 nas 2.as e 26 nas 1.as. Para 7 pontos teremos 57 regiões.

E assim sucessivamente... até 30 pontos.

O método leva-nos também a supor que o número de regiões pode ser dado por um polinómio do 4.º grau.

Com mais ou menos trabalho, chegaremos à conclusão que

$$\mathbf{R(n)=(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)/24,} \quad [4]$$

em que **R(n)** designa o número de regiões para **n** pontos sobre a circunferência.

Mas a dúvida continua. E se as 4.as difierenças não forem dadas por uma sucessão constante? Estaremos novamente a generalizar apressadamente?

O método das diferenças finitas é simples e poderoso, mas por vezes não dispensa a confirmação dos resultados obtidos por processos independentes. Vamos ver como isso pode ser feito para este problema.

Consideremos **n** pontos sobre uma circunferência (P_1, $P_2, \dots, P_n$). Vejamos o que acontece se marcarmos outro ponto, P_{n+1}, sobre a circunferência. Quantas novas regiões irão surgir?

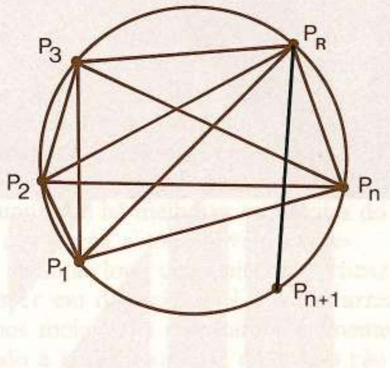


Fig. 9

(Continua na pág. 35)

Ainda o cão e o prisioneiro

José Paulo Viana, E. S. Marquês de Pombal

Depois de resolver o problema do cão e do prisioneiro que o Manuel Saraiva apresentou no último número da revista, a primeira pergunta que também a mim se pôs foi: «Até onde pode ir a velocidade do cão, continuando o homem a conseguir fugir?»

Recapitulemos: temos um prisioneiro (com que nos podemos identificar) no centro (H) do quadrado. Temos um cão que se encontra num dos vértices (C) do quadrado, que só se pode mover ao longo dos lados do quadrado e que tem uma velocidade π vezes superior à nossa. Conseguiremos fugir?

Admitamos que desatamos a correr e não mudamos de direcção. Sejam

E_h — espaço percorrido pelo homem
E_c — espaço percorrido pelo cão
X — distância indicada na fig. 1

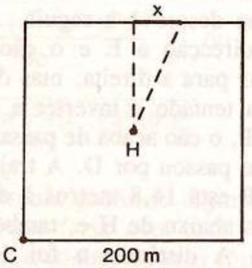


Fig. 1

Vimos que, resolver o problema inicial, consistia em encontrar as soluções da inequação

$\pi \times E_h - E_c < 0$
$\pi \sqrt{100^2 + X^2} - (300 + X) < 0$
donde $X \in \,]21{,}033\ ;\ 46{,}613[$

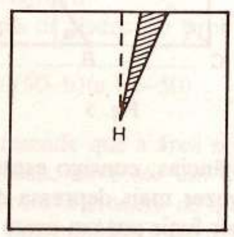


Fig. 2

Há portanto ali uma faixa por onde podemos fugir. Não é lá muito seguro, mas consegue-se. Podemos até calcular a que distância está o cão quando atravessamos o quadrado: 2,18 metros se escolhermos o ponto a meio deste intervalo. Talvez apanhemos um susto, mas não apanhamos uma dentada!

O cão acelera

Surge então a tal questão: *E se o cão for mais rápido? Até onde pode ir a velocidade do cão?*

Voltemos à inequação inicial e substituamos π por K, sendo K a relação entre as velocidades do cão e do homem. Qual o maior valor de K que nos permite ainda fugir? Não esqueçamos que $K > 1$ (o cão corre mais do que nós).

$K \times E_h - E_c < 0$
$K \sqrt{100^2 + X^2} - (300 + X) < 0$
$(K^2 - 1) X^2 - 600 X + 100^2 (K^2 - 9) < 0$

Resolvendo a equação correspondente a esta inequação, vem:

$$X = \frac{600 \pm 200 K \sqrt{10 - K^2}}{2 (K^2 - 1)} \quad (1)$$

Note-se que, se $K = \pi$, obtemos os valores 21,033 e 46,613, já encontrados atrás.

Que acontece se K aumentar? A «faixa de fuga» vai estreitando, estreitando, até se reduzir a um único caminho possível. E quando acontece isso? Quando a equação anterior só tiver uma solução, isto é, quando

$200 K \sqrt{10 - K^2} = 0$
Logo, $10 - K^2 = 0$
$K = \sqrt{10} \simeq 3{,}1623$

Assim, para escaparmos, a relação entre as velocidades terá de ser inferior a $\sqrt{10}$ e o ponto ideal de fuga é, fazendo $K = \sqrt{10}$ em (1), o correspondente a X = 33,333 metros. Curiosamente, este ponto corresponde a um terço do lado do pequeno quadrado. Está dada a resposta ao Manuel Saraiva.

Mas, *e se o cão for ainda mais rápido?* Estaremos condenados a ficar presos ou a ser mordidos?

Claro que não! É de esperar que, sendo nós capazes de estar ali no centro do quadrado uma data de tempo a fazer raciocínios e cálculos elaborados, que até nos permitem dizer qual o melhor ponto por onde fugir, não nos esqueçamos que há melhores estratégias do que esta do «correr em frente a toda a velocidade».

Podemos arranjar logo um meio mais eficaz! Começamos a correr em direcção a N e o cão arranca para D. Aí, damos meia volta e voltamos calmamente para trás, de modo a chegarmos a H quando o cão chega a M. Estamos agora muito melhor que antes: se formos para M', temos de percorrer 100 metros, enquanto que o cão, coitado, tem de andar 400 metros, ou seja, tem de correr 4 vezes mais depressa do que nós.

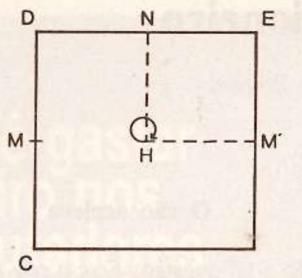


Fig. 3

Sobre o cão

Antes de prosseguirmos a nossa investigação para responder à questão-base deste problema (qual é o valor máximo de K?), temos de fazer uma pausa e ver qual é o comportamento que o cão tem de ter para melhor guardar o homem: tem de ser um cão eficiente, não pode ser um cão qualquer.

Para já, tem uma característica que esteve subentendida em todos os raciocínios anteriores:

(A) ''Escolhe sempre o caminho óptimo'' (M. Saraiva).

Temos, no entanto, de clarificar o sentido da palavra *óptimo*. Podemos admitir que o que o cão faz é ver, em cada momento, qual o ponto de saída mais próximo do homem e correr para lá pelo caminho mais curto, ou seja,

(A') Corre sempre pelo caminho mais curto para o ponto do quadrado mais próximo do homem.

Reparem bem, é um cão cheio de capacidades: tem a noção de quadrado e sabe fazer uma avaliação instantânea do caminho mais curto...

Mas, e se os dois caminhos forem iguais? É o que acontece, por exemplo, quando o cão está em M e nós corremos para M'. Temos de admitir que ele não é tão estúpido que fique indeciso e não corra. É a sua segunda característica.

(B) Se os dois caminhos possíveis forem iguais, opta imediatamente por um deles.

Parece que, do ponto de vista do carcereiro, este seria o melhor comportamento a exigir do cão. Mas não é!

Se eu correr de H para E aos zigue-zagues, as saídas mais próximas vão sendo os pontos P_1, P_2, P_3, P_4,...

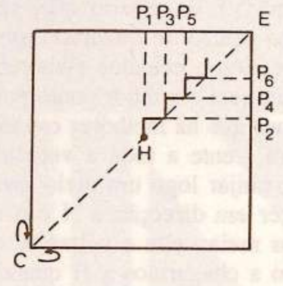


Fig. 4

O cão, se cumprir escrupulosamente (A') e (B), vai andar para trás e para a frente sem se afastar muito de C. Assim, eu acabo por sair por E com o cão ainda longe, mesmo que a sua velocidade seja muito superior à minha.

O cão tem de ter então uma terceira característica:

(C) Quando o homem está perto de uma das diagonais do quadrado, o cão só inverte o sentido da corrida se a diferença entre os dois caminhos (aquele por onde vai e o oposto) ultrapassar um certo valor δ.

Se agora me perguntarem qual deve ser o valor de δ, eu respondo: «Já estão a perguntar muito! Isso é com o cão, o cão que se desenrasque».

A caminho da liberdade

Para se encontrar a melhor solução teórica do problema (maior valor de K e correspondente trajectória do homem), suponho que seria necessário resolver uma equação diferencial bem acima das minhas capacidades e do meu interesse...

Como não consegui encontrar um algoritmo que me permitisse utilizar a folha de cálculo, fiz algumas experiências e tentativas com papel e lápis, simulando as trajectórias do homem e do cão. O melhor resultado que consegui é o que descrevo a seguir.

Arranco em direcção a E e o cão corre para D. Começo a curvar para a direita, mas de modo a que o cão não se sinta tentado a inverter a marcha. Assim, quando chego a P, o cão acaba de passar por M; quando atinjo Q já o cão passou por D. A trajectória de Q até R é rectilínea. P está 14,8 metros à direita de H e Q está 16,4 metros abaixo de H e, também, 16,4 metros à direita de H. A distância **a** foi determinada pelo método habitual (ver início do artigo).

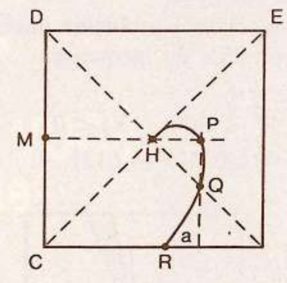


Fig. 5

Nestas circunstâncias, consigo escapar mesmo que o cão corra 5,86 vezes mais depressa do que eu. Curiosamente, acabo por fugir por um ponto do quadrado relativamente perto do sítio de onde o cão partiu...

Duas considerações finais

1. De acordo com esta última estratégia, tenho de percorrer cerca de 120 metros. Um bom corredor dos 100 metros alcança velocidades da ordem dos 36 km/h. Ape-

(Continua na pág. 36)

Vissicitudes de uma investigação bem sucedida

Existirá algum triângulo, com lados de comprimento inteiro, que tenha perímetro 100 e área inteira?

Primeiros passos e hesitações

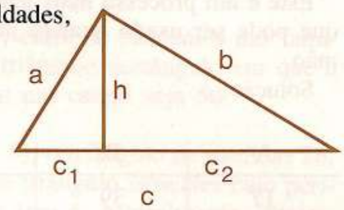
Perante este desafio, alguns «investigadores» começam a procurar, separadamente, mas todos com a mesma dificuldade: como relacionar a área do triângulo com as medidas dos lados?

Partindo de três igualdades,

$c_1+c_2=c$

$h^2+c_2^2=b^2$

$h^2+c_1^2=a^2$



pode chegar-se à seguinte fórmula, que permite relacionar uma altura com os outros três lados de um triângulo qualquer:

$$h = \sqrt{\frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4c^2}} \quad \text{ou}$$

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}$$

Com esta fórmula ganha-se alguma confiança para continuar, mas que fazer com ela?

Aliás, também é conhecida uma fórmula poderosa, a fórmula de Heron, que permite calcular a área de qualquer triângulo a partir das medidas dos seus lados:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{sendo} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Mas a questão permanece, que fazer com estas fórmulas?

Pode tentar-se uma via algébrica a partir da fórmula de Heron, por exemplo.

Tendo em conta os dados do problema, obtém-se:

$$A = \sqrt{50(50-a)(50-b)(a+b-50)}$$

Visto que se pretende que a área seja inteira, o radicando desta expressão deve ser um quadrado perfeito. Poderíamos, assim, ir à procura de quadrados perfeitos múltiplos de 50. Consultando uma tabela de quadrados perfeitos, a tarefa logo se apresenta longa e trabalhosa, há imensos quadrados perfeitos múltiplos de 50. Do ponto de vista algébrico, a tarefa não parece muito atraente.

Felizmente que há poderosos instrumentos de cálculo e, assim, é possível virar o problema do avesso: vamos dar valores inteiros aos lados e vamos ver quando obtemos uma área inteira.

Cada um pode pegar no seu instrumento preferido, e do modo que mais lhe agrade. Pode escolher-se entre o computador e a calculadora. A tarefa torna-se uma questão de organização e... de pôr a máquina a calcular!

Resolução através da folha de cálculo

Coluna	A	números inteiros de 2 a 33
	B	int ((100–A)/2)
	C	100–A–B
	D	SQRT (4*A²*C²–(A²+C²–B²)²)/(2*C) (valor da altura referente ao lado C)
	E	(C*D)/2

A lado A	B lado B	C lado C	D alt (c)	E Área
2	49	49	1.999583	48.98979
3	48	49	2.798226	68.55655
4	48	48	3.996526	95.91663
5	47	48	4.841229	116.1895
6	47	47	5.987765	140.7125
7	46	47	6.835055	160.6238
8	46	46	7.969697	183.3030
9	45	46	8.803677	202.4846
10	45	45	9.938080	223.6068
11	44	45	10.74968	241.8677
12	44	44	11.88791	261.5339
13	43	44	12.67033	278.7472
14	43	43	13.81325	296.9848
15	42	43	14.56044	313.0495
16	42	42	15.70707	329.8485
17	41	42	16.41304	344.6738
18	41	41	17.56098	360
19	40	41	18.21937	373.4970
20	40	40	19.36492	387.2983
21	39	40	19.96873	399.3745
22	39	39	21.10679	411.5823
23	38	39	21.64807	422.1374
24	38	38	22.77190	432.6662
25	37	38	23.24148	441.5880
26	37	37	24.34234	450.3332
27	36	37	24.72936	457.4932
28	36	36	25.79597	464.3275
29	35	36	26.08746	469.5743
30	35	35	27.10524	474.3416
31	34	35	27.28534	477.4935
32	34	34	28.23529	480
33	33	34	28.28427	480.8326

De uma forma rápida ficamos com a certeza de que há, pelo menos, dois triângulos que verificam as condições pedidas.

Não haverá mais que dois triângulos?

A organização dos cálculos não poderia ter sido feita de modo a obter mais triângulos?

A utilização de fórmula de Heron não poderia trazer simplificações ao programa?

Resolução utilizando um programa em BASIC em computador

```
5 REM triângulos de base a
10 FOR A=2 TO 49
20 FOR B=2 TO 49
30 FOR C=2 TO 49
40 IF A+B+C< >100 THEN GOTO 300
50 IF A>=B+C THEN GOTO 300
60 IF B>=A+C THEN GOTO 300
70 IF C>=A+B THEN GOTO 300
80 GOSUB 400
90 GOSUB 500
300 NEXT C
310 NEXT B
320 NEXT A
330 GOTO 600
400 REM Subrotina: cálculo da área dos triângulos de
base a
410 T=A*A+C*C-B*B
420 R=T/(2*A)
430 Q=R*R
440 S=C*C-Q
450 H=SQR(S)
460 AR=A*H/2
470 RETURN
500 REM Subrotina: verificar se a área é um n.º inteiro
510 IF AR=INT(AR) THEN PRINT "base a="; A,
"b="; B, "c="; C, "Área="; AR
520 RETURN
600 END
```

Soluções

base a=17	b=39	c=44	Área=330
base a=17	b=44	c=39	Área=330
base a=18	b=41	c=41	Área=360
base a=26	b=26	c=48	Área=240
base a=26	b=48	c=26	Área=240
base a=29	b=29	c=42	Área=420
base a=29	b=42	c=29	Área=420
base a=32	b=34	c=34	Área=480
base a=34	b=32	c=34	Área=480
base a=34	b=34	c=32	Área=480
base a=39	b=44	c=17	Área=330
base a=41	b=41	c=18	Área=360
base a=42	b=29	b=29	Área=420
base a=44	b=17	c=39	Área=330
base a=44	b=39	c=17	Área=330
base a=48	b=26	c=26	Área=240

Será que estão aqui todas as combinações possíveis? Quantos triângulos haverá, afinal de contas?
A organização do programa não poderia ter sido feita de outro modo?
E utilizando outra linguagem?

Resolução utilizando um programa em BASIC em calculadora programável

```
10 INP A
15 D=A
20 B=51-D
30 S=SQR (50*(50-A)*(50-B)*(A+B-50))
40 PRT S
50 D=D-1
60 IF D>1 THEN 20
70 GO TO 10
```

Este é um processo mais lento que os anteriores mas que pode ser usado quando não há um computador à mão.

Solução:

A	B	C	Área
17	39	44	330
18	41	41	360
26	26	48	240
29	29	42	420
32	34	34	480

Parece agora não haver dúvidas de que há de facto 5 triângulos que respondem às condições do problema.

No entanto, não será possível melhorar os programas construídos?
E quem não dispuser de um instrumento auxiliar de cálculo, não conseguirá mesmo resolver o problema?

Resolução sem recurso a instrumentos auxiliares de cálculo

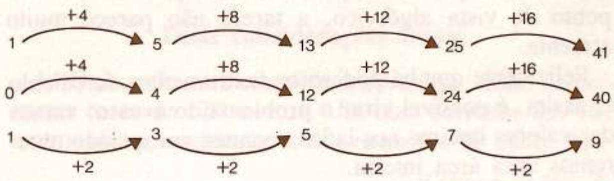
E porque não pensar em triângulos particulares?

Não haverá, por acaso, um triângulo isósceles que responda às condições do problema?

Qualquer triângulo isósceles é sempre decomponível em dois triângulos rectângulos geometricamente iguais. Assim basta procurar entre os triângulos rectângulos algum que tenha as medidas certas.

A redução do problema à procura de triângulos rectângulos é baseada no facto de haver uma regra, simples e interessante, que permite construir facilmente famílias de triângulos rectângulos.

Regra que permite obter famílias de triângulos rectângulos



Deste modo, a regra pode aplicar-se indefinidamente, permitindo obter ternos pitagóricos geradores de famílias de triângulos rectângulos. Os outros elementos da família podem obter-se multiplicando os três valores por um número inteiro qualquer.

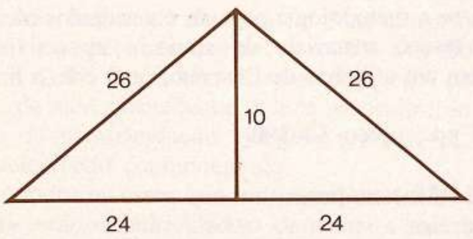
Assim, a família gerada por (5, 4, 3) será:

5	10	15	20	25	
4	8	12	16	20	etc.
3	6	9	12	15	

Agora, basta procurar, entre os elementos das famílias assim geradas, um triângulo rectângulo em que a soma da hipotenusa com um cateto seja 50.

Eureka!

Na família do (13, 12, 5), o triângulo de medidas 26, 24 e 10 permite obter um triângulo isósceles cujo perímetro é 100 e em que a área é, naturalmente, inteira.



Prova-se, assim, a existência de pelo menos um triângulo de lados inteiros, perímetro 100 e área inteira. Este processo é moroso, não dá todas as possibilidades e poderia até não ter dado nenhuma resposta ao problema, mas sem dúvida que é um processo rico do ponto de vista matemático. Mesmo que não tivéssemos descoberto nenhum triângulo, teríamos feito um percurso interessante pelas sendas dos triângulos rectângulos.

Dois desafios

O problema ficou mesmo resolvido, disso não pode haver dúvidas, mas o mais interessante foi a diversidade de processos utilizados.

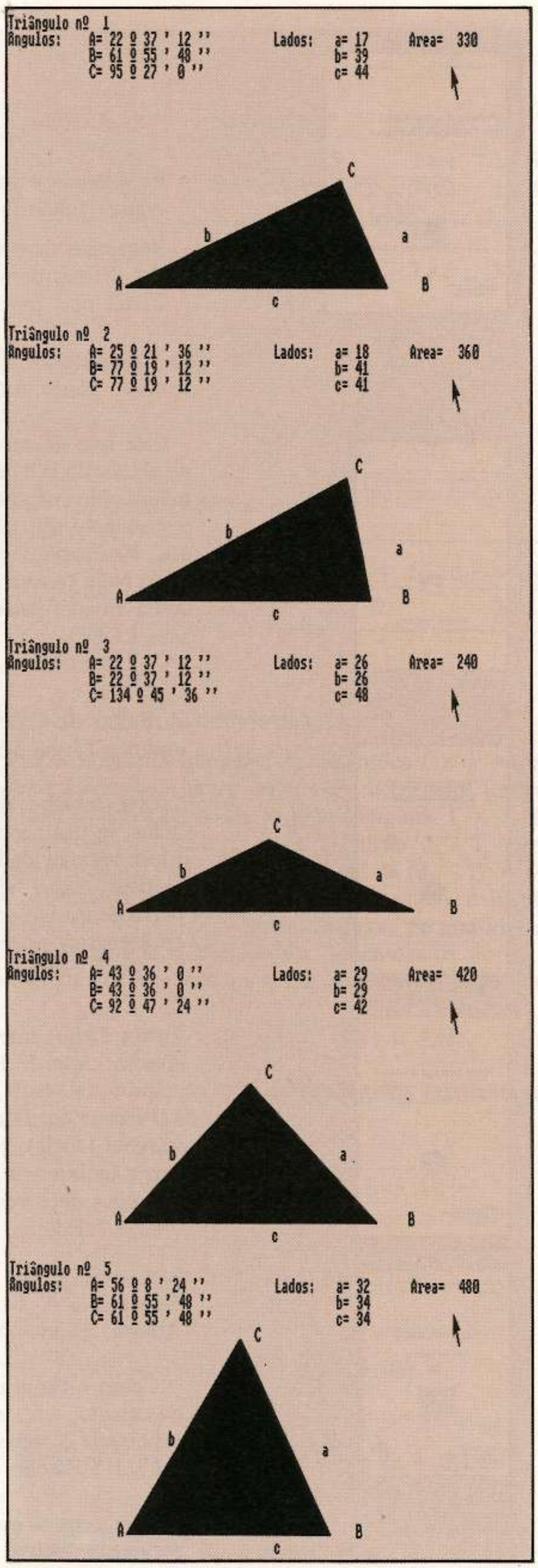
Se repararmos bem, cada resolução recorreu a conhecimentos matemáticos diferentes, integrando-os de forma pessoal, e respondendo ao problema de forma também diferente.

Certamente que outras resoluções são possíveis, recorrendo ou não a instrumentos auxiliares de cálculo. Porque não pensar noutro processo de resolução?

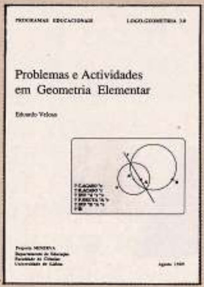
Por outro lado algumas resoluções sugerem ideias interessantes de generalização. Porque não construir outros problemas a partir deste?

Este artigo foi elaborado por Cristina Loureiro com a colaboração de Albano Silva, Fernando Duarte e Manuel Saraiva.

Retrato final dos triângulos procurados



Novas Publicações Minerva, Pólo do DEFCUL



- **Problemas e actividades em Geometria Elementar**
  Autor: Eduardo Veloso

  Sugestões de problemas e actividades para aprendizagem do programa, resolvidas. Fichas para utilização com alunos, acompanhadas de indicações pedagógicas.
  □ 62 pp.; preço: 500$00

O Computador na Recuperação de Alunos do 9.º Ano
Autora: Maria Augusta Ferreira Neves

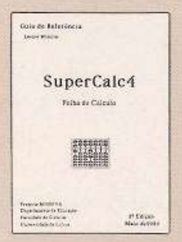
Esta tese de mestrado descreve os resultados de um programa de recuperação de alunos do 9.º ano de escolaridade em condições de insucesso profundo em Matemática. Nos capítulos iniciais discute-se a forma como o computador pode ser um instrumento útil para promover a aprendizagem e a mudança de atitudes dos alunos. Nos capítulos seguintes indica-se a metodologia seguida e resultados alcançados. Num anexo incluem-se os testes, materiais de apoio e as actividades desenvolvidas pelos alunos, quer com um utilitário de Desenho, quer com a linguagem LOGO.
□ 1.ª Edição, Abril 1988: 307 pp.; preço 800$00

A Folha de Cálculo na Educação Matemática
Autora: Maria Leonor Rebelo Moreira

Este trabalho, que constituiu a tese de mestrado da sua autora, descreve os resultados da utilização da folha de cálculo com alunos do 6.º ano de escolaridade. Entre as actividades desenvolvidas privilegiou-se a resolução de situações problemáticas, tendo sido também abordado o tópico da proporcionalidade. Discute-se o papel educativo dos computadores, indica-se a metodologia e resultados do estudo, apresentando-se em anexo os testes e as fichas de trabalho utilizadas.
□ 1.ª Edição, Abril 1988: 305 pp.; preço 800$00

Tenta Logo, que descobres...
Autora: Ana de Barros Trigueiros

Trata-se da descrição de uma experiência de utilização do computador e da linguagem LOGO, realizada com alunos do 5.º ano de escolaridade. O objectivo da experiência era a abordagem de conceitos matemáticos a partir da exploração de situações decorrentes do desenvolvimento de projectos livres dos alunos.
□ 1.ª Edição, Junho 1989: 87 pp.; preço: 300$00



SuperCalc 4, Guia de Referência
Autora: Leonor Moreira

Como o próprio nome indica, trata-se de um guia para os iniciados nesta folha de cálculo, em que se descrevem as principais funções e todos os comandos, com referência a todas as suas opções.
□ 1.ª Edição, Maio 1989: 112 pp.; preço: 300$00

Estes e outros materiais podem ser pedidos pelo correio, utilizando fotocópia da ficha publicada noutros números e segundo as condições habituais.

As voltas que os cubos dão

Alberto Canelas

Pegando na ideia e no desafio de Leonor Moreira (vide «Xeque Mate!», in «EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA», n.º 8, 1988) irei tentar fazer uma abordagem de algumas variantes do problema apresentado.

Designarei o caso inicial por *«cubos» num «cubo»* e tentarei, a partir daí, generalizar o problema.

Para melhor sistematização irei dividir este estudo nas três partes seguintes:

1. «Paralelepípedos» num «paralelepípedo»
2. «Cubos» num «paralelepípedo»
3. Outros casos.

Convém aqui precisar os conceitos de «cubo» e de «parapelelípedo». Designarei por «cubo» não só o cubo «vulgar», a três dimensões, mas também o «cubo» a uma dimensão (segmento de recta), a duas dimensões (quadrado) e, especulativamente, o «cubo» a n dimensões, com $n \in \mathbb{N}$. O conceito de «paralelepípedo» corresponderá, de modo semelhante, a uma generalização do conceito de paralelepípedo «vulgar» (para $n=1$, cubo e paralelepípedo confundem-se).

Em todos os casos que irei tratar, os «sólidos contentores» serão «quadriculados» de maneira semelhante ao tabuleiro de xadrez e só serão permitidos «sólidos contidos» cujas «faces» assentem na «quadrícula».

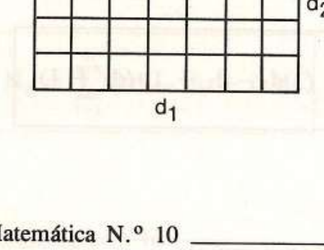
«PARALELEPÍPEDOS» NUM «PARALELEPÍPEDO»

Rectângulos num rectângulo

Consideremos um rectângulo de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento, com $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. Vamos calcular o número total de rectângulos nele existentes (as dimensões de cada tipo de rectângulo são de b unidades de comprimento x h unidades de comprimento, com $b, h \in \mathbb{N} \wedge b \leqslant d_1 \wedge h \leqslant d_2$)

Estabelecimento da fórmula

Vamos considerar um rectângulo tendo de dimensões, por exemplo, 7 unidades de comprimento × 5 unidades de comprimento.



b×h	N.º	b×h	N.º		b×h	N.º
1×1	7×5	2×1	6×5	....	7×1	1×5
1×2	7×4	2×2	6×4	....	7×2	1×4
....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....
1×5	7×1	2×5	6×1	....	7×5	1×1

$$N_r = \sum_{i=1}^{5} (7\times i) + \sum_{i=1}^{5} (6\times i) + \ldots + \sum_{i=1}^{5} (1\times i) =$$

$$= (7 + 6 + \ldots + 1) \sum_{i=1}^{5} i = \left(\sum_{i=1}^{7} i\right)\left(\sum_{i=1}^{5} i\right)$$

No caso geral podemos concluir:

$$\boxed{N_r = \left(\sum_{i=1}^{d_1} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_2} i\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{N_r = \frac{d_1^2 + d_1}{2} \cdot \frac{d_2^2 + d_2}{2}}$$

Demonstração

Consideremos rectângulos de dimensões 1 × 1. Numa linha caberão d_1 e numa coluna d_2 rectângulos destes. Na totalidade existirão $d_1 \times d_2$ rectângulos 1 × 1. Se os rectângulos forem 2 × 1 existirão $d_1 - 1$ numa linha e d_2 numa coluna, sendo o total de $(d_1 - 1) \times d_2$. Se os rectângulos forem 3 × 2, por exemplo, existirão no total $(d_1 - 2) \times (d_2 - 3)$ rectângulos. Se considerarmos rectângulos genéricos de dimensões b × h, o número total de rectângulos de cada tipo é dado por:

$$N_{b\times h} = (d_1 - b + 1) \times (d_2 - h + 1)$$

Portanto, o número total de rectângulos existentes no rectângulo será dado por:

$$N_r = \sum_{b=1}^{d_1} \sum_{h=1}^{d_2} [(d_1 - b + 1) \times (d_2 - h + 1)] =$$

$$= \sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) \sum_{h=1}^{d_2} (d_2 - h + 1) =$$

$$= \sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) \left(d_2^2 - \sum_{h=1}^{d_2} h + d_2\right) =$$

$$= \sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) \left(d_2^2 - \frac{d_2^2 + d_2}{2} + d_2\right) =$$

$$= \frac{d_2^2 + d_2}{2} \sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) =$$

$$= \frac{d_1^2 + d_1}{2} \cdot \frac{d_2^2 + d_2}{2} = \left(\sum_{i=1}^{d_1} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_2} i\right)$$

Nota: Chegar-se-ia à mesma conclusão notando que:

$$\sum_{b=1}^{d_1}(d_1 - b + 1) = d_1 + (d_1 - 1) + (d_1 - 2) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{d_1} i$$

$$\sum_{h=1}^{d_2}(d_2 - h + 1) = d_2 + (d_2 - 1) + (d_2 - 2) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{d_2} i$$

e, por conseguinte,

$$\sum_{b=1}^{d_1}(d_1 - b + 1)\sum_{h=1}^{d_2}(d_2 - h + 1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d_2} i \sum_{b=1}^{d_1}(d_1 - b + 1) = \left(\sum_{i=1}^{d_1} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_2} i\right) =$$

$$= \frac{d_1^2 + d_1}{2} \cdot \frac{d_2^2 + d_2}{2}$$

Paralelepípedos num paralelepípedo

Consideremos um paralelepípedo de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento x d_3 unidades de comprimento, com $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N}$. Vamos calcular o número total de paralelepípedos nele existentes (as dimensões de cada tipo de paralelepípedo são de b unidades de comprimento x h unidades de comprimento x e unidades de comprimento, com $b, h, e \in \mathbb{N} \wedge b \leqslant d_1 \wedge h \leqslant d_2 \wedge e \leqslant d_3$.

Seguindo um raciocínio idêntico ao do caso anterior facilmente se conclui:

$$\boxed{N_p = \left(\sum_{i=1}^{d_1} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_2} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_3} i\right)} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{N_p = \frac{d_1^2 + d_1}{2} \cdot \frac{d_2^2 + d_2}{2} \cdot \frac{d_3^2 + d_3}{2}}$$

A demonstração poderá ser feita utilizando a metodologia apresentada anteriormente.

Fórmula geral

Podemos resumir as conclusões chegadas no seguinte enunciado:

Num «paralelepípedo» a n dimensões e de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento x ... x d_n unidades de comprimento, com $n, d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$, o número total de «paralelepípedos» a n dimensões (em que os valores das dimensões, referidas à mesma unidade de comprimento atrás mencionada, são números naturais inferiores ou iguais à dimensão correspondente do paralelepípedo onde estão contidos) nele existentes é dado pela fórmula:

$$\boxed{N_p = \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d_j} i} \quad \text{ou} \quad \boxed{N_p = \frac{1}{2^n}\prod_{j=1}^{n}[d_j\,(d_j + 1)]}$$

No caso particular de «paralelepípedos» existentes em «cubos», temos $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = a$, e, portanto,

$$\boxed{N_p = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right)^n} \quad \text{ou} \quad \boxed{N_p = \left(\frac{a^2 + a}{2}\right)^n}$$

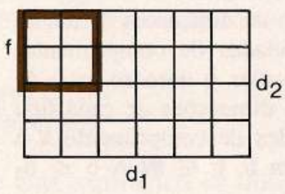
«CUBOS» NUM «PARALELEPÍPEDO»

Quadrados num rectângulo

Consideremos um rectângulo de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento, com $d_1, d_2 \in \mathbb{N} \wedge d_1 \geqslant d_2$. Vamos calcular o número total de quadrados nele existentes (o lado de cada tipo de quadrado é de f unidades de comprimento, com $f \in \mathbb{N} \wedge f \leqslant d_2$

Estabelecimento da fórmula

Vamos considerar um rectângulo tendo de dimensões 6 unidades de comprimento × 4 unidades de comprimento



f	N.º
1	6×4
2	5×3
3	4×2
4	3×1

$$N_q = 6 \times 4 + 5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 1 = \sum_{i=1}^{4}[(2 + i)\,i]$$

No caso geral, podemos concluir:

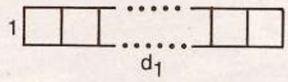
$$\boxed{N_q = \sum_{i=1}^{d_2}[(d_1 - d_2 + i)\,i]} \quad \text{ou, desenvolvendo}$$

$$\boxed{N_q = \frac{d_2}{6}(3\,d_1 - d_2 + 1)(d_2 + 1)}$$

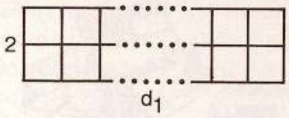
Demonstração

Para demonstrarmos a conclusão referida anteriormente poderíamos seguir um caminho em tudo idêntico ao utilizado nos casos precedentes e chegaríamos facilmente à fórmula desejada. No entanto, para variar, iremos seguir outra via, utilizando o método de recorrência. Consideremos uma pluralidade de rectângulos de dimensões d_1 unidades de comprimento x h unidades de comprimento, com $h \in \mathbb{N} \wedge h \leqslant d_2$. O número de quadrados existentes em cada um desses rectângulos forma uma sucessão de termo geral U_h, como a seguir se indica:

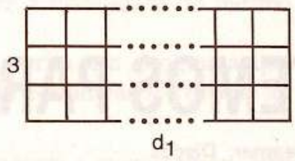
$U_1 = d_1$



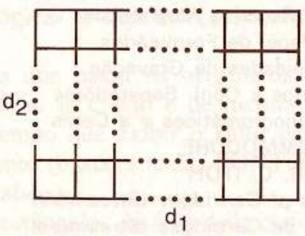
$U_2 = U_1 + d_1 + (d_1 - 1)$



$U_3 = U_2 + d_1 + (d_1 - 1) + (d_1 - 2)$



$U_{d_2} = U_{d_2-1} + d_1 + (d_1-1) + (d_1-2) + \ldots + (d_1-d_2) + (d_1-d_2+1)$



Adicionando membro a membro, eliminando os termos comuns e tendo em atenção que $N_q = U_{d_2}$, conclui-se que

$N_q = U_{d_2} = d_2 d_1 + (d_2 - 1)(d_1 - 1) + (d_2 - 2)(d_1 - 2) +$

$+ \ldots + 2(d_1 - d_2) + (d_1 - d_2 + 1)$

ou seja

$$\boxed{N_q = \sum_{i=1}^{d_2} [(d_1 - d_2 + i)\, i]}$$

Cubos num paralelepípedo

Consideremos um paralelepípedo de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento x d_3 unidades de comprimento, com $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N} \wedge d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3$. Vamos calcular o número total de cubos nele existentes (a aresta de cada tipo de cubo é de g unidades de comprimento, com $g \in \mathbb{N} \wedge g \leqslant d_3$.

Seguindo um raciocínio idêntico ao do caso anterior facilmente se conclui:

$$\boxed{N_c = \sum_{i=1}^{d_3} [(d_1 - d_3 + i)(d_2 - d_3 + i)\, i]}$$

Desenvolvendo obter-se-ia a forma polinomial, que, dada a sua complexidade, não terá grande interesse aqui referir.

A demonstração poderá ser feita utilizando a metodologia apresentada no caso anterior.

Fórmula geral

Podemos resumir as conclusões chegadas no seguinte enunciado:

Num «paralelepípedo» a n dimensões e de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento x ... x d_n unidades de comprimento, com $n, d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N} \wedge d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$, o número total de «cubos» a n dimensões (em que as medidas das «arestas», referidas à mesma unidade de comprimento atrás mencionada, são números naturais inferiores ou iguais a d_n) nele existentes é dado pela fórmula:

$$\boxed{N_c = \sum_{i=1}^{d_n} \prod_{j=1}^{n} (d_j - d_n + i)}$$

No caso particular de «cubos» existentes em «cubos», temos $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = a$, e, portanto,

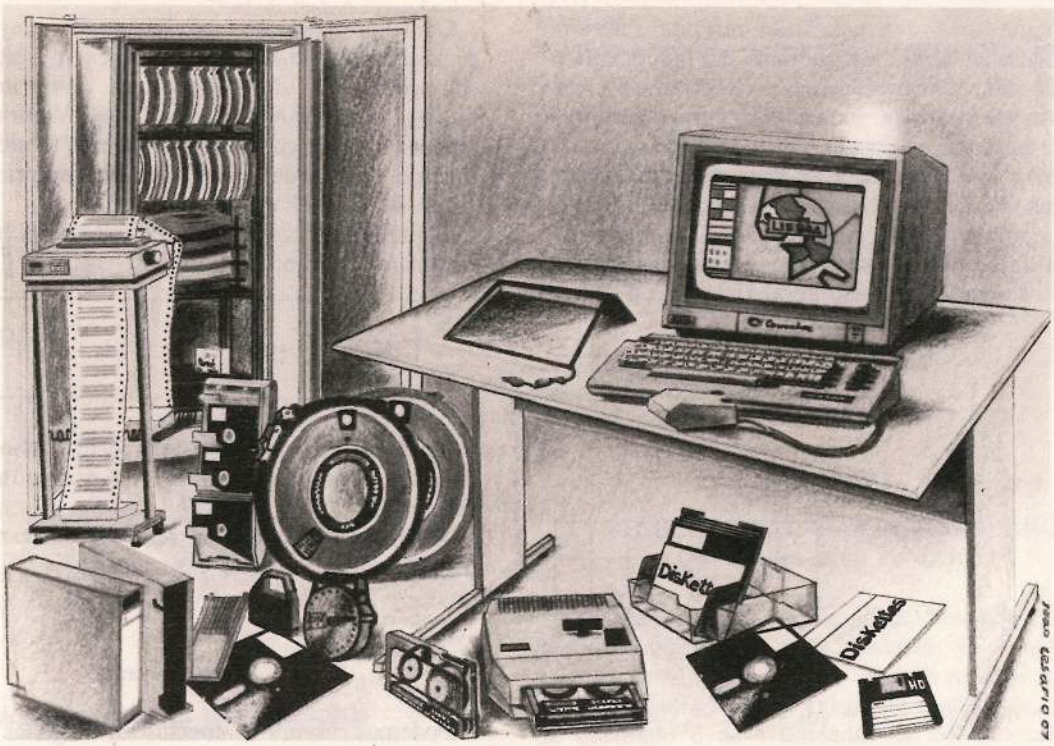
$$\boxed{N_c = \sum_{i=1}^{a} i^n}$$

fórmula esta já referida no artigo de Leonor Moreira anteriormente mencionado.

OUTROS CASOS

O problema não se esgota aqui. Há uma grande variedade de casos que podem ser abordados. A título meramente exemplificativo deixo aqui algumas sugestões para quem estiver interessado.

(Continua na pág. 36)



A minha primeira experiência de computador na sala de aula

Maria José Costa, Esc. Sec. de Augusto Gomes (Matosinhos)

Aos meus primeiros professores de LOGO
Dr^a Maria Guilhermina Barros (Minho)
Dr. Eduardo Veloso (Lisboa)

Quando preparava as aulas sobre «Proporcionalidade» para uma turma de 7.º ano de Escolaridade pensei em recorrer à Geometria: os alunos poderiam construir triângulos equiláteros, traçar e medir uma das alturas do triângulo construído, por exemplo, e procurar relacionar a medida da altura com a medida do lado do triângulo construído; mas de imediato surgiu no meu espírito a desconfiança sobre o sucesso das mesmas. E foi procurando retirar o insucesso destas aulas, que iria desde trazer o material adequado para o efeito à execução das construções, que me socorri do computador e da linguagem LOGO.

De que maneira? É isso que me proponho aqui contar.

Comecei por apresentar a uma das colegas responsável pelo Projecto Minerva na minha Escola o meu projecto para leccionar esta rubrica, pedindo-lhe simultaneamente a sua opinião sobre a viabilidade do mesmo e o seu apoio.

Em LOGOWRITER foi escrito um programa que depois de discutido e ensaiado por ambas se resumia ao seguinte:

- traçar um referencial ortogonal e monométrico, cuja medida era o passo da tartaruga (aparecia quando se teclava REF);
- colocar a tartaruga na origem desse referencial rodada 60° para a direita (para ser usado em caso de «emergência pedagógica» e cuja execução era ORIGEM)
- marcar pontos da recta que passa na origem das coordenadas do referencial já citado e de inclinação 60° e ao mesmo tempo que exibir o valor da ordenada do mesmo ponto (bastava teclar PONTO seguido da respectiva abcissa);
- traçar um conjunto de rectângulos de área dada com dois dos lados sobre os eixos coordenados (respondia quando se teclava v.rect).

Preparado o material — programa, disquetes e guião — calendarizei as aulas segundo as necessidades do projecto e a disponibilidade da sala, contando desde início em trabalhar com a turma repartida por dois blocos.

Quanto ao funcionamento das aulas, desdobrarei o conjunto das mesmas em fases.

1.ª FASE: Preparação para a utilização da Linguagem LOGO.

Os alunos não tinham qualquer informação sobre esta linguagem (e até havia alunos que nunca tinha sequer jogado num computador).

Na sala de aula habitual, deslocámos as mesas deixando uma arena com uma mesa no meio.

Servindo-me de um cartaz com as primitivas da Geometria da Tartaruga, pedi voluntários entre os alunos, um como «tartaruga» outro como «condutor de tartaruga»: juntos (isto é a tartaruga fazendo e o condutor mandando) teriam de conseguir contornar a mesa. Aqui surgiu a necessidade de conjecturar as dimensões da mesa, e esta «passou» a medir o que à turma pareceu mais razoável.

2.ª FASE: Aplicações do tipo proporcionalidade directa.

Os alunos, dois nuns computadores e três noutro, receberam, cada um, o seguinte guião:

REGISTE NO CADERNO AS RESPOSTAS ÀS PERGUNTAS AQUI FORMULADAS

1.º — Quais as instruções a dar à tartaruga para ela desenhar um triângulo equilátero de lado previamente escolhido?
2.º — Como ensinar a tartaruga a desenhar um triângulo?
3.º — Que modificações devemos introduzir para que o triângulo fique em determinada posição?
4.º — Como desenhar a altura de um triângulo?
5.º — Como medir essa altura?

EXECUTE O SEGUINTE PROGRAMA NO FINAL DO TRABALHO DEVE TER O QUADRO ABAIXO CORRECTA E COMPLETAMENTE PREENCHIDO

1.º — Chame o referencial escrevendo REF.
2.º — Desenhe os triângulos T1, T2, T3, T4, T5 e T6, todos equiláteros com um dos vértices na origem

do referencial e um dos lados no eixo das abcissas e de lado, respectivamente: 20, 40, 60, 80, 100 e 120.

3.º — Conjecture a medida da altura do triângulo T1 e verifique a sua suposição corrigindo-a se for necessário.
Registe no quadro abaixo os valores pedidos a respeito de T1.

4.º — Faça o mesmo para os restantes triângulos.

5.º — Faça uma conjectura sobre o modo como estão relacionadas estas medidas, isto é: que relação parece haver entre a medida da altura e a medida do lado no mesmo triângulo equilátero?

6.º — Compare com a relação realmente existente pedindo:

PONTO 10, PONTO 20, PONTO 30, PONTO 40, PONTO 50 e PONTO 60.

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
ALTURA						
LADO						

Com a primeira parte deste guião, pretendia-se que os alunos utilizassem os comandos que movimentam ou orientam a tartaruga e que a fazem escrever ou apagar; o objectivo era *traçar triângulos equiláteros com um lado horizontal, desenhar e medir a altura referente a esse lado.*

Conjecturando a medida da altura, a primeira suposição feita pela maioria dos alunos foi que a altura seria geometricamente igual ao lado; testaram essa hipótese: uns partindo do vértice oposto ao lado em posição horizontal para este, outros do ponto médio do lado para o vértice oposto. Sentida a necessidade de apagar o excesso foram utilizando *pe bk 1* até lhes parecer ficar com um segmento não exterior ao triângulo (numa segunda tentativa já ousavam apagar mais passos de cada vez).

Na segunda parte do guião, chamando *REF* os alunos obtinham dois eixos que só lhe permitiam trabalhar no primeiro quadrante.

Para responder ao solicitado no ponto 5.º do guião, os alunos recorreram de novo ao computador pedindo, para cada triângulo, a razão entre a medida que obtiveram para a altura e o lado dado, valor que anotaram, numa linha extra do quadro figurado.

Depois, ao realizar o sexto passo do guião, ao mesmo tempo que aparecia no referencial utilizado, o ponto da recta de inclinação 60º e que passa na origem das coordenadas, com a abcissa escolhida, aparecia também, no canto superior direito do écran, o valor da ordenada do mesmo ponto, com cinco casas decimais.

Seguiu-se uma aula de síntese; em acetato, e na sala de aula habitual, foram apresentadas as determinações obtidas por cada par de alunos:

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
LADO	20	40	60	80	100	120
ALTURA	19	37	54	70	88	103
ALT./LADO	0,95	0,92	0,9	0,87	0,88	0,85
ALTURA	18	34	52	70	88	103
ALT./LADO	0,9	0,88	0,86	0,87	0,88	0,85
ALTURA	17	37	57	77	89	98
ALT./LADO	0,85	0,92	0,95	0,96	0,89	0,81
ALTURA	17	35	51	71	88	105
ALT./LADO	0,85	0,87	0,85	0,88	0,88	0,87
ALTURA	16	35	53	72	88	105
ALT./LADO	0,8	0,87	0,88	0,9	0,88	0,87
ALTURA	17	34	51	70	88	104
ALT./LADO	0,85	0,85	0,85	0,87	0,88	0,86
ALTURA	18	37	54	72	89	103
ALT./LADO	0,9	0,92	0,9	0,9	0,89	0,85

e as do computador:

ALTURA	17,31	34,64	51,96	69,28	86,60	103,92
ALT./LADO	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86

Os alunos, convidados a aplicar o conceito de grandezas directamente proporcionais anteriormente explorado, concluiram da proporcionalidade existente entre a altura e o lado de um triângulo equilátero; e, relacionando a ordenada do terceiro vértice do triângulo com a medida da altura e a abcissa do mesmo com a medida do comprimento do lado, foram informados do que se entendia por variáveis directamente proporcionais. Faltava indicar o valor da constante de proporcionalidade; aceitamos escrevê-la com apenas duas casas decimais.

Não podia deixar de os alertar para o futuro: um dia identificariam exactamente a razão agora procurada e já no 8.º ano seriam capazes de determinar exactamente a medida da altura de um triângulo equilátero.

3.ª FASE: Aplicações do tipo proporcionalidade inversa.

Inspirada por Emma Castelnuovo, não foi difícil decidir como proceder quanto à proporcionalidade inversa: bastaria que fossem, escolhido o referencial, traçados rectângulos com a mesma área e com dois dos lados sobre os eixos coordenados. Escolhi o número 36 como medida da área, os alunos foram convidados a determinar os divisores de 36 e em seguida a escrever os pares ordenados de números inteiros cujo produto é 36.

Face ao computador a tarefa desenvolveu-se em duas etapas. A primeira consistiu em descobrir e registar (já não foi entregue qualquer guião, mas seguiu-se de perto o anterior):

1.º — Que instruções dar à tartaruga para ela desenhar um rectângulo?
2.º — Que modificações introduzir para o rectângulo ficar em determinada posição?
3.º — Como proceder para a tartaruga desenhar um rectângulo de área previamente fixada?

Na segunda etapa, eram os seguintes os passos a dar:

1.º — Teclar *ref* (feito isto aparecia no écran um referencial e a tartaruga situada na origem, e orientada para cima).
2.º — Traçar rectângulos de área 36 com um lado sobre o eixo das abcissas e outro sobre o eixo das ordenadas (aqui foram convidados, em jeito de reforço ou remediação a recorrer à determinação dos divisores de 36 e dos pares ordenados de números inteiros, por exemplo, cujo produto é 36).
3.º — Conjecturar sobre a linha suporte do quarto vértice de cada um dos rectângulos assim traçados.
4.º — Teclar *v.rect* para confirmar a conjectura feita.

Após a representação de dois dos rectângulos, alguns dos alunos já afirmavam que o quarto vértice de todos os rectângulos ficavam numa recta «ao contrário» da outra, isto é imaginavam uma recta de declive negativo, dando por isso o trabalho por concluido: foi-lhes recomendado que confirmassem com mais um rectângulo, e depois sentiram necessidade de traçar os outros.

E agora identificando as coordenadas do quarto vértice com as medidas das dimensões do rectângulo, registamos a relação existente entre variáveis que são inversamente proporcionais.

Nova aula de síntese, na sala normal, com exemplos, contra-exemplos, ora sobre proporcionalidade directa ora sobre proporcionalidade inversa; mais outra com construção de tabelas associadas a situações problemáticas.

Feitas as aulas, gostaria de ser capaz de avaliar a eficácia das mesmas.

Numa primeira análise, ressalta o demasiado tempo gasto: com cada metade da turma gastei três aulas a explorar as leis e suas representações gráficas, o que sobrecarregou em seis o número de tempos lectivos dedicados a esta unidade. Poderá parecer muito: mas tenho consciência que há um conjunto de conhecimentos que pode ter sido adquirido, sem explicitamente ter sido trabalhado, como por exemplo, num triângulo a relação entre as amplitudes dos ângulos interno e externo num mesmo vértice, bem como a consciencialização da relação equilátero / equiângulo e até da soma das amplitudes dos ângulos internos, mais baseadas na necessidade de execução de uma tarefa do que na aquisição de um conhecimento. Com o intuito de confirmar esta minha percepção elaborei umas fichas de trabalho e se bem que não se tenha vislumbrado grande sucesso na sua realização, há, pelo menos um côro de quem se lembra de já ter visto aquilo; se não ficou o conhecimento, parece ter ficado o suporte para esse conhecimento.

Um outro aspecto a considerar na avaliação da experiência é o seguinte: a relação número de computadores disponíveis / número de alunos da turma aconselhava a repartição da turma em dois blocos; isto levou a que enquanto um bloco trabalhava na sala dos computadores o outro realizava uma outra tarefa, por exemplo, uma folha de trabalho sobre um assunto dado e numa outra sala. Ora daqui advieram duas consequências negativas: por um lado havia uma quebra de ritmo face ao assunto em análise, por outro lado os alunos nem sempre conseguem criar ou apenas manter um clima de trabalho na ausência do professor.

Apesar dos reparos feitos considero uma experiência válida (e muito do agrado dos alunos pelo menos a julgar pelas composições que fizeram sobre estas aulas e pelos comentários que os professores das outras disciplinas ouviram sobre as mesmas): a turma está longe de ser considerada uma boa turma, adivinha-se, até, um certo insucesso no final do ano a julgar pelas apreciações feitas nas reuniões intercalares, contudo houve alunos que pela primeira vez aprenderam alguma coisa de Matemática e até fizeram perguntas e comunicaram com o professor. Só por isto já teria valido a pena tê-las feito.

E é este o meu testemunho sobre as minhas primeiras aulas com o auxílio do computador.

Penso, contudo, que é devido um esclarecimento: se tivesse seguido a ordenação do programa, estas aulas não teriam sido possíveis. Mas iniciei o ano lectivo com o estudo da Geometria, para alargar o Universo Matemático dos alunos e treinar ao longo do ano a terminologia específica. Assim, começando por classificar figuras recortadas em cartão e compondo as já caracterizadas para produzir outras, fomos introduzindo as classificações de triláteros e de quadriláteros, de diversos pontos de vista; partindo da área do rectângulo, por equivalência de domínios, fomos registando as áreas de outras figuras planas que construíamos. Este formulário foi depois utilizado noutras perspectivas, nomeadamente para «calcular o valor numérico de expressões designatórias» e para «resolver equações elementares» (de resto apenas temos resolvido equações do tipo $ax+b=c$). Também investi muito no enriquecimento da Língua Materna: ao contrário de procurar uma linguagem que todos entendam, de quando em vez introduzo termos menos usuais, numa preocupação formativa e não punitiva, isto é utilizando-os na sala de aula e nas folhas de trabalho para que possam ser esclarecidos sobre o significado e utilização dos mesmos, mas não nos momentos de avaliação individual.

Gostaria ainda de agradecer à colega Branca Silveira toda a colaboração dispensada na concretização do projecto.

Um procedimento de cada vez (TELL e os que estiverem «à mão de semear»)

Fernando Nunes

Qualquer *logoista* pode, tal como Schiller ou Rossini, sentir a curiosidade de recriar um episódio baseado no célebre desafio protagonizado pelo arqueiro suíço Guilherme Tell. Contando com várias tartarugas que representarão o arqueiro, o seu filho, a seta e a maçã, pode ser construído um drama num ou mais actos. Para «apimentar» um pouco mais, podem ser colocados ao acaso (ver o LOGO.MAT do n.º 9), o arqueiro e a maçã, surgindo a seta com uma orientação também aleatória, o que obrigará o utilizador a estimar a rotação necessária para que a maçã possa ser atingida.

Por sorte, algumas versões de Logo apresentam a possibilidade de trabalhar, simultaneamente, com mais que uma tartaruga. No caso do Logo Writer são quatro as tartarugas disponíveis.

Para quem já fez programas em que utilizou a animação, por exemplo a corrida da lebre e da tartaruga ou o trânsito numa estrada, notou com certeza a vantagem tirada do facto de se poderem usar várias tartarugas. O mesmo deve ter acontecido a quem fez a simulação do lançamento simultâneo de vários dados ou a da perseguição de um gato a um rato. Jogos que necessitem do movimento de mais do que um objecto, também podem ser programados com tartarugas múltiplas.

Logo após a introdução do programa, apenas está activa — pronta para executar instruções — a tartaruga 0 colocada no ponto [0 0]. As tartarugas 1, 2 e 3 estão invisíveis e inactivas nas suas «casas», respectivamente [0 -40], [-40 -40] e [-40 0].

É com o comando **tell** que as diversas tartarugas são activadas. Este comando aceita como entrada (input) um número de 0 a 3, uma lista composta por quaisquer destes números ou ainda o relator **all**, equivalente à lista [0 1 2 3]. Todas as instruções seguintes estão sintaticamente correctas:

```
tell 2
tell [1 2]
tell all
```

Uma das particularidades deste comando (não única em Logo, recordemos por exemplo os comandos relativos ao estado da caneta), reside no facto de não serem perceptíveis as suas consequências logo após a sua execução. As tartarugas nomeadas no último **tell** obedecerão a todas as instruções posteriores, só alterando este estado um novo **tell** que modifique o conjunto das tartarugas activas ou o comando **rg** que, além de vários outros efeitos, restaura as condições iniciais, ficando visível e activa apenas a tartaruga 0. Existe a possibilidade de nos informarmos de quais as tartarugas estão activas nesse momento, usando o relator **who** que fornece o número ou a lista de números referentes a essas tartarugas.

Existe no entanto uma forma de, temporariamente, apenas alguma(s) das tartarugas (activas ou não) executarem instruções sem ter que se recorrer a **tell:**

```
ask 2 [fd 50]
```

Apenas a tartaruga 2 se irá deslocar 50 unidades para a frente, qualquer que seja o conjunto das tartarugas activas, que não é alterado pelo procedimento primitivo **ask**. A sua sintaxe obriga à indicação de dois inputs. O primeiro deve ser um número ou uma lista de números, referentes às tartarugas que irão executar as instruções contidas na lista do segundo input.

Outro comando, associado à utilização de várias tartarugas e que permite a execução sequenciada, portanto não simultânea, por parte das tartarugas activas é o procedimento primitivo **each.**

```
tell all
each [fd 50]
```

As instruções acima referidas têm como resultado final exactamente o mesmo que obteríamos com **tell all fd 50**. A diferença reside na forma como as tartarugas as executam: ordenadamente (primeiro a 0 até à 3) se usarmos **each**, simultaneamente no caso contrário.

Em Logo, como em quase tudo, há muitas maneiras de alcançar o mesmo resultado o que, diga-se em jeito de parênteses, pode valorizar os meios usados para atingir os fins pretendidos. O célebre quadrado, normalmente desenhado só com uma tartaruga, pode ser obtido desta maneira:

```
tell all
each [seth (180 + 90 * who)]
fd 40
```

Será de notar que o relator **who** vai tomando sucessivamente os valores 0, 1, 2 e 3 devido ao uso de **each**, além de que as tartarugas devem estar todas nas suas «casas».

Estes seis procedimentos primitivos aqui analisados (**tell, ask, each, rg, all** e **who**) podem ser associados a outros, de modo a possibilitar a exploração de situações problemáticas que apresentam interesse para o ensino da Matemática.

PROBLEMA DO TRIMESTRE

Problema do Trimestre

Um jogador está a adivinhar números pensados por um outro jogador, mas só pode fazer perguntas a que este último responde **sim** ou **não**.

Qual é o maior número possível que o primeiro jogador pode adivinhar, com uma sequência de 20 perguntas?

Sobre o problema anterior

O problema do trimestre anterior não suscitou muito entusiasmo, ou porque as férias convidavam ao descanso, ou porque, como diz o colega Luís Carmelo, de Tondela, «...mesmo gastando mil contos as hipóteses de ganhar são ainda de uma em 215».

E é precisamente deste colega a resposta que destacamos, pela sua simplicidade.

«Consideremos uma sequência qualquer de sete números distintos (é perfeitamente indiferente que esse números sejam escolhidos no conjunto dos primeiros 7 números naturais, ou no conjunto dos primeiros 47 números naturais, ou dos primeiros **k** números naturais):

$$N_1\ N_2\ N_3\ N_4\ N_5\ N_6\ N_7$$

em que N_7 designa o número suplementar.

Ordenando os seis primeiros números e fazendo-os seguir do número suplementar (N_7), a probabilidade de os sete números estarem, agora, ordenados é exactamente igual à probabilidade de que o número suplementar (N_7) seja maior do que os outros seis que é igual, ainda, à probabilidade de que, na sequência inicial, o número suplementar (N_7) seja o maior.

Ora, na sequência inicial, o número maior pode ser, com igual probabilidade, ou N_1, ou N_2, ou N_3, ou N_4, ou N_5, ou N_6, ou N_7.

Logo, a probabilidade de que o maior seja N_7 (o suplementar) é $\frac{1}{7}$».

Assim, é 1/7, a probabilidade da chave do totoloto ficar totalmente ordenada.

Se tiverem dúvidas acerca da solução apresentada acima, leiam a resposta do Sérgio Valente. Talvez as fórmulas os convençam.

«Analisando o enunciado do problema, torna-se claro que:

Se o número suplementar for maior que os outros seis, a sequência de sete números ficará ordenada[1].

Portanto, o problema pode ser traduzido do seguinte modo:

Temos 47 bolas numa caixa, numeradas de 1 a 47; tiram-se aleatoriamente 7; qual é a probabilidade da última bola tirada ter um número maior que as outras seis?

Representemos por (X_1, X_2, ..., X_6, X_7) o resultado de uma tiragem sucessiva de 7 bolas. Quer-se saber a probabilidade de X_7 ser maior que X_i, para i de 1 a 6.

Como todas as sequências têm igual probabilidade de sair, tem-se que a probabilidade pedida é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos igualmente possíveis.

O número de casos possíveis é fácil de determinar. Trata-se do número de sequências ordenadas com 7 elementos, sem repetição, que se podem considerar, sabendo-se que esses elementos podem ser quaisquer números de 1 a 47. Trata-se, portanto, de arranjos sem repetição, 47, 7 a 7.

Tem-se então que o número de casos possíveis é: ${}^{47}A_7$

O número de casos favoráveis é um pouco mais difícil de calcular. Raciocinemos do seguinte modo:

Se o último número da sequência (X_7) for 47, os outros poderão ser qualquer número de 1 a 46.

Se X_7 for 46, os outros poderão ser qualquer número de 1 a 45.

E assim sucessivamente, até $X_7 = 7$, caso em que os outros poderão ir de 1 a 6.

Tem-se então que o número de casos favoráveis é:

$${}^{46}A_6 + {}^{45}A_6 + \ldots + {}^{6}A_6$$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{46}A_6 + {}^{45}A_6 + \ldots + {}^{6}A_6}{{}^{47}A_7} =$$

$$= \frac{6!\ ({}^{46}C_6 + {}^{45}C_6 + \ldots + {}^{6}C_6)}{7!\ {}^{47}C_7} =$$

(Continuação na pág. 36)


CASIO
*** CASIO FX-850P ***
*** SCIENTIFIC LIBRARY 116 ***
SCIENTIFIC FORMULA 128
fx-82B
fx-5000F
* 128 Fórmulas incorporadas
* Programável
fx-82B
* Calculadora Científica Básica
* 75 Funções
fx-7500G
* Calculadora Científica
* Programável c/ gráficos
* Visor Gráfico
CALCULANDO O FUTURO CIENTIFICAMENTE
CALCULADORAS PARA O ENSINO
MAIS MEMÓRIAS
MAIS FUNÇÕES
MAIS QUALIDADE
exija
GARANTIA
BELTRÃO COELHO, LDA.
2 ANOS
CASIO
LIDER MUNDIAL EM CALCULADORAS

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

SETEMBRO

1

Eu sou o produto de quatro números primos. Os meus três dígitos são primos e diferentes. A soma dos meus factores primos é 30.

Quem sou eu?

2

Determine o valor de:

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}}}$$

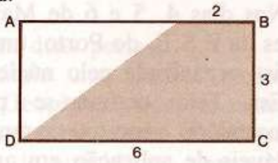
4

Use oito algarismos diferentes no produto:

□□□
× □□
□□□□

5 **6**

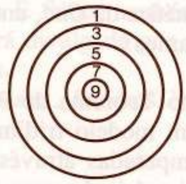
Que percentagem da área do rectângulo [ABCD] está sombreada?



7 **8**

O Henrique atirou seis dardos e todos acertaram no alvo da figura. Qual dos números apresentado pode representar o resultado alcançado?

4, 17, 56
28, 29, 31



9

Descubra os números que faltam:

2, 5, 10, 17,
□, 37, □, 65,
□, □, □, 145

11

Plante 19 árvores de modo que o pomar tenha 8 filas com cinco árvores em cada fila.

12 **13**

Determine x, tal que:

$(\log x)^2 = \log (x^2)$

14

Se lançar dois dados octaédricos, qual é a soma mais provável de surgir?

15

Divida o bolo em oito partes iguais, apenas com 3 cortes.

16

Descubra os números que faltam:

1, 2, 4, 6,
□, 12, 16, 18,
22, □, 30 36,
40, □, □, 52

18

Um carro sobe uma colina à velocidade de 10 km/h e desce-a, pelo mesmo caminho, a 20 km/h.

Qual foi a velocidade média da viagem?

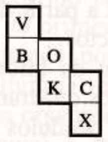
19

Descubra o termo seguinte da sequência:

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{8}{5}, \frac{8}{3}$

20 **21**

Quando a planificação for dobrada para formar um cubo, que letra fica na face oposta à que tem o X?



22

Escreva as três linhas seguintes da tabela:

1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1

23

Uma escada tem dez degraus. Pode subir um ou dois degraus de uma vez. Pode fazê-lo pela ordem que quiser.

De quantas maneiras diferentes pode subir a escada?

25

O produto das idades de um grupo de «teenagers» é 10 584 000.

Descubra o número de «teenagers» do grupo e a soma das suas idades.

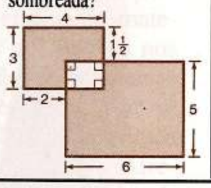
26

Use os números de 0 a 9 para formar uma fracção equivalente a 1/3.

□□□□□
□□□□□

27

Qual é a área da parte sombreada?



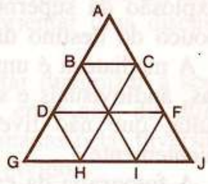
28

Simplifique a expressão:

(99–9) (99–19) (99–29)...
...(99–199)

29 **30**

Coloque os números de 1 a 9 nos triângulos mais pequenos, de modo que a soma dos quatro números nos triângulos [ADF], [BGI] e [CHJ] seja a mesma.



DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

Núcleo do Porto foi a Paris

O núcleo da A.P.M. — Porto organizou, em colaboração com o Instituto Francês do Porto, uma viagem a Paris, tendo como principal objectivo uma visita à *Cité des Sciences et de L'Industrie de La Villette*. Esta visita, planeada por Michel Darche (matemático pertencente à Direction du Développement de La Villette), decorreu nos dias 23 e 24 de Março e incluiu visitas guiadas à Secção de Matemática e às exposições temporárias *L'invention du temps* e *Image Calculée*.

Na secção de Matemática da *Cité*, entre os mais diversos materiais, destacamos:

— demonstração do Teorema de Pitágoras, através da rotação de um modelo tridimensional em que as áreas são comparadas através de um líquido;
— simulação da trajectória de atracção de um planeta para um buraco negro;
— vídeos sobre Geometria não Euclideana e paradoxos de Zenão;
— lente acústica;
— simulação do problema das 4 cores com bolas luminosas;
— calculadoras e circuitos lógicos funcionando com água;
— um espaço dedicado a perspectivas deformadas, retardadas, aceleradas e anamorfoses.

Na exposição *Image Calculée*, construímos imagens tridimensionais e vimos imagens constituídas a partir de cálculos, destinados à modelização de objectos.

Na exposição *L'invention du temps*, além da informação sobre a evolução dos calendários, vimos quadrantes solares, lunares, clepsidras, ampulhetas, pêndulos e relógios, desde os primeiros modelos mecânicos aos mais recentes, incluindo um biológico.

Ainda no espaço da *Cité*, no planetário, assistimos à sessão *Vida e morte de uma estrela* onde, a partir da explosão da supernova de 1987, nos foi contado um pouco do destino das estrelas.

A mediateca é um espaço enorme com livros, revistas, audiovisuais e *software* educativo de consulta gratuita, que não tivemos tempo para explorar convenientemente.

A fotografia da capa é uma imagem da *Geode*. Esta esfera de 36 metros de diâmetro e coberta exteriormente de aço inoxidável polido, reflecte imagens espectaculares — neste caso, a *Cité des Sciences et de l'Industrie*.

A Geode é agora a sala de espectáculos com o maior écran hemisférico do mundo. Aqui vimos os filmes *Benthos ou a terra submarina* e *Hydro*.

Com *Benthos*, através de imagens muito belas, descemos a mais de 3000 metros de profundidade, no submarino Náutilo e observámos uma fauna até agora desconhecida. *Hydro* fala-nos da água, como é óbvio, através de imagens surpreendentes.

Nos 5 pisos que constituem a *Cité* há muito para ver e aprender. O melhor é irem lá...

Feira de ideias e materiais

Nos dias 4, 5 e 6 de Maio realizou-se, nas instalações da E.S.E. do Porto, uma «Feira de Ideias e Materiais» organizada pelo núcleo do Porto da A.P.M.

Esta «Feira» destinou-se a professores do ensino básico e secundário e constou de uma mostra de materiais manipuláveis de aplicação em ambiente de aula.

Os materiais apresentados foram cedidos por Clubes de Matemática, algumas Escolas e pela própria A.P.M.

Realizaram-se ainda algumas sessões especiais:

— «Linguagem Logo» — orientada por Branca Silveira e Jorge Maia com a colaboração de Maria José Costa;
— «As Calculadoras na Escola» — orientada por Cristina Loureiro, Graciosa Veloso e Albano Silva;
— «Materiais para o Ensino da Matemática no Ensino Básico - 1.º ciclo» — orientada pelos professores da E.S.E. de Viana do Castelo, Pedro Palhares, Lina Fonseca e Teresa Pimentel e alunos.

Geoplano no Secundário

Realizou-se no passado dia 27 de Abril na Escola Secundária Seomara da Costa Primo, mais um encontro promovido pelo Núcleo de Lisboa da A.P.M.

O tema era o seguinte:

Geoplano
- Um material manipulativo para a aprendizagem da Matemática?
- Um auxiliar na descoberta de relações geométricas?
- Que outras potencialidades?
- Algumas experiências com alunos.

A sessão foi dividida em duas partes.

A primeira parte constituiu uma sensibilização às potencialidades do uso do Geoplano. Além de material de consulta e bibliografia sobre o assunto foram estruturadas algumas sugestões de actividades, com vários graus de dificuldade, para os participantes realizarem.

A segunda parte foi constituída por um debate. Como ponto de partida para o debate foram projectados extractos de uma aula videogravada, onde os alunos utilizavam o geoplano, e o relato de duas experiências; uma focando o tratamento da Geometria elementar com alunos do 7.º ano e outra com alunos do 8.º ano, neste foi feito o percurso desde a geometria elementar até à generalização do teorema de Pitágoras.

Foram abordadas questões relacionadas com o tempo utilizado em actividades deste género; actividades individuais ou em grupo, e elevado número de alunos por turma como factor impeditivo para utilizar actividades com o geoplano, entre outros.

A resolução de problemas e a folha de cálculo

Tem-se afirmado e repetido que a resolução de problemas é a metodologia adequada ao ensino da matemática. Não só pelas capacidades que desenvolve nos alunos, mas também porque a resolução de problemas é um dos aspectos da experiência matemática. Tem-se afirmado e repetido que a folha de cálculo electrónica é uma ferramenta facilitadora da aprendizagem, extremamente útil na resolução de problemas. Porém, a prática não tem sido abundante de exemplos.

Quem esteve presente na escola secundária Veiga Beirão, no dia 17 de Maio, teve a oportunidade de ver como a Georgina Tomé e a Susana Carreira passaram das palavras aos actos. Partindo de uma colecção de problemas, criados para o efeito ou criteriosamente escolhidos, que resolviam com os conhecimentos de que dispunham em cada momento e, é claro, utilizando a folha de cálculo electrónica, avançando, em seguida, para uma exploração de aspectos particulares desses mesmos problemas sugerida por fichas de trabalho, os alunos daquelas nossas colegas estudaram, de uma forma especial, o programa de matemática do 11.º ano, viveram alguns aspectos da experiência matemática, aperceberam-se da aplicação da matemática a outros ramos da ciência.

E aprenderam a trabalhar com computadores e com um programa utilitário muito difundido.

E divertiram-se.

Ficou a ideia de que afinal é fácil, ficou a vontade de experimentar. E ficou, também, a promessa de que a experiência será divulgada por escrito, para chegar a mais professores.

Georgina e Susana, ficamos à espera.

Resolução de problemas

O sétimo encontro APM-Núcleo de Lisboa realizou-se no passado dia 31 de Maio na Escola Secundária da Falagueira-Amadora. Nele se prentenderam abordar questões relacionadas com a resolução de problemas, dentro e fora das aulas de Matemática.

Para nós, professores da escola onde se desenrolou esta sessão, o mais importante não terá, no entanto, ocorrido nesse dia.

O primeiro desafio foi-nos lançado ainda em Janeiro, quando nos propuseram organizar esta sessão. Nessa altura já vários de nós se tinham envolvido activamente na organização do concurso do *Problema Mensal* (extra-aula) e do concurso *Matutando... no oitavo* (aula e extra-aula), para além de estarmos preocupados em ocupar grande parte das nossas aulas com actividades de resolução de problemas.

Assim, o tema não era novo para nós, embora ninguém se sentisse preparado para orientar uma discussão sobre o mesmo.

Percebemos no entanto que aceitar dinamizar a sessão seria um óptimo pretexto para, entre nós, discutirmos e aprofundarmos questões levantadas pelas diversas actividades em que estávamos envolvidos.

Neste sentido, encontrámo-nos várias vezes, ocupando algumas das nossas tardes livres com discussões que todos nós não temos dúvidas em considerar como muito enriquecedoras.

Conseguimos assim planear uma sessão de 2 horas e meia, baseada no trabalho em pequenos grupos em que se propôs:

Grupo 1: Actividades em Logo
Grupo 2: Actividades com o Geoplano
Grupo 3: Questões sugeridas por concurso de problemas
Grupo 4: Alguns problemas susceptíveis de generalização
Grupo 5: Levantar e resolver alguns problemas a propósito duma situação proposta
Grupo 6: Jogar com o Trinca Espinhas

Depois de 1 hora e meia de trabalho nos grupos (que nos pareceu ter sido um dos momentos mais ricos da sessão), procurou-se que cada um deles expusesse aos restantes o trabalho desenvolvido, contribuindo para dar resposta à seguinte questão comum:

— Em que medida a resolução de problemas poderá implicar alterações no ensino/aprendizagem da disciplina de Matemática?

Seguiu-se uma discussão viva, onde predominaram as questões relacionadas com os concursos de problemas, que reflectiam as experiências (muitas vezes reatadas) dos professores presentes.

Para os cerca de 40 professores que estiveram presentes ficámos certos de que valeu a pena.

Isso não significa porém que imensas questões não tenham ficado para uma próxima oportunidade Provavelmente já no Profmat!

A APM em Castelo Branco

De 2 a 5 de Maio realizou-se na Escola Preparatória Afonso de Paiva em Castelo Branco a SEMANA DA MATEMATICA subordinada ao tema:

Aplicações da Matemática e Construção de Modelos, sendo os principais objectivos desta semana:

— Despertar o gosto pela Matemática;

— Promover o desenvolvimento intelectual do indivíduo através de:

- o ensino da Matemática e a utilização de novas tecnologias;
- a construção de ideias matemáticas e a exploração de modelos.

Organizaram-se ateliers de trabalho para os alunos sobre temas de álgebra, geometria, topologia, utilização das máquinas de calcular e computadores. Incluiu também a projecção de dois diaporamas e o «Problema do Dia» com prémios para os alunos.

Na realização desta semana empenharam-se os sócios da APM (professores e alunos da E.S.E.C.B.) e alguns professores da escola.

A semana contou ainda com a realização de uma mesa redonda para professores sobre:

— os novos programas e abordagens metodológicas, sob a orientação do Dr. Mário Miranda Ceia e da Dra. Gertrudes Amaro.

Grupo de Trabalho para Edição das Publicações APM

Está em constituição um grupo de trabalho para se dedicar à edição electrónica das publicações APM.

- *Se gosta de artes gráficas,*
- *Se não quer perder esta oportunidade de aprender a trabalhar com programas de desenho e de edição electrónica no Macintosh,*
- *Se tem alguma disponibilidade de tempo e quer ajudar a Associação num sector de importância fundamental para o nosso trabalho — as publicações,*

então entre em contacto com Eduardo Veloso — Av. 24 de Julho, 134-4.º, 1300 Lisboa, ou pelo tel. 602501.

A importância do problema (conclusão)

Neste momento, dado que, de uma problemática real, emergiu a exigência do cálculo das probabilidades, voltámos às simulações com dados e moedas (já utilizadas na escola primária) para retomar com novos conhecimentos a problemática concreta.

Notas

(1) Em inglês, no original (N. da T.)

(2) Trata-se dos programas italianos (N. da T.)

(3) Trata-se, ainda, dos programas italianos (N. da T.)

(4) Edição crítica de Baldassarre Bonconpagni, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 185.

(5) Entre outros, podemos citar um problema que diz respeito a pássaros e a uma fonte, a páginas 331-332 e 398-399 no primeiro tomo da edição crítica já referida. Este problema é resolvido, quer pelo método da dupla falsa posição (Catayno), quer por um processo geométrico que utiliza a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras.

(6) Por exemplo, no tratado de Tommaso della Gazzaia (Mestre de Ábaco) pode ler-se o seguinte problema: «Um pesador do rei utiliza seis pedras de pesos diferentes com que pode pesar de uma a trinta libras». Tommaso demonstra qual é o peso de cada pedra.

(7) Le Matematiche oggi nella società e nella cultura italiana.

(8) Ficamo-nos pela escola média, porque as probabilidades não foram ainda introduzidas oficialmente no currículo da escola secundária superior.

Bibliografia

Boyer, C.B. (1982). *Storia della matematica*. Mondadori editore.

Bunt, L. & al. (1987). *La radici storiche delle Matematiche Elementari*. Zanichelli.

Danzig, T. (1973). *Il numero, linguaggio della scienza*. La Nuova Italia.

Giacardi, L. & Roero, S. (1979). *La matematica delle civiltà arcaiche*. Stampatori Didattica.

Noël, Emile (Ed.) (1987). *Le Matin des Mathématiciens*. Edition Belin, 8.

Quaderni del Centro Studi della Matematica Medievale: Tommaso Della Gazzaia — Pratichạ di Geometria e tutte misure di Terre. Dal ms. C. III 23 della Biblioteca comunale di Siena. Transcrizione di Cinzia Nanni, 1982.

Leonardo Eulero. *Elementi di Algebra*. Londra, 1797.

Leonardo Pisano. *Liber Abbaci*. Edizione critica di Baldassarre Boncompagni. Roma: tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857.

A região perdida (conclusão)

Sendo P_k um ponto qualquer, o segmento $[P_{n+1}\ P_k]$ ao intersectar cada uma das cordas já existentes vai determinar novas regiões. Se o segmento intersectar 3 cordas, 4 novas regiões aparecerão.

Resta saber quantas cordas o segmento $[P_{n+1}\ P_k]$ intersecta. Percorrendo a circunferência no sentido dos ponteiros do relógio, $[P_{n+1}\ P_k]$ intersecta qualquer corda que tenha como extremos um dos pontos $P_1, \ldots, P_{k-1}$, e um dos pontos $P_{k+1}, \ldots, P_n$. Intersectará então $(k-1)\ (n-k)$ cordas, e o número de novas regiões determinadas pelo segmento $[P_{n+1}\ P_k]$ é $(k-1)\ (n-k)+1$.

Como o ponto P_{n+1} pode ser unido a qualquer dos n pontos já existentes o número de novas regiões, **N(n+1)**, será dado por:

$$\mathbf{N(n+1)=\sum_{k=1}^{n} (k-1)\ (n-k)+n,}$$

ou,

$$\mathbf{N(n+1)=(n^3-3n^2+8n)/6}$$

Para $n=6$, o número de novas regiões que resultam da marcação de P_7 é $N(7)=26$, e $R(7)=57$, confirmando-se assim o resultado anterior.

Mais importante que calcular o número de regiões dados 30 pontos é, sem dúvida, a generalização do problema. Podemos chegar a uma expressão que permita determinar, para qualquer número de pontos, o número de regiões **R(n)**:

$$\mathbf{R(n)=1+\sum_{k=1}^{n-1} N(k)=1+\sum_{k=1}^{n-1} (k^3-3k^2+8k)/6,\ \ n\geqslant 2}$$

expressão equivalente a [4].

Donde, $R(30)=27841$.

Referências:

Chinn, P. Z. (1988). Inductive Patterns, Finite Differences, and a Missing Region. *Mathematics Teacher*, vol. 81, n.º 6, p. 446-9.

Guillotte, H. P. (19186). The Method of Finite Differences: Some Applications. *Mathematics Teacher*, vol. 79, n.º 6, p. 466-70.

Thompson, A. G. (1985). Developing Students' Matehmatical Thinking. *Arithmetic Teacher*, vol. 33, n.º 1, p. 20-23.

O problema... (continuação)

$$= \frac{6!\ {}^{47}C_7}{7!\ {}^{47}C_7} \stackrel{(2)}{=}$$

$$= \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$$

O problema está resolvido.

Importa agora reflectir sobre a resolução do problema, para tentar perceber o porquê do resultado obtido.

Um primeiro aspecto que importa salientar é que o número de bolas na caixa (47) não é relevante. Se, em vez de 47, tivéssemos trabalhado com uma variável genérica (n), teríamos obtido o mesmo resultado.

Outro aspecto que tem interesse discutir é não ser relevante o facto de se ter escolhido a última bola como sendo aquela que se vai comparar com as seis primeiras. Quer dizer: o problema que nos foi posto é, ao fim e ao cabo, equivalente a este:

Dados 7 números quaisquer, todos diferentes, qual é a probabilidade de um deles ser maior que os restantes?

Como não há números privilegiados, torna-se claro que a probabilidade é 1/7».

Notas:

(1) Conclusão idêntica a do Luís Carmelo *(N. da R.)*.

(2) Tem-se a seguinte propriedade: $\sum_{k=p}^{n} {}^{k}C_p = {}^{n+1}C_{p+1}$

Esta propriedade, que se pode demonstrar por indução, tem a seguinte ilustração no Triângulo de Pascal: a soma dos elementos de uma coluna, até uma linha qualquer, é igual ao elemento que fica na linha abaixo e na coluna à direita.

Ainda o cão (conclusão)

sar de não ser nenhum Ben Johnson, presumo conseguir pelo menos metade (18 km/h) e então o cão terá de fazer 18 × 5,86 = 105 km/h. Impossível: o mamífero mais veloz é a chita que faz 101 km/h (in *Guiness-Book of Records*). Logo, não há cão que me detenha...

2. Se eu fosse mesmo prisioneiro e estivesse mesmo num pátio quadrado, guardado por um cão verdadeiro, ainda havia um outro método muito mais simples e de quase total eficácia. Dava pequenas e vagarosas voltas em torno do ponto H. O cão, dada a sua característica (A'), corria a toda a velocidade à volta do pátio. Obrigava-o assim a dar 6 ou 7 voltas, de 800 metros cada uma. Nessa altura, o cão estaria esfalfado e eu fresco que nem uma alface. Depois, era só uma corridinha de 100 metros: o cão, esgotado, já não tinha forças para me apanhar.

Variante

E se o pátio for circular? Quantas vezes mais depressa tem de correr o cão para que o homem não fuja?

Prolongamento

Ainda no caso do pátio quadrado, qual é realmente a melhor estratégia do cão para evitar a fuga do homem?

As voltas... (continuação)

Caso de figuras «pavimentáveis» com um só tipo de figura

São casos semelhantes aos atrás referidos. Alguns exemplos para este primeiro caso seriam o cálculo do número de triângulos equiláteros existentes num triângulo equilátero (haveria a tentação de fazer a transposição pura e simples para o caso de teatraedros num tetraedro mas aí o problema complica-se, visto o tetraedro não ser «pavimentável» com tetraedros, embora haja abordagens possíveis deste caso), de prismas triangulares regulares em prismas triangulares regulares, etc.

Caso de figuras «pavimentáveis» com dois tipos de figuras

Numa segunda fase poder-se-ia pensar em casos como, por exemplo, o hexágono regular e prisma hexagonal regular que não são «pavimentáveis» com hexágonos regulares e prismas hexagonais regulares respectivamente (por exemplo, no caso do hexágono a «pavimentação» é feita com losangos e hexágonos regulares).

Caso de figuras «curvas»

É um problema já mais complexo. É o caso, por exemplo, de círculos em círculos, esferas em esferas, cilindros em cilindros, esferas em cilindros, etc. Em todos estes casos haveria que definir as regras do jogo, isto é, impor as restrições necessárias de modo a tornar possível a resolução do problema.

ÍNDICE

Pág.

As aplicações da Matemática em foco
Leonor Moreira 1

A importância do problema
Lucia Grugnetti 3

As mais belas rectas do mundo
Fernando Bensabat 7

A região perdida
António Bernardes 11

Ainda o cão e o prisioneiro
José Paulo Viana 15

Vissicitudes de uma investigação bem sucedida
Cristina Loureiro 17

As voltas que os cubos dão
Alberto Canelas 21

A minha primeira experiência de computadores na sala de aula
Maria José Costa 25

SECÇÕES

LOGO·MAT
Fernando Nunes 28

Problema do trimestre 29

Dia-a-Dia com a Matemática
António Bernardes 31

A.P.M. 32