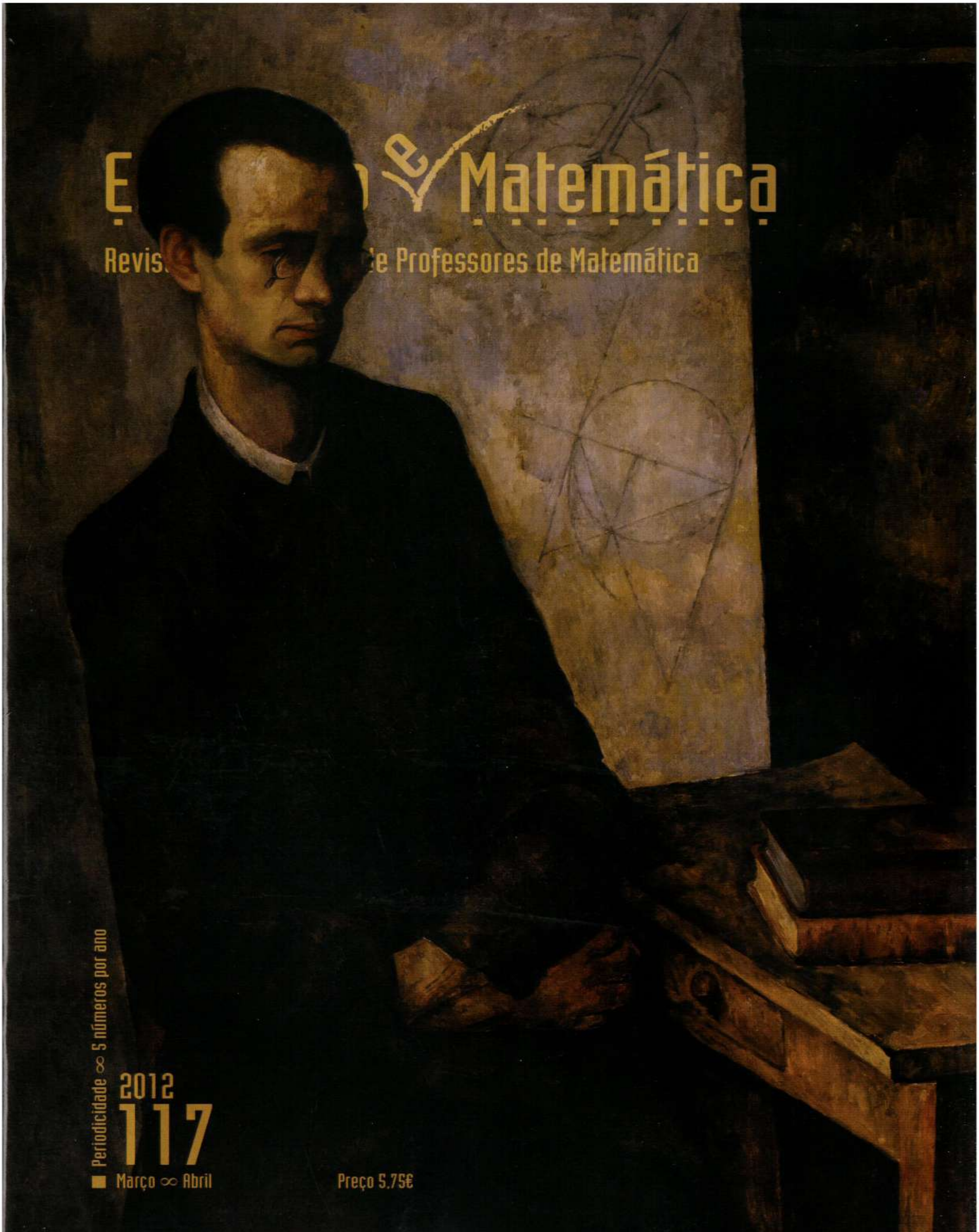


E e Matemática

Revis e Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2012

117

Março ∞ Abril

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Isabel Rocha
Subdiretora	Manuela Pires
Redação	Adelina Precatado
	Ana Paula Canavarro
	Alice Carvalho
	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Helena Rocha
	Irene Segurado
	Júlia Perdigão
	Lina Brunheira
	Nuno Candeias
	Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Fevereiro 2012
Tiragem 2100 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Sobre a capa

Na capa deste número:

O Matemático
Diego Rivera (1919)

Museo Dolores Olmedo
Espacio de Diego Y Frida
México

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Cristina Oliveira, Ana Pires, Cátia Rodrigues, Elisa Barbosa, Eduarda Moura, João Almiro, Joana Latas, Leonor Santos, Margarida Abreu, Paulo Afonso, Paulo Correia, Ricardo Cunha Teixeira, Rui Gonçalo Espadeiro, Sónia Almeida, Vasco Dias.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Queremos que os alunos saibam mais!

Creio poder dizer que todos aqueles que, de forma direta ou indireta, estão ligados à Educação concordam com as palavras proferidas por Nuno Crato, em 26 de março de 2012, num noticiário da RTP1, escolhidas para título deste editorial. Contudo, analisemos com maior profundidade o seu significado e alcance.

A minha preocupação face às orientações para a Educação do atual ministro vem de longe. Ficou claramente agravada quando li as justificações, apresentadas em dezembro de 2011, para a revogação do documento *Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais*, de 2001. Afirma-se que esse documento menoriza o papel do conhecimento e o desenvolvimento de automatismos e da memorização. Tal não é assim. Considera a sua importância, mas não reduz a aprendizagem, em particular da Matemática, a tais aspetos. A perspetiva entendida neste documento é possível ser reconhecida nos programas de Matemática atualmente em vigor, que consideram que a aprendizagem matemática inclui a aquisição compreensiva de conhecimentos e o desenvolvimento de capacidades matemáticas e atitudes. Chamando-lhe ou não competência matemática, as atuais orientações programáticas para o ensino e aprendizagem da Matemática em Portugal estão, em tudo, consonantes com o que de mais consensual e reconhecido existe a nível internacional, como sejam as diversas recomendações emitidas pela comissão europeia nos últimos anos.

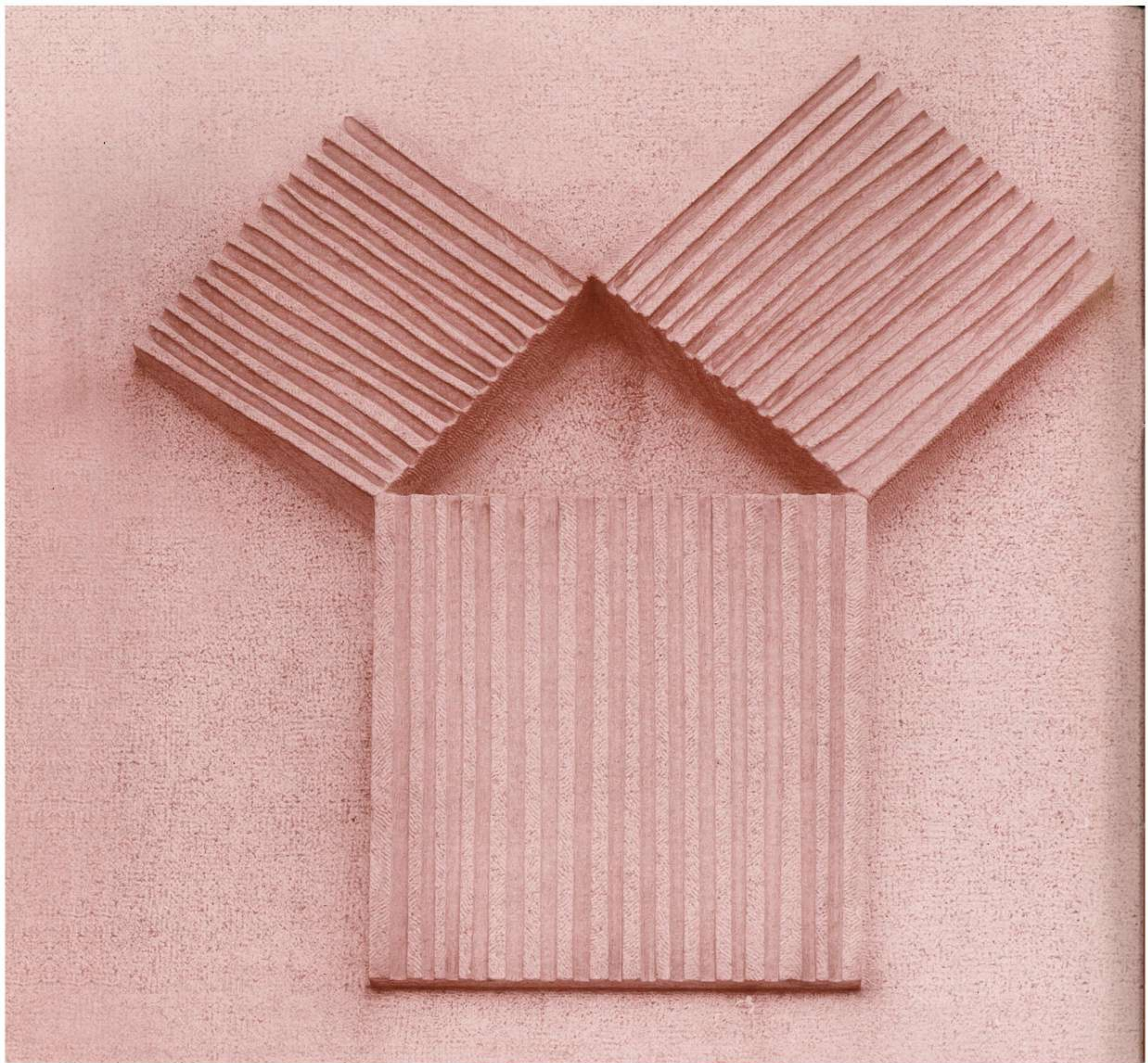
Ainda para justificar a referida revogação, caracterizam-se os *objetivos de generosos, mas vagos e difíceis de aferir*, propondo-se vir a substituí-los por outros *precisos e mensuráveis*. Este tipo de argumentação parecia, desde logo, servir para nos preparar para outro tipo de consequências. E ei-las que não tardaram! O exame no final do 6.° ano era algo já previsto, pois estava consignado no programa eleitoral deste governo, embora de forma não tão explícita. No que respeita ao 4.° ano, era então difícil de supor a sua reposição com características idênticas às existentes para os exames do 9.° ano.

Justifica o Sr. Ministro que «é preciso aferir melhor o programa dos alunos no final de cada ciclo». Pergunto: Isso passa por introduzir os exames ou melhorar as provas de aferição, já existentes? Afirma que *deverá ser feita uma avaliação mais rigorosa (...) primordialmente através da avaliação dos conhecimentos adquiridos pelos alunos*. Pergunto: Rigorosa pressuponho que quererá dizer fiável, mas a classificação atribuída num exame é mais fiável? O Sr. Ministro afirmou no referido despacho de dezembro de 2011 que o documento então revogado apresentava propostas não fundamentadas cientificamente. Poder-nos-á então indicar em que fundamentação científica se sustenta para defender a introdução de exames nos finais de cada ciclo de escolaridade do ensino básico e, muito em particular, no 4.° ano? Seria uma informação muito importante, não só para os educadores portugueses mas para todos os outros países considerados evoluídos, que ainda não compreenderam o contributo tão importante que tal medida pode acarretar para a aprendizagem, uma vez que não a seguiram ou, em muitos casos, a abandonaram! Esta medida, sem dúvida, conseguirá levar os professores a concentrarem toda a sua prática de ensino na aquisição de conhecimentos, no domínio de técnicas de cálculo, e no desenvolvimento da memorização, mas certamente em nada contribuirá para a aprendizagem matemática dos alunos portugueses. Acrescente-se ainda que, estando Portugal a viver uma situação económica grave, como compreender um gasto público adicional sem efeitos pedagógicos frutuosos?

O Sr. Ministro afirmou em 26 de março, na RTP1, que «não está em causa uma revolução na educação». Pergunto: O que mais terá de fazer ainda para que admita a sua existência? Como se pode compreender uma viragem de 180° no momento em que começa a haver indicadores positivos na evolução das aprendizagens matemáticas dos alunos portugueses, como indicam os últimos resultados do PISA? Recorde-se que a análise dos resultados obtidos ao longo dos diferentes estudos do PISA sempre evidenciaram problemas ao nível das capacidades matemáticas mais elevadas e não na aquisição de conhecimentos ou execução de procedimentos.

É verdade que todos queremos que os alunos saibam mais Matemática, o que significa saber mais é que pode ter diversas interpretações! O caminho que agora o Ministério de Educação nos quer impor faz com que o país retroceda décadas e dirige-se a um entendimento sobre a sociedade e as suas necessidades desajustado aos dias de hoje. Décadas de esforço e empenhamento dos professores de Matemática, de dificuldades e grandes desafios que sempre se colocam quando se esperam mudanças de prática, e os avanços conseguidos são hoje reduzidos a nada! Quantos anos serão precisos para recuperar o que corre agora o risco de ser destruído?

Leonor Santos
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa



Pitágoras em Coimbra

O Teorema de Pitágoras é talvez o resultado matemático mais conhecido em todo o mundo. É também o mais cantado, sendo célebre a canção do filme «Merry Andrew» cantada por Danny Kaye.

Não admira pois que o escultor Gustavo Bastos (1928–) tenha escolhido esse teorema para ilustrar as esculturas que concebeu para a porta de entrada do edifício do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. Estas esculturas estavam subordinadas ao tema «A criação do mundo: o Universo, as Matemáticas como ciência da natureza e a Matemática como ciência do pensamento, da razão pura» escolhido pelo Prof. José Pacheco de Amorim, então professor de Matemática na Universidade. Não foi fácil a concepção da escultura pois uma primeira maquete foi criticada pelo referido professor como sendo «uma interpretação literal do programa e a nudez forte e desértica da composição». A versão aprovada é a que consta da porta de entrada do DM-FCTUC.

Gustavo Bastos é um escultor natural da Figueira da Foz, licenciado pela Escola de Belas Artes do Porto, onde foi professor a partir de 1962. Leccionou no ensino secundário durante quatro anos, e frequentou o curso de Ciências Pedagógicas na Faculdade de Letras de Coimbra. Na sua carreira

ProfMat 2012

O ProfMat 2012 — Encontro Nacional de Professores de Matemática realiza-se este ano a 4, 5 e 6 de Outubro de 2012, na Escola Secundária Quinta das Flores/Conservatório de Música e no ISEC — Instituto Superior de Engenharia, em Coimbra. O ProfMat terá, como habitualmente, conferências plenárias, conferências paralelas, painéis temáticos, sessões práticas, simpósios de comunicações e sessões especiais.

Tal como no ano passado, o ProfMat é organizado em conjunto com o SIEM, havendo um dia de sobreposição dos dois eventos com algumas atividades em comum. Os cursos serão feitos entre o ProfMat e domingo dia 7 de Outubro, sendo sete horas feitas em conjunto com as sessões práticas do ProfMat e as restantes oito horas no domingo dia 7.

Este ano o ProfMat, subordina-se ao tema «Por um ensino de qualidade para todos» e contemplará garantidamente um conjunto de sessões subordinadas aos seguintes temas:

- História da Matemática
- Matemática e Arte
- Transformações Geométricas
- Exames Nacionais
- O Ensino Profissional
- O Ensino da Matemática para Engenheiros

Todos os dias ao fim da tarde haverá uma «Happy Hour» com música e bebidas.

Está previsto um intenso programa social e cultural onde não faltarão as Tunas e o Fado de Coimbra.

Contamos consigo!

Prazos

Inscrição sem agravamento de preço: até 23 de Junho de 2012

Submissão de proposta de sessão prática, sessão especial ou comunicação:

— Envio de resumo até 03 de Junho de 2012, em formato Word.

— Resposta de aceitação até 05 de Julho de 2012

Contactos

ProfMat 2012 — Associação de Professores de Matemática
E-mail: profmat2012@apm.pt

XXII SIEM

O XXII SIEM — *Seminário de Investigação em Educação Matemática* realiza-se a 6 e 7 de Outubro, na Escola Secundária Quinta das Flores em Coimbra. Este Seminário tem como objetivo criar um espaço de expressão da comunidade de investigação no campo da Educação Matemática, para divulgação, comunicação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados. Promove, ainda, a articulação entre a investigação nesta área e o ensino da Matemática. O Seminário terá três conferências plenárias, uma delas a cargo de um convidado estrangeiro, um painel temático, simpósios de comunicações e *posters*.

Prazos

Para inscrição sem agravamento de preço, até 23 de Junho de 2012

Para submissão de comunicação:

— Envio de texto até 03 de Junho de 2012, texto Word com o máximo de 25 000 carateres com espaços (ver *template*)

— Resposta de aceitação até 05 de Julho de 2012

Para submissão de poster:

— Envio de resumo alargado até 03 de Junho de 2012, texto Word com o máximo de 5000 carateres com espaços (ver *template*)

Contactos

XXIII SIEM — Seminário de Investigação da Associação de Professores de Matemática
E-mail: siemxxiii@apm.pt
Mais informações disponíveis em:
http: //profmat2012siem.apm.pt

A Comissão Organizadora

destaca-se, também, a sua ação como vogal na secção de Edifícios e Monumentos Nacionais da Junta Nacional da Educação; o ter sido membro da Academia Nacional de Belas-Artes e do Conselho Científico da ARCA-ETAC (Escola de Tecnologias Artísticas de Coimbra), instituição onde também lecionou. Gustavo Bastos tem trabalhos da sua autoria em vários espaços públicos nacionais. No Porto, podem encontrar-se a estátua de D. Pedro Ribeiro no Palácio da Justiça, Os Quatro Cavaleiros do Apocalipse (1956) no Passeio das Virtudes, dois relevos na Ponte da Arrábida, as esculturas do átrio da Estação de S. Bento, o Monumento a Sá Carneiro (1990) da Praça Velásquez e as estátuas Honra e Concórdia do Salão Nobre dos Paços do Concelho. A sua obra está representada em vários espaços de referência, como o Museu Nacional de Soares dos Reis e o Museu Militar, no Porto; a Câmara Municipal de Matosinhos; o Museu Nacional de Machado de Castro, em Coimbra; o Museu de Ovar e a Fundação Calouste Gulbenkian, em Lisboa.

Observe-se que o Teorema de Pitágoras não foi obtido pela primeira vez por Pitágoras. Muito antes da época de Pitágoras era já conhecido na China onde se designa por Teorema de Gougu (Gou=cateto horizontal, Gu=cateto vertical).

Que revisão curricular?!

Entrevista à presidente da APM

A 26 de Março o Ministério da Educação e Ciência (MEC) apresentou a versão final da estrutura Curricular que entrará em vigor no próximo ano letivo.
A Educação e Matemática (EM) decidiu entrevistar a presidente da APM, Elsa Barbosa (EB), com o objetivo de conhecer a sua posição e/ou da direção da APM, relativamente às alterações que o MEC pretende implementar, de acordo com este documento.

1

Elsa, consideras que este documento é claro sobre as intenções que o Ministério da Educação tem com esta revisão curricular?

A atual Revisão da Estrutura Curricular não permite perceber quais são efetivamente as intenções do Ministério da Educação e Ciência (MEC) para o sistema educativo português. De facto há uma inversão na ordem das etapas que constituem uma revisão curricular. Não é de todo correto iniciar uma revisão «decisiva para o futuro da educação em Portugal» com a definição do número de horas de cada uma das disciplinas, e só posteriormente elaborar «novas metas curriculares» e rever e/ou reformular os atuais programas. Pelo contrário, uma reforma curricular rigorosa deve iniciar-se com uma avaliação das anteriores revisões curriculares, assentando na revisão dos documentos orientadores, seguindo-se então a definição de modos de operacionalização e culminando com o estipular do número de horas letivas. No entanto, a atual revisão assenta fundamentalmente na redistribuição de cargas horárias e na supressão de áreas curriculares, o que me parece poder ser justificado apenas pela atual contenção económica em que o país vive e não por quaisquer razões de natureza didática.

2

No documento pode ler-se que as medidas agora tomadas visam três aspetos fundamentais: a atualização do currículo, nomeadamente através da redução da dispersão curricular; a melhoria do acompanhamento dos alunos, com uma melhor avaliação e a deteção precoce de dificuldades; o aumento decisivo da autonomia das escolas na gestão do currículo e numa maior liberdade de escolha das ofertas formativas.

Parece-te que as medidas propostas vão no sentido dos princípios anunciados?

Por outro lado, serão estes os aspetos considerados fundamentais para uma melhoria da aprendizagem de todos os alunos?

Apesar de considerar as três medidas como aspetos fundamentais para o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos, discordo da visão que o MEC tem das mesmas e fundamentalmente da maneira como estão a ser implementadas.

Se considerarmos a diminuição da dispersão curricular uma atualização do currículo, então pode-se encarar esta medida como conseguida. Já o mesmo não se pode afirmar em relação às medidas restantes. Como é que o MEC assume a melhoria do acompanhamento dos alunos como um aspeto fundamental da Revisão da Estrutura Curricular e simultaneamente aumenta o número de alunos por turma? Será possível, com 30 alunos por turma, «o ensino acolher e criar condições a todos os alunos»? Como é que se desenvolve um ensino diferenciado, adequado a cada um dos alunos, numa sala de aula com 30 alunos? Em relação ao aumento da autonomia das escolas também não me parece que seja efetivo. Quem defende uma gestão autónoma do currículo não introduz exames por ciclo. A Matemática tem um programa do Ensino Básico que permite uma continuidade do trabalho entre ciclos. Um trabalho que pode ser adequado à realidade de cada Agrupamento, diferenciado para cada turma, planeado para desenvolver as capacidades dos alunos, para colmatar as suas dificuldades de aprendizagem ao longo dos ciclos. O importante seria conseguir que os alunos no final do Ensino Básico adquirissem um conjunto alargado de objetivos, o que não se coaduna com a introdução de exames no final de cada ciclo.

3

Ainda de acordo com o documento podemos ler que o acompanhamento e a avaliação dos alunos são fundamentais para o seu sucesso e uma das medidas introduzidas com o objetivo de promover o rigor na avaliação, obtendo dados fiáveis sobre a aprendizagem, é através da introdução de provas finais no 4.º ano e da sua manutenção no 6.º e no 9.º ano, a Português e a Matemática.

Este reforço da avaliação externa, nomeadamente a introdução de exames no 4º ano, será por si um fator de sucesso ou poderá antes vir apenas reforçar o papel seletivo vulgarmente atribuído à disciplina de Matemática?

Considero que os exames, por si só, não conferem mais qualidade ao ensino, nem contribuem para o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. No entanto, e uma vez que o MEC considera que a introdução de provas de exame são fundamentais para o sucesso dos alunos, estas devem ser transversais a todas as disciplinas do currículo e não exclusivamente a Português e a Matemática. Em relação à Matemática, o facto de se insistir na realização de mais uma avaliação externa só vai reforçar a negatividade com que a sociedade em geral vê a disciplina, além de vir reforçar o papel seletivo há muito atribuído à mesma. A introdução de uma prova final de 4.º ano é paradigmático, se estamos perante 4 anos de uma escolaridade generalista, e se os exames permitem melhorar as aprendizagens dos alunos, não seria mais adequado os alunos realizarem um exame generalista, no final do primeiro ciclo?

4

Quanto ao reforço da autonomia pedagógica e administrativa, e tendo em conta o quadro anexo de alteração às matrizes curriculares, fica claro em que se traduz esta autonomia?

Tal como já referi anteriormente as atuais alterações curriculares centram-se fundamentalmente na redistribuição de cargas horárias e na supressão de áreas curriculares o que é particularmente visível nas matrizes curriculares apresentadas no documento. Segundo o MEC, na versão final da Revisão da Estrutura Curricular, publicada em 26 de Março de 2012, o regime de autonomia será operacionalizado através de quatro medidas: ceder um crédito de horas às escolas, em função da eficiência da gestão escolar, do número de turmas e dos resultados escolares; flexibilizar a duração das aulas segundo o critério de cada escola; estabelecer um mínimo e um máximo de tempo de carga curricular por disciplina; possibilitar ofertas de componentes curriculares complementares com carga flexível, a serem implementadas com recurso ao crédito horário da escola. Neste contexto surgem-me alguns comentários/questões. Será correto fazer depender o crédito de horas, a facultar às escolas, dos resultados escolares dessas mesmas escolas? Não seria mais correto disponibilizar horas para reforço curricular às escolas com resultados escolares «menos bons», responsabilizando-as posteriormente pela boa utilização desses recursos? A flexibilização da duração das aulas podia ser uma hipótese se não contrariasse as orientações curriculares, em particular as de Matemática, que veiculam metodologias que se adequam a blocos de 90 minutos. A decisão de se organizar as aulas em blocos de 90 minutos foi fundamentada na investigação, de facto os blocos de 90 minutos favorecem a gestão curricular da disciplina por possibilitarem uma organização e gestão que rentabiliza o tempo da aula, além de permitirem que o professor respeite, efetivamente, os diferentes ritmos de trabalho dos alunos de cada turma. Quanto a possibilitarem ofertas de componentes curriculares, a serem implementadas com recurso ao crédito horário de escola, destinadas a temas como por exemplo Educação cívica, Educação para a saúde, Educação Rodoviária, é uma falsa questão, uma vez que na reforma anterior existiam as áreas curriculares não disciplinares, onde era possível trabalhar temas muito variados, desde que enquadrados no projeto curricular de turma e no projeto educativo de escola.

5

O documento apresenta no final a intenção de continuar a revisão, nomeadamente através da elaboração de novas metas curriculares e de uma revisão e possível reformulação de programas, sem que se perceba se será para operacionalizar ou não no próximo ano letivo. No caso da Matemática, faz sentido e/ou há urgência em alterar os programas em vigor no ensino básico e no secundário? Será este o problema essencial no ensino da matemática?

No caso particular da Matemática os programas não são de todo o problema central do ensino. Não há qualquer necessidade de definir novas metas de aprendizagem ou de proceder a alterações programáticas, as orientações curriculares vigentes estão ajustadas às exigências do ensino atual. De facto as nossas orientações curriculares foram elaboradas com base na investigação nacional e internacional, e mantêm-se perfeitamente atuais. Na minha opinião a melhoria dos resultados escolares exige do MEC um maior investimento na criação de condições que favoreçam o desenvolvimento profissional dos professores, de acordo com o que já vinha a ser realizado.

Que outros aspetos gostavas de realçar ou que sugestões gostarias de fazer relativamente às medidas apresentadas?

É preocupante que na atual Revisão da Estrutura Curricular não haja qualquer indicação relativamente às medidas que o MEC prevê implementar para ultrapassar as situações de insucesso, numa escolaridade obrigatória de 12 anos. Que medidas serão tomadas para recuperar um aluno que tenha insucesso no exame de Matemática? A reprovação do aluno será vista como uma solução? Neste contexto, também me preocupa que a oferta do Apoio Diário ao Estudo se restrinja a alunos do 2.º ciclo, esta oferta deveria ser prolongada aos alunos do 3.º ciclo. É ainda fundamental que no Ensino Secundário a Escola tenha condições de criar mecanismos de Apoio ao Estudo. No entanto, a aplicação de uma medida desta natureza requer uma maior flexibilização dos horários dos professores, o que atualmente ainda não acontece.

Outra questão que me preocupa é a ausência de qualquer referência aos percursos escolares alternativos, Cursos de Educação e Formação, Cursos Profissionais, entre outros, frequentados por milhares de alunos. Correndo o risco de estar a ser injusta, parece-me que está a haver uma desvalorização clara destes percursos, o que em meu entender é um enorme erro. É muito importante que haja uma variada oferta educativa, de qualidade, que responda às necessidades e ao perfil de cada um dos nossos alunos.

Despertar o pensamento geométrico com a hierarquização de quadriláteros

Joana Latas

Quando iniciamos o estudo de um (sub)tópico em sala de aula existe uma série de tomadas de decisão subjacentes ao trabalho docente que justificam as opções didáticas que nos fazem optar por esta e não por aquela ou a outra abordagem.

No Programa de Matemática do Ensino Básico, a classificação de quadriláteros, bem como a sua construção e investigação das respetivas propriedades está contemplada no tópico «Triângulos e quadriláteros» ao nível do tema Geometria no 3.º ciclo (2007).

De entre as possíveis abordagens de classificações podemos considerar, segundo De Villiers (1994), uma *partição* ou uma *hierarquização* de quadriláteros e cada uma delas pode ser trabalhada numa perspetiva eminentemente *construtiva* ou *descritiva*. Por hierarquização entenda-se a classificação de um conjunto de conceitos de tal forma que os mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais, enquanto que numa partição não há interseção entre os subconjuntos em causa e é pela reunião das partes que obtemos o todo. Uma classificação construtiva está associada à descoberta de novos conceitos. Pode ser conseguida, por exemplo, por particularização a partir do paralelogramo ou generalização se tomarmos o quadrado como ponto de partida. Por outro lado, uma classificação descritiva pode ser entendida como uma listagem de propriedades que tornam único cada quadrilátero, depois dos alunos estarem familiarizados com as figuras geométricas e respetivas propriedades.

De Villiers (1994) defende uma classificação de quadriláteros baseada na compreensão da funcionalidade da mesma, nomeadamente valorizando as funções dos tópicos e processos internos da matemática. Segundo o autor, a compreensão da utilidade ou da função determina a motivação para o estudo e aprendizagem da matemática e por isso deve constituir um importante critério de ponderação à abordagem de ensino. Embora a hierarquização seja a abordagem mais habitual, uma classificação por partição dos quadriláteros é aceitável, até porque a vantagem que a hierarquização pode trazer em termos funcionais, não é, por vezes, explorada com os alunos. Aliás, as dificuldades reveladas pelos alunos na hierarquização de quadriláteros remetem para a dificuldade em interpretar significados linguísticos e em perceber a vantagem de uma hierarquização em relação a uma partição.

Tornar a matemática acessível a uma turma implica, por um lado, que o professor conheça os seus alunos, que saiba em que níveis de desempenho se encontram, podendo assim proporcionar o desenvolvimento de estratégias próprias e por vezes informais de raciocínio. Por outro lado, deve implicar também o aprofundamento do conhecimento cultural e histórico da matemática. Este último ponto pode enriquecer uma abordagem em sala de aula e proporcionar uma aprendizagem com significado para o aluno, se forem tomadas em consideração as próprias vivências culturais dos alunos.

Figura 1. Espiral retangular

Figura 2. Exemplos de *boomerangs*

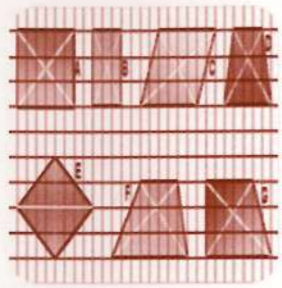


Figura 3. Quadriláteros e suas diagonais

As ideias matemáticas são por vezes desenvolvidas em atividades muito simples mas de forma inconsciente por quem as pratica. A este propósito, vejamos algumas práticas culturais associadas ao desenvolvimento do conceito de retângulo.

Um exemplo de um jogo descrito por Gerdes (1992): ao envolver um fio em espiral à volta de dois paus cruzados, esticando o fio cada vez que se alcança um pau, surge, necessariamente um retângulo (figura 1). Observando que os quatro pedaços de paus que divergem a partir do ponto em que se cruzam têm igual comprimento, um olhar matemático permite extrair a essência do pensamento matemático que lhe está subjacente, nomeadamente que as diagonais do retângulo, além de terem o mesmo comprimento, cruzam-se ao meio de ambas, visto todas terem sido envolvidas pelo fio o mesmo número de vezes.

Gerdes (1992) refere a construção de retângulos, dadas as suas diagonais, não apenas como atividade de lazer mas também como atividade resultante de necessidades do dia a dia praticadas por alguns povos em locais tão distintos como Moçambique, Brasil e Egito. Na construção da base de uma casa retangular sem qualquer medição, uma possibilidade apresentada pelo autor é esticar dois fios — diagonais — com o mesmo comprimento colocados de modo que os seus pontos médios coincidam, resultando da união dos extremos dos fios um retângulo.

Perante a análise destas e de outras situações, Gerdes (1992) defende que o interesse pelo retângulo e suas diagonais não é somente de natureza estética mas também de natureza prática e, neste sentido, um meio de despertar o pensamento geométrico. Apesar das abordagens para desenvolver o conceito de retângulo utilizarem essencialmente definições de quadriláteros com base na classificação de ângulos (4 ângulos retos) e/ou posição relativa e comprimento de lados (lados opostos paralelos e geometricamente iguais dois a dois), o incentivo à classificação de quadriláteros com base na comparação de propriedades das diagonais das figuras é considerado, por exemplo, numa das tarefas de exploração (tarefa 7) de sala de aula proposta nos materiais de sala de aula de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, 2009).

Pensar os boomerangs como (diagonais de) quadriláteros[1]

O exemplo aqui apresentado pertence a um estudo mais vasto (Latas, 2011) onde a matemática cultural dos alunos de uma turma foi integrada na aprendizagem formal da matemática. As práticas culturais foram analisadas à luz dos tópicos e das orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática e, com o objetivo de tornar visível a matemática nelas implícita, optou-se por ter como referência o desenvolvimento dos tópicos e de capacidades matemáticas transversais previstas em ME-DGIDC (2007). Assim, as ideias matemáticas implícitas nas práticas culturais mencionadas pelos alunos foram «descongeladas» sob um «olhar» formal da Matemática. Deste modo, os conceitos matemáticos que emergiram explicitamente durante a exploração das práticas culturais foram alvo de uma análise prévia por parte da professora com o intuito de integrarem o currículo matemático dos alunos. Esta ação foi consciente e orientou a elaboração do conjunto das cinco tarefas implementadas.

Uma das práticas culturais trabalhadas foi o lançamento de *boomerangs*. Depois da orientação do vento ser identificada como um aspeto transversal a diferentes práticas culturais dos alunos, o lançamento de *boomerangs* surge como uma prática culturalmente distinta das identificadas localmente, mas envolvendo o mesmo conhecimento cultural, a orientação do vento, e acessível aos mesmos por consistir numa atividade de lazer usual de um dos professores do grupo de Educação Física da escola[2]. O conhecimento cultural que os alunos aprofundaram e do qual se apropriaram permitiu-lhes estabelecer um paralelismo entre os processos e conceitos por eles utilizados, intuitiva e exaustivamente, durante a experiência de lançamento e análise dos *boomerangs*, e a classificação de quadriláteros formalizada posteriormente em contexto de sala de aula. É esse processo que se procura aqui explorar.

Tornar visível a matemática sob o ponto de vista de uma professora de Matemática do 3.º ciclo

A diversidade de formas e de número de pás dos *boomerangs* impulsionaram uma associação entre as pás dos *boomerangs* e figuras geométricas ou, mais especificamente, diagonais de figuras geométricas. Afunilando para o caso específico das diagonais dos quadriláteros, começou a emergir a possibilidade de estudar a eficiência de *boomerangs* com a forma de diagonais de diversos quadriláteros para, a partir da análise das características das mesmas, formalizar o estudo das propriedades das diagonais dos paralelogramos.

Gerdes (1992) mostra como, a partir de contextos práticos do dia a dia em culturas distintas, o conhecimento das propriedades das diagonais determina a forma (quadrilátero) que lhe está associada e vice-versa. Na verdade, a evolução histórica e a necessidade humana apontam para uma hierarquização de quadriláteros a partir das suas diagonais, pelo que, esta abordagem mostrou ser um método didaticamente aceitável para a classificação de paralelogramos prevista no programa de Matemática ao nível do 3.° ciclo de escolaridade.

Deste modo, tornar explícita a matemática das práticas culturais potencializa uma aprendizagem matemática com significado por ser rica no estabelecimento de conexões entre a matemática e os conhecimentos prévios dos alunos (Bishop, 2005; Boaler, 1993; Gerdes, 1992, 1997, 2007). No caso específico da Geometria, este processo surge como consequência do próprio caráter experimental com que pode ser entendido este domínio matemático.

Orientações metodológicas

No que respeita às orientações curriculares portuguesas as atividades geométricas «efetuar estimativas de medidas», «descobrir propriedades de figuras» e «aplicar as propriedades descobertas em diversas situações», estão presentes em Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) como importantes caraterísticas do pensamento geométrico a desenvolver nos alunos no âmbito da aprendizagem da Geometria durante a Educação Básica. Este documento reforça ainda a inquestionável importância da Geometria na educação matemática e na relação que estabelecemos com o mundo que nos rodeia: «A Geometria é essencialmente um meio para a criança conhecer o espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação» (Idem, 1999, p. 67). Também nos materiais de apoio ao professor disponíveis no site da DGIDC, uma das ideias matemáticas a desenvolver na abordagem aos «Triângulos e quadriláteros» é de que «uma figura geométrica, em particular um triângulo ou um quadrilátero, tem *propriedades* envolvendo os seus elementos (lados, ângulos internos, ângulos externos), diagonais, soma de ângulos internos, soma de ângulos externos, área e perímetro, etc., que é interessante analisar.» (Ponte, 2009, p.4).

Neste sentido, a interação, a partilha de ideias e a negociação de significados entre os alunos, inerente às atividades geométricas em causa, podem constituir também um excelente meio para desenvolver a comunicação matemática, aliás a abordagem didática presente na brochura «Geometria e medida no Ensino Básico» reforça o desenvolvimento desta capacidade transversal, a comunicação matemática, integrada na aprendizagem da Geometria (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011).

A tarefa

Na sequência de um trabalho prévio proporcionado aos alunos, nomeadamente pela saída de campo onde experimentaram lançar *boomerangs* e procederam ao registo dos dados obtidos, a «Qual o melhor *boomerang*?» foi uma tarefa pensada para fazer a integração do conhecimento matemático cultural dos alunos com a formalização de alguns aspetos da matemática ao nível do 7.° ano de escolaridade, mais especificamente, com o estudo dos paralelogramos e suas propriedades. A tarefa consistiu num estudo da robustez dos *boomerangs* com base no registo e análise das suas propriedades. A partir do *boomerang* disponibilizado a cada grupo, os alunos efetuaram as medições necessárias a fim de enumerarem caraterísticas de unicidade do mesmo.

Significado desta experiência para a turma

Durante o trabalho em grupo os alunos discutiram ideias intragrupo, fazendo uso de uma linguagem específica criada pela situação estudada. A formalização dos conceitos geométricos surgiu posteriormente a um trabalho prévio e informal com esses mesmos conceitos, pelo que se sustentou numa necessidade de partilhar a informação com qualquer indivíduo, conhecedor ou não, das práticas culturais exploradas.

O papel assumido pela professora foi, como sugere Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), mais de retaguarda ao desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o seu trabalho, promovendo uma postura ativa e gradualmente mais autónoma por parte do aluno. O equilíbrio que envolveu a aceitação e identificação dos papéis de alunos e professora na sala de aula, foi um processo moroso e sob constante negociação. A valorização da comunicação matemática intra e inter grupos como meio de sintetizar conhecimentos foi uma estratégia assumida pela professora para desenvolver nos alunos capacidades de autonomia e confiança.

Com base no quadro síntese de apresentações dos alunos à turma (Quadro 1), foram tornados visíveis e formalizados conceitos na discussão em grande grupo, especialmente no que se refere às propriedades das diagonais dos quadriláteros.

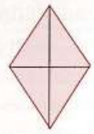
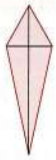
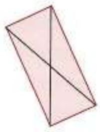
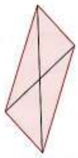
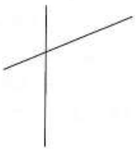
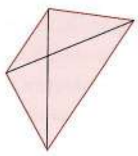
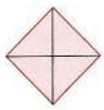
Deste modo as aulas de Geometria tiveram como suporte não só o contexto mas, essencialmente, o conhecimento desenvolvido pelos alunos e manifestado durante as apresentações (formalizadas com recurso à projeção de acetatos) dos diversos grupos e nas discussões das tarefas.

Ao falarem e ouvirem os colegas, os alunos estabeleceram uma interação que lhes permitiu clarificar significados e construir conhecimento. A apropriação da linguagem específica dos *boomerangs* deu origem a expressões como: «(...) as pás do quadrado (...)», referindo-se às diagonais da figura ou « (...) o ponto de cruzamento das diagonais do retângulo (...)», referindo-se ao ponto de interseção das diagonais do quadrilátero.

Durante o estabelecimento do paralelismo entre as propriedades dos paralelogramos e dos «nossos» *boomerangs*, como passaram a ser chamados pelos alunos, os objetos ficaram expostos no quadro para que os vários grupos os pudessem observar enquanto realizavam a tarefa.

Houve uma tendência para os alunos considerarem o quadrado como o quadrilátero mais perfeito comparando-o também com a forma do *boomerang* mais eficiente no voo. A atribuição do adjetivo «especial» ao quadrado é identificado por De Viliers (1994) como meio de ajudar a compreender o significado do que é um subconjunto como, por exemplo, na frase «o quadrado é um retângulo especial». As seguintes intervenções de dois alunos distintos mostram uma tentativa de definir os quadriláteros a partir do seu conhecimento cultural prévio: «(...) então o quadrado é tudo, porque tem todas as propriedades (...)» ou «(...) o quadrado tem tudo, sim, por isso é que é o melhor *boomerang*». O paralelismo entre a situação

Quadro 1. Grelha síntese da tarefa Qual o melhor *boomerang*?

Boomerang (forma)	Número de pás	Medida de comprimento das pás	Medida da amplitude dos ângulos formados pelas pás	Ponto de cruzamento das pás	Quadrilátero
	2	Diferentes (40/22)	4 ângulos retos (90)	Ponto médio de ambas (2) (20/11)	 Losango
	2	Diferentes (30/20)	4 ângulos retos	Ponto médio da pá menor (10 (20)/10)	 Papagaio
	2	Iguais (40/40)	Ângulos iguais 2 a 2 (120/60)	Ponto médio de ambas (20/20)	 Retângulo
	2	Diferentes (40/25)	Ângulos iguais 2 a 2 (120/60)	Ponto médio de ambas (20/ 12,5)	 Paralelogramo
	2	Iguais (40/40)	Ângulos iguais 2 a 2 (110/70)	Mesma distância do ponto de cruzamento até aos extremos	 Trapézio
	2	Iguais (40/40)	4 ângulos retos	Ponto médio de ambas (20)	 Quadrado

concreta e os objetos matemáticos proporcionou a formulação, a comparação e a enunciação de definições próprias e espontâneas. A primeira intervenção assume uma perspetiva essencialmente de hierarquização, «o quadrado é tudo», utilizando o conceito de subconjunto, enquanto a segunda apela a uma partição, «o quadrado tem tudo». Refira-se ainda que este tipo de linguagem utilizada de forma espontânea pelos alunos afastou alguns equívocos de significado de linguagem identificados na investigação. Por exemplo, De Velliers (1994) sublinha que a palavra «é» numa frase como «o quadrado é um retângulo» quando interpretada como «o quadrado é equivalente a ou o mesmo que um retângulo» leva a uma falsidade da afirmação.

Os alunos revelaram capacidade de resposta na experimentação e formulação de conjeturas, especialmente nas relações que envolveram propriedades dos quadriláteros e as suas diagonais. Por exemplo, durante a discussão em grande grupo sobre as propriedades dos paralelogramos, uma das alunas afirmou que «todos os paralelogramos têm 360° [referindo-se à soma dos ângulos internos]. Um quadrilátero são dois triângulos e 180 + 180 = 360 porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°». Perante a expressão surpreendida de alguns colegas, a professora solicitou que a aluna explicasse melhor. A aluna dirigiu-se ao quadro, desenhou um quadrilátero e decompôs a figura em dois triângulos traçando uma das diagonais do mesmo. De seguida explicou o seu raciocínio aos colegas da turma com o auxílio do esquema. Uma outra aluna acrescentou, referindo-se à soma dos ângulos internos, «(...) todos os quadriláteros, e não apenas os paralelogramos como disseram alguns colegas, têm 360°».

Como complemento ao trabalho desenvolvido com os manipuláveis — *boomerangs* — houve a integração de tecnologia na procura de definições e identificação de propriedades dos paralelogramos que envolveu o recurso a um programa de Geometria Dinâmica — *Geogebra* que proporcionou aos alunos a visualização e manipulação dos quadriláteros e respetiva análise de propriedades segundo posição relativa dos lados, comprimentos dos lados, classificação de ângulos, diagonais e eixos de reflexão. Deste modo foi exigido aos alunos um olhar dos quadriláteros sob diferentes perspetivas e um maior nível de abstração em relação a estes objetos matemáticos.

Reflexões

A classificação hierárquica surgiu sem imposição da parte da professora e desenvolveu uma perspetiva global útil para enfatizar as relações entre os diferentes tipos de paralelogramos e economizar nas definições que tornam únicos os quadriláteros. Os cuidados referentes à negociação de significados e utilização de exemplos partindo das vivências dos alunos contribuíram para desbloquear eventuais dificuldades sentidas pela utilização de uma linguagem informal e partilhada por todos. Salienta-se que esta postura de não apresentar definições e classificações já prontas, mas em vez disso incentivar uma participação ativa do aluno nestes processos, enquadra-se num paradigma construtivista da aprendizagem.

A utilização de manipuláveis e de um programa de Geometria Dinâmica proporcionou aos alunos o desenvolvimento da destreza quer manual, quer tecnológica, além de permitir perspetivas complementares. A utilização dos *boomerangs* permitiu uma análise geométrica estática e concreta, enquanto que a passagem para o dinamismo do Geogebra proporcionou uma abstração no trabalho com objetos matemáticos e uma visualização destas figuras com «vida», isto é, com movimento. A valorização da integração da tecnologia nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática está presente em documentos curriculares portugueses (Breda *et al.*, 2011; ME-DGIDC, 2007; Ponte, 2009).

A discussão em grande grupo promoveu a negociação de significados entre elementos da turma e do pequeno grupo antes da sua apresentação à turma. De facto, a partilha de informação como fonte de negociação de significados, começou a dar lugar à necessidade dos alunos justificarem os seus raciocínios, primeiramente perante o grande grupo, estendendo-se ao longo da experiência para o pequeno grupo. Verificou-se ainda uma evolução na capacidade de comunicação matemática oral dos alunos no questionamento e no desenvolvimento do sentido crítico apresentados na argumentação utilizada em grande grupo.

A formalização de conceitos surgiu após uma exploração informal de conceitos e do estabelecimento de conexões matemáticas com esses mesmos conhecimentos prévios. Este método de trabalho parece ter sido adequado ao perfil dos alunos participantes, além de constituir uma orientação curricular presente em ME-DGIDC (2007). Também a utilização de práticas culturais na partilha de ideias matemáticas e não matemáticas revelou-se um elemento catalisador de um ambiente confortável para os alunos onde o erro foi encarado com naturalidade e a diferença reconhecida com respeito. Um aluno seguro dos seus saberes empíricos tem tendência a arriscar a participação perante a turma e, deste modo, desbloqueia o caminho para evoluir no domínio da comunicação matemática. A inclusão de práticas culturais exploradas sob o ponto de vista matemático sugere a promoção da participação dos alunos e, consequentemente, do desenvolvimento de autoconfiança e da capacidade de comunicar matematicamente, além de revelar utilidade na tomada de decisões no mundo dos alunos.

Nota

[1] *Boomerangs* são objetos de arremesso com origem em várias partes do mundo e foram criados para voltar à mão do lançador quando não atingem um alvo. Atualmente o lançamento de *boomerangs* é também um desporto.

[2] A identificação das práticas culturais locais e culturalmente distinta, como é o caso do lançamento do boomerang, surgiram de um processo metódico e moroso que não se enquadra no objetivo deste artigo; contudo, a descrição detalhada de todo este processo pode ser consultada em Latas (2011).

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Colombia: Universidad del Valle.

Boaler, J. (1993). The role of contexts in the mathematics classroom: do they make mathematics more «real»?. *For the Learning of Mathematics*, 13(2), 12–17.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H. & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no Ensino Básico*. Lisboa: ME- DGIDC.

Gerdes (1997). On culture, geometrical thinking and mathematics education. Em A. Powell & M. Frankenstein (Eds), *Etnhomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 223-247). New York: SUNY Press.

Gerdes, P. (1992). *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Curitiba: Universidade Federal de Panamá.

Gerdes, P. (2007). *Etnomatemática — Reflexões sobre a diversidade cultural*. Ribeirão: Edições Húmus.

Latas, J. (2011). *O reconhecimento e a exploração da Matemática cultural: uma abordagem etnomatemática com alunos do 7.° ano de escolaridade*. Tese de Mestrado. Universidade de Évora.

ME-DGEBS (1991). *Programa de matemática — Organização do Ensino-Aprendizagem, Ensino Básico 3.° Ciclo*. Lisboa: ME-DEGEB.

ME-DGIDC (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Ponte, J. P., Oliveira, P., & Candeias, N. (2009). *Triângulos e quadriláteros: Materiais de apoio ao professor*. Acedido em 20 de janeiro de 2012 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/002_Sequencia_Geometria_TriangulosеQuadrilateros_NPMEB_3c%28atual17maio2010.pdf

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11–18.

Joana Latas

EBI/JI de Aljezur

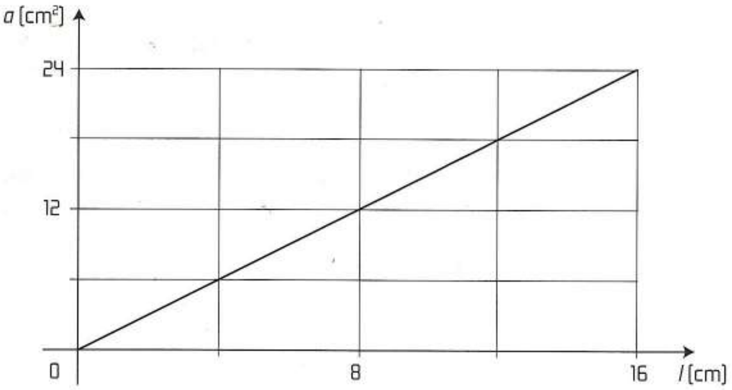
A propósito do Teste Intermédio de 8.º ano

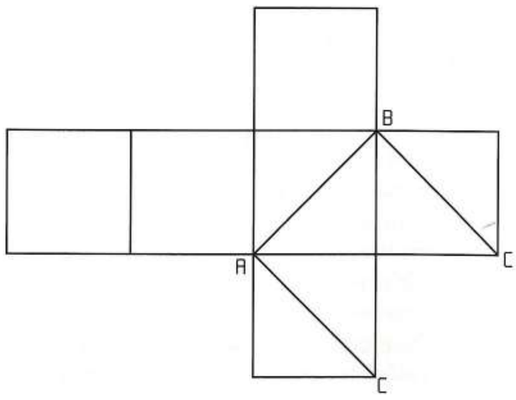
Realizou-se no dia 29 de Fevereiro passado o teste intermédio de 8.º ano, o primeiro que se realiza com todos os alunos daquele nível integrados no Novo Programa de Matemática (NP). Por esse motivo, e por lecionar uma turma que iria realizar o teste, aguardava com alguma expectativa e curiosidade a realização do mesmo. Porém, a deceção foi muito grande... No global, considero que o teste intermédio é constituído por questões maioritariamente desinteressantes, centradas em procedimentos e sem apelar às capacidades transversais. Não existem questões que relacionem a matemática com a realidade, já que nos poucos itens que têm algum contexto, este aparece apenas para «embrulhar» a questão e não têm qualquer influência na resposta. Nos parágrafos seguintes, abordarei mais em detalhe algumas das questões que considero problemáticas e procurarei fundamentar as críticas anteriores.

A questão 10 revela um dos aspetos que considero mais problemáticos: a comunicação. Por um lado, o próprio teste utiliza aqui e ali uma linguagem que me parece demasiadamente formal – a expressão «seja k um número...» é utilizada por duas vezes, sendo que na questão 10 o parâmetro k apenas atrapalha a interpretação da questão e nem se volta a falar dele. Por outro lado, a própria função traduzida pelo gráfico tem uma descrição que me parece complicada: «Considera todos os retângulos de comprimento igual a k cm e largura compreendida entre 0cm e 16cm. O gráfico da Figura 5 traduz a relação entre a largura (l) e a área (a) desses retângulos». Não quero transmitir a ideia que sou apologista de textos infantilizados com situações que muitas vezes roçam o ridículo. O formalismo tem de ser progressivamente introduzido, porque a matemática também tem a sua própria linguagem que permite conferir rigor e objetividade (e não atrapalhar os alunos). Ainda nesta questão, coloca-se um problema de equidade entre as versões, uma vez que na versão 1, os alunos deveriam encontrar o valor médio entre 12 e 24 e, na versão 2, entre 9 e 18, ou seja num caso trata-se de um inteiro e noutro um decimal. Poderá parecer que neste nível de ensino é indiferente um caso ou outro, mas efetivamente não é.

Voltando ao assunto da comunicação, o teste intermédio contempla poucas questões que promovam a argumentação ou a justificação de ideias. As questões em que se pede para mostrar como os alunos chegaram à resposta, implicam apenas a exibição de cálculos. A única questão que pede uma justificação (questão 7) tem sido muito contestada por envolver uma secção de um cubo. Do meu ponto de vista, embora o triângulo em causa constitua exatamente isso, para descobrir a amplitude do ângulo ACB o aluno «só» tem de perceber que quando a planificação «fecha», os segmentos que se unem resultam num triângulo equilátero, logo qualquer um dos seus ângulos internos tem amplitude igual a 60°. Trata-se de uma questão difícil, até porque passa um pouco despercebido que é no cubo que temos de investigar o ângulo e não na sua planificação. Contudo, o que me parece mais questionável é que esta pergunta envolve a passagem do plano para o espaço – porque a construção (mental) do cubo é aqui fundamental – e não me parece que este aspeto esteja contemplado na matriz.

Continuando no tema de geometria, a questão 6 sobre isometrias foi de novo uma deceção. Um tema que foi do agrado de muitos alunos meus pela possibilidade de ligação (real) à arte, onde era possível formular um problema ou um exercício que exiba a elegância da matemática e a sua componente cultural, foi «esmagada» por uma figura de uma grelha onde se pedia o transformado do triângulo desenhado por uma translação cujo vetor era dado indiretamente. Nas questões seguintes deveriam ser consideradas ainda mais figuras (os paralelogramos [GBCH] e [BDXV] e um quadrado de vértices J e F) que depois de desenhadas se sobrepunham parcialmente, atrapalhando a interpretação e resolução das questões formuladas.



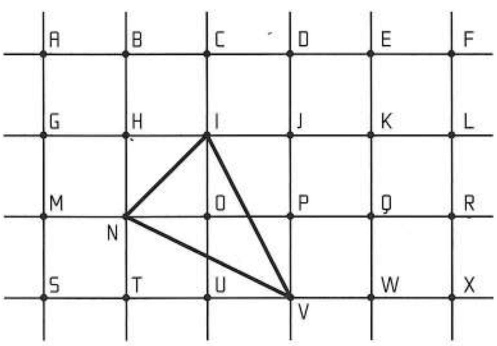


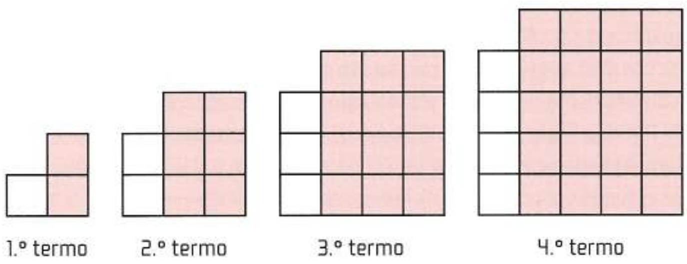
A questão 9. foi para mim a única com um potencial interessante, mas que foi de certa forma desaproveitada. A questão relativa ao número de azulejos brancos do 2012° termo requer uma generalização muito fácil e o número total de azulejos da 9ª figura implica perceber a lei de formação da sequência, mas podia ser facilmente obtida com o desenho da figura e respetiva contagem. Pedir o termo geral, ou mesmo a explicação de como obter o número de azulejos da 1000ª figura (ou outra qualquer com uma ordem exagerada), abria a possibilidade de estabelecer conexões entre a álgebra e a geometria, já que a forma como vemos a figura crescer pode levar-nos a expressões como $(n+1)^2-1$ ou $n(n+2)$, e ainda à oportunidade de argumentar em favor da generalização produzida. É portanto uma questão com grande potencial no que respeita ao raciocínio e comunicação, duas das capacidades transversais referidas no NP e que, a meu ver, deveriam ser mais valorizadas (embora convenha ter aqui em conta que a avaliação destas capacidades será sempre limitada num instrumento como um teste escrito, com tempo muito limitado, e que haverá outras formas mais produtivas de realizar essa avaliação).

Termino referindo a última questão, a única sobre OTD, em que são pedidas a média e a mediana de uma lista de valores que são classificações de alunos como poderiam ser outra coisa qualquer – as medidas encontradas não servem para interpretar ou comentar a situação de partida, são apenas meros procedimentos que, apesar da sua incontornável necessidade, ficam aquém dos grandes objetivos do programa no que diz respeito a OTD. Renova-se agora a questão: para que é que fazemos os testes intermédios? Quer o realizemos do ponto de vista sumativo, interferindo na classificação do aluno no final do período e do ano, quer o utilizemos do ponto de vista formativo, identificando aprendizagens que podem e devem ser melhoradas, se assumimos que a avaliação deve ser coerente com o programa e ensino praticado, há implicitamente uma aceitação de que os testes intermédios representam um modelo do que se espera que os alunos saibam. O que fazer quando consideramos haver um afastamento considerável entre as aprendizagens subjacentes ao teste intermédio e a nossa visão do NP?

É já do senso comum e mais do que provado pela investigação que os exames exercem uma influência na prática de sala de aula tão grande, ou até maior, do que o programa da disciplina em si. Atualmente, generalizou-se a utilização dos testes intermédios que são realizados em muitas escolas, em vários anos, num número crescente de disciplinas. Proliferam os livros de preparação para os testes intermédios (outro dia até vi um de «Preparação para o teste intermédio de 2.º ano»!). Vive-se uma febre de testes intermédios e em breve de exames, resta saber se deixaremos que nos ditem o que ensinamos e como ensinamos os nossos alunos. O Novo Programa de Matemática foi construído por especialistas em Educação Matemática, por investigadores e professores que estão no terreno e foi testado e acompanhado em turmas-piloto. As ideias que têm por base estão sustentadas em investigação de reconhecida qualidade realizada ao nível nacional e internacional, e não em lugares comuns que poderíamos ouvir em qualquer mesa de café. Podemos identificar-nos mais ou menos com ele, encontrar-lhe defeitos, mas não podemos esquecer que é o programa que deve definir as linhas orientadoras do que ensinamos. Os resultados dos alunos foram maus e talvez isso até sirva alguns interesses obscuros, mas não podemos esquecer outro princípio importante enunciado no documento das Normas para a Avaliação em Matemática Escolar produzidas pelo NCTM em 1995: um instrumento de avaliação deve permitir fazer inferências válidas. Será o caso? Para mim não. Mas esse é apenas o meu ponto de vista...

Lina Brunheira
Escola Secundária com 3º ciclo de Amora





Ensino Profissional: A abrangência ou a perversidade de um currículo único

O Decreto-Lei n.º 26/89, de 21 de Janeiro, criou as escolas profissionais no âmbito do ensino não superior. [...] Porém, mais de quatro anos após a entrada em vigor deste último diploma, a experiência da sua aplicação revelou algumas fragilidades e ambiguidades relativas, nomeadamente, ao processo de criação das escolas, à natureza jurídica dos promotores, à relação destes com os órgãos de direção, à responsabilização pedagógica e financeira dos órgãos da escola, bem como ao modelo de financiamento. Torna-se, pois, urgente a definição de uma estratégia corretiva, com vista a combater as fragilidades existentes, não perdendo, antes consolidando, as potencialidades contidas no ensino profissional. Pretende-se, assim, com a publicação do presente diploma, renovar a aposta no ensino profissional, consolidar as escolas profissionais como instituições educativas e aperfeiçoar e alterar o modelo de financiamento em vigor. No que diz respeito ao primeiro dos referidos objetivos, procura-se reforçar a identificação do ensino profissional como uma modalidade especial de educação, dirigida à estruturação e qualificação educativa da formação profissional dos jovens, ao mesmo tempo que se procura introduzir no sistema educativo uma via própria de estudos de nível secundário alternativa ao ensino secundário regular.

(Decreto-Lei n.º 4/98, de 8 de Janeiro)[1]

Como sistema educativo, os cursos profissionais – de acordo com o Ministério da Educação, existem mais de 90 cursos em áreas de formação diversificadas em Portugal – destinam-se a todos os que tenham como escolaridade mínima o 3.º ciclo do ensino básico e que procuram um processo de ensino/aprendizagem voltado para a prática, sem, no entanto, excluir a hipótese do ingresso no ensino superior.

O ensino profissional caracteriza-se pela forte ligação com o mundo profissional tendo como intuito o desenvolvimento de competências para o exercício de uma profissão, pelo que na sua génese o Ministério da Educação teve em conta os interesses e motivações dos estudantes e as necessidades do sector empresarial[2].

Os cursos profissionais evidenciam-se quer pela promoção de saberes no desempenho de uma profissão, quer pela organização modular, permitindo esta última uma maior flexibilidade e respeito pelos ritmos de aprendizagem de cada aluno.

A conclusão de um curso profissional confere um diploma correspondente ao nível secundário e um certificado de qualificação profissional de nível 4. Outras especificidades destes cursos de 3 anos são a formação em contexto de trabalho (comummente designado por estágio) e a apresentação da Prova de Aptidão Profissional (PAP), na qual o estudante demonstra as competências e saberes desenvolvidos, perante um júri. O plano de estudos destes cursos divide-se em três componentes de formação: Sociocultural, Técnica e Científica.

Dados do Gabinete de Estatística e Planeamento da Educação (GEPE, 2010) permitem-nos concluir que o ensino profissional é cada vez mais a primeira opção dos jovens que terminam o 9.º ano, deixando de ser, como ao longo de muitos anos, a alternativa «simplificada» ao dito ensino regular[3].

No ano lectivo de 1999/2000, 8% dos alunos matriculados no ensino secundário frequentava cursos profissionais enquanto no ano lectivo de 2008/2009 este número subiu para 28,4%. Em curso uma

[...] nova estratégia a favor da formação profissional tem por objetivo dotar os trabalhadores actuais e futuros das competências técnicas gerais e específicas de que necessitarão numa economia moderna. A estratégia procura melhorar a qualidade da formação e do ensino profissionais, incentivar a criatividade e o espírito empresarial e facilitar a aprendizagem em todas as etapas da carreira académica e profissional. [...] A formação profissional pode também reforçar a competitividade e o crescimento económico da Europa.

(Comissão Europeia)[4]

Os ensinos básico e secundário, alvo de constantes mudanças curriculares, têm tido, ao longo dos anos um tratamento diferenciado dos cursos profissionais. Na nossa opinião, a sucessiva criação de cursos e as modificações curriculares implementadas, nomeadamente desde o ano lectivo 2004/2005, não são suficientemente significativas para a importância que este tipo de ensino merece.

Neste sentido, consideramos essencial a reformulação curricular neste tipo de cursos e, de modo particular, o repensar da Matemática, a disciplina que mais diretamente nos diz respeito.

A disciplina de Matemática, de acordo com o curso, divide-se em termos programáticos por uma carga horária de 100h, 200h ou 300h, ao longo dos 3 anos letivos. No primeiro caso estão cursos como Técnico de Turismo, Técnico de Secretariado ou Técnico de Apoio à Infância, sendo opcionais os módulos a lecionar a estes cursos. Exemplos de cursos que têm 200h são o curso de Técnico de Restauração e o curso de Técnico de Proteção Civil. Por fim, alguns dos cursos que têm a carga horária de 300h, são os cursos Técnico de Gestão, Técnico de Higiene e Segurança no Trabalho ou Técnico de Informática de Gestão.

Se esta distribuição de horas da disciplina de Matemática já é uma decisão, no mínimo, pouco pacífica, analisemos um currículo de forma mais pormenorizada. Poder-se-ia, por exemplo, questionar a pertinência da lecionação do módulo Funções Periódicas e Não Periódicas do curso de Restauração ou a carga horária proposta no programa para esse módulo. No entanto, referir-nos-emos ao curso Técnico de Informática de Gestão. Este tem uma carga horária de 300h e os módulos a lecionar são obrigatoriamente: Geometria, Funções Polinomiais, Estatística, Funções Periódicas, Funções Racionais, Taxa de Variação, Probabilidades, Modelos Discretos, Funções de Crescimento e Otimização, não necessariamente por esta ordem (para quem não está familiarizado com este tema, refere-se a semelhança programática existente neste curso com os conteúdos programáticos de Matemática B do ensino regular).

A questão que se coloca é, então, qual o objetivo deste curso? Dois caminhos distintos, previstos pelo Ministério da Educação: 1. preparar os alunos para exame final das várias disciplinas para posterior candidatura à universidade; 2. proporcionar aos alunos um ensino prático e vocacionado para o mundo do trabalho[5].

Para este exercício de análise de intenções dos estudantes deste curso, supomos que os mesmos escolheram a área da Informática de Gestão por ser a sua área de interesse, na qual querem exercer profissionalmente – caso contrário, outras opções seriam mais adequadas. Assim sendo, se o aluno tem como objetivo prosseguir estudos, terá para esse efeito que realizar o exame de Matemática como «específica». Estará este técnico de Informática de Gestão preparado para atingir um valor positivo nesse exame? Apesar de não conhecermos estudos que respondam claramente a esta questão, a experiência de lecionação em cursos profissionais, o contacto com estes alunos e um simples exercício comparativo de currículo, leva-nos a opinar que apenas com o currículo escolar o estudante não conseguirá, ou em caso afirmativo consegui-lo-á com muita dificuldade, atingir um nível positivo no referido exame.

Dito isto, e percecionando o papel do ensino profissional mais como uma preparação para o mundo profissional do que para o ingresso no ensino superior, importa perceber se os conteúdos de Matemática destes cursos são os mais ajustados às suas finalidades. A reflexão que agora propomos é a seguinte: será que um Técnico Nível 4 de Informática de Gestão, um Técnico Nível 4 de Higiene e Segurança no Trabalho e Ambiente ou um Técnico Nível 4 de Gestão precisam da mesma Matemática?

Todas as especificidades do ensino profissional que anteriormente apresentámos levam-nos a defender que estes cursos tenham uma Matemática mais prática – não falamos em facilitismo – pois compreendemos perfeitamente um papel prático a esta disciplina, seja como apoio às disciplinas da componente de formação técnica ou como apoio futuro à vida profissional do jovem estudante.

No caso particular do curso Técnico de Informática de Gestão, disciplinas como Linguagens de Programação, Sistemas de Informação ou Aplicações Informáticas e Sistemas de Gestão, disciplinas nucleares do curso, aparecem, muitas vezes, como difíceis de entender e como objetos únicos, separados das disciplinas tradicionais. Um primeiro módulo de Lógica no currículo de Matemática, por exemplo, poderia iniciar o combate a uma certa falta de transversalidade curricular.

Uma aposta na Geometria tridimensional, quem sabe através da exploração/utilização de um software 3D, seria também uma alternativa/complemento ao estudo tradicional deste módulo. Como forma de contribuir para a formação em contexto de trabalho, para o desenvolvimento da PAP ou para o ingresso no mercado de trabalho defendemos ainda a inclusão no currículo de matemática para estes cursos de temas como criptografia, teoria de grafos, teoria de números, sistema hexadecimal e binário. A inclusão destes conteúdos não favorece o facilitismo, bem pelo contrário, poderá aproximar a matemática destes jovens.

Este esforço implicaria necessariamente uma de duas coisas: 1. aumento da carga horária de Matemática (algo que exigiria uma reestruturação curricular de todo o curso); 2. redistribuição modular, respeitando o número de horas para os 3 anos. A segunda opção parece-nos mais válida, o que poderá ser conseguido com a diminuição da carga horária no caso de alguns módulos e o desaparecimento de outros. Reflitamos então: porque não agrupar os módulos Estatística e Probabilidades; agrupar os módulos Funções Polinomiais, Funções Periódicas e Funções Racionais; agrupar os módulos Modelos Discretos e Funções de Crescimento; agrupar os módulos Taxa de Variação e Otimização.

A título de curiosidade, refere-se o facto de nos cursos de 300 horas os módulos Funções Periódicas e Funções Racionais, lecionados separadamente, perfazerem um total de 72 horas, previstas no programa de Matemática do ensino profissional, enquanto nos cursos de 200 horas, o módulo intitulado Funções Periódicas e Não Periódicas, contemplando na generalidade os mesmos conteúdos que os dois anteriores, tem uma proposta de 36 horas de lecionação.

Algumas das sugestões surgem não só pela economia de horas ou pela pouca ou mesma nenhuma aplicabilidade dos conteúdos lecionados até então, mas também tendo em conta a «visão» que temos da disciplina de Matemática, na qual não nos parece razoável ano após ano, módulo após módulo, repetir conceitos. Assim, unindo os módulos Estatística e Probabilidades, por exemplo, evitamos um estudo repetitivo de conceitos e conseguimos fazer um estudo onde se promove a articulação modular e a relação entre conteúdos, o que no ensino profissional se torna, muitas vezes, mais difícil pelas especificidades já abordadas neste texto. Por outro lado os módulos relacionados com funções iniciam-se sempre com o estudo do domínio, contradomínio, entre outras propriedades, pelo que se torna cansativo, por vezes entediante, para os estudantes fazer este estudo repetitivo. Agrupando os módulos Funções Polinomiais, Funções Periódicas e Funções Racionais, seriam abordados mais genericamente e apenas uma vez estes conceitos, e ao mesmo tempo proporcionar-se-ia um estudo mais interessante e gratificante para os alunos promovendo a «resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação» (programa de matemática do Ministério da Educação[6]).

De uma forma mais geral, defendemos a reorganização curricular (da Matemática) dos cursos profissionais e que esta seja feita tendo em conta os objetivos e as especificidades de cada curso. Consideramos necessário um debate alargado aos professores de Matemática, coordenadores de curso, professores das áreas técnicas, entre outros, de forma a promover a articulação entre as várias valências e desenvolver a transversalidade disciplinar que tanto se defende. Poder-se-ia pensar que estas ideias levariam a que fossem desenvolvidos cerca de 90 programas de Matemática, tendo em conta o número de cursos existentes neste momento, o que por si só não seria tarefa fácil e tornar-se-ia caótico se estas ideias proliferassem para as outras áreas curriculares. No entanto, esta conclusão parece-nos precipitada, uma vez que poder-se-iam apenas alargar a lista de módulos com possibilidade de lecionação e dar a cada escola a autonomia de escolha dos respetivos módulos, tal como acontece para os cursos em que a carga horária é menor (100 horas).

Se as finalidades desta tão fundamental disciplina, segundo o que se encontra no programa de Matemática do Ministério da Educação (idem) para este tipo de curso, são:

- desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- desenvolver a capacidade de selecionar a Matemática relevante para cada problema da realidade;
- desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
- promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para a inserção plena na vida profissional como para o prosseguimento de estudos;
- contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;
- promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
- criar capacidades de intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade atual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania ativa e participativa.

E se podemos cumprir estes propósitos com qualidade e rigor e aliar a esse feito o poder de ver a utilidade da Matemática no dia-a-dia, qual o motivo/justificação para não o fazermos?

Notas

[1] Decreto-Lei n.º 4/98, de 8 de Janeiro. *Diário da República* n.º 6/98 – I Série A. Ministério da Educação. Lisboa.

[2] *Cursos profissionais.* Acedido a 30 de Novembro de 2011 no website do Ministério da Educação: http://www.min-edu.pt/index.php?s=white&pid=575

[3] Gabinete de Estatística e Planeamento da Educação do Ministério da Educação (2010). *Educação em números – Portugal 2010.* Acedido a 5 de Dezembro de 2011 de http://www.gepe.min-edu.pt/np4/?newsId=520&fileName=GEPE_Setembro.pdf

[4] *Qualificações adaptadas aos empregos de amanhã.* Acedido a 12 de Dezembro de 2011 no website da Comissão Europeia: http://ec.europa.eu/news/culture/101213_pt.htm

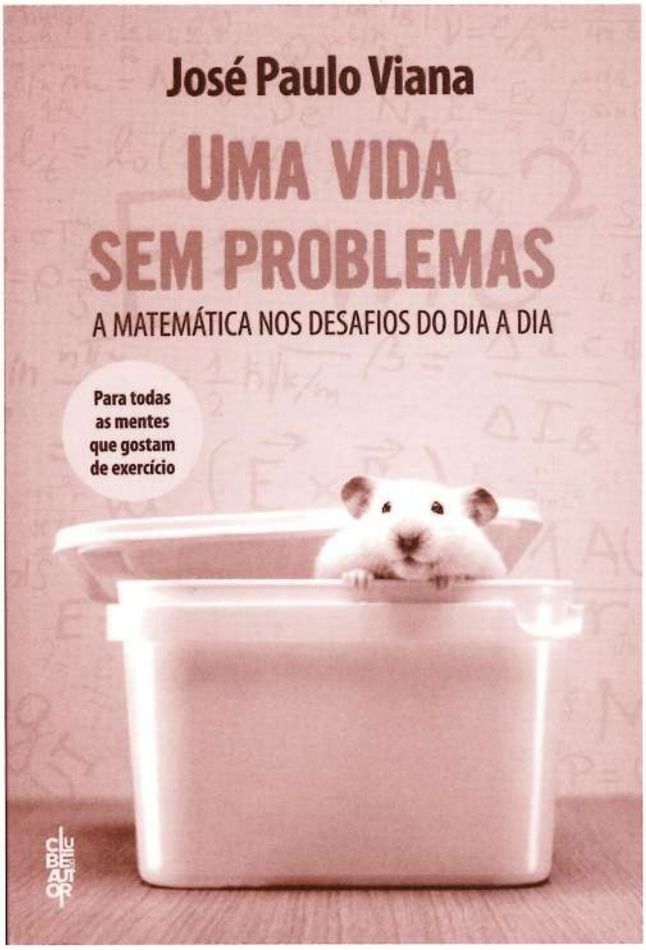
[5] *Ensino Secundário. Cursos Profissionais.* Acedido a 30 de Novembro de 2011 no website do Ministério da Educação: http://www.min-edu.pt/index.php?s=white&pid=290

[6] Direcção Geral de Formação Vocacional do Ministério da Educação (2004/2005). *Programa de matemática.* Acedido a 5 de Dezembro de 2011 de http://www.sitio.anq.gov.pt/programas/i006145.pdf

Vasco Dias
Escola Profissional Atlântico

Uma Vida sem Problemas

A Matemática nos desafios do dia a dia



Uma Vida sem Problemas
Autor **José Paulo Viana**
Ano **2012**
ISBN **978-989-8452-94-8**
Editora **Clube do Autor**
Páginas **312**

Está a pensar ir ao casino jogar na roleta? Não vá. Guarde o dinheiro e vá antes a uma livraria comprar o livro do José Paulo Viana «Uma vida sem problemas». Não, não se trata de mais um livro de autoajuda, ou sobre como vencer a crise. Se é leitor da EeM, já sabe que estamos a falar do nosso colaborador mais permanente da secção «O problema deste Número». Se não é, bom também sabe de quem estamos a falar...

Com este livro O José Paulo, como sempre, desafia-nos a descobrir e a apreciar a Matemática, em particular aquela que *está em todo o lado*. Umas *vezes completamente às claras, outras, bem escondida, disfarçada e oculta, mas se soubermos olhar, lá a encontraremos.*

O livro está organizado em duas partes. Na primeira, o José Paulo possibilita-nos o encontro e a descoberta da *matemática escondida em muitos fenómenos naturais ou sociais*, tentando mostrar *como a matemática influencia a nossa forma de estar no mundo*. São descritas e analisadas diversas situações tais como: Como ganhar à roleta? Por que é o Totobola um imposto sobre quem não sabe matemática? Como é que um simples gráfico etário (pirâmides etárias de 1950 e 1960) nos dá, inesperadamente, um retrato do atraso social e económico que se vivia em Portugal nesta época? Por que não há prémio Nobel da matemática? O que é o prémio ignobel? O que é a lei de Murphy?...

Veja a demonstração de que afinal os professores de matemática são uns mãos-largas, olhando para os resultados das provas de exames nacionais! Descubra ainda como pode ser interessante estar atento às notícias saídas nos meios de comunicação social que de alguma forma se relacionam com a Matemática, como por exemplo, percebendo por que é que graças à matemática a taxa de divórcios na China era, *em 2005, de 2,76 por mil e, em 2006, apenas 1,3 por mil.*

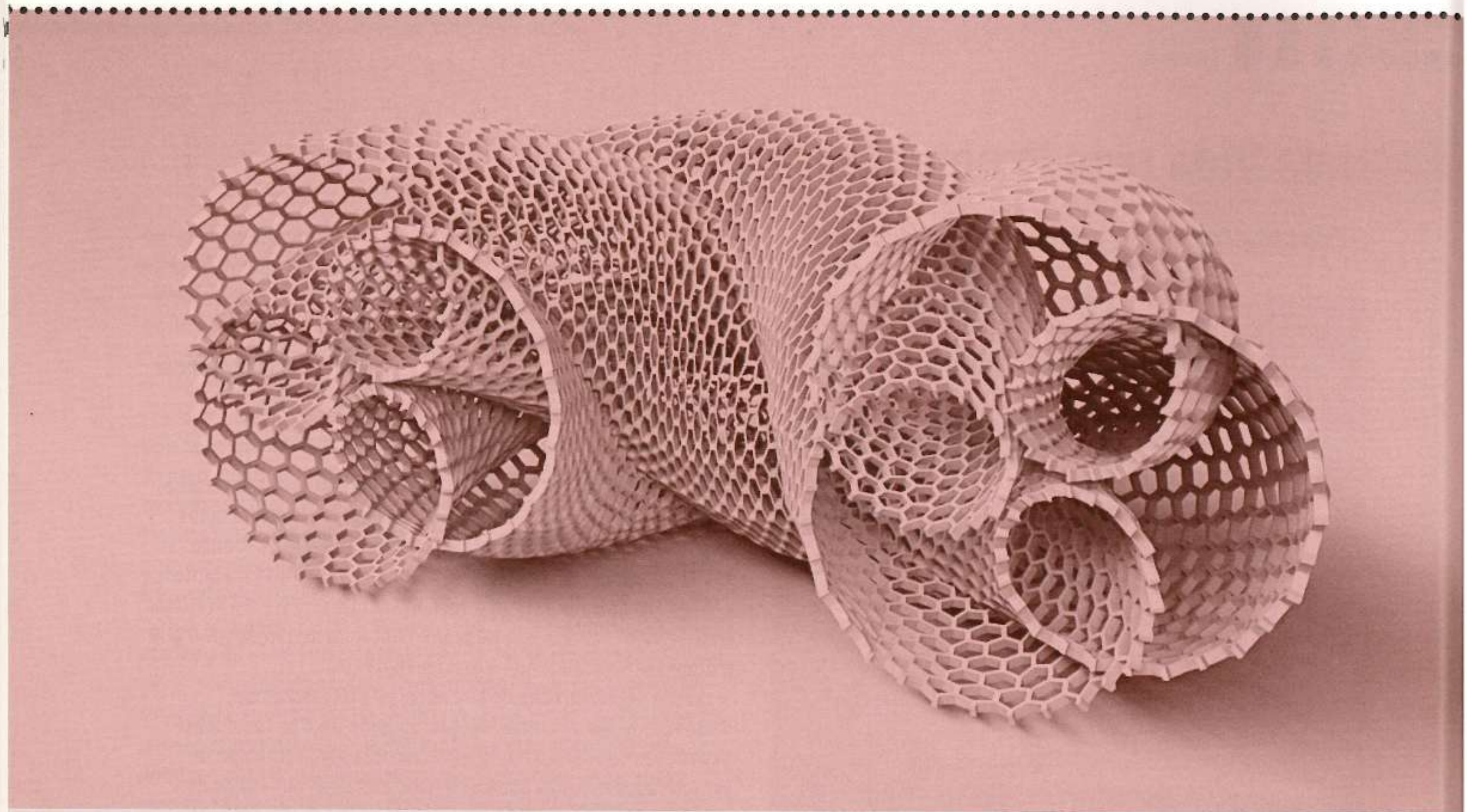
Ainda na primeira parte do livro o José Paulo revela também porque vale a pena colocar os alunos (e toda a gente) a resolver problemas e deixa algumas sugestões, sobre a forma de respostas a questões, que enquanto professores de matemática certamente muitas vezes já nos colocámos: Em que anos de escolaridade se poderá propor um certo problema? O problema deve estar diretamente relacionado com os conteúdos do programa? O problema é adequado à maioria dos alunos da turma? Onde devem os alunos resolver o problema: na aula ou em casa?...

Bom, mas se o José Paulo sugere *Uma vida sem problemas*, a segunda parte do livro é constituída por... problemas! Bem, ele chama-lhe desafios para disfarçar... São 50 desafios propostos no jornal Público, ordenados pelo seu grau de dificuldade e com as respetivas soluções. É só atacá-los!

É portanto um livro cuja leitura aconselhamos, e quem sabe descobrirão como a *Matemática escondida em muitos fenómenos naturais ou sociais permite entendê-los, interpretá-los, prevê-los e controlá-los, contribuindo para uma vida sem problemas.* Sim, porque *problema resolvido é problema desaparecido.*

Quanto ao casino, deixe lá isso. Como poderá aprender com o livro, há vários métodos para tentar ganhar algum dinheiro, mas as probabilidades estarão sempre contra si... Se investir o dinheiro no livro, a probabilidade de ficar a ganhar é 1!

Adelina Precatado, Cristina Tudela, Lina Brunheira



Conexões matemáticas envolvendo o conceito de dízima infinita periódica

Paulo Afonso

Em Matemática ouvimos muitas vezes falar em dízimas infinitas periódicas e a minha reflexão visa conectar este tipo de números ao tema das regularidades e padrões numéricos.

1 — *Vejamos, qual será o número a dar continuidade a esta sequência numérica:*

5; 6,(6); 10; 16; 26,(6); ______;

Aparentemente esta tarefa não é de fácil resolução ou de resolução imediata, pois não surge evidente a lei de crescimento desta sequência numérica. Contudo, a existência de duas dízimas infinitas periódicas neste conjunto de cinco números poderá servir de chave para a resolução deste desafio.

Assim sendo, a minha sugestão vai no sentido de se converter cada dízima na respetiva fração. Recordemos o procedimento matemático para que isso possa ocorrer. Como o período de ambas as dízimas ocorre logo ao nível das décimas, podemos seguir os cálculos que se descrevem de seguida. Relativamente a 6,(6): de $x = 6,(6)$ resulta que $10x = 66,(6)$, ou seja, $10x - x = 66,(6) - 6,(6)$, equivalente a $9x = 60$ que, resolvendo em ordem a x permite obter a solução $x = 20/3$; quanto a 26,(6): de $x = 26,(6)$ obtém-se $10x = 266,(6)$, resultando daqui a equação $10x - x = 266,(6) - 26,(6)$, equivalente a $x = 240/9$ que, resolvendo em ordem a x, permite obter a solução $x = 80/3$.

2 — *Será que a identificação das respetivas frações ajuda a interpretar a sequência numérica?:*

5; 20/3; 10; 16; 80/3; ______;

Em contexto de sala de aula é bem possível que um dos vários alunos possa avançar com a proposta de que a fração 80/3 é equivalente à fração 160/6. Se esta sugestão não ocorrer, pode ser indicada pelo professor, no sentido de que os resolvedores não desanimem e, consequentemente, desistam.

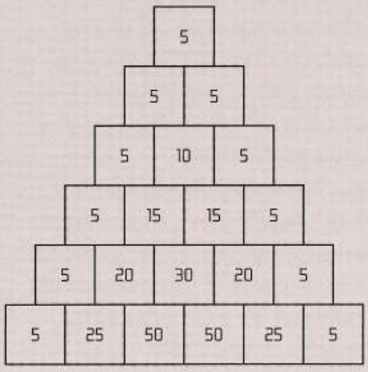


Figura 1

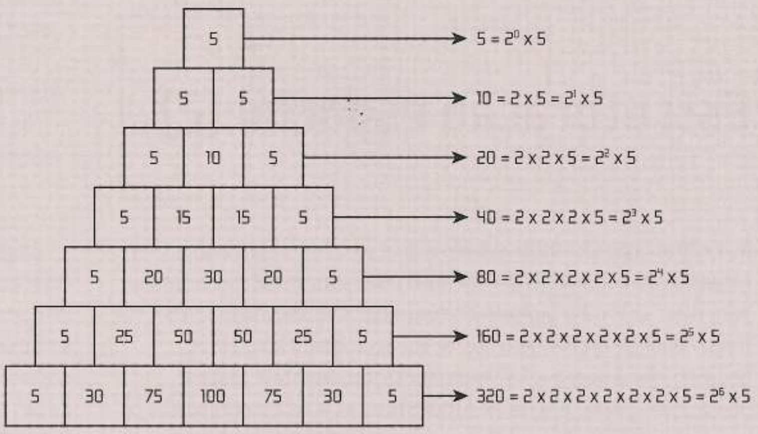


Figura 2

No fundo, o que se pretende é olhar para a sequência numérica neste novo formato:

5; 20/3; 10; 16; 160/6; ______;

3 — *Ajuda?*

Talvez, pois poderá haver alguém que sugira a conversão de todos os números inteiros para as respetivas frações. Eis uma aproximação interessante:

10/2; 20/3; 40/4; 80/5; 160/6; ______;

Logicamente que quando esta conversão for feita, o desafio colocado ficará imediatamente resolvido, pois facilmente se percebe que estamos perante números fracionários cujos denominadores são os números naturais, iniciados no 2, e os respetivos numeradores são dobros sucessivos de cinco ($10 = 2 \times 5$; $20 = 2 \times 2 \times 5$; $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$; $80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$; $160 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$). Logo, poder-se-á concluir que os numeradores dessas frações resultam do produto das potências de base dois, de expoente natural, com o cinco ($10 = 2^1 \times 5$; $20 = 2^2 \times 5$; $40 = 2^3 \times 5$; $80 = 2^4 \times 5$; $160 = 2^5 \times 5$).

Neste momento é fácil avançar com o número que dá continuidade à sequência numérica, pois o numerador será 26×5, isto é, o valor 320, e o denominador será o valor 7:

10/2; 20/3; 40/4; 80/5; 160/6; 320/7;

Note-se que este 6º termo da sequência volta a ser uma dízima infinita periódica cujo período é o seguinte: 714285. A dízima é, pois, a seguinte: 45,(714285).

Ora, os numeradores destas frações podem ser conectados a uma outra disposição numérica, baseada no conceito de Triângulo de Pascal, em que o valor inicial e os que iniciam e terminam cada linha deixam de ser uns para serem cincos (figura 1).

4 — *Que tipo de conexão matemática é, pois, possível fazer-se entre os numeradores das frações da sequência numérica e esta figura?*

Uma vez que referimos as potências de base dois, de expoente natural, a multiplicar com o fator 5, teremos de efetuar as somas dos valores existentes em cada linha horizontal da figura 2

Fica, pois, confirmada esta possibilidade de conectar matematicamente a sequência numérica inicial com esta figura numérica.

Mas as conexões matemáticas não se ficam por aqui. Voltemos ao 6.º termo da sequência numérica: 45,(714285). Centremo-nos no seu período: 714285 e dividamo-lo por 5. Obteremos o valor 142857.

5 — *Comparem-se os dígitos existentes neste quociente com os dígitos do dividendo. O que poderemos concluir?*

Curioso, não é? Os dígitos são, de facto, os mesmos, apesar de estarem posicionados de forma diferente!

6 — *Multiplique, agora, este quociente obtido por 3, por 4 e por 6. O que pode concluir?*

Bibliografia

Afonso, P. (2010). A Matemática Recreativa e o estabelecimento de Conexões Matemáticas. *Educação e Matemática*, 107, 12–17.
Afonso, P. (2008b). *O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas*. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco.
Enzensberger, H. (1998). *O Diabo dos Números*. Porto: ASA.

Paulo Afonso
Instituto Politécnico de Castelo Branco – Escola Superior de Educação

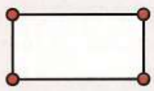
Estruturação espacial (2)

Na nota anterior foi apresentado o que se entende por estruturar espacialmente um objeto. Esta ideia é tão importante e há tanto para dizer sobre ela que vamos continuar a desenvolvê-la. De uma maneira simples, estruturar espacialmente os objetos geométricos é desenvolver representações mentais desses objetos que permitam isolar e identificar as suas componentes e estabelecer relações entre as componentes e o composto. Para compreender melhor esta ideia podemos fazer uma lista de maneiras diferentes de estruturar espacialmente uma figura muito conhecida, o retângulo, e analisar implicações de cada uma dessas estruturações.

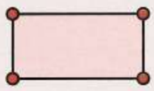
Estes exemplos mostram que a estruturação espacial do retângulo deve estar presente ao longo de toda a aprendizagem da matemática e quanto mais rica for essa estruturação, maiores serão os instrumentos de raciocínio geométrico de que cada um poderá dispor. Como poderei compreender a fórmula da área de um retângulo se nunca vi as redes quadriculadas que estão presentes em todos os retângulos? Ou entender a semelhança de retângulos se nunca vi nem comparei vários formatos de retângulo?

Para além das questões anteriores, que são apenas exemplos da necessidade de estruturar o retângulo, a lista de imagens

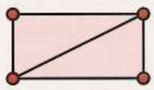
1. Retângulo desenhado em fundo branco, sem o interior pintado.



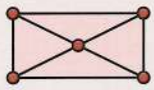
2. Retângulo desenhado em fundo branco com os vértices destacados.
Visualmente identificam-se 4 lados e 4 vértices.
Destacar os pontos de forma bem visível é uma ajuda substancial à estruturação espacial. Nos ambientes de geometria dinâmica (AGD) os pontos têm uma identidade bem visível.



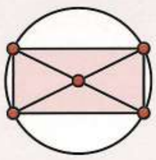
3. Retângulo desenhado em fundo branco com os vértices destacados e o interior destacado a outra cor. Num AGD a construção do interior de um polígono é representada pela pintura colorida do interior. A utilização de cores é um suporte indispensável para a estruturação espacial.



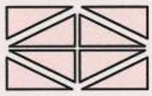
4. Retângulo com uma das diagonais desenhadas.
É possível avançar na estrutura do retângulo, identificando 2 triângulos retângulos como componentes do retângulo.



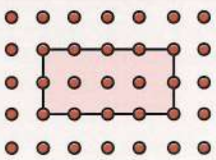
5. Retângulo com as duas diagonais desenhadas.
É possível identificar outros triângulos na estrutura do retângulo.



6. Retângulo com as duas diagonais desenhadas e uma circunferência circunscrita.
É possível identificar as diagonais como diâmetros da circunferência e o seu centro como o ponto de intersecção das diagonais. Para qualquer retângulo existe esta circunferência.



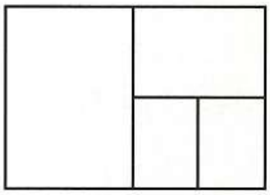
7. Retângulo formado por 8 triângulos retângulos congruentes, construído com o recurso a triângulos retângulos de material manipulável ou de cartolina colorida.



8. Retângulo desenhado numa rede ponteada com estrutura quadriculada.
O destaque visual que os vértices do retângulo tinham no fundo branco perdeu-se pois há muito mais pontos destacados. A capacidade de percepção figura fundo precisa de ser mais acentuada para distinguir entre esses pontos os vértices do retângulo.

Experimente sobrepor, a partir de um vértice, vários retângulos escolhidos ao acaso (por exemplo envelopes diversos). Separadamente, sobreponha os retângulos que se obtém a partir de uma folha A4, dividida sucessivamente em duas a partir do meio da dimensão maior. De cada vez que dividir ao meio a folha guarde uma parte e divida a outra novamente.
Há alguma diferença entre o que acontece numa e na outra situação? Descobre alguma relação em alguma das situações?

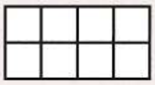
Haverá alguma relação entre as medidas dos retângulos utilizados como campos para diversos desportos?



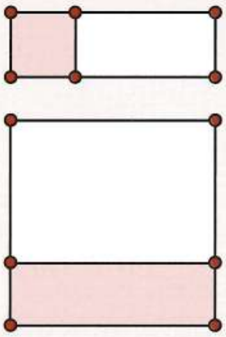
Por coincidência alguns aspetos da estruturação geométrica do retângulo são desenvolvidos no artigo «A matemática do papel», do n.º 116 da revista *Educação e Matemática*.

aponta também para a escolha criteriosa dos recursos que ajudam a fazê-lo. Há muitos anos que penso na utilização didática de materiais manipuláveis e tenho vindo a tornar mais consistente a escolha que deles faço e a consolidar o modo como essa seleção deve ser compreendida e fundamentada. O estudo da estruturação espacial confirma-me que a escolha tem que ser feita em função da estruturação espacial que se pretende desenvolver.

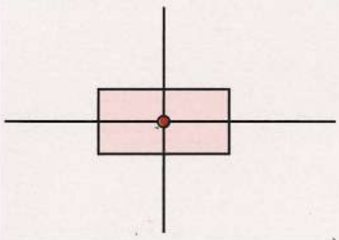
A estruturação espacial é uma condição necessária para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.



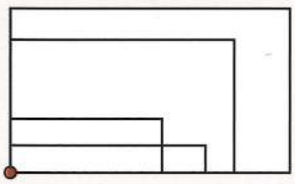
9. Retângulo desenhado com uma estrutura quadriculada de linhas e colunas.
Esta representação pode designar-se por uma disposição retangular de quadrados (*array* na literatura anglo-saxónica).
O destaque visual que os lados do retângulo tinham no fundo branco perde algum poder de percepção relativamente ao fundo.



10. Retângulo com um quadrado desenhado dentro ou fora.
Qualquer retângulo tem dentro um quadrado cujo lado é igual à menor dimensão do retângulo.
Por fora de qualquer retângulo há um quadrado cujo lado é igual à sua maior dimensão.
Ver como um retângulo se aproxima mais ou menos de um quadrado determina o seu formato.
Um retângulo pode ser visto como um quadrado esticado ou encolhido numa direção.



11. Retângulo associado a duas retas perpendiculares.
A associação de retas ou eixos ajuda a ver características da figura.



12. Vários retângulos sobrepostos com um vértice comum.

O que é uma cónica?

Ana Cristina Oliveira

As *cónicas* são curvas obtidas por intersecção de um cone de revolução com um plano que não passa pelo seu vértice. Se o plano cortar apenas uma das folhas do cone, essa secção do cone é uma *elipse* (de que um caso particular é a circunferência) ou uma *parábola*; se cortar duas, é uma *hipérbole*. Esta é a definição original de Apolónio de Perga (? 262 a.C–190 a.C).

Definições alternativas

Uma caracterização alternativa resulta do seguinte. Quando a intersecção do plano com o cone é uma elipse ou uma hipérbole, existem duas esferas inscritas no cone que são tangentes ao plano, ditas *esferas de Dandelin* (figura 1); se a intersecção for uma parábola, existe uma só tal esfera. Os pontos de tangência das esferas com o plano dizem-se os *focos* da cónica e, no caso da elipse, a soma das distâncias de qualquer ponto da cónica aos dois focos é constante — precisamente igual (como verificaremos) à distância, medida ao longo das geratrizes do cone, entre as circunferências onde as duas esferas tocam o cone.[1] Se adoptarmos um sistema cartesiano de eixos no plano e, relativamente a ele, a elipse tiver focos $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ e for D a soma das distâncias dos seus pontos aos focos, ela descreve-se pela equação

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = D.$$

Esta equação não é muito prática, mas mostra-se que ela é equivalente a uma outra do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Na hipérbole, por seu turno, o que é constante é o valor absoluto da diferença entre as distâncias de cada um dos seus pontos aos focos. E, em sistemas de eixos apropriados, a hipérbole e a parábola são representadas por equações igualmente simples (mas que revelam um grau adicional de complexidade relativamente às rectas, que correspondem às equações de primeiro grau):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{para a hipérbole}$$

$$y - px^2 = 0 \qquad \text{para a parábola.}$$

Por que há uma equivalência?

Na bibliografia que consultámos, os autores optam frequentemente por utilizar a definição de Apolónio para cónicas e, quando fazem depois uso da descrição métrica indicada, não referem (por) que são modos equivalentes de tratar estas curvas. O objectivo deste artigo é o de apresentar argumentos geométricos que elucidem esta equivalência.

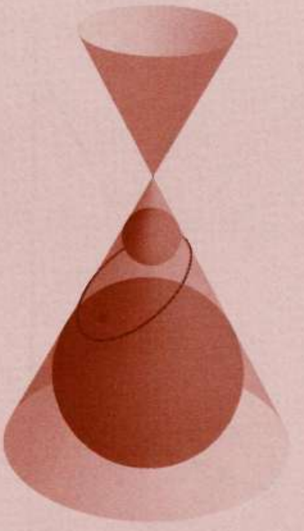


Figura 1

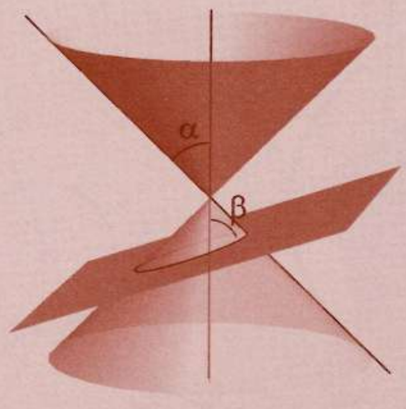


Figura 2

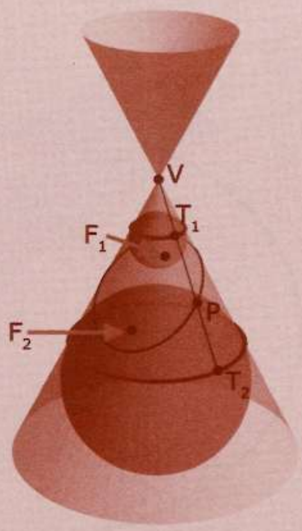


Figura 3

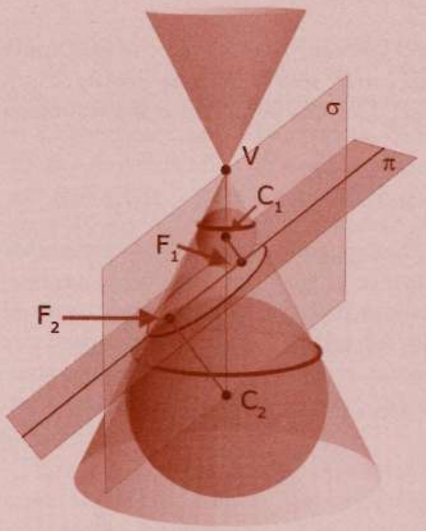


Figura 4

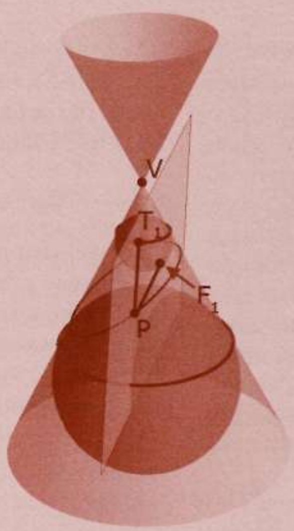


Figura 5

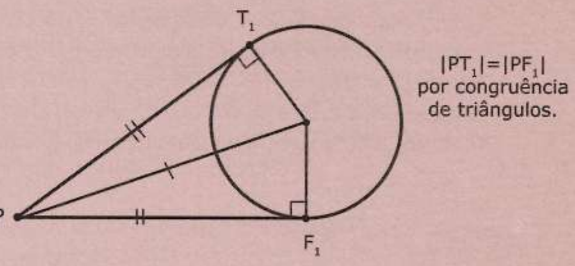


Figura 6

Analisaremos apenas o caso da elipse (os outros têm dificuldade idêntica) e consideraremos sempre um cone duplo, circular, recto e ilimitado. Uma elipse pode ser vista como:

(1) A curva resultante da intersecção de um cone de abertura α com um plano π de inclinação β, sendo $\alpha < \beta$ (figura 2).

(2) O lugar geométrico dos pontos P de um plano π que satisfazem a equação $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = D$, onde F_1 e F_2 são dois pontos desse plano previamente fixados e D é uma constante estritamente maior que $\overline{F_1F_2}$.

Convençamo-nos de que as definições (1) e (2) são equivalentes. Consideremos uma curva que verifica a propriedade (1). De acordo com Dandelin (1794–1847), é possível inscrever no cone duas esferas tangentes a π; designemos os pontos de tangência por F_1 e F_2. Na figura 3, estão assinalados o vértice V do cone, um ponto P da curva e os pontos T_1 e T_2 de intersecção da recta VP com as duas esferas de Dandelin.

Sabemos que $\overline{PT_1} = \overline{PF_1}$ uma vez que o plano definido por P, F_1 e T_1 intersecta uma das esferas de Dandelin numa circunferência que possui como tangentes PF_1 e PT_1, respectivamente, em F_1 e T_1 (ver figuras 5 e 6). Por simetria, $\overline{PT_2} = \overline{PF_2}$ e, portanto,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PT_1} + \overline{PT_2} = \overline{T_1T_2},$$

onde $\overline{T_1T_2}$ é independente do ponto P. Ou seja, os pontos da curva satisfazem a definição (2).

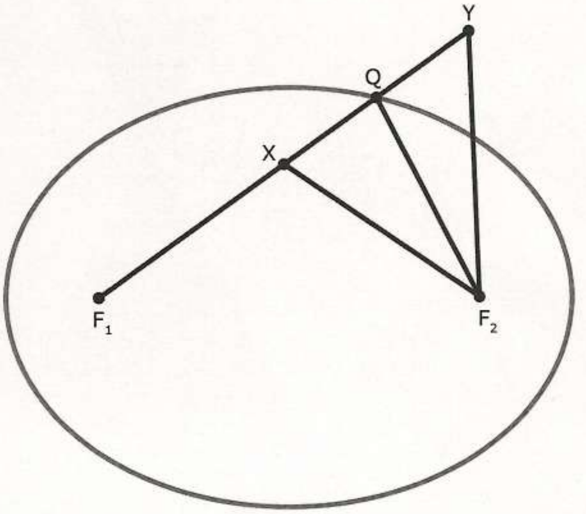


Figura 7

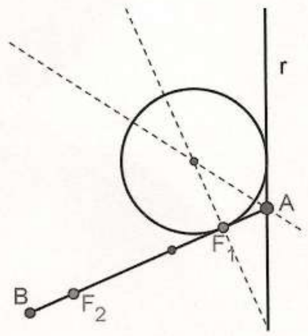


Figura 8

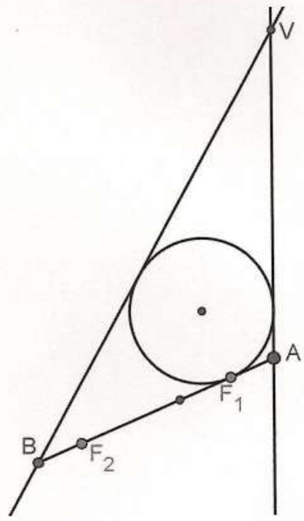


Figura 9

A figura 7 indica por que motivo não existem outros pontos em π que verifiquem a condição (2), embora eles existam no espaço: se X é ponto do plano π interior à elipse, e Q o ponto de intersecção da semi-recta $\dot{F_1}X$ com a elipse, então $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} < \overline{QF_1} + \overline{QF_2} = D$. Analogamente, se Y é ponto do plano π exterior à elipse, tem-se $\overline{YF_1} + \overline{YF_2} > \overline{QF_1} + \overline{QF_2} = D$.

Para esclarecermos por que é que uma curva que satisfaça o enunciado da definição (2) também cumpre o da definição (1), fixemos um plano π, dois pontos F_1 e F_2 nesse plano, uma constante D, estritamente maior que $\overline{F_1F_2}$, e o conjunto de pontos $\mathscr{E} = \{P \in \pi : \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = D\}$. Temos agora de encontrar um cone $\mathfrak{C}$ adequado, isto é, que permita obter $\mathscr{E}$ como intersecção de π com $\mathfrak{C}$ e cujas esferas de Dandelin, de centros C_1 e C_2, sejam tangentes a π em F_1 e F_2. Note-se que, como $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2} = D$, se um tal cone existir, deverá intersectar a recta F_1F_2 em dois pontos A e B (veja-os na figura 8)[2] tais que

$$\overline{AF_1} = \overline{BF_2} = \frac{D - \overline{F_1F_2}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{AB} > \overline{F_1F_2}.$$

Uma vez que procuramos um cone de revolução, comecemos por diminuir a dificuldade do problema, reduzindo-o a um plano que contenha o vértice e uma geratriz do cone: iremos construir um plano σ contendo AB ($AB = F_1F_2$) e perpendicular a π (figura 4). Por esse motivo, σ contém vários pontos importantes: como devemos ter F_1C_1 e F_2C_2 perpendiculares a π, σ terá

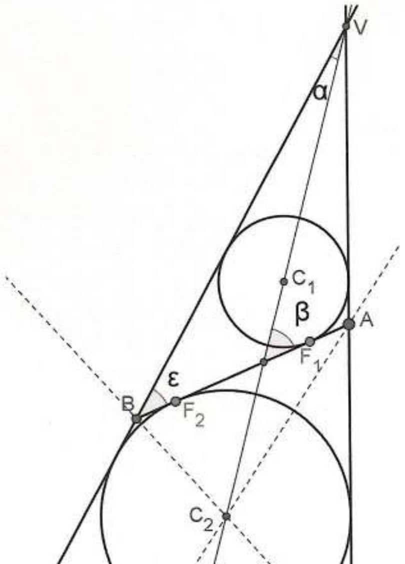


Figura 10

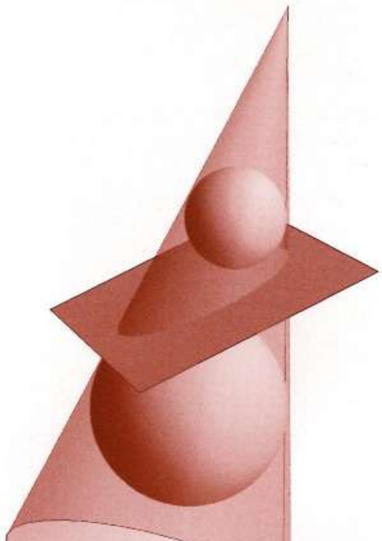


Figura 11

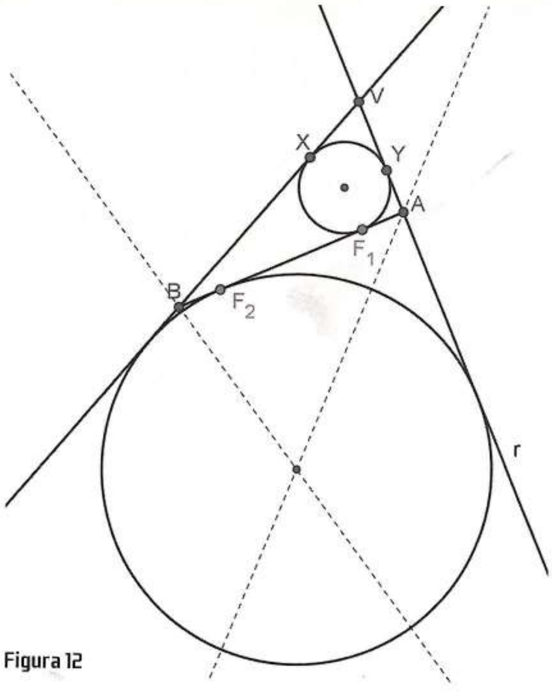


Figura 12

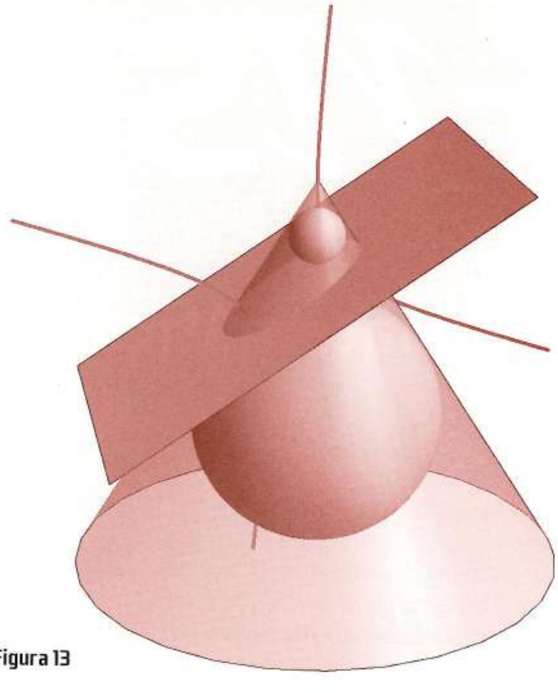


Figura 13

de coincidir com o plano que contém (e é definido por) F_1, C_1, F_2 e C_2 (figura 4). Acresce que C_1C_2 é o eixo do cone, pelo que o seu vértice, V, também pertence a σ.

Construamos agora a intersecção do cone (e respectivas esferas de Dandelin) com σ. Escolhamos uma recta $r = AV$ em σ; sabemos que C_1 coincide com o centro da circunferência tangente a r e a AB em F_1, como ilustrado na figura 8. O facto de a recta BV dever ser também tangente à circunferência representada, permite-nos determiná-la (e isso está feito na figura 9). Por outro lado, a segunda esfera de Dandelin intersecta σ numa outra circunferência tangente às três rectas assinaladas, conforme indica a figura 10, e o seu ponto de tangência com AB é F_2. Observemos ainda, no triângulo BAV, que a inclinação do plano π é $\beta = \varepsilon + \alpha > \alpha$.

Por fim, e por revolução em torno de C_1C_2, geremos um cone. O resultado está na figura 11 e confirma que o conjunto $\mathscr{E}$ verifica a definição (1).

Uma relação intrínseca entre os diferentes cones

Será este cone único? Não esperamos que o seja pois, no argumento anterior, fizemos uma escolha: a recta r. E, de facto, variando-a, obtemos uma infinidade de cones possíveis, de que se exibe um outro exemplo na figura 13. E como se relacionam os diferentes cones que intersectam π segundo a mesma elipse? Tendo em conta a igualdade (ver figura 12).

$$|\overline{BV} - \overline{AV}| = |\overline{BX} + \overline{XV} - \overline{AY} - \overline{YV}| =$$
$$= |\overline{BF_1} + \overline{XV} - \overline{AF_1} - \overline{YV}|$$

e a congruência de $[XV]$ e $[YV]$, que resulta de VX e VY serem tangentes, em X e em Y, à mesma circunferência, concluímos que

$$|\overline{BV} - \overline{AV}| = |\overline{BF_1} - \overline{AF_1}| = \overline{F_1F_2}.$$

Agora que sabemos que as definições geométrica e métrica das cónicas são equivalentes, podemos deduzir desta equação que V descreve um arco de hipérbole com focos B e A e constante $\overline{F_1F_2}$. Está traçado a castanho na figura 13.

Conclusão

A prova da equivalência entre as duas definições de cónica, de natureza diversa, serviu também o propósito de treinar o pensamento geométrico, uma tarefa menos habitual dada a comodidade inerente ao uso da geometria analítica. A conexão inesperada entre duas das cónicas, a elipse e a hipérbole, foi-nos sugerida ao manipularmos *software* informático de Geometria Dinâmica, mais concretamente o *Geogebra*[3].

A autora agradece a leitura atenta de Eduardo Veloso da primeira versão deste texto.

Notas

[1] Propriedade que sugeriu aos jardineiros um método expedito para construir canteiros elípticos.

[2] As figuras 8 e 9 foram traçadas no plano σ.

[3] Nos modelos tridimensionais, foi utilizado o programa *Mathematica*.

Bibliografia

D. Lehmann, R. Bkouche, *Initiation à la géométrie*, Presses Universitaires de France, 1988.

E. Veloso, *Geometria, Temas Actuais*, Ministério da Educação, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

G. Jennings, *Modern Geometry with Applications*, Springer, 1997.

H. Lebesgue, *Les Coniques*, Gauthier-Villars, 1942.

Ana Cristina Oliveira

Associação Atractor

«E se os alunos seguem caminhos imprevistos?»

Dilemas e desafios de uma professora

Podemos ler nas páginas 28 e 29 desta revista a descrição de uma aula realizada pela Irene Segurado em que foi proposta uma tarefa de investigação, numa turma do 6º ano. Esta descrição permite--nos refletir sobre algumas preocupações e inquietações vividas pela professora no decorrer desta aula e que decerto terão sido sentidas por muitos professores de forma semelhante quando trabalharam em aula com tarefas que envolveram atividades de investigação, de exploração ou de resolução de problemas.

A ideia de que se aprende Matemática fazendo Matemática reúne hoje o consenso de muitos educadores matemáticos. Parte-se do pressuposto que aprender Matemática não é somente decorar propriedades e repetir procedimentos ensinados pelo professor, mas ser capaz de compreender e construir novo conhecimento, assumindo uma atitude de pesquisa e de questionamento, implicando-se pessoalmente na procura de caminhos e soluções para as situações em estudo (APM, 1988; NCTM, 2007).

Também no atual programa de Matemática se salienta a importância de os alunos aprenderem matemática através das experiências significativas que os professores proporcionam. Os conhecimentos dos alunos e a capacidade para os utilizar na resolução das diferentes situações com que se deparam, a sua confiança e a sua predisposição em relação à matemática são influenciados pelo tipo de ensino que vivenciam na escola. Deste modo, as tarefas que os professores selecionam podem ser determinantes, condicionando em grande parte a Matemática que os alunos experienciam (Ponte, 2005). Entre os vários tipos de tarefas que o professor pode selecionar, as que envolvem investigações matemáticas podem proporcionar, aos alunos, experiências de aprendizagem estimulantes, pois constituem um verdadeiro desafio à capacidade de mobilizar e relacionar informação na interpretação das situações e na escolha do caminho a seguir.

O ambiente de aprendizagem proporcionado pelo professor também é decisivo, pois pode ser um estímulo, para que os alunos se sintam à vontade para colocar as suas questões, fazer conjeturas, explorar as suas ideias, comunicá-las e discuti--las com os colegas e o professor, assumindo um papel mais interventivo na aprendizagem e construção do conhecimento matemático (Bishop e Goffree, 1986).

Em aulas deste tipo, os dilemas sentidos pelos professores na sua condução costumam verificar-se usualmente em dois momentos distintos: por um lado quando os alunos estão a trabalhar em grupo na exploração da tarefa e por outro lado no momento da discussão em grupo turma.

O papel do professor é decisivo, especialmente no modo como vai ajudando os alunos, tendo um papel menos diretivo, procurando compreender como os trabalhos se vão desenvolvendo, prestando o apoio aos alunos só quando estritamente necessário, deixando-lhes um espaço indispensável para explorarem a situação, para formularem e testarem as suas conjeturas e para justificarem as suas conclusões.

No entanto, para além do tipo de apoio prestado, o professor poderá ter dificuldades na condução destas aulas, devido também, em parte, ao facto de os alunos terem alguma dificuldade em trabalhar em grupo e em realizar atividades de investigação. No caso da turma da Irene apesar dos alunos estarem habituados a trabalhar em grupo e a realizar este tipo de atividades, o que não é vulgar em muitas turmas de Matemática, o apoio do professor continuou a ser indispensável como forma de validação do trabalho que iam desenvolvendo, o que é visível no extrato seguinte da descrição da aula:

> Não era a primeira vez que eram confrontados com tarefas de investigação e por isso mesmo tinham entendido o que pretendia. Contudo continuei a ser solicitada constantemente pelos grupos, não com o intuito de tirar dúvidas, mas para me revelarem as suas descobertas...

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) o professor, ao acompanhar o trabalho dos alunos, deve procurar um equilíbrio entre dois pólos: por um lado, dar-lhes a autonomia necessária de modo a não comprometer a sua autoria na investigação e, por outro, garantir que o trabalho dos alunos se vai desenvolvendo de modo significativo do ponto de vista matemático. Este aspeto é bem visível no episódio relatado pela professora quando se refere ao momento em que é chamada por um dos grupos. Muito entusiasmados, os alunos queriam mostrar-lhe a conjetura que tinham feito, partindo do estudo do que acontecia quando se alterava o número de colunas. Tinham escolhido uma direção diferente da que foi prevista pela professora:

> Notava-se claramente terem achado mais aliciante investigar o que acontecia quando se modificava a arrumação dos números, do que descobrir as relações existentes entre os números apresentados na figura da ficha.

Era uma quarta-feira igual a muitas outras, mas eu sentia-me ansiosa por ir dar aulas aos meus alunos do 6.º D. Antevia que iria ser um <sucesso>. A tarefa que tinha preparado parecia-me ser bastante aliciante e, pelo que conhecia dos meus alunos, previa que estes iriam sentir o mesmo prazer que eu sentira, na véspera ao explorá-la.

A tarefa, cujo título era *Exploração com números*, consistia no seguinte:

Procura descobrir relações entre os números da figura

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...	...	...	...

Como sempre, regista as conclusões que fores obtendo.

Já na aula, dei aos alunos pequenas <dicas> sobre o que poderiam tentar observar (regularidades, como se comportam na figura: múltiplos, divisores, números primos, quadrados perfeitos...) e todos os grupos começaram animadamente a trabalhar. Não era a primeira vez que eram confrontados com tarefas de investigação/exploração e por isso mesmo tinham entendido o que se pretendia. Contudo, continuei a ser solicitada constantemente pelos grupos, não com o intuito de tirar dúvidas, mas para me revelarem as descobertas feitas (em segredo, não fosse o grupo do lado ouvir e estragar-lhes o <brilharete> na hora da discussão!).

Várias descobertas foram surgindo:

Nas diagonais da direita para a esquerda os números crescem de 3 em 3 unidades, da esquerda para a direita de 5 em 5 unidades.

A tabuada dos 2 encontra-se na primeira e terceira coluna.

A tabuada dos 6 encontra-se na primeira e terceira coluna saltando sempre dois números.

Os números primos estão nas colunas ímpares, incrivelmente o 2 está numa coluna par.

(...)

Em dado momento, o grupo do Bruno, Ricardo, Cândido e Pedro chamou-me, mostrando grande entusiasmo. Haviam conjeturado (palavra usada pelos próprios alunos) que se os números se encontrassem arrumados em quatro colunas, na primeira coluna teriam a tabuada dos 4; se estivessem arrumados em 5 colunas teriam na primeira coluna a tabuada dos 5; se estivessem arrumados em 6 teriam a tabuada dos 6, o que já tinham verificado.

Veja-se:

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
...	...	...	...	...

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
...	...	...	...	...	...

Este mesmo grupo tinha ainda descoberto que:

Nas diagonais da esquerda para a direita os números crescem uma unidade em relação ao número de colunas e nas diagonais da direita para a esquerda decrescem uma unidade.

Notava-se claramente terem achado mais aliciante investigar o que acontecia quando a arrumação dos números se modificava, do que descobrir as relações existentes entre os números apresentados na figura da ficha.

Fiquei um pouco apreensiva quanto ao que fazer. Uma possibilidade era deixá-los continuar mesmo que na hora da discussão não estivessem em sintonia com os colegas. Uma atividade de investigação não é mesmo isso, ir para além do que é previsível? Outra possibilidade era encaminhá-los novamente para a tarefa apresentada. Nesse caso, não seria grande o risco de lhes cortar o prazer que estavam a ter naquele momento?

Durante algum tempo, fui deixando que seguissem o caminho escolhido, embora a validação das suas descobertas me demorasse um pouco mais (não havia pensado neste tipo de exploração em casa), o que perturbava de certo modo o meu acompanhamento ao resto da turma.

A hora da discussão aproximava-se. Eu sabia que a riqueza do trabalho deste grupo não seria entendida pelos colegas se deixasse que a sua divulgação fosse feita ao mesmo tempo que a deles, pois estes estariam demasiado envolvidos pela estrutura da tarefa que lhes havia sido apresentada. Pensei, então, que a melhor maneira de valorizar o trabalho destes alunos era dar-lhes um espaço para comunicarem à turma a sua pequena investigação, o que só seria possível numa próxima aula.

Com alguma pena, dirigi-me então ao grupo, pedindo-lhes que não se esquecessem de pensar também um pouco sobre a figura inicial. Prometi-lhes que iram ter oportunidade de comunicarem aos seus colegas a sua investigação.

No início da aula seguinte dei a palavra ao grupo. Foi o Bruno o escolhido para relatar a investigação feita no dia anterior. Os colegas da turma mostravam-se atentos. Uma mal disfarçada rivalidade impedia-os, no entanto, de se revelarem muito maravilhados com a descoberta. Contudo, pareceu-me, pelo modo como se comportaram na realização da tarefa seguinte e que lhes foi proposta pelo Bruno – *Que acontece quando alteramos o número de colunas?* – que tinham entendido que investigar era ir para além daquilo que lhes era pedido, era ter a liberdade de explorar outros caminhos não indicados na tarefa.

Terminei a aula com um sentimento misto de realização e de preocupação. De realização porque os alunos tinham avançado no seu conceito de investigação, de preocupação pelo novo desafio que um dia terei de enfrentar: orientar uma turma em que grupos de alunos avançam, independemente, em direções muito diferentes nas suas investigações.

(*In* Histórias de Investigações Matemáticas (1998), pp. 73-76)

E o que fazer perante esta situação? Nestas aulas, em que se exploram tarefas de natureza investigativa, a margem de imprevisibilidade é realmente muito grande e o professor tem que ter uma grande flexibilidade para lidar com as situações novas que vão ocorrendo (Idem). Esta imprevisibilidade poderá ter a ver com os caminhos que os alunos vão seguindo, bem como com os tópicos matemáticos e a profundidade com que podem surgir. Apesar de ter explorado previamente a tarefa, essa imprevisibilidade também foi vivida nesta aula:

Fiquei um pouco apreensiva quanto ao que fazer. Uma possibilidade era deixá-los continuar (…) Outra possibilidade era encaminhá-los novamente para a tarefa apresentada. Nesse caso, não seria grande o risco de lhes cortar o prazer que estavam a ter naquele momento? (…) não havia pensado neste tipo de exploração em casa, o que perturbava de certo modo o meu acompanhamento ao resto da turma.

É, sem dúvida, essencial que o professor planifique de uma forma cuidada o trabalho que irá decorrer na aula, ainda que, como neste episódio, os imprevistos possam igualmente ocorrer. O modo de lidar com eles depende em boa medida do professor e da sua segurança face aos conceitos matemáticos em estudo, para a qual pode contribuir um trabalho cuidado de planificação.

Posteriormente, na fase de discussão, é importante que o professor proporcione oportunidades para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de comunicar matematicamente e o seu poder de argumentação, refletindo sobre o seu trabalho. Por vezes, é difícil para o professor conseguir um ambiente de partilha de ideias em que os alunos se ouçam uns aos outros e ao professor, pois não estão habituados a comunicar as suas ideias, nem a argumentar. Porém, a investigação destes autores mostra que, sem discussão final, corre-se o risco de se perder o sentido do trabalho realizado em aulas em que se desenvolvem investigações matemáticas.

No episódio da aula relatado pela Irene ficou também patente a importância atribuída à fase de discussão. O acompanhamento das explorações dos alunos enquanto trabalhavam em grupo foi decisivo para o modo como organizou posteriormente a discussão, valorizando as descobertas de um grupo que tinha aprofundado um pouco mais do que os outros os conhecimentos matemáticos em estudo.

A hora da discussão aproximava-se. Eu sabia que a riqueza do trabalho deste grupo não seria entendida pelos colegas se deixasse que a sua divulgação fosse feita ao mesmo tempo que a deles (…) Pensei então que a melhor maneira de valorizar o trabalho destes alunos era dar-lhes um espaço para comunicarem à turma a sua pequena investigação…

Salientando também a importância das discussões quando se trabalha com este tipo de tarefas, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) realçam que o papel que hoje se espera do professor está a mudar de *transmissor de conhecimento* e de *árbitro* do que está ou não correto, para *engenheiro* de ambientes de aprendizagem em que os alunos são ativamente envolvidos na resolução de problemas e na construção da sua própria compreensão da matemática. De acordo com este ponto de vista, o professor coloca os alunos perante problemas de vários graus de complexidade, promovendo ambientes em que os alunos os exploram em conjunto e partilham as suas estratégias e soluções com toda a turma. Assume, assim, um papel de moderador da discussão, conducente à sistematização e construção dos conceitos matemáticos envolvidos.

Estes investigadores referem, também, que o professor durante a fase de discussão tem como principal finalidade construir conhecimento a partir do trabalho dos alunos, ao invés de ratificar possíveis processos e resultados. É essencial que o acompanhamento que faz ao trabalho de cada grupo permita identificar estratégias e ideias que sejam significativas e importantes para serem partilhadas e discutidas com o grupo turma e que sejam uma mais-valia para a construção e aprofundamento do conhecimento matemático envolvido na tarefa em causa.

Quando um professor propõe tarefas de investigação, exploração ou de resolução de problemas é natural que viva muitos destes desafios e dilemas que referimos. O trabalho colaborativo pode ser uma grande ajuda para ultrapassar esses desafios, pois pode ser um contexto favorável à experimentação de novas práticas de ensino, possibilitando o confronto de ideias e de experiências. A colaboração entre colegas pode ajudar os professores a ganharem mais confiança na seleção das tarefas que propõem aos seus alunos, na medida em que pode permitir uma melhor perceção dos conhecimentos matemáticos envolvidos, bem como prever diversas estratégias de resolução e possíveis dificuldades sentidas pelos alunos e professores. Posteriormente, a discussão e a reflexão em grupo, sobre o que aconteceu na aula, poderá também contribuir para reorientar o trabalho a seguir, tendo por base a análise das várias situações que foram ocorrendo.

Referências

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organisation and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: Reidel.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J.P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*. 10(4), 313–340.

João Almiro
Escola Secundária de Tondela
Grupo de Trabalho de Investigação da APM

Margarida Abreu
Agrupamento de Escolas de Tondela
Grupo de trabalho de Investigação da APM

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Com esta tarefa pretende-se que os alunos, em pequenos grupos, encontrem um processo que lhes permita obter o maior/menor número possível, a partir de um qualquer conjunto de cinco números, trabalhando essencialmente duas da capacidades transversais, o raciocínio e a comunicação matemáticos. Esta tarefa, já que introduz intencionalmente a notação algébrica, pode também tirar partido das potencialidades da folha de cálculo.

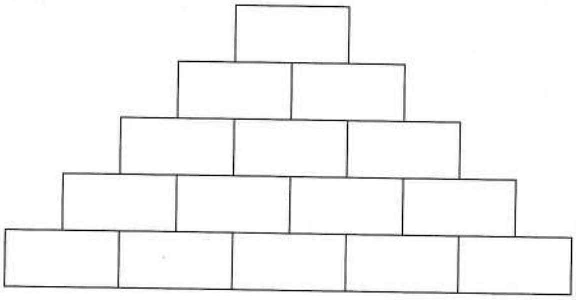
A tarefa pode ser realizada em 60 minutos, onde 30 são para o trabalho autónomo dos alunos e os restantes para apresentação, discussão e sistematização de ideias.

Numa primeira fase é natural que os alunos recorram a estratégias de tentativa e erro contudo devem compreender que esse processo é moroso e não conduz à generalização. Desta forma, os alunos podem verificar o contributo de cada número para o resultado final, concluindo que para quaisquer números a, b, c, d e e, o número do topo da pirâmide é dado pelo valor da expressão $a+4b+6c+4d+e$.

Ana Pires, Colégio José Álvaro Vidal
Cátia Rodrigues, Escola Superior de Educação de Viseu
Sónia Almeida, Escola Secundária da Ramada

Números em Pirâmide

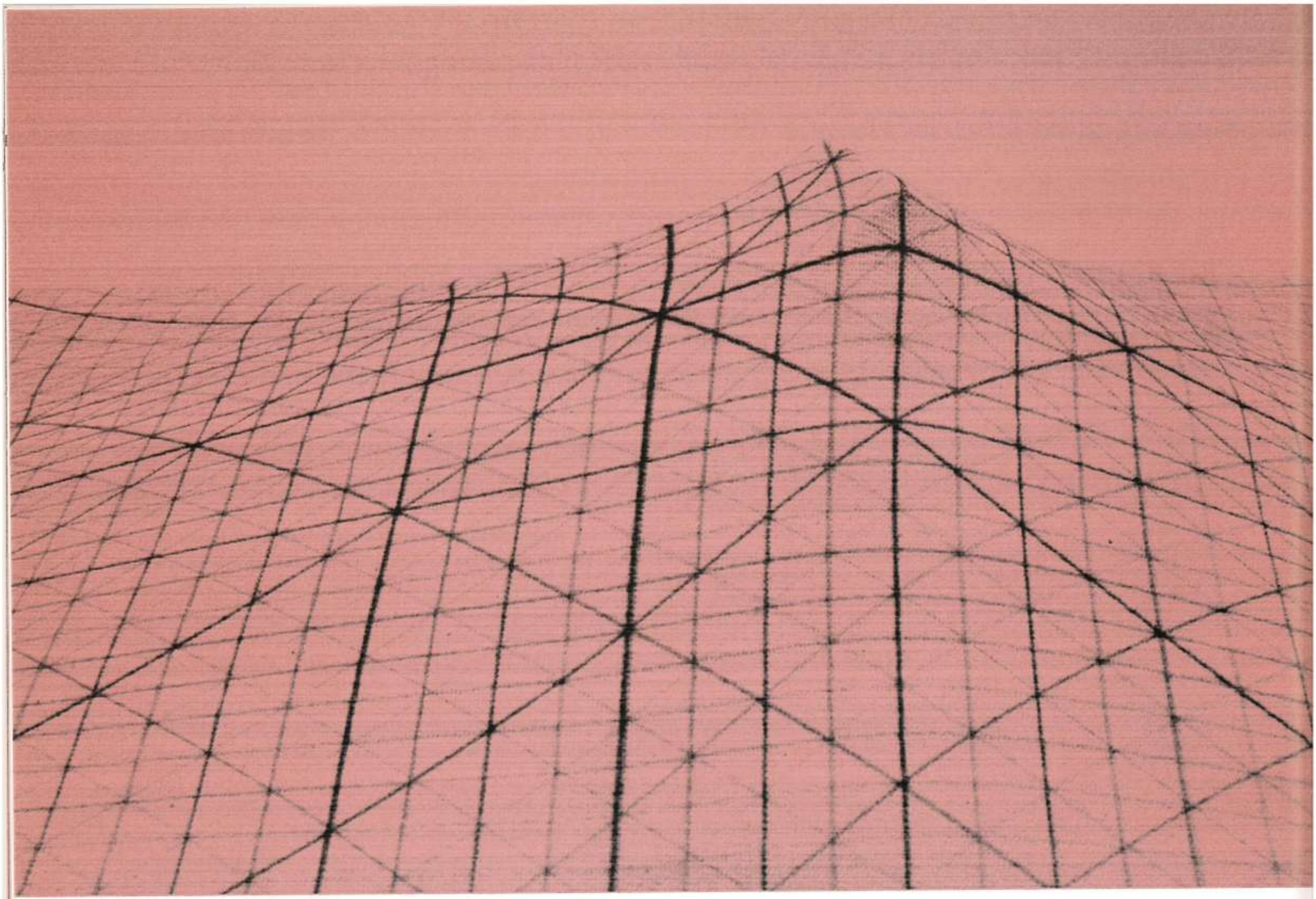
Posiciona os 5 primeiros números naturais na base da pirâmide, de modo a atingires o maior número possível, no topo da pirâmide. O número de cada célula da pirâmide resulta da adição dos números das duas células imediatamente abaixo.



Experimenta com outros números.

Encontra um processo que te permita atingir rapidamente o maior e o menor número possível, quaisquer que sejam os números de partida.

(adaptada de Ainley, J., Bills, L., Wilson, K. (2005). Purposeful task design and the emergence of transparency)



Área no 2.º Ciclo com o Geometer's SketchPad

Eduarda Moura

Introdução

O título do artigo deveria ter um ponto de interrogação no fim, mas pontos de interrogação não aparecem em títulos de artigos de temas científicos e por isso a questão coloca-se agora: Área no 2.º Ciclo com o GSP? Dará resultado? E em que medida? Os materiais curriculares aqui apresentados foram desenvolvidos durante o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 2.º Ciclo (Serrazina e outros, 2006). Os ficheiros GSP referidos no texto podem ser solicitados à autora.

Com o Programa de Matemática do 1.º Ciclo que estava em vigor em 2006/07 esperava-se que os alunos desenvolvessem alguma experiência com transformações geométricas isométricas. Esta experiência pode ser conseguida, por exemplo, através de puzzles de área, minós de diversas unidades, pavimentações, desenho de frisos e rosáceas e de outras figuras simétricas com um eixo de simetria, todas estas atividades sugeridas no programa da altura. Relativamente a perímetros e áreas, no fim do 2.º ano era esperado dos alunos o cálculo de áreas com quadrados e outras unidades geométricas através de contagem e, durante o 3.º ano, deveria realizar-se trabalho em tarefas para o desenvolvimento da competência de reconhecer lados paralelos em figuras geométricas simples. Relativamente a perímetros e áreas, no 4.º ano, era sugerida a comparação geométrica por sobreposição e a medição e cálculo de áreas de quadrados e retângulos através da multiplicação das medidas dos lados que deveria ser compreendida. Os comprimentos de círculos deveriam ser calculados por medição direta e a comparação entre perímetros e áreas feita também numericamente. No Novo Programa de Matemática (Ponte e outros, 2008, p. 39) no 2º Ciclo os alunos devem ainda calcular áreas através da composição e decomposição de figuras e saber fazer estimativas de áreas por enquadramento. Neste artigo são comentadas algumas tarefas que poderão ajudar um professor a facilitar aos alunos a conexão entre a decomposição de áreas e o cálculo de áreas através de medidas lineares.

Áreas Pintadas

Utiliza os triângulos em cartolina para encontrar figuras com áreas pintadas iguais[1].

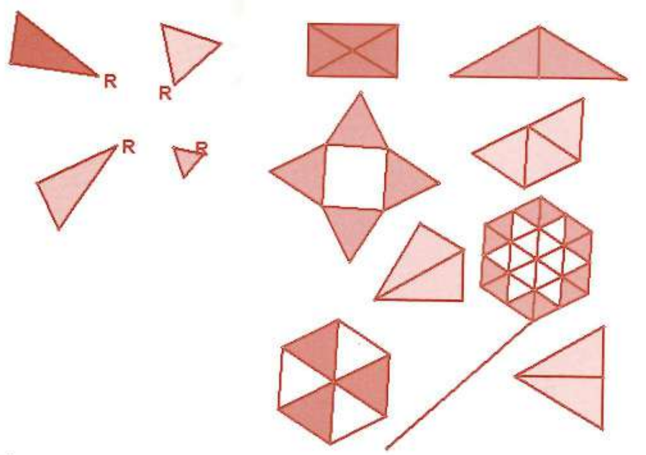


Figura 1

Áreas do Tangram

Abre o ficheiro Tangram e guarda-o com outro nome. Encontra relações de área entre as peças do tangram. Tens cópias de todas as peças que podes mudar de lugar e rodar para as fazer sobrepor.

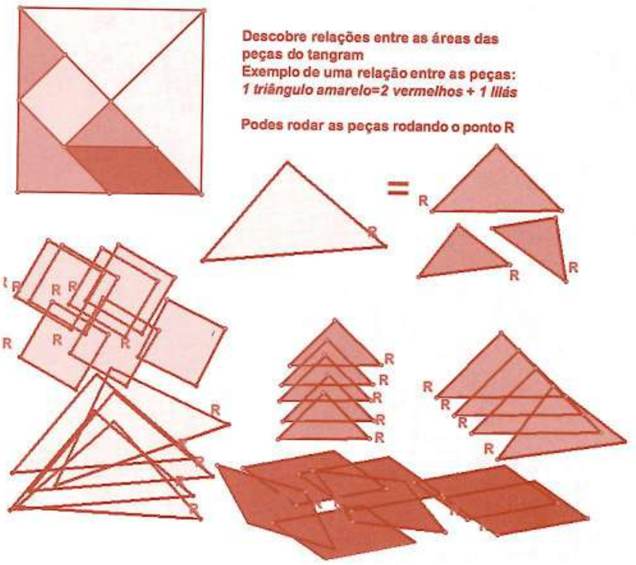


Figura 2

Decomposição de áreas com o GSP

Para a comparação de áreas através da equivalência de figuras a unidade de geometria do 5.° ano, se bem explorada, pode constituir uma ótima base para os alunos construírem a noção de figuras geométricas equivalentes e não equivalentes. Por bem explorada queremos dizer que as crianças tiveram oportunidades não só de fazer classificações mas também de trabalhar em tarefas que os levem a estudar a geometria de cada polígono. Pensamos ser evidente para o professor que as tarefas de comparação de áreas são precedidas por tarefas em que as crianças fazem pavimentações de espaços limitados com polígonos regulares e não regulares, resolvem puzzles geométricos, compõem figuras geométricas, por exemplo com o tangram, de forma a poderem ter experiência com espaços planos de área limitada que podem ser constituídos de várias maneiras. Com estas tarefas as crianças poderão desenvolver a experiência necessária para que o professor possa ensinar o tema da equivalência entre figuras geométricas necessárias ao cálculo de áreas por decomposição e por medição.

Mesmo nas situações em que as crianças tiveram experiência com transformações isométricas em tarefas de caráter experimental no 1.° Ciclo o que é intencionado no 2.° Ciclo é que as crianças formalizem progressivamente o que aprenderam e no caso presente utilizem o conhecimento informal sobre transformações para desenvolver a noção que duas figuras têm áreas iguais quando uma delas é cortada e as peças arranjadas coincidem, quando sobrepostas, com a outra figura. Este é o método subjacente ao cálculo de áreas que lhes é familiar no 1.° Ciclo em que espaços planos são subdivididos em quadrículas iguais para que a área possa ser calculada por contagem.

Consideramos assim que as tarefas de composição e decomposição são essenciais para conceber a decomposição de figuras geométricas como método para o cálculo de áreas. Estas tarefas podem ser tão simples como a apresentada na figura 1.

Ou, como a representada na figura 2 em que o objetivo é encontrar congruências entre figuras por decomposição para que possam as áreas ser comparadas.

O professor pode imprimir as diferentes figuras equivalentes que as crianças encontram e com as quais podem trabalhar em outras alturas para cálculo de áreas.

As tarefas que apresentamos de seguida foram desenhadas para as crianças aprenderem a medir área usando os conceitos geométricos de composição e decomposição de áreas e de figuras com áreas equivalentes. Estas tarefas poderão proporcionar às crianças a preparação necessária para aprender a utilizar ambos os métodos no cálculo de áreas e ficando fundamentado o cálculo da área de quadrados e retângulos através da multiplicação das medidas dos lados.

A construção do Aquário

Na aula de EVT do João, que anda no quarto ano, os alunos e as alunas desenharam um aquário para tartarugas que querem construir no pátio da escola. A turma decidiu que o chão do aquário teria a forma do polígono da Figura 3, tendo o polígono 1 m de lado. Além da forma do tanque, também decidiram que deveria ficar localizado num canto do pátio. Os azulejos com que podem pavimentar o chão do aquário são triangulares, com os lados todos iguais e medem 0,5 m de lado. A turma do João decidiu pedir ajuda aos alunos da escola do 2.° Ciclo para fazer o plano e descobrir quantas tartarugas poderiam ser compradas. Uma turma decidiu aceitar o desafio de

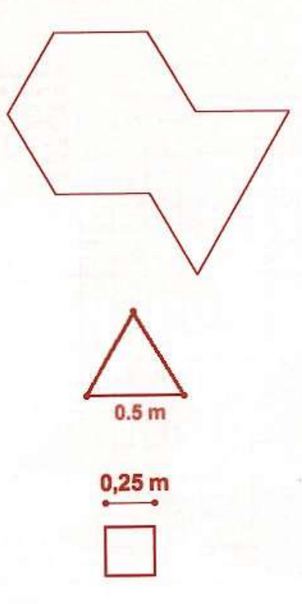


Figura 3

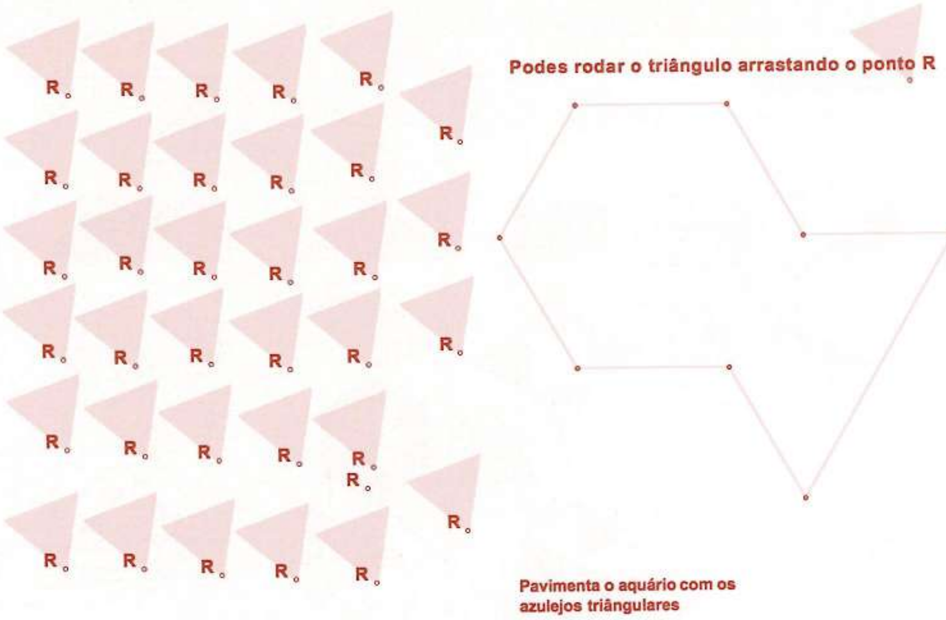


Figura 4

fazer o plano, ficaram contentíssimos e acharam que seria melhor o chão do aquário ser pavimentado com azulejos verdes da cor do mar, opinião com que a turma do João concordou. Vamos ajudá-los a fazer o plano e descobrir o número máximo de tartarugas para o tanque. Cada tartaruga precisa de um espaço de chão equivalente ao de um quadrado com 0,25 m de lado (figura 3).

1.1 *Abre o ficheiro Aquário e guarda-o com outro nome. Pavimenta o chão do aquário com triângulos* (figura 4).

1.2. *Quais são as medidas dos lados do chão do aquário?*

1.3. *O aquário vai ficar num canto de um espaço retangular do polivalente de medidas 9 m × 5 m. Com uma folha A3 desenhar o retângulo e colar a forma do chão do aquário num canto do retângulo. Cada metro vai ser representado por um segmento de 4 cm de comprimento. Não esquecer de anotar esta correspondência entre centímetros e metros num canto da folha.*

Esta última questão poderá ser resolvida em grupos grandes de cinco crianças, dependendo do número de alunos da turma. As primeiras duas tarefas poderão ser resolvidas em grupos de duas crianças no computador com o GSP para que se possam familiarizar com a forma do chão do aquário antes de avançarem para o trabalho de fazer o plano juntamente com o grupo maior.

1.4. *Abre o ficheiro Área e guarda-o com outro nome. Desenha um retângulo em que o chão do aquário cabe e que melhor aproxima a área ocupada pelo chão das tartarugas.*

Este ficheiro aparece às crianças na folha de desenho do GSP como na figura 5.

As crianças podem enquadrar o aquário desenhado com segmentos de reta para obterem uma primeira aproximação da área.

1.5. *Utiliza a quadrícula para calcular a área do retângulo. Será que podemos comprar tantas tartarugas quantas as quadrículas que compõe o retângulo? Porquê?*

1.6. *Quantas tartarugas cabem com certeza no chão do aquário? Porquê? Que espaço sobra? Desenha esse espaço usando segmentos de reta e guarda o ficheiro com outro nome.*

As crianças poderão desenhar as quadrículas ou outros retângulos e quadrados dentro da área do aquário para fazerem as aproximações contando o número total de todas as quadrículas. Alguma da área fica por aproximar e as crianças podem ser motivadas a aproximá-la porque mais tartarugas cabem no tanque se arranjarmos uma forma de reunir o espaço que sobra num espaço equivalente a uma quadrícula.

1.7. *Será que o espaço não ocupado pelas quadrículas pode ser também utilizado por tartarugas? Como podemos medir o espaço de área que sobra?*

Uma solução pode surgir com o refinamento da rede. Se as crianças refinarem a rede por elas mesmas demora muito tempo e dá trabalho desnecessário. Por isso sugerimos que será melhor o professor deslocar-se a cada uma das estações de computador, selecionar a rede e criar uma outra rede que vai dividir cada quadrícula em quatro quadrículas com aproximadamente 0,5 cm de lado.

As crianças podem então reorganizar cada quatro pequenos quadrados num só centímetro quadrado e decidir se será ou não boa ideia comprar mais tartarugas para o espaço que resta. A medição através da subdivisão fica fundamentada pois as crianças já trabalharam com áreas equivalentes e, a equivalência entre o quadrado maior e os quatro que o subdividem gerará

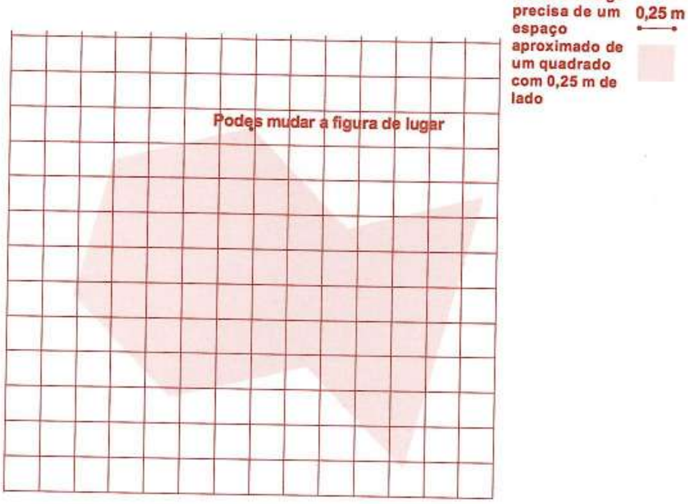


Figura 5

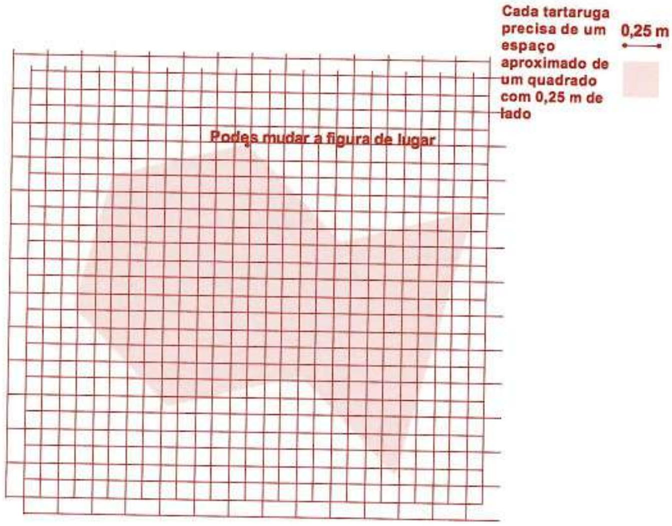


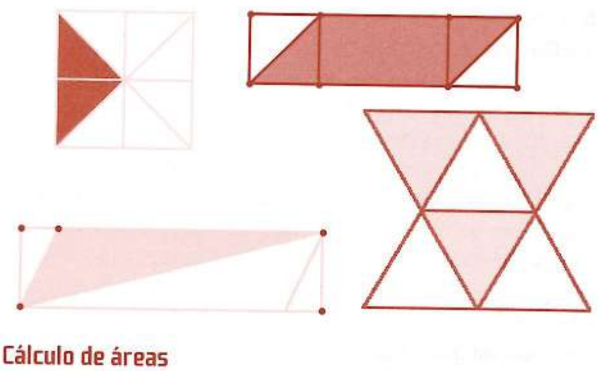
Figura 6

uma boa discussão. O desenho com a refinação da rede é o da figura 6.

Uma discussão para o nome das quadrículas quando têm 1 cm de lado pode ser levantada. Será uma boa discussão dado que as crianças mediram a área com quadrados que têm 1 cm de lado, além de ser interessante ver o que pensam sobre a unidade se chamar «centímetro quadrado». Na discussão final as crianças explicam todos os passos que levaram à solução do problema a que chegaram criando a oportunidade de comparar as áreas dos enquadramentos por excesso, defeito e refinamento.

Como resultado da resolução desta tarefa do cálculo da área do tanque, a questão da compreensão das fórmulas para o cálculo da área do quadrado ou retângulo pode ser abordada pelo professor perguntando aos alunos para explicarem as fórmulas bem como a relação entre centímetro quadrado e *cm × cm*. Mais ainda, pode ser desenvolvido em outras aulas um trabalho em que os alunos fazem uma pesquisa na Internet sobre a história do sistema métrico. Como se formou, como surgiram os comprimentos que deram origem às medidas métricas, tanto as que conhecemos como, e por curiosidade, as que são muito pequenas ou muito grandes e que surgiram de necessidades práticas e científicas. Acabamos com uma tarefa que reúne todos os conceitos e que resume o que se espera dos alunos em relação ao cálculo de áreas utilizando a decomposição e composição de figuras (figura 7).

É de notar que agora a decomposição é posta ao uso de um objetivo: formar o quadrado ou mais geralmente o retângulo, figuras para as quais é simples calcular a área através de dimensões lineares. Não é aconselhável nesta altura que materiais manipuláveis sejam disponibilizados aos alunos pois espera-se que eles imaginem o retângulo ou o quadrado em que as áreas se compõem, procedendo depois à sua construção e verificação através da régua.



Cálculo de áreas

Consegues imaginar uma forma de decompor as áreas pintadas em retângulos ou quadrados? Calcula as áreas dos retângulos ou quadrados que formaste através das medidas dos lados. Usa uma régua para medir comprimentos.

Figura 7

Comentário Final

Esperamos ter proporcionado uma ideia concreta sobre a questão de um ensino de área que fundamenta o cálculo das áreas através de medidas lineares. Este é um exemplo também em que o uso do software acelera passos logísticos de sala de aula evitando as demoras que se vislumbram com algumas das tarefas. Com a utilização de régua e compasso as tarefas tornam-se demoradas, provocam dispersão e são difíceis de difundir para todos os alunos da turma na sala de aula. O software poderá permitir que os alunos se concentrem na matemática da situação embora tal esteja ainda aberto a investigação, especialmente quando a implementação engloba ambientes de sala de aula.

Um outro aspeto que merece atenção é a arbitrariedade que a quadrícula do geoplano não metrizado pode causar quando se pretende que a decomposição de áreas tenha significado na aprendizagem da medição de áreas. Contar quadrículas no 1.° Ciclo para calcular áreas e decompor áreas no 5.° ano poderão não garantir que os alunos entendam a relação entre essas duas atividades e o conceito de medição de áreas. Que os alunos têm dificuldades em relacionar comprimentos geométricos com as unidades necessárias para os medir tem sido documentado amplamente, bem como foi já constatada a incompreensão das fórmulas para a medição de áreas a partir de medidas lineares (ver síntese em Owens and Outhred, 2006). É uma questão de investigação se tarefas como as acima propostas resolvem este problema e o que mais pode ser feito para que a compreensão da medição e cálculo de áreas seja conseguida por todos os alunos. Com este artigo esperámos motivar estudos que discutam melhor o tema com dados empíricos para informar futuras decisões curriculares.

Em todo o artigo foi utilizada a forma masculina para referir ambos os géneros. A autora agradece a todos os formandos e formandas e seus alunos e alunas que trabalharam com a autora durante todo aquele ano fazendo comentários pertinentes às propostas da formadora, confrontando a formadora com diversos problemas de situações de ensino e aprendizagem durante as sessões de formação em sala, e em sala de aula, que inspiraram a construção deste artigo.

Nota

[1] Os puzzles da Figura 1 podem ser impressos; se esta tarefa for desenhada com o GSP, triângulos podem ficar disponíveis na folha de desenho e podem ser reproduzidos com os comandos copiar e colar.

Referências

DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Antunes & Amílcar, Lda.

DEB. (2004). *Organização Curricular e Programas/Ensino Básico — 1.° Ciclo*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.

DGEB. (1991). *Programa de Matemática 2.° Ciclo do Ensino Básico: plano de organização do ensino e aprendizagem*. (Vol. II). Lisboa: Departamento da Educação Básica.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook on research on the psychology of mathematics education* (pp. 83–115). Rotterdam: Sense Publishers.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira , P. A. (2008). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. ME — Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Available: http://www.portugal.gov.pt/Portal/PT/Governos/Governos_Constitucionais/GC17/Ministerios/ME/Comunicacao/Outros_Documentos/20080104_ME_Doc_Programa_Matematica_Basico.htm [2008, 26 de fevereiro].

Serrazina, L., Canavarro, A., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Gouveia, M. J. (2006). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 2.° Ciclo*. Available: www.min-edu.pt/np3content/?newsId=307&fileName=programa_mat_2ciclo.pdf [2007, 30 de dezembro].

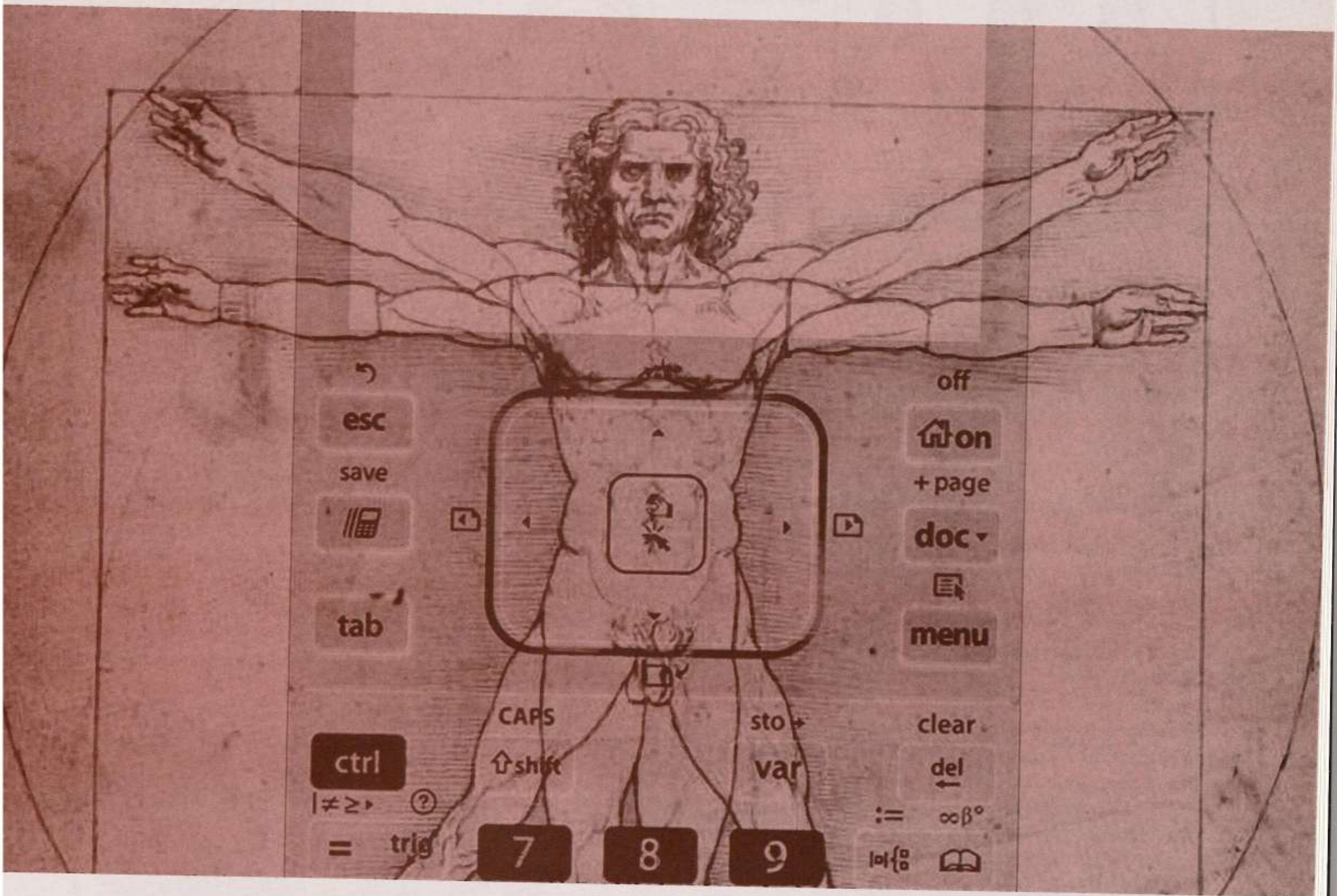
Eduarda Moura

ICME-12

De 8 a 15 de Julho realiza-se em COEX, na Coreia do Sul, o 12th *International Congress on Mathematical Education* (ICME-12). O prazo normal de inscrição é até 1 de Junho. http://www.icme12.org/default.asp

Dando asas à criativivade com a Ti-Nspire

Ricardo Cunha Teixeira



O aparecimento da tecnologia TI-Nspire veio alargar significativamente o leque de tarefas que podem ser propostas aos alunos e que permitem exemplificar não só a conexão entre as diferentes formas de representação dos conceitos (numérica, geométrica e algébrica), como também a conexão entre a Matemática e a realidade que nos rodeia.

O conceito de conexão matemática é abrangente e pode ser perspetivado e explorado de variadas formas. As pontes entre diferentes temas matemáticos, a ligação da Matemática com a vida do dia a dia e a sua relação com outras áreas do saber são exemplo disso. O sentido que damos a uma ideia matemática depende das conexões que estabelecemos entre essa ideia e outras ideias matemáticas que possuímos.

É fundamental que os alunos não vejam a Matemática como uma fonte inesgotável e entediante de fórmulas e cálculos, mas compreendam, ao longo do seu percurso escolar, o papel que esta desempenha na vida do dia a dia e a sua importância na cultura e na sociedade. De acordo com o novo *Programa de Matemática do Ensino Básico*, uma das finalidades do ensino da Matemática passa pelo desenvolvimento de atitudes positivas face a esta disciplina. Neste seguimento, a capacidade de apreciar aspetos estéticos da Matemática, o desenvolvimento do espírito crítico e a criatividade são competências que não devem ser desprezadas. Na mesma linha de pensamento, o *Programa de Matemática A*, referente ao 10.° ano de escolaridade, aponta o desenvolvimento da capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real como uma das finalidades da disciplina no Ensino Secundário. Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade é outro aspeto valorizado no programa.

Por outro lado, as recomendações curriculares apontam, cada vez mais, para a importância da utilização das novas tecnologias na sala de aula. Os computadores e as calculadoras permitem visualizar e manipular objetos matemáticos de uma forma diferente daquela que é feita com papel e lápis. Criar múltiplas representações matemáticas que se podem relacionar de forma dinâmica aumenta substancialmente a possibilidade de compreensão de conceitos abstratos.

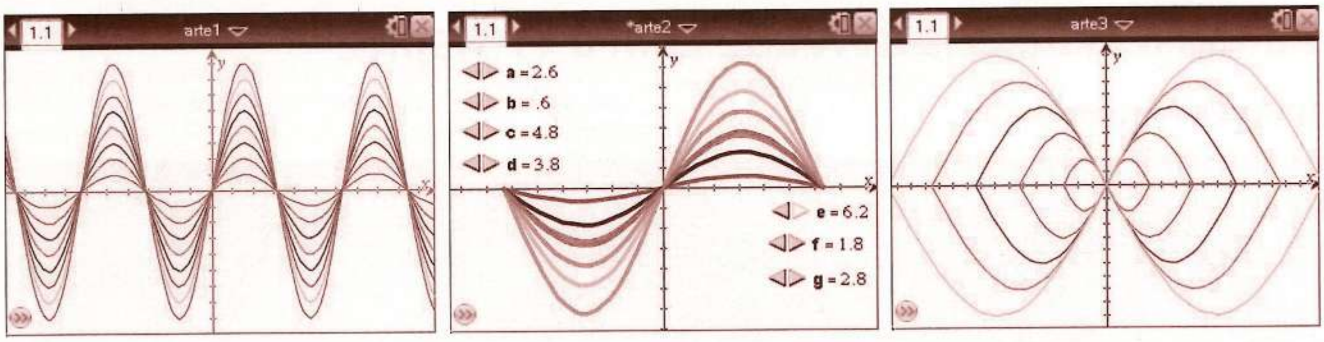


Figura 1

Se o uso da calculadora nos primeiros anos do Ensino Básico é controverso e carece de consenso por parte da comunidade educativa, o mesmo não se passa quando centramos a nossa atenção no 3.º Ciclo do Ensino Básico e, em particular, no Ensino Secundário. A calculadora gráfica pode, de facto, constituir um poderoso instrumento quer para o professor que ensina Matemática, quer para os alunos, levando-os a *aprender* e a *fazer* Matemática.

Uma nova ferramenta para a sala de aula

A tecnologia TI-Nspire, lançada em Portugal em setembro de 2007, veio revolucionar o universo das calculadoras gráficas conhecido até então. Por intermédio das suas 7 aplicações interativas (*Calculadora, Gráficos, Geometria, Listas e Folha de Cálculo, Dados e Estatística, Notas* e *Vernier DataQuest*), a TI-Nspire oferece a possibilidade de se explorarem muitos dos conceitos matemáticos do Ensino Básico e do Secundário de uma forma interativa. A realização de atividades com a TI-Nspire constitui uma excelente oportunidade para exemplificar a conexão entre diferentes formas de representação dos conceitos (numérica, geométrica e algébrica) e entre temas matemáticos e não matemáticos.

Um estudo com a duração de cerca de um ano, realizado por Clark-Wilson (2008), introduziu a tecnologia TI-Nspire em sete escolas secundárias britânicas. Os professores avaliaram a utilização desta tecnologia nas suas aulas de uma forma muito positiva, nomeadamente na melhoria dos resultados de aprendizagem dos alunos e num aumento da motivação e interesse destes pela própria disciplina.

A unidade portátil TI-Nspire, e o respetivo software para computador, vieram, desta forma, aumentar significativamente o leque de problemas que podem ser propostos aos alunos e que os levam a elaborar conjeturas, a testá-las e, quando necessário, a reformulá-las.

Arte com a TI-Nspire

O professor tem a oportunidade de explorar, em ambiente de sala de aula, as diferentes potencialidades da tecnologia TI-Nspire na construção de tarefas diversificadas, estabelecendo as mais variadas conexões. Neste campo, salientam-se os trabalhos de Viana (2010) e Kelly (2011).

Para além de atividades claramente estruturadas e direcionadas, também é interessante apresentar aos alunos atividades que permitam uma maior liberdade de exploração. São exemplo disso as tarefas que se seguem, desenvolvidas no âmbito da 1.ª Edição do Mestrado em Matemática para Professores, da responsabilidade do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, que decorreu no primeiro semestre de 2011. Foi utilizado o Sistema Operativo 3.0.2 da TI-Nspire.

Famílias de funções

A representação gráfica de algumas famílias de funções pode revelar-se muito mais fecunda do que à primeira vista possa parecer. As funcionalidades de animação da TI-Nspire e a possibilidade recente de se utilizar a cor dão um contributo significativo à criação de verdadeiros «momentos de beleza». Muitas destas atividades constituem uma boa oportunidade para analisar a influência que um parâmetro pode ter no comportamento do gráfico de uma função. As imagens da figura 1 ilustram alguns exemplos.

Utilizaram-se as famílias de funções

$$k\sin(x) \text{ e } \pm k\sin\left(\frac{1}{k}x\right).$$

Partindo das equações diferenciais

$$y' = \frac{x^2}{y^2},\ y' = -2xy \text{ e } y' = -2xy + 2xe^{-x^2},$$

obtiveram-se como soluções as famílias $\sqrt[3]{x^3+k}$, ke^{-x^2} e $(x^2+k)e^{-x^2}$, respetivamente (figura 2).

Tirou-se também partido da possibilidade de se definir na TI-Nspire uma região do plano a partir de equações paramétricas, no caso concreto, $x = k\cos^3 t$ e $y = k\sin^3 t$ (figura 3).

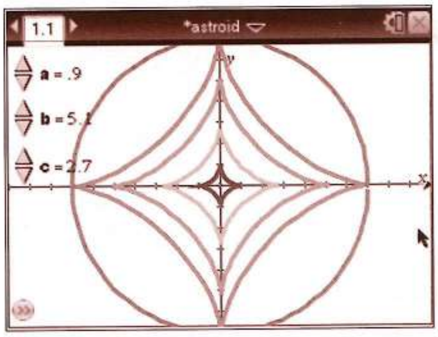


Figura 3

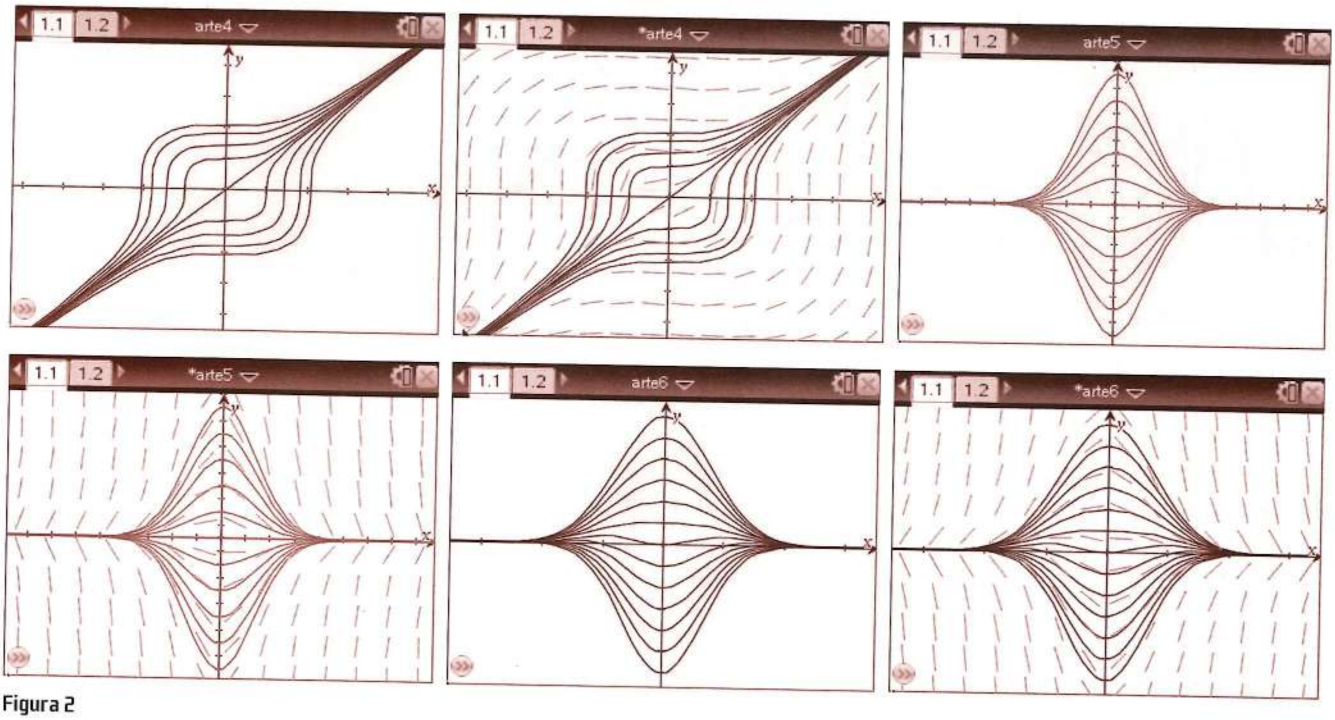


Figura 2

O homem de Vitrúvio

Recorrendo à aplicação Geometria e a uma imagem do *Homem de Vitrúvio*, é possível encontrar padrões numéricos interessantes (figura 4). Por exemplo, pode-se constatar que o quociente entre a altura do *Homem de Vitrúvio* e a distância do seu umbigo ao chão é um valor próximo do famoso número de ouro (aproximadamente 1,618). No seguimento desta atividade e com a ajuda de uma fita métrica e da aplicação Listas e Folha de Cálculo, pode-se propor à turma a realização de um concurso para determinar quem, de entre os alunos, é o «mais belo», de acordo com a medição efetuada no desenho de Da Vinci.

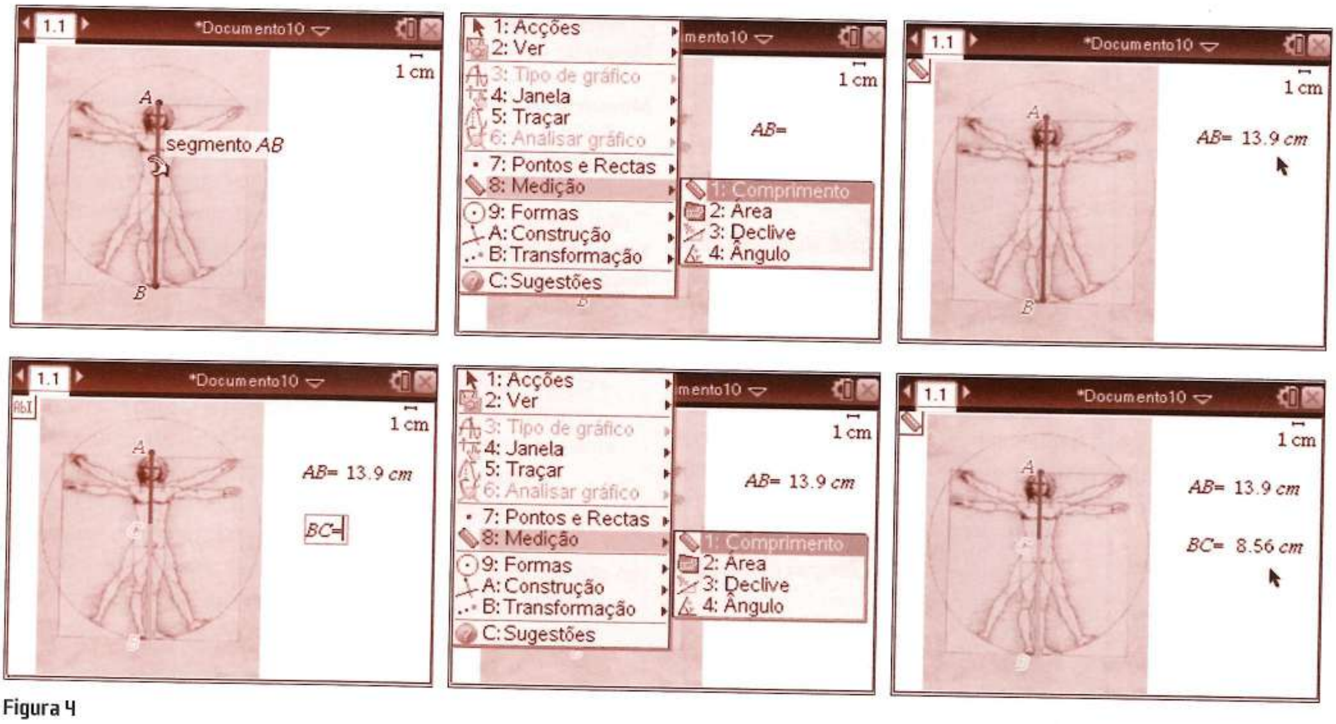


Figura 4

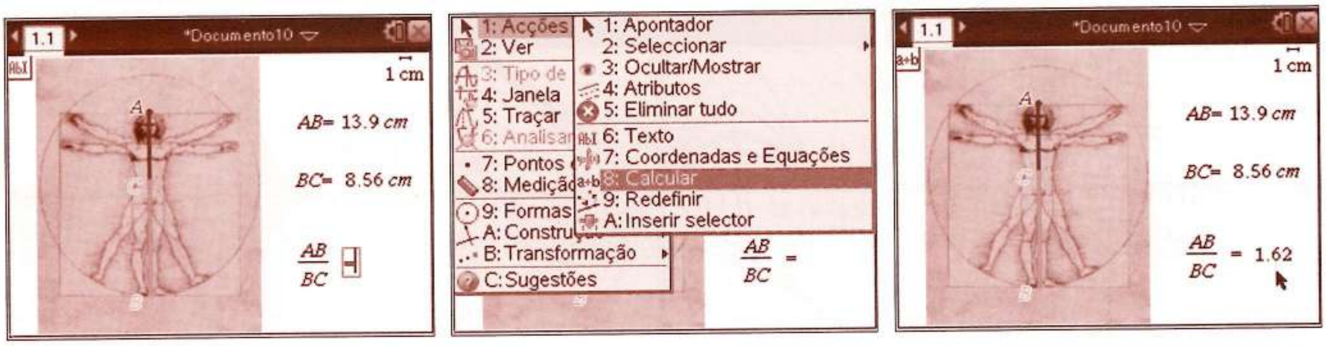


Figura 4 (cont.)

Desenho livre

Muitas atividades podem ser desenvolvidas tirando proveito das funcionalidades da aplicação Geometria da TI-Nspire e vários conceitos geométricos podem ser explorados. Apresenta-se, como exemplo, um moinho de vento (figura 5).

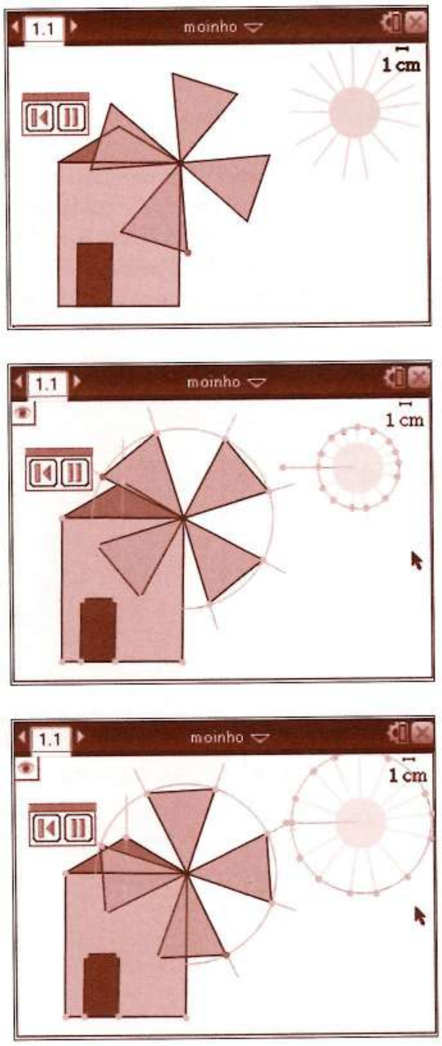


Figura 5

Observações finais

As tarefas apresentadas foram bem acolhidas junto dos alunos do Mestrado, todos eles professores de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário.

As tarefas mais interessantes e profícuas são aquelas que, sem desvalorizarem as potencialidades permitidas pela tecnologia, conduzem o aluno para além de simples atos mecanizados. Ou seja, atividades que promovem um pensamento construtivo e criativo que é, no fundo, o autêntico fazer matemático.

Agradecimentos

Um agradecimento especial a Vera Moniz, aluna do Mestrado em Matemática para Professores da Universidade dos Açores, pelo seu contributo na construção do moinho de vento.

Referências Bibliográficas

Clark-Wilson, A. (2008). *Evaluating TI-Nspire in secondary mathematics classrooms*. Chichester: University of Chichester.

Kelly, B. (2011). *Algebra with TI-Nspire — Semesters 1 and 2*. Ontario: Brendan Kelly Publishing.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A — 10.º ano*. Lisboa: ME-DES.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Viana, J. P. (2010). Investigações matemáticas com a TI-Nspire. *Educação e Matemática*, 108, 23–28.

Ricardo Cunha Teixeira

Departamento de Matemática da Universidade dos Açores

Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação

Um retângulo e mais outro

Numa aula, a Catarina desenhou um retângulo ABCD, traçou a diagonal BD e, a partir dela, construiu um novo retângulo BDEF, de tal modo que o ponto C passou a pertencer ao lado EF.

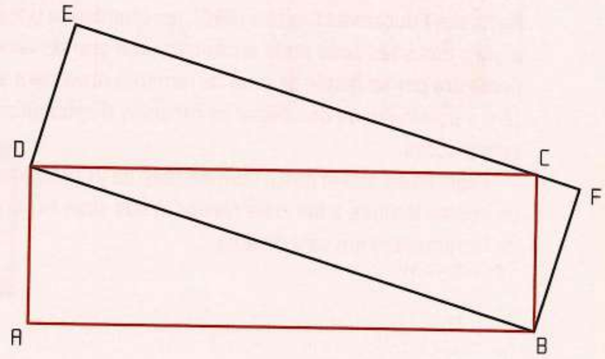
As opiniões da turma dividiram-se quando os presentes começaram a pensar nas áreas respetivas.

– O segundo retângulo tem maior área que o primeiro – disse o Francisco.

– Não, o primeiro é maior – contrapôs o João.

– Nada disso – sentenciou a Patrícia. – Ambos têm a mesma área.

– Tudo depende do retângulo inicial – discordou a Lena. – Nuns casos é ele o maior, noutros é o segundo.



Quem tem razão?

(Respostas até 12 de Junho para zepaulo46@gmail.com)

Na sala de aula

O problema proposto no número 115 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Disse o professor para os alunos:

– Imaginem que escrevíamos todos os números de 1 a 10000 encostados uns aos outros de modo a formar um número enorme: 12345678910111213141 5...9998999910000. Qual é a soma de todos os algarismos deste «supernúmero»?

Não foi preciso nem um minuto para que o menino Frederico G. Auss respondesse corretamente.

Como terá ele conseguido?

Recebemos 9 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Edgar Martins (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), João Oliveira (Cartaxo), João Pineda & Ema Modesto (Aveiro), João Sá (Lisboa), Jorge Filipe, e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Praticamente todos os leitores começaram por admitir que o problema não se altera se admitirmos que os números são todos escritos com quatro algarismos. Por exemplo, o 5 seria 0005, o 48 viria 0048, etc. Seriam então os números de 0000 até 9999. Depois, para chegar à solução, ou imaginaram estes números escritos uns debaixo dos outros ou raciocinaram simplesmente sobre a quantidade de vezes que cada algarismo aparece.

Desta forma, há 40000 algarismos e *como todos eles aparecem o mesmo número de vezes (parafraseando e contradizendo Orwell, todos os algarismos são «iguais» e não há uns mais «iguais» que outros), existirão 4000 zeros, 4000 uns, 4000 dois, ... , 4000 noves* (Alberto Canelas). A sua soma será:

$$4000 \times 1 + 4000 \times 2 + \ldots 4000 \times 9 =$$
$$4000 \times (1 + 2 + \ldots + 9) = 4000 \times 45 = 180\,000$$

Falta apenas acrescentar o 1 de 10000 e o resultado final é 180 001.

O Alberto apresenta ainda um curioso raciocínio que permite uma rápida resposta:

Cada algarismo «vale» em média 4,5 (media aritmética entre 0 e 9) e portanto os 40000 algarismos somam 40000 × 4,5 = 180000, a que se somaria depois o 1 do 10000.

Pedrosa Santos propõe uma pergunta adicional ao problema: *Quantos algarismos tem o «supernúmero»?*

A resposta não é tão imediata como pode parecer à primeira vista...

Finalmente, o Edgar diz:

O menino Frederico conseguiu responder rapidamente porque somas é coisa que a família G.Auss faz muito facilmente, desde os tempos do seu tio avô Carl.

Um pedido de desculpas – Por motivos que o autor desta secção não consegue explicar, as resoluções dos nossos leitores Álvaro Anjo, Ana Maciel, Catarina Ferreira, Ema Modesto & João Fernandes, Francisca Canais, Francisco Branco, Francisco Estorninho, João Barata, Helena Rocha e Patrícia Sampaio referentes ao problema «Um número de restos» extraviaram-se e não foram consideradas no momento próprio. O nosso obrigado por terem respondido, as nossas maiores desculpas e os desejos de que não desistam e continuem a responder aos problemas da *Educação e Matemática*.

(Resposta à pergunta adicional: 38894.)

Caros leitores,

Tal como referimos na nota inicial publicada nesta secção, na Revista 116, voltamos a abordar o tema dos Recursos Educativos Digitais (RED), aprofundando um pouco mais a nomenclatura utilizada e divulgando alguns dos sites onde pode encontrar uma grande variedade desses recursos. É dado algum destaque ao GeoGebra por se tratar de uma ferramenta nova para a produção e divulgação destes recursos, onde todos têm a possibilidade de utilizar os recursos disponibilizados e ao mesmo tempo partilhar as suas próprias construções.

Esperamos assim que a comunidade de utilizadores destes recursos continue a crescer e desafiamos os nossos leitores a dar-nos *feedback* das suas experiências de ensino baseadas na utilização deste tipo de ferramentas em sala de aula.

RED e Applets... partilha e apropriação dos recursos

Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro

A definição de Recursos Educativos Digitais (RED) é ainda uma matéria em aberto, devido à dificuldade existente em delinear a fronteira que separa um RED de um qualquer conteúdo potencialmente em formato electrónico. Uma sistematização deste conceito pode assentar no entendimento de RED, no contexto educativo português, como um produto de *software* ou um documento (ou coleção de documentos) que:

i) Contém, intrinsecamente, finalidades educativas;
ii) Enquadra-se nas necessidades do sistema educativo;
iii) Tem identidade e autonomia relativamente a outros objetos;
iv) Satisfaz padrões de qualidade previamente definidos (Ramos *et al.*, 2005, p.80)

Neste contexto as *applets* poderão ser (pelo menos grande parte das existentes) encaradas como RED.

O termo «Applet» tem uma origem específica numa linguagem de programação do sistema operativo dos computadores *Apple* e terá sido «cunhado» em 1990. Ultrapassando questões técnicas da definição de applet, e do seu funcionamento, as referências a este tipo de recursos e às suas potencialidades em contexto educativo, nomeadamente no contexto do Ensino da Matemática, têm sido cada vez mais frequentes.

Em português o termo tem sido alvo de várias tentativas de tradução, «animações» e mais recentemente «apliquetas» têm sido termos para significar o mesmo conceito. Mesmo sem um termo consensual ou uma definição livre de ambiguidades e sem fronteiras claras, as *applets* são referidas nos programas oficiais — do Ensino Básico e do Ensino Secundário — e têm sido amplamente divulgadas em conferências, publicações e programas de formação de professores.

A possibilidade de utilização das *applets* sem ligação à Internet é uma questão de abordagem difícil, por não existir uma regra de validade absoluta e ainda por depender da literacia tecnológica do professor. Nem sequer é completamente verdadeira a ideia de que as *applets* estão sempre alojadas na Internet, havendo cada vez mais professores a criar *applets* que utilizam a partir dos próprios computadores. Ainda assim, o conceito mais comum de *applet* assenta num formato de aplicações que desde há muito estão disponíveis na Internet em algumas páginas e portais criados para o efeito.

Algumas entidades investiram na criação de bancos de *applets* que contemplam de forma bastante abrangente várias temáticas do ensino e da aprendizagem da Matemática, com abordagens que pretendem dar respostas às mais diferentes conceções, permitindo a utilização por parte de professores e alunos, com a garantia de padrões de qualidade e identidade própria. Destacamos alguns destes bancos de *applets*:

- NCTM: http://illuminations.nctm.org/ActivitySearch.aspx
- Instituto Freudenthal: http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en/welcome.xml
- Math Open Reference: http://www.mathopenref.com/
- Shodor: http://www.shodor.org/interactivate/activities/
- Atractor: http://www.atractor.pt/destaque/fr-destaque.htm
- IES: http://www.ies.co.jp/math/java/

O Portal das Escolas (http://www.portaldasescolas.pt/), entre os vários objetivos que nortearam a sua criação, previa a disponibilização de uma área de trabalho com acesso a milhares

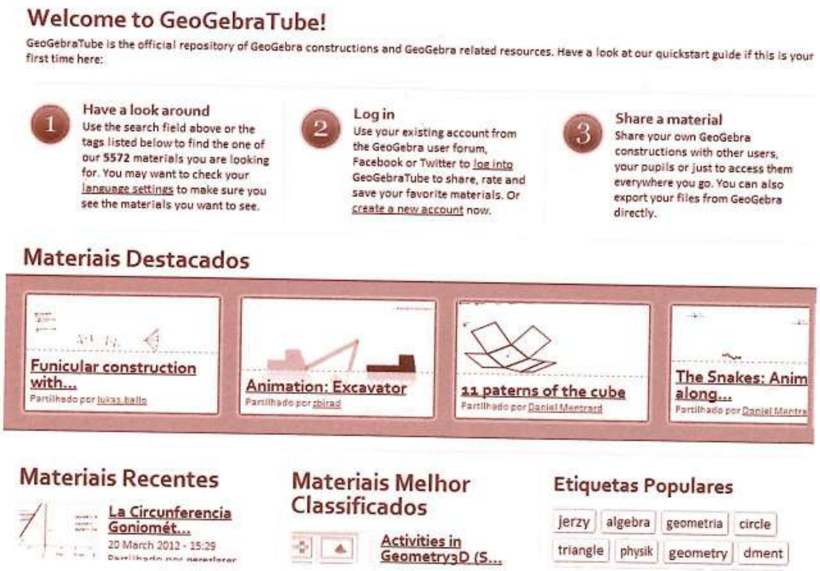


Figura 1

de recursos educativos digitais de qualidade. Apesar de a génese da sua criação prever uma monitorização da entrada de recursos no repositório, por forma a garantir a sua qualidade tendo em vista a sua posterior utilização em contextos educativos, a realidade mostra-nos, até agora, um repositório com uma panóplia de ficheiros em variados formatos, não sendo garantida a sua qualidade. A falta de seriação dos recursos disponibilizados requerer, aqui, como em outras plataformas semelhantes, um trabalho apurado de análise e seleção crítica dos conteúdos aí alojados por não existirem garantias de relevância educativa para a generalidade dos recursos.

Recentemente a equipa do GeoGebra criou também um repositório de *applets* mas com uma lógica de funcionamento assente no mesmo conceito «Web 2.0», em que as applets são partilhadas pelos utilizadores do programa. O GeoGebraTube (http://www.geogebratube.org/) funciona como o popular sítio de partilha de vídeos, mas os conteúdos partilhados são construções feitas no GeoGebra. O sucesso de um banco de dados desta natureza depende não só da partilha de recursos bem estruturados, mas também da participação de quem visualiza – classificando os recursos – para permitir uma «validação» dos mesmos pela comunidade de utilizadores.

Apresentamos na figura 1 a página de entrada deste repositório onde podemos aceder às construções partilhadas pelos utilizadores do GeoGebra. Naturalmente uma grande parte não terá interesse para uma utilização nas nossas aulas, mas as melhores construções – ou *applets* – estão acessíveis e podem ser utilizadas e recomendadas. Uma utilização mais avançada permite organizar as nossas consultas em coleções para um acesso mais facilitado em visitas futuras. Este portal constitui-se como uma forma muito eficaz para alojarmos as nossas próprias construções «online», permitindo que outros tirem delas o melhor partido ou facilitando a partilha de ficheiros como os alunos (a exportação para o GeoGebraTube pode ser feita directamente do programa, no menu «Ficheiro», na opção «Partilhar»).

O uso de um recurso começa com a seleção de processos e de recursos apropriados, para além dos materiais complementares e dos métodos e estratégias de implementação. O trabalho de sala de aula sustentado na manipulação de *applets* não foge a este princípio, podendo ser desenvolvido de variadas formas. Se o professor assumir a manipulação da *applet* enquanto discute com os alunos, poderá assumir também a explicação do funcionamento da animação e o propósito da actividade. Se a opção for no sentido de deixar os alunos assumirem um papel ativo na manipulação da *applet*, da identificação de relações ou padrões, da sua explicitação e explicação, então a forma mais recorrente tem passado pela criação de guiões orientadores para acompanhar a realização da tarefa pelos alunos. Nesta situação o investimento do professor implicará três fases significativamente distintas mas fortemente interligadas: a seleção e a apropriação da *applet* que permitirá aos alunos atingirem um determinado objetivo, a elaboração da tarefa ou problema e a construção do guião de exploração.

O trabalho colaborativo entre professores pode contribuir para a simplificação deste processo, e a facilidade de partilha deste tipo de recursos – guiões de exploração – na Internet tem potencialidades ainda pouco exploradas, talvez por (falta de) iniciativa dos agentes educativos, professores, instituições, editoras, etc. Alguns dos bancos de *applets* acima indicados têm indicações para o professor sobre o funcionamento da *applet* que são uma boa ajuda para a criação deste tipo de guiões, mas a sua utilização continua a pressupor um trabalho preparatório do professor para permitir rentabilizar convenientemente este tipo de recursos.

São conhecidos alguns esforços no sentido criar e partilhar recursos e experiências deste tipo:

- Na plataforma moodle do Centro de Competência da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa esteve disponível um conjunto de *applets* catalogadas com indicações para a sua utilização em sala de aula.
- Na página do Centro de Competência TIC da Universidade de Évora, estão disponíveis as catalogações de *applets* da responsabilidade dos formandos dos cursos «Tecnologias na Aprendizagem da Matemática» realizados no Alentejo.

Um apontamento final sobre os Quadros Interativos Multimédia (QIM). Muito se tem falado sobre as potencialidades do software de suporte aos QIM e a forma de rentabilizar o investimento significativo que foi feito. Uma alternativa ao investimento no *software* dos QIM, é a manipulação de *applets* que pode tirar um melhor partido deste tipo de tecnologia. Naturalmente a experimentação e a planificação não podem ser negligenciadas até porque muitas *applets* já existiam antes dos QIM e podem ter uma utilização difícil num quadro, por exemplo se a sua manipulação depender da utilização do teclado e não apenas do rato. Mas o recurso a um QIM para a exploração de uma *applet* pode constituir-se como uma mais-valia e depender de um investimento temporal e de formação reduzido.

Os RED, e mais especificamente as *applets*, permitem alargar o leque de abordagens e metodologias na aula de Matemática. Este tipo de materiais estabeleceram-se como recursos válidos para – em complementaridade com outras abordagens mais tradicionais – criar situações de aprendizagem mais ricas e com uma lógica de funcionamento mais familiar para a generalidade dos alunos.

Referências:

Ramos, J.L., Teodoro, V.D., Maio, V.M., Carvalho, J.M. e Ferreira, F.M. (2005) Modelos e práticas de avaliação de recursos educativos digitais. Cadernos SACAUSEF. N.º 2. Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

http://www.geogebratube.org/

Paulo Correia
Escola Secundária de Alcácer do Sal

Rui Gonçalo Espadeiro
Escola EB 2,3 e Secundária Dr. Hernâni Cidade

VII CIBEM

VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática
Realiza-se de 16 a 20 de Setembro 2013. Primeiro prazo de inscrição até 30 Abril 3013.
O prazo final para a submissão de trabalhos: 30 Abril 2013.
http://www.cibem7.semur.edu.uy/home.php?

APM – 2012

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa.
A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2012

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2012

		Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções