

# Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2011

115

■ Novembro ∞ Dezembro

Preço 7,80€

**EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA**

Directora	Isabel Rocha
Subdirectora	Manuela Pires
Redacção	Adelina Precatado Ana Paula Canavarro Alice Carvalho António Fernandes Cláudia Canha Nunes Cristina Tudella Helena Amaral Helena Rocha Irene Segurado Júlia Perdigão Lina Brunheira Nuno Candeias Paulo Dias

**Colaboradores Permanentes**

A. J. Franco de Oliveira *Matemática*  
António Domingos *Tecnologias na Educação Matemática*  
José Paulo Viana *O problema deste número*  
Lurdes Serrazina *A matemática nos primeiros anos*  
Maria José Costa *História e Ensino da Matemática*  
Rui Canário *Educação*

**Capa** António M. Fernandes

**Paginação** Gabinete de Edição da APM

**Entidade Proprietária**

Associação de Professores de Matemática  
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa

**Data da publicação** Dezembro 2011

**Tiragem** 3000 exemplares

**Periodicidade**

Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

**Impressão**

Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.  
Fonte Santa, Paúl  
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93

Registo no ICS nº 124051

ISSN 0871-7222

Porte Pago

**Sobre o número temático**

Este número da revista tem por tema *A aula de Matemática*. Tal como é habitual com os números temáticos, convidámos uma colega exterior à redacção para nos ajudar a pensar no tema e a definir os subtemas a abordar.

O convite foi feito à colega Helena Martinho da Universidade do Minho que, amavelmente, decidiu aceitar o nosso desafio. À editora fica aqui expresso o nosso agradecimento.

**Sobre a capa**

Na capa deste número reproduz-se uma fotografia – «Mathematical Object» (1936) – do fotógrafo surrealista Man Ray.

Man Ray (1890-1976) nasceu nos Estados Unidos, mas passou a maior parte da sua vida em França, mais propriamente em Paris. Foi um artista multifacetado tendo-se dedicado à pintura, escultura e fotografia. Disse um dia «Pinto o que não posso fotografar e fotografo o que não desejo pintar».

Na década de 1930, Marcel Duchamp comunicou-lhe a existência de vários objectos matemáticos no Instituto Henri Poincaré em Paris. Man Ray fotografou-os durante dois anos. Como o próprio disse, reconheceu nesses objectos um «carácter revolucionário» comparável ao da pintura. As fotografias de Man Ray não são meramente documentais, elas reflectem essa visão do autor.

António M. Fernandes

**Neste número também colaboraram**

Ana Maria Boavida, António Guerreiro, Cristina Loureiro, Doug Clarke, Eduardo Veloso, Fátima Gonçalves, Fernando Nunes (tradução de artigo) Gertrudes Amaro, Helen O'Shea, Hugo Menino, Joana Brocardo, João Pedro Ponte, José Manuel Matos, Luís Menezes, Mariana Rodrigues, Neusa Branco, Paula Cristina Teixeira, Paula Teixeira, Pedro Alves, Peter Sullivan, Renata Carvalho, Rosa Antónia Tomás Ferreira, Sandra Nobre.

**A Educação e Matemática e o novo acordo ortográfico**

A redacção da revista decidiu tornar oficial o uso do novo acordo ortográfico, a partir do 1.º número a editar em 2012. Assim, solicitamos que as propostas de artigos, a serem enviados à redacção da revista, respeitem o novo acordo ortográfico. No que respeita às propostas de artigos enviadas até à data de receção desta revista, a redacção assume a responsabilidade de proceder às alterações necessárias.

**Correspondência**

Associação de Professores de Matemática  
Rua Dr. João Couto, N.º 27-A, 1500-236 Lisboa  
Tel: (351) 21 716 36 90  
Fax: (351) 21 716 64 24  
E-mail: revista@apm.pt

**Nota**

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

## A aula de Matemática como ponta do iceberg?

Este número temático é dedicado à aula de Matemática. Tema incontornável, que tem estado presente em todos os números da «Educação e Matemática» é agora, à semelhança do que aconteceu no número 35, em 1995, foco de atenção e convergência. Várias são as questões que se colocam em torno deste tema: Que matemática queremos que o aluno aprenda? Que interações se desenrolam e que visões da matemática proporcionam ao aluno? Quais as oportunidades para a criação de Matemática por parte dos alunos? Que tarefas lhes propomos? Que aprendizagens privilegiamos? Que desafios e questões lhes colocamos? Que oportunidades damos aos alunos para que também eles nos desafiem? Como orquestramos as discussões? Como os ouvimos e como aproveitamos o que dizem?

Há dezasseis anos, no editorial do referido número 35 desta mesma revista, Paulo Abrantes, a propósito de aulas que seguiam sistematicamente o padrão «correção do trabalho de casa, explicação da matéria, resolução de exercícios e apresentação de novo trabalho de casa», desmistificava: «temos boas razões para questionar aquela maneira de <ver> a aula de Matemática (...) Ela baseia-se em mitos como o do <aluno médio> e em ideias como a de que uma aula é boa se o professor domina a matéria explica bem e controla os alunos».

Temos consciência que para um bom número de professores esta forma de <ver> a aula de Matemática é felizmente já muito distante. Os diferentes relatos de vivências e experiências em aula que dão cor às páginas deste número são testemunho disso mesmo.

Mas, por outro lado, não será actual voltar a ouvi-lo e mesmo reforçar as suas palavras numa conjuntura em que os modelos que no passado configuraram a relação educativa parecem reciclar-se e diversos movimentos de contracorrente ameaçam levar a escola de volta aos anos 60 do século passado? Tal desígnio é de improvável sucesso (qualquer semelhança entre a realidade actual e a de 1960, ou sequer, de 1995, é puramente conjuntural), mas as suas consequências não deixam de ser inquietantes. A história ilumina o que o peso do presente tende a esconder. O texto do José Manuel Matos, sobre as imagens da aula de matemática desde a Idade Média até aos nossos dias, é esclarecedor a esse respeito.

Para onde vamos, então? Ninguém questiona que o professor precisa de ter um sólido conhecimento de matemática, mas todos sabemos, todos os que já experimentamos aulas participadas e com tarefas desafiantes, que esse mesmo conhecimento é mais exigente quando a aula não se rege por um padrão pré-definido e, sobretudo, não olha os alunos como meros receptáculos passivos do que quer que seja. Antes lhes dá oportunidade de interagir e construir a sua própria experiência da e na matemática. A aula construída a partir do conhecimento que temos dos alunos é muito mais complexa, desafiadora e, na prática, efectiva do que receituários que erradamente assumem que todos os alunos são iguais.

Este número especial da Educação Matemática propõe-se abordar a aula de matemática sobre o prisma cruzado de diversos olhares: o das tarefas que se propõem e da forma como as mesmas são exploradas, o da orquestração das suas dinâmicas, o da comunicação. Olhares que iluminam percursos desmistificadores daquilo que é acessório na aprendizagem matemática. Com processos rotineiros dificilmente se educam os alunos para raciocinar produtivamente em situações reais usando com eficácia as ferramentas matemáticas e dominando o seu poder.

A matemática, por vezes, na sala de aula, emerge como um iceberg: os alunos vêem o topo (definições e procedimentos), mas a parte profunda (conceitos, raciocínios e argumentos), dinâmica e complexa, permanece escondida. E é sobretudo nela que reside o seu poder e a torna insubstituível para o desenvolvimento das sociedades e o aprofundamento da cidadania num mundo altamente tecnológico e complexo. Os artigos e os relatos que compõem este número ajudar-nos-ão a explorar o iceberg e a desafiar os nossos alunos nessa aventura. Sem receitas únicas nem soluções universais. Mas com a consciência activa de que, como no poema célebre de António Machado, *no hay camino, se hace camino al andar*.

Maria Helena Martinho

Universidade do Minho

**4TH ATEE**

*Winter Conference Professional Development of Teacher Educators: Bringing together policy, Practice and Research.*  
Realiza-se de 2 a 4 de abril de 2012, em Coimbra.

Mais informações em: <http://atee.macam.ac.il/Pages/Aims.aspx>

**EIEM 2012****Encontro de Investigação em Educação Matemática**

O EIEM 2012, promovido pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM), realiza-se nos dias 12 e 13 de maio de 2012, em Castelo de Vide, e tem como tema: *Práticas de ensino da Matemática.*

Mais informações em: [www.esep.pt/eiem12](http://www.esep.pt/eiem12)

**ICME 12****Congresso Internacional de Educação Matemática.**

Realiza-se de 8 a 15 de julho de 2012, na Coreia do Sul. Mais informações em: <http://www.icme12.org/> ou

<http://www.mathunion.org/icmi/home/>

**PME 36**

De 18 a 22 de julho, em Taiwan, Conferência anual organizada por este grupo internacional, sob o tema: *Opportunities to Learn in Mathematics Education.* Mais informações em: [www.igpme.org](http://www.igpme.org)

**Profmat 2012****Encontro Nacional de Professores de Matemática**

Este Encontro, promovido pela APM, terá lugar, em Coimbra, de 4 a 6 de outubro de 2012, com o lema: *Por um ensino de qualidade para todos.* Mais informações em: [www.apm.pt](http://www.apm.pt)

**XXIII SIEM****Seminário de Investigação em Educação Matemática**

Seminário da iniciativa da APM, nos dias 6 e 7 de outubro de 2012, em Coimbra. Os temas principais a tratar serão: *Transformações Geométricas, História da Matemática, Matemática e Arte, O Ensino Profissional e Exames Nacionais.*

Mais informações em: [www.apm.pt](http://www.apm.pt)

**Publicação APM****O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico**

Edição APM, 2011 | PVP: 7,50€ Sócio: 5,50€

A publicação da comemoração dos 25 anos da APM intitulada **25 anos 25 textos: pareceres e reflexões** será apresentada em todo o país nos Encontros Regionais da APM, através do debate de um parecer em cada encontro regional.

25 anos  
25 textos

pareceres e reflexões



Associação  
de Professores  
de Matemática

Edição comemorativa  
dos 25 anos da APM

# Imagens da aula de Matemática

José Manuel Matos



Ensinar, instruir, inculcar, aculturar, educar, treinar, transmitir são termos que nos remetem para a necessidade das culturas humanas de socializar as novas gerações. Costuma-se distinguir entre a socialização primária, a que ocorre próxima do círculo familiar, e a secundária, que tem lugar em instituições específicas, usualmente escolas. É nestas que se tem desenvolvido, provavelmente há mais de três ou quatro milênios, sistemas de representações e práticas, isto é *culturas*, específicos dessas instituições e que, segundo alguns (por exemplo, Chervel 1998) seriam dotados de alguma autonomia. Posto de outro modo, as escolas possuiriam normas, rituais, conhecimentos, valores ou técnicas específicas — simplificando, possuiriam uma *cultura* — que se encontrariam *apenas* na escola. E um dos exemplos mais importantes é a matemática, disciplina escolar com larga tradição e autonomia, que foi desenvolvendo com maior ou menor sucesso as suas representações e práticas de ensino.

Neste texto procurarei ilustrar estas práticas recorrendo a uma iconografia encontrada em livros de texto, fotografias, gravuras ou revisitada através de escritos de professores e alunos. Trata-se pois de um percurso através de modos de organização do processo de ensino, a *aula*<sup>11</sup>, e não sobre o conteúdo desse ensino (o currículo). E será necessariamente uma viagem impressionista, pois não foi ainda realizado um estudo aprofundado sobre o tema. Não incluirá nem uma referência ao ensino profissional, pois os livros de matemática encontrados não permitiram montar uma iconografia, nem à telescola, esta última apenas por razões de espaço. Será uma abordagem histórica que, tal como fazemos quando procuramos recriar os tempos do nosso passado familiar, procura ilustrar os modos arcaicos buscando as permanências e as mudanças como forma de compreender o presente. O que somos hoje tem sempre algo do passado, mas também algo que se afastou irremediavelmente do passado.



Figura 1. Gravura do *Tratado da pratica Darismetyca* de 1519.

### A aula medieval

A gravura com que termina a primeira edição do *Tratado da pratica Darismetyca* da autoria de Gaspar Nicolas (1519/1963) e que constitui o primeiro livro de texto de matemática impresso em Portugal (figura 1) parece representar uma aula medieval típica na qual o mestre está sentado numa cadeira mais elevada e aponta para o livro enquanto os aprendizes folheiam, presumivelmente, outros exemplares do mesmo livro<sup>[3]</sup>. Repare-se na postura do aluno mais à esquerda que parece transcrever as palavras do mestre. O livro parece ser o centro, desempenhando o mestre o papel de mediador entre dois saberes: o saber contido no livro e o que deve ser aprendido pelos alunos.

Em conjunto com as primeiras gramáticas nacionais, o *Tratado* prefigura uma nova «mentalidade» na sociedade portuguesa, passando os conhecimentos de escrita, caligráficos e aritméticos a desempenhar um papel central quer nas atividades económicas, quer no quotidiano de uma burguesia mercantil pujante e de toda uma série de profissões que orbitavam em torno dela.

### A aula jesuíta

A Ordem de Jesus, centrada no ensino, ganhou uma maior expressão após o Concílio de Trento (meados do século XVI) destacar a importância do ensino como factor de combate ao desvio protestante. O reino de Portugal esteve próximo quer da génese da ordem jesuíta no século XVI<sup>[3]</sup>, quer do seu banimento em diversos países europeus no século XVIII<sup>[4]</sup>.

Desenvolvendo gradualmente um conjunto de regras, o *Ratio Studiorum*, que, especialmente a partir do século XVII regia e uniformizava o ensino em todos os colégios, a Ordem vai aperfeiçoar toda uma nova técnica pedagógica que se procurava mais eficaz do que a de tradição medieval. O professor jesuíta assume um lugar mais destacado, falando («lendo», «explicando», «repetindo» ou «disputando») a partir do púl-



Figura 2. Púlpito em sala de aula do Colégio do Espírito Santo, Évora.

pito (figura 2), pelo menos nos colégios de maiores tradições.

O professor de matemática, por exemplo, estava sujeito a um conjunto específico de «Regras»:

1. Autores, tempo, alunos de matemática. — Aos alunos de física explique na aula durante 3/4 de hora os elementos de Euclides; depois de dois meses, quando os alunos já estiverem um pouco familiares com estas explicações, acrescente alguma coisa de Geografia, da Esfera ou de outros assuntos que eles gostam de ouvir, e isto simultaneamente com Euclides, no mesmo dia ou em dias alternados.
2. Problema. — Todos os meses, ou pelo menos de dois em dois meses, na presença de um auditório de filósofos e teólogos, procure que um dos alunos resolva algum problema célebre de matemática; e, em seguida, se parecer bem, defenda a solução.
3. Repetição. — Uma vez por mês, em geral num sábado, em vez da preleção repita-se publicamente os pontos principais explicados no mês.

Os colégios jesuítas vão ainda desenvolver outras técnicas pedagógicas inovadoras (por exemplo, as sabatinas).

### A aula de primeiras letras

Os colégios jesuítas, bem como os de outras ordens religiosas, não se destinavam a dar a formação elementar do ler, escrever, contar e rezar. Para isso existiam os mestres de primeiras letras que vão perdurar até bem dentro do século XX. A iconografia do final do século XIX mostra-nos algumas representações deste tipo de ensino.

Por exemplo, o livro de Ulysses Machado para o ensino primário (1914)<sup>[5]</sup> a pretexto de problemas de aritmética representa um professor partilhando uma refeição com os seus alunos numa cena que mima uma refeição tomada em família (figura 2).

Difícilmente conseguimos imaginar como esta situação possa ter pontos de contacto com a realidade atual. Mas deveria ter

**EXEMPLO:** — Um bolo foi dividido em dez partes iguais para dez estudantes.



Fig. 6

*Cada um dos estudantes recebeu suas dezimas do bolo*

Cada parte será, portanto, dez vezes menor que a unidade, (o bolo), isto é, a parte de cada estudante é uma décima do bolo, fig. 6.

**Figura 3.** Ambiente quase familiar entre o professor e os alunos (Machado, 1914, p. 70).

algum sentido na época em que o livro começou a ser publicado (final do século XIX ou princípio do século XX) e para os alunos a quem se destinava.

De facto, muitas destas «escolas» serviam simultaneamente de habitação para o professor<sup>61</sup> e seria natural que a prática escolar fosse igualmente uma prática quase familiar com o professor e com a família que com ele coabitava, situação perfeitamente enquadrada pela legislação. Segundo um aviso de 1809,

Os mestres, tanto regulares como seculares, poderiam continuar a dar lições em suas casas ou conventos, havendo nelas as «comodidades necessárias». (Albuquerque, 1960, p. 27)

Este aviso pressupunha, no entanto que o aluguer da sala corria por conta do professor primário. A situação real seria, no entanto, bem mais complicada como relata Santos Marrocos que em 1799 é encarregado de elaborar sobre o estado das escolas primárias e secundárias. Referindo-se a alguns professores de escolas primárias, escreve, em tom indignado

Estes mestres, como bufarinheiros em loja de quinquilharia, vendem aos discípulos papel, tintas, regras e pastas; fazem imposições mensais, contribuindo cada um para a água de beber, tendo mais preço sendo por um copo, varrer a escola, e o mais que omito. (citado em Albuquerque, 1960, p. 41)

O relatório refere ainda como alguns professores prestavam especiais cuidados a alguns alunos mediante uma retribuição suplementar. Esta situação seria devida aos magros salários que não deixavam grandes alternativas aos mestres não pertencentes a ordens religiosas.

Se Ulysses Machado inclui aquela imagem «familiar» que talvez já estivesse desatualizada no princípio do século XX, Ricardo Carvalho, no que foi um dos livros de referência para a introdução do sistema métrico, incluiu duas imagens sugerindo modernidade (figura 4).

A primeira é o quadro negro e a segunda, em fundo, o quadro sinóptico obrigatório sobre o sistema métrico elaborado pelo

### Operações sobre números inteiros



Os alunos entregaram as suas economias ao seu professor para as depositar na caixa económica. Cesar entregou 14 vinténs, Julio 12 vinténs, Luiza 15 vinténs, Maria 21 vinténs. Para se saber quantos vinténs ha no todo, o professor faz uma adição.

**Figura 4.** A modernidade está expressa pelo quadro negro e pelo quadro sinóptico do sistema métrico à esquerda (Carvalho, 1912, p. 14).

governo. Note-se que a estrutura da aula não é ainda frontal em relação ao quadro, o professor não parece dispor de um espaço próprio e o espaço para o trabalho dos alunos é uma mesa corrida com um local para tinteiros embutidos e um banco onde os alunos se sentavam. A utilização da inovação quadro preto não está ainda integrada na organização espacial da aula e, para observar o problema de aritmética no quadro os alunos deslocaram-se dos seus lugares.

O livro de Ulysses Machado que referimos inclui uma gravura com um quadro negro na capa (figura 5) e por isso o seu autor é também sensível a esta nova tecnologia.



**Figura 5.** Um aluno na capa do livro de Ulysses Machado (1914).



**Figura 6a.** As lousas e os cadernos pousados nas carteiras. Fonte: <http://www.cm-cartaxo.pt/cartaxo/pracapublica/Equip/Museuescolar/>



**Figura 6b.** A lousa na capa do livro de Ricardo Carvalho [1912].

Mas, para mim, o maior interesse desta capa está no aluno que é representado com um traje usual na época.

Um outro dispositivo pedagógico muito utilizado nas aulas de primeiras letras é a lousa. Ainda em 1938 o professor primário Dionísio das Dores Gonçalves descreve nos seus diários o uso constante em paralelo com o uso dos cadernos.

Mandei-os depois para o lugar, e disse-lhes que desenhassem nas lousas o mapa de Portugal com as serras dos respectivos sistemas. À primeira vista, poderá esta lição parecer demasiado grande para crianças, mas não é. Obtém-se muito bons resultados desprezando tanto quanto possível o emprego de mapas e substituindo-os pelo desenho no quadro, nas lousas e depois no papel. Os alunos fixam melhor os assuntos estudados e localizam melhor qualquer rio, serra, distrito ou província. (Gonçalves, 2005, p. 197)

Embora defenda o uso da folha de papel para os exames

Aproveito a ocasião para voltar a dizer o que tenho dito em todos os meus relatórios dos anos anteriores: Os examinandos, quer do 1.º quer do 2.º grau, devem substituir as lousas por uma folha de papel costaneira, onde farão as operações de cada problema, folha essa que será entregue com a respectiva prova de aritmética, para deste modo o júri ficar habilitado a julgar e a classificar sem hesitações. (Gonçalves, 2005, p. 514)

Esta longa evolução do uso da lousa e do papel vai a pouco e pouco aprofundar a tecnologia do caderno escolar, incorporando o papel quadriculado, o especial para a caligrafia, etc. E a lousa vai deixar de poder competir com esta inovação.

### A aula nos liceus

Em substituição dos colégios jesuítas, a legislação de Pombal de 1759 propunha uma rede de Aulas. Essa rede foi-se constituindo gradualmente e, a pouco e pouco foi-se estruturando um embrião de sistema de ensino secundário público moderno. Em 1759 entrega a orientação e a inspeção das escolas públicas à responsabilidade de uma Direção-Geral e determina que nenhum particular possa abrir escola sem estar munido de

licença e em 1801 os concursos para o provimento das cadeiras de primeiras letras são regulados. Apesar de algumas intenções em 1813 e de as disposições legais permitirem sistemas de compensação para professores que tivessem que deixar de ensinar, só em 1859 se regulou um sistema de reforma para o professorado (Albuquerque, 1960; Magalhães, 2010).

A partir de 1794 a Universidade de Coimbra passa a exercer a direção e a inspeção de todo o ensino primário e secundário através da Junta da Diretoria Geral dos Estudos. Se o regime absolutista, particularmente a partir de 1791, vai concentrar na Universidade de Coimbra a responsabilidade pela supervisão do sistema de ensino desde as primeiras letras, o regime liberal vai gradualmente retirar-lhe esse encargo em favor de organismos estatais de coordenação da educação (Magalhães, 2010). No que concerne à matemática, as escolas de primeiras letras ensinavam as quatro operações aritméticas, mas o seu estudo mais aprofundado só ocorria num número reduzido de escolas profissionais (por exemplo, a Aula de Comércio), no Colégio dos Nobres, nas escolas militares e na Universidade.

A introdução dos liceus por Costa Cabral em 1836 vem marcar, pelo menos no plano das intenções, a vontade de criar um sistema de ensino secundário público e laico, abrangendo todo o país e rompendo com a estrutura pombalina das aulas avulsas que por sua vez tinha substituído os colégios jesuítas. No entanto, só a partir de 1860, e com um número ainda limitado de liceus em funcionamento, se pode falar do desenvolvimento para este novo<sup>11</sup> tipo de escolas de um enquadramento legislativo mais elaborado.

Do modelo pedagógico proposto, parte que nos interessa aqui, podemos ter uma ideia através do Regulamento para os Liceus Nacionais publicado em 1860 sob a direção de Fontes Pereira de Melo. E primeiro lugar, uma curiosidade. No seu capítulo IV, Das aulas, estabelece-se:

Art. 26.º As aulas dos liceus são públicas. Haverá nelas lugares para os visitantes, inteiramente separados dos lugares dos alunos.





**Figura 7a.** Sala de aula no Liceu Camões em Lisboa em 1910/11 [Adamopoulos e Vasconcelos, 2009, p. 75].

A possibilidade de «visitantes» só deixa de ser mencionada no final do século XIX. A norma seria tacitamente válida para classes masculinas (as únicas que existiam), mas, quando se iniciaram escolas secundárias femininas de 1890 o seu Regulamento estipula no art. 14.º que as aulas não são públicas e que apenas podem assistir «pães, tutores ou pessoas a quem esteja confiada a instrução». Diz ainda o Regulamento dos Liceus de 1860:

Art. 27.º Os lugares dos alunos nas aulas serão dispostos de modo a que todos possam igualmente receber as lições dos professores e serem por estes vigiados.

Art. 28.º Haverá em cada aula três lugares de distinção, que deverão ser ocupados pelos alunos que na semana anterior mais se tiverem distinguido no cumprimento dos seus deveres escolares.

(...)

Art. 30.º Das duas horas que dura a aula os professores empregarão pelo menos uma em ouvir o maior número possível de alunos sobre a lição passada anteriormente, e o resto do tempo em dar as explicações que julgarem convenientes para a completa inteligência das doutrinas que forem objecto da lição dada naquele dia ou da que os alunos têm que estudar para o seguinte dia de aula.

Art. 31.º Haverá em todas as aulas exercícios ou temas escritos, os quais serão analisados e emendados pelo professor, em voz alta e para toda a classe.

Esta formulação será repetida em documentos legais posteriores embora também desapareça no final do século.

Haveria alguma flutuação no que se entendia ser os espaços de ensino dos primeiros liceus. Por exemplo, no liceu de Aveiro, o primeiro instalado em edifício construído expressamente para o efeito e inaugurado em 1860 as salas de aula, são denominadas ocasionalmente também de «casas de aula» (Marques, 2003, p. 42). Observemos uma descrição da disposição do mobiliário:

Nas aulas, os lugares para os alunos, formam em frente da cadeira do professor, um anfiteatro de cadeiras de braços em semicírculo. (Marques, 2003, p. 43)



**Figura 7b.** Aula nos anos 1930 no Liceu Pedro Nunes em Lisboa.

A aula teria assim um formato de anfiteatro de cadeiras, com o professor no centro, resolvendo-se assim o problema da vigilância dos alunos e da boa comunicação entre estes e o professor. Não encontrei nos livros de texto desta época gravuras representando aulas de Matemática.

Difícilmente podemos falar de um *sistema* de ensino secundário até 1895. As medidas avulsas e constantemente alteradas, as parcas remunerações, a precariedade das instalações, são factores que vão afastar os alunos dos liceus. Uma descrição de como se obteria então a formação prévia necessária para aceder à Universidade pode ser encontrada num texto de Agostinho Campos (1870–1944), escritor, jornalista, pedagogo e político natural do Porto, em que relata o seu percurso escolar.

Nessa altura [por volta de 1880], interrogavam-se e informavam-se uns aos outros os rapazes. Quem é bom para Álgebra e Desenho? O Teófilo de Faria, na rua do Sol. Para Inglês e Introdução às Ciências? O Carlos Chambers e o Bento Carqueja, no colégio da Glória, de Cedofeita. Para História e Geografia? O Muffler, no curso de Júlio Moreira, rua de Passos Manuel. Para Legislação? O Alves da Veiga, em Santa Catarina. E, assim sucessivamente. (Adamopoulos e Vasconcelos, 2009, p. 24)

Os alunos não se inscreviam pois nos liceus onde a formação era de qualidade inferior e após obterem a formação necessária em aulas avulsas de professores, limitavam-se a ir fazer os exames nos liceus que no resto do ano escolar se encontravam quase desertos. Difícilmente se poderia constituir uma tradição escolar liceal com estes fundamentos.

### A refundação dos liceus

Será a partir de 1895, com a reforma de Jaime Moniz que a estrutura secundária pública e laica idealizada desde Passos Manuel se vai tornar realidade (Magalhães, 2010). Adoptando o sistema de classes e terminando com a possibilidade de se realizarem exames a disciplinas avulsas, vai-se constituir um sub-sistema de ensino intermédio (secundário) entre o ensino primário e o universitário<sup>[8]</sup>.

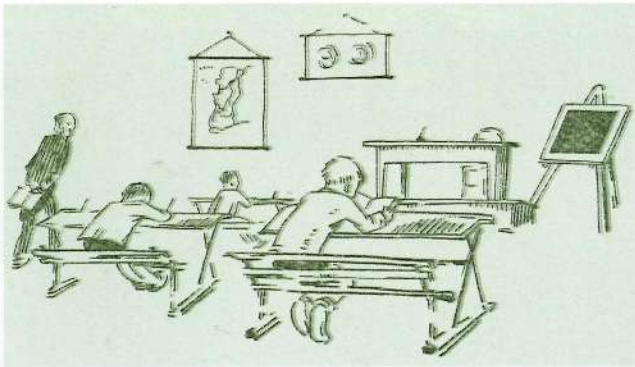


Figura 8. Capa do *Caderno de problemas de aritmética, 4.ª classe*, finais dos anos 1930.

A inauguração de novos edifícios destinados a liceus na segunda década do século XX consolida uma primeira arquitetura de referência (Marques, 2003) e portanto sustenta a construção de um imaginário cultural do que é «o liceu» que até então era muito difuso. No que nos interessa, a estrutura da sala já integra o quadro negro, as carteiras, o estrado e a secretária e o professor assume um papel central (figura 7)<sup>61</sup>. No Liceu Camões, por exemplo, que inaugura em 1909 os liceus oficiais construídos de raiz, o quadro negro já está colocado na parede.

Longe vai a aula-anfiteatro dos primeiros liceus de meados do século XIX e deixou de ser preciso legislar sobre a importância de todos os alunos «poderem igualmente receber as lições» como aparecem nos documentos oficiais de quase todo o século XIX, pois a concepção de aula passou a assumir *naturalmente* o lugar central, e normalmente mais elevado, do professor com a sua secretária assente num estrado e as carteiras destinadas aos alunos.

Esta estruturação da aula vai predominar até aos anos 60 e arriscava dizer, até aos dias de hoje. Talvez a melhor representação de uma aula ideal desta época que encontrei seja a da figura 8 do final dos anos 1930 que coloca num traço sintético enérgico todos os elementos relevantes em interação com os atores colocados nos seus lugares pré-destinados.

### Outras aulas de Matemática

Nem todas as aulas tinham aquela estrutura. Desde o início do século XX, que o que se costuma designar de movimento da Escola Nova veio a ganhar força em Portugal, em especial após a implantação da República. Colocando o aluno no centro da educação, propunha a adopção de metodologias intuitivas e de descoberta, próximas da realidade das crianças, a manipulação de materiais e o respeito pelo seu desenvolvimento psicológico. Este movimento vai ter especial incidência nas escolas de formação de professores (Pintassilgo, Mogarro e Henriques, 2010) e em algumas escolas primárias particulares, por exemplo nos Jardins-Escola João de Deus.

Os Jardins-Escola, fundados em Coimbra em 1911 por João de Deus Ramos, pretenderam utilizar o método criado pelo poeta e pedagogo português João de Deus (1830–1896), seu pai. No que diz respeito à matemática, desde cedo se optou pela



Figura 9a. Crianças no salão a jogar com os Dons de Fröebel, 1938.

utilização de materiais manipuláveis de Maria Montessori e de Friedrich W. Fröebel que requeriam uma organização da aula em grupos de trabalho dispostos em torno de mesas (figura 9).

Estas abordagens didáticas inovadoras não se limitaram ao ensino primário e tiveram grande expressão, pelo menos ao nível do discurso, nas instituições de formação de professores do ensino liceal desde os anos 1930, nomeadamente nos Liceus de Pedro Nunes e D. João III em Coimbra. Num levantamento dos relatórios obrigatórios que professores agregados (isto é, ainda não efetivos) enviavam anualmente para o Ministério da Educação (Matos e Fischer, 2010), encontramos referências constantes ao «método heurístico». Por exemplo, Joaquim Manuel Preguiça que elabora o relatório sobre o seu trabalho no Liceu de Passos Manuel em 1960, descreve assim as suas aulas do 1.º ano do 1.º ciclo:

O método de ensino utilizado foi, sempre que possível, um método activo experimental, em que se procurou que as crianças aprendessem por meio de experiências realizadas na aula.

A aula tomou, muitas vezes, o aspecto dum laboratório em que as crianças realizaram desenhos, recortes, construções, medições e pesagens e iam aprendendo assim as primeiras noções matemáticas por recurso à intuição e aos objectos materiais (modelos matemáticos).

No estudo da geometria (experimental) utilizavam-se modelos matemáticos, dispositivos ou objectos materiais capazes de traduzir ou de sugerir ideias matemáticas construídos pelos próprios alunos. Pretende-se assim, de acordo com as teorias mais modernas dos psicólogos como Piaget, fornecer representações mentais dos modelos para serem utilizados na abstracção de ideias matemáticas e evitar um verbalismo sem qualquer realidade concreta, ao mesmo tempo que se pretendem prover a acção dos alunos e desenvolver a capacidade de iniciativa dando-lhes liberdade de escolha de material e de construção. (p. 89)

E Maria Eduarda Sousa descreve assim o seu trabalho no Liceu de Faro no ano lectivo de 1959/60:

Como norma, fiz sempre seguir cada definição, cada regra, cada teoria, de numerosos exemplos exercícios, para que melhor pudessem ser precisados e focados os conhecimentos que os alunos iam adquirindo.



Figura 9b. Trabalhando com material manipulável, anos 30.

Nas turmas do 2.º ciclo [dos liceus], esforcei-me por usar, de preferência, quando possível, o método heurístico, na medida em que ele pôde ser aplicado a turmas de quarenta e tal alunos. (p. 89)

Já quanto ao 3.º ciclo, atuais 10.º e 11.º anos, a sua perspectiva é outra:

Nas turmas do 3.º ciclo, onde ensinei Matemática no 6.º ano e Desenho no 7.º, adoptei métodos diferentes consoante a disciplina em questão. Assim, em Matemática, as aulas tiveram por base o método expositivo, único compatível não só com o número de alunos da turma [sabemos que eram mais de 40] mas muito especialmente com a extensão do programa. Além disso, creio que o rigor lógico a que o raciocínio dedutivo obriga, é altamente profícuo quando se pretende levar o aluno a ter uma visão mais elevada de problemas já conhecidos, o que acontecia em grande parte do programa desta disciplina. (p. 90)

Esta visão contrasta com as dos programas oficiais para o ensino secundário de 1931 e que se vai manter até 1947:

O ensino da aritmética, sobretudo nas primeiras classes, deve ter um carácter intuitivo e elementar, visando principalmente familiarizar o aluno com o cálculo numérico mental e escrito. Este ensino terá uma feição experimental e prática, reduzindo-se a teoria, de princípio a explicações e observações feitas nos casos concretos que o aluno é chamado a resolver; as noções abstratas serão adquiridas lentamente, de modo que o aluno fique com uma ideia clara dos seres de razão que elas definem. A resolução de numerosos exercícios do cálculo mental e escrito constitui por isso a base deste ensino, exercícios resolvidos na aula debaixo da direcção do professor, servindo de preparação e apresentação do assunto a estudar e exercícios feitos em casa rememorando o trabalho da aula e que o aluno apresentará no seu caderno, submetendo-os às correções e anotações do professor.

Compete ao professor a escolha e graduação desses exercícios de modo a levar insensivelmente o aluno do estudo de casos simples para outros mais complexos. O aluno deve também ser levado a resolver numerosos problemas de aplicação dos assuntos estudados; nestes problemas, muito simples e formulados a partir da realidade sensível ao aluno, procurará este determinar por um rápido cálculo mental o seu resultado aproximado, o que lhe permitirá o conhecimento da existência de erro se os resultados forem muito diferentes. (Decreto n.º 20.369, 1931, p. 2187)



Abolidas as carteiras para darem lugar a mesas praticáveis, instituído o sistema de equipa, a aula de matemática passou a ser, realmente, um laboratório, no Liceu Pedro Nunes

Figura 10. Fotogravura do Diário Popular de 8/3/1963 (p. 13).

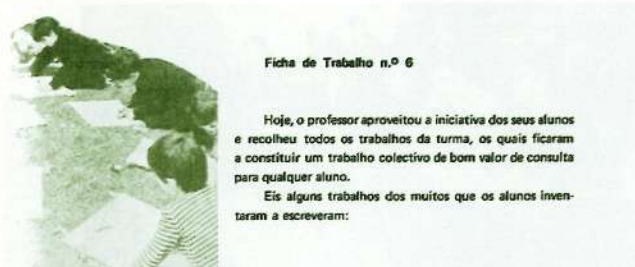
Deveremos esperar pela experiência da Matemática Moderna no princípio dos anos 1960 para ver surgir no ensino secundário experiências de tipos diferentes de aula influenciadas pelo movimento da Escola Nova do princípio do século. Esta reforma é anunciada com pompa e circunstância numa série de quatro artigos do Diário Popular e no de 8 de Março de 1963 anuncia-se, como factor de modernidade, que as carteiras foram substituídas por mesas de trabalho permitindo agora um trabalho em equipa e de laboratório. A notícia é acompanhada de uma fotografia de uma aula que presumivelmente terá sido obtida numa das turmas da experiência do Liceu de Pedro Nunes (figura 10).

Sabemos também, através de relatos de estagiários que acompanharam estas experiências, que o estrado onde estava a secretária do professor teria sido igualmente removido (Serrote, 1966). Uma pequena nota: compare-se o traje destes alunos de meados dos anos 1960 com o dos alunos dos anos 1930 e notaremos certamente algumas diferenças<sup>[10]</sup>.

Nos anos seguintes, especialmente a partir das inovações pedagógicas introduzidas a partir de 1968 com o Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, esta desconstrução da aula vai-se aprofundar. A figura 11 mostra uma aula na Escola Preparatória Eugénio dos Santos em que alunos do 1.º ano trabalham em grupo sobre o tema sistemas de numeração.



Figura 11. A estagiária Natália Vaz apoia um grupo de alunos resolvendo uma tarefa relacionada com sistemas de numeração em 1972.



Ficha de Trabalho n.º 6

Hoje, o professor aproveitou a iniciativa dos seus alunos e recolheu todos os trabalhos da turma, os quais ficaram a constituir um trabalho colectivo de bom valor de consulta para qualquer aluno.

Em alguns trabalhos dos muitos que os alunos inventaram a escreveram:

Figura 12. Outras formas de trabalho em aula (Lopes e Costa, 1976, p. 11).

Terminaria este artigo com uma imagem de uma aula de tipo diferente que aparece, entre muitas outras, no livro *A matemática e eu, 2.ª fase, 1.º ano* de Belarmina Lopes e Maria Jorge Costa aparentemente apostado em estimular o uso de metodologias ativas e que foi publicado no ano de 1976 onde tudo parecia possível.

### Concluindo

Espero ter trazido o leitor para uma visão da história (em particular da da Educação Matemática) como uma busca de permanências e mudanças que nos permita refletir sobre o presente. O aluno, o professor e o conteúdo enquanto categorias abstratas constitutivas da tal socialização secundária que falei no início são permanentes, mas tudo o resto muda: as relações que se estabelecem na aula, o valorizado e o reprimido, os artefactos e o seu significado. Mas muda, para além de tudo a identidade social e cultural concreta dos alunos, dos professores (repare-se de novo nas imagens de alunos e de professores) e da própria matemática (que incorporou diferentes visões do que é conhecimento matemático legítimo e desejável eliminando simultaneamente outras dimensões).

### Notas

- [1] Não me refiro apenas à *sala de aula*, que tem conotações mais espaciais e físicas. A língua portuguesa possui uma excelente alternativa, a *aula*, que designa de um modo abrangente todo o processo social e cultural envolvido no ato educativo.
- [2] A gravura foi usada noutros livros do mesmo editor.
- [3] Os seus fundadores estudaram no Colégio de Santa Bárbara em Paris financiado por D. João III.
- [4] A posição da Santa Sé sobre a ordem jesuíta no seu conjunto foi pressionada pelo Marquês de Pombal.
- [5] Suspeito que a gravura se foi mantendo ao longo das inúmeras edições do livro desde o século XIX. Foi consultada a 5.ª edição.
- [6] Poder-se-ia igualmente afirmar que era a habitação do professor que constituía a escola.
- [7] Ainda seria «novo». Repare-se que os 24 anos que mediam entre as duas datas foram ocupados com uma guerra civil cruel.
- [8] Um maior aprofundamento deste tema levar-nos-ia longe do objeto deste texto.
- [9] Integra também muitos outros equipamentos escolares para uso em aulas que não de Matemática, bem como muitos outros detalhes arquitetónicos. O leitor interessado poderá aprofundar o tema em Marques (2003).
- [10] Uma das diferenças é que o Liceu Pedro Nunes, pensado inicialmente como uma escola mista, mais tarde se tornou num liceu masculino.

### Referências

- Adamopoulos, S. e Vasconcelos, J. L. F. (2009). *Liceu Canões, 100 anos de testemunhos*. Lisboa: Quimera.
- Albuquerque, L. (1960). *Notas para a história do ensino em Portugal I*. Coimbra: Textos Vértice.
- Carvalho, R. D. (1912). *Aritmética, sistema métrico e geometria para as escolas primárias* (17.ª ed.). Coimbra: F. França Amado.
- Chervel, A. (1998). *La culture scolaire, un approche historique*. Paris: Belin.
- [Fonseca, C.] (1963). Revolução no ensino (3). *Diário Popular*, 8/3/1963, p. 13.
- Lopes, B. A. e Costa, M. J. L. (1976). *A matemática e eu, 2.ª fase, 1.º ano*. Lisboa: Básica Editora.
- Machado, U. (1914). *Aritmética prática e geometria elementar* (5.ª ed.). Lisboa: Liv. Rodrigues.
- Magalhães, J. (2010). *Da cadeira ao banco, escola e modernização* (séculos XVIII–XX). Lisboa: Educa.
- Marques, F. M. (2003). *Os Liceus do Estado Novo, arquitectura, currículo e poder*. Lisboa: Educa.
- Matos, J. M., e Fischer, M. C. B. (2010). Identidade profissional de professores de Matemática no Portugal do final dos anos 50. Em J. Pintasilgo, A. Teixeira, C. Beato e I. C. Dias (Eds.), *A História das Disciplinas Escolares de Matemática e de Ciências: contributos para um campo de pesquisa* (pp. 83–95). Lisboa: Escolar Editora.
- Nicolas, G. (1519/1963). *Tratado da pratica darismetyca*. Porto: Livraria Civilização.
- Pintasilgo, J., Mogarro, M. J. e Henriques, R. P. (2010). *A formação de professores em Portugal*. Lisboa: Edições Colibri.
- Serrote, P. C. (1966). Algumas considerações sobre o 6.º ano de Matemática das turmas experimentais: Conteúdos, métodos de ensino, relação com outras disciplinas do curriculum escolar, influência na formação humana do aluno. *Palestra*, 26(Abril), 108–121.
- Silva, L. A. O Método Pedagógico dos Jesuítas, O «Ratio Studiorum». [http://www.histedbr.fae.unicamp.br/navegando/fontes\\_escritas/1\\_Jesuitico/ratio%20studiorum.htm](http://www.histedbr.fae.unicamp.br/navegando/fontes_escritas/1_Jesuitico/ratio%20studiorum.htm)
- Vaz, M. N. (1972). Ensino pedagógico ao nível do C.P.E.S — numeração e operações em bases diferentes. *Boletim da Direcção de Serviços do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*, 8-9-10, 78–108.

*Agradecimentos:* este trabalho não teria sido possível sem a colaboração da Mária e do Tó Zé Almeida que facultaram o acesso a alguns livros da sua coleção. Teresa Monteiro recolheu a fotografia da figura 7b. Joseane Pinto de Arruda recolheu a fotografia da figura 9. Um agradecimento especial à equipa deste número pelo desafio. A todos o meu agradecimento.

José Manuel Matos

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa



## Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios

Ana Paula Canavarro

### 1. Ensino exploratório da Matemática: que significado?

O ensino exploratório da Matemática<sup>[1]</sup> não advoga que os alunos descubrem sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos ou lhes adivinham os nomes. Muito menos advoga que isso acontece enquanto o professor espera tranquilamente sentado pelos rasgos iluminados e criativos dos seus alunos — não que estes não os tenham quando lhes é dada oportunidade.

O ensino exploratório da Matemática<sup>[1]</sup> defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Para que isto aconteça, é crucial o papel e a acção do professor, que começa com a escolha criteriosa da tarefa e o delineamento da respectiva exploração matemá-

tica com vista ao cumprimento do seu propósito matemático, orientado pelas indicações programáticas. Em aula, para além de gerir o trabalho dos alunos, o professor precisa de interpretar e compreender como eles resolvem a tarefa e de explorar as suas respostas de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam. O ensino exploratório da Matemática é, pois, uma actividade complexa e considerada difícil por muitos professores (Stein *et al.*, 2008).

O presente artigo discute práticas de professores que contribuem para desenvolver o ensino exploratório da Matemática e problematiza alguns dos seus desafios. Estas práticas são ilustradas com as de uma professora numa aula ficcionada, inspirada no acompanhamento de aulas de professores que praticam este tipo de ensino, e recorrendo a uma tarefa que pode ser explorada em todos os ciclos de escolaridade. Apresento as resoluções produzidas pelos alunos de uma turma de 9.º ano de Lina Brunheira<sup>[2]</sup>, professora na Escola Secundária com 3.º ciclo da Amora, bem como a versão da tarefa tal como foi por ela colocada aos alunos.

Depois da festa, o João e a Teresa ficaram apenas com um Mon Chéri (um bombom de chocolate com licor e uma cereja). Para decidir quem o vai comer, resolvem tirar à sorte: par ou ímpar. Já estão habituados a fazer isso: cada um esconde uma mão atrás das costas e escolhe mostrar 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos; em seguida mostram as mãos ao mesmo tempo e o soma dos dedos das suas mãos determina o vencedor: se for par, ganha quem escolheu par previamente, se for ímpar, ganha quem escolheu ímpar.



1. Através da construção de um esquema, uma tabela, ou do registo que entenderes, mostra as diferentes situações que podem ocorrer;
2. A Teresa escolhe ímpar e o João escolhe par. Achas que algum tem maior probabilidade de ganhar? Fundamenta a tua resposta.

Figura 1. Enunciado da tarefa

## 2. Apresentar a tarefa e acompanhar o trabalho autónomo dos alunos

A professora chega à aula e começa de imediato pois sabe que a gestão do tempo terá de ser muito controlada se quiser chegar ao fim com os seus objectivos cumpridos. Além disso, os alunos estão ali para trabalhar e há que impor-lhes ritmo e contagiá-los com entusiasmo para evitar que se dispersem. Enquanto eles se sentam, a professora liga o computador e projecta o enunciado da tarefa que lhes vai propor. Distribui pelas mesas o mesmo enunciado que conseguiu fazer caber em meia folha A4 para poupar papel, de modo a que cada grupo de três alunos tenha um enunciado. Hoje pretende que trabalhem em pequenos grupos, pois a tarefa é uma situação problemática e pode beneficiar da discussão e interacção entre eles.

Cinco minutos passados e os alunos preparados, a professora explica que a aula vai ter quatro momentos à semelhança de muitas outras. A seguir à introdução da tarefa, existirá um segundo momento de trabalho em grupo dos alunos com a duração de 25 minutos; seguir-se-á um terceiro momento destinado à discussão das resoluções dos grupos com a duração de 40 minutos; o quarto momento de síntese, com 10 minutos, terá em vista fazer uma conclusão final das principais aprendizagens matemáticas realizadas nesta aula.

A professora pede aos alunos para lerem em silêncio o enunciado (figura 1) do problema e de seguida convida um aluno a reproduzir o jogo do par ou ímpar com ela. Parece-lhe fundamental que todos tenham completamente esclarecido como funciona o jogo para poderem começar a trabalhar e progredir matematicamente na tarefa. Ela e o aluno exemplificam quatro vezes a jogada, com a turma a acompanhar e a dizer, de cada uma das vezes, se se obtém par ou ímpar. A professora pede então um voluntário para redizer por palavras próprias os pedidos das duas questões do problema. Parece-lhe que a maioria dos alunos tem alguma dificuldade em interpretar a primeira questão e, por isso, decide concretizar situações possíveis que os façam reflectir sem fornecer demasiadas indicações que possam reduzir o nível de desafio cognitivo da tarefa (Stein & Smith, 2009). Coloca questões com números criteriosamente escolhidos:

P: *Neste jogo, os números ímpares podem ocorrer muito ou pouco? Por exemplo, o número 13, que é um ímpar, pode ocorrer?*

Espera que com esta questão os alunos realizem que existe um número limitado de possibilidades — e eles concluem que nunca poderá ser obtido um número superior a 10.

A professora quer também que os alunos se apercebam que é diverso o número de vezes que cada número pode ser obtido, pois disso depende conseguirem avançar. Pergunta então:

P: *O número 5 pode ocorrer? Muitas ou poucas vezes? Mais ou menos do que o número 2?*

Os alunos avançam que o número 2 só pode ser obtido quando o João e a Teresa apresentam ambos apenas um dedo, mas o 5 pode ocorrer de mais do que uma maneira: por exemplo,  $1 + 4$ ,  $2 + 3 \dots$

Após esta introdução, a professora preocupa-se em desafiar os alunos, pedindo-lhes para revelarem as suas expectativas sobre o resultado da equidade do jogo. Acha que eles estarão mais mobilizados para o trabalho com este desafio extra que lhes permitirá também comprovar que a Matemática os ajuda a verificar se as suas intuições são ou não certas, valorizando o papel desta ciência. Pergunta:

P: *Acham que este jogo é igualmente justo para a Teresa e para o João? Será que algum dos dois é beneficiado por escolher par ou ímpar? Qual é o vosso palpite? Quem é que acha que é igual? Quem acha que os pares têm vantagem? Quem acha que têm vantagem os ímpares?*

A turma divide-se na reacção: uns apostam no par, outros no ímpar, mas a maioria da turma parece acreditar que o jogo é equitativo. A professora regista rapidamente no canto no quadro o resultado da votação de braço no ar:

Palpite geral da turma: *As situações de pares e ímpares são em igual número.*

Imediatamente a seguir, indica aos alunos que comecem a trabalhar autonomamente nos grupos e que registem, numa folha por grupo, as respectivas resoluções. Os alunos posicionam-se nos grupos movendo o menos possível as cadeiras e iniciam o trabalho, enquanto a professora escreve na parte lateral do quadro os tempos da aula para que ninguém, incluindo ela, deles se esqueçam.

Trabalho de grupo: das 10:30 às 10:55

Discussão: das 10:55 às 11:35

Síntese: das 11:35 às 11:45.

A professora começa então a circular pelos grupos sem se aproximar demasiado, apenas para espreitar o que fazem sem os interromper. Um grupo chama-a e quer indicações precisas sobre «o que é para fazer», mas ela resiste a explicitar algum procedimento, preferindo questioná-los com a expectativa de os fazer pensar. Afasta-se logo que entende que o grupo enveredou por um caminho e vai recolhendo indicações sobre as resoluções que vêm surgir. Outro grupo, o mais despachado, chama-a para lhe perguntar «se está certo». A professora sorri e devolve a questão aos alunos, sem lhes chegar a confirmar a correcção do seu raciocínio. Afasta-se e vai ter com um outro grupo que parece um pouco alheado do trabalho. Estes alunos replicam que já concluíram a tarefa mas a professora interroga-os de modo a lhes fazer sentir que a sua abordagem foi superficial e que a devem aprofundar. Noutro grupo que lhe parece bloqueado sugere que registem no caderno as possíveis situações de se obter cada um dos números, pois os alunos tentam resolver tudo sem recorrer ao registo escrito e, em consequência, não controlam completamente as situações que já consideraram.

Às 10:45, a professora avisa os alunos de que faltam dez minutos e de que devem preparar-se para produzir a folha de res-

posta do respectivo grupo. Os alunos reclamam, como sempre, que ainda não acabaram, a professora apressa-os e incentiva-os a terminar. Passa uma última vez por cada grupo para completar a sua recolha de informações. Tem sete grupos e sete resoluções diferentes. O que fazer? Que resoluções convém levar à discussão colectiva? Quais delas podem contribuir para esclarecer os aspectos matematicamente significativos do problema? E qual a melhor ordem para as sequenciar?

Enquanto reflecte e toma estas decisões, fotografa com o seu telemóvel as respostas que os grupos entretanto vão finalizando. Quando a discussão começar, não será necessário gastar tempo a passar para o quadro as apresentações de cada grupo — basta ligar o cabo entre o telemóvel e o computador e todos terão acesso rápido a todas as resoluções completas. Adoptou este método desde que na sua escola recolheram os «antigos» retro-projectores, quando a equiparam com quadros interactivos, computadores e projectores de vídeo em quase todas as salas.

### 3. Orquestrar produtivamente as discussões matemáticas

A professora sente a gestão das discussões colectivas como um grande desafio. Apesar de já a realizar há algum tempo, continua a considerá-la como uma prática difícil de concretizar mas muito compensatória em termos da dinâmica colectiva que proporciona na turma e das próprias aprendizagens matemáticas que permite aos alunos. Por isso tem vindo a investir continuamente em melhorar a sua preparação para este tipo de aula, seguindo de perto cinco práticas que visam proporcionar ao professor melhores condições para orquestrar produtivamente discussões matemáticas (Stein *et al.*, 2008). Estas práticas podem resumir-se por: 1. Antecipar; 2. Monitorizar; 3. Seleccionar; 4. Sequenciar; e 5. Estabelecer conexões.

#### 3.1. Antecipar

Esta prática realiza-se durante o trabalho de planificação, sendo uma das suas componentes mais importantes. A antecipação corresponde essencialmente a uma previsão por parte do professor de como os seus alunos irão abordar as tarefas que lhes coloca com vista a relacionar aquilo que eles poderão fazer com o propósito matemático da aula. Ao antecipar, o professor dedica-se a: Prever a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa; Elencar uma diversidade de estratégias, correctas e incorrectas, que os alunos poderão usar, com diferentes graus de sofisticação; Relacionar essas estratégias com os conceitos, representações, ou procedimentos que quer que os alunos aprendam e/ou com as capacidades que quer que eles desenvolvam.

Para tal, o professor tem necessariamente de conhecer muito bem a tarefa que vai propor na aula. É importante que a resolva efectivamente pelo maior número de formas que conseguir, variando as estratégias e representações usadas. Só experimentando a matemática implícita numa tarefa se consegue imaginar algumas das dificuldades que esta pode colocar aos outros. Para além disso, o trabalho pessoal de exploração matemática da tarefa permite ao professor adquirir a confiança necessária para a sua boa exploração com os alunos e preparar eventuais respostas a dar-lhes — e muitas vezes, tarefas mesmo que aparentemente simples, colocam ao professor dúvidas quando os alunos lhe respondem de formas inesperadas.

Ao antecipar, o professor fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas dos alunos e a tomar decisões acerca de como estruturar as apresentações e gerir as discussões com base em critérios relacionados com a aprendizagem matemática.

No caso presente, a professora antecipou as duas prováveis estratégias que os alunos poderiam seguir: (1) identificar os resultados possíveis (entre 2 e 10) e o número de vezes que cada um é obtido com vista a contabilizar o número total de casos possíveis e quantos correspondem a pares e a ímpares; (2) determinar o número de casos possíveis, 25, e identificar e contabilizar os que são pares e os que são ímpares. A professora pensou ainda que, em qualquer destas estratégias, os alunos poderiam usar diversas representações mais ou menos eficazes, como esquemas de árvore, tabelas, tabelas de dupla entrada (já usada uma vez em situação anterior). Previu também que em qualquer destas estratégias, os alunos poderiam chegar à conclusão apenas comparando o número de situações pares e ímpares (mais expectável), ou determinando as percentagens de situações pares e ímpares, ou a parte de situações pares e de ímpares relativamente ao total de situações, ou mesmo a razão entre as situações pares e ímpares (menos provável).

A professora antecipou ainda as principais dificuldades que os alunos poderiam experimentar com a tarefa colocada: não conseguir identificar o que é uma situação possível, não distinguindo, por exemplo, os resultados do número de resultados; não contar todas as situações possíveis sem garantia de falhar nem repetir nenhuma; não distinguir entre, por exemplo,  $1 + 5$  e  $5 + 1$  — que tende a ser considerada como a mesma situação; não adoptar uma representação matemática eficaz para identificar de forma inequívoca as diversas situações.

A professora antecipou também em como relacionar as estratégias matemáticas dos alunos com o seu propósito matemático: formalizar o cálculo da probabilidade de um acontecimento aleatório pela regra de Laplace. Esperava que nas resoluções dos alunos surgissem aspectos fulcrais: a importância de contar os casos possíveis, a importância de contar os casos favoráveis, a relação entre casos possíveis e favoráveis.

#### 3.2. Monitorizar

Esta prática realiza-se já em sala de aula e é muito apoiada pelo trabalho realizado pelo professor na antecipação. A monitorização corresponde à apropriação por parte do professor das estratégias e resoluções que os alunos realizam durante o trabalho autónomo com o objectivo de avaliar o seu potencial para a aprendizagem matemática a promover na turma. Ao monitorizar, para além de verificar se os alunos estão a trabalhar na tarefa, o professor dedica-se a: observar e ouvir os alunos ou grupos; avaliar a validade matemática das suas ideias e resoluções; interpretar e dar sentido ao seu pensamento matemático, mesmo que lhe pareça estranho e/ou não o tenha antecipado; ajudar os alunos em dificuldade a concretizar resoluções que tenham potencial matemático relevante para o propósito matemático da aula.

Para tal, o professor deve ter sempre presente que ao circular pelos alunos ou grupos, mais do que lhes dar respostas, é importante recolher informação de como estão a trabalhar e que ideias matemáticas estão a explorar, da sua diversidade e validade

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E	Grupo F	Grupo G
Identificar os resultados possíveis (2 a 10) e o n.º de vezes que cada um surge		↳ Spans e Pares e Impares					
Determinar n.º de casos possíveis (25) e contar os pares/ímpares	↳ Errado		↳ Errado 15 casos repetidos	↳ 25 mas 4+6	↳ 25 mas mais?	✓	✓
Outra estratégia ?							
Representação eficaz	↳		TDE repet.		TDE x	TDE A+3 P	tabela <sup>+</sup> III
Representação não eficaz		pares - + -		pares - + -			
Identificação de casos possíveis (25)	25 ✓	x	x				✓
Identificação de casos favoráveis (13 par, 12 ímpar)							✓
Resposta por comparação de números de casos				13 P 12 I		13 P 12 I	
Resposta por percentagem ou outro cálculo	60% ?		P(I) = $\frac{12}{25}$ = 48%				13/25
Erro a explorar?	no (oprad) no de de C?	resultados no de resultados	A+B ≠ B+A	2 formas de obter pares e 2 de obter ímpares			
Quadro?	x (5) ?	✓ (1)	✓ (2)	x	x	✓ (4)	✓ (3)

↳ representação em ângulo como must shape?

Figura 2. Tabela de registo da professora

matemática. O professor poderá ter vantagem em tomar umas notas breves sobre as produções matemáticas que vai observando nos alunos, nomeadamente sobre erros ou ideias erróneas que identifica e que importa discutir no colectivo, ou outros aspectos que considere de interesse. Este registo escrito pode ser feito numa folha previamente preparada para o efeito, na qual constam aspectos-chave da exploração da tarefa com vista ao propósito matemático da aula, identificados pelo professor na antecipação. Naturalmente que a recolha destas informações terá de ser feita em pouco tempo e de forma bastante sucinta.

Ao monitorizar, o professor consegue aperceber-se da realidade das ideias matemáticas surgidas na turma e decidir quais fundamentadamente em que aspectos se deve focar e o que precisa de aprofundar na discussão com toda a turma.

No caso presente, a professora preparou uma folha de registo aproveitando as ideias que lhe surgiram na fase de antecipação (figura 2). Nem sempre faz isto mas neste caso pareceu-lhe que lhe facilitaria bastante o seu trabalho de monitorização. Como os alunos ainda só realizaram uma tarefa deste tipo, prevê que possam apresentar algumas dificuldades e que surjam os erros típicos na resolução destes problemas. Além disso, espera que

Grupo A

Handwritten work for Grupo A showing diagrams of numbers 1-5 with rays. Below, calculations for probability:  $P = \frac{13}{25}$  and  $\frac{12}{25}$ . Text: "P: 25 casos 25 formas diferentes de surgir." and "A terceira tem mais probabilidade q. do que a 2ª de 25 formas diferentes de surgir. 15 são números ímpares." Calculations:  $\frac{13}{25} = 0,6 = 60\%$  and  $\frac{12}{25} = 0,4 = 40\%$ .

Grupo B

Handwritten work for Grupo B showing calculations:  $2 = 2 \cdot 1$ ,  $3 = 3 \cdot 1$ ,  $4 = 4 \cdot 1$ ,  $5 = 5 \cdot 1$ ,  $6 = 3 \cdot 2$ ,  $7 = 7 \cdot 1$ ,  $8 = 4 \cdot 2$ ,  $9 = 3 \cdot 3$ ,  $10 = 2 \cdot 5$ . Text: "Resposta: par quando os fatores de 2, 6, 8 e 10 no caso de pares." and "Resposta: ímpar quando os fatores de 3, 7, 9, 5 e 10 no caso de ímpares." Calculations:  $P = \frac{13}{25}$  and  $\frac{12}{25}$ . Text: "Eu penso que a terceira tem mais probabilidade de surgir por ser o maior número de vezes que surge." and "Também, há 5 hipóteses de sair um número ímpar."

Figura 3. Resoluções da tarefa por alunos de 9.º ano

alunos usem uma diversidade de estratégias e de representações matemáticas para abordar o problema. Relativamente às estratégias, interessa-lhe evidenciar as que são produtivas e conduzem a resultados correctos e válidos e, em especial, as respostas que se aproximam do cálculo da probabilidade pela lei de Laplace. Relativamente às representações, importa-lhe comparar a sua eficácia para a identificação dos casos possíveis e favoráveis de forma inequívoca. São estes critérios matematicamente orientados que inspiraram a tabela de registo da professora.

3.3. Seleccionar

Esta prática, bem como a seguinte, realiza-se também em sala de aula, nos minutos finais do trabalho autónomo dos alunos, e é muito facilitada pelo trabalho realizado pelo professor durante a monitorização. Seleccionar corresponde a identificar os alunos ou grupos cujas resoluções são importantes para partilhar, com toda a turma, na fase de discussão de modo a proporcionar uma diversidade de ideias matemáticas adequadas ao propósito matemático da aula — e estas não são necessariamente dos alunos que se oferecem para ir ao quadro. A selecção criteriosa pelo professor proporciona que sejam as ideias matemáticas



**Grupo D**

$1+5=6$	$2+4=6$	$3+3=6$	$4+2=6$	$5+1=6$
$2+5=7$	$3+4=7$	$4+3=7$	$5+2=7$	
$3+5=8$	$4+4=8$	$5+3=8$		
$4+5=9$	$5+4=9$			

13 pares ✓ 12 ímpares ✓  
 O João tem mais probabilidades de ganhar o jogo, porque existe sempre um par do que ímpar.

**Grupo C**

	1	2	3	4	5
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5

Há 15 situações possíveis, porque há alguns que não se pode repetir, então exclui-se quem os outros, que podem dar par ou ímpar, até à soma máxima de 10.

Há 6 casos em que pode ser par. Ou seja,  
 $P(\text{saie número par}) = \frac{6}{15} = 0,6 = 60\%$

Há 9 casos em que pode ser ímpar. Ou seja,  
 $P(\text{saie número ímpar}) = \frac{9}{15} = 0,6 = 60\%$

Então, o João tem mais probabilidades de ganhar.

**Grupo E**

1	2	3	4	5
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X

20 casos  
 2) Em ambos os casos há um número ímpar e o João tem mais probabilidades de ganhar.  
 - Se o número ímpar for o João, ele ganha.  
 - Se o número ímpar for o João, ele ganha.  
 - Se o número ímpar for o João, ele ganha.  
 - Se o número ímpar for o João, ele ganha.  
 Os dois têm a mesma probabilidade de ganhar.  
 João = 10  
 João = 10

**Grupo G**

1	2	3	4	5
1	1		X	
2	2			X
3	3		X	
4	4			X
5	5		X	
1	2			X
2	3		X	
3	4			X
4	5		X	
5	6			X
1	3		X	
2	4			X
3	5		X	
4	6			X
5	7		X	
1	4		X	X
2	5			X
3	6		X	X
4	7			X
5	8		X	X
1	5		X	
2	6			X
3	7		X	X
4	8			X
5	9		X	X
	25		13	12

2) O João tem mais probabilidades de ganhar porque  $\frac{12}{25}$  de números pares.

**Grupo F**

	1	2	3	4	5
1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5
2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5
3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5
4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5
5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5

2) O João tem mais probabilidades de ganhar

importantes as discutidas pela turma, evitando que o desenvolvimento da discussão fique à mercê das estratégias que apresentam os voluntários.

Ao seleccionar, o professor pode adoptar diversos critérios como, por exemplo, escolher: uma resolução que apresenta um erro recorrente a esclarecer; uma resolução particular que se distingue e acrescenta compreensão e/ou ajuda a atingir o propósito matemático da aula; resoluções com diferentes estratégias matemáticas, sobretudo as mais produtivas; resoluções com representações matemáticas diversas, sobretudo as mais eficazes.

No caso presente, a professora optou por seleccionar as resoluções dos grupos B, C, F e G. Só o grupo B adoptou a estratégia de identificar os resultados possíveis e o n.º de vezes que cada um surge — por isso será ouvido. Além disso, a resolução deste grupo revela erros importantes que dão oportunidade de esclarecimento a toda a turma — tal como a resolução do grupo C, constituído por alunos que andam adiantados «na explicação» mas nem por isso acertaram. As resoluções dos grupos F e G darão a oportunidade de esclarecer dúvidas que subsistam, pois

são claras. A professora não tinha antecipado a representação em tabela adoptada pelo grupo G mas agora parece-lhe que ela será útil para ajudar os alunos que não entenderam os casos  $a + b$  e  $b + a$  como casos distintos. A professora pensa excluir as resoluções dos grupos A e E, uma demasiado confusa e outra demasiado incipiente para se tornarem produtivas as suas apresentações à turma, e também a do grupo D, que apresenta apenas um pequeno erro ocasionado pela má escolha/concretização da representação.

**3.4. Sequenciar**

Esta prática dá-se quase em simultâneo com a anterior, e é muito orientada pelo percurso de exploração das ideias matemáticas que o professor entende ser mais adequado para os seus alunos tendo em vista atingir o propósito matemático da aula. Ao tomar decisões ponderadas acerca da ordem pela qual se dá a apresentação e partilha dos trabalhos dos alunos, o professor pode maximizar as hipóteses de a discussão e síntese serem matematicamente bem sucedidas. Por exemplo, no caso

do propósito matemático da aula ser que os alunos adquiram um novo conceito matemático, o professor terá interesse em fazer surgir primeiro resoluções em que o conceito seja informalmente ilustrado e só depois resoluções que se aproximem da sua generalização e, se for caso disso, da sua formalização.

Ao sequenciar, o professor pode optar por critérios diversos. Será sempre vantajoso começar com uma resolução que ajude a tornar a discussão mais acessível a todos os alunos por permitir esclarecer aspectos essenciais e basilares em que se suportem as ideias mais sofisticadas, independentemente dessa resolução ser correcta ou incorrecta. A exploração matemática de um erro é muitas vezes muito esclarecedora e enriquecedora, quer para os alunos que erraram, quer para os que resolveram bem. Um outro critério adequado para a sequenciação das apresentações é o caminhar do mais informal para o mais formal no que diz respeito às representações matemáticas utilizadas. Um outro critério, por vezes associado ao referido anteriormente, é o caminhar progressivamente para as resoluções que permitem generalizar conceitos matemáticos ou sistematizar procedimentos.

No presente caso, a professora decidiu a seguinte sequência: B, C, G e F. Espera que começar pela resposta do grupo B despolette o aparecimento de vozes discordantes e permita esclarecer a diferença entre os resultados possíveis e o n.º de vezes que cada um pode surgir. Parece-lhe também que permitirá concluir da não eficácia da representação escolhida e da sua falibilidade por falta de sistematicidade. A seguir será útil colocar à discussão a tabela de dupla entrada do grupo C, que terá o mérito de ser mais eficaz a mostrar todos os casos possíveis mas contém um erro. Seguir-se-á a exploração da resolução do grupo G, que lhe parece ser agora a representação que permite de forma mais inequívoca distinguir entre os casos  $a + b$  e  $b + a$ . Este grupo denota muita clareza e por isso a professora pensa que a sua resolução permitirá o esclarecimento de todas as dúvidas, incluindo a exploração do cálculo da probabilidade. No entanto, a resolução do grupo F poderá ainda ser discutida por ter uma representação mais económica do que a tabela do grupo G.

A professora tem consciente que a sua sequenciação poderia eventualmente ter sido outra mas esta parece ajustar-se bem ao objectivo da aula e, de qualquer modo, pode sempre alterar-se em função do decurso da discussão, pois a professora conhece bem os pontos fortes e fracos das diversas resoluções.

### 3.5. Estabelecer conexões

Esta prática dá-se imediatamente a seguir à discussão das diferentes resoluções e, muitas vezes, pode ainda começar durante a mesma. É importante sublinhar que o propósito das discussões não é realizar um desfile de apresentações separadas de diferentes respostas ou estratégias de resolver uma dada tarefa; o propósito das discussões é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento colectivo de ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos. Para tal, o professor convida os alunos a analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas, identificar o que têm de semelhante ou de distinto, quais são as potencialidades e mais valias de cada uma delas, esperando que desta meta-análise retirem heurísticas para abordar tarefas futuras.

O propósito matemático da aula vai balizar o tipo de conexões que importa estabelecer na fase final de sistematização da

aula. Numa aula cujo principal propósito é o de desenvolver a capacidade de resolução de problemas dos alunos, é importante que as estratégias diversas de resolução apresentadas sejam confrontadas (eventualmente tentativa e erro, resolução de caso mais simples, elaboração de esquema, construção de tabela ou gráfico, ...), se eleja(m) a(s) mais poderosa(s), se reconheçam em que tipo de problemas poderão vir a ser utilizadas. Numa aula cujo principal propósito é o desenvolvimento da capacidade de raciocínio matemático dos alunos, é importante que se sintetize o processo realizado desde a criação e/ou análise de evidência que inspira a produção de conjecturas, a apreciação do grau de generalidade dessas conjecturas, o teste e a refutação ou confirmação das conjecturas, a sua justificação matemática e eventual demonstração.

No presente caso, o propósito principal da aula é que os alunos aprendam a lidar com problemas do domínio das probabilidades e aprendam a calcular a probabilidade de um acontecimento aleatório pela lei de Laplace. Trata-se assim de institucionalizar um novo procedimento. Na síntese a professora prevê, em colaboração com os alunos, sistematizar a estratégia mais geral que adoptaram: contar o número de casos possíveis, contar o número de casos favoráveis, e determinar como os dois se relacionam, ou seja, que parte o número de casos favoráveis representa do número de casos possíveis. Pretende também relacionar este resultado com as noções de frequência relativa de um acontecimento e da percentagem da sua ocorrência. Prevê também pedir-lhes para identificarem quais as representações mais eficazes usadas para a obtenção dos números de casos possíveis e favoráveis. Caso não tenha aparecido antes, a professora apresentará a tabela de dupla entrada preenchida de uma maneira distinta das apresentadas pelos alunos, que lhe parece mais eficaz (figura 4), e por isso quer que a conheçam, pois pode servir de ferramenta em situações futuras.

Se o tempo permitir, a professora lançará aos alunos uma extensão da tarefa: o desafio de dar resposta ao mesmo problema mas considerando agora que os jogadores podem escolher mostrar zero dedos. Pensa que esta nova situação é uma boa oportunidade para que ela e os alunos avaliem a compreensão das aprendizagens supostamente realizadas nessa aula.

Caso o tempo não permita, a professora terminará a aula introduzindo rapidamente a notação nova e referir-se-á a Laplace e à sua Lei, a registar por escrito nos cadernos dos alunos.

### 4. Desafios para o professor

O ensino exploratório da Matemática e, em especial, a orquestração das discussões matemáticas na aula, constituem um desafio-chave que o professor enfrenta, qualquer que seja o seu ciclo de escolaridade. Para desenvolver um ensino desta natureza, é fundamental que esteja disponível para contrariar um conjunto de tendências que surgem frequentemente associadas ao ensino da Matemática. Em particular, é importante que o professor esteja preparado para:

- Escolher criteriosamente tarefas matemáticas valiosas com potencial para proporcionar aos alunos aprendizagens matemáticas sofisticadas, que vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos — estes continuam a ter o seu papel mas não esgotam a Matemática que os alunos

- precisam actualmente de aprender e a que têm direito;
- Aprofundar a exploração matemática das tarefas durante a planificação, não só com a previsão de extensões matemáticas interessantes a realizar pelos grupos mais rápidos, por exemplo, mas incluindo a antecipação das resoluções esperadas pelos alunos e a previsão de possíveis caminhos para atingir o propósito matemático da aula em articulação com os raciocínios que surgirem — e não por uma trajectória delineada à partida e independente das produções matemáticas dos alunos;
- Gerir sem desperdícios todos os minutos para que na mesma aula se complete o trabalho em torno de uma tarefa, evitando ao máximo adiar para a aula seguinte a discussão e/ou a síntese dos conhecimentos produzidos pelos alunos em resposta à tarefa — o que teria como consequência a perda de envolvimento dos alunos e o seu distanciamento das produções matemáticas realizadas, dificilmente recuperáveis na íntegra passado algum tempo, pelo menos não sem grande investimento de esforço e tempo extra;
- Controlar as questões e comentários que se oferecem aos alunos durante a apresentação da tarefa e durante o trabalho autónomo de modo a não lhes indicar «a» estratégia a seguir — isto reduziria o desafio intelectual e uniformizaria as resoluções, diminuindo o potencial da discussão matemática;
- Resistir a validar as resoluções dos alunos durante o respectivo trabalho autónomo de modo a não reduzir o seu interesse genuíno por participar na discussão — quem quer explicar e ouvir os outros e apreciar o seu trabalho se o professor já disse o que está certo e errado?
- Evitar estender o tempo de trabalho autónomo dos alunos mesmo que alguns não tenham completado tudo o que poderiam fazer — as diferenças no grau de completude das resoluções dos alunos favorece o interesse pela discussão colectiva e pela produção de sínteses matemáticas que complementam o trabalho realizado pelos grupos;
- Recusar a alunos que se voluntariam a possibilidade de apresentar as respectivas resoluções à turma, caso estas não contribuam para o desenvolvimento matematicamente mais interessante idealizado pelo professor — nas aulas seguintes, o professor pode compensar estes alunos em outras situações;
- Prever a utilização de recursos que agilizem a comunicação dos alunos na fase de discussão para que não se gastem preciosos minutos com o «passar para o quadro» das resoluções em análise, por vezes bastante longas e complexas, e para que estas possam ser vistas por todos com a riqueza de pormenor que muitas vezes têm — usar acetatos, cartolinas, outros materiais, fotografias digitais das resoluções, digitalizações feitas nas salas onde há scanner ligado a computador e projector, etc, ...
- Acautelar espaço físico colectivo e visível para registar os conhecimentos colectivamente sistematizados durante a síntese da aula, decorrentes da discussão, e acautelar que os alunos os registem e/ou tenham acesso a eles — por exemplo, através das potencialidades de gravação do quadro interactivo;
- Favorecer a discussão efectiva de ideias por parte dos alunos a partir da qual possam aprender conceitos e procedi-

⊕	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Figura 4. Tabela de dupla entrada realizada pela professora

mentos matemáticos, bem como desenvolver as suas capacidades, em particular a comunicação matemática — a discussão e a síntese são muito mais do que um desfile de resoluções distintas apresentadas à vez por diferentes alunos;

- Promover um ambiente estimulante na sala de aula em que os alunos sejam encorajados a participar activamente, a desenvolver o seu próprio trabalho e a querer saber do dos outros, a ouvir, a falar, a explicar, a questionar e a contribuir de forma construtiva para o apuramento de um saber comum com validade matemática.

A concluir, é de sublinhar um último desafio. É importante que o ensino exploratório da Matemática não seja encarado como algo que se experimenta esporadicamente alguma vezes para realizar umas tarefas especiais. O ensino exploratório da Matemática precisa de tempo e de continuidade para que o professor possa melhorar e aperfeiçoar a sua prática, o mesmo tempo e continuidade que são necessários para que os alunos lhe correspondam e desenvolvam aquilo que ele proporciona: aprender conteúdos matemáticos mas também modos de produção do conhecimento matemático no contexto de uma comunidade da qual são parte integrante. É um desafio a perseguir de forma continuada por todos.

#### Notas

- Adopto o termo ensino exploratório porque neste artigo focalizo-me nas práticas do professor, aquele que ensina. Naturalmente que a aprendizagem que o professor promove neste contexto é, também ela, exploratória por parte dos alunos e por isso este tipo de prática em sala de aula é frequentemente designada por ensino-aprendizagem exploratória da Matemática (Ponte, 2005).
- Agradeço a Lina Brunheira ter-me cedido estas resoluções dos seus alunos e os seus comentários a uma versão prévia deste artigo.

#### Referências bibliográficas

- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática*, 105, 22-28.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Ana Paula Canavaro

Universidade de Évora

Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa



## [Ainda] O gosto das aulas

Paula Teixeira

Retomo um tema sobre o qual escrevi há 16 anos e vejo-me na mesma sala de aula, rodeada dos materiais que fui construindo ao longo do tempo ou que fui levando para aquela sala que considero minha. Passo nela grande parte do tempo. Os computadores estão obsoletos, mas trato-os com muito carinho, trabalhar com o Excel, com o Geogebra, com alguns applets é possível com o material que tenho.

Já não preciso de alterar a disposição das mesas de trabalho, elas já estão agrupadas de forma a permitir que os alunos se sentem organizados em grupo, mesmo quando estão a trabalhar individualmente.

Há 16 anos só tinha turmas do ensino secundário e todos os alunos tinham como expectativa vir a frequentar o ensino superior. Hoje sou principalmente professora do 3.º ciclo. Há 16 anos as aulas eram de 50 minutos e era-me proporcionada a possibilidade de juntar duas aulas de 50 minutos. Hoje as aulas são de 90 minutos e este tempo é fundamental para a minha aula de Matemática.

Há 16 anos a troca de experiências era o único centro de toda a partilha. Se a prática de sala de aula era pobre a troca era

reduzida. Hoje as leituras e o estudo são também um elemento de partilha e de reflexão e sustentam algumas das práticas. Há 16 anos a partilha entre professores e investigadores era muito mais reduzida.

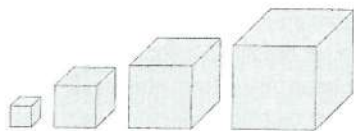
Recordo os alunos do 9.º ano de 2010–2011. Organizados em grupos de quatro elementos, recebiam as tarefas em suporte de papel e imediatamente iniciavam o trabalho de modo autónomo. Dos 90 minutos de aula era necessário guardar uma parte significativa para a discussão em plenário e para a síntese final. O tempo de trabalho autónomo era definido no início da aula. Enquanto os alunos resolviam a tarefa, eu deslocava-me de grupo em grupo observando o trabalho realizado, esclarecendo as dúvidas colocadas por cada grupo e incentivando o registo escrito das resoluções. No final do tempo estipulado dava-se início à discussão, em grande grupo, das várias resoluções.

Foram estes os alunos que trabalharam na tarefa Função quadrática II, na qual se pretendia, relacionar a função quadrática com a função afim e com a função linear. A situação proposta tinha como ponto de partida cubos e como unidade o comprimento da aresta. Pretendia-se estudar o que sucedia aos

## Função quadrática II

1. Observa a figura seguinte:

Considera como unidade o comprimento da aresta ( $x$ ) do cubo 1. De cubo para cubo a aresta aumenta de uma unidade.



1.1. Preenche a tabela que se segue:

Aresta do cubo $x$	Perímetro da face $f(x)$	Área da face $g(x)$	Área total $h(x)$
...	...	...	...

1.2. Representa graficamente, num mesmo referencial cartesiano, as três funções:

- $f$ , que associa à aresta de cada cubo ( $x$ ), o perímetro da sua face;
- $g$ , que associa à aresta de cada cubo ( $x$ ), a área da sua face;
- $h$ , que associa à aresta de cada cubo ( $x$ ), a sua área total.

1.3. Em qual das funções se dá um crescimento mais acentuado, quando o valor de  $x$  aumenta?

1.4. Indica as expressões algébricas que caracterizam cada uma das funções  $f$ ,  $g$  e  $h$ .

1.5. Quais das funções são funções quadráticas?

perímetros, às áreas das faces e à área total dos cubos em função do comprimento da aresta.

À medida que os alunos trabalhavam eu circulava pelos grupos respondendo às questões colocadas e observando as abordagens utilizadas pelos diferentes grupos. Cedo me apercebi que o entendimento que estava a ser feito da tarefa era muito diferente de grupo para grupo tendo dado origem ao preenchimento do quadro das formas seguintes:

Grupo 1 e 2:

Aresta do cubo $(x)$	Perímetro da face $f(x)$	Área da face $g(x)$	Área total $h(x)$
$x$	$f(x) = 4x$	$g(x) = (x)^2$	$h(x) = 6 \times (x)^2$
$2x$	$f(2x) = 8x$	$g(2x) = (2x)^2$	$h(2x) = 6 \times (2x)^2$
...	...	...	...

Grupo 3 e 4:

Aresta do cubo $(x)$	Perímetro da face $f(x)$	Área da face $g(x)$	Área total $h(x)$
12	48	144	864
24	96	576	3456
...	...	...	...

Só o grupo cinco preencheu o quadro como eu tinha imaginado, atribuindo a ( $x$ ) sucessivamente os valores 1, 2, 3, etc.

Os alunos sabiam que depois de um período de trabalho autónomo, segue-se um período onde as várias soluções são apresentadas. Nas apresentações não basta descrever o que foi feito é preciso explicar os raciocínios e argumentar face a questões colocadas por outro aluno ou por mim.

Assim quando passamos à fase de discussão dos trabalhos, três tabelas preenchidas de modo diferentes foram apresentadas. A apresentação da tabela dos grupos 1 e 2 deu origem ao seguinte diálogo:

**Miguel** (grupo 5) — Eu não fiz assim. O Pedro ainda pensou nisso, mas depois quando quisemos preencher a coluna «Perímetro da Face» desistimos porque estava no cimo da coluna  $f(x)$  e começámos a ver que não conseguíamos definir a função.

**Matilde** (grupo 1) — Fizeram mal. Quando estávamos no 7.º ano ainda não trabalhávamos muito com letras, mas agora já percebemos que se o primeiro cubo tem aresta de comprimento  $x$  o outro será  $2x$  e o outro  $3x$  e assim...

**Clara** (grupo 1) — Qual é o vosso problema com a função? Na vossa segunda linha aparece

2	8	4	24
---	---	---	----

na nossa aparece

$2x$	$f(2x) = 8x$	$g(2x) = (2x)^2$	$h(2x) = 6 \times (2x)^2$
------	--------------	------------------	---------------------------

e não há diferença nenhuma em relação à vossa porque quando quisemos representar a função graficamente apareceu-nos os mesmos valores.

(...) O diálogo continua, as representações gráficas são comparadas, eu ajudo a clarificar o que está em causa.

Ao analisar e comparar as representações gráficas entre os vários grupos, dá-se o seguinte diálogo:

**Andreia** (grupo 3) — nós juntámos todos os pontos do gráfico, por que é que vocês só fizeram pontos?

**Ana** (grupo 2) — Porque não há meios cubos...

Desde o 7.º ano que pretendi desenvolver nos alunos *autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização* (programa de matemática, p. 3), bem como levá-los a *argumentar e discutir as argumentações de outros* (programa de matemática, p. 5). Nesta altura, os alunos já dirigem as questões uns aos outros, sem precisarem de mim como intermediária e estão à vontade para exporem os seus raciocínios. É com gosto que assisto às discussões entre os alunos na qual é visível que foram interiorizando a necessidade

de descrever as suas soluções e explicar o seu pensamento e essa regra ficou adquirida no final do 7.º ano. Mais complexa é a compreensão do que em cada momento é uma explicação matematicamente aceitável. Os alunos compreendem que na apresentação das resoluções das questões cada grupo deve apresentar soluções diferentes das já apresentadas, mas analisar as diferenças já não é tão evidente. O grupo 1 acaba por dizer que não há diferença entre o seu trabalho e o trabalho realizado pelo grupo 5, no entanto as soluções foram apresentadas como sendo matematicamente diferentes.

Matilde considera que neste momento, 9.º ano, já não é altura de concretizar as variáveis. Ela interiorizou a necessidade de avançar em soluções matematicamente sofisticadas, estabelecendo generalizações, mas perceber em cada caso o que é aceitável ainda é um caminho que precisa de ser percorrido.

No 7.º ano os alunos realizaram uma tarefa com cubos na qual lhes foi solicitado que preenchessem uma tabela que utilizava os mesmos desenhos dos cubos presentes na tarefa agora trabalhada. O facto do desenho dos cubos ser o mesmo pode ter levado os alunos a justificarem a impossibilidade de unir os pontos do gráfico, argumentando que não havia meios cubos. São evidentes as ligações que os alunos vão estabelecendo entre as várias tarefas realizadas, mas em alguns casos as conexões não se realizam da melhor forma já que a memória visual parece ser mais relevante do que a discussão matemática realizada.

Voltar a escrever sobre uma aula de que gostei é como se de uma coisa nova se tratasse. É pensar na sala de aula que,

a custo, é o centro da minha actividade, que quero que seja o centro das funções que desempenho enquanto professora, mas que passou a ser tão pouco valorizada. Há 16 anos, a aula era o centro de todas as actividades escolares e considerava-se que precisava de ser bem pensada e planeada. Hoje o trabalho em sala de aula é desvalorizado, não é assumido que a aula tem que ser pensada e muito bem preparada. Assim o tempo de planificação das aulas passou a ser dividido por apoios, tutorias, salas de estudo, reuniões que se multiplicam atendendo aos vários papéis que desempenhamos, reunião de diretores de turma, reunião de tutorias, reunião de áreas curriculares não disciplinares, etc.

É preciso voltar a dar visibilidade à sala de aula.

### Referências bibliográficas

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, Martins, E., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes L., e Oliveira, P. R. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC. Pode aceder-se a este documento em: [http://sitio.dgicd.min.edu.pt/matematica/Paginas/Reajustamento\\_matematica.aspx](http://sitio.dgicd.min.edu.pt/matematica/Paginas/Reajustamento_matematica.aspx)

Esta tarefa faz parte dos materiais disponibilizada pela DGIDC de apoio ao novo programa de Matemática no sítio: [http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/algebra03sequencia.htm](http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/algebra03sequencia.htm).

**Paula Teixeira**

Esc. Secundária D. João V. Damaia

### Uma tarefa com espelhos

Esta tarefa, disponível no site da DGIDC com materiais de apoio à concretização do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico ([http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/home.htm](http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/home.htm)), foi usada pelos professores experimentadores do 3.º ciclo para iniciar o estudo da proporcionalidade inversa como função. De carácter exploratório e recorrendo a material diverso (auto-colantes, fitas métricas, espelhos, calculadoras ou computadores), a *tarefa dos espelhos*, para além de promover uma actividade de modelação de uma situação da vida real simples e que pode ser traduzida por uma função do tipo  $y = kx$  ( $k \neq 0$ ), permite ainda trabalhar as capacidades transversais de raciocínio e comunicação matemática. Os alunos são levados a representar

algebricamente situações de proporcionalidade inversa e a relacionar representações gráficas e algébricas deste tipo de situações. Nos 90 minutos previstos para a sua realização, há lugar para diferentes organizações dos alunos, começando a explorar a situação proposta em pequenos grupos e discutindo e sistematizando os resultados obtidos em grande grupo. O trabalho de recolha de dados é da responsabilidade dos alunos e é importante que compreendam a necessidade de realizar medições rigorosas e de ser sempre a mesma pessoa a efectuar a visualização dos auto-colantes reflectidos nos espelhos (sempre no mesmo local do espelho) para que o reconhecimento de regularidades possa, de facto, ser possível.

## Uma tarefa com espelhos

Para a realização desta tarefa é necessário um espelho e um autocolante, ambos pequenos, e uma fita métrica.

### 1. Experiência / recolha de dados

- 1.1. Coloca o espelho fixo no chão a 1 metro de distância de uma parede.
- 1.2. Coloca o autocolante na parede, alinhado com o espelho, a 0,5 metros do chão.
- 1.3. Posiciona-te junto ao espelho e vira-te para a parede. Vai-te afastando até que consigas ver o autocolante reflectido no espelho.
- 1.4. Regista a distância a que te encontras do centro do espelho na tabela seguinte.
- 1.5. Faz variar a altura do autocolante na parede e repete os procedimentos de 3 e 4, registando os valores na tabela

Distância do autocolante ao chão em metros $x$	Distância entre ti e o centro do espelho em metros $y$	$x \times y$

### 2. Análise de dados

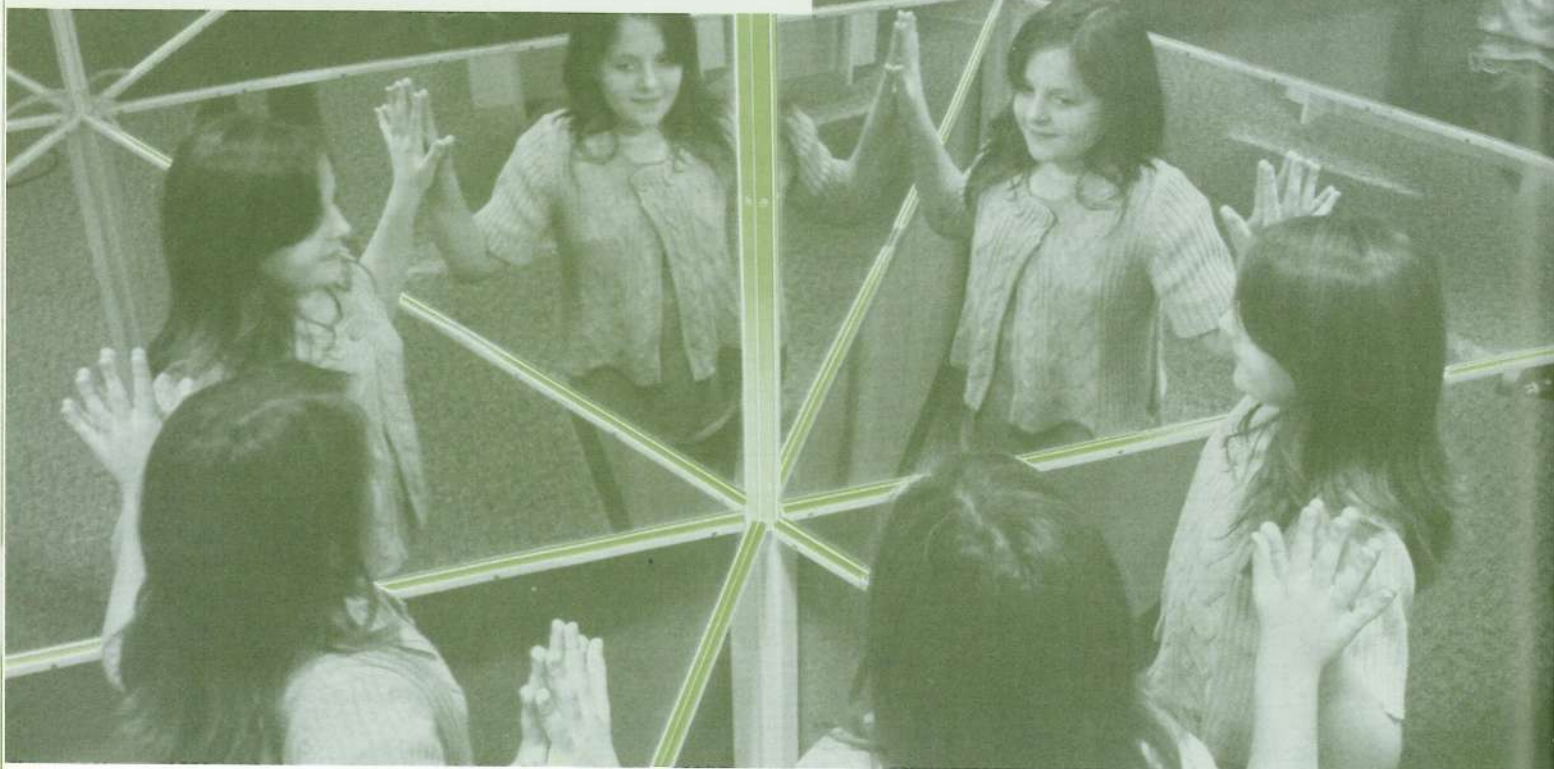
- 2.1. Preenche a terceira coluna da tabela com os produtos  $x \times y$ . Que regularidade observas?
- 2.2. Se se colocar o autocolante muito próximo do chão, como se deve posicionar o observador? E se se colocar o autocolante num ponto muito alto?
- 2.3. Encontra uma expressão algébrica que melhor relaciona as duas distâncias ( $y$  em função de  $x$ ).

### 3. Representação gráfica

- 3.1. Com a ajuda do Geogebra ou de uma calculadora gráfica representa num referencial os pontos  $(x, y)$  que correspondem às distâncias recolhidas.
- 3.2. Representa também no mesmo referencial a função que encontraste na alínea 2.3.
- 3.3. O gráfico da função sobrepõe-se a esse conjunto de pontos? Caso isso não aconteça, tenta encontrar razões para explicar o facto de haver pontos que não coincidem exactamente com o gráfico da função.

## Uma tarefa com espelhos

Rosa Antónia Tomás Ferreira



Durante a segunda metade do 1.º período do ano lectivo de 2010/2011 tive a oportunidade de assistir às aulas de 9.º ano da professora Cristina Cruchinho, na recta final do processo de experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB — ME, 2007). As minhas visitas à Escola Secundária Filipa de Vilhena, no Porto, decorreram no âmbito da recolha de dados para um estudo de avaliação do processo de experimentação do NPMEB, coordenado pelo Prof. Dr. Domingos Fernandes (Fernandes, Borralho, Vale, Gaspar & Dias, 2011). Foram várias as aulas observadas mas neste texto concentro as atenções numa aula destinada à introdução do conceito de proporcionalidade inversa.

A meio de Novembro de 2010, Cristina iniciou o estudo da proporcionalidade inversa como função, no âmbito do tema Álgebra do NPMEB. Neste texto detenho-me na actividade desenvolvida numa das suas turmas, numa aula que começou às 10:00h e que não contou com o apoio da respectiva professora assessora.

A aula inicia-se, como habitualmente, com a escrita do sumário da aula anterior. Um aluno dirige-se ao quadro e escreve uma proposta para o sumário dessa aula. O aluno sabe que é a sua vez de realizar esta actividade pois a professora estabeleceu a norma da ordem alfabética. A escrita do sumário é feita numa lógica de acção e não de resumo. De facto, em vez de propor *Regra de Laplace* (a temática da aula anterior), o aluno propõe *Resolvemos e discutimos a tarefa 5 — Regra de Laplace*. Assim, na escrita do sumário, não só se relembra o tópico de cada tarefa realizada como se indica explicitamente o que foi

efectivamente feito em torno de cada tarefa. A turma é sempre responsável por validar a proposta escrita no quadro, fazendo críticas ou oferecendo sugestões para completar o que pudesse estar em falta. Nesta aula, chega-se à conclusão que se deveria acrescentar ao sumário «e discutimos as respostas às questões 1 a 3».

Após a escrita negociada do sumário da aula anterior, Cristina anuncia que vai entrar num novo tópico — Funções — perguntando aos alunos «Que vimos de funções no ano passado?» Não tarda muito que alguém se lembre de termos relacionados com funções, sobretudo *função linear* e *função afim*. Cristina confirma e, enquanto regista no quadro esta mesma informação, acrescenta que os alunos trabalharam estas temáticas no ano passado com as tarefas 3 e 4, relativas a funções e equações. «Alguém me sabe dizer qual é a expressão genérica de uma função linear?» pergunta a professora. Um aluno responde « $y = kx$ » e Cristina regista no quadro. «Que é então uma função afim?» Alguns alunos dizem que falta um  $b$  na expressão que já está escrita no quadro e a professora regista « $y = kx + b$ ». Cristina lembra aos alunos que as tarefas trabalhadas no ano anterior sobre funções estão disponíveis no *moodle*, e também nos cadernos dos alunos, pelo que todos têm acesso a elas. Pede-lhes ainda para estudarem as tarefas referidas com cuidado, revendo as noções trabalhadas, uma vez que se lhes vai dar seguimento. E para que esta recomendação não caia em saco roto, Cristina marca logo parte do trabalho de casa para a próxima aula: uma das propostas é precisamente estudar as tarefas realizadas no 8.º ano sobre funções e equações.





Figura 1. Alunos efectuando medições usando o material fornecido pela professora

Sem mais demora, Cristina distribui a *tarefa dos espelhos* (ver *Materiais para a Aula de Matemática*) aos alunos que, como habitualmente, ficam logo em silêncio a ler o enunciado. Esta tarefa tem como objectivo introduzir os alunos ao estudo da proporcionalidade inversa como função e parte de uma situação da vida real. É suposto que os alunos conheçam a noção de função, representem graficamente funções simples e pontos num referencial cartesiano e lidem com expressões algébricas. A tarefa promove a análise de situações de proporcionalidade inversa como funções do tipo  $y = k/x$ , com  $k \neq 0$  e estimula os alunos a relacionar representações algébricas e gráficas de funções que modelam situações de proporcionalidade inversa; em termos de capacidades transversais, as que são mais visadas com a *tarefa dos espelhos* são as de raciocínio e comunicação matemáticas (DGIDC, 2011).

A professora forma rapidamente os grupos, juntando mesas contíguas. Os alunos rapidamente percebem que vão precisar de material não habitual nas aulas de Matemática: espelhos, auto-colantes e fitas métricas. Cristina avisa os alunos dos dois grupos sentados junto às janelas que ficarão na sala de aula a resolver a tarefa. Os grupos da fila a meio da sala irão para a zona de lazer do piso em que estão (piso 1) e os outros dois grupos vão para a zona de lazer do piso acima ou do piso abaixo (a que preferirem). «Cuidado para não fazerem barulho se entrarem pelo corredor», lembra a professora.

Cristina sugere aos alunos que vão trabalhar fora da sala de aula que levem algum material com eles e «talvez a calculadora pois podem precisar dela». Esta sugestão não é inocente. No dia anterior, Cristina tinha trabalhado esta mesma tarefa com os alunos de outra turma e vários fizeram os seus registos de forma pouco organizada, o que levou a alguns atrasos na percepção das regularidades das medições obtidas. Os alunos estão algo agitados enquanto recolhem o material que a professora lhes distribuiu. Os grupos têm ordem para regressar à sala de aula às 11:05 horas. Fico um pouco na sala de aula a conversar com a

professora mas decido sair para documentar como os alunos se estavam a envolver na tarefa.

Os dois grupos que optam pela zona de lazer do piso 1 estão entusiasmados e a trabalhar a bom ritmo. Os que estão no piso 0 ainda trabalham melhor, mais organizados e mais rápidos. Quando chego ao grupo que está no piso 2, encontro os alunos já sentados numa mesa redonda a preencher as tabelas do enunciado da tarefa, com recurso à calculadora. Desafio-os a justificar uma certa discrepância em dois valores encontrados e que se deve, certamente, a imprecisões de medição.

Os alunos que se mantêm na sala de aula mostram mais dificuldades em se organizarem do que os seus colegas que estão a trabalhar nas zonas de lazer. Demoram algum tempo até perceber que deve ser sempre a mesma pessoa a realizar a experiência de visualização do auto-colante no espelho porque a altura do observador acrescenta uma variável à situação. Além disso, as medições que fazem são muito pouco precisas, o que dificulta a retirada de conclusões. Os restantes colegas, em geral, realizam as suas experiências de forma mais sistemática e cuidada. A calculadora facilitou os cálculos, permitindo que os alunos se concentrassem no que era importante — reconhecer as regularidades da situação.

Os alunos regressam à sala de aula mais ou menos à hora marcada. Cristina, tendo monitorizado o trabalho de todos os grupos, inicia a fase de discussão dos resultados obtidos. Um aluno diz que «se multiplicarmos as duas grandezas obtemos 1,7, aproximadamente» e um colega de grupo completa: «nós temos dois valores diferentes porque medimos as coisas em sítios diferentes do espelho». A professora sabe que vários grupos efectuaram medições com pouco rigor e chama a atenção dos alunos para esse facto e para as suas consequências.

Em geral, os alunos parecem compreender a importância de efectuar medições rigorosas, considerando o mesmo ponto de leitura no espelho das imagens do auto-colante e reconhecendo a necessidade de ser sempre a mesma pessoa a fazer a



Figura 2. Alunos respondendo às questões da tarefa, realizando os seus registos com base nas medições efectuadas

visualização dessas imagens. Estes dois aspectos são igualmente determinantes na compreensão das razões da obtenção, por cada grupo, de valores diferentes para o produto das grandezas em causa e Cristina tenta que os alunos se apercebam disso. Na verdade, vários alunos olham para os seus registos e parecem estar a revê-los, provavelmente por terem, de facto, encontrado valores demasiado díspares para o que seria de esperar.

Cristina dirige-se à turma: «Se o auto-colante descer, portanto, se a altura ao chão for metade do que era antes, a distância do observador...» esperando que os alunos completem a sua frase. Alguns fazem-no dizendo que é o dobro, mas outros não prestam atenção — vários continuam a tentar dar sentido aos valores encontrados nas medições. Noto que a professora está com alguma pressa: o tempo está a passar e é preciso apressar o ritmo para concluir esta actividade. De facto, Cristina *salta* a questão 2.3 para a questão 3 da tarefa. Projecta numa tela um referencial cartesiano já construído no GeoGebra. Uma das alunas vai ao computador marcar os pontos no referencial mas já não se lembra de como o fazer! Na realidade, no 7.º ano, estes alunos eram muito proficientes no uso do GeoGebra (e eu testemunhei isso em primeira mão — Pires & Ferreira, 2009). No entanto, durante o 8.º ano não tinham tido hipóteses de trabalhar com o *software*: a escola entrou em obras, as aulas eram em monoblocos e os computadores estavam arrumados e praticamente inacessíveis. Enquanto a aluna se continua a debater com dificuldades na marcação de pontos (contando com a ajuda de dois ou três alunos da frente), há bastantes alunos distraídos, não se preocupando em responder à terceira questão da tarefa.

Cristina repara que ultrapassou, sem intenção, a questão 2.3 e chama a atenção da turma para esta questão, que não quer

Distância do autocolante ao chão em metros	Distância entre ti e o centro do espelho em metros	$x \times y$
$x$	$y$	
0,50	3,5	1,75
0,87	2,06	1,7922
0,36	5,73	2,0628
1,55	1,24	1,9420
89	1,04	1,9656
43	0,80	1,964
11	0,75	2,0715

Distância do autocolante ao chão em metros	Distância entre ti e o centro do espelho em metros	$x \times y$
$x$	$y$	
0,5m	2,80m	$0,5 \times 2,80 = 1,40$
0,3m	4,94	$0,3 \times 4,94 = 1,482$
1m	1,48m	$1 \times 1,48 = 1,48$
0,7m	2,12m	$0,7 \times 2,12 = 1,484$
0,8m	1,81m	$0,8 \times 1,81 = 1,448$

Figura 3. Alguns registos dos alunos no enunciado da tarefa

deixar de discutir: «Qual é a relação entre  $x$  e  $y$ ? Qual é a expressão algébrica?» Alguns alunos respondem que é « $x \times y = 1,7$ ». Uma aluna comenta e diz: « $y$  tem de vir em função de  $x$ ». Cristina escreve no quadro o que a aluna sugere:

$$y = \frac{\text{o produto de } x \text{ por } y}{x}$$

Os alunos estão muito mais barulhentos do que o habitual, embora, na minha opinião, o nível de ruído seja ainda bastante tolerável. A distração é provavelmente o factor que mais contribui para o barulho. A professora está visivelmente insatisfeita com isto e começa a falar em voz muito baixinha. Rapidamente consegue o silêncio do costume. «E qual é o valor aqui do produto de  $x$  por  $y$ ?» Alguns alunos referem 1,4 e outros 1,7. Outros ainda sugerem calcular a média. Cristina vai redizendo as sugestões apresentadas pelos alunos e pedindo justificações e explicações: «Por que há números diferentes?» Alguns alunos não têm dúvidas: «Porque há erros». A professora procura clarificar estas respostas: «Porque há erros nas medições, ok? Usamos a média para encontrar um valor mais aproximado». No meio desta discussão, volta-se à expressão que estava escrita no quadro e a professora escreve

$$y = \frac{x \times y}{x} \quad \text{logo seguido de} \quad y = \frac{1,5}{x}$$

Cristina chama novamente a atenção dos alunos para que os valores dos produtos possam ser diferentes de grupo para grupo.

Entretanto, a aluna termina a marcação de pontos no referencial cartesiano e vai para o seu lugar. A professora avisa a



Figura 4. Momento de discussão colectiva sobre a tarefa dos espelhos

turma que tem 2 minutos para marcar os pontos num referencial e reforça que são os pontos encontrados por cada grupo: «Quero isto tudo construído ou passam aqui o intervalo. Como já devem ter percebido eu não vou voltar a isto na próxima aula, era o que mais faltava! Temos ainda que tirar conclusões e só faltam 4 minutos. Se não têm réguas, não as vão buscar. Vamos lá, sem conversa; 2 eixos, marcar pontos».

A certa altura, a professora pára de circular pelas mesas dos alunos e pede-lhes para terminarem a marcação dos pontos nos referenciais em casa — a síntese tem de ser feita e o tempo está a esgotar-se! «Quero que vejam uma coisa: qual é a expressão algébrica que vou colocar no GeoGebra para ver se bate certo ou não?» Um aluno sugere « $x \times y = 1,6$ ». A professora continua a questionar a turma: «Que número coloco aqui?» apontando para a janela do GeoGebra onde deve colocar a expressão algébrica que representa a situação. Finalmente um aluno diz que depende de grupo para grupo e a professora reage: «Exactamente! Então aqui que número coloco?» Acordam que será o 1,6 e a professora continua: «Muito bem. Que é que se passa aqui? Acabou de surgir o gráfico».

Um aluno tinha observado que havia um ponto que não estava bem. A professora questiona a turma: «Quem é que me diz qual foi o ponto mal medido?» Os alunos, na generalidade, não têm dificuldades em perceber qual o ponto que sai fora do gráfico nem por que tal acontece. «E como é que chamamos a isto, quando uma grandeza vai para o dobro e a outra vai para metade? Quando uma vai para um terço, a outra triplica? Que chamamos a isto? São grandezas inversamente...» Cristina está desesperada com a falta de tempo. Já tocou e os alunos estão a ficar agitados. A pista acaba por ser dada pela professora e um aluno completa rapidamente a frase dela com a palavra correcta. Cristina regista no quadro:

$x \times y = \text{número constante}$   
 $x$  e  $y$  são grandezas inversamente proporcionais

No quadro branco e por cima da imagem projectada com o gráfico dos pontos, a professora desenha a vermelho o gráfico da função. Diz aos alunos que é preciso dar-lhe um nome e o nome que este tipo de curvas tem é de *hipérbole*. A hora já lá vai e a atenção dos alunos também, embora muitas conversas sejam ainda sobre assuntos da aula. Os alunos saem da sala mas um deles pergunta à professora se pode fazer o gráfico no GeoGebra e colocar na plataforma. Cristina diz que é uma boa ideia e pede-lhe que use o fórum para que todos os colegas tenham acesso ao gráfico que ele desenhar e enviar.

### Em jeito de reflexão

A tarefa dos espelhos suscitou grande curiosidade nos alunos, que não sabiam muito bem o que iriam fazer. Após a interpretação da tarefa, feita pelos alunos e em silêncio, a professora dividiu os alunos em grupos, orientando-os e apoiando-os nas suas explorações, sem, contudo, lhes dar pistas. A discussão de resultados decorreu com alguma precipitação porque o tempo escasseava. Por esse motivo, houve também uma maior orientação, por parte da professora, do pensamento dos alunos na fase de síntese do trabalho realizado, em particular procurando dar significado aos valores encontrados nas experiências realizadas. Os alunos deram contribuições bastante significativas para a discussão e a síntese, apesar da velocidade algo excessiva desta fase da aula. Houve perguntas ou comentários pertinentes dos alunos e que a professora aproveitou para instituir conceitos e estabelecer algumas conexões. A síntese da tarefa foi registada pela professora no quadro, aproveitando as contribuições dos alunos e assegurando-se que os mesmos copiavam os registos do quadro para os seus cadernos. A sensação da professora, no final desta aula, foi que, apesar de uma certa correria no final, grande parte dos alunos tinha compreendido as ideias essenciais, às quais voltaria nas tarefas seguintes.

Após ter observado um conjunto de aulas, e que abrangeram tópicos diferentes, entrevistei a professora para, entre muitos

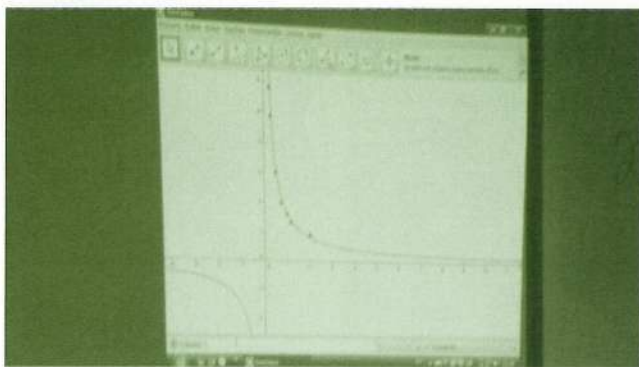


Figura 5. Função de proporcionalidade inversa obtida por um dos grupos.

outros aspectos, discutirmos algumas ideias-chave relativas à dinâmica de sala de aula. Para Cristina, e tendo em conta o percurso destes alunos no processo de experimentação do NPMEB, as tarefas de carácter exploratório são as que mais os envolvem: «Eles gostam, eles envolvem-se muito mais... Talvez porque dá mais discussão entre eles. (...) As outras, eles também fazem mas não há (...) naquilo que eu entendo por envolvimento, é, necessariamente, eh (...) Meter a mão na massa. Eles ali discutem, discutem, discutem. Sei lá, estou-me a lembrar – não sei porquê – da tarefa dos espelhos, portanto, daquela que envolvia proporcionalidade inversa. Pronto! Eles mediram muito bem, preencheram muito bem, «Ai que giro: dá sempre igual nesta coluna!» Está a andar. (...) Lá está, eles discutiram e lá chegaram à conclusão que devia ser sempre o mesmo (...); quer dizer, no meio, no meio daqueles todos houve um ou dois, um, um grupo sempre em cada turma que acho que os resultados não foram lá muito bons, não é?»

Cristina tem consciência de que orientar a fase de discussão e síntese do trabalho dos alunos em tarefas exploratórias, como a tarefa dos espelhos, sobretudo com vista à institucionalização de conhecimento novo, é um enorme desafio: «A discussão é um desafio que eu acho que nunca sai bem. Eu acho que nunca sai bem. Acho que tenho sempre defeitos a pôr à discussão [sorrindo]. Ou porque não ouvi aquele, ou porque não dei espaço para aquele falar, não é? Eu tenho sempre coisas a apontar na fase de discussão. (...) A discussão nunca fica perfeita. (...) Eu acho que a síntese sai depois daquelas, depois da discussão é só escolher os momentos em que, quer dizer, é escolher frases e citações. (...) É registar exactamente o que foi dito, aquilo e aquelo outro e a síntese fica feita. (...) Para mim [a discussão] é a fase mais complicada.» Notei sempre uma maior influência da pressão do tempo na gestão da fase da discussão e síntese do que na gestão da fase do trabalho autónomo dos alunos. No entanto, nesta fase de exploração matemática das tarefas, Cristina sentia falta de tempo: «Eu gostava de, às vezes, lhes dar mais tempo, para eles trabalharem autonomamente. (...) Quem me dera ter mais tempo. Eh, provavelmente dava, as coisas far-se-iam com mais calma. Sem dúvida. Todas elas, não é?» Cristina vê o trabalho em parceria como uma mais-valia, tanto para os alunos como para ela própria: «Gostava muito de ter alguém na minha sala de aula, durante um certo espaço de tempo (...) outro colega a criticar... ajudaria mais a... (...) Quantas vezes saio de lá cheia de dúvidas.»

Com a nova realidade curricular, todas as turmas do 3.º ciclo do Ensino Básico têm mais 45 minutos semanais em Matemática do que durante o período da experimentação do NPMEB. No entanto, este tempo adicional resultou, em muitos casos, numa diminuição do tempo total dedicado à Matemática pois, com a extinção do Estudo Acompanhado, uma área curricular não disciplinar frequentemente atribuída à Matemática no âmbito do Plano da Matemática II (PM II — Santos, Pinheiro, Canavarro, Santos, Pires, Martinho, Amado, & Ferreira, 2011), o saldo é negativo. Além disso, a existência de assessorias na sala de aula de Matemática, bem como de espaços para trabalho colaborativo entre professores, parece estar a diminuir nas escolas (embora não existam ainda dados sistemáticos sobre estes aspectos, a minha sensação, como elemento da Comissão de Acompanhamento do PM II e do NPMEB, é precisamente esta). Cabe aos professores e aos órgãos de gestão das escolas e agrupamentos um papel determinante no aproveitamento dos recursos existentes, na organização de espaços para trabalho em conjunto e numa gestão curricular que dê resposta às exigências e desafios do NPMEB.


*Nota:* Agradeço à professora Cristina Cruchinho a validação e os comentários feitos a uma versão anterior deste texto.

#### Referências bibliográficas:

- DGIDC (2011). *Funções: Proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano — 3.º ciclo*. Lisboa, ME-DGIDC.
- Fernandes, D., Borralho, A., Vale, I., Gaspar, A. & Dias, R. (2011). *Ensino, avaliação e participação dos alunos em contextos de experimentação e generalização do novo programa de Matemática do ensino básico*. Documento policopiado não publicado. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Pires, M., & Ferreira, R. A. (2009). A experimentação do novo Programa de Matemática: Reportagem no 7.º ano, no Porto. *Educação e Matemática*, 105, 73–79.
- Santos, L., Pinheiro, A., Canavarro, A., Santos, E., Pires, M., Martinho, M. H., Amado, N., & Ferreira, R. A. (2011). *Plano da Matemática II e Novo Programa de Matemática do Ensino Básico: Relatório Intercalar de Final de Ano 2010–2011*. Documento policopiado não publicado. Lisboa: ME-DGIDC.

Rosa Antónia Tomás Ferreira

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto



# A comunicação em sala de aula numa tarefa de natureza exploratória

O testemunho de uma professora

Fátima Gonçalves, Hugo Menino e Marina Rodrigues

## Introdução

O NPMEB (ME, 2007) introduz, como sabemos, algumas alterações e inovações ao nível dos conteúdos matemáticos. Uma das mudanças mais significativas incide no trabalho envolvendo os números racionais que deverá ser iniciado logo no 1.º ano de escolaridade. De facto, a investigação (Monteiro e Pinto, 2005) refere que muitas das dificuldades que os alunos apresentam ao trabalhar com os números racionais não inteiros, tem origem no início tardio do trabalho com estes números, bem como no modo como estes números são trabalhados (muito abstrato e mecanicista) e, ainda, na desvalorização das estratégias informais dos alunos, quando confrontados com problemas envolvendo números racionais não inteiros.

Para além disso, as competências transversais (resolução de problemas, raciocínio e comunicação) são valorizadas, sendo

consideradas como um dos propósitos principais de ensino. É incentivado o seu desenvolvimento, como um meio e como um fim, na consolidação e mobilização dos conhecimentos matemáticos. Em particular, a comunicação (oral e escrita) é vista como um meio privilegiado de os alunos tornarem significativo o conhecimento matemático que vai sendo construído e desenvolve-se com base nos diferentes modos de trabalho proporcionados pelo professor (NCTM 2000).

O relato que se segue diz respeito a uma aula de 1.º ano do 1.º ciclo do ensino básico onde, a partir de um contexto com potencialidades quer numéricas quer geométricas, os alunos realizam um importante trabalho de descoberta e de construção de conhecimento matemático a pares, complementado com momentos de reflexão, discussão e análise crítica com toda a turma onde se sistematizam e registam ideias e conceitos à volta das frações.

A tarefa proposta, «Dobrar folhas», estimula os alunos a preverem o número de partes em que uma folha de forma quadrada vai ficando dividida à medida que se vão realizando sucessivas dobragens ao meio, verificando-se, posteriormente, a veracidade das suas previsões e registando-se, simbolicamente, o número que corresponde à relação entre cada uma das partes e a folha inicial.

Trata-se de uma tarefa de natureza exploratória, marcada pela interação entre os vários intervenientes onde a professora assume o papel de moderadora, procurando gerir as intervenções e orientando o conteúdo subjacente sem, no entanto, impedir que sejam os alunos a determinar o rumo do desenvolvimento da aula (Stein e Smith, 2009; ME, 2007).

As tarefas de natureza exploratória presentes de forma mais ou menos explícita no NPMEB, têm subjacente uma visão do processo de ensino e aprendizagem da matemática centrado em tarefas abertas realizadas em pequeno grupo. Ao professor, cabe o papel de organizar e orientar (orquestrar) a discussão matemática, primeiro nos pequenos grupos e, num momento posterior, em grande grupo, estimulando a comunicação oral, as interações entre os alunos e a reflexão na ação (dos alunos). De entre os aspectos a valorizar, sobressaem a partilha e o confronto de ideias, processos e procedimentos matemáticos.

A descrição que se segue, de acordo com as orientações do NPMEB, procura evidenciar alguns destes aspectos.

## A aula

A professora Sandra começa a aula conversando com os alunos acerca das tarefas realizadas em aulas anteriores envolvendo e estudo das fracções. Pede-lhes que recordem uma actividade que fizeram com maçãs. Os alunos solicitam repetidamente para intervir afirmando que estiveram a dividir maçãs em partes iguais, primeiro em duas partes e depois em quatro partes. A partir do questionamento feito pela professora enunciam sozinho que primeiro obtiveram duas meias maçãs, duas metades ou duas vezes  $\frac{1}{2}$ , e que depois obtiveram quatro quartos de maçã ou quatro vezes  $\frac{1}{4}$ . Como a tarefa havia sido desenvolvida no contexto de problemas de partilha, os alunos, no primeiro caso, identificaram  $\frac{1}{2}$  como a parte que cada um dos dois meninos comia e, no segundo caso  $\frac{1}{4}$  como a parte que cada um dos quatro meninos comia. Parecem reconhecer também o processo de reconstrução da unidade a partir das partes ao enunciarem que cada menino comeu  $\frac{1}{4}$  e como são quatro meninos então os quatro comeram a unidade que é a maçã inteira.

A professora Sandra aproveita esta discussão para dizer que irão trabalhar agora a partir de uma unidade diferente, um quadrado de papel. Inicia a exploração perguntando às crianças como podemos ter a certeza que o que tem na mão é um quadrado. Os alunos enunciam diversas propriedades, algumas distintas (tem quatro lados iguais), outras não (tem quatro vértices). Em dado momento da discussão uma aluna afirma que se rodarmos o quadrado ficamos com uma figura diferente. A exploração coloca em evidência as conexões entre números e geometria. Reparemos na discussão que se gerou e nas metáforas usadas pela professora:

[A aluna pega no quadrado e coloca um dos vértices para cima].

Professora Sandra: Achas?

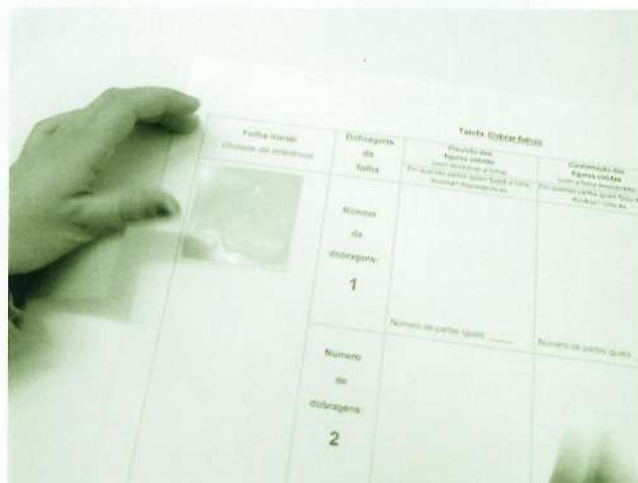


Figura 1. Folha de registo com a unidade de referência

Ana: Acho. Assim é outra forma geométrica.

Formadora: Reparem, a Ana está a dizer que se tivermos assim esta figura é um quadrado mas se agora a rodarmos assim, já não é um quadrado, vocês concordam?

Vários alunos: Não, é um quadrado.

Rodrigo: É sempre o mesmo quadrado. Não muda.

Ana: Só que há uma forma geométrica que é assim...

Professora Sandra: Tu estás de pé, se a professora te agarrar e deitar-te, tu deixas de ser a mesma menina?

Ana: Não.

Professora Sandra: Eu sou a professora Sandra, se eu rodar para aqui sou a professora Sandra? E assim? E assim?

Alunos: A professora Sandra.

Professora Sandra: Então temos o quadrado e se o rodarmos para ficar numa posição diferente deixa de ser quadrado?

Ana: Não!

De seguida a professora Sandra retoma a unidade de referência e explica que irão fazer previsões em função da dobragem daquele quadrado de papel. Explora a folha estruturada de registo e pede-lhes para colarem um primeiro quadrado (figura 1). Como iriam fazer a exploração sempre com quadrados de papel iguais importava pois discutir com os alunos como tínhamos a garantia que os quadrados com que estávamos a trabalhar eram congruentes. Rapidamente os alunos sugeriram que poderiam confirmar sobrepondo os diferentes quadrados e verificando se coincidiam ponto por ponto. Sandra pede-lhes então que dobrem uma vez o quadrado em partes iguais e façam a previsão de quantas serão essas partes e qual será a sua forma. Inicialmente as crianças dizem que haverá muitas formas, mas acabam por verificar que só existem duas:

Mafalda: Ó professora só há duas maneiras de dobrar.

Tiago: Ou há esta. [mostra um triângulo]

Tiago: Ou há esta, um rectângulo.

Segue-se a fase de registo. Os alunos levantam várias questões, mas acabam por entender rapidamente que registo fazer nas



Figura 2. Registro da previsão com 2 dobragens do quadrado

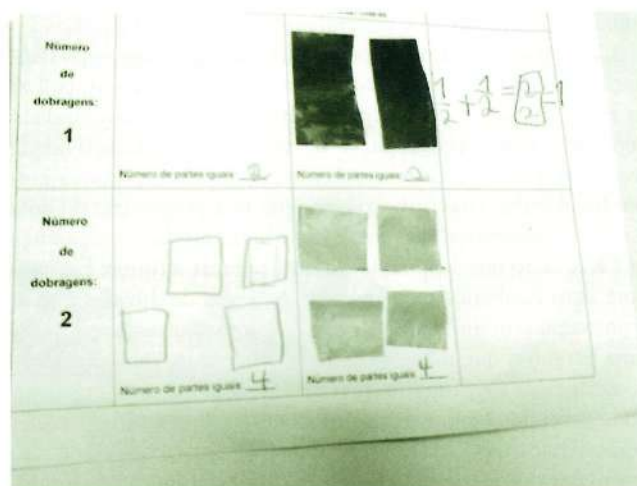


Figura 3. Exemplo da colagem dos quadrados obtidos depois de 2 dobragens

diferentes colunas. Na fase de previsão a maioria dos alunos indica que irá obter duas partes.

Num segundo momento da tarefa, a professora Sandra pedelhes que dobrem o quadrado duas vezes. A tarefa de dobrar não foi complexa, contudo prever quantas figuras iriam obter por dobragem já foi mais difícil. A tarefa exigia capacidade de imaginar um conjunto recorrente de transformações do quadrado inicial. A maioria das crianças responde correctamente (4 figuras, triângulos ou quadrados) e regista (exemplo na figura 2), mas algumas apontam outros valores um pouco aleatoriamente. Ao desdobrarem o quadrado verificam que de facto, independentemente da forma, obtinham sempre 4 figuras congruentes.

Para todas os alunos, independentemente das previsões iniciais, foi muito importante preencher a coluna de verificação, onde colaram as partes obtidas pela dobragem (figura 3). Seguiu-se o registo das conclusões em que os alunos representaram sem dificuldade que no primeiro caso tinham  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  e no segundo caso tinham  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ . Vejamos um pequeno excerto do diálogo inicial que se gerou:

*Professora Sandra:* Então quem é que conseguiu pensar e depois quando o abriu viu que era verdade? Ou seja, quem é que pensou que tinha... quantas partes?

*Filipe:* Duas.

*Professora Sandra:* E depois quando se abriu tu tinhas duas partes?

*Filipe:* Sim.

*Professora Sandra:* Ok, isso é uma conclusão. E quem é que consegue tirar mais alguma conclusão, quem é que consegue ver qual é a relação entre esta unidade de referência (quadrado) e este bocadinho (triângulo — metade do quadrado)?

*Inês:* Eu! O azul é um quadrado e este aqui (triângulo) também é um quadrado só que o cortámos.

*Professora Sandra:* Quem é que consegue explicar melhor? Quem consegue ajudar?

*João:* O azul é um quadrado e o laranja são duas metades.

[*Professora agarra no triângulo e pergunta*]

*Professora Sandra:* Então o que é isto?

*Alunos em coro:* Metade!

*Professora Sandra:* E como é que eu escrevo metade em matemática?

*Alunos em coro:* Um meio.

*Professora Sandra:* Então nas conclusões o que é que vamos registar?

*Francisca:* Não sei...

*Professora Sandra:* Então, dobramos o quadrado uma vez e ficamos com duas partes iguais. Uma parte é...

*Miguel:* Um meio.

*João:* Mais um meio...

*Filipe:* Dá dois meios!

*Professora Sandra:* E se voltasse a juntar os dois meios?

*Filipe:* Ficava um quadrado.

*Professora Sandra:* Que é a nossa?

*Alunos em coro:* Unidade!

A partir dos seus registos, os alunos concluíram que duas das quatro partes eram dois quartos o que equivalia a meio quadrado (um meio do quadrado inicial). Da mesma forma concluíram que duas vezes dois quartos era igual a um meio mais um meio, ou seja, a unidade.

### À conversa com a professora Sandra

Conversando com a professora Sandra aflorámos algumas questões sobre as quais vale a pena reflectir. A primeira questão que lhe colocamos foi sobre o porquê da selecção desta tarefa, ao que ela respondeu: «este era um tema acerca do qual não me sentia muito segura, aliás, bastante receosa por ter de aplicá-lo dentro da minha sala de aula». Refere que se questionava, que muitas eram as dúvidas que a invadiam: «Como conseguirei transmitir estes conteúdos a alunos tão pequeninos?»; «Será que eles conseguem realizar a tarefa que lhes irei propor? E con-

tinua: «Pensei, reflecti e concluí que seria um bom desafio».

Continuando a nossa conversa, refere que teve a preocupação de organizar uma sequência de tarefas para trabalhar as fracções, que a planificação das aulas exigiu um cuidado acrescido, com a preocupação de verificar se cada actividade iria levar a uma verdadeira interiorização das noções que pretendia abordar «Reconheço que uma boa preparação da aula é muito importante, mas mais importante ainda é a segurança que esse facto nos dá quando estamos perante a turma. Ficamos com mais confiança para «enfrentar» o mar de dúvidas que os alunos apresentam. Sentimos mais segurança quando nos surge uma pergunta que não esperávamos e, com mais naturalidade a esclarecemos». Tendo por base a cadeia construída diz ter começado por explorar intuitivamente situações de partilha equitativa e divisão da unidade em partes iguais, representando essas quantidades de diversas formas: desenhos, palavras e fracções. Utilizou a divisão de uma maçã em metades e quartos por ser algo que faz parte das vivências do quotidiano dos alunos, o que se tornou significativo para eles.

No entanto, para além da preocupação com os conceitos a abordar e com as tarefas a implementar, a professora Sandra coloca o seu enfoque na dinâmica de sala de aula, «Ao querer trabalhar com fracções, e mais especificamente ter de levá-las até aos meus alunos, cedo me apercebi de que não podia fazê-lo do modo como eu as aprendi. Eu não queria que eles decorassem mas sim que compreendessem. Não queria que os meus alunos mecanizassem regras sem as terem criado ou entendido». Sandra explica que foi essencial ter percebido o quanto é importante apelar à explicação da forma como os alunos pensam, de terem oportunidade de justificarem e confrontarem as suas ideias para a construção e compreensão dos conceitos matemáticos e para lhe atribuírem significado. «Para esta aula tive de repensar alguns processos de ensino dentro da sala de aula e reflectir sobre a minha prática pedagógica. Tentei não ser uma mera reprodutora de conhecimentos matemáticos, mas levar os meus alunos a pensar e a descobrir comigo esses conhecimentos».

Durante a implementação da tarefa «dobrar folhas» diz ter conseguido, através da comunicação estabelecida e da discussão, verificar o que os alunos tinham aprendido anteriormente e como conseguiram mobilizar os conhecimentos, algo que seria impossível se não houvesse diálogo mediado pelo professor. «Ao longo do desenrolar da tarefa, fui solicitando todos os alunos para que participassem. Foram vários os momentos durante a aula em que houve troca de ideias, discussão de resultados bem como esclarecimentos dados pelos próprios alunos, uns aos outros. Se por um lado, uns clarificam e consolidam as suas aprendizagens/opiniões enquanto explicam, por outro lado, os outros também percebem melhor porque são os próprios colegas que explicam usando o mesmo tipo de linguagem.»

Para a professora, para que estas situações aconteçam na sala de aula, isto é, momentos em que são os próprios alunos a fazer conjecturas, a avançar com sugestões de resolução das situações apresentadas, bem como a esclarecer dúvidas uns dos outros, é necessária uma grande preparação e abertura do professor para que no momento certo possa ajudar a fazer uma síntese ou a sugerir uma conclusão dos assuntos tratados. É sem dúvida, uma aula mais trabalhosa, mas também muito mais frutífera para os alunos, afirma.

No final, Sandra refere: «A maioria da turma excedeu as minhas expectativas, relativamente ao uso correcto do vocabulário (ênfase na verbalização dos seus pensamentos matemáticos), assim como, da representação em linguagem matemática da fracção. Foi também curioso a forma como chegaram às conclusões. Adicionaram fracções e reconheceram fracções equivalentes, naturalmente sem tomarem conhecimento dessa terminologia.» Acrescenta ainda que foi também muito interessante a forma como foi possível estabelecer conexões com outros conceitos matemáticos, nomeadamente com a geometria (características das formas e visualização).

Em jeito de conclusão a professora realça a importância da sua participação no Programa de Formação Contínua de Matemática, evidenciando que a dinâmica do mesmo lhe proporcionou uma experiência de valorização e de actualização quer pessoal quer profissional, reforçando a sua autoconfiança e proporcionando-lhe uma atitude mais positiva e de abertura à inovação no ensino da matemática. A formação foi essencial para transformar a sua prática pedagógica, no sentido de melhorar a qualidade do seu trabalho, centrando o ensino e aprendizagem na valorização da formulação de conjecturas, da comunicação, do raciocínio e da resolução de problemas.

#### Bibliografia

- Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, volume XIV n.º 1. Lisboa: APM.
- ME (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: ME-DGIDC.
- Stein, M & Smith, M (2009). Tarefas Matemáticas como quadro para a reflexão. Da investigação à prática. *Educação e Matemática* n.º 105 (22-28).

#### Fátima Gonçalves

Agrupamento de Escolas Gualdim Pais, Pombal

#### Hugo Menino

NIDE – Instituto Politécnico de Leiria

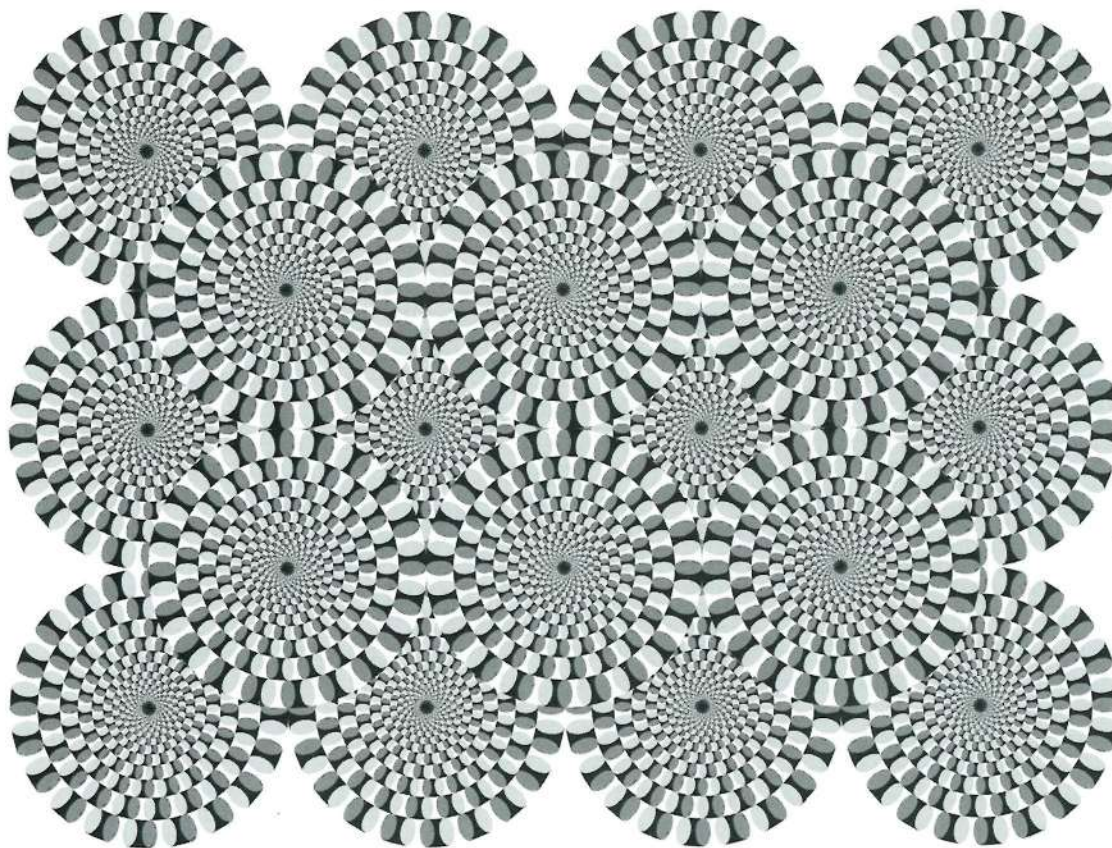
#### Marina Rodrigues

NIDE – Instituto Politécnico de Leiria



# Uma experiência com cálculo mental

Renata Carvalho  
Irene Segurado



Ensinar a calcular mentalmente não é fácil, deve iniciar-se logo nos primeiros anos em que as crianças aprendem a trabalhar com números e requer tempo, persistência e estrutura. No atual Programa de Matemática o desenvolvimento de capacidades de cálculo mental é enfatizado ao longo de todo o ensino básico, bem como a sua importância na capacidade dos alunos estimarem e resolverem problemas. Este artigo relata uma experiência de cálculo mental numa turma de 6.º ano de escolaridade.

## Importância do cálculo mental

O cálculo mental permite à criança calcular livremente, sem restrições, levando-a a desenvolver novas estratégias de cálculo, a usar números de referência e estratégias que já possui. Esta posição é defendida, por exemplo, por Buys (2001), que refere três características importantes deste cálculo: (i) opera com números e não com dígitos; (ii) usa propriedades elementares das operações e relações numéricas; e (iii) permite o recurso a registos intermédios em papel.

MacIntosh, Reys e Reys (1992), consideram que crianças com um bom cálculo mental têm sentido de número e de operação. Estes autores apresentam um quadro de referência para um sentido básico de número sistematizado em três áreas: (i) no conhecimento e destreza com números, (ii) no conhecimento e destreza com operações e (iii) na aplicação do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo.

Facilmente se encontram pontos de contacto entre as características do cálculo mental de Buys (2001) e o quadro de referência apresentado por McIntosh *et al.* (1992). De facto, operar com quantidades e não com dígitos implica ter conhecimento e destreza com números. E usar propriedades das operações e relacionar números envolve conhecimento e destreza com as operações em situações de cálculo.

O cálculo mental é um cálculo feito «de cabeça» podendo existir recurso a registos intermédios. Nem sempre o entendimento é esse, mas alguns autores (*e.g.*, Buys, 2001; McIntosh *et al.*, 1992) defendem que o uso de registos intermédios em papel num cálculo mental não compromete as suas características.

## Estratégias de cálculo mental e erros dos alunos

As últimas aulas de Matemática tinham sido dedicadas à revisão e aprofundamento de perímetros de figuras planas. Na sequência deste trabalho, a professora da turma, Irene, em conjunto com outra professora de Matemática, Renata preparou um conjunto de tarefas de cálculo mental com números racionais não negativos na representação decimal. Estas tarefas foram criadas pensando nas estratégias de cálculo mental (Caney & Watson, 2003) que os alunos poderiam mobilizar, nomeadamente: (i) usar diferentes representações de um número racional (frações e decimais); (ii) decompor números decimais; (iii) operar primeiro com a parte inteira e depois com a parte decimal ou vice-versa; e (iv) estabelecer relações parte/todo.

O objetivo desta experiência era, por um lado, criar uma oportunidade de aprendizagem enquadrada no tópico matemático que os alunos estavam a trabalhar e, centrada num momento da aula onde a partilha e discussão de estratégias de cálculo mental contribuísse para a produção de novos conhecimentos e, por outro, perceber que estratégias de cálculo mental que usam e que erros cometem quando calculam mentalmente.

De acordo com Monteiro e Pinto (2005, 2007), é vulgar encontrar alunos que cometem erros no trabalho com números decimais. Referem que  $1,345$  é maior que  $1,7$  dando como justificação o facto de o primeiro ter «mais números» que o segundo, ou então porque  $345$  é maior que  $7$ . Ao confundirem  $1,6$  com  $1,06$ , confundem décimas com centésimas, podendo a leitura incorreta do número estar na origem deste erro, uma vez que não evidencia a sua grandeza.

Dificuldades no entendimento do sistema de numeração decimal levam a que  $4 + 2,1$  seja considerado igual a  $2,5$ . Por norma, os alunos aprendem que para adicionar ou subtrair números decimais se «coloca vírgula debaixo de vírgula» e na ausência de vírgula num número inteiro, esta regra não ajuda. Devem, sim, pensar nas quantidades envolvidas em vez de aplicarem uma regra previamente memorizada.

### Cálculo mental na aula de Matemática

Logo no início da aula foi proposto aos alunos um desafio de cálculo mental — o «Pensa rápido!». Este desafio consistia na resolução de 10 cálculos com números racionais não negativos na representação decimal, em que primeiro os alunos resolveram cinco adições e subtrações com números decimais ( $0,75 + 0,5$ ;  $0,25 + 0,5$ ;  $4,5 - 3,3$ ;  $3,2 + 1,9$  e  $7,2 - 0,9$ ) tendo 15 segundos para escreverem cada um dos resultados numa folha de papel. Seguiu-se um momento de discussão em que o professor questionou os alunos, pediu que explicassem a forma como pensaram e confrontou estratégias usadas na turma.

Só após esta discussão é que os alunos resolverem mais cinco cálculos ( $0,18 + 0,2$ ;  $0,4 + 0,6$ ;  $0,65 - 0,5$ ;  $0,03 + 0,7$  e  $1,4 - 0,9$ ) seguindo-se um novo momento de discussão. Esta opção teve como objetivo perceber as estratégias e erros dos alunos e no grupo turma e tentar limar estes erros para que no futuro não voltassem a ser cometidos.

### Um pouco de discussão na sala de aula

Quando é pedido à turma o resultado de  $0,75 + 0,5$  ouvem-se dois valores:  $1,25$  e  $0,80$  e a professora começa a questionar os alunos:

*Professora* — Daniela como pensaste?

*Daniela* — Dividi  $0,5$  por  $2$  que é  $0,25$ . Depois somei  $0,75$  com  $0,25$  que dá  $1$  e depois juntei  $0,25$  e dá  $1,25$ .

*Professora* — Quem tem outra estratégia?

*Mafalda* — Eu fiz  $7$  mais  $5$  que é  $12$  e vi que ficava  $1,25$

*João Carlos* — Fiz doutra maneira. Tirei  $0,25$  a  $0,75$  e ficou  $0,5$ . Como  $0,5$  com  $0,5$  é  $1$  ficou  $1,25$ .

(...)

*Professora* — A quem deu outro resultado?

*Davide* — A mim! Mas já vi onde me enganei. Juntei as décimas com as centésimas.

(...)

Na discussão surgiram três estratégias diferentes, o que permitiu o seu confronto. Os alunos usam valores de referência nos cálculos que efetuam, nomeadamente  $0,25 + 0,75$  ou  $0,5 + 0,5$  para obterem a unidade.

Os erros cometidos pelos alunos que indicaram como resposta  $0,80$  permitiram que estes tomassem consciência de que este erro se deveu a terem assumido as 5 décimas como 5 centésimas, dificuldade recorrente nos alunos e que deve ser trabalhada. Permitiu ainda trabalhar a representação e leitura de um número, por exemplo, nenhum aluno referiu como resultado  $0,8$  mas sim  $0,80$ .

*Professora* — E agora  $3,2 + 1,9$  quanto deu Beatriz?

*Beatriz* —  $5,1$ . Tirei  $0,1$  a  $3,2$  e juntei ao  $1,9$  que dá  $2$  e  $3$  mais  $2$  é  $5$  e fica  $5,1$ .

[O João Carlos diz logo de seguida o seu raciocínio]

*Professora* — João Carlos tens de falar mais devagar, não consegui seguir o teu raciocínio.

*João Carlos* —  $3$  com  $1$  é  $4$ . Depois o  $2$  com o  $9$  que dá  $1,1$  e fica  $5,1$ .

*Diogo* — Que complicado!

*Professora* — Demora mais a explicar que a fazer.

(...)

Por vezes é difícil seguir o raciocínio dos alunos. Por um lado, a linguagem que usam não é geralmente a mais correta, por outro, o raciocínio dos alunos não é aquele que estamos à espera. O professor tem de estar muito atento, pedindo se necessário que este repita o seu raciocínio, limando as incorreções de linguagem.

*Professora* — Quanto dá  $7,2 - 0,9$ ?

[Ouvem-se dois resultados  $6,3$  e  $6,7$ ]

*Professora* — Ao Diogo deu  $6,7$  e ao Rodrigo  $6,3$ . Vamos lá ouvir os colegas. Vamos ouvir com atenção a explicação de cada um para depois dizerem onde é que eles falham, ou não...

*Diogo* — Então  $9$  menos  $2$  é  $7$  fica  $6,7$ .

*Rafael* — Eu enganei-me, a mim também me deu  $6,7$  e acho que esta está mal, porque eu fiz assim,  $9 - 2$  é  $7$  então eu pensei que era  $6,7$ , mas não é, é  $6,3$ , acho eu porque  $3$  com  $9$  dá  $2$ .

*Professora* — Rodrigo, então explica à restante turma como é que fizeste.

*Rodrigo* — Não podes tirar ao 9 o 2 é ao contrário. Tiras a 12 o 9 e dá 3.

[Tomás interrompendo]

*Tomás* — A mim deu-me 7,7.

*Rodrigo* — Como é que pode ser? Se é 7,2 e é de menos como pode dar 7,7?

*Professora* — Ó Tomás, ouviste bem este argumento?

*Tomás* — Então eu fiz 9-2.

*Professora* — Não estás a ser crítico face ao resultado. Então tens um número tiras-lhe um bocadinho e ainda ficas com mais!! Atenção que na adição podemos trocar a ordem das parcelas e o resultado não se altera, mas na subtração não. (...)

A discussão assente neste caso foi muito rica, pois para além de trabalhar a leitura dos números considerando as décimas que existem numa unidade, permitiu falar na propriedade comutativa que os alunos estavam a aplicar erradamente na subtração. O Rodrigo, ao afirmar que é ao 12 que tem de tirar 9, e não ao 2 tirar 9, está a considerar 12 décimas em vez de 2 décimas, utilizando possivelmente o conhecimento que tem do algoritmo da subtração por empréstimo. O aluno mostra ainda ter sentido de operação (na subtração se retirar não pode ficar maior) sendo crítico face ao resultado obtido, e utiliza este conhecimento como argumento para convencer o colega. Durante toda a discussão, os alunos mostraram ter uma postura crítica face aos raciocínios seguidos pelos colegas, contribuindo para a validação das estratégias usadas.

### Reflexão das professoras

*Irene*. Professora que sou, há já muitos anos, sempre tive a preocupação de desenvolver nos meus alunos hábitos de cálculo mental, mas sempre o fiz de uma forma bastante empírica, não objetivando esta aprendizagem. Por isso, foi com bastante agrado que planifiquei esta aula com a Renata, que neste ano letivo se encontra sem turma dedicando-se à investigação de questões relacionadas com o cálculo mental. Percebi desde logo que o trabalho que ia desenvolver com os alunos tinha um objetivo bem definido, afastando-se do «amadorismo» com que habitualmente trabalho o cálculo mental. Esperava que pudesse vir a ser um «bom momento de aula».

A expectativa positiva que desde início coloquei na aula, foi corroborada. Já tinha consciência da importância do desenvolvimento do cálculo mental, mas percebi melhor a importância do seu ensino pensado e programado.

Nos episódios relatados anteriormente há evidências de que os alunos para a mesma operação apresentam estratégias diferentes apropriando-se das potencialidades dessas estratégias, erram trocando décimas com centésimas, mas na discussão tomam consciência desse erro ou utilizam a propriedade comutativa indevidamente na subtração e alunos validam as respostas dos colegas, vão muito além da utilização do cálculo mental como ferramenta essencial na matemática. O que na realidade lhes proporcionei foi mais uma etapa na apropriação do sentido de número.

*Renata*. O meu interesse pelo cálculo mental tem vindo a crescer desde que o programa de Matemática começou a sua generalização e, dada a ênfase que coloca no desenvolvimento do sentido de número e da capacidade de cálculo mental. Aumenta o meu interesse e com ele a necessidade de aprender mais e, por isso, atualmente tenho-me dedicado a investigar questões relacionadas com o cálculo mental com números racionais.

Esta não foi a minha primeira experiência de cálculo mental pensada e programada para a sala de aula. O ano letivo passado, durante todo o terceiro período e uma vez por semana, proporcionei aos meus alunos momentos de cálculo mental, como este que realizei com a Irene, usando números racionais nas três representações (decimal, fração e percentagem).

Pela experiência positiva que tive, não só ao nível da participação dos alunos e da aprendizagem que lhes proporcionei, mas também ao nível da minha própria aprendizagem, pensei que esta experiência não deveria ficar entre as quatro paredes da sala de aula, mas que deveria ser partilhada e disseminada. A Irene aceitou o desafio, e este será certamente um entre muitos que iremos pensar e realizar em conjunto.

O cálculo mental desenvolve-se diariamente na sala de aula, mas momentos como estes que relatámos, impõem uma dinâmica diferente na aula e ajudam a reforçar e a consolidar aprendizagens, nos alunos, que por vezes julgamos adquiridas. É preciso acreditar nas potencialidades do cálculo mental e fazê-lo renascer nas salas de aula pensando sempre que estamos a preparar os nossos alunos para o quotidiano.

### Referências

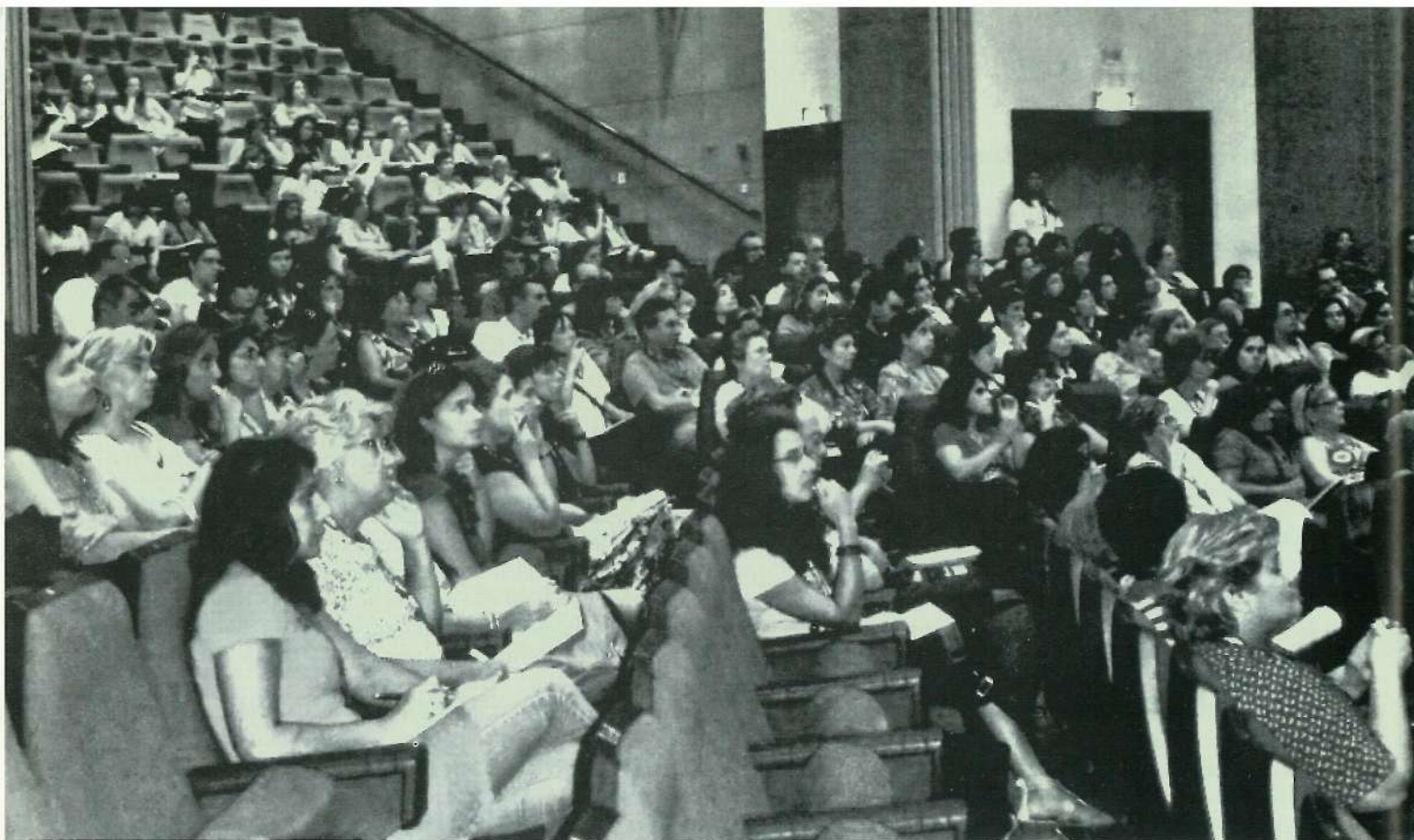
- Buyts, K. (2001). Mental arithmetic. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed), *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Utrecht: Freudenthal Institute (FI), Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).
- Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers. International Education Research Conference*. Auckland, New Zealand.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8 & 44.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC. <http://sitio.dgicd.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-108.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

### Renata Carvalho

Unidade de Investigação do Instituto de Educação

### Irene Segurado

Escola Básica 2. 3 Dr. Rui Grácio



## ProfMat 2011, a um passo de um fórum de diálogo?

Gertrudes Amaro

«A ciência pode ser um prazer e até um prazer para compartilhar em família ou entre amigos. Ela é também a mais extraordinária escola de liberdade e de rigor que os homens inventaram»

Albert Jacquard

Em 2011, uma razão muito forte me levou ao ProfMat! Voltava à sala de aula! Depois de largos anos a campear noutras arenas, precisava de encontrar os meus pares, de conhecer projectos, resultados de investigação, experiências profissionais, em suma, saber as «últimas» do que acontece e como acontece o ensino da Matemática. A leitura regular de livros e revistas para além do que é hoje a informação nacional e internacional a que se tem acesso não substitui o que o debate permite. Num momento em que aptidões, conceitos e ideias das novas gerações estão sob uma luz radicalmente nova que melhor do que apostar na «energia» que nasce do confronto aberto e franco de conhecimentos, ideias e valores que facilita a análise multifacetada, o quebrar de assunções rígidas, o construir de novos balanços e equilíbrios?

Não me desiludi! Na linha do atrás enunciado, reporto como momentos muito significativos do encontro a discussão com base no projecto «IMLNA — Promover a aprendizagem Matemática em Números e Álgebra» e a conferência «Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental : começando no 1.º ano e continuando até ao 12.º ano», a avaliar pelo número de presentes e pelo *insight* dos resultados da investigação

realizada. Dois outros momentos de puro prazer matemático foram conseguidos pelas conferências *Models in communication of Mathematics* e *Simulação na Estimação de Probabilidades*. O leque significativo de comunicações apresentadas com base em estudos empíricos por professores das escolas é exemplo de como hoje se encara a profissionalidade docente. No entanto, é curioso verificar como os estudos no âmbito da formação de professores (7) perdem a favor da investigação sobre conhecimentos, conceitos e competências dos alunos (39). No actual momento em que a generalização dos programas de Matemática do ensino básico está no terreno é natural, dir-me-ão, que nos centremos no que os alunos aprendem e como aprendem. Obviamente, mas atrás de uma estratégia, de um conceito, de uma competência ou de um conjunto de metas não deverá estar o olhar atento do professor, cientificamente preparado, capaz de avaliar as ideias pré-concebidas, as dificuldades dos próprios conceitos, das conexões, da resolução de problemas, de tudo o que é e faz a Matemática? As variáveis em jogo são inúmeras e não são independentes, eu sei, e o que referi serão apenas átomos no universo das questões, contudo, importa pensar nelas!

Centrada no remoer desta ideia de que a Educação Matemática é muito mais do que uma ponte entre a Matemática e os modelos ou modos de ensino, dou por mim a interrogar-me sobre o papel e a génese dos ProfMat, a lembrar histórias, a procurar elos de ligação de toda esta acção que nos últimos 26 anos nos agregou na APM.

Motivada pela *naïf* exposição sobre o ProfMat85 e pelas evocações ao berço deste movimento feitas na conferência de abertura pelo João Pedro da Ponte, eis-me de volta a 1985.

Como descrever o que nos animava e o que fervilhou nos «bastidores»<sup>[1]</sup> do «encontro fundador» dos ProfMat? Ou como contar as peripécias que eu e o José Manuel Matos vivemos na preparação da nossa intervenção? Tínhamos dados nacionais sobre a utilização dos computadores nas escolas, organizados, tratados, mas a produção escrita emperrava, o nosso computador, o SinclairTimeX, levava-nos ao desespero! Valeu nos um Macintosh cujo écran era pouco maior que o actual visor dum iPhone, que o DEFCUL<sup>[2]</sup> nos cedeu durante três dias entre as onze da noite e as sete da manhã!

O ProfMat85 aconteceu sob o signo do computador? Sem dúvida! A tecnologia inovadora cujas potencialidades «revolucionárias» se adivinhavam em todo o tipo de comunicação e que já dominava o cálculo e a investigação estava à porta do sistema educativo. O Ministério da Educação preparava a introdução dos computadores nas escolas. Algumas universidades desenvolviam projectos nos ensinos básico e secundário com base naquela ferramenta. A formação inicial de professores do 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico era posta perante um novo paradigma. Os currículos e as metodologias de ensino da Matemática enfrentavam novos desafios!

E foi assim, que três centenas de docentes, sem quadros interactivos ou mini PC(s) e iPad(s) sobre as mesas, trocaram experiências, espreitaram a investigação desenvolvida na formação de professores e no ensino da Matemática, criaram e debateram ideias sobre a utilização do computador e de outros materiais didácticos. Davam-se os primeiros passos para a criação desses fóruns de discussão e de criação de conhecimento que são hoje os ProfMat.

Aquele fervilhar não era mais do que a tomada de consciência daquilo a que Blanché e Dubucs (1996)<sup>[3]</sup> chamam de passagem dos conhecimentos implícitos para os conhecimentos explícitos. Usando a metáfora daqueles autores a propósito da diferença entre os dois conhecimentos diria que, à época, apesar da formação científica e pedagógica e experiência adquirida, os professores viam-se *mais no papel de quem consegue falar mais ou menos correctamente uma língua (a Matemática) do que no de quem domina a gramática dessa mesma língua (a Educação Matemática)*. Tornava-se, pois, urgente que a Educação Matemática se construísse ou reinventasse passando a «incidir a atenção sobre a prática para, a partir dela, construir teoria», por incorporação de novos contextos, pelo desenvolvimento de novos conhecimentos! Sabíamos que era preciso ir para além da utilização quotidiana da «gramática», passar do implícito ao explícito formulando e tomando consciência das suas leis. Estou certa que foi em torno daquela vontade que em 1986, em Portalegre, se constituiu a APM.

Traçado o rumo do trabalho a desenvolver, os ProfMat que se seguiram primaram pela coesão e trabalho em torno de inte-

resses comuns: a formação de professores, a utilização das tecnologias no ensino e a definição de novos currículos e programas de matemática. Lembro, a propósito de coesão, o sorriso da Margarida Graça que exclamava à chegada a Bragança ... *Eles vêm todos! Eles vêm todos!* e a onda fantástica que envolveu o trabalho realizado em Vila Nova de Milfontes sobre as bases de um novo currículo para a Matemática.

Os ProfMat dos anos noventa continuaram a ser espaços privilegiados de debate. Novos domínios, ou velhos domínios com novas coreografias surgem no nosso campo profissional: exames e provas de aferição; novos programas nos ensinos básico e secundário; a participação de Portugal em estudos internacionais. Neste período a investigação portuguesa em Educação Matemática toma alento. Pelo menos 15 teses de doutoramento<sup>[4]</sup> são realizadas e os seus resultados divulgados. Multiplicam-se as áreas de estudo das teses de mestrado. A nossa «gramática» está em plena construção!

Mais uma década de labor! Em 2011 O ProfMat é definido como um espaço onde há lugar para a reflexão colectiva e convívio informal e onde *as oportunidades de articulação entre a investigação e a experiência profissional* acontecem nesse entretecer entre *a Matemática e a sua história e a Educação e os seus valores* que se quer contínuo e sem limite. A organização, o programa, as 64 sessões, os momentos de convívio informal, as exposições, a feira de livros e materiais mostram bem a dinâmica e solidez da APM.

Não encontrei o sorriso da Margarida Graça, mas senti o mesmo espírito e vi centenas de caras desconhecidas, gente pontual e interessada em todas as sessões. Agora, no tempo em que a Educação Matemática já começa a ser gramática e a aplicar as suas regras, em que se multiplicam e desmultiplicam saberes, teremos, como classe profissional responsável, de *manter a paixão e coragem necessárias à actuação verdadeiramente criativa*<sup>[5]</sup>, sem a qual, seguindo Bohm e Peat (1989), não haverá mais ciência ou nova ciência nem a discussão passará a diálogo, patamar último do acordar da inteligência criativa, do *jogo livre* da comunicação, da unidade na pluralidade!

Pedi-me a direcção da Educação Matemática para, como sócia fundadora da APM, falar do Profmat 2011! Se o consegui não sei! Não é fácil escrever... as palavras agarram-nos... os adjectivos condenam-nos. Porém, gostei do exercício.

Bem hajam!

## Notas

<sup>[1]</sup> O trabalho de bastidores deveu-se ao João Pedro Ponte, ao João Filipe Matos, ao Paulo Abrantes, ao Eduardo Veloso, ao Henrique Guimarães e a muitos outros e outras colegas a quem ousou pedir desculpa pela minha falta de memória!!!

<sup>[2]</sup> DEFCUL — Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa

<sup>[3]</sup> Blanché, R., Dubucs, J. (1996). *A História da Lógica*. Lisboa: Edições 70. (cap I, os percursores, pp. 15–16).

<sup>[4]</sup> Na lista *on-line* da APM constam 231 teses de mestrado e doutoramento. Das 36 teses de doutoramento, 3 foram realizadas na década de 80, 15 nos anos noventa e 18 a partir do ano 2000.

<sup>[5]</sup> In David Bohm e F. David Peat (1989). *Ciência, Ordem e Criatividade*. Lisboa: Gradiva (p. 74).

## XXII SIEM

Sandra Nobre

O Instituto de Educação da Universidade de Lisboa foi o local escolhido para a realização do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática, nos dias 7 e 8 de Setembro. O número de inscritos rondou os 170, entre portugueses, brasileiros e espanhóis. O primeiro dia do encontro foi um dia em comum ao SIEM e ao ProfMat o que permitiu estreitar ligações entre professores e investigadores.

O seminário contou com três conferências plenárias, um painel temático, simpósios de comunicações e a exposição de posters.

No dia 7, após a sessão de abertura, Maria Manuela David, da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) — Brasil, apresentou a conferência plenária intitulada *Distanciamento entre a atividade Matemática escolar e a Matemática académica e do quotidiano: implicações para a formação de professores e para a prática docente na educação básica*. Com base em trabalhos que a professora orientou na UFMG e outros do ICMI Study de 2010, a comunicação foi centrada na distinção entre matemática escolar, académica e do quotidiano e nas suas relações. Apresentou exemplos da prática docente reveladores de distanciamento, ou pontos de tensão, provocados pela presença simultânea das múltiplas acções do quotidiano de cada aluno. Estes factos, em sala de aula, permitiram a ampliação da compreensão dos conceitos por parte dos alunos. Nas considerações finais, Maria Manuela David ressaltou a importância da teoria da actividade para a análise das situações apresentadas e deixou o incentivo para ser dada continuidade à investigação e caracterizar a matemática escolar e as suas relações com a académica e a do quotidiano.

Na tarde do dia 7, no painel plenário, foi divulgado o Projecto IMLNA — Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra, recentemente concluído. Este projecto, bastante amplo, envolveu a Universidade de Lisboa e a Universidade da Beira Interior. A sua apresentação permitiu dar a conhecer, pelas vozes de alguns membros da equipa, os

objectivos e os principais resultados obtidos. Neste espaço foram também divulgados os materiais produzidos no âmbito do projecto.

No final da tarde, Joana Brocardo da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal apresentou a conferência plenária intitulada *Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: começando no 1.º ano e continuando até ao 12.º ano*. Na conferência foi salientada a importância do desenvolvimento do cálculo mental não só ao longo do ensino básico mas também durante o ensino secundário. Foram destacadas três formas de cálculo (mental, algorítmico e por estimação) e apresentadas três fases implícitas ao desenvolvimento do cálculo mental com exemplos concretos. Foi ainda destacada a importância dos contextos para ancorar um conjunto de factos numéricos. Joana Brocardo recomendou que os professores, independentemente do ciclo de ensino, devem propor tarefas focadas intencionalmente no desenvolvimento do cálculo mental. Por fim, deixou as propostas: de se considerarem três categorias de cálculo mental, de se definirem objectivos a atingir ao nível do cálculo mental para alguns anos de escolaridade, finais de ciclos e ensino secundário e ainda exemplos da evolução das relações que devem suportar o desenvolvimento do cálculo mental.

No dia 8, após algumas comunicações distribuídas pelos vários simpósios, Rosa Antónia Tomás Ferreira, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP, presenteou-nos com a conferência plenária intitulada *Perguntar, ouvir e responder: uma experiência de formação inicial*. Esta apresentação esteve sustentada na sua tese de doutoramento, acerca da prática profissional de professores, onde procurou descrever os modos de ensino de quatro professores estagiários. Rosa Antónia Ferreira evidenciou os principais aspectos presentes neste trabalho, nomeadamente, as ideias que apoiaram a revisão da literatura, tendo, em particular, distinguido o perguntar,

o ouvir e o responder nos padrões tradicionais e nos padrões de inquirição. Descreveu depois um caso com os diferentes factores (formação, entusiasmo e compromisso para com a profissão) que influenciaram os modos de ensino, suas evoluções e recuos. Por fim, apresentou as limitações do estudo e implicações que podem servir de incentivo a futuros estudos.

Relativamente aos simpósios de comunicações, que decorreram durante os dois dias, apresento de seguida, de uma forma sucinta, os aspectos considerados mais relevantes pelos moderadores de cada simpósio.

O simpósio 1, *Ensino e Aprendizagem dos Números e Álgebra*, pelo grande número de comunicações foi dividido em dois: 1A e 1B. O simpósio 1A, moderado por Hélia Oliveira, contemplou onze comunicações focadas nos diferentes níveis de ensino. As comunicações do ensino básico incidiram no pensamento algébrico, na natureza das tarefas, na tecnologia, nas representações, nas estratégias dos alunos e na formação inicial de professores; as do ensino secundário e universitário focaram-se nas estratégias e dificuldades dos alunos, nas representações e nas descontinuidades entre estes dois níveis de ensino. No simpósio 1B, moderado por Ema Mamede, as comunicações foram centradas no cálculo mental, no raciocínio matemático, no desenvolvimento do sentido de operação, na compreensão dos números racionais, no conhecimento matemático dos professores e na relevância da diversidade de modelos na construção de conceitos matemáticos. Neste simpósio surgiram algumas questões acerca do papel que assumem os modelos de representação na construção do conceito de número racional, acerca da comunicação na aula de matemática no sentido de desenvolver o rigor de linguagem, o questionamento e a justificação e ainda a questão da importância dos modelos matemáticos na construção de conceitos.

No simpósio 2, *Ensino e Aprendizagem da Geometria*, moderado por Margarida Rodrigues e Marisa Bernardo, foi conseguida uma boa discussão que articulou as questões problemáticas das várias comunicações. Os tópicos mais discutidos foram: capacidades de visualização espacial, representações 3D e 2D, dificuldades conceptuais, conhecimento em Geometria de futuros professores, desenvolvimento do pensamento geométrico, conexão entre o conhecimento geométrico e as práticas culturais dos alunos e conexões entre diferentes tópicos da Geometria. Relativamente às questões levantadas, estas prenderam-se com a identificação de dificuldades de interpretação e conceptuais e de estratégias na resolução de tarefas, com o papel da manipulação no desenvolvimento do pensamento geométrico nos diferentes níveis de ensino, a articulação entre a história da Matemática e o ensino da Matemática conducente à mobilização de conceitos matemáticos no processo de medição e a importância dos saberes culturais e dos contextos no ensino e na aprendizagem da Geometria.

*Ensino e Aprendizagem da Estatística e das Probabilidades*, foi o título do simpósio 3, moderado por José António Fernandes e Ana Henriques, e contou com seis comunicações e a exposição de três posters. Das comunicações orais, cinco versaram o tema de Estatística e uma o tema das Probabilidades tendo abrangido vários níveis de escolaridade, desde o 2.º ciclo ao ensino superior. A problemática da maioria das comunicações sobre Estatística incidiu sobre a literacia estatística, algumas cen-

tradas no planeamento estatístico, tendo como preocupação a implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico. A comunicação sobre Probabilidades incidiu sobre a problemática das intuições espontâneas de alunos do 9.º ano. Os resultados dos estudos apresentados contribuíram para a difusão dos resultados de investigação relacionados com as aprendizagens dos alunos tendo em vista o seu aprofundamento.

No simpósio 4, *Avaliação das Aprendizagens em Matemática*, moderado por Leonor Santos, tiveram lugar as três apresentações previstas. Quanto aos tópicos mais discutidos foram: a relação entre avaliação formativa e sumativa, modelo conceptual apresentado sobre práticas avaliativas, critérios de avaliação e práticas conducentes à sua apropriação por parte dos docentes, relações entre o *feedback* escrito, o oral e o tipo de alunos e o professor e os alunos enquanto objectos de estudo.

No Simpósio 5, *Conhecimento e Práticas dos Professores de Matemática*, moderado por Rosa Antónia Ferreira e Nélia Amado, as temáticas principais foram: a formação inicial, a prática e o desenvolvimento profissional. Relativamente à formação inicial, o foco das comunicações foi o estágio e o conhecimento para ensinar Matemática. Na prática profissional, foram abordados: a comunicação em sala de aula e as concepções sobre o Programa de Matemática do Ensino Básico e o conhecimento para ensinar Matemática com tecnologia. No desenvolvimento profissional foi abordada a formação contínua no Brasil e o programa de formação contínua de Matemática em Portugal, salientando características de sucesso. Os contextos de colaboração foram também tratados, com comunicações acerca da auto-formação e colaboração com investigadores/formadores com focos distintos mas frequentemente a partir de questões da prática.

O simpósio 6, *Tecnologias e Recursos no Ensino e Aprendizagem da Matemática*, moderado por Susana Carreira e Hélia Jacinto, acolheu oito comunicações e a exposição de três posters. A predominância de estudos foi em contexto de sala de aula, com a aprendizagem mediada por uma ferramenta tecnológica. Houve uma paleta variada de abordagens teóricas, sobressaindo a génese instrumental, as representações e alguma ênfase na modelação Matemática. Os recursos tecnológicos focados foram: o computador, a calculadora gráfica, *robots*; o Geogebra e a folha de cálculo. Os dois temas curriculares tratados foram a Álgebra (com grande foco) e a Geometria. Quanto às questões e à discussão, estas estiveram centradas essencialmente nos resultados e na componente empírica dos estudos.

No final da tarde do dia 8, o encontro terminou com a divulgação e a oferta de uma publicação do GTI.

Para concluir, considero que o XXII SIEM constituiu um espaço relevante de expressão da comunidade de investigação no campo da Educação Matemática, onde foram divulgados e discutidos trabalhos em curso e outros já concluídos, possibilitando momentos de partilha e de reflexão acerca das várias temáticas, bem como o intercâmbio entre a investigação e a prática.

**Sandra Nobre**

Escola Básica 2, 3 Professor Paula Nogueira, Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa e Bolseira da FCT

# O Problema do ProfMat 2011

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2011 de Lisboa consistiu na resolução do problema *Um Emprego pela Internet*:

*Um anúncio na internet pedia uma pessoa para um trabalho temporário especializado e muito bem pago. Exigia uma boa formação em Matemática e idade entre os 16 e 65 anos inclusive. Numa primeira fase foram selecionados três candidatos e, para desempatar, o responsável da empresa enviou-lhes o seguinte problema:*

*O senhor foi um dos três selecionados na primeira fase. O produto das vossas três idades é 51000. Qual é a soma das idades e porquê?*

*No dia seguinte, cada um deles respondeu explicando corretamente que, só com aquela informação, era impossível deduzir a soma das idades.*

*Consegue o leitor descobrir qual é essa soma?*

Recebemos 46 respostas, 29 das quais corretas. Destas, 5 tinham pequenas incorreções nas justificações. Sobraram 24. Depois, aplicou-se o critério seguinte (simplicidade e clareza) e lá se foram mais 4. Ficaram 20. O primeiro prémio foi para a Sofia Coelho. Eis como ela resolveu o problema.

Fazendo a decomposição de 51000 em fatores primos, obtém-se:

$$51000 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 17$$

Conclui-se que a idade de um candidato tem de ser múltipla de 17, 34 ou 51.

O produto das idades dos outros dois candidatos contém sempre o produto  $5 \times 5 \times 5$ , o que implica que a idade de um deles seja múltipla de 25: 25 ou 50. Sabendo isto, é fácil encontrar todas as combinações possíveis de idades. São cinco:

- A) 17 - 50 - 60
- B) 34 - 25 - 60
- C) 34 - 50 - 30
- D) 51 - 25 - 40
- E) 51 - 50 - 20

Como os candidatos têm «boa formação em Matemática» e chegaram à conclusão que não era possível resolver o problema, isso quer dizer que a idade de cada um aparecia em mais de um dos cinco casos anteriores. Ou seja, nenhum pode ter como idade um número que só apareça uma vez (17, 30, 40 e 20). Por exemplo, se um deles tivesse 17 anos descobriria que as idades dos outros seriam 50 e 60 anos. Podemos então eliminar os casos A, C, D e E.

Resta a hipótese B) 34 - 25 - 60.

Logo a soma das idades é  $34+25+60 = 119$ .

## Curiosidades

A imaginação de alguns concorrentes é sem limites e a eles temos de agradecer o terem tornado mais divertido o trabalho de seleção.

Iva & Nuno Angelino apresentaram a resolução na forma de mensagem de correio eletrónico no «ecrã» de um computador de cartão. E no final comentaram: *Mas a resposta era ainda mais óbvia. Estamos em 2011 (11) e em Setembro (9). Portanto, 119. Tanto raciocínio para quê?*

A resposta do Grupo do Norte (Elvira, Catarina, Carminda, Bernardete & Graça) foi elaborada enquanto bebiam umas Guinness e escrita (um tanto sinuosamente) num «individual» de papel do Irish Pub.

Sandra Neves & Daniel Castanho entregaram uma resolução completa em *powerpoint* e uma resolução simplificada num «Quantos queres», aquelas dobragens em papel que todos nós fizemos quando andávamos na escola primária.

A proposta de resolução de Francisco Estorninho apareceu na forma de uma longa carta cheia de comentários e dirigida à pessoa que tinha colocado o anúncio na Internet.

## Lista de Participantes

*Individuais:* Alexandra Rodrigues, Alice Bárrios, Alice Escaroupa, Álvaro Anjo, Ana Caseiro, Ana Maria Venâncio, Avelino Sousa, Catarina Ferreira, Celina Abar, Cláudia Simãozinho, Eva Costa, Fausto Silva, Francisco Estorninho, Helena Afonso, Henrique Pereira, Idílio Ruivo, Isabel Beatriz, Isabel Leite, Isabel Viana, J. Frias, Joana Miguel, João Madruga, José Artur Pinto, Margarida Duarte, Margarida Silva, M<sup>o</sup> Graça Braga da Cruz, M<sup>o</sup> Manuela Soares, M<sup>o</sup> Madalena Dullius, Patrícia Sampaio, Paula Cristina Gomes, Paula Quartin, Pedro Freitas, Sandra Reis, Sofia Coelho, Sónia Iglioni, Umbelina Marta.

*Em equipa:* Ana Vieira & Inês Alegria; Célia Matos & Dora Vieira; Celina Reduto & Cláudia Martinho; Cristina Marques, Fernanda Santos, Florinda Gaspar & Ilca Cruz; Elvira Mendes, Catarina Gonçalves, Carminda Meireles, Bernardete Silva & Graça Vasconcelos; Emídio Rodrigues & Helena Rocha; Iva & Nuno Angelino; Sandra Neves & Daniel Castanho; Sílvia Semana & Lígia Carvalho; Sónia Santiago & Carlos Pires.

## Premiados e Prémios

Dada a dificuldade em seriar sete das resoluções, os prémios do 2<sup>o</sup> ao 8<sup>o</sup> foram atribuídos por sorteio.

- 1<sup>o</sup> Sofia Coelho [*Unidade TI-Nspire, oferta Texas Instruments*]
- 2<sup>o</sup> Graça Braga da Cruz [*ClassPad Manager, oferta Casio + 1 livro ASA*]
- 3<sup>o</sup> Ana Vieira & Inês Alegria [*Desafios 10, oferta Afrontamento + Ecografias do Porto, oferta Area*]
- 4<sup>o</sup> Cristina Marques, Fernanda Santos, Florinda Gaspar & Ilca Cruz [*Desafios 10, oferta Afrontamento + 1 livro ASA*]
- 5<sup>o</sup> Catarina Ferreira [*3 livros, oferta ASA*]
- 6<sup>o</sup> Ana Maria Venâncio [*2 livros, oferta ASA*]
- 7<sup>o</sup> Ana Caseiro [*2 livros, oferta ASA*]
- 8<sup>o</sup> Sandra Neves & Daniel Castanho [*1 livro, oferta ASA*]

*Nota:* Os prémios devem ser levantados até 30 de Julho de 2012. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa [socio@apm.pt ou 217163690].

José Paulo Viana

Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Lisboa)

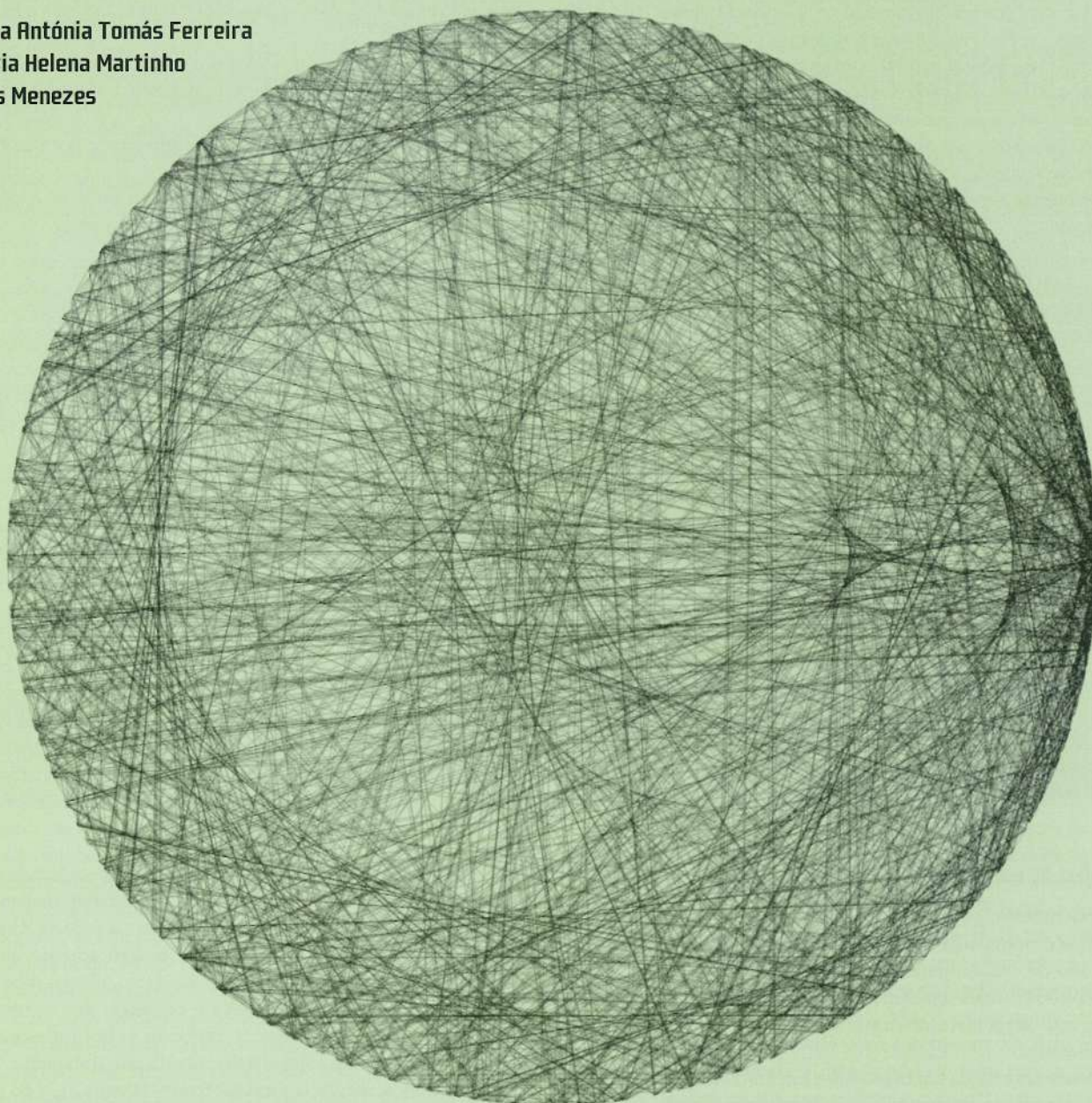


# Teachable Moments: oportunidades a não perder

Rosa Antónia Tomás Ferreira

Maria Helena Martinho

Luís Menezes



O trabalho em torno do papel do professor na comunicação na sala de aula é um imperativo da formação de professores, seja ela inicial ou contínua (Bishop e Goffree, 1986; Brendefur e Frykholm, 2000; Ponte e outros, 2007; Ruthven, Hofmann e Mercer, 2011). De facto, se os alunos aprendem a comunicar, comunicando, os professores também aprendem a gerir a comunicação na sala de aula experienciando e refletindo sobre situações que envolvem desafios vários inerentes a essa vertente do seu papel. Uma das formas mais comuns de concretizar este objetivo consiste, precisamente, na análise e discussão de peque-

nos episódios de sala de aula (Bishop e Goffree, 1986; Ruthven e outros, 2011), como o que apresentamos a seguir (Boavida, 2001, adaptado de Prince, 1998). Neste texto começamos por analisar um episódio ao nível das ações desencadeadas por uma professora e do conhecimento didático que as suporta. Depois, analisamos a forma como futuros professores de Matemática, a iniciarem o seu mestrado profissionalizante entendem o episódio, do ponto de vista matemático e do ponto de vista da gestão da aula. Finalmente, terminamos com algumas questões para a formação de professores que decorrem desta análise.

## A Rita e os números primos

A professora da Rita propôs à sua turma que encontrasse todos os números primos inferiores a 50. Depois de algum tempo de trabalho, a Rita reparou que os números primos maiores do que 5, que tinha identificado até ao momento, terminavam em 1, 3, 7 ou 9. Chamou a professora para lhe mostrar a sua descoberta e esta solicitou-lhe que analisasse com a colega a melhor forma de a comunicarem à turma durante a apresentação colectiva do trabalho realizado. Nesta altura, a Rita escreveu no quadro todos os números primos inferiores a 50 e leu o que tinha escrito no caderno:

Rita: Os números primos menos o 2 e o 5 terminam em 1, 3, 7 ou 9.

A professora propôs, então, à turma que analisasse se aconteceria o mesmo com outros números primos. Os alunos começaram a observar vários casos de números primos, alguns dos quais muito superiores a 100, e não encontraram nenhum que não terminasse em 1, 3, 7 ou 9. Não tardou muito que, convictamente, afirmassem que o que a Rita tinha descoberto era verdadeiro para todos os números primos, independentemente de os terem observado ou não, porque não conseguiam encontrar nenhum que não terminasse nesses algarismos. Nessa altura, a professora escreve no quadro:

Conjetura da Rita: Todos os números primos, excepto 2 e 5, terminam em 1, 3, 7 ou 9.

Certifica-se se os alunos se recordam do significado de conjetura e desafia-os a encontrarem um processo que permita ter a certeza se a conjetura é, de facto, válida para todos os números primos e por que o é.

Os alunos tentam corresponder ao desafio e, no processo, reforçam a convicção de que a conjetura é verdadeira, mas o seu trabalho não progride.

É, então, que a professora, optando por trabalhar com toda a turma, decide escrever no quadro, os números de 0 a 9 e assinala com um círculo 1, 3, 7 e 9. Quase de imediato, começam a surgir várias sugestões:

Maria: «Stora» risque os números 0 e 5. Um número primo maior do que 5 não pode terminar nem em 0 nem em 5.

Professora: Porquê?

Maria: Se terminar em 0 ou 5 é múltiplo de 5 e por isso não era primo.

Daniel: Tem que riscar também o 2, o 4, o 6 e o 8. Se é maior que 2 e é um número primo, não pode ser par!

Bernardo: Pois não. O 2 é divisor...

Professora: E então?

Bernardo: Um número primo só pode ter dois divisores.

Rosa: Pois. Se termina em 2, 4, 6 ou 8 é porque é par e os números pares são múltiplos de 2.

Rita: Só sobram o 1, o 3 o 7 e o 9. Afinal todos os números primos menos o 2 e o 5, terminam da forma que eu descobri. Já temos a certeza.

Inês: Mas o contrário não é verdade. Por exemplo, 21 termina em 1 e não é primo.

Professora: Porque é que 21 não é primo?

Vários alunos: Porque 3 é divisor de 21; 3 vezes 7 é igual a 21.

Bernardo: Tem divisores diferentes de 1 e de 21.

Professora: Então vejam lá se é verdade, ou não, o que eu vou escrever no quadro: todos os números que terminam em 1, 3, 7 ou 9 são primos.

Ouvem-se várias vozes dizendo «não é verdade». Referem 21, 27, 33...

(...)

## Análise de um episódio

Apresentamos o episódio «A Rita e os números primos», que acontece numa aula de Matemática correspondente ao nosso 7.º ano de escolaridade. Em seguida, propomos uma análise do episódio, onde enfatizamos as ações didáticas da professora, nas quais ela mobiliza o seu conhecimento didático da Matemática.

Neste episódio, a tarefa proposta inicialmente pela professora (encontrar todos os números primos inferiores a 50) é fechada e com baixo nível de exigência cognitiva para os alunos a que se destinava. Contudo, a partir de um comentário de uma aluna, no decorrer do episódio, a atuação da professora rapidamente elevou o nível cognitivo da tarefa, transformando um simples exercício (para estes alunos) numa tarefa que envolveu uma prova matemática e a discussão de aspetos de lógica elementar (por exemplo, implicações, implicações recíprocas, exemplos e contraexemplos). Mas, especificamente, o que fez a professora? Quais foram as suas ações instrutivas para dar seguimento à aula? Fazemos, em seguida, uma breve análise das principais decisões tomadas pela professora resultantes da sua reflexão na ação (Schön, 1987), suscitadas pelas contribuições que os alunos foram dando para o discurso da sala de aula.

A primeira decisão da professora, face ao comentário da Rita no decurso da resolução da tarefa, foi *não validar imediatamente a ideia da aluna*, mas remeter a validação para a própria Rita e a sua colega de carteira com o objetivo de, posteriormente, ambas apresentarem a descoberta à turma. De facto, alguns momentos volvidos, a Rita foi ao quadro e começou por escrever a resposta à questão inicialmente proposta pela professora; só depois comunicou aos colegas a descoberta que tinha feito: «Os números primos, menos o 2 e o 5, terminam em 1, 3, 7 ou 9».

A segunda decisão da professora consistiu em *prolongar a tarefa inicial à custa da descoberta da Rita*, desafiando os alunos a verificarem se o que a aluna tinha afirmado seria válido para outros números primos. A reação dos alunos não foi surpreendente: escolheram vários números aleatoriamente (muitos deles de uma ordem de grandeza bastante elevada) e verificaram se o que a Rita afirmara se verificava ou não. Não sendo capazes de encontrar números que contrariassem a ideia da Rita, foi com naturalidade que os alunos aceitaram a veracidade dessa mesma ideia.

Consciente do facto de que o que estava em jogo era a prova ou refutação de uma conjetura, bem como o papel dos exemplos nesse processo, a professora tomou uma terceira decisão, que se veio a mostrar crucial no desenrolar da aula: *escrever no quadro* «Conjetura da Rita: Todos os números primos, excepto 2 e 5,

terminam em 1, 3, 7 ou 9». A escrita no quadro da palavra conjectura não foi irrefletida pois a professora tinha a noção de que esta designação podia não ser familiar a todos os alunos ou não ser entendida por todos de forma correta. Além disso, a forma como a professora formulou a conjectura da Rita tornou inequívoca a abrangência da afirmação da aluna pois não existe informação no episódio sobre se a Rita teria ou não analisado casos de números primos superiores a 50.

A quarta decisão importante da professora consistiu em *discutir com os alunos o significado de conjectura*, ancorando essa discussão na descoberta da Rita e no lançamento dos alunos num processo de prova ou refutação de uma conjectura, envolvendo explicitamente a justificação do seu raciocínio. Este desafio não se mostrou fácil para os alunos e, de facto, eles não conseguiram mais do que reforçar as suas ideias à custa de mais exemplos que, no entanto, nada provavam. Surgiu mais uma decisão marcante da professora: *escrever no quadro todos os algarismos e assinalar com um círculo aqueles que correspondem ao algarismo das unidades de um número primo, segundo a conjectura da Rita (1, 3, 7 e 9)*.

De acordo com o que é relatado no episódio, os alunos parecem ter intuído que o que a professora escrevera no quadro eram as possíveis terminações dos números naturais. E rapidamente começaram um processo de eliminação dos algarismos escritos usando os seus conhecimentos de critérios de divisibilidade. Como acordado, a professora procurou que todas as afirmações dos alunos fossem justificadas, inquirindo os alunos: «Porquê?», «E então?».

A Rita parece ter ficado muito satisfeita ao sentir que se tinha chegado a uma certeza, a certeza de que a sua conjectura era mesmo verdadeira. A Inês rapidamente avançou com outra descoberta: «Mas o contrário não é verdade. Por exemplo, 21 termina em 1 e não é primo». Após se certificar que os alunos compreendiam por que razão 21 não era primo, pois eles avançavam com várias explicações, a professora tomou mais uma decisão fundamental: *escrever no quadro a implicação recíproca da conjectura da Rita*, dando voz ativa à constatação da Inês. E os contraexemplos começaram a surgir, não restando dúvidas aos alunos de que esta nova conjectura não era verdadeira.

Sintetizando, foram vários os momentos em que a intervenção da professora foi decisiva para a qualidade do discurso produzido na aula, elevando consideravelmente o desafio cognitivo da tarefa inicial e envolvendo os alunos em atividade matemática significativa. Importa realçar que toda esta atividade em torno de questões de lógica elementar, mas complexa para estes alunos, não estava planeada, tendo resultado de a professora ter aproveitado um *teachable moment*, ao perceber a potencialidade da afirmação de uma aluna e ao aproveitar essa oportunidade para explorar matematicamente noções bem mais exigentes do que a noção de número primo.

### Conhecimento didático do professor e ações instrucionais

O conhecimento didático do professor é basilar num ensino de qualidade e imprescindível na identificação e aproveitamento didático de um *teachable moment*, como pretendemos ilustrar com o episódio «A Rita e os números primos».

A noção de conhecimento didático não é consensual e muitos autores se têm dedicado a este assunto (Ponte, 1999, no

prelo). Neste texto, entendemos o conhecimento didático do professor como o relativo a aspetos da prática do professor, um conhecimento «essencialmente orientado para a ação» (Ponte, 1999, p. 61), e envolvendo quatro dimensões: conhecimento do currículo, conhecimento da Matemática, conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, e conhecimento dos processos de trabalho em sala de aula (Ponte e Oliveira, 2002).

Apesar da sua marcada orientação para a prática letiva, o conhecimento didático envolve também outros aspetos como o conhecimento do contexto (escola e comunidade, entre outros) e o conhecimento de si mesmo como professor (Ponte, no prelo), tendo um carácter dinâmico, uma vez que as experiências e situações da prática que o professor vai encontrando contribuem para que o seu conhecimento didático se reformule constantemente (Ponte e Santos, 1998). Focamo-nos aqui nas dimensões do conhecimento da Matemática e do conhecimento dos processos de trabalho em sala de aula (ou conhecimento instrucional como é muitas vezes designada esta vertente do conhecimento didático do professor).

Que aspetos do conhecimento didático da professora estão evidentes no episódio «A Rita e os números primos»? Podemos elencar alguns. Por um lado, a professora ouviu efetivamente o que os alunos foram dizendo (em especial, a afirmação inicial da Rita e a conjectura da Inês) e valorizou as contribuições dos alunos como merecedoras de discussão, independentemente da sua veracidade ou rigor na linguagem. Por outro lado, a professora deu aos alunos a responsabilidade do processo de validação e refutação das duas conjecturas, orquestrando a discussão com toda a turma de modo a que houvesse um entendimento comum da noção de conjectura (negociação do significado do conceito), incentivando, através da formulação de perguntas, a justificação das afirmações apresentadas.

Ao longo deste episódio, toda a atuação da professora esteve, certamente, ancorada no seu conhecimento matemático, que lhe permitiu reconhecer um *teachable moment* e aproveitá-lo de forma a levar os alunos a fazer matemática. De facto, e reportando-nos ao *Quadro das tarefas matemáticas*, de Stein e Smith (1998), a tarefa que a professora inicialmente propôs aos alunos era de um nível de exigência cognitiva reduzido (memorização ou procedimentos sem conexões). Mas o reconhecimento de um *teachable moment* iniciado com a conjectura da Rita levou a professora a desencadear uma atividade com toda a turma em torno de uma tarefa, que podemos considerar na categoria de *fazer matemática* (Stein e Smith, 1998), o que aumentou consideravelmente o nível de exigência cognitiva.

### O episódio num contexto de formação

Assumindo a importância de abordar, em contextos de formação, aspetos relativos ao papel do professor na gestão da comunicação matemática na sala de aula, foi proposta a análise do episódio «A Rita e os números primos» a estudantes do 1.º ano de Mestrado em Ensino da Matemática. Os estudantes analisaram este episódio no contexto de uma prova escrita de avaliação, no final da segunda unidade curricular sobre aspetos da Didática da Matemática na qual tinham analisado alguns episódios de sala de aula. De entre as várias questões que orientaram a análise do

Faço a resposta dada pelos alunos à docente deveria elucidá-los que estes tinham mostrado que a afirmação é falsa através da discussão entre todos e fazendo-os compreender que basta fornecer um exemplo que não respeite a afirmação para esta não ser válida. Deveria posteriormente pedir aos alunos para adicionarem a conjectura da Rita com esta última, questionando-os sobre a diferença e a veracidade destas, para conduzir esta tarefa.

Figura 1. Resposta de Júlio à questão [1]

episódio, foram colocadas as seguintes: (1) *Como acha que a professora deveria ter conduzido o discurso após as últimas intervenções dos alunos neste episódio?* e (2) *Considera que a conjectura da Rita está provada?* Por que sim, ou por que não? As respostas obtidas variaram bastante, tanto em termos do grau de compreensão das questões matemáticas subjacentes ao episódio como em termos de opções didáticas para dar seguimento ao episódio. Apresentamos a seguir uma análise dessas respostas usando para isso alguns casos.

Júlio e Pedro são dois jovens alunos do Mestrado em Ensino da Matemática de uma universidade pública, tendo concluído a sua Licenciatura em Matemática na mesma instituição onde continuam a estudar. Na figura 1, apresentamos a sugestão de Júlio para dar seguimento ao episódio da conjectura da Rita.

Júlio evidencia que compreendeu a presença, na situação descrita no episódio, de duas implicações, uma recíproca da outra; além disso, manifesta a importância que dá à identificação e distinção de implicações contrárias e ao papel dos exemplos e contraexemplos na prova e refutação de afirmações.

Pedro, na abordagem à mesma questão, sugere que «a professora deveria fazê-los [aos alunos] notar o significado da implicação na matemática», alertando-os para o facto de que a veracidade de uma implicação não implica necessariamente a veracidade da implicação contrária (Figura 2). Os dois mestrandos revelam sensibilidade para uma questão importante do processo de ensino-aprendizagem da matemática — o desenvolvimento do raciocínio matemático, em particular a formulação, teste e prova ou refutação de conjecturas.

Em relação à segunda questão — saber se a conjectura da Rita fora ou não provada e porquê, Júlio não tem dúvidas nem quanto à veracidade da conjectura da Rita nem quanto ao facto de ela ter sido provada durante a discussão que a professora conduziu. Na sua argumentação, Júlio ressalta a importância de a professora usar os conhecimentos dos alunos para os ajudar na prova da conjectura da Rita (Figura 3).

Pedro responde de forma semelhante a esta questão, explicando todos os passos da prova da conjectura e salientando que «a turma construiu esta prova», o que sugere que compreendeu

~~... mas não é suficiente para afirmar que seja válida, no sentido contrário (contrária), no sentido contrário (contrária) ...~~  
~~... pois se falso, não necessariamente verdadeira.~~

Figura 2. Resposta de Pedro à questão [1]

1.4 Sim, a conjectura está provada, pois ~~os~~ os alunos sabem que todos os números terminam com um algarismo composto entre 0 e 9 e através do critério de divisibilidade conseguiram excluir os algarismos pares e o cinco, restando 1, 3, 7 e 9. Desta forma e através do ~~entendimento~~ entendimento que os alunos possuem foi possível por estes a conjectura da Rita recorrendo à discussão e troca de ideias.

Figura 3. Resposta de Júlio à questão [2]

o modo como a professora conduziu o discurso, não condicionando as respostas dos alunos mas orientando-os apenas nos seus raciocínios.

As respostas de Júlio e Pedro às duas questões apresentadas para a análise do episódio evidenciam: (i) o reconhecimento da situação matemática subjacente ao episódio — em particular, a existência de duas implicações contrárias e de como podem/devem ser provadas/refutadas, — e (ii) opções didáticas que vão ao encontro das recomendações atuais para o ensino da matemática (ME, 2007; NCTM, 2000) — em particular, a relevância das discussões matemáticas entre os alunos como meio para a institucionalização de novo conhecimento (Stein, Engle, Smith e Hughes, 2008). Com as devidas reservas, e em face das respostas de Júlio e Pedro, podemos dizer que ambos revelam um adequado conhecimento matemático e instrucional (Ponte, 1999) na análise do episódio da conjectura da Rita.

Carlos é colega de Júlio e de Pedro, com um percurso académico semelhante. A sua análise do episódio revela bastantes insuficiências, que podem decorrer de uma má interpretação do episódio em si ou ter origem num deficiente conhecimento didático (ao nível das duas dimensões que consideramos neste texto). Na sua resposta à questão (1), Carlos não parece compreender que, no final do episódio, a implicação que estava em discussão era a recíproca da conjectura da Rita (Figura 4). A sugestão dada à professora para pedir explicações aos alunos baseia-se na necessidade que Carlos sente de serem trabalhados mais exemplos de modo a que os alunos expliquem por que razão os números nesses exemplos não são primos — Carlos parece deter-se na importância de os alunos saberem justificar por que um número é ou não primo em vez de se deter na compreensão de conjecturas e implicações recíprocas (evidentemente, a um nível adequado a alunos do 7.º ano de escolaridade) e nos papéis dos exemplos e contraexemplos na prova ou refutação de conjecturas.

Não fica de todo clara a razão por que Carlos sugere à professora para tratar o caso do número 9 — parece que se refere ao momento final do episódio, ao contrário do que escreve imediatamente antes. Carlos não realça a importância de a professora

O professor Após os alunos terem dito que  
 não é verdade, que todos os números primos  
 terminam em 1, 3, 7 e 9, o professor deveria  
 pedir exemplos aos alunos. Alguns usaram  
 exemplos que ~~os alunos~~ ~~o professor~~ ~~deve~~  
 professor deveria pedir ~~exemplos~~ ~~de~~  
 e pô-los a argumentar a motivação pela qual  
 não são primos.  
 Posteriormente pedimos para o facto de 2 não  
 ser primo. Uma vez que ~~deixamos~~ a conjectura  
 de que todos os números terminam em 1, 3, 7 e 9.

Figura 4. Resposta de Carlos à questão [1]

De maneira clara e até disse a conjectura  
 de ritas que todos os números primos são  
 todos os números ímpares excepto os que terminam  
 em 5.

Durante esta, pediram a devida a aula que  
 não é verdadeira, pois 21, 27, 33 são números  
 ímpares que terminam em 1, 7, e 3 e não são  
 primos.

A conjectura da Rita não foi provada, o  
~~que se provou~~ ~~foi~~ ~~o~~ ~~que~~ ~~se~~ ~~provou~~ ~~que~~  
~~os~~ ~~números~~ ~~primos~~ ~~que~~ ~~os~~ ~~números~~ ~~primos~~  
 excepto 2 e 5 terminam em 1, 3, 7, 9,  
 e que ~~se~~ ~~provou~~ ~~foi~~ ~~que~~ ~~os~~ ~~números~~  
 terminam em 1, 3, 7 e 9, nem sempre são primos.

Figura 5. Resposta de Carlos à questão [2]

Na continuação do diálogo levou em primeiro  
 lugar pedir aos alunos que ~~fossem~~  
 referências para a conjectura, tornando-a  
 mais verdadeira ~~do~~ acrescentando as  
 contribuições dos alunos (e/ou diário) e  
 de seguida  
 a professora, poderia chamar a atenção  
 dos alunos para esta questão importante  
 na matemática de diferença entre uma  
 identidade e uma implicação, ~~exemplo~~

Figura 6. Resposta de Fernando à questão [1]

sintetizar as ideias que esteve a trabalhar com os alunos, de  
 forma informal mas com rigor matemático.

Carlos considera duas possíveis interpretações da conjectura  
 da Rita. Por um lado, refere que o que a Rita disse pode ser  
 entendido como: «todos os números primos são todos os que  
 terminam em 1, 3, 7 e 9, excepto o 2 e 5»; por outro lado, a afir-  
 mação da Rita pode ser lida, segundo Carlos, como: «os núme-  
 ros primos excepto o 2 e 5 terminam em 1, 3, 7 ou 9». De facto,  
 é isto que a Rita afirma, pelo que a primeira interpretação de  
 Carlos não tem sustentação no episódio; porém, é precisamente  
 nessa primeira interpretação que Carlos se detém e é essa que  
 ele considera ter sido discutida durante a aula, acrescentando  
 que «na aula só se provou que a primeira interpretação não é  
 válida». Na figura 5 encontra-se a resposta de Carlos à segunda  
 questão que lhe foi colocada, mostrando que não considera que  
 a conjectura da Rita tenha sido provada.

Como vimos atrás, Carlos não interpreta corretamente a  
 conjectura da Rita. Além disso, não entende que os exemplos  
 dados pelos alunos dos números 21, 27 e 33 são exemplos que  
 destroem não a conjectura da Rita mas sim a sua recíproca, isto  
 é, são contraexemplos para a recíproca da conjectura da Rita.  
 Por fim, apesar de permanecer a dúvida sobre se Carlos compre-  
 endeu ou não a conjectura da Rita, a sua resposta à questão  
 sobre a validade desta conjectura sugere que não reconheceu no  
 trabalho conjunto da professora e dos alunos um processo de  
 prova daquela conjectura. Carlos parece apenas valorizar a prova  
 da falsidade da conjectura recíproca da Rita através de exemplos  
 que a contradizem.

Ao contrário dos seus colegas, Carlos evidencia dificuldades

no seu conhecimento didático, tanto ao nível do conhecimento  
 matemático como do instrucional (Ponte, 1999). Na sua aná-  
 lise do episódio, Carlos não mostra dar importância às discus-  
 sões matemáticas nem à síntese das ideias centrais discutidas  
 durante a aula, aspetos muito valorizados nas orientações atuais  
 para o ensino da Matemática (ME, 2007; NCTM, 2000; Stein  
 e outros, 2008). Além disso, a sua imperfeita compreensão da  
 situação descrita no episódio do ponto de vista matemático  
 pode ter-se constituído num obstáculo a tomadas de posição,  
 relacionadas com a dimensão do conhecimento instrucional,  
 adequadas para dar seguimento ao episódio relatado. De facto,  
 como iremos ver a seguir, a um conhecimento matemático  
 pouco consistente está normalmente associado um conheci-  
 mento instrucional enfraquecido.

Embora tenha já alguma experiência de ensino como pro-  
 fessor contratado, Fernando não possui profissionalização pelo  
 que é colega de Júlio, Pedro e Carlos no Mestrado em Ensino  
 da Matemática. Ao sugerir como a professora da Rita deveria  
 dar continuidade ao discurso após as últimas intervenções dos  
 alunos no episódio fornecido, Fernando evidencia várias fragi-  
 lidades em termos do seu conhecimento matemático. Começa  
 por sugerir que a conjectura da Rita não era *completamente* verda-  
 deira porque lhe faltavam as últimas contribuições dos alunos,  
 o que parece indicar que nem compreendeu propriamente qual  
 havia sido a conjectura da Rita; além disso, não utiliza termino-  
 logia correta quando tenta diferenciar *equivalência* de *implicação*  
 (Figura 6).

No entanto, Fernando parece compreender que, de facto,  
 existe uma diferença entre estas duas noções, uma vez que acon-

Num sentido Académico e Formal, contida  
 que a conjectura não está provada, pois  
 não houve a generalização a todos o  
 conjunto dos números naturais, mas  
 apenas a confirmação da conjectura  
 a números que se estendem ao  
 número 50.

Contudo, existe alguma prova  
 existente, pois a análise dos  
 critérios de divisibilidade e a chave  
 para a demonstração de conjectura.

Eu sugiro ~~professora~~ professora,  
 aceitar a prova do aluno.

Figura 7. Resposta de Fernando à questão [2]

selha a professora a «pedir aos alunos que explorassem outras relações de implicação que não são identidades (no sentido de implicação biunívoca)». A terminologia usada, contudo, continua a evidenciar bastantes imprecisões.

A resposta de Fernando à questão (2) sugere que ele não compreendeu o processo de demonstração, usado pelo coletivo da turma (professora e alunos), da conjectura da Rita (Figura 7). Fernando não considera que a prova realizada pelos alunos e professora, em conjunto, seja uma verdadeira prova porque não compreendeu o processo de generalização subjacente, apesar de mostrar ter percebido o papel determinante, na prova realizada, dos critérios de divisibilidade.

Fernando parece ter dois critérios para decidir se a conjectura da Rita está ou não provada. Enquanto aceitaria o que os alunos e a professora fizeram como prova dessa conjectura, argumenta que, em termos formais, não se trata de uma prova por não ter existido generalização. Mais uma vez, o conhecimento matemático de Fernando mostra fragilidades que não têm a ver com a adequabilidade de um argumento matemático ao nível etário dos alunos mas sim com a compreensão de um processo de demonstração.

Uma outra colega de Fernando (e dos outros três alunos), Joana, também ela com alguma experiência letiva (embora menor) e à procura da profissionalização no mestrado que frequenta, evidencia ainda maior confusão na compreensão do que é uma conjectura e do que significa provar uma conjectura (Figura 8). Joana afirma que a conjectura da Rita foi provada apesar de não ser correta! Refere que os alunos apenas testaram alguns casos (o que, apesar de tudo, contribuiu para terem maior certeza do que afirmavam) mas rapidamente confunde as duas implicações em jogo no episódio analisado, misturando a conjectura da Rita com a sua recíproca. A resposta de Joana à questão (2) não deixa dúvidas acerca das suas fragilidades na compreensão de questões de lógica matemática, incluindo o significado de conjectura e de prova.

Não tendo compreendido qual era a conjectura da Rita nem a sua recíproca, não é de estranhar que Joana tenha proposto algumas sugestões para prosseguimento do episódio com pouco sentido. Joana não compreendeu a intenção da professora ao escrever no quadro as duas implicações em causa – a conjectura da Rita e a sua recíproca — interpretando esta ação da profes-

A conjectura de Rita foi provada e não está  
 errada, porque os alunos verificaram para um  
 grande número de números naturais para números pequenos  
 a lei estabelecendo assim um facto de certeza  
 nos seus aspectos e chegando a encontrar  
 números como por exemplo o "21" que  
 apesar de ser esse é não era prova por  
 o 3 e o 7 de 21.

Figura 8. Resposta de Joana à questão [2]

sora como fornecendo aos alunos uma pista para o que estaria certo ou errado (Figura 9).

Tanto Joana como Fernando evidenciam dificuldades no seu conhecimento matemático, talvez ainda mais do que Carlos. Aqueles dois alunos do 1.º ano do Mestrado em Ensino da Matemática, futuros professores, têm um percurso académico diferente dos de Júlio, Pedro e Carlos. Joana e Fernando concluíram as suas licenciaturas há mais tempo que os seus três colegas e as suas licenciaturas não são em Matemática, embora tenham uma forte componente matemática. Poder-se-ia sugerir que esta formação-base distinta da dos colegas pode explicar as diferenças no conhecimento matemático que se tornam evidentes quando os alunos analisam o episódio da conjectura da Rita. No entanto, Carlos, cujo percurso é semelhante ao de Júlio e de Pedro (inclusivamente ao nível da média final de licenciatura, que foi relativamente elevada para os três alunos), também revela fragilidades no seu conhecimento matemático.

## A finalizar

Com os exemplos apresentados percebe-se que, de facto, quando não se compreende matematicamente uma situação, dificilmente se pode tomar decisões adequadas à condução do processo de ensino-aprendizagem. Sublinhe-se em particular, a orquestração de discussões matemáticas produtivas e a síntese de conhecimentos, aspetos muito complexos mas essenciais do papel do professor de Matemática no atual quadro curricular português. De notar que a análise de um episódio de sala de aula transcrito permite a leitura repetida do mesmo, procurando informação, beneficiando de tempo para a compreensão da situação relatada. Tais condições não se verificam em plena sala de aula, em que os professores têm de analisar a situação e reagir adequadamente de forma quase imediata.

A diversidade de interpretações que surgiram da leitura deste episódio mostra o seu potencial para animar uma discussão entre professores e futuros professores em torno da noção de prova. Este tipo de atividade prepara o futuro professor para encarar com mais confiança as discussões em sala de aula em torno de conjecturas, provas, exemplos e contraexemplos.

Questionámo-nos sobre aquilo que a formação pode estar a dar aos futuros professores, desde logo na construção de conce-

A professora pareceu ter dificuldade ao abordar a conjectura "a soma dos inversos dos números primos é maior que 1". Ela disse que não sabia se era verdadeira ou não e pediu para os alunos ajudarem. Ela disse que não sabia se era verdadeira ou não e pediu para os alunos ajudarem. Ela disse que não sabia se era verdadeira ou não e pediu para os alunos ajudarem.

Figura 9. Resposta de Joana à questão [1]

ções sobre a prova. Pedimos também a alguns professores com formação diversificada que respondessem às mesmas questões para termos uma melhor percepção sobre onde poderia residir o problema. Aparentemente, as ambiguidades mantêm-se. Por exemplo, uma professora refere que «parece que a conjectura da Rita está provada porque foram usados argumentos válidos que permitem concluir que a afirmação é válida para todos os números primos excepto o 2 e o 5»; no entanto, mais tarde, parecendo levantar dúvidas sobre a validade da prova, esta mesma professora acrescenta: «a prova em matemática carece de demonstração». Que quererá dizer com isto? Usar-se elementos válidos que permitem concluir a validade de uma afirmação não é exatamente o que uma prova é? Demonstrar não será precisamente convencer o interlocutor com um encadeamento lógico de argumentos válidos?

Por outro lado, os professores ao tentarem responder, em contexto de sala de aula, a diferentes solicitações e preocupações, acabam por entrar frequentemente em contradição. Por vezes, fazem eles próprios aquilo que dizem aos seus alunos que não se faz. Por exemplo, uma outra professora, depois de constatar que a conjectura estava provada, refere que «faltou fazer uma síntese de forma a que todos entendessem, apesar da aluna ter dito «já temos a certeza», devia mostrar que havia números primos com as terminações 1, 3, 7 e 9». Esta preocupação de ilustração do resultado, se é didacticamente compreensível, pode induzir os alunos numa conceção errada de prova, nomeadamente, a confundir prova com exemplificação por casos particulares.

Do nosso ponto de vista, a discussão de situações concretas, a partir de episódios de sala de aula, pode contribuir para uma maior consciencialização dos professores e dos futuros professores acerca das suas conceções, ajudando-os a não perder *teachable moments*, aproveitar as oportunidades que surjam e tornando as discussões matemáticas produtivas e cognitivamente mais ricas.

## Referências

- Bishop, A. J., e Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. Em B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.) *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: Reidel.
- Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, 63, 11–15.

- Brendefur, J., e Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two prospective teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125–153.
- ME (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: DGIDC.
- NCTM (2000) *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. Em J. Tavares, A. Pereira, A. Pedro e H. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação — Actas do XI EIEEM* (pp. 59–72). Porto, Portugal: SPCE.
- Ponte, J. P. (no prelo). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. Em N. Planas (Ed.), *Educación matemática: Teoría, crítica y práctica*. Barcelona: Graó.
- Ponte, J. P., e Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, 7(1), 3–33.
- Ponte, J. P., e Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 11(2), 145–163.
- Ponte, J., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J., Veia, L., e Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 39–74.
- Prince, A. (1998). Prove it! *Mathematics Teacher*, 91(8), 726–728.
- Ruthven, K., Hofmann, R., e Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. Em B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 81–88. Ankara, Turkey: PME.
- Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner: Toward a new design for teaching and learning in the professions*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Stein, M. K., e Smith, M. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research To Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., e Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.

Rosa Antónia Tomás Ferreira

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e EMUP

Maria Helena Martinho

Universidade do Minho e CIEd

Luís Menezes

Escola Superior de Educação de Viseu e ClaDETS

# Classificar (I)

Cristina Loureiro

Quando se pensa em tarefas de geometria é importante ter em conta que faz parte da geometria o trabalho com tipos de problema diferentes que exigem raciocínios também diferentes. Uma ideia interessante é procurar identificar e caracterizar os tipos de raciocínio que são próprios da geometria. Ao fazê-lo estamos a conhecer o que é o raciocínio geométrico, ou seja, como se pensa em geometria. Nestas notas tem sido ilustrado o que pode ser uma impossibilidade, descobrir um exemplo, descobrir todos os exemplos. Na última nota (*Educação e Matemática* n.º 114) foi apresentada uma situação em que eram pedidos todos os exemplos. Descobrir todos e ter a certeza de que não há mais nenhum é diferente de contar quantos são, embora também permita contar quantos são. Quando se descobrirem todos pode ser interessante contá-los, mas isso não é geometria. Já olhar para eles, ver as suas características e organizá-los é próprio da geometria.

Os 16 quadriláteros diferentes que se podem construir num geoplano de 3 por 3 (figura 1) são muito favoráveis para pensar em diferentes organizações por classes, isto é, em diferentes critérios de classificação.

## Exemplos de classificações com critérios diferentes

- Número de ângulos rectos, 4 classes — 4 ângulos rectos; 2 ângulos rectos; 1 ângulo recto; zero ângulos rectos.
- Número de pares de lados paralelos, 3 classes — 2 pares de lados paralelos; 1 par de lados paralelos; sem lados paralelos ou zero pares de lados paralelos.
- Número de pares de lados iguais, 3 classes — 2 pares de lados iguais; 1 par de lados iguais; sem lados iguais ou zero pares de lados paralelos.
- Convexidade, 2 classes — Convexos; Não convexos ou Côncavos.
- Número de eixos de simetria, 4 classes — 4 eixos de simetria; 2 eixos de simetria; 1 eixo de simetria; zero eixos de simetria.

Quando se trabalha com classes, um bom apelo ao raciocínio é pedir mais um exemplar diferente para cada classe. Como neste caso já temos todos os exemplares organizados, podemos pedir o desenvolvimento destas classes para um geoplano de 5 por 5. Fica aqui uma porta aberta para decidir o que são exemplos diferentes pois a posição em que foi desenhado o quadrilátero vai exigir alguma atenção e obrigar a uma análise visual que às vezes não é simples.

Outra ideia de desenvolvimento é sugerir novas classificações. Neste caso deveremos apontar para quadriláteros do geoplano de 5 por 5. Poderão surgir como novos critérios: número de lados iguais; congruência das diagonais.

Para classificar objectos geométricos não é preciso de ter todos, mas sim ter representantes de todas as classes possíveis. Ser capaz de reconhecer todas as classes possíveis também é raciocínio geométrico.

Nesta discussão as classes foram sempre consideradas como separadas, não sendo abordada a ideia de classificação inclusiva.

Cristina Loureiro  
ESE de Lisboa

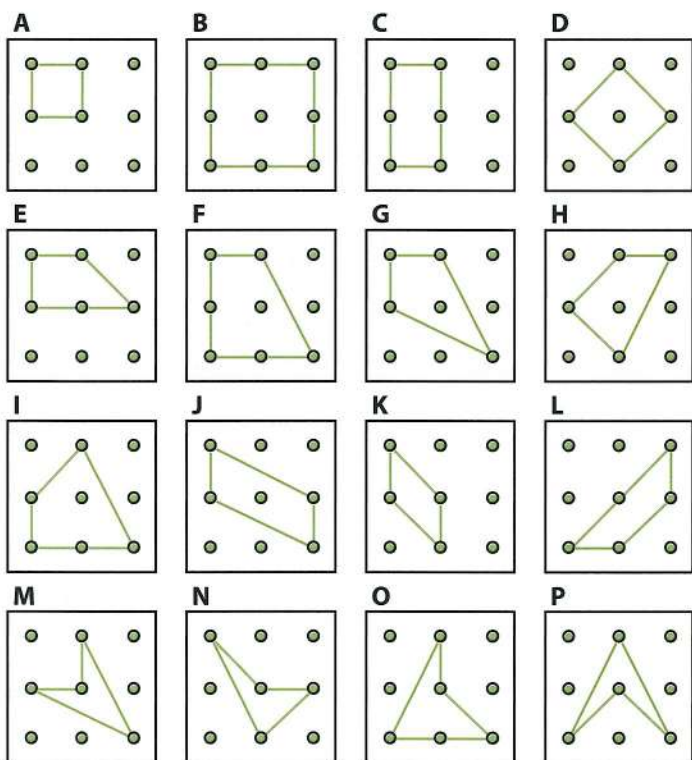
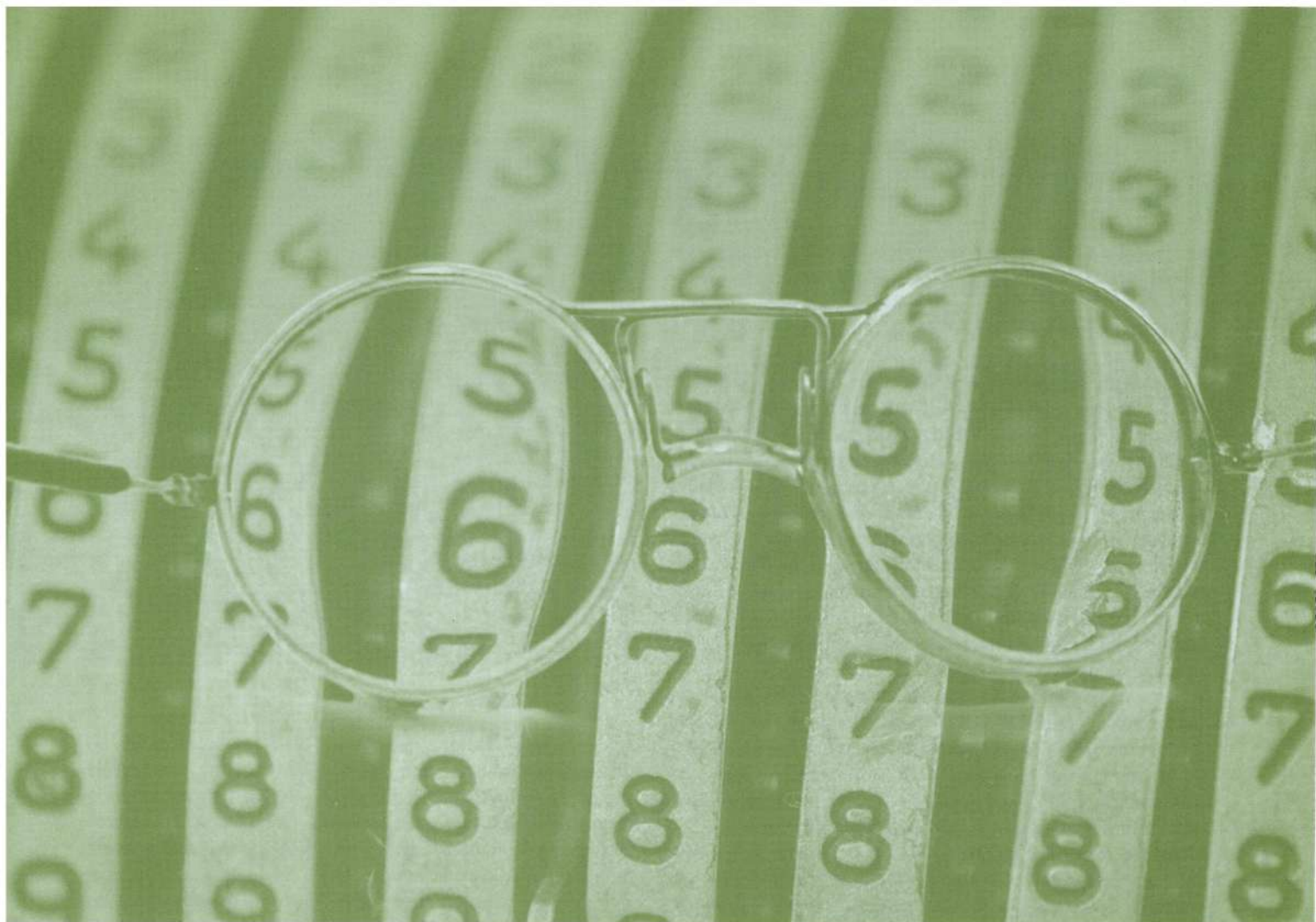


Figura 1





## Uma <lente> para analisar tarefas numéricas

Joana Brocardo

A resolução e discussão de tarefas têm uma importância central na aula de Matemática. Por isso, no trabalho de planificação, o professor tem de se centrar na análise das tarefas. Antes de pensar da sua acção na aula, o professor precisa de seleccionar tarefas analisando as suas potencialidades e a sua adequação ao trabalho que pretende desenvolver com os alunos. Trata-se de uma fase importante da planificação e que poderá determinar muito do que se irá passar na aula de Matemática, ao nível das aprendizagens dos alunos. No entanto, nem sempre é fácil perceber as potencialidades ou limitações de tarefas que o professor nunca usou ou que usou sem reflectir intencionalmente sobre a sua adequação aos propósitos definidos.

Cada vez mais existem recursos diversificados e, sobretudo, um grande número de tarefas que o professor pode seleccionar para usar nas suas aulas. Por isso, é importante desenvolver uma <lente> para analisar tarefas que permita perceber o seu <valor> e decidir sobre a adequação da introdução de pequenas alterações

que permitam construir uma nova tarefa, que pode, potencialmente, estimular mais os alunos a usar um pensamento flexível e a «olhar para os problemas» antes de usar um algoritmo.

A construção desta <lente> assenta numa perspectiva global de desenvolvimento do sentido de número e dá particular relevo ao que Gravemeijer e van Eerde (2009) designam por construção de um sistema de relações numéricas baseado na estrutura decimal dos números e que combina factos numéricos e relações entre números e operações.

Numa primeira fase os alunos operam sobre quantidades e medidas: sabem quanto se paga por 4 bilhetes de cinema que custam 5 euros cada um ou quantas maçãs estão em 4 sacos de 5 maçãs cada um. Progressivamente, começam a operar sobre os números e a estabelecer relações entre eles e entre as operações:  $4 \times 5$  tem sentido em si sem que seja necessário pensar em preços de bilhetes ou número de maçãs; sabe-se que  $4 \times 5 = 5 \times 4$ ; associa-se 20 a  $4 \times 5$  e a  $5 \times 4$  e percebe-se que  $20 \div 5 = 4$  e que

$20 \div 4 = 5$ . Finalmente, os alunos são capazes de estabelecer relações de relações:  $4 \times 50 = 200$  pois  $4 \times 5 = 20$ ;  $2000 \div 4 = 500$  pois  $2000 \div 5 = 400$ ;  $4 \times 55 = 200 + 20$  pois  $4 \times 55 = 4 \times (50 + 5)$ .

Um aspecto central deste sistema de relações numéricas é que ele se constrói com base na dedução de factos relacionados (*derived facts* no original). Um exemplo de como esta dedução pode ser pensada é dado por Kraemer (2011) no esquema seguinte, construído a partir do conhecimento de que  $4 \times 5$  é 20 (figura 1).

Igualmente importante é ter em conta que este sistema de relações deve ser usado na resolução de problemas. A investigação conduzida por Fátima Mendes evidencia a diferença entre conhecer relações entre os números e as operações e conseguir usá-las de forma eficaz na resolução de problemas. No trabalho de investigação que realizou concluiu que, embora os alunos conseguissem, por exemplo, usar a propriedade associativa da multiplicação no caso particular da relação dobro/metade na resolução de cadeias numéricas, tendiam a não o fazer na resolução de problemas de multiplicação que, muitas vezes, envolviam os mesmos valores numéricos que tinham trabalhado nas cadeias (Mendes, Brocardo e Oliveira, 2011).

Neste artigo centro a atenção em algumas tarefas, propondo uma forma de o professor as analisar avaliando se elas poderão, ou não, contribuir para o desenvolvimento do sistema de relações numéricas que caracterizei anteriormente. Ao longo do artigo identifico os traços gerais de uma «lente» para analisar tarefas numéricas focada no desenvolvimento deste tipo de sistema de relações numéricas, aspecto essencial subjacente ao desenvolvimento do sentido de número. Termino com uma pequena reflexão que integra a relevância do papel do professor e que deixa a interrogação da validade desta «lente» para apoiar a acção do professor na aula.

### Chegando à tarefa Comprimidos

No contexto da aprendizagem das relações entre as medidas de tempo hora, dia e semana podem ser colocados vários tipos de tarefas. Uma delas poderá ser a seguinte:

*O Manuel toma um comprimido de 6 em 6 horas e a Ana Carolina toma um comprimido de 8 em 8 horas. Quantos comprimidos toma cada um deles por dia? E por semana?*

O enunciado deste problema está elaborado com algum cuidado do ponto de vista do significado do contexto. A toma de comprimidos de 6 em 6 horas e de 8 em 8 horas, para além de corresponder a um tipo de prescrição médica usual, pode apoiar os raciocínios baseados na manipulação do contexto como os que estabelecem uma relação entre os intervalos de tempo e o número de tomas diárias:

6 horas — 1 comprimido; 12 horas — 1 comprimido;  
18 horas — 1 comprimido, 24 horas — 1 comprimido.

Compare-se esta tarefa com a seguinte «Se dividir 24 maçãs por 6 sacos, com quantas maçãs fica cada saco?». Note-se que nesta última se colocam directamente os valores a manipular (24 e 6) e se usa a palavra «dividir». Pelo contrário, na tarefa inicial, os alunos têm de usar valores que não estão no enunciado

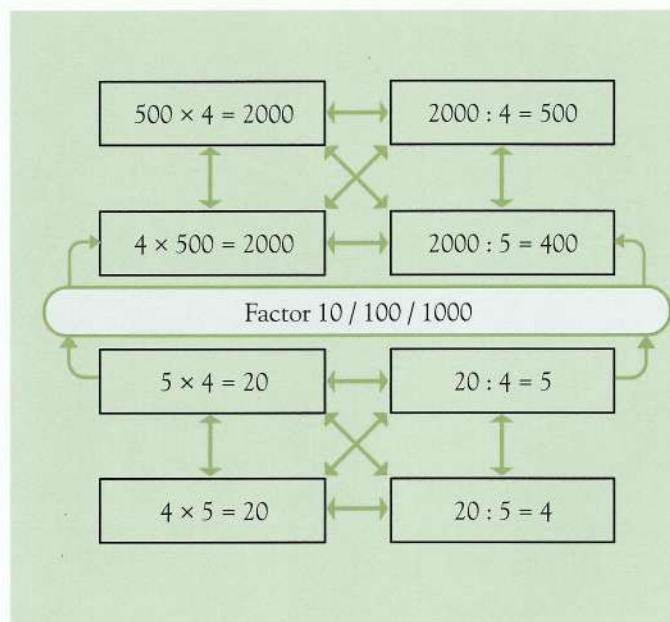


Figura 1

(24 — número de horas que tem um dia e 7 — número de dias de uma semana) e não têm qualquer palavra-chave que lhes dê indicação de uma operação que possam usar para responder à questão colocada. Contudo, também a tarefa inicial é de aplicação directa de procedimentos pois, à parte de se pensar quantas horas tem um dia e quantos dias tem uma semana, exige pensar num número reduzido de relações. Tal como a tarefa dos sacos de maçãs, está apresentada sem qualquer suporte visual o que pode ser pouco facilitador, sobretudo para os alunos com mais dificuldade que, se não percebem a situação, não têm qualquer imagem a que se «agarrar» para começar a interagir com o problema.

Pode argumentar-se que, no problema das maçãs, os alunos poderão desenhá-las. No entanto, passam a resolver a tarefa a um nível muito baixo, fazendo contagens de 1 em 1. No caso da tarefa sobre a toma de comprimidos é mais difícil pensar em representações concretas de intervalos de tempo, pelo que o recurso a um desenho, embora possível, parece mais problemático.

Estas duas tarefas, embora correspondendo a tipos de propostas que os alunos terão necessariamente de resolver para progredir na sua aprendizagem numérica, não correspondem ao que Ainley (2011) designa por tarefas produtivas e Dolk (2009) designa por problemas ricos. Este último autor, numa perspectiva de desenvolver o sentido de número focando a construção de um sistema de números e relações baseado na estrutura decimal dos números, destaca a importância de «usar problemas ricos em que os números e operações surgem de modo natural a partir de um contexto significativo, convidando os alunos a compreender o problema e os números e operações envolvidos» (p. 6).

Esta ideia de Dolk (2009), embora clara, não dá indicações precisas, pelo que pode revelar-se de difícil concretização. No entanto, parece-me ter sido conseguida na tarefa Comprimidos que, tal como a tarefa apresentada inicialmente, tem por

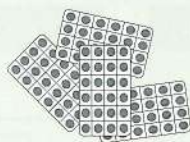
Depois de distribuir a folha do aluno, o professor deve apresentar a seguinte história desafiando os alunos a tentar explicar o comentário de Manuel e a perceber se a afirmação final de Ana Carolina estará correcta:

Manuel conta a Ana Carolina que no sábado passado tinha ido a uma médica, porque estava doente, e que estava a tomar comprimidos de Melhorex: 1 comprimido de 6 em 6 horas. A Ana Carolina riu-se porque há uma semana atrás também tinha ido a uma médica e também começou a tomar um comprimido de Melhorex, só que de 8 em 8 horas. O medicamento e a quantidade eram iguais: 2 caixas de Melhorex de 2 placas de 24 comprimidos cada uma.

— Tomo mais do que tu —, diz o Manuel.

Ana Carolina pensa um pouco e responde hesitante:

— Sim ... mas como .... como comecei antes de ti, se calhar ... parece-me que vamos terminar os comprimidos ao mesmo tempo.



Dr<sup>a</sup> Paula Matoso

Para Ana Carolina Borralho  
1 comprimido de 8 em 8 horas

Dr<sup>a</sup> Paula Matoso

Para Manuel Almeida  
1 comprimido de 6 em 6 horas

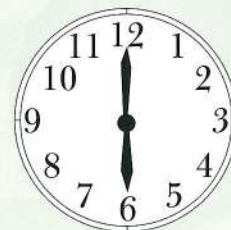


Figura 2

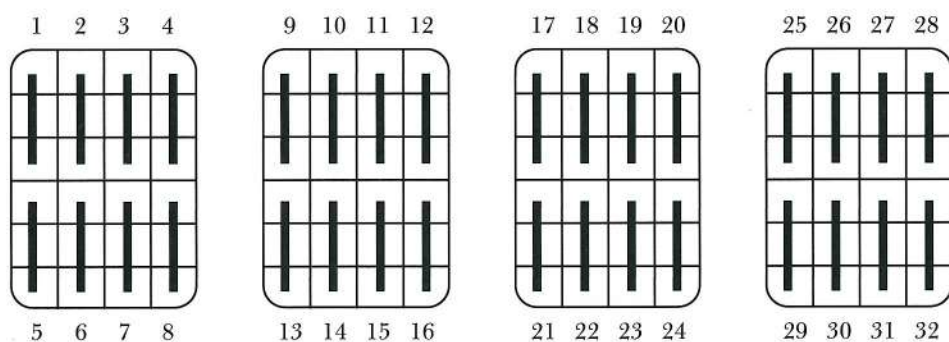


Figura 3. Modo como Francisco, um aluno de 2.º ano, usa as imagens incluídas no enunciado para calcular o número de dias de tratamento de Ana Carolina

contexto uma prescrição de comprimidos. Esta tarefa, construída no âmbito do projecto *Desenvolvendo o sentido de número* (Equipa do projecto DSN, 2005), inclui, na folha para o aluno, um conjunto de imagens ilustrativas da situação (figura 2).

Ao analisar esta tarefa começa por sobressair o «tom intrigante» em que é apresentada que convida a «arregaçar as mangas» e ir verificar se o que Manuel e Ana Carolina afirmam é verdade ou não. Em algumas aulas em que foi usada foi visível o modo como os alunos estiveram atentos à história contada pelo professor e como ficaram interessados em «decidir» se as duas personagens da história terminam o tratamento ao mesmo tempo, ou não, e o que é que Manuel querará dizer ao afirmar «tomo mais do que tu». Em suma, trata-se claramente de uma tarefa que pode potencialmente criar surpresa e suscitar questões.

Um outro aspecto que se destaca é a possibilidade de, ao incluir no seu enunciado as imagens das placas de comprimidos, alunos com diferentes níveis de desenvolvimento a resolverem. De facto, os alunos podem usar as placas para pensar (figura 3) o que, do ponto de vista da aprendizagem numérica, corresponde a promover o uso de um modelo de grupo (na disposição rectangular), mais «sofisticado» que o uso de objectos não agrupados e que constitui um marco importante na progressão ao nível da aprendizagem da multiplicação.

A inclusão de uma imagem com um relógio tinha idêntica intenção: possibilitar o uso do modelo do relógio para pensar na afirmação de Manuel. Contudo, a aplicação da tarefa mostra que os alunos tendem a não recorrer a este apoio. Provavelmente porque os que dele necessitariam (alunos que não conseguem «manipular» mentalmente grupos de horas ou não encontram



Figura 4. O modelo do relógio

uma forma alternativa de registo que permita pensar no problema) precisavam de um modelo mais estilizado, do tipo dos que são habitualmente usados nos manuais ler e marcar as horas (ver figura 4).

No 1.º e no 2.º ciclos a inclusão de determinado tipo de representação gráfica associada a modelos como a que referi anteriormente pode ser decisiva para que um maior número de alunos seja capaz de «manipular» a tarefa e de a resolver autonomamente. Noutros níveis de ensino têm maior relevância outro tipo de representações como as tabelas incompletas, a rectas dupla (um modelo de proporcionalidade) ou o modelo da balança. Note-se que me refiro a representações que nada têm a ver com ilustrações gráficas, habitualmente introduzidas com a ideia, muitas vezes discutível, de tornar mais apelativa a tarefa. Em alguns casos essa ilustração tem mesmo um papel contraproducente ao nível do desenvolvimento da aprendizagem como acontece, por exemplo, se no problema das maçãs, se «ornamentar» o seu enunciado com a imagem de algumas maçãs. Refiro-me, pelo contrário, à integração de «modelos para pensar» ou seja, de esquemas gráficos que podem apoiar produtivamente a exploração da tarefa por parte de um maior número de alunos.

Um aspecto muito importante na análise de uma tarefa diz respeito à diversidade de aspectos que ela relaciona. Tarefas como as duas que inicialmente apresentei são relativamente pobres pois requerem o uso de um procedimento em que se usa directamente a informação disponível. Pelo contrário, na tarefa Comprimidos, a análise da afirmação de Ana Carolina envolve a compreensão de vários aspectos como, por exemplo: quantos comprimidos têm duas caixas, quantos dias dura o tratamento de cada criança, relacionar o número de semanas do tratamento de cada uma com facto de uma delas o ter começado mais cedo, para decidir quem o acaba primeiro. Trata-se de uma rede de aspectos relacionados que faz apelo ao uso, e dá sentido, de diferentes relações numéricas (figura 5).

Este sistema local de relações evidencia uma outra característica das tarefas, essencial quando se tem como objectivo trabalhar o cálculo mental, aspecto de fulcral importância para desenvolver o sentido de número: a escolha intencional dos números a manipular. Uma vez que não se está no «terreno» do uso de algoritmos os valores numéricos escolhidos importam. Por isso, é mais adequado pensar em caixas com 48 ( $2 \times 24$ ) comprimidos do que, por exemplo, em caixas com:

- 32 ( $2 \times 16$ ) comprimidos, pois Ana Carolina não tomaria uma placa num número inteiro de dias;
- 50 ( $2 \times 25$ ) comprimidos, pois tanto Ana Carolina como Manuel não tomariam uma placa num número inteiro de dias.

Finalmente, esta tarefa pode facilmente suscitar outras questões: «E se a prescrição fosse de 12 em 12 horas?», «E se cada caixa tivesse 3 placas»? ... A possibilidade de, no final da exploração de uma tarefa, formular «E se ...?» é igualmente uma característica importante que pode levar ao prolongamento das relações numéricas e que ajuda a desenvolver o hábito de investigar outros aspectos que podem surgir de um mesmo contexto.

Em suma, a análise detalhada desta tarefa evidencia a relevância de cinco aspectos que proponho como «lentes» para analisar as tarefas numéricas: suscitar curiosidade, permitir que diferentes alunos tenham «acesso» à tarefa, permitir estabelecer uma teia de relações numéricas, existir «intencionalidade» nos números envolvidos e favorecer a formulação de novas questões.

### Calcular expressões numéricas

Em todos os manuais se encontram séries de exercícios propondo o cálculo de expressões numéricas. Trata-se de tarefas curtas, destinadas a praticar procedimentos de cálculo e que têm sentido continuar a ser propostas aos alunos. De seguida apresenta-se um exemplo de uma tarefa habitual em manuais de 7.º ano:

Calcula:

- a)  $-2 \times 4 \times 5$
- b)  $6 \times (-2) \times 5$
- c)  $40 \times (-2) \times 5$
- d)  $67 \times (-5) \times 2$

Na resolução deste tipo de tarefas os alunos tendem a resolver uma a seguir à outra, sem se questionarem sobre relações entre elas ou se as podem resolver mentalmente. As mesmas expressões numéricas podem ser usadas na tarefa que passamos a descrever, focada no pensar em relações entre as expressões:

Analisa as seguintes expressões numéricas e propõe uma ordem para as efectuares. Justifica o modo como pensaste.

$$\begin{array}{ll} 67 \times (-5) \times 2 & -2 \times 4 \times 5 \\ 6 \times (-2) \times 5 & 40 \times (-2) \times 5 \end{array}$$

Se preferires podes começar por seleccionar duas expressões que penses poder relacionar e indicar qual é que calcularias em primeiro lugar e porquê.

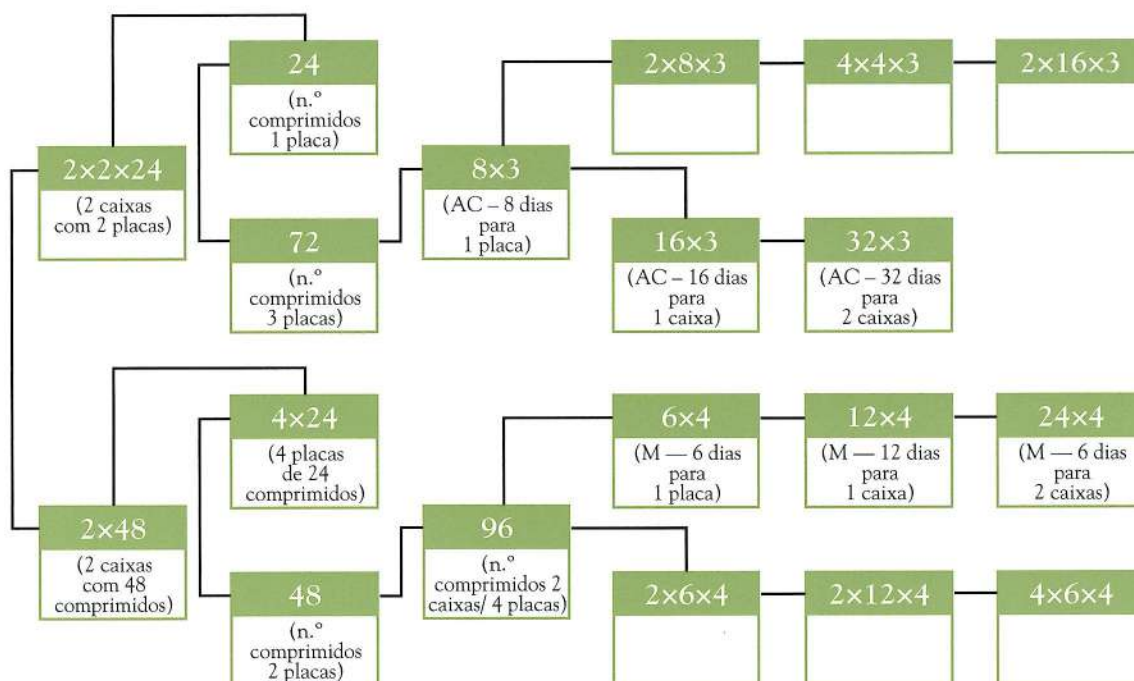


Figura 5

Esta tarefa é um exemplo<sup>[1]</sup> de como uma sucessão de expressões numéricas pode abrir caminhos de exploração de relações numéricas e de aplicação de propriedades das operações. Note-se que nela estão presentes, potencialmente, as cinco características que realcei para a tarefa Comprimidos:

**Suscitar curiosidade.** As situações em que os alunos podem livremente pensar «jogando» com diversas possibilidades tendem a despertar uma vontade de começar a «mexer» nos dados e a pensar. Naturalmente que haverá alunos que preferem resolver exercícios rotineiros, por preferirem a «segurança» de usar procedimentos que dominam. No entanto, potencialmente, esta tarefa tem «ingredientes» para suscitar a curiosidade uma vez que os alunos se podem interrogar sobre o que acontece se escolherem esta ou aquela expressão para iniciar a ordenação das expressões. Também poderão sentir curiosidade de determinar o valor numérico de cada uma (que dificilmente sentiriam na tarefa de cálculo directo do valor de cada expressão), pois ele pode confirmar uma proposta de ordenação.

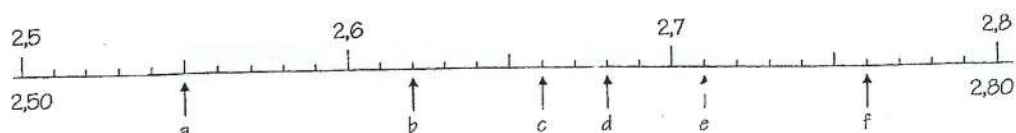
**Permitir que diferentes alunos tenham «acesso» à tarefa.** Nas tarefas com contexto este aspecto traduz-se, habitualmente, na inclusão de modelos que podem ser usados para pensar. Nas tarefas sem contexto, pode recorrer-se, por exemplo, à delimitação dos aspectos a analisar, como se faz com a sugestão de focar a atenção em apenas duas expressões que se pense poderem estar relacionadas.

**Permitir estabelecer uma teia de relações numéricas.** Este é claramente o foco desta tarefa uma vez que se baseia em pensar em relações numéricas que possam ser estabelecidas para justificar uma determinada ordenação.

**Existir «intencionalidade» nos números envolvidos na tarefa.** Esta tarefa foi construída com base na escolha intencional de números que potencializavam o uso de relações que se pretendiam trabalhar. Por isso, se escolheram números cujo produto é 10 (2 e 5), se usa o 4 para se poder relacionar com 40 e o 67 na tentativa que ele possa ser relacionado com 60 e com 7.

A escolha intencional dos números, embora sempre interligada à possibilidade de estabelecer teias de relações numéricas, é particularmente importante quando se pensa numa cadeia de tarefas, planeada para trabalhar determinado tópic. Neste caso, deve ser cuidadosamente analisada a relação entre os valores numéricos usados em cada uma das tarefas, tendo o cuidado de ir explicitamente pensando no modo de evoluir para propostas com números sucessivamente mais «exigentes» do ponto de vista do cálculo mental.

**Favorecer a formulação de novas questões.** Este é um aspecto intrinsecamente presente na tarefa. Para a resolver os alunos têm de se interrogar: *E se pensar em começar pela expressão  $6 \times (-2) \times 5$ ? E se começar pela expressão  $40 \times (-2) \times 5$ ? E se...*



Tarefa transformada [Dolk, 2009, p. 6]

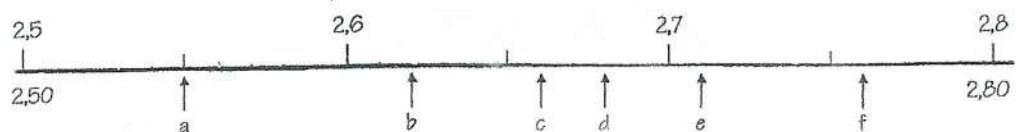


Figura 6. Duas tarefas de localização de pontos na recta numérica

### Localizar números na recta

Dolk (2009) apresenta um exemplo de transformação de uma tarefa usual em manuais que me parece bastante inspirador (figura 6).

Este autor reflecte sobre as potencialidades da nova tarefa a partir das respostas dos alunos, aspecto que poderia igualmente ser considerado para aferir a «lente» de análise de tarefas numéricas que tenho vindo a propor. No entanto, tendo em conta o âmbito que delimito para este texto, saliento apenas que ela convida os alunos a experimentar e a formular novas questões (por exemplo, *E se os valores marcados fossem 2,5, 2,9, 3,3 e 3,7?*), envolve um conjunto de relações numéricas que dizem respeito a números escolhidos intencionalmente e que, com a inclusão de algumas sugestões adicionais (por exemplo, *Depois de saberes que valor corresponde a a pensa em como poderias relacionar c com e*) poderia, igualmente, permitir que um maior número de alunos tivesse «acesso» à tarefa.

### Nada é «à prova» de professor

Tenho vindo a argumentar a favor de olhar para as tarefas numéricas a partir de uma «lente» focada em cinco aspectos: suscitar curiosidade, permitir que diferentes alunos tenham «acesso» à tarefa, permitir estabelecer uma teia de relações numéricas, existir «intencionalidade» nos números envolvidos na tarefa e favorecer a formulação de novas questões.

Considero que estes aspectos têm valor por si próprios e que podem ser produtivamente usados para seleccionar e adaptar tarefas e sequências de tarefas. No entanto, não basta ter tarefas potencialmente ricas. O modo como o professor organiza a sua exploração e discussão é determinante para que os alunos evoluam na sua aprendizagem numérica, desenvolvendo o sentido de número. Como revela o trabalho colaborativo com dois professores em que participou Catarina Delgado no âmbito do seu trabalho de investigação (Delgado, Brocardo e Oliveira, 2011), é preciso acreditar que é possível mudar. E acredita-se depois de incluir na sua prática aspectos com que se está pouco familiarizado, mas que parecem relevantes para a aprendizagem numérica dos alunos, e depois de reflectir sobre eles.

A argumentação para a construção da «lente» que proponho neste artigo foi feita «sem» o professor sabendo que ela não é «à prova» de professor. Ainda assim, considero que os cinco aspectos em que se foca esta «lente» são propostas de reflexão para o

professor não só ao nível da selecção das tarefas como também ao nível da sua exploração na aula.

### Nota

<sup>[1]</sup> Em Brocardo, Delgado e Mendes (2009) a tarefa «Relacionar para calcular» (p. 113), veicula o mesmo tipo de ideia.

### Referências bibliográficas

- Ainley, J. (2011). Developing purposeful mathematical thinking: A curious tale of apple trees In Ulbuz, B. Tzekaki, (Ed.), (2011). *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1 pp 1–16). Ankara, Turkey: PME.
- Brocardo, J., Delgado, C. & Mendes, F. (2009). *Números e operações — 1.º ano. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação (<http://www.dgide.min-edu.pt>).
- Delgado, C., Brocardo, J., Oliveira, H. (2011). Teacher's practice and number sense development in elementary school. In Ulbuz, B. Tzekaki, (Ed.), (2011). *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1 p. 449). Ankara, Turkey: PME.
- Dolk, M. (2009). Looking at numbers: Young children developing number sense. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Eds.) *Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática* (em CD). Vila Real.
- Equipa do projecto DSN (2005). *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares*. Lisboa: APM.
- Gravemeijer, K. P. E., & van Eerde, D. (2009). Design Research as a Means for Building a Knowledge Base for Teachers and Teaching in Mathematics Education. *The Elementary School Journal*, 109(5).
- Kraemer, J.M. (2011). *Como identificar níveis intermédios de pensar, simbolizar e de cálculo mental nas respostas dos alunos do ensino primário?* Apresentação realizado no quadro da formação interna de consultores de avaliação. Cito (Holanda) (não publicada).
- Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2011). Os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução. *Indagatio Didactica*. Universidade de Aveiro: Aveiro.

Nota: Os comentários de Fátima Mendes sobre versões preliminares deste texto foram muito importantes para a sua concretização.

### Joana Brocardo

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal  
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

## A aula de Matemática diferentes perspectivas

Quando se fala na aula de Matemática diferentes são as imagens que nos ocorrem. Nessa diversidade estão os modos de trabalho, as tarefas, as descobertas e os fracassos, as falas e os silêncios. A equipa responsável pelo número temático propôs a um conjunto de colegas o desafio de escrever um depoimento sobre a aula de Matemática e posteriormente reagir comentando os restantes depoimentos.

Assim, foram colocadas diferentes questões para que pudessem servir de ponto de partida: Que matemática na sala de aula? Qual o papel das tarefas e dos recursos na aula? Que metodologias podem ser ou são usadas na aula de Matemática? Como proporcionar uma aprendizagem sobre a (e não apenas da) Matemática ao longo de toda a escolaridade?

Foram ainda colocadas algumas questões a cada autor que se prendem com o trabalho que têm vindo a desenvolver até então. Tal como pretendíamos, os depoimentos refletem a diversidade de olhares para a sala de aula bem como as diferentes interpretações sobre o debate solicitado.

Os depoimentos que se seguem contaram com a participação de diferentes autores, o primeiro em co-autoria, de João Pedro da Ponte e Neusa Brando a quem foi solicitado que se centrassem nas questões relativas à aprendizagem da Álgebra, o segundo de Ana Boavida que procurou centrar-se nas questões da argumentação matemática na sala de aula e o terceiro de Eduardo Veloso que a nosso pedido se centrou nas questões da Geometria e sobre como podem ser alteradas as abordagens da geometria na sala de aula.

A equipa agradece aos quatro, Ana, Eduardo, João Pedro e Neusa a dedicação a este espaço de discussão.

# Argumentação matemática em acção: Contornos e desafios

Ana Maria Roque Boavida

Um dos desafios das actuais reformas curriculares é o de como transformar o ensino que os alunos encontram na escola de modo a que construam sentido para a Matemática e a aprendam com compreensão, o que está significativamente associado à valorização do raciocínio matemático. Esta valorização traz para primeiro plano a necessidade de desenvolverem um hábito de pensamento relacionado com o entendimento do «porquê das coisas», o que torna incontornável o seu envolvimento em actividades de argumentação. Na sala de aula estas actividades não surgem, em geral, sob a forma de um monólogo, mas como uma interacção face a face em que diversas pessoas tentam ajustar interpretações ou posições apresentando razões. Estamos, assim, na presença de *argumentações colectivas* (Krummheuer, 1995) que nem sempre se desenvolvem de maneira harmoniosa, pois podem ocorrer desacordos que conduzem a correcções ou desvios.

Começo por apresentar um episódio ocorrido numa turma do 1.º ano quando se inicia o tópico *Números naturais* para, tendo-o por referência, me centrar em contornos que pode assumir a argumentação colectiva em Matemática, quer se trate, ou não, dos primeiros anos de escolaridade. O episódio está associado à resolução de um problema que visa a identificação de modos de encher uma caixa com 10 bolos que podem ser de dois tipos. Previamente os alunos conversaram entre si sobre o assunto e quando, no início da discussão colectiva, surge a primeira possibilidade de resolução, a professora afixa no quadro uma tabela em que regista (tabela 1).

Areias	Biscoitos de canela
5	5

Tabela 1

## Episódio A caixa de bolos<sup>[1]</sup>

1. P.: Alguém tem uma ideia diferente? Só posso mandar 10 bolos!
  2. M.: Podem ser 8 areias e 2 biscoitos.
  3. P.: Porque é que pensas que essa é uma maneira de mandar os bolos?
  4. M.: Pus os dedos todos no ar. São 10. Para ter 8 baixo 2 e quando levanto estes 2 com os outros 8 são 10 ao todo (*faz gestos ilustrativos*).
  5. P.: Temos de acrescentar isso na tabela. Já temos duas maneiras.
  6. R.: Também pode mandar para a sua irmã 7 areias e 3 biscoitos.
  7. P.: Como é que sabes que assim há 10 bolos?
  8. R.: A Maria disse que 8 e 2 são 10 e pensei que podia usar 7 e 3. Estão perto do 8 e do 2 e funcionam!
  9. P.: Tens a certeza?
  10. R. (*sorrindo*): Já sabia que ia perguntar isso e teste! Disse 7 e (*põe 3 dedos no ar, um de cada vez*) 8, 9, 10!
  11. T.: Eu também tenho a certeza mas não contei.
  12. P.: Então?
  13. T.: 7 mais 1 é 8 e 2 mais 1 é 3. Fica o mesmo.
  14. A.: Porque é sabes que assim fica o mesmo!?
  15. T.: 8 mais 2 é 10 e 8 é 7 mais 1, não é? Então 8 mais 2 é o mesmo que 7 mais 1 mais 2 que já lá estava. Peguei neste 1 e juntei-o ao 2. Fica 7 mais 3. Só tirei 1 do 8 e acrescentei o 1 a 2. Fica 10 na mesma (*a professora faz registos representativos do raciocínio da aluna*).
- (...)
16. P. Vamos procurar maneiras de mandar os 10 bolos que ainda não estejam na tabela.
  17. L. Também podia mandar 3 areias e 7 biscoitos.
  18. B. Não pode ser. Esses números já lá estão. Têm que ser maneiras diferentes!
  19. P. O L. teve uma ideia para mandar os bolos, mas, como diz o B., os números 3 e 7 já estão na tabela. O que é que acham? (*dirigindo-se à turma*)
  20. L. Mas são caixas diferentes!
  21. C. Pois são. As areias são melhores do que os biscoitos.
  22. P. Estão a querer dizer que encher a caixa com 3 areias e 7 biscoitos é diferente de a encher com 7 areias e 3 biscoitos?
  23. L. Sim. Uma tem mais areias e a outra tem mais biscoitos. Eu gostava mais de receber a dos 7 biscoitos.



24. B. Ah! Pois é... O número de bolos é o mesmo, mas numa caixa há mais biscoitos do que areias e na outra é o contrário.  
(...)
25. P. Bem, na tabela já temos 8 e 2 e mais à frente 2 e 8. São quantidades diferentes, se não pensarmos em bolos de areia e em biscoitos?
26. D. Não. São sempre dez, mas os números estão em lugares diferentes. Trocaram de lugares!
27. P. Ah, então podemos trocar a posição dos números e ainda continuar a ter 10? (os alunos acenam afirmativamente). Será que isto funciona sempre?  
(...)
28. J. Já temos todas as maneiras?
29. P. Humm... Trabalhem com o colega do lado e pensem se já temos todas as maneiras possíveis de encher a caixa com os 10 bolos. Vou distribuir cubos de encaixe de duas cores para vos ajudar.

Encontramos no episódio várias evidências de que os alunos se envolveram em actividades de argumentação matemática. Antes de mais, a conversação que ocorreu serviu-se sobretudo da linguagem natural como utensílio de comunicação. A grande maioria das argumentações em Matemática utiliza este tipo de linguagem, o que significa que argumentação é uma actividade essencialmente discursiva (Pedemonte, 2002). Esta característica não impede o recurso a elementos não discursivos adaptados às necessidades do campo em que a argumentação se desenvolve. No episódio observa-se o uso de alguns destes elementos: gestos (§ 4 e 10), registos numéricos e tabela. No entanto, nem toda a actividade discursiva em Matemática constitui um discurso argumentativo. Este discurso pode ser, por exemplo, descritivo.

Além disso, os alunos não se limitaram a partilhar resultados. Pensaram logicamente sobre os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos, de modo a conseguirem determinar possíveis combinações dos bolos. O discurso argumentativo é um discurso conectado logicamente, embora não seja necessariamente dedutivo. Em particular, a argumentação que conduz à formulação e fortalecimento de conjecturas decorre, muito frequentemente, de raciocínios plausíveis que, pela sua própria natureza, são provisórios e podem ser objecto de contestação.

Ademais, verificamos que foi comum os alunos fundamentarem as suas ideias indicando razões destinadas a mostrar a sua lógica, verdade ou falsidade (ex. § 10, 15 e 23), ou seja, apresentaram justificações. A função justificativa é, precisamente, a função primeira da argumentação havendo autores que consideram que as outras funções que lhe são atribuídas são, de certa maneira, secundárias e parasitas do papel justificativo que é o primordial (Toulmin, 1993). A argumentação em Matemática é, assim, uma justificação racional. «O carácter justificativo exprime-se na sua forma: o raciocínio. A racionalidade diz respeito à inferência que liga a sequência de proposições de um raciocínio» (Pedemonte, 2002, p. 29). Tal como a argumentação, também a prova matemática é uma justificação racional e, portanto, pode considerar-se uma argumentação particular, embora as suas características sejam demasiado específicas para que se possam generalizar a toda a argumentação. Com efeito,

esta apresenta uma gama de possibilidades de raciocínio mais ampla do que a prova: não apenas dedução, mas também, por exemplo, indução, analogias, metáforas e argumentos empíricos em que se recorre, nomeadamente a medições ou dobragens.

Durante o ensino é difícil e não necessariamente frutuoso, distinguir se uma intervenção visa justificar ou, antes, explicar um raciocínio. Requer que se considerem as razões que estão subjacentes ao que se diz e faz. Está-se na presença de uma explicação quando o que se pretende é tornar inteligível para outros o que se pensou (ex. § 4 e 8). Há autores que enquadram nas actividades de argumentação raciocínios tanto de carácter explicativo como justificativo (ex. Whitenack & Yakel, 2002). Como o episódio ilustra, numa argumentação colectiva as justificações surgem frequentemente entrelaçadas com explicações. Assim, embora retendo que a função principal da argumentação em Matemática é a justificação, considero mais promissor não excluir daí raciocínios explicativos que permitam entender uma ideia cujo valor ou verdade se pretende mostrar, embora considere que estes têm uma função secundária relativamente aos justificativos.

O episódio permite, também, destacar que houve intervenções cuja intencionalidade foi levar os participantes na discussão a aderirem a certas ideias ou posições através da apresentação de razões (ex. § 15, 18, 21 e 23). Obter a adesão daqueles que quem argumenta quer influenciar através da argumentação, ou seja do que Perelman (1993) designa por *auditório*, é uma das características essenciais da argumentação. É em função de um auditório que qualquer discurso argumentativo se desenvolve, podendo acontecer que este discurso se dirija simultânea ou sucessivamente a diversos auditórios. Por exemplo, pode considerar-se que a intervenção de L. (§ 23) tem por auditório a professora, uma vez que decorre de uma interpelação que esta lhe dirigiu e, concomitantemente, a turma, na medida em que visa influenciar os colegas a considerarem legítima a proposta que apresentou. Neste âmbito, importa sublinhar que o valor de uma argumentação não pode ser avaliado apenas através do efeito obtido, pois depende também da qualidade do auditório que lhe adere. O professor tem aqui um papel decisivo, pois, na sala de aula, é o representante da comunidade matemática. Estas considerações remetem para o carácter situado e social da argumentação e para a importância de ter em conta o outro no decurso das actividades argumentativas.

Constatamos, ainda, que um dos alunos apresentou e fundamentou uma ideia (§ 18) que foi rebatida pelos colegas, até o seu autor ficar convencido do porquê da sua incorrecção (§ 24). Esta situação permite sublinhar que a argumentação em Matemática tem um carácter dialéctico, no sentido em que embora não conduza necessariamente a conclusões verdadeiras, parte daquilo que quem argumenta crê ser verdadeiro (Pedemonte, 2002). Argumentar em Matemática é convencer, um conceito que implica o recurso à racionalidade. É essencial procurar obter a adesão apelando à razão, caminhando, simultaneamente, no sentido da procura da verdade dos enunciados, dada a própria natureza da Matemática. Neste âmbito, o auditório da argumentação, seja ele a comunidade matemática, a turma ou até aquele que argumenta, deve ser entendido como um auditório racional no sentido em que pode, ou não, concordar com o que ouve mas que, em qualquer caso, está apto a responder.

Se observamos o episódio por outro prisma, sobressai que o papel da professora foi essencial para que os alunos argumentassem matematicamente. Escolheu uma tarefa com várias soluções, que pode ser resolvida usando diferentes estratégias e que se foca em ideias matemáticas significativas relacionadas, neste caso, com o sentido de número. Incentivou, persistentemente, a apresentação de explicações e justificações e a reacção de R. (§ 10) é indiciadora de que esta é uma atitude sistemática. Colocou questões desafiadoras do pensamento (ex. § 25 e 27) e criou aberturas no discurso para que fosse explicada uma estratégia diferente de outra já apresentada (§ 12), o que possibilitou que a sua autora construísse um argumento matemático mais forte (§ 15) e que os colegas pudessem entender uma nova forma de lidar com a questão. Perante a emergência de um desacordo (§ 17 a 24), desencadeou a sua exploração, remetendo para a turma a análise das posições em confronto de modo a que os alunos chegassem a um consenso fundamentado. Por fim, em vez de responder negativamente à questão de J. (§ 28), que surge numa altura em que só tinham sido indicadas algumas das combinações de bolos, criou uma oportunidade para que os alunos pensassem mais profundamente sobre o problema (§29). A discussão subsequente permitiu, não só que estes encontrassem as restantes, mas também que justificassem porque é que tinham a certeza de ter descoberto todas as decomposições de 10.

Ensinar a argumentar em Matemática é um empreendimento muito complexo que requer esforços explícitos do professor. Passa, em particular, por criar condições para os alunos aprenderem que o raciocínio é a fonte primeira de legitimação de asserções, para se sentirem confortáveis a partilhar ideias emergentes e titubeantes, para entenderem o valor da expressão audível e da escuta atenta e para se comprometerem com a análise crítica e fundamentada dos próprios raciocínios e dos de outrem. Como caminhar neste sentido? Que aspectos são decisivos? Como lidar com situações que em o conjunto dos alunos da turma chega a consensos que entram em conflito com saberes reconhecidos como matematicamente válidos, sem que ocorram transgressões a normas reguladoras de uma *cultura de argumentação* (Boavida, 2005)? Que cuidados ter para ajudar

um aluno, cujas ideias foram questionadas, a entender que o que é posto em causa são essas ideias e não a sua capacidade para fazer Matemática? Como promover o envolvimento dos alunos na apresentação e defesa de argumentos que, do seu ponto de vista, validam as ideias que enunciam e assegurar o carácter matemático de tais práticas argumentativas? A estas questões várias outras se poderiam acrescentar. Discuti-las é essencial para se avançar na compreensão de como encontrar caminhos para os alunos desenvolverem a sua capacidade de argumentação, entendida, simultaneamente, como a capacidade de dialogar, de raciocinar, de optar e de se comprometer.

#### Nota

<sup>[1]</sup> Episódio adaptado de Schultz-Ferrel, K., Hammond, B., Robles, J. & O'Connell, S. (2007). *Introduction to Reasoning and Proof, Grades PreK-2*. Portsmouth: Heinemann. No início de cada intervenção, a letra P significa Professora e as restantes correspondem às iniciais do nome dos alunos.

#### Referências

- Boavida, A.M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Lisboa: APM.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. Em P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NY: Erlbaum.
- Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Genova: Université Joseph Fourier-Grenoble I/ Université de Genova.
- Perelman, C. (1993). *O império retórico: Retórica e argumentação*. Porto: Edições ASA.
- Toulmin, S. (1993). *Les usages de l'argumentation*. Paris: PUF.
- Whitenack, J. & Yackel, E. (2002) Making mathematical arguments in the primary grades: The importance of explaining and justifying ideas. *Teaching Children Mathematics*, 8 (9), 524–527.

Ana Maria Roque Boavida

Escola Superior de Educação/ IPSetúbal, UIDEF-IEUL

## Desenvolvendo a linguagem algébrica

João Pedro da Ponte

Neusa Branco

A Álgebra constitui um importante tema do programa de Matemática. Durante muito tempo o seu ensino esteve centrado na manipulação simbólica, causando as maiores dificuldades aos alunos. Kaput (2008) fala mesmo do «*algebra problem*», e, para o resolver, gerou-se um movimento tendo como ideia central o desenvolvimento do pensamento algébrico, envolvendo facetas como a generalização, a simbolização, o estudo de relações entre objetos matemáticos, a variação e a modelação (NCTM, 2007).

Nas aulas de Álgebra são fundamentais as tarefas, os modos de trabalho, o discurso e os papéis do professor e dos alunos. Em muitas aulas de Álgebra os alunos resolvem apenas exercícios e, em alguns casos, um ou outro problema. Mas, para além de exercícios e problemas, o professor precisa também de propor outras tarefas como explorações e investigações (Ponte, 2005), que constituem um terreno favorável à construção de novos conceitos e ao desenvolvimento de modos de representação e do raciocínio matemático. Muitas vezes, ao lado das representa-

ções formais ou até antes delas, há vantagem que os alunos trabalhem com representações informais, como notações criadas pelos próprios alunos (Sutherland, 2004). Estreitamente ligadas às representações estão os materiais usados, que determinam em grande medida as representações admissíveis, incluindo materiais manipuláveis, novas tecnologias, etc.

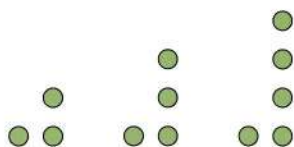
No que respeita a modos de trabalho, registemos a possibilidade de trabalho colectivo, com o professor a interagir com todos os alunos, do trabalho em grupo e a pares, tendo em vista proporcionar aos alunos a possibilidade de partilha de estratégias e representações e esclarecimento de dificuldades e, também o trabalho individual, visando desenvolver a capacidade de concentração e reflexão do aluno.

Uma aula de cunho exploratório/investigativo estrutura-se usualmente segundo três fases (Ponte, 2005): (i) apresentação e interpretação da tarefa (em colectivo); (ii) desenvolvimento do trabalho pelos alunos (em grupos, pares ou individual); e (iii) discussão e síntese final (em colectivo). Note-se que o discurso da sala de aula é *unívoco*, quando é dominado pelo professor, ou *dialógico*, quando a contribuição dos alunos é fortemente valorizada. As tarefas exploratórias/investigativas possibilitam o surgimento de diferentes estratégias que, muitas vezes, começam com tentativas que progressivamente permitem identificar relações e estabelecer generalizações. O surgimento de uma diversidade de abordagens por parte dos alunos cria uma excelente oportunidade para o desenvolvimento do conhecimento na sala de aula. Bishop e Goffree (1986) indicam que a discussão é a ocasião mais apropriada para que sejam expostas conexões e significados, mostrando como as ideias matemáticas são naturalmente interligadas e como podem descrever situações reais. Os momentos de discussão, com o contributo dos alunos, constituem oportunidades para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento.

Usualmente, é papel do professor propor as tarefas a realizar, estabelecer os modos de trabalho na sala de aula e dirigir o discurso e papel do aluno ao trabalhar nas tarefas que lhes são propostas. Mas um papel muito importante na sala de aula é o de *autoridade matemática*. Quem o exerce? Apenas o professor e o manual ou também os alunos? O raciocínio e argumentação dos alunos são considerados uma fonte válida de conhecimento?

Para ilustrar estas ideias, vejamos alguns episódios de uma aula onde os alunos resolvem a seguinte tarefa enquadrada em objectivos de aprendizagem do *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007):<sup>11</sup>

1. Observem a sequência de figuras:



- Desenhem a próxima figura da sequência.
- Desenhem a 7.<sup>a</sup> figura da sequência. Quantas bolas tem a figura?
- Sem desenhar, digam, justificando, quantas bolas tem a figura que ocupa a posição 14 da sequência?

- Escrevam a sequência relativa ao número de bolas que tem cada uma das figuras até à posição 7.
- A que posição corresponde a figura que tem 19 bolas? Expliquem o raciocínio que efetuaram.
- Descrevam como é construída qualquer figura desta sequência.
- Escrevam uma expressão que represente o número de bolas que tem uma figura em qualquer posição.

Trata-se de uma tarefa em que existem questões estruturadas e também questões abertas (como as que pedem para dar justificações ou para fazer generalizações). A regra de formação destas sequências pode surgir da análise de figuras consecutivas ou da identificação da relação entre o número de elementos que constitui uma figura e a sua ordem. É principalmente esta relação que a professora procura explorar.

Os alunos começam por trabalhar aos pares. Passado algum tempo, a professora dá início à discussão colectiva. Na primeira questão, os alunos começam por verificar que podem obter a figura seguinte acrescentando uma bola na vertical à figura anterior. Para obter figuras próximas este processo é adequado. Mas para obter figuras distantes o processo de ir acrescentando sucessivamente um bola não é nada prático. Os alunos rapidamente verificam que o número de bolas da parte que se altera em cada figura está relacionado com a sua ordem. Por isso não precisam de desenhar a sequência até à figura pedida para saber o número total de bolas que a constitui. Conseguem determinar esse número sabendo apenas a sua ordem. Diversas respostas refletem esta generalização, como a de Mariana e Diana, na alínea b):

Se a 10<sup>ª</sup> fig. tem 2 bolas de base e uma em cima, o 13.<sup>ª</sup> como se pode ver tem 2 bolas de base e 2 para cima e o 3.<sup>ª</sup> fig. tem 2 bolas de base e 3 para cima aplico-se o raciocínio para a 13.<sup>ª</sup>

A maior parte dos alunos, faz referência à figura, explicando onde coloca as bolas, Joana e Catarina, na alínea f) são mais sintéticas e sua resposta é um enunciado verbal que apenas considera o número de bolas e evidencia a relação entre este e o número da figura:

A fig. acrescento-se 2 ao nº da fig.

A partir daqui, a professora procura que, com o contributo de toda a turma, se construa uma expressão que represente o número de bolas de uma figura de qualquer ordem. Como os alunos se mostram confusos com o termo de «expressão», surge uma óptima oportunidade para discutir o seu significado.

A professora questiona então os alunos sobre como se pode determinar o número de bolas de uma figura. Susana propõe que a ordem da figura, como é desconhecida, seja representada por um símbolo, um ponto de interrogação:

Susana — Oh stora, já sei. Faz-se dois mais um ponto de interrogação.

Professora — Pode ser. Dois mais um ponto de interrogação. O que é que representa este ponto de interrogação?

Diana — É o número de bolinhas que temos de acrescentar.

Susana — É o numerozinho da figura porque a gente não tem número.

Professora — É o número da figura quando não temos número específico. Portanto, é a figura número ...

Batista — Ponto de interrogação.

Professora — Portanto, a figura número ponto de interrogação, tem quantas bolinhas?

Susana — Duas mais ponto de interrogação.

Os alunos chegam, assim, a uma expressão geral que permite determinar o número de bolas que constitui qualquer figura. De seguida, a professora procura que os alunos percebam que podem usar outros símbolos, adoptando-os de acordo com a situação, com o mesmo significado. Batista, um aluno que frequenta pela segunda vez o 7.º ano, sugere a letra  $x$ . Por sua vez, Susana refere poder usar  $b$ ,  $c$ , ou  $h$ , letras já usadas anteriormente noutros contextos. Por fim, surge a letra  $n$ , como sendo o símbolo que os alunos consideram mais adequado para representar a ordem da figura desconhecida. Assim, nesta situação o uso dos símbolos para representar números (o ponto de interrogação e a letra) surge de um modo natural.

A Álgebra permite conexões com todos os temas, pois em toda Matemática existem estruturas que se podem representar e cujas propriedades se podem estudar com maior ou menor profundidade. Episódios como estes mostram que o trabalho com tarefas de cunho exploratório e investigativo, acompanhado por discussões colectivas onde os alunos apresentam seu trabalho e argumentam uns com os outros, num registo dialógico, constituem importantes situações de aprendizagem, tanto em Álgebra como noutros temas. Para isso é fundamental tanto a tarefa que se propõe como o modo como esta é trabalhada na sala de aula. Na verdade, serve de pouco ter óptimas tarefas, se

depois, em termos de discurso, organização da aula e papéis, não se valoriza adequadamente a participação dos alunos.

#### Nota

[1] Para mais detalhes sobre esta aula ver Branco (2008).

#### Referências

- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: D. Reidel.
- Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa). Disponível no Repositório da UL.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). New York, NY: Routledge.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.
- Sutherland, R. (2004). A toolkit for analysing approaches to algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 73–96). Norwell: Klumer.

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Neusa Branco

Escola Superior de Educação de Santarém e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

## Trabalho de Projecto

Eduardo Veloso

### I

No dia em que comecei a escrever este depoimento, vi logo pela manhã no Diário de Notícias o seguinte grande título:

#### Professores alinham com ministro e pedem exames

A palavra professores referia-se, como é cada vez mais habitual na comunicação social, à SPM. E na contracapa do mesmo jornal aparecia uma entrevista com o presidente da SPM intitulada «As máquinas de calcular não deveriam ser usadas no básico». Nessa entrevista Miguel Abreu explicitava as suas duas medidas mais importantes para «melhorar o ensino da Matemática»: *testes intermédios*, por exemplo no 2.º ano, e *proibição de máquinas de calcular no ensino básico*. Salientava que a utilização das máquinas de calcular «pode depois prejudicar

o ensino secundário e o ensino superior». Como é tradicional nos professores universitários de matemática, uma das suas principais preocupações é garantir que os alunos chegam ao ensino superior suficientemente amestrados no cálculo.

### II

Assim, quando leio a primeira questão na mensagem que me foi enviada — «que matemática na sala de aula?» — surge-me logo uma questão prévia: matemática para quê? para facilitar a vida dos professores do ensino superior? Se assim não é, então não será de reflectir e mudar radicalmente o que temos andado a fazer? Atrevendo-me a um pequeno desvio em relação ao que me é pedido, gastarei os dois pontos seguintes para apontar alguns elementos dessa reflexão. Depois tentarei voltar à questão posta pela equipa deste número temático.

### III

Como estamos em matéria de grandes questões e de respostas radicais, nesta época dita de «transparências», devo dizer que as palavras «sala de aula» me suscitam o desejo de gritar uma palavra de ordem: ABAIXO A SALA DE AULA! VIVA O TRABALHO DE PROJECTO! Como todas as palavras de ordem, não é para tomar à letra, é apenas para assinalar que devemos repensar a educação comum para todos os jovens, e em particular a organização da vida escolar, libertando-as do modelo de produção de trabalhadores do industrialismo do séc. XIX e da escola-fábrica com toques de sirene de 45/90 em 45/90 minutos. Em 1988, a APM disse em Milfontes que o professor tinha que descer do seu estrado, na sala de aula, para se colocar junto dos alunos e transformar os tipos de trabalho que dominavam a sala de aula. Um quarto de século mais tarde, e perante a situação actual, não chega continuar a dizer o mesmo e a detalhar cada vez mais esses modelos. Devemos reflectir melhor sobre os *objectivos de uma experiência matemática prolongada* de todos os alunos na escolaridade obrigatória, e certamente perceberemos que essa experiência irá exigir espaços na escola muito diferentes da sala de aula tradicional: espaços para trabalho individual dos alunos ou em grupo, bibliotecas, salas de computadores, espaços oficinais, etc.

O ponto seguinte apresenta algumas notas sobre esses objectivos.

### IV

A) Exactamente há 25 anos, quando eu frequentava como aluno livre a cadeira de Metodologia da Matemática do Mestrado em Educação Matemática na FCUL, João Pedro da Ponte deu-nos a ler um artigo de um professor inglês que questionava a pertinência das razões que se apresentavam habitualmente para justificar a longa aprendizagem da Matemática no ensino obrigatório — não sermos enganados na mercearia, sabermos quanta alcatifa comprar para forrar o chão da sala, saber se temos dinheiro suficiente para encher de gasolina o depósito do carro e assim por diante. Depois propôs-nos que fizéssemos um trabalho sobre o que pensávamos relativamente aos objectivos de ensino da matemática. Discutimos em pequenos grupos, e lembro-me que o Henrique Guimarães, a Leonor Moreira e eu apresentámos o nosso trabalho tendo como resultado principal a seguinte afirmação (talvez não nestes termos precisos): «a razão pela qual se ensina matemática no ensino obrigatório é a mesma pela qual se ensina (ou deveria ensinar) música». A ideia era a seguinte: tal como uma (desejável mas infelizmente por concretizar) experiência musical prolongada e diversificada no ensino obrigatório não se destinaria a começar a formar músicos, também a experiência matemática não se destina a dar os primeiros passos numa preparação matemática de nível superior e profissional. Ou seja, defendíamos uma prioridade para objectivos de carácter cultural.

B) Em 1990 a equipa do projecto MAT789 (Paulo Abrantes, Leonor Santos, Paula Teixeira, Margarida Silva e eu próprio) — um projecto de desenvolvimeno curricular relativo ao 3.º ciclo, nessa altura já com dois anos de execução — publicou um resumo do Projecto reflectindo a sua experiência de dois anos.

Nesse resumo, a equipa apresenta a *visão da matemática* como um pressuposto essencial do currículo e afirma:

«O Projecto entende que a escola deve, acima de tudo, contribuir para desenvolver a compreensão do papel e da importância da matemática na vida dos alunos e na sociedade (ao longo da história e no presente) (...)».

Assim, de novo são defendidos objectivos de carácter cultural para o ensino da matemática.

C) Em 2001 é publicado o Currículo Nacional, onde se pode ler:

«A razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural, associada ao facto de a matemática constituir uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de aceder ao conhecimento.»

Os pontos A), B) e C) referem-se todos a uma opção bem clara que eu perfilho quanto aos objectivos da experiência matemática que deve ser proporcionada a todos os alunos durante a escolaridade obrigatória (ou seja no ensino básico e secundário). Esses objectivos são de natureza eminentemente cultural e, dada a natureza específica da matemática como ciência, poderão apenas ser prosseguidos através de um longo e diversificado trabalho matemático. Isto implica obviamente a aprendizagem gradual de técnicas básicas nos principais temas da matemática elementar — números, geometria, álgebra — de forma a capacitar os alunos para resolver problemas, fazer investigações matemáticas e desenvolver trabalhos de projecto, sejam de natureza matemática ou interdisciplinar com relevante presença da matemática. Mas a aprendizagem de técnicas *não é em si uma finalidade*, depende dos problemas, das investigações e dos projectos que são propostos aos alunos. Para se compreender bem o que quero dizer dou um exemplo extremo (e mesmo absurdo): se ao longo da escolaridade, nos problemas que encontrou, nas investigações que fez e nos projectos que desenvolveu um aluno não precisou nunca de resolver uma equação do 2.º grau, essa técnica pode nunca ter sido ensinada...

### V

Como é evidente, uma tal opção em relação aos objectivos de ensino da matemática na escolaridade obrigatória teria, a ser escolhida — o que está longe de acontecer, mesmo por parte da comunidade da educação matemática —, fortes implicações relativamente a outras questões centrais da política educativa:

- que estrutura para o programa de matemática? — um programa com listas de tópicos como objectivos, como o actual, seria totalmente inadequado; em particular, as metas publicadas não fariam qualquer sentido;
- o sistema de avaliação actual, baseado fundamentalmente em testes e exames escritos com tempo limitado, teria obrigatoriamente que ser abandonado.

Deixando para outra ocasião a discussão importante destes pontos, prossigo agora o meu depoimento sobre «que matemática ...?», mas agora naturalmente num contexto diferente no que diz respeito aos objectivos.

## VI

Se a experiência matemática dos alunos deve conduzir, ao longo da escolaridade obrigatória, a uma apreciação da natureza da matemática como ciência e do seu papel na nossa sociedade, no passado e no presente, o professor de matemática deve escolher conteúdos matemáticos, nas suas propostas de problemas, investigações e projectos, próprios para essas finalidades. No caso dos projectos interdisciplinares o conteúdo matemático a desenvolver é determinado pelas próprias necessidades do projecto. No caso dos projectos (problemas, investigações) de carácter matemático, essa escolha depende do tipo de conhecimento matemático que os professores adquiriram na sua formação inicial: se o ensino de matemática, nas ESE's e nas Universidades, lhe tiver dado a ele, como aprendiz, apenas factos, técnicas, definições e teoremas e não essa componente histórica e conceptual sobre a própria matemática — como é o caso em geral — ele será incapaz de fazer boas escolhas para os seus alunos.

Vejamus um exemplo. Naturalmente, os diversos tipos de números — naturais, inteiros, racionais, reais — fazem parte da experiência matemática dos alunos. Mas as propostas dos sucessivos professores que os alunos vão ter ao longo da escolaridade apenas poderão colectivamente contribuir para esse tal conhecimento da matemática e dos seus processos se os próprios professores não encararem o trabalho com os números como apenas operacional. Ou seja, se conscientemente, nas suas propostas, tiverem em atenção e como objectivo criar progressivamente nos alunos, como resultado desses tipos diferentes de actividades, esse conhecimento cultural e histórico deste tema dos números e da sua construção histórica ao longo de milénios.

Assim, tal como no caso da construção dos diversos tipos de números, todos os tópicos habituais da matemática elementar — como era de esperar — fazem parte de *percursos temáticos*, cujo conhecimento será imprescindível para os professores do ensino básico e secundário.

Terminarei o meu depoimento apresentando de forma muito breve dois exemplos (pontos VII e VIII) de percursos desse tipo, no domínio da geometria. Deve notar-se que:

- cada um dos percursos descreve, apenas em grandes linhas e de forma indicativa, os conteúdos matemáticos que os professores deveriam aprender na sua formação inicial (ou contínua, para os actuais professores); uma descrição completa de cada um destes percursos (aquilo que poderia constituir um programa de uma cadeira) excede o âmbito deste depoimento;
- cabe aos professores, munidos de um conhecimento sólido relativamente a um dado percurso, e conhecendo bem os seus alunos, transformá-lo didacticamente em projectos (problemas, investigações) próprios; cada professor deve conhecer os produtos relativos a essas propostas relativamente aos alunos que está a receber nesse novo ano ou ciclo (portefólios) e escolher, tendo isso em conta, as suas próprias propostas;

- ao professor do ensino secundário deveria naturalmente competir servir-se da experiência acumulada dos alunos para desenvolver com eles trabalhos de síntese relativos a cada um dos percursos, tentando assim obter os objectivos culturais pretendidos.

## VII. Construções geométricas<sup>[1]</sup>

- As construções geométricas nos *Elementos* de Euclides. Instrumentos e postulados. O significado das três primeiras proposições dos *Elementos*. Necessidade de formalização.
- Os problemas clássicos: duplicação do cubo, trissecção do ângulo, quadratura do círculo (com compasso euclidiano e régua não graduada). «Soluções» não ortodoxas: quadratriz de Hippias de Elis, concóide de Nicomedes, hipérbole (Papo de Alexandria), caracol de Étienne Pascal, cónicas de Menecmo, cissóide de Diocles, espiral de Arquimedes, etc.
- Outras regras do jogo nas construções geométricas: só com o compasso (teorema de Mohr-Mascheroni), só com régua (teorema de Poncelet-Steiner), com régua graduada, com outros instrumentos (esquadro de carpinteiro, trissector de Kempe, etc.)
- Algebrização das construções geométricas. Teoremas da impossibilidade dos três problemas clássicos.

## VIII. Área

- Euclides — comparação de áreas puramente geométricas; composição (por justaposição) e decomposição de polígonos
- Arquimedes — método de descoberta: áreas e volumes por pesagens
- Conexão com os números: do número natural (contagem) ao número racional (medição)
- Toricelli e Cavalieri (discípulos de Galileu) — o método dos indivisíveis
- Roberval — a área da cicloide por indivisíveis
- Kepler — área do círculo
- Teorema de Bolyai-Gerwien — dois polígonos com a mesma área são equidecomponíveis
- Equidecomposições de polígonos com a mesma área: os *puzzles* de Dudeney e outros exemplos
- Definição axiomática de área
- 3.º problema de Hilbert — conjectura: existirá um análogo do teorema de Bolyai-Gerwien no espaço (poliedros e volume)?; sua resposta negativa
- Paradoxo de Banach-Tarski

### Nota

<sup>[1]</sup> Para mais informação, ver Educação & Matemática n.º 100, *Reflexão sobre a Geometria* (I).

Eduardo Veloso

Começo por sublinhar que a ideia de incluir na revista um conjunto de depoimentos comentados sobre a aula de Matemática constitui não só uma proposta interessante, mas também um repto significativo. É que, no 1.º ciclo do ensino básico, não existem «aulas de Matemática», se atribuirmos a esta expressão o significado que, em termos sociais, é dominante: período de 45 ou 90 minutos dedicado ao ensino desta disciplina na escola e que, na maioria das vezes, é assinalado pelo toque da campainha. Além disso, se entendermos a «aula de Matemática» numa perspetiva mais abrangente, considerando-a como um espaço em que o professor e os alunos se encontram, na sala de aula, para trabalhar em Matemática — posição que adoto neste comentário —, há muitas portas de entrada para se pensar este espaço, tanto mais que ele é influenciado por uma enorme multiplicidade de fatores entre os quais há relações complexas.

Esta diversidade conduz a que a aula de Matemática possa ser equacionada a partir de diferentes pontos de vista, como está bem patente nos depoimentos de Eduardo Veloso (EV) e de João Pedro da Ponte e Neusa Branco (JPP&NB) que usam diferentes «lentes» para se debruçar sobre o tema em questão. Se, por um lado, esta diferença acarreta um desafio acrescido para o comentador, pois comentar pressupõe fazer escolhas, por outro, constitui uma mais valia na medida em que contribui para enriquecer e ampliar a visão do que deve ser a aula de Matemática hoje e, por esta via, ajuda a perspetivar o que poderá ser feito para melhorar a qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos.

O depoimento de EV inicia-se uma palavra de ordem que entendi ser escrita em jeito de provocação: «Abaixo a sala de aula! Viva o trabalho de projeto!». Como bem sublinha, as palavras de ordem não se devem interpretar literalmente e a prossecução da leitura do texto revela, a meu ver, isso mesmo: aquilo a que me parece que EV diz não é a uma sala de aula dita tradicional, onde o professor se limita a apresentar uma Matemática «pronta a usar», onde a aprendizagem de técnicas é uma finalidade em si mesma e em que a experiência matemática proporcionada aos alunos exclui a possibilidade de se envolverem na resolução de problemas, na realização de investigações e no desenvolvimento de projetos que, no seu conjunto, façam surgir a necessidade destas técnicas, contribuam para uma compreensão conceptual da Matemática e conduzam os alunos a apreciar a natureza desta ciência e o seu papel na sociedade.

Também eu digo não a uma aula de Matemática assim, seja qual for o ano de escolaridade em que pense. A este propósito, ocorrem-me as palavras de Stewart (1995) quando sublinha que a Matemática não é sobre símbolos e cálculos — que considera serem apenas as ferramentas do ofício —, mas antes sobre ideias, em particular, sobre o modo como diferentes ideias se relacionam entre si, destacando que os problemas são a sua força motriz. Aqui o conceito de problema deve ser entendido em sentido abrangente, ou seja, inclui, outro tipo de tarefas com um grau de desafio elevado.

Adotar esta perspetiva sobre a Matemática conduz a que seja incontornável a necessidade de se criarem, na sala de aula, ambientes de aprendizagem com contornos bem diferentes da «tradicional aula de Matemática» e que penso serem compatí-

veis com o envolvimento dos alunos em qualquer um dos tipos de propostas de trabalho que EV refere (problemas, investigações e projetos); com o que designa por objetivos de caráter cultural; e com o que é preconizado, nomeadamente no Programa de Matemática do Ensino Básico português. Diferentemente do que me parece ser a sua posição, não considero que, em particular, a estrutura deste programa seja desadequada face a estes objetivos.

Um desses ambientes de aprendizagem é o que JPP&NB designam, no seu depoimento, por «aula de cunho exploratório/investigativo». Os episódios apresentados, embora associados à aprendizagem da Álgebra, são reveladores de aspetos a valorizar em qualquer aula de Matemática, como bem destacam os autores. Em particular, evidenciam que a exploração de tarefas que incentivam o raciocínio e a resolução de problemas, concomitantemente com uma discussão coletiva de estratégias de resolução bem orquestrada pelo professor, possibilita que os alunos construam conhecimento matemático novo e atribuam significado aos símbolos que usam para representar noções matemáticas (no caso, a noção de variável).

No depoimento de JPP&NB, há dois aspetos que considero serem merecedores de atenção. O primeiro diz respeito ao facto da Álgebra permitir que se estabeleçam conexões com qualquer outro tema matemático. Esta ideia conduz-me a destacar que, mais do que propor aos alunos tarefas algébricas pré-desenhadas em momentos específicos do ano letivo, o essencial, em particular nos primeiros anos de escolaridade, é que os professores incorporem nas práticas planeadas para ensinar tópicos matemáticos diversos, conversações de caráter algébrico. Estas são conversações que favorecem a aprendizagem de formas de representação de ideias que tornam visíveis as estruturas matemáticas subjacentes, que incentivam os alunos a envolver-se nalguma forma de generalização ou formalização, explicando e justificando os seus modos de pensar, e que promovem a atividade de raciocinar com generalizações. Trata-se, como diz um dos autores de referência sobre esta temática, de infiltrar a Álgebra ao longo de todo o currículo desde o início da escolaridade, de modo a que o raciocínio algébrico se torne um hábito de pensamento para os alunos.

O segundo aspeto prende-se com as discussões coletivas de ideias matemáticas que, tal como JPP&NB, considero poderem constituir importantes momentos de aprendizagem. Quando penso nos contornos destas discussões de modo a serem um meio privilegiado de promover a compreensão conceptual, a palavra que, de imediato, lhes associo é «orquestração». Esta palavra tem ressonâncias com processos de organizar e dirigir um debate, com combinações harmoniosas de sons, com os sons que devem ser ouvidos e o quê ou quem os origina, quando devem ser ouvidos, com que ritmo e dinâmica devem surgir e como se devem articular para o seu conjunto concorrer para um mesmo fim. A orquestração de discussões coletivas pelo professor prende-se com movimentos de ensino que têm ligações próximas com estes significados.

Passará esta orquestração apenas por dar a palavra aos alunos e valorizar, adequadamente, a sua participação? Penso que não. Antes de mais, é essencial que o professor encoraje e apoie

uma participação com certas «qualidades»: é importante, por exemplo, mostrar-lhes que o que espera não é só a partilha das conclusões a que chegam, mas também o compromisso com a explicação, justificação e coerência dos seus raciocínios, com a colocação de questões aos colegas quando estes dizem algo que não entendem e com a avaliação e análise crítica e fundamentada do que ouvem. Além disso, o professor tem que ser capaz de tirar partido dos contributos dos alunos, de modo a dirigir a atividade da aula em direção a questões matemáticas significativas que tenham em conta a sua agenda de ensino. É que conseguir que os alunos expressem publicamente as suas ideias é uma coisa; saber o que fazer com estas ideias é outra bem diferente.

Orquestrar, na sala de aula, uma discussão matemática produtiva cujo ponto de partida são tarefas cognitivamente desafiadoras, é um empreendimento extremamente exigente em que o papel do professor é particularmente difícil. No entanto, a sua concretização não é uma missão impossível.

### Reacção aos depoimentos (João Pedro da Ponte e Neusa Branco)

No seu texto, Ana Boavida refere-se à importância do raciocínio matemático — uma capacidade transversal de grande importância — mostrando de uma forma muito sugestiva como se pode promover o seu desenvolvimento na sala de aula. Para isso é fundamental que o discurso coletivo do professor e alunos valorize os momentos de argumentação, ou seja, a procura dos fundamentos para as afirmações que se vão fazendo, quer relativamente às respostas para as tarefas resolvidas, quer relativamente às propriedades matemáticas conjecturadas. O desenvolvimento do raciocínio matemático tem muito a ver com este trabalho de justificação das afirmações, que deve merecer grande atenção desde os primeiros anos da escola. Em Matemática, tirando as convenções, tudo o resto acontece sempre por uma ou outra razão...

Concordamos inteiramente com a autora quando diz que ensinar a argumentar «é um empreendimento muito complexo». Fica-nos, no entanto, a dúvida qual é o melhor modo de abordar estas questões com um público profissional — é preferível colocar a ênfase na «argumentação», como faz a autora, ou falar em «raciocínio» e «justificação», como fazem a maioria dos documentos curriculares? A nossa experiência em momentos de formação com professores dos diferentes níveis de ensino sugere-nos que estas ideias precisam de um trabalho aprofundado e que, para a maioria dos participantes, é bastante mais fácil adequar os seus significados espontâneos de «raciocínio» e «justificação» do que de «argumentação», muito mais distante do seu discurso quotidiano.

Por outro lado, Eduardo Veloso faz uma defesa apaixonada do trabalho de projeto. Não podemos estar mais de acordo com ele quanto às grandes potencialidades deste tipo de trabalho. O que já não nos parece muito bem é o por «trabalho de projeto» e «sala de aula», uma vez que o trabalho de projeto só tem a ganhar se começar na sala de aula (com uma boa discussão sobre os objectivos e propósitos do trabalho a realizar), se se desenvolver em ligação com a sala de aula (monitorizando o

Práticas que se têm revelado úteis para fazer face à complexidade deste empreendimento são: (a) *antecipar*, previamente à aula, possíveis resoluções da tarefa a propor; (b) *monitorizar* o trabalho dos alunos durante a sua exploração; (c) *seleccionar* criteriosamente, de entre as resoluções que surgem, as que serão partilhadas na turma; (d) *sequenciar* a sua apresentação; e (e) *estabelecer conexões* entre resoluções e ideias matemáticas (Smith *et al.*, 2009). Adotar estas práticas pressupõe encarar as resoluções de alunos particulares como recursos que o professor pode usar para melhorar a compreensão matemática da globalidade da turma, permite que haja algum controlo sobre o que é provável que aconteça na aula e possibilita que sejam enfatizadas as principais ideias matemáticas a aprender.

### Referências

Smith, M., Hughes, E., Engle, R. & Stein, M. (2009). Orchestrating discussions *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14 (9), 548–556.

Stewart, I. (1995). *Os problemas da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

seu desenvolvimento e integrando aspectos da experiência anterior), e se terminar na sala de aula (com uma apresentação e discussão coletiva de pares — os outros alunos que, pelo seu lado, realizam outros projetos). Também não podemos perder de vista que, para que o trabalho de projeto ganhe sentido, são precisas muitas e boas aulas de trabalho continuado e sistematizado, a partir de tarefas devidamente organizadas, que não podemos de forma alguma descuidar. Numa discussão sobre a sala de aula, mais do que gritos contra a sala de aula, seria interessante procurarmos ver como tirar o melhor partido desse espaço de trabalho conjunto que a sociedade (ainda) põe à disposição de alunos e professores. E dizemos «ainda», pois não tardarão muito as propostas para acabar de vez com as salas de aula, tal como existem hoje, deixando os alunos em casa, *on-line*, a fazer exercícios e projetos. Não se trata de uma questão retórica, mas de uma questão premente para quem se interessa pelo ensino da Matemática — a sala de aula é algo a eliminar ou a defender?

A discussão que Eduardo Veloso faz sobre os grandes propósitos do ensino da Matemática parece-nos bastante afastada do tema proposto. Quaisquer que sejam os grandes propósitos, haverá muitas questões a equacionar em termos da sua concretização. Pensar que se chega, por raciocínio dedutivo, dos propósitos aos espaços de trabalho em meia dúzia de linhas, é um tanto temerário... dada a complexidade dos fenómenos educacionais sublinhada, como vimos, por Ana Boavida. Devemos no entanto deixar claro que tanto são objetivos de ordem cultural trabalhar com a cissóide de Diocles como trabalhar os problemas verbais dos egípcios, babilónicos ou europeus da idade média. A cultura é tudo o que o homem socialmente organizado acrescenta à natureza, e existem múltiplas culturas, para todos os gostos, desde a cultura erudita à cultura popular... Ou seja, os objetivos do ensino da Matemática são sempre culturais, podem é estar mais associados a uma ou outra cultura. Parece-nos, pois, preferível manter como referencial o enunciado do novo programa de Matemática sobre as finalidades do



ensino da Matemática, que nos parece claro, do que a formulação ambígua proposta pelo autor. Igualmente afastadas do tema são os seus comentários sobre os mais diversos assuntos, onde não faltariam pontos de concordância e discordância. Mas para que não fiquem dúvidas, reafirmamos aqui a nossa posição — a escola tem muito a ganhar com a diversificação dos espaços de trabalho e com as potencialidades das TIC para a aproximação do

mundo exterior, mas para que esse potencial seja efetivamente aproveitado é fundamental a valorização da sala de aula como um espaço de trabalho, de discussão e de reflexão conjunta de professor e alunos.

João Pedro da Ponte  
Neusa Branco

## Reacção aos depoimentos [Eduardo Veloso]

1. Confesso que fiquei perplexo quando recebi os dois depoimentos para comentários. O convite que tinha recebido da equipa do número temático dizia expressamente que «Pretendemos recolher diferentes pontos de vista sobre a aula de Matemática, em jeito de debate». E eu respondi com uma espécie de manifesto a favor do trabalho de projecto e propondo novos objectivos para a matemática na sala de aula, incluindo um novo paradigma para esta, sem a habitual militarização dos 45 ou 90 minutos... Afinal, tinha que comentar dois artigos de investigação. Não se tratava portanto de um debate de opiniões. Mas de qualquer coisa que não estava ao meu alcance, pois estou inteiramente fora do meio da investigação, não conheço a maior parte dos autores citados nos artigos nem outros que possam ter opiniões diferentes sobre os assuntos tratados. Comuniquei a minha perplexidade à equipa que me tinha convidado. E é apenas pela amizade que me liga a esses colegas que aqui estou a tentar dizer qualquer coisa...

2. Duas notas prévias:

- Parecem-me muito interessantes os tipos de actividade propostos nos dois artigos e a análise e considerações que são feitas a propósito do seu desenvolvimento e do discurso da sala de aula. Bom seria que cada vez mais fosse este o ambiente nas salas de aula.
- O que vou escrever nos pontos seguintes não pressupõe quaisquer diferenças de opinião com os autores, dado que as actividades e os objectivos propostos nestes artigos não implicam que os autores rejeitem um outro tipo de propostas e objectivos que vou referir nesses pontos.

3. Uma observação comum aos dois artigos (que vou referir como Texto 1 — Desenvolvendo a linguagem algébrica e Texto 2 — Argumentação matemática em acção: Contornos e desafios).

Em qualquer dos textos, as actividades desenvolvidas são uma preparação para um tema matemático central. No Texto 1, estamos a caminho da manipulação simbólica, como é percebido por «Batista, um aluno que frequenta pela segunda vez o 7.º ano» [quando] sugere a letra  $x$ . No Texto 2, iremos entrar no tema da demonstração. Em qualquer dos casos, trata-se do conhecimento matemático e não do conhecimento sobre a matemática. Insisto, tal como fiz no meu depoimento, que este deve ser um objectivo central do ensino da matemática durante a escolaridade obrigatória e que, embora do facto de nenhum dos dois depoimentos se referir a este objectivo não se poder inferir que não está no pensamento dos seus autores, sentimos necessidade de insistir neste ponto.

4. Qual o papel característico da álgebra na construção da ciência matemática?

Ainda não compreendi bem o que é o pensamento algébrico — mas isso pode ser um problema pessoal, está claro... — mas as suas facetas, listadas no início do Texto 1 — generalização, simbolização, estudo de relações entre objetos matemáticos, variação e modelação — parecem-me processos característicos da matemática e não em especial da álgebra. O que me parece importante, do ponto de vista cultural, é que os alunos, depois da longa aprendizagem matemática no ensino básico e secundário. Fiquem a compreender que papel desempenha a álgebra na construção da matemática.

Henri Lebesgue escreveu num dos seus livros que «a geometria estimula-nos a pensar, ao passo que a álgebra pensa por nós». Eu acrescentaria: e até resolve problemas por nós, se tiverem sido bem formulados — na minha juventude dizia-se: se tiverem sido bem postos em equação. Não julgo que aquela frase de Lebesgue tivesse um sentido pejorativo. Aproxima-se da afirmação de Felix Klein, a propósito da resolução por métodos algébricos dos problemas clássicos da geometria (como a trissecção do ângulo): «uma coisa singular é o facto da geometria elementar não dar respostas para estes problemas. Temos que recorrer à álgebra e à análise superior. Surge então a seguinte questão: Como devemos usar a linguagem destas duas ciências para exprimir o emprego do compasso e da régua não graduada? Este novo método de ataque torna-se necessário porque a geometria elementar não possui um método geral, um *algoritmo*, como estas duas ciências» (*Famous problems of Elementary Geometry*, Felix Klein).

Esta longa história, com mais de dois mil anos, da demonstração pela álgebra da impossibilidade de resolução dos problemas clássicos da geometria grega, devia ser motivo para investigações e projectos na escolaridade obrigatória.

5. O Texto 2 diz respeito à argumentação e pode prever-se que mais tarde a questão da demonstração será abordada. Este é um tema fundamental para que os alunos adquiram um bom conhecimento da natureza da matemática. Não tenho espaço aqui para contar uma história exemplar a este respeito. Fica para uma próxima Nota sobre o Ensino da Geometria. Trata-se da resposta a dar a uma pergunta que recebi por e-mail de uma sobrinha-neta: «Estou no quinto ano, a começar a aprender sólidos geométricos e não sei responder a esta questão do trabalho de casa: Pode existir um sólido com 9 arestas e 9 vértices?»

Como responder?

# Os materiais electrónicos que acompanham os manuais e a aula de matemática

António Domingos, Paula Cristina Teixeira

## Introdução

No último número da revista [114] demos conta de alguns dos desenvolvimentos de um projeto<sup>(1)</sup> de investigação que procurava compreender a forma como os professores de matemática poderiam integrar o uso de materiais tecnológicos em benefício da aprendizagem dos alunos. Tratava-se de um projeto centrado nos materiais electrónicos que acompanham os manuais escolares, CD-Roms, eBooks, portais, filmes e conjuntos de outras atividades que apelam ao uso do computador. Neste número vamos dar-lhe conhecimento de alguns dos desenvolvimentos que estes materiais tiveram depois de os manuais terem sido certificados e do impacto que os mesmos podem ter na sala de aula. As evidências que vamos partilhar foram recolhidas no decorrer de Oficinas de Formação para professores.

## Os novos materiais

Com a certificação e avaliação dos manuais escolares as Editoras reformularam a forma como passaram a apresentar os materiais electrónicos aos alunos e professores. A

reorganização das principais editoras em grupos fez com que as sinergias despendidas fossem otimizadas, passando a oferta destes materiais a ser canalizada para plataformas de acesso condicionado quer para professores, quer para alunos. Surgem desta forma 2 grandes grupos, cada um munido de uma plataforma onde se disponibilizam diversos conteúdos electrónicos. Trata-se das plataformas *Banco de Recursos Interativos para Professores* (BRIP) (Figura 1) e *Plataforma de apoio digital* (Figura 2).

Em cada uma das plataformas são disponibilizados, pelas editoras, um conjunto alargado de recursos electrónicos interessantes e diversificados. Uma boa seleção daqueles materiais pode constituir-se em sequências de tarefas importantes para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Em ambos os casos o ponto de partida é o manual electrónico, que reproduz em formato *pdf* o manual do aluno. Na plataforma BRIP, ao folhearem-se as páginas dos manuais virtuais, vão aparecendo ligações a recursos variados, que podem ser a simples solução de um exercício, a resolução interativa de

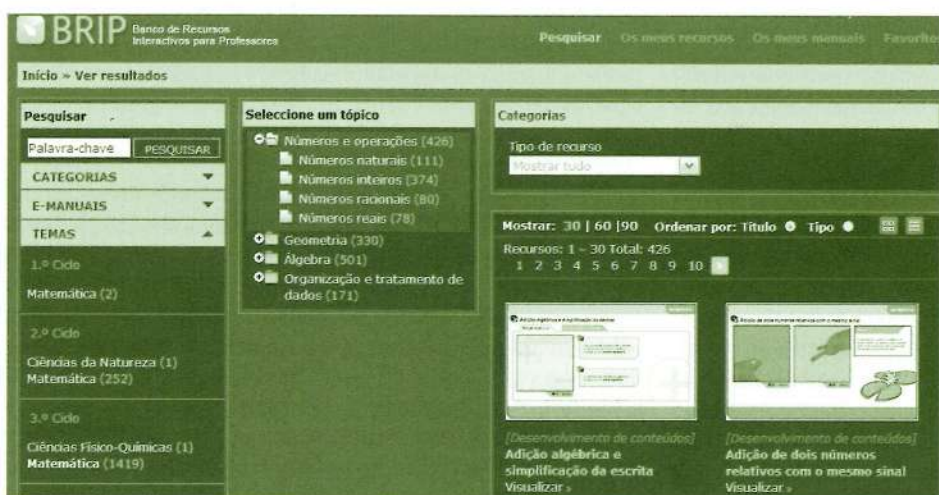


Figura 1. Exemplo de página da plataforma



Figura 2. Exemplo de página da plataforma

um problema, apliquetas em *softwares* de geometria dinâmica como o *Geogebra* ou em programas de traçado de gráficos, pequenos filmes ilustrativos dos conceitos em estudo e jogos interativos. Na plataforma de apoio digital os recursos aparecem alinhados em sequência com as páginas do manual.

Para além dos recursos, as plataformas apresentam ainda outras funcionalidades com o objetivo de ajudar o professor na tarefa de planificação das aulas. Estas bases de dados permitem ao professor a utilização dos recursos que delas fazem parte e ainda a hiperligação a outros endereços electrónicos disponibilizados na *internet*. Esta forma de organizar e planear as sequências de tarefas vem proporcionar ao professor uma maior diversidade de materiais acessíveis num curto espaço de tempo, proporcionando assim a possibilidade de apresentar os conteúdos de uma forma mais apelativa, diversificada e motivadora para os alunos.

O CD do aluno contempla alguns dos recursos das plataformas e um código de acesso às plataformas em particular ao manual em formato electrónico.

Tendo por base este cenário propiciador de ambientes de aprendizagem ricos, o projeto acima referido procurou compreender de que forma é que um conjunto de aulas preparadas com a utilização destes materiais poderia potenciar uma aprendizagem com qualidade e motivadora para os alunos. Para tal foram desenvolvidas ações de formação para professores, na modalidade de Oficina de Formação, onde o objetivo principal foi o de identificar os materiais disponíveis nestas plataformas e a partir destes desenvolver tarefas para implementar na sala de aula. A experiência decorreu no 3.º período do ano lectivo transacto e envolveu professores que estavam a leccionar os 7.º ou 10.º anos, por se tratarem dos níveis de escolaridade com novos manuais avaliados e certificados.

Nestas ações de formação foi possível identificar, nestes níveis de ensino, as potencialidades e fragilidades do uso destas plataformas e dos materiais aí contidos.

Na preparação e aplicação das tarefas os professores depararam-se essencialmente com dois cenários de aula.

Num dos cenários, os alunos não tinham adquirido os CDs, que foram por vezes vendidos separados dos manuais, e nesse caso as aulas planificadas na plataforma revelaram-se de difícil aplicação. O professor conseguia seleccionar um conjunto variado de materiais electrónicos, que poderiam proporcionar uma aula de qualidade, mas apenas ele podia manipular os materiais transformando-se o cenário numa «aula expositiva» com tecnologia. Os alunos apenas puderam assistir passivamente, pois as plataformas não permitem o acesso simultâneo professor/alunos à área onde foram reunidos os recursos seleccionados. A tecnologia não serviu neste cenário para que os alunos fossem os agentes ativos nas suas aprendizagens.

No outro cenário, quando os alunos tinham os CDs que acompanhavam os manuais foi possível desenvolver atividades em que estes se envolveram na sua própria aprendizagem através da manipulação dos recursos seleccionados pelo professor na plataforma e igualmente disponibilizados no CD do aluno. Por exemplo, através da manipulação de apliquetas que facilitaram a compreensão dos conceitos matemáticos em estudo.

No entanto, num número significativo das aulas preparadas durante a ação de formação, os professores sentiram a necessidade de recorrer a outras ferramentas para além das disponíveis na plataforma e de proceder a correções dos enunciados propostos, por exemplo, em filmes ou *powerpoints*. De facto, para que os alunos pudessem manipular livremente as apliquetas, os professores acederam a endereços como a *Wisweb* do Feudenthal Institute (<http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/>) ou

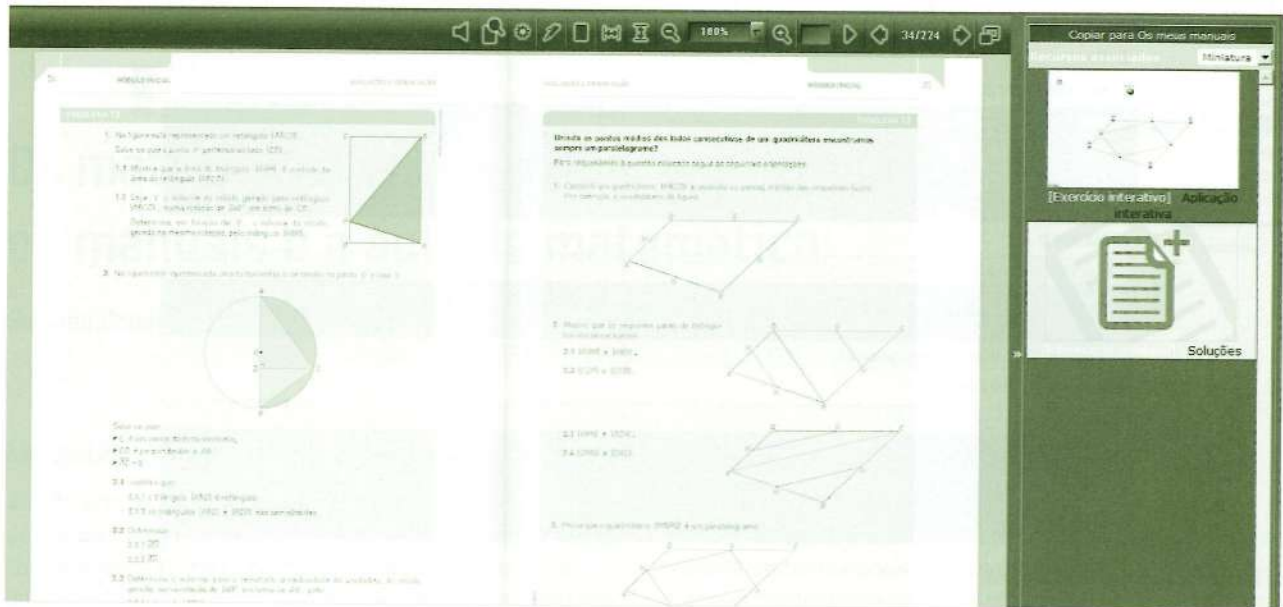


Figura 3. Exemplo de páginas do e-manual

*The National Library of Virtual Manipulatives* (NLVM) (<http://nlvm.usu.edu/>), para importar os recursos, ação que não é possível nas plataformas analisadas.

O manual em formato electrónico disponibilizado nas plataformas mostrou ser uma ferramenta importante (Figura 3).

Em escolas designadas por Territórios Escolares de Intervenção Prioritária (TEIP), foi por vezes a única forma de todos os alunos terem acesso à visualização do manual. Também foi possível verificar que este formato do manual pode ser uma ferramenta útil para ajudar os alunos numa correta manipulação do mesmo.

As várias experiências de ensino apresentadas pelos professores no final das Oficinas de Formação, com base na utilização destas plataformas, relatam situações de aprendizagem diversas, mas todas elas bem aceites pelos alunos e potenciadoras de aprendizagens significativas. De facto os professores tiveram sempre a preocupação de apresentar aos alunos situações de aprendizagem onde o papel destes não fosse passivo, o que nalguns casos foi além da utilização que a plataforma suportava. Sempre que a integração das várias ferramentas disponibilizadas permitiu uma forte interação dos alunos estes conseguiram desenvolver abordagens dos conceitos em estudo, que lhes permitiu a integração de diferentes representações. Os professores recolheram evidências de que os alunos conseguiram trabalhar os conceitos de modo refletido, quer estes tenham sido apresentados num formato mais lúdico ou mais formal.

### Em resumo...

As plataformas aqui analisadas revelaram-se potenciadoras de bons cenários de aprendizagem, desde que possa haver uma

efetiva utilização das suas potencialidades por parte dos alunos e do professor em simultâneo. A presença do manual em formato electrónico pode ser uma boa ferramenta para que o aluno seja encorajado a utilizar e valorizar o seu manual. As condições existentes nas escolas ainda são um entrave à utilização deste tipo de ferramentas, por um lado porque não possuem computadores em número suficiente para que efetivamente todos os alunos possam participar nas atividades propostas e, por outro, porque as redes (com e sem fios) não permitem um acesso rápido às plataformas.

Cumpre-nos, como nota final, alertar para o facto de que a utilização dos recursos das plataformas, em algumas condições, pode simplesmente permitir desenvolver uma aula «expositiva» com tecnologia, o que em nosso entender deverá ser alvo de uma ponderação séria por parte do professor de modo que lhe permita garantir uma efetiva aprendizagem dos conceitos em estudo por parte dos alunos.

### Nota

- <sup>[1]</sup> Projecto de investigação QAMURT – *Qualidade das aprendizagens em matemática com utilização de recursos tecnológicos*, apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, ao abrigo do contrato n.º PTOC/CEI/71744/2006.

### António Domingos

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa  
Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

### Paula Cristina Teixeira

Escola Secundária João de Barros  
Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento



## Matemática, Literatura & Aulas

**Luís Menezes**

A aprendizagem da Matemática não ocorre por mera transmissão de saberes do professor para os alunos. A ideia de que o conhecimento pode passar linearmente de uma cabeça — daquele que sabe — para outra(s) cabeça(s) — para aqueles que querem saber —, pelas palavras ditas e escritas, não tem qualquer correspondência com a realidade. A aprendizagem é um processo adaptativo, simultaneamente individual e coletivo, baseado na ação e na reflexão, no qual a comunicação tem um papel fundamental, na medida que permite estabelecer ligação entre as pessoas. Ora, a atividade — o ponto de partida para a aprendizagem dos alunos — é desencadeada pelas tarefas que o professor coloca. Para que as tarefas cumpram o seu papel na aprendizagem da Matemática, é importante que elas sejam ricas, diversificadas e organizadas de modo coerente. É neste quadro da procura da riqueza das tarefas (pelo seu potencial para a aprendizagem da Matemática, do qual se destaca a capacidade

para estabelecer conexões com conhecimentos prévios e mobilizar capacidades transversais como o raciocínio, a comunicação e a resolução de problemas matemáticos) e da sua diversificação (por assegurar maior êxito no processo de abstração reflexiva dos alunos e por resultar igualmente em ganhos motivacionais) que surge este artigo, no qual se procura evidenciar e justificar as potencialidades da literatura (em particular, a infanto-juvenil) na aprendizagem da Matemática. Para isso, começo por discutir diversas conceptualizações da aprendizagem da Matemática e do papel desempenhado pela comunicação em cada uma delas. Depois, focado numa dessas visões da aprendizagem, procuro mostrar as potencialidades da literatura como recurso didático para a aula de Matemática, apoiando-me em algum trabalho já realizado neste domínio e na exploração de literatura alusiva à Matemática.

## Aprendizagem da Matemática e comunicação

A aprendizagem da Matemática é um processo complexo, de natureza adaptativa, que provoca transformações qualitativas na estrutura mental das pessoas, traduzidas no desenvolvimento de conhecimentos e de capacidades como as de raciocínio, comunicação e resolução de problemas. Esta é a visão da aprendizagem da Matemática que sustenta o recente Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) quando este apresenta como uma das finalidades do ensino desta disciplina escolar «promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados» (DGIDC, 2007, p. 3).

No PMEB, a comunicação, para além de se assumir como um objetivo curricular (nessa medida, acredita-se que é necessário *aprender a comunicar*), constitui uma orientação metodológica para o ensino, no sentido de promover a aprendizagem da Matemática (nessa medida, acredita-se na importância da *comunicar para aprender*): «Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e promover o raciocínio e a comunicação matemáticos, para além de constituírem objetivos de aprendizagem centrais neste programa, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as atividades a realizar em aula.» (DGIDC, 2007, p. 9).

A afirmação da importância da comunicação no ensino e na aprendizagem da Matemática pode corresponder a orientações metodológicas muito diversas por parte do professor, consoante a perspectiva que este adote sobre o papel da comunicação na aprendizagem. De entre as teorias de aprendizagem com mais impacto no ensino da Matemática destacam-se três: construtivista, sócio histórica e interacionista. Sierpínska (1998) analisa o papel da comunicação em cada uma destas perspectivas sobre a aprendizagem da Matemática, propondo para cada uma delas uma metáfora.

Para o *construtivismo*, em que a referência basilar é Piaget (1983) e na educação matemática tem seguidores como von Glasersfeld (1996), Sierpínska (1998) propõe a metáfora: *Os alunos falam, o professor ouve*. Esta visão corresponde a uma pedagogia centrada no aluno, em que este, pela comunicação, através da linguagem, transmite o seu pensamento. O professor desempenha o papel de ouvinte atento, alguém que questiona, visando a clarificação do pensamento dos alunos.

Uma aula que tenha como inspiração a perspectiva *sócio histórica*, cuja referência de base é Vigotski, pode ser ilustrada pela metáfora: *os professores falam, os alunos ouvem* (Sierpínska, 1998). Nesta perspectiva, a aprendizagem é enculturação em estruturas sociais preexistentes, pela comunicação, através da linguagem. Na aula, a comunicação é a mediadora entre o conhecimento do professor e o dos alunos. Sierpínska (1998) sustenta que, de acordo com esta visão, é normal propor aos alunos, como ponto de partida para a aquisição de um conceito matemático, o estudo da sua definição: «espera-se que analisem a sua estrutura lógica; que encontrem exemplos e contraexemplos do conceito; que enquadrem o conceito na estrutura da teoria» (p. 48).

O *interacionismo*, que encontra as suas referências principais na educação matemática, em nomes como Bauersfeld (1994) e Krummheuer (2000), adota uma posição intermédia entre a

perspetiva construtivista, em que o foco da aprendizagem está no indivíduo e na construção do conhecimento, e a perspectiva sócio histórica, em que o foco da aprendizagem está situado na interiorização do conhecimento de uma dada cultura pelo sujeito. Para caracterizar esta perspectiva relativamente à comunicação na aula de Matemática, Sierpínska (1998) apresenta a metáfora: *professores e alunos em diálogo*.

Na aplicação do interacionismo à aula de Matemática, Godino e Llinares (2000) salientam três princípios: (i) a cultura da aula é constituída de forma interativa pelo professor e pelos alunos; (ii) as convenções (conteúdo e organização da aula) emergem interactivamente; (iii) o processo de comunicação apoia-se na negociação e partilha de significados. Para os interacionistas, a linguagem é um instrumento de comunicação, não no sentido de comunicar pensamentos (como no construtivismo), nem como meio de enculturação (como na perspectiva sócio histórica), visando a negociação de significados. Sendo assim, o sentido não está na cabeça de cada um (como construção individual), nem existe de forma prévia para ser transmitido (como na perspectiva sócio histórica), antes surge nas interações sociais, através do discurso, ou seja, é interdependente ao grupo de falantes e inseparável do contexto. Esta última visão da comunicação na aula de Matemática inspira o PMEB (DGIDC, 2007), uma vez que se defende que a interação entre os alunos e entre estes e o conhecimento matemático é o elemento decisivo na aprendizagem dos alunos. Em consonância, defende-se que «através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas» (p. 9) e, igualmente, pela «escrita de textos, os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos» (p. 9). A literatura alusiva à Matemática, de natureza ficcional, ao conciliar a leitura e interpretação de textos com a expressão e discussão de ideias matemáticas, fornece um bom contexto a esta visão da comunicação na aprendizagem e, nessa medida, constitui-se como um recurso didático para a aula de Matemática.

## A literatura como recurso didático em Matemática

A Matemática e a literatura são duas áreas que tradicionalmente têm estado, em termos escolares, pouco interligadas. Talvez por isso, existe uma certa dicotomia entre a Matemática e a língua materna, as duas principais áreas curriculares do ensino básico, o que leva, por vezes, alguns alunos a afirmarem o gosto por uma delas em oposição à outra. Este facto parece pouco compreensível, tanto mais que durante os primeiros quatro anos de escolaridade existe um só professor que leciona as duas matérias. Neste cenário, a questão que se pode colocar é a seguinte: haverá alguma vantagem em instituir e, sobretudo, aprofundar essa ligação entre as duas disciplinas escolares, especialmente durante o ensino básico? A resposta é sim. A justificação assenta em diversos fundamentos.

Primeiro, a aprendizagem depende da capacidade de o aluno estabelecer conexões entre o seu conhecimento e as diferentes matérias que está a estudar e igualmente entre elas. Por isso, promover um ensino por «gavetas», separando o Português da Matemática, não contribui, em nada, para essa



Figura 1. Tira usada na tarefa «Ao ataque!»

necessária conexão de saberes e, em consequência, enfraquece a aprendizagem.

Segundo fundamento, as características específicas de cada um dos saberes (linguístico e matemático) potenciam o outro campo de saber. A Matemática fornece à língua, e em particular à literatura, estruturação de pensamento, organização lógica e articulação do discurso. Já a língua fornece à Matemática capacidades comunicativas, como a leitura e interpretação de texto (escrito e oral) e também capacidades de expressão (escrita e oral, em particular a discussão).

A leitura é um dos processos mais complexos que é realizado pela mente humana (Chambers, 2007), envolvendo três elementos fundamentais: (i) o leitor (aquele que tem um conjunto de conhecimentos prévios e habilidades no processo de leitura), (ii) o texto (material a ler); e (iii) o contexto (elementos externos ao texto que influenciam a sua compreensão) (Giasson, 1993). Esta capacidade de leitura é fundamental no trabalho que os alunos realizam em Matemática, especialmente quando resolvem tarefas matemáticas com suporte escrito. Algumas das dificuldades com que os alunos se deparam quando resolvem problemas e outras tarefas matemáticas advêm precisamente de dificuldades ao nível da leitura e interpretação de enunciados.

O reconhecimento do mérito da inclusão da literatura alusiva à Matemática nas aulas desta disciplina escolar, enquanto recurso didático, tem conduzido ao desenvolvimento de materiais e à realização de experiências em sala de aula. O recurso à literatura infantil em Matemática tem maior tradição em países anglófonos (Narode, 1996; Siegel e colegas, 1996; Whitin & Whitin, 2000), mas em Portugal também estão documentadas algumas experiências. Menezes e colegas (2001), no âmbito de um trabalho colaborativo entre professores de Matemática e Língua Portuguesa do 2.º ciclo do ensino básico, desenvolveram um trabalho com histórias infantis. Os quatro professores, de duas escolas, trabalharam em díades (Língua Portuguesa e Matemática) partilhando uma mesma turma. Os professores adaptaram contos populares portugueses (por exemplo, *Frei João sem cuidados*, no qual foi inserido um problema matemático), que depois foram apresentados numa das disciplinas e em seguida explorados na outra (este conto, em particular, foi lançado na aula de Língua Portuguesa, onde foi trabalhado ao nível da interpretação, e depois foi retomado na aula de Matemática). A «permeabilidade» entre as duas disciplinas, através das histórias, foi inicialmente desconcertante para os alunos, mas no final (cerca de um ano depois), estes faziam um balanço muito favorável da experiência vivida: «Bem, a Língua Portuguesa é muito importante para percebermos os problemas que nos são

colocados. Só resolvemos bem um problema se formos capazes de o interpretar.» (João); «Foi bom, porque assim aprendemos mais. É dois em um. (Sílvia)» (Menezes e colegas, 2001, p. 8).

Numa experiência realizada com alunos do 1.º ciclo, Fonseca (2006) utilizou um conjunto de quatro histórias infantis adaptadas (*Capuchinho vermelho*, *A Branca de Neve e os sete anões*, *Os três porquinhos* e *João e o pé de feijão*), para desenvolver diversos temas e capacidades matemáticas. O estudo mostrou que o uso de histórias infantis na aprendizagem da Matemática é uma estratégia promissora, uma vez que os alunos se mantiveram muito envolvidos nas tarefas propostas e superaram os objetivos definidos à partida, em particular ao nível das capacidades de comunicação e de raciocínio matemáticos.

Em 2009, Menezes e colegas, no âmbito da preparação de materiais de apoio aos professores implementadores do PMEB, desenvolveram um conjunto de tarefas matemáticas para o tópico «números racionais não negativos — 5.º ano». Numa dessas tarefas («Ao ataque!»), estes autores lançaram mão de um estilo específico da literatura — a banda desenhada — e criaram uma tarefa a partir de uma tira de *Hagar, o terrível*, de Chris Browne (figura 1).

A tarefa desenvolve-se em torno da estratégia utilizada para a «contagem». A primeira questão colocada, de um conjunto de 4, é a seguinte: «Descreve a situação apresentada na tira. Que intenção terá tido o protagonista desta situação e que estratégia usou?» (p. 37). Esta proposta de trabalho foi bem acolhida pelos alunos, que foram capazes de compreender o caricato da situação e a intencionalidade do protagonista: «O que se passa é que os três Vikings queriam «acabar» com o inimigo. A estratégia que o protagonista usou foi a contagem em oitavos para adiar o ataque» (Menezes e colegas, 2009, p. 41).

O recurso à literatura infantil na aula de Matemática pressupõe a existência de literatura com condições para ser utilizada. Na secção seguinte apresento alguns exemplos de livros a que os professores podem recorrer para ensinar Matemática através da literatura.

### Recursos literários para a aula de Matemática

Nos últimos anos, temos assistido à publicação em português, em prosa e em verso, de diversos livros que reúnem condições para serem explorados em salas de aula de Matemática, desde o 1.º ciclo do ensino básico até ao secundário. Em seguida, mostram-se alguns exemplos.

Maria Alberta Meneses é autora do livro *Figuras Figuradas* (com ilustrações de Rui Truta). Este livro fala, de forma poética,

de diversos entes geométricos. A propósito dos sólidos geométricos, a autora apresenta a sua visão do cilindro e do cone:

Protesta o cilindro  
 todo aborrecido  
 talvez cilindrado  
 de alta indignação  
 — Senhor Cone, então  
 porque é tenda de índio  
 já pensa que pode  
 olhar-me de lado?  
 Quem julga que sou?  
 Bidon de gasóleo?  
 Cilindro de estrada  
 que a estrada pisou?  
 Tronco derrubado  
 de altíssima árvore  
 e por sobre as águas  
 de um rio levado? (p. 42)

Este poema pode ser o ponto de partida para o estudo dos sólidos geométricos, permitindo comparar e descrever cada um deles, identificando semelhanças e diferenças. Pode também ser apresentado numa fase posterior, em que os alunos já conhecem as propriedades dos sólidos geométricos, relacionando-as com as ações e objetos descritos pela autora.

O *Pequeno Livro de Desmatemática*, de Manuel Pina (com ilustrações de Pedro Proença), mostra-nos a Matemática desde os números e as operações aritméticas, passando pela história do pi, até aos números negativos e aos números imaginários. Dos diversos textos do livro, apresento em seguida dois — um sobre a divisão e o outro sobre números imaginários, — que podem ser a base para o desenvolvimento de tarefas matemáticas:

#### Uma história de dividir

Um divisor dividia  
 Muitíssimo devagar.  
 A divisão bem podia,  
 dizia ele, esperar  
 O dividendo, mais lesto,  
 não podendo perder tempo  
 dia a dia ia perdendo  
 a paciência e o resto.  
 E, encarando o amigo,  
 falava-lhe duramente:  
 «Não posso contar contigo,  
 és um inqüociente» (p. 17)

#### Os números imaginários (...)

Não pode haver raízes  
 quadradas de números  
 negativos. Mas... basta  
 imaginar que pode haver, e já  
 há. Tão simples como isso...  
 Foi o que fizeram alguns  
 matemáticos. (p. 48)

Os livros que apresento a seguir (*Histórias... com Matemática I* (Org. L. Menezes, C. Rodrigues, L. Ferraz, A. Martins) e *Histórias... com Matemática II* (Org. L. Menezes, A. Ribeiro, H. Gomes, C. Cosme)), editados pela ESE de Viseu, têm características que os diferenciam dos dois anteriores: são livros feitos maioritariamente por alunos dos dois primeiros ciclos do ensino básico que participaram num concurso literário subordinado ao tema «Matemática». Este concurso, que teve a primeira edição em 2008, contou com um grande número de histórias concorrentes, das quais foram selecionadas 14 para o livro *Histórias...*



Figura 2. Capas dos dois livros *Histórias... com Matemática* (2009, 2010)

*com Matemática I* (depois ilustradas por estudantes do Curso de Artes Plásticas e Multimédia da ESE de Viseu). A segunda edição do concurso redundou na publicação de um segundo livro (*Histórias... com Matemática II*), com 9 histórias, três das quais de professores da ESE de Viseu (os dois livros existem em formato papel e o primeiro deles também em formato ebook)

Algumas das histórias destes livros têm sido utilizadas em aulas de Matemática (por exemplo, *Quadrado convencido*, do livro I, e *Cava a dois tempos*, do livro II). A partir desta segunda história, apresento uma proposta de trabalho para o 5.º ano:

#### Cava a dois tempos

A Cava é um monumento que tem as suas origens enredadas em mistério. Ela é constituída por uma imensa muralha de terra, em forma de octógono regular, com 2000 metros de medida de perímetro, com uma largura de cerca de 27m na base e 6m de largura no coroamento. O interior da Cava é elevado em relação ao exterior, sendo a altura interior de cerca de 6m e a exterior de 9m.

(...) Estavam os dois rapazes a pensar como poderiam escavar a caixa de madeira quando repentinamente sentiram a chegada de um vento frio e forte vindo do interior da Cava, acompanhado do escurecer do céu que minutos antes estava de um azul forte. (p. 50).

#### Parte I

1. Tendo em conta que três dos lados da Cava de Viriato já não existem, qual o comprimento atual do coroamento?
2. Que figura geométrica resulta dos cortes verticais que foram feitos em alguns troços da Cava?

#### Parte II

Investiga como os dois rapazes poderiam encontrar o centro da Cava de Viriato, a partir dos 5 lados existentes.

Pablo Flores, no livro *Humor gráfico en el aula de matemáticas*, procura tirar partido do humor (a partir de situações de banda desenhada) para ensinar e aprender Matemática. Flores (2003) sustenta que este humor (a que chama de «humor gráfico») tem impacto significativo nos domínios cognitivo e afetivo dos alunos, pelo que defende a sua utilização didática em aulas





Figura 3. Tira de Mafalda (Quino)

de Matemática. Para Flores, esta forma de literatura permite a evocação e representação de conceitos, através da utilização de metáforas, criando contextos novos e inesperados, propondo conflitos cognitivos, estimulando o pensamento e alimentando ligações afetivas às matérias. Das inúmeras situações existentes no livro, apresento uma de *Mafalda*, do humorista gráfico argentino, Quino (Figura 3), que pode servir para explorar o significado que atribuímos às palavras e a necessidade de ajustar entendimentos, através da interação discursiva.

### Considerações finais

Matemática e literatura, apesar de ser uma combinação pouco explorada nas escolas portuguesas, parece ter boas condições para ser uma combinação que pode contribuir para a melhoria das aprendizagens matemáticas dos nossos alunos. O sucesso dessa combinação resulta de a literatura criar condições para o desenvolvimento do conhecimento e das capacidades matemáticas dos alunos, reforçando as ligações afetivas à disciplina.

A especificidade da natureza do texto literário, diferente da do texto escolar, cria igualmente condições para que os alunos interajam e discutam o significado do que leem. A interação dos alunos com o texto e com os colegas faz emergir a necessidade de se avançar na base dos acordos e da negociação de significados. Esta abordagem à aprendizagem da Matemática favorece o desenvolvimento matemático dos alunos, tal como é sugerido no atual programa de Matemática do ensino básico.

A disponibilidade de recursos, uma condição necessária para a implementação deste tipo de metodologia, começa, pouco a pouco, a ser assegurada. Existem já diversos recursos a que os professores podem lançar mão para ensinar utilizando literatura alusiva a temas matemáticos. Para além destes recursos que estão editados, parece ser igualmente interessante desafiar os alunos a pensarem sobre os temas matemáticos numa perspetiva ficcional, elaborando eles próprios pequenas histórias.

Termino com um desafio aos professores: experimentem integrar nas vossas aulas de Matemática literatura alusiva aos temas matemáticos que estão a ensinar e partilhem as vossas experiências.

### Referências

- Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer e B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a scientific discipline* (pp. 133–146). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.
- Chambers, A. (2007). Spanish Lecture Scenes from the Theatre of Reading. *Jornadas de Bibliotecas Infantiles Juveniles y Escolares*. Disponível em: <http://ejournal.eduprojects.net/CEIPpardobazan/media//Colexio/Agrupamento%20centros%20escolares%202006/chambers.pdf> [Acedido em 20/03/09].
- DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- Flores, P. (2003). *El humor gráfico en el aula de matemáticas*. Granada: Arial.
- Fonseca, C. (2006). *As histórias e a Matemática no 1.º ciclo do ensino básico*. (Colecção TESES — mestrado). Lisboa: APM.
- Giasson, J. (1993). *A compreensão na leitura*. Porto: Asa.
- Godino, J. & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1), 70–92.
- Krummheuer, G. (2000). Interpretative classroom research in primary mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 32, 124–125.
- Meneres, M. (2000). *Figuras, figuronas*. Asa: Lisboa.
- Menezes, L., Leitão, I., Pestana, L., Laranjeira, I. & Menezes, I. (2001). Trabalho colaborativo de professores nas disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, *Actas do ProfMat 2001* (pp. 203–210). APM: Lisboa.
- Menezes, L., Ribeiro, A., Gomes, H. & Cosme, C. (2010). *Histórias... com Matemática II* (organização). Viseu: ESE Viseu.
- Menezes, L., Rodrigues, C., Ferraz, L. & Martins, A. (2009). *Histórias... com Matemática I* (organização). Viseu: ESE Viseu. Disponível em: <http://www.esv.ipv.pt/mat1ciclo/ebooks.htm> [Acedido em 02/11/2011].
- Menezes, L., Rodrigues, C., Gomes, H. & Tavares, F. (2009). *Números racionais não negativos — tarefas para o 5.º ano*. Lisboa: DGIDC.
- Narode, R. (1996). Communicating mathematics through literature. In P. Elliott, M. Kenney (Eds), *Communication in mathematics* (pp. 76–80). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Piaget, J. (1983). *Seis estudos de Psicologia*. Lisboa: Dom Quixote.
- Pina, M. (2002). *Pequeno livro de desmatemática*. Lisboa: Assírio & Alvim.
- Siegel, M., Borasi, R., Fonzi, J., Sanridge, L. & Smith, C. (1996). Using reading to construct mathematical meaning. In P. Elliott, M. Kenney (Eds), *Communication in mathematics* (pp. 66–75). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Sierpiska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. Bussi e A. Sierpiska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30–62). Reston: NCTM.
- Vigotski, L. (1998). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.
- von Glasersfeld, E. (1996). *Construtivismo radical: Uma forma de conhecer e aprender*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Whitin, P. & Whitin, D. (2000). *Math is language too*. Illinois: National Council of Teachers of English e National Council of Teachers of Mathematics.

Luis Menezes

Escola Superior de Educação de Viseu e ClaDETS

## Na sala de aula

Disse o professor para os alunos:

- Imaginem que escrevamos todos os números de 1 a 10000 encostados uns aos outros de modo a formar um número enorme: 123456789101112131415...9998999910000. Qual é a soma de todos os algarismos deste «supernúmero»?

Não foi preciso nem um minuto para que o menino Frederico G. Auss respondesse corretamente.

Como terá ele conseguido?

[Respostas até 19 de Fevereiro para zepaula@armail.pt]

## Um número de restos

O problema proposto no número 113 de Educação e Matemática foi o seguinte:

- *Repara neste número tão curioso – disse a Eva para a Francisca.*
- *É formado por cinco algarismos ABCDE e tem as seguintes propriedades:*

*A é o resto da sua divisão por 6,*

*B é o resto da sua divisão por 5,*

*C é o resto da sua divisão por 4,*

*D é o resto da sua divisão por 3,*

*E é o resto da sua divisão por 2.*

*No dia seguinte, a Francisca foi ter com a Eva:*

- *Olha, descobri outro número com as mesmas características.*

*Será verdade?*

Recebemos apenas 8 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Edgar Martins (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Ilca Cruz, Jorge Filipe, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Sérgio Rosa (Pinhal Novo).

O Sérgio resolveu o problema usando exclusivamente o programa Excel no computador.

O Edgar usou o programa Scratch para encontrar os números mas depois chegou também à solução por dedução.

Todos os restantes foram tirando implicações a partir dos dados e testando depois os vários casos possíveis. O que se segue é uma condensação das várias resoluções que nos foram enviadas.

Do enunciado resulta imediatamente que:

$$A \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$C \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$D \in \{0, 1, 2\}$$

$$E \in \{0, 1\}$$

O resto da divisão inteira de um número por 5 depende apenas do algarismo das unidades. Se  $E = 0$  então  $B = 0$  e se  $E = 1$  então também  $B = 1$ .

Ficamos com duas possibilidades: AOCDO e AICDI.

## Caso AOCDO

Substituindo O por cada um dos valores possíveis, temos:

$$AOCDO, AOClO, AOC2O$$

Para saber o resto da divisão inteira de um número por 4 apenas precisamos de dividir o número formado pelos dois últimos algarismos (dezenas e unidades). Daqui deduzimos o valor de C para cada um dos três números anteriores. Ficamos com:

$$A0000, A0210, A0020$$

Estes números são pares, logo o resto da divisão por 6 também tem de ser par.

A0000 é divisível por 2 e por 3, logo também é divisível por 6. Ficaria  $A = 0$ . Impossível.

A0210 dividido por 3 tem resto 1, logo A só pode ser 1 ou 4. O número 40210 cumpre as condições.

A0020 dividido por 3 tem resto 2, logo A só pode ser 2 ou 5 mas 20020 dividido por 3 tem resto 1. Impossível.

## Caso AICDI

Substituindo O por cada um dos valores possíveis, temos:

$$AICDI, AIC1I, AIC2I$$

Usando o critério para o resto da divisão por 4, ficamos com:

$$A110I, A131I, A112I$$

Estes números são ímpares, logo o resto da divisão por 6 também tem de ser ímpar.

A110I dividido por 3 tem resto 0, logo A tem de ser 0 ou 3. Serve o número 3110I.

A131I dividido por 3 tem resto 1, logo A só pode ser 1 ou 4. Serve o 1131I.

A112I dividido por 3 tem resto 2, logo A só pode ser 2 ou 5 mas 5112I dividido por 3 tem resto 1. Impossível.

Como diz o Edgar: *Obtemos assim 3 soluções: 1131I, 3110I e 40210. A Francisca não só está a dizer a verdade como poderia ter encontrado dois números com as mesmas características.*

# Imposição ou negociação de significados matemáticos

António Guerreiro

– Que idade tens? – perguntou-lhe o velho. – É a tua primeira viagem?

O pássaro fitou-o, enquanto ele lhe falava. Estava tão cansado que nem examinava a linha, e tremia nas delicadas patas enclavinhadas nela.

– Está tesa, tesa demais – disse o velho. – Não devias estar tão cansado, depois de uma noite sem vento. No que estarão dando os pássaros?

«Os falcões, pensou, que saem ao largo, ao encontro deles». Mas nada disto disse ao pássaro, que de resto não sabia entendê-lo e não tardaria a aprender quem os falcões eram.

– Repousa à vontade, passarito. E, depois, vai, e vive a tua vida, como os homens, os pássaros e os peixes.

Ernest Hemingway (1956) *in* «O Velho e o Mar»

A negociação de significados na sala de aula de matemática parece resultar do confronto de diversas práticas culturais (Meira, 1996), com especial relevo da cultura escolar matemática (Pinto & Fiorentini, 1997), oscilando entre práticas de *imposição* de significados e de *genuína* negociação de significados, dependentes do nível de *controle* e *poder* do professor em relação aos alunos (Bishop & Goffree, 1986), em consonância com a natureza das práticas de ensino da matemática e da valorização dos conhecimentos pessoais dos alunos.

O processo de *literacia matemática* pode resultar assim numa *imposição* cultural exterior de conceitos, processos e normas ou incidir na negociação de significados matemáticos, através da conjugação dos conhecimentos da ciência matemática com os conhecimentos pessoais de cada indivíduo. A construção do conhecimento na sala de aula baseia-se na negociação de significados, num processo em que todos têm similares possibilidades de emitir ideias críticas sobre as questões colocadas e de construir novos significados a partir de experiências individuais ou coletivas de interação com os objetos matemáticos ou com os outros indivíduos (Bishop & Goffree, 1986).

Nesta perspectiva, conceitos, representações e processos matemáticos emergem e são partilhados no contexto de práticas culturais específicas da sala de aula, através de significados intrinsecamente associados às circunstâncias e formas de interação social nas práticas de ensino (Meira, 1996). A negociação reporta-nos assim para a produção de significados de conceitos e processos matemáticos e de normas sociais e sociomatemáticas, durante a atividade matemática escolar.

Os dados ilustrativos deste artigo foram recolhidos, num contexto de trabalho de natureza colaborativa, no âmbito de uma investigação, com três professoras do 1.º ciclo do ensino básico, sobre as práticas de comunicação matemática em sala de aula, no decorrer de três anos letivos. Pretendo com estes episódios, exemplificar aspetos da negociação de conceitos e processos matemáticos e da negociação de normas sociais e sociomatemáticas.

**Negociação de conceitos matemáticos.** A negociação dos conceitos matemáticos parece decorrer da participação dos indivíduos em múltiplas práticas culturais (Meira, 1996), confrontando o significado social e matemático de uma mesma palavra, frase, expressão ou símbolo ou entre a expressão linguística de um conceito e a sua representação matemática.

O conceito social de *pisca-pisca*, representado matematicamente por um instante sem dimensão, parece ilustrar a negociação entre a representação linguística e matemática. Num problema em que se pretendia determinar o momento em que duas lâmpadas, que piscavam de três em três segundos e de cinco em cinco segundos, respetivamente, estavam simultaneamente acesas, os alunos demonstraram significativas dificuldades em representar matematicamente os instantes em que ambas piscavam, revelando incompreensão sobre o conceito de *pisca-pisca*.

Para os alunos, uma lâmpada piscar de três em três segundos era sinónimo da lâmpada acender durante três segundos e apagar durante três segundos:

Tiago: — Primeiro desenhámos sessenta traços, cada traço é um segundo. Sessenta segundos são um minuto.

Professora: — Pronto.

Tiago (com referência à representação figurativa): — Deste lado é a porta [associada à lâmpada] dos três segundos. E aqui é o dos cinco em cinco. Primeiro, estes três segundos, acende a primeira luz. Estes aqui, cinco segundos, acende. Estes, aqui até aqui, mais três, apaga. Destes cinco, mais cinco, está apagada.

[Aula \_ 4.º ano]

O aluno continuou a explicação concluindo (casualmente) que estão as duas lâmpadas acesas aos quinze segundos. A professora questiona os alunos do grupo:

Professora: — Vocês mostram que os primeiros três segundos, e pelo que o colega explicou, a luz estava acesa. Ela está acesa três segundos? Ela acende no três. Ela acende. Passados mais três [segundos], ela acende. Não está acesa, apagada, acesa, apagada.

[Aula \_ 4.º ano]

O conceito de piscar de três em três segundos (ou de cinco em cinco segundos) foi suficientemente negociado, por parte da docente, após ter identificado esta incompreensão: «Acender de cinco em cinco não é equivalente a estar aceso cinco segundos. Piscar de cinco em cinco não é estar aceso cinco segundos» [Aula \_ 4.º ano].

As dificuldades de aprendizagem matemática de alguns procedimentos menos usuais podem estar diretamente relacionadas com a incompreensão de conceitos e representações matemáticas e a ausência de negociação dos significados matemáticos destes mesmos conceitos e representações. A consciência do professor sobre a necessidade de negociar o significado dos conceitos e ideias matemáticas pode facilitar a aprendizagem dos alunos, através de uma partilha de significados matemáticos entre todos e da clarificação das representações matemáticas de conceitos sociais.

**Negociação de processos matemáticos.** A negociação de processos matemáticos emerge de forma relacionada com as estruturas de ação, comportamento e comunicação na sala de aula (Meira, 1996), implicando o confronto entre processos matemáticos e sociais. Num estudo, referido por este autor, os alunos adotaram processos matemáticos em contextos sociais, nomeadamente na utilização de uma lista de preços de serviços de correio, assumindo uma forte influência pela utilização de processos matemáticos nas aulas de matemática, tornando as ações dos indivíduos subordinadas aos contextos.

A utilização de processos sociais em confronto com processos matemáticos ocorreu numa das aulas, em torno da resolução de problemas, a propósito de dinossáurios, neste caso do Tiranossauro. Neste episódio, a professora e a turma não reconheceram o processo social assumido pelos alunos, denotando uma forte influência dos contextos escolares na negociação dos processos matemáticos.

A identificação de duas espécies de dinossáurios carnívoras decorria, matematicamente, da conjugação de um conjunto de informações dadas, entre as quais, que viviam na Ásia:

Aluno: — Destas [seis] espécies [de dinossauros] apenas duas eram carnívoras, alimentavam-se de carne e viviam na Ásia. Descobre quais são.

[Aula \_ 4.º ano]

Uma das indicações em relação ao Tiranossauro é que vivia na Ásia e por exclusão de partes (atendendo às outras condições) tinha de ser carnívoro. Todavia, os alunos utilizaram o seu conhecimento social para resolverem este problema:

Aluno: — O Tiranossauro viveu na América do Norte e na Ásia e depois nós soubemos logo que o Tiranossauro também era carnívoro.

Dennis: — Porque já o conhecemos por livros.

Outro Aluno: — Por livros ou por aquele ali?

Dennis: — Não, não foi por aquele ali, já conhecíamos.

[Aula \_ 4.º ano]

O não recurso ao conhecimento matemático, originou uma desvalorização da resposta dada pelos alunos:

Sara: — Como é que vocês ficaram logo a conhecer?

Dennis: — Então, porque já sabíamos dele há muito tempo.

[Aula \_ 4.º ano]

Este episódio revelou uma negociação de processos matemáticos, também pela professora, em confronto com os processos sociais:

Dennis: — Eu já sabia dele porque já tinha lido muitos livros.

Professora: — De quem, já sabias de quem?

Dennis: — Do Tiranossauro. Há muito tempo porque às vezes vou à biblioteca e pesquiso livros ... sobre o Tiranossauro.

Professora: — Então e quem não sabia, como é que soube?

Beatriz: — Se tu não soubesses, como é que sabias?

[Aula \_ 4.º ano]

O contexto escolar específico parece determinante no reconhecimento dos processos matemáticos aceites e negociáveis, originando a existência de situações não escolares e escolares, subdividindo estas últimas, em acordo com as áreas de conhecimento. A assunção de processos distintos em distintas áreas de conhecimento parece atomizar o conhecimento, evitando a transversalidade do saber.

**Negociação de normas sociais e sociomatemáticas.** O estudo da negociação de significados na sala de aula de matemática também envolve a análise das rotinas diárias e das ações resultantes das interações sociais (Meira, 1996). A definição do papel do professor e dos alunos nas interações, originando normas sociais e sociomatemáticas, mesmo que implícitas, acerca da oportunidade, da adequação e do valor das intervenções dos alunos e do professor, parece influenciar as representações acerca da matemática e da atividade matemática escolar.

Neste contexto, as ambiguidades, gradualmente resolvidas através do processo de negociação, inerentes ao ensino e aprendizagem da matemática, não se referem à natureza dos conceitos matemáticos, mas ao (re)estabelecimento das normas sociais e sociomatemáticas (Meira, 1996). A predominância das negociações de significados parece decorrer da regulação de comportamentos sociais e das atitudes dos alunos, particularmente

em relação à organização do trabalho a pares ou em grupo e da participação dos alunos nas atividades de sala de aula. A negociação do trabalho em grupo parece apresentar uma dimensão social da aprendizagem e da entreajuda entre os alunos:

Professora: — Ora bem, vocês estão sentadinhos em grupo, que é para utilizarem as ideias de todos. Não é para entrarem em conflito, não é para discutirem, não é para uns quererem mandar nos outros. É para explicarem uns aos outros os raciocínios que vocês querem seguir.

[Aula \_ 3.º ano]

A negociação de comportamentos apresenta uma vertente disciplinadora e reguladora do trabalho dos alunos, a par das regras da participação individual de cada um dos alunos no trabalho em grupo. Esta vertente da negociação de significados parece também integrar uma dimensão sociomatemática, nomeadamente em relação às atitudes dos alunos perante os conteúdos disciplinares da matemática:

Professora: — A conta estava certa, mas não tem valor nenhum. Porque não sabem porque é que a fizeram, como a fizeram, por que razão. É à toa. O que eu quero aqui é que vocês percebam aquilo que estão a fazer. Quando não percebem, agradeço que perguntem, que digam.

[Aula \_ 4.º ano]

A negociação de significados matemáticos parece incidir nas normas sociais e sociomatemáticas numa dimensão de negociação formativa e disciplinadora, regulando a aprendizagem matemática e o comportamento escolar dos alunos.

**Negociar significados em vez de impor conhecimentos.** A significativa *imposição* de conceitos e processos matemáticos na sala de aula origina uma prática rotineira de procedimentos matemáticos na resolução das tarefas, mesmo quando estas apresentam um expressivo contexto social. A subordinação dos conceitos e processos aos procedimentos matemáticos pode originar uma valorização, por parte dos alunos (e do professor), do papel do professor como único detentor do conhecimento matemático, ampliando a desvalorização dos conhecimentos específicos, pessoais e culturais dos alunos. A genuína negociação de significados matemáticos pode facilitar a partilha de conhecimentos, fomentando uma cultura de sala de aula pautada pela singularidade ao invés da similaridade de atitudes e de comportamentos.

#### Referências bibliográficas

- Bishop, A. & Gofree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: D. Reidel.
- Meira, L. L. (1996). Aprendizagem, ensino e negociação de significados na sala de aula, in: Mira, M.; Brito, M. (Org) *Psicologia na educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica* (Vol. 5, pp. 95–112). Rio de Janeiro: ANPEPP.
- Pinto, R. A. & Fiorentini, D. (1997). Cenas de uma aula de álgebra: produzindo e negociando significados para a «coisa». *Zetetiké* (Vol. 5, n.º 8, pp. 45–71). Campinas: UNICAMP — FE/CEMPem.

António Guerreiro

ESE da Universidade do Algarve

## O que pensam os alunos...

Na escola onde leciono há 2 anos e em duas turmas do 8.º ano, implementei, durante um ano letivo, uma nova metodologia de trabalho tendo em conta as recentes orientações curriculares, tendo no final proposto um questionário aos alunos em que pedi a sua opinião acerca do processo de ensino em que se sentem mais à vontade (Construção do conhecimento / ensino exploratório *versus* Transmissão do conhecimento) e porquê. Neste artigo analiso as respostas dos alunos ao questionário.

No âmbito das minhas funções como docente de Matemática na Escola Básica 2, 3 de Castro Marim (Algarve), tive oportunidade de leccionar duas turmas do oitavo ano de escolaridade – 50 alunos, durante o ano lectivo 2010/11. A escola é a única no concelho o que origina que os alunos provenham dos mais diferentes extractos sociais / culturais e com percursos escolares diversos.

Sendo a Matemática uma disciplina com estigma muito grande na sociedade em geral e naquele meio em particular torna-se primordial valorizar todos os recursos possíveis de forma a reverter esta situação e promover uma imagem positiva da Matemática. De entre os vários aspectos no processo de ensino e aprendizagem há um que me é particularmente caro: a valorização da relação com os alunos. Conseguir mobilizar os alunos para a nossa causa e fazê-los compreender a importância dessa mobilização no seu futuro é um passo muito importante para se conseguir desenvolver um bom trabalho. Para poder ter um bom relacionamento com os alunos, para mim, é muito importante, ouvi-los, para assim os poder compreender melhor, para saber o que eles consideram que é mais importante na sala de aula, nomeadamente acerca do desempenho do professor e do processo de ensino que é / foi desenvolvido.

Com este propósito, e sem os alunos terem qualquer informação prévia do que se ia passar, no início da última aula de Matemática do ano, entreguei-lhes uma folha com três questões, às quais pedi expressamente que respondessem individualmente e em silêncio. Duas delas eram relativas ao desempenho do professor – aspectos mais positivos e mais negativos do desempenho do mesmo. A terceira e aquela sobre a qual me debruço neste artigo está relacionada com o processo de ensino

e aprendizagem desenvolvido ao longo do ano – «Diz com qual das formas de ensinar / aprender Matemática te sentes melhor e porquê, isto é, se te sentes melhor na forma como trabalhamos este ano:

- o professor propõe uma tarefa [actividade ou trabalho] de forma a que tu e os teus colegas cheguem às conclusões por vocês mesmos, e depois trabalhar a partir daí;

Ou se te sentes melhor quando:

- o professor apresenta [expõe ou explica] os conteúdos em primeiro lugar e depois se trabalha a partir daí.»

Optei por desenvolver, em sala de aula, um trabalho suportado, essencialmente, no ensino exploratório. Entendo esta metodologia como um processo de construção do [próprio] conhecimento, pois para além de ir de encontro aquilo que está definido no PMEB, acredito que é a melhor forma de aprender / ensinar Matemática e tive o privilégio de poder aprender assim (Ensino Secundário).

Apesar de optar prioritariamente pela *construção do conhecimento* acrescento ainda que este facto não implica a inexistência da transmissão do conhecimento. Se o aluno não o consegue construir tem todo o direito a recebê-lo e aí prevalece a *transmissão do conhecimento*, mas apenas após a construção ter sido tentada, pois mesmo não conseguindo, se o tentou e/ou sentiu dificuldades estará mais predisposto, mais atento, mais interessado em compreender a situação em causa. Para além disso, ao propor em primeiro lugar tarefas que incentivem a construção do conhecimento está-se a possibilitar o prazer da descoberta, a promover a autonomia e a incentivar a comunicação.

Posto isto, passemos então às opiniões dos cinquenta alunos, sintetizada na tabela 1, onde foi possível encontrar alguns padrões.

Assim de uma forma geral, vinte alunos sentem-se melhor com a primeira forma – dominada pela construção do conhecimento, vinte e três sentem-se melhor com a segunda forma – dominada pela transmissão e quatro apreciam as duas formas. Mas quem são, o que dizem e porquê?

De uma forma geral o grupo de alunos é heterogéneo. De entre os quarenta e sete em causa, quinze apresentam um percurso escolar em Matemática sem dificuldades [critério a inexistência de mais que um nível inferior a três no final de qualquer período], e

	Número de respostas
Construção do conhecimento	20
Transmissão do conhecimento	23
Construção e transmissão do conhecimento	4
Respostas não válidas	2
Não responde	1
Total	50

Tabela 1. Distribuição das respostas dos alunos

para mim a melhor maneira de aprender matemática é o professor apresentar os conteúdos com exemplos logo depois trabalhar a partir daí, porque acho que o professor explicando a matéria é primeiro depois nos dar exercícios é mais fácil depois com os explica a matéria e dos-ras logo exercícios

Figura 1. Resposta da Daniela

Prefero que o professor explique, pois assim é mais fácil de aprender.

Figura 2. Resposta do Fernando

Sim; gosto de aprender que o professor apresente os conteúdos faz eu entender melhor → depois trabalhar a partir daí, porque faz mais fácil, sabe a matéria. Tem as coisas que é depois fazer exercícios a partir disso. É mais fácil, faz eu melhorar as minhas capacidades.

Figura 3. Resposta da Micaela

considero ainda, dado o seu interesse e empenho ao longo do ano, trinta alunos como alunos empenhados.

Dos vinte e três alunos que se sentem melhor na transmissão do conhecimento, apenas cinco apresentam um percurso escolar a Matemática sem dificuldades. Ao nível da capacidade de trabalho este grupo é composto por onze alunos empenhados, e se por um lado grande parte dos alunos que se sente melhor com esta forma apresenta dificuldades, neste grupo também se incluem dois alunos com a capacidade de raciocínio bastante desenvolvida. Das vinte e uma justificações existentes, o primeiro destaque vai para a expressão «... mais fácil...» com as suas mais diferentes argumentações [exemplos da figura 1 à figura 3].

A prevalência desta expressão – «mais fácil» – em nove das vinte e uma respostas é extremamente significativa, uma vez que se tratou de uma pergunta de resposta aberta, respondida de forma individual, pelo que tenho pouco receio em extrapolar que os alunos consideram esta forma mais fácil, dá menos trabalho. A estas nove justificações juntam-se mais três que com as suas diferentes roupagens transmitem a seguinte ideia, primeiro o professor explica depois é só aplicar, ou seja, dá pouco trabalho. Por outro lado, expressões como *percebo / fico a saber melhor* são apenas utilizadas por três alunos. Sendo que apenas uma aluna, a Micaela, emprega a expressão «... ajuda a melhorar as minhas capacidades.» Sobre um outro ponto existem três que alegam as dificuldades em compreender as tarefas. Daqui se destaca a opinião da Cristiana (aluna muito empenhada e que teve uma evolução notável da sua aprendizagem ao longo do ano) «... uma tarefa e eu não percebo muito bem o que tenho de fazer e também não percebo essa matéria.» esta situação irá obrigá-me a reflectir como esta dificuldade poderá ser ultrapassada. Destaco por fim a opinião da Nathália (aluna muito empenhada e ambiciosa) que apesar de preferir este processo por o achar mais fácil, aborda o outro referindo que «... também acho adequado

que o professor proponha uma tarefa – raramente – de forma a o aluno e colegas cheguem às conclusões por si mesmo e depois trabalhar a partir daí, pois é uma forma de trabalhar a mente».

Da análise geral destas justificações e de quem as dá parece saltar à vista que os alunos que preferem este processo, preferem-no por ser mais fácil, não dar tanto trabalho, não se sentirem tão expostos às suas dificuldades. O que na minha opinião não resolve nada, pois não será por ficar omissa que essa dificuldade deixa de existir. Como tal há que trabalhá-las.

Observe-se agora quem são os vinte alunos que preferem um ensino assente na construção do conhecimento e porquê. Neste grupo encontramos oito alunos que não apresentam qualquer dificuldade ao longo do seu percurso escolar em Matemática. Quanto ao interesse e empenho considero dezasseis deles empenhados. Neste caso os padrões foram mais difíceis de encontrar, mas a expressão «mais fácil», surge apenas uma vez. Quatro alunos utilizaram expressões perceber/saber melhor e ainda três, nas suas justificações, colocam palavras da «família» de *compreensão*. Refira-se que esta última palavra não aparece em qualquer justificação do outro processo de ensino. Surgem assim seis alunos em vinte a referir dificuldades na «compreensão» das tarefas enquanto no outro grupo de vinte e três alunos apenas três aludem a essa dificuldade. Num sentido um pouco diferente, mas não muito, três alunos referem que preferem este processo uma vez que os obriga a pensar.

Ainda em linha com o início do parágrafo, há apenas um aluno – o Cláudio – que refere algo que a mim me parece de extrema importância.

«Gosto mais do 1.º método pois acho que é mais útil para aprender porque quando descobrimos por nós mesmo como se faz alguma coisa é muito difícil esquecer-lo».

Mas o conceito que mais se destacou (e relembre-se que era uma pergunta de resposta aberta) foi o de desenvolver

Gosto o professor aquela em que o professor dá tarefas para nós tirarmos conclusões (leilas foi nós a tirar uma conclusão?) e depois diz como se resolve, e ainda fazemos a parte das coisas que fazíamos e depois depois que o professor disse, tirare conclusões. Não que nos vamos exercicios para desenvolver a raciocinio.

Figura 4. Resposta do João

Ambas as formas de ensinar Matemática está correcta, mas cada aluno tem a sua preferência.

Na minha opinião, agrada-me mais a primeira forma de aprender matemática, pois faz desenvolver a massa cinzenta de cada um.

Enquanto que quando ~~fazemos~~ o professor propõe uma tarefa e depois os alunos chegam às suas próprias conclusões e depois trabalham a partir daí, faz com que cada indivíduo se esforce para tentar resolver, de certa forma até parece entusiasmo para conseguir! Já da outra maneira, os alunos quase não se esforçam, o professor dá a matéria e depois apenas temos de aplicar.

Figura 5. Resposta da Beatriz

capacidades de raciocínio, que nas suas diferentes formas é referido por cinco alunos, estando neste grupo incluídos os dois alunos com melhor desempenho, mas também outros (nível quatro, três e dois).

«...obrigados a pensar e a desenvolver as nossas capacidades» (Iris; nível três)

« (...) Acho que são bons exercícos para desenvolver o raciocínio.» (João G; nível dois, Figura 4)

« (...) Ao fazermos as tarefas desenvolvemos o pensamento e arranjamos soluções para os problemas por nós, e não depois de o professor ensinar as técnicas. Acho uma forma de ensinar muito boa» (Ana; nível quatro)

« (...) Na minha opinião, agrada-me mais a primeira forma de aprender Matemática, pois faz desenvolver a massa cinzenta de cada um. (...)» (Beatriz; nível cinco)

Parece clara a ideia que esta forma potencia o desenvolvimento das capacidades alunos. A Beatriz no seguimento da sua justificação apresenta mais dois pontos que me merecem destaque «... faz com que cada indivíduo se esforce para tentar resolver, de certa forma até provoca entusiasmo para conseguir! Já da outra maneira, os alunos quase não se esforçam, o professor dá a matéria e depois apenas temos de aplicar.» (Figura 5)

De tudo isto parece-me claro que este processo potencia o desenvolvimento das capacidades dos alunos, tornando-os mais autónomos.

Quatro alunas seleccionam os dois processos de ensino referidos no questionário. Justificando uma delas, que quer com um ou com outro as suas dificuldades serão sempre enormes, as restantes alunas, todas empenhadas, duas de nível quatro e uma de nível cinco referem que se sentem igualmente à vontade com ambos os processos. A Nídia, que no início mostrou uma intransigência muito grande em relação à forma adoptada [a primeira], referiu: «(...) Eu no princípio do ano embirrava muito

com o método de trabalhar do professor (...)» e explica que «[...] no ano anterior (...) o método de trabalhar era muito diferente. Mas apercebi-me ao longo do ano que este método também é bom.»

Desta análise, algumas ideias parecem-me claras. De forma geral, os alunos consideram o processo de transmissão do conhecimento mais fácil, mais simples e consideram o processo de construção do conhecimento mais exigente (comparativamente com o outro) mas também reconhecem que essa exigência os obriga a pensar mais, esforçar mais, raciocinar mais e desta forma desenvolver mais as suas capacidades – é mais rico. É um processo que vai mais fundo no grau de exigência ao desenvolvimento e desempenho intelectual dos alunos, proporcionando e potenciando dessa forma um nível de conhecimento / competência bem alicerçado, mais forte, mais sustentado. Acresce a isto o entusiasmo que só a Beatriz refere e a autonomia que a justificação do Ricardo deixa perceber.

« (...) Assim por este método conseguimos resolver problemas pensando por nós próprios sem pedir ajuda. Algum dia podemos precisar de resolver um problema sem conhecer a forma como lá se chega e assim esforçámo-nos para conseguir resolvê-lo.» Após esta análise às respostas dos alunos é possível verificar que os alunos reconhecem a importância do trabalho autónomo na aula de Matemática, o que vem ao encontro de um dos objectivos estabelecido no actual programa: *Os alunos devem ser capazes de fazer Matemática de um modo autónomo.*

Pedro Alves

Agrupamento de escolas de Castro Marim

Com a colaboração de Sandra Nobre



Este número da revista centra-se no tema *A aula de Matemática*. Sendo que a aula existe *para e porque* existem alunos, as suas opiniões sobre os aspetos da aula de Matemática que mais valorizam e porquê, devem ser ponderadas na tomada de decisões do professor quer antes quer durante a aula. Assim seleccionámos para este número um artigo da autoria de Peter Sullivan, de Doug Clarke e Helen O'Shea onde são apresentados e discutidos resultados parciais obtidos no âmbito de um projecto de investigação, em que procuraram que os alunos identificassem as características das aulas de matemática que consideraram perfeitas.

O artigo original está publicado nas Actas de um Encontro da MERGA – Mathematics Education Group of Australasia – a quem agradecemos a autorização da publicação desta versão traduzida na revista Educação e Matemática.

## Opiniões dos alunos sobre as características das aulas de matemática preferidas

**Peter Sullivan**

Universidade Monash

**Doug Clarke**

Universidade Católica Australiana

**Helen O'Shea**

Universidade Monash

No âmbito de um projeto mais abrangente, examinámos a forma como os alunos descrevem as suas aulas de matemática ideais. Descobrimos que os comentários dos alunos eram semelhantes às características que os investigadores usam frequentemente para delinear os traços do ensino eficiente. Nomeadamente, os alunos gostaram que as explicações fossem claras, lembraram aulas em que usaram materiais que permitiam uma ligação às suas vidas, sentiram que a organização em grupos era importante e muitos deles gostaram de sentir desafios. Houve diversidade em relação aos tipos de aulas descritas, implicando que a variedade também é importante. Os professores são encorajados a prestar atenção às opiniões dos alunos sobre a pedagogia que valorizam.

Apesar do nosso projeto no seu todo, «Tipos de tarefas e aprendizagem matemática» [TTML<sup>00</sup>; ver O'Shea e Peled, 2009, para uma descrição do projeto] colocar o acento nas tarefas, este relatório de investigação é sobre as opiniões que os alunos têm das características das suas aulas de matemática ideais. O nosso interesse nas aulas decorreu de percebermos que um ensino eficaz não depende somente da qualidade das tarefas, mas também tem a ver com a forma como o professor as leva à prática, e do modo como os alunos são capazes de potencializarem as oportunidades que o trabalho nessas aulas lhes pode proporcionar.

O projeto baseia-se no modelo de utilização das tarefas de Stein, Grover e Henningsen (1996). Neste modelo, é descrita a forma como as características da tarefa matemática, tal como é implementada na aula, e as exigências cognitivas feitas aos alunos são informadas pela própria tarefa matemática, no que

diz respeito à sua representação em materiais curriculares. A forma de passagem à prática é influenciada pelos objetivos do professor, pelo conhecimento que tem dos conteúdos e pelo seu conhecimento dos alunos. Por sua vez, tudo isto informa o modo como a tarefa matemática é experienciada pelos alunos, potenciando a aprendizagem dos alunos. Este relatório procura elaborar os aspetos finais do modelo de Stein *et al.*

Existem imensas listas de características de ensino eficaz, normalmente compiladas teoricamente ou resultantes de inquéritos ou de descrições de professores de excelência (ver Clarke & Clarke, 2004; Hattie & Timperley, 2007; Education Queensland, 2010). Por exemplo, o que se segue é um conselho que damos aos professores e é retirado de várias listas semelhantes e que se encontram com facilidade. Juntámos um código, dentro de parênteses, para permitir uma discussão posterior.

- Identifique grandes ideias que sustentam os conceitos que procura ensinar e diga aos alunos as finalidades do ensino [clareza].
- Construa com base no que os alunos sabem, tanto por experiência como matematicamente, incluindo a criação e a ligação dos alunos a histórias que contextualizem e estabeleçam uma justificação teórica para a aprendizagem [construir a partir da experiência].
- Envolver os alunos utilizando uma variedade de tarefas ricas e desafiantes, que originem oportunidades para tomar decisões e usem várias formas de representação [variedade e desafio].
- Interaja com os alunos, enquanto eles se envolvem em experiências, encoraje-os a interagir com os outros, incluindo perguntar e responder e particularmente incluam o apoio a

alunos que dele necessitem, além de desafiar os que já estão preparados [interagir e adaptar].

- Adote pedagogias que desenvolvam a comunicação e a responsabilização mútua, encorajando os alunos a trabalhar em pequenos grupos e criando oportunidades de aprendizagem a partir de relatos de alunos ao resto da turma [trabalho em grupo].

No entanto, parece que houve escassas tentativas de perguntar aos alunos o que pensam destes conselhos, ou mesmo que conselhos dariam em alternativa. Este relatório é a nossa tentativa de recolher informação sobre este último aspeto.

### Procurando perspectivas dos alunos

Existem esforços consideráveis para saber os pontos de vista dos alunos sobre aspetos da aprendizagem da matemática. Esses esforços incluem abordagens gradativas a atitudes dos alunos (Hannula, 2004; McLeod e Adams, 1989) envolvendo considerações psicológicas como a identidade, autonomia e relacionamento social, assim como o gostar, ter prazer e ver a finalidade e potencial da matemática. Também tem havido um estudo continuado das crenças dos alunos sobre a natureza da matemática e a forma como ela é aprendida (e.g., Leder, Pehkonen, e Torner, 2002; Pajares, 1992), os valores que associam à matemática, a forma como é aprendida e a sua utilização (e.g., Bishop, 2001), os modos de motivar os alunos (e.g., Middleton, 1995), e as formas como os alunos relacionam as oportunidades de aprender com o modo de se considerarem eles próprios (por exemplo, como ficar mais capaz através de um esforço) e de considerarem o conteúdo (como é que o esforço leva ao sucesso) (Dweck, 2000). Zan e Martino (2010) prosseguiram o seu trabalho argumentando que não existem relações estabelecidas entre atitudes e resultados, sendo que a ênfase deve deslocar-se da medida de atitudes para a sua descrição. Questionaram a ligação causal frequentemente invocada entre crenças, emoções e comportamentos e argumentaram que as atitudes negativas são tão poderosas como as positivas, na influência que exercem sobre o comportamento. Justificaram a existência de abordagens mais narrativas que descrevam as atitudes dos alunos, incluindo amostragens grandes, com o propósito de se compreender o comportamento. Estamos de acordo com esta perspectiva e procurámos aplicar esta posição no estudo dos pontos de vista dos alunos sobre as aulas. As perguntas que orientaram esta faceta do nosso trabalho foram:

- O que dizem os alunos, de maneira espontânea, sobre as características das aulas que valorizam?
- Como é que os temas identificados nas respostas dos alunos sobre as aulas correspondem às perspectivas na literatura em geral?

### Respostas dos alunos a questões pré-definidas sobre aulas

Os dados que se seguem foram recolhidos num estudo amplo, concebido para a recolha de respostas sobre aspetos das aulas e das tarefas, numa amostra de alunos do 5º ano ao 8º ano. Os itens sobre aspetos gerais da pedagogia foram adaptados de Clarke *et al.* (2002) e de Sullivan *et al.* (2009). Os itens relativos às aulas foram escritos propositadamente para o estudo. O estudo teve uma fase piloto com algumas turmas de escolas semelhantes às do projeto. Entrevistámos alunos destas turmas para procurarmos clarificar respostas confusas. Depois de alguma revisão, administrámos o inquérito.

Pedimos que cada escola nomeasse um dos professores do projeto para coordenar a realização do inquérito em todas as turmas dos anos considerados e para assegurar que os alunos o completavam seriamente e de forma individual. Os resultados foram registados profissionalmente, incluindo uma dupla conferência dos registos. No total, 940 alunos de 96 turmas, distribuídas por 17 escolas, completaram os inquéritos.

### Descrições narrativas sobre as perceções dos alunos em relação às características desejadas para as aulas de matemática

Fomos à procura das perceções dos alunos das características desejadas das aulas de matemática, através das suas respostas narrativas. Com esta maneira, esperava-se que conseguíssemos saber melhor as características que os estudantes mais valorizavam, em vez de observar as classificações das características das aulas elaboradas por nós. Realizámos esta procura a partir de:

- respostas abertas a itens específicos do inquérito;
- composições de formato livre, feitas pelos alunos de duas escolas.

Estas abordagens e as descrições dos alunos são descritas nas secções seguintes.

### Respostas ao inquérito sobre as características desejadas das aulas

Num dos itens do inquérito, pedia-se aos alunos que escrevessem uma resposta aberta ao seguinte:

Pensa em todas as aulas de matemática em que estiveste. Agora pensa na melhor aula de matemática em que já estiveste. Descreve o que fizeste nessa aula.

As respostas foram geralmente informativas, mas curtas. Apresentam-se seguidamente exemplos de respostas de tamanho médio.

Jogámos a grande final do futebol matemático. Tínhamos de responder a perguntas e se conseguíssemos antes do adversário (sic) a bola aproximava-se da baliza. Ganhamos.

Categorias	Número de menções
Jogo que nos ensinou matemática	184
Competição ou teste em matemática que sabemos	83
Atividade fora da sala de aula	59
Tópico específico (medida)	395
Problema da vida real (água no tanque, matemática para cozinhar)	49
Usar ou fazer um modelo /pão pita para as frações]	258
Operação específica (multiplicação)	119
Aprender matemática que eu não sabia	16

Tabela 1. Número dos comentários dos alunos nas categorias de «melhor» aula de matemática (n = 930)

Categorias	Número de menções
Pedagogias envolventes (jogos, fora da sala, vida real)	633
Tópico, operação ou matemática aprendida	530

Tabela 2. Combinação de respostas para as características de melhor aula (n = 930)

Fizemos salto em comprimento fora da aula e medimos os saltos de todos e fizemos uma tabela.

Todas as respostas foram lidas e previamente identificadas categorias definidas para as agrupar. As várias respostas foram seguidamente codificadas por um segundo investigador e ajustaram-se as categorias. Para ilustrar os tipos de respostas que os alunos deram, e o modo como foram aplicados os códigos, apresentam-se a seguir alguns exemplos de frases e respetivas categorias. Codificámos como:

Jogo que nos ensinou matemática, afirmações gerais do género «jogámos matemática no computador» e afirmações mais específicas como «pintámos várias caixas numa fração atirámos 2 dados e qualquer fração que saísse tínhamos de pintar».

Tópico específico, afirmações como «somámos frações. Aprendemos como somar com denominadores [sic] diferentes», «álgebra [sic] seria a melhor aula porque eu sou bom nisso», «gosto da percentagem. No princípio do período não consegui perceber mas quando o meu amigo e a setora me ajudaram, tornou-se fácil, como + e -», «quando aprendi as décimas», «aprendi como somar e diminuir numerais mistos e transformá-los em fração».

Operação específica, afirmações como «Comecei a aprender a multiplicar e foi tão fácil e eu gostei muito.»

Usou ou fez um modelo, afirmações gerais do tipo «quando fizemos coisas práticas» e comentários mais particulares como

«matemática dos *smarties*. Usámos *smarties* para trabalhar frações (cores). Foi mesmo engraçado!», «quando fizemos o mapa de uma terra com 24 casas» e até(!) «quando desenhámos cardioides e hipérbolas a partir das cordas numa circunferência [com extremos em pontos sucessivos da circunferência, com a mesma distância].

Este último comentário foi claramente delicioso mas foi evidente que todos os 940 alunos conseguiram descrever a lição da sua preferência. O número de comentários codificados em cada uma das categorias está sumariado na tabela 1. Note que um aluno pode ter comentários inseridos em mais de uma categoria.

O aspeto mais evidente é a diversidade de elementos que os alunos escolheram referir. Talvez tenhamos antecipado que os alunos gostariam de jogos, problemas da vida real e o uso de modelos, mas fomos surpreendidos pelo número de respostas que mencionaram um tópico específico. Para explorar mais esta questão, a tabela 2 apresenta a combinação de algumas das categorias.

Por outras palavras, cerca de metade dos alunos ao descreverem a sua «melhor» aula de matemática referiram um tópico específico, e um pouco mais de metade mencionaram a pedagogia. Isso surpreendeu-nos. Anteriormente tínhamos pedido aos alunos para classificarem o seu nível de confiança na matemática, a partir da pergunta «És bom a matemática?» Para explorar se a referência a um tópico era característica de um tipo particular de aluno, comparámos as respostas dadas pelo terço inferior, na sua autoavaliação da confiança, com as dadas pelo

Categorias	Baixa (n = 337)	Alta (n = 292)
Pedagogias envolventes (jogos, fora da sala, vida real)	233	187
Tópico, operação ou matemática aprendida	174	177

**Tabela 3.** Número de alunos na combinação de categorias, discriminado segundo a autoavaliação da confiança

Categoria	Número de menções
Desafiador	89
Fácil	65
Divertido/Interessante	502
Aprendi algo de novo	179
Sou bom nisto	101
Sair da sala	47
Trabalhar em grupo	51
Fazer modelos	80

**Tabela 4.** Frequência para as respostas explicando a escolha da melhor aula (n = 930)

terço superior. A tabela 3 apresenta o número de respostas em cada categoria da tabela anterior.

Houve uma ligeira tendência nos alunos que se avaliaram como confiantes para mencionarem um tópico. De qualquer forma, o interessante é que muitos alunos que disseram ter falta de confiança na matemática mencionaram um tópico, enquanto muitos dos que se acham confiantes referiram um aspeto da pedagogia.

Em conjunto, estas tabelas indicam que o caminho para o envolvimento dos alunos não se faz unicamente através de pedagogias criativas e também que muitos alunos recordam como melhor aula uma onde a aprendizagem de um tópico específico foi memorável. Também é digno de nota que muitos alunos mencionem uma pedagogia criativa e um tópico. Por exemplo, sair da sala de aula e fazer medições. Concluímos que estes alunos veem a aula como aprendizagem e o tópico que referem está relacionado com essa aprendizagem. Ao mesmo tempo, muitos alunos referem pedagogias particularmente envolventes. Portanto, os professores devem também considerar isso na sua planificação. Suspeitamos que achar formas interessantes para ajudar os alunos a aprender um dado tópico é a associação ideal. No sentido de explorar as razões que estão por trás das descrições dos alunos sobre a sua melhor aula, também lhes pedimos para responder, de forma aberta a:

Por que razão escolheste essa como a melhor aula de matemática de sempre (ou seja, o que é que a fez a melhor)?

Também aqui foram criadas categorias que foram progressivamente refinadas. A seguir estão as categorias que parecem incluir os temas mais importantes, junto com um exemplo ilustrativo de afirmações dos alunos:

Desafiador: «Foi umas das aulas de matemática mais desafiante e a sensação de conseguir uma resposta foi muito boa»,

«Gostei da aula de matemática porque foi preciso pensar.»

Fácil: «Escolhi esta porque não foi muito difícil para mim.»

«Porque não tivemos de fazer nenhum trabalho.»

Divertida/interessante: «Porque nos divertimos.» «Foi divertida porque foi uma corrida para ganhar o jogo.»

Aprendi algo de novo: «Porque aprendi a multiplicar decimais.»

Sou bom nisto: «Porque fui o único a saber isso.» «Escolhi esta como a melhor aula de matemática porque sou mesmo bom nisso.»

Sair da sala: «Saímos da sala, para o ar livre e fizemos

matemática da vida real.» «Andámos de um lado para o outro e usámos a cabeça ao mesmo tempo.»

Trabalhar em grupo: «Gosto mesmo de trabalhar em grupo e acho que trabalhar em grupo me faz pensar melhor.» «Fazemos coisas com os amigos.»

Fazer modelos: «Trabalhámos mais com coisas práticas do que com papel e lápis.» «Adoro fazer coisas e fizemos um robô.»

A tabela 4 apresenta as frequências das afirmações, de acordo com esta classificação

É de notar a variedade, mais uma vez. A categoria mais frequente, com cerca de 45% do total de respostas, foi a de Divertido/Interessante, apontando para que essa característica seja realmente um aspeto importante a considerar na planificação das experiências de aprendizagem. Houve 369 respostas que referiram o aprender algo de novo, a facilidade da tarefa e o desafio, indicando que alguns alunos também são sensíveis a estes aspetos. Parece que o conselho a dar aos professores é o de encontrar formas «divertidas/interessantes» para os alunos aprenderem algo de novo de forma desafiadora.

Em resumo, a impressão principal que chega destas respostas é a sua diversidade e a existência clara de um espectro de formas para os alunos seguirem as aulas. Existiram duas tendências na descrição das aulas. Por um lado, os alunos recordam o ensino eficaz de um conteúdo temático, enquanto outros lembram-se de aspetos pedagógicos interessantes. Ao justificarem a sua escolha de aula, a principal categoria indicada foi a relacionada com o divertido e interessante, mas o aprender algo novo também foi referido com frequência.

### As composições dos alunos sobre a sua «Aula ideal de matemática»

Também procurámos saber o que pensavam os alunos sobre as aulas e o ensino através de um pedido específico que solicitava narrações. Pedimos aos alunos dos 5.º e 6.º anos de duas escolas onde os professores desenvolveram uma sequência de aulas utilizando diferentes tipos de tarefas (um aspeto diferente incluído no nosso projeto) que escrevessem uma pequena composição. O item era especificamente:

Escreve uma história sobre a tua aula ideal de matemática. Escreve sobre os tipos de perguntas ou de problemas a que gostas de responder, o que gostas de fazer e o que gostas que o professor faça, numa aula ideal de matemática.

A intenção era perceber melhor o que os alunos recordavam das suas aulas de matemática. Assumimos que as respostas podiam ser consideradas como um indicador das características das aulas que os alunos preferem. Segue-se um exemplo de uma composição típica de um aluno, tal como foi escrita.

A minha matemática favorita começa com 10 min de introdução, onde o setor explica o jogo para nós e dá ainda tempo para perguntas. Os jogos são para 2 ou mais jogadores e dividimo-nos em grupos que se organizam quem joga com quem em 5 min todos devem estar a jogar a não ser que um grupo tenha um número grande vamos jogar durante 25 min no fim da Aula os grupos acham quem ganhou e todos podem partilhar o que Aprenderam/Gostaram e as estratégias que usaram. A partilha dura 10 min a minha segunda escolha eu faria problemas da vida real Como 250 gramas de açúcar por \$10.50 ou 750 gramas por \$33.15. Eu gosto dos problemas da vida real porque me podem ajudar um dia e é organizada de forma diferente da matemática. Para isto a explicação leva 5 min e é porque não é preciso explicar regras.

Esta resposta ilustra o modo pormenorizado com que os alunos respondem ao pedido. De facto, todos os alunos deram uma resposta detalhada e pensada. Nesta resposta há três elementos chave: o uso de um jogo; a utilização de problemas da vida real; a referência à formação de grupos.

Lemos cada uma das respostas e assentámos num conjunto preliminar de códigos. Um segundo leitor usou este primeiro conjunto e juntou outros quando julgou apropriado. Sempre que uma frase pudesse ser incluída em duas categorias, foi considerada em ambas.

A primeira característica das perguntas, no seu todo, residiu na variedade de aspetos que os alunos comentaram individualmente. Sugerindo mais uma vez que não existe uma aula ideal que seja consensual, existindo várias tipos de aulas em que os alunos se sentem envolvidos. Indicamos seguidamente temas e tendências das respostas. Uma vez que pareceu que existem aspetos das respostas ligadas a condições específicas de cada escola, vamos discutir em separado cada uma delas.

Na escola suburbana afastada do centro, existia um total de 39 alunos distribuídos por duas turmas, uma do 5.º ano ( $n = 21$ ) e outra do 6.º ( $n = 18$ ). A menos que seja especificamente referido em contrário, as respostas são de ambas as turmas. Nesta escola, a maioria dos alunos da turma do 6.º ano respondeu de modo detalhado, portanto vários foram os aspetos mencionados por muitos alunos.

Trinta alunos incluíram o desejo de utilizarem materiais nas suas aulas ideais. Alguns referiram exemplos particulares tais como ursos de peluche, robôs, despertadores, feiras na aula e construção de plantas e mapas. Estes não correspondem aos materiais estruturados que os professores pensariam que aparecessem nestas respostas. Existiram também 25 referências ao trabalho fora da sala de aula (12 do 5.º ano e 13 do 6.º ano). Sabendo que é algo que acontece raramente, este resultado é surpreendente. Vale a pena referir que alguns alunos mencionaram no inquérito que a saída da sala correspondeu à sua aula preferida. Catorze alunos referiram a ligação a aspetos práticos, tais como os relacionados com alimentação, dinheiro e jornais.

Houve 25 menções específicas ao trabalho em grupo, como integrante das aulas ideais, além de 15 referências ao trabalho em pares. Registe-se que também houve nove alunos que escreveram preferir trabalhar sozinhos. A forma de trabalhar na aula é importante para os alunos e qualquer que seja o modo adotado pelo professor, a sua escolha deve ser explicada aos alunos.

Vinte e dois alunos escreveram que gostavam de desafios, 15 referiram que gostavam de propostas abertas ou das que tivessem mais de uma solução. Estes 15 alunos eram todos da turma do 5.º ano. Vinte e três alunos gostavam de ter a ajuda do professor, sendo a maioria deles do 5.º ano. Outros 14 alunos, novamente com o 5.º ano em maioria, desejava a intervenção do professor, circulando, ouvindo ou sentando-se ao lado deles. Curiosamente, muitos destes alunos indicaram que preferiam trabalhar sem interrupções do professor ou dos colegas.

Dezanove alunos escreveram que gostavam que tanto os objetivos da aula, como as explicações do professor fossem claros, em frases como «ele tem a certeza que nós percebemos», «dá exemplos» ou «explica o importante na atividade».

Na escola suburbana do interior, havia três turmas mistas com alunos do 5.º e 6.º anos, num total de 65. As respostas nas diferentes turmas revelaram semelhanças. Cinquenta alunos escreveram que a aula ideal tinha o trabalho em grupo, a pares ou com amigos, enquanto dez alunos preferiam trabalhar sozinhos. Vinte e dois mencionaram as explicações e sete referiram as interações do professor com os alunos. Vinte e seis alunos afirmaram gostar de desafios. Dezanove referiram especificamente o prazer ou divertimento, 22 mencionaram jogos, 17 falaram de atividades práticas, 13 referiram atividades específicas de medições e 15 deram exemplos que relacionavam

o que aprenderam com o seu quotidiano. Tal como aconteceu na outra escola, 18 alunos colocaram a sua aula ideal fora da sala!

Ambas as escolas estavam tecnologicamente bem equipadas. Foi interessante verificar que poucos alunos mencionaram o trabalho com computadores ou com outras tecnologias. Talvez vissem a disponibilidade do uso da tecnologia como um dado adquirido, mas a escassez de referências parece requerer alguma investigação adicional.

Em resumo, parece que as respostas a este item sobre a aula ideal podem vir a depender do professor. Sintetizando as respostas, os alunos gostam de aulas onde se utilize material (embora não estruturado), que estejam relacionadas com a sua vida, que sejam práticas, com alguma ênfase na medição, que se efetuem no exterior da sala, com mais de metade dos alunos a afirmarem que gostam de desafios, e onde a forma de agrupamento é importante. Algumas implicações destas questões vão ser discutidas a seguir.

### Sumário e conclusão

Todos os alunos inquiridos tinham pontos de vista claros sobre a natureza das aulas de matemática e estavam preparados para expor esses pontos de vista. Em termos das descrições hipotéticas de ensino eficaz anteriormente apresentadas, argumentamos que:

- a clareza foi importante, dada a proeminência de menções a tópicos específicos e a importância que os alunos atribuíram a explicações claras;
- construir a partir da experiência foi importante por via das referências de utilização de materiais (apesar de não estruturados), e das ligações às suas vidas;
- a variedade talvez fosse o tema chave em ambos os tipos de dados e esta variedade é importante porque alunos diferentes gostam de abordagens também diferentes;
- os desafios são importante, uma vez que muitos alunos os mencionaram espontaneamente;
- a organização em grupo pareceu ser importante para os alunos, como meio de aprendizagem.

O anterior conselho descrito como interagir e adaptar também ocupou lugar de destaque nas respostas, apesar de, neste caso, talvez na direção oposta ao indicado. Alguns alunos sublinharam que só queriam ser ajudados quando sentissem necessidade, enquanto outros queriam trabalhar sem interrupções do professor ou dos colegas.

No geral, os resultados parecem ser um forte aval à lista preliminar de recomendações aos professores, lembrando que esse aval vem exatamente dos que precisam mais de aulas interessantes e envolventes e que são de facto os alunos.

### Nota

- <sup>(1)</sup> TTML é um Centro de Investigação Australiano fundado pelo Departamento de Educação do Desenvolvimento da Primeira Infância de Vitória, pelo Centro de Educação Católica (Melburne) pela Universidade de Monash e pela Universidade Católica Australiana. Barbara Clarke é também investigadora do projeto.

### Referências Bibliográficas

- Bishop, A. J. (2001). What values do you teach when you teach mathematics? In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 93–104). London: Routledge Falmer.
- Clarke, D., Cheeseman, J., Gervasoni, A., Gronn, D., Horne, M., McDonough, A., Montgomery, P., Roche, A., Sullivan, P., Clarke, B., & Rowley, G. (2002). *Early numeracy research project: Final report*. Australian Catholic University and Monash University.
- Clarke, D. M., & Clarke, B. A. (2004). Mathematics teaching in Grades K-2: Painting a picture of challenging, supportive, and effective classrooms. In R. N. Rubenstein & G. W. Bright (Eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics* (66th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 67–81). Reston, VA: NCTM.
- Dweck, C. S. (2000). *Self-theories: Their role in motivation, personality, and development*. Philadelphia: Psychology Press.
- Education Queensland. (2010). *Productive pedagogies*. Downloaded in January 2010 from <http://education.qld.gov.au/corporate/newbasics/html/pedagogies/pedagog.html>
- Hannula, M. (2004). *Affect in mathematical thinking and learning*. Turku: Turun Yliopisto.
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112.
- Leder, G., Pehkonen, E., & Törner, G. (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- McLeod, D. B., & Adams, V. M. (1989). *Affect and problem solving*. New York: Springer-Verlag.
- Middleton, J. A. (1995). A study of intrinsic motivation in the mathematics classroom: A personal construct approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(3), 254–279.
- O'Shea, H. & Peled, I. (2009). The Task Types and Mathematics Learning research project. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.) *Crossing divides* (Proceedings of 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Volume 2, pp. 714–718). Palmerston North, New Zealand: MERGA.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455–488.
- Sullivan, P., Prain, V., Campbell, C., Deed, C., Drane, S., Faulkner, M., McDonough, A., Mornane, A., & Smith, C. (2009). Trying in the middle years: Students' perceptions of their aspirations and influences on their efforts. *Australian Journal of Education*, 5(2), 176–191.
- Zan, R. & di Martino, P. (2010). «Me and maths»: Toward a definition of attitude grounded on students' narrative. *Journal of Mathematics Teacher Education* 13(1), 27–48.

### Tradução

Fernando Nunes

# APM – 2012

## Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

## Modalidades de associado e seus direitos

### Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo *APMinformação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

### Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

### Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

### Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

### Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

## Preço da quota anual em 2012

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + <i>Quadrante</i>	71,00 €
Modalidade 2 + <i>Quadrante</i>	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço <http://www.apm.pt>

## Assinaturas das revistas para 2012

		<i>Educação e Matemática</i> (inclui actas ProfMat)	<i>Quadrante</i>
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

## Editorial

- 01 **A aula de Matemática como ponta do iceberg?**  
 Maria Helena Martinho

## Artigos

- 03 **Imagens da aula de Matemática**  
 José Manuel Matos
- 11 **Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios**  
 Ana Paula Canavarro
- 18 **[Ainda] O gosto das aulas**  
 Paula Teixeira
- 22 **Uma tarefa com espelhos**  
 Rosa Antónia Tomás Ferreira
- 27 **A comunicação em sala de aula numa tarefa de natureza exploratória**  
 Fátima Gonçalves, Hugo Menino, Marina Rodrigues
- 31 **Uma experiência com cálculo mental**  
 Renata Carvalho, Irene Segurado
- 34 **ProfMat2011, a um passo de um fórum de diálogo?**  
 Gertrudes Amaro
- 36 **XXII SIEM**  
 Sandra Nobre
- 39 **Teachable Moments: oportunidades a não perder**  
 Rosa Antónia Tomás Ferreira, Maria Helena Martinho, Luís Menezes
- 46 **Classificar (I)**  
 Cristina Loureiro
- 47 **Uma «lente» para analisar tarefas numéricas**  
 Joana Brocardo
- 53 **A aula de Matemática: diferentes perspectivas (Depoimentos)**  
 Argumentação matemática em acção: Contornos e desafios, *Ana Maria Roque Boavida*  
 Desenvolvendo a linguagem algébrica, *João Pedro da Ponte, Neusa Branco*  
 Trabalho de Projecto, *Eduarda Veloso*
- 67 **Matemática, Literatura & Aulas**  
 Luís Menezes
- 73 **Imposição ou negociação de significados matemáticos**  
 António Guerreiro

## Secções

- 72 **O problema deste número** *José Paula Viana*  
 Na sala de aula
- 38 **O Problema do ProfMat 2011** *José Paula Viana*  
 Um Emprego pela Internet
- 64 **Tecnologias na educação matemática** *Antónia Domingos*  
 Os materiais electrónicos que acompanham os manuais e a aula de matemática  
*Antónia Domingos, Paula Cristina Teixeira*
- 21 **Materiais para a aula de Matemática**  
 Uma tarefa com espelhos, *Rosa Antónia Tomás Ferreira*
- 76 **Pontos de vista, reacções e ideias...**  
 O que pensam os alunos, *Pedro Alves*
- 79 **Para este número seleccionámos**  
 Opiniões dos alunos sobre as características das aulas de matemática preferidas  
*Peter Sullivan, Doug Clarke, Helen O'Shea*
- 02 **Encontros**