Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2011

113

Maio ∞ Junho

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Isabel Rocha
Subdirectora Manuela Pires
Redacção Adelina Precatado
Ana Luísa Paiva
Ana Paula Canavarro
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Irene Segurado
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Junho 2011
Tiragem 3000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Sobre a capa

A capa deste número reproduz um quadro do pintor russo Nikolay Bogdanov-Belsky. A pintura (datada de 1895) retratando um professor e os seus alunos, mostra estes últimos ocupados com a resolução de um problema de cálculo mental. No quadro pode ler-se o desafio: calcular

$$\frac{11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

«Contas de cabeça», Nikolay Bogdanov-Belsky, 1895
Museu Tretyakov – Museu Nacional de Arte Russa, Moscovo

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Caseiro, Carlos Miguel Ribeiro, Cristina Loureiro, Cristina Martins, Fernanda Menina, Florinda Costa, Isabel Oitavem, Isabel Velez, João Pedro da Ponte, Leonor Santos, Marcos de Miranda Paranhos, Maria Cecília Domingues, Maria Helena Martinho, Maria José Bóia, Rui Pedro Raposo, Sandra Guerreiro.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Práticas de colaboração e a condição do professor

A avaliação de professores tem sido vivida nas escolas com alguma incomodidade. Várias foram as expectativas e os desencantos de um processo complexo, atribulado, não raro vítima das suas próprias vicissitudes. Um processo que, com razão ou sem ela, deixou marcas profundas no quotidiano de muitas escolas e no modo como os professores se relacionam com a sua condição e como esta é encarada pela sociedade.

Não discutamos, agora, a correcção ou a injustiça dos argumentos utilizados ao longo deste debate, ou as acusações de autoritarismo ou reflexos corporativos que não raro, o envenenaram. Centremo-nos, antes, no professor, na sua condição, pessoal e plural, no modo como com ela se relaciona. Acreditamos que tal exercício poderá abrir portas insuspeitas e ajudar-nos a fazer, como escreveu Maurice Bellet, «das nossas fraquezas força».

A verdade é que nos confrontamos hoje com uma desvalorização simbólica da condição de professor, acelerada por todo um conjunto de imagens fortemente mediatizadas e, geralmente, pouco abonatórias. Imagens que acabam por limitar, ou mesmo inverter, as traves-mestra que, no passado, configuraram esta identidade. A verdade é também que, não raro, o professor, aturdido com o gigantismo das escolas, o avolumar de tarefas burocráticas a que é chamado e, sobretudo, com o isolamento em que vive o seu quotidiano profissional, tende a olhar-se como um mero dispensador de conhecimentos, por vezes a ter de sobreviver num ambiente hostil. A crescente precariedade das relações de trabalho, a que mesmo o ensino público não é já alheio, e a instabilidade do quadro sócio-profissional relevante fazem o resto.

A este estado de coisas poderão responder dinâmicas inclusivas no interior das escolas, capazes de quebrar isolamentos e promover espaços de encontro e partilha entre os professores. Espaços abertos à reflexão e discussão de experiências de ensino, à análise mútua de episódios das aulas, à discussão de planos e iniciativas, à partilha, em suma, das dificuldades e sucessos que todos atravessamos. Trata-se de desenvolver uma cultura de colaboração entre os professores, reagindo ao anonimato, verbalizando vivências, fazendo coisas em conjunto.

De facto, a vida — a prática — enriquece-se quando é dito em voz alta. E há alguém para escutar e dizer também. Por isso estes espaços poderão desempenhar um papel tão importante na melhoria das práticas docentes e na própria regulação dos processos de ensino e aprendizagem.

O conjunto de experiências que podem, em cada escola, tecer os fios de novas atitudes e de uma cultura colaborativa, será igualmente fecundo em termos do desenvolvimento profissional dos professores. O envolvimento activo em projectos diversificados com colegas constrói comunidade, reduz o isolamento, é fonte de inovação educativa.

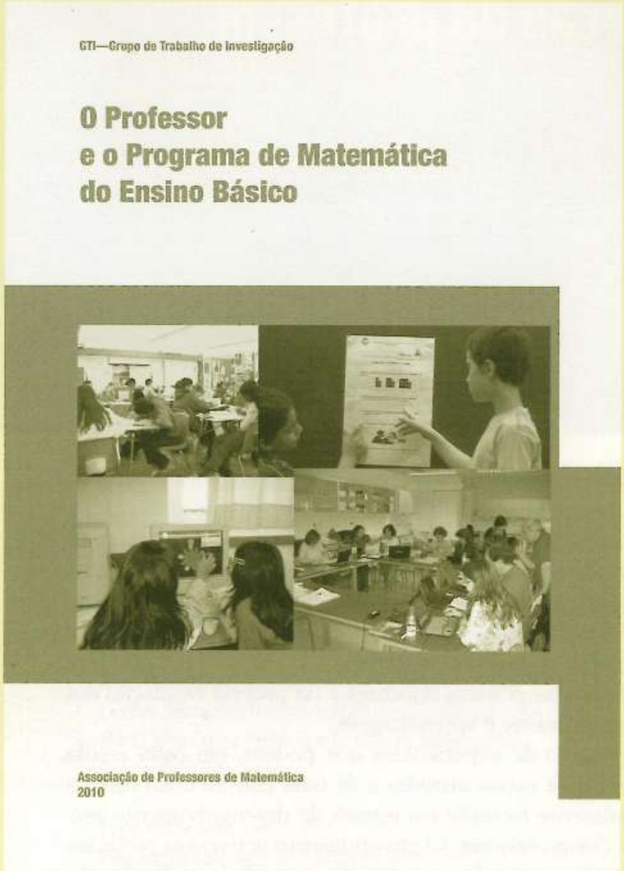
Mais ainda, tem potencial para desenvolver novos papéis e formas de relação entre os professores. Estes poderão, por exemplo, actuar como revisores e consultores uns dos outros, fornecendo informação e *feedback* sobre a implementação de um novo curriculum ou de uma estratégia de ensino. Poderão, ainda, organizar-se como investigadores das suas próprias práticas, recolhendo informação, sistematizando reflexões, testando hipóteses. O espaço e colaboração constitui, assim, um meio particular de reflexão, desenvolvimento profissional e regulação das próprias práticas.

Em contextos e com objectivos muito diversos, práticas colaborativas emergem, afirmam-se e gostaríamos que se multiplicassem. Elas são, certamente, o indicador mais seguro da capacidade que os professores por vezes têm de fazer das suas «fraquezas força».

Maria Helena Martinho
IE, Universidade do Minho

O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico

Edição APM, 2010 | PVP: 12,00€ Sócio: 8,50€



São diversos os desafios que são colocados à escola e aos professores, quer na sua capacidade de acompanhar as constantes mudanças da sociedade, quer ao nível do desenvolvimento curricular, como o que presentemente ocorre associado à generalização do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB), publicado em 2007. Assim, este livro, que intitulámos O *Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, inclui uma colecção de experiências realizadas por professores e formadores dos diferentes níveis de ensino (do 1.º ciclo do ensino básico ao ensino superior). Mais importante do que cada experiência em si mesma é perceber de que forma ela pode contribuir em termos do conhecimento para a profissão, e que mais-valia traz para a vida das escolas, em particular para o grupo de professores de Matemática.

Ao divulgar estas experiências, procuramos contribuir para uma melhor compreensão das questões associadas às mudanças curriculares preconizadas pelo PMEB, nomeadamente como interpretar e concretizar na prática as indicações desse programa, como delinear e percorrer os percursos necessários, como caracterizar os papéis que o professor pode assumir e como conceber estratégias para concretizar ao longo do ano uma grande variedade de objectivos curriculares.

Agenda Dia-a-Dia com a Matemática 2011/2012

Organização: Núcleo de Braga da APM

Lançamento no ProfMat2011

s	t	q	q	s	s	d
			01	02	03	04
05	06	07	08	09	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

2011 Setembro

05 segunda-feira

ProfMat 2010

06 terça-feira

ProfMat 2011

07 quarta-feira

ProfMat 2011

XXII SIEM

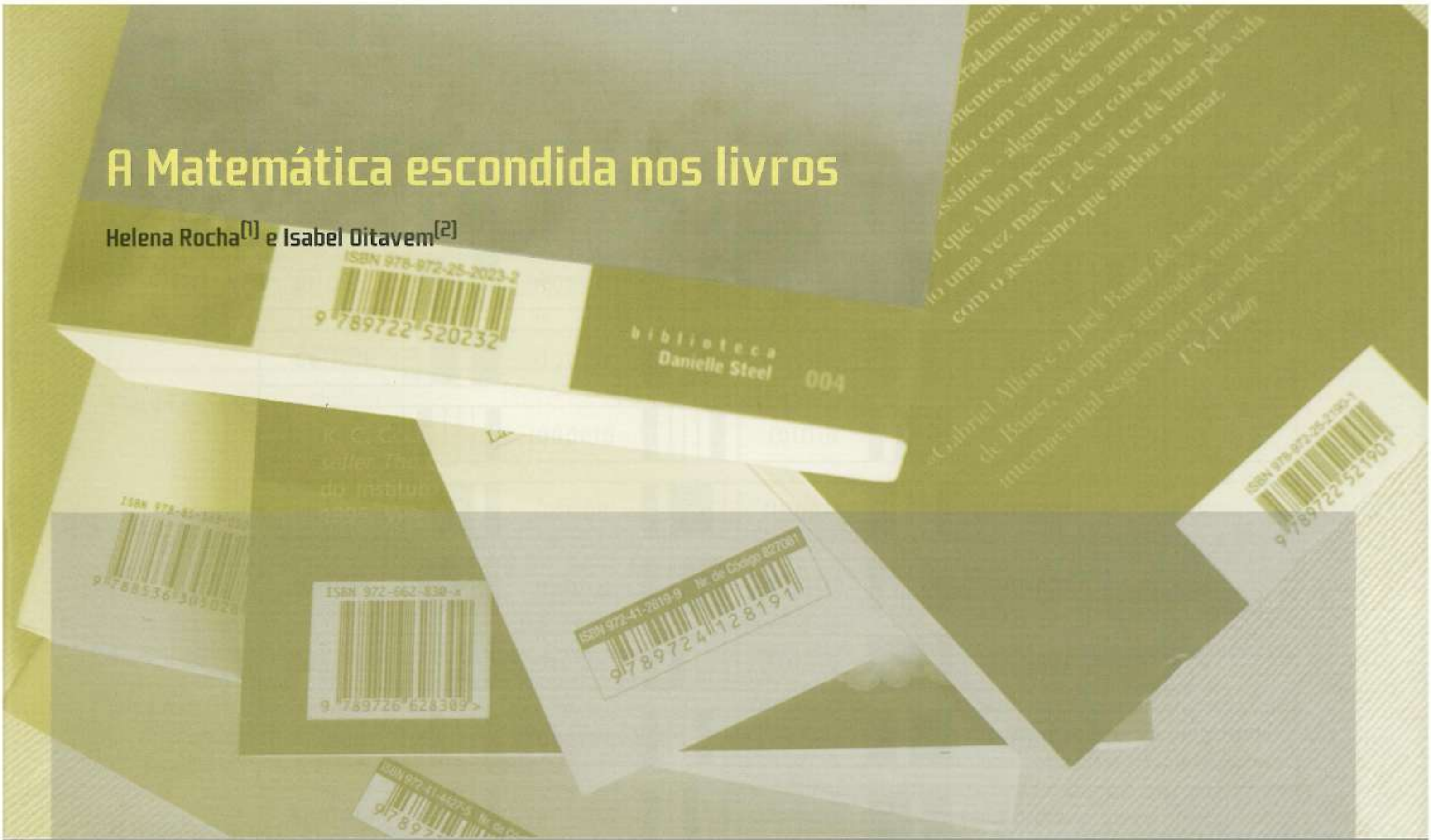
08 quinta-feira

XXII SIEM

09 sexta-feira

10 sábado

11 domingo



A Matemática escondida nos livros

Helena Rocha[1] e Isabel Oitavem[2]

O ISBN é o International Standard Book Number. Até 2007 este número era constituído por dez algarismos e, desde então, passou a incluir o código EAN (*European Article Number*) e a ser constituído por 13 algarismos. O ISBN é um número reconhecido internacionalmente e que permite rapidamente identificar qualquer livro. No nosso país o sistema existe desde 1988 estando a sua gestão a cargo da APEL — Associação Portuguesa de Editores e Livreiros. O ISBN encontra-se dividido em cinco partes:

- **O EAN** — um código de três algarismos que permite saber de que tipo de artigo estamos a falar (livro, *software*, etc.). No caso dos livros este código será o 978 ou o 979.
- **O grupo de registo** — um código que pode ter de 1 a 5 algarismos e que identifica o país ou a língua em que o livro está escrito.
- **A editora** — um conjunto de até 7 algarismos que identifica a editora que publicou o livro.
- **O identificador do título** — um código até 6 algarismos que identifica especificamente o livro.
- **O algarismo de controlo** — o algarismo final que valida matematicamente o ISBN e que tem como função detectar eventuais enganos quando o ISBN é digitado.

O ISBN surge por norma na ficha técnica do livro e na sua contracapa, em geral junto de um código de barras destinado a leitura óptica. O ISBN pode ser apresentado de duas maneiras, como se ilustra na figura 1. A primeira é mais conveniente quando é possível recorrer a um instrumento de leitura óptica do código de barras, e a segunda tem a vantagem de permitir desde logo identificar as cinco partes que constituem o número.

Figura 1

9 789724 144276

ou

ISBN 978-972-41-4427-6

algarismo	1º algarismo	1º grupo de 6 algarismos		2º grupo de 6 algarismos
0	111111	0001101	0100111	1110010
1	110100	0011001	0110011	1100110
2	110010	0010011	0011011	1101100
3	110001	0111101	0100001	1000010
4	101100	0100011	0011101	1011100
5	100110	0110001	0111001	1001110
6	100011	0101111	0000101	1010000
7	101010	0111011	0010001	1000100
8	101001	0110111	0001001	1001000
9	100101	0001011	0010111	1110100
paridade		ímpar	par	par

Figura 2

Quando o ISBN é representado juntamente com um código de barras o primeiro algarismo surge à esquerda das barras e os restantes surgem por baixo destas, divididos em dois grupos de seis algarismos separados e delimitados por separadores (umas barras em regra mais compridas que as restantes). As barras consistem numa sequência de tiras claras e escuras de diferentes grossuras que representam os algarismos. Cada conjunto de sete módulos brancos ou pretos representa um algarismo. Por exemplo, o algarismo 2 do segundo conjunto de seis algarismos é representado por dois módulos pretos, um módulo branco, dois módulos pretos e dois módulos brancos. Durante a leitura óptica o computador atribui a cada módulo branco o valor zero e a cada módulo preto o valor um, obtendo assim uma sequência binária de comprimento sete (que no caso do nosso exemplo seria 1101100) a que posteriormente associa um algarismo de 0 a 9, de acordo com a última coluna da tabela da figura 2.

Os algarismos do primeiro conjunto de seis algarismos podem ser representados de duas maneiras diferentes. Uma das representações possíveis corresponde ao que podemos chamar o inverso da representação do segundo conjunto de seis algarismos em que as barras pretas passam a brancas e vice-versa (na figura 2, comparar a primeira coluna de código de barras com a última). Neste caso o algarismo 2 seria representado por dois módulos brancos, um módulo preto, dois módulos brancos e dois módulos pretos a que corresponderia o número 0010011. A outra representação possível é a imagem no espelho da codificação do segundo grupo de seis algarismos (na figura 2, comparar as duas últimas colunas de código de barras). E neste caso o algarismo 2 seria representado por duas barras brancas, duas barras pretas, uma barra branca e duas barras pretas, a que corresponderia a sequência 0011011. Estas duas representações são designadas de par ou ímpar em função do número de 1's que incluem. Assim, 0010011 será a representação ímpar do algarismo 2 porque tem um número ímpar (três) de 1's e 0011011 será a representação par do algarismo 2 porque tem um número par (quatro) de 1's.

A escolha, para cada um dos algarismos do primeiro grupo de seis algarismos, entre a sua representação ímpar ou a sua representação par, determina uma sequência de seis dígitos («1» se for escolhida a representação ímpar e «0» se for escolhida a representação par) que permite codificar o primeiro algarismo do ISBN (aquele que surge à esquerda do código de barras).

A tabela da figura 2 apresenta para cada algarismo as codificações para o primeiro algarismo do ISBN, para o primeiro grupo de seis algarismos com codificações ímpares e pares e para o segundo grupo de seis algarismos. Estas codificações podem ser inferidas a partir da análise do código de barras de diversos ISBN's ou, pelo contrário, podem ser utilizadas para construir códigos de barras. Vamos usá-la para reproduzir o código de barras da figura 1.

7	8	9	7	2	4
ímpar	par	par	ímpar	par	ímpar
1	0	0	1	0	1
9 (1° algarismo do ISBN)					

Figura 3

1	4	4	2	7	6

Figura 4

O primeiro algarismo do ISBN da figura 1 é 9, que é codificado por 100101. Isto significa que no primeiro grupo de seis algarismos iremos escolher sucessivamente as representações ímpar (1), par (0), par (0), ímpar (1), par (0) e ímpar (1). Ou seja, que para o algarismo 7 iremos escolher a representação ímpar, para o 8 a par, para o 9 a par, para o 7 a ímpar, para o 2 a par e para o 4 a ímpar (figura 3).

A segunda parte do código de barras terá por base os códigos do segundo conjunto de seis algarismos (figura 4).

A Matemática do ISBN: elementar ou não?

O ISBN, podendo ser algo a que os alunos nunca deram atenção, está em certo sentido presente na sala de aula, pois surge no manual de todas as disciplinas. Além disso, alguns alunos podem achar interessante perceber um pouco do seu funcionamento e encontrar um exemplo de uma situação concreta em que a utilidade da Matemática é visível, ao disponibilizar uma forma de detectar eventuais enganos na digitalização dos algarismos. Acresce ainda que esta é uma situação simples, cuja compreensão está ao alcance de alunos mesmo de níveis mais elementares, mas que pode depois ser estendida e aprofundada, tornando-a relevante também para alunos de níveis mais avançados. A aritmética modular é aliás uma das áreas da Matemática cujo estudo autores como Justesen & Hoholdt (2004) consideram só estar ao alcance de alunos com alguma maturidade, como é o caso daqueles que já se encontram a frequentar um 3.° ou 4.° ano no ensino superior.

A um nível mais elementar, esta pode ser uma boa ocasião para proporcionar aos alunos um contacto com diferentes representações duma mesma entidade, abordando uma representação numérica, uma representação geométrica e uma representação binária, que sendo obviamente numérica é diferente daquela a que os alunos estão habituados e permite lançar diversas questões e estabelecer pontes com áreas como a informática.

A forma como são constituídos os ISBN, a partir das cinco componentes base, das quais três têm um número variável de algarismos, pode também constituir um ponto de partida para um trabalho exploratório e de natureza organizativa. Se não vejamos:

O grupo de registo dos livros publicados em Portugal tem três algarismos. No Canadá encontramos livros em que o grupo de registo tem um único algarismo. Sendo o grupo de registo estabelecido a nível mundial, que critérios podem ser estabelecidos para decidir que países e idiomas ficam com grupos de registo de um, dois, três ou mais algarismos?

E em Portugal, que critérios podem ser estabelecidos para a atribuição dos códigos às editoras? Que implicações têm essas decisões sobre o número máximo de livros que cada uma pode publicar?

O número de controlo é outra situação interessante do ISBN que, do ponto de vista matemático, pode originar oportunidades de exploração ricas. A abordagem pode ser feita a um nível relativamente elementar, como veremos no ponto seguinte, mas pode também envolver conhecimentos matemáticos que vão para além do elementar. Nomeadamente, conhecimentos de teoria dos corpos finitos relevantes para a teoria dos códigos.

O número de controlo do ISBN no passado e no presente

Como já referimos, até 2007 o ISBN era constituído por dez algarismos: nove algarismos mais um de controlo. Considerando o número ISBN como $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\ x_{10}$, onde cada x_i representa um algarismo, o número de controlo x_{10} era determinado de modo a que

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Tabela 1

N° de controlo ?	Valor de 234 + 10 × ?	Resto da divisão por 11
0	234	3
1	244	2
2	254	1
3	264	0
4	274	10
5	284	9
6	294	8
7	304	7
8	314	6
9	324	5
10	334	4

Actual ISBN		x_2									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	0		3-1	6-2	9-3	2-4	5-5	8-6	1-7	4-8	7-9
	1	1-3		7-5	0-6	3-7	6-8	9-9	2-0	5-1	8-2
	2	2-6	5-7		1-9	4-0	7-1	0-2	3-3	6-4	9-5
	3	3-9	6-0	9-1		5-3	8-4	1-5	4-6	7-7	0-8
	4	4-2	7-3	0-4	3-5		9-7	2-8	5-9	8-0	1-1
	5	5-5	8-6	1-7	4-8	7-9		3-1	6-2	9-3	2-4
	6	6-8	9-9	2-0	5-1	8-2	1-3		7-5	0-6	3-7
	7	7-1	0-2	3-3	6-4	9-5	2-6	5-7		1-9	4-0
	8	8-4	1-5	4-6	7-7	0-8	3-9	6-0	9-1		5-3
	9	9-7	2-8	5-9	8-0	1-1	4-2	7-3	0-4	3-5	

Tabela 2

Ou seja, o décimo algarismo era escolhido de modo a que quando multiplicado por dez e somado a $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9$, o resultado fosse um múltiplo de 11.

Por exemplo, se pretendêssemos determinar o algarismo de controlo do livro de ISBN 972662792?, começaríamos por calcular $9 + 2 \times 7 + 3 \times 2 + 4 \times 6 + 5 \times 6 + 6 \times 2 + 7 \times 7 + 8 \times 9 + 9 \times 2$, que dá 234. O número de controlo «?» seria então um valor entre 0 e 10 tal que

$$234 + 10 \times ? \text{ é múltiplo de } 11. \text{ (Tabela 1)}$$

Então o número de controlo seria 3 e consequentemente o ISBN completo seria 9726627923.

A passagem do número de algarismos do ISBN de dez para treze veio, contudo, conduzir ao abandono desta forma de determinar o algarismo de controlo. Na verdade, já existia um pequeno problema com o algoritmo associado ao ISBN de dez algarismos. É que o algarismo de controlo podia variar de 0 a 10, o que fazia com que o algarismo de controlo por vezes fosse 10, o que não é um algarismo. Neste caso o problema foi contornado com um pequeno artifício. Recorreu-se a X, que em numeração romana representa o valor 10, e embora não se tivesse obviamente um algarismo tínhamos pelo menos um único símbolo. A passagem do ISBN para treze algarismos obrigava necessariamente a alterações no algoritmo para determinar o algarismo de controlo e levou à adopção de um novo algoritmo.

Num ISBN actual os primeiros doze algarismos são seguidos de um algarismo de controlo. Considerando o ISBN como $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_7\, x_8\, x_9\, x_{10}\, x_{11}\, x_{12}\, x_{13}$, onde cada x_i representa um algarismo, o algarismo de controlo x_{13} é determinado de modo a que

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 3x_6 + x_7 + 3x_8 + x_9 + 3x_{10} + x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \equiv 0 \pmod{10}.$$

Ou seja, o décimo terceiro algarismo é escolhido de modo a que quando somado a $x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 3x_6 + x_7 + 3x_8 + x_9 + 3x_{10} + x_{11} + 3x_{12}$, o resultado seja um múltiplo de 10.

Por exemplo, se pretendermos determinar o algarismo de controlo do livro de ISBN 978972662792?, começaríamos por calcular $9 + 3 \times 7 + 8 + 3 \times 9 + 7 + 3 \times 2 + 6 + 3 \times 6 + 2 + 3 \times 7 + 9 + 3 \times 2$ que dá 140. O algarismo de controlo «?» seria então um valor entre 0 e 9 tal que $140 + ?$ é múltiplo de 10. Ou seja, 0. E, consequentemente, o ISBN completo seria 9789726627920.

A grande função deste algarismo de controlo é naturalmente detectar eventuais enganos ao digitar o número de ISBN. De entre os diversos enganos possíveis os mais comuns são, segundo Buescu (2002), os que envolvem a inserção de um algarismo errado ou a troca entre dois algarismos adjacentes, sendo que, segundo Picado (2001), a ocorrência de mais de um erro na introdução de um mesmo ISBN é muito reduzida. É fácil ver que tanto o actual como o antigo algoritmo para determinar o algarismo de controlo do ISBN detecta os casos em que é introduzido um algarismo errado. E a troca entre dois algarismos adjacentes?

As tabelas 2 e 3 apresentam as somas dos dois primeiros algarismos em módulo 10 ou em módulo 11 (respectivamente para o ISBN actual e antigo) quando estes são introduzidos pela ordem correcta ($x_1\, x_2$) ou pela ordem incorrecta ($x_2\, x_1$).

Uma análise das tabelas permite concluir que o algoritmo antigo detecta sempre a troca na ordem de introdução dos dois algarismos, mas o mesmo já não acontece com o algoritmo actual. Neste caso, sempre que a diferença entre os dois algarismos trocados é de cinco unidades, o erro não é detectado. Esta conclusão pode ser induzida a partir da tabela, mas também pode ser deduzida matematicamente. Tal deve-se ao facto do mdc(2, 10) ser 2 e não 1. Com efeito, se considerarmos a diferença entre as duas somas de controlo (a do número com erro e a do número correcto) veremos que esta é o dobro da diferença entre os dois algarismos trocados e que, portanto, será

Antigo ISBN		x_2									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	0		2-1	4-2	6-3	8-4	10-5	1-6	3-7	5-8	7-9
	1	1-2		5-4	7-5	9-6	0-7	2-8	4-9	6-10	8-0
	2	2-4	4-5		8-7	10-8	1-9	3-10	5-0	7-1	9-2
	3	3-6	5-7	7-8		0-10	2-0	4-1	6-2	8-3	10-4
	4	4-8	6-9	8-10	10-0		3-2	5-3	7-4	9-5	0-6
	5	5-10	7-0	9-1	0-2	2-3		6-5	8-6	10-7	1-8
	6	6-1	8-2	10-3	1-4	3-5	5-6		9-8	0-9	2-10
	7	7-3	9-4	0-5	2-6	4-7	6-8	8-9		1-0	3-1
	8	8-5	10-6	1-7	3-8	5-9	7-10	9-0	0-1		4-3
	9	9-7	0-8	2-9	4-10	6-0	8-1	10-2	1-3	3-4	

Tabela 3

um múltiplo de 10 (e consequentemente o erro não será detectado) sempre que a diferença entre os dois algarismos trocados seja 5.

Parece assim que o actual sistema não é tão eficaz como o anterior, mas a verdade é que, como destaca Buescu (2002), não é possível detectar todas as trocas na ordem de introdução de dois algarismos adjacentes e todas as introduções incorrectas de um algarismo tendo para algarismo de controlo apenas as nove hipóteses de 0 a 9. No entanto, esse também não era o objectivo. A crescente divulgação dos mecanismos de leitura óptica tornou muito mais raras as situações em que os algarismos são digitados directamente e, além disso, a grande fiabilidade destes instrumentos de leitura também tornou menos frequentes determinados erros e, consequentemente, menos necessários determinados processos para a sua detecção (Picado, 2001).

Em aberto deixamos aqui as questões relativas à base dos algoritmos:

— Porque razão considerar os múltiplos de 11, no algarismo de controlo do antigo ISBN?
— E porquê a escolha do 3 para multiplicar por metade dos algarismos, no algarismo de controlo do actual ISBN?

Número de controlo noutras situações do quotidiano

Existem muitas outras situações com que nos deparamos regularmente e em que também é usado algum tipo de número de controlo (embora os algoritmos para o determinar variem). A que mais se assemelha ao ISBN é a que podemos encontrar quando vamos às compras, junto ao código de barras de qualquer produto. Nesta situação, o último algarismo tem precisamente a função de detectar alguns dos possíveis enganos que podem ocorrer quando o código do artigo é inserido manualmente na caixa registadora. Uma outra situação, talvez mesmo das mais conhecidas, ocorre no bilhete de identidade. Aquele número que surge isolado num quadradinho pretende ser precisamente um número de controlo. O número de cada nota de euro também inclui um número de controlo. O NIB da conta bancária engloba igualmente um sistema que pretende detectar eventuais enganos, mas neste caso estão envolvidos dois algarismos e não apenas um. E, de uma maneira geral, sempre que nos deparamos com situações em que estão envolvidos números de vários algarismos que tornam natural a ocorrência de erros de digitação, a Matemática está também presente, dando o seu contributo para tentar detectar erros e assim minimizar a ocorrência de situações desagradáveis. Afinal ninguém quer depositar dinheiro na conta bancária de um desconhecido, só porque se enganou no NIB, nem pagar o dobro por um produto, devido a um engano do funcionário que nos atendeu ao digitar o código do artigo. É para minimizar situações como estas que todos contamos com a Matemática escondida nos diversos números de controlo.

Bibliografia

Buescu, J. (2002). *O mistério do bilhete de identidade e outras histórias.* Lisboa: Gradiva.

Justesen, J., Hoholdt, T. (2004). *A course in error — correcting codes.* Zürich: European Mathematical Society.

Masunaga, D. (1994). Zips and strips. *NCTM Student Math Notes*, January.

Picado, J. (2001). A álgebra dos sistemas de identificação. *Boletim da SPM*, 44, 39–73.

Notas

1 Com o apoio da FCT (SFRH/BD/37905/2007) e do ME

2 Com o apoio da FCT e da European Science Foundation, projectos PTDC/MAT/104716/2008 e LogICCC/0001/2007

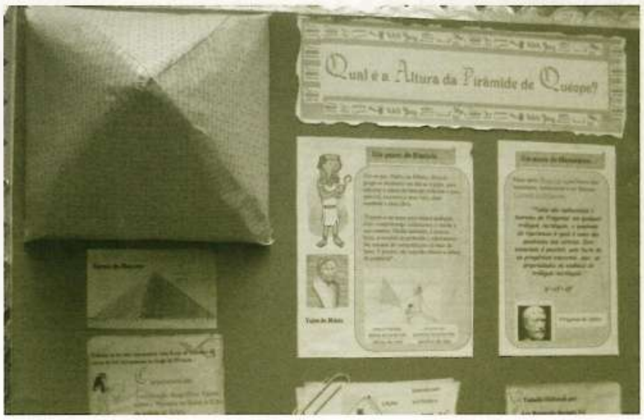
Helena Rocha

Bolseira da FCT/ME

Isabel Oitavem

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

«O fabuloso Teorema de Pitágoras»



«O fabuloso Teorema de Pitágoras» foi o título escolhido para um trabalho proposto aos alunos do 8° ano da Escola EB 2,3 Engenheiro Duarte Pacheco, em Loulé.

Foram dinamizadoras as professoras Fernanda Menina e Sandra Guerreiro que propuseram aos seus alunos de 8° ano um trabalho de grupo que consistia em realizar uma maqueta que simulasse a aplicação do teorema de Pitágoras. O tema do trabalho foi bem recebido pelos alunos e dos cerca de cento e trinta alunos que frequentam o 8° ano na escola, apenas aproximadamente dez não entregaram uma maqueta.

Os trabalhos excederam as nossas expectativas, quer pela adesão quer pela criatividade e originalidade. Alguns alunos construíram uma maqueta para aplicação do Teorema de Pitágoras no plano, outros para a aplicação do teorema de Pitágoras no espaço. Para exposição houve castelos, pirâmides do Egipto, velas de barcos, parques infantis, um campo de futebol em legos, um «Phineas» (um desenho animado) e até a ponte Vasco da Gama. Embora alguns alunos se tenham documentado na internet, a realização manual do trabalho foi da autoria dos alunos. Estes além da maqueta deviam ainda apresentar um problema e resolvê-lo.

Estes trabalhos foram importantes em muitos sentidos. Para os alunos possibilitou a visualização da aplicação prática do Teorema de Pitágoras, dando um sentido à questão «Para é que isto serve?». Possibilitou ainda um momento diferente das aulas de realização de exercícios e problemas, mostrando o aspecto lúdico/didáctico da disciplina. Finalmente e porque teve peso na avaliação, ajudou a melhorar os níveis de final de período uma vez que recompensámos o seu empenho. Para as professoras, foi importante lembrarmo-nos que a escola não são apenas reuniões e processos burocráticos, mas que ser professor é trabalhar com pessoas ávidas de novos desafios, para que nos possam surpreender reinventando temas e fazendo-nos reinventar didácticas e práticas pedagógicas. Lembrámo-nos como gostamos de ser professoras e de trabalhar com os nossos alunos.

Por estes motivos a exposição foi um sucesso. Embora em situações problemáticas ainda haja alunos que não vêem a aplicação do Teorema de Pitágoras, estes são uns ases na aplicação directa do mesmo, quer para calcular a hipotenusa, ou um dos catetos. Na auto-avaliação muitos alunos sugeriram a realização de um novo trabalho de grupo.Todos eles estão de parabéns.

Fernanda Menina e Sandra Guerrreiro
EB 2,3 Eng. Duarte Pacheco, Loulé

Jacob Steiner e o problema da menor malha viária: uma resolução utilizando o Cálculo Diferencial

Este artigo apresenta uma resolução analítica do problema da menor malha viária de Jacob Steiner, diferente da apresentada no n.° 82 desta revista, em 2005, por José Mello. O referido artigo trata do problema utilizando a Geometria e proponho apresentar duas maneiras diferentes de resolver o mesmo problema, utilizando o Cálculo Diferencial.

Figura 1

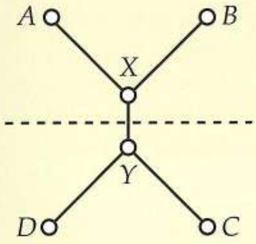


Figura 2.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(L-x)^2 + a^2} + L - 2a$$

[mover 1 varia o trajeto pela horizontal]

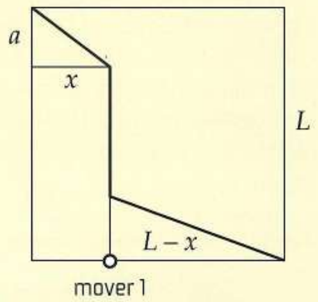


Figura 3.

$$g(x) = 2\sqrt{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} + x$$

[mover 2 varia o trajeto pela vertical]

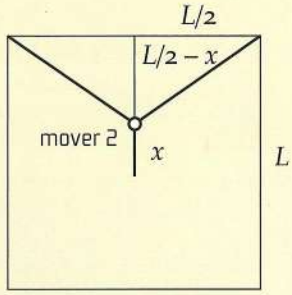


Figura 4

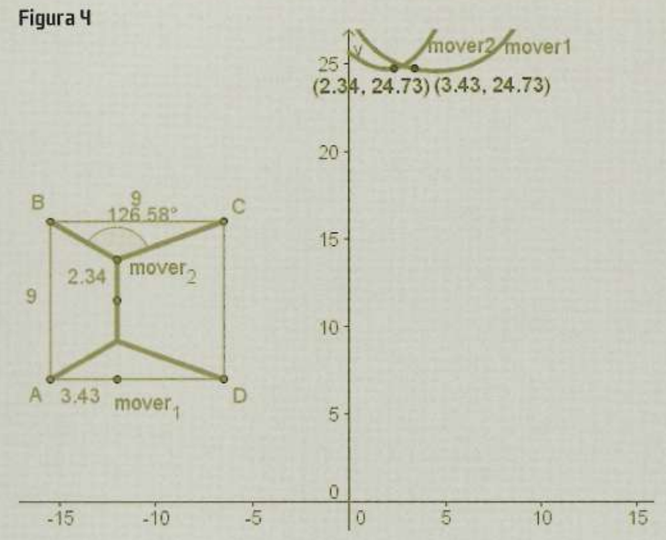
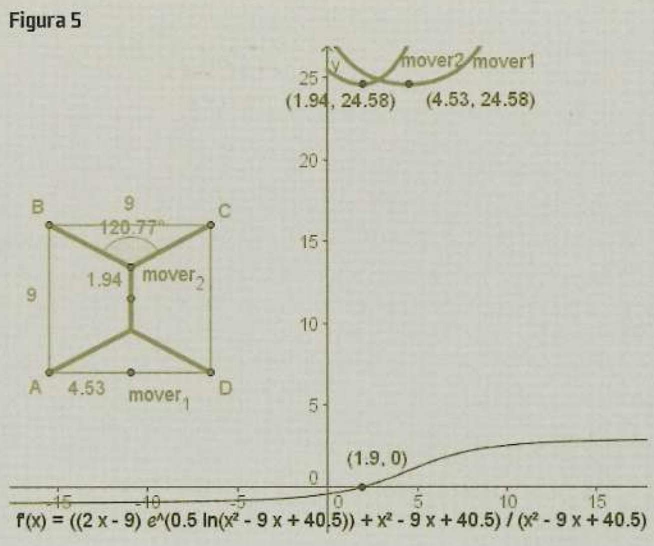


Figura 5



O problema

Conforme Mello (2005), do ponto de vista prático o problema pode ser apresentado da seguinte forma: se quisermos construir estradas ligando quatro cidades, qual é a configuração da malha viária mais curta possível? Para simplificar a análise do problema, admitiremos que cada cidade esteja localizada no vértice de um quadrado.

Mello (2005) apresenta a prova geométrica que entre todas as malhas com dois pontos de Steiner (X e Y), a apresentada na figura 1 é a de menor comprimento total.

Resolução pela geometria dinâmica

Construída a situação com o *software* Geogebra[1], dois pontos móveis (mover1 e mover2), produzem a variação do trajeto, conforme figura 2 e figura 3, respectivamente. Transportando para o sistema cartesiano, as posições desses pontos e o valor do trajeto criam dois lugares geométricos que coincidem com as funções.

As figuras 4 e 5 apresentam um quadrado de lado 9 produzidas com o *software* Geogebra, com algumas posições possíveis para os pontos de Steiner. Na figura 5, a que apresenta a solução do problema, foi constatado que o ponto de mínimo na parte que varia o trajeto pela horizontal (mover1) é aproximadamente 4,5 e que na parte que varia o trajeto pela vertical (mover2) é aproximadamente 1,94. Pode-se observar também o gráfico da derivada da função g, que apresenta o mesmo valor para x quando a função derivada é nula (condição que trataremos a seguir).

Resolução pelo cálculo diferencial – função com uma variável

A otimização de funções no Cálculo Diferencial baseia-se na ideia de que em um ponto de máximo ou mínimo da função, a derivada é nula. Assim sendo, determinada a função que gera o trajeto, basta otimizá-la:

função que varia o trajeto pela horizontal (mover1)

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(L - x)^2 + a^2} + L - 2a$$

otimizando $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \dfrac{x - L}{\sqrt{(L - x)^2 + a^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{-x + L}{\sqrt{(L - x)^2 + a^2}}$, considerando $x \neq L$,

$-2a^2Lx + a^2L^2 = 0$ donde $x = \dfrac{a^2L^2}{2a^2L}$,

considerando $a \neq 0$, $x = L/2$. Se $L = 9$, então $x = 9/2 = 4,5$.

Função que varia o trajeto pela vertical (mover2)

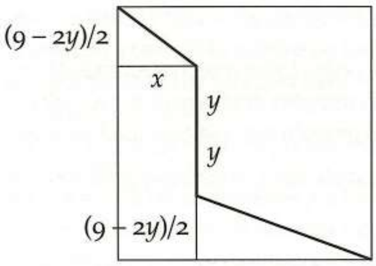
$g(x) = 2\sqrt{\left(\dfrac{L}{2} - x\right)^2 + \left(\dfrac{L}{2}\right)^2} + x$, otimizando:

$$g'(x) = \frac{2x - L}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} + 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3Lx + L^2/2 = 0 \Leftrightarrow x = \left(3L - L\sqrt{3}\right)/6$$

$x = L\left(3 - \sqrt{3}\right)/6 \cong 0,211L$ e, considerando $L = 9$,

temos $x \cong 1,9$.



$$F(x, y) = 2\sqrt{x^2 + \left(\frac{9 - 2y}{2}\right)^2} + 2\sqrt{(9 - x)^2 + \left(\frac{9 - 2y}{2}\right)^2} + 2y$$

Figura 6. Função que varia o trajeto

Resolução pelo cálculo diferencial – função com duas variáveis

A otimização de funções com duas variáveis no Cálculo Diferencial baseia-se na mesma ideia usada para funções com uma variável. Assim sendo, determinada a função que gera o trajeto, conforme figura 6, basta otimizá-la.

Entretanto, os propósitos deste artigo são os de apresentar uma análise do gráfico dessa função para determinar seu ponto de mínimo. Assim, transportando a função F para o *software Winplot*[2], podemos analisar seu gráfico tridimensional e estimar a solução que se aproxima da solução geométrica conforme figura 7.

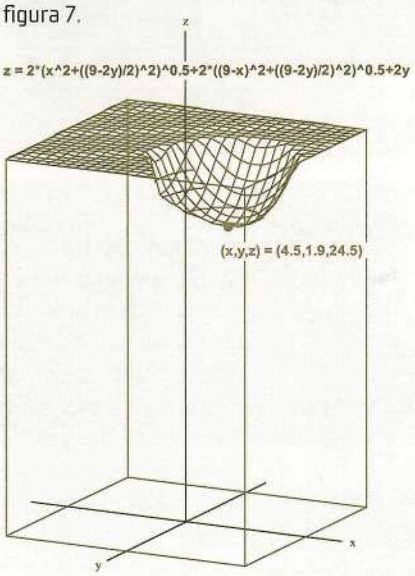


Figura 7

Conclusões

Embora a resolução do problema do menor caminho pela abordagem do Cálculo Diferencial considere alguns conceitos complexos, o que não proporciona uma resolução relativamente simples como a resolução geométrica, ela possibilita localizar os pontos de Steiner no espaço, o comprimento do trajeto e não apenas os ângulos formados em seu entorno. Além disso, podemos a partir do modelo determinado para a situação trocar valores das medidas e resolver diversos problemas semelhantes.

Notas

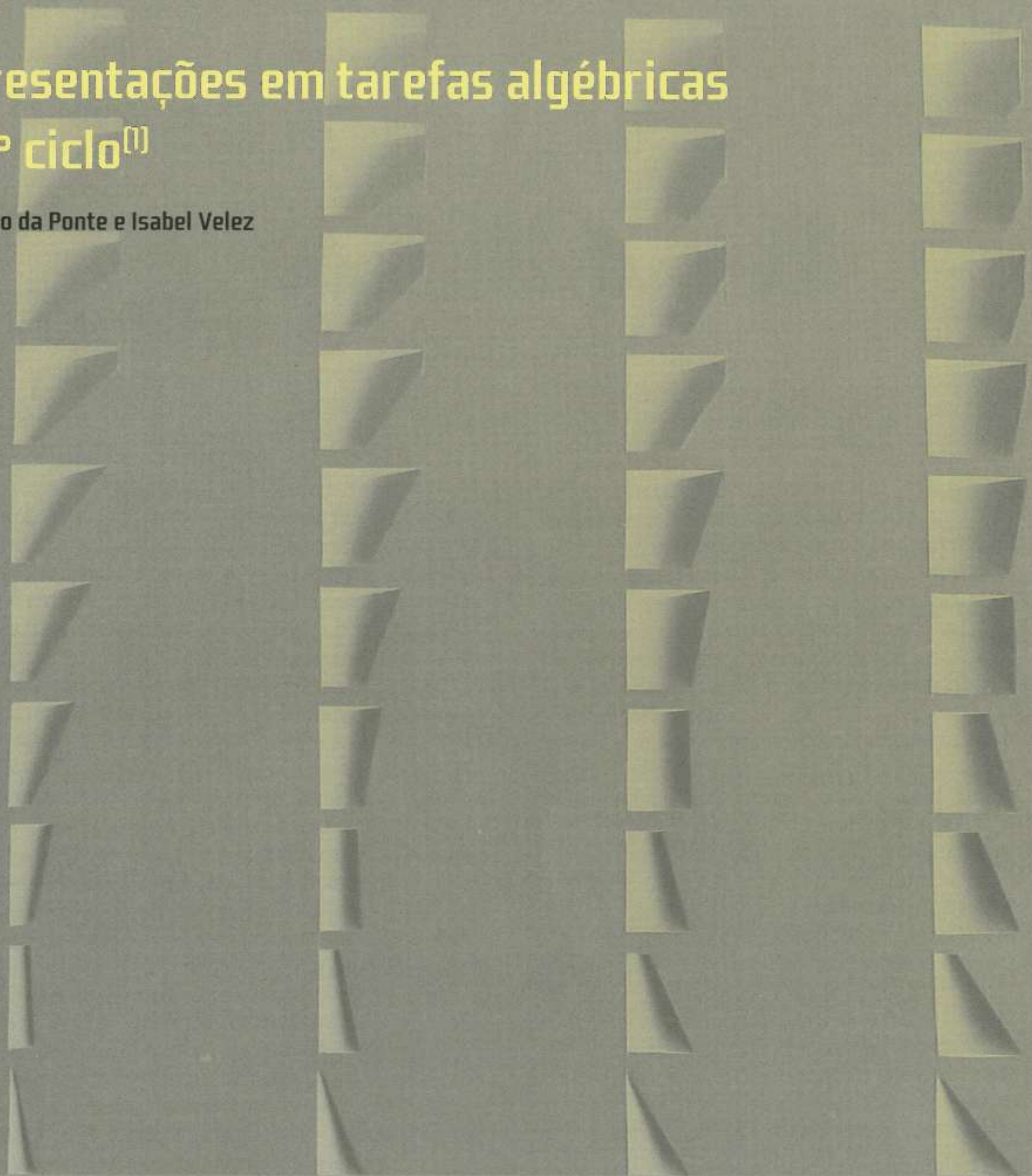
(1) Geogebra é um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas e é gratuito. Disponível em http://www.geogebra.org/cms/

(2) O Winplot é um programa gráfico e gratuito. Foi desenvolvido pelo professor Richard Parris da Phillips Exeter Academy, USA. Disponível em http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Marcos de Miranda Paranhos, Ana Lúcia Manrique
Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária (FEA) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), Brasil

Representações em tarefas algébricas no 1.º ciclo[1]

João Pedro da Ponte e Isabel Velez



A realização de actividades visando promover o pensamento algébrico dos alunos do 1.º ciclo do ensino básico é um dos aspectos distintivos do actual programa de Matemática em Portugal (ME, 2007). Tarefas com sequências pictóricas e numéricas bem como problemas de contagem de combinações estão entre as situações que podem contribuir para desenvolver este tipo de pensamento. Na sua resolução assume um papel decisivo o modo como os alunos interpretam as representações indicadas nos enunciados e como geram e interpretam as suas próprias representações.

Por isso, uma grande atenção deve ser dada ao modo como os alunos lidam com diversas representações, sejam estas indicadas em tarefas propostas pelo professor ou geradas pelos próprios alunos. É isso que procuramos ilustrar neste artigo, recorrendo a exemplos de respostas dadas por alunos do 2.º ano a tarefas de índole algébrica.

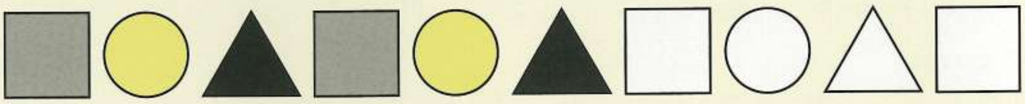
Representações matemáticas

Um dos autores que mais tem escrito sobre as representações matemáticas é Gerard Goldin. Num artigo recente, caracteriza uma representação como «uma configuração que representa algo, de alguma forma. Por exemplo, uma palavra pode representar um objecto real, um numeral pode representar o número de elementos num conjunto, ou a posição de um número numa recta numérica» (Goldin, 2008, p. 180).

Um outro autor com uma influência marcante no tema das representações é Jerome Bruner (1999), que fala em representações activas, icónicas e simbólicas:

> O que queremos dizer com representação? O que significa traduzir a experiência num modelo do mundo? A minha sugestão é que os seres humanos têm provavelmente três maneiras diferentes de realizarem esta proeza. A primeira

Tarefa 1 — Sequência com figuras geométricas



1. Descreve a sequência.
2. Quantos elementos tem a sequência inicial?
3. Completa a sequência.
4. Como será o 20.° elemento da sequência?
5. Em trinta elementos, quantas vezes aparecerá o 1.°/4.°?

> é através da acção. Conhecemos muitas coisas para as quais não há imagética nem palavras e é muito difícil ensiná-la através de palavras, diagramas ou imagens (...) Há um segundo sistema de representação que depende da organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens de resumo (...) A primeira forma de representação veio a ser designada como *activa* e a segunda como *icónica* (...). Por fim, há a representação por palavras ou linguagem. O seu traço distintivo é ser *simbólica* por natureza (...) (pp. 27–29)

Deste modo, em Matemática, as representações são caracteres, símbolos, configurações pictóricas ou mesmo objectos que representam alguma ideia, objecto, ou relação matemática. A relação entre a representação e o objecto representado não é biunívoca. Assim, um dado objecto matemático pode ter, muitas vezes, diversas representações — por exemplo, o número natural dois pode ser representado por «2» (dígito), «II» (numeração romana), «10» (no sistema binário), «dois» (palavra da língua portuguesa), «two» (em inglês), «••» ou por qualquer conjunto de dois objectos. Além disso, uma dada representação pode remeter para diferentes objectos, consoante o contexto — pensemos, por exemplo, no sinal de =, que tanto pode representar uma equivalência como o resultado de uma operação[2]. Por isso, uma representação matemática não pode ser interpretada isoladamente, só fazendo sentido quando observada num contexto bem determinado, à luz de um sistema de representação, com regras e significados bem definidos. Só este enquadramento torna possível a comunicação matemática, com a utilização universal de representações comummente aceites e generalizadas.

Goldin (2008) salienta que estes sistemas de representação têm uma estrutura complexa e elaborada mas ao mesmo tempo aberta e em constante mudança, pois as regras e normas que definem um sistema de representação também permitem que através da «manipulação de símbolos, regras de álgebra ou cálculo já existentes nos seja possível obter novas fórmulas, ou transformar e resolver equações» (p. 182). As representações mais complexas não são compreensíveis a não ser relacionadas com outras representações mais simples, para as quais o indivíduo atribua um significado.

Este autor chama a atenção que é preciso distinguir dois tipos de representações: externas e internas. As representações externas têm existência física, seja em papel, seja num ecrã de computador, seja num outro suporte qualquer (símbolos que representam os números e suas operações, notação algébrica, símbolos da linguagem Logo, sistemas geométricos como a rectas numérica e os gráficos cartesianos, diagramas diversos e outros). Bishop e Goffree (1986), categorizam os vários tipos de representações externas que se podem encontrar nas aulas de Matemática em quatro grupos principais — *símbolos matemáticos*, *linguagem verbal*, *figuras* e *objectos* — e indicam que «cada um destes tipos tem o seu próprio vocabulário ou código que precisa ser apreendido de forma a compreender as ideias matemáticas expressas» (p. 34). As figuras, imagens, ícones, etc. dão origem ao que podemos designar por *representações pictóricas*.

Ainda há bem pouco tempo, só se trabalhava na escola com representações simbólicas, incluindo os símbolos para os dígitos, os sinais das operações +, –, ×, : e o sinal =. Mais recentemente, começou a perceber-se a importância de se valorizarem as representações informais, nomeadamente por figuras e objectos. Em Portugal, o modo como os alunos do 3.° ano trabalham com diferentes representações matemáticas foi estudado por Nuno Valério (2005) que evidencia a sua capacidade para gerarem representações próprias, ao procurarem dar sentido a um problema, e que constituem um importante suporte para a sua aprendizagem. Pelo seu lado, Paula Canavarro (2007) sublinha a importância tanto das representações matemáticas convencionais como das não convencionais como recurso para o raciocínio algébrico e para a expressão do pensamento por parte dos alunos do 1.° ciclo. Elisa Pinto (2009) refere que para além das representações simbólicas, os alunos utilizam frequentemente representações activas (usando materiais manipuláveis) e representações icónicas como ligação ao concreto, como base para uma representação simbólica e como suporte para o raciocínio matemático.

Enquanto as representações externas são fáceis de observar, o mesmo não se pode dizer das representações internas que cada indivíduo forma e usa de modo diferente. Surge então a questão relativa ao modo como decorre o processo cognitivo, como é que uma representação externa passa a ter uma representação interna associada no nosso pensamento. Goldin (2008) sublinha a dificuldade em analisar o processo através do qual

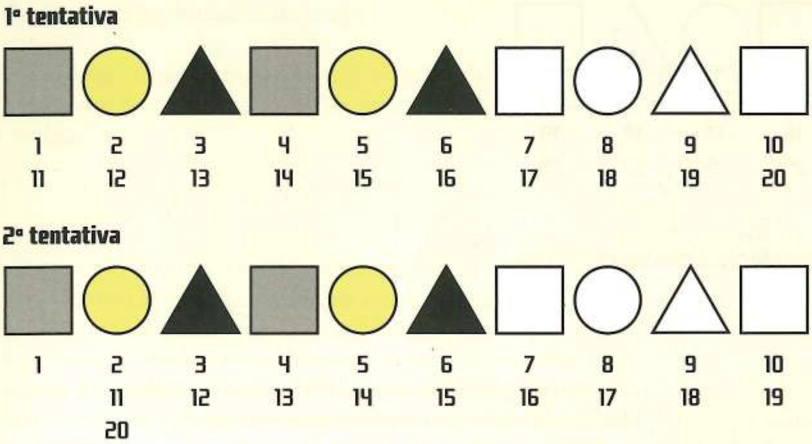


Figura 1. 1.º e 2.º tentativas de David (note-se que os numerais indicados na figura não são registados por escrito mas sim indicados oralmente pelo aluno).

as representações internas se formam em cada indivíduo, bem como em perceber como se caracterizam essas representações. Contudo, apesar de não se conseguir acompanhar directamente o processo de representação interna dos alunos, podemos fazer inferências sobre ele, baseando-nos na forma como trabalham com as representações externas nas interacções com os colegas, na sua participação nas actividades propostas e nos registos produzidos. Assim, quando um aluno usa os seus conhecimentos na construção de uma sequência, um gráfico, ou um diagrama, podemos procurar compreender o seu processo de pensamento e respectivas dificuldades. De igual modo, quando lhe pedirmos para explicar por palavras suas ou por uma outra representação uma definição ou procedimento, podemos tentar perceber como foram compreendidos os conceitos envolvidos.

A tarefa 1 é uma sequência repetitiva[3], onde existe uma unidade que se repete formada por três elementos (as imagens quadrado, círculo, triângulo). Os primeiros seis termos caracterizam-se pela sua forma e pela sua cor e os quatro termos que se seguem apenas pela sua forma. Envolvendo uma sequência pictórica repetitiva de fácil apreensão, esta tarefa pode parecer muito simples. Na verdade, rapidamente podemos chegar a questões de assinalável complexidade, que só podem ser respondidas recorrendo a outros sistemas de representação para além da sequência pictórica dada.

Na realização desta tarefa, Bianca, uma aluna do 2.º ano, revela facilidade em utilizar correctamente as designações «triângulo», «círculo» e «quadrado» e mostra-se familiarizada com tarefas envolvendo sequências. Nas questões 1, 2 e 3 descreve a sequência, referindo as figuras que a compõem, diz que a sequência tem 6 elementos e pinta cada figura da 7.ª à 10.ª posição, de acordo com o padrão indicado.

No entanto, a partir da questão 4, a aluna mostra dificuldade em compreender as perguntas, obrigando a professora a formulá-las de forma diferente. Uma das suas dificuldades parece ter a ver com a terminologia dos ordinais, uma vez que não reconhece o termo «vigésimo». Nota-se que espontaneamente usa os termos ordinais até «sétimo», revertendo depois para termos cardinais:

Entrevistadora: Bianca, qual será o vigésimo elemento desta sequência?
Bianca fica em silêncio e aparenta estar confusa.
Entrevistadora: Se continuares esta sequência e se tivesses que fazer vinte, como achas que vai ser a vigésima pecinha?
Bianca continua em silêncio, morde o lábio e continua com um ar confuso.
Entrevistadora: Esta é a primeira, a segunda. A terceira... Continuando por aqui... Como será a vigésima? Podes fazer como quiseres... Não tens que adivinhar, podes fazer em papel.
Bianca continua em silêncio e está cada vez mais atrapalhada.
Entrevistadora: Estás a perceber o que te estou a pedir?
Bianca acena negativamente com a cabeça e encolhe os ombros.
Entrevistadora: Esta é a primeira pecinha, esta é a segunda, esta é a ...
Bianca (apontando para os elementos seguintes): ... Terceira, quarta, quinta, sexta, sétima, oito, nove, dez.
Entrevistadora: Se continuares a sequência, como será a peça número vinte?
Bianca renitente, simula que vai resolver a situação na folha, como que a pedir autorização para o fazer, e perante um aceno positivo, começa a desenhar no papel a sequência, enquanto conta baixinho até vinte. No vigésimo elemento, pára e aponta para um círculo amarelo.

Nesta sequência, Bianca identifica o padrão pictórico mas não consegue identificar um padrão numérico. Consegue raciocinar na representação pictórica e dizer qual vai ser o termo que se segue a um termo dado. Consegue mesmo identificar o 20.º termo. No entanto, não identifica uma sequência numérica associada a esta que lhe permita responder às questões envolvendo termos distantes e, para isso, necessita de completar a sequência, desenhando todos os elementos.

David, outro aluno do 2.º ano, revela também facilidade em utilizar correctamente as designações «triângulo», «círculo» e «quadrado» e estar familiarizado com o conceito de sequência. Apresenta mais facilidade em compreender o que lhe é pedido e sempre que tem dúvidas, não hesita em fazer perguntas. Para responder à questão 4, conta oralmente os elementos da sequência, indicando que são dez, volta ao primeiro e continua a contar oralmente, tal como mostra a Figura 1 (1.ª tentativa). No entanto, quando é questionado, pensa na sua solução e rapidamente a corrige:

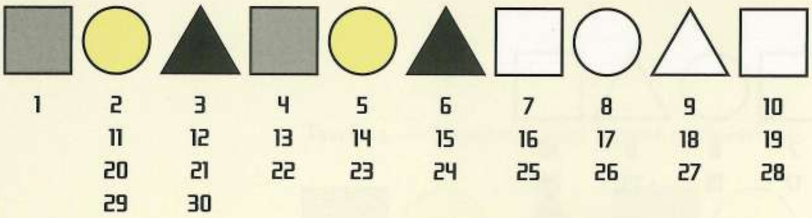


Figura 2. Generalização de David (novamente os numerais não são registados por escrito mas sim indicados oralmente pelo aluno).

David: Vinte! É um quadrado cinzento!
Entrevistadora: Não percebi…
David: Pois… É assim… Pus a sequência na minha cabeça e fiz dez mais dez.
Entrevistadora: Dez mais dez?!?
David: Sim… Dez mais dez é vinte…
Entrevistadora: Sim… E…?
David: Pus duas barras na minha cabeça e o vigésimo… Aaah… Elemento… É o quadrado cinzento!
Entrevistadora: Aaaahhh… Mas… Tenho uma dúvida… Isto é uma sequência, certo?
David: Certo.
Entrevistadora: Então… Mas… Quando voltas aqui ao primeiro elemento, não estragas a sequência… Ao repetires dois quadrados?
David: Ah pois é! Espera, deixa-me pensar… (demora cerca de cinco segundos a testar a sua nova solução)… Vinte! Afinal é o círculo amarelo!
Entrevistadora: Não estou a perceber…
David: Então… É assim… Como assim repetia o quadrado, dou um saltinho para a segunda e continuo… Percebeste? Assim… Queres ver? (exemplifica com o dedo, contando em voz alta, tal como indica a Figura 1).

Quando a seguir lhe é pedido para indicar o trigésimo elemento, David generaliza o padrão que descobriu e faz oralmente contagem, apontando com os dedos, tal como sugere a Figura 2.

Note-se que David não trabalha com uma unidade composta de 3 elementos mas sim com uma unidade composta de 9 elementos. No entanto, mostra ser capaz de estabelecer uma relação entre duas representações, a pictórica e a numérica, e com essa relação consegue responder com facilidade a diversas questões.

Deste modo, ambos os alunos mostram compreender o que são sequências e o respectivo sistema de representação, embora Bianca não conheça os números ordinais a partir de certa ordem. A aluna desenvolve todo o seu raciocínio a partir da representação dada, que usa para construir novos termos da sequência, ficando por isso limitada relativamente às questões que consegue responder. Pelo seu lado, David consegue estabelecer uma relação entre a sequência pictórica dada e uma nova sequência numérica que ele próprio produz oral e gestualmente e com a qual consegue responder a diversas questões sobre termos distantes.

A tarefa 2 é um problema de análise combinatória, enunciada em linguagem verbal, sem indicar qualquer representação matemática pictórica ou simbólica. Para a resolver, os alunos têm que produzir a sua própria representação.

Bianca mostra-se bastante à vontade, e a sua professora confirma que ela já realizou tarefas análogas desde a educação pré-escolar. Para responder à questão 1, começa por colocar as cinco peças de roupa numa só fila, primeiro as três camisolas (que pinta de cores diferentes — rosa, amarelo, verde) e depois os dois calções (que pinta de azul e laranja). De seguida, toma cada camisola como «âncora» e representa por baixo os dois calções, produzindo assim uma possível representação de todos os casos possíveis (figura 3). Faz tudo isto sem precisar de nenhuma ajuda.

Entrevistadora: O que estás a fazer?
Bianca: Aqui vou pôr a roupa toda, primeiro as camisolas e… Os calções. Já está!
Entrevistadora: Então mas estás a desenhar mais calções por baixo das camisolas…?
Bianca: Sim, porque, este é com este, este com este e este com este! (refere-se aos primeiros calções que associa sucessivamente a cada camisola) Agora faltam os outros calções! (refere-se aos segundos calções)

No entanto, a contagem do número de combinações revela-se um problema complicado. Bianca deixa de ter em atenção as combinações de peças de roupa e conta simplesmente os objectos que tinha representado — 3 na primeira coluna, 3 na segunda e 3 na terceira (registo que aparece na parte de baixo da figura 3). Deste modo, perde de vista o significado do que

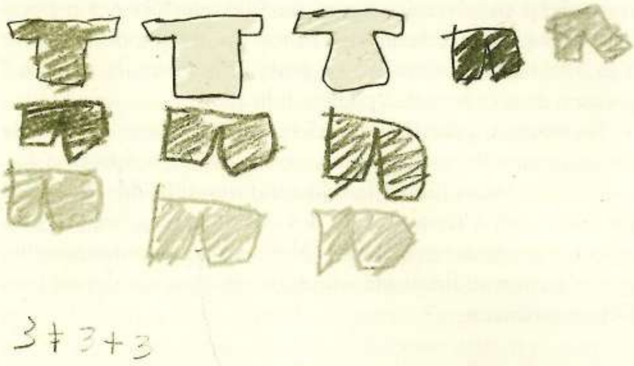


Figura 3. Representação de Bianca na sua resposta à questão 1.

Tarefa 2 — Combinações de roupa

1. A Joana tem três camisolas e dois calções. Quantos dias consegue fazer combinações diferentes?
2. A mãe da Joana comprou-lhe uma saia nova. Quantas combinações a Joana passa a conseguir fazer?

representou. Só com a intervenção da entrevistadora é que a aluna retoma a ideia que tinha que contar, não peças de roupa isoladas, mas as suas diferentes combinações. Em vez de contar directamente os objectos representados na figura, prefere estabelecer uma relação entre estes objectos e os dedos da mão, que constituem um sistema de representação auxiliar, contando a partir deles.

À semelhança da sua colega, David também faz a sua representação numa espécie de tabela, mas pinta todas as combinações, organizando-as dentro de rectângulos (figura 4). Assim, consegue responder mais rapidamente às sucessivas questões que lhe são colocadas pela entrevistadora, limitando-se a acrescentar ou retirar elementos (figura 5).

Entrevistadora: Depois da mãe da Joana lhe comprar a saia, quantas combinações passa a ter a Joana?
David: Isso é fácil... Junta-se as saias... Posso pôr aqui ao lado?
Entrevistadora: Sim... Não há problema...
David: Então... São nove!
Entrevistadora: Ah... Já percebi... Então... Mas sabes... A mãe da Joana é um bocadito desastrada e sem querer, os calções encolheram na máquina e deixaram de servir à Joana... Quantas combinações é que ela tem agora?
David: Três!
Entrevistadora: Ai é?!
David: Sim... Tiras estas que são os calções... E ficas só com estas três que são as saias!

Deste modo, Bianca parece fazer uma representação mais abstracta e mais eficiente — representando os calções por baixo de cada camisola. No entanto, tem muitas dificuldades em distinguir «peças de roupa» e «combinações de peças de roupa». David inicialmente não mostra esse tipo de dificuldade, desenhando cada combinação e respondendo correctamente às duas questões. Ambos os alunos mostram facilidade em gerar as suas representações próprias para o problema proposto, sendo mais sofisticada a de Bianca que a de David. Mas é este aluno quem consegue raciocinar melhor a partir da sua representação. Isto mostra que o facto dos alunos trabalharem com representações próprias não garante sucesso na resolução de um problema. É preciso que eles saibam tirar partido dessas representações e que as saibam relacionar com outras representações matemáticas, como a sequência dos números naturais.

Conclusão

Apesar de Bianca e David serem considerados os melhores alunos da sala e terem já alguma experiência no trabalho com sequências e na resolução de problemas combinatórios, estas tarefas constituíram para eles um grande desafio. Sendo alunos do 2.º ano de escolaridade, têm ainda muitas dificuldades em expressar por escrito o seu raciocínio e mesmo ao nível da ora-

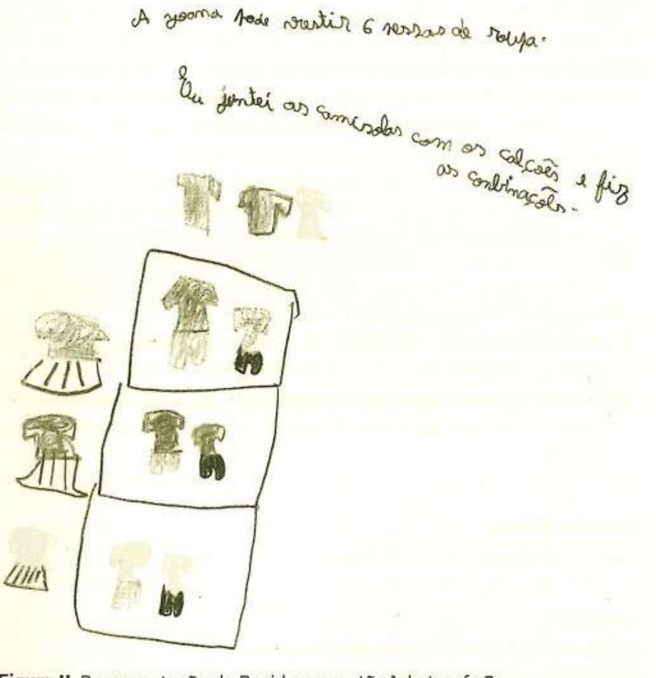


Figura 4. Representação de David na questão 1 da tarefa 3.

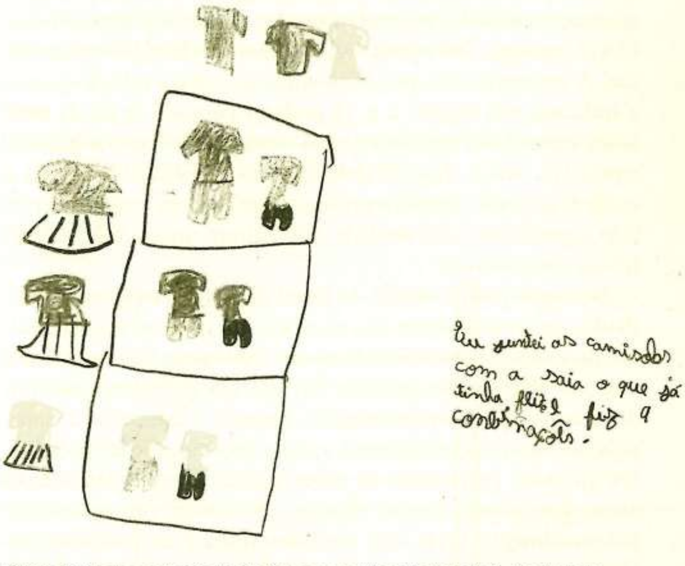


Figura 5. Representação de David na questão 2 da tarefa 3, tendo por base a resposta à questão anterior.

lidade necessitam de alguma ajuda para se fazer entender. Cada vez que são questionados, olham a entrevistadora com alguma desconfiança, tentando perceber se a pergunta é realmente uma dúvida ou um sinal de que estão a dar uma resposta incorrecta.

Na tarefa 1, envolvendo uma sequência pictórica repetitiva, existe à partida uma representação externa dada no enunciado. Ambos os alunos conseguem compreender o sistema de representação, envolvendo diversos tipos de figuras dispostas numa certa ordem, e usam-no para responder às questões mais simples que lhes são propostas.

No entanto, para responder às questões mais complexas, torna-se necessário produzir representações adicionais (internas), que podem ser materializadas externamente de diferentes modos. Bianca não o chega a fazer mas, David usa a sequência dos números naturais para estabelecer uma correspondência com os termos da sequência (primeiro incorrecta, mas depois correctamente), com a qual responde a várias questões.

Na tarefa 2, envolvendo combinações, os alunos têm de gerar uma representação externa apropriada. Na fase inicial da resolução da tarefa, ambos representam os dados (três camisolas e dois calções) através de representações próprias, elementos icónicos, em linha, procurando ligar o problema à realidade. Bianca, embora produza uma representação que teria permitido uma resposta correcta, perde o sentido da ideia de combinação como par de objectos e acaba por contar objectos individuais. Usa um sistema de representação que aprendeu em momentos anteriores, mas mostra não compreender muito bem o que está a fazer. Já David produz um sistema de representação mais explícito, que lhe permite contar directamente os pares de objectos solicitados.

Muitos professores consideram que as representações matemáticas são aprendidas naturalmente pelos alunos sem ser preciso dar-lhes grande atenção. O desempenho de Bianca e David, no entanto, evidencia a complexidade da aprendizagem das representações. A compreensão do padrão visual das sequências pictóricas permite aos dois alunos responder correctamente às questões mais simples da tarefa 1. Para responder a questões mais complexas é necessário gerar uma relação entre as sequências dadas e a sequência dos números naturais, o que David consegue fazer (oral e gestualmente) de modo muito eficaz. A representação pictórica-simbólica desta relação (como a indicada nas figuras 2 e 3) poderia permitir ir ainda mais longe na resposta a questões mais complexas sobre a sequência repetitiva. Além disso, o desempenho de Bianca na tarefa 2 evidencia como certas representações podem parecer terem sido aprendidas e, na verdade, subsistirem muitas dificuldades na sua compreensão.

No nosso país, o estudo do papel das representações no currículo, na aprendizagem dos alunos e nas práticas profissionais dos professores deste nível de ensino está ainda largamente por explorar. Não temos grandes dúvidas que é preciso valorizar diversos tipos de representações, formais e informais e encorajar os alunos a produzirem as suas representações próprias. No entanto, precisamos de saber melhor como lidar com os casos dos alunos, como Bianca, que usam representações potencialmente úteis sem verdadeiramente as compreender. De que modo podemos ajudar os alunos a evoluírem do uso de representações informais para representações mais formais? Enfim, trata-se, de um campo que precisa de atenção, de forma a percebermos melhor o modo de pensar dos alunos e como os podemos ajudar a compreenderem melhor os conceitos e procedimentos matemáticos.

Durante as entrevistas, os alunos mostraram-se sempre disponíveis, interessados e muito motivados. A certa altura tocou para o recreio escolar, mas ambos pediram para voltar mais cedo para terminarem as tarefas. Quando regressaram à sua sala, disseram à professora que as tarefas propostas foram muito difíceis, mas fixes e divertidas. Isto mostra como os alunos deste nível de ensino podem ser sensíveis ao desafio de tarefas matemáticas que achem interessantes. É de registar, ainda, que o entusiasmo dos alunos fez com que o resto da turma ficasse bastante curioso em relação às tarefas propostas, o que, por sua vez, levou a professora a decidir realizá-las no futuro com toda a turma...

Notas

[1] Trabalho realizado no âmbito do Projecto IMLNA — Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra, apoiado pela FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CED/65448/2006). Este artigo tem por base uma comunicação apresentada no seminário de encerramento deste projecto, em 31 de Janeiro de 2011.

[2] Uma discussão aprofundada sobre os diferentes usos do sinal de = encontra-se, por exemplo em Ponte, Branco e Matos (2009).

[3] Tarefa baseada numa situação apresentada em Ponte, Branco e Matos (2009).

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986).Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: D. Reidel. (Tradução de J. M. Varandas, H. Oliveira e J. P. Ponte).

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógio d'Água.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, XVI (2), 81–118.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178–203). New York, NY: Routledge.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. (disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents /ProgramaMatematica.pdf)

Pinto, M. E. (2009). *O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: Um estudo no 1° ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado, Universidade de Évora).

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1° ano. *Quadrante*, 14(1), 37–66.

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Isabel Velez
Agrupamento de Escolas Dr. Azevedo Neves, Amadora
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Ângulos rectos e paralelismo[1]

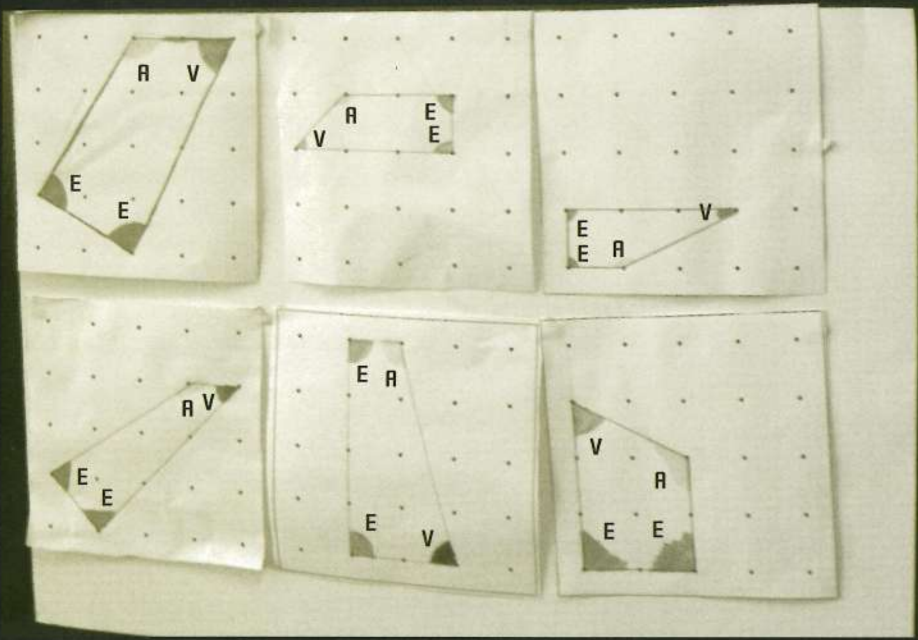


Figura 1

Como é que podemos confirmar rapidamente se duas rectas são ou não paralelas?

Geralmente não damos importância nenhuma a esta questão. Talvez porque a achemos óbvia e consideremos que isso «se vê a olho nu». Será?

Na fotografia (figura 1) estão seis dos quadriláteros desenhados numa actividade realizada numa sala de aula do 4° ano. Cada aluno, individualmente, construiu vários quadriláteros em que tinha de identificar os ângulos: rectos (E), agudos (V), obtusos (A). Os exemplos construídos foram expostos e, em discussão colectiva, organizados em categorias de acordo com critérios propostos pelos alunos. Um dos critérios foi atender ao número de ângulos rectos dos quadriláteros. Na fotografia estão representados elementos da classe dos quadriláteros que têm 2 ângulos rectos, mas no lado esquerdo vemos dois quadriláteros que nos chamam a atenção. Estão marcados 2 ângulos rectos mas as rectas não parecem bem paralelas. E de facto não são porque houve um erro na marcação.

Nas duas figuras, 2 e 3, não há nenhum par de rectas paralelas. Por isso, não pode haver dois ângulos rectos consecutivos, como foram assinalados pelos alunos. Sabemos que se a perpendicular a uma de 2 rectas, traçada por um ponto qualquer dessa recta, também for perpendicular à outra, então as duas rectas são paralelas (figura 4). Esta é uma relação própria da geometria euclidiana.

Talvez alguns de nós ainda se lembrem que este é o fundamento matemático da construção de rectas paralelas com o recurso a régua e esquadro (figura 5). Tenho vindo a concluir que esta relação entre paralelismo e perpendicularidade é muitas vezes desconhecida, bem como a construção de paralelas com régua e esquadro. Neste caso foi um erro dos alunos que nos levou a pensar numa relação bastante esquecida e muito pouco utilizada para verificar o paralelismo de forma directa e simples recorrendo a ângulos e, por isso, à perpendicularidade.

E no geoplano, como posso verificar, sem recorrer a ângulos rectos, se dois segmentos são ou não paralelos?

Nota

[1] Este artigo contínua a série de textos curtos sobre ideias matemáticas importantes, iniciada na revista n.° 108.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

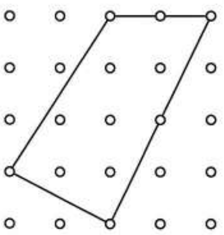


Figura 2

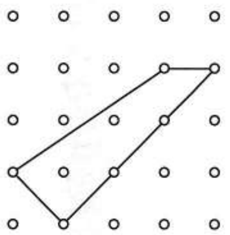


Figura 3

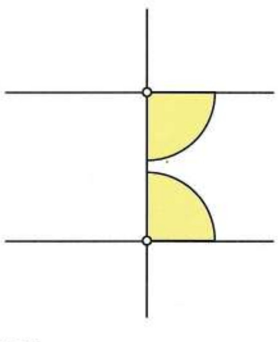


Figura 4

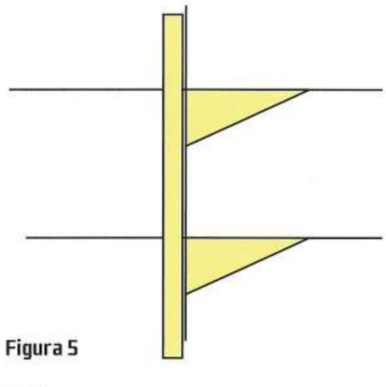


Figura 5

Um número de restos

– Repara neste número tão curioso – disse a Eva para a Francisca. – É formado por cinco algarismos ABCDE e tem as seguintes propriedades:
A é o resto da sua divisão por 6,
B é o resto da sua divisão por 5,
C é o resto da sua divisão por 4,
D é o resto da sua divisão por 3,
E é o resto da sua divisão por 2.
No dia seguinte, a Francisca foi ter com a Eva:
– Olha, descobri outro número com as mesmas características.
Será verdade?

(Respostas até 30 de Setembro para zepaulo@armail.pt)

A COLECÇÃO DE SELOS

O problema proposto no número 111 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:
Fui visitar o Hugo, que me mostrou logo a sua bela colecção de selos. Admirado, perguntei-lhe:
– *Quantos selos tens tu?*
– *Olha, só te posso dizer que é o menor número que é o dobro de um quadrado e o triplo de um cubo.*
Quantos selos tem o Hugo?

Recebemos 18 respostas: Afonso Garcia (Torres Novas), Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Armando Fernandes (Aveiro), Carlos Dinis (Torres Novas), Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Ema Modesto & João Pineda, Eva Mendes (Torres Novas), Florinda Costa (Lisboa), Francisca Canais (Torres Novas), Francisco Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helena Cunha (Viseu), João Sá, Mária e António Almeida, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Rute Subtil (Torres Novas).

Cerca de metade das resoluções usaram a folha de cálculo para encontrar a solução. Eis como a Ema e o João fizeram:
Seja n o número de selos do Hugo.
Sabe-se que n é do tipo $2x^2$ e que também se pode escrever na forma $3y^3$.
Sendo assim, na folha de cálculo fazemos uma coluna com os valores de $2x^2$ e outra com os de $3y^3$. Procuramos o primeiro número que apareça nas duas colunas, obtendo 648 como o número de selos do Hugo.
As restantes resoluções seguiram processos analíticos e alguma dedução. Vale a pena ver os três exemplos seguintes.

Alberto Canelas: O zero não será solução do problema, pois nesse caso não haveria colecção de selos. É evidente que o número pedido terá de ter os factores 2 e 3, quando decomposto em factores primos. Para o número ser o dobro de um quadrado e o triplo de um cubo o factor 2 terá como expoente um múltiplo de três que seja um múltiplo de dois mais um e o factor 3 terá como expoente um múltiplo de dois que seja um múltiplo de três mais um. O número mais baixo nessas condições é:
$2^3 \times 3^4 = 2 \times (2^2 \times 3^4) = 2 \times 18^2 = 3 \times (2^3 \times 3^3) = 3 \times 6^3 = 648$

Edgar Martins: Se $2x^2 = 3y^3$, a decomposição em factores primos de $2x^2$ e $3y^3$ têm de ser iguais. Como procuramos a solução mínima e o primeiro membro já tem um 2 e o segundo um 3 vamos tentar chegar a uma solução apenas com estes dois, não acrescentando mais qualquer primo à solução.
O 2 do segundo membro tem de vir da decomposição em factores de y. Como y está ao cubo e x ao quadrado, basta que x e y tenham um 2 na sua decomposição para ficarmos com três números 2 de cada lado.
Com o 3 já vamos ter um pouco mais de trabalho. Se x tiver apenas um 3, como x está ao quadrado, ficavam dois no primeiro membro e apenas um no segundo. Como y está ao cubo não dá para «acertar». Se x tiver dois números 3 na sua decomposição o primeiro membro fica com quatro e se y tiver mais um, como está ao cubo, o segundo membro também fica com quatro.
$2(2\times3^2)^2 = 3(2\times3)^3 = 648$

Francisco Branco:
$2x^2 = 3y^3$
$x = y \times \sqrt{3y/2}$
Logo, y tem de ser par e $3y/2$ quadrado perfeito.
O menor valor possível para y é 6, ficando $x = 18$. Portanto:
$2 \times 18^2 = 3 \times 6^3 = 648$
Finalmente, o Edgar e o Alberto incluiram generalizações do problema que permitem encontrar todas as soluções e não apenas a menor.

Desenhar estrelas num minuto

Maria Cecília Domingues

Uma das sequências de tarefas que os meus alunos do 3.° ano realizaram no tema *Organização e Tratamento de Dados* começou pela pergunta «Quantas estrelas consegues desenhar num minuto?». Esta sequência permitiu trabalhar em conexão vários conteúdos matemáticos e capacidades transversais, destacando a resolução de problemas, a representação e comunicação matemática.

Lançada a pergunta «Quantas estrelas consegues desenhar num minuto?» apresentei aos alunos as regras para desenhar as estrelas. Podiam usar 4 cores: vermelho, azul, verde e amarelo. Cada estrela era só de uma cor e tinha a forma de um asterisco. Desenhei uma estrela no quadro, para que não houvesse dúvidas. Cada aluno escreveu a esferográfica a previsão do número de estrelas que iria desenhar.

Começou o cronómetro a marcar o tempo... nesta fase todos se empenharam no desenho de estrelas, mudando mais ou menos de lápis de cor, usando estratégias que lhes pareciam mais favoráveis. O André perguntou-me se as estrelas podiam ficar agarradas umas às outras. Como percebi que ele queria dizer muito perto e/ou tocando-se respondi afirmativamente.

Terminado um minuto, ouviram-se comentários que revelavam surpresa: «Já passou um minuto?» «Fiz tão poucas estrelas!» Parece que estavam desanimados com a sua previsão, mas o André disse que tinha conseguido desenhar 40 estrelas, o que nos surpreendeu a todos, mas que o deixou cheio de orgulho. Embora a sua previsão tivesse sido 60, os colegas tinham desenhado muito menos. A partir de certa altura, tinha, como se pode ver no seu trabalho, desenhado um segmento de recta

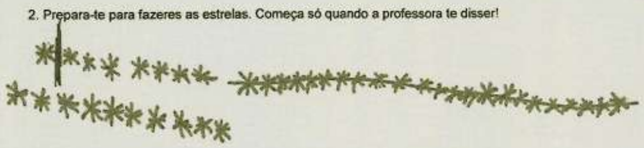


Figura 1. Estrelas do André feitas num minuto

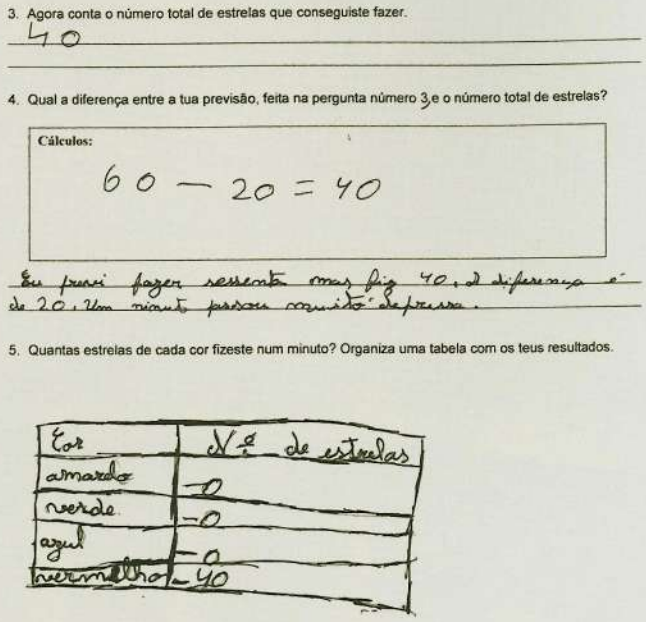


Figura 2. Diferença entre a previsão do número de estrelas e a construção de uma tabela (trabalho do André)

de uma cor e desenhou estrelas muito juntas nesse segmento de recta sem nunca ter mudado de cor (figura 1). Perante esse facto, perguntei-lhe se achava que tinha respeitado as regras. Ele afirmou categoricamente que sim pois tinha-me perguntado se as estrelas podiam ser juntas e eu tinha dito que sim. Aqui estava algo inesperado, no qual não tinha pensado antes da aula e que poderia fazer surgir coisas interessantes.

Depois de desenhadas as estrelas, os alunos calcularam a diferença entre o número previsto de estrelas e o número realizado. Apresentaram os cálculos, escreveram frases a esse propósito e foram discutidos em grande grupo dois ou três casos.

Construção de tabelas e gráficos de barras

Na segunda parte da aula, desafiei os alunos a representar o número de estrelas que tinham feito numa tabela e num gráfico de barras. O empenho continuou, mas algumas dificuldades começaram a surgir.

Tal como tinha previsto na planificação da aula, na construção da tabela não surgiram dificuldades, os meus alunos estão habituados a resolver problemas com recurso à elaboração de tabelas, sempre que esta forma de representação é pertinente. Quando passaram para a construção do gráfico, eu também tinha pensado que seria uma actividade fácil, porque já resolvemos muitos problemas em que é necessário ler e interpretar gráficos de barras e também já tínhamos construído colectivamente alguns gráficos com barras relacionados com rotinas e projectos da turma, mas agora a proposta era diferente: apenas tinham um rectângulo de papel quadriculado vazio, todo o gráfico tinha de ser construído de raiz.

Houve alunos que começaram logo a pintar quadradinhos de barras sem ter escrito o nome dos eixos. Curioso, e algo inesperado para mim, foi ver a dificuldade de bastantes alunos em «dar nome» aos eixos. A Rita pediu ajuda explicando: «Eu sei o que fiz, o que representam os quadrados pintados mas não sei como lhes hei-de chamar.» Como é difícil o uso de linguagem própria! — pensava. Quando se lê um gráfico, talvez se dê pouca relevância às informações verbais escritas, a atenção está demasiado centrada no tamanho das colunas, nas curvas, na distribuição de pontos…

Outra dificuldade que observei na construção do gráfico prendeu-se com a graduação. Como não estavam escritos números em nenhum dos eixos, alguns alunos começaram no 1 em vez de começar no 0. Com perguntas de ajuda que ia fazendo estas dificuldades foram-se resolvendo. A graduação no eixo «Número de estrelas» foi para todos de 1 em 1, pois o número de estrelas de cada cor era inferior ao número de quadrados da folha de trabalho. A excepção foi para o André. Pelo facto de ter desenhado 40 estrelas, o papel quadriculado de que dispunha não lhe permitia desenhar uma barra em que um quadrado representava uma estrela. Tinha de resolver o problema… fê-lo recorrendo a uma sequência numérica de 2 em 2.

A estratégia do André para conseguir fazer muitas estrelas num minuto começou a revelar-se muito interessante. No momento da aula destinado à partilha e discussão, toda a turma teve acesso a uma nova visão de graduar. Um quadrado do papel do André corresponde a 2 estrelas, por isso, precisou de 20 quadrados para representar a barras das 40 estrelas vermelhas. E se cada quadrado representasse 5 estrelas? Novos valores surgiram e o conceito de unidade foi-se consolidando.

As figuras 2 e 3 apresentam o seguimento do trabalho do André.

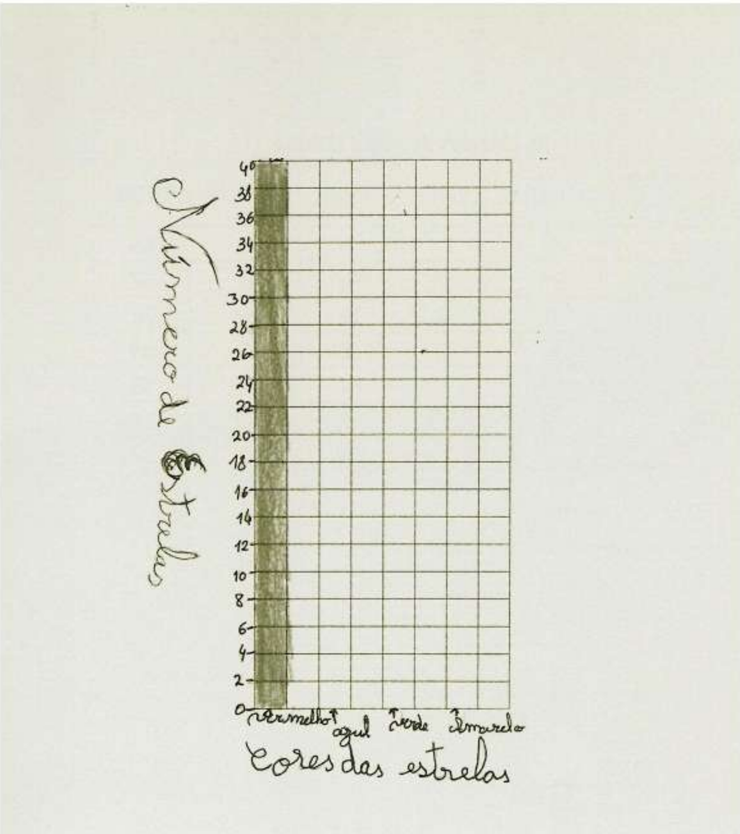


Figura 3. Gráfico do André

Construir textos a partir de gráficos

Numa outra aula de matemática, quis que os meus alunos revisitassem os seus gráficos e construíssem textos a partir deles, como o que fez a Matilde.

> *«O meu gráfico tem três colunas pintadas: uma de vermelho, outra verde e uma azul. Também escrevi amarelo numa coluna mas não pintei nenhum quadradinho porque não usei o amarelo para desenhar estrelas.*
> *Primeiro fiz uma tabela e depois fiz o gráfico. O gráfico tem de começar sempre no número zero e a seguir podemos continuar de 1 em 1, ou de 2 em 2... depende do número que tivermos. Se for grande escrevemos de 5 em 5 ou de 10 em 10. Para fazer um gráfico os quadradinhos têm de estar à mesma distância uns dos outros.*
> *Olhando para os números da minha tabela eu vi que eram todos pares, por isso eu podia escrever os números de 2 em 2 ou de 4 em 4. Mas como os números não eram altos eu escrevi-os de 1 em 1.*
> *O meu gráfico diz quantas estrelas desenhei de cada cor. A partir do meu gráfico pode haver muitas perguntas e respostas interessantes.*
>
> *Matilde»*

Continuando a recolha e organização dos dados

Na aula seguinte, escrevi no quadro a pergunta que os alunos copiaram para uma folha: «Acham que podemos fazer um gráfico com todas as estrelas desenhadas, por todos os alunos da nossa sala?»

Todos deram, por escrito e oralmente, a resposta «Sim.» Perante este consenso geral que me animou envolvi-os no trabalho: «— Pensem um pouco sobre o que vos pedi, podem conversar com o vosso par e, de seguida, cada um escreve um pouco como faria.»
As respostas não foram tão imediatas quanto eu esperava. Eis alguns exemplos:
— «Fazemos de novo as estrelas num minuto e depois contamos as da mesma cor. A seguir fazemos a tabela e depois o gráfico.» Como se vê o Rui repetia todos os passos da aula anterior.
— «Primeiro colamos 4 cartolinas, depois desenhamos um traço para cima direito e depois uma linha. Escrevemos os números no traço que vai para cima e as cores na linha que vai para a direita. Depois pintamos os quadrados da mesma cor com que pintámos as estrelas.» O processo descrito pelo António é curioso. Foi assim que fizemos o primeiro gráfico de barras na sala de aula, a propósito de terras portuguesas visitadas por nós. Mais uma vez confirmo que experiências significativas ficam retidas e prontas a (re)visitar para usar.

A maioria dos alunos escreveu:

> «Juntando as estrelas que são da mesma cor desenhadas por todos nós.» (Ana).

> «Somando todas as estrelas de cada cor que nós fizemos» (Bruno).

> «Primeiro vemos o total de estrelas de cada cor que todos nós fizemos. O número de estrelas ficará num eixo com número de 0 até ao número máximo de estrelas. Como devem ser muitas escrevemos os números de 5 em 5. E assim fazemos o gráfico da turma.» (Hugo)

Como todos partilharam estes e outros processos, eu reforcei o tempo que se demoraria para registar os 21 nomes no quadro com a respectiva tabela para as estrelas de cada cor. Perguntei se não haveria outra maneira de recolher os dados de todos fazendo uma melhor gestão de tempo. Os mais imediatos argumentaram que eles falavam depressa e a professora também escrevia depressa. Tendo-lhes dado mais tempo para pensar noutra forma, fiquei à espera de sugestões. Um aluno disse que o par de cada mesa podia dizer os seus dados de uma só vez e assim só gastávamos metade do tempo para juntar as estrelas. Todos concordaram que seria uma melhor gestão de tempo.
— Não haverá outras sugestões? — continuei a interrogar.
— Claro que há, professora. Se cada par se juntar com o par que está na mesa atrás da sua fazemos grupos de 4 e assim fazemos 5 grupos.
— Mas um grupo tem de ficar com 5 elementos porque nós somos 21. — acrescentou outro colega imediatamente.»

Estrelas desenhadas pelo grupo dos AMIGOS

Alunos \ Cores	Vermelhas	Verdes	Azuis	Amarelas	TOTAL
António	0	2	0	15	**17**
Margarida	9	1	1	0	**11**
Mariana	0	17	0	0	**17**
Hugo	8	7	0	5	**20**
TOTAL	**17**	**27**	**1**	**20**	**65**

Quadro 1. Registo em tabela das estrelas de um grupo

As Estrelas dos GOLFINHOS

Grupos \ Cores	Vermelho	Verde	Azul	Amarelo	TOTAL
Amigos	17	27	1	20	**65**
Magos	24	15	10	8	**57**
Flores	8	2	18	44	**72**
Reis	12	5	29	2	**48**
Sábios	50	6	27	10	**93**
TOTAL	**111**	**55**	**85**	**84**	**335**

Quadro 2. Registo em tabela das estrelas da turma

Estava eleita uma forma rápida e eficaz de recolha de dados. Perguntei como se poderia evitar a escrita dos nomes de todos os alunos na tabela final. A solução foi logo sugerida com a atribuição de um nome a cada grupo (ver exemplo de uma tabela no quadro 1).

Concluído o trabalho de cada grupo, cada porta-voz, designado autonomamente, foi dizendo o que se registou na tabela desenhada no quadro 2 que tem o nome de «Golfinhos» — nome pelo qual é conhecida a turma desde o 1° ano.

Em primeiro lugar foram verificadas as somas na horizontal e na vertical. Ainda durante a sua confirmação já havia alunos a constatar que os números no eixo onde estivesse o número de estrelas não poderiam ser de 1 em 1 porque os números eram muito elevados em relação ao número de quadradinhos desenhados na folha. Contados os espaços de uma coluna e observados os números houve logo sugestões justificadas pelos múltiplos de...

A opção pelos números pares sugerida foi eliminada porque o número de quadrados da coluna era insuficiente. O mesmo acontecia com os múltiplos de 5. Deste modo, foi fácil chegar à conclusão que poderíamos escrever os números de 10 em 10 pois seria possível encontrar o meio para colocar o 55 e 85. Para o 84 teríamos de pintar um bocadinho a menos do que 85 e para o 111 um bocadinho a mais do que 110. Não seria muito rigoroso e para que não houvesse dúvidas, registava-se o número por cima de cada coluna pintada.

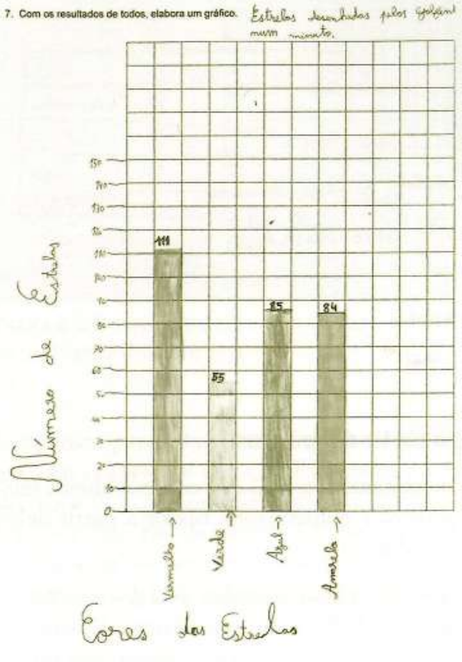
Após esta discussão muito participada, cada aluno elaborou o seu gráfico com todas as ESTRELAS desenhadas por todos os alunos da turma. Desta vez autonomamente e por sua iniciativa cada aluno escreveu as legendas e preencheu, sem hesitação, os eixos horizontal e vertical do gráfico. Só depois é que pintaram as barras com as cores correspondentes.

Como exemplo apresenta-se o gráfico elaborado pelo César (figura 4).

As dificuldades surgidas durante a elaboração do primeiro estavam nitidamente superadas. Que melhor indicador de aprendizagem poderá existir? Que reflexos poderá haver na exploração de outros gráficos?

Em aulas seguintes, mas não seguidas, foram propostas várias actividades aos alunos que implicavam observação e interpretação de gráficos, esquemas... Foi gratificante constatar o gosto e a facilidade com que a grande maioria dos alunos aderia e executava as tarefas correctamente.

O facto de o André ter desenhado muitas estrelas num minuto foi muito significativo para o desenvolvimento da actividade. Revelou-se importantíssimo na elaboração do gráfico



Nota: (Golfinhos) é o nome do (grupo - turma).

Figura 4. Gráfico das estrelas da turma

pois na turma foi o único aluno que teve de recorrer a uma sequência numérica diferente da dos colegas já que o número de estrelas de uma cor era superior ao número de quadrados do gráfico apresentado.

Surpreenderam-me os pedidos de ajuda para definir e legendar os eixos do gráfico individual de estrelas. Como é importante construir gráficos de raiz! Este grupo de alunos já tinha construído gráficos a nível de grupo e/ou de turma. Mas a verdade é que as orientações já estavam estabelecidas. Fazer é muito mais formativo do que completar.

Em contexto de sala de aula, a comunicação de resultados e de processos é uma constante que proporciona sempre desafios, pensamento divergente, novas perspectivas, aprendizagens significativas. Se a professora se esquece há sempre um aluno a lembrar e a reclamar esse momento. Esta prática predominante na matemática estende-se às outras áreas curriculares, proporcionando experiências gratificantes, interacções profícuas e resultados significativamente positivos.

Maria Cecília Domingues
EB1/JI Luz Carnide – Agrupamento S. Vicente Telheiras

João Pedro da Ponte. Professor Catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa foi eleito no decorrer do CERME 7 (*Seventh European Conference on Research in Mathematics Education*), no passado mês de Fevereiro em Rzeszów (Polónia), para a direcção da *European Society for Research in Mathematics Education* (ERME).

É uma das pessoas que está na base da criação da APM, de que é sócio fundador e onde integra o Grupo de Trabalho de Investigação — GTI. Tem colaborado ainda em muitas outras actividades, integrando grupos como o T^3 ou comissões organizadoras de ProfMats e desempenhando funções na *Educação e Matemática* como editor convidado. Ao longo dos anos assumiu sempre uma postura activa e interventiva, que muito tem contribuído para a discussão de ideias no seio da nossa associação.

A *Educação e Matemática* (EM) convidou João Pedro da Ponte (JP) para uma conversa conduzida por Helena Rocha sobre as funções que passou a assumir, pedindo-lhe que nos dê a conhecer um pouco melhor esta organização, os seus contributos para a investigação em Educação Matemática a nível europeu e o papel de Portugal na ERME e na investigação europeia. Agradecemos-lhe a disponibilidade e a amabilidade com que aceitou o nosso desafio, com a certeza que o seu contributo promoverá um envolvimento ainda maior de mais investigadores portugueses e o desenvolvimento da Educação Matemática em Portugal.

EM: João Pedro, quais são as principais actividades promovidas pela *European Society for Research in Mathematics Education (ERME)*?

JP: Esta organização pretende estabelecer a comunicação e o diálogo entre investigadores de educação matemática de países europeus e realiza principalmente duas actividades: um congresso de dois em dois anos (CERME) e uma escola de verão para doutorandos e recém-doutores, também de dois em dois anos. Além disso, tem um sítio www que disponibiliza informações úteis aos investigadores. Apesar de ser uma organização europeia, nas suas actividades participam activamente investigadores oriundos de outros continentes.

O CERME é um encontro com características muito especiais. Tem sessões plenárias e apresentação de posters, como muitos outros, mas, ao contrário da maioria dos congressos, em que o participante se defronta com um programa onde se salta de sessão em sessão, correndo por vezes o risco de se perder, aqui trabalha-se em grupos temáticos durante toda a semana. Deste modo, fica com uma visão global muito actualizada da investigação que se está a realizar nessa área temática, ao mesmo tempo que tem a oportunidade de apresentar o seu trabalho às pessoas com interesses muito próximos. Existe uma grande variedade de grupos temáticos, pelo que a dificuldade é sobretudo escolher aquele que mais nos interessa.

Além disso, as comunicações são submetidas com bastante antecedência, recebendo *feedbacks* de vários membros do mesmo grupo temático, o que ajuda muitíssimo na sua elaboração. Este processo de revisão de comunicações, embora trabalhoso para os dinamizadores dos grupos, tem uma lógica muito construtiva, e é muito apreciado pelos participantes.

EM: O que torna a ERME especial relativamente a outras organizações na área?

JP: Para além do carácter especial dos encontros, baseado em grupos temáticos, como referi, um aspecto muito importante, é o facto de se tratar de uma organização europeia. Existem outras organizações de âmbito internacional, como o PME (*International Group for the Psychology of Mathematics Education*) e o ICMI (*International Commission of Mathematics Instruction*), mas são de âmbito mundial. Para nós, portugueses, como para outros investigadores europeus, é muito importante termos uma organização europeia, possibilitando o contacto frequente com os que nos estão mais próximos, dando um melhor conhecimento sobre o trabalho que se vai fazendo nos outros países, criando oportunidades para trabalho de investigação em conjunto com recurso a financiamentos europeus, etc.

EM: O que significa para ti esta eleição e quais as funções que lhe estão inerentes?

JP: Já no passado participei como tutor de um grupo de doutorandos em diversas escolas de verão e achei um trabalho muito interessante. No próximo ano, 2012, somos nós que iremos organizar a escola de verão do ERME. Uma vez que a anterior coordenadora desta actividade que integrava a direcção cessou as suas funções era necessário alguém que a substituísse. Deste modo, decidi aceitar a minha candidatura para a direcção, especialmente orientada para intervenção nessa importante área de actividade do ERME.

EM: Na tua proposta de candidatura referes diferenças ao nível da representação de diferentes países europeus e expressas o teu empenho na sua minimização. Que assimetrias identificas na investigação em Educação Matemática nos diferentes países europeus?

JP: As assimetrias são muitas. Existem países, como a Alemanha, a França, o Reino Unido e os países nórdicos, que têm uma actividade científica muito intensa, com grupos de investigação muito activos, bem integrados institucionalmente e com bom acesso a financiamento. Neste grupo entra também Israel que, não sendo geograficamente europeu, tem uma comunidade científica em educação matemática muito forte que participa activamente nos encontros do ERME. Existem outros países

onde a actividade é reduzida e feita em condições precárias, como é o caso de muitos países de leste. Por fim, existem países em situação intermédia, com um ou dois grupos de investigação fortes, como é o caso da Holanda (no Instituto Freudhental), da Bélgica (Center for Instructional Psychology and Technology de Louvaina), da Grécia (Universidades de Atenas e Salónica) e Chipre (Universidade de Nicósia), e países que, como a Itália ou a Espanha, têm numerosos grupos de investigação, mas têm igualmente problemas institucionais muito complicados. Na minha perspectiva, Portugal está neste grupo intermédio.

EM: Como comentarias a investigação que presentemente se faz em Portugal comparativamente ao contexto europeu tendo por referência a ERME?

JP: A investigação que se faz em Portugal é reconhecida como de boa qualidade pelos investigadores dos outros países europeus, mas, dada a nossa dimensão circunscreve-se a um número reduzido de grupos e aborda apenas um conjunto limitado de áreas temáticas (conhecimento profissional, práticas profissionais e formação de professores, números e operações, álgebra, uso das tecnologias no ensino, história do ensino da Matemática e pouco mais). Temos já um núcleo significativo de investigadores doutorados, mas a capacidade de produção científica — com a realização de projectos e a consequente disseminação de resultados através de artigos em revistas científicas — tem ainda muita margem para se intensificar. Em termos institucionais penso que não estamos mal, principalmente nas Universidades de Lisboa, Minho e Aveiro, em que os grupos de investigação têm um espaço importante, e em muitas escolas superiores de educação, onde existem também grupos muito fortes. O principal senão é a ausência de uma cultura de investigação na rede do ensino politécnico e um acesso precário a financiamento dos projectos de investigação.

Um dos pontos mais fortes da investigação que se faz em Portugal é a forte ligação com o campo profissional, havendo muitos projectos que envolvem equipas colaborativas de professores e investigadores, e uma forte presença de professores nos encontros de investigação e de investigadores em encontros de professores, bem como uma grande facilidade de comunicação entre os dois campos. Esta proximidade torna os investigadores particularmente sensíveis às preocupações e necessidades dos profissionais e ajuda-os a realizar investigação mais relevante. Por outro lado, ajuda, também à integração dos resultados da investigação no terreno da prática profissional.

EM: Como vês os jovens investigadores na ERME e como é que achas que a ERME os vê ou devia ver a eles?

JP: A ERME dá uma atenção especial à formação dos jovens investigadores, organizando a escola de verão. Nos seus congressos regulares dá também uma atenção especial a este grupo, dedicando-lhes um dia com *workshops* e sessões de discussão — o *YERME Day*. Existe uma cultura de valorização dos jovens investigadores, o que, a meu ver, facilita a sua rápida integração na comunidade científica. O número de doutorandos portugueses que tem participado na escola de verão e no *YERME Day* é dos mais altos de toda a Europa, o que mostra bem o interesse que estas actividades têm suscitado entre nós.

EM: Existe algum projecto ou ambição que tenhas para este teu mandato e que queiras partilhar connosco?

JP: A minha ligação com o ERME vem desde o início, pois integrei o grupo fundador e também o grupo que delineou os congressos CERME desde o seu inicio. Dirigi até a assembleia-geral no CERME II, onde foram formalmente aprovados os estatutos do ERME, o que na altura não foi nada simples, dadas algumas rivalidades de afirmação nacional. Mas no fim tudo correu bem, os estatutos foram aprovados, e o ERME seguiu em frente. A minha ambição, nesta fase, é que o CERME e a escola de verão se consolidem como actividades regulares de intercâmbio científico e de formação de novos investigadores. Penso que estas actividades já estão a cumprir muito bem o seu papel e não serão necessárias mudanças muito drásticas. Espero, por outro lado, que os grupos de investigação portugueses possam integrar-se de modo ainda mais profundo nas actividades desta organização, para benefício geral, e também deles próprios.

EM: O que responderias àquela questão que não formulámos, mas que seria imperdoável não integrar esta entrevista?

JP: O mais importante sobre o ERME, penso que já ficou dito, só acrescentar que o próximo CERME será na Turquia, em Fevereiro de 2013, e que a próxima escola de verão será já no próximo ano, em Agosto, em Faro. Espero que os investigadores portugueses continuem a marcar uma forte presença, com trabalhos de investigação cada vez mais consistentes e aprofundados, dando contributos para a compreensão dos problemas, a aprendendo também com as experiências e dificuldades alheias.

Entrevista conduzida por Helena Rocha

EIEM Póvoa de Varzim

E lá fomos nós, «de fim-de-semana», à Póvoa de Varzim. Desta feita não para utilizar a Matemática, nas suas mais diversas vertentes, componentes, dimensões e perspectivas no Casino, mas para discutir e reflectir sobre alguns aspectos relacionados com o *Ensino e Aprendizagem da Álgebra* nos vários níveis de escolaridade — do Básico ao Superior. Decorreu, portanto, mais um Encontro de Investigação em Educação Matemática. Estas discussões e reflexões, originadas pela partilha de resultados de trabalhos de investigação realizaram-se em três grupos de trabalho abordando temáticas diversas, onde a Álgebra era o denominador comum. Todos tinham como objectivos partilhar e perspectivar futuras investigações, encontrar desafios e rumos novos e, por via destes, contribuir, de alguma forma, para um reequacionar o processo de ensino-aprendizagem deste Tema.

Um destes grupos, dinamizado por Joana Brocardo e António Domingos, teve como tópico a Tecnologia e a avaliação do ensino-aprendizagem da Álgebra, onde foram apresentadas seis comunicações que se focaram no professor, nos alunos ou na avaliação. Em forma de síntese, das comunicações apresentadas salientaram-se as potencialidades da tecnologia e a necessidade da sua apropriação por parte do professor com o objectivo de potenciar o desenvolvimento de um efectivo conhecimento algébrico, atribuindo um papel mais activo ao aluno nas suas aprendizagens — efectuando um *uso adequado* dessas tecnologias. É de salientar a expectativa, não cumprida, de que pudessem ter sido dadas a conhecer investigações associadas à utilização de *outras tecnologias* consideradas emergentes (outras que não as já conhecidas calculadoras e o *Moodle* ou o *Geogebra*).

Um outro grupo, dinamizado por João Pedro da Ponte e Maria Helena Martinho, teve como tema aglomerador as *Representações no ensino-aprendizagem da Álgebra* e contou com sete comunicações, cujas discussões e reflexões se centraram, fundamentalmente, em torno de tipos de representações (formais, informais e múltiplas), sua valorização e papel; do sentido do símbolo (pontos fracos e fortes e como podemos, todos nós professores, contribuir para o seu desenvolvimento) e das concepções e práticas de professores.

Um terceiro grupo que tinha como tema central a *Gestão curricular no ensino-aprendizagem da Álgebra* foi dinamizado por Isabel Vale e Rosa Antónia Tomás Ferreira. Nesse grupo foram apresentadas sete comunicações que, dentro dessa gestão curricular, estiveram associadas à aprendizagem, à formação de professores e ao papel dessa gestão no Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB). Relativamente à aprendizagem, a discussão centrou-se no papel dos contextos (não) visuais no/para o desenvolvimento de capacidades transversais, com enfoque no pensamento algébrico; quanto ao bloco relativo à formação de professores, a discussão centrou-se no papel proble-

mático da herança da escolarização (abordagem essencialmente numérica e procedimental), na delimitação dos termos *pensamento e raciocínio algébrico* e nas dificuldades centrais na formação de professores. No que concerne à gestão curricular no PMEB, discutiram-se aspectos relativos a dificuldades e sucessos na aprendizagem bem como potencialidades e fragilidades do recurso a determinados modelos.

Um dos (muitos) pontos de discussão comum aos três grupos de trabalho (Tecnologia e a avaliação; Representações e Gestão curricular no ensino-aprendizagem da Álgebra) revelou-se, por exemplo, o papel da utilização de várias representações para o desenvolvimento de uma maior compreensão dos conceitos; a dificuldade em flexibilizar uma navegação frutífera entre essas representações que permita e promova um tal desenvolvimento, sendo um desafio que os professores as vão integrando progressivamente na sua prática (também com recurso às tecnologias).

Para além dos trabalhos discutidos no âmbito dos grupos, foi ainda possível, durante este fim-de-semana participar em três momentos de trabalho plenário. Aqui, tivemos a possibilidade de ouvir, logo de entrada, Teresa Pimentel (ESE Viana do Castelo) discutir alguns aspectos relativos à influência de um programa de formação contínua no conhecimento e pensamento algébrico de professores do 1.º Ciclo, colocando a ênfase na importância da relação dialógica entre o desenvolvimento do sentido do número e o cálculo mental na/para a descoberta de padrões e da generalização como processos matemáticos, encarando-os como desencadeadores primordiais do pensamento algébrico nos primeiros anos. Ainda, nesse primeiro dia, antes da assembleia geral da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM), Marta Molina, da Universidade de Granada, com base numa investigação com alunos de 8–9 anos, abordou o pensamento relacional, o modo como este se torna (poderá tornar) explícito ao serem trabalhadas expressões aritméticas e algébricas, bem como este se relaciona com outras dimensões do pensamento/raciocínio matemático. No último dia, e antes da sessão de encerramento, João Pedro da Ponte e Hélia Oliveira (Instituto de Educação, Universidade de Lisboa) apresentaram uma análise transversal aos estudos efectuados na Universidade de Lisboa sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra, identificando e problematizando alguns dos aspectos associados a esses trabalhos, formulando, a partir destes, o que consideram ser algumas possíveis orientações para trabalhos futuros no campo da investigação, do desenvolvimento curricular e da formação de professores.

Do que me foi possível discutir com outros participantes no Encontro, fica a certeza de que as discussões e reflexões foram efectivamente frutíferas, potenciando um processo evolutivo na(s) forma(s)/perspectiva(s) de encarar a Álgebra e o(s) seu(s) processo(s) de ensino-aprendizagem — com *tudo* o que se lhe encontra associado e de *todas* as diversas perspectivas. É de realçar que a germinação destas sementes que se vão colocando é tanto mais potenciada quanto o papel activo assumido por cada um de nós. Cumpre-me, portanto, e num sinal de agradecimento que me parece comum a todos quantos tivemos a oportunidade de ir de «fim-de-semana», à Póvoa de Varzim (mas não para ir ao Casino), uma última palavra para referir o trabalho dos elementos da organização e dinamizadores que, pelo seu (des)empenho contribuíram para levar a bom porto os objectivos inicialmente definidos, e que em muito «dificultará a vida» à organização do próximo EIEM — para, pelo menos, a igualar. Mas tenho também de me dirigir aos revisores que, pelos seus comentários efectivamente construtivos (algo que nos cumpre continuar a desenvolver e promover), conduziram, conjuntamente, a uma mais profícua discussão e melhoria dos textos apresentados.

Em jeito de conclusão, e penso que todos estarão de acordo, apraz-me referir que, pela qualidade das discussões e reflexões ocorridas durante este Encontro de Investigação, explanadas nos textos apresentados, perspectivam-se bons augúrios para a investigação futura no âmbito do ensino e aprendizagem da Álgebra.

Carlos Miguel Ribeiro
CIEO, Universidade do Algarve

A Álgebra «dos» sapos

Ana Caseiro

Quando procurava uma tarefa de álgebra para colocar aos meus alunos da formação inicial de professores lembrei-me de uma que já tinha realizado com alunos de 1° ciclo e que poderia ser também realizada por estes alunos. A tarefa consistia em descobrir qual o menor número de movimentos necessários para trocar as posições de dois sapos e duas rãs entre si:

Dois sapos e duas rãs precisam atravessar um lago e têm cinco pedrinhas para não ter de mergulhar na água fria.

Podem avançar para a pedra seguinte (que tem de estar vaga) ou saltar por cima de um animal de outro género, nunca podendo voltar para trás.

Aos alunos da formação inicial foi acrescentada uma questão que consistia na descoberta de uma expressão geral de modo a chegar a descobrir o menor número de movimentos possível, independentemente do número de sapos e rãs, sendo que primeiro foi solicitado que fizessem a investigação com número igual de sapos e rãs, e posteriormente foi alargada para qualquer número de sapos e qualquer número de rãs, devendo os alunos chegar a uma expressão geral, como eles referiram «a uma fórmula das fórmulas».

Par	Apresentação das sequências		Generalização consoante a diferença entre o número de sapos e o número de rãs				
	Correctas	Incorrectas	Diferença de 0	Diferença de 1	Diferença de 2	Diferença de 3	Diferença de k
1			✓	✓	✓	✓	×
2	✓		✓	✓			
3			✓	✓	✓		
4	✓		✓	✓	✓		
5			✓	✓			
6			✓	✓			
7	✓		✓	✓			
8			✓	✓	✓	✓	✓
9	✓	✓	✓				
10	✓		×	✓			
11	✓		✓	✓	✓		✓
12	✓		✓	✓			
13	✓		✓	✓			
14			✓	✓			
15	✓		✓	✓			

Tabela 1. Avaliação das descobertas dos alunos

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	63

Tabela 2. Número mínimo de movimentos

No 1º ciclo a tarefa foi realizada por alunos do 3º ano de escolaridade, sendo que desde o início se mostrou uma tarefa motivante para eles. A proposta foi feita para ser realizada a pares de modo a se conseguirem ajudar, tendo sido a comunicação fulcral nesta resolução.

Os alunos resolveram a tarefa recorrendo a material manipulável, tendo simulado os sapos e rãs, assim como as pedrinhas, o que facilitou a sua compreensão e a resolução da mesma. A competição «saudável» também foi um factor importante na resolução desta tarefa onde cada par tentava resolvê-la utilizando menos movimentos do que os restantes colegas.

Quanto à formação inicial, a tarefa foi realizada numa turma do 3º ano (32 alunos) da licenciatura em Educação Básica, aquando das últimas aulas da Unidade Curricular (UC) de «Lógica e Padrões», uma UC de 28 horas. Os alunos tiveram uma aula (duas horas) para resolver a tarefa a pares (dois grupos foram constituídos por 3 elementos), sendo que no final da aula a teriam de entregar para eu ver até onde conseguiram chegar na sua investigação.

Depois de analisar as respostas dos alunos, preenchi a tabela 1, onde os vistos (✓) representam respostas correctas dadas pelos alunos, as cruzes (×) respostas erradas dadas pelos alunos, e os espaços em branco a falta de respostas dadas pelos alunos.

Através da análise da tabela verifica-se que apenas três pares conseguiram concluir a tarefa, sendo que apenas dois a concluíram acertadamente. Verifica-se, também, que a maioria dos grupos apenas conseguiu chegar à generalização nas situações em que o número de sapos e de rãs é igual, e nas situações em que o número de sapos e de rãs difere apenas num valor.

Na discussão da primeira questão da tarefa, igual número de animais de cada lado do lago, foi explorado um processo mais formal de generalização (tabela 2).

Com os valores obtidos foi possível calcular as diferenças entre os mesmos, tendo chegado à seguinte conclusão utilizando o método das diferenças finitas:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 3 & & 8 & & 15 & & 24 & & 35 & & 48 & & 63 \\ & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13 & & 15 & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

Através da análise deste esquema apercebemo-nos que a segunda diferença entre os diversos números mínimos de movimentos é sempre constante: 2.

Pegando, então, na fórmula das diferenças finitas, temos que:

$$\begin{array}{ccc} \text{Termos} & 1^{a} \text{ diferença} & 2^{a} \text{ diferença} \\ \left\{\begin{array}{l} a+b+c \\ 4a+2b+c \\ 9a+3b+c \end{array}\right. & \begin{array}{c} 3a+b \\ 5a+b \end{array} & 2a \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} an^2+bn+c \\ a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \end{array}}$$

Assim sendo aplicando a fórmula anterior aos nossos valores temos:

$$\left\{\begin{array}{l} 2a=2 \\ 3a+b=5 \\ a+b+c=3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=2 \\ c=0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} n^2+2n=n(n+2) \\ n \text{ — número de animais de cada lado} \end{array}}$$

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1 - 2	5
2 - 3	11
3 - 4	19
4 - 5	29
5 - 6	41
6 - 7	55
7 - 8	71

Tabela 3. Número mínimo de movimentos

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1 - 3	7
2 - 4	14
3 - 5	23
4 - 6	34
5 - 7	47

Tabela 4. Número mínimo de movimentos

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1 - 4	9
2 - 5	17
3 - 6	27
4 - 7	39
5 - 8	53

Tabela 5. Número mínimo de movimentos

Aquando do seguimento da tarefa (número diferente de sapos e rãs) surgiu o seguinte processo de resolução (tabela 3).

Ao olharmos para estes valores calculámos as diferenças entre os mesmos, tendo chegado à seguinte conclusão:

5 11 19 29 41 55 71
6 8 10 12 14 16
2 2 2 2 2

Através da análise deste esquema apercebemo-nos que a segunda diferença entre os diversos números mínimos de movimentos é sempre constante: 2.

Utilizando, novamente, a fórmula das diferenças finitas, quando a segunda diferença é constante temos que:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 6 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$n^2 + 3n + 1$
n — número de animais do lado onde há menos

De seguida resolvemos realizar da mesma forma a actividade, mas com a variante da diferença entre o número de animais dos dois lados ir aumentando.

Começámos por realizar as actividades por tentativas, construindo desse modo as seguintes tabelas e chegando às respectivas expressões gerais através do método das diferenças finitas:

1. Diferença entre o número de animais dos dois lados: 2 (tabela 4). Assim, temos que:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 7 \\ a + b + c = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

$n^2 + 4n + 2$
n — número de animais do lado onde há menos

2. Diferença entre o número de animais dos dois lados: 3 (tabela 5). Assim, temos que:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 8 \\ a + b + c = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

$n^2 + 5n + 3$
n — número de animais do lado onde há menos

Ao analisarmos as expressões gerais obtidas verificamos que existem algumas semelhanças entre as mesmas, o que talvez possibilite a construção de uma expressão geral para determinar as expressões gerais do número mínimo de movimentos a realizar:

$n^2 + 2n$	$n^2 + 3n + 1$
Igual número de animais nos dois lados	Diferença entre o número de animais nos dois lados: 1
$n^2 + 4n + 2$	$n^2 + 5n + 3$
Diferença entre o número de animais nos dois lados: 2	Diferença entre o número de animais nos dois lados: 3

Através da visualização pormenorizada das expressões gerais obtidas verificamos que:

- Todas as fórmulas se iniciam por n^2 (tal facto tem razão de ser, já que na descoberta das expressões verificámos que é sempre a segunda diferença entre os valores obtidos que é constante, sendo sempre 2.
- O valor que é multiplicado por «n» representa a diferença entre o número de sapos dos dois lados somada a 2 (ex.: quando a diferença entre o número de sapos é 1 vai ser 1 + 2 ou seja 3, tal como se verifica na expressão).
- O valor que se vai somar à expressão que estamos a obter é sempre o valor da diferença entre o número de sapos dos

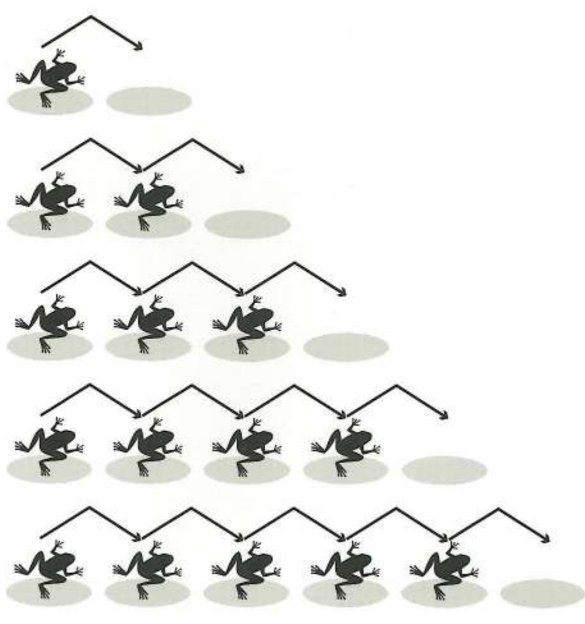


Figura 1

dois lados (ex.: quando a diferença entre o número de sapos é 2 vai ser 2, tal como se verifica na expressão).

Assim, podemos representar as conjecturas retiradas anteriormente do seguinte modo:

$$n^2(k + 2)n + k$$
sendo k o valor da diferença entre o número de animais dos dois lados e n o número do lado com menor quantidade

De seguida, e para verificar se a expressão encontrada funciona em mais algumas situações, vou realizar o mesmo raciocínio (ir acrescentando sapos), mas somente a um dos lados, pois vou considerar o outro sem sapos (figura 1).

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
0 - 1	1
0 - 2	2
0 - 3	3
0 - 4	4
0 - 5	5

Aplicando a expressão:

$$n^2(k + 2)n + k$$
sendo k o valor da diferença entre o número de animais dos dois lados e n o número do lado com menor quantidade

Para 0 – 1 sapo:

$$0^2 + (1 + 2) \times 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

Para 0 – 2 sapos:

$$0^2 + (2 + 2) \times 0 + 2 = 0 + 0 + 2 = 2$$

Para 0 – 3 sapos:

$$0^2 + (3 + 2) \times 0 + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$$

Para 0 – 4 sapos:

$$0^2 + (4 + 2) \times 0 + 4 = 0 + 0 + 4 = 4$$

Para 0 – 5 sapos:

$$0^2 + (5 + 2) \times 0 + 5 = 0 + 0 + 5 = 5$$

Assim, podemos verificar que também nestes casos a expressão encontrada para determinar as expressões gerais do número mínimo de movimentos a realizar se encontra correcta.

Deste modo é possível conjecturar que a expressão obtida é válida para qualquer número de animais a deslocar.

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

A Matemática nos Primeiros Anos
XIV Encontro Nacional

Nos dias 15 e 16 de Abril, realizou-se, na Escola Superior de Tecnologia em Viseu, mais um encontro Nacional de Professores, dedicado ao ensino e aprendizagem da Matemática nos primeiros anos — pré, 1.º e 2.º ciclos. Este encontro anualmente promovido pela Associação de Professores de Matemática foi, este ano, organizado pela primeira vez, pelos dois grupos de trabalho — GT1 e GT2 e o seu programa refletiu, no geral, as preocupações decorrentes do início da generalização do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

Inscreveram-se neste Encontro 166 professores de todos os níveis e graus de ensino, desde o pré-escolar (19) até ao Ensino Superior Politécnico (16), sendo a maioria professores do 1.º ciclo (70), mas também muitos professores do 2.º ciclo (50) e até do 3.º ciclo e secundário (11). De notar que cerca de 42% dos inscritos eram professores do 1.º ciclo enquanto que cerca de 30% eram professores do 2.ºciclo. De uma forma geral o elevado número de professores deste ciclo, veio trazer contributos interessantes aos debates existentes nas diferentes sessões de trabalhos.

Após a sessão de abertura, na qual a Presidente da Direcção realçou a passagem do 25.º ano da APM e convidou os presentes a participarem no próximo ProfMat que se realizará em Lisboa, teve lugar a Conferência Plenária *Processos de Experimentação, Práticas de Ensino e Avaliação e Participação dos Alunos no Contexto do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico*, proferida por Domingos Fernandes, coordenador de uma equipa de trabalho constituída para avaliar os processos de experimentação e implementação do Novo Programa. Esta equipa realizou dois estudos, um sobre o processo de experimentação, feito com os 40 professores experimentadores e outro sobre o processo de implementação feito com dois professores do 1.º ciclo e dois do 2.º ciclo. Este segundo estudo foi realizado dentro da sala de aula focando práticas de ensino e práticas de avaliação articuladas com as práticas de ensino. Sobre os dois estudos há relatórios escritos que infelizmente (ainda) não estão disponíveis para os interessados.

Para além da Conferência Plenária existiram três outros tipos de sessões, Conferências Temáticas [CT], Sessões Práticas [SP] e Fórum. Realizaram-se cinco CT em simultâneo, ainda na manhã do primeiro dia e outras cinco na tarde do segundo dia podendo assim, cada participante assistir a duas das dez conferências temáticas realizadas. Os temas dessas conferências versaram, fundamentalmente, aspectos novos ou críticos do NP. Em relação às SP, para as quais era necessário efetuar inscrição prévia, realizaram-se sete, em simultâneo, na tarde do primeiro dia e outras sete na manhã do segundo dia. Os temas destas catorze sessões práticas incluíram temas matemáticos e capacidades transversais do NP tais como Geometria, Sentido do Número, OTD, Álgebra, Jogos, Cálculo Mental, Resolução de Problemas, Comunicação Matemática, entre outros. As sessões em que houve maior número de inscritos foram, fundamentalmente, as que trataram de novos temas matemáticos, como por exemplo os Diferentes Significados das Fracções, Cálculo Mental, Álgebra nos Primeiros Anos, Simetria na Arte Decorativa, Geogebra na aula de Geometria e Isometrias no 1.º e 2.º ciclos.

A última sessão foi plenária. Tratava-se de um Fórum sobre a velha problemática da articulação (ou desarticulação?) entre ciclos, em particular, entre o 1.° e o 2.°.

A sessão começou com a representação figurativa de 10 voluntários que, de mãos dadas, se entrelaçaram e desfizeram o enlace, sugerindo o tema do Fórum, *Articulação entre Ciclos*.

Seguiu-se uma comunicação apresentada por Lucília Silva, professora de Matemática do 2.° ciclo da Escola Básica «A Ribeirinha» do Agrupamento de Escolas Maria Pais Ribeiro em Vila do Conde, que relatou a experiência de articulação vivida na sua Escola, nos últimos anos.

Depois, foi projectado um pequeno filme, realizado por alguns colegas durante o Encontro, no qual se pretendia mostrar o entendimento que os participantes tinham acerca dos conceitos de articulação e desarticulação. Houve contributos interessantes e muito diversos, quer do ponto de vista do conteúdo em si, quer na forma de expressão.

Preparávamo-nos para ouvir outra comunicação sobre o tema, debater afirmações feitas ou ideias expostas e sugerir *propostas de acção* visando a promoção da articulação entre ciclos, quando, na primeira fila, surgiu um participante impaciente e um pouco zangado que, mal lhe foi dada a palavra, se dirige, perante o espanto de muitos, ao microfone destinado aos conferencistas e… espectáculo! Impossível imaginar melhor sessão de encerramento!

Afinal tratava-se do actor José Rui Martins, do Grupo de Teatro Trigo Limpo, ligado à Associação Cultural e Recreativa de Tondela, que disse soberbamente um texto de Mia Couto, *Os Sete Sapatos Sujos* — do livro *E Se Obama Fosse Africano? E outras Interinvenções* — adaptado à nossa situação social e política actual pelo actor, por José Tomás e por Pedro Almeida. O texto fala de *sete sapatos sujos que precisamos de deixar na soleira da porta dos tempos novos*.

Sentimos como estes sete *sapatos sujos* tinham também significado para o ensino e para a escola . Por isso vamos descrever brevemente cada um deles, transcrevendo os subtítulos do livro referido:

A ideia de que os culpados são sempre os outros e nós somos sempre vítimas (p. 32);
A ideia de que o sucesso não nasce do trabalho (p. 35);
O preconceito de que quem critica é um inimigo (p. 37);
A ideia de que mudar as palavras muda a realidade (p. 39);
A vergonha de ser pobre e o culto das aparências (p. 41);
A passividade perante a injustiça (p. 43);
A ideia de que para sermos modernos temos que imitar os outros (p. 45).

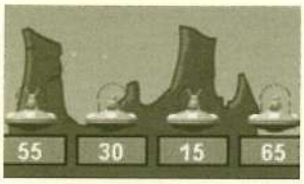
A assistência aplaudiu de pé.
Até Setembro! Com menos sapatos sujos!

Florinda Costa e Maria José Bóia
Professoras aposentadas (do 2.° Ciclo).

Jogos matemáticos na internet

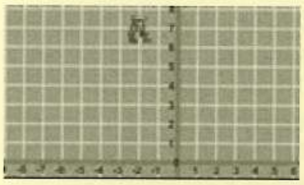
O site http://www.mathplayground.com/games.html apresenta um conjunto de jogos diversificados que incidem sobre conteúdos matemáticos variados abordados ao nível do ensino básico e até do secundário. Apesar do site estar em inglês, os jogos são de um modo geral simples, não sendo por isso difícil compreender como se joga. Nas linhas que se seguem apresentamos uma breve descrição de alguns dos jogos que pode encontrar nesta página. Mas vale a pena uma visita à página para experimentar todos. E se gostar de algum e tiver vontade de o experimentar com os seus alunos, não se preocupe com a ligação à internet, pois é possível jogar mesmo sem estar on-line.

Adição de números naturais, decimais e fraccionários



Part part whole é o nome de um jogo com cinco níveis de dificuldade onde é necessário efectuar diversas adições. A ideia é juntar duas partes para obter um todo que, no caso do jogo, corresponderá ao valor 100 ou à unidade. A história do jogo envolve um emparelhamento entre extraterrestres para assim evitar a sua indesejada aterragem num planeta recém-descoberto. O jogo consiste em disparar um canhão de forma a acertar na nave espacial com o número que completa o do canhão. No primeiro e segundo nível é necessário encontrar o valor que somado com outro dá 100. No terceiro nível temos que encontrar a fracção que quando somada a outra perfaz a unidade. O quarto nível é semelhante ao anterior, mas agora envolvendo números decimais. E no quinto nível é necessário obter a unidade à custa da soma de uma fracção com um número decimal.

Coordenadas de pontos do plano

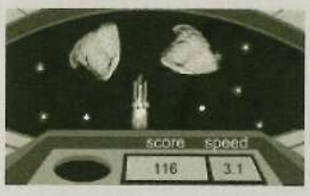


Locate the aliens é o nome de um jogo em que é pedida ajuda para localizar a posição de diversos extraterrestres amigáveis, de visita ao nosso planeta, que se perderam. O congresso dos cientistas extraterrestres está prestes a começar, pelo que cada jogador dispõe apenas de 90 segundos para introduzir as coordenadas em que se encontra cada um dos extraterrestres perdidos. Só assim a comissão de boas vindas terá possibilidade de encaminhar todos os visitantes para a localização certa a tempo de assistirem à abertura do congresso.

Múltiplos

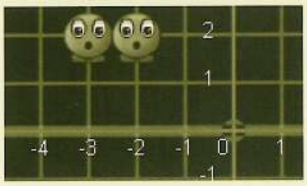
Pumpkin multiples é um jogo simples onde é necessário deslocar um boneco de forma a que o cesto que este tem à cabeça recolha todas as abóboras que caem do céu com um número que seja múltiplo de um valor escolhido à partida pelo jogador. Naturalmente pretende-se evitar a recolha de todas as demais abóboras.

Multiplicação



O jogador é ***Space Racer X***, um destemido explorador inter-galáctico que se aventurou com a sua nave espacial até à orla de um planeta constantemente alvo do ataque de asteróides. É necessário manobrar a nave para a esquerda e para a direita, escolhendo adequadamente a operação a efectuar. Este é no entanto um jogo um pouco difícil, pela rapidez que exige.

Equações da recta – função afim

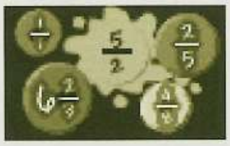


Save the Zogs é o nome do jogo onde temos de salvar uns simpáticos seres azuis que têm a capacidade peculiar de se colocarem em linha recta (ao contrário dos falsos Zogs). O objectivo é então encontrar a recta que passa pelos quatro Zogs genuínos, para permitir que estes sejam recolhidos e não os seus imitadores.

Este jogo envolve nove níveis. No primeiro nível é necessário identificar qual a equação de rectas horizontais ou verticais. O segundo nível é semelhante, mas é o jogador que tem que construir a equação. No terceiro nível é dada a equação e o jogador tem que usar os comandos disponíveis (os *tracking controls*) para traçar a recta. O quarto nível é o primeiro onde as rectas em causa já não são sempre horizontais ou verticais, sendo definidas por equações do tipo $y = ax$. Os dois níveis seguintes são semelhantes ao segundo e ao terceiro, mas agora para rectas definidas por este último tipo de equação. E por fim, os últimos três níveis são do mesmo tipo, mas com equações da forma $y = ax + b$. Quando o jogador se engana são permitidas novas tentativas, mas se as dificuldades forem muitas é apresentada a resposta correcta e posta em jogo uma nova recta do mesmo tipo. Estas características do jogo permitem assim que ele seja usado pelos alunos para fazer uma abordagem exploratória e ir progressivamente conhecendo melhor as rectas e as suas equações.

O site http://www.coolmath-games.com também apresenta alguns jogos interessantes, embora nem todos estejam directamente ligados aos conteúdos que habitualmente abordamos nas nossas aulas.

Fracções



Fraction Splat é o nome de um jogo centrado nas fracções e que pode ser acedido directamente em http://www.coolmath-games.com/0-fraction-splat/index.html. O objectivo deste jogo é clicar em determinado tipo de números para os eliminar. Numa primeira fase o alvo são os números mistos, depois as fracções maiores ou iguais a um e, por fim, as fracções inferiores a 1/2. O jogo tem tempo limite e os enganos também não podem ultrapassar determinado valor. Os efeitos visuais permitem ao jogador identificar facilmente os casos em que acertou e podem de algum modo possibilitar uma aprendizagem por tentativa e erro.

Múltiplos

Crazy Taxi M-12 é o nome de um jogo que envolve números e os seus múltiplos e que pode ser acedido directamente em http://www.coolmath-games.com/0-crazy-taxi-m12/index.html. Este jogo consiste numa corrida de carros onde é preciso evitar determinados obstáculos e chocar com os carros que exibem números múltiplos de determinado valor, conhecido quando começa a corrida. Talvez esta necessidade de chocar deliberadamente com determinados carros não o torne no mais pedagógico dos jogos, mas muito provavelmente será um jogo que reúne os ingredientes necessários para captar a atenção de muitos alunos.

De positivo este jogo tem o facto de obrigar à identificação de múltiplos de diferentes valores e também de permitir a alunos que se sintam menos à vontade com os múltiplos conduzir o carro a uma velocidade mais baixa, para ter tempo para pensar. Esta faculdade de controlar a velocidade do carro é algo que muitos destes jogos não disponibilizam, o que os torna pouco interessantes para alunos mais fracos ou até difíceis de gerir com turmas heterogéneas em termos de conhecimentos matemáticos.

Um jogo... um projecto...

Coffee Shop é o nome de mais um jogo, disponível directamente em http://www.coolmath-games.com/0-coffee-shop/index.html, mas que pode ser muito mais do que um jogo e servir mesmo de base a um pequeno projecto desenvolvido pelos alunos. Aqui é proposto que se faça a gestão de um quiosque de cafés (no *site* existe um *link* para uma versão análoga de um quiosque de limonadas), decidindo que quantidade comprar de cada um dos ingredientes (café, açúcar, leite, copos) e a que preço vender. Implícita está ainda uma associação às condições climatéricas, com os dias mais frios a corresponderem a uma maior procura e os mais quentes a uma menor. Esta poderá ainda ser uma proposta de carácter interdisciplinar, uma vez que aqui são necessários alguns conhecimentos de inglês para compreender as informações disponibilizadas.

Helena Rocha
Bolseira da FCT / ME

Novas Ferramentas, dentro e fora da Sala de Aula

Uma exploração com o GeoGebra

Rui Pedro Raposo

É reconhecida a vantagem de disponibilizar conteúdos para aprendizagem online, desde o acesso livre em qualquer equipamento com ligação à rede a qualquer hora, em qualquer lugar, à possibilidade de trabalhar essa informação na altura mais conveniente.

A facilidade que os alunos de hoje têm a aceder à enorme rede global, partilhando, transmitindo e consultando informação, transforma por completo o papel de Professor.

O papel do Professor, dentro da sala de aula, está em transformação. É necessário compreender e estar atento a essa transformação. Vários autores, entre os quais Isidoro (2008) e Cuban (2001), consideram importante rever o papel desempenhado pelo professor em sala de aula. Isidoro aborda a questão do papel do professor enquanto facilitador das aprendizagens, num ambiente colaborativo, enquanto Cuban analisa o papel do professor à luz das novas tecnologias em sala de aula.

As duas abordagens são pertinentes e interligadas. Se por um lado os computadores ocupam, cada vez mais, o espaço de sala de aula, por outro os alunos ganham uma organização colaborativa das aprendizagens e do trabalho. O trabalho colaborativo torna-se cada vez mais uma forma de realização.

Para Charles Crook, (1998), os computadores são um bom meio de concretização material de objectos abstractos, através da criação de representações manipuláveis. Esses materiais, virtuais, mas manipuláveis, são um importante referencial nos ambientes de aprendizagem colaborativa, pois servem de âncora e de ponto de referência no ambiente virtual.

A geometria e a álgebra são duas grandes áreas da matemática (Lu, 2008), facto que se reflecte na implementação de novas tecnologias. O *software* disponível, como suporte e auxílio no processo de ensino e aprendizagem da matemática, apresenta duas formas: uma caracteriza-se pela manipulação algébrica (como o caso do Derive ou Maple) a outra pela manipulação de objectos geométricos como pontos, linhas, curvas (...) mais conhecido por Ambiente de Geometria Dinâmica (como o caso do Cabri e do Sketchpad).

Dada esta separação é necessário adequar as aplicações a explorar, aos conteúdos e objectivos pretendidos. Para conteúdos algébricos é necessária uma dada aplicação, enquanto para os conteúdos da geometria já é necessária uma outra aplicação.

As implicações são óbvias, para cada conteúdo é necessário fazer a introdução do novo programa, com novos menus e ferramentas. O que altera os princípios de uma aula de matemática, acabando por desviar a sua natureza dos conteúdos matemáticos para as aplicações informáticas. Outra solução seria não usar software algum, não tirando vantagens das reconhecidas competências que os alunos demonstram, e que facilmente podem ser exploradas e encaminhadas para uma aprendizagem mais rica.

A dinamização de aulas com recurso a *software* de geometria dinâmica é uma grande mais-valia para os alunos, como refere Candeias (2005) e Laborde (2000). A possibilidade de movimentar as construções, respeitando a sua estrutura, permite analisar as propriedades que lhe são características. Laborde afirma que:

«– *there are technologies useful for mathematics and for teaching mathematics which allow students to visualise mathematical phenomena, to make connections , to perform experimentation, in a word to really do mathematics as experts do. This ability before the era of technology was restricted to gifted students who were able to imagine in their head the mathematical objects and relations, to play with them in thought. The possibility of real manipulation allowed by technology offers an access to mathematics to more students.*» (p. 11)

O GeoGebra está disponível *online* (www.geogebra.org), o que permite que os alunos tenham livre acesso ao programa, quer na escola quer em casa. Não tem custos para o utilizador, pelo facto de ser um *software* livre, o que permite a sua disseminação muito facilmente através da Internet. Basta um computador com ligação à Internet, o que de acordo com os dados da ANACOM (Autoridade Nacional de Comunicações) citando o EUROSTAT[1] (Gabinete de Estatística da Europa), está em crescendo em Portugal. As escolas, com bibliotecas equipadas com um parque informático recente, e a ligação em banda larga à Internet, poderão ser uma importante ajuda.

A rentabilização das aprendizagens passa pela acessibilidade das aplicações informáticas por parte dos alunos, como refere

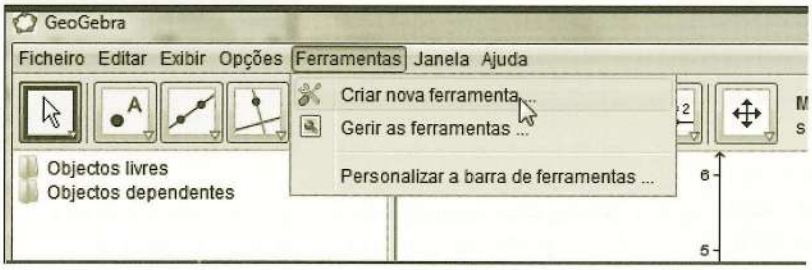


Figura 1. Construção de Novas Ferramentas no GeoGebra

Figura 2. Circunferência dados o centro e o raio

Figura 3. Mediatriz de um segmento de recta

Chris Littlev (Little, 2008) permitindo que os alunos, fora do espaço de sala de aula, fora da escola, possam explorar quer com orientações prévias, quer por sua iniciativa, situações problemáticas, ou mesmo consolidar conhecimentos. Mais do que fechar o uso da ferramenta ao espaço escolar, é importante conceder liberdade de exploração aos alunos. Cuban (2001) aborda a questão das novas tecnologias no espaço escolar, referindo a importância da acessibilidade ao *software* que é utilizado em sala de aula.

Relativamente aos outros pacotes de geometria dinâmica, o Geogebra, à semelhança do Cabri, mostra disponível todos os menus e ferramentas definidas por defeito. A construção de objectos geométricos assume, como objectos iniciais indispensáveis, um ou mais pontos no plano. Consideremos, por exemplo, a construção de uma mediatriz de um segmento de recta. Selecionada a ferramenta de construção, basta clicar em qualquer local do espaço de construção e surgem dois pontos e a respectiva mediatriz. Ao contrário do sketchpad e cinderela, que apenas disponibiliza certas construções se estiverem seleccionados os objectos indispensáveis à sua construção.

Para Duval (2006) e Misfelt (2009) a grande vantagem do Geogebra é a possibilidade de ligação entre a geometria e a álgebra, a representação semiótica interligando as construções com o seu significado algébrico. As duas janelas possibilitam a exploração de conceitos matemáticos em duas vertentes, descompartimentando a matemática curricular, o que permite uma visão globalizante. Opinião partilhada por Mehanovic (2009) quando considera que o GeoGebra ajuda a estabelecer a ligação entre a manipulação algébrica e a representação gráfica (presente no Sistema de Computação Algébrica), assim como a manipulação dinâmica de objectos geométricos. Facto que todos consideram ajudar a uma melhor compreensão de conceitos matemáticos, pois permite a manipulação de parâmetros e a observação gráfica dessas alterações.

O GeoGebra ajuda a estabelecer a bidirecionalidade entre AGD e um SCA (CAS) (Hohenwarter & Preiner, 2007). Como em qualquer AGD, podemos construir uma circunferência, utilizando uma das opções do menu, e clicando em dois pontos do plano, um como centro e outro para estabelecer o raio. Definida a circunferência, surge no campo algébrico, a equação da respectiva circunferência. Ao arrastarmos um qualquer objecto a equação é automaticamente actualizada.

É possível construir uma circunferência através do menu disponível e de dois pontos, ou introduzindo a equação da circunferência no campo «Entrada». O efeito de arrastamento da construção produz igualmente alterações na equação introduzida.

Após a primeira aula de apresentação do GeoGebra, os alunos fazem questão de referir que já possuem a aplicação no computador pessoal. Fazem-no com a convicção que estão prontos para trabalhar, quer na sala de aula, quer em casa, reconhecendo mais-valia nessa possibilidade. O facto de o interface, segundo Laborde, ser suficientemente simples requer pouco treino ou reduzidos conhecimentos prévios para a sua utilização em sala de aula, o que é bastante importante.

Construir Novas Ferramentas

O GeoGebra é uma aplicação costumizável, o que o torna bastante flexível. Tem, por defeito, um conjunto de ferramentas pré-definidas, sendo ainda possível construir novas opções assim como automatizar construções de forma a rentabilizar o tempo (figura 1).

No âmbito do programa de Matemática do ensino básico, um dos tópicos trata a relação entre a amplitude dos arcos de uma circunferência e os ângulos ao centro e inscritos no arco de circunferência. Nas versões existentes até ao momento, essa ferramenta não existe. Poderá assim ser interessante investigar a capacidade dos alunos elaborarem essa construção.

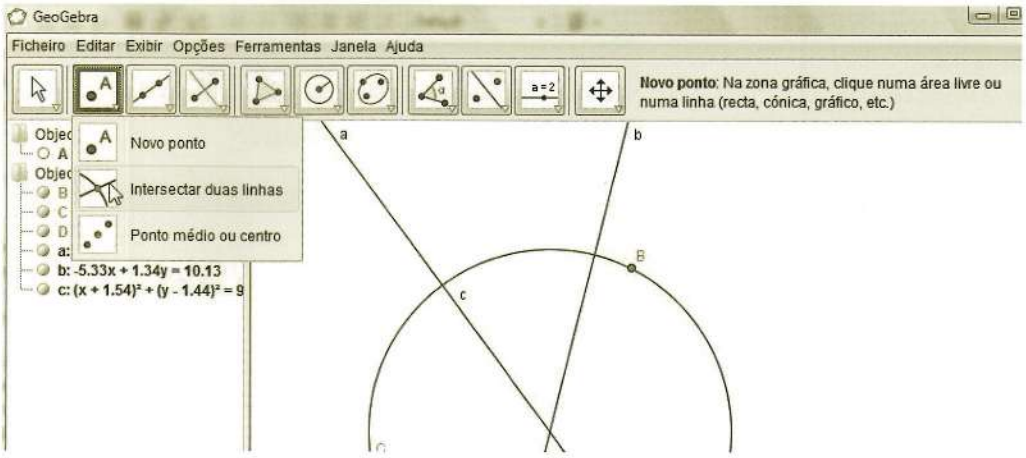


Figura 4. Ponto de Intersecção de duas linhas

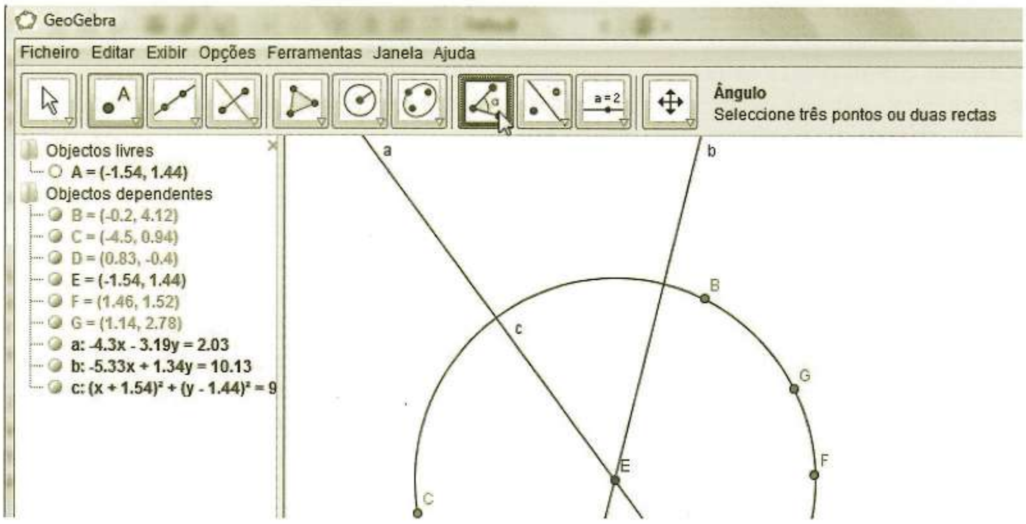


Figura 5. Amplitude do ângulo ao centro

Vamos construir uma ferramenta que nos dê a amplitude de um arco de circunferência.

Primeiro construímos uma circunferência através da opção da Figura 2.

Seleccionado um ponto qualquer do plano surge uma janela, na qual digitamos a medida do raio pretendido (por exemplo 3). Construímos três pontos sobre a circunferência de modo a podermos construir o circuncentro. Antes porém devemos esconder o centro da circunferência, para não sobrepormos dois pontos distintos. Com a opção da Figura 3, construímos, pelo menos, duas mediatrizes dos segmentos definidos pelos três pontos na circunferência.

De seguida, e de forma a conhecermos a amplitude do arco necessitamos do ângulo ao centro, pelo que teremos de construir o circuncentro. Construídas as mediatrizes procuramos (Figura 4) o ponto de intersecção (Circuncentro)

Construímos depois dois pontos, na circunferência, de modo a definir o arco ao qual vamos atribuir a respectiva amplitude. Necessitamos também da amplitude do arco ao centro, medido com os últimos dois pontos e o circuncentro (Figura 5).

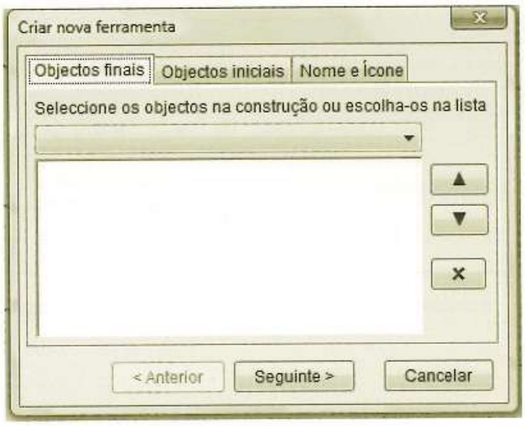


Figura 6. Janela de construção de uma nova ferramenta

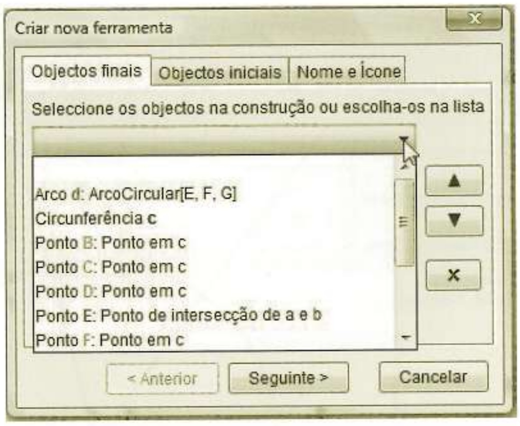


Figura 7. Construir nova ferramenta

Associamos ao arco de circunferência uma caixa de texto contendo a expressão:

«Arco de Amplitude = » + α

na qual «α» significa a amplitude do ângulo ao centro.

Iniciamos depois a construção da nova ferramenta seleccionando, como na Figura 1, a opção Criar nova ferramenta , que fará surgir a caixa (figura 6).

Temos assim dois tipos de objectos: objectos iniciais e finais. Escolhendo, através do menu ou arrastando do plano para dentro da janela, o objecto que se pretende como final. Por defeito o próprio programa fixa, na janela «Objectos Iniciais», o(s) primeiro(s) objecto(s) necessário(s) à construção do objecto final. Objectos esses que é possível alterar eliminando da janela e colocando outros (figura 7).

Neste caso colocamos como «Objecto final» o arco de circunferência «arco d: arco circular (EFG)». É necessário definir o ponto «E», que neste caso é a intersecção das duas mediatrizes de três pontos da circunferência (circuncentro) «Ponto E:Ponto de Intersecção de a e b». Assim, este ponto E surge também como «Objecto Final». Para visualizarmos a amplitude do arco construímos uma janela de texto, com a indicação do valor da amplitude do arco, definido à custa do ângulo ao centro. Esta caixa de texto deve também entrar como «Objecto Final».

Com todos estes objectos finais o programa coloca como «Objecto inicial» o ponto «A» que foi o primeiro objecto na construção.

Como pretendemos conhecer a amplitude do arco de circunferência, tendo como objecto de partida um arco ou a circunferência, eliminamos o ponto «A» e escolhemos a circunferência «c». É necessário considerar os dois pontos que definem o arco de circunferência **d**, pontos **F** e **G**, como pontos iniciais, pois vão ser necessários para o utilizador definir o início e fim do arco pretendido (figura 8).

O passo seguinte é atribuir um nome à ferramenta e à ajuda. O nome do comando é preenchido à medida que digitamos o nome da ferramenta, ainda que seja possível personalizá-lo, seguindo

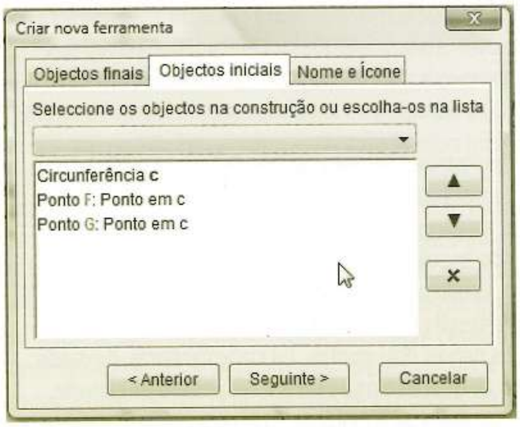


Figura 8. Janela de «Objectos Iniciais»

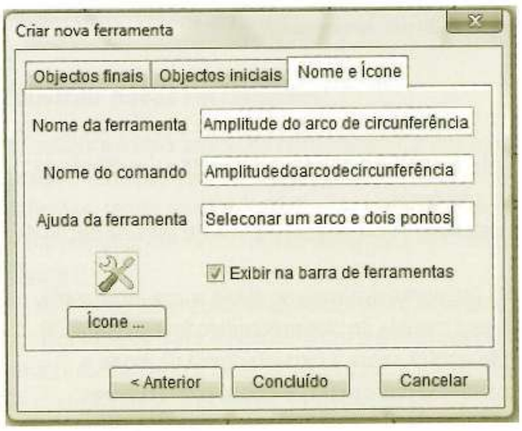


Figura 9. Etapa final da construção de ferramentas

Figura 10. Nova ferramenta disponível

certas regras de caracteres sem espaços em branco. Fica assim criada uma nova ferramenta dentro do GeoGebra.

É também possível atribuir um ícone de modo a personalizar a ferramenta. Clicando no botão, visível na Figura 9, é possível personalizar o ícone que será visível na barra de menus como mostra Figura 10.

É possível visualizar a construção elaborada, por exemplo, para a construção da nova ferramenta (Figura 11).

O protocolo de construção (Figura 12) apresenta, sequencialmente, todas as construções.

Conclusão

Um dos pontos importantes do GeoGebra é a forte ligação entre a Geometria e a Álgebra, ligação essa que Descartes explorou, e que o *software* educativo ainda não tinha explorado. É possível construir geometricamente objectos na janela, como inserir algebricamente qualquer construção.

A exploração por arrastamento, processo disponível em qualquer *software* de geometria dinâmica, é possível também para as construções algébricas, o que torna bastante forte a ligação entre as duas áreas do saber matemático.

A exportação de construções, para páginas html, permite escolher as ferramentas a disponibilizar. Possibilita, inclusive, activar ou desactivar a abertura automática do GeoGebra a quem consulta a construção.

A versão 3.2 torna possível a animação das construções, possibilitando observar propriedades, sem qualquer intervenção do utilizador. A animação tem por base o selector, ferramenta que permite alternar valores, de acordo com limites pré-definidos, quer seja um número, quer seja um ângulo.

Seria também interessante que o GeoGebra adquirisse mobilidade, o que não parece ser difícil, pois a aplicação Java, com a solução Java 2 Micro Edition, faz parte das aplicações de origem da maioria dos smartphones e Pda. O problema poderá surgir ao nível da resolução gráfica e as dimensões, reduzidas, do ecran.

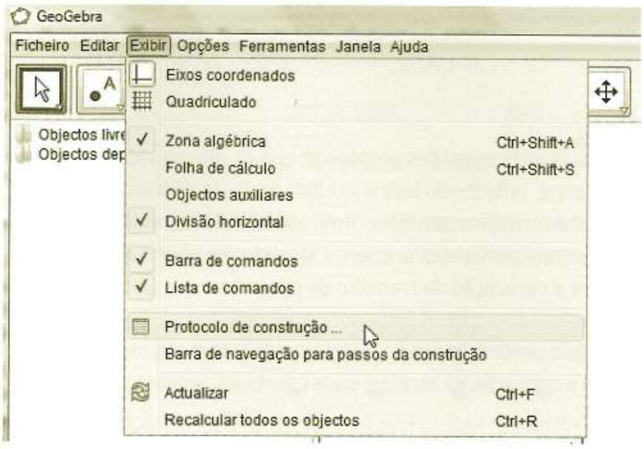


Figura 11. Protocolo de Construção


Protocolo de construção
Ficheiro Exibir Ajuda

Nº	Nome	Definição	Valor
1	Ponto A		A = (-2.24, 2.52)
2	Circunferênci...	Circunferência de centro A e	c: (x + 2.24)² + (y - 2.52)² = 4
3	Ponto B	Ponto em c	B = (-3.96, 3.55)
4	Ponto C	Ponto em c	C = (-0.39, 3.27)
5	Ponto D	Ponto em c	D = (-1.32, 0.74)
6	Segmento a	Segmento [B D]	a = 3.85
7	Segmento b	Segmento [D C]	b = 2.7
8	Segmento d	Segmento [C B]	d = 3.58
9	Recta e	Mediatriz de a	e: -2.63x + 2.8y = 12.96
10	Recta f	Mediatriz de d	f: 3.57x - 0.27y = -8.68
11	Recta g	Mediatriz de b	g: -0.94x - 2.53y = -4.28
12	Ponto E	Ponto de intersecção de f e	E = (-2.24, 2.52)

12 / 12

Figura 12. Protocolo de Construção do Circuncentro

Figura 13. Selector do GeoGebra

Nota

[1] http://www.anacom.pt/render.jsp?contentId=1063501

Bibliografia

Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica* (8° ano). Lisboa: Tese de Mestrado em Educação na Especialidade Didáctica da Matemática, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências. Retrieved from http://ia.fc.ul.pt/textos/Candeias N_2005.zip.

Crook, C. (1998). children as computer users: The Case of Collaborative Learning. *Computers Educacional, 30*(3/4), 237-234. Retrieved from http://www.clab.edc.uoc.gr/application/children_as_computer_use.pdf.

Cuban, L. (2001). *Oversold and underused: Computers in the classroom* (p. 249). Massachusetts: Harvard Univ Pr. Retrieved from http://www.hull.ac.uk/php/edskas/Cuban article - oversold.pdf.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications, 7.* Retrieved from http://www.joma.org/mathDL/mathDL/4/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=1448.

Isidoro, P. S. P. (2008). O Trabalho Colaborativo na Construção do Saber Matemático dos Alunos. Lisboa: Tese de Mestrado em Educação na Especialidade Didáctica da Matemática, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências.

Laborde, C. (2000). Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics. *Contribution to the T, 3*, 6-8. Citeseer. Retrieved from http://www.math.ohio-state.edu/-waitsb/papers/t3_posticme2000/laborde.pdf.

Little, C. (2008). Interactive geometry in the classroom: old barriers and new opportunities. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 28*(2), 49-54. Retrieved from http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip28-2/BSRLM-IP-28-2-09.pdf.

Lu, Y. (2008). Linking Geometry and Algebra: A multiple-case study of Upper-Secondary mathematics teachers conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan. Master of Philosophy in Educational Research, University of Cambridge, Faculty of Education. Retrieved from http://www.geogebra.org/publications/2008-Lu-GeoGebra-England-Taiwan.pdf.

Mehanovic, S. (2009). Learning based on dynamic software geogebra. Retrieved from http://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=229084.

Misfeldt, M. (2009). Semiotic instruments: considering technology and representations as complementary. Lyon. Retrieved from http://www.geogebra.org/publications/2008-Misfeldt-Cerme6.pdf.

Rui Pedro Raposo
Escola Secundária Alfredo dos Reis Silveira, Seixal

A tarefa que aqui se apresenta incide sobre o ISBN dos livros, sendo descritas as cinco componentes deste número e a forma como é calculado o último algarismo – o número de controlo. Trata-se assim de uma tarefa que envolve uma forte componente de leitura e de interpretação do texto.

As questões iniciais requerem a capacidade de comparar informação identificando o que é comum e o que difere à luz do contexto em questão. O cálculo do número de controlo é igualmente abordado. Toda a tarefa se centra em torno de números, requerendo por vezes alguns conhecimentos sobre múltiplos.

Nas últimas questões propõe-se que os alunos vão um pouco mais longe, reflectindo sobre a utilidade deste número de controlo e sobre a forma matemática como este é determinado. São assim propostas algumas explorações e lançado um último desafio que envolve a realização de trabalho de pesquisa.

A leitura do artigo *A Matemática escondida nos livros*, publicado neste número da revista, pode trazer algumas ideias para a exploração da tarefa e para eventuais desenvolvimentos desta.

Helena Rocha, Bolseira da FCT / ME

ISBN – o código matemático dos livros

O ISBN é o **I**nternational **S**tandard **B**ook **N**umber, trata-se de um número de 13 algarismos reconhecido em todos os países que permite identificar cada livro. Este número encontra-se dividido em cinco partes:

- O EAN (*European Article Number*) – um código de três algarismos que permite saber de que artigo estamos a falar. No caso dos livros este código será o 978 ou o 979.
- O grupo de registo – um código que pode ter de 1 a 5 algarismos e que identifica o país ou a língua em que o livro está escrito.
- A editora – um conjunto de até 7 algarismos que identifica a editora que publicou o livro.
- O identificador do título – um código até 6 algarismos que identifica especificamente o livro.
- O algarismo de controlo – o algarismo final que valida matematicamente o ISBN.

Se observares a contracapa de qualquer livro vais encontrar a indicação do respectivo ISBN, em geral junto de um código de barras destinado a leitura óptica. O ISBN pode ser apresentado de duas maneiras:

Os 13 algarismos podem ser apresentados separados por traços. Neste caso é fácil identificar as cinco partes que constituem o código. Por exemplo, no ISBN 978 – 972 – 41 – 4427 – 6, o EAN é 978, o grupo de registo é 972, a editora tem o código 41, o identificador do livro é 4427, e o algarismo de controlo é 6.

Noutros casos os 13 algarismos surgem por baixo do código de barras em três grupos: um algarismo à esquerda, seguido de dois grupos de seis algarismos mesmo por baixo das barras. Nestes casos poderás descobrir cada uma das cinco partes do ISBN comparando livros.

9 789724 144276

1. Escolhe alguns livros a teu gosto, tendo o cuidado de incluir pelo menos dois da mesma editora e dois de editoras diferentes. Para cada um dos livros regista o respectivo ISBN.

2. Analisa o ISBN dos livros e confirma que o EAN é 978.

3. Qual o código do grupo de registo (aquele que identifica o país) em cada livro?

4. Compara o ISBN dos livros e centra a tua atenção nos livros que são da mesma editora. Consegues identificar o código da editora?

5. Se se mantiverem o EAN e os códigos do grupo de registo e da editora que consideraste na questão anterior, qual é o número máximo de livros que esta pode publicar?
   O ISBN nem sempre teve as características actuais. Se procurares livros que tenham sido publicados antes de 2007 vais ver que tinham um ISBN apenas com 10 algarismos. Nesse caso é preciso converter o antigo ISBN no novo ISBN. Não é difícil, vamos ver um exemplo:

antigo ISBN 972 – 41 – 4427 – 5

novo ISBN 978 – 972 – 41 – 4427 – ?

E agora é preciso calcular de novo o algarismo de controlo.
Para isso é necessário fazer a soma dos algarismos do novo ISBN, multiplicando alternadamente por 1 e por 3, ou seja
A soma dá 124 e precisamos do múltiplo de 10 imediatamente superior a esse valor, que é 130.

9	7	8	9	7	2	4	1	4	4	2	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1×9 +	3×7 +	1×8 +	3×9 +	1×7 +	3×2 +	1×4 +	3×1 +	1×4 +	3×4 +	1×2 +	3×7

Então o número de controlo é 130 – 124 = 6.
Logo o novo ISBN é 978 – 972 – 41 – 4427 – 6.

6. O antigo ISBN de um livro é 972-662-165-8. Qual é o novo ISBN?

7. O Carlos trabalha numa livraria, mas o dia não lhe está a correr bem. Quando um cliente compra um livro ele deve introduzir na caixa registadora o ISBN do livro, mas hoje só lhe aparecem livros com algarismos ilegíveis. Ajuda-o e completa o ISBN de cada um dos livros. Explica em que te baseaste para encontrar os algarismos em falta.

ISBN ? ? 8 9 7 2 4 1 2 1 6 7 3

ISBN ? 7 8 ? 7 2 2 3 4 0 7 3 1

ISBN 9 7 8 9 7 2 4 7 ? 2 7 9 3

ISBN 9 7 8 9 7 2 6 5 9 ? 2 1 2

8. A grande vantagem do ISBN é permitir rapidamente saber de que livro estamos a falar. Se fores à internet e puseres no Google ISBN 9789728957513 vais descobrir de que livro estamos a falar. Experimenta!
Se preferires experimenta antes ISBN 9789728998950, ou talvez ISBN 9789723611199...

Indo mais longe...

9. Investiga de que modo a alteração de um algarismo do ISBN altera o respectivo número de controlo. Achas que o número de controlo vai sempre permitir detectar um engano na introdução de um algarismo do ISBN?
E se o engano ocorrer na introdução de dois algarismos?

10. Porque achas que foi escolhido o 3 para multiplicar por metade dos algarismos para calcular o número de controlo?
Se fosse escolhido o 2 era diferente?
Podia ter sido escolhido outro número?

11. Procura outras situações em que também seja usado número de controlo e investiga semelhanças e diferenças na forma como é calculado o número de controlo nesses casos.

Reflectir no âmbito do PFCM: Algumas ideias emergentes

Cristina Martins, Leonor Santos

A reflexão tem vindo a ser considerada uma componente essencial nos programas de formação inicial e contínua de professores, como é o caso do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo (PFCM), em funcionamento em Portugal, a partir do ano lectivo 2005/2006. Ao considerar nas suas linhas orientadoras o princípio do *Reconhecimento das práticas lectivas dos professores como ponto de partida da formação*, este programa de formação vem colocar a ênfase na reflexão para desenvolver o conhecimento profissional do professor, pois é assumido que em particular o seu conhecimento didáctico matemático se desenvolve essencialmente através da reflexão «sobre as situações concretas e reais de ensino, que permitam analisar e identificar os factores de sucesso, bem como a origem das dificuldades encontradas, tendo em conta as intenções e objectivos com que a acção educativa foi planificada (Serrazina *et al.*, 2005, p. 2).

Contudo, embora manifestamente reconhecida a importância da reflexão no desenvolvimento profissional de professores, será que temos um entendimento claro e consensual acerca deste conceito? Na investigação que estamos a desenvolver no âmbito do projecto de doutoramento da primeira autora, sendo a segunda a sua orientadora, a reflexão é uma das dimensões em estudo. Tendo em consideração algumas opiniões das três professoras participantes no estudo (Aida, Dora e Sara[1]) tentaremos questionar e discutir algumas ideias acerca do significado e do processo de reflexão, «chamando», para isso, a opinião de alguns autores.

O que é reflectir? Dora, após a sua participação no PFCM, põe a claro o que significa para si reflectir, sobressaindo da sua ideia de reflexão essencialmente três acções: pensar, analisar e concluir:

É pensar tudo o que se fez no dia-a-dia. Saber analisar aquilo que se fez durante o dia, durante a aula. Saber tirar uma conclusão daquilo que se fez. Eu penso que é saber tirar conclusões. Porque é que se fez, como se fez, como se poderia ter feito. Uma análise!

[Dora, entrevista final]

Acerca da acção de pensar, é certamente consensual que a reflexão é um acto do nosso pensamento, contudo será que qualquer pensamento pode ser considerado uma reflexão? O simples facto de uma ideia emergir à nossa mente significa que estamos a reflectir? Dewey (1933), no seu livro *How we think*, responde a esta questão quando distingue a reflexão de outros três tipos de pensamento: o fluxo de consciência, a invenção e a crença. O fluxo de consciência é o pensamento em que nós estamos involuntariamente imersos, é «uma corrida incontrolada de ideias nas nossas cabeças» (Dewey, 1933, p.4). A invenção é basicamente a imaginação, que embora esta não possa ser identificada com a reflexão é claramente uma parte desta. As crenças são assumidas por Dewey como ideias pré-concebidas, portanto não são conclusões resultantes de uma actividade mental pessoal, envolvendo observação, recolha de dados e exame de evidências, não equivalendo à reflexão. Ao fazer esta distinção, Dewey está literalmente a associar o acto de reflectir a um processo rigoroso, disciplinado e deliberado de pensamento.

Quanto à ideia de reflexão associada aos actos de analisar e concluir vai, em parte, ao encontro da definição de reflexão exposta igualmente por Dewey (1933) na obra referida: «A consideração activa e persistente de toda ou qualquer forma suposta de conhecimento à luz dos pressupostos que a suportam, e das conclusões ulteriores para que tende» (p.6). Assim, à reflexão está associado o esforço consciente e voluntário para a sua realização e realçada a importância da fundamentação da acção do professor. De facto, em nossa opinião, ao reflectir é importante analisar, «dissecar» a acção, justificá-la com base em pressupostos pessoais ou académicos para chegar a conclusões fundamentadas.

Salientamos ainda que as palavras de Dora destacam a reflexão após a acção, deixando oculta a reflexão na acção. É em nosso entender natural que a reflexão após a acção seja encarada por Dora de uma forma mais explícita, pelo simples facto de ser «mais visível», quer na nossa acção diária, quer no decurso do PFCM (onde era contemplada a reflexão pós-observação com o formador, a reflexão escrita realizada individualmente sobre as tarefas desenvolvidas, e a reflexão conjunta no grupo de formação). Contudo, não deixamos de considerar o papel importante que tem a reflexão na acção durante as práticas de sala de aula, pois conduz à tomada de decisões no momento. Neste âmbito, é inevitável não evocar as ideias de Schön (1983), autor que contribuiu para o aprofundamento e clarificação do conceito de reflexão. Para Schön, a componente de reflexão apresenta-se como o meio ideal para o professor conseguir enfrentar as situações novas que se apresentam na sua prática, distinguindo três tipos de reflexão: a reflexão na acção, a reflexão sobre a acção e a reflexão sobre a reflexão na acção. A *reflexão na acção* corresponde à reflexão efectuada no decurso da própria acção sem a interrompermos. Tem como função a tomada de decisões e consequente intervenção no momento em que a acção está a acontecer, servindo, desta forma, para a reorganizar. A *reflexão sobre a acção* diz respeito a uma reflexão realizada após a acção. Esta acontece quando reconstruímos mentalmente a acção passada para verificarmos de que forma o nosso conhecimento na acção contribuiu para um resultado inesperado. A *reflexão sobre a reflexão na acção* é também um tipo de reflexão realizado após a acção. É um processo metacognitivo. A reflexão recai sobre o conhecimento na acção e sobre a reflexão na acção, servindo para determinar a actuação futura do professor. Consideramos que, em articulação com esta distinção, é importante salientar a relevância da reflexão na acção e sobre a acção. São estas duas dimensões que permitem ao professor a construção de teorias pessoais sobre o ensino, pois a reflexão do professor não se deve restringir ao modo como se aplicam nas salas de aula as teorias geradas noutros sítios: «Uma maneira de pensar a prática reflexiva é encará-la como a vinda à superfície das teorias práticas do professor, para análise e discussão» (Zeichner, 1993, p.21).

Como se realiza a reflexão? Dora no seu portefólio apresenta uma reflexão escrita acerca da experimentação na sala de aula de uma tarefa de investigação matemática. Esta reflexão teve por base um problema surgido na introdução da tarefa e conduziu esta professora a repensar a sua forma de actuação: «A palavra regularidade meteu-lhes mesmo confusão. Talvez devesse ter apresentado a tarefa com mais indicações, mesmo escritas ou ter apresentado um exemplo concreto na fase de arranque» [portefólio, 2.ª reflexão].

Como é ilustrado na reflexão realizada por Dora, o processo de reflexão realiza-se tendo como ponto de partida a perplexidade, a hesitação ou a dúvida, causada por um problema (Dewey, 1933). Vão-se percorrendo uma sequência adequada de *passos reflexivos* conducentes à elaboração de um plano de acção que vai levar à análise e avaliação do problema, e depois a mais acção reflexiva. Rodgers (2002a) sustenta que a reflexão se relaciona com a tendência para interpretar ou reagir a uma experiência, primeiro, na sala de aula, *abrandando* para ver e, em seguida, fora da sala de aula, descrevendo e analisando o que aconteceu, para, por fim, delinear passos para uma acção inteligente que, uma vez realizada, se torna na experiência seguinte, dando azos a uma nova reflexão.

Ponderando sobre a ideia destes e outros autores, torna-se claro para nós que o processo de reflexão é estruturado, e concretizado através de várias etapas, que se desenvolvem recursivamente e de forma cíclica. Um processo que se inicia na acção (num problema, numa situação de sala de aula), com o propósito de a explicar, envolvendo, desta forma, a sua descrição e posterior análise, assente, quer em teorias pessoais, quer em teorias académicas, que conduz à experimentação de uma nova ideia, que pode dar origem a um novo ciclo reflexivo.

Sobre o que reflectir? Sara, outra professora participante do estudo, chama a atenção para alguns elementos que a reflexão deve incorporar: «Ao fazer a reflexão posso ponderar os aspectos que foram mais positivos, onde poderia ter melhorado, onde poderei melhorar, como fiz e que resultados houve» [entrevista final], chegando a enunciar aspectos que passou a integrar na sua reflexão escrita (as aprendizagens dos alunos): «Quando me dizia [a formadora] se os alunos tinham adquirido conhecimentos (...) aí inicialmente tinha dúvidas, porque pensava que isso não seria uma coisa para se reflectir. Mas o próprio trabalho deles reflecte o que nós fizemos» [entrevista final].

Na opinião de Day (2001, p. 72) «os bons professores são tecnicamente competentes e reflectem sobre assuntos relativos aos objectivos, ao processo, aos conteúdos e aos resultados». Serrazina *et al.* (2006) particularizam a importância de, ao reflectir especificamente sobre uma aula, o professor confrontar as suas expectativas e aquilo que os alunos foram capazes de fazer, salvaguardando que a reflexão sobre a forma como a aula se desenrolou (a estrutura e organização da aula; o ambiente da aula; a actividade do aluno; a actividade do professor; a produção matemática dos alunos; e a utilização e exploração de recursos materiais) deve incluir a avaliação do professor sobre o que os alunos terão aprendido sobre Matemática com a actividade desenvolvida, bem como que o professor terá aprendido. Em consonância com as ideias destes autores, consideramos que numa reflexão sobre uma aula é importante considerar a intenção do professor, o desenvolvimento da aula e a avaliação da tarefa desenvolvida.

Como promover a reflexão? A opinião anterior de Sara deixa o mote para esta questão, nomeadamente vem chamar a atenção para o facto de que se não formos alertados para determinados aspectos não é fácil integrar novos elementos nas nossas reflexões, ou seja, vem alertar para a importância da existência de alguém que estimule a nossa reflexão. Este aspecto foi deixado claro pelas três professoras quando se referem à reflexão pós-observação realizada com a formadora. Concretamente, Aida, outra das professoras participantes no estudo, numa entrevista realizada dois anos após a participação no PFCM, indica especificamente a presença da formadora em sala de aula como aspecto positivo para a posterior realização de uma reflexão «mais enriquecedora, em que se podem partilhar ideias acerca do mesmo acontecimento, pois as duas pessoas estiveram na sala de aula em conjunto» [entrevista após 2 anos]. Para Dora, as reflexões com a formadora assumiram uma grande importância, sobretudo para a «correcção» das práticas: «Sempre com esse cuidado todo ias-me orientando, davas-me a tua opinião, que para mim era, no fundo, uma das coisas fundamentais, que era para eu melhorar» [entrevista, final]. Sara, indo ao encontro da ideia expressa no ponto anterior, especifica a utilidade da reflexão com a formadora, enunciando para isso aspectos sobre os quais era levada a pensar:

> Fez-me pensar em aspectos particulares do decurso da aula, tais como: o que poderia ser feito diferente, o comportamento de determinado aluno, a gestão do tempo, se as metodologias usadas foram as adequadas, se os alunos conseguiram desenvolver raciocínios válidos.
>
> [portefólio da Sara, conclusão]

Neste âmbito, lembramos que no conceito de ensino reflexivo preconizado por Schön (1983) ressalta a importância do supervisor (papel exercido, neste caso particular, pelo formador no PFCM) que, embora não possuindo um conjunto de receitas prontas a utilizar, tem como função ajudar os professores no desenvolvimento da capacidade de reflexão sobre a prática, com o intuito de a melhorarem.

Assumindo as ideias de Hatton e Smith (1995), consideramos que, seja um supervisor, um mentor, um formador ou um amigo crítico, é benéfica a presença de uma pessoa que estimule o professor a falar, a questionar, a confrontar, a confiar noutros, a fim de analisar o planeamento, a implementação e a avaliação do ensino.

Também a reflexão em grupo é uma ideia destacada pelas três professoras. Aida fala da «oportunidade de confrontar [a sua opinião] com a opinião dos colegas» do grupo de formação, especificando: «Foi interessante às vezes constatar que os aspectos que dizia que tinham corrido menos bem, também tinham sido os que os outros diziam (...) por exemplo, aquela dificuldade que os meninos tinham em comunicar» [entrevista intercalar]. Dora concentra a importância da reflexão em grupo na comparação das práticas de sala de aula dos vários elementos do grupo de formação, propiciando-lhe esta o querer experimentar (ou não) determinada tarefa:

> Bem, eu vou ouvir, ver se foi igual à minha (...) Se posso fazer uma actividade semelhante, já sei como hei-de fazer. Se realmente não vale a pena fazer, se a ela também lhe correu mal... Como geriu o tempo? Será que vale a pena? Será que não vale?
>
> [entrevista final]

Também Sara justifica a relevância que atribui à reflexão em grupo, considerando que é importante ouvir a opinião dos outros para melhorar a própria prática: «Estava com mais atenção à reflexão dos outros para saber como fizeram, que estratégias utilizaram. Interessava-me ver as estratégias que utilizaram, se resultaram, que dificuldades houve...» [entrevista final]. Destaca ainda as questões recorrentes da reflexão em grupo: «as dificuldades sentidas, os materiais utilizados, as metodologias usadas na abordagem dos temas trabalhados, o que o surpreendeu pela positiva e pela negativa. Ao reflectir sobre estas questões ajudou-me a melhorar a prática pedagógica» [portefólio, conclusão].

Rodgers (2002b) destaca a importância da reflexão ocorrer em interacção com os outros, enunciando três potencialidades do que chama reflexão colaborativa, indo mais além dos aspectos enunciados pelas professoras:

> 1. Afirmar o valor de uma experiência: Isolados, o que importa pode ser facilmente dispensado como não tendo importância.
> 2. Ver coisas novas: Os outros oferecem significados alternativos, ampliando o campo da compreensão.
> 3. Apoiar a participação no processo de *inquirição*: A auto-disciplina necessária para o tipo de reflexão que defende Dewey, especialmente tendo em conta as exigências indiscutíveis do dia do professor, é difícil de sustentar sozinho. (p. 857)

Associando as ideias das professoras com as ideias expostas por Rodgers (2002b), emerge que a relevância da reflexão em grupo decorre da existência de confronto de opiniões, da comparação e questionamento das práticas de sala de aula, da partilha de significados, e do apoio e incentivo.

Um outro aspecto que nos é trazido por Aida é a relevância que atribui à reflexão escrita. Segundo esta professora, a escrita ajuda a estruturar o pensamento: «Eu acho que estou a reflectir melhor quando estou a escrever, mas isso é uma questão pessoal. Penso melhor sobre as coisas quando estou a escrever» [entrevista após 2 anos]. Para Dora, a reflexão escrita estimula o registo de ideias e sentimentos: «Depois há sempre uma ideia. Ai, não disse isto! Tenho que dizer. Que é para dizer aquilo que senti.» [entrevista intercalar].

O papel da escrita no desenvolvimento do pensamento reflexivo é igualmente referido por alguns autores. Por exemplo, Passos *et al.* (2006, pp. 201–202) assinalam que a reflexão ganha força quando mediada pela escrita: «A escrita — seja em forma de narrativas ou de relatos de aula — permite aprofundar a reflexão, desencadeando, inclusive, a metacognição. Ao escrever, o professor toma consciência de seu próprio processo de aprendizagem». A reflexão escrita ajuda o professor a estruturar o seu pensamento, estimula-o a exteriorizar as suas ideias, levando-o à consciencialização da sua aprendizagem. Porém, como faz notar Sara, a elaboração de uma reflexão exige esforço e persistência: «Tinha momentos chatos, mas também tinha momentos bons. Quando uma pessoa começa a fazer custa, mas depois vai-se lembrando e acho que é fácil» [entrevista final]. A constatação desta professora vai ao encontro da opinião de Dewey (1933) quando indica a predisposição para enfrentar a actividade com curiosidade, força, capacidade de renovação e combater a rotina como uma das atitudes necessárias para a eficácia da acção reflexiva.

Em estreita ligação com a reflexão escrita está a construção do portefólio no PFCM. Para Sara o portefólio revelou-se um instrumento responsável pela elaboração das reflexões escritas: «Se não fosse necessário fazer o portefólio haveria muita coisa que passava ao lado» [entrevista final]. Na mesma perspectiva, Aida indica o portefólio como promotor da reflexão: «Coloca-nos perante a necessidade de nos interrogarmos: porque é que eu faço isto, porque é que eu faço aquilo; porque exponho este trabalho e não o outro» [entrevista intercalar]. Já Dora, embora refira que esta é uma das características distintivas do portefólio: «Nos outros que fiz pus lá o que foi mais importante, é verdade! E tinham introdução e conclusão, mas não tinham as reflexões. Eu sei que a reflexão é o principal do portefólio» [entrevista final], considera que no PFCM, «fazíamos na mesma» [entrevista final] a reflexão escrita, mesmo sem existir o portefólio.

As opiniões destas professoras encontram-se em consonância com as de vários autores que associam a utilização de portefólios ao desenvolvimento da capacidade de reflexão. É o caso de Klenowski (2000, p. 221) que refere: «Usar portefólios na formação de professores é uma forma de desenvolver a capacidade reflexiva necessária para sustentar o desenvolvimento do professor e de profissionais práticos». Das ideias das professoras e também da autora referida sobressai uma característica distintiva do portefólio — é um instrumento que envolve e promove a reflexão.

A finalizar. Neste texto, expusemos algumas ideias acerca do significado e do processo de reflexão, esperando que constitua um contributo para a compreensão de uma actividade essencial na prática profissional dos professores.

A reflexão deve, pois, ser encarada pelo professor como parte integrante da sua prática, só desta forma alcançará o seu principal propósito — a melhoria das suas práticas de sala de aula — e, consequentemente, ajudará ao sucesso escolar dos seus alunos e contribuirá para o seu próprio desenvolvimento profissional. O professor deve assumir-se como um prático reflexivo, como «alguém com um conhecimento tácito de base, que continuamente constrói sobre aquela base através da pesquisa da prática, repensando e reavaliando constantemente os seus valores e prática» (Lieberman, 1994, p. 15). Assim, é essencial que a reflexão seja encarada como um processo deliberado, sistemático e estruturado, situando-se na acção o princípio e o fim deste. Não interessa apenas dizer que o professor reflecte, interessa que o professor tenha consciência que o está a fazer, o que deve considerar nesse processo e a intenção que lhe subjaz. Para isso, poderá adoptar várias estratégias, como sejam, a intervenção de uma pessoa que a estimule (mentor, tutor, supervisor, amigo crítico), a partilha de reflexões em grupos colaborativos, a utilização da reflexão mediada pela escrita, nomeadamente através da construção de um portefólio.

Nota

[1] Nomes fictícios.

Referências

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc..

Hatton, N., & Smith, D. (1995). Reflection in teacher education: towards definition and implementation. *Teaching & Teacher Education*, 11(1), 33–49.

Klenowski, V. (2000). Portfolios: promoting teaching. *Assessment in Education*, 7(2), 215–236.

Lieberman, A. (1996). Pratices that suport teacher development: transforming concepcions of professional learning. In M. W. McLaughlin & I. Oberman (Eds.), *Teacher learning: New policies, new pratices*. New YorK: Teachers College Press

Passos, C.; Nacროarto, A.; Fiorentini, D.; Miskulin, R.; Grando, R.; Gama, R. Megid M. A.; Freitas, M. T.; Melo, M. (2006). Desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática: Uma meta-análise de estudos brasileiros. *Quadrante*, 15, 193–219.

Rodgers, C. (2002a). Seeing student learning: teacher change and the role of reflection. *Harvard Educational Review*, 72(2), p. 230–253.

Rodgers, C. (2002b). Defining reflection: Another look at John Dewey and reflective thinking. *Teachers College Record*, 104(4), 842–866.

Schön, D. (1983). *The reflective practioner: How profesionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.

Serrazina, L., Canavarro, A., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Saramago, M. J. (2005). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo*. (documento não publicado)

Zeichner, K. (1993). *A formação reflexiva de professores: Ideias e práticas*. Lisboa: Educa.

Cristina Martins
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança

Leonor Santos
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

APM – 2011

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2011

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2011

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

01 **Práticas de colaboração e a condição do professor**
Maria Helena Martinho

Artigos

03 **A Matemática escondida nos livros**
Helena Rocha, Isabel Oitavem

11 **Representações em tarefas algébricas no 1.º ciclo**
João Pedro da Ponte, Isabel Velez

17 **Ângulos rectos e paralelismo**
Cristina Loureiro

19 **Desenhar estrelas num minuto**
Maria Cecília Domingues

23 **Entrevista a João Pedro da Ponte**

26 **EIEM Póvoa de Varzim**
Carlos Miguel Ribeiro

28 **A Álgebra «dos» sapos**
Ana Caseiro

32 **A Matemática nos Primeiros Anos – XIV Encontro Nacional**
Florinda Costa, Maria José Bóia

45 **Reflectir no âmbito do PFCM: Algumas ideias emergentes**
Cristina Martins, Leonor Santos

Secções

18 **O problema deste número** *José Paulo Viana*
Um número de restos

35 **Tecnologias na educação matemática**
Jogos matemáticos na internet, *Helena Rocha*
Novas Ferramentas, dentro e fora da Sala de Aula: Uma exploração com o GeoGebra, *Rui Pedro Raposo*

43 **Materiais para a aula de Matemática**
ISBN – o código matemático dos livros

08 **Pontos de vista, reacções e ideias...**
«O fabuloso Teorema de Pitágoras», *Fernando Menino e Sandra Guerreiro*
Jacob Steiner e o problema da menor malha viária: uma resolução utilizando o Cálculo Diferencial, *Marcos de Miranda Paranhos, Ana Lúcia Manrique*