Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2011
114

Setembro ∞ Outubro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Isabel Rocha
Subdirectora Manuela Pires
Redacção Adelina Precatado
Ana Luísa Paiva
Ana Paula Canavarro
Alice Carvalho
António Domingos
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Irene Segurado
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes

A. J. Franco de Oliveira Matemática
António Domingos Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Setembro 2011
Tiragem 3000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222

Sobre a capa

Parte do frontespício do Museu de História Alemã em Berlim. Podem ver-se representados os diagramas utilizados numa das demonstrações do teorema de Pitágoras, e na construção do circuncentro de um triângulo. (A fotografia é da autoria de Charles F. Marion)

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Adosinda Almeida, Alice Martins, Anabela Gaio, Cristina Loureiro, Elvira Santos, Graça Cebola, Henrique Guimarães, Idália Pesquita, Ilda Rafael, João Almiro, Leonor Santos, Mária de Almeida, Paula Cristina Teixeira, Rogério Berricha, Rui Canário, Vítor Pereirinha.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Ser Professor hoje

A publicação do presente número da revista *Educação e Matemática* coincide com a realização de mais um ProfMat e assinala um quarto de século da existência da Associação de Professores de Matemática. Estamos perante uma afirmação clara de uma grande vitalidade profissional dos professores de matemática. O projecto de acção corporizado pela APM tem funcionado como um projecto associativo, com grande expressão junto do conjunto de professores de matemática de *todos os níveis de ensino*, através das suas publicações, encontros, seminários de formação, divulgação e troca de experiências.

Nestes últimos 25 anos muita coisa mudou nas escolas e nas condições de exercício da profissão docente. Nos anos 80, após a aprovação da Lei de Bases do Sistema Educativo, viveram-se tempos de optimismo e depositaram-se esperanças, que viriam a revelar-se infundadas, num projecto de Reforma Educativa que nos ajudou a compreender que a educação e as escolas não mudam por decreto. Ajudou-nos a compreender, também, que os professores não podem ser encarados como meras «alavancas» (expressão usada por um ministro da época) de um processo reformador conduzido de fora para dentro das escolas e construído de cima para baixo.

Hoje e nos tempos que se avizinham as condições de trabalho e as exigências que se colocam ao exercício da profissão docente serão mais exigentes. A realidade escolar é «porosa» relativamente ao meio envolvente e todos os problemas sociais se repercutirão e continuarão a «invadir» o espaço e o tempo escolares. Em ambientes de trabalho mais problemáticos e marcados por crescente complexidade, pede-se, ou melhor, exige-se aos professores que, de modo eficaz transmitam conhecimentos, promovam a autonomia dos alunos, construam métodos inovadores, facilitadores da aprendizagem e ainda que ponham em prática modos de ensino e acompanhamento individualizado, no sentido de construir respostas positivas à crescente heterogeneidade dos públicos escolares. Também se espera dos professores que integrem nas suas práticas profissionais um aproveitamento pleno das potencialidades das novas tecnologias de informação. Os professores são ainda chamados, de forma cada vez mais intensa, a assumir responsabilidades educativas e de gestão fora do seu clássico e restrito território: a sala de aula.

Para responder a este conjunto de exigências há que conceber a profissão docente como um todo que integra quatro dimensões fundamentais:

O professor é um *analista simbólico*, ou seja, alguém que (individualmente e em equipa) equaciona e constrói soluções para situações educativas complexas, marcadas pela singularidade e a incerteza. A aprendizagem através da experimentação (e portanto do erro) e através da interacção permanente com os pares profissionais configura modalidades de aprendizagem no exercício do trabalho. Entendendo o saber ensinar como a tradução de uma competência de fazer com que outros aprendam, a singularidade de cada educando e de cada situação educativa, realça como insuficiente um saber profissional baseado na mera aplicação de procedimentos uniformizados e previamente testados.

Os professores não são, portanto, meros agentes de execução. Precisamente, na acção docente é muito grande a distância entre o trabalho real e o trabalho prescrito. Só a curiosidade e a criatividade permanentes dos professores podem induzir atitudes idênticas por parte dos sujeitos que aprendem. Neste sentido espera-se do professor e das equipas educativas que trabalhem com zelo, o que implica ousar transgredir as normas instituídas. Mais do que um reprodutor de práticas, o professor reinventa e contextualiza práticas, reconfigurando-as de acordo com as especificidades dos contextos e dos públicos. À semelhança do modo de fazer do *artesão*, o professor mobiliza, a partir de um reportório compósito de saberes, os elementos pertinentes para fazer face a situações únicas e marcadas pela incerteza. É nesta perspectiva que o saber profissional construído na acção, muitas vezes tácito, assume uma capital importância.

O professor é, também, um *profissional da relação*, na medida em que a sua actividade se inscreve nas profissões de «ajuda», marcadas pela relação face a face, quase permanente, com o destinatário. A importância decisiva desta dimensão relacional torna mais evidente a inadequação de uma profissão docente enquadrada em limites definidos por uma racionalidade técnica e instrumental. A relação com os alunos impregna a totalidade do acto educativo, não pode ser ensinada, mas apenas aprendida e engloba de forma inextrincável as dimensões intelectual e afectiva.

A crise global que afecta as instituições clássicas de socialização, combinada com um mais democrático acesso a percursos escolares longos, cria à escola problemas de legitimidade que decorrem do desfasamento entre a instituição escolar e a diversidade de expectativas e de lógicas de acção, presentes num público escolar cada vez mais diferenciado. Cabe também ao professor contribuir para que as situações educativas propostas sejam vistas e vividas pelos alunos como pertinentes e significativas. Para conseguir que a sua acção profissional tenha eficácia, o professor precisa ainda de ser um *construtor de sentido*.

No início de um novo ciclo educativo marcado, quer pela extensão da escolaridade e das ofertas formativas a novos públicos de jovens e adultos, quer pela vivência de uma crise social e política com contornos graves e de uma amplitude de certo modo inesperada, os professores precisam de investir no seu rico e diferenciado património associativo, fazer apelo ao reforço e afirmação de um saber que inclui uma visão total da profissão que só pode afirmar-se a partir do *interior* do campo profissional. É tempo de saber ouvir os professores, mas é sobretudo necessário que estes tomem a palavra.

Rui Canário
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

E a avaliação das aprendizagens no NPMEB?

O Novo Programa de Matemática do Ensino Básico foi generalizado. Começou em 2009/2010, em cerca de 400 agrupamentos de escolas/escolas não agrupadas do ensino público de Portugal Continental (correspondente a 38%) que optaram por antecipar em um ano a generalização deste programa. Em 2010/2011 entrou em vigor em todas as turmas dos 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade.

Muitos são certamente os desafios trazidos por este programa. De acordo com o expresso por muitos dos agrupamentos de escolas/escolas não agrupadas, no relatório intercalar do Plano da Matemática II e da primeira fase de generalização do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, do presente ano lectivo, o desafio mais vezes referido foi centrar o ensino na actividade do aluno. Outros poderão contudo ser acrescentados. É o caso de gerir o programa no tempo lectivo atribuído à disciplina de Matemática, de trabalhar as capacidades transversais e da construção de cadeias de tarefas.

É, de fazer notar, que a avaliação do desempenho dos alunos, seja numa perspectiva formativa, seja sumativa, quase não surge referenciada. Nem nos desafios, nem tão pouco no elencar dos aspectos que decorrem conforme o esperado, nem naqueles cuja concretização não é considerada até ao momento satisfatória (estes dois últimos itens apenas foram respondidos por aqueles que anteciparam em um ano a generalização). Que razão(ões) poderá(ão) explicar esta ausência quase total? Será que está tudo bem? Será que nada é preciso ser mudado? Será que a avaliação do desempenho dos alunos não faz parte do currículo? Será que é possível mudar objectivos de aprendizagem, sem alterar práticas avaliativas? Será que a avaliação é um aspecto secundário e não traz implicações para as aprendizagens matemáticas dos alunos?

Pense nisto!

Leonor Santos
Instituto de Educação
Universidade de Lisboa

APM, vista pelos sócios... passado, presente e futuro

Introdução

No editorial da E&M n.º 1, publicada em Janeiro de 1987, afirmava-se logo no início «A criação da APM constitui, sem dúvida, um facto novo no panorama do Ensino da Matemática em Portugal. Surgindo como um movimento organizado de renovação no qual se empenharam algumas dezenas de professores de diferentes graus de ensino, a APM é encarada de modos muito diversos: com alguma esperança por muitos, com expectativa por outros, talvez com receio por terceiros. Mas antes de discutir os desafios que se lhe colocam, importa analisar os seus antecedentes, a sua razão de existir (...)» e terminava referindo «A APM é uma aposta difícil mas que vale a pena fazer. Se ela for ganha, então temos boas razões para acreditar que os professores de Matemática poderão desempenhar um papel decisivo na renovação da Educação Matemática no nosso país. Que bem precisa é.» ....

Hoje, passados 25 anos, a APM é uma aposta ganha, mas importa continuar a reflectir sobre a Associação e a Educação & Matemática associa-se a essa reflexão, através da publicação de dois textos e de testemunhos de sócios.

Um dos textos é a tradução de parte de um artigo da autoria de Paulo Abrantes, publicado, em 1997, na revista espanhola Epsilon, que enquadra a criação da APM no movimento associativo dos anos 80 e destaca as suas principais características. Em particular, fala-nos sobre o potencial da APM no desenvolvimento profissional e no surgimento de uma nova identidade profissional dos professores de Matemática.

O outro texto fala-nos sobre tentativas (goradas) de criação de uma associação de professores de Matemática nos anos 70, atribuindo-se o fracasso em primeiro lugar à situação política que se vivia na altura. É da autoria de Mária Almeida que integra o Grupo de Trabalho sobre História e Memórias do Ensino da Matemática (GTHMEM) da APM, que se propõe dar um contributo e suporte histórico para a análise do ensino da Matemática, tal como a autora refere «O GTHEMMat é um grupo de trabalho da Associação de Professores de Matemática (APM) criado em 2009, que tem por objectivos recolher, estudar, preservar e divulgar documentos e memórias relacionados com todas as dimensões do ensino e da aprendizagem da matemática. São igualmente seus objectivos promover a comunicação e discussão de ideias e trabalhos sobre história do ensino da Matemática e, contribuir para um conhecimento mais alargado da história do ensino da Matemática, nomeadamente entre os professores desta disciplina».

E, quem melhor que os sócios para reflectir sobre a Associação? Procurámos o sentir de sócios fundadores, com 25 anos de associação, e de sócios que entraram este ano, 25 anos depois; e também de sócios com 25 anos, idade que vários dos sócios actuais tinham há 25 anos; sócios com idades diversas (nem sempre os mais recentes são os mais novos), de todos os graus de ensino e de regiões diversificadas. Colocámos-lhes três questões:

1.ª O que o levou a ser sócio da APM?
2.ª Se alguém lhe perguntasse o que é a APM, o que diria (numa única frase)?
3.ª O que espera da APM no futuro?

Dos 140 sócios fundadores, 61 mantém a quota actualizada, sendo 26 do ensino superior e 35 do ensino básico e secundário. Até à data da realização do questionário, tinham-se inscrito este ano, 25 anos após a fundação da APM, 43 sócios e os sócios com 25 anos de idade são 5. Enviámos as questões a 30 sócios fundadores, 23 dos novos sócios e aos 5 sócios com 25 anos. Obtivemos 18 depoimentos, sendo 14 de sócios fundadores (7 do ensino superior e 7 do ensino básico e secundário); 2 de novos sócios e os restantes 2, sócios com 25 anos.

Os testemunhos dos que responderam são um bom contributo para o debate sobre o associativismo e o seu papel na política educativa e a importância da APM para que os professores, como refere Rui Canário no editorial, tomem a palavra.

As redactoras: Ana Luísa Paiva, Cristina Tudella, Manuela Pires

Depoimentos

O que o levou a ser sócio da APM?

As razões de sócios fundadores

Nos sócios fundadores há professores que viram a necessidade de criação de uma associação de professores e outros que se foram envolvendo durante o processo de criação. Pelos seus testemunhos passa muito da história da APM, origem, objectivos, influências, constituição, organização e estilo de trabalho.

Para os professores que estiveram na génese do movimento que deu origem à APM, que promoveram o debate de ideias e também a organização de várias reuniões preparatórias, bem como do 1.º ProfMat, realizado em 1985 em Lisboa e do 2.º ProfMat, realizado em Portalegre onde se constituiu a Associação, a pergunta «O que o levou a ser sócio da APM?» não faz grande sentido, como afirma João Pedro da Ponte, sócio n.º 16: «Quando não existia APM, promovi diversas reuniões para se discutir a sua criação. Na sequência dessas reuniões realizaram-se muitas actividades e a criação da APM envolveu muito trabalho preparatório. No dia em que a APM foi criada não me passou pela cabeça não me registar como membro».

Para outros professores, a criação da APM e ser seu sócio foi a sequência natural do trabalho de formação que existia na altura, como testemunha Lourdes Cangueiro, sócia n.º 140 «Em 1980, foi alterado o modelo de estágio dos 2.º, 3.º Ciclos e Secundário. Foi criada a Profissionalização em Exercício. Um estágio de dois anos, (pela primeira vez, foram abrangidas três áreas de formação) que tinha como ponto de partida as necessidades de formação dos formandos e, até, da própria escola. Era um sistema de formação mais global e mais profundo; propiciava mais reflexão e mais intervenção; privilegiava a auto e a hetero-formação, quer dos formandos, quer dos formadores, bem como dos formadores de formadores (Orientadores Pedagógicos à Profissionalização — OPs).

Durante esses anos, fiz parte do grupo de OPs do 2.° ciclo, da zona de Lisboa, juntamente com colegas bem conhecidos como, p.e., Leonor Filipe, Cecília Monteiro, Leonor Moreira, Mª José Pagarete, Henrique Guimarães. Foram anos de grande exigência, de muita pesquisa e reflexão, sempre tendo como base a partilha de saberes e experiências. Quando foi anunciado o fim da Profissionalização em Exercício, todos nós, e não só nós, sentimos que era fundamental dar continuidade a esta vivência de formação. E, foi, muito, a partir deste tipo de interacções de construção do saber, que nasceu, e floresceu, a APM».

Mas também há sócios fundadores, que estavam então a terminar o curso ou no início da carreira e que foram motivados pelos seus professores universitários ou por colegas. Pelos seus testemunhos perpassa emoção, motivação, identificação com uma luta por melhorar o ensino da matemática, mas que, por vezes, vai para além disso e se torna numa militância mais profunda, como referem Manuel Emídio Costa, Ana Paula Canavarro e Fátima Mendes, que é a sócia fundadora mais jovem a responder.

Fátima Mendes, sócia n.° 15, foi a primeira a responder às nossas questões num registo vibrante e na volta do correio,: «Há 25 anos tinha 23 anos e era professora na cidade de Portalegre há dois anos, depois de ter acabado o curso. Sempre gostei de aceitar desafios e propuseram-me, nessa altura, organizar um encontro de professores de Matemática naquela cidade. Aceitei o desafio e passei a ser membro da Comissão Organizadora, no âmbito da qual fiz de tudo um pouco, mas da qual tenho óptimas recordações. No Encontro reencontrei professores meus, o Paulo Abrantes e o Raul Carvalho, professores que me fizeram gostar ainda mais de Matemática e de ser professora de Matemática. Deixei-me contagiar pela esperança de tornar o ensino da Matemática mais atractivo para os alunos, de modo que todos gostassem da Matemática e de aprender Matemática. Por isso, fiquei muito orgulhosa quando propuseram que os membros da Comissão Organizadora desse ProfMat pertencessem à primeira Direcção da Associação e fossem considerados membros fundadores. E foi assim que me tornei a sócia n.° 15 da APM, ao lado de pessoas que eu muito considerava (e considero), com apenas 23 anos. E passados 25 anos, considero-me uma privilegiada por ter feito parte do momento importante da criação da APM e continuo orgulhosa por ser a sócia n.° 15.»

Manuel Emídio Costa, sócio n.° 92: «Na altura em 1987 tinha as ilusões de quem tinha acabado a licenciatura. Por influência de amigos fomos a Portalegre e aí tornei-me sócio. Queria ajudar a mudar o mundo e a APM para mim respondia e responde às minhas ilusões.»

Ana Paula Canavarro, sócia n.° 106: «A APM nasceu no ano em que eu terminei a minha licenciatura como professora de Matemática. Tinha ido ao primeiro ProfMat apresentar um trabalho realizado ainda como aluna, pela mão de João Pedro da Ponte, e estive no segundo ProfMat em Portalegre, realizado quando concluí o estágio. Naquele ambiente contagiante, era quase impossível não me ter associado».

Outros professores, também jovens, mas já não em início de carreira, aderiram à APM por uma necessidade de dar corpo à renovação da matemática e ao seu desenvolvimento profissional, caso de José António Duarte, Elvira Santos e Cristina Loureiro.

José António Duarte, sócio n.° 9: «O que me levou a ser sócio, na altura, foi a vontade de abraçar o movimento de renovação do ensino da Matemática que nascia e se fazia sentir num conjunto de iniciativas de inovação no âmbito da Didáctica da Matemática. Esse movimento partiu de um conjunto de professores, sócios da SPM, de que não posso deixar de destacar os nomes do Paulo Abrantes, do João Pedro, do Raul Fernando e do Zé Manuel Matos»

Elvira Santos, sócia n.° 67: «O que me motivou a ser sócia, desde a primeira assembleia em Portalegre, foi sentir que era importante criar uma associação em que os próprios professores pudessem ser motores do seu desenvolvimento profissional. Contribuir para a partilha de saberes através da formação e da discussão».

Cristina Loureiro, sócia n.° 12: «Nos primeiros anos da minha profissão como professora do Ensino Secundário apercebi-me rapidamente dos vários desafios que se colocavam ao ensino da Matemática. Nomeadamente, contactei com grupos internacionais que intervinham no ensino desta disciplina e pude constatar que, em outros países, professores e organizações independentes pensavam e discutiam sobre o ensino da Matemática. Constatei assim que havia alternativas ao ensino desta disciplina. Participei então em vários encontros nacionais e internacionais e liguei-me ao grupo de professores de Matemática do jovem Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, completando nessa altura a minha formação profissional como aluna deste departamento. Tive por isso o privilégio de fazer parte do grupo que organizou o primeiro Profmat, em 1985, e de poder perspectivar com outros professores a criação da APM. Posso dizer, por isso, que não me fiz sócia da APM, antes sim, ajudei a constituir a associação para depois me fazer sócia dela. Foi muito claro para mim na altura que qualquer mudança a fazer no ensino da Matemática teria que passar pela intervenção organizada de um grupo muito alargado de professores. Em poucas palavras, posso dizer que sou sócia da APM porque se conjugaram vários factores, insatisfação, conhecimento de outras realidades e crença no movimento associativo.»

Mas, também para outros profissionais, já não tão jovens, este movimento foi uma oportunidade de envolvimento em novas e desafiantes aventuras, como nos conta Eduardo Veloso, sócio n.° 24: «Depois de ter sido tripulante da TAP durante trinta e tal anos, aproximando-me da idade da reforma — 60 anos —, e tendo ouvido dizer que ia abrir um mestrado em Educação Matemática na FCUL fui lá inscrever-me, para que os meus dois amores de longa data — a matemática e o ensino de matemática — se pudessem enfim concretizar...

Na realidade, nunca abandonara completamente a matemática — tinha até estado dois anos em Paris com uma bolsa do governo francês, seguidos de dois anos como assistente de Matemáticas Gerais na FCUL e acompanhara os trabalhos de Sebastião e Silva no movimento da Matemática Moderna. E sempre que ia a New York trazia um ou dois livros...

As inscrições para o mestrado tinham já terminado, mas tive a sorte e a alegria de encontrar um companheiro de anteriores lutas políticas, Paulo Abrantes, que me encaminhou para o sítio certo, um lugar privilegiado para me integrar directamente no coração do movimento para uma melhor educação matemática: aluno livre da cadeira de Metodologia da Matemática, tendo como professor João Pedro da Ponte e como colegas, por exemplo, Henrique Guimarães, Leonor Moreira e Cristina Loureiro!

Estávamos em Outubro de 1985. Pouco tempo antes, numa reunião em Agronomia, estes e outros professores tinham decidido criar a Associação de Professores de Matemática e eu entrei assim nesse turbilhão em direcção à fundação da APM, que aconteceu em Setembro do ano seguinte. O que me levou a ser sócio da APM não tem portanto resposta simples e directa, eu diria que renasci para a matemática como sócio fundador da APM.»

Estes testemunhos fazem-nos sentir como Clara Lino, sócia n.° 33: «A APM é para mim, enquanto professora de Matemática, a minha âncora. O meu porto de abrigo. Mesmo quando me afasto, por breves ou longos períodos, sei que ela lá está. À minha espera. Para me ajudar, acudir, servir... e contar sempre com a minha prestação ‹para o que der e vier›. Sou sócia fundadora da APM com muito orgulho. Estive, também orgulhosamente, na génese da sua formação. É com indisfarçada vaidade que me lembro daqueles dias em Portalegre...»

As razões de sócios recentes

Embora possam existir algumas razões comuns para a adesão à APM agora ou há 25 anos, outras haverá que levam profissionais com alguns anos de serviço a tornarem-se sócios agora. Apenas responderam duas sócias, Olga Seabra e Elsa Oliveira que dão um bom contributo para essa compreensão.

Olga Seabra, sócia n.° 10352: «O facto de ser professora de Matemática e desta forma ter acesso a mais informação nesta área, nomeadamente através da *Quadrante* e da revista *Educação Matemática*, nunca esquecendo os encontros promovidos por esta associação».

Elsa Oliveira, sócia n.° 10367: «Em primeiro lugar por ter acesso a uma diversidade de publicações e materiais para apoio à actividade profissional.

Uma outra razão deve-se ao facto de ter desconto na participação de encontros promovidos pela APM, bem como em material didáctico».

As razões de sócios com 25 anos de idade

Curiosamente as razões para aderirem à APM dos jovens sócios não são muito diferentes dos jovens de há 25 anos, sendo notória a influência dos professores da formação inicial, como testemunham Catarina Miranda e Conceição Tavares.

Catarina Miranda, sócia n.° 10073: «Tomei conhecimento da APM através das minhas professoras de mestrado, que já eram sócias. Estas falaram-me do ProfMat que era um encontro nacional de professores, onde havia partilha de experiências e de conhecimentos. Desta forma decidi experimentar e fiz-me sócia da APM».

Conceição Tavares, sócia n.° 9777: «No dia 3 de Janeiro de 2008, quando frequentava o 4.° ano do Curso de Matemática e Ciência da ESE de Lisboa, eu e dois grandes colegas e amigos, fomos à APM para nos tornarmos sócios desta Associação. Tornei-me sócia da APM através do incentivo dos meus Professores da Formação Inicial. Foram eles que me deram a conhecer os Encontros Nacionais, a revista *Educação e Matemática*, a *Quadrante*... enfim... Foi com eles que descobri este grupo no qual me sinto tão bem!»

O que é a APM?

Procurámos, através, da pergunta «Se alguém lhe perguntasse o que é a APM, o que diria (numa única frase)», saber como vêem os sócios a sua Associação. Nas respostas recebidas há abordagens e registos diferentes, mas não encontramos diferenças entre sócios fundadores e não fundadores.

Alguns sócios optam por dar uma imagem, como Manuel Costa, Isabel Hortas e Conceição Tavares:

Manuel Costa, sócio n.° 92: «É uma lufada de ar fresco no panorama do ensino da Matemática».

Isabel Hortas, sócia n.° 64: «Matemática/Professores, Matemática/Professores...». Conceição Tavares, sócia n.° 9777: «A APM é uma importante referência em Portugal ao nível da investigação, da formação e da Educação Matemática em geral».

Outros referem os seus objectivos, como Fátima Mendes, Ana Paula Canavarro e Elsa Oliveira.

Fátima Mendes, sócia n.° 15: «A APM é uma associação de professores que tem como propósito a melhoria do ensino da Matemática, investindo bastante na divulgação de boas práticas e de textos que aumentem o conhecimento científico e didáctico dos seus membros».

Ana Paula Canavarro, sócia n.° 106: «Para mim, a APM é a casa dos professores que querem que os seus alunos aprendam melhor Matemática e trabalham para que isso aconteça».

Elsa Oliveira, sócia n.° 10367: «Associação que promove o desenvolvimento do ensino da matemática».

Um número significativo de sócios salienta a forma de trabalho da Associação, como Cecília Rebelo, Conceição Mesquita, João Pedro da Ponte, Olga Seabra e Catarina Miranda.

Cecília Rebelo, sócia n.° 86: «Um ponto de encontro para muitas e boas discussões acompanhadas de partilhas de ideias e de saberes».

Conceição Mesquita, sócia n.° 93: «A APM é um espaço de reflexão e uma referência para muitos professores de Matemática».

João Pedro da Ponte, sócio n.° 16: «É uma associação que congrega professores de Matemática, formadores de professores e investigadores interessados nos problemas do ensino e da aprendizagem da Matemática, tendo em vista a realização de atividades conjuntas para a resolução desses problemas».

Olga Seabra, sócia n.° 10352: «Uma associação que promove a partilha». Catarina Miranda, sócia n.° 10073: «APM é partilha de experiências e conhecimentos entre pessoas que possuem o mesmo gosto, o ensino da matemática».

O que espera da APM no futuro?»

E, com a pergunta «O que espera da APM no futuro?» saber o que pensam que deve ser a acção da APM.

Há nos sócios fundadores da APM uma forte relação de pertença à sua Associação, por isso, a uma análise mais ou menos crítica da situação actual, seguem-se propostas de acção, que ajudarão a que a APM continue a ser como sempre foi, como diz Isabel hortas, sócia n.° 64: «Continue a ser o que sempre foi... uma Associação presente e interveniente na educação Matemática deste país, sem esquecer a componente da investigação».

No entanto, também nas linhas de acção para o futuro não há diferenças significativas entre os depoimentos pelo facto de serem ou não sócios recentes, pelo que optámos por não fazer essa distinção.

Há sócios que continuam a valorizar a Associação como espaço de trabalho colaborativo. São exemplos disso, os testemunhos de José António Duarte, Conceição Mesquita e Catarina Miranda.

José António Duarte, sócio n.° 9 (autor do hino da APM, que não podíamos de deixar de reproduzir nestas páginas): «Um espaço de debate, reflexão, produção e intervenção no âmbito do ensino da Matemática. Também de acolhimento de ideias, mais consensuais ou mais polémicas. Uma comunidade cada vez mais forte que possa dizer (como no hino) (...) gostamos de estar aqui! (...)».

Conceição Mesquita, sócia n.° 93: «Espero que a APM seja uma associação com a participação activa dos seus sócios, que continue a apontar caminhos e a proporcionar a troca de ideias e experiências.»

Catarina Miranda, sócia n.° 10073: «No futuro espero que a APM continue a evoluir acompanhando as mudanças do ensino da matemática e que continue a proporcionar momentos de partilha entre os vários membros».

Outros sócios privilegiam aquilo que pode fazer como entidade e fazem propostas de acção, algumas vezes para níveis de ensino concretos. São disso exemplo os testemunhos de Fátima Mendes, Cecília Rebelo, Elvira Santos, Alice Inácio, Ana Paula Canavarro e Elsa Oliveira.

Fátima Mendes, sócia n.° 15: «Espero que consiga prosseguir com o seu propósito de contribuir para a melhoria do ensino da Matemática, nas suas várias vertentes, e que consiga fazê-lo acompanhando as mudanças que se vão verificando ao nível da sociedade, da escola, da sala de aula e dos alunos em geral».

Cecília Rebelo, sócio n.° 86: «Espero que continue a ser uma associação de referência profissional para todos os que com ela colaboram. Espero que continue a afirmar-se com uma imagem pública de qualidade nas ideias nos projectos que leva a cabo»;

Elvira Santos, sócia n.° 67: «Espero que não seja um espaço de confronto político mas sim de apoio à formação dos professores, descentralizando a sua acção. Deve estar mais presente nas escolas através, não só, das suas publicações, mas também, de eventos que proporcionem a discussão de temas científicos e/ou pedagógicos»;

Alice Inácio, sócio n.° 133: «continue a lutar por um ensino/aprendizagem que não seja uma mecanização — como o aumento da importância dos exames pode implicar....».

Ana Paula Canavarro, sócia n.° 106: «Espero que no futuro a APM se foque naquilo que é a sua missão mais importante: proporcionar condições para que os professores possam ensinar aos alunos uma Matemática de qualidade, relevante, com o apoio de recursos poderosos. Isto implica colaboração, formação, reflexão, materiais, e uma voz capaz de se afirmar socialmente com credibilidade».

Elsa Oliveira, sócia n.° 10367: «Que continue a apoiar e divulgar actividades relevantes para a aprendizagem da matemática a todos os níveis de ensino.

Ao nível do ensino superior, em particular, considero que seria importante haver um maior apoio, interacção, troca de ideias e divulgação de actividades/investigações na área do ensino e aprendizagem da matemática, em contexto de ensino a distância».

Recebemos dois contributos de João Pedro da Ponte e Eduardo Veloso, que, para além de uma análise crítica aprofundada, propõem linhas de acção detalhadas, bons contributos para o debate que a nossa presidente, Elsa Barbosa, desafiou os sócios a fazer no editorial da EM n.° 111.

João Pedro da Ponte, sócio n.°16: «Espero que a APM consiga congregar o universo dos potenciais interessados (presentemente só o faz de modo parcial), consiga fazer uma melhor identificação dos problemas que afectam o ensino desta disciplina (presentemente essa identificação é difusa e confusa), consiga criar projetos mobilizadores para enfrentar esses problemas (presentemente não vejo muitos projetos deste tipo), e consiga encontrar formas organizativas de promover uma participação alargada dos seus membros na realização desses projetos (que presentemente me parecem escassear). Na sequência de tudo isto, muitas outras coisas virão por acréscimo, como a influência nas escolas, a melhoria nos métodos de ensino por parte dos professores, a melhoria das condições de ensino da Matemática, a melhoria da aprendizagem da Matemática pelos alunos, o envolvimento das comunidades e a sociedade de uma forma positiva com o ensino da Matemática, o reconhecimento social do valor do trabalho do professor de Matemática, etc.».

Eduardo Veloso, sócio n.° 24: «A APM, embora seja ainda a maior e mais activa associação profissional de professores em Portugal, está a passar, depois de uma década e meia de intensa actividade, por um período de relativa estagnação e mesmo enfraquecimento, devido a causas internas e externas.

O que espero é que a APM ultrapasse a situação descrita na resposta anterior. Com a convicção de que as circunstâncias adversas referidas apenas poderão ser modificadas e ultrapassadas através de uma reflexão sobre a presente situação — franca, viva e aberta a todos os sócios — com o objectivo principal de vir a construir posições da APM sobre os principais problemas da política educativa no campo do ensino da Matemática e da educação em geral.

Os sócios da APM estão longe de ter, em relação às questões de política educativa que enunciarei em seguida, as mesmas posições de partida. Mas daí não se pode concluir que, através do referido tipo de reflexão e discussão, não se possam construir com o tempo posições da APM relativas a algumas ou a todas essas questões, sujeitas a evolução e precisão com o passar dos anos e que se tornem objectivos da luta activa da APM na sociedade portuguesa.

É necessário e urgente discutir:

- *a deficiente formação em matemática dos futuros professores* de Matemática nas ESE+s e Universidades; a comunidade da educação matemática tem mostrado pouco interesse por essa razão primeira da má qualidade do ensino de matemática;
- *o paradigma da escola do futuro:* devemos manter e retocar a escola fábrica, adequada à produção já seleccionada e classificada de trabalhadores para os diversos «postos de trabalho» na sociedade, herdada da sociedade industrial do séc. XIX (com toques de sirene de 45 em 45 ou 90 em 90 minutos) ou caminhar para um novo paradigma da educação centrado no trabalho de projecto, próprio de uma escola que não se identifica com uma preparação para a vida mas que é já uma experiência de vida em sociedade, com meios actuais de comunicação, estudo e trabalho, mantendo os alunos envolvidos em actividades interessantes e diversificadas — artísticas, científicas, literárias, tecnológicas?
- *a avaliação do desempenho dos alunos:* vamos aceitar que continue a intensificar-se o modelo em que estamos a ser cada vez mais envolvidos: exames escritos de tempo limitado, testes intermédios para puro treino, ensino afunilado em direcção aos mesmos exames, currículo reduzido aos tópicos, processos e tempos de resposta que possam ser avaliados mediante esses exames, ou vamos repensar todo o sistema, avaliando os produtos dos alunos, a apresentação oral e escrita dos projectos, tornando a avaliação um verdadeiro processo de formação de alunos e professores?
- *a política dos manuais escolares:* que devemos fazer, manter passivamente o sistema actual ou pensar numa evolução a prazo para a sua progressiva substituição pela produção de materiais para alunos e de livros auxiliares para o professor, seja em papel seja na forma de *e-book*?; e para um sistema que reconheça os meios modernos de comunicação entre os alunos e entre os alunos e o professor?
- *matemática (e arte, e música, e filosofia, e tecnologias, e...) para todos:* devemos prosseguir a actual tendência para a multiplicação e separação dos trajectos — educação/formação profissional, ciências/letras, humanidades/tecnologias, matemáticas A, B, etc. — ou devemos evoluir para um sistema que corresponda à universalidade desejável de uma educação para todos — um ramo comum para TODOS os alunos, com a eventual introdução de opções nos últimos anos de escolaridade obrigatória? Uma formação baseada na pretensa aquisição de conhecimentos e técnicas dispersas, ou uma experiência prolongada de vida e trabalho da comunidade escolar, que permita aos alunos a apropriação da rica herança cultural que foi deixada pelas gerações anteriores?

Espero que a APM termine enfim as comemorações e encontre os meios necessários para abrir uma ampla discussão entre os sócios sobre estes temas, de resto o modo ideal de comemorar os anos que se seguiram à sua criação...».

A redacção da *Educação e Matemática* agradece a todos os sócios que responderam às nossas questões e está confiante que os seus depoimentos serão um bom contributo para o debate que a APM está a realizar sobre a Associação.

Damos agora «voz» ao hino da APM!

Hino da APM

Terra imensa, forma e número lá vemos
Tanta vida, tantos laços p'ra criar
E lá longe, o infinito pretendemos
Com a APM alcançar.

Gente nova, gente velha, um projecto de uma ideia
Construímos um espaço onde criar
E hoje temos muita gente que semeia
Novos rumos, novas formas, apostar

A APM é sermos assim
A APM é sermos assim
Dizer de viva voz
Que não estamos sós
Vale a pena estarmos aqui

Matemática, uma leitura do mundo
Uma arte, forma de comunicar
Um saber, um querer lá bem no fundo
Uma ajuda a interpretar

Não é fria, nem agreste, nem se solta como o vento
Não é rocha, coisa firme sem mudar
Traz consigo, novas formas, novo alento
Tem consigo muita força p'ra nos dar

A APM é sermos assim
A APM é sermos assim
Dizer de viva voz
Que não estamos sós
Vale a pena estarmos aqui

Muita história e um passado recente
ProfMat que na capital nasceu
Portalegre foi o berço desta gente
Que ao longo de anos cresceu

Hoje é corpo, hoje é vida, hoje é Évora, alegria
Há vinte anos, que juntámos p'ra mudar
Uma luta que travamos todo o dia
Um percurso longo p'ra continuar

A APM é sermos assim
A APM é sermos assim
Dizer de viva voz
Que não estamos sós
Vale a pena estarmos aqui

Setúbal, Novembro de 2006

Letra: *José Duarte (alteração do refrão de J. C. Godinho)*
Música (gravada em CD e editada em 2006): *José Carlos Godinho*

O Movimento Associativo e a Identidade Profissional dos Professores de Matemática[1]

Paulo Abrantes

Este texto corresponde a uma conferência que proferi em Sevilha na homenagem póstuma ao professor Gonzalo Sanchez Vasquez, promovida pela Sociedade Andaluza de Educação Matemática «Thales». [...] No momento de decidir sobre o tema da conferência, optei por tentar analisar o que nos diz a experiência portuguesa sobre o potencial que as associações de professores têm no desenvolvimento profissional e no surgimento de uma nova identidade profissional entre os docentes. [...]

Associações de professores em Portugal: um fenómeno dos anos 80[2]

O nascimento e rápida expansão das associações de professores no panorama educativo português constituem um fenómeno dos anos 80. Com efeito, na década passada nasceram e cresceram com uma rapidez quase inimaginável associações profissionais ligadas a quase todas as disciplinas que fazem parte dos nossos currículos escolares.

Isso não nos surpreenderá se tivermos em conta que só depois de 1974 os movimentos susceptíveis de criar este tipo de associações puderam ter um desenvolvimento normal. Pelo contrário, [...] associações similares existiam noutros países há várias décadas. Curiosamente, as associações não surgiram imediatamente depois da mudança do regime político em 1974; nesse momento nasceram ou foram reactivadas organizações como os sindicatos e associações científicas, cuja acção continha parcialmente alguns dos objectivos das actuais associações profissionais: envolver os professores na discussão dos problemas do ensino, intervir na política educativa, organizar actividades de formação, etc.

De um modo geral, as associações científicas – dirigidas invariavelmente por professores universitários – dedicavam secções dos seus encontros e boletins aos problemas do ensino, e isso era tanto uma questão de necessidade como de bom senso, já que a maioria dos seus sócios eram professores não universitários. Também os sindicatos promoviam actividades de formação ou debates sobre temas pedagógicos, ainda que essa não fosse a sua actividade essencial.

Nos anos 80 foram surgindo sucessivamente associações de professores ligadas às diversas disciplinas. Este movimento partiu, em geral, de professores do ensino não superior, mas deve sublinhar-se que, em muitos casos, os professores que se dedicavam às didácticas específicas de cada disciplina (nas Universidades ou nas Escolas Superiores de Educação criadas naquele tempo) ou que de algum modo estavam ligados à formação de professores, desempenharam um papel importante. Isto sugere uma relação forte entre o movimento associativo e o surgimento da Didáctica e da formação específica como campos de investigação[3].

Muitos dos participantes nas novas associações eram professores que em anos anteriores se tinham envolvido ou feito parte das associações científicas ou do movimento sindical e que agora percebiam que a lógica dessas organizações não passava pelas grandes questões pedagógicas relacionadas com a aprendizagem. A rapidez com que as associações se desenvolveram e foram atraindo um número crescente de professores devido à sua actividade, parecia dar razão aos seus fundadores, salientando a natureza distinta das novas organizações face às que já existiam.

Há, naturalmente, diferenças entre as associações. Algumas estão muito ligadas pela forma como se constituíram ou pela prática a certos níveis de ensino (em especial o secundário), mas há outras que integram professores de todos os níveis (desde o primário ao superior), em torno do interesse comum pelos problemas do ensino e aprendizagem de uma disciplina[4]. Por outro lado, algumas associações mantiveram um funcionamento mais centralizado e iniciativas mais tradicionais, enquanto outras formam núcleos regionais e grupos de trabalho autónomos e as suas realizações têm um estilo mais aberto[4].

Mas também há uma grande afinidade entre muitas delas quanto aos objectivos, em particular a tendência para colocar a formação e o desenvolvimento profissional dos professores ligadas, por um lado, à prática pedagógica e à reflexão sobre a prática e, por outro, à inovação curricular e à investigação em educação.

O Caso da Associação de Professores de Matemática

A Associação de professores de Matemática (APM) constitui um exemplo particularmente interessante. Fundada em 1986, num encontro que reuniu em Portalegre cerca de duzentos professores (no 2.º ProfMat), tem hoje mais de 4.000 sócios efectivos, professores de todas as regiões e distritos do país e de todos os níveis de ensino, 14 núcleos regionais (um número com tendência a aumentar) que organizam as suas próprias actividades (encontros, boletins, projectos, exposições, etc.) e diversos grupos de trabalho (História da Matemática, Geometria, Investigação, Matemática para os primeiros anos, Internet). A nível nacional, edita um boletim informativo, duas revistas – «Educação e Matemática» (cinco vezes ao ano) e «Quadrante» (dedicada à investigação, duas vezes ao ano) – e um grande número de publicações não periódicas, entre as quais estão todas as teses de mestrado e doutoramento realizadas em Portugal na área da educação matemática. A APM tem também, um centro de recursos que apoia directamente os sócios e as escolas e um centro de formação homologado oficialmente.

Uma das iniciativas mais conhecidas da APM é o ProfMat, congresso nacional que tem lugar anualmente desde 1985. Realizando-se sempre em lugares diferentes, o ProfMat atraiu nos últimos anos um número de participantes muito elevado: 1.200 em Leiria (1994), 1.450 em Évora (1995), 1.300 em Almada (1996). Mais significativo do que estes números seriam, talvez, outros indicadores: muitas sessões de trabalho dos mais diversos níveis que figuram nos programas destes encontros são preparadas e dinamizadas por um número muito apreciável de professores que nestes últimos três anos corresponde aproximadamente a 15% do total dos participantes, sendo professores do ensino não universitário cerca de três quartos dos «participantes activos».

Nos dias que antecedem o ProfMat, e no mesmo local, a APM organiza anualmente (desde 1990) o Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM), que decorre em simultâneo a numerosos cursos de formação. Este seminário, para além de reunir a comunidade de investigadores da área da educação matemática, vem atraindo um número crescente de professores. O SIEM, a revista «Quadrante» e a colecção de teses constituem as actividades mais importantes, que são coordenadas pelo grupo de trabalho para a investigação.

A reflexão que pretendo fazer a respeito do papel que o movimento associativo desempenha no desenvolvimento profissional dos professores de Matemática terá como ponto de partida três exemplos: dois que se referem a uma participação activa nos Encontros e o terceiro um projecto de autoformação.

A participação activa em encontros de professores

Numa investigação recentemente concluída, Graça Correia (1997) descreve e analisa a evolução de três professoras do ensino básico na sequência de um trabalho colaborativo sobre as novas orientações curriculares, em especial a resolução de problemas e a interacção em sala de aula. Durante alguns meses, as três professoras, com o apoio da investigadora, reuniram-se semanalmente, liam e comentavam textos de didáctica, preparavam tarefas para os seus alunos e discutiam o que realmente acontecia nas aulas.

Esta investigação mostra as potencialidades do trabalho colaborativo no desenvolvimento profissional dos professores. É importante salientar-se como a participação activa num encontro profissional introduziu uma nova dimensão na forma como aquelas professoras enfrentavam o seu próprio trabalho. Com efeito, na fase final do trabalho realizava-se um Encontro sobre o ensino da matemática, organizado pela APM na região onde as professoras trabalhavam. Sabendo que muitos docentes do ensino básico estariam presentes, a investigadora incentivou as três professoras a participar, apresentando uma comunicação e dinamizando uma sessão prática sobre o trabalho que tinham realizado. A experiência foi vivida de um modo muito intenso pelas professoras:

«Foi uma experiência insólita para mim. Nunca tinha passado por isto e tinha receios (...) Depois tranquilizei-me completamente porque estava a ver a adesão do público.»

«Eu estava a viver aquilo de tal maneira que só me apetecia mais tempo para continuar.»

«(...) O facto dos colegas participantes terem manifestado interesse deu-me satisfação e prazer. Deu-me mais segurança e força para o futuro.»

Estas citações foram extraídas das entrevistas realizadas pela investigadora no final do ano lectivo, nas quais as professoras comentaram a sua intervenção no Encontro. O «feedback» produzido pela comunicação directa com os seus pares ajudou a valorizar aos seus olhos o seu próprio trabalho, aumentando a sua segurança e força para o futuro. Afinal o valor do trabalho era reconhecido pelos outros professores!

Uma outra experiência pessoal foi comunicada por uma professora do ensino secundário (Manuela Pires) na conferência final do ProfMat 96, que proferiu em colaboração com uma companheira do ensino básico e outra de uma Escola Superior de Educação, todas elas fundadoras de um núcleo regional da APM (Elvira Ferreira, Manuela Pires e Isabel Rocha, 1996)

Foi por volta de 86-87 que Isabel e eu tivemos o primeiro contacto com a APM através da Revista. Era curioso que apesar de vivermos na mesma vila, agora cidade, não nos conhecíamos.

Ver que nos havíamos inscrito no ProfMat de Viana (em 1989) foi uma agradável surpresa. Quando voltámos de Viana já éramos da família, e junto com outros companheiros que também tinham participado, trazíamos energia suficiente para fundar o nosso núcleo.

Na primeira assembleia elegeu-se a Elvira, que sendo professora do primeiro ciclo...

Neste caso, a participação num Encontro nacional actuou como factor de conhecimento pessoal e profissional de professores, que, sendo da mesma região e tendo interesses comuns, nem sequer se conheciam. Também funcionou como um estímulo para criar a sua própria organização regional, que ficou marcada desde o princípio pela prática de colaboração entre professores de diferentes níveis de ensino em diversos tipos de projectos.

Na mesma conferência, Manuela Pires refere-se a uma nova fase de participação de muitos professores de Matemática em actividades de natureza associativa.

Em Julho de 1996, em Sevilha, 108 professores portugueses participaram no ICME. Quando regressaram uns foram para Braga organizar o HPM, outros o ProfMat, outros preparar o CIAEM de 97 em Setúbal…

A partir destes dados a professora pergunta: O que está a acontecer com os professores de Matemática? Na sua opinião, este movimento contribuiu para o surgimento de numa nova identidade profissional.

Com efeito, em cerca de 10 anos, este movimento criado pela APM modificou consideravelmente o ambiente profissional dos professores de matemática, proporcionando oportunidades para a constituição de grupos regionais, a organização de Encontros dos mais diversos tipos e, em geral, a participação em iniciativas que começaram a ultrapassar as fronteiras nacionais.

Autoformação e inovação curricular

Um projecto desenvolvido por um grupo de professoras numa escola de Lisboa, a partir de 1993-94, constitui um notável exemplo de iniciativa profissional e do papel que o ambiente associativo pode desempenhar. Trata-se de uma escola especializada no ensino artístico, na qual muitos alunos do secundário (do 10.º ao 12.º ano, correspondente as idades de 16 a 18) têm uma disciplina anual de Matemática chamada «Métodos Quantitativos» (MQ), muito pouco adequada aos seus interesses e necessidades, e que tinha como objectivo atenuar as atitudes tradicionalmente negativas que estes alunos tinham em relação à matemática. Foi neste contexto que um grupo de professoras decidiu iniciar um projecto com o propósito de reorientar o programa de MQ, de maneira que se tornasse uma experiência positiva e significativa para os alunos.

Um aspecto importante é que esta iniciativa foi proposta e conduzida como um projecto de autoformação no âmbito da recente legislação, que admite tais iniciativas como uma possível modalidade de formação contínua dos professores. O centro de formação da APM não só deu cobertura legal ao projecto como ajudou, de um modo efectivo as professoras a elaborarem a proposta inicial, a encontrar apoios e a fazer a avaliação final do projecto. Também organizou um seminário para proporcionar formação e promover um intercâmbio de experiências e debate entre os diversos grupos que desenvolviam projectos em diversas escolas.

Apostando fortemente numa perspectiva curricular que destacava a natureza problemática e exploratória da actividade matemática dos alunos e que valorizava conexões entre diferentes temas da Matemática e entre estas e a realidade (sobretudo as relações entre a geometria e a arte), o grupo foi capaz de desenvolver uma experiência docente que se revelou muito positiva do ponto de vista das reacções dos alunos. Para além disso, e talvez a mais importante, permitiu criar uma dinâmica de trabalho colaborativo entre as professoras que se reuniam semanalmente, para preparar em conjunto as actividades de aprendizagem e para discutir o que acontecia nas aulas.

Esta dinâmica ultrapassou claramente os limites temporais do projecto inicial. No ano seguinte, o Ministério da Educação acabou por propor ao grupo que elaborasse um programa para a disciplina de MQ susceptível de ser assumido oficialmente a nível nacional pelas escolas de ensino artístico. Também esta etapa foi concluída com êxito e três anos depois do início deste processo o grupo manteve a sua dinâmica e desenvolve novos projectos que têm uma contribuição natural do inicial.

O trabalho destas professoras, não obstante a forte coesão interna do grupo, nunca esteve isolado e não poderia ter-se desenvolvido de forma isolada. O grupo recorreu, varias vezes a apoios externos, que nalguns casos se traduziram em sessões de trabalho formais sobre temas sobre os quais sentiam necessidades de formação: as relações entre a geometria e a arte e as perspectivas actuais sobre a evolução dos alunos constituem exemplos destes temas. Esta formação não foi definida à «priori» mas sim determinada pela lógica de evolução do projecto e pelas necessidades sentidas pelas professoras.

A APM não se limitou a constituir um contexto legal e formativo (no sentido estrito do termo) deste projecto. Na verdade, a revista «Educação e Matemática» publicou no seu número 30 um artigo destas professoras (ver Mansos *et al.*, 1994) sobre esta experiência. Em Novembro do mesmo ano, no ProfMat 94, o projecto foi apresentado pelas suas autoras. E nos encontros dos anos seguintes, algumas professoras do grupo dinamizaram sessões de trabalho acerca do ensino da geometria, que, saindo do âmbito do trabalho realizado, se baseou na experiência adquirida com esse trabalho.

A possibilidade de «sair da escola» e divulgar o trabalho realizado em publicações e encontros contribuiu para que os professores tivessem um «feedback» dos seus colegas sobre o que faziam, desempenhando um papel muito importante não só para a profundidade do seu trabalho, como também se reflectiu na motivação do grupo para prosseguir e no desenvolvimento profissional dos seus membros. Em 1997 uma das professoras do grupo apresentou pela primeira vez uma comunicação num seminário de investigação em educação matemática, precisamente dedicado à análise de casos de inovação curricular.

Duas condições contribuíram decisivamente para o êxito em termos profissionais do projecto mencionado. Uma delas foi a possibilidade legal de desenvolver o projecto e enquadrá-lo numa das modalidades homologadas de formação. A outra foi a sintonia do trabalho realizado com as perspectivas do Centro de Formação (CF) da APM, o qual, ao contrário do que sucedia com a maioria das organizações responsáveis pela formação, rejeitou a ideia de dar prioridade à realização de cursos (tradicionais) destinados a «ensinar» aos professores os conhecimentos requeridos pelos novos programas saídos da reforma curricular.

Na realidade, o CF definiu a sua estratégia valorizando sobretudo os processos de formação baseados na acção pedagógica dos professores e na sua reflexão sobre a prática:

Além disso, valoriza-se a concepção, desenvolvimento e avaliação de projectos integrados na prática pedagógica, assim como o trabalho colaborativo dos professores. A responsabilização e implicação pessoal e profissional dos professores constituem elementos essenciais deste projecto, que procura atribuir à autoformação um lugar destacado. (APM, 1993).

[...] O papel que os projectos profissionais podem desempenhar numa lógica de formação (e, em particular, de autoformação) tem a ver com a própria natureza da actividade de projecto. O antropólogo francês Jean-Pierre Boutinet (1990) destaca quatro pressupostos essenciais na noção de projecto: a globalidade da situação, a sua singularidade, a gestão da complexidade e das incertezas e a exploração de oportunidades num ambiente aberto. Este autor chama a atenção para aquilo que é uma característica distintiva do projecto relativamente a outros tipos de actividades: a integração da concepção e da realização, quer dizer, o facto de não haver separação entre os que pensam e os que executam [...].

Para além deste carácter de globalidade, num projecto enfrenta-se uma situação nova, em que existem aspectos únicos e em que se procura dar resposta a um problema que ainda não foi resolvido. Por outro lado, desenvolver um projecto significa gerir a sua complexidade e incerteza, existindo uma tensão permanente entre a teoria e a prática, entre as lógicas individuais e a lógica colectiva, entre o tempo e o espaço, entre o êxito e o fracasso.

Ao analisar um projecto desenvolvido por um grupo de professores na sua escola, Canavarro e Abrantes (1994) focam algumas implicações deste modo de trabalho na formação:

A concepção, realização e avaliação de um projecto, por um grupo de professores, que parte da identificação de problemas da ua prática e que implique uma intervenção sobre essa prática, pode constituir um contexto onde a colaboração e a reflexão são elementos necessários e naturais. (p. 284).

Mas, para além da colaboração e da reflexão, estes autores referem que a natureza do projecto pode traduzir-se num aumento do interesse e da motivação dos professores, assim como contribuir para que se aceitem como co-responsáveis (e não só como intermediários) das decisões de carácter pedagógico. Assim, todos estes aspectos são elementos cruciais na formação permanente quando esta é encarada numa perspectiva de desenvolvimento profissional [...]

O associativismo e a identidade profissional

[...] O movimento associativo está a desempenhar um papel significativo no surgimento de uma nova identidade profissional dos professores de Matemática. [...] Em Portugal, nos últimos anos, a APM contribuiu para dar a muitos professores de Matemática uma capacidade de iniciativa e um protagonismo crescentes no desempenho da sua profissão. O *segredo* pode estar no modo como foram entendidas três orientações fundamentais e na forte conexão entre elas: a) valorizar a formação numa perspectiva de desenvolvimento profissional; b) atribuir um papel central às questões da didáctica numa óptica de inovação curricular e da investigação educativa e c) gerar um movimento associativo forte marcado por um ambiente aberto e de grande participação e iniciativa dos professores.

Será esta uma ilusão provocada pelo entusiasmo que geralmente desperta um movimento novo nos seus primeiros tempos? Não o sei. Se é uma «ilusão» prefiro pensar no sentido único que esta palavra tem na língua espanhola – a que Julián Marías, no seu «Breve tratado da ilusão», chama «um segredo da língua espanhola». Em todas as outras línguas, uma ilusão é simplesmente uma falsa convicção, um equívoco. Em espanhol, a palavra tem mais um sentido, o da realização projectiva de um desejo, ou, como escreve Julián Marías, «a ilusão é um desejo com argumento».

Neste mesmo sentido posso dizer que, para mim, foi uma *ilusão* participar ao lado de companheiros de toda a Espanha nesta homenagem póstuma a Gonzalo Sánchez Vásquez.

Notas

[1] Tradução parcial do artigo «El movimiento asociativo y la identidad profesional de los profesores de matemáticas», publicado na revista Epsilon n.º 38, da S.A.E.M. <Thales>, em 1997.

[2] Esta primeira parte do texto segue de perto a análise feita em Abrantes, 1994.

[3] Esta relação é particularmente notória no caso da Matemática. O movimento que deu origem à Associação de Professores de Matemática surgiu ligada no tempo (e nos feitos) ao regresso a Portugal do primeiro doutorado em Didáctica (para a Universidade) e dos primeiros licenciados com pós graduação nesta nova área (para as Escolas Superiores de Educação) e também ao sistema de formação em exercício, no qual vários formadores tinham criado laços de trabalho colaborativo em torno das questões da didáctica.

[4] A Associação de Professores de Matemática é um exemplo da segunda situação.

Referências

Abrantes, Paulo (1994). Associações Pedagógicas de Professores. Introdução ao capítulo XLVI de *Outra Face da Escola* (org. José Carlos Abrantes), 691-695. Lisboa: Ministério da Educação.

Associação de Professores de Matemática (1993). Centro de Formação da APM – documento programático. Lisboa: APM.

Boutinet, Jean-Pierre (1990). Antropologia do Projecto. Paris: PUF.

Canavarro, Ana Paula; Abrantes, Paulo (1995). Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: uma experiência num contexto de formação. Em A.P. Mourão et al (Eds), *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática* (Leiria, Novembro de 1994), 283-295. Braga: APM.

Correia, Graça Viera (1997) O desenvolvimento dos professores de Matemática do 1º ciclo na área da Matemática: três estudos de caso no contexto de um trabalho colaborativo. Tese de mestrado. Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências

Ferreira, Elvira; Pires, Manuela; Rocha, Isabel (1996). O desenvolvimento profissional dos professores: o papel dos projectos, dos programas de formação, & da APM. Conferência plenária no ProfMat 96, não publicada.

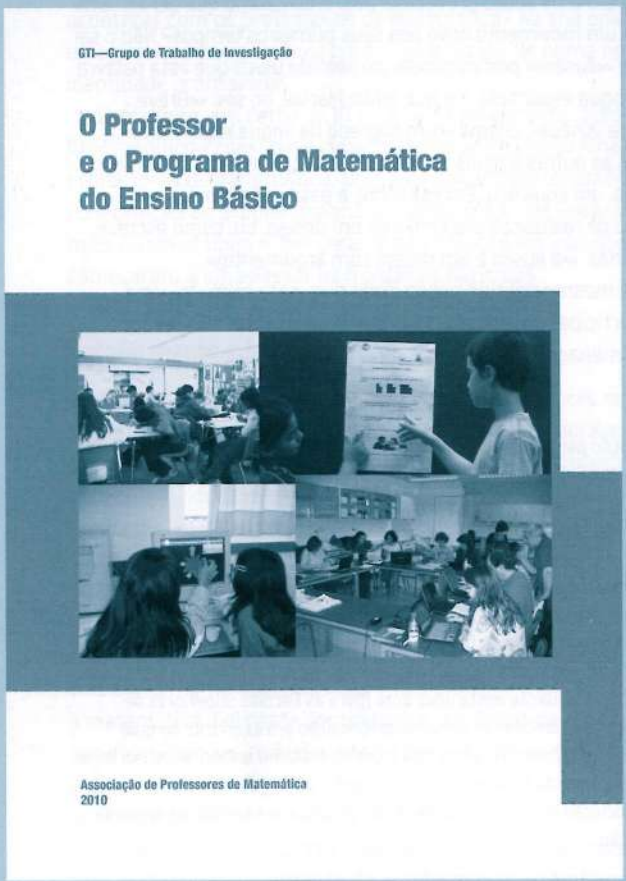
Paulo Abrantes

Universidade de Lisboa

Traduzido por Ana Luísa Paiva, Cristina Tudella e Manuela Pires. Revisto por Isabel Rocha

O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico

Edição APM, 2010 | PVP: 12,00€ Sócio: 8,50€



São diversos os desafios que são colocados à escola e aos professores, quer na sua capacidade de acompanhar as constantes mudanças da sociedade, quer ao nível do desenvolvimento curricular, como o que presentemente ocorre associado à generalização do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB), publicado em 2007. Assim, este livro, que intitulámos *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, inclui uma colecção de experiências realizadas por professores e formadores dos diferentes níveis de ensino (do 1.º ciclo do ensino básico ao ensino superior). Mais importante do que cada experiência em si mesma é perceber de que forma ela pode contribuir em termos do conhecimento para a profissão, e que mais-valia traz para a vida das escolas, em particular para o grupo de professores de Matemática.

Ao divulgar estas experiências, procuramos contribuir para uma melhor compreensão das questões associadas às mudanças curriculares preconizadas pelo PMEB, nomeadamente como interpretar e concretizar na prática as indicações desse programa, como delinear e percorrer os percursos necessários, como caracterizar os papéis que o professor pode assumir e como conceber estratégias para concretizar ao longo do ano uma grande variedade de objectivos curriculares.

Agenda Dia-a-Dia com a Matemática 2011/2012

Organização: Núcleo de Braga da APM

Lançamento no ProfMat2011

s	t	q	q	s	s	d
			01	02	03	04
05	06	07	08	09	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

2011 Setembro

05 segunda-feira

ProfMat 2010

06 terça-feira

ProfMat 2011

07 quarta-feira

ProfMat 2011

XXII SIEM

08 quinta-feira

XXII SIEM

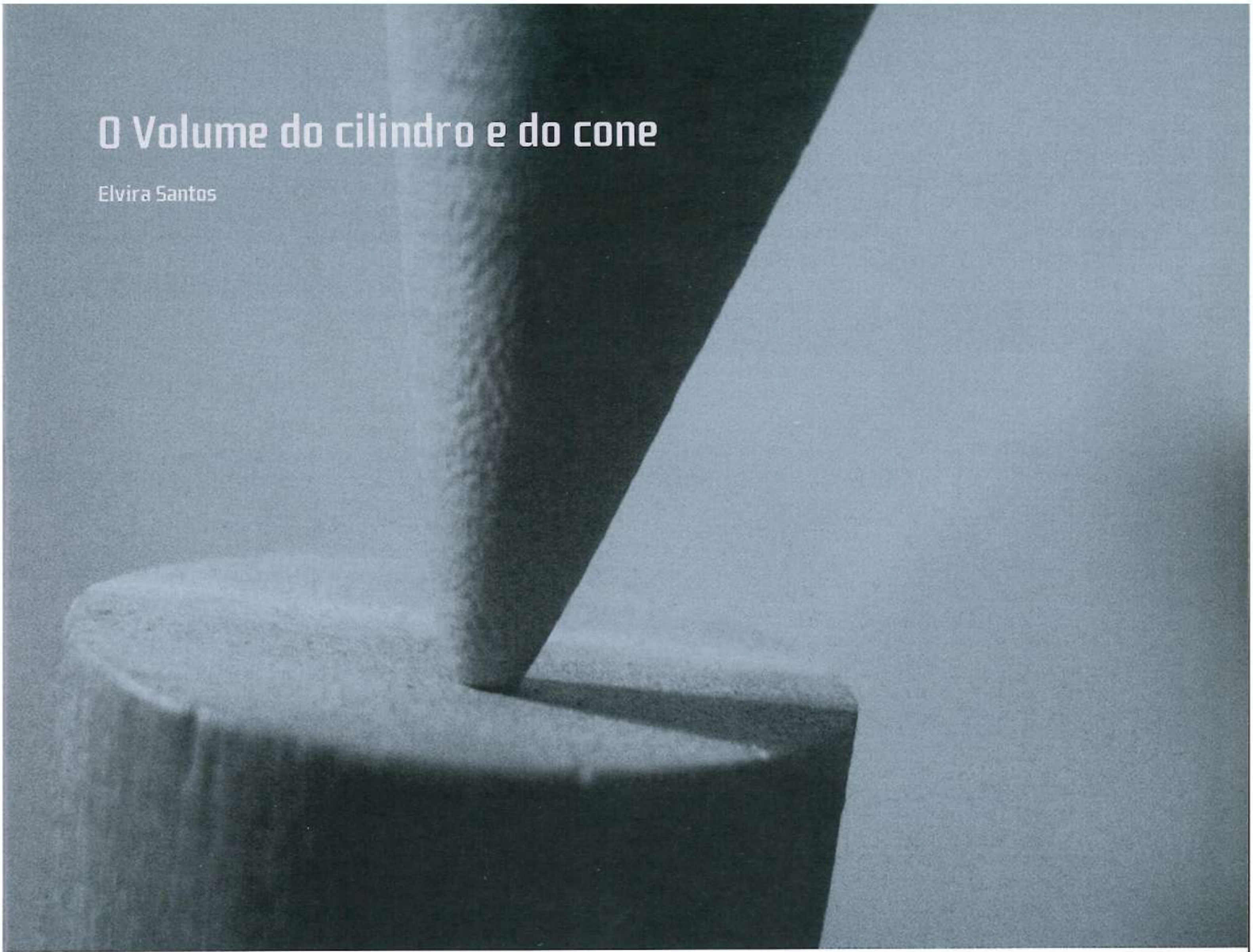
09 sexta-feira

10 sábado

11 domingo

O Volume do cilindro e do cone

Elvira Santos



Neste artigo pretende-se apresentar uma experiência realizada com duas turmas de 7° ano de escolaridade durante o estudo da Geometria — Volume do cilindro e do cone. Após a apropriação da fórmula do volume do cone, recorrendo a modelos de sólidos de enchimento, utilizou-se a folha de cálculo para dar resposta a problemas do quotidiano, estabelecendo conexões entre a geometria e a álgebra através da relação entre o volume do cilindro e do cone, mantendo invariante a área da base ou a altura.

A tarefa

A realização desta experiência decorre de um trabalho que realizei, integrada na equipa de um projecto que visou o desenvolvimento do pensamento algébrico com a utilização das TIC e onde o trabalho colaborativo, foi uma tónica constante e essencial à continuidade desta experiência. Partir de problemas aritméticos e «algebrizá-los» criando tarefas de âmbito mais aberto com recurso à utilização das tecnologias, foi outro desafio deste projecto contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Assim, surge esta tarefa, quase no final dos estudos desse ano lectivo, que coloca uma situação do quotidiano com um jarro cilindrico, não totalmente cheio, e um copo cónico. Com a abordagem do problema através da utilização da folha de cálculo, pretendia-se que os alunos desenvolvessem: A tendência para procurar invariantes nas fórmulas dos volumes de sólidos geométricos; a capacidade de análise e comparação de dados para justificar os seus raciocínios; a aptidão para reconhecer na utilização do Excel características de organização metódica de dados tirando partido dessa situação para a procura de relações.

A experiência

As turmas envolvidas nesta experiência apresentavam ritmos diferentes de trabalho. A turma A embora apresente um conjunto de alunos com ritmos de trabalho diferenciados, revela

copo cónico

altura	15
diâmetro	6
raio	3
quadrado do raio	9
área da base	28,27

jarro

altura	25
diâmetro	12
raio	6
quadrado do raio	36
área da base	113,10

volume de líquido consumido	n.º de copos cónicos
141,37	1
282,74	2
424,12	3
565,49	4
706,86	5
848,23	6
989,60	7
1130,97	8
1272,35	9
1413,72	10
1555,09	11
1696,46	12
1837,83	13
1979,20	14
2120,58	15
2261,95	16
2403,32	17
2544,69	18
2686,06	19
2827,43	20

volume do jarro	altura
113,10	1
226,19	2
339,29	3
452,39	4
565,49	5
678,58	6
791,68	7
904,78	8
1017,88	9
1130,97	10
1244,07	11
1357,17	12
1470,27	13
1583,36	14
1696,46	15
1809,56	16
1922,65	17
2035,75	18
2148,85	19
2261,95	20
2375,04	21
2488,14	22
2601,24	23
2714,34	24
2827,43	25

apetência para o trabalho de grupo e empenho na discussão das tarefas, comunicando as suas opiniões e seguindo as dos seus colegas. Pelo contrário, a turma B, revela poucos hábitos de trabalho em grupo e distraem-se com facilidade, na realização das tarefas que necessitem de maior perspicácia e persistência.

Para a implementação desta tarefa os alunos foram organizados em grupos de quatro alunos cada, com um computador portátil por grupo, um documento excel com uma base comum a todos os grupos que serviu de ponto de partida para o lançamento do trabalho e a ficha com a proposta de trabalho.

A tarefa desenvolveu-se em dois blocos de 90 minutos. No primeiro bloco os alunos iniciaram a programação da folha de cálculo recorrendo aos dados do problema para calcular o volume do jarro cilíndrico dependendo da altura do líquido, e do número de copos (cone) necessários para esvaziar uma determinada quantia de liquido.

Os alunos já tinham tido experiência com a utilização do excel na aula de matemática para dar resposta a outros problemas no entanto, foi necessário aprender a fixar uma célula, utilizar o símbolo ($), que na presente situação era indispensável para fixar o valor do volume correspondente a uma unidade (1 copo) ou a área da base do jarro. Esta aprendizagem decorre da necessidade do trabalho quando verificam que a cópia da fórmula atribuía valores que não eram compatíveis com as formas e os dados do problema. Surge, então, a discussão sobre que dados se mantinham, ou não, invariantes e a necessidade de fixar o valor referido numa célula.

Deste modo, a programação das duas tabelas exigiu, da parte dos alunos, a análise de cada uma delas para procurar um padrão e essa invariância. Na primeira tabela o que variava era o número de copos, mantendo-se a área da base e a a altura do copo, enquanto que na segunda tabela o que variava era a altura mantendo invariante a área da base. Após a discussão do que se deveria ou não fixar, completaram-se então as tabelas e os alunos constataram, com facilidade, que existiam valores que eram comuns e que, por isso, as duas primeiras alíneas da tarefa eram de facto de rápida resposta por observação das tabelas. Ou seja, foi possível identificar que eram necessários 16 copos para esvaziar, na totalidade, o jarro com 20 cm de altura.

Posteriormente centraram a sua atenção na utilização de um copo cilindrico cuja base tinha as mesmas dimensões da boca do copo cónico.

Aqui pretendia-se que os alunos associassem a diminuição da altura, para a terça parte, devido à relação entre os volumes do cone e do cilindro e pretender-se um copo cilindrico com o mesmo volume do cónico.

Os grupos foram levantando a hipótese de a altura ser 5 cm e iniciam o preenchimento da tabela seguinte com o objectivo de confirmar, ou não, a sua conjectura.

Em seguida após a confirmação levantam algumas questões, como por exemplo: Que outra altura pode ter o copo cilindrico de modo a que o liquido no jarro possa encher um número inteiro de copos?

Para satisfazer a curiosidade relativa às suas conjecturas, os alunos alteraram o valor na célula relativa ao volume do copo, ensaiaram diversas possibilidades, confirmando-as, por exemplo se o copo cilindrico tiver 10 cm de altura, o sumo que se encontra no jarro, dará para 8 pessoas.

Em jeito de balanço

Durante a discussão das conclusões dos diferentes grupos foi possível encontrar diferenças nas duas turmas. Na turma B os alunos apresentaram maiores dificuldades para relacionar as possíveis alturas para um copo cilindrico com o mesmo volume do copo cónico, ficando bem visível a dificuldade em atribuir significado aos valores mencionados. No final desta experiência foi possível ver que alguns alunos olhavam com surpresa as alturas e as suas relações interligando assim os valores com a experiência do seu quotidiano, ou seja, se tenho copos mais altos preciso de menos copos para esvaziar o sumo do jarro e vice-versa.

altura copos cilíndricos	volume do copo
1	28,27
2	56,55
3	84,82
4	113,10
5	141,37
6	169,65
7	197,92
8	226,19
9	254,47
10	282,74
11	311,02
12	339,29
13	367,57
14	395,84
15	424,12
16	452,39
17	480,66
18	508,94
19	537,21
20	565,49

n.º de copos	volume consumido
1	141,37
2	282,74
3	424,12
4	565,49
5	706,86
6	848,23
7	989,60
8	1130,97
9	1272,35
10	1413,72
11	1555,09
12	1696,46
13	1837,83
14	1979,20
15	2120,58
16	2261,95
17	2403,32
18	2544,69
19	2686,06
20	2827,43

A utilização da folha de cálculo foi nesta situação uma mais valia pois apoiou a construção e a exploração do problema fazendo emergir o raciocínio algébrico. A utilização das letras como números generalizados, as expressões equivalentes e a investigação da variação permitiu apoiar uma prática e cultura de sala de aula favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

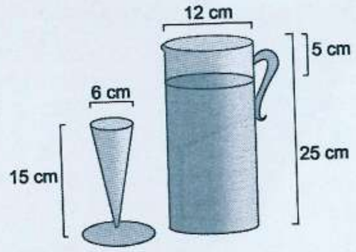
Após o trabalho em sala de aula com a folha de cálculo as turmas realizaram um relatório escrito individual sobre o que se passou nas duas aulas. A realização deste relatório tem como objectivo responsabilizar os alunos pela sua participação activa na aula, mas também para desenvolver a sua capacidade de comunicação e raciocínio matemáticos. Assim, ao longo do trabalho os alunos participam e ao mesmo tempo tomam notas de tudo o que fazem e concluem. Contudo, tenho a consciência que existe, ainda, um grupo de alunos para quem este processo ainda é realizado com alguma dificuldade. No entanto, tem sido com interesse que vejo aumentar o número de alunos que vão melhorando os registos do que fazem e do que conseguem concluir.

A situação mobilizou o interesse das turmas e os alunos revelaram recordar aspectos da folha de cálculo, embora já não estivessem a usá-la há algum tempo. É, ainda, possível ver algumas opiniões, nos relatórios, sobre apreciação critica da tarefa onde é pedido aos alunos que refiram o que, em seu entender, a tarefa contribuiu para a aprendizagem da Matemática:

Achei a tarefa bastante interessante. Ajudou-nos a compreender melhor os volumes em várias situações e a saber trabalhar melhor com o «Excel».

A Festa[1]

O Paulo vai dar uma festa para alguns amigos. Há um jarro com sumo, não completamente cheio, para distribuir pelos convidados de uma festa.



O jarro tem a forma de cilindro, os copos têm a forma de cone e as dimensões estão indicadas na figura.

1. Usa as potencialidades da folha de cálculo do Excel para investigares as relações abaixo propostas:
   a. Para quantos convidados dará o sumo disponível no jarro se cada um dos convidados só beber um copo desse sumo?
   b. E se o jarro estivesse cheio, para quantos convidados dava?
   c. Considera, agora, que o copo disponível na festa era cilindrico cuja base tem o mesmo diâmetro que a boca do copo cónico.
      i. Que altura é que podia ter esse copo de modo a que todos os convidados bebessem um só copo de sumo?
      ii. Descobre outras possibilidades para a altura do copo cilindrico de modo a ser possível dividir, igualmente, o sumo disponível no jarro.
2. Elabora, individualmente, um relatório com as etapas do vosso trabalho e as vossas conclusões.

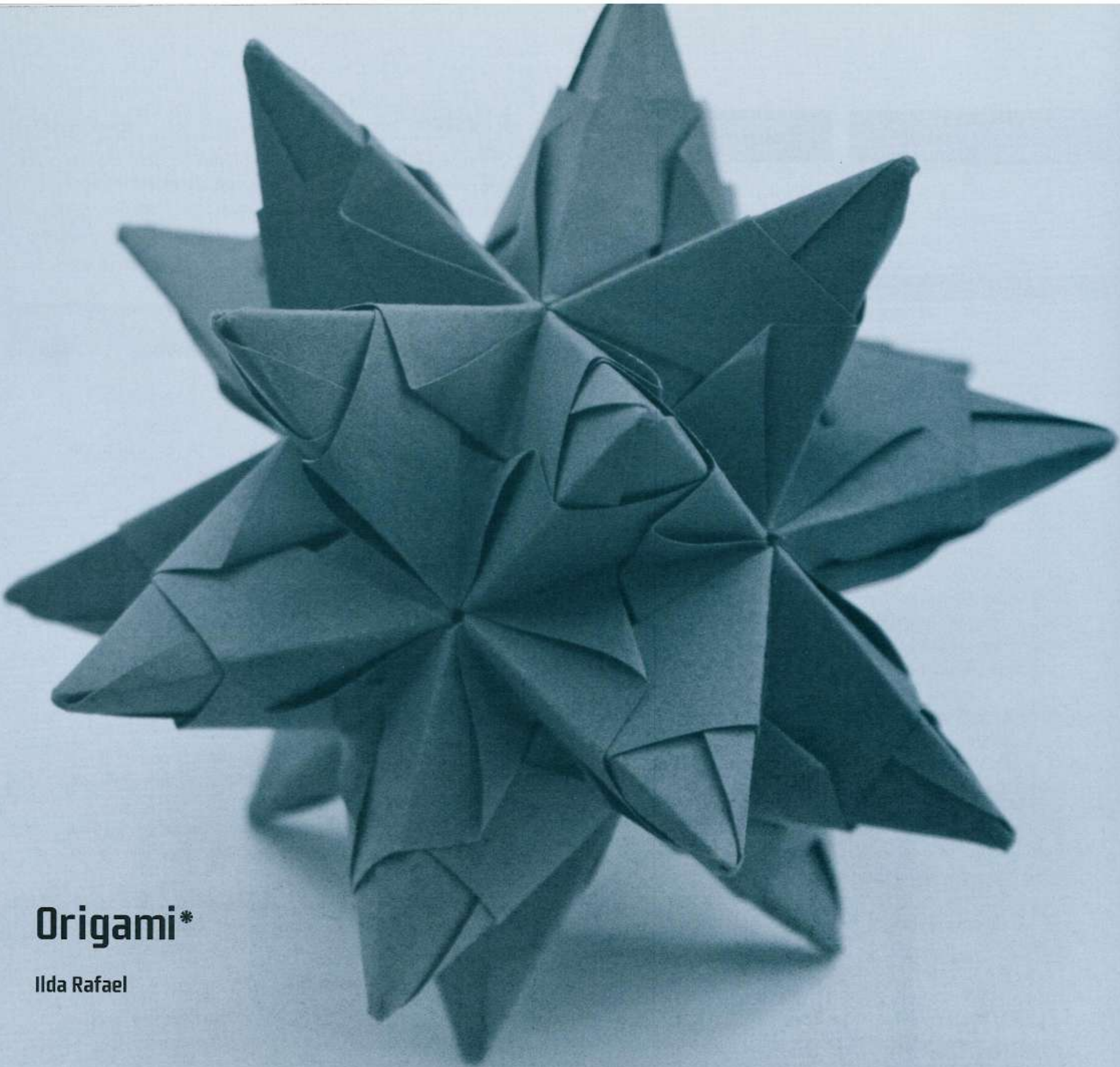
Nota

[1] Esta tarefa surge da adaptação de um exercício colocado num manual escolar (Espaço7 — Asa, pag. 239)

Com esta actividade, pude por em prática e relembrar algumas formulas relacionadas com os volumes e com a folha de cálculo do excel. Este desafio é bom porque me faz desenvolver o raciocínio matemático e relacionar vários factores, postos em causa, em simultâneo.

Na minha opinião este trabalho contribui muito para a minha aprendizagem da Matemática, porque praticamos o raciocinio, a organização dos dados e sobretudo os cálculos que utilizámos

Elvira Santos
Escola Básica 2/3 ciclos de Álvaro Velho



Origami*

Ilda Rafael

As potencialidades do Origami são imensas. Quando pegamos numa folha de papel e começamos a dobrá-la descobrimos formas e propriedades que nos deixam maravilhados. Este é o início daquela que pode ser uma jornada sem fim, através de um universo fascinante.

O meu apreço pelo Origami começou quando era ainda criança, com a dobragem de um chapéu para me proteger do Sol. Chapéu que, acabaria por se transformar num barco. Mais tarde, ainda no primeiro ciclo, descobri *a caixa de pasteleiro*, *o sapo que salta* e *o pássaro que bate as asas*, mas, é desde 1997 que me tenho dedicado a esta arte. Tenho estudado muitas propriedades sozinha, mas sinto que obtenho mais prazer quando o faço em conjunto, seja com alunos, com colegas ou num museu.

Este artigo não pretende contar a história do Origami mas, qualquer pequena introdução a este assunto não pode ignorar as suas origens ancestrais. O termo «dobrar» perde-se na imensidão do tempo. No poema sumério «A Epopeia de Gilgamesh» (a obra literária mais antiga que se conhece) pode ler-se «O tecido três vezes dobrado não será cortado» (Palácios, 2002). A invenção do papel ocorreu, supostamente na China, cerca de 2000 anos atrás. Por volta de 105 d. C., Tsai Lun, alto funcionário da Corte Imperial, terá relatado ao imperador esta invenção. (No Museu Britânico existe um manuscrito em papel datado de cerca de 150 d. C.) Recentes investigações arqueológicas recentes, feitas no noroeste da China, apontam uma data anterior para esta invenção, uma vez que foram encontrados

* Nesta ocasião gostaria de referir três pessoas com as quais partilho o gosto pelo Origami, tenho discutido muitas dobras, propriedades e passado muitas horas a interpretar esquemas: Anabela Gaio, Idália Pesquita e Manuela Martins. As duas primeiras são professoras de Matemática e, em conjunto, temos estudado as propriedades matemáticas que estão subjacentes às dobras e realizado muitas formações em vários encontros e em diferentes escolas. Com a Manuela Martins a troca de opiniões é essencialmente sobre a beleza dos objectos e o significado que os japoneses atribuem a cada dobra e a cada peça.

Figura 1

pedaços de papel do tempo do Imperador Wu (que reinou no período 140–84 a.C.).

O papel chegou ao Japão no século VI d. C. e foi neste país que o Origami se desenvolveu tal como o conhecemos hoje.

Em qualquer livro da especialidade podemos ler que «o Origami é a arte japonesa de dobrar papel.» A palavra japonesa «Origami» é composta por dois caracteres, o primeiro, «Ori», deriva do desenho de uma mão e significa dobrar. O segundo, «Kami», deriva do desenho da seda e significa papel, espírito e Deus (Figura 1). A junção das duas palavras fez cair o «k» surgindo «Origami». A sua história pode ser dividida em três grandes períodos (Prieto, 2002):

O Período Heian (794–1185), onde o Origami era entendido como um divertimento das classes mais ricas, as únicas que podiam comprar papel. Era também utilizado pelos guerreiros Samurai que trocavam presentes enfeitados com *noshi*, pedaços de papel dobrados em forma de leque ou em forma de raio. Os mestres de cerimónia do chá recebiam diplomas que eram certificados com papel dobrado que garantia a sua autenticidade uma vez que um modelo, depois de dobrado, não podia ser desdobrado sem que surgissem novas marcas no papel. Vem também desta época o ritual de se dobrarem borboletas macho e fêmea, nos casamentos, simbolizando a união entre os noivos e que serviam para adornar as garrafas de *saquê*. É ainda deste período o nó pentagonal, que os japoneses utilizavam para escrever as suas orações, conhecido na Europa, especialmente pelos estudantes, que o utilizavam no estudo da geometria.

O Período Muromachi (1338–1573), quando o papel se tornou um produto mais acessível e o Origami começou a ser utilizado para distinguir as diversas classes sociais, conforme os adornos que as pessoas usavam.

O Período Tokugawa (1603–1867), também conhecido como o período da democratização do papel, quando surgem os primeiros livros de Origami. Em 1797 foi publicado o livro chamado *Hiden Senbazuru Orikata*, (como dobrar mil *tsurus*, ver fig. 2) que continha o primeiro conjunto de instrucções para dobrar o pássaro sagrado do Japão, o *Tsuru*. (Em Portugal é conhecido por *Grou* e por *Crane* em Inglaterra e nos EUA.) Este modelo foi adoptado como símbolo da paz depois da segunda guerra mundial. Em 1845 foi publicado outro livro *Kan No Mado* (Janela aberta à estação do Inverno) que incluía uma colecção com cerca de 150 modelos de Origami e, entre eles, a *base do pássaro* e a *base da rã*, duas das bases mais importantes no Origami. Graças a esta publicação o Origami, no Japão, espalhou-se como actividade simultaneamente recreativa e educacional.

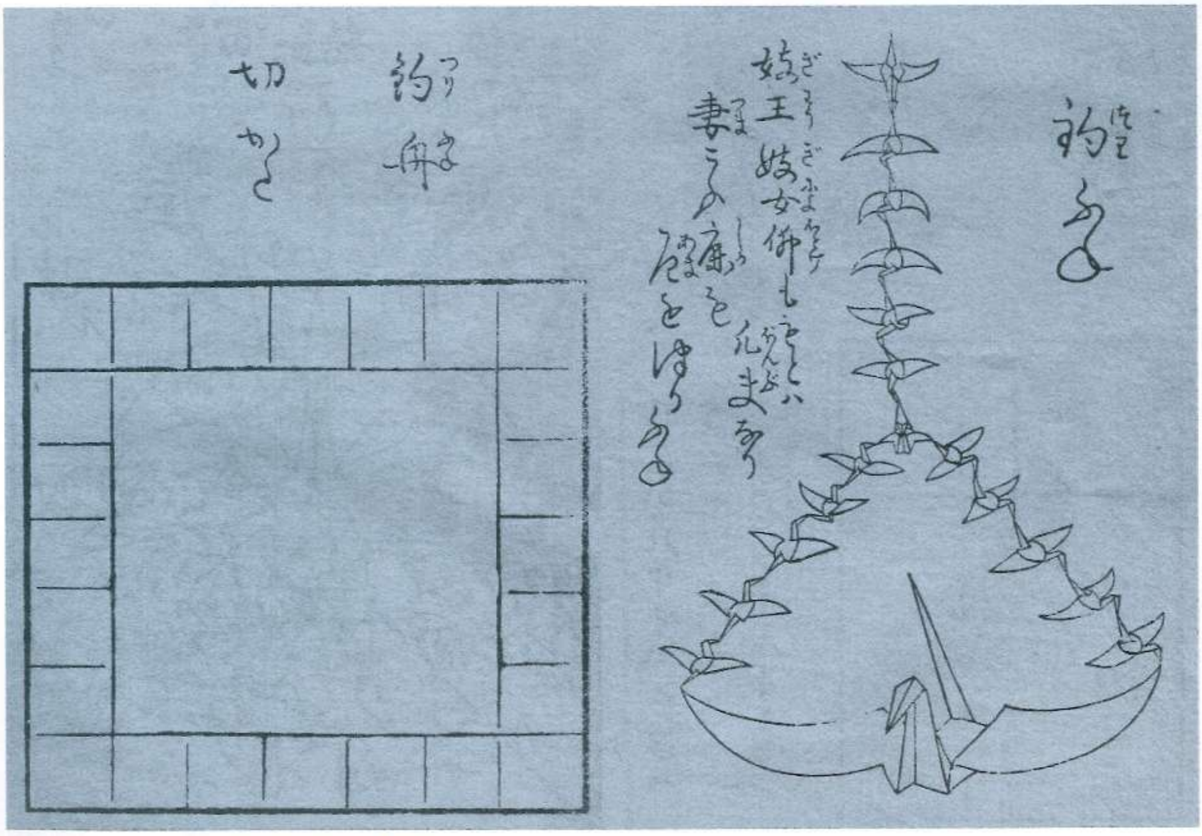


Figura 2. Páginas do livro Hiden Senbazuru Orikata

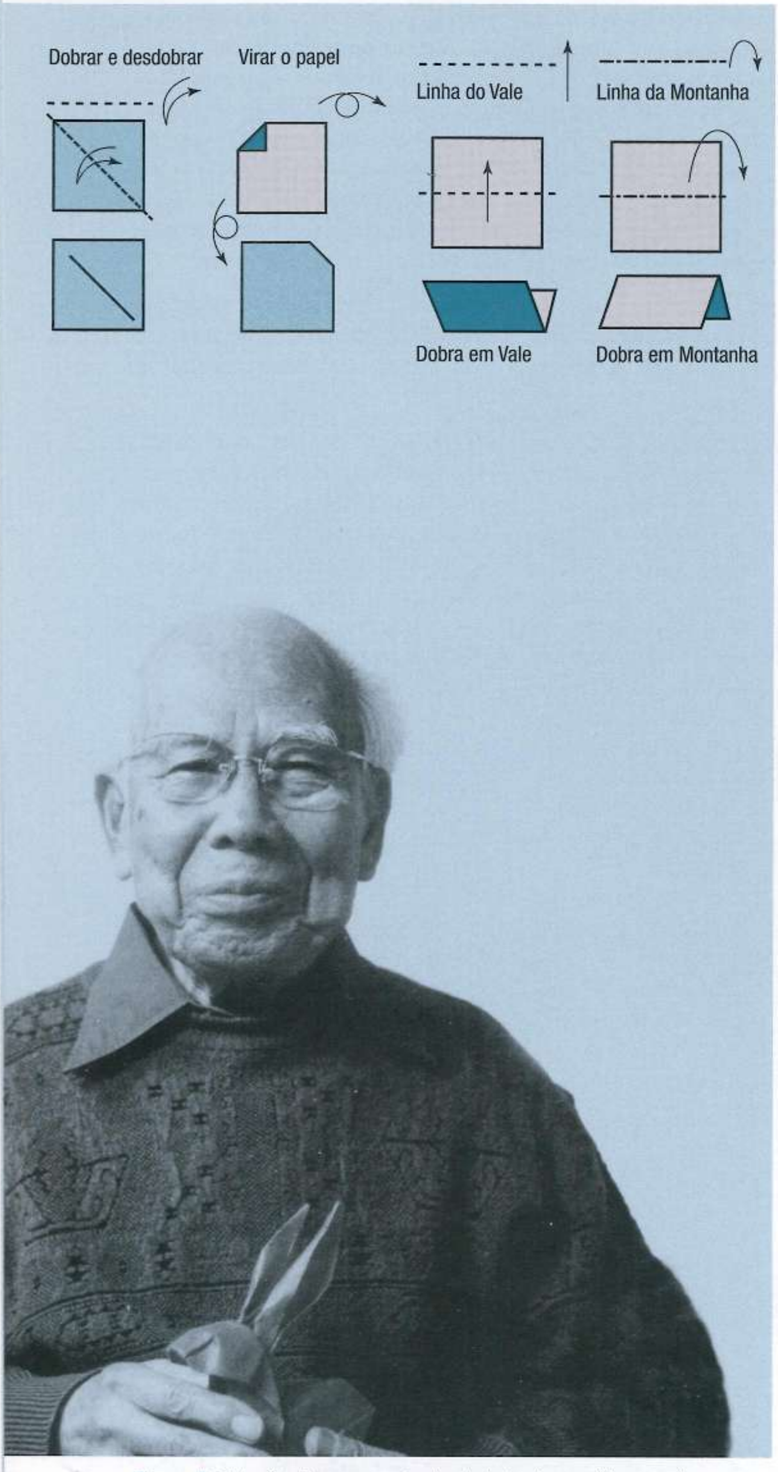


Figura 3. Akira Yoshizawa e parte da simbologia por si inventada

Na Índia, em Madras, T. Sundara Row (1893), escreveu um livro, *Geometric Exercises in Paper Folding*, onde apresenta construções geométricas utilizando dobragens em papel

A difusão do Origami na Europa iniciou-se com os muçulmanos que praticavam esta arte e a levaram para a Península Ibérica. A doutrina islâmica não permitia a criação de figuras e as dobras de papel eram utilizadas em estudos matemáticos e astronómicos. Após a saída dos muçulmanos do Reino de Granada esta arte continuou a ser desenvolvida sob a designação de *Papiroflexia, como é conhecida em Espanha.* A *Parajita* ou *Pára Pinta é uma figura que representa uma ave* e faz parte da cultura popular espanhola desde o século XVII.

Um grande impulsionador desta arte, em Espanha, nos finais do século XIX, foi Miguel Unamuno. Quando visitou a *Exposição Universal de Paris*, em 1889, ficou maravilhado com uma exposição de Origami Japonês.

Em Itália, Leonardo Da Vinci publicou no seu *Codex Atlanticus*, exercícios geométricos com dobragens e um estudo sobre o movimento de aviões de papel. (Engel, 1994).

Na Alemanha, Friedrich Froebel, fundador do *Movimento Kindergarten*, introduziu as dobragens de papel nas actividades pré-escolares.

Por volta de 1950, o japonês Akira Yoshizawa, considerado o *pai do Origami moderno* introduz uma alteração radical na técnica do Origami. Yoshizawa com a colaboração do americano Sam Randlett criou uma simbologia (*Sistema Yoshizawa – Randlett*, 1956), de instrucções para dobrar os modelos que, a par com as bases, constituem a *linguagem do Origami*. Desde a invenção do papel este sistema é a contribuição mais importante para a técnica da dobragem de papel, uma vez que permite a difusão internacional dos vários modelos. Não é necessário saber idiomas como japonês, inglês, espanhol, ou alemão para saber construir um modelo, basta saber interpretar um diagrama conhecendo a simbologia que, fundamentalmente, assenta em duas dobras a *dobra em vale* e a *dobra em montanha.*

Para Yoshizawa o Origami era uma filosofia de vida. No local onde viveu criou inúmeras figuras, destacando-se um cisne, uma rosa e a reprodução da sua cara. Estes modelos são objectos de uma invulgar beleza.

Nas últimas décadas, com a ajuda das ferramentas informáticas, o aparecimento de sites e de foruns, a publicação de livros e os encontros internacionais contribuiram para uma grande expansão do Origami. Pessoas de todo o mundo dedicam-se cada vez mais ao desenvolvimento de figuras cada vez mais complexas, e ao estudo matemático das várias dobras. Segundo Lang, na década de 80 podiam considerar-se duas correntes no Origami moderno, a japonesa, desenvolvida por artistas e a, mais ocidental, desenvolvida por matemáticos, engenheiros, físicos e arquitectos.

Actualmente esta distinção não é adequada visto que tanto no ocidente como no oriente o Origami é estudado por cientistas e artistas. Uns preocupam-se mais com os processos matemáticos — Toshikuyi Meguro, Jun Maekawa, Issey Yoshin, Tomoko Fuse, Toshikazu Kawasaki, Thomas Hull, Jonh Montroll, Robert Lang, Eric Gjerde —, outros com a textura do papel e a leveza dos modelos — Michael Lafosse, David Derudas, David Brill, e Eric Joisel —, este último recentemente desaparecido.

Nos últimos tempos, *Pavimentações* construídas com a técnica do Origami e *Origami Modular* (*Unit Origami*) têm adquirido atingido maior relevo. A técnica modular consiste em construir vários *módulos* que se agrupam formando figuras mais ou menos complexas. É o que mais me atrai por possibilitar a construção e o estudo de poliedros. O expoente máximo desta técnica é a japonesa Tomoko Fuse que com o seu livro *Unit Origami: Multidimensional Transformations, publicado em inglês inspirou muitos origamistas no ocidente*.

Os origamistas mais tradicionais não apreciam esta forma de dobragem. Para eles um modelo deve ser dobrado a partir de uma única folha de papel, sem cortes e sem cola. Já para outros a cola e tesoura são permitidos. (Pessoalmente gosto mais do Origami que não utiliza nem cola nem tesoura, mas reconheço que os que recorrem à cola e à tesoura têm outras possibilidades e constroem modelos de grande beleza.)

Outro aspecto a considerar na história do Origami é a forma do papel utilizado nas dobragens. Durante vários anos os modelos eram construídos a partir de um quadrado de papel mas, mais recentemente, passaram a ser utilizadas outras formas e, muitos dos modelos poliédricos são construídos a partir de rectângulos semelhantes a uma folha A4, cuja razão entre o lado maior e o lado menor é 1 por raíz de dois.

(Uma construção interessante consiste precisamente em transformar um quadrado num rectângulo de lados 1 por $\sqrt{2}$ e será descrita mais à frente neste artigo.)

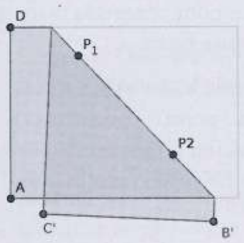
Esta pequena introdução histórica não podia terminar sem referir Humiaki Huzita.

Huzita nasceu no Japão, mas viveu grande parte da sua vida em Itália e, na década de 70 do século passado, descreveu seis operações que ficaram conhecidas por *axiomas de Huzita*. Estes axiomas (que na realidade são operações) descrevem operações básicas que se podem efectuar em Origami e permitem caracterizar formalmente o tipo de construções geométricas que é possível fazer com Origami. Em 2001 Koshiro Hatori acrescentou à lista um sétimo axioma (obtendo-se a lista de axiomas de Huzita-Hatori) e, em 2003, Robert Lang publicou um estudo onde estabelece que, se identificarmos a expressão informal «construção em Origami» com uma certa caracterização formal desta noção então, aqueles sete axiomas que, como se disse, descrevem outras tantas operações básicas, são suficientes para obter todas as construções em Origami (ver caixa abaixo).

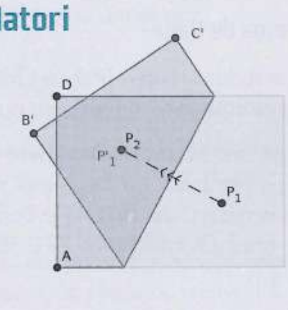
Informação detalhada acerca destes axiomas e a demonstração da sua completude pode ser obtida em: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf.

Na teoria matemática das construções geométricas com dobragens de papel os sete axiomas de Huzita-Hatori chegam para definir o que é possível construir com dobragens simples. (Admitindo dobragens simultâneas já vamos além do que é descrito pelos axiomas de Huzita-Hatori, passando por exemplo, a ser possível dividir um ângulo genérico em cinco partes iguais ou a construir o polígono regular de onze lados, algo que não é possível recorrendo apenas a dobras simples.)

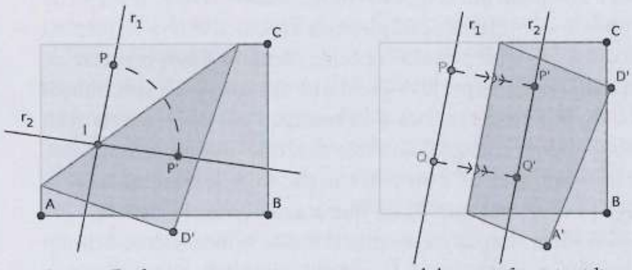
Axiomas de Huzita-Hatori



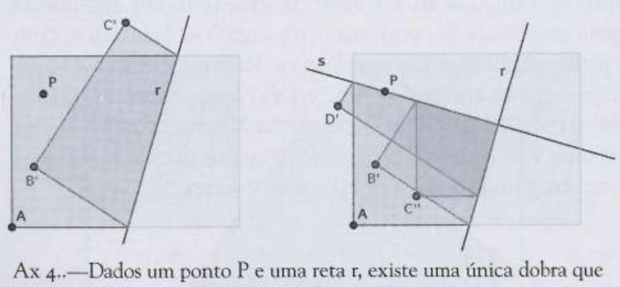
Ax 1.—Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que passa por eles.



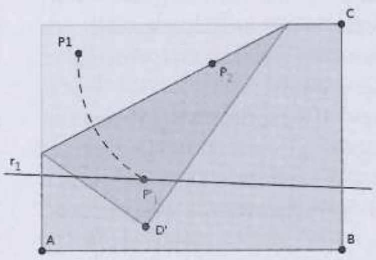
Ax 2.—Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que faz coincidr P_1 com P_2



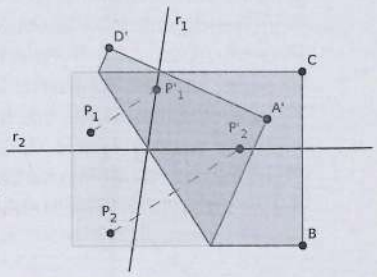
Ax 3.—Dadas as rectas r_1 e r_2, existe uma dobra que faz coincidir r_1 com r_2.



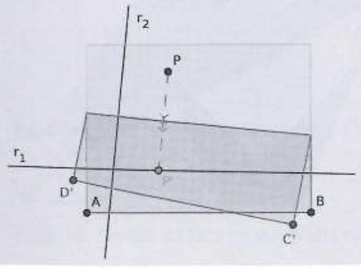
Ax 4..—Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única dobra que é perpendicular a r e que passa por P.



Ax 5.—Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta r_1, se a distância de P_1 a P_2 for superior ou igual à distância de P_2 a r_1 então,existe uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e que passa por P_2.



Ax 6.—Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2, se as rectas não forem paralelas e a respectiva distância não for superior à distância entre os pontos então, existe uma dobra que faz incidir P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2.



Ax 7.—Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2, se as rectas não forem paralelas então, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e é perpendicular a r_2.

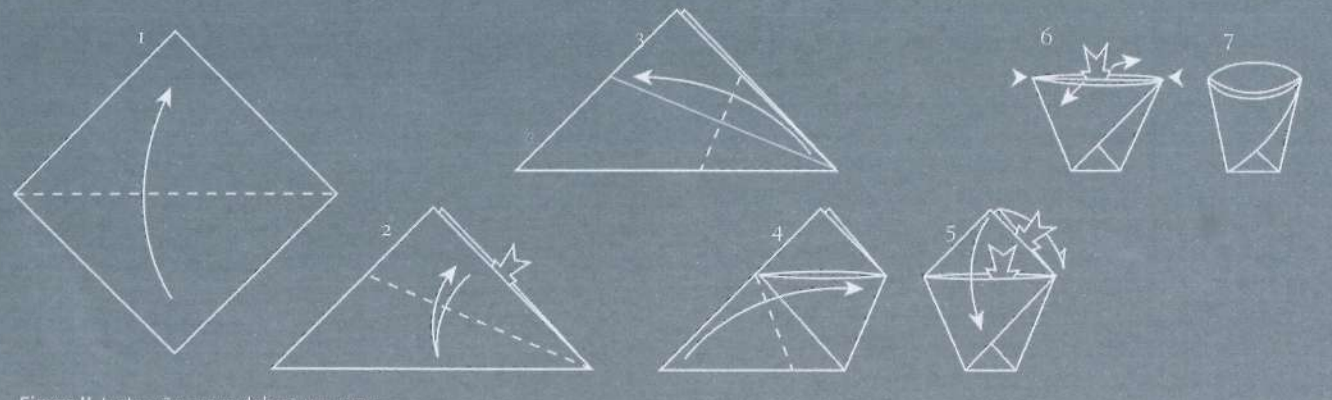


Figura 4. Instruções para dobrar um copo

Estudando o vasto mundo do origami podemos verificar que os seus modelos podem, por um lado, ser alvo de estudo matemático e, por outro, permitem não apenas fazer construções geométricas mas também estabelecer resultados. Precisamente, veremos de seguida alguns exemplos em que os caminhos da Matemática e do Origami se entrecruzam.

O copo—equivalência de áreas por dissecção

Um dos modelos que eu gosto de dobrar e apresentar aos meus alunos e colegas é um Origami tradicional—o *copo*. Trata-se de um modelo considerado simples (na Figura 4, está a sequência de instrucções que permite obter o modelo final, a partir de um quadrado de papel). A primeira vez que pedi aos alunos para o dobrarem desafiei-os a beber água por ele e a averiguar quantas vezes o conseguiam fazer sem que o copo se rompesse. Ficaram admirados e a primeira reacção foi a de que isso não era possível. Pensavam que assim que a água entrasse no copo ele ir-se-ia romper. Experimentaram durante o intervalo e ficaram surpreendidos com o facto de conseguiram beber água algumas vezes, sem que o copo rebentasse. Experimentaram diferentes tipos de papel, informando-me dos sucessivos recordes que iam sendo batidos e quais os tipos de papel mais resistentes. (Muitas soluções de engenharia em áreas como a aero-espacial, por exemplo, recorrem a diversas soluções baseadas nas construções que envolvem as técnicas de Origami.)

Mas, evidentemente, não é este o repto que mais interessa do ponto de vista da aula de Matemática. Neste contexto costumo pedir-lhes que desdobrem o copo e verifiquem algumas igualdades de áreas de triângulos. Mais precisamente, e considerando a Figura 5, peço-lhes que verifiquem que a área A é igual à área B e que a área C é igual a duas vezes a área A.

Inicialmente, esta verificação parece um pouco difícil, mas rapidamente pegam numa tesoura e decompõem a área A de modo a rearrajar as «peças» e obterem precisamente a área B. (Ver a Figura 6 , onde se ilustra esta operação de decomposição, necessária à comparação de áreas.) O mesmo para a área C e para a área A, deixando-se a verificação ao cuidado do leitor.

O teorema de Haga

Várias actividades envolvendo Origami e com conteúdo matemático interessante têm origem no seguinte facto.

Teorema de Haga.—Considere um quadrado *ABCD* (ver figura 7). No lado *AB* faça uma marca (ponto *P*, na figura). Leve o vértice C de modo que coincida com a marca que acabou de fazer. Os triângulos *AFC*, *BCE* e *DFG* são semelhantes (figura 7 (C)).

Para estabelecer este facto, observe-se que os triâgulos *AFC*, *BCE* e *DFG* são todos rectângulos. Considerando a notação da figura 7 (C) resulta que $\alpha + \gamma = 90°$. Da figura também resulta que $\alpha + \beta = 90°$. Resultando destas duas igualdades que $\beta = \gamma$. Assim, os triângulos *BCE* e *AFC*, porque têm dois ângulos da mesma amplitude (e, portanto, três ângulos, dois-a-dois com a mesma amplitude) são *semelhantes*. Para estabelecer a semelhança entre os triângulos *AFC* e *DFG* basta constatar que os ângulos θ e y são iguais (por serem *verticalmente opostos*). Assim, mais uma vez, estes triângulos têm ângulos dois-a-dois com a mesma amplitude e são, por isso, semelhantes.

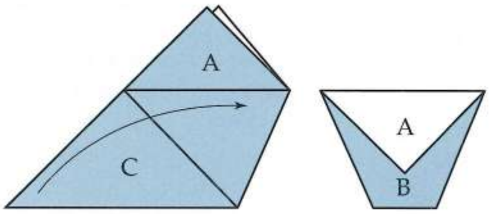


Figura 5

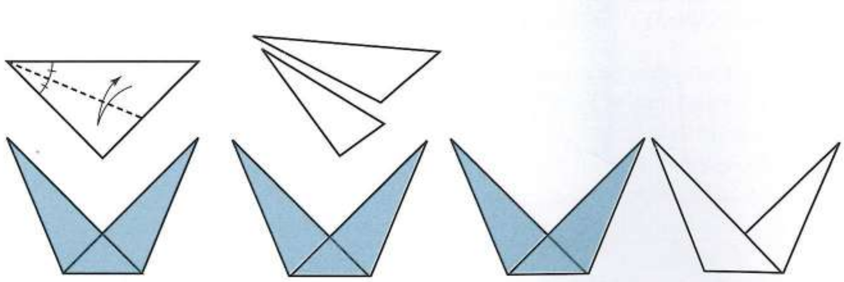


Figura 6

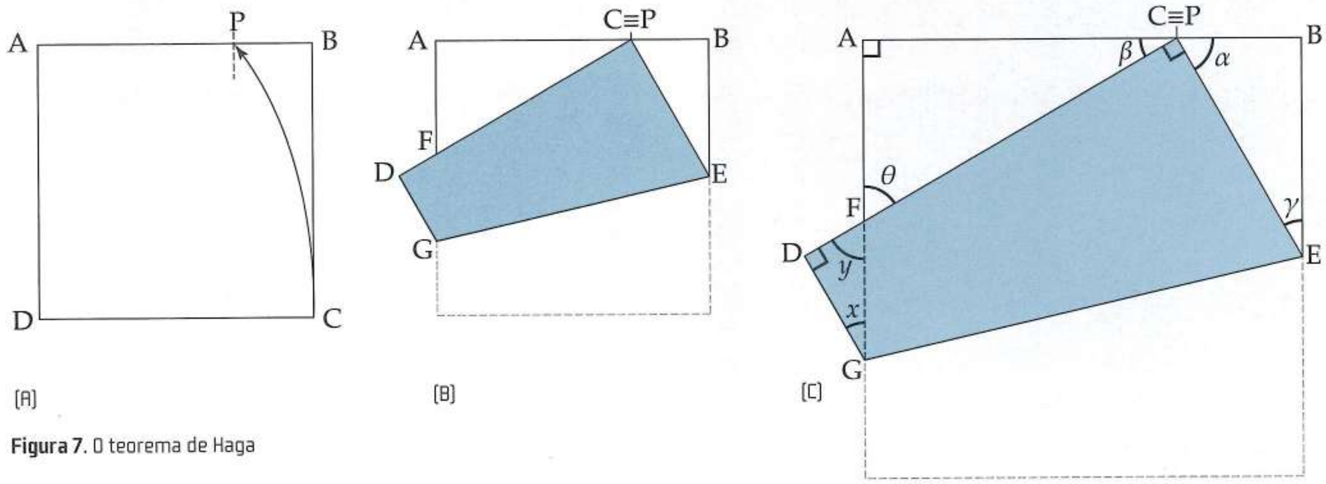


Figura 7. O teorema de Haga

Divisão do lado do quadrado em 3 partes iguais

Dividir o lado do quadrado em duas, quatro ou oito partes iguais é fácil (de um modo geral é fácil fazê-lo em 2^n partes iguais). Os outros casos são menos óbvios. A construção que se propõe a seguir, permite dividir o lado de um quadrado em três partes iguais. Considerando um quadrado *ABCD*, cujo lado tomamos como unidade, começamos por marcar a mediatriz do lado *AB*, fazendo coincidir o lado *BC* com o lado *AD*. Posto isto, levamos o vértice *C* ao ponto médio do lado *AB* (veja-se a Figura 8). Pelo teorema de Pitágoras temos que

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2.$$

Como o lado do quadrado mede uma unidade, temos que $b = 1 - a$ pelo que, substituindo na igualdade anterior se obtém:

$$(1 - a)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2.$$

Resolvendo em ordem a a, obtém-se $a = 3/8$ (consequentemente $b = 5/8$). Pelo Teorema de Haga os triângulos *CBE* e *ACF* são semelhantes sendo, os respectivos lados proporcionais. Assim,

$$a : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : c.$$

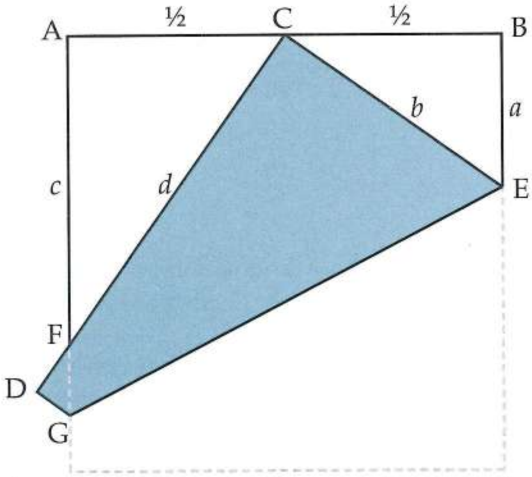


Figura 8. Divisão do lado do quadrado em três partes iguais

Ou seja, $ac = 1/4$. Como $a = 3/8$ tem-se que $c = 2/3$ pelo que, a restante parte do lado do quadrado mede precisamente $1/3$.

Como se verifica, esta simples construção envolve, do ponto de vista matemático vários conceitos importante como o teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos. Uma versão mais sofisticada desta construção (ainda usando o Teorema de Haga) permite obter uma divisão num qualquer número de partes iguais. (Assim, usando este teorema podemos descrever todos os comprimentos racionais.)

Mas as possibilidades do Origami vão além dos números racionais. Tal como prometido no início, apresento agora a construção de um rectângulo cuja proporção entre os lados é de $1 : \sqrt{2}$. A Figura 9 descreve os passos necessários. Tomando o comprimento de *AB* como unidade uma vez que os ângulos no triângulo *ABC* são ou de 45° ou de 90° conclui-se *AC* é a diagonal de um quadrado unitário, pelo que o seu comprimento é $\sqrt{2}$. Mas, o comprimento de *AC* é também o comprimento do outro lado do rectângulo (*BD*). (Se não conseguir ver imediatamente porquê, pense como um origamista, e veja que desdobrando a folha de papel, trazendo o ponto *C* à sua posição origial, *AC* se transforma num lado do rectângulo.)

Conclusão

Ao longo das muitas sessões em que utilizei o Origami, dentro ou fora da sala de aula, pude concluir que o Origami melhora significativamente a comunicação matemática. Essa melhoria nota-se bastante nos alunos dos primeiros anos de escolaridade. Termos como «vértice», «bissectriz», «mediatriz», «diagonal», «reflexão», «simetria», são adquiridos com a prática das dobragens de uma forma natural e rapidamente fazerem parte do vocabulário dos alunos porque se tornam indispensáveis para a comunicação entre eles.

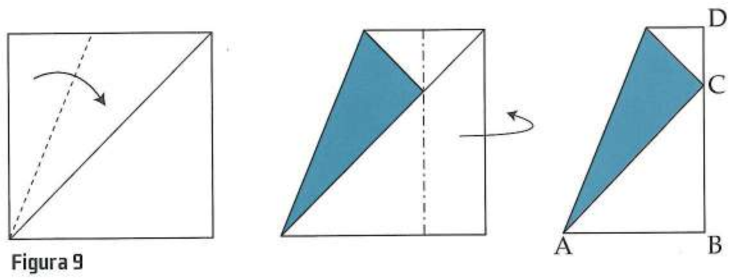
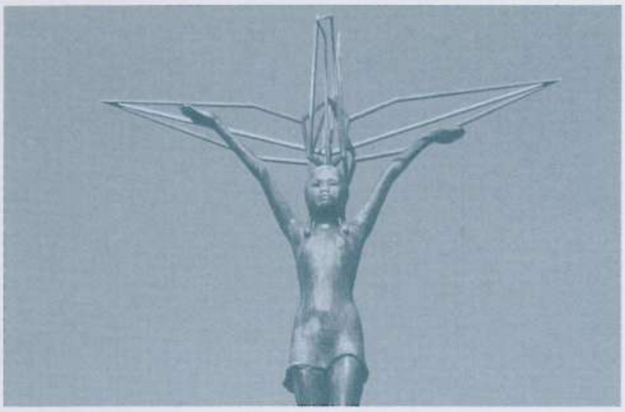


Figura 9



Uma das histórias que mais me comove é a historia da Sadako Sasaki, uma menina japonesa que tinha dois anos no dia da explosão da bomba atómica em Hiroxima. Começou a sentir os efeitos da bomba atómica aos 12 anos, sendo-lhe diagnosticada leucemia.

Quando Sadako estava no hospital, uma amiga levou-lhe alguns papéis coloridos e dobrou um pássaro (Tsuru). Disse-lhe que esse pássaro é sagrado no Japão, que vive mil anos e tem o poder de conceder desejos. Disse-lhe ainda que, se uma pessoa dobrar 1000 Tsurus e fizer o seu pedido a cada um deles, esse pedido será atendido. Sadako começou então a dobrar Tsurus e a pedir para se curar porém, a sua doença agravava-se a cada dia.

A menina começou então a pedir pela Paz Mundial. Até à data em que morreu— 25 de Outubro de 1955—, Sadako dobrou uma grande quantidade de Tsurus, insuficiente porém para perfazer os mil. Os seus amigos dobraram os restantes a tempo do seu funeral.

Mas eles queriam mais, desejavam pedir por todas as crianças que estavam a morrer em consequência da explosão da bomba. Formaram um clube e começaram a angariar dinheiro para um monumento. As contribuições chegaram através de estudantes de mais de 3000 escolas do Japão e de 9 outros países. Em 5 de Maio de1958 inauguraram o Monumento à Paz, no Parque da Paz de Hiroshima. Todos os anos no Dia da Paz—6 de Agosto—, são enviados Tsurus de papel, provenientes de todo o mundo, para o parque.

Os membros do clube desejam espalhar pelo mundo a mensagem esculpida na base do monumento de Sadako:

Este é o nosso Grito
Esta é a nossa Oração:
Paz no Mundo

A melhoria da capacidade de concentração, da visualização espacial, da motricidade fina, da partilha, da inter-ajuda e da coordenação motora, entre outros aspectos, são benefícios associados a esta prática.

A dobragem de papel é uma actividade que é simultaneamente recreativa e educacional. Recorrendo a materiais simples, como papel A4, papel de revista ou de jornal, papel de embrulho, papel de lustro, podemos, de uma forma divertida, aprender Matemática.

Dobrando e desdobrando podemos observar, por meio dos vincos formados, rectas, ângulos, simetrias e figuras geométricas. Podemos reconhecer e analisar propriedades dessas figuras, utilizar a visualização e o raciocínio espacial e explorar os conceitos de tamanho, forma e medida, incentivar a escrita e a comunicação matemática e motivar os praticantes para a disciplina.

As dobragens praticadas em grupo permitem o debate de ideias, o esclarecimento de conceitos e o desenvolvimento de estratégias, da criatividade, da concentração e persistência, tudo capacidades fundamentais para se ser matematicamente competente.

Bibliografia

Livros consultados

Engel, Peter; *Origami From Angelfish to Zen*, (1994), Dover Publications, Inc., New York

Haga, Kazuo; *Origamics, Mathematical Exploration through Paper Folding*, (2008), World Scientific , New Jersey

Kanegae, Marl; (org.); *A Arte dos Mestres de Origami*, (1997), Aliança Cultural Brasil Japão, São Paulo

Kasahara, Kunihiko; *The Art and Wonder of Origami*, (2004), Apple Press

Lang, Robert, J.; *Origami Desingn Secrets, Mathematical Methods for an Ancient Art*, (2003) A K Peters, Ltd.

Mitchel, David; *Origami Matemáticos*, (2008), Editora Replicação, Lisboa

Monteiro, L.; *Fundamentos Matemáticos do Origami*, Associação Ludus, Lisboa, 2008

Prieto; Jose, I. Royo, Matemáticas y Papiroflexia, (2002), *Revista Sigma*, 21, pp. 175–192.

Row, T. Sundara; *Geometric Exercises in Paper Folding*, (1917) The Open Court Publishing Company, Chicago

Vicente Palacios *Papiroflexia Colleción*, (2002) Editorial Miguel Salvatella, S.A., Barcelona

Sites

http://personales.com/espana/madrid/papiroflexia/papiroflexia_historia.html#top (Acedido em 22/06/2011)

http://ipst.gatech.edu/amp/collection/museum_invention_paper.htm (Acedido em 8/07/2011)

http://erikdemaine.org/thok/amletter.html (Acedido em 11/07/2011)

Ilda Rafael
Escola Secundária Braamcamp Freire

Materiais para a aula de Matemática

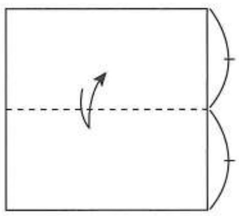
A tarefa aqui apresentada foi adaptada do livro *Unfolding Mathematics with Unit Origami** e incide sobre a construção de um modelo para medir ângulos recorrendo à técnica do Origami e respectiva exploração. O autor do modelo é do japonês Kunihiko Kasahara que com apenas quatro dobras construiu um modelo que permite substituir o transferidor.

Numa fase inicial, os alunos constroem um medidor de ângulos. De seguida exploram algumas propriedades matemáticas subjacentes. No final da tarefa utilizam o modelo construído para medir os ângulos de alguns polígonos. Nesta mesma revista, no artigo «Origami» são apresentadas outras construções que podem ser exploradas em sala de aula.

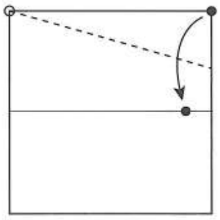
* Franco, B.; Unfolding Mathematics with *Unit Origami, Key Curriculum Press*, 1999

Anabela Gaio, Idália Pesquita e Ilda Rafael

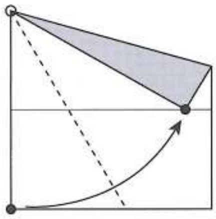
Seguindo as instrucções constrói um medidor de ângulos



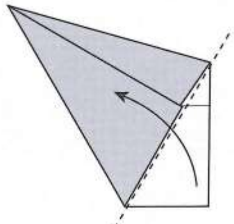
1 Dobra o quadrado de modo a ficar com o lado dividido em duas partes iguais. Desdobra.



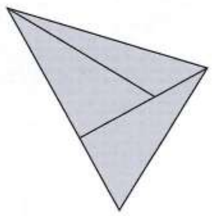
2 Dobra o vértice superior direito de tal modo que este fique em cima da dobra feita no passo anterior. Certifica-te que a dobra passa pelo vértice superior esquerdo.



3 Leva o vértice inferior direito até ao vértice superior direito.



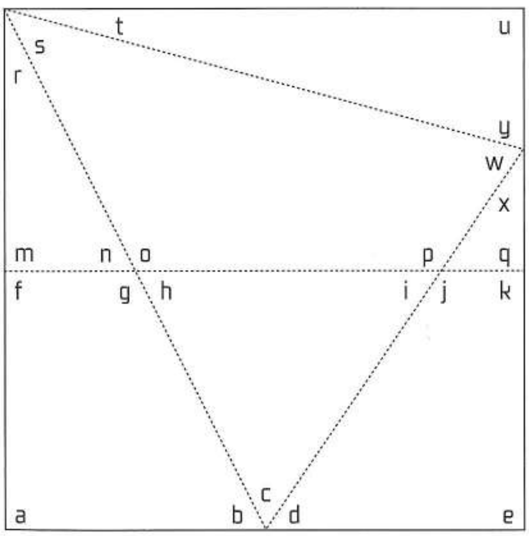
4 Faz a última dobra como mostra a figura.



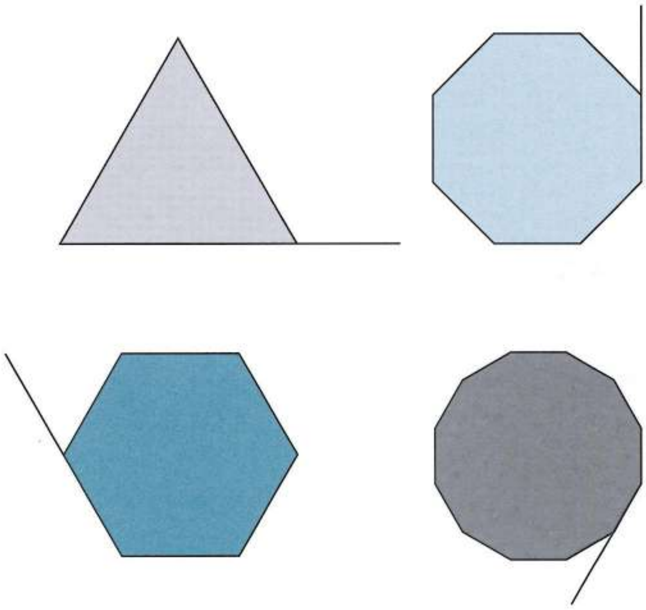
5

Exploração do Modelo «Medidor de ângulos»

1. Desdobra o modelo do medidor de ângulos e encontra a medida de cada um dos ângulos assinalados. Faz uma lista com essas diferentes medidas.



2. Usa o medidor de ângulos para medir os ângulos internos e externos dos diferentes polígonos.



Parábolas, parábolas...

João Almiro

Eu gosto muito de tecnologia e uso-a com regularidade nas minhas aulas. Quando aparece um equipamento ou um *software* novo e quando o tempo disponível o permite, exploro-o com alguma profundidade tentando perceber as suas potencialidades, tendo sempre em vista como o poderei vir a utilizar em sala de aula. Assim, na primeira oportunidade, procuro integrá-lo nas minhas aulas transportando o meu fascínio pela tecnologia para os alunos, que na maioria das vezes acompanham esse entusiasmo.

No que se refere aos programas de computador que mais ganharam a minha simpatia destacam-se, sem margem para dúvida, os que proporcionam um ambiente de geometria dinâmica, colocando-se em segundo lugar os que possibilitam a representação gráfica de funções. Nesta área da representação gráfica de funções as calculadoras têm tido também, um papel muito importante. Isto já sem falar nas calculadoras gráficas de última geração como a *TI-nspire* que possuem um conjunto de aplicações (gráficos, geometria, folha de cálculo, dados e estatística, ...) que em muitas das suas características são autênticos mini computadores, permitindo a realização de explorações muito interessantes. O facto de muitos alunos já terem adquirido esta tecnologia, estando disponível em sala de aula, torna ainda mais fácil este tipo de trabalho.

Realmente, a possibilidade que agora temos de ir alterando os parâmetros das expressões analíticas das funções, podendo observar em tempo real as transformações que ocorrem nas suas representações gráficas, motiva-nos a fazer conjecturas sobre algumas das suas propriedades, o que seria muito mais difícil, ou quase impossível, sem a tecnologia que temos hoje ao nosso dispor. Neste artigo venho partilhar três situações sobre representações gráficas de funções quadráticas, que me surgiram através de explorações realizadas usando tecnologia.

Translação e reflexão

Esta situação surgiu quando estava, com outros colegas, a elaborar testes para os nossos alunos. Na minha escola trabalhamos muito em conjunto, tanto para construir os instrumentos de avaliação como para elaborar e seleccionar as propostas de trabalho para os alunos. Também temos por hábito propor testes às várias turmas senão iguais, por não serem à mesma hora, pelo menos muito semelhantes. A situação a seguir apresentada surgiu quando estávamos a construir uma questão para alunos do 10.º ano que envolvia uma função quadrática e uma função afim, mas onde também se pedia a resolução de equações e inequações a partir da representação gráfica das funções envol-

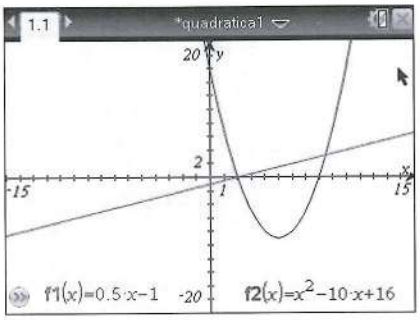


Figura 1

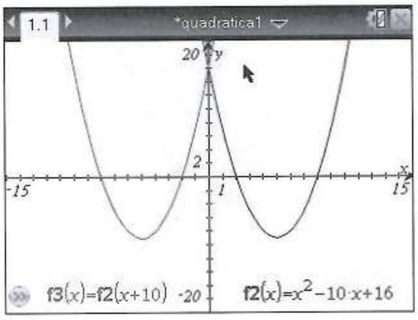


Figura 2

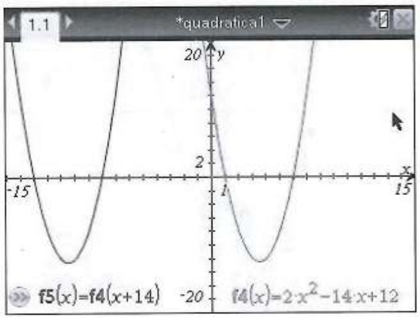


Figura 3

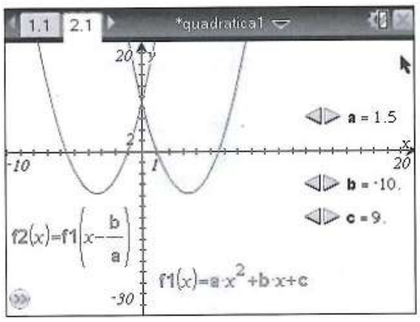


Figura 4

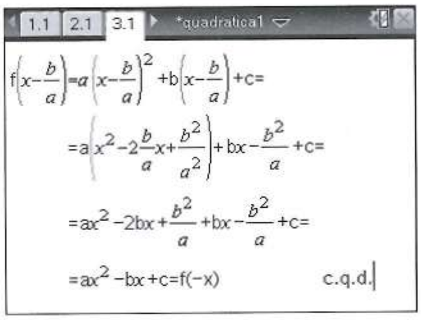


Figura 5

vidas. As funções que tínhamos em estudo eram $f(x) = 0{,}5x - 1$ e $g(x) = x^2 - 10x + 16$, representadas graficamente na figura 1.

Para nós, estas funções tinham uma vantagem muito grande, os cálculos eram simples, tanto dos zeros das funções, como do mínimo da quadrática, como até dos pontos de intersecção dos gráficos das duas funções.

Mas, como precisávamos de escolher outras duas funções para outra turma que não fazia o teste à mesma hora, começámos logo a fazer translações para a esquerda de 2, de 3, de 5. No entanto, os resultados não davam tão «perfeitinhos» como nós queríamos, até que fizemos uma translação de 10 para a esquerda. O que é que nos aconteceu? A nova parábola ficou simétrica em relação ao eixo dos yy, como se pode ver pelo gráfico da figura 2.

Fez-se o primeiro «clik». Todos reparámos que −10 era o b, o coeficiente de x da parábola inicial, e comentámos: porque é que fica simétrica em relação ao eixo dos yy? Será que acontece sempre isto?

Apareceu a primeira conjectura: dada uma função do tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$, seria sempre $f(x - b) = f(-x)$?

Experimentámos com algumas funções e parecia que a conjectura se verificava. Mas a demonstração ainda era muito fraca: Meia dúzia de funções!... Que resultado mais curioso!... Será que é sempre válido?

Continuámos a fazer experiências e funcionavam todas, estávamos a ficar contentes. Até que um colega introduz uma função no editor da calculadora que destrói a conjectura, como se pode ver na figura 3.

Mas, o que é que essa função quadrática tinha de especial? O coeficiente do x^2 era diferente de 1. Ou seja, parecia que aquela conjectura só se verificava quando o a era igual a 1. Será que se conseguia formular uma propriedade que fosse válida para todas as funções quadráticas?

Aí começámos todos a experimentar outra vez. Foi um momento interessante ver todos os colegas à procura da resposta a este problema que parecia tão inofensivo. Então, um colega formulou outra hipótese que parecia ser válida para todas as funções quadráticas:

Dada uma função do tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$, então

$$f\left(x - \frac{b}{a}\right) = f(-x)$$

Hoje, com a tecnologia que temos disponível, rapidamente conseguimos construir uma página, por exemplo na *TI-Nspire*, em que variamos os parâmetros da função quadrática e observamos o que acontece à translação do gráfico da função associada ao vector $(b/a, 0)$ (figura 4).

De facto esta propriedade verifica-se para qualquer função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, como facilmente podemos observar na demonstração (figura 5).

Tangentes e simetrias

Outra situação que eu achei interessante e que agora vos vou apresentar veio ter às minhas mãos quando estava a preparar uma sessão prática no âmbito do Grupo de Trabalho T[3] e enquanto desfolhava o livro «The Case for CAS» (Böhm e outros, 2004).

A propriedade é muito simples e pode ser trabalhada com os nossos alunos, depois de terem abordado o conceito de deri-

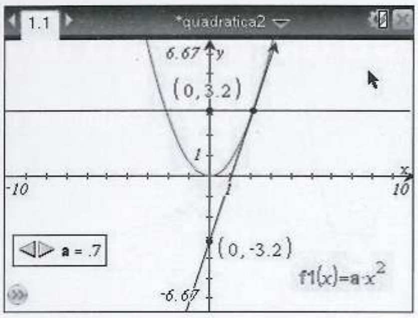


Figura 6

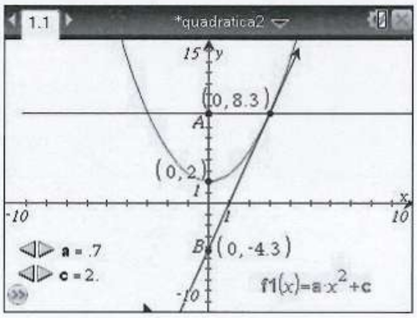


Figura 7

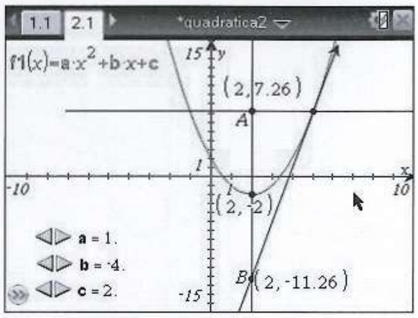


Figura 8

vada. Vou começar com o caso mais fácil, em que considero uma parábola com o vértice na origem do referencial.

Se traçarmos uma recta tangente ao gráfico de uma parábola num ponto qualquer a ordenada do ponto onde essa recta corta o eixo dos yy é simétrica da ordenada do ponto de tangência. Ou seja, existe uma simetria em relação ao vértice da parábola entre o ponto onde a recta tangente corta o eixo dos yy e o ponto do eixo dos yy com a mesma ordenada do ponto de tangência (na figura 6 pode ver-se que obtive esse ponto traçando uma recta paralela ao eixo dos *xx* passando no ponto de tangência).

Se considerarmos agora uma função quadrática com o vértice num ponto qualquer do eixo dos yy, podemos observar que a simetria em relação ao vértice da parábola se mantém: neste exemplo (figura 7) o vértice tem de coordenadas (0,2) e os pontos simétricos têm de coordenadas (0; −4,3) e (0; 8,3). Usando a tecnologia adequada, observa-se que esta propriedade se mantém em qualquer parábola nestas condições, ao escolhermos um ponto qualquer do gráfico da função para traçar a tangente. A demonstração desta propriedade está ao nível dos nossos alunos do Ensino Secundário:

Se considerarmos uma função do tipo:

$$f(x) = ax^2 + c \text{ de vértice } (0, c)$$

e um ponto qualquer de abcissa p.

Temos que a ordenada desse ponto é:

$$f(p) = ap^2 + c$$

Ao ponto do eixo dos yy com a mesma ordenada podemos chamar A $(0, ap^2 + c)$.

A derivada da função no ponto da parábola de abcissa p é:

$$f'(p) = 2ap$$

Se considerarmos a recta tangente ao gráfico nesse ponto:

$$y - (ap^2 + c) = 2ap(x - p)$$

Fazendo $x = 0$ determinamos as coordenadas do ponto onde esta recta corta o eixo dos yy (a que podemos chamar B) que serão: $(0, -ap^2 + c)$.

Para verificarmos a simetria dos dois pontos (A e B) em relação ao vértice podemos fazer a semi-soma das suas ordenadas:

$$\frac{(ap^2 + c) + (-ap^2 + c)}{2} = \frac{2c}{2} = c$$

Verificamos que é igual à ordenada do vértice da parábola como queríamos demonstrar.

Esta simetria continua a verificar-se estando o vértice da parábola noutro sítio qualquer do referencial como se pode ver no exemplo da figura 8. Os pontos A e B continuam a ser simétricos em relação ao vértice da parábola.

A demonstração para este caso mais geral segue a mesma lógica, mas do ponto de vista algébrico é um pouco mais complexa e talvez pouco adequada para a grande maioria dos nossos alunos.

Lugares geométricos

Quando trabalhamos as transformações nos gráficos da função quadrática a maior parte das vezes utilizamos o modelo

$$f(x) = a(x - h)^2 + k,$$

por ser mais simples a interpretação gráfica da variação dos parâmetros a, h e k.

E se estudássemos os parâmetros considerando o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$?

O que acontece ao vértice da parábola quando fixamos dois dos parâmetros e fazemos variar o outro?

Esta pergunta ocorreu-me já há uns anos quando participei num curso do ProfMat em que se utilizava o programa *Geometer's Sketchpad*, onde explorávamos também os parâmetros da função quadrática e com o auxílio do referido programa investigávamos e fazíamos as nossas descobertas. Mais tarde e com alguma surpresa descobri esta proposta de investigação em Embse e Engebretsen (1996).

Como sabemos, quando estamos a trabalhar com este modelo as coordenadas do vértice da parábola são:

$$x = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y = \frac{-b^2}{4a} + c.$$

O que acontecerá ao vértice da parábola quando fixamos os parâmetros a e b e fazemos variar somente o parâmetro c?

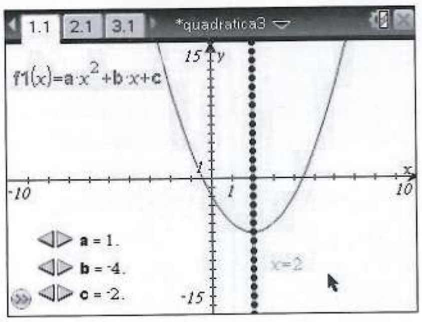


Figura 9

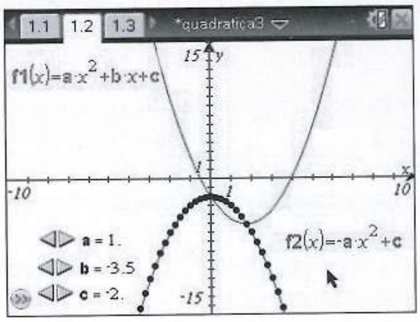


Figura 10

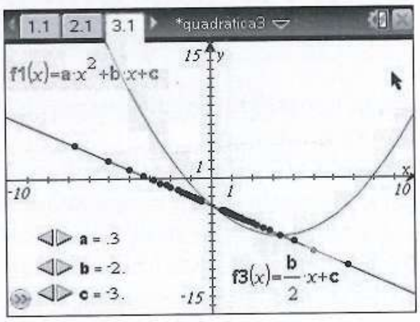


Figura 11

Qual o lugar geométrico das várias posições que o vértice vai percorrendo?

Na medida em que a variação do parâmetro c nada influencia a abcissa do vértice este vai percorrer a recta vertical de equação $x = -b/2a$ como se pode observar na figura 9. Neste exemplo, como $a = 1$ e $b = -4$, o vértice percorre a recta de equação $x = 2$.

E o que acontecerá ao vértice da parábola se fizermos variar o parâmetro b e fixarmos os outros dois?

Curiosamente, aqui ficámos deveras surpreendidos pois o vértice da parábola vai percorrer outra parábola de equação $y = -ax^2 + c$. No exemplo da figura 10 como $a = 1$ e $c = -2$ o lugar geométrico que o vértice percorre é a parábola de equação $y = -x^2 - 2$.

Repare-se que como $x = -b/2a$ e como b é o parâmetro que estamos a variar, podemos resolver esta equação em ordem a b obtendo: $b = -2ax$.

Como $y = (-b^2/4a) + c$ e substituindo a expressão que obtivemos para b temos que:

$$y = \frac{-(-2ax)^2}{4a} + c$$

$$y = \frac{-4a^2x^2}{4a} + c$$

$$y = -ax^2 + c \quad \text{c.q.d.}$$

De igual modo, se fixarmos os parâmetros b e c e fizermos variar o parâmetro a, qual o lugar geométrico dos pontos correspondentes às várias posições que o vértice vai percorrendo?

O vértice da parábola vai percorrer a recta de equação $y = (bx/2) + c$. No exemplo da figura 11 como $b = -2$ e $c = -3$, o vértice percorre a recta de equação $y = -x - 3$.

Como fizemos na situação anterior podemos escrever a ordenada do vértice da parábola sem usarmos o parâmetro que estamos a variar, neste caso o parâmetro a.

Como a abcissa do vértice é $x = -b/2a$, obtemos que $a = -b/2x$.

Como a ordenada do vértice é $y = (-b^2/4a) + c$ podemos substituir a expressão que obtivemos para a:

$$y = \frac{-b^2}{4\left(\frac{-b}{2x}\right)} + c$$

$$y = \frac{b}{2}x + c \quad \text{c.q.d.}$$

Considerações finais

Estes exemplos mostram com clareza que a tecnologia nos proporciona a visualização do comportamento dos gráficos de famílias de funções, quando fazemos variar os seus parâmetros, encontrando-se resultados que por vezes são surpreendentes e nos estimulam a querer saber mais e querer saber porquê. Este facto pode ter muito potencial, nas nossas aulas, junto dos nossos alunos.

A proposta de tarefas de exploração ou de investigação nas nossas aulas, aproveitando a tecnologia que hoje temos ao nosso dispor poderá levar os nossos alunos a conjecturar sobre as propriedades das funções, fomentando a sua curiosidade e o gosto pela Matemática, tornando-a mais apelativa e significativa. A tecnologia pode realmente aqui ter um papel determinante, dependendo em grande medida das tarefas que os professores seleccionarem, as quais poderão levar ao aproveitamento das potencialidades dessa tecnologia ou a transformarem-na em equipamentos enfadonhos somente para confirmar cálculos e meras rotinas.

Referências

Böhm, J., Forbes, I., Herweyers, G., Hugelsshofer, R. e Schomacker, G. (2004). *The Case for CAS*. T³ Europe. Universität Münster — Germany.

Embse, C. e Engebretsen, A. (1996). *Geometric Investigations for the classroom using the TI-92*. Texas Instruments. Austin.

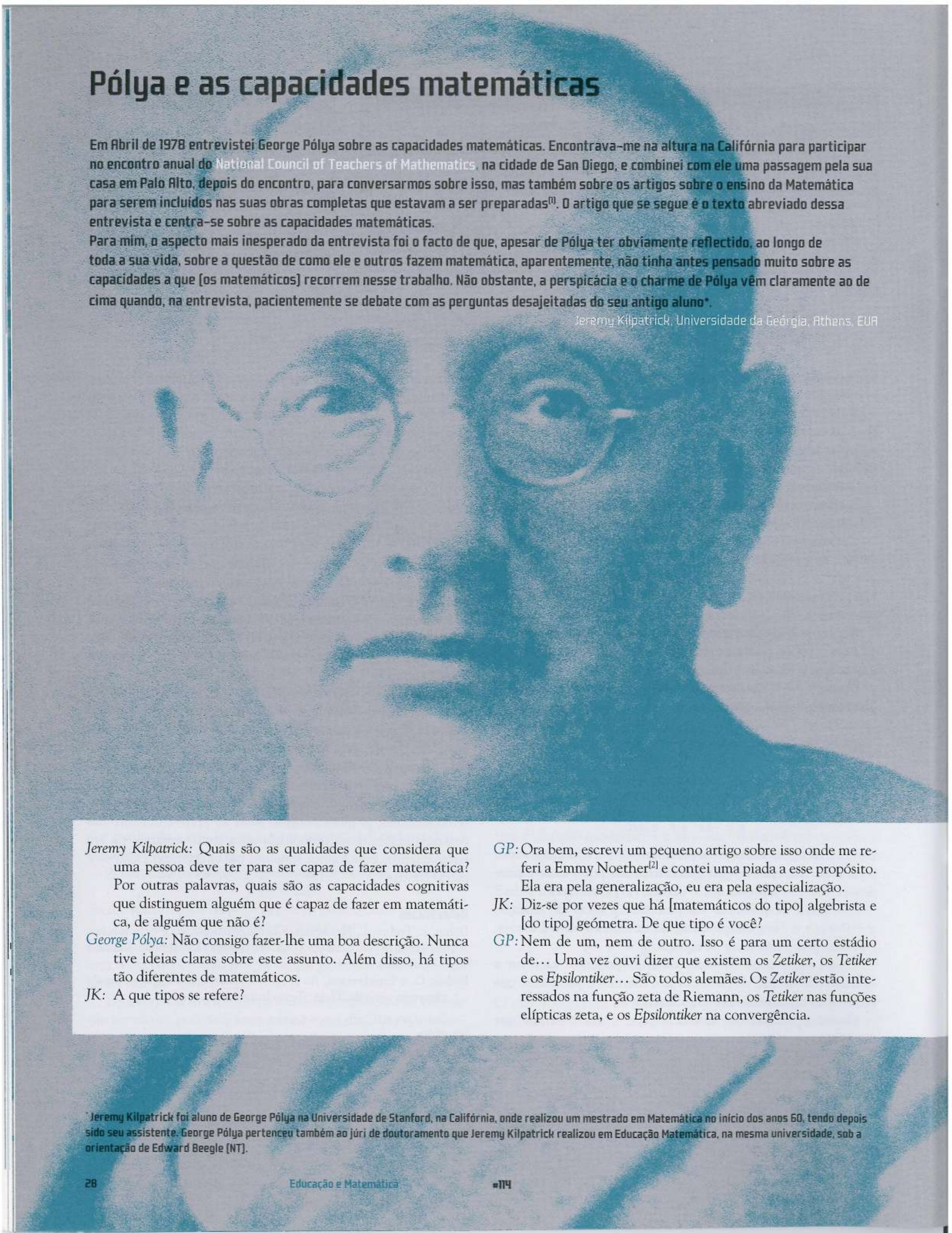
João Almiro
Escola Secundária/3 de Tondela
[Grupo de Trabalho T3]

Pólya e as capacidades matemáticas

Em Abril de 1978 entrevistei George Pólya sobre as capacidades matemáticas. Encontrava-me na altura na Califórnia para participar no encontro anual do National Council of Teachers of Mathematics, na cidade de San Diego, e combinei com ele uma passagem pela sua casa em Palo Alto, depois do encontro, para conversarmos sobre isso, mas também sobre os artigos sobre o ensino da Matemática para serem incluídos nas suas obras completas que estavam a ser preparadas[1]. O artigo que se segue é o texto abreviado dessa entrevista e centra-se sobre as capacidades matemáticas.

Para mim, o aspecto mais inesperado da entrevista foi o facto de que, apesar de Pólya ter obviamente reflectido, ao longo de toda a sua vida, sobre a questão de como ele e outros fazem matemática, aparentemente, não tinha antes pensado muito sobre as capacidades a que [os matemáticos] recorrem nesse trabalho. Não obstante, a perspicácia e o charme de Pólya vêm claramente ao de cima quando, na entrevista, pacientemente se debate com as perguntas desajeitadas do seu antigo aluno*.

Jeremy Kilpatrick, Universidade da Geórgia, Athens, EUA



Jeremy Kilpatrick: Quais são as qualidades que considera que uma pessoa deve ter para ser capaz de fazer matemática? Por outras palavras, quais são as capacidades cognitivas que distinguem alguém que é capaz de fazer em matemática, de alguém que não é?

George Pólya: Não consigo fazer-lhe uma boa descrição. Nunca tive ideias claras sobre este assunto. Além disso, há tipos tão diferentes de matemáticos.

JK: A que tipos se refere?

GP: Ora bem, escrevi um pequeno artigo sobre isso onde me referi a Emmy Noether[2] e contei uma piada a esse propósito. Ela era pela generalização, eu era pela especialização.

JK: Diz-se por vezes que há [matemáticos do tipo] algebrista e [do tipo] geómetra. De que tipo é você?

GP: Nem de um, nem de outro. Isso é para um certo estádio de... Uma vez ouvi dizer que existem os *Zetiker*, os *Tetiker* e os *Epsilontiker*... São todos alemães. Os *Zetiker* estão interessados na função zeta de Riemann, os *Tetiker* nas funções elípticas zeta, e os *Epsilontiker* na convergência.

* Jeremy Kilpatrick foi aluno de George Pólya na Universidade de Stanford, na Califórnia, onde realizou um mestrado em Matemática no início dos anos 60, tendo depois sido seu assistente. George Pólya pertenceu também ao júri de doutoramento que Jeremy Kilpatrick realizou em Educação Matemática, na mesma universidade, sob a orientação de Edward Beegle [NT].

JK: E de qual desses três tipos você é?

GP: Não sei. *Tetiker* não com certeza, não sei o suficiente e interessa-me pouco.

JK: Acha que é importante ter boas capacidades espaciais para se ser matemático?

GP: Em alguma medida sim, mas varia muito. Hadamard fala disso... Conhece o livro de [Jacques] Hadamard[3]?

JK: Sim, conheço.

GP: Se ele estivesse aqui, dar-lhe-ia respostas muito melhores, ou, pelo menos, dava-lhe mais respostas. Hadamard, por vezes, diz que ou se é do tipo ‹auditivo› ou do tipo ‹visual›. Ele próprio é mais do tipo auditivo. [Mas] não sei, isso certamente que ajuda... Veja a Jean Pederson[4], ela certamente que tem capacidade espacial.

JK: E sobre a memória? Acha que os matemáticos têm uma memória especial? Para as coisas matemáticas?

GP: Com certeza que sim.

JK: E você, tem uma memória muito boa?

GP: Tenho, e para tudo. Horácio diz na Ars Poética, ‹Mendacem oportet esse memorem›[5] — o meu latim ainda dá para alguma coisa —‹Um mentiroso tem que ter uma boa memória›. Um poeta é um mentiroso, inventa tudo, tem que se lembrar muito bem do que fez antes. Por isso, uma boa memória é necessária para tudo.

JK: Uma memória organizada de forma especial? Acha que os matemáticos têm uma memória organizada de maneira diferente?

GP: Exactamente, [mas] o que é *organizada*? Eu acho que não dispomos dos termos gerais para conseguirmos descrever essa organização, ou os que temos são vagos.

JK: Estou a perceber. No entanto tentou-se... Uma questão é [saber] se os matemáticos têm certos tipos de capacidades especiais ou se têm apenas as capacidades vulgares e as aplicam em matemática.

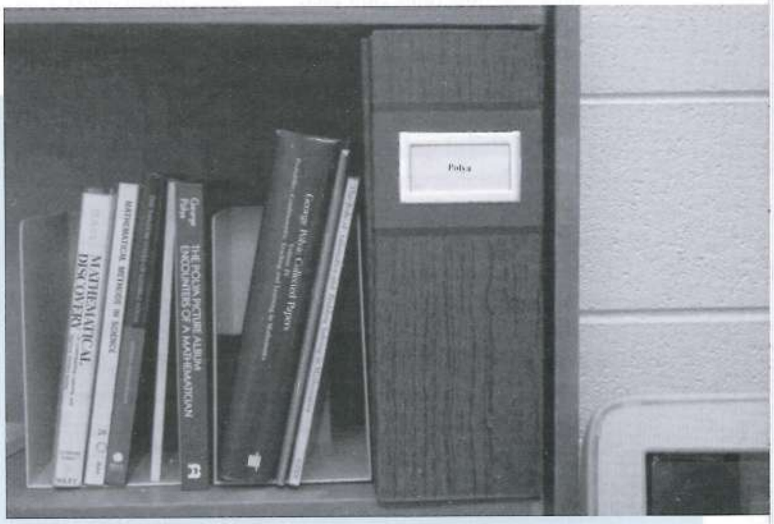
GP: A segunda [alternativa] é provavelmente um pouco melhor. Nenhuma delas é completamente verdadeira, mas a

Uma explicação

A entrevista que Jeremy Kilpatrick realizou a George Pólya em 1978 estava inédita desde a sua realização e a sua primeira publicação foi em português numa tradução dada à luz na revista *Quadrante* (Vol. XIX n.° 2) recentemente distribuída, revista e anotada por Jeremy Kilpatrick*, a quem deixo aqui o agradecimento. É agora também publicada na *Educação e Matemática*, com a explicação que acompanhou a publicação na *Quadrante* que a seguir se trancreve.

Em Fevereiro do ano passado, tive oportunidade de visitar por três meses a Universidade da Geórgia, no *College of Education — Aderhold Hall*, para fazer algumas pesquisas e estudo sobre George Pólya, com o apoio e colaboração de Jeremy Kilpatrick que, entre outras coisas, pôs à minha disposição uma caixa de arquivo que possuía com textos e outros documentos relacionados com Pólya. Foi nessa caixa que, no primeiro dia da minha estadia, encontrámos um texto dactilografado, com a transcrição de uma entrevista a George Pólya que Kilpatrick tinha realizado em 1978. Propus-me de imediato fazer a tradução para português e publicar a entrevista «ainda inédita», como na altura Kilpatrick me disse.

Jeremy Kilpatrick é, desde 1993, *Regents Professor* de Educação Matemática na Universidade da Geórgia, Athens GA, nos Estados Unidos. Terminou o seu curso em Matemática na Universidade da Califórnia em Berkley (1960), onde realizou depois o Mestrado em Educação (1960), enquanto leccionava como professor de Matemática no ensino secundário. No início dos anos 60, foi para a Universidade de Stanford, em Palo Alto, onde frequentou cursos orientados por George Pólya e seminários sobre resolução de problemas. Nesta universidade realizou um outro Mestrado, desta vez em Matemática (1962), e depois um Doutoramento em Educação Matemática (1967), cujo júri Pólya também integrou, tendo sido nestes anos que Jeremy Kilpatrick acompanhou Pólya como seu assistente.



Em Aderhold Hall, gabinete 502, Fevereiro de 2010

A breve introdução à entrevista, que Jeremy Kilpatrick teve também a amabilidade de fazer, e onde dá conta do contexto em que foi realizada e das suas motivações, anuncia uma conversa essencialmente sobre ‹as capacidades matemáticas› e sobre os textos a incluir na edição das obras completas de George Pólya em que, no que à Educação Matemática diz respeito, Jeremy Kilpatrick chegou a colaborar. O texto da entrevista, simples e directo, em que na tradução se procurou preservar o tom informal e coloquial e os vários toques do humor por que Pólya era também conhecido, vale todavia também como testemunho pessoal e em primeira mão desse matemático, sobre alguns aspectos da sua vida e do seu conhecimento e experiência com outros matemáticos.

A entrevista foi realizada tinha George Pólya feito 90 anos havia poucos meses.

* Incluem-se algumas notas de tradução assinaladas com (NT).

Henrique Manuel Guimarães

segunda é melhor. Por exemplo, posso dizer-lhe que tenho uma memória bastante boa... para a matemática tenho, tenho uma memória bastante boa. Bem, ela agora está a ir por aí abaixo, como em tudo o resto, mas conseguia lembrar-me praticamente de tudo o que fazia, mas não do que as outras pessoas faziam. Mas também tenho boa memória para a poesia e para as anedotas, por isso, não é [uma memória] apenas para números. A minha memória para a poesia é boa mas como lembro dela, e acontece muitas vezes, é assim: vem-me à cabeça entre uma coisa e outra, por alguma razão ou sem razão nenhuma.

Pergunto-lhe se sabe alemão porque sei de cor uma coisa muito bonita que Schiller disse acerca da poesia.

JK: E lembra-se de tudo?

GP: São apenas duas linhas, descreve muito bem o que ele... Vou dizer-lhas em alemão, que é aliás um alemão muito bom. [Schiller] refere-se provavelmente à poesia, ou possivelmente [à história, pois] também foi historiador, escreveu história. Mas aplica-se bem à matemática. Vou dizê-las em alemão:

Nur Beharrung führt zum Ziel,
Nur die Fülle führt zur Klarheit,
Und im Abgrund wohnt die Wahrheit.[6]

Diz ele, «Somente...» Ah, «*Beharung*», como é que diria isto? «Quem sempre...» — bem, agora falo quatro línguas, é muito difícil escolher a certa — «*Beharung*»... se trabalhamos sempre na mesma direcção, decerto que sempre seguiremos em frente. «*Nur die Fülle*»... se sabemos muitas coisas, se o nosso conhecimento é baseado em muitas coisas, mantenhamo-las reunidas — «*führt zur Klarheit*» — e assim conseguiremos maior esclarecimento. «*Und im Abgrund wohnt*»... e a verdade está nas profundezas. Pode dizer-se o mesmo da matemática, mas Schiller com certeza que se referia à poesia ou à história e não à matemática. Mas também o podemos dizer [da matemática].

Esteve lá no Sábado[7]?

JK: Sim, em S. Diego.

GP: Para conseguirmos ficar mais esclarecidos, é essencial reunir tudo, especialmente coisas do dia a dia, coisas familiares.

JK: Mas matemáticos diferentes têm pontos fortes e pontos fracos diferentes.

GP: Pessoas diferentes têm pontos fortes e pontos fracos diferentes.

JK: Quais são os seus pontos fortes e pontos fracos como matemático?

GP: Eu digo-lhe. Conheci Weil bastante bem, Herman Weil e eu éramos bastante amigos, não muito íntimos, mas éramos bastante amigos... Mas os matemáticos raramente falam de matemática uns com os outros. Weil e eu fizemos uma aposta que foi publicada e que mostra bem a diferença entre nós[8]. Weil era muito bom na generalização, era muito inteligente, conseguia captar e compreender muito rapidamente uma ideia nova e generalizá-la. Eu sou muito mais... Eu prefiro pegar em algo tangível, começar com alguma coisa tangível, partir de coisas da física ou mesmo do dia a dia. Ora isto é muito diferente. A mesma diferença existe entre mim e Emmy Noether[9]. Mostro isso num dos artigos que você vai editar, digo aí o mesmo sobre este assunto, já o leu?

JK: Sim, já o li.

GP: Ora bem, há dois tipos de macacos. Os macacos que andam no cimo das árvores e os macacos andam cá por baixo.

JK: Portanto você é um macaco que anda cá por baixo.

GP: Sim, e ela é uma macaca das que anda lá por cima. São [macacos] diferentes, tal como também as pessoas são diferentes.

JK: Quais as partes da matemática que teve mais dificuldade em compreender?

GP: Não sei. Talvez, bem... Oh, eu gosto... Não se trata de dificuldade em compreender. Por exemplo, eu gosto dos fundamentos mas não conseguiria trabalhar nisso.

JK: Porque não?

GP: Não é a minha especialidade.

JK: Porque lida com a generalização? Porque é demasiado geral?

GP: Ora bem...

JK: É demasiado abstracto?

GP: Isso não pode ser expresso por palavras. Não é a minha especialidade, simplesmente. Admito que é importante, mas não conseguiria trabalhar com isso. Tive uma sorte muito, muito grande. [David] Hilbert era muito amigo de [Adolph] Hurwitz[10] e Hurwitz estava em Zurique. Hilbert, Hurwitz e Minkowsky eram amigos íntimos. Minkowsky morreu e Hilbert veio visitar Hurwitz em Zurique. Estava muito velho, sentia que estava a envelhecer, [e que] precisa[va] de um bom assistente. Veio a Zurique e foram-lhe propostos dois: [Paul] Bernays e eu próprio. Foi uma grande sorte terem escolhido Bernays e não a mim, porque eu não era bom nos fundamentos e Bernays era excelente. Bernays, Hilbert e [Wilhelm] Ackermann[11], publicaram um livro [que] foi cem por cento escrito por Bernays. De quem foram as ideias não sei, Hilbert, provavelmente, foi quem o organizou. Foi uma sorte enorme para a ciência e para mim eu não ter sido escolhido. Teria sido, naturalmente, muito lisonjeador ser assistente [de Hilbert], mas foi muito melhor assim.

JK: Vamos falar de resolução de problemas. De onde vieram as regras e métodos heurísticos que estão no *How to Solve It*[12]? Qual a sua origem?

GP: Já publiquei sobre esse assunto. Este é, julgo, o meu primeiro artigo sobre resolução de problemas[13] e falo disso em pormenor nas primeiras linhas. Tive que preparar um miúdo para um exame do liceu, um miúdo pouco esperto. Quis-lhe explicar um problema... um problema parecido com este[14] e não o consegui. À noite sentei-me e inventei esta [representação]. Este foi o início do meu interesse explícito pela resolução de problemas.

JK: Foi então ao tentar ensinar [ao miúdo] que lhe surgiram estas questões.

GP: Não, não, isso apareceu depois. Foi só o principal, a representação com um grafo. Eu não conhecia a palavra *grafo*, etc. mas inventei esta representação e depois melhorei-a, fiz uma figura geométrica. Mas esta invenção germinou aí e foi este o princípio do meu interesse explícito [na resolução de problemas]. Implicitamente, provavelmente, já estava interessado antes, também tinha interesse [na questão de] como é que as pessoas descobrem. Foi Ernest Mach que disse que só se consegue realmente compreender uma teoria, se se souber como ela foi descoberta. Eu li o livro dele[15] e influenciou-me muito, levou-me da filosofia à física. Mach era muito contra a filosofia [do seu tempo].

JK: O grafo apareceu primeiro do que as suas questões ou sugestões do tipo, ‹Qual é a incógnita›, ‹Consegue fazer uma figura›?

GP: Sim, o grafo apareceu primeiro. Nessa altura eu estava muito interessado em Descartes, nas *Regulae*[16].

JK: Nas *Regras*.

GP: Posso mostrar-lhe, tenho aqui... Aonde é que estará? (Procura o livro mas não encontra). Tenho uma edição [bilingue] das *Regras*, de um lado está o original em latim, do outro a tradução francesa. Julgo que é [com] estas questões com que agora se inicia o *How to Solve It*.

JK: Quando é que isso foi? Quando estava em Zurique?

GP: Sim. Isto aqui é... Oh, já viu o número do *Journal of Graph Theory*? Posso oferecer-lho.

JK: Não, não tinha visto.

GP: Tem dois artigos[17]. O primeiro, de Harary... não tenho nenhuma cópia dele, e o outro de Albert Pfluger. Não sei se sabe quem é.

JK: Não.

GP: É um professor da minha antiga instituição[18].

JK: Era um colega seu?

GP: Não, era um estudante. Fez o doutoramento comigo. Conheci-o a ele, à sua filha etc., etc.

JK: E ele conta a história.

GP: Conta-a muito bem.

JK: Estou a ver, óptimo.

GP: Há [também] um artigo de Harary.

JK: Eu procuro.

GP: Arranjarei cópias mais tarde. De qualquer modo, você encontra, é fácil.

JK: Quando resolve problemas, usa os seus conselhos do *How to Solve It*? Conscientemente?

GP: Sim, mesmo mais do que isso. Como também digo algures — está num dos meus artigos — eu tinha as regras e eu próprio as experimentei. Depois de ter editado as obras de Hurwitz pensei também em publicar as suas notas — ele tinha um caderno de notas, notas matemáticas, um diário matemático, melhor dizendo. A palavra correcta é *diário*, em francês dizemos *journal*, mas em inglês dizemos *diary*. [Hurwitz] tinha um diário matemático muito bem escrito, redigido de forma muito completa, não apenas rascunhado mas escrito com clareza, bem formulado. Aí ele descreve aquilo em que pensa, por vezes as suas conversas, outras vezes o que leu. Pensei então [também] em editar o diário e assim, entre outros, encontrei este problema que me conduziu ao [*Pólya*] *Counting Method*. Escolhi este método de contagem apenas para testar as minhas próprias regras. Digo isto algures, num artigo que publiquei, *Welcome*[19].

JK: Também quer esse artigo no livro [das obras completas].

GP: Sim.

(...)

GP: Isso está aí [nesse artigo], digo mesmo isso, [que] tentei experimentar... Eu pretendia experimentar eu próprio essas regras e este problema de Hurwitz era mesmo bom para isso. [Era] obviamente um problema interessante, pois Hurwitz e Cayley trabalharam nele, e [era] essencialmente relacionado com a química. Disso gosto, [de um problema] relacionado com algo de importante e com a prática. E, por outro lado, são necessários muito poucos conhecimentos prévios.
Vou contar-lhe uma história. Quando estudou álgebra, ainda estudou o Teorema de Sturm.

JK: Estudei.

(...)

GP: Hoje em dia já não consta dos livros de álgebra embora na verdade seja um assunto essencial. Sturm foi professor na École Polytecnique de Paris e citou-o: *Le théoreme dans j'ai l'honneur de porter le nom* —‹O teorema no qual eu tenho a honra de ter o nome›. Agora, eu tenho... existe o ‹Método de Contagem› (*Counting Method*) no qual eu tenho a honra de ter o nome.

JK: É bom, muito bom.

GP: Está a ver, e foi descoberto apenas partindo disto... eu queria experimentar as minhas regras.

JK: Algumas pessoas dizem que não conseguem usar as [suas] regras, ou que...

GP: Pois é, as pessoas são diferentes, as pessoas são diferentes.

JK: Acha que é possível desenvolver a capacidade de uma pessoa para resolver problemas?

GP: Penso que sim.

(Entra a Sra. Pólya com bebidas e falámos de coisas de família)

JK (para a Sra. Pólya): Encontrei um artigo que você escreveu[20], tenho uma cópia.

Stella Pólya: (Risos) Eu tive apenas a ideia sobre a almofada de alfinetes. Disse a [Jean] Pedersen e foi ela que falou disso. Foi ela quem escreveu e fê-lo sem eu saber.

(Seguiu-se mais alguma conversa entre os três e depois a Sra. Pólya saiu. O tempo está a esgotar-se.)

JK: Acho que já fiz a maior parte das perguntas que queria.

GP: Qual é a próxima?

JK: A próxima é esta, acha que é possível desenvolver a capacidade de uma pessoa para resolver problemas? Até que ponto podemos desenvolver essa capacidade?

GP: Ora bem, eu diria que não é tanto ‹desenvolver› mas ‹despertar›.

JK: Ela já está lá.

GP: Está lá algures. Se não há nada lá, não é possível... Mas podemos despertar essa capacidade. [Com] um bom professor, etc. [com] uma boa oportunidade para a despertar. No meu caso, tive obviamente possibilidades que isso [acontecesse], mas ela foi despertada muito tardiamente. Provavelmente, teria sido um matemático muito melhor se tivesse tido um bom professor no liceu. Essa capacidade pode ser despertada... estou convencido disso. Talvez esteja a ser demasiado optimista, mas até acho que [com] as minhas regras, um professor, um bom professor dando alguma ênfase às minhas questões, pode ajudar a despertá-la. Allan Schoenfeld tem algumas ideias sobre como fazer isso. Não estou totalmente de acordo com ele, com o que ele diz, mas de qualquer modo penso que sim, nisso eu acredito. Não está provado, evidentemente, mas será muito difícil de provar ou de refutar.

JK: Acha que é importante o professor apresentar diante da turma... [Que] é importante o professor mostrar diante da turma como resolver o problema. O professor deve ser um actor?

GP: O que é mais importante para o professor, é que ele próprio tenha a experiência de resolução [de problemas]. Em Belmont [CA] há uma universidade católica, a Universidade de Notre Dame. Tivemos lá um encontro, você não esteve, evidentemente. Tivemos lá Ed Teller, o pai da bomba atómica [que] deu uma palestra, uma palestra mesmo muito interessante[21]. Eu não concordo com tudo o que ele disse, mas foi bom. [Teller] disse que o mais importante é o professor, [que] o professor deve divertir os jovens, [que] matemática deve divertir os jovens.

JK: E você concorda?

GP: Concordo. Para despertar os jovens, os problemas devem ser divertidos, desafiadores. Os problemas devem ser divertidos, não [devem ser] problemas muito afastados deles, não [devem ser] problemas ‹práticos› como calcular o imposto sobre os rendimentos.

JK: Isso não é mesmo nada divertido.

GP: (Risos) Absolutamente. O Infernal Serviço dos Rendimentos (*Infernal Revenue Service*). Não é nada divertido.

JK: Entre os alunos que teve, como identificava os melhores em matemática. Ensinou alunos que eram bons em matemática, como é que descreveria aqueles que eram os melhores?

GP: Qual era o melhor, não sei dizer-lhe.

JK: Está bem, [mas] entre os melhores, como conseguia identificar o talento deles. Eram os mais rápidos?

GP: Colocavam boas questões, descobriam alguma coisa por eles próprios, etc. Não há maneira simples... As pessoas são demasiado diferentes, não há uma maneira simples de descrever isso, acho que não há.

JK: E quanto às pessoas que são criativas em matemática, comparando com as que simplesmente são capazes de a aprender? O que é que faz com que sejam criativas? O que é que isso exige? Apenas um grande interesse?

GP: Não sei.

JK: Nem toda a gente é criativa em matemática.

GP: Disse um dia algures, ‹qual é a diferença entre *produtivo* e *criativo*›? Se pensamos sobre um problema e produzimos um resultado, neste caso estamos a ser produtivos. Se ao realizarmos esse trabalho obtemos um método com o qual conseguimos resolver também outros problemas, então estamos a ser criativos. É esta a diferença, mas é difícil explicar de que se trata. Não penso que existam sinais evidentes para reconhecer essa diferença, acho que não.

JK: São coisas com que as crianças nascem?

GP: Sim, tenho quase a certeza. Devemos ter uma [predisposição] genética... Deve ser alguma coisa com que nascemos, claramente.

JK: Mas ajuda se tivermos um professor...

GP: Isso ajuda, para a despertar.

JK: No entanto, mesmo que não tenhamos tido um professor para a despertar, podemos ser...

GP: Podemos.

JK: Como no seu caso.

GP: Se formos muito... Ora bem, eu tive Mach como professor. Um pouco tarde, mas eu... eu aprendi... Mach disse e explicou-o muito bem [que] ‹se pretendemos compreender teoria, temos que saber como ela foi descoberta›. E isto eu compreendi.

JK: Pensa que é esse um dos problemas do ensino da matemática nas escolas, que [nos limitamos] a apresentá-la aos jovens?... Apresentamos a matemática aos jovens mas não lhes mostramos como ela foi descoberta. Por outras palavras, [acha que] o ensino deve ser mais genético?

GP: Devemos ilustrar [como isso acontece], fazer uma pequena encenação e fingir que estamos a descobri-la. Publiquei isto algures, fingir a descoberta.

JK: E pensa que isso é importante para...

GP: Se fizermos isso bem feito, eles aprendem muito mais que apenas o problema [a resolver].

JK: Colaborou com outros matemáticos?

GP: Com muitos.

JK: Eles abordavam a matemática de um modo diferente do seu?

GP: Não sei. Como lhe disse, nunca colaborei com Weil, os nossos interesses eram muito distintos. Mas colaborei com matemáticos muito bons, melhores que eu próprio. Com Hurwitz, com [Godfrey Harold] Hardy, com [Gábor] Szegö[22]. Estão aqui à minha volta (aponta para fotografias na parede do escritório). Evidentemente que foi com Szegö que eu colaborei mais.

JK: A abordagem da matemática de Szegö é a mesma que a sua?

GP: Pelo contrário, em certa medida éramos complementares.

JK: De que forma?

GP: Por exemplo, ele era um calculador excelente, era excelente no cálculo.

JK: E você não é tão bom?

GP: Não sou mau, mas ele... De algum modo complementávamo-nos um ao outro. Ele sabia de uns assuntos, por exemplo, sabia mais de polinómios do que eu, de Legendre, etc. De alguma forma nós... os nossos interesses eram suficientemente semelhantes, mas também suficientemente diferentes, não consigo enumerar todos os aspectos, mas era mais o complementarmo-nos. Tínhamos evidentemente, alguns interesses muito semelhantes, mas também diferentes. [E] também antecedentes similares, fomos os dois alunos de [Leopold] Fejér, etc, mas...

JK: Que tipo de professor era Fejér?

GP: Era muito bom, muito bom. Tive poucas aulas suas, mas conversei muito com ele. Era excelente. Escrevi sobre isso algures, fiz um obituário de Fejér onde falei sobre isto[23]. Ele contava histórias muito boas.

JK: E sobre Hardy? Que tipo de matemático era Hardy?

GP: Tinha um certo charme pessoal. Nunca conheci na minha vida ninguém com tanto charme. Não apenas para os matemáticos, mas para as pessoas em geral. Na Europa, os matemáticos professores ganham menos mas possuem mais coisas. Por exemplo, em Zurique, e mesmo na Budapeste comunista, um matemático professor certamente que tem uma empregada doméstica. Aqui não se consegue pagar... Você consegue pagar a uma empregada?

JK: Não.

GP: Mas lá conseguimos pagar a uma empregada. Nós tínhamos a mesma empregada e quando Hardy lá esteve, a empregada fez uma empada extra para ele. Hardy gostava do chá da tarde e ela fez uma empada extra para ele, embora Hardy provavelmente nunca tenha olhado para ela e de certeza que nunca lhe falou. No entanto, a empregada também ficou impressionada com Hardy. Ele tinha um certo charme que não se consegue descrever.

JK: Mas no trabalho com a matemática, a abordagem dele era a mesma que a sua?

GP: Não, a sua colaboração era mais com Littlewood, muito mais com Littlewood de que comigo. Littlewood era talvez o que mais descobria e Hardy o que mais escrevia. O mesmo se passou com o nosso livro *Inequalities*[24]. Eu escrevi um ou dois capítulos, Littlewood não escreveu um único — algumas das suas palestras tinham sido policopiadas e esse material foi utilizado. Eu escrevi uns quantos capítulos, mas Hardy escreveu tudo. Tal como [o livro] está, cada uma das frases foi escrita por Hardy. Ele tinha uma extraordinária facilidade em escrever, mesmo em francês — mas recusava-se falar francês, os ingleses têm bem consciência disto. Escrevia muito depressa em francês, e em inglês, claro, tinha um talento especial para escrever depressa e bem.

JK: Quando se trabalha em matemática, quando se tenta resolver um problema matemático, acha que o conselho para deixar o problema de lado por uns tempos... é um bom conselho?

GP: Não sem primeiro ter feito alguma coisa.

JK: [É preciso] experimentar antes. Teve alguma vez a experiência de lhe aparecer uma solução inconscientemente?

GP: Sim, com certeza. Há mesmo [a expressão] ‹Esperar pelo bom vento›. É uma expressão comum.

JK: Teve essa experiência?

GP: Não sei de quem ouvi, mas não o inventei eu, tenho a certeza. Quando se é marinheiro — não de um barco a motor, mas de um barco à vela — há que esperar pelo bom vento. Trata-se assim de ‹esperar pelo bom vento›. Não inventei esta expressão, deve ser algum dito tradicional.

JK: Pessoas como Poincaré e outros [também o] disseram...

GP: Esperar, dormir sobre o problema. Isto é internacional, é dito em todas as línguas.

JK: [E] teve a experiência de acordar com uma solução?

GP: Sim, de vez em quando. Também descrevi isto algures num dos meus artigos.

JK: [A solução] apareceu-lhe assim desse modo?

GP: Mas muito raramente. Ouvi o mesmo de Hurwitz. Acordar com a solução, mas são apenas coisas fantasmagóricas.

JK: Não é verdadeiramente a solução?

GP: Não, não é assim [que se passa]. Muito raramente aconteceu que acordasse realmente com uma solução que o fosse. Há uma coisa simples no [livro] *Inequalities*, uma solução para... Penso que é referido num dos meus últimos artigos[25] (vai buscar o artigo).

JK: Número 236.

GP: Penso que é o segundo [artigo] onde eu descrevo isso — Sonhos matemáticos. Agora raramente tenho, mas quando era mais novo tinha sonhos matemáticos.

JK: O que quer dizer com sonhos matemáticos?

GP: Oh, eu sonhava...

JK: Com símbolos?

GP: Não, [sonhava] com um teorema ou uma demonstração ou qualquer coisa, mas normalmente... [a demonstração] dissolvia-se, está a ver. Mas houve uma vez que me lembrei, aconteceu mesmo, realmente sonhei-a correctamente. Apenas tive que escrever os pormenores de manhã. Ouvi dizer que com Hurwitz aconteceu o mesmo. Tenho quase a certeza que isto está descrito aí [no artigo].

JK: Desenha muitas figuras quando está a trabalhar num problema?

GP: Algumas vezes sim, desenho muitas figuras, às vezes muito cuidadosamente.

JK: Mesmo quando o problema não exige uma figura?

GP: Com certeza. Pode ser o início da ideia, obtermos uma figura que esteja ligada com o problema.

(...)

(A conversa regressa à palestra de Eduard Teller)

GP: Então ele ensina a um dos miúdos e [esse miúdo] vence os outros. Assim ficarão todos com muita vontade de aprender e, ao aprenderem, aprendem também o sistema binário e a divertir-se com a matemática. Era essa a ideia de Teller, com que não concordo a cem por cento, mas foi bom que alguém o dissesse aos professores. Sobretudo que [dissesse que] o principal no professor deve ser o interesse, [que] ele deve divertir, convencer os jovens que a matemática é divertida.

JK: [E] como é que os jovens vão aprender as técnicas matemáticas?

GP: Hão-de aprender. Se jogarem o jogo do Nim, aprenderão a fazer adições muito rapidamente, e aprendem a combinar coisas etc. Teller é seguramente um cientista de elevada craveira, e diga-se a propósito que não é apenas isso. Sabe que havia um concurso de matemática na Hungria[26].

JK: Sim

GP: Teller venceu esse concurso quando era jovem. Por isso, ele sabe do que está a falar quando fala sobre a aprendizagem da matemática. Ele tem experiência real da matemática para a idade do liceu, experiência de alto nível. E Jean Pederson, que foi uma professora muito bem sucedida, vai aos liceus, ou os jovens vão à Universidade de Santa Clara, e ela mostra-lhes como construir modelos. Depois disso, eles ficam desejosos por construir modelos. Um vez, ela fotografou cada um dos jovens com o modelo que fez. Isso também é alguma coisa, também é trabalho matemático, aprendem figuras geométricas, etc. ‹A aprendizagem começa por ver e fazer›, também citei isto em algures[27].

JK: Sim, eu sei.

GP: Assim, se jogarmos o jogo do Nim ou construirmos modelos matemáticos... A propósito, a Sra. Pederson, juntamente com alguém da Universidade de Santa Clara, está a escrever um livro principalmente para adolescentes — sobretudo para os primeiros anos do liceu, talvez, ou um pouco antes ou um pouco depois — onde propõem problemas divertidos em que têm que realizar muitos cálculos[28]. Está bastante bem feito. Discuti um pouco [o livro] com ela, ajudei um pouco mas foi feito por eles. Ainda não está publicado. A Sra. Pederson escreveu vários livros mas este é um livro como deve ser e é o que se deve fazer: dar [aos jovens] alguma coisa que os divirta.

JK: É um bom conselho.

GP: Se tivesse mais tempo, eu sabia o que gostava de fazer. Tenho muitos textos que me enviaram — coisas sobre o ensino e coisas semelhantes — pedindo-me conselhos, e na maior parte dos casos não os li. Agora não sei o que fazer com todos estes textos.

JK: Quer mandar-mos a mim?

GP: Posso mandar-lhe muitos.

JK: Está bem.

GP: Mas tenho que os preparar.

JK: Envie-mos que eu ajudo-o.

GP: Está bem.

JK: Pode entregá-los à secretária do Departamento de Matemática e ela enviar-mos-á.

GP: Obrigado, isso é muito bom.

Notas

[1] Rota, Reynolds, & Shortt, 1984.

[2] Pólya, 1973/1984.

[3] Hadamard, 1945.

[4] Professora de matemática na Universidade de Santa Clara.

[5] Na verdade a citação é de Quintilian (*De Institutione Oratoria*, IV. ii).

[6] «Naught but firmness gains the prize, Naught but fullness makes us wise, Buried deep, truth ever lies!» (Schiller, 1796). [‹Só a tenacidade premeia, Só a plenitude nos esclarece, A verdade habita as profundezas.› (NT)]

[7] Pólya refere-se à sua sessão com Peter Hilton no encontro anual do *National Council of Teachers of Mathematics* em San Diego nesse Abril. Hilton proferiu uma conferência que ilustrava como a matemática não deve ser ensinada e então Pólya apresentou algumas regras de ouro para bem ensinar. A sessão foi uma repetição da apresentação que ambos tinham feito no encontro conjunto da *American Mathematical Society* e a *Mathematical Association of America* em Seattle, no verão anterior (ver Hilton & Pedersen, 1999).

[8] A aposta foi feita em 1918 e foi sobre que direcção seguiria no futuro a matemática. Weil era um construtivista e Polya, era um matemático mais clássico (ver Gurevich, 2001, para mais detalhes sobre aposta).

[9] Polya, 1973/1984.

[10] Matemático que Pólya reconheceu ter recebido profunda influência e com quem trabalhou em Zurique durante cerca de seis anos (em entrevista a G. L. Alexanderson, *Two-Year College Mathematics Journal*, Janeiro de 1979); foi Hurwitz quem convidou Pólya para um lugar no Instituto Federal de Tecnologia da Suíça a que pertenceu durante 26 anos. (NT)

[11] Hilbert & Ackermann, 1928; Hilbert & Bernays, 1934, 1939.

[12] *Como resolver problemas*, na tradução portuguesa de Leonor Moreira (Gradiva, 2003) (NT).

[13] Pólya (1919.). A representação melhorada pode ser vista no *Mathematical Discovery* (Pólya, 1981, Vol. 2, p. 9) e no verso da capa do volume 2 da edição original.

[14] O problema é determinar o volume do tronco de uma pirâmide recta quadrangular, conhecidos a altura e os comprimentos dos lados das bases superior e inferior (ver Polya, 1981, Vol. 2, p. 2).

[15] Mach, 1883.

[16] Descartes, 1701.

[17] Harary, 1977; Pfluger, 1977.

[18] Eidgenössische Technische Hochschule Zürich [Instituto Federal de Tecnologia da Suíça].

[19] Pólya, 1977.

[20] Pólya, S., 1977.

[21] A palestra de Edward Teller chamou-se ‹*The New (?) Math*› [*Matemática Moderna* (?)] e teve lugar no encontro de Fevereiro de 1978 da Secção da Califórnia do Norte da *Mathematical Association of America*, que se realizou no College of Notre Dame.

[22] Gabor Szegö foi um matemático com quem Pólya desenvolveu profunda e continuada colaboração em Zurique e com quem viria a escrever aquela que é considerada a sua obra prima em matemática — *Problemas e Teoremas em Análise*, publicada em alemão em 1925. Quando se exilou nos Estados Unidos a partir de 1940, Pólya viria a reencontrar-se com Szegö que dirigia o Departamento de Matemática na Universidade de Stanford e o convidou para um lugar de investigador associado. (NT)

[23] Pólya, 1961. Ver também Pólya, 1969.

[24] Hardy, Littlewood, & Pólya, 1934.

[25] Trata-se da demonstração da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica feita Hardy, Littlewood, and Polya, 1934, p. 103. Ver Pólya, 1970.

[26] O concurso Eötvös. [Célebre concurso de problemas matemáticos que se iniciou em 1894 e que inspirou competições semelhantes em muitos países. (NT)]

[27] Pólya, 1981, Vol. 2, p. 103, onde Pólya parafraseia Kant: «A aprendizagem começa com a acção e a percepção».

[28] Posteriormente publicado, Pedersen and Armbruster, 1979.

Referências

Descartes, R. (1701). Regulae ad directionem ingenii (Rules for the direction of the mind). In *Descartes Opuscula posthuma, physica & mathematica*. Amsterdam: P. & J. Blaeu.

Gurevich, Y. (2001). Platonism, constructivism, and computer proofs vs. proofs by hand. In G. Paun, G. Rozenberg, & A. Salomaa (Eds.), *Current trends in theoretical computer science: Entering the 21th century* (pp. 281–302). Singapore: World Scientific.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Harary, F. (1977). Homage to George Pólya. *Journal of Graph Theory*, 1, 289–290.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1934). *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hilbert, D., & Ackermann, H. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik* [Principles of mathematical logic]. Berlin: Springer.

Hilbert, D., & Bernays, P. (1934). *Grundlagen der Mathematik* [Foundations of mathematics] (Vol. 1). Berlin: Springer.

Hilbert, D., & Bernays, P. (1939). *Grundlagen der Mathematik* [Foundations of mathematics] (Vol. 2). Berlin: Springer.

Hilton, P., & Pedersen, J. (1999). Epilogue: Pólya and ourselves — Mathematics, tea and cakes. Symmetry in theory: Mathematics and aesthetics. *Visual Mathematics*, 1(1). Retrieved from http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/hil/ped6.htm

Mach, E. (1883). *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* [The science of mechanics]. Leipzig: Brockhaus.

Pedersen, J. J., & Armbruster, F. O. (1979). *A new twist: Developing arithmetic skills through problem solving*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Pfluger, A. (1977). George Pólya. *Journal of Graph Theory*, 1, 291–294.

Pólya, G. (1919). Geometrische Darstellung einer Gedankenkette [Geometrical representation of a chain of thought]. *Schweizerische Pädagogische Zeitschrift*, 2, 53–63.

Pólya, G. (1961), Leopold Fejér. *Journal of the London Mathematical Society*, 36, 501–506.
Pólya, G. (1969). Some mathematicians I have known. *American Mathematical Monthly*, 76, 746–753.
Pólya. G. (1970). Two incidents. In T. Dalenius, G. Karlsson, & S. Malmquist (Eds.), *Scientists at work: Festschrift in honour of Herman Wold* (pp. 165–168). Stockholm: Almqvist & Wiksell.
Pólya, G. (1977). A note of welcome. *Journal of Graph Theory*, 1, 5.
Pólya, S. (1977, October). Pincushion geometry for primary children. *California Mathematics* (California Mathematics Council), 2(1), 35–36.
Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (Combined ed.). New York: Wiley.
Pólya, G. (1984). A story with a moral. In G.-C. Rota, M. C. Reynolds, & R. M. Shortt (Eds.), *George Pólya: Collected papers* (Vol. 4: Probability; combinatorics; teaching and learning in mathematics, p. 595). Cambridge, MA: MIT Press. (Reprinted from *Mathematical Gazette*, 57, 86–87, 1973)
Rota, G.-C., Reynolds, M. C., & Shortt, R. M. (Eds.). (1984). *George Pólya: Collected papers* (Vol. 4: Probability; combinatorics; teaching and learning in mathematics). Cambridge, MA: MIT Press.
Schiller, F. von. (1796). Sprüche des Konfucius. In F. von Schiller (Ed.), *Musen-Almanach für das Jahr 1796* [Muses Almanac for 1976] (pp. 39–47). Neustrelitz, Germany: Michaelis.

Tradução de H. M. Guimarães

George Pólya – nota biográfica

Se foi estudante de pós-graduação a viver no College Terrace *em Palo Alto, poderá ter tido a oportunidade de passar longas tardes de verão no escritório sombrejado da modesta casa [de George Pólya] em Dartmouth (que pronunciava ‹Dartmouse›), a beber sumo de frutas e a comer bolos, e a aprender como ser um académico — a necessidade de evitar a auto-compaixão e de nos darmos importância; de cuidarmos do nosso trabalho; de encontrar a palavra certa, a ideia certa; de encontrar prazer e humor naquilo que fazemos. E ao regressar anos mais tarde com a sua família, e ver Pólya a divertir o filho de cinco anos que veio consigo com um brinquedo de dobrar ou a apanhar limões para si no quintal, poderá ter um vislumbre da verdade que os grandes professores não nos ensinam apenas a fazer, ensinam-nos a ser.*

(J. Kilpatrick, no editorial do *JRME*, 16 (5), Novembro de 1985, por ocasião do falecimento de Geoge Pólya [1])

George Pólya foi um matemático com uma grande produção individual e também em colaboração com matemáticos de renome em domínios da Matemática muito variados. Desenvolveu igualmente uma intensa actividade não estritamente ligada à investigação científica, muito relacionada com ensino em Matemática, intervindo em congressos e junto de professores, realizando palestras, cursos e outras intervenções, publicando inúmeros artigos em revistas, escrevendo livros.

Pólya nasceu na Hungria, em Budapeste, a 13 de Dezembro de 1887, filho de Anna Deutsch e Jakab Pollák, numa família de ascendência judaica pelo lado do pai, que escolheu o apelido Pólya quando se converteu ao catolicismo. Um de cinco filhos, três rapazes e duas raparigas, sendo George o terceiro a nascer, depois de um irmão e duas irmãs. Iniciou a sua educação escolar numa escola da zona onde vivia, recebendo, em 1894, «um certificado de excelência por empenhamento e bom comportamento» [2, p. 15]. Aos 10 anos perdeu o pai, ficando a família sob a responsabilidade da mãe que prosseguiu o trabalho na empresa de seguros que o marido, homem de leis, tinha criado, e do irmão mais velho. As duas irmãs começaram de imediato a trabalhar após o falecimento do pai.

Viveu na cidade em que nasceu até terminar os seus estudos secundários e onde também se doutorou em Probabilidades (1912). Depois do seu doutoramento, Pólya decidiu passar dois anos na Universidade de Göttingen. Aí terá contactado com Félix Klein, já aposentado, e com muitos dos grandes nomes da Matemática da época, como Hilbert, Landau, Toeplitz, Courant e Herman Weyl, e frequentado cursos leccionados por vários desses matemáticos. É neste período, em 1912, que publica o seu primeiro artigo. Depois de diversas viagens e estadias em várias cidades, onde contactou com matemáticos ilustres, estabeleceu-se no Instituto Federal de Tecnologia da Suíça, em Zurique, onde trabalhou 26 anos, primeiro como *Privatdozent* e *Titular professor* (1920), depois como *Professor Ordinarius* (1928). Foi neste período que George Pólya desenvolveu grande parte do seu trabalho académico e científico e encontrou grandes matemáticos da altura — Plancherel, Gonseth, Weyl (de novo), Bernays e outros, desenvolvendo trabalho e relações de amizade com alguns deles. Começou aqui também a sua intensa e prolongada colaboração com Gábor Szegö, com quem viria a escrever a sua «obra-prima» matemática *Problemas e Teoremas em Análise*, publicada em alemão em 1925. Em 1924 passou um ano em Inglaterra — Oxford e Cambridge — onde conheceu G. H Hardy e J. H. Littlewood com quem privou e trabalhou — o livro *Inequalities* (1934), elaborado em colaboração com estes matemáticos, viria a ser considerado um «clássico» e uma «referência» durante várias dezenas de anos.

Entretanto George Pólya adquire a nacionalidade suíça e casa com Stella Weber (1918) que viria a acompanhá-lo durante toda a sua vida. Não tiveram filhos.

Em 1940, George Pólya com a mulher, para escapar à ameaça nazi, deixa Zurique e troca a Europa pelo novo continente. Depois de curtas passagens por outras universidades, seria em Stanford, em Palo Alto na Califórnia, onde já estava o seu colega e antigo amigo Gábor Szegö a dirigir o Departamento de Matemática, que Pólya, por convite do amigo, que lhe ofereceu um lugar de «investigador associado», se viria a estabelecer definitivamente, a partir de 1942.

Com a sua chegada aos EUA, para lá da investigação em Matemática, inicia uma «nova carreira», correspondendo a interesses antigos em heurística e resolução de problemas. Em 1945 a publica um dos seus livros mais conhecidos nesta área, *How to Solve It*, editado nos Estados Unidos da América pela Princeton University Press, depois da recusa de quatro editoras — certamente por na altura «se situar fora da corrente principal da matemática e da educação» [2, p. 115]. O livro mereceu comentários elogiosos na recensão do matemático E.T. Bell, como aconteceu com a nova impressão em 1948, desta vez revista por outro célebre matemático, Hermann Weyl, e seguiram-se várias reimpressões e edições. Em 1957, por uma outra casa editora, é lançada em livro de bolso a 2.ª edição, que teve grande acolhimento, sendo de 2009 a edição mais recente. Actualmente está traduzido em 21 línguas, incluindo a portuguesa, primeiro no Brasil (1977) e mais recentemente em Portugal (2003) e, um ano após seu falecimento, tinham já sido vendidos mais de um milhão de exemplares, um número «recorde» para livros sobre matemática, como foi sublinhado numa publicação do NCTM [3] editada na sequência do encontro anual de 1987 desta associação, nesse ano dedicado a George Polya.

A *How to Solve It*, outros livros se seguiram — *Mathematical Discovery* (Vol. 1 e 2, 1954), Mathematics and *Plausible Reasoning* (vol. 1, 1962 e vol. 2, 1965), *Mathematical Methods in Science* (1963), *The Stanford Mathematics Problem Book, with hints and solutions* (com J. Kilpatrick, 1974) — bem como inúmeros textos e intervenções diversas, desenvolvendo e aprofundado as suas ideias sobre a resolução de problemas, heurística e a criação matemática e abordando questões sobre ensino da Matemática.

Entre 1946 e 1965, com Gábor Szegö, Pólya mantém todos os anos um ‹concurso de problemas› para os finalistas do ensino secundário — na linha do célebre concurso Eötvos da Hungria — cujos problemas viriam a ser recolhidos e publicados em 1974, num livro elaborado com Jeremy Kilpatrick (*The Stanford Mathematics Problem Book*) que chegara a participar no concurso e, mais tarde, viria a ser aluno e assistente de Pólya em Stanford.

Professor emérito em 1953, continua a publicar e mantém a sua actividade de conferencista da *Mathematical Association of America* (1953–56) e como professor com intervenções em cursos de formação que leccionou entre 1955 e 1974 para «bem mais de mil professores ensino secundário e universitário» [4, p. 21]. Em 1963 recebe da Mathematical Association of America o *Award for distinguishes services in mathematics*', tendo a menção de elogio sido preparada pelo seu amigo Gábor Szegö, colega e colaborador de longa data, com o apoio de outros amigos e colegas:

«O Professor George Pólya foi nomeado para ser a segunda pessoa a receber o *Award for distinguished service to mathematics*. Homenageamo-lo pelo seu contributo na promoção de uma melhor compreensão nossa sobre a natureza da invenção matemática e pela sua influência construtiva no ensino da matemática no seu sentido mais amplo, em todos os níveis, elementares ou avançados, e à escala nacional ou internacional. George Polya é único entre os matemáticos a combinar, durante a sua distinta carreira científica, a investigação profunda em uma frente muito ampla, com um interesse sempre presente pelo ensino da matemática.» [5, p. 2]

Nos anos que se seguem, Pólya mantém as viagens pela Europa, com participação em congressos e outros encontros e realizações, e recebe distinções e homenagens diversas. Na Universidade de Stanford, a que Pólya esteve ligado durante mais de 40 anos, um edifício recebeu o seu nome — *Pólya Hall* — e, na bilibioteca de Matemática da universidade, a fotografia de Pólya é a única de um matemático. Em 1972, George Pólya é homenageado com J. Piaget no 2.º ICME em Exeter e, um ano depois, o Departamento de Matemática de Stanford, celebra os seus 90 anos com um jantar em que a participaram muitos dos seus colegas, amigos e antigos alunos. Em 1980 é escolhido para presidente honorário do 4.º ICME em Berkley, mas por questões de saúde, não pode comparecer.

Em 1984 publica o seu último artigo, também sobre resolução de problemas, em colaboração com a sua colega e amiga Jean Pederson. Morre a 7 de Setembro de 1985 no Hospital de Palo Alto na Califórnia. Gerald L. Alexanderson, amigo e biógrafo, conta que poucos anos antes, tendo morrido um velho pessegueiro do seu quintal, Pólya imediatamente o substituiu, vendo neste gesto uma manifestação do seu carácter optimista, bem reconhecido, tal como o seu humor, por muitos que com ele privaram. Alexanderson junta a este episódio, o relato do matemático Paul Erdös contando que, por ocasião do 97.º aniversário de Pólya ele lhe telefonara a congratulá-lo, dizendo-lhe que iria celebrar os cem anos «com grande esplendor», ao que Pólya lhe retorquira:

«Talvez queira ter cem anos, mas não cento e um, pois a velhice e a estupidez são muito desagradáveis.» [2, p. 157]

Referências e bibliografia

[1] Kilpatrick, J. (1985). *Editorial. Journal For Research in Mathematics Education, vol. 16*, n.º 5, p. 323.

[2] Alexanderson, G. L. (2000). *The random walks of George Pólya.* MAA: Washington, DC.

[3] Alexanderson, G. L. (1989). George Pólya, Teacher. In F. R. Curcio (ed.) *Teaching and learning: A problem solving focus*, pp. 17–26. NCTM: Reston, VA.

[4] NCTM (1989/87). F. R. Curcio (ed.) *Teaching and learning: A problem solving focus*. NCTM: Reston, VA.

[5] MAA [G. Szegö] (1963). Award for distinguished service to Professor George Pólya. *American Mathematical Monthly, vol. 70*, n.º 2, pp. 1–2.

Alexanderson, G. L. (1979). George Pólya interviewed on his ninetieth birthday. *The Two-Year College Mathematics Journal, vol. 10*, n.º 1 (Jan., 1979), pp. 13–19.

Alexanderson, G. L. e Lange L. H. (1987). *Obituary. Bulletin of London Mathematical Society, vol. 19*, n.º 6, pp. 559–608.

MAA (1987). *Mathematics Magazine, vol. 60*. MAA: Washington, DC.

Schiffer, M. M. (1987). George Pólya (1887–1985). *Mathematics Magazine, vol. 60*, n.º 5, pp. 268-270.

Taylor, H. e Taylor, L. (2006). *George Pólya — Master of Discovery*. Dale Seymour Publications: Palo Alto, CA.

Henrique Manuel Guimarães

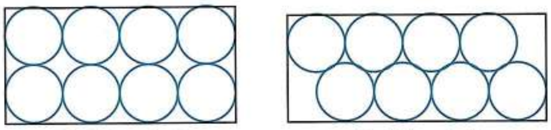
A Boda

Quando a Isabel e o José casaram resolveram alugar os serviços da Quinta Velha, que tinha uma capacidade máxima de 500 convidados. Quando foram tratar dos pormenores da boda, o gerente da Quinta informou-os: – Se pusermos os convidados em mesas de 8, sobra uma pessoa. Se os colocarmos em mesas de 9 sobram 2. Se ficarem em mesas de 10 sobram 3.
Depois de analisarem a situação, resolveram usar mesas de 12, ficando os que restavam numa mesa mais pequena.
Quantas pessoas comeram na mesa pequena?

(Respostas até 31 de Dezembro para zepaulo@armail.pt)

Circunferências em rectângulos

O problema proposto no número 112 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:



Rectângulo R **Rectângulo S**

Em cada um dos rectângulos, todas as circunferências têm um centímetro de raio.

Pergunta 1 – Qual dos rectângulos tem maior área?

Pergunta 2 – Imaginemos que aumentamos o número de filas de quatro circunferências. No rectângulo R as filas continuam verticalmente alinhadas, no rectângulo S a 3ª fila fica verticalmente alinhada com a 1ª, a 4ª com a 2ª e assim sucessivamente. Ao fim de quantas filas a relação entre as áreas dos rectângulos se inverte?

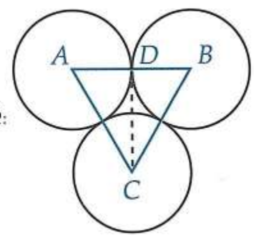
Pergunta 3 – Acontecerá o mesmo com os perímetros?

Recebemos 7 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva (Amadora), João Pineda & Ema Modesto, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Pergunta 1

As respostas foram praticamente idênticas. O rectângulo R tem comprimento 8 e largura 4. A sua área é: $A_R = 8 \times 4 = 32$.

No rectângulo S consideremos três circunferências que se toquem entre si e o triângulo ABC definido pelos seus centros. Temos: $\overline{AC} = 2$ e $\overline{AD} = 1$. Pelo teorema de Pitágoras vem $\overline{CD} = \sqrt{3}$. O rectângulo S tem comprimento 9 e largura $2 + \sqrt{3}$. A sua área é:



$$A_S = 9 \times (2 + \sqrt{3}) = 18 + 9\sqrt{3} \approx 33,589.$$

Resposta: O rectângulo S é o maior.

Pergunta 2

Quase todos resolveram o problema por dois processos: primeiro com uma folha de cálculo e depois analiticamente.

Seja n o número de filas em cada rectângulo. O rectângulo R tem comprimento 8 e largura $2n$. A sua área é: $A_R = 8 \times 2n = 16n$. O rectângulo S tem comprimento 9 e largura $2 + \sqrt{3}(n-1)$. A sua área é:

$$A_S = 9 \times [2 + \sqrt{3}(n-1)] = 18 + 9\sqrt{3}n - 9\sqrt{3}$$

Como diz o Hugo Silva:

Nos rectângulos do tipo R, a área do rectângulo com número filas $n+1$ é obtido a partir do rectângulo com n filas somando o factor 16. No entanto no caso dos rectângulos do tipo S, a área é obtida através do anterior somado a parcela $9\sqrt{3}$ que é aproximadamente $15,589 (< 16)$. No início, são os rectângulos do tipo S que têm a maior área, mas naturalmente existirá um momento em que a maior área já é obtida nos rectângulos do tipo R.

Esse momento pode ser encontrado facilmente com uma folha de cálculo, mas também analiticamente.

$$16n > 18 + 9\sqrt{3}n - 9\sqrt{3} \Leftrightarrow n > \frac{18 - 9\sqrt{3}}{16 - 9\sqrt{3}} \approx 5,86$$

Resposta: A partir das 6 linhas, o rectângulo R passa a ter maior área que o rectângulo S.

Pergunta 3

Os perímetros dos rectângulos são:

$$P_R = 2 \times 8 + 2 \times 2n = 16 + 4n$$
$$P_S = 2 \times 9 + 2 \times [2 + \sqrt{3}(n-1)] = 22 + 2\sqrt{3}n - 2\sqrt{3}$$

Na figura inicial, com $n = 2$, o rectângulo S tem maior perímetro porque $P_R = 24$ e $P_S \approx 25,464$.

A situação altera-se para o menor n que cumpra a condição:

$$16 + 4n > 22 + 2\sqrt{3}n - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow n > \frac{6 - 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} \approx 4,73$$

Resposta: A partir das 5 linhas, o rectângulo R passa a ter maior perímetro que o rectângulo S.

Extensão

O Alberto Canelas propõe uma variante em que se altera o número m de colunas em vez do número de filas. Nesse caso teríamos:

$$A_R = 2m \times 4 = 8m \qquad A_S = (2m+1)(2+\sqrt{3})$$

Há inversão quando A_S se torna inferior a A_R.

$$A_S < A_R \Leftrightarrow (2m+1)(2+\sqrt{3}) < 8m \Leftrightarrow m > 6,96...$$

Há portanto inversão a partir de $m = 7$.

O GTHEMMat é um grupo de trabalho da Associação de Professores de Matemática (APM) criado em 2009, que tem por objectivos recolher, estudar, preservar e divulgar documentos e memórias relacionados com todas as dimensões do ensino e da aprendizagem da matemática. São igualmente seus objectivos promover comunicação e discussão de ideias e trabalhos sobre história do ensino da Matemática e, contribuir para um conhecimento mais alargado da história do ensino da Matemática, nomeadamente entre os professores desta disciplina. Uma das actividades que o GTHEMMat pretende desenvolver é a colaboração na revista Educação e Matemática, este texto enquadra-se neste âmbito.

Figura 1. VI Congresso do Ensino Liceal – Aveiro, 1971 (Fotografia: Arquivo digital do Liceu de Aveiro)

Uma proposta de criação de uma Associação de Professores de Matemática (APPM), em 1971

Mária de Almeida

Introdução

No início da época de setenta, com a *reforma Veiga Simão*, a educação assumirá um lugar central no processo de recomposição do Estado e nos debates sobre a modernização e o desenvolvimento do país. Em pleno processo de consulta pública dos projectos da reforma realiza-se, em Abril de 1971, o VI Congresso do Ensino Liceal, em Aveiro.

Cumpriram-se, em Abril deste ano, 40 anos da realização deste Congresso de professores. Este artigo procura contribuir para a divulgação deste acontecimento então importante para a educação em Portugal e revelar a proposta de fundação de uma Associação de Professores de Matemática, aí apresentada pelo professor António Augusto Lopes (AAL).

AAL era professor de Matemática, do ensino liceal. Sendo metodólogo (orientador de estágio pedagógico) no Liceu D. Manuel II, no Porto desde 1957, era, também, professor na Telescola (subsistema de ensino utilizando a televisão) desde 1965. Foi membro da Comissão de estudos para a modernização do ensino da Matemática (criada em 1963 visando a introdução das Matemáticas Modernas em Portugal). AAL aproveita a oportunidade de participação dos professores na renovação educativa, que estava a ser dada pelo regime, em 1971, para tentar a fundação de uma associação de professores de Matemática.

Sociedade e educação em Portugal, em 1970: os projectos da reforma Veiga Simão

Para compreender as mudanças no âmbito educativo, incluindo no domínio curricular, é fundamental conhecer o contexto sócio-económico e por aí começaremos. Em Setembro de 1968, Salazar sai do Governo. Com o seu sucessor, Marcelo Caetano, há um período de descompressão política controlada. Em simultâneo com a política de descompressão, Caetano adopta uma política económica desenvolvimentista, favorável a uma integração europeia (Grácio, 1981). O convite de Marcelo Caetano a Veiga Simão, para a pasta da Educação, feito em Janeiro de 1970, inscreve-se neste contexto global.

Este ministro tem o seu nome ligado a uma reforma, a *reforma de Veiga Simão*. A primeira concepção a enformar esta reforma corresponde àquilo que se convencionou designar por democratização do ensino, objectivo formulado explicitamente por Veiga Simão e que foi motivo de controvérsia na cena política da altura. O segundo princípio subjacente à mesma reforma encerrava a ideia que o sistema educativo devia ser definido em função das necessidades da economia, pelo que devia preparar pessoas qualificadas que garantissem o crescimento económico do País (Teodoro, 1999). Foi em Janeiro de 1971, que Veiga Simão apresentou pela primeira vez o seu projecto de reforma do sistema de ensino consubstanciado em dois documentos: o «Projecto do Sistema Escolar» e «Linhas Gerais da Reforma do Ensino Superior». Ao dá-lo a conhecer, apelou a uma ampla discussão pública dos mesmos. Devido às características do regime, esta inusitada atitude do ministro merece ser sublinhada (Carvalho, 1996). Em pleno processo de consulta pública dos projectos da reforma realiza-se, em Abril de 1971, um Congresso de Professores.

Um número considerável de professores, inscreveu-se no VI Congresso do Ensino Liceal, estando presentes cerca de 800[1]. (*Diário Popular*, 12/4/1971). Esta afluência manifesta talvez a sua vontade de se exprimirem e de intervir nos problemas do sector. Sobre o Congresso de Professores, AAL afirmou-nos:

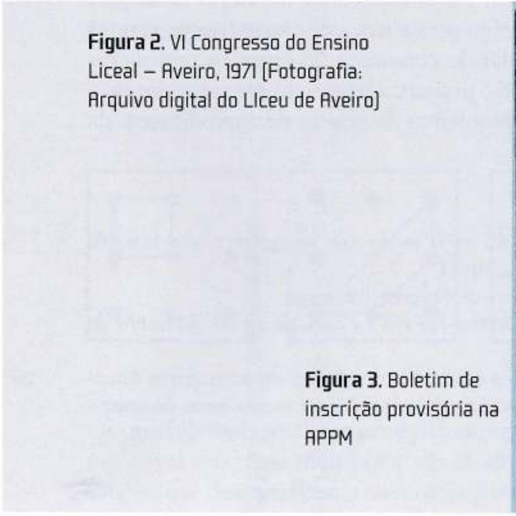
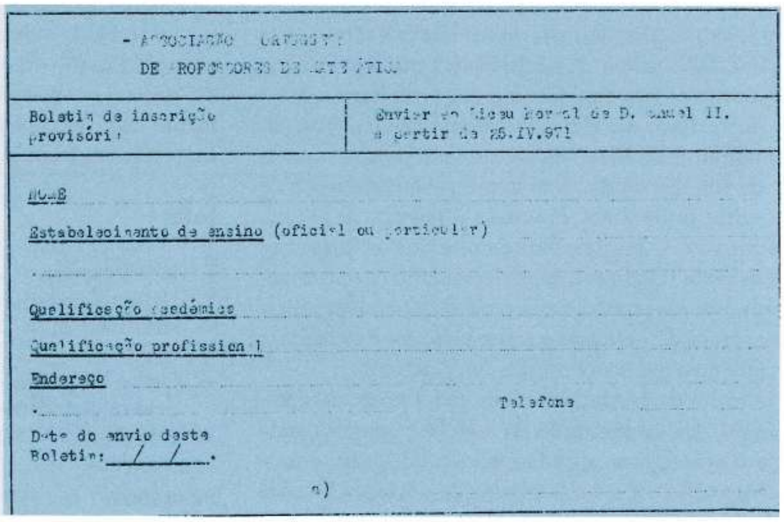


Figura 2. VI Congresso do Ensino Liceal – Aveiro, 1971 (Fotografia: Arquivo digital do Liceu de Aveiro)



Boletim de inscrição provisória

Nome

Estabelecimento de ensino (oficial ou particular)

Qualificação académica

Qualificação profissional

Endereço

Telefone

Data do envio deste Boletim: / / .

Figura 3. Boletim de inscrição provisória na APPM

Eu estive lá, estive lá com uma proposta para se fundar a Associação dos Professores de Matemática, estive com a proposta de problemas de interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física e, era para se realizar o segundo, o Congresso seguinte, no Porto, por iniciativa do Liceu D. Manuel II (E1).

Um Congresso de professores e as propostas de AAL

O 1.º Congresso Pedagógico do Ensino Secundário Oficial realizou-se em 10, 11 e 12 de Junho de 1927, em Aveiro, promovido pela Federação das Associações dos Professores dos Liceus Portugueses. Realizaram-se Congressos nos quatro anos seguintes, nas cidades de Viseu, Braga, Évora e Coimbra. A interrupção dos congressos é explicada pelo propósito estatal de controlar os funcionários públicos. Com efeito, em 1930[2], passam a não ser permitidas as associações de professores de carácter federativo e, a partir de 1933[3] é-lhes interdito associarem-se. Quarenta anos mais tarde, em 1971, também em Aveiro, realizou-se de 14 a 17 de Abril, o VI Congresso do Ensino Liceal, agora organizado por iniciativa governamental.

Entre os assuntos tratados no Congresso incluem-se, entre outros, a posição do ensino liceal no sistema educativo português e a formação dos professores e sua actualização nos esquemas modernos de ensino. Num artigo publicado em 1983, Rui Grácio (1983) refere ter analisado tematicamente as comunicações aceites no Congresso, um pouco mais de seis dezenas (65). No conjunto delas, cerca de metade incidiam sobre a aprendizagem, a pedagogia e a didáctica das disciplinas curriculares. Outros temas relevantes foram as políticas de ensino secundário e suas relações com a sociedade global, o mundo da economia e do trabalho, bem como, o ensino liceal: organização, objectivos, e, professores dos liceus: sua formação e actualização e, principalmente, problemas gerais e especiais de carreira. Três das comunicações abordavam o associativismo docente, problema que não estava explicitamente previsto no programa do Congresso.

A finalizar o texto da sua comunicação apresentada ao Congresso e intitulada «Os objectivos e os métodos face aos meios audiovisuais de ensino»[4], AAL propõe: «é necessário reunir e conjugar os esforços de todos os professores, para a fundação de uma Associação Portuguesa de Professores de Matemática» (Lopes, 1971, p. 3, sublinhados do autor).

Para Grácio (1983), a proposta de AAL não foi a mais marcante das três que abordavam o associativismo de professores, destacando «o carácter não político, exclusivamente científico e pedagógico-didáctico da agremiação de professores de Matemática.» (Grácio, 1983, p. 763). No entanto, para nós, o facto de o ter feito neste momento é importante, atendendo a que a realização deste Congresso constituía um desafio aos participantes e, como Salvado Sampaio (2006) disse a este propósito:

Ou eles têm a audácia de propor a renovação profunda que o ensino exige, ou pelo contrário, se acomodam em posições tímidas. É preciso ter presente que o «Congresso» não «testa» apenas o ensino liceal, testa também a capacidade dos congressistas (p. 65).

Junto ao texto da proposta de criação da APPM foi incorporado um «Boletim de inscrição provisória» (Figura 1). Segundo AAL, foram dados ‹Boletins› a alguns professores de Matemática que os solicitaram durante o Congresso.

Em anexo ao texto da mesma comunicação estão as doze *Bases propostas para a fundação da APPM* (*Associação Portuguesa de Professores de Matemática*). A Associação tinha como objectivos promover o progresso do estudo e o melhoramento do ensino de Matemática (Base I). Para a consecução dos objectivos propõem-se actividades fundamentais da APPM, entre as quais destacamos: conferências e colóquios sobre a cultura matemática e sobre o ensino da Matemática; encontros de professores, a nível nacional para troca de pontos de vista e estudos das respostas obtidas em inquéritos e experiências pedagógicas; encontros de professores a nível internacional, no sentido de aumentar a cultura matemática e pedagógica dos membros da Associação; exposições de material didáctico; serviços de documentação e bibliografia. As actividades que a APPM se propunha desenvolver visavam, facilitar aos professores estar a par da evolução moderna das ciências matemáticas teóricas, das aplicações importantes da Matemática e dos progressos recentes da didáctica da sua disciplina, bem como permitir a troca de experiências entre professores. Previa-se a publicação de um «Boletim Informativo». É interessante notar que as ideias que sustentam estas bases (facilitar o aperfeiçoamento dos professores, ao empenhar-se em proporcionar conferências, seminários, encontros para troca de impressões sobre métodos e problemas encontrados, acesso a publicações) são ainda actuais.

Ressalta também da leitura das bases que a proposta apresentada por AAL para a fundação da APPM é impulsionada por um grupo de professores de Matemática do Porto, com a ambição da *Associação* vir a ter implantação nacional. A sede da APPM seria, em princípio no Porto (em estabelecimento de ensino oficial, mediante autorização do Ministério da Educação Nacional), mas esse facto não obrigava a que, necessariamente, fossem do Porto, no todo ou em parte, os componentes de qualquer dos Órgãos da Associação (Base XII). Consideravam-se membros fundadores da APPM, os trinta primeiros professores que declarassem querer inscrever-se como membros da APPM (Base VIII). Os «Estatutos da APPM» seriam redigidos por uma Comissão constituída por membros fundadores, que estaria também encarregue de apresentar ao Ministro da Educação Nacional, o pedido de autorização para criar a Associação Portuguesa de Professores de Matemática e aprovação dos Estatutos (Base IX).

Apesar de ter recebido alguns boletins de inscrição, para AAL a associação não avançou devido ao contexto político da altura, nomeadamente, a necessidade de aprovação do Ministro.

Salvaguardando que se processam em contextos políticos e sociais muito diferentes, é interessante verificar a similaridade entre alguns objectivos e acções da proposta atrás apresentada (APPM) e aquela que cerca de 15 anos mais tarde, um grupo de professores de Matemática estabelece ao levantar a possibilidade de se organizarem em associação, a actual Associação de Professores de Matemática (APM). Segundo Guimarães «[r]ealizou-se (...) dia 5 de Fevereiro (de 1986) uma reunião para debater a oportunidade de se constituir uma Associação de Professores de Matemática.», onde foram sugeridos, entre outros, os seguintes objectivos e acções prioritárias para a APM: contribuir para quebrar o isolamento a que estão tradicionalmente sujeitos, procurando criar melhores condições para o trabalho colectivo para a troca de experiências; manter uma publicação regular de comunicação entre os professores de Matemática; realizar periodicamente um encontro inteiramente dedicado aos problemas do ensino de aprendizagem da Matemática.

Notas

[1] O número exacto foi 767, sendo 505 senhoras e 262 homens (*Diário Popular*, 13/4/1971).

[2] *Decreto* n.º 17 983, 20 de Fevereiro de 1930.

[3] Artigo n.º 39 do *Decreto-Lei* n.º 23 048, de 23 de Setembro de 1933.

[4] Grácio (1983) coloca esta comunicação em duas categorias temáticas: os professores do ensino secundário e as estruturas do ensino secundário.

Referências

Carvalho, R. (1996). *História do Ensino em Portugal* (2.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Guimarães, H. (1986). «Professores de Matemática. Novos passos para a criação de uma Associação». In *Inflexão* n.º 8, Março. Lisboa, p. 3.

Grácio, R. (1981). «Perspectivas futuras». In *Sistema de ensino em Portugal* Coordenação de Manuela Silva e M. Isabel Tamen. *Sistema de ensino em Portugal* (pp. 649-695). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Grácio, R. (1983). «O Congresso do Ensino Liceal e os grupos de estudo do pessoal docente do ensino secundário: uma alternativa sob o caetanismo». In *Análise Social*, vol. XIX, 757–791.

Sampaio, J.S. (2006). *Temas de educação — Subsídios para a análise crítica da expansão escolar (no Portugal dos anos 60 e 70 do século XX)*. Lisboa: Edições Universitárias Lusófonas.

Teodoro, A. N. D. (1999). *A construção social das políticas educativas. Estado, educação e mudança social no Portugal contemporâneo*. Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologias.

Fontes

Decreto n.º 17 983, 20 de Fevereiro de 1930.

Decreto-Lei n.º 23 048, de 23 de Setembro de 1933.

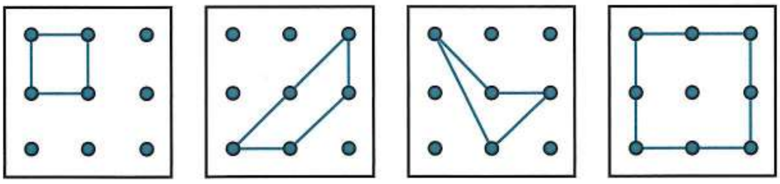
Cerca de 800 professores participarão nos trabalhos do VI Congresso de Ensino Liceal (1971, 12/4/1971). *Diário Popular*, p.10.

Mária de Almeida

Escola Secundária de Casquilhos

Quadriláteros, para que vos quero?

Cristina Loureiro



Os quadriláteros são os meus polígonos preferidos. Sobre eles é possível criar uma multiplicidade de situações problemáticas simples que desenvolvem o raciocínio geométrico. Como tenho vindo a discutir nesta secção, procurar um exemplo, mostrar uma impossibilidade, justificar uma relação, podem constituir bons exemplos de raciocínios geométricos ricos e acessíveis em níveis elementares. Todas as situações já discutidas tinham por base quadriláteros.

Um outro aspecto importante é o estabelecimento de limitações. Neste caso, o geoplano é um instrumento útil para limitar o plano. Ao fazer limitações, criamos uma mundo mais simples onde se pode colocar um outro tipo de desafio, descobrir todos os exemplos.

Descobrir todos os quadriláteros diferentes que é possível construir num geoplano 3 por 3

Neste problema, é importante descobrir todos os casos e é igualmente importante ter a certeza de que não ficou nenhum por descobrir. É muito interessante observar as estratégias pessoais de obtenção dos vários exemplos. Como é que cada um vai organizando os vários exemplos para ter a certeza de que descobriu todos? Atenção às repetições, porque vão aparecer alguns quadriláteros congruentes, em posições diferentes, que não vai ser fácil identificar.

A limitação do geoplano a 3 por 3 é uma boa restrição. O problema fica suficientemente desafiante e a garantia de que todos foram descobertos é acessível. Se passarmos a um geoplano de 4 por 4, o número de hipóteses dispara e torna-se impraticável a demonstração de que foram descobertas todas as possibilidades.

Ao propor este tipo de tarefa numa aula é preciso dar aos alunos uma folha de registo. Quantos geoplanos apresentar na folha de trabalho? É sempre uma boa estratégia didáctica não dar o número exacto de figuras que vão ser necessárias, deixando uma folga para os repetidos que acabam sempre por ter que aparecer. Neste caso, 20 ou 24 geoplanos são bons números para colocar nessa folha, 5 ou 6 filas de 4 ficam mesmo de bom tamanho.

Este problema tem mais um aspecto interessante. Depois de todos os quadriláteros descobertos vale a pena observá-los e começar a fazer perguntas sobre as características dos quadriláteros obtidos.

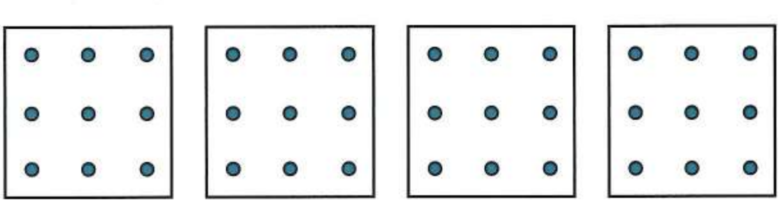
Johnston-Wilder e Mason (p. 8) apresentam este problema para um geoplano de 9 pontos, e incluem a procura de triângulos e a identificação dos ângulos que é possível obter com estas limitações. Sobre esta tarefa, os autores destacam-lhe o carácter de construção de objectos com determinadas condições e que a distingue da simples análise de alguma coisa previamente dada. Estes autores também evidenciam o potencial de uma tarefa como esta para a criação de uma notação própria, ou seja, uma experiência de invenção matemática. Este aspecto é interessante para os vários ângulos diferentes que se podem obter neste geoplano.

Apesar de ter encontrado esta tarefa no livro em referência, há muito tempo que conhecia este desafio. Ele foi-me apresentado pelo meu colega e amigo José Tomás Gomes. Não sei onde ele o descobriu ou até se foi ele que o inventou, mas deixo aqui esta referência como homenagem ao seu espírito matemático e ao seu gosto por resolver e discutir problemas.

Referências Bibliográficas

Johnston-Wilder, Sue e Mason, John (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.

Cristina Loureiro



Conexões matemáticas – Números e representações geométricas

Graça Cebola

Introdução

Este artigo surge na sequência de um outro publicado na *Educação e Matemática*, n.º 110, Conexões matemáticas, e, tal como o anterior, tem como objectivo principal exemplificar situações de sala de aula onde aspectos relacionados com as conexões dentro da própria Matemática são evidentes.

Ao longo de toda a sua escolaridade os alunos devem, de acordo com NCTM (2007), reconhecer e utilizar relações entre diferentes conceitos matemáticos, perceber que alguns se constroem em função de outros e usar as representações para os modelar e interpretar. A aplicação e exploração de diversas representações podem ajudar os alunos a organizar o seu raciocínio, a tornar as ideias e conceitos matemáticos mais concretos, passíveis de uma melhor reflexão e de uma posterior conclusão.

Os episódios escolhidos são ambos do 1.º ciclo do ensino básico, 1.º e 3.º anos de escolaridade, e ambos têm em comum a exploração de números — inteiros positivos e não inteiros positivos — com auxílio de representações geométricas. Estão os dois inseridos nas linhas orientadoras do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB, 2007) e foram desenvolvidos no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (PFCM).

«Uns formam rectângulos, outros não!»

O propósito principal da tarefa[1] é o desenvolvimento do conceito de número par e de número ímpar, por parte dos alunos. Para tal, a professora do 1.º ano, numa aula em meados de Março, distribui conjuntos de rectângulos em cartolina, constituídos por dois quadrados, e folhas quadriculadas. Solicita aos alunos que construam diferentes rectângulos e os registem.

Depois de construírem os rectângulos, os alunos contam os quadrados que lhes estão associados. No exemplo apresentado (figura 1), Eduardo regista os rectângulos de modo organizado mas, se tal não acontece, a professora não interfere no trabalho.

Na contagem dos quadrados, primeiro surge um processo elementar, de um em um, mas imediatamente é substituído por uma contagem mais sofisticada — de dois em dois. E há mesmo quem, com alguma dificuldade, tente contar de quatro em quatro. Até aos doze tudo corre bem mas depois não é fácil!

Para que a discussão em conjunto se torne mais proveitosa a professora pede aos alunos que afixem, no quadro, os rectângulos organizados, do menor para o maior, e que representem, por baixo, o número de quadrados unitários que os constituem.

Nesta altura a professora refere-se a esta sequência de números (até 20) como sendo a dos números pares. De seguida, questiona os alunos sobre os números que «faltam» na sequência numérica e eles respondem: 1, 3, 5, 7, ..., 17, 19. A professora designa-os por números ímpares e Eduardo regista a informação no verso da sua folha de trabalho (figura 3).

Para finalizar a aula, os alunos observam os números da ficha que lhes é distribuída e registam as suas conclusões, com a ajuda da professora (figura 4).

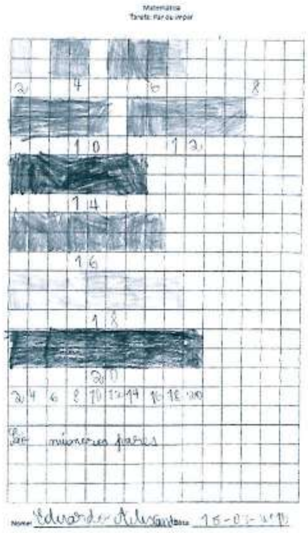


Figura 1. O registo de Eduardo

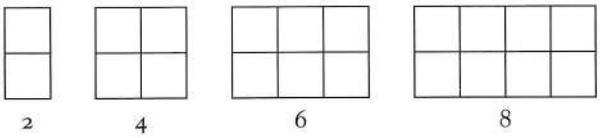


Figura 2. Contagem de quadrados

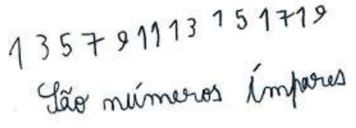


Figura 3. O registo de Eduardo

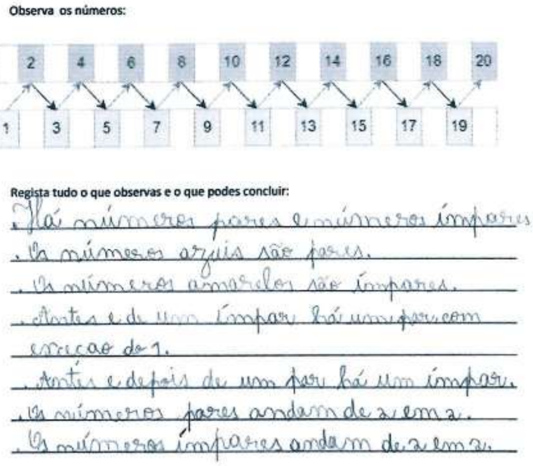


Figura 4. O registo das conclusões

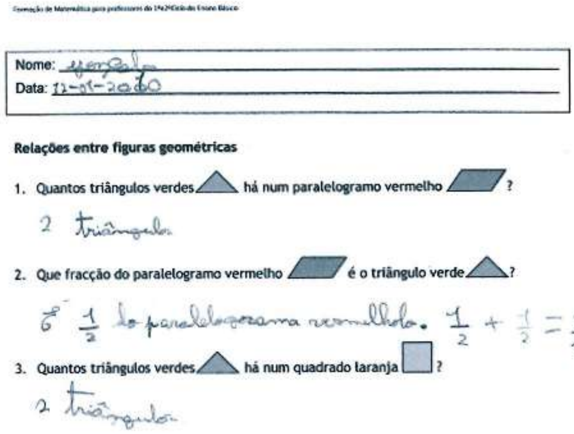


Figura 5. Respostas sucintas

Para relacionar o conceito de número par, ligado sem dúvida ao número dois, com a ideia comum de par, a professora pede aos alunos que identifiquem, no seu próprio corpo, tudo o que se traduza pelo número dois. Eles respondem sem problemas: duas orelhas, dois braços, dois olhos e duas pernas. Há também quem refira que «trabalhar a pares é uma menina e um menino», forma usual de trabalho nesta sala de aula.

Como se pode constatar, estes alunos do 1.° ano usam os números com uma destreza surpreendente. Um aspecto que parece ter contribuído para esta facilidade é o apoio visual que surge das representações geométricas consideradas e que ajuda a distinguir os números naturais pares dos ímpares — «uns formam rectângulos, outros não»!

A interacção entre o trabalho com os números e com as figuras geométricas, que permitiu criar sequências numéricas e padrões geométricos, teve aqui um ponto alto e, mais uma vez, os conceitos matemáticos não surgiram isoladamente mas sim numa relação permanente.

É claro que esta foi a primeira abordagem, totalmente intuitiva, a este tipo de números, mas outras tarefas serão propostas para que, de uma forma recorrente mas progressiva, os alunos se apropriem quer das suas propriedades, quer do seu comportamento a nível operativo.

Fracções e figuras geométricas

Em Janeiro, numa turma dos 3.° e 4.° anos, a professora propõe uma tarefa cujo propósito principal é a abordagem intuitiva dos conceitos de *metade*, *terça parte*, *quarta parte*, ... e a sua representação fraccionária, com o significado da relação parte-todo, onde o denominador representa o número de partes congruentes em que a unidade está dividida e o numerador o número dessas partes que se têm em conta num dado momento. A Geometria surge neste contexto para apoiar o trabalho com os números não inteiros positivos.

Cada par de alunos recebe um envelope com algumas figuras geométricas (seis triângulos rectângulos verdes, um paralelogramo vermelho, um quadrado laranja, um triângulo rectângulo amarelo, dois trapézios azuis e um hexágono castanho) e o enunciado da tarefa.

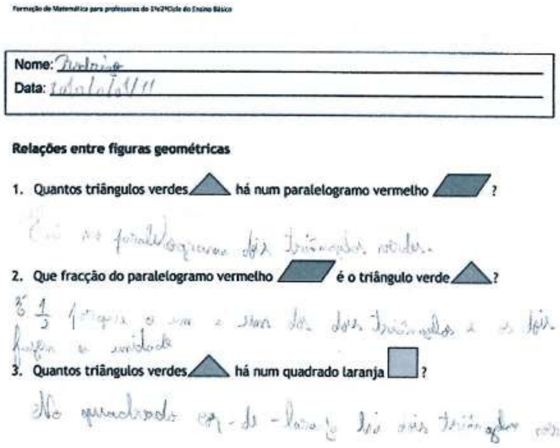
No desenvolvimento da tarefa os alunos vão respondendo às questões formuladas na ficha e, como se pode constatar na figura 5, as respostas são sucintas, demasiado sucintas! Não há explicações nem frases completas.

Confrontados pela professora com a situação de existirem, por exemplo, dois tipos de triângulos e de as respostas dadas não especificarem também a que figuras se estavam a referir, os alunos reformulam-nas, tornando-as mais explícitas, como se pode observar na figura seguinte.

Para além dos registos escritos, a apresentação e discussão das suas resoluções evidencia que os alunos parecem ter compreendido a noção de *fracção* e também como interpretar, neste caso, o numerador e o denominador.

A tão conhecida expressão *metade* é traduzida, sem dificuldades, pela respectiva fracção e o numerador e o denominador são relacionados com o que estão a fazer — sobrepor figuras geométricas umas às outras e verificar que, por exemplo, são necessários dois triângulos verdes para cobrir totalmente o paralelogramo vermelho.

Nas figuras 5 e 7, perguntas 2 e 6, respectivamente, pode observar-se que o aluno, mesmo sem saber operar com *fracções*, regista correctamente os cálculos com as operações multi-


Nome:
Data:

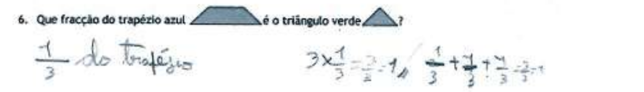
Relações entre figuras geométricas

1. Quantos triângulos verdes há num paralelogramo vermelho ?

2. Que fracção do paralelogramo vermelho é o triângulo verde ?

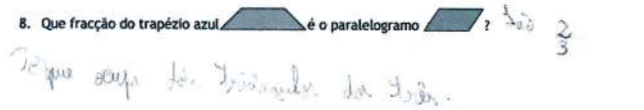
3. Quantos triângulos verdes há num quadrado laranja ?

Figura 6. Respostas completas


6. Que fracção do trapézio azul é o triângulo verde ?

$\frac{1}{3}$ do trapézio

Figura 7. Registo numérico


8. Que fracção do trapézio azul é o paralelogramo ?

$\frac{2}{3}$

Figura 8. Uma situação não directa

plicação e adição e escreve até o resultado de duas maneiras — através de *fracção* e de número inteiro. Contudo, é de notar que se trata de pura intuição e dedução lógica. Não há aqui, obviamente, a aplicação de qualquer definição formal das operações com *fracções*.

Perante a questão mais complexa que relaciona o trapézio azul com o paralelogramo o mesmo aluno responde tal como se observa na figura 8.

A resposta dada permite afirmar que o aluno se situa já num primeiro nível de compreensão do conceito em questão, ainda que de um modo informal.

Neste episódio foi realçada a importância de manusear as figuras geométricas, de comparar tamanhos, de sobrepor umas figuras às outras e de retirar conclusões. Após a distribuição das figuras foi o momento ideal para as identificar cuidadosamente e recordar o que significava duas figuras serem geometricamente iguais ou congruentes . Deste modo, as conexões entre os temas *Geometria e Números e operações*, foram uma realidade que não se pode omitir.

Para alguns dos alunos (3.° ano) foi o seu primeiro contacto com este tipo de números mas a exploração do conceito de *fracção*, na interpretação da relação parte-todo, não se esgota em situações deste tipo. A tarefa incluía ainda outras questões que permitiam explorar a situação inversa, isto é, representar o todo sabendo que uma dada figura representa uma parte da unidade.

Posteriormente, devem surgir outras tarefas que permitam não só consolidar o trabalho realizado, como também explorar o conceito de fracção com outros significados quociente e operador, tal como é mencionado no PMEB.

Em jeito de conclusão

Com os episódios de sala de aula apresentados pretendeu-se, mais uma vez, por um lado evidenciar que o estabelecimento de conexões matemáticas pode surgir no 1.° ciclo do ensino básico, logo desde o 1.° ano; por outro lado mostrar que a exploração de determinadas representações leva à construção e compreensão de conceitos matemáticos com significados específicos.

No primeiro caso, as figuras geométricas, em particular aqueles rectângulos, surgiram como suporte de exploração de sequências de números inteiros positivos muito especiais — os pares e os ímpares — e foi através da observação e análise do padrão geométrico que foi sendo construído, que os alunos retiraram conclusões quanto ao tipo de números em questão. No segundo caso, o manusear das figuras geométricas, sobrepondo-as umas às outras, permitiu aos alunos explorarem o conceito de *fracção* com o significado parte-todo e até retirarem conclusões sob o ponto de vista operativo muito para além do que inicialmente lhes tinha sido solicitado.

Para finalizar pode referir-se que situações deste género só são relevantes no processo de ensino e aprendizagem se tivermos em atenção o papel do professor quer na selecção das tarefas quer na condução da aula, principalmente, no momento de apresentação e discussão dos trabalhos realizados pelos alunos e no momento de síntese.

Nota

[1] Adaptada de Brocardo, J., Delgado, C. & Mendes, F. (2010) *Números e Operações. 1.° Ano*. Ministério da Educação. DGIDC.

Referências bibliográficas

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (versão portuguesa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H. M.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Meneses, L.; Martins, M.E.G.; & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação — Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Agradecimentos

Maria José Guedelha, Paula Lança e Rosa Trigueiro, professoras do 1.° ciclo do ensino básico que comigo trabalharam no PFCM, no ano lectivo de 2009/10 e que, além disso, me facultaram as resoluções dos alunos que ilustram este artigo.

Graça Cebola

Professora Adjunta da Escola Superior de Educação

Instituto Politécnico de Portalegre

Proporcionalidade directa (algumas considerações)

Duas variáveis X e Y relacionadas por uma expressão algébrica do tipo $Y = kX$, ou $Y/X = k$, com k uma constante não nula, podem considerar-se sempre directamente proporcionais?

Se consultarmos alguns manuais de 7.º e 8.º anos, ou pesquisando na internet, surgem «duas variantes» da definição de variáveis directamente proporcionais:

1) $Y = kX$, com $k \neq 0$;
2) $Y = kX$, com $k > 0$.

Portanto, a resposta à questão é: depende da definição que se adoptar para o conceito.

No Novo Programa de Matemática do Ensino Básico optou-se pela definição 1), mais abrangente. No entanto, pode adoptar-se a definição 2), mais «restritiva», (as variáveis só são directamente proporcionais se $k > 0$, isto é, se (i) variam no mesmo «sentido» (quando uma aumenta/diminui, a outra também aumenta/diminui) e (ii) na mesma razão (se uma aumenta para o dobro a outra também; se uma aumenta para o triplo a outra também aumenta para o triplo; se uma diminui para metade a outra também diminui para metade; etc.)[1].

Assim, para quem adopta a definição de proporcionalidade directa mais restrita, uma função de proporcionalidade directa é um caso particular da função linear ($f(x) = kx$, com $k \neq 0$), já que $k > 0$.

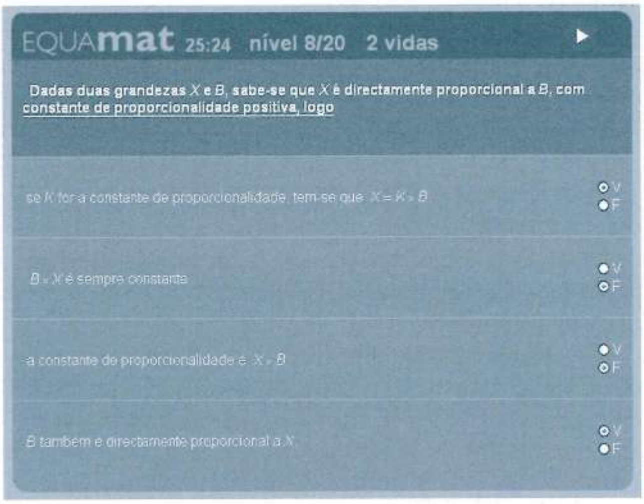
Num determinado manual de 7.º ano, a definição de função de proporcionalidade directa é apresentada da seguinte forma: *A expressão algébrica de uma função de proporcionalidade directa é $y = kx$, em que k é a constante de proporcionalidade directa (k é positivo).*

Num outro manual, neste caso do 8.º ano, e relativamente a uma situação cuja tradução gráfica é uma recta que passa pela origem mas que tem declive negativo, refere-se que: (...) *o gráfico é uma recta que contém a origem. No entanto, não representa uma função de proporcionalidade directa, pois quando uma variável aumenta a outra diminui.* Neste mesmo manual pode ainda ler-se que: *uma função de proporcionalidade directa é um caso particular de função linear.*

Pesquisando na internet, em língua inglesa, encontramos definições como: *Two quantities are in direct proportion when they increase or decrease in the same ratio.*

O que só acontece se as variáveis estão relacionadas por uma expressão do tipo $Y = kX$, ou $Y/X = k$, com $k > 0$.

Um outro exemplo do uso da definição mais restritiva de proporcionalidade directa foi observado no projecto Matemática e Ensino da Universidade de Aveiro encontramos:



Sendo assim, quer a nível nacional, quer internacional, surgem referências a situações em que se opta por uma ou outra definição. Então, que definição deveremos adoptar?
Que vantagens existirão, ao nível do ensino básico, na utilização de uma ou outra definição?

Nota

[1] Note-se que, se $Y = kX$ com $k < 0$, as grandezas variam em sentidos contrários (quando uma aumenta/diminui, a outra diminui/aumenta) e, portanto, tendo por base esta definição mais restritiva de proporcionalidade, estas variáveis não são directamente proporcionais.

Rogério Berricha
Escola Básica 2,3 de Teixoso

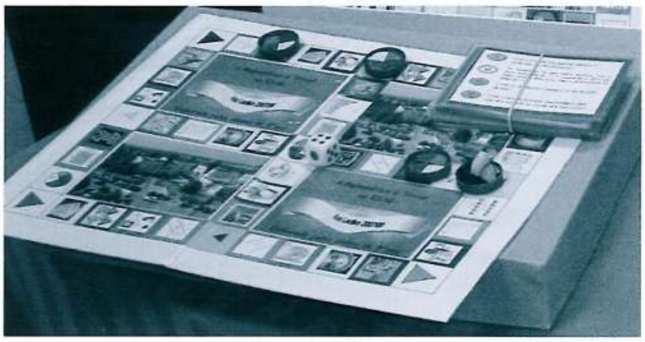
«A Matemática é trivial na ESAG»

Este jogo, construído no ano lectivo 2007/2008 pelos alunos das turmas do 9.º ano da Escola Artur Gonçalves de Torres Novas, é semelhante ao jogo «Trivial», regendo-se pelas mesmas regras. Deste modo, existem temas mas, neste caso, são apenas 4, correspondendo aos quatro domínios temáticos de Matemática a saber: *Geometria, Estatística e Probabilidades, Números e Cálculo* e *Álgebra e Funções.*

Uma das razões que originou esta actividade foi a necessidade de, no final do nono ano, rever os conhecimentos adquiridos durante todo o terceiro ciclo, servindo de consolidação dos mesmos e, simultaneamente, de preparação para os exames nacionais.

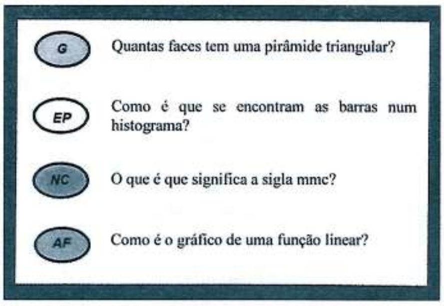
Conforme o exemplo do cartão apresentado, as questões são directas e de resposta curta, estando o enunciado num dos lados e as respectivas respostas no verso. Cada aluno ficou responsável pela elaboração de 2 cartões, ou seja, 8 questões no total, duas de cada domínio temático.

Uma vez que cada jogo pode envolver de 2 a 8 jogadores, foram construídos 3 jogos, com um total de 210 cartões com questões diferentes, no sentido de ser possível a sua utilização em sala de aula. Pode igualmente ser utilizado em aulas de acompanhamento e de apoio.

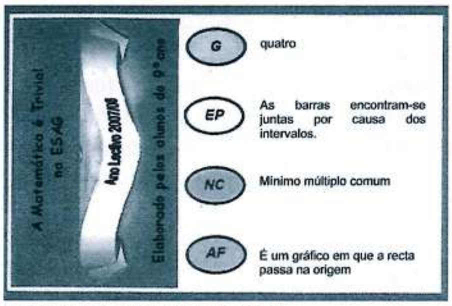


Para além das regras existentes para pôr o jogo em prática, o professor pode ainda utilizar apenas os cartões para outros momentos de aula, possibilitando a selecção dos domínios que sejam mais pertinentes nesse momento.

Adosinda Almeida, Alice Martins e Vítor Pereirinha
Escola Básica 2,3/Sec. Artur Gonçalves



Exemplo da parte da frente de um cartão



Exemplo do verso de um cartão

A Confecção do Ponche e a proporcionalidade directa

Uma experiência numa turma do 6° ano

Cristina Tudella

Neste artigo irei partilhar convosco uma sequência de duas aulas, de 90 minutos, numa turma do 6° ano de escolaridade, para a introdução do conceito de proporcionalidade directa. Decidi fazê-lo pois, na minha opinião, esta sequência de aulas foi rica do ponto de vista, quer da resolução de problemas e do desenvolvimento da capacidade de raciocínio, quer da comunicação matemática que proporcionou.

A turma, onde foi desenvolvida esta actividade é uma turma um pouco «especial» uma vez que é constituída apenas por 19 alunos, onde a maioria é estrangeira e/ou tem necessidades educativas especiais.

A resolução de problemas, num contexto real, foi o ponto de partida para este trabalho que tinha como objectivo a compreensão dos conceitos de razão, proporção e o significado intuitivo de proporcionalidade directa.

Para tal, adaptei uma tarefa das *Normas NCTM* (2007) (Figura 1) que foi resolvida em grupos de 3 ou 4 alunos.

A estrutura das aulas foi pensada como uma forma de trabalhar as capacidades transversais, quer a capacidade de raciocínio, através da explicitação de diferentes estratégias de resolução dos alunos e respectiva comparação, quer a capacidade de comunicação matemática escrita e oral, durante a apresentação das resoluções e do questionamento dos colegas.

Figura 1. A tarefa

Agrupamento de Escolas Frei Gonçalo de Azevedo

Confecção do Ponche

Uma turma do 6º ano está encarregue das bebidas para o dia do Inglês, na semana da escola. Uma das bebidas a ser servida é o Ponche. Ao pesquisarem na internet os alunos encontraram quatro receitas diferentes para a confecção do ponche, sendo para todas necessário água tónica e sumo de framboesa.

Receita A	**Receita B**
2 Copos de sumo de framboesa *3 Copos de água tónica*	*4 Copos de sumo de framboesa* *8 Copos de água tónica*
Receita C	**Receita D**
3 Copos de sumo de framboesa *5 Copos de água tónica*	*1 Copo de sumo de framboesa* *2 Copos de água tónica*

1. *Qual das receitas irá produzir um ponche com sabor a framboesa mais acentuado? E menos acentuado? Explica as tuas respostas.*

2. *(Uma receita por grupo: Receita ....)*
A professora de Inglês diz que são necessários 120 copos de ponche. Quantos copos de sumo de framboesa e quantos copos de água tónica são necessários, em cada uma das receitas? Explica a tua resposta.

Adaptada das Normas do NCTM (APM, 2007),

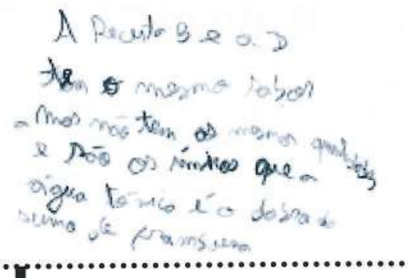


Figura 2. Grupo do Jorge

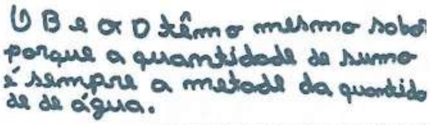


Figura 3. Grupo do Ailton

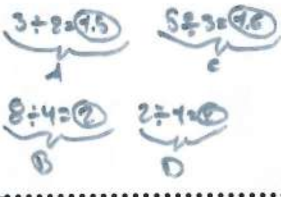


Figura 4. Grupo da Carolina

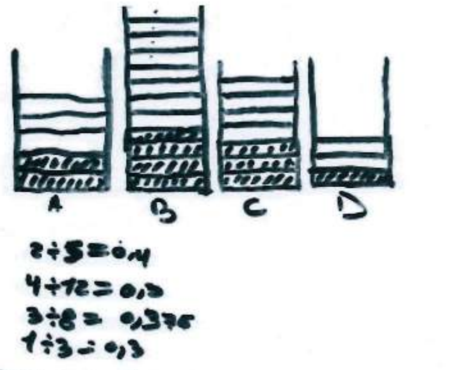


Figura 5. Grupo do Avram

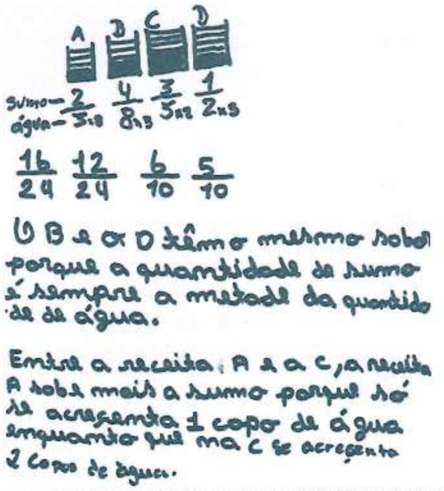


Figura 6. Grupo do Ailton

A calculadora seria usada pelos alunos, se eles assim o entendessem, mas eu, para não condicionar as suas estratégias de resolução, só explicitaria essa situação se fosse questionada directamente.

A noção de fracções equivalentes já tinha sido trabalhada com os alunos pelo que, caso escolhessem esta abordagem ao problema, poderiam facilmente identificar as receitas B e D como conducentes ao mesmo sabor do Ponche.

Depois da divisão da turma em grupos, a tarefa foi distribuída, e os alunos iniciaram o seu trabalho. Distribuí a cada grupo um acetato e uma caneta para que posteriormente pudessem apresentar o seu raciocínio à turma[1].

A primeira tarefa

No início do trabalho todos os grupos começaram por cometer o mesmo erro e afirmaram que a receita com o sabor mais acentuado era a receita B, uma vez que continha 4 copos de sumo de framboesa, enquanto as restantes continham apenas 1, 2 ou 3.[2]

Através de um exemplo, em que substituí o sumo de framboesa, por sumo de laranja e a água tónica por água simples e em que lhes pedi ajuda para comparar duas experiências — Uma, considerando 1 copo de sumo de laranja e 2 de água e outra considerando 2 copos de sumo de laranja e 10 copos de água — os alunos compreenderam que tinham que prestar atenção à quantidade de água que era acrescentada, pois esse factor influenciava a concentração de sumo e consequentemente a intensidade de sabor. O exagero da quantidade de água na segunda hipótese levou-os, intuitivamente à compreensão da situação.

O grupo do Jorge (figura 2) e o grupo do Ailton (figura 3) utilizaram estratégias semelhantes para concluir que as receitas B e D eram iguais. Estes dois grupos, a partir da observação dos valores numéricos das receitas e sem explicitarem cálculos, concluíram que ambas as receitas produziriam ponche com o mesmo sabor.

Outro grupo (figura 4) efectuou a divisão entre ao número de copos de água e o número de copos de sumo de framboesa e concluiu que como o quociente era o mesmo para as receitas B e D o sabor seria o mesmo.

Igualmente, a partir da comparação dos resultados desta divisão este grupo concluiu que distribuindo a água tónica pelo sumo de framboesa, a quantidade de água para cada parte de sumo era menor na receita A.

Ainda durante a resolução desta primeira tarefa, alguns grupos estavam com dificuldade em encontrar formas de comparar as receitas, pelo que sugeri que fizessem um desenho que representasse a situação. Esperava que esta representação, lhes trouxesse alguma ideia para a resolução deste problema[3].

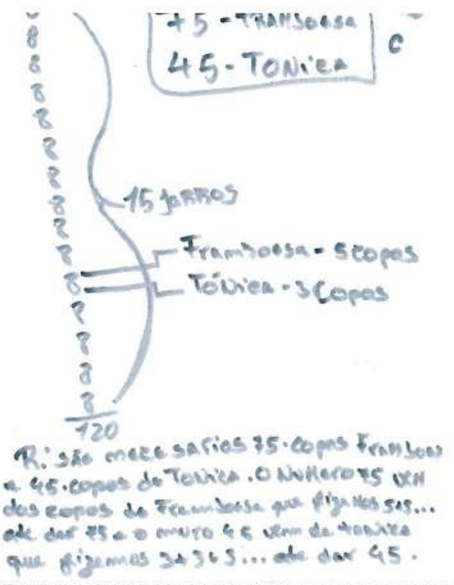


Figura 7. Grupo da Carolina

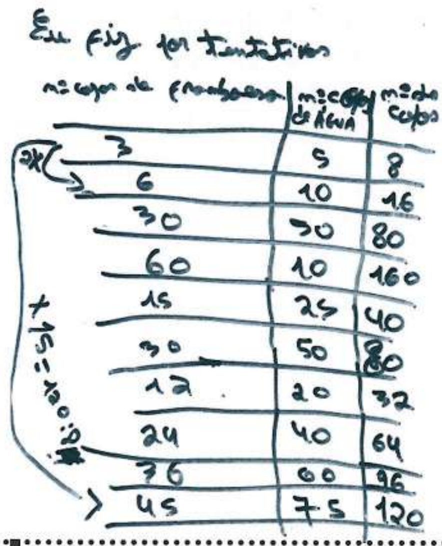


Figura 8. Grupo do Jorge

Os grupos do Avram (figura 5) e do Ailton (figura 6) seguiram a minha sugestão e fizeram desenhos dos jarros para representar esta situação, no entanto utilizaram estratégias diferentes para resolver o problema.

O primeiro grupo (figura 5) calculou a razão entre o número de copos de sumo de framboesa e a quantidade total de Ponche, em cada um dos «jarros»[4]. O segundo grupo (figura 6) calculou a razão entre o número de copos de sumo e o número de copos de água tónica.

Para compararem as fracções que obtiveram também utilizaram processos diferentes. O grupo da figura 5 efectuou a divisão, usando a calculadora, e compararam os resultados obtidos na forma decimal, enquanto que o grupo da figura 6 foi comparar as fracções A e B e as C e D, reduzindo ambas ao mesmo denominador. No entanto este grupo não fez o mesmo raciocínio para comparar as receitas A e C, resolvendo esta segunda parte da questão de uma forma intuitiva.

A segunda tarefa

Na segunda tarefa, cada grupo ficou responsável por analisar apenas uma das receitas. Pedir aos alunos para as analisar todas seria uma mero exercício de repetição de um raciocínio que, neste momento, não traria nenhum benefício à aprendizagem dos alunos. Na discussão cada grupo apresentou a resposta à receita que lhe foi atribuída.

Os grupos também apresentaram estratégias diferentes. Apresento-vos aquelas que considerei mais interessantes e que foram apresentadas, e discutidas, na sala de aula.

O grupo da Carolina (figura 7) compreendeu que juntando os 3 copos de água e os 5 copos de framboesa, obtinha 8 copos de ponche e utilizou uma estratégia aditiva até chegar aos 120 copos. Concluíram que necessitariam de 15 jarros, ou seja, 75 copos de framboesa e 45 de água tónica. Para chegarem a estes dois valores também usaram estratégias aditivas, recorrendo ao factor constante da calculadora.

Um outro grupo (figura 8) foi fazendo tentativas, de certo modo aleatórias, até conseguir chegar aos 120 copos pretendidos. Este grupo usou estratégias de cálculo mental para efectuar os cálculos. É interessante observar os valores que escolheram para o número de copos de sumo de framboesa.

O grupo do Ailton (figura 9) escreveu a fracção que traduzia a relação entre o número de copos de framboesa e o n.º de copos de água tónica. Em seguida escreveu a mesma fracção, mas considerando receitas para dois jarros, depois três, e assim sucessivamente até obter a razão cuja soma do numerador e denominador desse 120. Este grupo enganou-se nos cálculos e por isso teve algumas dificuldades em chegar ao valor pedido.

Um outro grupo de alunas (figura 10) apesar de não o terem explicitado na resolução escrita, foram descobrir quantos jarros seriam necessários para se obter 120 copos de Ponche. Chegaram à conclusão que seriam 24 jarros e depois foram determinar o valor correspondente em copos de framboesa e em copos de água tónica.

Em jeito de conclusão

Durante estas duas aulas os alunos estiveram bastante motivados na resolução destes dois problemas enfrentando-os como desafios.

Esta metodologia de trabalho em sala de aula, em que peço aos grupos para escreverem as suas resoluções num acetato, que posteriormente é apresentado e discutido no grupo-turma, tem sido positiva e tem potenciado, ao longo do ano, uma melhoria na qualidade das produções dos alunos, nomeadamente no modo como estes descrevem os seus raciocínios.[5]

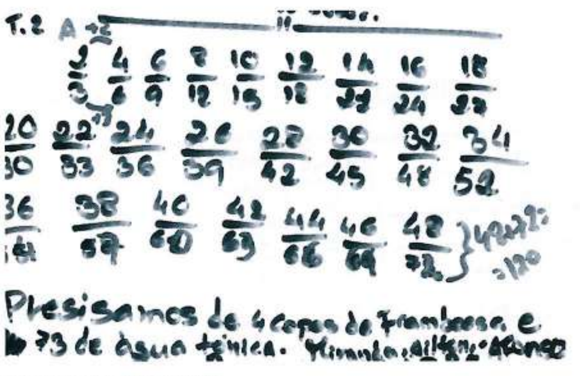


Figura 9. Grupo do Rilton

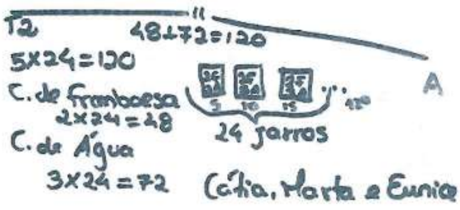


Figura 10. Grupo da Eunice

O facto de na primeira tarefa os alunos terem usado estratégias muito diversificadas enriqueceu bastante o trabalho. A partilha dos raciocínios, e das ideias matemáticas, durante a apresentação e discussão das tarefas permitiu, aos próprios alunos que as explicaram, uma melhor compreensão do seu próprio pensamento. Por outro lado, o exercício que os alunos fizeram para compreender e validar as estratégias dos colegas contribuiu, na minha opinião, para o alargamento do seu conhecimento matemático.

Do ponto de vista dos conteúdos, vários foram os tópicos matemáticos trabalhados, bem como surgiram algumas conexões entre eles. Surgiu a ideia de divisão como distribuição da quantidade de água pela quantidade de sumo de framboesa. Os alunos compreenderam que esta seria uma forma de poderem comparar a relação entre os dois ingredientes da receita. Para além de recorrerem à noção de divisão tiveram também que comparar os números decimais que resultaram dessas divisões. Tiveram, igualmente, de compreender a relação entre esses números e a intensidade do sabor a framboesa. Durante a discussão os alunos foram questionados se poderiam ter efectuado a divisão de outra forma, trocando o dividendo e o divisor e que conclusões poderiam tirar. Foi interessante perceberem que num dos casos, o maior valor do resultado da divisão obtido corresponderia ao sabor a framboesa mais intenso, e no caso contrário, ao sabor a framboesa menos intenso.

Surgiu também a noção de *fracção* como relação parte--todo, e entre as duas partes, bem como, a ideia de quociente entre duas quantidades. A noção de equivalência de fracções, também já conhecido pelos alunos, foi um outro tópico que surgiu na discussão. Assim, o trabalho realizado nestas aulas contribuiu também para o desenvolvimento do sentido do número, não só pelo modo de pensar dos alunos como também, da comparação das diferentes estratégias apresentadas.

O desenvolvimento do pensamento algébrico também esteve presente, em especial na segunda tarefa, quer na procura de relações entre os números, quer na elaboração de tabelas para melhor organizar e explicar as suas formas de pensar. O significado da «igualdade» também esteve presente quando analisámos um dos raciocínios explicitados (figura 8)

Em relação à noção de proporcionalidade directa, ela surgiu de uma forma intuitiva na resolução destes problemas, em especial na 2.ª tarefa, onde se pretendia aumentar a quantidade de ponche obtido mas mantendo o mesmo sabor, ou seja mantendo a mesma relação entre os dois ingredientes, contribuindo assim, para a compreensão da natureza matemática das relações proporcionais.

Notas

[1] As resoluções que foram apresentadas, foram aquelas que eu escolhi com base na riqueza da discussão a que poderiam conduzir.

[2] Os alunos desta idade normalmente não bebem água tónica. Possivelmente, se eu tivesse considerado água, em vez de água tónica, compreenderiam mais facilmente, a influência da sua quantidade no sabor.

[3] O modo como acompanhamos o trabalho dos alunos em sala de aula é um dos aspectos que considero mais difícil e ao mesmo tempo mais desafiante para o professor. É importante conseguirmos dar boas sugestões e/ou questioná-los eficazmente, mas não fazê-lo em demasia, para não transformarmos um bom problema num simples exercício de aplicação.

[4] Durante estas aulas muitos alunos utilizaram a ideia de *jarros de ponche* para representar a quantidade de Ponche obtido com a «receita base» que estivessem a considerar.

[5] Os alunos sabem que uma resolução «errada» também pode ser escolhida, desde que o seu raciocínio esteja bem explicado.

Cristina Tudella

Agrupamento de escolas Frei Gonçalo de Azevdo

Caros leitores

É com imenso prazer que aceito o convite que me foi dirigido para ser editor da secção *Tecnologias na Educação Matemática*. Esta secção, tal como todas as outras presentes na revista, têm-se pautado por apresentar um conjunto diversificado de ideias, materiais e assuntos extremamente atuais, de interesse para o leitor em geral e para o professor de Matemática em particular. Embora já tenhamos uma tradição e experiência alargada no uso das tecnologias, tendo por vezes sido pioneiros na sua utilização em sala de aula, ainda temos pela frente um longo caminho a percorrer. Não se trata simplesmente do caso de estarmos atrasados na utilização de alguma ferramenta tecnológica em particular, mas tão só do facto de as tecnologias continuarem a estar em franca expansão, aparecendo a cada dia que passa novas e mais potentes ferramentas que nos podem vir a servir como auxiliares preciosos na tarefa de ensinar e aprender matemática.

Considero no entanto que a nossa preocupação se deve centrar na forma como poderemos explorar e rentabilizar algumas destas ferramentas em prol de um ensino de qualidade, em vez de estarmos preocupados em utilizar as ferramentas mais recentes, por vezes de uma forma menos reflectida. Espera-se assim que esta secção possa ser um ponto de encontro de professores, alunos, investigadores e outros profissionais envolvidos na Educação que, através da partilha de experiências, materiais e reflexões envolvendo tecnologias, nos ajudem a integrar essas mesmas tecnologias no processo de ensino criando ambientes de aprendizagem autênticos.

Trata-se de um desafio que desde já lanço aos leitores que se interessam por esta problemática, esperando poder contar com as contribuições de todos, que só poderão enriquecer esta secção e a nossa revista.

António Domingos
amdd@fct.unl.pt
Departamento de Matemática da FCT/UNL
UIED – Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

A utilização de materiais electrónicos e os manuais escolares

António Domingos, Paula Cristina Teixeira

Introdução

Desde 2006 que os manuais escolares de matemática dos ensinos básico e secundário têm vindo a ser acompanhados por materiais electrónicos destinados quer a professores quer a alunos. Estes materiais eram apresentados essencialmente em CDs que acompanhavam os respectivos manuais. Esta ideia de incluir CDs com materiais tinha começado em 2002 na adopção dos manuais do ensino secundário das Matemática A, B e Macs. Esperava-se que ao longo dos anos fossem aparecendo materiais cada vez mais completos, podendo o manual assumir o papel de livro electrónico onde o aluno pudesse navegar e aceder a ferramentas electrónicas que lhe proporcionassem uma compreensão dos conceitos matemáticos complexos através da sua construção e manipulação significativa.

Na tentativa de compreender o papel que estes materiais poderiam vir a ter no processo de ensino aprendizagem, propusemos um projecto[1] de investigação que procurava compreender a forma como os professores de matemática poderiam integrar o uso de materiais tecnológicos em benefício da aprendizagem dos alunos. O projecto, ainda em curso, centra-se essencialmente nos materiais electrónicos que acompanham os manuais escolares, CD-Roms, eBooks, portais, filmes e conjuntos

1.ª TAREFA

Determine a intersecção dos semiplanos definidos por:

a) $x \geq -1$ *e* $x > 3$;

b) $x \geq -1$ *e* $x < 3$; (...)

2.ª TAREFA

Determine a reunião dos semiplanos definidos por:

a) $x \geq -4$ *ou* $x > 2$;

b) $y \geq -x$ *ou* $x < 3$; (...)

Figura 1. Tarefa para uso do CD

3.ª TAREFA

Escreva uma condição, em $\mathbb{R}^2$, que defina cada uma das seguintes regiões do plano.

a) **b)**

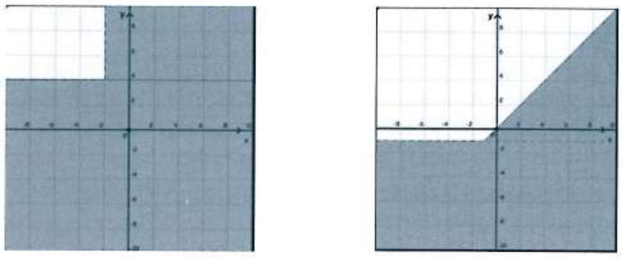


Figura 2. Tarefa para uso do CD

de outras actividades que apelam ao uso do computador. Numa das vertentes de investigação procura-se compreender o papel que estes materiais desempenham no processo de ensino aprendizagem, nomeadamente na forma como os professores se apropriam dos mesmos e o uso que fazem deles em sala de aula.

Os materiais disponíveis

A edição dos materiais electrónicos por parte das Editoras foi alvo de alguns obstáculos, nomeadamente no que se refere à avaliação dos manuais proposta pelo Ministério da Educação. No ano em que o projecto se iniciou, ano lectivo 2007/2008, já a Lei n.º 47/2006 de 28 de Agosto previa a avaliação e certificação dos manuais escolares, o que só se veio a concretizar no presente ano lectivo para alguns dos anos de escolaridade. Este impasse parece ter feito com que os materiais que tinham começado a ser produzidos em 2006 não sofressem grandes alterações até ao presente ano. Temos assim que as Editoras continuaram a fazer acompanhar os seus manuais por CDs, mas cujos conteúdos poucas alterações sofreram.

Os materiais disponibilizados revelaram-se bastante incompletos se pensarmos em termos de representatividade dos conteúdos programáticos presentes no currículo. Algumas Editoras limitaram-se a apresentar exemplos de partes do manual em pdf, algumas ferramentas para temas específicos, testes de avaliação e autoavaliação, por vezes auto-correctivos, questionários de escolha múltipla, explicações de conteúdos específicos em *PowerPoint* e por vezes algumas apliquetas construídas em programas de geometria dinâmica ou outros *softwares* didácticos que permitiam aos alunos alguma manipulação e exploração dos conceitos. Era ainda possível encontrar algumas apresentações de conteúdos gravados em vídeo ou áudio. Estes materiais mantiveram-se nos últimos anos, tendo actualmente, com a avaliação e certificação dos manuais de alguns dos anos de escolaridade, as Editoras optado por colocar esses materiais em Bases de Dados de acesso *on-line*, quer para professores, quer para alunos. É com base nestes materiais que o projecto se tem vindo a desenvolver.

O desenvolvimento das tarefas

No âmbito deste trabalho têm sido realizadas algumas oficinas de formação para professores, onde estes são convidados a utilizar os materiais electrónicos que acompanham os manuais adoptados nas suas escolas. Neste sentido foram dinamizadas duas oficinas de formação com professores de escolas básicas e/ou secundárias dos Concelhos de Almada e Seixal. As oficinas decorreram entre Setembro e Dezembro de 2009 e envolveram cerca de quarenta professores.

Os professores, numa primeira fase, trabalharam em pares na caracterização das propostas contidas nos CD que acompanhavam os manuais adoptados nas suas escolas. Numa segunda fase, planificaram, prepararam e implementaram as tarefas que elaboraram com recurso às propostas contidas nos CDs.

Como os trabalhos se desenvolveram durante o primeiro período, os professores seleccionaram conteúdos abordados nessa parte do ano lectivo. Foram assim planificadas aulas sobre os temas dos Números, Álgebra e Funções, Geometria e Probabilidades. A natureza das tarefas propostas para essas aulas era baseada essencialmente em tarefas de exploração e aplicação. Foram identificadas como tarefas de exploração aquelas que previam a introdução de novos conceitos e como tarefas de aplicação aquelas que se implementaram após a definição dos conceitos.

Os professores elaboraram em suporte papel, para os alunos, recursos que se podem dividir nas categorias seguintes: guião de

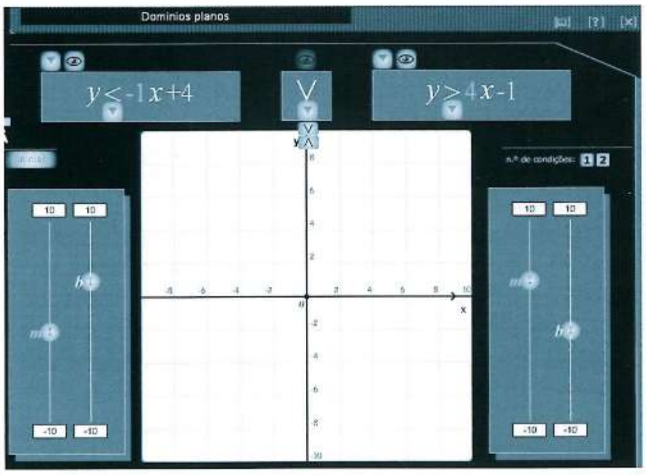


Figura 3. Disjunção de duas condições

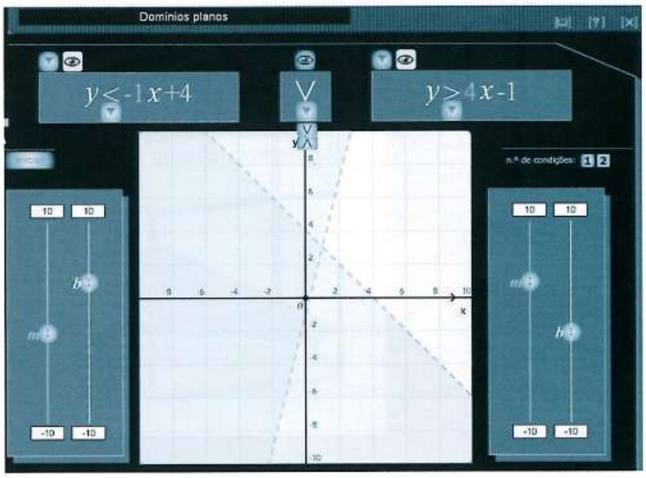


Figura 4. Domínio Plano obtido

apoio com as instruções que permitiram a exploração das tarefas propostas nos CDs; fichas de trabalho com tarefas para realizar com o auxílio das apliquetas presentes nos CDs e para registo das conclusões; fichas de avaliação formativa ou sumativa para avaliar as aprendizagens realizadas com perguntas contidas nos CDs.

Na maioria dos casos as tarefas, ainda que preparadas em parceria, foram aplicadas apenas pelo professor da turma. Os professores optaram por estarem sozinhos com as suas turmas por se tratar da realidade com que habitualmente trabalham.

Uma tarefa

Apresenta-se de seguida uma das tarefas que foi desenvolvida numa das oficinas de formação e que posteriormente foi aplicada em sala de aula (figuras 1 e 2).

A tarefa é dirigida a alunos do 10.° Ano de Matemática A, o conteúdo a leccionar são a conjunção e disjunção de condições. Pretendia-se que através da manipulação da apliqueta do CD os alunos guiados pela ficha de trabalho verificassem, primeiro qual o domínio plano obtido dadas a conjunção ou disjunção das condições (figura 3) e segundo, dados os domínios planos que conseguissem definir a conjunção ou disjunção das condições (figura 4).

No final da realização da tarefa foi aplicado à turma um questionário para inferir sobre a importância desta actividade no processo de ensino/aprendizagem desenvolvido pelos alunos. Apresentam-se de seguida algumas das respostas dos alunos:

- «O trabalho foi bom os meus colegas e eu reagimos bem e o CD foi fácil de manejar».
- «Apesar de ter sido uma aula diferente do habitual, houve muita brincadeira e toda a gente a querer responder ao mesmo tempo».

Figura 5. Flor

- «É mais fácil compreender por parte dos alunos e pelo professor acho mais simples pois não desenha no quadro e no entanto os desenhos ficam legíveis».

De um modo geral os alunos mostram-se satisfeitos com o desenvolvimento da tarefa, motivados pelo aspecto gráfico das figuras manipuladas e pelo dinamismo que as manipulações trazem à aula, ainda que se mostrem dependentes da explicação do professor.

Conteúdo de um CD

Apresentamos uma descrição sucinta do material electrónico utilizado, do qual fazia parte a tarefa apresentada, destacando as suas principais características.

O CD está dividido em quatro secções que contemplam propostas para cada um dos quatro temas do programa de Matemática A do 10.° ano (módulo inicial, geometria, funções e estatística) e uma secção de revisão.

No CD encontramos três propostas para o módulo inicial. Na primeira proposta é apresentada uma apliqueta num programa de geometria dinâmica que permite ao aluno responder à questão: será que unindo os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero dado, se obtém sempre um paralelogramo? A segunda proposta envolve o preenchimento de uma tabela com a

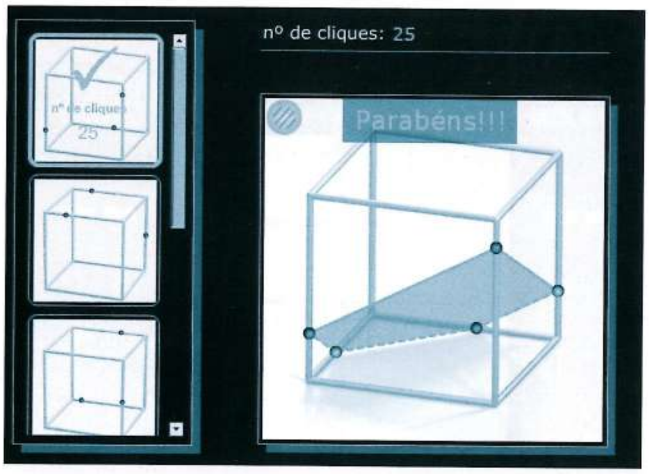


Figura 6. Secção no cubo

contagem do número de faces, vértices e arestas de vários sólidos para que o aluno verifique a relação de Euler. A terceira proposta envolve uma apliqueta que serve de apoio a uma investigação proposta no manual e na qual se pretende que o aluno calcule a área de um polígono estrelado denominado por «flor» (figura 5). A «flor» tem como centro um hexágono regular e as «pétalas» são triângulos equiláteros. Na tarefa do manual é proposto que o aluno realize a experiência com outras «flores» cujo número de lados do polígono central seja diferente de seis. Finalmente nesta secção do CD é ainda possível aceder ao *software* Poly que permite a visualização de planificações e perspectivas de várias famílias de poliedros.

Na secção sobre a geometria no CD são apresentadas quatro propostas. A primeira é um jogo sobre as secções no cubo (figura 6). As regras são simples dados três pontos assinalados pretende-se que o aluno no menor número possível de cliques no rato obtenha a secção que resulta da intersecção do cubo pelo plano que contém os três pontos dados. A segunda proposta envolve o preenchimento de uma tabela com as contagens dos números de faces, arestas e vértices dos sólidos de Platão. Depois de completada a tabela o aluno é capaz de estabelecer relações entre o número de faces, arestas e vértices do sólido e o seu dual. A terceira proposta envolve uma apliqueta para trabalhar condições e a sua representação no plano e ainda a conjunção e a disjunção de condições (caso da ficha apresentada acima). No manual é possível encontrar várias propostas de investigação para o aluno envolvendo esta apliqueta. A quarta proposta é um jogo sobre simetrias de pontos no plano, as regras são apresentadas numa tarefa do manual que permite ao aluno concluir as relações entre as coordenadas de um ponto e o seu simétrico relativamente aos eixos coordenadas, às bissectrizes dos quadrantes pares e impares e em relação ao ponto origem do referencial.

No tema das funções o CD apresenta três propostas, uma apliqueta para o estudo da função quadrática, um jogo sobre a família da função quadrática e um jogo para o estudo das transformações de gráficos de funções.

No tema da estatística o CD só apresenta uma proposta que permite que o aluno trabalhe os histogramas e os polígonos de frequências. Por último, é proposta uma secção denominada por «Global» que envolve um jogo com questões de escolha múltipla, em que o aluno pode escolher qual ou quais os temas que quer rever.

Fichas de trabalho com tarefas para realizar com o auxílio das apliquetas dos CD e para registo das conclusões.

Conclusão

O desenvolvimento deste projeto de investigação veio alertar-nos para a existência de um conjunto de materiais electrónicos que foram sendo disponibilizados pelas editoras e que por vezes são pouco explorados e trabalhados em sala de aula. Verificamos que muitos dos materiais disponibilizados ficam aquém do que seria desejável para se constituírem como verdadeiros recursos para a aula de Matemática onde o professor possa encontrar ferramentas que lhe proporcionem uma abordagem alternativa em todos os conteúdos programáticos. Ainda assim é possível encontrar algumas apliquetas e materiais estruturados que, com a intervenção reflectida do professor, se podem tornar em poderosa ferramentas de aprendizagem. Um exemplo disso é a tarefa descrita acima que com um uso adequado dos recursos disponíveis podem ajudar à construção e compreensão de conceitos matemáticos complexos. Estes conceitos quando vistos apenas a partir de algumas das suas representações podem tornar-se incompreensíveis levando os alunos à memorização de procedimentos e processos rotineiros.

Nota

[1] Projecto de investigação QAMURT — Qualidade das aprendizagens em matemática com utilização de recursos tecnológicos, apoiado pela FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia, ao abrigo do contrato n.º PTDC/CED/71744/2006.

Bibliografia

Costa, B, Resende, L. e Rodrigues, M. E. (2006). Espaço 10 A — Matemática 10° Ano (CD-ROM). Edições Asa.

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

Paula Cristina Teixeira
Escola Secundária João de Barros
Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento

APM – 2011

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2011

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2011

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

01 **Ser Professor hoje**
Rui Canário

Artigos

03 **APM, vista pelos sócios... passado, presente e futuro**
Ana Luísa Paiva, Cristina Tudella, Manuela Pires

13 **O Volume do cilindro e do cone**
Elvira Santos

16 **Origami**
Ilda Rafael

24 **Parábolas, parábolas...**
João Almiro

28 **Pólya e as capacidades matemáticas: Jeremy Kilpatrick entrevista George Pólya**
Henrique Guimarães

39 **Uma proposta de criação de uma Associação de Professores de Matemática**
Mária de Almeida

43 **Quadriláteros, para que vos quero?**
Cristina Loureiro

44 **Conexões matemáticas — Números e representações geométricas**
Graça Cebola

49 **A Confecção do Ponche e a proporcionalidade directa**
Cristina Tudella

Secções

37 **O problema deste número** *José Paulo Viana*
A Boda

35 **Tecnologias na educação matemática** *António Domingos*
A utilização de materiais electrónicos e os manuais escolares,
António Domingos, Paula Cristina Teixeira

23 **Materiais para a aula de Matemática**
Origami: um medidor de ângulos, *Anabela Gaio, Idália Pesquita, Ilda Rafael*

47 **Pontos de vista, reacções e ideias...**
Proporcionalidade directa (algumas considerações), *Rogério Berrincha*
«A Matemática é trivial na ESAG», *Adosinda Almeida, Alice Martins, Vítor Pereirinha*

08 **Para este número seleccionámos**
O Movimento Associativo e a Identidade Profissional dos Professores de Matemática, *Paulo Abrantes*

02 **Pense nisto**
E a avaliação das aprendizagens no NPMEB?, *Leonor Santos*