Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2012

116

Janeiro ∞ Fevereiro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Diretora	Isabel Rocha
Subdiretora	Manuela Pires
Redação	Adelina Precatado
	Ana Paula Canavarro
	Alice Carvalho
	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Helena Rocha
	Irene Segurado
	Júlia Perdigão
	Lina Brunheira
	Nuno Candeias
	Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
Cristina Loureiro Caderno de Apontamentos de Geometria
Grupo de Trabalho de Investigação da APM Espaço GTI
José Paulo Viana O problema deste número

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Fevereiro 2012
Tiragem 2100 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Agradecimento

A redação da revista *Educação e Matemática* agradece a colaboração que ao longo dos anos foi prestada por Augusto José Franco de Oliveira, Maria José Costa, Maria de Lurdes Serrazina e Rui Canário no âmbito da Matemática, da História e Ensino da Matemática, da Matemática nos Primeiros Anos e da Educação e que muito contribuiu para a qualidade da nossa revista.

Apesar de na ficha técnica, no que aos colaboradores permanentes diz respeito, passarem apenas a constar os nomes dos responsáveis por secções permanentes, continuamos a contar com o inigualável contributo que sempre deram à Educação e Matemática.

Sobre a capa

A Aula da Esfera decorreu ininterruptamente no Colégio de Santo Antão, entre 1590 e 1759. Nela se ensinaram Matemática e Astronomia. O colégio — um colégio jesuíta — esteve inicialmente sediado na Mouraria, no antigo mosteiro de Santo Antão, mas mudou-se para o edifício que é atualmente o do Hospital de S. José em 1553. A capa deste número reproduz um painel de azulejos com temas matemáticos e cosmográficos que se pode encontrar na sala onde terá decorrido a Aula da Esfera.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Alexandra Rocha, Ana Caseiro, Ana Maria Severiano de Paiva, C. Miguel Ribeiro, Cecília Costa, Cristina Natália da Fonseca, Fernando Nunes, Helena de Fátima Sousa Melo, Hélia Jacinto, Isabel Oitavem, Ilydio Pereira de Sá, José Carlos Pinto Leivas, José Luiz Pastore Mello, Mª Manuel da Silva Nascimento, Paula Catarino, Paulo Correia, Rui Feiteira, Rui Gonçalo Espadeiro.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

A mudança que abala o mundo

Não se trata de iPods, nem da invenção da roda, mas da invenção da escrita. Que coisa mais antiga, de que abalo se fala então? Fala-se do milagre de todos os dias, da representação de desejos, pensamentos, da nossa imaginação, da ordem que se deixa escrita, de uma qualquer instrução, fala-se também desta revista, a *Educação e Matemática*, e da adoção das novas regras de ortografia.

Afinal já não são nove os planetas do sistema solar! E afinal já não se escreve como se escrevia! Vamos então dar o passo que se exigia e, neste novo ano, nesta primeira edição, adotar o tão falado novo acordo de ortografia.

São as mudanças da vida, que abalam o nosso mundo, derrubam as nossas certezas e nos levam a acreditar que nada é certo afinal. É o que nos diz o presente e nos confirma o passado. E se ao escrever matemática nos esquecemos do passado dos símbolos que tanto usamos, hoje vamos lembrar dois que não dispensamos: + (mais) e – (menos).

O símbolo de adição, +, nem sempre foi tão certinho. Em tempos que já lá vão escrevia-se bem mais tortinho +. Foi usado em matemática, mas também em texto corrido e parece que deriva do *et* manuscrito («e» em latim).

Em 1489 foi pela primeira vez impresso. «16 ellñ pro 9 fl $\frac{1}{3}$ vñ $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ eynss fl wy kūmē 36 ellñ» é a frase onde o símbolo aparece, Johann Widman o seu autor e *Behēde und hubsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft* o livro onde foi impresso. A tradução esclarece o que na frase está expresso: «16 varas [são compradas] por 9 florins [e] $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ dum florim, quanto é que custarão 36 varas?»

Na era da impressão, diferentes aspetos ele teve. Foi a cruz latina †, muitas vezes na horizontal ⊣ ou ⊢, usada por Mengoli, Huygens, Fermat, Rolle e L'Hospital. Foi ✠ usado por Descartes e Leibniz. Foi também +, a cruz grega, às vezes com o traço horizontal mais longo que o vertical.

Se quisermos falar do menos, –, é preciso ter cuidado. Chegar a um símbolo tão simples foi afinal complicado. Admire-se quem quiser mas, parece que na Índia, foi encontrada evidência que em tempos bem distantes o símbolo de menos foi +. Desde então até hoje há muito para contar, de duas ou três coisas aqui vamos falar.

O sinal – pode da escrita hierática derivar, ou estar ligado à atividade mercantil e ser apenas o traço para a tara do peso total separar. Curioso é que hoje o que de tara é chamado, em tempos, foi por *minus* designado. Sobre a origem do símbolo –, várias hipóteses se podem avançar, mas nada ao certo se pode afirmar.

No século XV muito usado, o traço teve comprimento variado. No livro de Widman, acima mencionado, o sinal – foi impresso. Porém, vários autores preferiram um sinal diverso. É que o traço –, de tão simples, tem muita utilização. Temeu-se que o seu uso causasse confusão. De entre os símbolos usados, ÷ foi dos mais adotados. Durante vários séculos par a par, – e ÷, sem nenhum um ao outro suplantar. Por fim – foi a opção, e afinal ÷ passou a ser divisão!

Depois de tanto andar para a notação unificar e termos apenas um símbolo para o menos representar, vamos parar e pensar quantos menos afinal nós costumamos utilizar. Há o menos de posição, que dá o sinal do número, há o menos de subtração, que nos diz a operação. Se o primeiro é unário, o segundo é binário. Fica então a pergunta, se ao escrever uma expressão todos sabemos afinal qual o símbolo em questão.

Depois de tanta unificação, será que todos sabemos o que andamos a escrever?

Não queremos terminar, sem a todos alertar. Quem na calculadora pegar, dois símbolos de menos pode encontrar: o par (–) e — ou o par — e –. Do que estamos a falar? Da mudança que abala o mundo, que não para de mudar!

Isabel Oitavem
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Helena Rocha
Bolseira da FCT / MEC, UIDEF – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

ProfMat 2012

Encontro Nacional de Professores de Matemática

«Coimbra tem mais encanto com um ProfMat a abrilhantar»

O ProfMat2012 realiza-se na Escola Secundária com 2.º e 3.º Ciclos Quinta das Flores, em Coimbra, nos dias 4, 5 e 6 de Outubro. Este ano, à semelhança do anterior a estrutura do programa conta com uma parte comum com o XXIII SIEM e uma das novidades é que se integrou algumas horas dos Cursos do ProfMat.

Toda a informação detalhada encontra-se disponível em:

http://profmat2012siem.apm.pt

Pode contactar-nos através do correio electrónico:

profmat2012@apm.pt

XXIII SIEM

Seminário de Investigação em Educação Matemática

O XXIII SIEM — *Seminário de Investigação em Educação Matemática* realiza-se a 6 e 7 de Outubro, na Escola Secundária Quinta das Flores, em Coimbra. Este Seminário tem como objetivo criar um espaço de expressão da comunidade de investigação no campo da Educação Matemática, para divulgação, comunicação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados. Promove, ainda, a articulação entre a investigação nesta área e o ensino da Matemática. O Seminário terá três conferências plenárias, uma delas a cargo de um convidado estrangeiro, um painel temático, simpósios de comunicações e *posters*.

Prazos

Inscrição sem agravamento de preço: até 23 de Junho de 2012

Submissão de comunicação:

- Envio de texto até 16 de Maio de 2012, em formato Word, com o máximo de 25 000 carateres com espaços (ver *template* no *site* da APM)
- Resposta de aceitação até 18 de Junho de 2012

Submissão de poster:

- Envio de resumo alargado até 16 de Maio de 2012, texto Word com o máximo de 5000 carateres com espaços (ver *template* no *site* da APM)
- Resposta de aceitação até 18 de Junho de 2012

Contactos

XXIII SIEM — *Seminário de Investigação da Associação de Professores de Matemática*

E-mail: siemxxiii@apm.pt

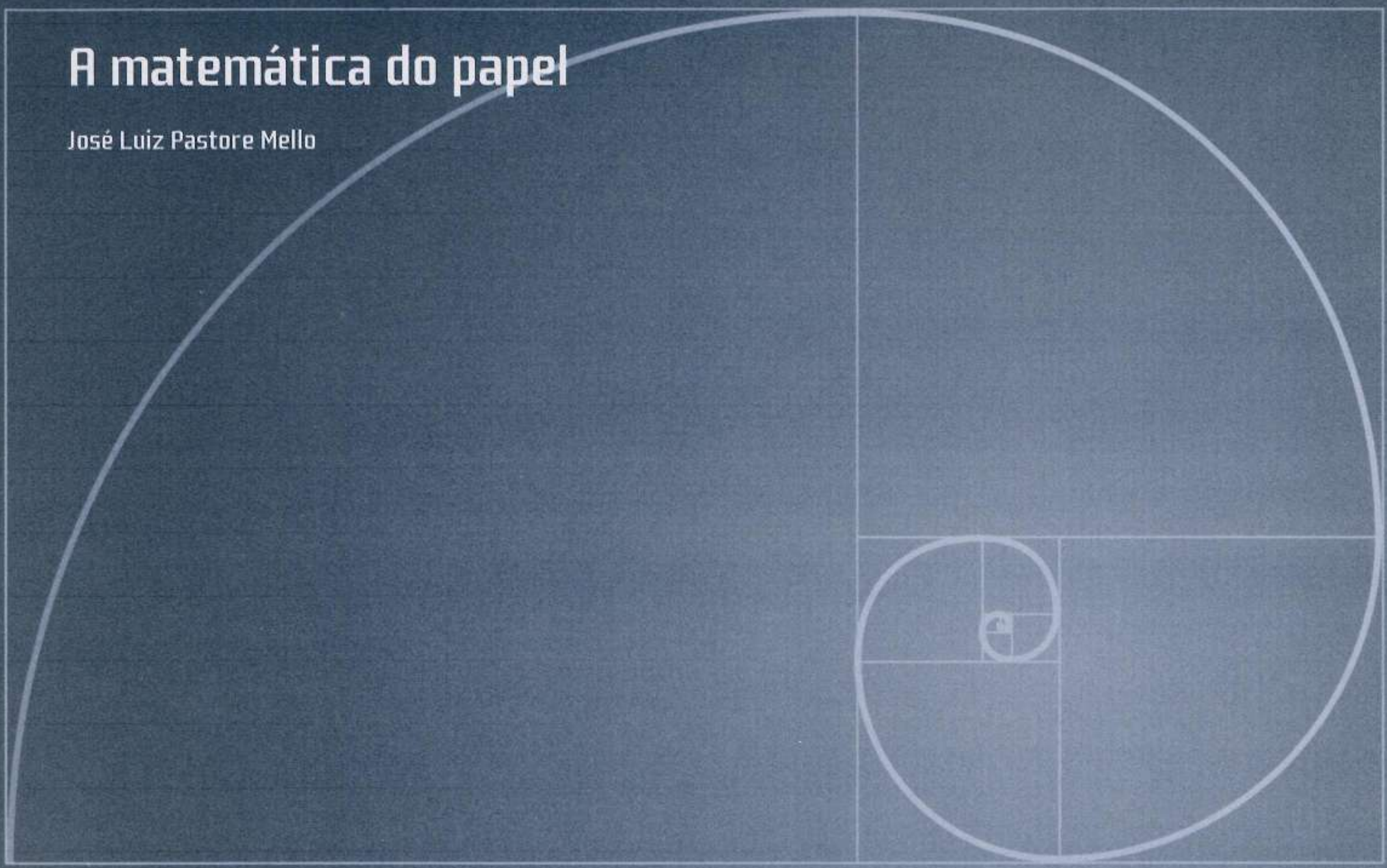
Mais informações disponíveis em

http://profmat2012siem.apm.pt

A Comissão Organizadora

A matemática do papel

José Luiz Pastore Mello



Introdução

O formato do papel que usamos rotineiramente nos serviços de impressão ou fotocópia possui uma história fascinante e repleta de matemática. Neste artigo, partilho algumas idéias que estão por trás dessa história, com o desejo que elas possam servir de material de apoio para aulas de matemática.

A folha de papel A4

O formato de papel mais usado para impressões e fotocópias, que recebe a denominação A4, tem 210 milímetros de altura por 297 milímetros de largura. Analisaremos, a seguir, de onde vem essas medidas. Antes de mais, importa clarificar que, neste artigo, as palavras largura e altura sempre serão usadas como referência ao maior e ao menor lado de um retângulo, respetivamente.

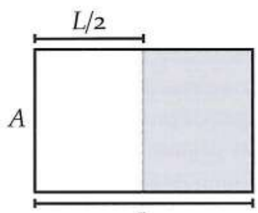
Imagine-se tendo que resolver o problema seguinte: qual deve ser a largura e a altura de uma folha retangular de modo que quando ela for dividida ao meio, os dois novos retângulos mantenham proporção entre altura e largura da folha original?

O problema é de solução simples, como se vê na figura 1.

Portanto, a folha retangular com razão L/A igual a $\sqrt{2}$ é a única que, quando dividida ao meio, conforme processo descrito, resultará em retângulos semelhantes ao da folha original.

Lembro que de forma diferente dos triângulos, onde bastam ângulos congruentes para que sejam figuras semelhantes, no caso dos quadriláteros a semelhança só se garante se os ângulos forem congruentes e se razão entre os lados das figuras for preservada. No caso das medidas de uma folha A4, note que 297/210 é uma ótima aproximação racional para $\sqrt{2}$, cometendo um erro muito pequeno, da ordem de centésimo de milésimo.

A classificação de papéis da qual A4 faz parte chama-se série A, que começa com o A0 e vai até o A10. Essas folhas têm em comum a razão $\sqrt{2}$ entre largura e altura. A série inicia-se com uma folha retangular de área 1 m², definida como A0. A partir dela obtemos a folha do formato seguinte, A1, dividindo-se



$$\frac{L}{A} = \frac{A}{\frac{L}{2}} \rightarrow L^2 = 2 \cdot A^2 \rightarrow L = \sqrt{2} \cdot A$$

Figura 1

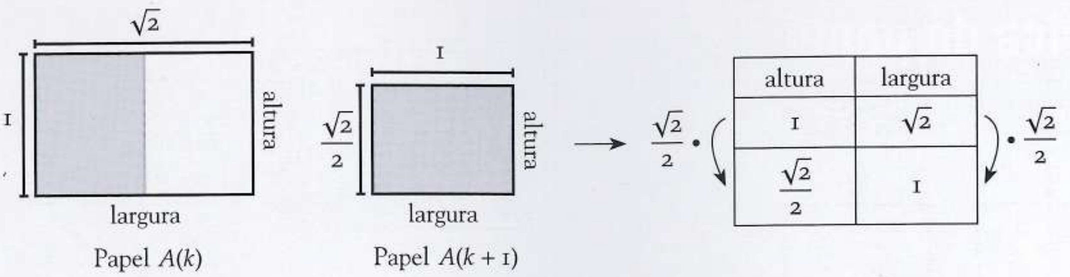


Figura 2

Ao ao meio. As dimensões da folha Ao, em metros, podem ser obtidas a partir da solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} L = \sqrt{2}\cdot A \\ L\cdot A = 1 \end{cases} \rightarrow A = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} \quad \text{e} \quad L = \sqrt[4]{2},$$

ou, com potências de 2, $A = 2^{-\frac{1}{4}}$ e $L = 2^{\frac{1}{4}}$.

Passando essas medidas para milímetros, e aproximando para o milímetro mais próximo, encontramos as dimensões da folha Ao, que são 841 mm de altura por 1189 mm de largura.

Façamos agora os cálculos da folha A1, que é obtida a partir da divisão ao meio da folha Ao:

$$\begin{cases} L = \sqrt{2}\cdot A \\ L\cdot A = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow A = 2^{-\frac{3}{4}} \quad \text{e} \quad L = 2^{-\frac{1}{4}}.$$

Adota-se, nesse caso, a aproximação 594 mm por 841 mm.

Dividindo-se A1 ao meio obtemos A2, que dividida ao meio resultará A3, e assim por diante até A10. Pode-se verificar de maneira simples que a altura e a largura de uma folha $A(k)$, em metros, serão dadas, respetivamente, por $2^{-\frac{1+2k}{4}}$ e $2^{\frac{1-2k}{4}}$, sendo k o número que identifica a série. Para o caso da folha A4, aplicando $k = 4$ na fórmula obtemos os «misteriosos» valores padronizados do formato, que são 210 mm por 297 mm.

Qual a vantagem da proporção $1 : \sqrt{2}$?

A literatura sobre artes gráficas cita dois aspetos importantes sobre a conveniência do uso de uma folha retangular de proporção $1 : \sqrt{2}$. As páginas de um livro são impressas em uma folha de máquina de grande formato. Nela são feitas dobras e cortes e, a partir disso, são montados os cadernos que, juntos, compõem o livro. Normalmente as dobras são feitas «ao meio», fazendo com que o número de páginas seja uma potência de 2. Se o papel for dobrado ao meio por uma dobra, resultará em 2 folhas (chamado *in-fólio*) que, quando impressas frente e verso, constituirão 4 páginas do livro. Se esta última folha for novamente dobrada ao meio, agora com dobras cruzadas, resultará em 4 folhas (*in-quarto*), ou seja, 8 páginas de livro. Com uma nova dobra teremos o *in-oitavo:* 3 dobras, 8 folhas e 16 páginas de livro; e assim sucessivamente.

Uma vez que cada formato deriva do seu precedente fazendo uma dobra sobre o maior lado do rectângulo, a proporção inicial $1 : \sqrt{2}$ sempre será mantida em todas as páginas do livro, seja qual for o número de dobras feitas na composição. Outros formatos não permitiriam isso como, por exemplo, um retângulo de proporção 3:4 (também usado na confeção de livros) que obedece um padrão de alternância no decorrer das sucessivas dobras. A primeira dobra gera retângulos na proporção 2:3; a segunda gera retângulos 3:4, a terceira retângulos 2:3, e assim sucessivamente. Deixo por conta do leitor a seguinte demonstração: dada a proporção $x : y$, se $y/2 \leq x$, então as proporções se alternam entre $x : y$ e $y : 2x$ no decorrer das sucessivas dobras que dividem o lado maior do retângulo ao meio (obs: o único caso em que não há alternância será quando $x/y = y/2x$, que é justamente o caso em que temos a proporção $1 : \sqrt{2}$).

Refiro, ainda, que nem todos os estudiosos de composição em artes gráficas estão de acordo sobre a relevância da vantagem que acabamos de descrever da proporção $1 : \sqrt{2}$ sobre outras proporções. Para um bom acabamento final das dobras de um livro recomenda-se que as dobras sejam feitas paralelamente às fibras do papel. Com isso, folhas de papel que, em virtude da direção das fibras, são adequadas ao *in-quarto* não poderiam ser usadas para livros *in-oitavo* porque a fibra correria em direção errada. Portanto, a vantagem da proporção preservada em $1 : \sqrt{2}$ após as dobras fica comprometida quando levamos em consideração a direção das fibras [1].

Outra vantagem que os papéis de proporção $1 : \sqrt{2}$ da série A apresentam — e essa aceita por todos os especialistas — é a de que evitam o desperdício de papel nos trabalhos de fotocópias.

Imagine que você queira copiar duas folhas quadradas, juntas, em uma nova folha quadrada. Essa tarefa não pode ser realizada sem o desperdício de papel. Se os quadrados têm lado 10 cm, lado a lado formarão um retângulo de 10 por 20 cm, o que exigirá uma folha quadrada de 20 por 20 cm para que o serviço seja feito. Nesse caso, haverá desperdício de metade da folha. O mesmo não ocorre, por exemplo, com duas folhas A4 lado a lado, que podem ser copiadas, sem desperdício de papel, em uma folha A3.

Se você observar com atenção, as fotocopiadoras que fazem ampliação e redução a partir das folhas da série A possuem alguns comandos pré-definidos como, por exemplo, os de redução de 71%, 50%, 35%, 25%, 18% e 12,5%. Você já se perguntou de onde vem essas estranhas porcentagens?

Responderemos a essa pergunta calculando qual deve ser o fator de redução usado na altura e na largura de uma folha $A(k)$ para que ela seja reduzida a uma folha $A(k+1)$. (Figura 2)

Como $\sqrt{2}/2 \approx 0{,}71$, uma redução de 71% fará o serviço desejado. As demais reduções indicadas nas fotocopiadoras referem-se, respetivamente, às reduções de $A(k)$ para $A(k+2)$, $A(k+3)$, $A(k+4)$, $A(k+5)$ e $A(k+6)$.

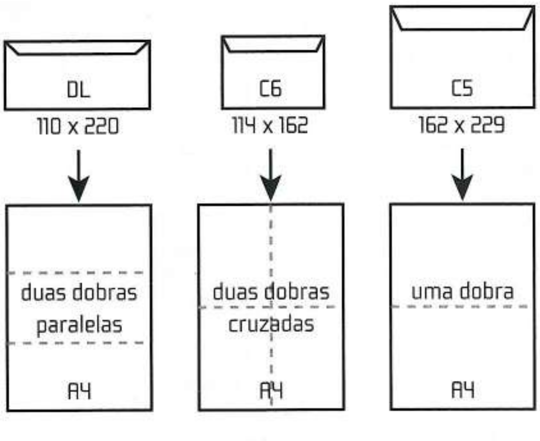
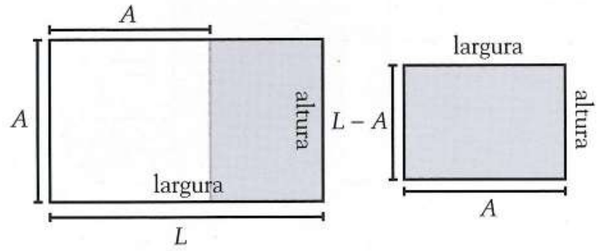


Figura 3



$$\frac{L}{A} = \frac{A}{L-A} \to L^2 - A \cdot L - A^2 = 0$$

Adotando-se $A = 1$, temos $L^2 - L = 0$, cuja raiz positiva é $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$.

Figura 4

Outros formatos de papel

Há registros do uso da proporção $1 : \sqrt{2}$ durante a Alta Idade Média, quando muitos livros eram escritos em duas colunas. Gutenberg (1398–1468), porém, preferia para suas páginas a proporção 2:3, e durante a Renascença raramente se produziu livro na proporção $1 : \sqrt{2}$.

A idéia de se padronizar um formato de papel surge no século XX, e tem a ver com aspetos relacionados à praticidade e economia. Com o uso generalizado de um formato padrão de papel — o que se reflete diretamente na padronização dos formatos de livros, revistas jornais, envelopes — as bibliotecas podem planejar de forma mais eficiente as alturas de suas prateleiras, as gráficas podem trabalhar com ajustes de máquina pré definidos, as fotocopiadoras e impressoras podem padronizar programas para redução e ampliação etc.

O padrão internacional para o tamanho de papéis é o ISO 216 (*International Organization for Standartization*, norma 216), que é adotado por todos os países industrializados do mundo, exceto EUA, Canadá e partes do México. Essa norma regulamenta o formato de algumas séries básicas de papel, como as séries A, B e C. As séries B e C destinam-se, entre outras aplicações, aos formatos de envelopes que podem ser usados para conter folhas da série A. O formato de uma folha $B(k)$ é definido como a média geométrica entre $A(k)$ e $A(k-1)$, e o da folha $C(k)$ como a média geométrica entre $A(k)$ e $B(k)$. Usando a fórmula que vimos anteriormente para altura de uma folha $A(k)$, as fórmulas de cálculo da altura das folhas $B(k)$ e $C(k)$ serão:

$$B(k) = \sqrt{A(k) \cdot A(k-1)} \qquad C(k) = \sqrt{A(k) \cdot B(k)}$$

$$B(k) = \sqrt{2^{-\frac{1+2k}{4} - \frac{1+2(k-1)}{4}}} \qquad C(k) = \sqrt{2^{-\frac{1+2k}{4}} \cdot 2^{-\frac{k}{2}}}$$

$$B(k) = \sqrt{2^{-k}} \qquad C(k) = \sqrt{2^{-\frac{1+4k}{4}}}$$

$$B(k) = 2^{-\frac{k}{2}} \qquad C(k) = 2^{-\frac{1+4k}{8}}$$

Deixo por conta do leitor a formulação de $B(k)$ e $C(k)$ para a largura das folhas dessas duas séries, bem como a demonstração de que também nas séries B e C a proporção $1 : \sqrt{2}$ se preserva.

Seja qual for o número k da série, sempre teremos, tanto para a altura quanto para a largura a relação $A(k) < C(k) < B(k)$. Verificaremos tal facto para a altura, cujos dados já foram calculados anteriormente:

$$2^{\frac{1+2k}{4}} < 2^{\frac{1+4k}{8}} < 2^{-\frac{k}{2}} \to -\frac{2+4k}{8} < -\frac{1+4k}{8} < -\frac{4k}{8}$$

$$\to -2 < -1 < 0, \text{ para qualquer } k.$$

Demonstração análoga pode ser feita entre as larguras das três séries.

Os formatos das séries B e C são maiores que os da série A e, por esse motivo, são usados nos envelopes que deverão conter folhas da série A. Como $A(k) < C(k) < B(k)$, se queremos enviar pelo correio um documento com poucas folhas A4, devemos usar um envelope C4, porém, se a quantidade de folhas for muito grande, é provável que elas fiquem melhor acomodadas em um envelope B4. Se você quiser enviar uma folha A4 dobrada uma única vez, recomenda-se um envelope C5. Para uma folha A4 com duas dobras cruzadas, o envelope ideal é o C6 e, se as duas dobras forem paralelas, o envelope ideal é o DL (figura 3).

Outros dois belos formatos de papel

As artes gráficas têm especial predileção pela proporção 5:8, fato que explico a seguir.

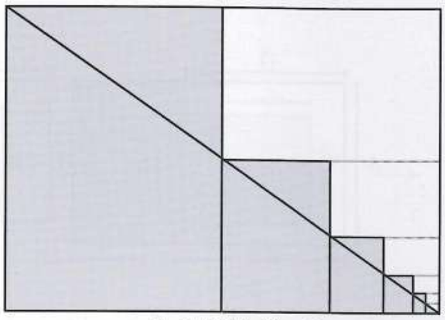
A proporção áurea, muito utilizada por artistas no Renascimento e com inúmeras aplicações práticas — entre elas a relação que mantém com a série de Fibonacci — pode ser assim definida a partir do retângulo áureo:

O retângulo áureo de altura A e largura L é aquele que, quando dele retiramos um quadrado de lado A^2, a razão entre lado e altura no retângulo remanescente será igual a razão L/A do retângulo original.

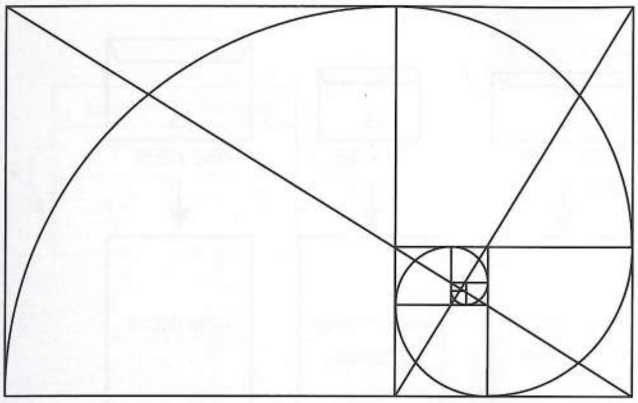
Na prática, procuramos o retângulo apresentado na figura 4. Aproximando a proporção 1:1,618 do retângulo áureo para uma razão entre inteiros encontraremos 5:8 que, segundo especialistas, é uma proporção esteticamente agradável ao olho humano e, por esse motivo, muito utilizada nas artes gráficas.

Repetindo-se o processo de formação do retângulo áureo indefinidamente encontramos retângulos cada vez menores,

Figura 5



razão 1:1,414 (série A)



razão 1:1,618 (retângulo áureo)

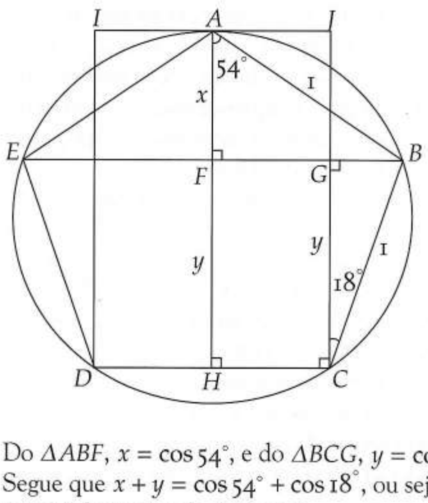
e neles podemos inscrever uma espiral que recebe o nome de espiral logarítmica. A espiral logarítmica converge para um pólo localizado no ponto de encontro da diagonal do retângulo maior com a diagonal do retângulo obtido após a primeira divisão. As figuras a seguir mostram o processo de formação dos retângulos de razão 1:1,414 (série A) e 1:1,618 (retângulo áureo). (Figura 5)

Para finalizar, apresentarei uma última proporção de tamanho de papel, e esta devido a uma razão especial. Ao ler o livro de Jan Tschichold [1], fiquei encantado com o universo de ciência e arte que está por trás da confeção de um livro de proporções equilibradas ao nosso olhar. Como não podia deixar de ser, Tschichold, que é um especialista no assunto, cuidou muito bem da edição gráfica da sua obra: mancha, margens, tipografia, cor do papel, uso de espaços e tamanho do papel, tudo no mais radiante equilíbrio.

Depois da leitura, não pude conter meu interesse em pegar a régua e medir o formato das páginas para ver qual havia sido a proporção usada pelo mestre no seu próprio livro. Sabia de antemão que não seria $1:\sqrt{2}$ dado o evidente desconforto de Tschichold com o uso generalizado do formato A nos meios editoriais mas, por outro lado, minha hipótese de que ele tivesse usado a proporção áurea também não se confirmou depois das medidas com a régua.

Tschichold usou nas páginas do seu livro uma proporção citada rapidamente por ele na página 63, quando se referiu a um «belíssimo retângulo, quase desconhecido, derivado do pentágono». Conforme veremos a seguir, o retângulo $CDIJ$, com a proporção usada por Tschichold nas páginas do seu livro, é obtido a partir de um pentágono regular $ABCDE$ de lado 1 (fgura 6).

Figura 6



Do ΔABF, $x = \cos 54^\circ$, e do ΔBCG, $y = \cos 18^\circ$.
Segue que $x + y = \cos 54^\circ + \cos 18^\circ$, ou seja, a proporção CJ/CD do retângulo é 1:1,538.

Finalizo o artigo com informações adicionais que podem ser úteis ao professor na planificação de aulas sobre o assunto apresentado.

— *Gramatura do papel:* é a massa de papel, em gramas, por m^2. Quando se lê na embalagem de papel A4 que a gramatura é 75 g/m^2, significa dizer que uma folha A0 dessa série de papel tem massa igual a 75 g.
— *Resma:* conjunto de 500 folhas de papel. Como no A0 cabem 16 folhas A4, bastam algumas contas para concluir que uma resma de A4 tem massa 2343,75 g.
— *Tolerância de erro:* a norma ISO 216 padroniza as seguintes margens de erro nas dimensões das folhas das séries A, B e C: ± 1,5 mm para dimensões até 150 mm, ± 2 mm para dimensões de 150 a 600 mm, ± 3 mm para dimensões acima de 600 mm.
— *Formato Carta:* EUA, Canadá e algumas regiões do México adotam como padrão o formato Carta, cujas medidas são 8 ½ × 11 polegadas, ou 216 × 279 mm.

Bibliografia

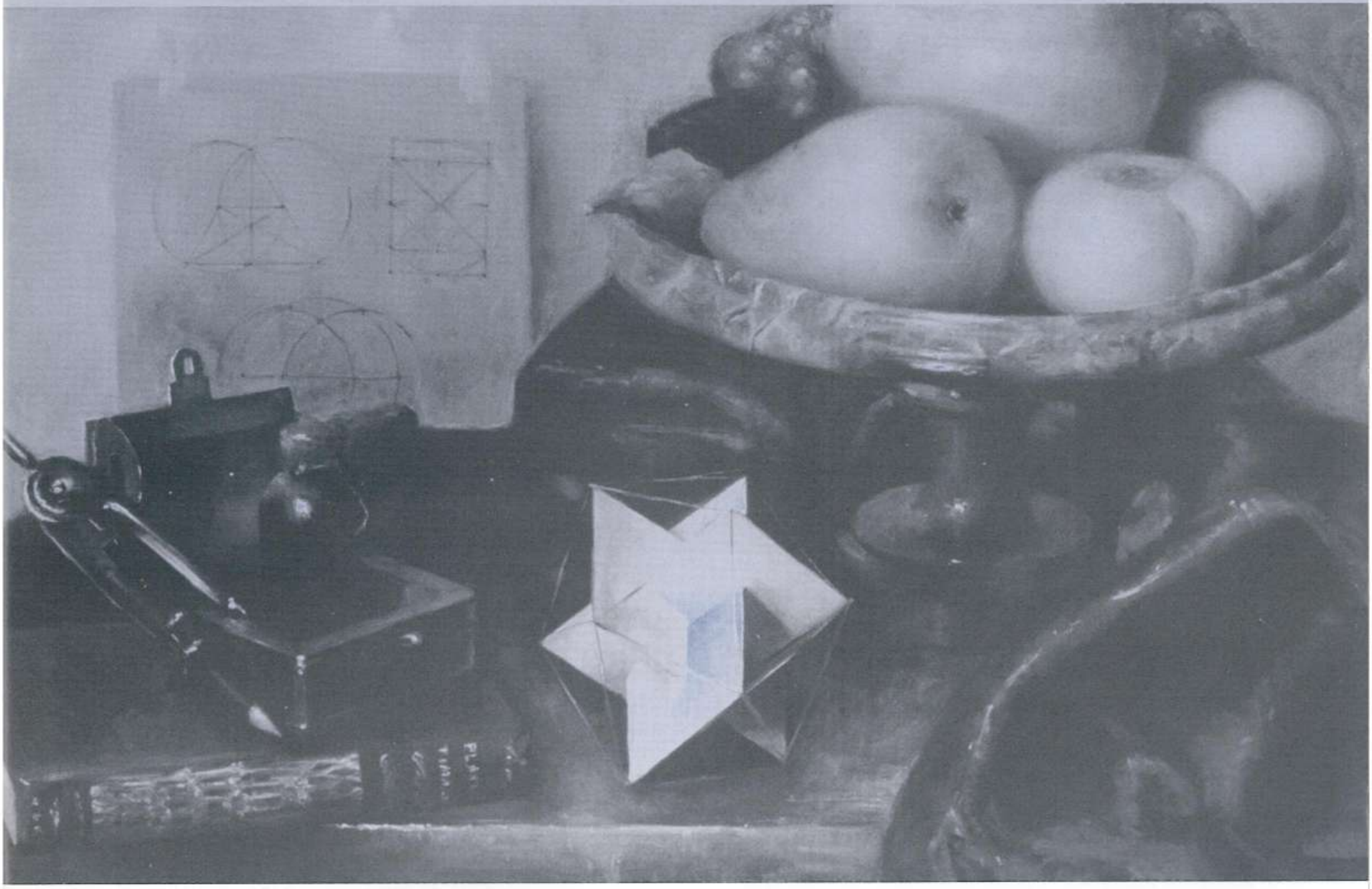
[1] Tschichold, Jan. *A forma do livro: ensaios sobre tipografia e estética do livro.* Ateliê Editorial: Cotia, São Paulo, 2007.

Sites consultados em 27/12/2007:

www.portaldasartesgraficas.com
www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/isso-paper.html
www.glossary.ippaper.com
www.pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/NumeroDeOuro_Expresso_20030614.htm
www.pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/A4_Expresso_20030607.htm

José Luiz Pastore Mello
São Paulo, Brasil

Porquê e para quê ensinar geometria?



Porquê ensinar geometria? Porque o ensino da geometria «tem como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos» (Ponte *et al*, 2007, p. 7) e, como tal, os alunos aprendem «as formas e estruturas geométricas e o modo de analisar as suas caraterísticas e relações.» (NCTM, 2007, p. 44). Pode então organizar-se a aprendizagem em duas componentes: a «fase de descoberta, predomina o aspeto experimental» e a «fase de consolidação do corpo científico da matemática, o seu caráter dedutivo e a sua estrutura axiomática» (Veloso, 1998, p. 362).

Para quê ensinar geometria? A resposta prende-se com quatro aspetos da geometria preconizadas pelo NCTM (2007) e presentes em diversos artigos da revista E&M: (i) Analisar as caraterísticas e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas; (ii) Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação; (iii) Aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas; (iv) Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

Referências Bibliográficas

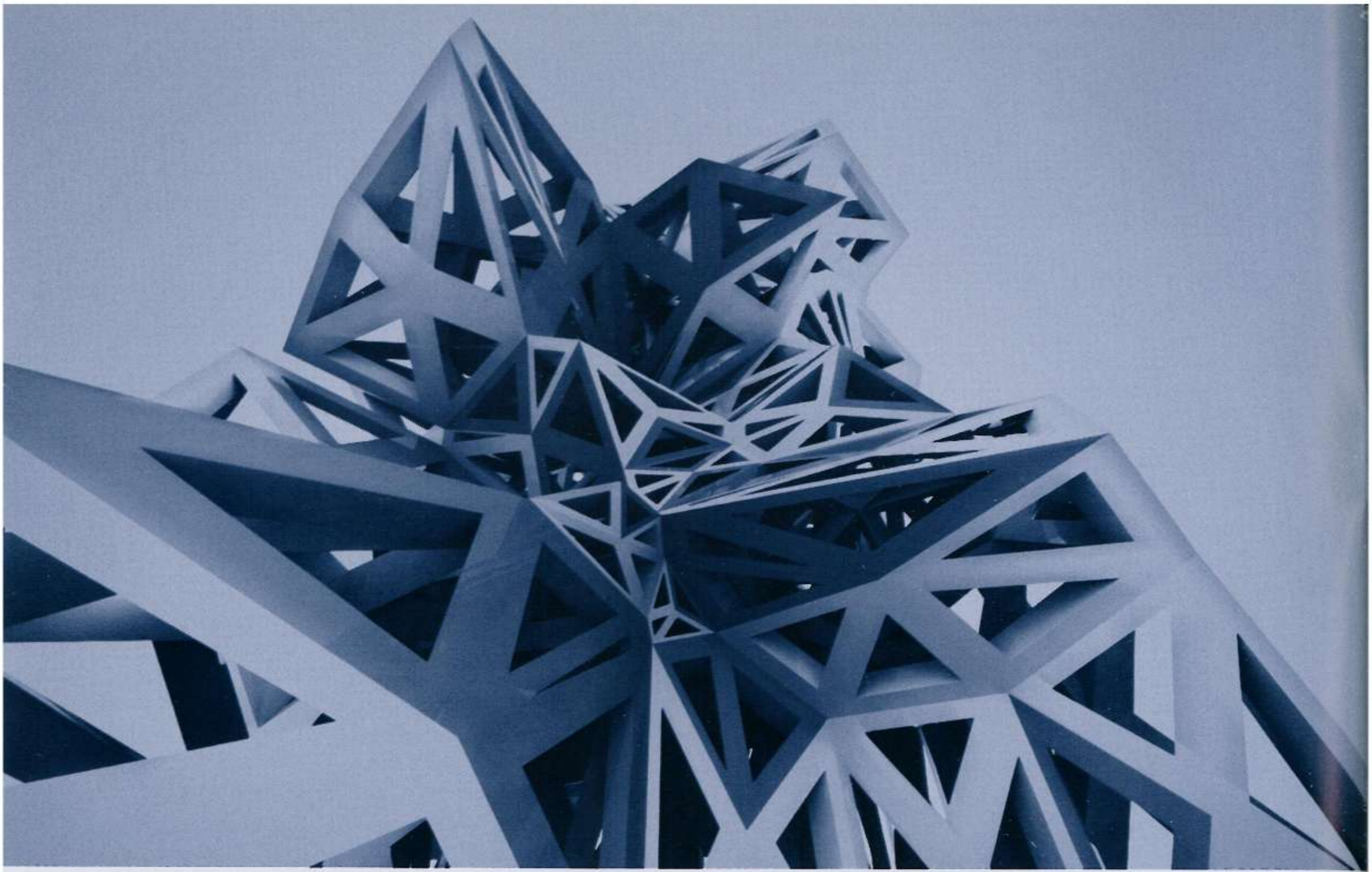
NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas Actuais*. Lisboa: IIE.

Nuno Candeias

EB 2,3 Vasco Santana, Ramada



A Matemática num contexto de Projeto Educativo:
evolução, estruturação, criatividade, ensino e objetividades

Helena de Fátima Sousa Melo

Se partirmos dos princípios que fundamentam um Projeto Educativo, estruturados em valores, metas e estratégias, podemos também obter as linhas orientadoras de um ensino/aprendizagem da Matemática. Do mesmo modo que a escola concebe um conjunto de objetivos na sua atuação, que lhe permite cumprir a sua função educativa, o ensino/aprendizagem da Matemática possui um conjunto de estratagemas aplicáveis que possibilitam uma melhor eficácia na divulgação do seu conhecimento e no seu desenvolvimento.

Com o propósito de criar um ambiente cada vez mais propício à aprendizagem, o Projeto Educativo é um guia de trabalho que assegura coerência e coesão na atividade educativa. É um promovedor de sucesso, de realização, desenvolvendo competências e consolidando valores como a interajuda, a responsabilidade e a cidadania. O ensino da Matemática possui um papel semelhante, através da sua ligação, cada vez maior, com o quotidiano.

Quer o Projeto Educativo, quer o ensino/aprendizagem da Matemática, não devem ser encarados como um produto acabado, mas sim como um processo vivo, dinâmico, aberto, operacional e praticável, capaz de concretizar-se e direcionado para um objetivo maior.

A perceção da necessidade de ter que existir um Projeto Educativo, ou um adequado ensino/aprendizagem da Matemática, não é de agora. O homem, com o objetivo de desenvolver e partilhar ideias, há muito que os têm estruturados em pensamento, principalmente quando o ensino/aprendizagem deixa de ficar associado às classes de maior poder, para ser dirigido aos que têm sede de saber.

O conhecimento matemático teve origem nas regiões banhadas pelo Mar Mediterrâneo. Apesar de sabermos que outras culturas tiveram influência na evolução dessa forma de conhecimento, a sua organização intelectual e social se deve, particularmente, a antiga Grécia. Por várias razões, ainda pouco explicadas, a civilização ocidental, que resultou dessas culturas, impôs-se a todo o planeta, e com ela, a Matemática.

Nas escolas filosóficas da antiga Grécia, iniciadas por volta de 580 a. C., pode-se dizer que principia o ensino e a aprendizagem da Matemática, apesar de que nessa altura, não havia distinção entre as diversas áreas do conhecimento e o pensamento humano, todas as áreas faziam parte de um todo, e cada qual era, por si só, também um todo. Por isso, Tales de Mileto, considerado o precursor destas escolas, seguido por Pitágoras, Platão, Aristóteles, Euclides entre outros, eram, por assim dizer, ao mesmo tempo filósofos, matemáticos, pedagogos, etc.

Desde este tempo, há a preocupação com o ensino e a aprendizagem de modo geral. Segundo os filósofos desta época, «a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos».

Sócrates (470–399 a. C.) ocupou-se apenas de assuntos éticos. Este filósofo sempre dizia que a sua sabedoria era limitada à sua própria ignorância (*Só sei que nada sei.*). O seu discípulo Platão (428/27–347 a. C.) já tratava de todos os temas. Platão desenvolveu a noção de que o homem está em contacto permanente com dois tipos de realidade: a inteligível (a realidade imutável, igual a si mesma) e a sensível (a realidade mutável, que nos afeta os sentidos). Para Aristóteles (384–322 a. C.), discípulo de Platão, o estudo da natureza era assunto inteiramente pacífico, tão bem quanto o estudo do homem, dando contribuições em diversas áreas do conhecimento humano, seguindo os passos do grande erudito Demócrito de Ábdera (460–370 a. C.), considerado o maior expoente da teoria atómica ou do atomismo, segundo a qual, tudo o que existe é composto por elementos indivisíveis, chamados átomos (do grego temos «a», que significa negação e, «tomo», divisível).

Nestas escolas filosóficas, fundamentadas num ideal, as ideias e os pensamentos, desenvolvidos e transmitidos, absorvidos e propagados, iniciam, de certo modo, a interação entre o ensino e a aprendizagem. Floresceu a instituição da escola, com classes de alunos e professores, tendo tido destaque os sofistas, escola fundada por volta de 480 a. C., como os primeiros a dar prosperidade ao ensino remunerado.

Aristóteles, fundador da escola filosófica denominada o Liceu, na sua obra «Poiética»[1] aborda a *mímesis*, ou seja, a imitação, como o primeiro estágio da criação intelectual e artística. O ato de imitar, segundo este filósofo, é inseparável no homem, fazendo-o mesmo encantar-se com o imitado, pois quanto mais próximo for do real, mais verdadeiras são as obras por ele inspirado. Porém, surge um problema, uma contradição entre verdade e a recriação, que é superado por Aristóteles através do conceito da verossimilhança (a semelhança do real, do verdadeiro), legitimando o imitado.

Pela *mímesis* temos um tipo, uma forma e um método de educação. Mas para podermos imitar, temos que observar, olhar, contemplar, que em grego está associado ao verbo *théoria*, que por sua vez, vem do substantivo *theio*, que quer dizer «Deus». Este olhar , não é um simples olhar, deve ser um olhar de quem quer conhecer, de quem busca o conhecimento, de quem reflete, medita, possibilitando assim, a construção de modelos abstratos para reproduzir o real em um outro nível de conhecimento.

Ao mesmo tempo que há esta reflexão sobre a realidade, há também a capacidade do homem, com a sua criatividade, de mudar o ambiente em que está inserido, e a si mesmo. Temos a contemplação como geradora de criatividade.

Como consequência, há uma evolução do conhecimento e a possibilidade de redefinições. O homem está condicionado pelo ambiente e pela sua educação, com habilidade de mudá-los.

O que é abordado por Aristóteles, neste seu trabalho, de certo modo, pincela a estrutura de um Projecto Educativo e o conceito de ensino /aprendizagem. Pois há a preocupação de contemplação, criação e modificação do meio ambiente em prol de uma escola criadora e inovadora.

No entanto, devemos salientar que a criatividade e a originalidade não devem ser empreendidas a todo custo. Estas devem decorrer de um esforço livre e voluntário do aluno, muito bem orientado pelos professores, que o ajudaram a atingir a sua maturidade intelectual.

Na Idade Média, entre o século V e século XV, o pensamento clássico foi bem conhecido e valorizado. No entanto, tal conhecimento e valorização diziam respeito, sobretudo a um único filósofo grego, Aristóteles.

Na Renascença, período compreendido entre os finais do século XIII e meados do século XVII, uma das suas caraterísticas é o renovamento das antigas escolas filosóficas gregas, realçando-lhes o conteúdo de humanidade, presente em todas elas, não obstante a variedade das suas orientações. Neste perío-do são mais ou menos representadas todas as escolas filosóficas da antiguidade, especialmente a platónica e a aristotélica. O ídolo da Renascença é Platão: artista e dialético, teórico do amor e da beleza, iniciador da ciência matemática da natureza.

Em fins do período renascentista aparece o génio de René Descartes (1596–1650). Na sua obra «Discurso do Método»[2], conseguimos perceber a forte associação entre os mecanismos cognitivos humanos e os esquemas lógicos e matemáticos conhecidos. Além disso, também podemos sentir a absoluta subordinação dos demais ramos do conhecimento ao conhecimento lógico-matemático. Baseados na sua obra, podemos dizer que é a Matemática, enfim, que fornece o modelo para o conhecimento: ela é o esteio a partir do qual o conhecimento lança suas possibilidades.

Este pensamento também predominava na antiga Grécia, onde os trabalhos intelectuais — em especial na filosofia, na matemática e nas artes — eram considerados superiores aos trabalhos físicos, que eram relegados aos escravos e às classes sociais mais baixas.

Entre os contemporâneos de Descartes, já havia resistências às suas ideias e Pascal (1623–1662) foi um dos que se destacaram.

O pensamento cartesiano foi fortemente influenciado por Galileu (1564–1642), com quem a matemática assume uma importância crucial na ciência. Ele afirma: «A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras; sem eles nós vagamos perdidos dentro de um escuro labirinto».[3]

Galileu, também fortemente contestado na sua época, introduziu a ciência explicativa e experimental, em oposição à ciência descritivo-contemplativa do tipo aristotélica, dominante no pensamento medieval. Obstinado à ideia da razão, como instrumento para se atingir a verdade pela via da demonstração geométrica, Galileu trazia, nos seus escritos, os elementos que constituiriam o método cartesiano.

Segundo alguns estudos, foi a partir do século XVIII que a Matemática, como disciplina, começou a constar nas escolas, por um reflexo da Revolução Industrial, cujos sistemas passaram a exigir mais do cidadão. Durante as guerras mundiais a matemática cresce e toma importância nas escolas do mundo, mas a escala das dificuldades do aprendizado cresce e a reprovação aumenta, começando a surgir os atritos entre a disciplina das ciências exatas e os alunos que, sem estímulos, fracassam. Há uma introdução às inovações através do matemático Félix Klein (1849–1925) que se preocupou, para além dos seus trabalhos em investigação matemática, com as questões do aprender matemático. Com a Guerra-fria e a corrida espacial, há uma preocupação em relação ao currículo escolar, em relação a estruturação do ensino. Afigura-se a ideia de Projecto Educativo.

Em relação ao currículo da disciplina de Matemática, diz Ubiratan D'Ambrosio[4]: «A alternativa que proponho é orientar o currículo matemático para a criatividade, para a curiosidade e para crítica e questionamento permanentes, contribuindo para a formação de um cidadão na sua plenitude e não para ser um instrumento da interesse, da vontade e das necessidades das classes dominantes. A invenção matemática é acessível a todo o indivíduo e a importância dessa invenção depende do contexto social, político, econômico e ideológico.»[5]

O processo criativo está presente no quotidiano da matemática. Este faz com que o trabalho docente do professor de matemática passe a ser mais estimulante, tornando o professor, um articulador do conceito e não apenas um transmissor de definições e dados, que são memorizados como algo mecânico. O pensamento criativo, antigamente, era visto como inspiração divina, passando a ser melhor estudado a partir dos meados do século XX.

A criatividade é um processo mental em que usamos a imaginação para conseguirmos uma novidade. Por sua vez, a inovação é um processo de agregação de conhecimento à ideia nova, com o propósito de alcançar um processo, um método, ou uma estratégia que se torne útil. Assim, «criar é *pensar* algo novo» e «inovar é *fazer* algo novo». Por esta razão, precisamos ser criativos e inovadores no que concerne ao ensino da Matemática.

O especialista em inovação empresarial John Kao (1950–...) afirma: «defino criatividade como o processo através do qual as ideias são geradas, desenvolvidas e transformadas em valor.»

Para a psicóloga Maria Inês Felippe[6]: «A criatividade compreende a intenção criativa, que é o querer fazer diferente; o pensamento criativo, que é o pensar diferente; e a ação criativa, que é o fazer diferente.(...) Para desenvolver o pensamento criativo, primeiro é preciso aprender a desaprender, ou seja, liberar-se dos antigos hábitos para poder rever, questionar, descobrir, em seguida utilizar integralmente o cérebro, tanto o lado direito, da imaginação, intuição, criação, sentimento, quanto o lado esquerdo, da lógica, razão, sistematização, planejamento.»

O modo pelo qual, durante muito tempo, o conhecimento matemático foi transmitido aos alunos, fez com que esta «disciplina» fosse apontada como um dos problemas do ensino em todos os níveis.

Diz Ubiratan D'Ambrosio: «O ensino de fatos e conceitos apresentados como verdades absolutas e incontestáveis, como um corpo de conhecimentos congelado ao longo de séculos, não pode responder à enorme curiosidade dos jovens e nem à própria dinâmica da elaboração do conhecimento. A aquisição desse conhecimento é falsamente verificada através de provas e testes.»[7]

A matemática se tornou um elemento constituidor da legitimação do conhecimento verdadeiro e de garantia de certeza, desenvolvendo uma noção de razão. A racionalização crescente do mundo e da realidade teve as suas origens na Grécia Antiga e se constituiu, como a compreendemos hoje, a partir da chamada Revolução Científica do século XVII.[8]

A escola vem sendo pensada, organizada e vivenciada com base, fundamentalmente, na racionalidade cartesiana. Quer a organização dos seus espaços e tempos, quer a constituição dos saberes escolares têm, na razão cartesiana, os seus modelos. Assim, os currículos seguem o «modelo da escada», baseados na «lógica do mais simples ao mais composto». Os currículos de matemática têm por base uma composição linear, ou seja, ensina-se isso com vistas ao ensino daquilo, o aluno precisa saber isso senão não consegue aprender aquilo. Além disso, os saberes que constituem os currículos escolares são compreendidos como verdades eternas, pré-existentes ao ser humano e, portanto, imutáveis, propiciando com que todo e qualquer sentimento, sensação, emoção, ou intuição, que não seja de índole intelectual, deva ser repelido.

Neste contexto, apesar da Matemática aparecer como a «disciplina» por excelência, uma vez que a ela é atribuído o papel de «formar a mente», de certa forma, o seu papel crucial no «desenvolvimento do raciocínio» é prejudicado, pois a sua importância deve ser ressaltada pela sua aplicabilidade e não por questões de hierarquização.

Emerge, com mais ênfase, a sua conceção como um Projeto Educativo. O ensino da Matemática começa a ser moldado de uma forma mais ajustada à realidade.

Os desafios foram enormes e a escola necessitou ser repensada. Como consequência, a escola modificou-se radicalmente, abrindo-se para os alunos, os professores, os pais, rompendo com a racionalidade cartesiana que estava na base da organização escolar.

Mas, para que esta nova estruturação possa existir, faz-se necessário a presença de um professor consciente que desiniba e estimule os vários momentos que ocorrem durante uma aula, procurando desenvolver, a nível pessoal e interpessoal, a flexibilidade. Um professor que seja capaz de se adaptar aos novos cenários educacionais, recorrendo a práticas pedagógicas mais criativas e inovadoras.

Assim, o professor, indo de encontro aos seus propósitos, deve esforçar-se por fazer com que os seus alunos tomem consciência do ponto de chegada, do caminho percorrido, do método utilizado e do propósito a ser cumprido, assegurando também que o saber adquirido não seja nem puramente verbal, nem puramente formal, devendo ser integrado na personalidade. Sob esta perspetiva, o educador não é somente um professor que ensina Matemática, mas sim, o agente que cultiva a inteligência dos jovens, equilibrando a realidade de um determinado assunto com a imaginação dos seus alunos, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.

A Matemática como disciplina tem caraterísticas próprias. Quer para aprendê-la, quer para ensiná-la, é preciso ter uma determinada atitude, pois não basta ter apenas conhecimento teórico e prático, é necessário conceber uma metodologia própria, uma participação ativa, um envolvimento direto por parte do aluno, um voltar, várias e várias vezes, ao mesmo tema, sob diferentes perspetivas. Cabe ao professor ensinar o aluno a aprender com estas diferentes abordagens, com criatividade e inovação.

O ensino da Matemática, em todos os níveis de ensino, tem atingido índices preocupantes. Não só em termos de reprovação como também de interesse. Os professores, por vezes, não sabem como cativar os alunos. Por sua vez, grande parte dos alunos está, de modo geral, desmotivada e desinteressada. O ensino da Matemática, há muito, vem atravessando uma situação de desânimo para quem ensina e para quem aprende.

As questões apontadas são sempre as mesmas, apenas modificadas pelo tempo. As soluções sugeridas são sempre as mesmas, vestidas de uma roupagem mais modernizada.

Há que quebrar o ciclo! Há que ter cautela!

Para John Kao, «não se pode usar velhos métodos para novos problemas». Há que repensar novas estratégias.

Um professor de Matemática, para além das suas qualidades científicas e pedagógicas, deve ter espírito crítico para selecionar a informação a ser transmitida e também de investigação, completando esta informação e não satisfazendo apenas o conteúdo programático da disciplina. É importante também que este seja criativo, espontâneo, que saiba ser claro na exposição dos conteúdos, para tornar o saber acessível a todos, deixando-o formar-se espontaneamente no espírito do aluno.

As perspetivas do processo ensino/aprendizagem alteram consoante o desenvolvimento de novas técnicas e teorias sobre a forma de como aprendemos e pensamos. Hoje em dia, desenvolver as capacidades dos alunos é tão, ou mais, importante que a quantidade de conteúdos transmitidos. Assim, é necessário, na formação de professores, que também se dê prioridade ao desenvolvimento de atitudes que permitam aceitar mudanças e inovações, bem como fazê-las através de práticas de reflexão, troca de experiências e cooperação.

É imprescindível que a disciplina de Matemática saiba dar aos alunos um papel mais ativo na construção do seu próprio conhecimento, harmonizando os objetivos do domínio cognitivo, social e humano, e estabelecendo relações com a realidade envolvente, e não sendo uma mera recriação artificial desta.

O ano de 2009 foi o ano europeu da criatividade e da inovação. Teria sido um bom momento para se iniciar, tendo por base inspiradora a objetividade de um Projeto Educativo, uma reapreciação e uma reorganização do modo como trabalhamos esta disciplina tão desafiante.

Notas

[1] Poiética de Aristóteles. Tradução, comentário e índices analítico e onomástico de Eudoro de Souza. Coleção Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1984.

[2] Descartes: Discurso do Método. Trad. Elza M. Marcelina. Brasília: Editora da UnB; SP: Ática, 1989.

[3] Galileu, G. O Ensaiador. Trad. Helda Barraco. SP: Nova Cultura, 1999 [original 1623, p. 46]. (Os Pensadores).

[4] Doutor em Matemática, professor emérito da Unicamp, membro do Conselho da Pugwash Conference on Science and World Affairs. Signatário das declarações do Fórum «Ciência e Cultura» da Unesco. Presidente do IEF (Instituto de Estudos do Futuro).

[5] A interface entre História e Matemática, texto de Ubiratan D' Ambrosio. http://vello.sites.uol.com.br/interface.htm

[6] Maria Inês Felippe é psicóloga, pós-graduada em Administração de Recursos Humanos e Mestra em Criatividade e Inovação Aplicada pela Universidade de Santiago de Compostela, Espanha.

[7] D'Ambrósio, Ubiratan. Educação para uma Sociedade em Transição. Campinas: Papirus Editorial, 1999.

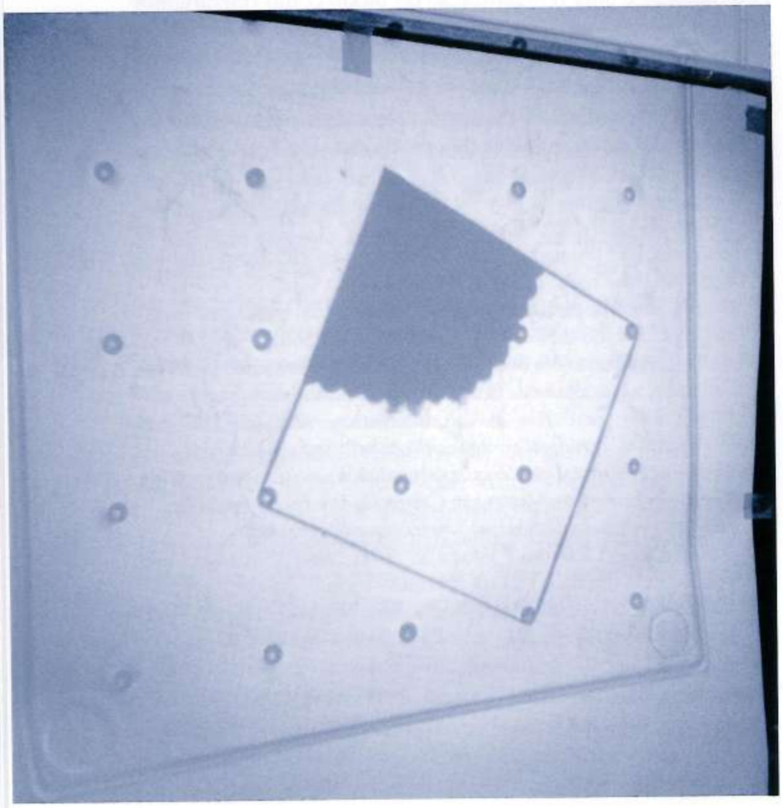
[8] Châtelet, F. Uma História da Razão: Entrevistas com Émile Noël. Trad. Lucy Magalhães, RJ: Jorge Zahar, 1997.

Helena de Fátima Sousa Melo
Departamento de Matemática, Universidade dos Açores

Cristina Loureiro

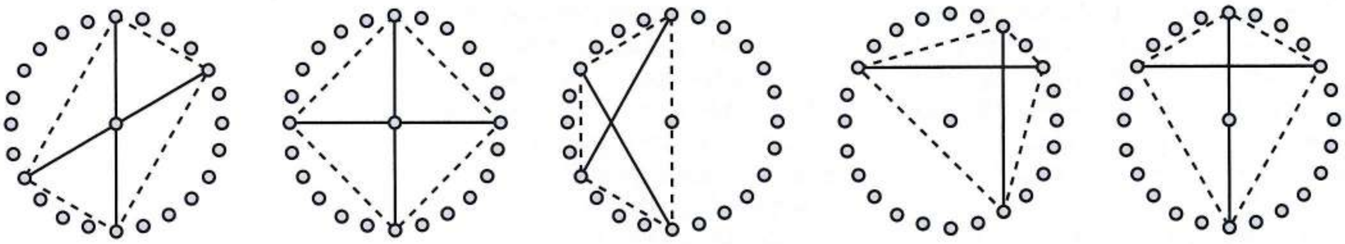
A equipa da redação da *Educação e Matemática* decidiu passar a considerar estes pequenos artigos como uma secção permanente, convidando-me a dar um nome a essa secção. Inicialmente, eles foram propostos com o propósito de ir apresentando, concisamente numa página, ideias didáticas para o ensino da geometria elementar. A compilação dos artigos ao longo do tempo proporcionará uma coleção alargada de ideias e uma perspetiva fundamentada do que poderão ser orientações para o ensino da geometria. Pela natureza do conteúdo dos artigos e pela forma como vão aparecendo, sem uma sequência lógica e sem uma organização subjacente, pareceu-me que tinha sentido designar esta secção por *Caderno de Apontamentos de Geometria*. É esse o nome que passará a ter a partir de agora. À redação da revista agradeço o apreço pelo meu trabalho e a confiança para continuar a responder a este desafio. Aos professores que me têm feito chegar comentários e sugestões agradeço o incentivo.

Estruturação espacial (1)



Vários especialistas de ensino da geometria afirmam que «toda a geometria é, em essência, uma maneira de estruturar o espaço e de estudar as consequências dessa estruturação» (Battista *et al.*). Estruturar espacialmente um objeto determina a sua natureza, ou forma, pela identificação das suas componentes espaciais, pela combinação das componentes em composições espaciais, e pelo estabelecimento de inter relações entre as componentes e os compostos. Por exemplo, um geoplano é um instrumento de estruturação espacial através de uma malha quadriculada de linhas perpendiculares, uma estrutura ortogonal isométrica. Ao utilizá-lo para representar retângulos estamos a estruturar espacialmente o retângulo. Se os lados do retângulo coincidem com as linhas da malha quadriculada a estruturação é imediata. Se o retângulo está numa posição inclinada, a sua estruturação exige outro tipo de recurso. Neste caso, o destaque dos ângulos retos, como componentes do retângulo, pode ser uma maneira de estruturar esta figura e identificá-la em qualquer posição.

Este apontamento mostra-nos a necessidade de diversificar as atividades de aprendizagem para que a estruturação das figuras seja o mais completa possível, atendendo às suas várias componentes e às relações entre elas. Mostra-nos também a necessidade de escolher criteriosamente os suportes materiais que vão ajudar a construir essa estruturação. Por exemplo,



a estruturação do quadrado deve permitir que ele vá sendo trabalhado de modos diferentes:

(a) com os 4 ângulos retos e os lados todos iguais (um retângulo especial);

(b) com os lados todos iguais e os 4 ângulos retos (um losango especial);

(c) com as diagonais iguais, perpendiculares e que se bissectam;

(d) com 4 vértices equidistantes de um ponto e as diagonais iguais que se bissectam ou com 4 vértices que são pontos de uma circunferência e as diagonais são diâmetros;

(e) com 4 eixos de simetria;

(f) ...

Ao fazer estas afirmações estou a pensar se, para cada uma delas, falta dizer alguma coisa ou se há alguma coisa a mais. Ao pensar assim, sou imediatamente levada a tentar descobrir exemplos de quadriláteros que verifiquem uma parte da afirmação e que não verifiquem a outra e isso dá pistas para organizar tarefas simples a propor aos alunos.

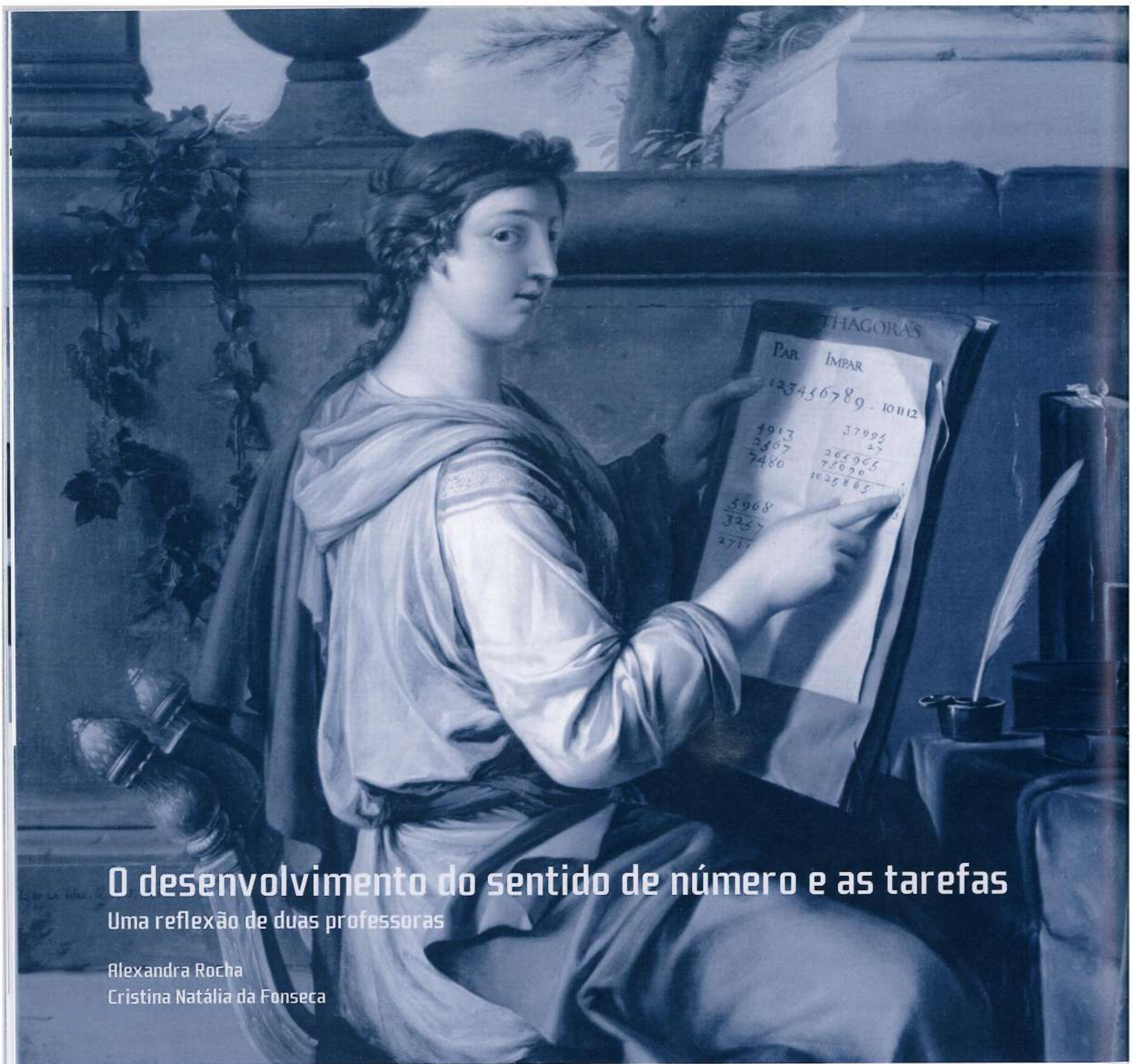
Descobrir, num geoplano de 5 por 5, todos os quadrados diferentes possíveis de construir, e descobrir depois todos os retângulos diferentes, são duas atividades em sequência que vão ajudar a ver um quadrado como um quadrilátero com os 4 ângulos retos e os lados todos iguais. Por isso, além de estruturar espacialmente o quadrado estamos a encará-lo como um retângulo especial. Deste modo preparamos um outro nível de estruturação, a geométrica, em que se inclui a classificação inclusiva dos quadriláteros. Mas esta estruturação espacial do quadrado não vai adiantar nada aos outros aspetos referidos, porque a estrutura ortogonal isométrica deste geoplano não dá contributos visuais para ajudar a estruturar esses aspetos.

Descobrir, num geoplano circular, todos os quadriláteros com as duas diagonais iguais e distinguir aqueles em que estas têm o ponto médio comum, é uma atividade que vai ajudar a estruturar o retângulo como quadrilátero com as duas diagonais iguais e que têm o ponto médio comum. Além disso, ajuda a estruturar o quadrado como o retângulo cujas diagonais são perpendiculares.

Ao falar da estruturação espacial fomos naturalmente conduzidos a falar da estruturação geométrica, mas essa discussão tem que ficar para outro apontamento.

Referências Bibliográficas

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, Handbook of Research on Mathematics* 29(5), 503–532. NCTM.



O desenvolvimento do sentido de número e as tarefas

Uma reflexão de duas professoras

Alexandra Rocha
Cristina Natália da Fonseca

Neste artigo mostramos de que forma trabalhámos o tema *Números e Operações* no 7.° ano, nesta fase de transição de implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) (PMEB). A nossa intenção é explicar de que forma tirámos partido de materiais já existentes tendo como objectivo o tratamento do tema.

O programa surge com uma estrutura diferente do anterior, permitindo que o professor faça, dentro de cada tema, uma leitura da articulação entre os três ciclos, do propósito principal de ensino, dos objectivos gerais de aprendizagem, das indicações metodológicas e dos tópicos e objectivos específicos. No entanto, tal como os autores mencionam, apesar de os tópicos matemáticos serem apresentados de forma sistematizada e sintética, o professor não se deve cingir a esta lista de tópicos nem os deve trabalhar de forma isolada na sala de aula. Na preparação das suas aulas, para que não perca de vista o propósito principal de ensino do tema, deverá ter o cuidado de seleccionar materiais que explorem os referidos tópicos, a par das capacidades transversais, por forma a atingir cada um dos objectivos gerais de aprendizagem dos respectivos temas (matemáticos e capacidades transversais).

Nesta perspectiva, exemplificamos como contemplámos na nossa prática o propósito principal de ensino do tema *Números e Operações* — o desenvolvimento do sentido de número — a partir de algumas das tarefas que seleccionámos para os nossos alunos. Esta selecção só foi possível depois de uma apropriação do que se entende por *desenvolvimento de sentido de número*, pois de outro modo seria difícil compreender a potencialidade de algumas tarefas para o tratamento deste tema. As tarefas por si só não explicam de que modo pode ser desenvolvido o sentido de número, é necessário que o professor tenha um conhecimento aprofundado sobre este assunto, para que a preparação das suas aulas e a sua ação na sala de aula sejam adequadas ao cumprimento deste propósito.

Sentido de Número

O sentido de número está aberto a uma variedade de interpretações, uma vez que depende da compreensão que um indivíduo tem dos números e das operações. Embora esta compreensão seja pessoal, alguns autores referem que podemos identificar um conjunto de características comuns a todos os indivíduos.

Assim, McIntosh, Reys e Reys (1992) referem que o sentido de número, para além de estar relacionado com a compreensão geral que se tem dos números e das operações, também está associado à habilidade e à propensão para usar esta compreensão de modo flexível sempre que seja necessário realizar julgamentos matemáticos e conceber estratégias úteis para lidar com os números e as operações. Além disso, apontam que o sentido de número incide numa capacidade e tendência para usar os números e métodos quantitativos como meios para comunicar, interpretar e processar informação.

No seu modelo destacam-se três componentes do sentido de número relacionadas entre si: conhecimento e destreza com os números, conhecimento e destreza com as operações, aplicação do conhecimento e da destreza com os números e com as operações em situações de cálculo. A primeira componente compreende alguns aspetos relacionados com o sentido da regularidade dos números, múltiplas representações dos números, sentido de grandeza relativa e absoluta dos números e sistemas de referência. A segunda relaciona-se com a compreensão do efeito das operações, das propriedades matemáticas e das relações entre as operações. Por fim, a terceira componente envolve a compreensão da relação entre o contexto de um problema e os cálculos necessários, a consciencialização da existência de múltiplas estratégias, a apetência para usar uma representação e/ou um método eficiente e uma sensibilidade para rever os dados e o resultado.

O modelo possibilita uma operacionalização do desenvolvimento de sentido de número de acordo com as actuais orientações do PMEB (ME, 2007), nomeadamente no tratamento do tema Números e Operações ao longo dos três ciclos.

A sequência de tarefas

Tendo em vista o desenvolvimento do sentido de número, elaborámos uma sequência de tarefas que permitisse aos alunos uma construção de conhecimento sobre o tema e, em simultâneo, a sua compreensão, de forma gradual, implicando a utilização de processos de pensamento cada vez mais complexos e o desenvolvimento das capacidades transversais. Esta sequência foi marcada pela construção, compreensão e mobilização do conhecimento e, por esse motivo, ele próprio desenvolveu-se associado às três componentes do sentido de número definidas no modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992). O modo como o aluno efectua o percurso de aprendizagem decorre da forma de ensino que é traduzida pelo conjunto de tarefas propostas. É de notar que uma tarefa não tem como objectivo desenvolver especificamente uma das componentes do sentido de número. Esta será tanto mais rica se estimular o aluno a trabalhar diferentes componentes, proporcionando-lhe, assim, uma visão mais abrangente, completa e flexível do sentido de número. Assim, ao seleccionarmos e sequenciarmos as tarefas, tivemos a preocupação de que, de umas para as outras, os alunos tivessem a oportunidade de construir conhecimentos a partir de outros já adquiridos, seguindo as orientações do PMEB (ME, 2007). Tivemos também o cuidado de que permitissem o trabalho em torno de mais do que uma componente do sentido de número, trabalhando assim o desenvolvimento de sentido de número na sua globalidade.

O primeiro conjunto de tarefas, centrado nos números naturais, permitiu o estudo dos números primos e compostos, da decomposição de um número em fatores primos, de outros subtópicos associados aos conceitos de divisor e múltiplo e ainda a noção de raiz quadrada e cúbica de um número. O segundo possibilitou o estudo dos números inteiros no que diz respeito à sua identificação, representação, ordenação e comparação. Além disso, proporcionou um trabalho em torno das quatro operações e também uma abordagem às potências de base inteira e expoente natural.

As tarefas seleccionadas para leccionar os tópicos referidos apresentaram características distintas quanto ao contexto, ao grau de dificuldade e de estrutura. Em relação ao contexto, algumas das tarefas continham situações reais e próximas das experiências quotidianas dos alunos (questões 1 e 3 da tarefa *Adição de Números Inteiros*), outras eram formuladas em contexto puramente matemático (questões 1 e 2.1 da tarefa *Multiplicação de Números Inteiros*). Em relação ao grau de dificuldade e de estrutura, algumas tarefas situavam-se no quadrante «difícil e aberta» (tarefa *Retângulos e mais retângulos*), outras no «difícil e fechada» (tarefa *Alvo*) (Ponte, 2005). Além disso, foram também fornecidas tarefas de natureza processual cujo grau de dificuldade era reduzido e a sua estrutura fechada. As tarefas Adição de Números Inteiros e Multiplicação de Números Inteiros são adaptadas dos materiais de apoio ao professor disponibilizados pela DGIDC e da autoria dos professores das turmas-piloto do 7.° ano (2009). As restantes tarefas aqui apresentadas foram construídas a partir de situações encontradas em manuais escolares.

Neste artigo descrevemos exaustivamente a cadeia de tarefas utilizada, apresentando apenas algumas das tarefas ou parte delas com o objectivo de evidenciar como se pode trabalhar alguns aspetos relativos ao sentido de número, baseando-nos no modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992).

O desenvolvimento de sentido de número e as tarefas

Nesta secção será feita uma análise de algumas das tarefas, ou de parte destas, da cadeia utilizada por nós na abordagem do tema Números e Operações do 7.° ano, no ano lectivo de 2009/10. Na nossa análise, enquadramos as tarefas e as situações nas três componentes do desenvolvimento do sentido de número, não

Retângulos e mais retângulos

1. Quantos retângulos diferentes, com dimensões inteiras (comprimento e largura), consegues desenhar com área igual 12?
   Nota: Utiliza o quadriculado do teu caderno e considera como unidade de área uma quadrícula.
2. Será que obténs o mesmo número de retângulos com área 16? E com área 7?
   Regista as tuas observações.
3. Estabelece uma relação entre as dimensões dos retângulos que desenhaste e as suas áreas.
4. Investiga se há alguma relação entre o número de retângulos e a sua área. Regista as tuas conjeturas, apresentando uma justificação.

Extensão à tarefa

5. Investiga quais são os números naturais que têm um número ímpar de divisores.
6. Descobre quais são os números que têm exatamente três divisores.

Figura 1. Tarefa *Retângulos e mais retângulos*

1. O João vive num prédio com 20 pisos, em que o piso −1 e o piso −2 correspondem às garagens.

1.1. O João entra no elevador no rés-do-chão.
   a. Em que botão deve carregar para subir dois andares? E para descer um andar?
   b. O que acontece se carregar no botão +3? E no botão −2?

1.2. Imagina que o João está no 6.° andar.
   a. Em que botão do elevador deve carregar para subir nove andares?
   b. E para descer sete andares?
   c. Se carregar no botão +2 quantos andares desce?
   d. E se carregar no botão −2 quantos andares desce?

Figura 2. Questão 1 da tarefa *Adição de Números Inteiros*

sendo nossa preocupação exibi-las pela ordem como surgiram na cadeia de tarefas fornecidas aos alunos.

Conhecimento e destreza com os números

No 7.° ano, foi necessário abordar os conceitos de números primos e compostos, tendo como ponto de partida conceitos adquiridos em anos anteriores, uma vez que nos encontrávamos na fase de reajustamento do programa. A tarefa que seleccionámos e adaptámos *Retângulos e mais retângulos* permitiu alargar o conhecimento que os alunos têm sobre os números e respectivas características. Ao ser-lhes pedido que desenhem todos os retângulos com uma determinada área, em que o comprimento e a largura são números inteiros, os alunos conseguem identificar mais facilmente regularidades e associá-las a propriedades dos números envolvidos a partir das construções geométricas efectuadas.

Nesta tarefa, os alunos são convidados a construir retângulos com uma determinada área numa grelha quadriculada, sendo levados a relacionar os números que representam as dimensões dos retângulos com o número que representa a medida da sua área. Esta abordagem possibilita que os alunos, de uma forma intuitiva, determinem todos os divisores de um número, revisitem este conceito — que em alguns casos está esquecido ou é confundido com o conceito de múltiplo de um número — e adquiram uma estratégia para os determinar a partir da decomposição num produto de dois fatores inteiros. A par disto, os alunos são confrontados com diferentes decomposições de um número num produto de dois fatores inteiros antecipando o trabalho em torno da decomposição em fatores primos.

Durante a atividade em torno desta tarefa, processos matemáticos como a organização de dados e a formulação de conjeturas são postos em evidência pelos alunos, facilitando uma atividade de exploração que conduz à identificação de regularidades. Nesta investigação, entre outras observações, espera-se que os alunos assinalem as medidas de áreas para as quais só é possível construir um único retângulo com dimensões diferentes. Deste modo, serão criadas condições para que os alunos construam um novo conceito — número primo. Pelo facto da exploração ser feita no contexto geométrico e os alunos utilizarem representações gráficas dos números, é-lhes possível construir mais facilmente este conceito.

De forma análoga, a representação gráfica dos números também possibilita a aprendizagem do conceito de número quadrado perfeito. Na exploração realizada pelos alunos, estes devem deparar-se com medidas de área para as quais é possível construir quadrados. Este aspeto pode levantar a discussão em torno da classificação de quadriláteros, mais especificamente, se o quadrado é um retângulo. Sendo ultrapassada esta questão, os alunos tomam conhecimento de um conjunto de números que podem ser decompostos num produto de dois fatores iguais, associando, de modo natural, a sua forma de representação gráfica à designação destes números — quadrados perfeitos. A exploração em torno dos números quadrados perfeitos pode permitir uma abordagem inicial ao conceito de raiz quadrada, também trabalhada neste tema, neste ano de escolaridade.

Conhecimento e destreza com as operações

O tópico relativo à adição de números inteiros é tratado no 7.° ano, nesta fase de transição entre os dois programas. A tarefa seleccionada *Adição de Números Inteiros* apresenta aos alunos três situações do quotidiano que, em conjunto, permitem um trabalho que favorece o desenvolvimento de sentido de número. O contexto real e próximo das vivências dos alunos dá significado aos números inteiros envolvidos nessas situações assim como à operação de adição entre eles (que surge de forma natural na procura de resposta às questões formuladas).

3. O Sr. Silva tem uma peixaria e faz um balanço semanalmente. Indica o lucro ou o prejuízo semanal traduzindo previamente, por uma expressão, cada uma das situações:

3.1 Na primeira semana de Março teve um lucro de 250 euros na venda de marisco e de 185 euros na venda de peixe variado.

3.2 Na segunda semana teve um prejuízo de 60 euros na venda de polvo e de 83 euros na venda de camarão.

3.3 Na terceira semana teve um lucro de 225 euros na venda de peixe e um prejuízo de 42 euros na venda de lulas.

3.4 Na quarta semana teve um prejuízo de 89 euros e um lucro de 55 euros.

Figura 3. Questão 3 da tarefa *Adição de Números Inteiros*

Como sabes, multiplicar tem a ver com a soma de parcelas repetidas. Por exemplo: $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ e, naturalmente, $4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$

1.

1.1. Completa a tabela de multiplicação seguinte

×		−4		−2	−1	0					+5
+4		−16							+12		
							+3				
0						0					
										−4	
−3			+9								
−5		+20									

Figura 4. Questão 1 da tarefa *Multiplicação de Números Inteiros*

Além disso, o facto da primeira situação referir-se ao deslocamento de um elevador entre diferentes pisos num prédio permite que os alunos construam um modelo de representação da situação semelhante à reta numérica.

Isto acontece em particular na primeira questão, onde os alunos são levados a construir um modelo matemático para representar o deslocamento do elevador entre os diferentes pisos do prédio. Uma vez que a questão sugere que o João se posicione no rés-do-chão, é possível que os alunos ordenem os números inteiros de forma intuitiva. Esta abordagem permite a comparação e ordenação de números inteiros, facultando o desenvolvimento de aspetos relativos à componente *Conhecimento e destreza com os números*. Na segunda questão, quando o João se posiciona no 6.°andar, os alunos podem recorrer ao modelo construído, de forma natural, para dar resposta às questões formuladas. A utilização deste modelo permite uma melhor compreensão do efeito da operação da adição entre números inteiros. Deste modo, os alunos compreenderão o efeito da adição e efectuarão a operação sem utilizar a linguagem simbólica aritmética associada à situação.

Este será o momento oportuno para que o professor discuta com os alunos de que forma podem representar em linguagem simbólica aritmética cada uma das alíneas da segunda questão, dando enfoque a aspetos da comunicação matemática. O desenvolvimento da capacidade de comunicar em linguagem simbólica é fundamental para que os alunos sejam capazes de a utilizar na resolução de um problema. Isto é, os alunos terão mais facilidade em modelar uma dada situação problemática se dispuserem de uma ferramenta que possibilite a tradução de um problema da linguagem natural para linguagem simbólica aritmética.

A terceira situação apresentada na tarefa *Adição de números inteiros* vem reforçar o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, pois é pedido aos alunos que escrevam a expressão que traduz o enunciado de cada uma das alíneas, antes de determinarem o lucro ou o prejuízo.

Outro propósito desta situação é melhorar a compreensão do efeito da adição entre números inteiros. De facto, os alunos têm intuições muito fortes que lhes permitem identificar, em cada alínea, se se obtém um lucro ou um prejuízo. Ao serem trabalhadas estas intuições na aula de matemática, os alunos compreenderão melhor o efeito da adição num conjunto numérico mais alargado em relação aos números naturais, ou seja, compreenderão que a soma de dois números positivos ou de dois números negativos é um número positivo ou negativo, respectivamente, e que a soma de um número positivo com um número negativo é um número positivo ou negativo, dependendo do valor absoluto das parcelas.

Outro aspeto da componente *Conhecimento e destreza com as operações* é a capacidade dos alunos estabelecerem relações entre diferentes operações. Na tarefa *Multiplicação de Números Inteiros* procura-se desenvolver nos alunos esta capacidade estabelecendo uma relação entre a multiplicação e a adição de números inteiros. Na introdução à tarefa, pretende-se que os alunos recordem que a multiplicação entre dois números naturais pode ser vista como uma adição sucessiva e, a partir deste conhecimento, apliquem-no no conjunto de números inteiros. Espera-se que os alunos de forma natural estabeleçam esta relação. No entanto, caso revelem dificuldades, o professor poderá recorrer a um contexto do quotidiano já explorado no problema da peixaria, exemplificando que $4 \times (-3)$ representa, no contexto da situação, quatro prejuízos consecutivos de 3 euros. Os alunos têm assim oportunidade de dar significado à representação em linguagem simbólica aritmética $4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$, reconhecendo que a soma de vários prejuízos é um prejuízo maior. Dessa forma, tirando partido da relação entre a multiplicação e a adição, os alunos começam a construir o conhecimento do efeito da multiplicação no conjunto de números inteiros. Compreenderão que o produto de um número positivo por um número negativo é um número negativo e, recordando a propriedade comutativa

2.1. Na tabela seguinte multiplica os números de cada linha e de cada coluna.

+3	−2	+4	
−4	+4	+2	
−2	+3	−3	

Figura 5. Questão 2.1 da tarefa *Multiplicação de Números Inteiros*

da multiplicação, os alunos compreenderão que o produto de um número negativo por um positivo é um número negativo. Importa assinalar que neste ciclo de ensino não é suposto que os alunos provem que a propriedade comutativa da multiplicação continua a ser verdadeira no conjunto de números inteiros.

Tendo em conta os exemplos apresentados na própria tabela, os alunos efetuam o seu preenchimento, assumindo que o produto de dois números inteiros negativos é um número positivo, sem questionar a veracidade desta regra. O professor poderá antecipar uma explicação caso esta seja posta em causa pelos alunos. Um modo de os tentar convencer será recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números inteiros (mais uma vez não é suposto que os alunos provem que esta propriedade é válida no conjunto dos números inteiros), utilizando um exemplo do tipo:

$(-3) \times (8 + (-2)) = (-3) \times (+6) = -18$ (efectuar o cálculo tendo em conta a prioridade da operação entre os parêntesis)

$(-3) \times (8 + (-2)) = (-3) \times (+8) + (-3) \times (-2) = (-24) + ?$ (efectuar o cálculo aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição)

Como $(-24) + ? = -18$, então $? = +6$

Deste modo, conclui-se que $(-3) \times (-2) = +6$

Este é um exemplo, entre outros, que pode facilitar a aceitação de que o produto de dois números inteiros negativos é um número positivo.

A questão 2.1. tem, aparentemente, como objectivo desenvolver a destreza de cálculo. No entanto, os alunos poderão resolvê-la de modos diferentes, por exemplo:

$(+3) \times (-2) \times (+4) = (-6) \times (+4) = (-24)$

ou

$(+3) \times (-2) \times (+4) = (+3) \times (-8) = (-24)$

Tirando partido das resoluções dos alunos, o professor deverá pôr em evidência que a multiplicação goza da propriedade associativa.

Com a exploração da tabela da primeira questão e da resolução da questão 2.1. é possível trabalhar todas as propriedades relativas à multiplicação de números inteiros.

Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e com as operações em situações de cálculo

A tarefa *Alvo* foi trabalhada pelos alunos após o tratamento do subtópico adição de números inteiros. Trata-se de um problema numérico que envolve múltiplas representações de um número, mais especificamente, a decomposição de um número na soma de números inteiros.

A resolução deste problema implica que os alunos tenham, inicialmente, de compreender a relação entre o contexto do problema e os cálculos necessários para obter uma resposta. Neste caso, é importante que compreendam que para obterem uma dada pontuação registada na tabela têm de adicionar três dos números apresentados no alvo. Posteriormente, terão de encontrar uma estratégia de resolução do problema que lhes permita determinar as diferentes combinações para cada pontuação obtida pelos quatro amigos. É esperado que os alunos comecem por efectuar combinações de forma aleatória e, só depois de observarem as experiências realizadas, se apercebam que existe um processo mais eficiente para determinar as soluções do problema. Esta estratégia envolve dois aspetos das componentes *Conhecimento e destreza com os números* e *Conhecimento e destreza com as operações*, nomeadamente, a decomposição de um número e a utilização do conhecimento das propriedades das operações na eficiência do cálculo. Por exemplo, para obter a pontuação do Joel, os alunos terão de compreender que a soma de duas das parcelas terá de ser simétrica em relação à terceira para que o resultado seja zero. Por fim, os alunos terão de elaborar um pequeno texto, onde deverão explicar se é possível os amigos obterem as pontuações de diferentes maneiras, nos três lançamentos, justificando as suas ideias com base nas diferentes combinações efectuadas. Deste modo, promover-se-á também o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática.

A concluir

A componente *conhecimento e destreza com os números* envolve, entre outros aspetos, a capacidade de efectuar múltiplas representações de um número, sendo a decomposição num produto de fatores um modo particular de encontrar formas numéricas equivalentes. Outro aspeto desta área do sentido de número é o sentido de ordenação dos números, que envolve a capacidade de estabelecer relações entre diferentes tipos de números. Com a tarefa *Retângulos e mais retângulos*, os alunos ao tomarem conhecimento dos números quadrados perfeitos e das formas de os representar (numérica e gráfica) adquirem bases para compreenderem as relações numéricas entre estes números e as suas raízes quadradas. Desta forma, os alunos ficam mais aptos para compararem números representados por raízes quadradas, sendo capazes de estabelecer o enquadramento de uma dada raiz quadrada de um número inteiro entre dois números inteiros consecutivos.

Os aspetos chave da componente *conhecimento e destreza com as operações* são a capacidade de compreender o efeito das operações, a relação entre elas e as propriedades das operações.

O conceito de uma operação só é totalmente adquirido quando existe uma compreensão do efeito da operação num conjunto de números. Com a tarefa *Adição de números inteiros* os alunos constroem um modelo (reta numérica) que os ajuda

Na figura está representado um alvo. O resultado obtido corresponde à soma das pontuações em cada conjunto de lançamentos. Após três lançamentos, os resultados obtidos por quatro amigos foram:

Nome	Número de pontos
João	16
Carlos	32
Joel	0
Cláudio	20

Numa pequena composição, explica se é possível, após três lançamentos, os amigos obterem, de maneiras diferentes, os resultados apresentados na tabela.

Figura 6. Tarefa *Alvo*

a compreender a ação da adição entre números inteiros. Mais tarde, recorrem, por iniciativa própria, à reta numérica para trabalhar a subtração entre números inteiros, apreendendo também o efeito desta operação neste conjunto de números. O facto de se optar por situações do quotidiano, em particular a situação da peixaria, sobre as quais os alunos têm intuições fortes que lhes permitem fazer asserções seguras sobre a adição de números inteiros, reforça a compreensão do efeito desta operação neste conjunto de números.

Com a tarefa *Multiplicação de números inteiros* os alunos tiram partido do conhecimento que têm da operação adição para compreenderem o efeito da multiplicação no conjunto dos números inteiros, relacionando as duas operações. O efeito da multiplicação de números inteiros é totalmente entendido quando os alunos recorrerem às propriedades da operação de multiplicação para operar.

Ao propor tarefas que permitam trabalhar os três aspetos da componente conhecimento e destreza com as operações (o efeito das operações, a relação entre elas e o conhecimento das suas propriedades), os alunos compreendem os conceitos envolvidos e, quando efetuam cálculos, recordam-se mais facilmente e de forma correta dos métodos de cálculo. De facto, existindo uma relação de equilíbrio entre esta compreensão e a competência de cálculo promove-se o desenvolvimento da destreza de cálculo.

A componente aplicação do *conhecimento e da destreza com os números e operações* surge muito associada aos processos envolvidos na resolução de problemas, como por exemplo o aspeto relativo à compreensão da relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário confunde-se com a definição de uma estratégia de ataque ao problema. Além disso, como esta componente envolve o conhecimento sobre os números e as operações e a facilidade de lidar com eles, naturalmente, tal como McIntosh *et al.* (1992) referem, alguns dos aspetos das outras duas componentes confundem-se com esta componente. Na tarefa *Alvo*, o aspeto «múltiplas representações de um número», relativo à componente conhecimento e destreza com os números, surge associado à «inclinação para utilizar uma representação eficiente e/ou um método de cálculo» desta componente.

Neste artigo, através de algumas tarefas e alguns exemplos, descrevemos como procurámos desenvolver o sentido de número dos nossos alunos no tratamento do tema Números e Operações no 7.º ano. Este trabalho resultou, por um lado, da necessidade de nos adaptarmos a um reajuste do PMEB (ME, 2007), e, por outro, do hábito que temos de refletir sobre a nossa prática e aprofundar o nosso conhecimento científico e didático.

No fim deste trabalho, reconhecemos que para implementar o programa na aula de Matemática é fundamental que o professor seja capaz de definir um percurso de aprendizagem refletido nas tarefas que propõe aos seus alunos. Neste sentido, se as tarefas de algum modo traduzem o percurso de aprendizagem, impõe-se ao professor um grande desafio na selecção dos materiais a utilizar na aula de matemática. Apesar da sequência de tarefas por si só não conduzir à concretização das aprendizagens matemáticas dos alunos, é um recurso fundamental para ajudá-los a realizar o percurso definido.

Referências

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (disponível *online*)

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, vol. 12 (3), 2–8.

Professores das turmas-piloto do 7.º ano de escolaridade (2009). Números inteiros — Proposta de sequências de tarefas para o 7.º ano — 3.º ciclo (materiais de apoio ao professor). Lisboa. (retirado de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/016_Sequencia_Numeros_Inteiros_TP_3c7.pdf em 02/08/2011)

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

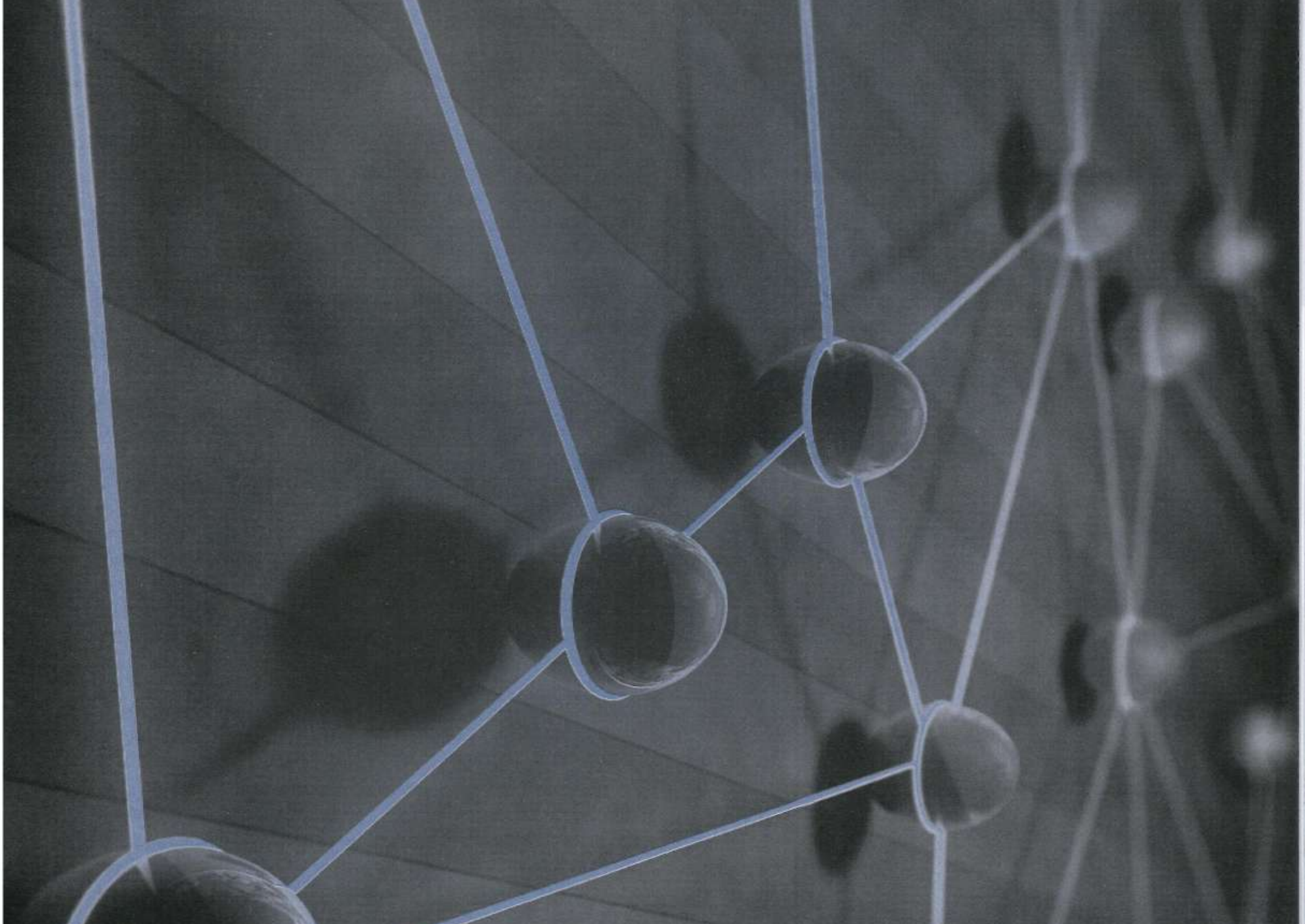
Alexandra Rocha
Escola Secundária de S. Pedro da Cova

Cristina Natália da Fonseca
Escola Secundária de Valongo


TI-nspire™ CX
Matemática e Ciências agora a
CORES!
O TI-nspire™ CX é o mais recente elemento da família TI-Nspire, desenvolvido a pensar em si e nos seus alunos!
Com todas as funcionalidades da tecnologia TI-Nspire e ainda:
• Ecrã retro-iluminado e a CORES
• Bateria recarregável incluída
• Utilize as suas próprias imagens a cores
• 115 MB de memória total
• Software de computador incluído para Professores e Alunos.
Mais informações em
education.ti.com/portugal
TI-nspire CX
TI-nspire CX CAS
Todos os menus em Português!
Texas Instruments
A Sua Experiência. A Nossa Tecnologia. O Sucesso Dos Seus Estudantes.

Grafos e outros conteúdos: algumas (im)possibilidades de conexões

C. Miguel Ribeiro
Rui Feiteira



Este texto resulta de uma reflexão efetuada após a dinamização de uma sessão prática e de um curso no âmbito do ProfMat onde se pretendia, entre outros aspetos, explorar diversas situações que permitissem efetuar uma abordagem informal à teoria de grafos — possível desde o 1.º Ciclo. Durante o decurso das atividades exploradas[1], surgiram algumas dúvidas e discussões relativamente aos casos em que se (poderia) deveria explicitar que se estava a utilizar a teoria de grafos e em que ocasiões uma mesma representação (modelação) poderia ser, ou não, utilizada para estudar outros conteúdos, e, em cada caso, quais.

Com o intuito de podermos elucidar em que casos se pode, ou não, utilizar a modelação, com recurso ao que se denomina por grafos, apresentamos alguns exemplos de tarefas em que a modelação das situações específicas permite abordar conteúdos tão distintos como sejam alguns conceitos base de função ou de probabilidades, mas não permitem, nunca, passar da modelação efetuada nessas mesmas ocasiões para uma exploração geométrica da mesma. Uma das possíveis razões que pode explicar a ocorrência de situações em que isso se verifica poderá ser a de confundir um grafo com a sua representação gráfica ou geométrica, que são, definitivamente coisas bastante distintas.

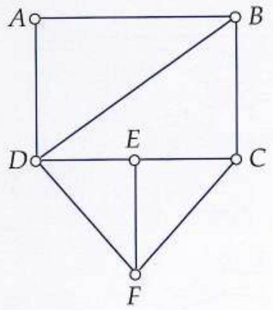


Figura 1

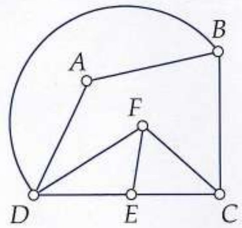


Figura 2

Figura 3

Definir um grafo, de modo a que até um aluno do 1.º Ciclo o entenda poderá ser através de um enunciado simples, por exemplo: «um grafo é uma figura (desenho) formado por dois conjuntos, sendo um deles o conjunto ‹das coisas› (que podem ser alunos, blusas, peças de dominó, ...) e o outro o conjunto das relações entre essas ‹coisas›», ou seja, trata-se de figuras compostas por «coisas» que podem estabelecer relações entre si; no caso de estas se verificarem elas são evidenciadas através de ligações entre si. De uma forma menos intuitiva, e mais formal, — para que não possamos ser acusados, pelos mais cépticos, de falta de rigor matemático — um grafo é um par ordenado $G = (V, A)$ de conjuntos finitos, onde V é o conjunto de vértices e A é uma coleção de subconjuntos de dois elementos de V, a que se chama conjunto de arestas. É de salientar que esta nomenclatura nada tem a ver com a de vértices e arestas no contexto geométrico, são portanto homónimas. Este último conjunto, o conjunto das arestas é fundamental, pois são elas que nos informam (ou nos permitem informar) da existência de relações entre os elementos do conjunto dos vértices.

A título de exemplo apresentamos duas representações possíveis da modelação de uma situação em contexto real (por exemplo, possíveis formas de circular pelas divisões de uma habitação). (Figura 1 e 2)

Ambas as figuras podem ser definidas pelo par ordenado $G = (V, A)$ onde $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ e

$$A = \{\{A,B\},\{B,C\},\{E,C\},\{E,D\},\{D,A\},\{D,B\},\{E,F\},\{D,C\},\{F,C\}\}.$$

Através da figura 1 poderíamos ser tentados a pensar em conceitos geométricos (quadrado, triângulos, pentágono, hexágono). Porém, claramente isso já não poderia ocorrer considerando a figura 2 (o que só por si nos poderá levar a pensar se este tipo de exploração geométrica, neste contexto, teria algum sentido). Este é um dos aspetos que queremos salientar que não podem nunca acontecer considerando situações desta índole como ponto de partida para a modelação.

Feito este importante parêntesis, apresentamos um conjunto de tarefas, bem como suas possíveis explorações, em contextos e anos de escolaridade bastante diversos, justificando como e porquê, se poderão utilizar nuns casos e nunca noutros. Grande parte destas tarefas foi já realizada em contexto de sala de aula — do 1.º Ciclo ao ensino secundário —, e em contextos em que a resolução de problemas ocorreu associada a tarefas promotoras de verdadeiras aprendizagens (Lesh, Hoover, Kelly, & Post, 2000), sendo o processo de resolução encarado como metodologia/processo, por via do qual são desenvolvidos diversos conteúdos (Leal, Veloso, & Abrantes, 1994) e não como um conteúdo *per si*. Com o intuito de que a resolução de problemas e a modelação possam assumir este papel de promoção de efectivas aprendizagens, conduzindo os alunos a um nível de raciocínio superior, é importante que ocorram associados a tarefas preparadas de forma a encorajar a realização de múltiplas abordagens e interpretações; dêem prioridade à comunicação matemática; tornem necessária uma documentação dos resultados finais e façam da auto-avaliação uma sua componente inerente.

No caso concreto, as situações apresentadas foram preparadas tendo por pano de fundo a pretensão de que, durante o processo de resolução, os alunos fossem construindo uma noção de grafo válida bem como de algumas das suas propriedades — sem que para isso se chegue necessariamente a quaisquer tipos de formalização, ocorrendo esta quando exclusivamente necessário ou solicitado pelos alunos como forma de simplificar a sua própria representação.

Com o intuito de permitir que os alunos possam modelar matematicamente momentos do seu quotidiano, contribuindo também para uma consciencialização da presença desta ciência no seu dia a dia, consideramos que devemos, preferencialmente, partir das realidades vivenciadas pelos alunos e trazê-las para a sala de aula, em forma de problema. Uma destas situações em que, pelo menos nas turmas em que foi proposta, os alunos referiram, na fase inicial, que não tinha qualquer tipo de relação com a disciplina de matemática prendia-se com a prática do desporto. De modo a abordar situações de modelação, e sua exploração matemática, centradas em momentos «improváveis» da existência de matemática, optámos por preparar uma tarefa em que se parte de um aquecimento em andebol para a modelação. Este tipo de tarefa é, em tudo, similar, ao caso do problema dos abraços ou dos apertos de mão, mas é, cremos, para os alunos, mais motivadora e desafiante. Vários outros tipos de problemas podem ser utilizados para introduzir a modelação e o conceito de grafo. Muitos deles são utilizados inclusivamente desde o 1.º Ciclo e podem estar relacionados com as famosas máquinas de fazer contas (entra um número e após uma série de operações obtém-se o resultado), com as relações existentes entre um conjunto de animais e um de plantas, com a determinação do número de formas distintas (combinações possíveis) de vestir n saias diferentes e m blusas também elas diferentes, ou diferentes

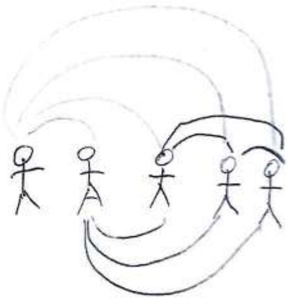


Figura 4

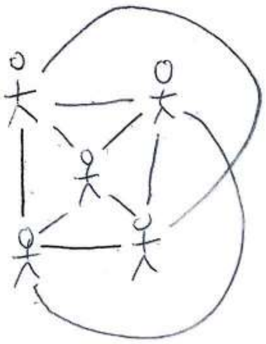


Figura 5

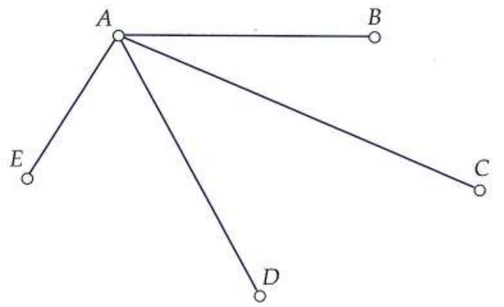


Figura 6

tipos de gelados que se podem fazer com, por exemplo, 2 sabores de entre 3 possíveis.

A tarefa seguinte foi apresentada a várias turmas desde o 3.º até ao 12.º ano de escolaridade e em todas elas, apesar de apresentarem resoluções que evidenciavam níveis de desenvolvimentos distintos (mas não de forma necessariamente linear com o avançar dos anos), sem grande dificuldade, os alunos apresentaram uma solução.

O aquecimento

Numa aula de educação física, em que se vai jogar andebol, durante o aquecimento, em grupos de cinco, para quem é que cada um dos alunos pode passar a bola? Como poderemos representar todas as distintas situações possíveis?

Esta situação, tal como problema que é, poderá ser resolvida de distintas formas recorrendo a diversos processos de representação (e. g. tabela, listagem, desenhos) devendo todas elas ser exploradas para que os alunos se possam consciencializar disso mesmo. Recorrendo ao desenho/esquema os alunos fazem diferentes tipos de representações (equivalentes). (Figuras 3, 4 e 5)

Através da exploração deste caso «simples», para além da modelação e do estudo dos grafos (que nem era um dos pressupostos iniciais), podemos tornar óbvias algumas relações possíveis de estabelecer entre distintos tópicos e conteúdos matemáticos que os alunos frequentemente consideram encontrarem-se de costas voltadas, ignorando-se completamente. Podemos explorar contextos tão variados como sejam, por exemplo, o conceito de função e de variável dependente e independente, sequências numéricas, generalizações de termos gerais de progressões e probabilidades.

Com a exploração deste tipo de atividades, sem que seja para isso necessário um contexto formal de obrigatoriedade de abordagens de determinados conteúdos, estamos a facultar aos alunos um contacto antecipado com eles — ainda que de forma intuitiva — bastante mais cedo do que ocorre normalmente. Mas por serem abordagens informais, que resultam de ocasiões que os alunos assumem como suas, permitimos-lhes, desta forma, que vão construindo os conceitos ao longo do tempo com verdadeira compreensão, cimentando assim de forma mais sólida os pilares da sua formação matemática. Vejamos exemplos de como se poderia partir desta situação para explorar cada um dos conteúdos referidos anteriormente. Poderíamos efetuar uma primeira (ou mesmo intensiva) abordagem ao estudo das

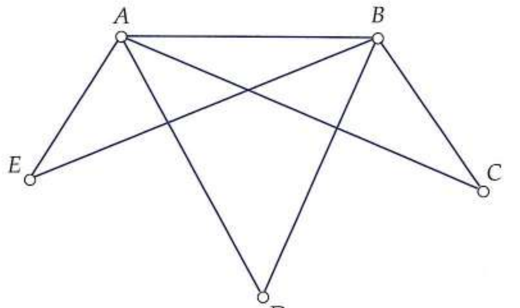


Figura 7

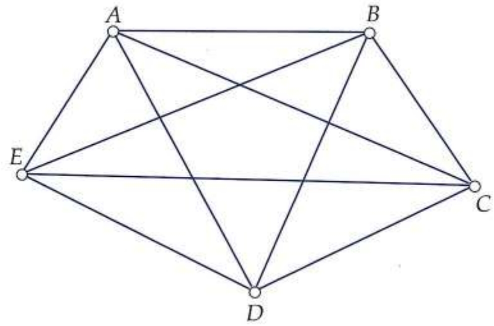


Figura 8

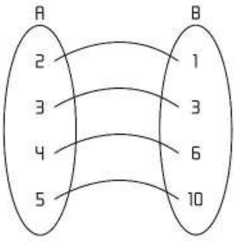
funções, utilizando a tarefa anterior bastando para isso ir efetuando a modelação passo a passo, supondo que é o amigo A que possui a bola. (Figura 6)

O amigo A poderá passar a bola aos amigos B, C, D e E. Por sua vez, o amigo B pode passar a bola ao amigo C, D ou E. (Figura 7) É de salientar que estamos interessados em registar as relações entre os amigos, relações essas que se referem ao facto de a bola ter já, ou não, circulado entre cada um deles. (Situação análoga à que ocorre com os apertos de mão onde A cumprimentar B é o mesmo, em termos de modelação da situação, que o inverso — não se considerando os sentidos, isto porque a relação «passar a bola» é de facto uma relação simétrica.)

Procede-se de forma análoga para os outros dois amigos que faltam. (Figura 8)

Facilmente se constata que são dez as formas distintas de a bola circular entre todos. E se agora fossem 6 amigos? E 8? E n amigos? (dependendo do nível de desenvolvimento dos alunos).

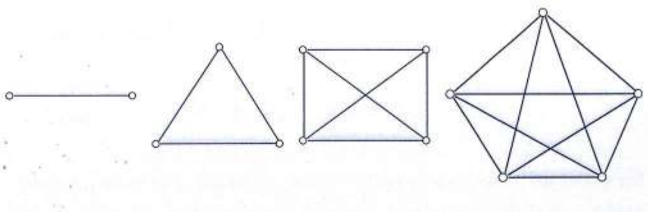
Com este processo de construção, os alunos rapidamente se apercebem de que ao introduzirem um novo amigo no grupo, o número de formas de passar a bola vai depender de quantos já se lá encontram. Assim, se considerarmos o número de amigos como conjunto de partida, $A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e $B = \{1, 3, 6, 10, ...\}$



o número de ligações como conjunto de chegada, podemos transformar a modelação em diagrama sagital, tabela, gráfico ou padrão, surgindo a noção de correspondência unívoca, mas também, intuitivamente, de dependência. Permite ainda explorar as conexões entre as diferentes formas de representação, partindo de um grafo, com os seus vértices e arestas, e obtendo, em última instância, uma representação gráfica (relembramos que um grafo não fica definido pela sua representação gráfica).

N.º amigos	2	3	4	5
N.º de passes	1	3	6	10

Um outro conteúdo que se encontra ao alcance deste ponto de partida (o aquecimento em andebol) é o das sequências numéricas como forma de determinar padrões numéricos. Começamos por considerar que no aquecimento só participam 2 alunos e registemos as possibilidades de passes. Depois vamos pedindo a outros alunos para se juntarem ao grupo. O caso descrito pode ser representado utilizando os esquemas seguintes:



Convertendo em forma de tabela, de modo a que os alunos tenham de completar a informação em falta — também para que tomem contacto e se habituem a que uma mesma situação poderá ser apresentada de distintas formas, obtemos, por exemplo:

2 alunos			8 alunos	n alunos
1 possibilidade	3 possibilidades	10 possibilidades		

O preenchimento das 4 primeiras colunas é relativamente fácil, basta para tal analisar figura a figura. O problema coloca-se na última coluna. Quantas ligações existem para n alunos? Para responder a esta questão comecemos por notar que, em qualquer das figuras, todos os vértices estão ligados entre si — existe uma relação entre todos os alunos. Uma abordagem possível começa por contar quantas ligações chegam a cada vértice; para obter o total de ligações das figuras, basta somá-las. Assim,

Número de pontos	Soma das ligações	N.º de ligações
2	$1+1=2$	1
3	$2+2+2=6$	3
4	$3+3+3+3=12$	6
5	$4+4+4+4+4=20$	10
8	8×7	
N	$n(n-1)$	

Em cada uma das situações anteriores o número de ligações de cada vértice é inferior em uma unidade ao número total de vértices (pontos). Assim, para conhecermos qual o número total de ligações basta multiplicar o número de pontos pelo número de ligações que cada ponto apresenta, dividindo posteriormente por dois, obtendo-se assim o resultado para qualquer n pertencente ao contexto ($n \in \mathbb{N}$). Este resultado foi facilmente determinado, até por alunos do 1.º Ciclo, referindo um deles que, «se contássemos todas estávamos sempre a dobrar as ligações de cada ponto, portanto temos de fazer o contrário, dividir por dois».

Utilizando a mesma situação do aquecimento, podemos modela-la, através de representação gráfica de grafos de modo a abordar o tema das probabilidades[2]. Se os alunos — dez no total — estiverem vestidos com quatro coletes brancos e os restantes pretos, de que forma pode o professor escolher, ao acaso, (por exemplo atirando a bola ao ar e quem a apanhar será o escolhido) dois deles para exemplificar um determinado exercício? Qual a probabilidade de que o colete de ambos seja branco?

Uma forma de modelar esta situação é através de uma representação gráfica de um grafo; denominada tradicionalmente por diagrama de árvore ou por árvore de probabilidade. (Figura 9)

Voltando à questão anterior, para responder basta escolher o caminho adequado, ou seja, procurar a forma de ir desde o início até ao final sempre perseguindo a mesma cor — a primeira bola é apanhada por um aluno (com colete preto ou branco) e após lançar a segunda bola, procurar as situações que podem ocorrer de forma que o aluno que a apanhe tenha um colete da mesma cor do anterior. Recorrendo à visualização gráfica do grafo facilmente se determina a probabilidade pretendida

$$P\,(\text{escolher dois atletas de camisola branca}) =$$
$$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.$$

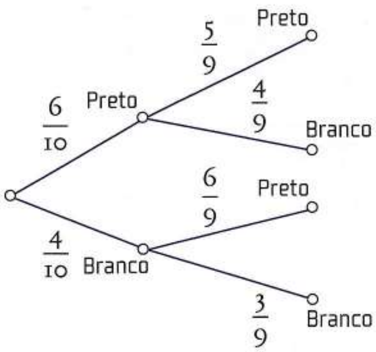


Figura 9

Com este conjunto de atividades pretendemos ilustrar algumas possíveis formas de, partindo de uma mesma situação, abordar áreas matemáticas bastante distintas ao longo dos ciclos de escolaridade. Esta abordagem pode ser efetuada nos anos em que esses conteúdos fazem parte do currículo ou, tal como no nosso caso, em anos bastante anteriores (com as necessárias adaptações), de modo a que os alunos tomem contacto com eles o quanto antes. Esta tomada de contacto permitir-lhes-á irem efetivamente integrando estes conceitos no seu conhecimento matemático, de forma a que quando forem formalizados não lhes sejam de todo estranhos.

Pretendemos também, a um outro nível, salientar que, apesar de muitas das situações do quotidiano serem suscetíveis de modelação através de grafos, nem todas são exequíveis noutros contextos que envolvam ou explorem conteúdos relativamente aos quais não existe qualquer tipo de relação. O facto de se efectuarem modelações que permitam ao aluno criar os seus significados e a capacidade de aplicar os conhecimentos adquiridos em contextos diferentes daqueles onde foram apreendidos, conduz a que estes lhes atribuam um caráter móvel através de uma rede conceptual. Porém, se nas oportunidades que lhes facultamos, introduzimos alguma alteração (de forma, conteúdo ou contexto) menos adequada, poderemos levar à formação de buracos negros em tais redes conceptuais (tornando-as portanto menos densas), traduzindo-se mais previsivelmente na criação de lacunas e incongruências nos conhecimentos adquiridos e entre estes e os anteriores/posteriores do que em progressos efetivos no processo de generalização dos conhecimentos.

Como último apontamento queremos salientar, mais uma vez, que nem sempre é possível recorrer aos grafos ou à sua representação gráfica para explorar alguns conteúdos, como sejam, por exemplo, conteúdos geométricos. Esta impossibilidade não é imediatamente óbvia, — pois podemos representar as arestas dos grafos como segmentos de reta e os pontos imagem da modelação por vértices — sendo necessária alguma análise para averiguar em que situações, e para que contextos, essa transposição se torna possível, sendo matematicamente coerente.

Notas

[1] Algumas das tarefas propostas na sessão prática podem ser consultadas nas atas do ProfMat2008.

[2] Apesar de fazer parte integrante do Programa do 9.° ou do 12.° ano, esta forma de representação é (pode ser) também utilizada logo no 1.° Ciclo, para modelar, por exemplo problemas envolvendo multiplicação interpretada como reunião de conjuntos, modelo combinatório, bem como envolvendo a reta numérica e o modelo retangular.

Referências

Leal, L., Veloso, E., & Abrantes, P. (1994). Pode haver um currículo de Matemática centrado na resolução de problemas? In D. Fernandes & A. Borralho & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 239–259). Lisboa: IIE.

Lesh, R., Hoover, M. B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thoughts-revealing activities for students and teachers. In R. A. Lesh & A. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

C. Miguel Ribeiro

CIEO, Universidade do Algarve

Rui Feiteira

Escola Secundária Poeta António Aleixo, Portimão

Sobre a proposta «Revisão da Estrutura Curricular»

Suponho que um observador minimamente atento à vida educativa do país já reparou que a mudança de responsáveis máximos pela educação gera sempre algumas alterações no discurso, nas opções e na intervenção direta nas regras que regem o funcionamento de todo o sistema educativo. Assim tem sido e esta última alteração da equipa ministerial não é nenhuma exceção à regra.

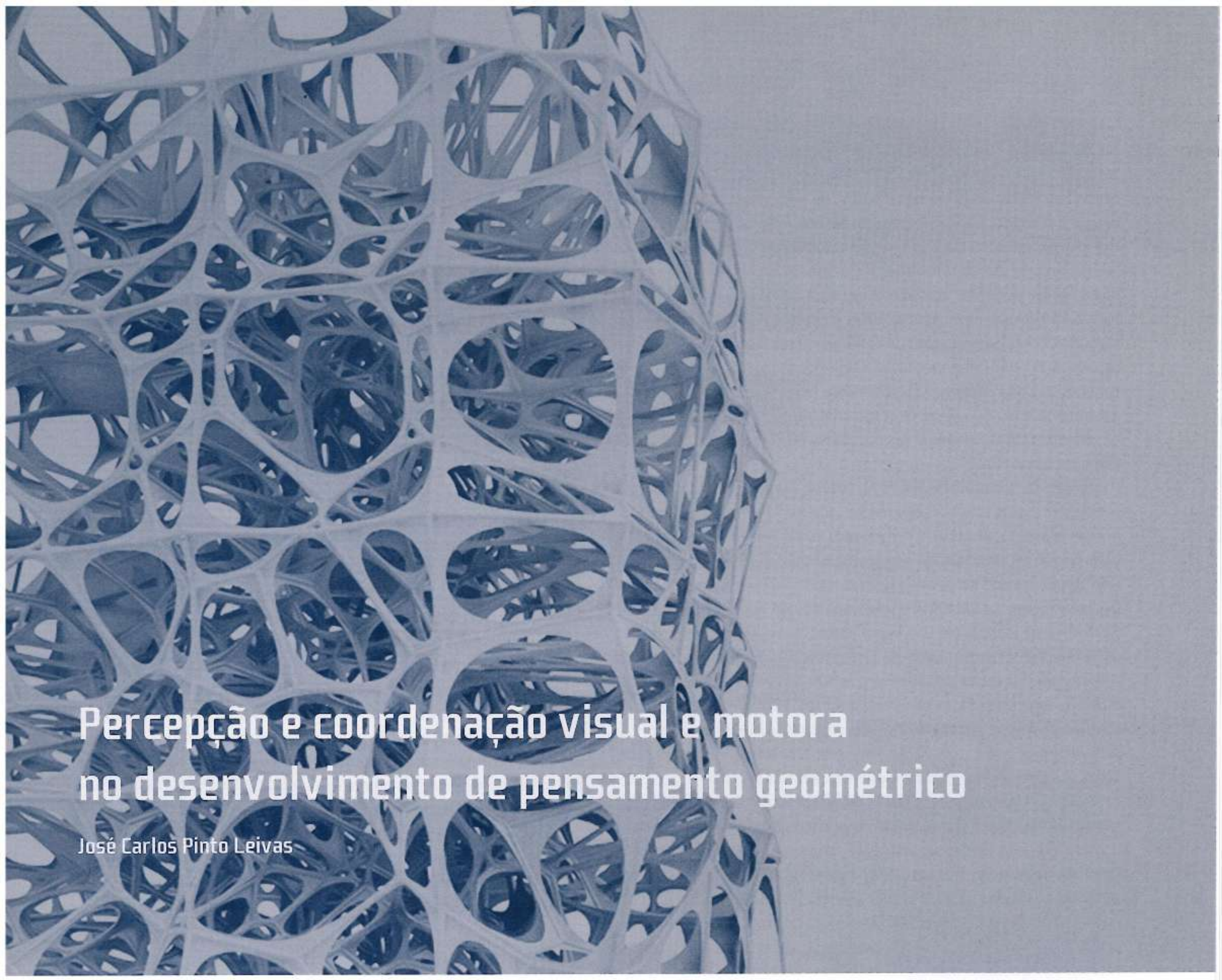
Foi apresentada uma proposta de reorganização curricular que deixa bem clara a intenção de eliminar as áreas curriculares não disciplinares (a Formação Cívica e o Estudo Acompanhado), a vontade de diminuir o número de horas letivas totais, tanto nos horários dos alunos como nas horas letivas dos professores, sendo que neste caso ainda será uma diminuição superior pois existem horas lecionadas por dois professores que vão passar a ser só por um. Também parece haver uma tendência para o reforço da normalização, tirando às escolas e aos alunos a possibilidade de poderem escolher nalgumas situações (o Inglês torna-se exclusivo no 2.° ciclo e obrigatório no 3.° ciclo; no 2.° ciclo, a área de Educação Artística e Tecnológica fica integrada por 3 disciplinas, com 2 tempos cada uma; desaparecem os 2 tempos a decidir pela escola no 3° ciclo; a disciplina trienal específica no secundário passa a ter obrigatoriamente 6 tempos semanais; é extinta a opção anual 2, no 12.° ano).

A par destas evidências, o texto está repleto de expressões de significado difuso (*disciplinas fundamentais; trabalho consistente de alunos e professores; conhecimentos fundamentais; disciplinas essenciais; objectivos claros, rigorosos, mensuráveis e avaliáveis; conteúdos disciplinares centrais; conhecimento estruturante; maior rigor na avaliação;...*) o que, aliado ao facto deste documento ser apresentado como o início de uma etapa que terá desenvolvimentos posteriores, mas que ainda não são apresentados por agora, torna a discussão da proposta algo difícil, pois o rigor e a clareza não estão patentes no texto apresentado. Portanto, há várias interrogações que podem ser levantadas. Por exemplo, como é que o aumento de disciplinas, a partir da divisão das que existem atualmente vai «reduzir a dispersão curricular», como se afirma no documento? Se a introdução de exames e a criação de precedências entre o Básico e o Secundário vai com certeza aumentar a seleção dos alunos, de que forma aumenta imediatamente o rigor na avaliação? Para justificar o fim do desdobramento em Ciências da Natureza no 2.° ciclo, bastará invocar que a atividade experimental pode ser efetuada com toda a turma? Quando há programas novos em algumas disciplinas, nomeadamente a Matemática no Ensino Básico, ainda em fase de generalização, vai haver novos programas ainda nesta legislatura? Como é que uma proposta que se apresenta mais normativa assume como um dos seus princípios a redução do controlo central e a aposta na autonomia gradual das escolas?

Não existe nenhuma preocupação em dar uma unidade aos graus de ensino envolvidos, sendo cada um dos ciclos do Básico e o Secundário tratados como entidades separadas e com ênfases distintas (o 1.° ciclo apenas tem uma menção específica em todo o documento e até de uma forma vaga). Este problema torna-se ainda mais agudo com a recente revogação do Currículo Nacional do Ensino Básico, onde se aponta para a eliminação dos seus reflexos nos programas das disciplinas que o consideraram.

Será que a melhoria dos resultados escolares, visada por esta proposta, vai acontecer? Os esforços devem ser dirigidos para que isso aconteça efetivamente e será importante estar atento, no sentido de percebermos o que se irá passar nos próximos tempos.

Fernando Nunes



Percepção e coordenação visual e motora no desenvolvimento de pensamento geométrico

José Carlos Pinto Leivas

Resumo

O artigo apresenta uma reflexão teórica sobre percepção e coordenação visual motora incluindo sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas com professores dos anos iniciais. Utiliza o conceito de intuição no sentido empregado por Fischbein, ou seja, uma forma de construção de conhecimento e sua relação com percepção para o desenvolvimento de um pensamento geométrico. Caracteriza habilidades de coordenação visual e de coordenação motora e as associa por meio de atividades que exploram, mais especificamente, intuição e percepção, dobraduras e cores para o seu desenvolvimento. Sugere tais atividades como possibilidades de contribuir para uma Educação Matemática, particularmente, para uma Educação Geométrica, na busca de alternativas de respostas ao questionamento elaborado por Freudenthal sobre o que é Geometria.

Introdução

Este artigo foi escrito a partir da elaboração de um texto a ser utilizado na Educação à Distância em uma disciplina de um Curso de Pedagogia. A partir do diálogo estabelecido com os professores em formação, foi possível incrementá-lo e aperfeiçoá-lo para uma publicação mais abrangente de modo a atender leitores que não tiveram acesso ao mesmo, especialmente pelo interesse e sugestão daqueles que o utilizaram.

Acredito que, muito mais do que simplesmente estudar ou ensinar Geometria, é necessário desenvolver formação de habilidades que permitam ao estudante aprendê-la de uma forma específica, que varia de indivíduo para indivíduo e, para tal, a percepção é um dos elementos que utilizo para desenvolver um trabalho de construção de um pensamento geométrico. Isso pode ser feito por meio de atividades desenvolvidas de forma dinâmica, proporcionando às crianças o manuseio de materiais concretos, o emprego de cores, os movimentos e a memória para compreender e aplicar cada uma das características que conduzam a uma estruturação mental-visual centrada na percepção, elemento muito pouco explorado nos cursos de Geometria que tenho investigado.

Segundo LUFT (2006, p. 1), Kant [B 40] parte de que a Geometria é uma ciência capaz de determinar *sinteticamente e a priori as propriedades do espaço*; sendo assim, *o que precisa ser* *a representação do espaço para que, a partir dela, seja possível tal conhecimento?* Para o autor, a conclusão kantiana é a seguinte: *o espaço precisa ser originariamente intuição (...). Mas essa intuição precisa ser encontrada em nós a priori, ou seja, antes de toda percepção de um objeto.* O argumento de Kant parte da constatação de um conhecimento dado como supostamente a priori, e avança — pressupondo implicitamente todo o arcabouço das teses centrais da filosofia transcendental, como a distinção entre juízos analíticos, sintéticos a *priori* e sintéticos a *posteriori* — na direção do esclarecimento de qual a correta leitura do conceito de «espaço» para que tal ciência seja possível. Diz LUFT (2006, p. 2) que o *procedimento é claramente regressivo, ao direcionar-se do condicionado (Geometria como ciência dada) ao condicionante (a estrutura transcendental que possibilita a Geometria como ciência sintética a priori).*

Segundo Fischbein (1987), intuição ou conhecimento intuitivo é um tipo de cognição que se refere às afirmações autoevidentes, as quais ultrapassam fatos observados, o que a diferencia de percepção, algo como uma cognição imediata, não necessitando de prova para sua existência. Entende o autor por cognição as componentes estruturais de qualquer comportamento adaptativo, *o papel essencial da intuição é conferir às componentes conceituais de um esforço intelectual as mesmas propriedades as quais garantem a produtividade e a eficiência adaptativa de um comportamento prático.* (FISCHBEIN, 1987, p. 19), enquanto que *o principal atributo do conhecimento intuitivo é o sentimento de uma certeza direta e este é produzido, em primeiro lugar, pela impressão de auto-evidência.* (Ibid., p. 21).

Dessa forma entendo como Fischbein (1987), que a percepção é um elemento importante na construção do conhecimento e, para ele, ela difere da intuição, pois intuição vai além dos fatos perceptíveis, necessitando uma extrapolação das informações advindas desses fatos. As representações intuitivas, embora de aparente autoevidência, são absolutas e imutáveis e sendo assim, a utilização da percepção de atividades diversas, tais como aquelas realizadas com folhas de papel ou explorando cores, como as indicadas neste texto, permitem aos estudantes buscarem propriedades de objetos matemáticos a serem, posteriormente, definidos com o rigor exigido pela matemática formal. Tais propriedades, em se mantendo invariantes e podendo ser abstraídas na ausência do material observável, creio possibilitarem a construção de conceitos. Além disso, creio poder afirmar que a passagem para a visualização, por meio dos materiais concretos observáveis, permite a construção de estruturas mentais, em direção à formação de conceitos.

Para Leivas (2009, p. 21), *intuição é um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto.* O conceito deve ser formado de forma reflexiva e consciente, produzindo sentimento de certeza a partir da autoevidência, ou seja, utilizando e desenvolvendo a percepção, já no início da escolaridade, os indivíduos poderão apresentar uma boa formação geométrica e uma efetiva construção do espaço geométrico.

A esse respeito Oliveira (2005, p. 115) apresenta uma discussão sobre os estudos de Piaget e afirma que

Inicialmente a construção do espaço se prende a um espaço sensório-motor ligado à percepção e à motricidade. Este espaço sensório-motor emerge dos diversos espaços orgânicos anteriores, como o postural, o bucal, o tátil, o locomotor, etc. o espaço sensório-motor não é constituído por simples reflexos, mas por interação entre o organismo e o meio ambiente, durante o qual o sujeito se organiza e se adapta continuamente em relação ao objeto.

Piaget e Inhelder (1993) ao tratarem das estruturas perceptivas ou sensóriomotoras afirmam que elas constituem o ponto de partida para a construção das estruturas representativas, elemento fundamental na construção do espaço geométrico a partir da infância o que acredito irá culminar na consolidação de um pensamento geométrico avançado, o que é definido por Leivas (2009, p. 136) como *um processo capaz de construir estruturas geométricas mentais a partir de imaginação, intuição e visualização, para a aquisição de conhecimentos matemáticos científicos*, cujo mapa conceitual pode ser visualizado na Figura 1.

A partir de atividades de observação, movimentação e transformação realizadas, por exemplo, por bebês, por volta dos 8 aos 10 meses de idade, Piaget e Inhelder (1993, p. 30), consideram que *Ora, todo desenvolvimento que, da percepção, chega à inteligência, mostra precisamente que a transformação como tal adquire uma importância cada vez maior e cada vez mais explícita, em oposição ao primado inicial aparente da forma perceptiva estática.* Além disso, ao abordarem a importância do cuidado com os movimentos realizados a partir da percepção, em que se estabelecem relações entre os elementos figurais e os motores, dependerá a interpretação que os indivíduos darão à intuição espacial e afirmam que *É nesse sentido que toda percepção implica em um esquema sensório motor, que aplica à situação atual o resultado do conjunto das construções anteriores.* (idem, p. 30).

Ainda nos estudos piagetianos realizados por Oliveira (2005, p. 111), há o fortalecimento da relevância das construções físicas em Geometria na formação dos indivíduos e, consequentemente, da inteligência e desenvolvimento matemático.

Os espaços matemáticos são construídos a partir de axiomas e descritos por uma geometria; algumas dessas geometrias podem definir o espaço físico e o psicológico. O sujeito, tanto ao construir o espaço matemático como ao descrever o espaço físico, recorre às suas estruturas mentais — perspectivas e cognitivas. Para Piaget (1949, p. 193 e 259), o espaço, em sua gênese psicológica, começa por ser simultaneamente físico e matemático, isto é, depende tanto do objeto como do sujeito.

Assim é que se fortalece outra forma perceptiva, que é a visual, na qual se combina movimentos oriundos do olhar com os motores, objeto das atividades sugeridas nesse trabalho, em que tais atividades perceptivas evoluem, progressivamente, em grau de dificuldades motoras, orientadas pela disposição em cores.

No que segue apresentarei coordenação visual-motora como uma das percepções que podem ser bem exploradas, desde a educação infantil. Vou sugerir atividades que podem ser realizadas a fim de compreender e desenvolver tal percepção utilizando dobraduras e cores.

Coordenação visual-motora

Para Del Grande (1994), a coordenação visual motora é uma percepção espacial caracterizada como sendo a habilidade de coordenar a visão com o movimento do corpo. Para este autor, pessoas que têm dificuldades motoras em atividades simples, em

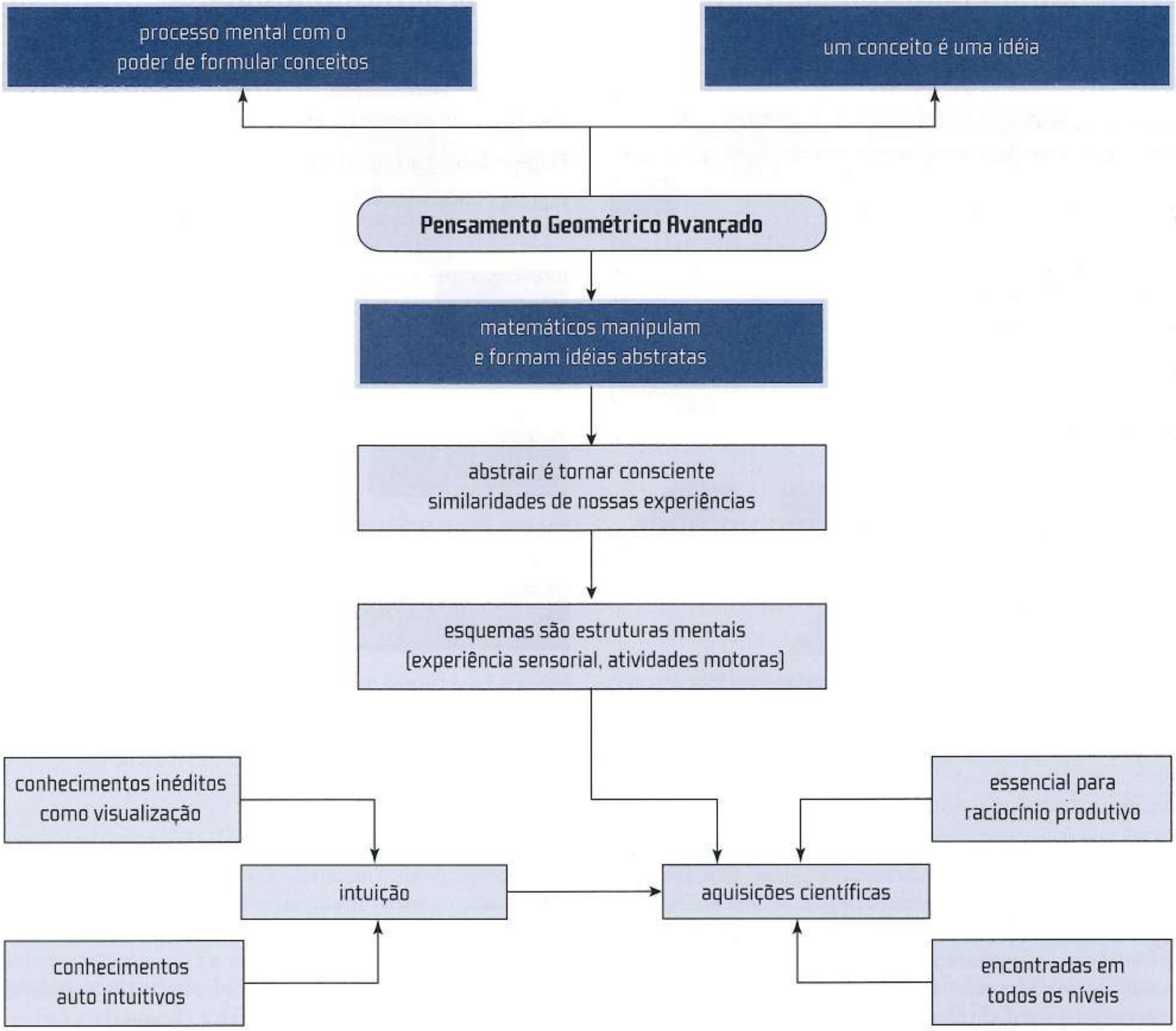


Figura 1. Mapa conceitual de Pensamento Geométrico Avançado

geral, também têm dificuldades em pensar em qualquer outra coisa enquanto estão concentradas em atividades que estão fazendo. Diz ele:

> [...] se uma criança está tendo dificuldade para ligar pontos no papel, juntar blocos de madeira para construir um sólido ou usar a régua para traçar uma reta, só o esforço já é suficiente para absorvê-la completamente. Somente quando essa coordenação se tornar habitual ela será capaz de dar toda a sua atenção ao ato de aprender ou à percepção de objetos exteriores, uma vez que seus movimentos já não exigirão grande concentração mental. Isso sugere que pensar e fazer são atos separados. (p. 158)

Algumas características dessa forma de percepção são: percepção, reconhecimento, desenvolvimento de caracterizações, visualização e representação. No que segue sugiro atividades que têm por objetivos a apresentação de formas geométricas planas e espaciais, a diferenciação de formas, a representação plana de objetos espaciais e a utilização de cores no desenvolvimento de coordenação visual-motora.

Sugestão de atividade 1

a) Colocar à disposição dos alunos sólidos geométricos e figuras planas, confeccionados em madeira ou papel, tais como: cones, cubos, cilindros, esferas, pirâmides, círculos (pratinhos), circunferências (aros), quadrados e outros. Deixar as crianças manusearem livremente o material, brincando com os mesmos sem nenhuma regra ou informação adicional.
b) Solicitar que as crianças façam um desenho dos objetos escolhidos por elas (dois ou três objetos).
c) Solicitar que cada criança ‹batize› as formas geométricas escolhidas. Dessa forma, a atividade está proporcionando representações de objetos espaciais no plano. Se as crian-

Figura 2. Faixa colorida dobrável

Figura 3. Configuração com quatro cores e quatro regiões quadradas.

Figura 4. Configuração com duas cores e duas regiões quadradas

Figura 5. Configuração com duas cores e três regiões quadradas

Figura 6. Configuração com duas cores e quatro regiões quadradas

Figura 7. Configuração com uma cor e duas regiões quadradas

Figura 8. Configuração com duas cores e três regiões quadradas

Figura 9. Faixa colorida dobrável com diagonal

ças estiverem alfabetizadas solicite que cada uma escreva o nome de ‹batismo› em cada uma das figuras. Outra possibilidade de realizar a atividade é organizar uma ‹certidão de batismo› de cada objeto escolhido pela criança, da mesma forma que cada pessoa para ser identificada e se constituir numa verdadeira cidadã, precisa ter seu nome. Assim, para se referir a um dado objeto é necessário que o mesmo possa ser identificado. A criatividade do professor pode colher frutos com essa atividade.

d) Propor que os alunos relacionem objetos do cotidiano, com as formas apresentadas, observando em casa ou no trajeto da escola, ou na casa do amiguinho. Na aula seguinte, os alunos deverão incluir um terceiro dado no seu desenho feito na aula anterior, após o ‹nome de batismo› dado à figura desenhada. Esse é o nome dos objetos que encontraram na sua pesquisa, similares ao desenho ou objeto escolhido na aula anterior.

Sugestão de atividade 2

A atividade faz uso de uma faixa colorida que pode ser construída pelas próprias crianças com a orientação do professor, a qual pode ser confeccionada no computador ou com papel dobradura, em procedimentos de recortes e colagens, atividades que crianças menores e até adolescentes e adultos gostam de realizar.

É construída uma faixa colorida (figura 2), a qual passaremos a denominar faixa colorida dobrável (FCD[1])

O professor apresenta certa configuração ou combinação de cores, com o próprio material, ou em retroprojetor ou ainda em *slides* e solicita que os alunos reproduzam essa configuração para ele. As crianças devem ser alertadas de que não é permitido recortar ou rasgar a faixa para obter a configuração solicitada. A seguir apresento exemplos de configurações que podem ser apresentadas aos alunos para reproduzir (figuras de 3 a 8).

Todas as configurações apresentadas nas figuras de 3 a 8 são feitas apenas utilizando dobras na faixa apresentada na figura 2, ou seja, constando das oito regiões quadradas, duas a duas com cores repetidas, sendo que alguma ou algumas dessas regiões estão escondidas. Não pode haver nenhuma ruptura na faixa dada pela figura 2. O orientador da atividade pode criar novas combinações. É interessante salientar que deve ser obedecida uma ordem de dificuldades crescente para apresentar aos alunos. Note-se na atividade a possibilidade de desenvolvimento de habilidades de percepção, coordenação motora, coordenação visual, memorização, simetrias, e tantas outras.

Sugestão de atividade 3

Esta atividade também é uma Faixa colorida dobrável (FCDD)[2], porém ela apresenta diagonal, como na figura 9, a seguir. Apresenta um grau de dificuldade de coordenação maior do que a atividade 2 e a forma de conduzi-la é a mesma. As habilidades desenvolvidas são inúmeras a exemplo do que ocorrem na anterior, incluindo aqui as simetrias de regiões triangulares, os deslizamentos, as reflexões, para citar alguns conceitos matemáticos envolvidos.

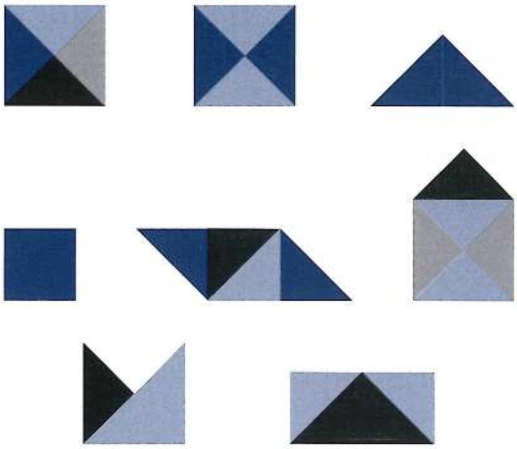


Figura 10. Possibilidades de configurações com a FCDD.

Figura 11. Quadrado catavento.

Figura 12. Configuração do quadrado catavento com dois triângulos de cores diferentes.

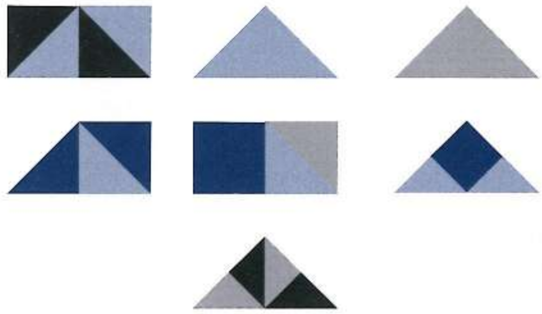


Figura 13. Configurações possíveis do quadrado catavento.

Algumas possibilidades de combinações são apresentadas nas figuras 10.

Reitera-se aqui que os professores podem criar outras combinações.

Sugestão de atividade 4

Essa atividade busca também desenvolver a coordenação visual motora, com o uso de cores (frente e verso). Dana (1994)[3] denomina de Quadrado catavento (QCV). O quadrado deve ter o segmento tracejado cortado a fim de que possam ser realizadas as configurações.

A partir do objeto constante da figura 11, apresente algumas combinações para a reprodução, como a da figura 12, abaixo e seguintes.

A uma primeira vista parece ser impossível deixar o quadrado da figura 11 na forma como se apresenta na figura 12 sem retirar nenhuma das outras regiões triangulares, rasgando ou recortando alguma delas, mas é perfeitamente possível realizar esta transformação. O grau de dificuldade vai aumentando no decorrer das atividades e dependendo do nível de escolaridade, torna-se possível elaborar estratégias para a obtenção das configurações.

Considerações finais

Acredito que a Geometria sendo uma forma de descrever fenômenos da natureza, deve ser ensinada a todos, em especial, às crianças desde os primeiros anos de vida e a percepção parece ser um aliado poderoso para o desempenho dessa função pela escola, especialmente, a partir da educação infantil, a fim de construção de suas estruturas matemáticas, especialmente as geométricas. Neste trabalho foram sugeridas atividades que utilizam a motricidade, aliada à percepção, com o objetivo de construir pensamento geométrico e desmistificar o que o senso comum prega de que a Geometria é um edifício de fórmulas, regras, teoremas, ou seja, é um ramo da Matemática em que prevalece o método dedutivo.

As atividades sugeridas foram utilizadas em cursos de ação continuada com professores e com estudantes de Licenciatura em Matemática. Nessas ocasiões percebi grande interesse dos participantes pelas atividades bem como dificuldades tanto nas habilidades de motricidade quanto nas de visualização, as quais, até onde pude perceber, residem na falta de desenvolvimento das mesmas no desenvolvimento psicogenético do indivíduo como indicam estudos de Piaget.

Por outro lado, atividades exploratórias, como as sugeridas e que utilizem a intuição no sentido preconizado neste artigo, como forma de construção de conhecimento, podem ser indicativos de formas inovadoras no ensino de Geometria desde a escola básica, proporcionando a formação de um pensamento geométrico (avançado ou não).

Entendo que se aprende a gostar de Geometria quando se percebe seu papel e importância no espaço em que se vive, se desenvolve e se produz a própria aprendizagem, não somente aprendizagem geométrica ou matemática, mas aprendizagem de vida e, para concluir, apresento a referência feita por Costa (2000, p. 157) ao emérito educador Freudenthal, que traduz, de certa forma, o espírito utilizado no artigo.

O que é a Geometria? O que há de essencial na Geometria? Quais as perspectivas sobre a educação em Geometria? Freudenthal (1973) diz-nos que questões como o que é a geometria? podem ser respondidas a diferentes níveis: no nível mais elevado, a geometria é certa parte da matemática de certo modo axiomaticamente organizada. Em nível mais baixo a geometria é essencialmente compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor. Ainda insiste na importância de que a matemática quando vai ser aprendida, deveria estar intimamente ligada à realidade. ‹A geometria só pode ser cheia de significado se se explora a relação da geometria com o espaço experimentado›. Assim a geometria: — presta-se, à aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas que, sendo feitas também «com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes»; — tem ainda a capacidade para fazer as crianças sentirem a partir da necessidade lógica das suas conclusões, ‹a força do espírito humano, ou seja, do seu próprio espírito›.

Notas

[1] Adaptado de Dana, M. E. Geometria: um enriquecimento para a escola elementar. In: Lindquist, Mary Montgomery e Shulte, Albert P. Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

[2] Adaptado de Dana, M. E. Geometria: um enriquecimento para a escola elementar. In: Lindquist, Mary Montgomery e Shulte, Albert P. Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

[3] Adaptado de Dana, M. E. Geometria: um enriquecimento para a escola elementar. In: Lindquist, Mary Montgomery e Shulte, Albert P. Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

Referências

Costa, Conceição. (2000). *Visualização, veículo para a educação em geometria.* Fundão, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 157–184. Disponível em <http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf >. Acesso em 31 jul 2008.

Dana, M. E. (1994). Geometria — um enriquecimento para a escola elementar. In: Lindquist, M. e Shulte, A. P. *Aprendendo e ensinando Geometria.* SP: Editora Atual.

Del Grande, J.J.. (1994). Percepção espacial e geometria primária. In: Lindquist, M. M. e Shulte, A. P. *Aprendendo e ensinando Geometria.* SP: Editora Atual.

Fischbein, Efraim. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* London: Mathematics Education Library.

Freudenthal, Hans. (1973). *Mathematics as an educational task.* Holland: D. Reidel Publishing Company.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de Matemática.* Tese (Doutorado em Educação) — Brasil: Universidade Federal do Paraná.

Luft, Eduardo. (2006). *A fenomenologia como metaepistemologia.* Revista Eletrônica Estudos Hegelianos, ano 3, n. 4, junho 2006. Disponível em <http://www.hegelbrasil.org/rev04a.htm>. Acesso em 05out2008.

Oliveira, Lívia. (2005). *A construção do espaço, segundo Jean Piaget.* In: Sociedade&Natureza, Uberlândia, 17 (33): 105–117, dez 2005.

Piaget, Jean; Inhelder, Bärbel. (1993). *A representação do espaço na criança.* Porto Alegre: Artes Médicas.

José Carlos Pinto Leivas

Aposentado da Universidade Federal do Rio Grande – FURG – RS, Brasil

Estatuto Editorial da Educação e Matemática

A Educação e Matemática (EM) é uma publicação da Associação de Professores de Matemática (APM). É uma publicação periódica, sai cinco vezes por ano e um dos seus números anuais é temático. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro.

Os principais objectivos da Educação e Matemática são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas actuais e importantes da educação; matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A Educação e Matemática publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias ... . A EM tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com carácter permanente.

A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista.

À semelhança das outras revistas informativas, a Educação e Matemática assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Directora da Educação e Matemática

Um parque com três caminhos

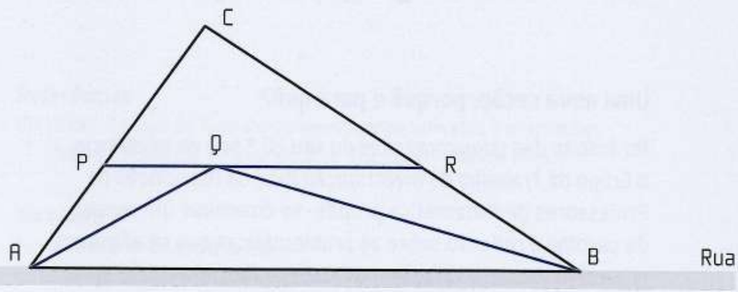
Um parque público, com a forma de um triângulo irregular ABC, tem quatro entradas. Das entradas A e B saem caminhos que são precisamente as bissetrizes dos ângulos em A e B.

Estes dois caminhos terminam num ponto Q por onde passa um terceiro caminho, paralelo ao lado AB e que une as outras duas entradas P e R.

A distância entre os portões A e P é de 330 metros e entre os portões B e R é de 450 metros.

Qual é o comprimento do caminho PR?

(Respostas até 25 de Abril para zepaulo46@gmail.com)



A Boda

O problema proposto no número 114 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Quando a Isabel e o José casaram resolveram alugar os serviços da Quinta Velha, que tinha uma capacidade máxima de 500 convidados. Quando foram tratar dos pormenores da boda, o gerente da Quinta informou-os:

– Se pusermos os convidados em mesas de 8, sobra uma pessoa. Se os colocarmos em mesas de 9 sobram 2. Se ficarem em mesas de 10 sobram 3.

Depois de analisarem a situação, resolveram usar mesas de 12, ficando os que restavam numa mesa mais pequena. Quantas pessoas comeram na mesa pequena?

Recebemos 16 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Álvaro Anjo, Catarina Ferreira (Lamego), Ana Maciel (Amadora), Edgar Martins (Queluz), Ema Modesto & João Fernandes (Aveiro), Francisca Canais (Torres Novas), Francisco Branco (Ovar), Francisco Estorninho (Amadora), Graça Braga da Cruz (Ovar), Ilca Cruz (Amadora), João Barata (Castelo Branco), Patrícia Sampaio (Guimarães) , Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Sérgio Rosa (Pinhal Novo).

Apareceram resoluções muito diversificadas, desde a simples utilização de uma folha Excel até elaborados raciocínios sobre congruências. Vejamos dois processos que nos chamam a atenção pela sua simplicidade.

1º Método

Foi usado por Francisco Estorninho, Ilca Cruz, Alberto Canelas e Catarina Ferreira. Demos a palavra a esta última.

Se colocarmos os convidados em mesas de 10 sobram 3, então o algarismo das unidades do número de convidados é 3.

Se colocarmos os convidados em mesas de 9 sobram 2, então a soma dos algarismos do número de convidados é um múltiplo de 9 mais 2, ou seja, é 11. Não pode ser 20 ou superior, pois o número de convidados não é superior a 500.

Possibilidades a considerar: 83, 173, 263, 353 e 443.

Efetuando as divisões por 8, vemos que só 353 dá resto 1. A única opção é serem 353 convidados.

Como $353 = 12 \times 29 + 5$, na mesa pequena comeram 5 convidados.

2º Método

É ainda mais simples e foi seguido por Álvaro Anjo, Edgar Martins e Pedrosa Santos. Eis a versão do Edgar.

Seja x o número de convidados. Nos três casos, se a Isabel e o José tivessem convidado mais 7 amigos teriam todas as mesas preenchidas, qualquer que fosse o tipo de mesa que escolhessem. Se isto acontece então $x + 7$ é o mínimo múltiplo comum dos números 8, 9 e 10 (que é 360) ou então um múltiplo deste.

$$x + 7 = 360k <=> x = 360k - 7$$

Como a capacidade máxima da quinta é de 500 convidados só temos uma solução:

$$k = 1 -> x = 353$$

O resto da divisão inteira de 353 por 12 é 5. Portanto, na mesa pequena ficaram 5 pessoas.

Para além destes métodos, Sérgio Rosa propõe usar uma página da internet onde se podem resolver equações usando o teorema chinês dos restos: http://www.math.mtu.edu/mathlab/COURSES/holt/dnt/chinese3.html

Aqui basta introduzir uma lista com os restos (1, 2, 3) e outra com as capacidades das mesas (8, 9, 10) para logo se obter a solução.

E termina com o seguinte comentário: Se a Isabel e o José pudessem usar mesas de 16 (21 mesas e a última com 17) obteriam maior «igualdade» entre o n.º de pessoas nas diversas mesas.

Da investigação à prática

Uma nova seção: porquê e para quê?

No âmbito das comemorações do seu 20.º ano de existência, o Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática propõe-se dinamizar um espaço de partilha e reflexão sobre as problemáticas que se afiguram proeminentes na educação matemática. Reconhecendo que grande parte da investigação nacional e internacional não tem sido devidamente divulgada junto dos professores, o GTI pretende utilizar este canal de comunicação para difundir o conhecimento que emerge da investigação realizada sobre diversas temáticas, e que é reconhecidamente relevante para o ensino e a aprendizagem da matemática.

A criação do GTI, anunciada em 1989, só veio a ser concretizada três anos mais tarde durante o III Seminário de Investigação em Educação Matemática e após o lançamento de um documento orientador elaborado por João Pedro da Ponte, José Manuel Matos e Henrique Guimarães. Os autores enunciavam, então, os objetivos do Grupo de Trabalho e propunham algumas linhas de ação e organização das suas atividades. Vinte anos volvidos, os objetivos delineados continuam a nortear as atividades dos membros do Grupo, nomeadamente:

- Constituir um espaço de expressão e comunicação da comunidade investigativa no campo da educação matemática, para divulgação, comunicação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados.
- Promover a articulação entre a investigação nesta área e o ensino da Matemática.

Empenhando-se, com igual determinação, nos objetivos e orientações da APM e procurando dar resposta às solicitações que recebe, o GTI tem desenvolvido um conjunto de atividades muito diversificado.

A Comissão Coordenadora do GTI promove a organização anual do Seminário de Investigação em Educação Matemática. Até ao momento já foram realizados 22 Seminários em diversas localidades do país, sendo que o primeiro decorreu no ano de 1990 nas Caldas da Rainha e o mais recente decorreu, em Setembro último, em Lisboa.

O Grupo fomenta, igualmente, a publicação da revista Quadrante desde 1992, que apresenta duas publicações anuais. Geralmente, uma refere-se a um número temático, cujo tema é decidido pelos coordenadores, e a outra incide sobre temas livres. Desde essa data, o GTI mantém a Coleção de Teses, que foi criada com o objetivo de contribuir para a divulgação de trabalhos de investigação. Atualmente a coleção é constituída por cerca de 180 títulos que se encontram disponíveis para consulta e venda, tanto na sede como nos vários núcleos regionais da APM.

Desde o ano letivo de 1999/2000, alguns membros regulares do GTI, professores de Matemática dos vários níveis de ensino e investigadores em educação matemática, criaram um Grupo de Estudos. Este grupo tem desenvolvido trabalhos de investigação, reunindo-se periodicamente com o objetivo de aprofundar conhecimentos sobre um determinado tema, selecionado pela sua atualidade e pertinência. Esses trabalhos são posteriormente analisados pelos elementos do Grupo de Estudos e, com frequência, dão origem a uma publicação na forma de livro. Os documentos produzidos visam, não só, dar a conhecer as atividades de investigação que o Grupo desenvolve mas, essencialmente, procuram aproximar a investigação da prática letiva através da divulgação de experiências relevantes sobre o tema abordado. Até ao momento, o Grupo de Estudos dinamizou quatro ciclos de investigação: o 1.º ciclo culminou em 2002 com a edição do livro «Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional»; o 2.º ciclo decorreu entre 2002 e 2005 e terminou com a publicação «O professor e o desenvolvimento curricular»; o 3.º ciclo ocorreu entre 2005 e 2008 do qual resultou o livro «O professor de Matemática e os projectos de escola»; e o 4.º ciclo teve início em 2008 e culminou em 2010 com a publicação «O professor e o programa de Matemática do ensino básico». Atualmente encontra-se em desenvolvimento o 5.º ciclo do Grupo de Estudos.

Simultaneamente a estas tarefas, o GTI colabora com a direção da APM dando pareceres sobre matérias ligadas à investigação em educação matemática e apresenta propostas relativamente à dinamização de atividades neste domínio.

Atualmente, o GTI engloba cerca de 30 membros que se encontram envolvidos numa ou em várias atividades regulares do grupo, e é coordenado por uma Comissão constituída por 9 elementos. Qualquer sócio que manifeste interesse em fazer parte do Grupo de Trabalho poderá integrá-lo através do preenchimento de um formulário disponível na APM.

Em resposta a um convite à reflexão, lançado pela APM em 2006 a todos os Grupos de Trabalho, a então Comissão Coordenadora do GTI propunha-se olhar o futuro de forma a «integrar novas ideias vindas da análise e reflexão dos seus membros e do que recolhem das várias participações no conjunto das suas actividades» (GTI, 2006, p. 7). Considerava igualmente que as atividades que vinham a ser desenvolvidas estavam consolidadas, salientando o interesse em continuar a melhorar a «articulação e divulgação de ideias entre a investigação e o ensino» (GTI, 2006, p. 7).

Assim, com a dinamização desta nova seção da Educação e Matemática, o GTI reafirma um dos seus objetivos principais – aproximar a investigação da prática e, em simultâneo, a prática da investigação, pelo que pretende que essa comunicação possa fluir com alguma regularidade neste espaço. Além de dar a conhecer trabalhos de investigação que se encontram em desenvolvimento e que são de relevo para as práticas profissionais dos professores de matemática, nesta seção serão partilhadas preocupações, vivências e aprendizagens sustentadas na investigação nacional e internacional. Procurar-se-á que essas trocas de ideias e de pontos de vista se possam integrar numa prática docente coerente com as atuais orientações curriculares e sejam catalisadoras de aprendizagens matemáticas significativas e duradouras.

Referências

GTI (2006). O Grupo de Trabalho de Investigação: reflexões e orientações futuras. *Educação e Matemática*, n.º 86, pp. 5-7. Lisboa: APM.

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa
Comissão Coordenadora do Grupo de Trabalho de Investigação da APM

Hélia Jacinto
Escola Básica José Saramago
Comissão Coordenadora do Grupo de Trabalho de Investigação da APM

ENCONTROS

EIEM 2012

O EIEM 2012 – *Encontro de Investigação em Educação Matemática*, da responsabilidade da Sociedade Portuguesa em Investigação em Educação Matemática – realiza-se a 12 e 13 de maio de 2012, no Hotel Sol e Serra, em Castelo de Vide, e tem como tema as Práticas de Ensino da Matemática.

O encontro tem como propósito principal proporcionar o conhecimento, a discussão e a reflexão sobre as práticas que os professores realizam enquanto profissionais, em especial as relacionadas com o ensino da Matemática, desde o Ensino Básico ao Ensino Superior. Pretende-se que a reflexão seja sustentada pela investigação que atualmente se desenvolve sobre o tema, e que permita, igualmente, perspetivar e promover futuras investigações, encontrar desafios e novos rumos.

Durante o encontro serão partilhados, discutidos e analisados trabalhos de investigação propostos pelos participantes, concluídos ou em curso, os quais serão apresentados nos grupos de trabalho, consoante a especificidade das temáticas a que dizem respeito.

O EIEM 2012 destina-se a todos os investigadores, formadores ou professores que se interessem pela investigação sobre as práticas dos professores que ensinam Matemática. Para mais informações consultar http://www.esep.pt/eiem12/

EduLearn12

4th International Conference on Education and New Learning Technologies

EduLearn12 é uma conferência internacional dedicada à educação e às novas tecnologias da aprendizagem, que se realizará em Espanha, na cidade de Barcelona, nos dias 2 a 4 de julho de 2012. Trata-se assim de um encontro dedicado a todos os interessados em discutir as últimas inovações e resultados no campo das novas tecnologias na educação, do e-learning e das metodologias na educação e investigação. Mais informações disponíveis em http://iated.org/edulearn12/

ECER 2012

European Conference on Educational Research

Dedicado à investigaçao educacional, como forma de assegurar e reforçar a liberdade e promover a educação e o desenvolvimento compreensivo dos cidadãos em todo o mundo, realiza-se em Cádiz, Espanha, de 18 a 21 de setembro de 2012 a European Conference on Educational Research. Para mais informações consultar http://www.eera.de/ecer2012/

O Nónio de Pedro Nunes no 1.º ciclo do Ensino Básico

Paula Catarino, Cecília Costa, Maria Manuel da Silva Nascimento

Introdução

Várias recomendações e estudos internacionais relativos ao ensino da Matemática referem a História da Matemática como estratégia a não descurar no processo de ensino e de aprendizagem [Struik, 1980], [Swetz, 1984], [Dieudonné, 1990], [Fauvel, 1991], [NCTM, 2007], [Peters, 2005]. Hoje em dia já muitos professores seguem estas recomendações, mas continuam a ser escassas as propostas concretas de integração da História da Matemática nas aulas do 1.º ciclo do Ensino Básico.

No sentido de contribuir para colmatar essa lacuna, propõem-se três tarefas interligadas entre si envolvendo a biografia de Pedro Nunes e o Nónio, destinadas aos 3.º e 4.º anos. Encontram-se na literatura algumas tarefas relacionadas com este tema destinadas a alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário. Por exemplo, em [Moura *et al.*, 2008] encontramos uma proposta para alunos do Ensino Secundário e em [Dias e Sousa, 2008] quatro propostas para alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário.

Com a proposta «*O Nónio de Pedro Nunes*» entendemos contribuir para o estabelecer de conexões entre a História da Matemática e diferentes tópicos matemáticos, bem como com outras áreas do saber, e ainda, levar os alunos a reconhecer a utilidade dos saberes aprendidos e a evolução da tecnologia.

Começaremos por referir a criação do Nónio por Pedro Nunes, tendo como principal objetivo realçar a importância da sua invenção no contexto histórico da época. Referiremos, também, de um modo sucinto, o funcionamento deste instrumento de medida. De referir que a proposta que apresentamos foi inspirada[1] num projecto de Ciência Viva — Ocupação Científica nas Férias[2] que integrou a Escola de Verão de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro em 2009.

Figura 1. Quadrante fabricado por James Kynuyn, em 1595. É possivelmente o único instrumento que existe dispondo do Nónio de Pedro Nunes [Reis, 1999].[3]

A génese do Nónio e a sua importância no século XVI

A expansão marítima portuguesa, iniciada no século XV, foi a consequência natural da preocupação da monarquia em compensar a marginalidade geográfica em relação à Europa:

«(...) o poder parece ter consciência de que a marginalidade de Portugal em relação ao continente europeu e à Península só pode ser compensada pela assunção de uma centralidade em relação às rotas marítimas que ligavam o Mediterrâneo ao mar do Norte, e vice-versa.» [Fonseca, 2001, p. 219]

Por outro lado, a situação geográfica de Portugal, constitui-se como uma vantagem para a expansão marítima, em particular, porque está:

«Situado num contexto espacial bem definido, a meio caminho entre as grandes rotas do comércio marítimo, beneficiado pelo contacto com as regiões mais desenvolvidas da Europa do tempo (...).» [Fonseca, 2001, pp. 224–225]

Nesta época, as viagens por mar tornaram-se frequentes, passando a navegar-se sem a costa à vista. Este tipo de navegação exigiu o recurso a novas técnicas de marear e à utilização, adaptação e criação de instrumentos náuticos. Estes são utilizados, principalmente, para determinar a posição da embarcação através dos astros. Este tipo de navegação designa-se por navegação astronómica.

«A navegação astronómica teve início ainda no século XV, quando os navegadores portugueses, ao afastarem-se da costa tiveram de recorrer a instrumentos de altura para determinar a posição do navio. Para o efeito, usaram quadrantes e astrolábios náuticos (...).» [Reis, 1999]

É neste contexto que surge a necessidade de aperfeiçoar os instrumentos náuticos existentes à data. Para tão exigentes viagens eram necessários instrumentos tão precisos e rigorosos quanto a técnica e a ciência o permitissem na altura. Sabe-se [Reis, 1999] que, na época não era fácil marcar (com rigor) a escala de um quadrante ou de um astrolábio, o que levou a várias tentativas de aperfeiçoamento das técnicas usadas para esse fim. A maior dificuldade prendia-se com o facto de se tratar de escalas circulares e de à data não se saber dividir (com exatidão) um sector circular em partes iguais.

«Um modo de fugir ao penoso problema de dividir as escalas circulares, era recorrer a instrumentos que, destinados à medida de ângulos, usassem escalas rectilíneas, como acontecia com a balestilha, também foi usada pelos pilotos portugueses, a partir do início de século XVI.» [Reis, 1999]

Pedro Nunes (1502–1577), que tal como é referido em Medeiros *et. al* (2004), é considerado pelos seus historiadores como

« (...) o maior matemático português do século XVI e é tido por muitos como o maior vulto da Ciência portuguesa em todos os tempos. (...) Destacou-se, entretanto, principalmente como matemático, ao desenvolver as suas atividades como professor e como cosmógrafo real.» (p. 559)

também se dedicou a este problema. Para além dos muitos e relevantes contributos que deu para o desenvolvimento da astronomia e cosmografia, Pedro Nunes é o criador de uma pequena escala, designada por Nónio, que quando incorporada noutro instrumento de medição permite obter medições mais precisas. Embora esta invenção seja o trabalho mais conhecido de Pedro Nunes junto da sociedade em geral, é de sublinhar que esta é apenas um pequeno contributo, comparativamente com o valor e importância de outras obras suas.

O Nónio é apresentado em *De Crepusculis*, de Pedro Nunes, publicado em 1542. Esta obra é considerada a mais importante deste matemático português [Martins e Fiolhais].
Segundo A. Estácio dos Reis (1999):

«Na segunda parte desta obra, a proposição número três, reza assim: ‹Construir um instrumento que seja muito apropriado às observações dos astros, e com o qual se possam determinar rigorosamente as respectivas alturas›. A ideia que estimulou o nosso cosmógrafo, aliás descrita na sua obra intitulada De arte atque ratione navigandi, foi uma passagem do Almagesto (pág. 9 da edição de 1515) [de Ptolomeu] (...).»

Diversos matemáticos e cosmógrafos dedicaram-se ao problema de encontrar processos/instrumentos que possibilitassem medições mais rigorosas. Antes de Nunes, Levi ben Gerson (1288–1344) propõe uma escala transversal, ideia retomada mais tarde por Thomas Digges (1546–1593), tanto quanto se sabe de forma independente. Supõe-se que Pedro Nunes não teve conhecimento destes estudos. No seguimento da criação

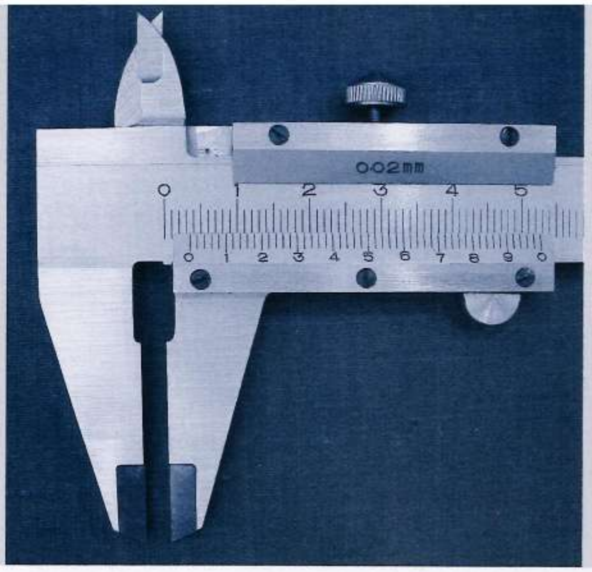


Figura 2. Paquímetro[4]

Figura 3. Micrómetro[5]

do Nónio por Pedro Nunes e devido ao facto de este ser de difícil construção, outros matemáticos e cosmógrafos procuraram melhorar esse aspecto. Foi Pierre Vernier (1584–1638) quem conseguiu a solução prática que sucedeu ao Nónio de Pedro Nunes. Razão pela qual o Nónio é também conhecido por Vernier.

Princípio Matemático de funcionamento do Nónio

«(...) Medir é atribuir um valor numérico a um dado atributo de um objeto ou, em níveis mais aprofundados, a uma característica de uma situação.(...)» [Leitão e Cangueiro, 2008].

Um instrumento de medida é um agente mecânico utilizado na execução de qualquer trabalho cujo objetivo é a medição, sendo o Nónio um exemplo. A necessidade de se medir uma dada grandeza vai depender, em geral, de muitos parâmetros, como por exemplo, ter em conta a precisão e exatidão do instrumento utilizado.

Imaginemos que realizávamos a medida de um dado objeto com uma régua graduada em milímetros (ou outra unidade de medida) e o resultado que obtínhamos não correspondia a um número inteiro de divisões de graduação da régua. O que fazer para a determinação da parte fracionária? O uso do Nónio permite-nos responder a esta questão.

O conceito de Nónio é utilizado em instrumentos de medida de dimensões lineares (ou de comprimento) ou angulares como paquímetros (ou craveiras), micrómetros, sextantes, quadrantes, octantes, astrolábios, entre outros, com os quais se podem atingir precisões absolutas de décimos de milímetro e para os ângulos precisões de minutos ou frações de minutos.

Um «Nónio linear» é constituído por uma régua de pequenas dimensões que desliza sobre uma outra régua de maiores dimensões — a escala principal — também com divisões gravadas (ver figura 4).

Chama-se Nónio à régua mais pequena que tem marcadas m divisões cujo comprimento é equivalente ao de $m-1$ divisões da escala principal, ou seja, as divisões do Nónio são gravadas de tal maneira que uma divisão do Nónio é igual a uma divisão da escala principal multiplicada por um fator igual a

$$1-\frac{1}{m}=\frac{m-1}{m}$$

sendo m o número de divisões do Nónio.

Observando a figura 4, verificamos que 10 divisões do Nónio correspondem a 9 divisões da escala principal, ou seja, neste caso, uma divisão do Nónio é igual a uma divisão da escala principal multiplicada pelo fator 0,9.

A justificação do funcionamento do Nónio é a seguinte: se a representar a distância entre dois traços consecutivos da escala principal e b a distância entre dois traços consecutivos do Nónio (ver figura 5), então a relação entre estas duas distâncias é dada por

$$b=a-\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{m-1}{m}\right)a.$$

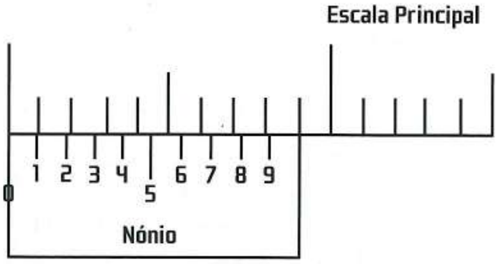


Figura 4. Exemplo de um Nónio e escala (principal)

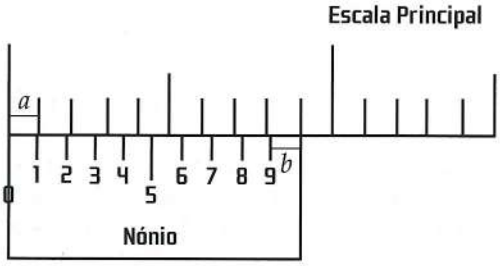


Figura 5. Exemplo de um Nónio e escala (principal)

À grandeza $a - b = a/m$ dá-se o nome de *precisão* (ou *natureza*) do Nónio e representa o valor do erro máximo do Nónio, ou seja, o menor comprimento que se pode medir exatamente com o Nónio adaptado à escala principal.

Quando se mede um comprimento que não coincide, exatamente, com uma divisão do Nónio, o valor da grandeza será igual ao número inteiro de divisões da escala principal, dado pela marca «zero» do Nónio, mais uma fração de divisão, x, a determinar. Imaginemos que o ponto em que uma divisão do Nónio coincide com uma divisão da escala principal ocorre na divisão do Nónio. Então nesse ponto temos que $ca = cb + x$, ou, $x = c(a - b) = c(a/m)$, que é a precisão (ou natureza) do Nónio.

Concretizemos a explicação anterior com um exemplo de determinação do comprimento de uma barra (ver figura 6) usando uma régua e um Nónio. Consideremos que o valor da menor divisão da escala principal é a, sendo a uma dada unidade de medida. Notemos que entre dois números consecutivos existem $10a$ unidades de medida. Uma extremidade da barra foi colocada na origem da escala principal e a outra é a que aparece na figura 6 assinalada por d.

Qual será o valor do comprimento da barra, ou seja, qual será o valor a atribuir a d? Verificamos que d está entre $116a$ e $117a$. Como pode ser visto na figura 6, este comprimento deve estar mais próximo de $117a$ pois a extremidade da barra está mais próxima de $117a$ do que de $116a$. Como decidir? Reparemos que o traço da escala principal situado à esquerda do zero do Nónio é $116a$. Basta-nos agora ver onde existe a «melhor coincidência» entre um traço do Nónio e um traço da escala principal. O traço do Nónio que coincide ou fica mais próximo de uma divisão da escala principal indica a parte decimal. Essa coincidência está no traço 8 do Nónio da figura 6. Então a medida vai ser $116a$, 8, porque $d = 116a + 0{,}8a = 116a + 8(\cdot)$, sendo 10 o número de divisões do Nónio. A título meramente ilustrativo, se $a = 1mm$, então o valor do comprimento da barra será de $d = 116{,}8mm = 11{,}68cm$. Assim, em síntese, podemos afirmar que *o comprimento de uma peça medida com uma escala com Nónio é igual ao número de divisões inteiras da escala adicionado ao valor obtido na multiplicação da precisão do Nónio pelo número da divisão do Nónio que coincide com alguma das divisões da escala.*

Para familiarização com medições com o Nónio, deixamos, a título meramente ilustrativo, um exemplo de uma medição de uma porca de parafuso que pode ser consultada em http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Using_the_caliper_new_en.gif.

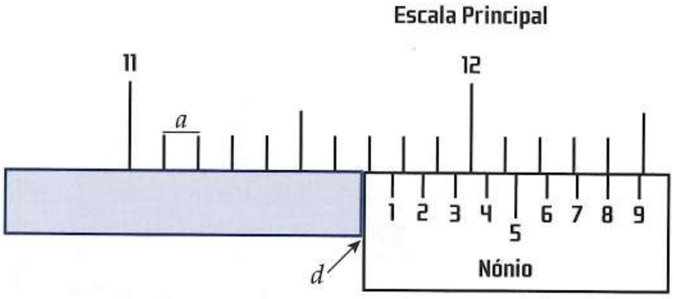


Figura 6. Exemplo de medição do comprimento de uma barra

Proposta: O Nónio de Pedro Nunes

Esta proposta é destinada a alunos do 3.° e 4.° anos do 1.° ciclo do Ensino Básico e é composta por três tarefas. A primeira pretende dar a conhecer aos alunos um pouco da vida e obra de Pedro Nunes procurando conexões com a Língua Portuguesa e Estudo do Meio; a segunda solicita a construção simples de um modelo linear de um Nónio, fazendo a conexão, dentro da Matemática, com aspetos geométricos, explorando vários tópicos inseridos no tema «Geometria e Medida» e, fora da Matemática, com Educação Artística e Educação Tecnológica; a última, propõe efetuar medições simples usando o Nónio construído pelos alunos, podendo com esta tarefa trabalhar--se tópicos dos temas «Números e Operações» e «Geometria e Medida».

Com o desenvolvimento destas tarefas, dependendo da dinâmica da aula planeada pelo professor, pode contribuir-se para a consecução dos seguintes objetivos:

- Gerais:
  - — Mobilizar saberes culturais, científicos e tecnológicos;
  - — Dar a conhecer Pedro Nunes, matemático português de relevo;
  - — Dar a conhecer um instrumento de medição antigo (o Nónio) e mostrar a sua utilidade.
- Específicos:
  - — Resolver problemas envolvendo números na sua representação decimal;
  - Localizar e posicionar números racionais não negativos na reta numérica; (...) e construir maquetas simples;
  - Representar retas paralelas e perpendiculares;
  - Realizar medições de grandezas em unidades SI, usando instrumentos adequados às situações;
  - Comparar e ordenar medidas de diversas grandezas;
  - Resolver problemas envolvendo situações temporais.

Antes de passarmos à descrição de cada uma das tarefas, nunca é demais lembrar que também em [NCTM, 2007] é realçada a importância do estudo da *medida* no currículo de matemática, desde o Pré-escolar ao Ensino Secundário,

> «(...) não só devido à sua aplicação prática na vida quotidiana, mas também porque permite realçar as conexões existentes no interior da própria matemática, ao proporcionar uma oportunidade para aprender e aplicar outros tópicos matemáticos: operações, conceitos geométricos, e noções de estatística e de funções. (...)» [Leitão e Cangueiro, 2008].

Passamos de seguida a descrever cada uma das tarefas.

Tarefa 1. À descoberta de Pedro Nunes

Situação: Dar a conhecer aos alunos um pouco da biografia de Pedro Nunes e o seu contributo para o desenvolvimento da navegação, essencial para os Descobrimentos Portugueses e o seu relacionamento com a Matemática.
Material de apoio: Pequenos textos de apoio relacionados com a vida e obra de Pedro Nunes fornecidos pelo professor e (ligação à) Internet[6].

Desenvolvimento: O professor começa por relatar, em grupo turma, alguns tópicos relevantes acerca da vida e obra de Pedro Nunes. Posteriormente, os alunos são divididos em grupos de 3 e cada grupo, utilizando, os pequenos textos fornecidos pelo professor e efetuando pesquisas na Internet, redige um resumo do estudo levado a cabo. Cada grupo lerá à turma esse resumo, efetuado com a supervisão e apoio do professor. Em simultâneo vão construindo um quadro resumo, com as principais ideias a reter sobre a figura de Pedro Nunes e, eventualmente, afixá-lo na sala de aula a fim de poderem recordar esta figura proeminente de Portugal (figura 7).

Tarefa 2. O meu Nónio

Situação: Construção simples de um modelo linear de um Nónio.

Material de apoio: Folha de cartolina e folhas de papel (grosso) de formato A4, régua, lápis, borracha, cola e tesoura.

Desenvolvimento: Partindo de uma folha de papel de formato A4 (eventualmente colorida) construir um retângulo maior de modo que tenha 20 cm de comprimento. Dividir um dos lados maiores do retângulo considerado (Escala Principal) em 20 partes iguais marcando a escala considerada. Repetir o processo de construção anterior agora para um retângulo menor (Nónio) de modo que tenha comprimento igual a 19 divisões da escala principal. Dividir um dos lados maiores deste retângulo considerado em 20 partes iguais. De seguida, colar os dois retângulos numa folha de cartolina e recortá-los (figura 8).

Tarefa 3. Medindo com o Nónio...

Situação: Familiarizar o aluno com o funcionamento do Nónio. Efetuar medições com um Nónio.

Material de apoio: o modelo de Nónio construído pelos alunos na tarefa anterior, objetos para medir (figura 9).

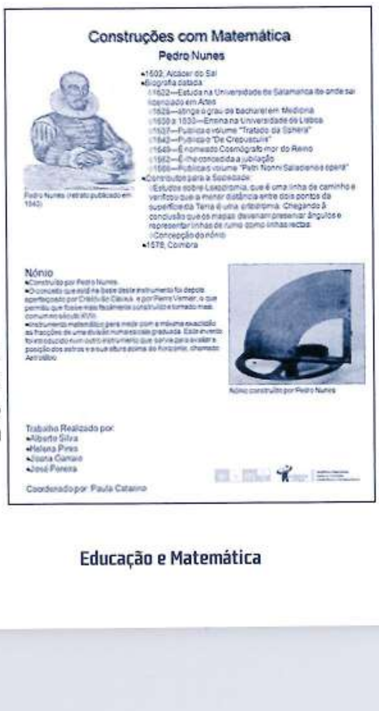


Figura 7. Exemplo de quadro resumo: um *poster* sobre Pedro Nunes[7]

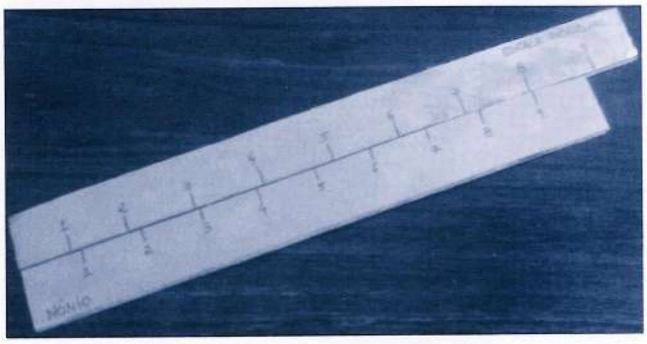


Figura 8. Nónio artesanal

Desenvolvimento: Usando um Nónio, proceder como a seguir se sugere:

1) O aluno escolhe um objeto para medir e segue os seguintes passos:
   a) Colocar o objeto escolhido de modo a que uma das extremidades desse objeto coincida com o zero da escala principal.
   b) Encostar o Nónio à outra extremidade do objeto.

   Observar que uma das seguintes duas situações ocorre:
   OU
   (i) O zero do Nónio coincide com um traço da divisão da escala principal;
   OU
   (ii) O zero do Nónio está entre dois traços da divisão da escala principal.

   No caso de (i), o valor do comprimento do objeto considerado será igual ao número inteiro que coincide com o valor do traço.
   No caso de (ii), o valor do comprimento do objeto em análise terá uma parte inteira e uma parte decimal (não nula). O valor da parte inteira coincide com o valor do traço da escala principal situado à esquerda do zero do Nónio e o valor da parte decimal coincide (ou terá um valor aproximado) com o valor do traço do Nónio que se encontra mais próximo da escala principal.
   c) Medir o mesmo objeto com uma régua ou com uma fita métrica.
2) Indicar, numa tabela, os valores das medidas do objeto escolhido efectuadas com diferentes instrumentos (uma coluna para a medição com o Nónio, outra com a régua, etc.).
3) Escolher outros objetos e repetir os passos a), b) e c) para efetuar medições, recolhendo todos os registos na tabela.
4) Trocar de objetos com os colegas e repetir o passo 2).
5) Em grupo turma, cada grupo divulga os resultados obtidos e tenta responder às questões: Deverão ser iguais os valores obtidos, por cada grupo, para um mesmo objeto? Que conclusões podemos tirar deste tipo de medições? Que relação há entre a medição com o Nónio e com a régua (ou com a fita métrica)?

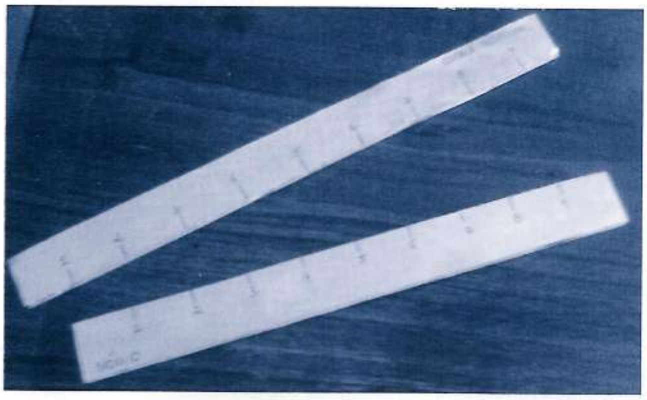


Figura 9. Nónio artesanal

Nota final

A história da expansão portuguesa, dos instrumentos náuticos (ver estudos de A. Estácio dos Reis), do Matemático e Cosmógrafo-mor do Reino, Pedro Nunes, e da sua obra é vastíssima e continua a ser estudada (ver estudos de H. Leitão). Com este artigo, pretendemos apenas contribuir para a divulgação destes temas junto dos mais novos, através dos seus professores. Entendemos que as atividades propostas contribuem ainda para a conexão de diferentes tópicos matemáticos abordados no 1.° ciclo do Ensino Básico, bem como de diversas áreas do saber. Em jeito de conclusão, pensamos também que com a execução destas propostas poder ajudar os nossos alunos a lidar com medidas que podem ser (ou são, na maior parte dos casos) aproximações e a perceber que, tal como é referido em [Leitão e Cangueiro, 2008]

«(...) compreender que todas as medidas são aproximações constituiu um conceito difícil, mas importante, para os alunos.(...)».

Notas

[1] Projetado e implementado para/com alunos do ensino secundário.

[2] http://www.cienciaviva.pt/estagios/jovens/ocjf2009/inscricao.asp?accao=showentidadedetail&id_entidade=122

[3] Figura retirada de http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e20c.html

[4] Figura retirada de http://img.wikiwix.com/img.php?imgtitle=Messschieber.jpg&width=56x56&lang=pt

[5] Figura retirada de http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ea/5783metric-micrometer.jpg

[6] Sugerimos a consulta do site: http://pedronunes.fc.ul.pt/index.html com autoria de Bruno Almeida e Henrique Leitão. Este último é, atualmente, o maior especialista português em Pedro Nunes, pelo que a consulta das suas obras é também uma referência para os mais interessados (ver, por exemplo [Leitão, 2003].

[7] Elaborado na Escola de Verão de Matemática, em 2009, na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Referências bibliográficas

Dias, I. C. e Sousa, H. I., (2008). *A Astronomia de Pedro Nunes na Aula de Matemática*. H. Leitão (Coord. Científico). Lisboa: Edição APM.

Dieudonné, J., (1990). *A formação da matemática contemporânea*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Fauvel, J., (1991). A utilização da História em Educação Matemática, em *História da Matemática Cadernos do GTHEM*. Lisboa: APM (tradução de I. C. Dias, J. Nunes e P. Nunes), 1997.

Fonseca, L. A., (2001). A primeira expansão, em *Memória de Portugal, o milénio português*, R. Carneiro (Coord. Geral) e A. T. Matos (Coord. Científica). Lisboa: Círculo de Leitores, pp. 214-265.

Leitão, A. e Cangueiro, L. Utopia? Não necessariamente. *Educação e Matemática*, 97 (2008), pp. 26–28.

Leitão, H., Para uma biografia de Pedro Nunes: O surgimento de um matemático, 1502–1542, *Cadernos de Estudos Sefarditas*, 3 (2003), pp. 45–82.

Martins, D.R. e Fiolhais, C., *As ciências exactas e naturais em Coimbra*, em https://estudogeral.sib.uc.pt/jspui/bitstream/10316/8534/1/MC_Catalogo4.pdf, consultado em 06/04/2011 às 18:27h.

Medeiros, A., Medeiros, C. de & Junior, F. N. M., Pedro Nunes e o problema histórico da compreensão da medição das fracções, *Ciência e Educação*, 10(3) (2004), p. 559–570.

Moura, A., Sousa, P. & Semana, S., (2008). *Aulas de substituição: Ensinar Matemática Divertindo*. Porto: Edições ASA II, S. A..

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (trabalho original em inglês, publicado em 2000).

Peters, J. R., (2005). *A História da Matemática no ensino fundamental — uma análise de livros didácticos e artigos sobre história*. Tese de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Sta Catarina, Brasil.

Reis, A. Estácio dos, Navios e navegações — Portugal e o Mar, *Revista Oceanos*, número 38 Abril / Junho 1999, Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimentos Portugueses em http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e20a.html consultado em 06/04/2011 às 18:33h

Struik, D. J. (1980). Porquê estudar a História da Matemática?, em *História da Matemática Cadernos do GTHEM*, Lisboa: APM (tradução de P. Oliveira), 1997.

Swetz, F. (1984). Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática, em *História da Matemática Cadernos do GTHEM*, Lisboa: APM (tradução de M. J. Lagarto), 1997.

Referências on-line

http://www.cienciaviva.pt/estagios/jovens/ocjf2009/inscricao.asp?accao=showentidadedetail&id_entidade=122 consultado em 09/04/2011 às 17:43h.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Using_the_caliper_new_en.gif consultado em 09/04/2011 às 22:30h.

http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e20b.html consultado em 11/04/2011 às 15:22h.

http://pedronunes.fc.ul.pt/index.html consultado em 11/04/2011 às 15:23h.

http://img.wikiwix.com/img.php?imgtitle=Messschieber.jpg&width=56x56&lang=pt consultado em 08/04/2011 às 10h.

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ea/5783metric-micrometer.jpg consultado em 04/04/2011 às 11h.

Paula Catarino, Cecília Costa, Maria Manuel da Silva Nascimento

Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Caros leitores,

Depois de termos dedicado os dois números anteriores desta secção à utilização de materiais electrónicos que acompanham os manuais escolares, e continuando a preocupação manifestada na Revista 114 de apresentar aos nossos leitores um conjunto diversificado de ideias e materiais envolvendo tecnologia, vimos agora chamar a vossa atenção para uma outra área onde é possível encontrar uma grande diversidade de recursos digitais. Trata-se de explorar e compreender um conjunto de *Recursos Educativos Digitais* (RED) que estão disponíveis na Web. Mais do que divulgar a sua existência ou enumerar esses mesmos recursos pretende-se dar a conhecer as suas potencialidades enquanto ferramentas para o professor utilizar na sala de aula. É com este objectivo que o Gonçalo Espadeiro e o Paulo Correia escrevem este primeiro artigo chamando a atenção para estes recursos e para a forma como os mesmos têm evoluído. Pretendemos em futuros números desta secção continuar a desenvolver esta temática desafiando desde já os leitores a relatarem as experiências que tenham desenvolvido nesta área, para que possamos enriquecer ainda mais esta secção da nossa revista.

Breve história (incompleta) dos RED*

*Recursos Educativos Digitais

Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro

Nota prévia: A incompletude desta história deve-se não só às limitações próprias dos autores, mas também ao risco de escrever uma história em evolução permanente e da qual não se conhece o desfecho final. Ainda assim vale a pena refletir sobre os papéis desempenhados pelos agentes educativos, sem guiões e em tempos indefinidos, com deixas pouco claras para um público vasto e exigente.

A tecnologia é, desde há muito tempo, uma presença diária nas aulas de matemática. Desde a utilização de ferramentas de desenho, medição, registo e cálculo, como ardósias, réguas, esquadros, transferidores e compassos, passando por geoplanos, e outros instrumentos que já só existem em museus e na memória dos nossos professores e dos professores dos nossos professores... No que respeita a tecnologia eletrónica, desde há muito que as calculadoras, científicas e/ou gráficas, são presença diária nas nossas salas de aula, apesar de todas as críticas, avanços e recuos próprios de qualquer processo evolutivo.

A investigação e a inovação de alguns agentes educativos tem trazido o computador (e a Internet) para este grupo de instrumentos ao serviço do ensino. Uma verdadeira implementação como ferramenta(s) educativa(s) e uma utilização verdadeiramente massificada tem permanecido como uma etapa próxima, mas ainda por ultrapassar. Para este cenário contribuiu de forma decisiva o acesso limitado a recursos pouco abundantes. Recentemente o panorama nacional alterou-se significativamente tornando as situações pontuais, de acesso facilitado ao recurso informáticos adequados, em situações vulgares. Desta forma estão criadas (a maioria d)as condições para tornar o computador e a Internet em instrumentos ao serviço do ensino.

A inovação por via da tecnologia eletrónica tem entrado no ensino por via da criação de Recursos Educativos Digitais (RED) e também da divulgação de estudos e experiências da sua utilização. Começaram por surgir com uma cadência inferior à actual, em parte devida à existência de uma menor quantidade de recursos disponíveis e em parte por haver menos interessados e a sua utilização exigir do utilizador um domínio técnico das ferramentas. Actualmente o acesso à tecnologia é facilitado por via de uma grande quantidade de RED disponíveis, pela evolução das ferramentas no sentido de tornar a sua criação e utilização mais fáceis e pelo grande avanço ao nível da literacia digital de todos os agentes do ensino.

Desenvolveu-se também um novo conceito de Internet: uma segunda geração de comunidades e serviços online – a Web 2.0 – tendo como permissa a «Web como plataforma». Os conteúdos deixaram de ser produzidos ou validados pela entidade que torna a plataforma disponível, e passam a ser os seus utilizadores a assumir estes papéis, democratizando a produção de conteúdos e a sua validação que deixam de ser levados a cabo (apenas) por instituições e passam a ser executados (também) pelos utilizadores da Internet (mais especificamente pelos membros da comunidade de utilizadores de cada plataforma).

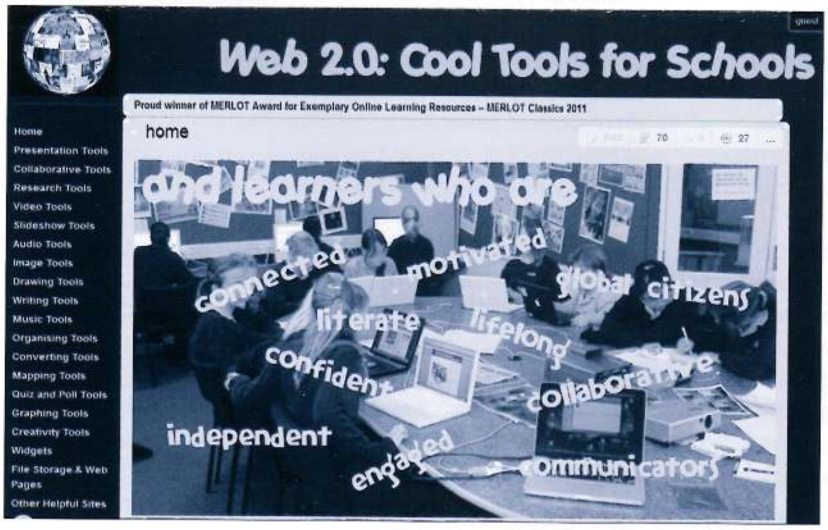


Figura 1. Página de entrada do portal: Cool Tools for Schools

Neste quadro a abundância de RED e de relatos e estudos de experiências disponibilizados em diferentes formatos e para todos os propósitos deixou de ser (apenas) um elemento facilitador, constituindo-se como uma dificuldade assinalável para uma sistematização da inovação tecnológica e para a seleção das melhores alternativas para a implementação dos RED nos diferentes contextos do processo de ensino e aprendizagem.

Numa lógica de acesso à informação em que a quantidade foi cedendo lugar à qualidade, «temperada» pela velocidade, ou seja em que passou a ser determinante ter acesso a volumes de informação relativamente pequenos, validados e num curto espaço de tempo, assistiu-se ao surgimento de «comunidades» que partilham (e beneficiam) da validação de outros para aceder melhor à informação.

As redes sociais (quando utilizadas com critérios de eficiência) têm vindo a assumir-se como um excelente filtro de conteúdos e como uma ferramenta de gestão de informação particularmente eficaz. A título de exemplo, as páginas http://www.freetech4teachers.com/ e http://mathandmultimedia.com/ – ambas com perfis no *facebook*, proporcionam por esta via o acesso e a partilha de informações de uma forma simples e com algum nível de certificação informal pelos seus utilizadores.

As ferramentas tecnológicas sofreram outras alterações, para além da quantidade e da facilidade de utilização. O acesso gratuito a algumas ferramentas popularizou-as, naturalmente, o que lhes deu visibilidade e trouxe outro tipo de proveitos a quem as desenvolveu (receitas publicitárias ou notoriedade académica). Neste enquadramento a disponibilização de ferramentas de utilização gratuita passou a ser comum. Ferramentas de *software* livre ou de utilização gratuita tornaram-se em muitas situações uma opção a considerar, ou mesmo a melhor opção.

O portal http://cooltoolsforschools.wikispaces.com/ pretende fazer um vasto «inventário» de ferramentas com um enorme potencial de utilização em contextos educativos.

Este portal está organizado em categorias de ferramentas, das quais se destacam:

- Quiz and Poll Tools, com ferramentas para elaborar e aplicar inquéritos online;
- Collaborative Tools, onde se disponibilizam ferramentas que visam a promoção da colaboração entre professores e alunos;
- Research Tools, ferramentas para a pesquisa e investigação;
- Slideshow Tools, ferramentas para apresentações que combinam imagem, texto e vídeo;
- Organising Tools, ferramentas para a organização da informação e elaboração de mapas de conceitos.

As ferramentas e/ou recursos para o professor, englobadas na categoria «Teacher Resources», merecem um destaque especial. Esta categoria, também ela organizada em subcategorias, conta com ferramentas que visam apoiar o professor na organização e condução das suas aulas. Muitas destas ferramentas estão vocacionadas para os primeiros anos de escolaridade.

Apesar do idioma predominante ser o inglês, algumas destas ferramentas poderão ser tidas como excelentes exemplos de RED.

Dentro da categoria de ferramentas para o professor destacam-se os recursos de matemática (Mathematics Resources).

Naturalmente a validade e as potencialidades de cada ferramenta dependem do contexto específico de cada professor, e o tempo necessário para a apropriação e avaliação de cada recurso terá que efectivamente ser investido por quem deles quiser tirar o melhor partido. O trabalho colaborativo numa comunidade virtual, ou de tipo mais tradicional, poderá tornar este processo mais rico e eficaz, mas não o dispensa nem o substitui.

Começamos por destacar um recurso incluído nesta lista – a página Iluminations. Da responsabilidade do NCTM, este conjunto de *applets* (ou numa tradução frequente apliquetas) é um recurso que permite a professores de vários níveis de ensino, usar o computador e a Internet como um recurso valioso, proporcionando aos alunos actividades onde são chamados a interagir ou manipular ferramentas imagens, botões ou inserir valores numéricos com um determinado objetivo. Existem ainda outros conjuntos de apllets (nesta lista e para além dela) que têm princípios de utilização em tudo semelhantes, mas neste caso, cada applet tem ainda um conjunto de indicações para o professor para facilitar a sua utilização em contexto de sala de aula. A identificação de uma relação ou a prática de uma competência matemática podem desta forma ser levados a cabo num ambiente cada vez mais natural para os alunos, do qual a escola não se deve excluir e onde deve marcar a sua presença.

Um apontamento final para um outro recurso incluído nesta lista – o GeoGebra. Sem uma análise detalhada, devem ser salientadas as características que o tornam uma autêntica «cool tool»: é livre, tem (muitas) comunidades de apoio já implementadas e a sua evolução tem possibilitado dar resposta a um número crescente de abordagens e conteúdos matemáticos, permite a construção de RED em formatos que visam a sua posterior publicação online. Este *software* tem características técnicas que permitem uma utilização na Internet (e sem ela) e apesar de ter sido desenvolvido, numa fase inicial, com especial incidência na GEOmetria e na alGEBRA tem diversificado as suas funcionalidades para responder a um número crescente de abordagens de problemas e conteúdos da Matemática e do Ensino da Matemática.

Os RED estão cada vez mais presentes nas nossas salas de aula. As mudanças ocorridas ao nível da Internet e das aplicações web, que possibilitam a construção e a partilha deste tipo de recursos por utilizadores comuns, vieram alavancar e promover o acesso a estes recursos. Mas esta mudança de paradigma pressupõe também uma ação cuidada na mobilização dos recursos, por parte dos professores, e na sua adequação às condições – materiais e humanas – próprias de cada contexto específico. Uma utilização eficaz dos RED depende das estratégias de utilização definidas, da adequação às condições logísticas existentes e das experiências prévias de professores e alunos em ambientes tecnológicos.

Referências: Cool tools for schools, disponível em: http://cooltoolsforschools.wikispaces.com/

Paulo Correia
Escola Secundária de Alcácer do Sal

Rui Gonçalo Espadeiro
Escola EB 2,3 e Secundária Dr. Hernâni Cidade

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Um triângulo a partir da parábola

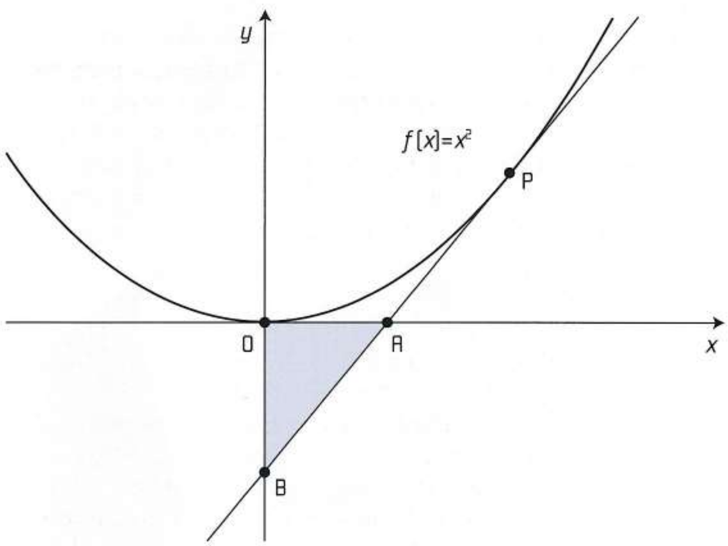
A tarefa «Um triângulo a partir da parábola» é uma das atividades exploradas no artigo «Investigações Matemáticas com a TI-Nspire», de José Paulo Viana, publicado na revista EM n.º 108. Destina-se a alunos do 11.º/12.º anos de escolaridade e o guia de resolução tem como pressuposto a utilização de tecnologia gráfica.

Se pensar utilizá-la na sala de aula sugerimos que leia previamente o referido artigo.

Um triângulo a partir da parábola

Problema

Temos o gráfico da funçao $f(x) = x^2$.
Por um ponto P de abcissa a traçamos a tangente ao gráfico de f.
A tangente intersecta os eixos coordenados nos pontos A e B.
Consideremos o triânguo BOA, em que O é a origem do referencial.



1. Como varia a área do triângulo em função de a?

Guia de resolução:

De preferência com a tua calculadora TI-Nspire, segue os seguintes passos:

1. Faz o gráfico da função.
2. Traça a tangente ao gráfico num ponto qualquer P e pede as coordenadas desse ponto.
3. Define o triângulo BOA e pede a área do triângulo.
4. Define a abcissa a e a área do triângulo como variáveis.
5. Cria uma folha de cálculo e faz a captura destas variáveis.
6. Altera o valor da abcissa, várias vezes, e recolhe os dados.
7. Faz uma nuvem de pontos dos valores obtidos.
8. Procura uma função que se adapte bem à nuvem de pontos, experimenta as funções de regressão quadrática e cúbica.

2. Faz uma conjetura sobre a influência que a abcissa a do ponto de tangência tem sobre a área do triângulo BOA.

3. Prova analiticamente a tua conjetura.
Para isso considera um ponto genérico P de abcissa a, determina a equação da tangente ao gráfico no ponto P, indica as coordenadas dos pontos A e B e calcula a área do triângulo BOA.

O que é a escala Richter? (Como se mede um terramoto?)

Ilydio Pereira de Sá
Ana Maria Severiano de Paiva

Charles Richter

Atualmente, com o crescimento da tecnologia e da informação, tem sido muito comum o noticiário sobre catástrofes, principalmente sobre terramotos após o que ocorreu, infelizmente, no Haiti, no Chile e no Japão.

Da curiosidade ingénua à investigação

Freire (1996), ao abordar a relação entre «ensinar» e «criticidade» chama a atenção sobre o que denomina de «curiosidade ingénua» e «curiosidade epistemológica». Afirma que «uma das tarefas precípuas da prática educativo-progressista é exatamente o desenvolvimento da curiosidade crítica» (Freire, 1996, p. 36). Ressalta que, no processo de ensinar e de aprender, a curiosidade é fundamental. Faz parte do homem, na sua busca de conhecer, ter curiosidade, ter perguntas, interrogar, ter porquês. É tarefa do professor, tão curioso quanto o aluno, valorizar essa curiosidade, criando situações para que os alunos falem, perguntem, dialoguem. As atividades que apresentamos consideram que ensinar matemática a partir de situações reais desperta a curiosidade, estimula o espírito de investigação dos alunos, contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo tão essencial na construção dos conceitos Matemáticos e em situações do dia-a-dia.

Investigando a escala Richter

Muitas pessoas não conseguem entender quando o noticiário fala sobre a escala Richter e informa, por exemplo, que um terramoto atingiu 8,0 graus nessa escala. Ficam até surpresas quando, para uma «pequena» diferença de dois pontos nessa escala, a notícia informa que o abalo libertou quase 1000 vezes mais energia do que o outro. Como se explica tudo isso? Qual a justificação matemática para essa interpretação? Qual a fórmula ou fórmulas usadas para chegarem

Figura 1. Sismógrafo

aos resultados que aparecem nas notícias? Com este nosso breve estudo, esperamos esclarecer essas dúvidas.

Os efeitos dos tremores de terra têm sido classificados por ordem de importância. As primeiras tentativas para avaliação da intensidade dos sismos foram feitas no século XVII, decorrentes da necessidade de avaliar os abalos sísmicos no Sul de Itália. Era uma escala muito rudimentar e os sismos eram classificados em *ligeiros*, *moderados*, *fortes* e *muito fortes*. Mais tarde desenvolveram-se escalas mais pormenorizadas, como a *Escala Modificada de Intensidades de Mercalli*, constituída por 12 graus de intensidades que eram estabelecidos de acordo com um questionário-padrão, de acordo com a intensidade crescente do sismo. Esse tipo de aferição dos abalos apresentava a vantagem de não necessitar de medições feitas pelo homem, mas, ao mesmo tempo, apresentava a desvantagem da subjetividade nas respostas desses questionários. Desta forma, percebemos que os geólogos e sismólogos há muito se preocupam com o estudo dos terramotos.

O principal instrumento associado à medida do comportamento dos terramotos e outros tipos de abalos sísmicos é o sismógrafo, que se destina a detectar e medir as ondas mecânicas e as vibrações geradas por esses eventos. Os sismógrafos têm como princípio básico um pêndulo cuja oscilação é diretamente proporcional à do abalo que ocorreu. O registo dessas oscilações fornece dados que caracterizam a intensidade do fenómeno ocorrido.

Atualmente os terramotos são classificados pelos danos que causam à região onde ocorreram através de um número indicador de sua magnitude, relacionado com a energia libertada pelas ondas do abalo sísmico ou com a amplitude das ondas sísmicas.

A Escala Richter foi desenvolvida por dois sismólogos, o norte-americano *Charles Francis Richter* (Hamilton, Ohio, EUA) e o alemão *Beno Gutenberg* (Darmstadt, Alemanha), que depois passaram a trabalhar, juntos, no Instituto de Tecnologia da Califórnia.

Usada pela primeira vez em 1935, a referida escala que leva apenas o nome de um deles (Charles *Richter*) é uma escala logarítmica que quantifica a magnitude dos terramotos com base na amplitude das ondas sísmicas que se propagam a partir do epicentro (ponto de origem do sismo).

Trata-se de uma escala construída a partir de logaritmos decimais e as variações dão-se através de potências de base dez. Terramotos que atingem até à magnitude 2 são considerados micro terramotos e, praticamente, não são sentidos. A partir das magnitudes entre 4 e 5 na escala Richter, um tremor já é suficientemente forte e liberta tanta energia mecânica que pode ser detectado por instrumentos instalados em vários locais do planeta.

A equação proposta por Richter pode ser escrita de várias formas distintas, dependendo das variáveis escolhidas para a sua composição. O nosso estudo vai ter como referência a fórmula que usa a variável E, que representa a *energia mecânica libertada* pelo abalo (medida em Joules).

A fórmula que mede a magnitude do terramoto pode ser escrita como:

$$M = 0{,}67.\log E - 3{,}25$$

Veja na tabela 1 a energia libertada em alguns terramotos.

Atividades: trabalhando com as notícias

1) Vamos determinar a quantidade de energia E, em Joules, libertada pelo recente terramoto no Chile (já que ela não aparece na tabela).

Este terramoto atingiu 8,8 pontos na Escala Richter, usando a fórmula dada, teremos: $8{,}8 = 0{,}67 \,.\, \log E - 3{,}25$, o que acarreta $\log E = 12{,}05 : 0{,}67$ ou $\log E \cong 17{,}98$.

Finalmente, temos que $E \cong 10^{17{,}98}$ ou seja $E \cong 10^{17} \times 10^{0{,}98}$.

Este resultado, consultando uma calculadora, é aproximadamente igual a $9{,}55 \times 10^{17}$ o que é, em ordem de grandeza, aproximadamente igual a 10^{18}.

2) O terramoto ocorrido em 2010 no Haiti acusou magnitude 7,0 na escala Richter e o do Chile 8,8. Foram divulgadas várias notícias comparando esses dois terramotos. Qual a real relação que existe entre as magnitudes das energias libertadas por esses dois terramotos?

Como acabámos de calcular, a energia libertada pelo terramoto ocorrido em fevereiro de 2010 no Chile foi de $9{,}55 \times 10^{17}$ Joules, enquanto que, pela tabela, temos que o do Haiti teve energia

Magnitude (M)	Energia libertada em joules (E)	Ocorrência
2,0	$6,3 \times 10^7$	Praticamente imperceptível
5,0	$2,0 \times 10^{12}$	Bomba atómica em Hiroshima, Japão 1945
6,7	$7,1 \times 10^{14}$	Estados Unidos (Los Angeles) 1994
6,9	$1,4 \times 10^{15}$	Arménia, 1998 e Índia, 2001
7,0	$2,0 \times 10^{15}$	Haiti, Janeiro de 2010
7,2	$4,0 \times 10^{15}$	Japão (Kobe), 1995
7,4	$7,9 \times 10^{15}$	Turquia, 1999 e Irã, 1990
7,8	$1,6 \times 10^{16}$	China (Tangshan), 1976
7,9	$4,4 \times 10^{16}$	Japão (Tóquio e Yokohama), 1923, Peru 2007 e China 2008
8,1	$8,7 \times 10^{16}$	México (Cidade do México), 1985
8,3	$1,8 \times 10^{17}$	Estados Unidos (São Francisco) 1906
8,8	?	Chile, 2010
9,5	$1,1 \times 10^{19}$	Chile, 1960

Tabela 1. Energia libertada em Joules por alguns terramotos

libertada na magnitude de $2,0 \times 10^{15}$ Joules, logo, a relação entre as magnitudes desses dois sismos é de:

$$\frac{9,55.10^{17}}{2,0.10^{15}} = 4,775.10^2 = 477,5$$

Interpretando o resultado que obtivemos, concluímos que o terramoto ocorrido no Chile foi, em termos de libertação de energia, cerca de 477,5 vezes maior do que o ocorrido no Haiti.

Se fizer uma pesquisa nas revistas e jornais que divulgaram o terramoto do Chile, verá que: a) a comparação nem sempre foi feita de forma correta; b) as conclusões tiradas misturaram a fórmula cuja variável é a amplitude da onda com a que tem como variável a energia libertada pelo terramoto.

3) No início do nosso texto afirmamos que, em termos da quantidade de energia liberada, medida em Joules, se há uma diferença de 2 pontos nas medidas das magnitudes de dois terramotos na escala Richter, significa que a quantidade de energia libertada pelo terramoto de maior intensidade é quase 1000 vezes maior do que a do de menor intensidade. Vamos comprovar matematicamente essa afirmação.

Vamos designar as magnitudes desses terramotos, medidas na escala Richter, por M e M+2. Vamos também designar por E_1 e E_2, respectivamente, as quantidades de energia (em Joules) libertadas por esses dois terramotos.

Logo $M = 0,67.\log E_1 - 3,25$ e $M+2 = 0,67.\log E_2 - 3,25$.

Subtraindo a primeira equação da segunda, teremos:

$$0,67.\log E_2 - 0,67.\log E_1 = 2.$$

Isso é o mesmo que $0,67.(\log E_2 - \log E_1) = 2$.

Aplicando as propriedades dos logaritmos, teremos: $0,67 . \log E_2/E_1 = 2 \Leftrightarrow \log E_2/E_1 = 2 : 0,67$ ou seja $\log E_2/E_1 \cong 2,985$.

Finalmente, teremos, $E_2/E_1 = 10^{2,985}$ ou $E_2/E_1 \cong 966$.

Ou seja, em termos corretos, o terramoto de maior intensidade, neste caso, teria libertado uma quantidade de energia cerca de 966 vezes maior do que a quantidade libertada pelo terramoto de menor intensidade.

Conclusão

O nosso estudo teve como principal objetivo mostrar a aplicação dos logaritmos num tema tão atual e do interesse das pessoas e dos noticiários como é o tema dos terramotos em todo o mundo.

O educador matemático, em todos os níveis de ensino, deve tentar mostrar que a matemática se relaciona com as diversas áreas do conhecimento e deve tentar estimular o aluno, a partir da curiosidade, à criticidade. Abordar um tema como o que apresentamos no nosso estudo, pelo seu forte caráter de contextualização e atualidade, ajuda bastante a despertar a curiosidade do educando e também a mostrar uma matemática viva, útil, atrativa e, acima de tudo, para o entendimento de todas as pessoas.

Fontes

Freire, P. (1996). *Pedagogia da Autonomia*. São Paulo: Paz e Terra.

http://www.cientic.com/tema_geologicos.html (visitado em 12/03/2010)

http://pt.wikipedia.org/wiki/Escala_de_Richter (visitado em 12/03/2010)

http://www.seismo.unr.edu/ftp/pub/louie/class/100/magnitude.html (visitado em 12/03/2010)

http://www.tiosam.net/enciclopedia/?q=Escala_Richter (visitado em 12/03/2010)

Ilydio de Sá, Univ. Serverino Sombra e Univ. do Estado do Rio de Janeiro (Brasil)

Ana de Paiva, Univ. Severino Sombra (Rio de Janeiro, Brasil)

APM – 2012

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objetivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo atividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das atas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2012

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efetuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2012

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Educação e Matemática (inclui atas ProfMat)</th><th>Quadrante</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sócio individual</td><td>Portugal</td><td></td><td>12,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td></td><td>15,00 €</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Instituições</td><td>Portugal</td><td rowspan="2">42,00 €</td><td>23,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td>27,00 €</td></tr>
</table>

índice

Editorial

Artigos

Secções