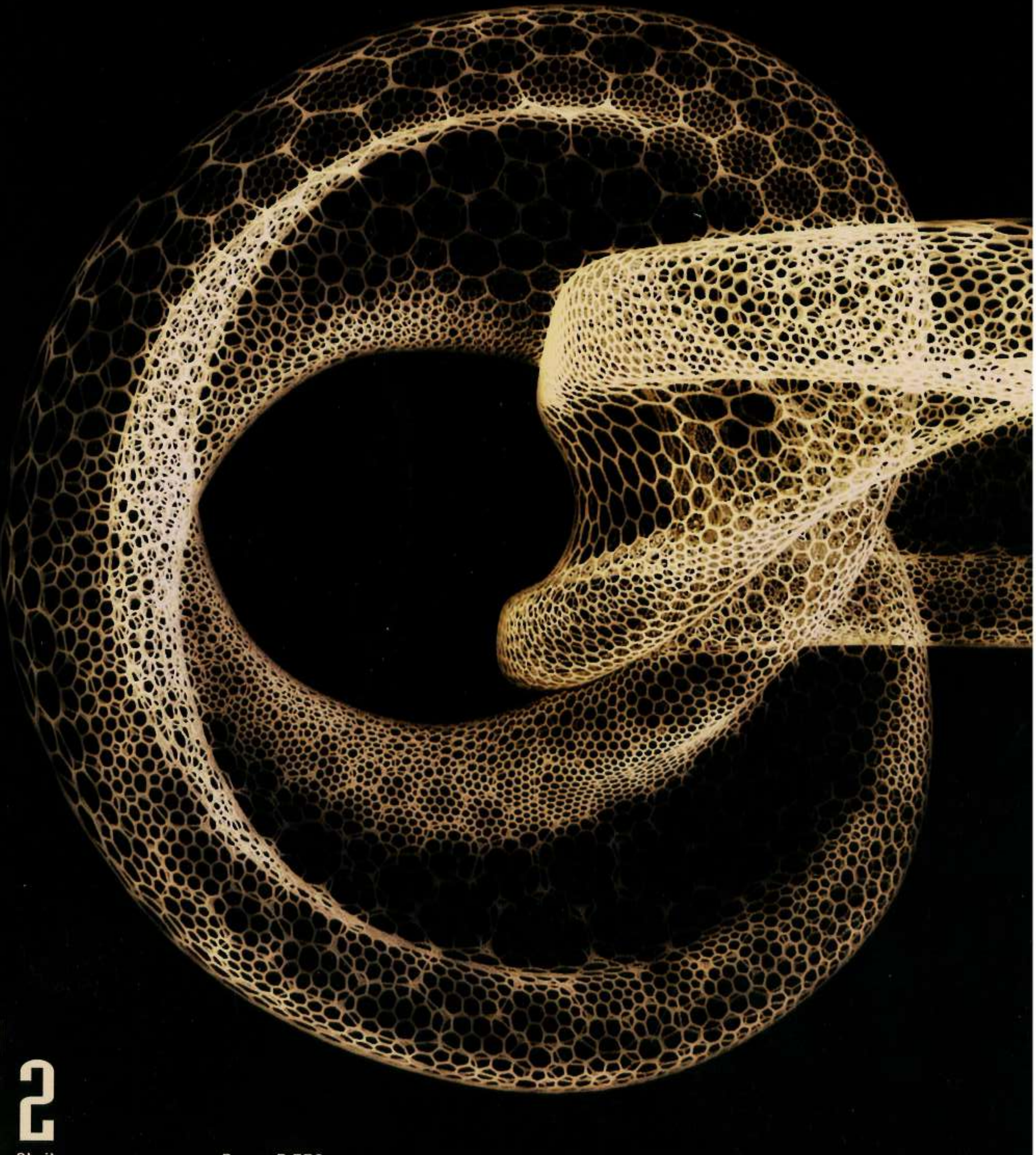
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



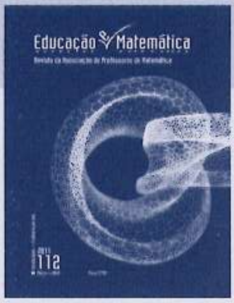
Periodicidade ∞ 5 números por ano

2011

112

Março ∞ Abril

Preço 5,75€



ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora	Isabel Rocha
Subdirectora	Manuela Pires
Redacção	Adelina Precatado
	Ana Luísa Paiva
	Ana Paula Canavarro
	Alice Carvalho
	António Fernandes
	Cláudia Canha Nunes
	Cristina Tudella
	Helena Amaral
	Helena Rocha
	Nuno Candeias
	Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Abril 2011
Tiragem 3000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Agradecimento

O José Duarte foi colaborador permanente na área das Tecnologias na Educação Matemática, desde o número 92 (Março/Abril de 2007). A Redacção agradece toda a disponibilidade e empenho que o Zé Duarte colocou na organização desta secção durante estes anos.

A partir do número 114, a responsabilidade pela respectiva secção será de António Domingos.

Sobre a capa

A figura na capa deste número pode lembrar certos «padrões» que se manifestam na natureza, e.g. a estrutura esquelética de um radiolário. A verdade é que há muito pouco de natural no objecto representado — duas «bandas de Mobius» entrelaçadas. Mais precisamente, trata-se do seu «esqueleto», produzido depois de se fixar um conjunto de pontos dessa superfície e calculando o respectivo diagrama de Voronoi. Este tipo de diagramas traduz a solução para um problema de optimização comum pois, dado um número finito de pontos *P, Q, R*, ... numa superfície, o diagrama de Voronoi que, apresenta uma decomposição poligonal dessa superfície, possui a seguinte propriedade fundamental: cada ponto *P* inicialmente dado, pertence a uma única célula da decomposição e, em cada célula, os seus pontos são exactamente aqueles pontos da superfície que distam de *P* menos do que de quaisquer dos outros pontos dados.

Impõe-se a pergunta: o que é «ser natural»? Pode, afinal, uma tal noção ser caracterizada intrinsecamente sem qualquer referência à acção humana? ...

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

António José Mendes, António Moura, Armando Severino, Celina Pereira, Cláudia Carvalho, Conceição Rodrigues, Cristina Leiria, Cristina Loureiro, Eduarda Moura, Eduardo Cunha, Elsa Barbosa, Guida Dias, João Cavaleiro, João Filipe Matos, João Pedro da Ponte, José António Fernandes, Luís Reis, Manuel Teles Lagido, Marília Pires, Paulo Ferreira Correia, Rui Feiteira.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

O Currículo de Matemática e o Tempo

A reorganização curricular do ensino básico de 2001, que agora faz 10 anos, alterou a organização dos tempos lectivos dedicados à disciplina de Matemática, de 4 períodos semanais de 50 minutos, passou-se para 4 tempos lectivos de 45 minutos, mas com a possibilidade (desejável) de se organizarem em dois blocos de 90 minutos ou um bloco de 90 e dois de 45. Receou-se que se tivessem «perdido» 20 minutos do já «escasso tempo» para a Matemática, mas os blocos de 90 abriam a perspectiva de melhor gestão do tempo. Pretender-se-ia também que esses preciosos minutos fossem recuperados ou até ultrapassados de diversas formas. Uma delas derivava da própria concepção de desenvolvimento curricular assente na definição de competências por ciclo, e por cada área disciplinar ou disciplina, que no caso específico da competência matemática, se desenvolveria também «na combinação adequada do trabalho em Matemática com o trabalho noutras áreas do currículo». O tempo da área de projecto foi, sem dúvida, onde muitas escolas pensaram que esse trabalho podia ser feito e daí os professores de Matemática estarem muito envolvidos nessa área curricular não disciplinar.

Se por um lado se alterou a gestão dos tempos curriculares de cada área, por outro, as experiências de aprendizagem propostas no Currículo Nacional, como a diversificação da natureza das tarefas e o reforço da integração das tecnologias, tornaram mais exigente o trabalho do professor. Que equilíbrio estabelecer entre elas? Como apostar em tarefas que «vivem» da actividade desenvolvida pelos alunos? E gerir a discussão à volta dessa actividade? ... É nestes aspectos, entre outros, que incide a reflexão dos docentes do 3.° ciclo acerca dos resultados dos seus alunos no exame nacional realizado em 2005, ao considerar entre as explicações para os resultados, «a extensão demasiada do programa e/ou insuficiente carga horária; a dispersão curricular existente» (relatório do Ministério da Educação), para diversificarem o trabalho na sala de aula.

As escolas procuraram organizar-se para responder a estes problemas, em articulação com medidas de iniciativa ministerial (Programa de Formação Contínua em Matemática; Plano da Matemática; ...) e reorganizando os tempos curriculares não disciplinares, daí que as aulas de Estudo Acompanhado passassem, em muitas instituições, a aulas de Matemática. Mas é assim que queremos resolver o problema? Serão estas medidas suficientes?

Neste mesmo ano, tive oportunidade de participar num colóquio internacional, que se realizou em França, «Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs», onde houve oportunidade de comparar os tempos curriculares da matemática (a nível do nosso 1.° e 2.° ciclos) relativamente ao tempo total dos alunos em actividades de ensino: Alemanha, 21%; República Checa, 23%; França entre 19 e 21 %; ... e a mim coube-me apresentar os nossos números, na altura apenas do 2.° ciclo (no 1.° ciclo não estavam definidos): cerca de 12%. Estas percentagens diminuíam a partir deste ciclo, mas na generalidade era definido um número mínimo de horas, visto que as escolas têm um crédito de horas para atribuir, que se situava acima de 14%.

Mas pensarão alguns que eu não estou a trazer nada de novo, com esta reflexão. Talvez não, mas continua a ser necessária, quando estes argumentos já se começam a ouvir de novo, em relação ao recente Programa de Matemática do Ensino Básico.

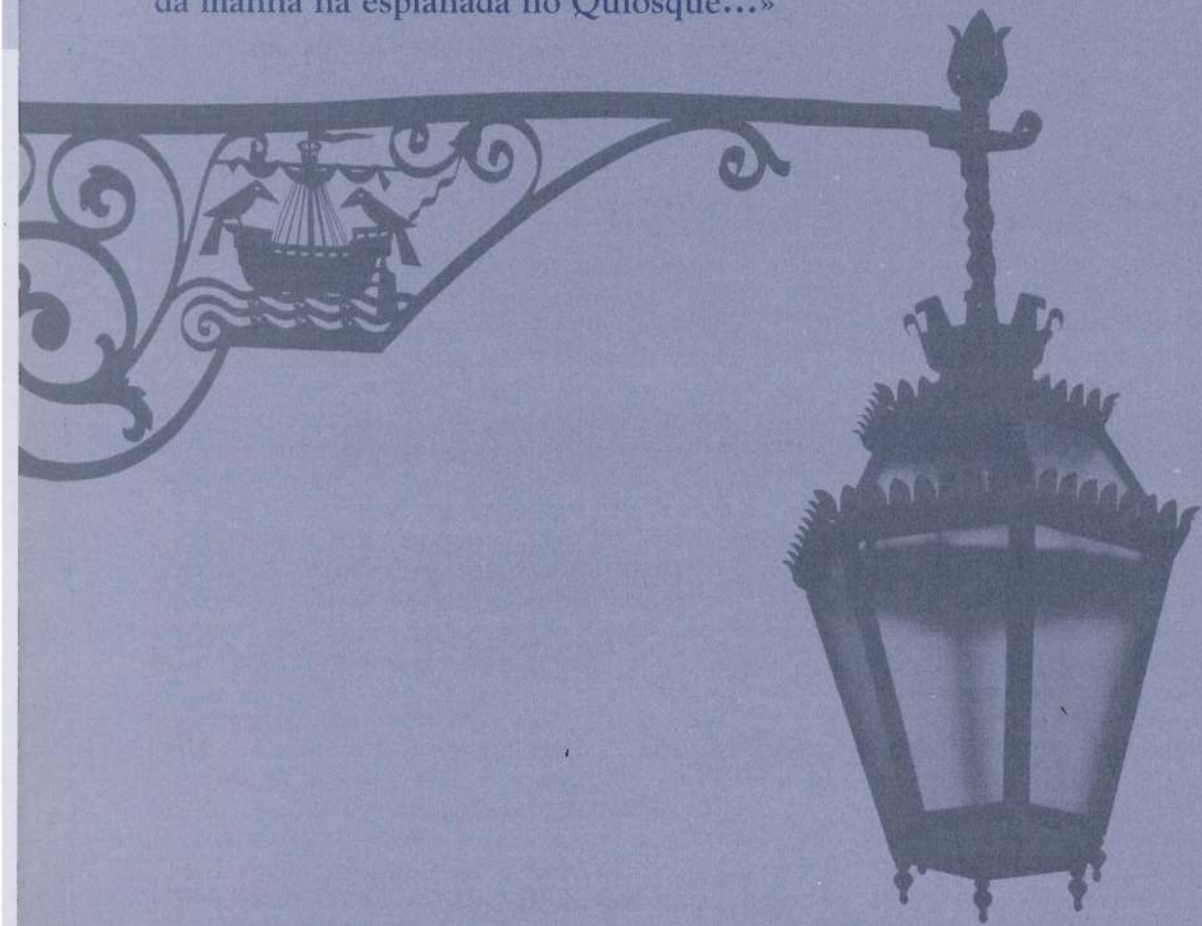
Basta ler, por exemplo, alguns editoriais do APM*informação* (Março de 2006: 3.° ciclo, um contributo para o debate; Setembro de 2007: o reajustamento do PMEB em debate; Fevereiro de 2010: quanto dura uma hora?), ler vários artigos da EM, como sejam os da revista temática sobre «Conexões», em que, num deles, Adelina Precatado refere que «é também indispensável algum tempo, o tempo para trabalhar em sala de aula, o tempo para o professor poder ajudar os alunos com as tais «dicas» e desafios em vez de responder à velha pergunta «stora o que é que é para fazer?»

Logo temos mesmo de enfrentar esta questão do Tempo, sem esquecer que as dificuldades na gestão do Currículo não são apenas uma questão de tempo, mas também ...

Isabel Rocha
ESECS/Instituto Politécnico de Leiria

«Estamos no largo de Camões, carinhosamente apelidado apenas de «largo» e o ponto de encontro preferido dos lisboetas. Há gente a beber «a bica» aproveitando a luz clara da manhã na esplanada no Quiosque...»

Inês Pintassilgo



ProfMat 2011

Nos próximos dias 5, 6 e 7 de Setembro o ProfMat regressa, à cidade das sete colinas, a nossa capital, a nossa Lisboa. A 7 e 8 teremos o XXII SIEM. O Instituto de Educação e a Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa acolherão o encontro, continuando a promover a troca de experiências e a discussão de temas que fazem parte da vida dos professores de Matemática.

Num formato diferente do habitual, em que procuramos uma aproximação entre professores e investigadores, faremos uma tarde comum ao XXII SIEM, constituída por um painel e uma conferência.

Além das habituais conferências, painéis, sessões práticas e de discussão, este ano teremos, numa sessão plenária, a apresentação de um projecto, dando a conhecer o seu contributo original para a Didáctica da Matemática.

Faça parte dos dinamizadores do nosso encontro: pegue naquele projecto que desenvolveu, na tarefa que os alunos adoraram e com a qual aprenderam num contexto significativo, e partilhe a sua experiência com outros colegas e ponha-se a par do que está a ser feito pela nossa Associação. Porque não?!

As emoções do primeiro ProfMat farão parte das exposições. Teremos oportunidade de conhecer mais de perto um matemático que teve uma importância decisiva no ensino — George Pólya. Também proporcionaremos uma viagem no tempo através das diferentes ferramentas de cálculo concebidas pelo Homem, bem como a projecção de filmes relacionados com a Matemática.

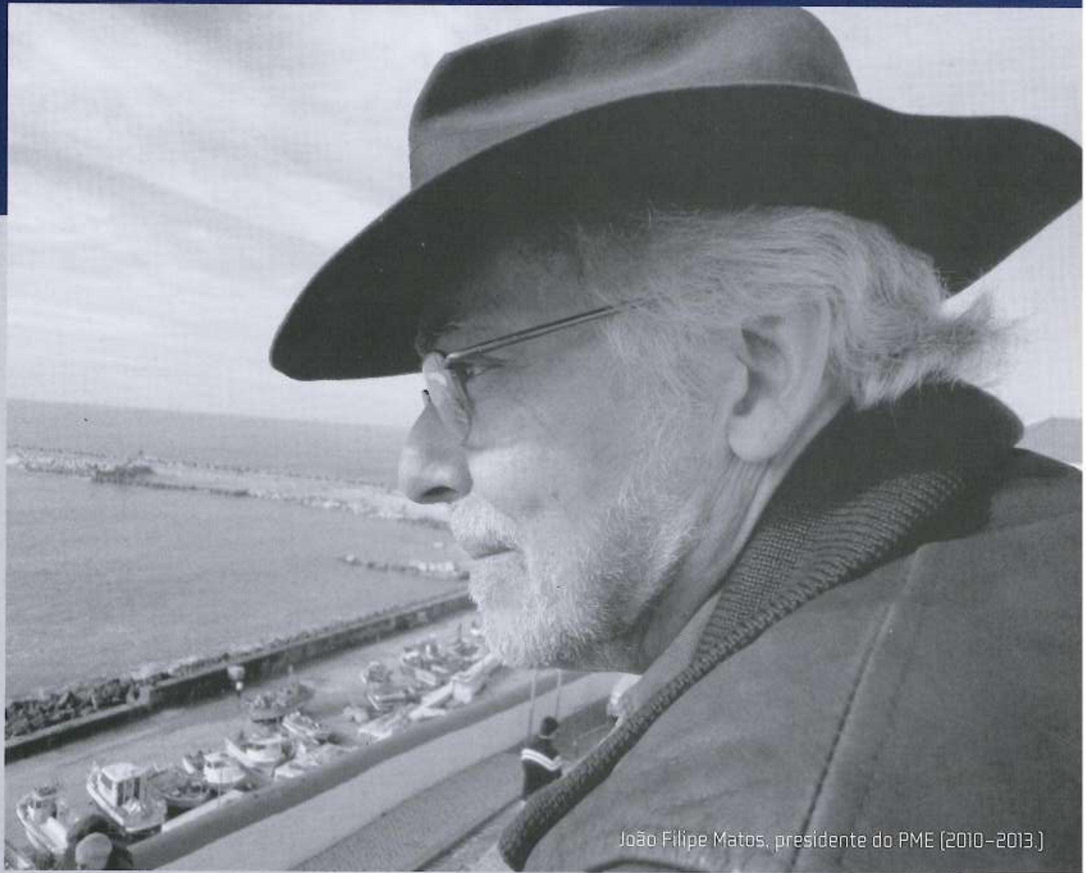
E quem será capaz de resistir a um piquenique ao pé do lago, no fim de um dia de trabalho? O ideal para relaxar, descontrair e conviver. Porque são estes momentos que também fazem o ProfMat.

Estas são só algumas dicas para o desafiar a estar connosco no início de Setembro. Para mais informações consulte o sítio http://www.apm.pt/encontro/profmat2011.php

Contamos consigo!

Comissão Organizadora do ProfMat 2011

Entrevista



João Filipe Matos, presidente do PME (2010–2013)

João Filipe Matos, Professor Associado com Agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa foi, em Julho de 2010, eleito presidente do PME para um mandato de três anos.

O PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education) é a maior e mais prestigiada organização internacional dedicada à Investigação sobre o ensino e aprendizagem da Matemática. Fundado em 1976, este grupo – afiliado do ICMI e que reúne anualmente em países diferentes – é, pela primeira vez na sua história, presidido por um português, sócio da APM e que desde o seu início tem contribuído, de forma activa, para o debate de ideias no seu seio.

A Educação e Matemática (EM) pediu a João Filipe Matos que nos falasse sobre o PME e a forma como encara esta nova experiência, numa entrevista via e-mail, conduzida por Adelina Precatado e Paulo Dias. Agradecemos-lhe a disponibilidade com a certeza de que as palavras e as ideias que nos deixa, bem como o seu optimismo crítico relativamente aos problemas da educação matemática, serão um contributo importante e mobilizador para o debate que ainda é preciso fazer entre os professores de Matemática portugueses.

PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION

PME NEWSLETTER

February/March 2011

IMAGINE....

Message from PME President João Filipe Matos

It has become widely recognized that mathematics is really in operation and is critical in many social practices. And the same applies to mathematics education as part of everyday interaction and communication although we certainly value mathematics education taking place at school. This leads to key questions – what can mathematics and mathematics education do to bring to place a better world? What can we learn from history of the social world and its relationships to mathematics and mathematics education? How do our actions as mathematics educators impact on the world?

If we agree that learning is the most critical source of stability and sustainability that helps to promote lifelong development in the social world in all dimensions of the person and if we assume that mathematics is a powerful domain in shaping the future, our responsibility as mathematics educators may gain new dimensions and give birth to new forms of interpreting our role in society. I include in our responsibilities the need to assure that people learn and appropriate mathematics and that in doing so people are empowered and that mathematics education contributes to creativity, to produce new forms of formulating problems, new ways of working towards solutions and understanding the models that rule the world, and to create real conditions of participation and democracy.

PME community has a word to say on that dream. Our goal of understanding how mathematics education operates, how teachers and students develop and learn mathematics, is certainly aligned with the need for a better world where financial and social crises and threats to peace and quality of life are understood and prevented.

You may say that I'm a dreamer
But I'm not the only one.
Imagine, John Lennon (1971)

PME ***Message from the Editors***

Welcome to our Newsletter of February/March 2011! It is difficult to believe that in a few months PME 35 will be upon us.

Inside this Issue

Interview with Peter Liljedahl	2
IC Portfolio Group Reports	4

EM: João Filipe, qual é a principal actividade do International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)?

O PME foi fundado em 1976 em Karlsruhe na Alemanha por um conjunto de investigadores de diversos países com formação em matemática, em psicologia e em educação. Os grandes objetivos do PME são a promoção de contactos internacionais e a troca de informação científica no campo da educação matemática, a promoção e o estímulo à investigação interdisciplinar naquela área, e a procura de um aprofundamento da compreensão dos aspectos psicológicos do ensino e aprendizagem da matemática. Mas o PME como grupo não se restringe atualmente à investigação em educação matemática apenas com um enfoque da psicologia, há diversos outros enquadramentos que coexistem como por exemplo as abordagens sociológicas e antropológicas aos problemas do ensino e aprendizagem da matemática.

O PME é um grupo internacional que acolhe atualmente professores e educadores e investigadores em educação matemática e matemáticos com interesse na investigação nesta área, de cerca de 120 países. A realização do congresso anual — sempre num país diferente e procurando percorrer os diversos continentes de uma forma regular — é o ponto alto da atividade do grupo onde são apresentadas cerca de 350 a 400 comunicações, onde decorrem inúmeros grupos de trabalho e de discussão e onde a troca de experiências sobre o ensino e aprendizagem da matemática é imensamente profícua e estimulante. À parte do congresso anual, o PME organiza estudos no quadro da atividade do ICMI (grupo em que é afiliado), prepara números temáticos da revista internacional Educational Studies in Mathematics e contribui através de muitos dos seus membros para a publicação de obras de referência no campo da educação matemática.

EM: O que significa para ti ser eleito presidente deste prestigiado grupo de investigação? O que faz o presidente do PME?

Ter sido eleito Presidente do PME é uma enorme honra na medida em que, como disseste, o PME é o grupo internacional mais prestigiado na investigação em educação matemática em todo o mundo. Mas é ao mesmo tempo uma enorme responsabilidade uma vez que o meu entendimento é que o Presidente de uma organização deste tipo — uma organização viva, com uma variedade cultural muito grande, com pessoas que realizam investigação numa variedade de temas e com enfoques muito diversos — deve constituir-se num elemento que promova as ações que permitam ao grupo atingir os seus objetivos e desenvolver-se e aperfeiçoar-se.

O Presidente do PME coordena diversas atividades tais como a preparação do Congresso anual, as relações com outros grupos e organizações, o suporte aos membros em países em que a educação matemática tem menor expressão, etc. por exemplo, este ano realiza-se o 35° Congresso do PME na Turquia, em Ancara, onde se espera mais de 600 participantes e onde serão apresentadas cerca de 450 comunicações e 125 posters. Isto significa que a participação dos membros é muitíssimo intensa e a gestão da dimensão científica desta operação torna-se muito complexa. Todas as propostas de comunicação são apreciadas e avaliadas por 3 membros do PME e depois revistas pela Comissão de Programa e isto gera um processo complexo de monitorização da qualidade da investigação que é apresentada e publicada no PME.

EM: Na PME *Newsletter* de Novembro/Dezembro 2010, a tua mensagem tem como título «Making a difference with critical optimism in Mathematics Education research». Queres explicar melhor o sentido destas palavras?

Trata-se da primeira *Newsletter* que era publicada depois da minha eleição em Julho do ano passado e competia-me escrever uma mensagem aos membros do PME. Na fase em que se encontram muitos países — uns por razões derivadas da crise financeira que todos conhecemos, outros atravessados por conflitos diversos dos quais não se vê um fim — parece-me que é fundamental adoptar um posicionamento de otimismo crítico. Se concordamos que a matemática constitui uma construção e um produto humano imprescindível para o mundo social em que vivemos, que os modelos matemáticos que determinam a nossa vida diária de uma forma mais ou menos direta, é muito importante que a formação e a competência matemática dos cidadãos seja desenvolvida e assegurada. Isso passa naturalmente pela escola e pelos professores. E assim sendo, é exatamente nestes momentos de crise que é preciso investir e procurar fazer a diferença aproveitando as capacidades que os professores de matemática têm de desocultar os modelos matemáticos com que toda a nossa vida e todo o desenvolvimento social se faz — e isso exige saber matemática, saber usá-la e saber aplicá-la. É por isso que me parece que é essencial ter um otimismo crítico relativamente aos problemas da educação matemática e foi essa mensagem que quis deixar aos membros do PME.

As peripécias de três resolvedoras de um problema

Cláudia Carvalho Cristina Leiria Guida Dias

No decorrer de uma das aulas de *Complementos de Didáctica da Matemática II*, o professor referiu o problema dos triângulos coloridos proposto na Revista *Educação e Matemática* (ver figura 1), número 105, e sugeriu a sua resolução. O problema apresenta um enunciado simples e apelativo, o que logo nos despertou interesse. Após algumas tentativas e muitos cálculos, conseguimos a primeira demonstração que considerámos «pouco elegante». Tentámos então obter uma outra, por outro caminho, e acabámos com três demonstrações do problema que recorrem a tópicos distintos da Matemática.

Neste texto pretendemos partilhar uma reflexão sobre as peripécias vividas no decorrer da resolução deste problema. Apresentamos novamente o enunciado do problema (Figura 1), os pontos-chave de cada demonstração que encontrámos, o que passámos para as obter e, também, o que sentimos quando as obtivemos (ou não!).

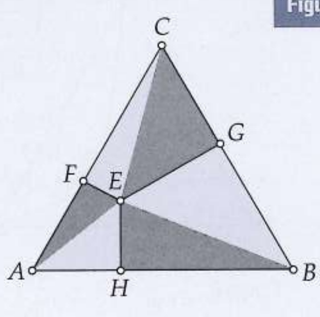
Triângulos Coloridos

O professor disse aos alunos para desenharem um triângulo equilátero $[ABC]$ e para escolherem um ponto qualquer E no seu interior. Depois pediu-lhes que unissem esse ponto com cada um dos vértices e que, também a partir de E, traçassem os segmentos perpendiculares a cada um dos lados do triângulo.

O triângulo inicial ficou assim dividido em seis triângulos mais pequenos que foram depois pintados alternadamente de vermelho e de amarelo.

A Catarina garante que a área total dos triângulos vermelhos é igual à dos amarelos mas a Diana afirma que isso vai depender da posição do ponto E. Quem tem razão?

Figura 1



A primeira reacção perante este problema foi verificar qual das duas amigas tinha razão recorrendo a programas de Geometria Dinâmica (GSP/Geogebra). Movendo o ponto E, ganhámos a convicção de que a Catarina tinha razão, isto é, que a área total dos triângulos azuis é igual à área total dos triângulos brancos, independentemente da posição que o ponto E ocupa no interior do triângulo.

Sabíamos que as ferramentas usadas, com recurso ao arrastamento de um ponto, não nos permitem a generalização pretendida, apenas nos possibilitam fazer conjecturas. Pois, tal como afirma Eduardo Veloso (p. 65), «na verdade, nada é contínuo nos computadores, tudo é discreto. Por maior que seja a resolução de um ecrã, trata-se sempre de uma grelha $m \times n$, com m e n finitos. Assim o ponto P, por arrastamento, passa apenas por um número finito de posições».

Após a primeira abordagem ao problema, partimos para a demonstração da igualdade verificada (e conjecturada) de modo a que não restassem dúvidas quanto à sua validade. A esse respeito, Davis e Hersh (p. 149) referem que «a demonstração traz consigo a respeitabilidade. A demonstração é a garantia de autoridade.»

Tentámos diferentes caminhos, desde o teorema de Heron, conceitos de geometria plana e o recurso à geometria analítica. O enunciado simples, e o facto de não termos uma resolução imediata, despertou-nos a curiosidade e aumentou-nos a vontade de o resolver, tendo então sido encarado por nós como um forte desafio matemático.

Andámos com alguma frequência em círculos e por atalhos que não levavam ao fim desejado ou conduziam à relação $\text{Área}_{\text{amarela}} + \text{Área}_{\text{vermelha}} = \text{Área}_{\text{triângulo }[ABC]}$, sem, no entanto, provar o que se pretendia, isto é, que $\text{Área}_{\text{amarela}} = \text{Área}_{\text{vermelha}}$.

Nas tentativas de resolução, foi possível estabelecer várias relações, algumas muito curiosas, como, por exemplo (figura 2):

— $h_1 + h_2 + h_3$ é igual à altura do triângulo $[ABC]$;

— $h_1 + h_2 + h_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l$

— $a + b + c = \dfrac{3}{2}la$

(sendo l a medida do comprimento do lado do triângulo $[ABC]$)

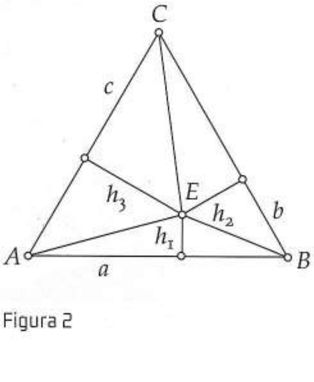


Figura 2

Depois de algumas tentativas, o recurso à geometria analítica possibilitou obter a primeira demonstração (Demonstração 1). Esta exigiu muitos cálculos, tornando-se trabalhosa e de aspecto «pouco estético». Percorremos os passos que Polya define para a resolução de um problema: compreendemos bem o enunciado, elaborámos um plano de resolução, executámos o plano, perdendo-nos por vezes em atalhos que não nos levaram a lado nenhum, verificámos cuidadosamente cada passagem feita e, depois de obtida a demonstração, reflectimos sobre todo o percurso percorrido e concluímos que, apesar de termos chegado à solução, não sentíamos, como esperávamos, a sensação de um trabalho (bem) feito, de um trabalho concluído. Foi uma sensação contraditória: estávamos satisfeitas porque a demonstração implicou cálculos que tiveram de ser feitos muito concentradamente, sem sabermos se seriam profícuos ou não, e, depois das simplificações feitas, foi com grande prazer que vimos estabelecida a igualdade pretendida. No entanto, intuitivamente, e como resultado de muitos anos de actividade matemática, sabíamos que era possível obter uma demonstração mais simples, com menos cálculos, esteticamente mais interessante.

Segundo Henry Poincaré (citado na Brochura de Didáctica, p. 38) «a lógica, que é a única que nos pode fornecer a certeza, é o instrumento da demonstração; a intuição é o instrumento da invenção. Assim, a lógica e a intuição têm, cada uma delas, o seu papel. Ambas são indispensáveis.» Por isso, agarradas à intuição que nos impedia de dar o problema por resolvido, considerámos que o desafio se mantinha e partimos novamente à descoberta. Nas nossas reflexões, concluímos que este processo é um pouco o reflexo de como sentimos a Matemática — como fonte de incertezas mas também de conhecimento e de prazer — e a resolução de problemas — como uma actividade humana que decorre de um diálogo entre pessoas que os tentam resolver.

Seguindo um outro caminho chegámos à segunda demonstração (Demonstração 2). O recurso à trigonometria possibilitou encontrar uma relação entre a, h_1 e h_3 e, de modo análogo, escrever uma relação entre b, h_2 e h_1 e outra entre c, h_3 e h_2. Esta demonstração compensou o envolvimento e o entusiasmo depositados neste problema pelo prazer de criar Matemática, conseguindo uma solução que nos deixou satisfeitas — usámos um artifício novo para nós e a sua descoberta encheu-nos de confiança.

Enquanto explorávamos possíveis resoluções, contagiámos alguns amigos que também se envolveram na procura de uma solução mais simples. Um deles apresentou uma demonstração geométrica, sem palavras, e de uma enorme simplicidade. Para nós «a mais bonita». Esta última demonstração encerra em si «a ideia luminosa», o «clic» a que aspirávamos quando insistimos na procura de uma outra solução «mais bela». Como refere Poincaré, muitas das descobertas matemáticas resultam de flashes após um período de tempo de reflexão sobre determinado assunto. «Muitas vezes, quando se trabalha num problema difícil, não se consegue nada da primeira vez que se inicia a tarefa. Mais tarde, depois de um descanso mais ou menos longo, sentamo-nos de novo à mesa e, durante a primeira meia hora, continuamos sem encontrar nada. Depois, de repente, a ideia decisiva surge perante a mente ...» (Poincaré, 1996, p. 10). Neste caso, a ideia consiste em traçar as rectas paralelas a cada um dos lados do triângulo equilátero passando no ponto E

(Demonstração 3). Essas rectas dividem o triângulo equilátero em triângulos equivalentes dois a dois. Constata-se a seguir que, considerando um triângulo qualquer na «parte amarela», há um triângulo equivalente ao considerado na «parte vermelha» e, deste modo simples, prova-se que $\text{Área}_{\text{branca}} = \text{Área}_{\text{azul}}$. Mais uma vez, sentimo-nos invadidas por um misto de sentimentos: felizes por podermos admirar esta demonstração que se nos afigurava como uma obra de génio mas, também, um pouco decepcionadas por não termos sido nós a ter a ideia.

No que respeita à resolução de problemas revemo-nos em Pólya quando diz que «Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução.» (p. 14). À medida que se vão resolvendo problemas, vai-se interiorizando que os problemas matemáticos estão relacionados uns com os outros e com conhecimentos adquiridos anteriormente, onde a resolução pode proporcionar satisfação e a sua exploração não se esgota ao chegar à solução. Quando se revê o processo de resolução podem imaginar-se diversas situações: i) é possível usar o processo adoptado, ou ii) o resultado obtido, ou, iii) a partir do problema dado criar um novo problema alterando, por exemplo, as condições iniciais (o que se verificará se o ponto E não pertencer ao interior do triângulo?). Assim, a procura de solução para um problema nunca fica completamente acabada.

Concordamos que só insistindo na resolução de problemas se ganha confiança e se desenvolve a capacidade de os resolver, reforçando-se, assim, o desejo de o continuar a fazer.

Demonstrações

Apresentamos as 3 demonstrações referidas.

1) Demonstração 1

Relativamente à figura ao lado tem-se,

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{l} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}l;\ \text{Área} = \frac{l \times h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l$$

$$A = (0, 0);\ B = (l, 0);\ C = \left(\frac{l}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}l\right);\ I = (\alpha, \beta)$$

(1) Q ponto que pertence a $[AB]$ e à recta perpendicular a $[AB]$ que passa pelo ponto Q tem coordenadas $(\alpha, 0)$

(2) P pertence a $[AC]$ e à recta r perpendicular a $[AC]$ que passa em I; AC é a recta de equação $y = \sqrt{3}x$ e r a recta de equação

$$y - \beta = -\frac{1}{3}(x - \alpha)$$

Se a abcissa de P for a, a respectiva ordenada é $\sqrt{3}a$.
Substituindo na equação de r obtem-se:

$$\sqrt{3}a - \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}(a - \alpha) \Leftrightarrow 2a = \sqrt{3}\beta + \alpha \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4}$$

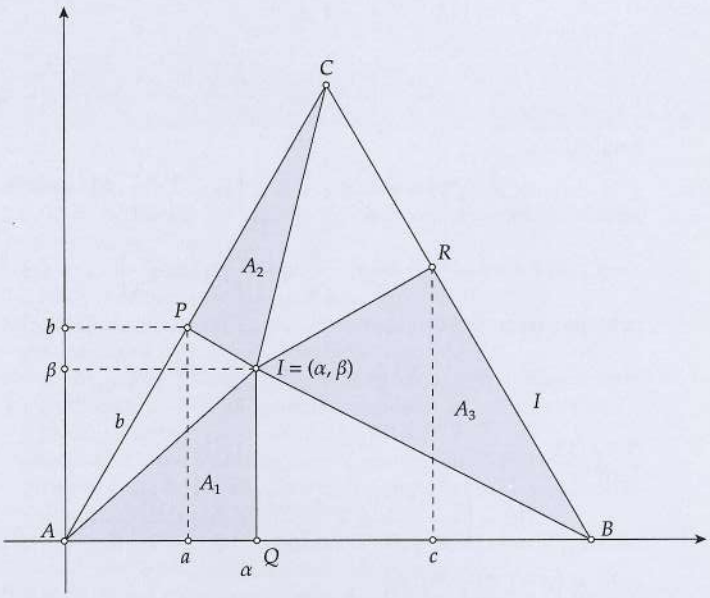
substituindo na equação da recta AB temos,

$$y = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4}\right)$$

ou seja,

$$P = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{\alpha}{4}, \frac{3}{4}\beta + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\right)$$

(3) R pertence à $[CB]$ e à recta s perpendicular a $[CB]$ que passa em I; a recta CB tem equação $y = -\sqrt{3}(x - l)$ e,



$$\overrightarrow{CB} = \left(\frac{l}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}l\right).$$

Por outro lado, a equação da recta s é

$$y - \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \alpha)$$

Se a abcissa de R for c, vem $y = -\sqrt{3}c + \sqrt{3}l$, substituindo na equação de s obtem-se:

$$-\sqrt{3}c + \sqrt{3}l - \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(c - \alpha) \Leftrightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{3}{4}l + \frac{\alpha}{4}$$

substituindo na equação da recta CB obtem-se,

$$y = -\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\beta + \frac{3}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) + \sqrt{3}l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{4}l + \frac{3}{4}\beta - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha$$

pelo que,

$$R = \left(\frac{3}{4}l + \frac{\alpha}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\beta, \frac{\sqrt{3}}{4}l - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta\right)$$

Uma vez que através de $\|\vec{x}\times\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\times\|\vec{y}\|\times \operatorname{sen}\theta$ se obtém a área do paralelogramo de «lados» $\vec{x}$ e $\vec{y}$, então, considerando o módulo do produto vectorial, a área do triângulo será $\frac{\|\vec{x}\times\vec{y}\|}{2}$.

As áreas consideradas são então:

Área A1:

$$\|\overrightarrow{AQ}\times\overrightarrow{AI}\| = \alpha\beta$$

Área A2:
como

$$\overrightarrow{CP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta+\frac{\alpha}{4}, \frac{3}{4}\beta+\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\right) - \left(\frac{l}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta+\frac{\alpha}{4}-\frac{l}{2}, \frac{3}{4}\beta+\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$$

e,

$$\overrightarrow{CI} = \left(\alpha-\frac{l}{2}, \beta-\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$$

resulta,

$$\|\overrightarrow{CP}\times\overrightarrow{CI}\| = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\beta+\frac{\alpha}{4}-\frac{l}{2}\right)\left(\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}l\right) - \left(\frac{3}{4}\beta+\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)\left(\alpha-\frac{l}{2}\right)$$

pelo que, feitas as contas,

$$\|\overrightarrow{CP}\times\overrightarrow{CI}\| = \frac{\sqrt{3}}{4}\beta^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2 - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\beta l}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha l$$

Área A3:
Tem-se

$$\overrightarrow{BR} = \left(-\frac{l}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\beta+\frac{\alpha}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}l+\frac{3}{4}\beta-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\right)$$

e, $\overrightarrow{BI} = (\alpha - l, \beta)$, pelo que:

$$\|\overrightarrow{BR}\times\overrightarrow{BI}\| = \left(-\frac{l}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\beta+\frac{\alpha}{4}\right)\beta - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}l+\frac{3}{4}\beta-\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\right)(\alpha-l)$$

ou seja,

$$\|\overrightarrow{BR}\times\overrightarrow{BI}\| = -\frac{l\beta}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\beta^2 + \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}l\alpha - \frac{3}{4}\beta\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 + \frac{3}{4}\beta l - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha l$$

Soma da área colorida é então dada por,

$$A1 + A2 + A3 = \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\beta^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\alpha^2 - \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\beta l}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha l - \frac{l\beta}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}\beta^2 + \frac{\alpha\beta}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}l\alpha - \frac{3}{8}\beta\alpha - \frac{\sqrt{3}}{8}\alpha^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}l^2 + \frac{3}{8}\beta l - \frac{\sqrt{3}}{8}\alpha l$$

ou seja,

$$A1 + A2 + A3 = \frac{\sqrt{3}}{8}l^2 - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

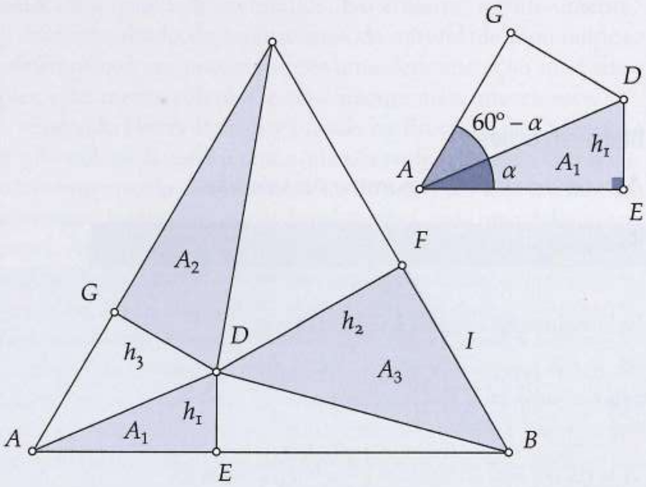
concluindo-se que,

$$A1 + A2 + A3 = \frac{1}{2}\text{Área}[ABC]$$

pelo que, as áreas coloridas e não coloridas do triângulo são iguais.

2) Demonstração 2

Considereos a figura abaixo,



O triângulo $\Delta[ABC]$ é equilátero de lado l. Tem-se ainda que, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = l$ e $A\hat{B}C = B\hat{C}A = C\hat{A}B = 60°$. Além disso,

Altura do $\Delta[ABC]$: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$

Área do $\Delta[ABC] = \frac{l}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ ou $\frac{h}{2}\times\frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$

Como

$$\Delta[ABC] = \frac{\overline{AC}\times h_3}{2} + \frac{\overline{AB}\times h_1}{2} + \frac{\overline{CB}\times h_2}{2} = \frac{h\times l}{2}$$

resulta que,

$$\frac{lh_3}{2} + \frac{lh_1}{2} + \frac{lh_2}{2} = \frac{h\times l}{2}$$

ou seja, $h_1 + h_2 + h_3 = h$. Por outro lado,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h_1}{\overline{AD}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(60° - \alpha) = \frac{h_3}{\overline{AD}} \qquad (1)$$

donde,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(60° - \alpha)} = \frac{h_1}{h_3}$$

Como $\operatorname{sen}(60° - \alpha) = \operatorname{sen}60°\cos\alpha - \cos 60°\operatorname{sen}\alpha$ obtem-se

$$\operatorname{sen}(60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

De (1) vem

$$h_3 \operatorname{sen}\alpha = \frac{h_1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\Leftrightarrow h_3 \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}h_1\cos\alpha - \frac{h_1}{2}\operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(h_3 + \frac{h_1}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}h_1\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}h_1}{h_3 + \frac{h_1}{2}} = \frac{\sqrt{3}h_1}{2h_3 + h_1}$$

Sendo

$$\overline{AE} = h_1\frac{2h_3 + h_1}{\sqrt{3}h_1} \text{ e } \operatorname{tg}\alpha = \frac{h_1}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{h_1}{\operatorname{tg}\alpha}, \text{ pelo que:}$$

$$\overline{AE} = \frac{2h_3 + h_1}{\sqrt{3}}$$

De modo análogo, obtém-se

$$\overline{CG} = \frac{2h_2 + h_3}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \overline{FB} = \frac{2h_1 + h_3}{\sqrt{3}}$$

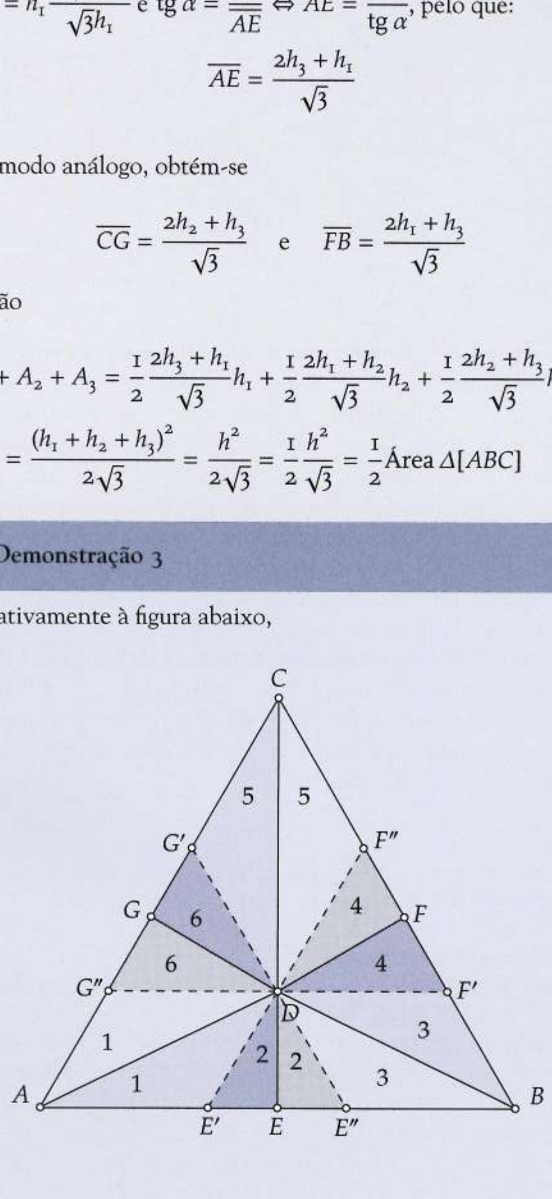
Então

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2}\frac{2h_3 + h_1}{\sqrt{3}}h_1 + \frac{1}{2}\frac{2h_1 + h_2}{\sqrt{3}}h_2 + \frac{1}{2}\frac{2h_2 + h_3}{\sqrt{3}}h_3$$

$$= \frac{(h_1 + h_2 + h_3)^2}{2\sqrt{3}} = \frac{h^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\text{Área }\Delta[ABC]$$

3) Demonstração 3

Relativamente à figura abaixo,



Observa-se que:

Área $\Delta[ADE'] =$ Área $\Delta[ADG'']$
Área $\Delta[DE'E] =$ Área $\Delta[DEE'']$
Área $\Delta[BDF'] =$ Área $\Delta[BDE'']$
Área $\Delta[DFF'] =$ Área $\Delta[DFF'']$
Área $\Delta[CDG'] =$ Área $\Delta[CDF'']$
Área $\Delta[DGG'] =$ Área $\Delta[DGG'']$

Assim

Área $\Delta[ADE]$ + Área $\Delta[BDF]$ + Área $\Delta[CDG]$ =
= Área $\Delta[ADE']$ + Área $\Delta[DEE']$ + Área $\Delta[BDF']$+
+Área $\Delta[DFF']$ + Área $\Delta[CDG']$ + Área $\Delta[DGG']$

Área $\Delta[BDE]$ + Área $\Delta[CDF]$ + Área $\Delta[ADG]$ =
= Área $\Delta[BDE'']$ + Área $\Delta[DEE'']$ + Área $\Delta[BDF'']$+
+Área $\Delta[DFF'']$ + Área $\Delta[ADF'']$ + Área $\Delta[DGG'']$

Bibliografia

Davis, P. & Hersh, R. (1995). A *experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática do Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação, DES.

Pereira, M. (2004). *As Investigações Matemáticas no Ensino-Aprendizagem das Sucessões — Uma experiência com alunos do 11.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado. Covilhã: UBI.

Poincaré, H. (1996). A Invenção Matemática. Em P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática* (pp. 7–14). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J.P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica — Ensino Secundário*. Ministério da Educação, DES.

Veloso, E. (1998). *Geometria Temas Actuais*. Ministério da Educação e IIE.

http://labvirtual.eq.uc.pt

http://portal.uninove.br

http://profesores.sanvalero.net

Cláudia Carvalho

Escola Básica Integrada João Roiz, Castelo Branco

Cristina Leiria

Escola Secundária Campos Melo, Covilhã

Guida Dias

Escola Secundária Campos Melo, Covilhã

Descobrir um exemplo gera oportunidades diversas de raciocínio[1]

Cristina Loureiro

«Em menos de dois minutos, é capaz de desenhar um quadrilátero que tenha dois ângulos rectos e nenhum par de lados paralelos?» (Discroll, *et al.*). Os autores do artigo em referência apresentam três resoluções diferentes. Numa delas, a pessoa que resolveu a questão afirma que começou por pensar que os dois ângulos não poderiam ser adjacentes pois isso originava dois lados paralelos, concluindo assim que os ângulos rectos deveriam ser opostos e que os outros dois ângulos deveriam somar 180°. Uma segunda pessoa pensou num triângulo rectângulo que reflectiu segundo a hipotenusa, obtendo um exemplar do quadrilátero pedido (figura 1). A terceira pessoa, pensou num círculo dividido por um diâmetro, considerou um ponto *A* num dos semi-círculos e um ponto *B* no outro, ligou cada um destes pontos com os extremos do diâmetro e obteve uma solução, compreendendo assim que obteria um número infinito de soluções movendo os pontos *A* e *B* sobre os semi-círculos, sendo que todos estes quadriláteros tinham uma diagonal rígida comum (figura 2).

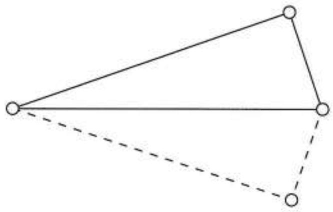


Figura 1

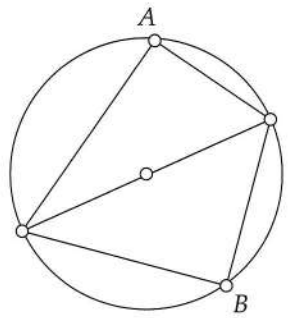


Figura 2

Este desafio aqui discutido é uma outra versão da proposta, explorada na nota anterior (Revista 109), e que era a de construir sobre a estrutura ponteada do geoplano um quadrilátero só com 2 ângulos rectos opostos. São duas discussões com orientações diferentes. Esta centra-se na discussão da diversidade de «ataque de um problema» e das diferentes resoluções geradas. A outra orientou-se para o estudo das conexões presentes no raciocínio geométrico, visto que recorreu a correspondências numéricas proporcionadas pela estrutura ortonormada do geoplano.

Para continuar esta discussão, deixo dois novos desafios de descoberta de exemplos, agora sobre uma estrutura circular representada por um geoplano circular (figura 3): (1) construção de quadriláteros com 2 ângulos rectos e sem nenhum par de lados paralelos; (2) construção de quadriláteros com um par de lados paralelos.

Como reflexão final deixo a ideia de que fazer variar a estrutura sobre a qual se formula um problema ajuda-nos a entender o potencial da estrutura física de suporte ao raciocínio geométrico. É por isso que nunca é demais frisar que os materiais manipuláveis no ensino da Matemática são um meio e não um fim. A sua escolha deve ser bastante criteriosa pois dela dependem os raciocínios que serão desenvolvidos. Voltando ao início da discussão deste artigo, as três pessoas que apresentaram três raciocínios totalmente diferentes conceberam o quadrilátero pedido com base em conhecimentos geométricos distintos e optaram por suportes visuais totalmente diferentes para encontrar um exemplo do quadrilátero pedido, no entanto, todas raciocinaram visualmente.

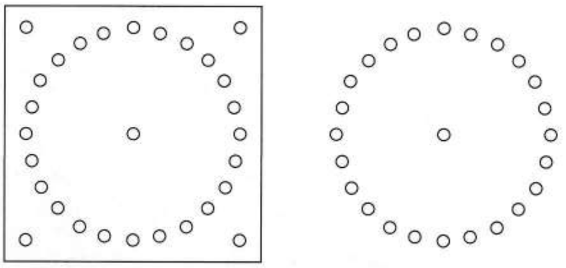


Figura 3

Nota

[1] Este artigo continua a série de textos curtos sobre ideias matemáticas importantes iniciada na revista n.° 108.

Referências Bibliográficas

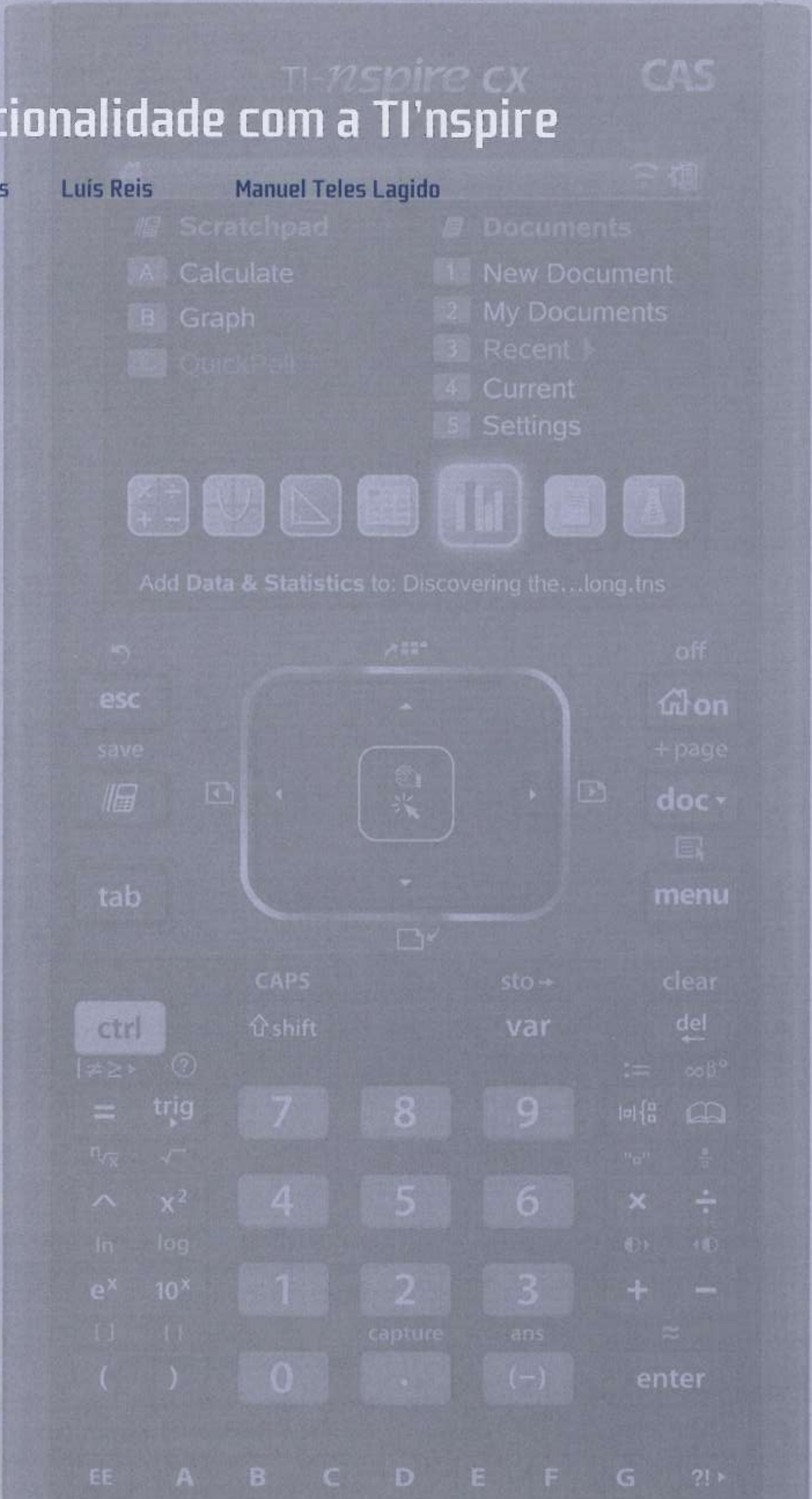
Driscoll, M., Egan, M., DiMatteo, R. W. e Nikula, J. (2009). Fostering Geometric Thinking in the Middle Grades. In Timothy V. Craine e Rubenstien Rheta (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. 71th NCTM Yearbook: 155–171. Reston: NCTM.

Cristina Loureiro

ESE de Lisboa

A proporcionalidade com a TI'nspire

António José Mendes   Luís Reis   Manuel Teles Lagido



Neste artigo pretendemos abordar conceitos de proporcionalidade direta e inversa, relacionando-os com as funções lineares e racionais, recorrendo a aplicações da unidade portátil TI'nspire: *Listas e Folha de Cálculo*, *Gráficos e Geometria*, *Notas*. Com esta abordagem pretendemos ilustrar uma atividade de modelação matemática e exemplificar a conexão entre diferentes formas de representação dos conceitos: numérica, gráfica e algébrica.

Usaremos o tratamento de dados recolhidos em duas experiências, cada uma das quais está associada a um tipo de proporcionalidade[1]. Finalmente, mostraremos a simulação das experiências na TI'nspire. Os modelos dinâmicos criados para representar a influência de certos parâmetros podem ser consultados e descarregados em anexo à versão *on-line* do artigo.

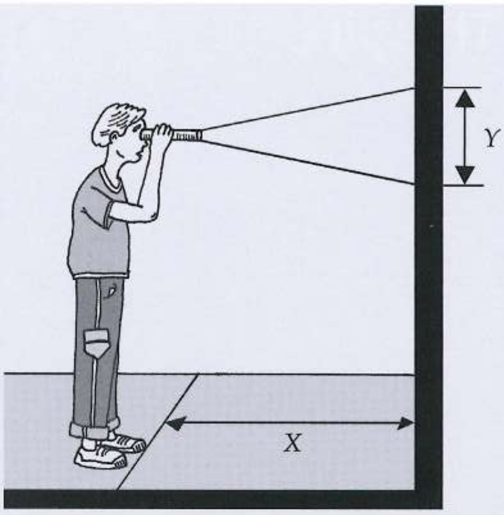


Figura 1. Experiência *Matemática por um canudo*

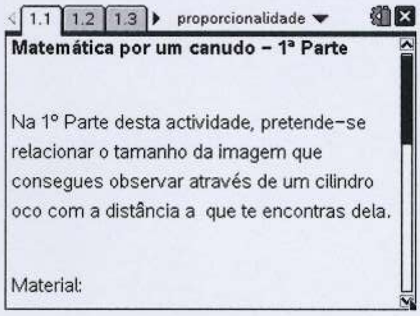


Figura 2. Enunciado da atividade na TI'nspire

Distância à parede (cm)	Comprimento de fita visível (cm)
50	13
100	25
150	35
200	47
250	59
300	73

Figura 3. Canudo fixo: dados experimentais

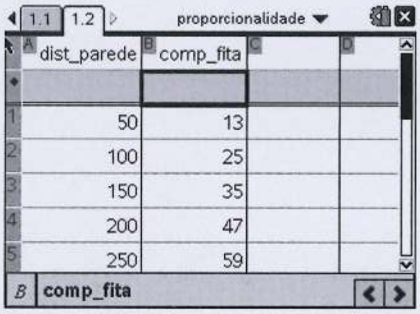


Figura 4. Listas na TI'nspire (canudo fixo)

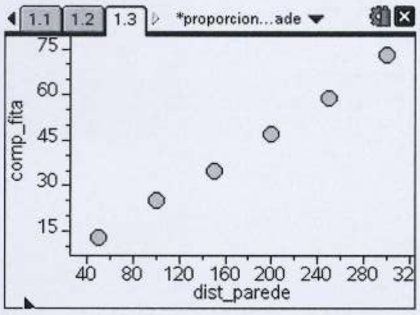


Figura 5. Gráfico estatístico (canudo fixo)

Proporcionalidade direta

Os dados resultam da experiência seguinte: observar uma fita métrica, colocada verticalmente numa parede, através de um canudo de comprimento fixo, posicionado a diferentes distâncias dessa parede (Figura 1)[2].

A unidade portátil TI'nspire permite incluir o próprio enunciado da atividade, através da aplicação *Notas* (Figura 2)[3].

Os dados experimentais constam da tabela da Figura 3.

Na TI'nspire deve-se adicionar uma nova página de listas e folhas de cálculo[4] e introduzir os dados experimentais. Deve-se colocar o cursor no topo da coluna (junto da letra A) e escrever o nome da variável independente; repete-se o procedimento na coluna B para a variável dependente (Figura 4).

Em seguida, vamos criar um gráfico[5]. Devemos associar as variáveis **dist_parede** e **comp_fita** a cada um dos eixos, clicando na área respectiva do ecrã (Figura 5).

Para definir a função que melhor se ajusta aos dados, devemos começar por identificar o tipo de proporcionalidade[6] (Figura 6).

Proporcionalidade inversa

Na segunda experiência, os dados resultam da observação da fita métrica, colocada verticalmente na parede, através de canudos de comprimento variável, posicionados a uma distância fixa dessa parede.

Os dados experimentais constam da tabela da Figura 7.

No documento já aberto na unidade portátil TI'nspire devemos criar um novo problema[7]. Desta forma, todas as variáveis e funções introduzidas não ficam associadas ao problema anterior. Os procedimentos na TI'nspire são análogos aos do primeiro problema (Figuras 8, 9 e 10).

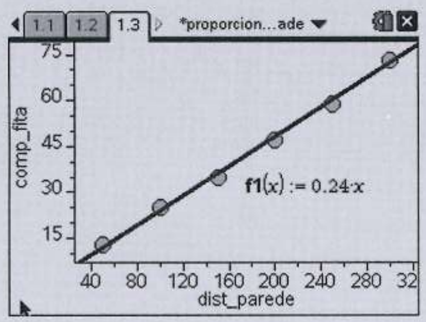


Figura 6. Função de ajustamento aos dados (proporcionalidade direta)

Comprimento do tubo (cm)	Comprimento de fita visível
10	46
23	21
33	14
60	8
100	4,5

Figura 7. Distância fixa: dados experimentais

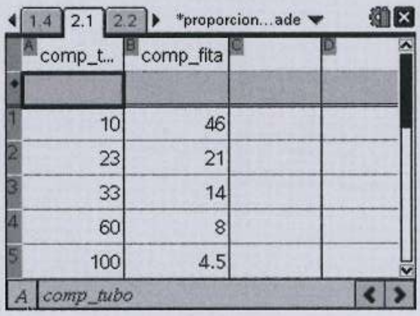


Figura 8. Listas na TI'nspire (distância fixa)

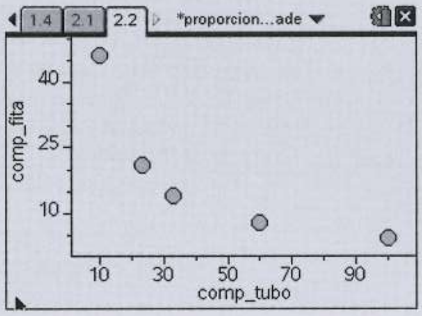


Figura 9. Gráfico estatístico (distância fixa)

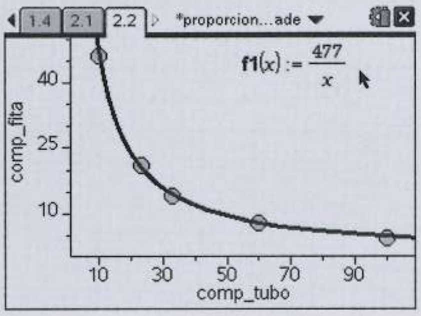


Figura 10. Função de ajustamento aos dados (proporcionalidade inversa)

Em ambas as situações de proporcionalidade, podemos procurar a melhor função que se ajusta aos dados usando tentativas ou os modelos de regressão da calculadora. Cada um dos métodos tem as suas vantagens, naturalmente.

Um teste

O professor pode aproveitar uma das funcionalidades do *software* TI'nspire Teacher Edition, para construir um pequeno teste, que permita avaliar o nível de compreensão dos conteúdos por cada aluno. São possíveis questões com diversos tipos de resposta: escolha múltipla (Figuras 11A, 11B); verdadeiro ou falso (Figura 12); resposta aberta Figura 13).

Ganha-se maior dinamismo, interatividade e celeridade, caso o professor tenha disponível o sistema Ti Navigator, o qual permite, através de comunicação sem fios, enviar o enunciado para cada uma das unidades portáteis, recolher as respostas dos alunos e analisar resultados *in loco*, de forma a ser possível corrigir, no imediato, más interpretações, ou reexpor conceitos ainda não consolidados.

Simulação das experiências na TI'nspire

Nas situações anteriores o professor deverá instar os alunos a tecerem comentários sobre a qualidade dos dados experimentais obtidos, o rigor de ajuste dos modelos de funções propostos e as limitações práticas com que se confrontaram.

A discussão comparativa dos dados obtidos e a análise dos possíveis erros cometidos por cada um dos grupos de alunos ajudará a uma maior consolidação dos conceitos. O professor pode ainda recorrer à modelação das situações experimentais, através da apresentação de modelos matemáticos dinâmicos que descrevam as situações expostas (Figuras 14 e 15).

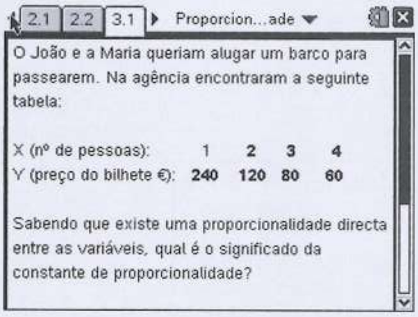


Figura 11A. Questão de escolha múltipla

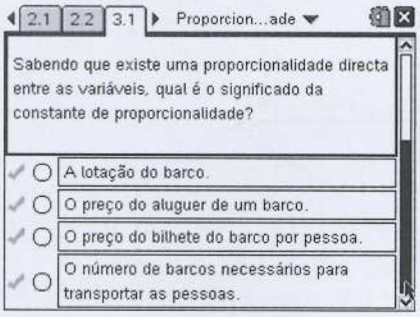


Figura 11B. Questão de escolha múltipla

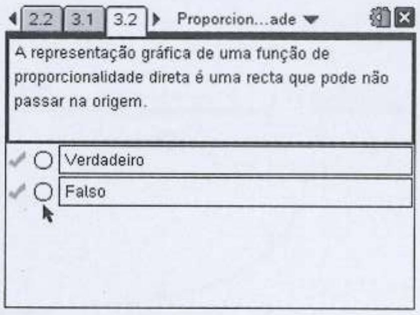


Figura 12. Questão de verdadeiro ou falso

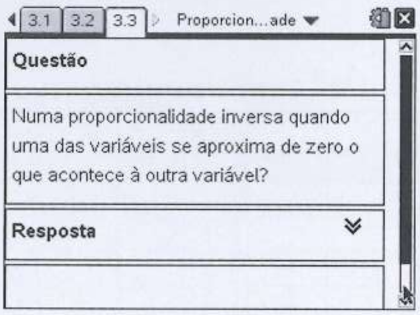


Figura 13. Questão de resposta aberta

Na figura 14, apresenta-se a simulação da variação da distância do observador à parede. O retângulo representa o tubo. O ponto P representa a posição do observador em relação à parede. O ponto F representa o foco do «óculo». Mx é a abcissa do ponto M, distância do observador (foco F) à parede. My é a ordenada do ponto M, comprimento do segmento $[AB]$ (fita métrica), visível a partir do foco F.

Para explorar este ficheiro, seleciona-se em Menu a opção 5: Traçar, 4:Traçado geométrico e clica-se sobre o ponto M. Em seguida, move-se P, para alterar a distância do observador à parede, e observa-se o traçado do ponto M.

Na figura 15, apresenta-se a simulação da variação do comprimento do tubo. O ponto C controla esse comprimento. O ponto F é o foco fixo do «óculo» e, simultaneamente, a posição do observador. Mx é a abcissa do ponto M, comprimento do tubo e My a ordenada do ponto M, comprimento do segmento $[AB]$ (fita métrica), visível a partir do foco F.

Desta vez, move-se o ponto C, para alterar o comprimento do tubo, e observa-se o traçado do ponto M.

Uma investigação suplementar

O professor pode ainda mostrar modelos matemáticos onde se analisa a influência de alguns parâmetros experimentais na qualidade dos resultados obtidos, nomeadamente a distância entre o «foco do observador» e o «foco do tubo» ou a inclinação do tubo relativamente à horizontal. Desta forma, pretende-se justificar algumas das possíveis discrepâncias detectadas nos resultados recolhidos e sensibilizar os alunos para a necessidade de rigor e controlo de todos os parâmetros experimentais.

A Figura 16 exemplifica a discrepância obtida quando a posição do observador se afasta do foco do óculo. O ponto P representa a posição do observador em relação à parede. O ponto F é o foco do «óculo». Mx é a abcissa do ponto M, distância do foco F à parede e My a ordenada do ponto M, comprimento do segmento $[AB]$ (fita métrica), visível a partir do foco F. O ponto $F1$ representa a posição do observador (afastado do foco do "óculo") e $M1y$ é a ordenada do ponto $M1$, comprimento do segmento $[A1B1]$, visível a partir do observador, $F1$.

Clicando sobre os pontos M e $M1$ e movendo o ponto P, observa-se o traçado dos pontos M e $M1$, ao alterar a distância do tubo à parede.

A figura 17 exemplifica a influência da inclinação do tubo. O ponto I altera a inclinação do «óculo». P representa a posição do observador em relação à parede e F o foco do «óculo». Mx é a abcissa do ponto M, distância do foco F à parede e My a ordenada do ponto M, comprimento do segmento $[AB]$ (fita métrica), visível a partir do foco F. Clicando em M e movendo

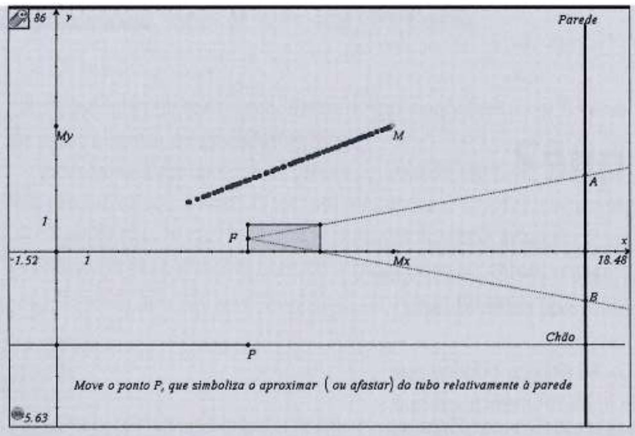


Figura 14. Variação da distância do observador à parede

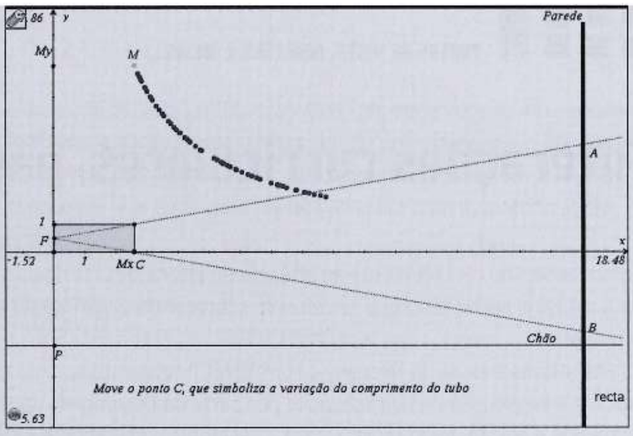


Figura 15. Variação do comprimento do tubo

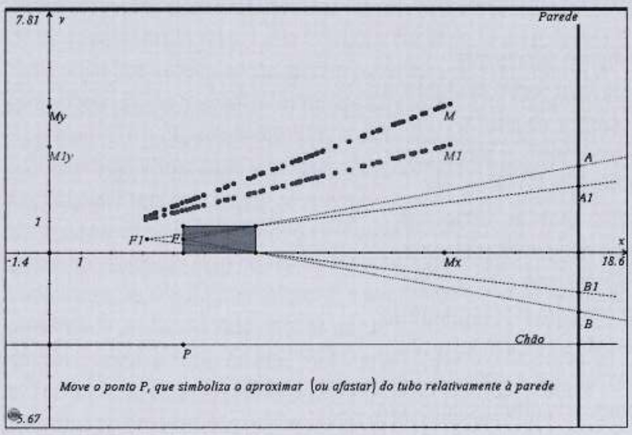


Figura 16. Posição do observador afastada do foco do «óculo»

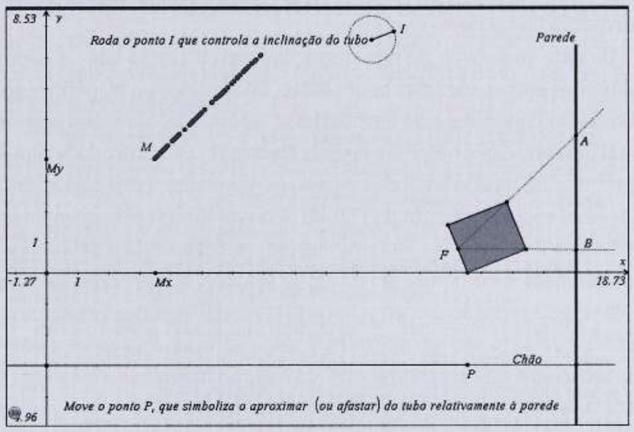


Figura 17. Inclinação do «óculo»

o ponto P, para alterar a distância do tubo à parede, observa-se o traçado do ponto M.

Observações finais

Com este exemplo, que envolve conceitos matemáticos relativamente acessíveis, tentámos mostrar como a utilização da tecnologia permite enriquecer a análise da situação experimental.

Temos a consciência de que a utilização da modelação matemática na sala de aula não é simples, levantando algumas questões relevantes: pouco tempo disponível para a realização de experiências; menor controlo sobre o que ocorre e como decorre a aula; possível confronto com situações não planeadas e para as quais o professor não tem resposta imediata; dificuldade de, rapidamente, corresponder às solicitações de todos os grupos de alunos. Existem, no entanto, benefícios que não podem ser desprezados, nomeadamente, uma forma mais criativa de abordagem de tópicos matemáticos, exploração de situações matemáticas contextualizadas, análise transversal dos conteúdos com uso de múltiplas ferramentas matemáticas e enriquecimento da visão crítica sobre os resultados obtidos.

Notas

1 Este artigo revisita a atividade «Matemática por um canudo», construída pelo Grupo de Trabalho T3 e publicada no livro *Funções no 3.º Ciclo com tecnologia.*

2 Agradecemos a colaboração do ilustrador António Cardoso.

3 Fazer 1:*Novo* e criar novo documento. Selecionar 6: *Adicionar notas*

4 ctrl doc

5 ctrl doc 5: *Dados e estatística*

6 menu 4:*Analisar* ▸ 4: *Traçar função*

7 doc 4: *Inserir* ▸ 1: *Problema*

António José Mendes

Luís Reis

Manuel Teles Lagido

Grupo de Trabalho T3 da APM

Alterações curriculares, para quê?

Temos assistido recentemente ao anúncio de alterações curriculares quer para o ensino básico quer para o ensino secundário que se referem sobretudo à organização e diminuição da carga horária semanal...

Assistimos à saída do Decreto-Lei nº 18/2011 referente ao ensino básico, ao debate público que gerou e à suspensão da sua aplicação por parte da Assembleia da República. No momento em que fechamos a edição desta revista, com a Assembleia da República dissolvida, e numa altura e que muitos já não esperavam, vimos publicado o Decreto-Lei nº 50/2011 com alterações relativas ao ensino secundário, nomeadamente a extinção da área de Projecto e a criação de uma disciplina de Formação Cívica de 45 minutos.

Quando da publicação das alterações para o ensino básico, pedimos a alguns sócios que comentassem as medidas anunciadas. Deixamos aqui os pontos de vista do João Pedro da Ponte, da Conceição Rodrigues e da Elsa Barbosa, perante as questões que lhes colocámos na altura:

O Decreto-Lei nº 18/2011, de 2 de Fevereiro, vem introduzir algumas alterações à organização curricular do ensino básico que passam nomeadamente pela extinção da Área de Projecto, por um novo enquadramento do Estudo Acompanhado redireccionando-o para o apoio às disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática (em moldes ainda a definir por portaria não publicada), pela possibilidade de organização da carga semanal em períodos de 45 ou de 90 minutos e em última análise pela redução da carga horária semanal máxima dos alunos. De acordo com o preâmbulo do referido decreto são introduzidas «sem rupturas, melhorias e aperfeiçoamentos na organização do currículo e das aprendizagens, do mesmo modo que nesta área se desenvolve a autonomia das escolas». No que respeita à disciplina de Matemática, foram implementadas, nos últimos anos, um conjunto de medidas, nomeadamente as que acompanharam o processo de experimentação do novo programa de Matemática, encaradas por muitos como uma oportunidade não só de mudanças curriculares mas também ao nível das práticas de ensino e aprendizagem.

Neste contexto, o que pensam destas alterações curriculares?

Alterações Problemáticas

Estas alterações curriculares são problemáticas, tanto no seu conteúdo como no modo como são feitas. Passados dez anos sobre a introdução das Área de Projecto e do Estudo Acompanhado impõe-se um estudo aprofundado sobre os benefícios e as limitações destes espaços curriculares. Todos sabemos de experiências muito interessantes feitas em algumas escolas, com consequências positivas para a aprendizagem e a formação geral dos alunos, como também sabemos de outros casos em que estes espaços estão largamente desaproveitados e constituem um factor de desmotivação e desinteresse. Mas não sabemos qual é efectivamente o quadro geral, nem as condições que tendem a favorecer um bom aproveitamento destas áreas ou, pelo contrário, a promover a sua degradação como espaços de aprendizagem.

O fim da Área de Projecto traduz-se tão só em mais tempo livre para ao aluno. Não é de crer que isso traga vantagens para a aprendizagem. Por outro lado, o decreto diz que o Estudo Acompanhado terá um novo enquadramento, mas como não o conhecemos, é impossível prever as suas consequências.

Em relação aos tempos lectivos, depois de uma lenta apropriação pela generalidade dos actores (alunos e professores) do novo sistema dos 90 minutos, e quando essa apropriação já estava praticamente generalizada, decidiu-se pura e simplesmente voltar atrás. Em nome da autonomia das escolas, o que se vai promover é a conflitualidade dentro das escolas, pois haverá certamente adeptos de um e outro sistema, em nome das necessidades específicas das suas disciplinas e das suas abordagens pedagógicas preferidas. Sabemos bem que 45 ou 50 minutos são vantajosos para fazer aulas expositivas ou de exercícios, enquanto 90 minutos são mais apropriados para aulas onde os alunos realizem pesquisas, trabalhem em grupo e onde se façam discussões aprofundadas sobre os seus trabalho.

Sobre a Área de Projecto, o Estudo Acompanhado e os tempos lectivos foram feitos alguns estudos, mas não suficientemente conclusivos. O que se impunha era portanto um estudo sério sobre o assunto, seguido de uma discussão em que pudessem participar os interessados, e que permitisse clarificar qual a situação existente no terreno, que opções se poderiam tomar e quais as consequências de cada uma. Deste modo, corremos o risco sério de estar a tomar as decisões erradas.

Uma coisa é certa: o texto do preâmbulo do decreto, quando fala em introduzir «sem rupturas, melhorias e aperfeiçoamentos na organização do currículo e das aprendizagens», faz um exercício de puro cinismo político – pois todos sabemos sobejamente que são as motivações de ordem financeira que levam a fazer estas mudanças. Elas não decorrem do interesse em melhorar a aprendizagem, mas sim da preocupação em poupar uns tantos milhões de euros. Que a poupança seja desejável, não questiono. Mas faça-se onde não interfira com a aprendizagem dos alunos.

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Uma espécie de maldição caiu sobre o Estudo Acompanhado

A «história» do Estudo Acompanhado (EA) no currículo do Ensino Básico é deveras curiosa. Esta Área Curricular não Disciplinar é introduzida pelo Decreto-Lei n.º 6/2001, de 18 de Janeiro, tendo como objectivo «a aquisição de competências que permitam a apropriação pelos alunos de métodos de estudo e de trabalho e proporcionem o desenvolvimento de atitudes e de capacidades que favoreçam uma cada vez maior autonomia na realização das aprendizagens». Prevê-se que seja leccionada por um par pedagógico e tenha 90 minutos em todos os anos do 2° e 3° ciclos. Na realidade, isto nunca veio a acontecer: no 3° ciclo, ainda antes da sua implementação, é suprimido o par pedagógico passando a ser leccionada apenas por um professor e, no 9° ano teve desde o início apenas 45 minutos (cedendo os outro 45 às Tecnologias da Informação e Comunicação, disciplina que é posterior ao desenho curricular definido no referido DL).

Quando em 2006 é lançado o Plano da Matemática I (que como se sabe teve continuidade com o actual Plano da Matemática II) ao qual a quase totalidade das escolas do Ensino Básico adere, sugere-se em documentos oficiais (hierarquicamente de peso inferior ao de Decreto Lei) que o EA seja atribuído à Matemática.

O EA «acaba» agora no Decreto-Lei n.º 18/2011, de 2 de Fevereiro (cessado pela Assembleia da República a 23 de Março), por ser «orientado para a criação de métodos de estudo e de trabalho que promovam a autonomia da aprendizagem e a melhoria dos resultados escolares», destinada a «alunos com efectivas necessidades de apoio» pretendendo servir «prioritariamente para reforço ao apoio nas disciplinas de Língua Portuguesa e de Matemática» .Perante esta «história», quase se poderia dizer que há uma espécie de maldição que caiu sobre o Estudo Acompanhado. Garantidamente pode afirmar-se que esta área foi sempre desvirtuada, tendo, dificilmente, alguma vez cumprido o objectivo para o qual foi criada.

Parece-me importante a referência ao Estudo Acompanhado porque ele tem desde a há algum tempo e pelos motivos que se referem atrás, uma estreita ligação à Matemática. Em muitas escolas o Estudo Acompanhado está atribuído à Matemática acrescentando assim 90 minutos ao período semanal para esta disciplina. De facto, isto é verdade em muitas escolas, mas não em todas!

O que podemos assistir neste momento é que em certos casos a Matemática tem destinada duas aulas de 90 minutos nos vários anos do 2° e 3° ciclos e noutros, além destes, mais 90 minutos de Estudo Acompanhado e 45 minutos da Oferta de Escola, isto é, quase o dobro do tempo.

Poder-se-á dizer (já o ouvi muitas vezes) que tudo isto faz sentido no devido respeito pela autonomia das escolas, cabendo a estas conceber planos de combate ao insucesso na disciplina de Matemática, integrados nos respectivos Projectos Educativos, que terão de ter necessariamente em atenção as diferentes características das populações escolares que servem.

Infelizmente, receio que o tempo destinado à Matemática no currículo dos alunos tenha vindo a depender muito mais da capacidade de persuasão dos responsáveis por aquela disciplina em imporem, as medidas que consideram necessárias, junto dos Conselhos Pedagógicos e Direcções das escolas (e da sensibilidade destes) do que de Projectos Educativos coerentes e consistentes.

Este ano lectivo entrou em vigor para o 1°, 3°, 5° e 7° anos de todas as escolas do país um novo programa de Matemática. Este programa introduz profundas alterações principalmente a nível metodológico. Acredito firmemente que é impossível cumpri-lo em 180 minutos semanais nos 2° e 3° ciclos em todas as suas vertentes – conteúdos, experiências de aprendizagem, desenvolvimento de capacidades,... Nem me parece que ele tenha sido concebido pelos seus autores para este período de tempo.

A disciplina de Matemática no Ensino Básico deveria, por isso, ter destinado um período necessariamente superior a 180 minutos para todos os alunos em todas as escolas. A partir daqui, caberia encontrar as medidas necessárias para dar resposta às realidades específicas das populações escolares.

De outra forma, estaremos novamente a comprometer a oportunidade de melhorar o ensino da Matemática em Portugal.

Conceição Rodrigues

Escola Secundária Professor José Augusto Lucas

Medidas avulsas

Na minha opinião, estas são medidas avulsas que contribuem para a desordem nas escolas, uma vez que estas são tomadas sem qualquer apresentação de motivos que as justifiquem. Lamento que a tomada de decisão das medidas propostas não contemple a investigação realizada neste campo, prevalecendo as razões de teor economicista.

No que respeita à duração dos tempos lectivos em 45minutos ou 90minutos, posso afirmar que me oponho totalmente à possibilidade de organização das aulas em 45minutos. Os documentos curriculares de Matemática do Ensino Secundário e do Ensino Básico veiculam uma metodologia que se adequa a blocos de 90 minutos. Para garantir a diversidade de tarefas e os diferentes momentos que uma aula de exploração exige (apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão da tarefa e síntese de conhecimentos), as aulas não podem ser de 45 minutos, uma vez que comprometem tal metodologia de ensino e aprendizagem. Acrescento ainda que os blocos de 90minutos favorecem a gestão curricular da disciplina por possibilitarem uma organização e gestão que rentabiliza o tempo da aula além de permitirem que o professor respeite, efectivamente, os diferentes ritmos de trabalho dos alunos de cada turma.

A opção por tempos lectivos de 45 minutos, apresenta-se assim desadequada e como mais um entrave ao cumprimento do programa de Matemática cuja extensão já foi amplamente divulgada quer no caso do Ensino Secundário, quer no caso do Ensino Básico. Além disso, reitero o que já há muito a APM vem a alertar, dois blocos de noventa minutos semanais, no caso específico do Ensino Básico, são insuficientes para consagrar as opções didácticas específicas da disciplina, como por exemplo a integração de tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática como recurso didáctico. A integração desta componente de trabalho é aliás outra proposta constante na proposta de decreto-lei a ser considerada nas diversas áreas curriculares, contudo este acréscimo de trabalho lectivo não será viável sem um ajuste da carga horária da componente lectiva de cada disciplina.

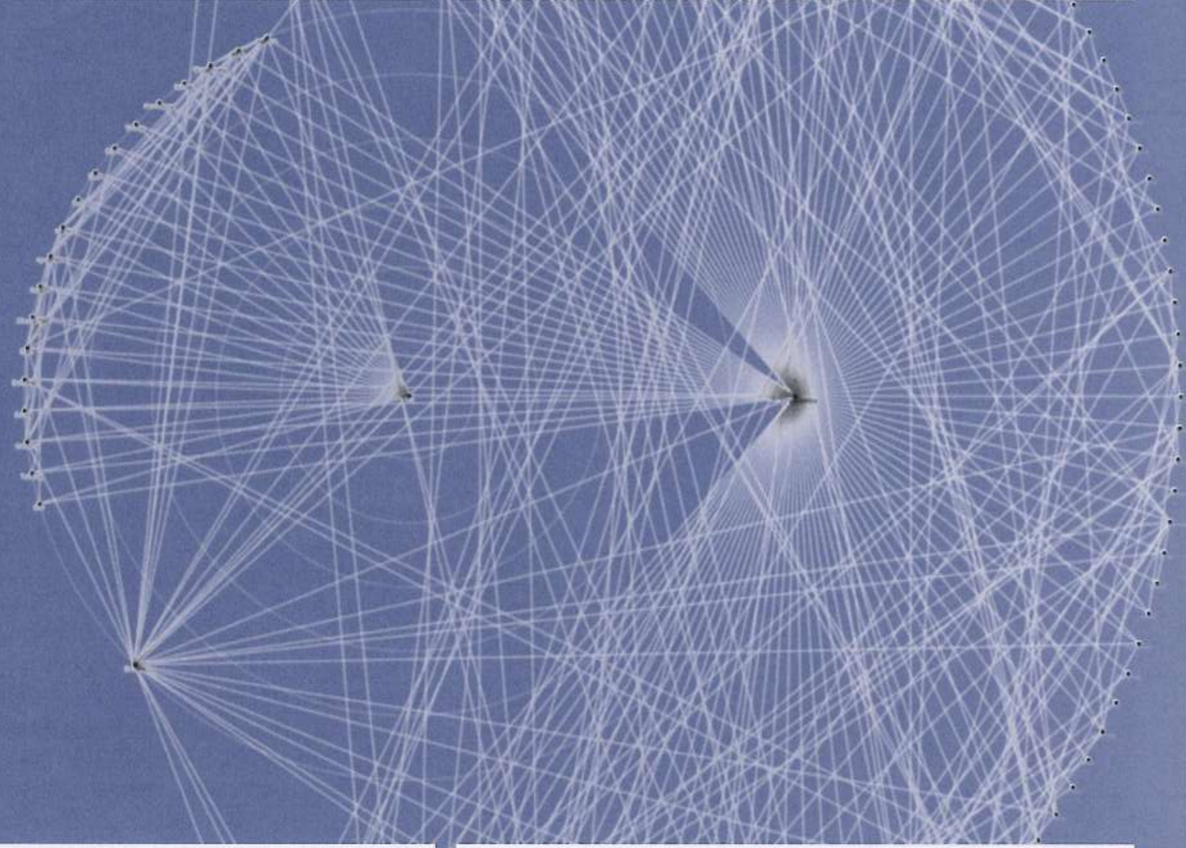
A APM e eu em particular, temos vindo a defender e reforçar que é crucial consagrar a continuidade do incremento de horas de trabalho na disciplina de Matemática. Em 2006, tendo em atenção o diagnóstico efectuado pelos professores de Matemática foi reconhecido pelo Ministério da Educação, para dar resposta às dificuldades diagnosticadas e combater o insucesso na disciplina de Matemática, no âmbito do Plano de Acção para a Matemática, a necessidade de reforçar o número de horas de trabalho nesta disciplina. A interrupção deste investimento quebrará novamente esta tendência de melhoria do desempenho matemático dos alunos. As tendências de trabalho que os professores de Matemática experimentaram neste âmbito apresentam-se, de alguma forma, como alternativas a um ensino maioritariamente dedicado a aulas expositivas e de resolução de exercícios de aplicação que já há muito se mostrou limitativo do desenvolvimento integrado de conteúdos e competências transversais da disciplina em causa. Embora o tempo de implementação destas formas de trabalho seja ainda muito reduzido para podermos extrair conclusões, existem evidências às quais não podemos ficar indiferentes, nomeadamente, a melhoria do desempenho dos alunos portugueses na disciplina de Matemática na prova do PISA, recentemente publicados. Perante o exposto, questiono: o que justifica, afinal, a descontinuidade de medidas que começam a evidenciar o resultado desejável no desenvolvimento das competências matemáticas dos nossos alunos?

Elsa Barbosa
Presidente da APM

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

O Ensino da Teoria de Grafos em Portugal

Rui Feiteira e Marília Pires



Considerações iniciais

No complexo mundo da Matemática muitas são as áreas em que se faz uma intensa investigação motivada pelas inúmeras aplicações que esses temas têm noutras ciências e na vida quotidiana. Destas áreas, pode-se destacar a teoria de grafos, quer pela sua enorme e imediata aplicabilidade, quer pelas suas interacções com outras ciências, nomeadamente economia, gestão e ciências sociais. Grande parte da investigação que se faz actualmente neste domínio prende-se com a busca de algoritmos mais eficientes e eficazes para a resolução dos problemas da vida real. O grande atractivo da teoria de grafos prende-se com o facto de, apesar de ser um tema de enorme complexidade e tratar problemas de muito difícil solução, ser possível uma abordagem informal e lúdica, compreensível por alunos do ensino básico.

Desde o início da década de 90, do século passado, que na comunidade educativa portuguesa, tendo como principal veículo a revista *Educação e Matemática* (sem querer menosprezar o papel decisivo de vários grupos de trabalho no âmbito dos últimos ProfMats), a discussão sobre a inclusão de temas de Matemática Discreta nos programas curriculares tem vindo a ser realizada com maior ou menor acuidade. Corolário desta discussão foi a inclusão de vários conteúdos, considerados inovadores, na recém-criada disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). De todos os conteúdos aí incluídos, tais como modelos de crescimento populacional, teoria das eleições ou inferência estatística, é sem dúvida o capítulo dedicado aos modelos de Grafos o que mais interesse tem suscitado. Podem-se apontar várias causas para este interesse, sendo talvez a principal o facto de se tratar de um tema que capta a atenção dos alunos, quer porque se conseguem abordar problemas da vida real bem conhecidos dos alunos quer porque não é necessário qualquer *background* matemático, para além de saber somar e subtrair (normalmente números pequenos).

O facto de grande parte dos docentes não ter tido contacto com qualquer conteúdo relacionado com grafos na sua formação inicial deve, certamente, tê-los levado a obter informação sobre o tema e daí a profusão de artigos, palestras, cursos e seminários que se têm produzido nos últimos tempos sobre este tema.

Imagina que o avião te leva até à ilha Terceira e, aí, consultas uma tabela com as ligações de barco (ida e volta) disponíveis naquela época entre as ilhas do grupo central dos Açores.

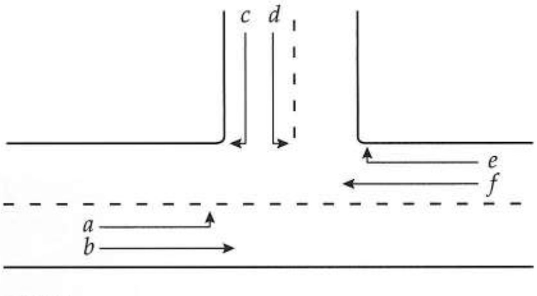


Figura 1

Terceira – Faial
Terceira – Graciosa
Faial – Pico
Faial – S. Jorge
S. Jorge – Graciosa

Figura 2

Os Grafos e a revista Educação e Matemática

Em 1994, numa série de artigos publicados na revista *Educação e Matemática*, discutia-se algumas das potencialidades do uso de redes e matrizes em actividades de modelação matemática (Febles, 1994), ou as vantagens de se considerarem alguns tópicos de teoria de grafos no ensino secundário, devido à simplicidade de conceitos e ao potencial de resolução de problemas em contextos reais (Perdigão, 1994). Esta última autora apresenta ainda uma lista de problemas que se podem resolver recorrendo à teoria de grafos, de onde se pode destacar o problema de como pôr a funcionar os semáforos de um cruzamento de modo a que cada condutor não tenha um tempo de espera superior a um minuto (figura 1).[1]

Ainda em 1994, Paulo Abrantes, deu a conhecer o projecto Mat789, em *Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas? Talvez um dia...* Este projecto decorreu entre 1988 e 1992, e nele participaram inicialmente quatro turmas do 3.º ciclo do ensino básico. O projecto consistiu, de uma forma muito sucinta, na concepção, experimentação e avaliação de um currículo inovador, especialmente desenhado para o terceiro ciclo. Em relação aos programas ainda em vigor é de notar a inclusão no 9.º ano de escolaridade de uma unidade didáctica sobre grafos e matrizes. A propósito do desenvolvimento desta unidade, Abrantes (1994) afirmou que «A experiência revelou-se muito encorajadora quanto ‹às potencialidades curriculares› no 9.º ano — ou até mais cedo (...) [é] um tema que é muito pouco exigente do ponto de vista de pré-requisitos necessários e que, ao mesmo tempo, é susceptível de proporcionar aos alunos muitas actividades interessantes de investigação e modelação no contexto de situações de realidade.»

Mais recentemente, Pires e Kravchenko (2007) em Reflexões sobre o ensino de grafos, apresentam bastantes exemplos que podem servir para introduzir, de uma forma quase natural, alguns dos conceitos básicos de grafos. Defendem ainda que «... haveria todo o interesse de introduzir este tema nos currículos de Matemática dos outros cursos do secundário.»

Grafos no ProfMat

Desde de 1992 até aos nossos dias muitos professores, de diversos níveis, contribuíram para a discussão e reflexão sobre a introdução de tópicos de teoria de grafos no nosso ensino. Mais recentemente, a tónica das intervenções centrou-se sobre actividades a desenvolver na sala de aula.

Paixão (1992), numa sessão temática, apresentou duas aplicações reais da teoria de grafos e da optimização combinatória, colocando em evidência a importância que estes modelos e técnicas matemáticas podem ter no apoio à tomada de decisões das empresas. Os casos tratados referiam-se a duas empresas portuguesas: a Carris de Lisboa e a Portucel de Viana do Castelo.

Em 1998, no ProfMat de Guimarães, reuniu-se o primeiro grupo de discussão dedicado a este tema, mediado por Veloso e Loureiro, sob o tema «Matemática discreta e competências matemáticas» onde se discutiu a importância da inclusão do tema no currículo a sua relação com as competências da Matemática. Os anos que se seguiram foram férteis na discussão, tendo este tópico sido frequentemente abordado em comunicações, cursos ou sessões práticas dos ProfMats. Em 2001, Atalaia, destacou a capacidade que a teoria de grafos tem para resolver problemas bem como a interligação entre esta e outras áreas da Matemática como, a topologia, a geometria e a álgebra.

Na realidade, a implementação da disciplina de MACS em 2004/05 despoletou o aparecimento de alguns cursos de índole mais prática (Borralho & Espadeiro, 2003, Ribeiro 2005, Nascimento & Cruz, 2006, Ribeiro & Feiteira, 2006 e 2007). Num âmbito de desenvolvimento curricular, podemos encontrar ainda outros contributos. Assim, Colaço et al, numa comunicação do ProfMat em 2005, defendem que são inúmeros os problemas reais que podem ser abordados utilizando conceitos da teoria de grafos e modelos de optimização (Caminho Mais Curto, Fluxo Máximo, Localização e Afectação, entre outros). Estas autoras propõem ainda o estudo, na disciplina de MACS, de alguns problemas de redes sociais e tecnológicas, discutindo nomeadamente três problemas concretos: identificação de subgrupos coesos numa rede social, problemas de optimização numa rede com fluxos de informação e o problema de localização numa rede computacional. Enquanto que, no nosso entender, os dois últimos problemas, não oferecem grandes problemas na implementação dentro da sala de aula e são de grande pertinência, mostrando outro tipo de aplicações que não são estudados na disciplina MACS, já no que diz respeito ao primeiro problema pensamos que a questão é demasiado ambiciosa para este nível, uma vez que envolve uma grande quantidade de conceitos novos e não triviais. Estas autoras

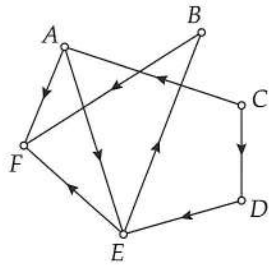


Figura 3. Grafo orientado que modela um torneio escolar

destacam a grande importância destas actividades, do ponto de vista da aquisição de competências por parte do aluno, «... este tipo de actividade (...) [permite] a compreensão do valor da matemática na resolução de problemas em situações reais.» (Colaço *et al.*, 2005)

No ProfMat, de 2006, além dos cursos já anteriormente referidos, foram feitas duas outras contribuições neste campo. Numa comunicação Silva, Bernardino e Feiteira deram a conhecer uma experiência realizada com uma turma do segundo bloco de MACS, sobre problemas de afectação. Os exemplos trabalhados com os alunos exigiam a utilização do algoritmo húngaro para a determinação das soluções óptimas. Um dos pontos críticos nesta questão era a representação de grafos ponderados pelas respectivas matrizes de custo, conceito completamente exógeno aos currículos escolares. Os alunos não mostraram quaisquer dificuldades na representação matricial. Além disso, revelaram facilidade na aplicação dos passos do algoritmo húngaro, tendo alguns deles encarado este algoritmo como o jogo do Sudoku (Silva, Bernardino e Feiteira, 2006). Pires (2006) em *Grafos para todos: a importância dos exemplos na construção dos conceitos*, conferência realizada no ProfMat de Setúbal, defende que é relativamente fácil encontrar situações que possam ser modeladas através de grafos, mas que se torna necessário escolher e explorar bons exemplos dentro da sala de aula. Por esta razão torna-se fundamental que o professor esteja muito atento para explorar completamente os exemplos escolhidos, de modo a que a introdução de conceitos ou a formalização de resultados possa ser feita ao mesmo tempo de forma informal e cientificamente correcta. De uma forma simples, mas rigorosa, Pires mostrou uma forma de abordar o teorema de Euler, sobre a existência de circuitos de Euler, onde os alunos são guiados para o resultado do teorema observando grafos muito simples onde é ou não é possível encontrar um tal circuito usando o velho método da tentativa e erro. Esta autora mostra ainda como se podem abordar vários conceitos básicos como por exemplo, o lema dos apertos de mão, usando para o efeito torneios de futebol.

Sobre o projecto Mat 789

Nos finais da década de 80 anunciava-se para breve a substituição dos velhos programas do terceiro ciclo. Na realidade os programas que estavam então em vigor não passavam dos programas do final da década de 60 com algumas modificações pontuais de índole quase cosmético. Nesta conjuntura surge o projecto inovador Mat789. Certamente que a autorização necessária por parte do Ministério da Educação para implementar no terreno um tal projecto só foi possível devido ao anunciado abandono dos programas em vigor.

Este projecto, desenvolvido no 3.º ciclo do ensino básico, foi certamente influenciado pela onda de renovação internacional do ensino da Matemática dos anos 80, tanto nos objectivos e métodos, como na organização do currículo. Sofreu ainda influências fortes na integração das aplicações e da modelação no ensino da Matemática. As turmas que participaram no projecto, receberam um programa de Matemática diferente do vigente, diferenças que não se limitavam aos diferentes conteúdos, mas que fundamentalmente se focavam na forma como se trabalhava dentro da sala de aula e na forma como se avaliava. Estas últimas características eram realmente inovadoras para a época. O trabalho de grupo dentro e fora da sala de aula foi uma das estratégias mais usadas para a exploração das fichas de trabalho. Com efeito, no primeiro ano mais de dois terços das aulas previstas foi ocupado com este tipo de trabalho. O trabalho individual não foi de todo posto de lado tendo-se materializado nomeadamente na elaboração de relatórios, estudo de textos e realização de testes. Neste projecto apareceram, pela primeira vez em Portugal, os testes de duas fases. O trabalho de projecto foi também umas das bandeiras do Mat789. Em cada ano deveriam ser realizados dois projectos, um de índole mais matemático, enquanto que o outro seria de intervenção na realidade social dos alunos.

Para o nosso propósito interessa-nos o facto de terem sido trabalhados, no contexto da sala de aula, tópicos sobre teoria dos grafos. Um denominador comum a todas as actividades é a introdução de conceitos através de fichas de trabalho, sendo que os alunos aprendiam fazendo, rompendo desta forma com o modelo tradicional vigente.

Apresentamos de seguida as duas actividades iniciais[2] dos tópicos de grafos incluídos nesse projecto.

A noção intuitiva de grafo foi introduzida através de uma proposta de trabalho, onde os alunos deveriam organizar um passeio de barco pelas ilhas dos Açores, atendendo às ligações existentes (restrições do problema), conduzindo-os à criação de

	A	B	C	D	E
A		7	15	8	9
B			8	5	11
C				9	13
D					6
E					

Tabela 1

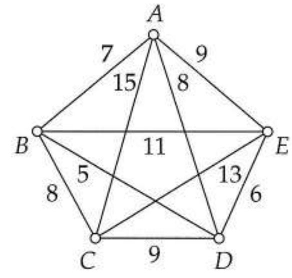


Figura 4

um modelo gráfico ao suprimir as ilhas, transformando-as em pontos, e ao representar as ligações possíveis por setas entre os pontos. A figura 2 mostra o início da actividade.

A segunda actividade, retomava os problemas combinatórios de anos anteriores. Os alunos deveriam observar um grafo orientado — ainda sem terem a noção do que era um grafo — e responder a algumas questões sobre um torneio de voleibol de uma escola. Gradualmente, os alunos eram encaminhados para as noções básicas dos grafos.

Apesar de reconhecermos que a integração da unidade sobre grafos ter sido inovadora, assim como quase toda a organização do currículo deste projecto, parece-nos pouco ambicioso, no que toca à teoria dos grafos, pois os autores do projecto exploram apenas dois ou três conceitos, dando alguma importância aos caminhos e circuitos de Euler (Feiteira, 2007). Os autores abordaram ainda a ligação entre grafos e as suas representações matriciais.

A unidade Modelo de Grafos de MACS

Os autores do programa reconhecem que ao incluírem este tópico, nos conteúdos desta nova disciplina, estão a incluir um tipo de matemática bem diferente da usualmente trabalhada na sala de aula. Apesar de algo vago, o programa de MACS, na essência, define apenas dois temas a trabalhar: o problema do caixeiro-viajante e os raciocínios subjacentes aos grafos eulerianos. Para ajudar o estudo do primeiro problema também se estudam árvores. Ainda segundo os autores está fora de questão uma abordagem teórica sistematizada à teoria de grafos, pois as noções básicas devem surgir naturalmente a partir de situações específicas.

Segundo a nossa experiência, tanto com alunos como com professores com que trabalhámos em diferentes cursos e sessões práticas, quando os alunos começam a trabalhar estes conceitos, toda a dinâmica da aula se altera. Os bons alunos vêem estas questões como um bom desafio enquanto os alunos que revelam mais dificuldades noutras unidades, aparecem agora na sala de aula bastante motivados.

Apesar de esta disciplina ser muito recente já se levantam algumas vozes discordantes. O denominador comum destas vozes refere a falta de ambição que os autores do programa tiveram quando escolheram os temas a trabalhar na unidade Modelos de Grafos. Ao seleccionarem apenas dois tópicos, a equipa, deixou de fora temas como os problemas de afectação (ver Silva, A., Bernardino, L., Feiteira, R., 2006), os problemas de coloração (ver Feiteira, a publicar) e os problemas de cobertura (Pires, 2006; Colaço et al, 2005). Esta falta de ambição fica ainda mais patente se notarmos que os alunos do *middle school* do estado de New Jersey recebem, na essência, os mesmos conteúdos que os nossos alunos de MACS[3].

E o futuro?

Será de estranhar uma tão grande afluência de professores aos cursos e sessões práticas? Pensamos que não. Num passado recente, poucos cursos universitários portugueses, em Matemática, ofereciam nos seus currículos uma disciplina onde se abordasse tópicos sobre teoria de grafos ou sobre análise de redes. Podemos ainda acrescentar que existe pouca literatura em português sobre este assunto, o que torna mais difícil o acesso à informação, isto apesar de reconhecermos a oferta importante de informação que existe *on-line*, quer em português do Brasil, quer em inglês. A utilização de informação *on-line* deve ser feita cuidadosamente, adoptando uma postura crítica e desconfiada sobre o que estamos a ler, para não cairmos em falsas verdades. Na realidade temos encontrado algumas incorrecções e até erros bastante grosseiros nalgumas páginas sobre grafos acessíveis na *internet*.

Com o propósito de ajudar a colmatar os problemas anteriormente identificados, o Grupo de Trabalho sobre a Formação Matemática do Futuro Professor (GTFMFP), da Sociedade de Portuguesa de Ciências de Educação, secção de Matemática, apresentou um relatório, em 2005, que tinha como objectivo principal produzir um conjunto de recomendações sobre a formação em Matemática dos futuros professores dos diversos níveis de ensino. Neste relatório reconhece-se que uma das áreas onde se deve investir é na Matemática relacionada com as ciências da computação, nomeadamente teoria de grafos e redes.

Partindo de exemplos do quotidiano podem-se trabalhar e desenvolver muitas noções sobre Teoria de Grafos. De seguida deixamos um pequeno exemplo que poderia ser aplicado numa turma do 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Suponha que, num determinado dia, uma rede de hipermercados, deseja distribuir, a partir de A, pelas suas outras quatro lojas, um certo número de produtos. A seguinte tabela apresenta a distância entre cada uma das 5 lojas (tabela 1).

Esta situação pode ser modelada por um grafo ponderado (figura 4). Assim, cada vértice do grafo representará uma loja e, dois vértices estão ligados, caso seja possível viajar entre as duas cidades. Associada a cada aresta está a distância entre as lojas respectivas.

Partindo deste exemplo podem-se explorar inicialmente os conceitos de: grafo, grau de um vértice, arestas, vértices, vértices adjacentes, circuitos e caminhos hamiltoneanos, árvores e, finalmente poder-se-á introduzir o algoritmo do vizinho mais próximo (mesmo sem o enunciar explicitamente), como uma estratégia mais rápida para encontrar uma solução (que pode não ser necessariamente a solução óptima). De facto, nesta situação, o algoritmo referido não nos fornece a melhor solução.

Vemos assim como, a partir de uma situação simples e muito concreta, se conseguem abordar alguns conceitos de teoria de grafos e, simultaneamente, apresentar uma das faces da Matemática que os alunos desconhecem totalmente, mas que resolve muitas das situações do dia-a-dia.

Considerações finais

A teoria de grafos, hoje em dia, é de facto uma área incontornável e bastante presente na vida real. A NCTM (2000) reconhece que estes tópicos, devido à sua riqueza de aplicações, deveriam ter um espaço reservado nos conteúdos a leccionar desde a mais tenra idade.

Será que algum dia, no nosso país tal será reconhecido de modo a que a teoria de grafos venha a ter reservado um espaço, de algum destaque, entre os conteúdos leccionados na nossa escola? Temos esperança que sim.

A teoria de grafos permite a realização de experiências matemáticas realmente significativas, pois poderá permitir a ligação entre conteúdos matemáticos e trazer para a sala de aula a experiência pessoal de cada aluno. As situações problemáticas que se podem explorar são inúmeras, podendo ir desde determinar o caminho mais curto entre duas cidades, a simples actividades de lazer como, por exemplo, os labirintos ou problemas com dominós, podem ajudar a estimular de uma forma inequívoca a criatividade dos nossos alunos (Feiteira, 2007). Devido à simplicidade de conceitos, a um nível elementar, a teoria de grafos, pode permitir experiências realmente significativas a todos os alunos. E talvez mais importante: pode permitir uma reaproximação entre a Matemática e a generalidade dos alunos que frequentam as escolas, podendo de alguma forma fornecer uma 2.ª oportunidade aos alunos.

Notas

[1] A propósito deixamos a referência do livro de Wilson e Watkins, *Graphs An Introductory Approach*, editado pela Wiley em 1990, que contém uma excelente recolha de exemplos e aplicações da Teoria de Grafos.

[2] As figuras 2 e 3 foram retiradas de Abrantes, P., Leal, C., Silva, M., Teixeira, P., Veloso, E., (1997).

[3] Consultar New Jersey Education Department em http://www.state.nj.us/njded/frameworks/math/.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (1994a), Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas? Talvez um dia..., *Educação e Matemática*, 30, p.17–20, Lisboa: APM.

Abrantes, P., Leal, C., Silva, M., Teixeira, P., Veloso, E., (1997), MAT789 *Inovação Curricular em Matemática — propostas de actividades para os alunos*, Lisboa: APM.

Abrantes, P., Leal, C., Silva, M., Teixeira, P., Veloso, E., (1997a), MAT789 *Inovação Curricular em Matemática*, Lisboa: Gulbenkian.

Atalaia, M.(2001), Teoria de grafos e problemas. In *Actas do ProfMat 2001*, Vila Real: APM.

Colaço, S., Rebelo, C., Pato, M (2005), Problemas de Optimização em Redes Sociais e Tecnológicas. Algumas actividades para a aula de Matemática. In *Actas do ProfMat 2005*, Évora: APM [Suporte: CD-Rom].

Febles, C.(1994), Matrizes por detrás das redes, *Educação e Matemática*, 29, 3–5, Lisboa: APM

Feiteira, R. (2007), *Grafos para todos — sobre o desenvolvimento da Teoria de Grafos no 3.º Ciclo do Ensino Básico*. (Tese de Mestrado, Universidade do Algarve), Lisboa: APM.

Feiteira, R. (a publicar), Grafos, Cores e Resolução de Conflitos, *Gazeta da Matemática*, Lisboa: SPM.

Grupo de Trabalho sobre a Formação Matemática do Futuro Professor (2005), *A Matemática na Formação Inicial dos Professores*. Disponível em http://www.spce.org.pt/sem/actividades2.htm.

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics for school Mathematics*, Virginia: NCTM.

Silva, A., Bernardino, L., Feiteira, R. (2006), Problemas de Afectação em MACS? In *Actas do ProfMat 2006*, Setúbal: APM [Suporte: CD-Rom].

Paixão, J. (1992), Exemplos de aplicação da Teoria dos Grafos e Optimização Combinatória. In *Actas do ProfMat 1992*, Viseu: APM.

Perdigão, C., (1994), Um breve olhar sobre os grafos — Matrizes por detrás das redes, *Educação e Matemática*, 29, 19–20, Lisboa: APM

Pires, M. (2006), Grafos para todos: a importância dos exemplos na construção de conceitos. In *Actas do ProfMat 2006*, Setúbal: APM [Suporte: CD-Rom].

Pires, M., Kravchenko, V. (2007), Reflexões sobre o ensino de grafos, *Educação e Matemática*, 93, 11–15, Lisboa: APM.

Rui Feiteira

Agrupamento Vertical de Escolas prof. José Buisel, Portimão

Marília Pires

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia

Universidade do Algarve

José Paulo Viana

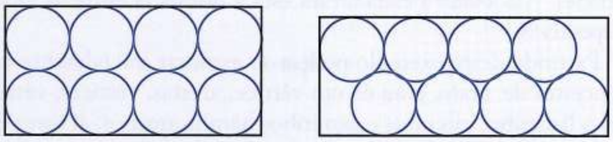
Circunferências em rectângulos

Em cada um dos rectângulos, todas as circunferências têm um centímetro de raio.

Pergunta 1 – Qual dos rectângulos tem maior área?

Pergunta 2 – Imaginemos que aumentamos o número de filas de quatro circunferências. No rectângulo R as filas continuam verticalmente alinhadas, no rectângulo S a 3ª fila fica verticalmente alinhada com a 1ª, a 4ª com a 2ª e assim sucessivamente. Ao fim de quantas filas a relação entre as áreas dos rectângulos se inverte?

Pergunta 3 – Acontecerá o mesmo com os perímetros?



Rectângulo R **Rectângulo S**

(Respostas até 12 de Junho para zepaulo@armail.pt)

Paralelogramos no rectângulo

O problema proposto no número 110 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Dividimos cada lado de um rectângulo $ABCD$ em três partes iguais. Unimos depois quatro dos novos pontos obtidos de modo a formar um paralelogramo $KLMN$. Que relação existe entre as áreas destas duas figuras?

E se tivéssemos dividido os lados do rectângulo em quatro partes iguais, qual seria agora a relação entre as áreas?

Problema adicional: E se dividirmos cada lado em n partes iguais?

Recebemos 18 respostas: Afonso Garcia (Torres Novas), Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Armando Fernandes (Aveiro), Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Francisco Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva (Amadora), Inês Santos (Torres Novas), Iola Mara Ribeiro, João Pereira, João Pineda & Ema Modesto, José Guilherme Couto (Lagoa, Açores), Leonel Vieira (Braga), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Sérgio Rosa e Telma Carneiro (Braga).

As resoluções apresentadas seguiram essencialmente duas estratégias principais.

1º Método: Calcular as áreas dos quatro triângulos e subtraí-las à área do rectângulo. Foi utilizado por quase todos os leitores que responderam.

Seja n o número de partes em que se dividem os lados do rectângulo inicial.

Na figura 1, $n = 3$. Sejam $x = \overline{LB}$ e $y = \overline{KA}$.

$\text{Área}_{ABCD} = 3x \times 3y = 9xy$

Área de cada triângulo $= xy$

$\text{Área}_{KLMN} = 9xy - 4xy = 5xy$

Relação entre as áreas $= \dfrac{5xy}{9xy} = \dfrac{5}{9}$.

Na figura 2, $n = 4$. Sejam $x = \overline{EB}$ e $y = \overline{HA}$.

$\text{Área}_{ABCD} = 4x \times 4y = 16xy$

Área de cada triângulo $= \dfrac{3}{2}xy$

$\text{Área}_{KLMN} = 16xy - 6xy = 10xy$

Relação entre as áreas $= \dfrac{10xy}{16xy} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$.

No caso geral, sejam x e y as medidas de cada uma das partes em que se dividem os lados do rectângulo.

$\text{Área}_{ABCD} = nx \times ny = n^2xy$

Área de cada triângulo $= \dfrac{n-1}{2}xy$

$\text{Área}_{KLMN} = n^2xy - 2(n-1)xy = (n^2 - 2n + 2)xy$

Relação entre as áreas $= \dfrac{n^2 - 2n + 2}{n^2}$.

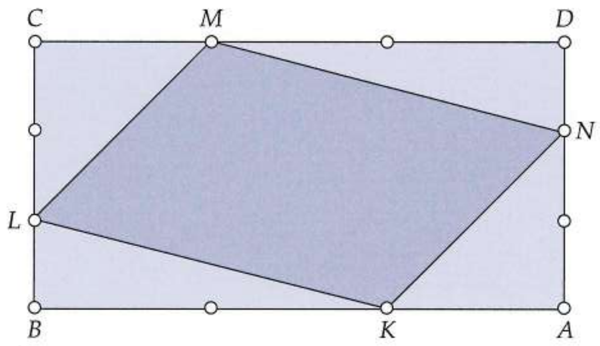


Figura 1

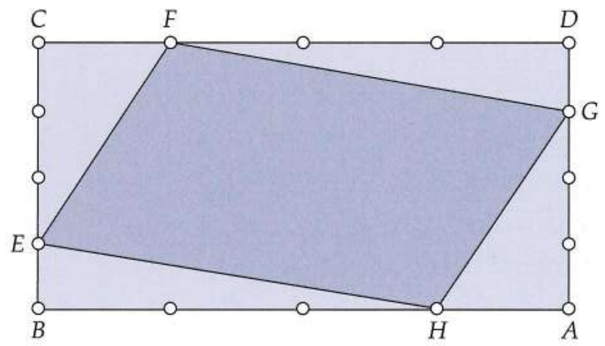


Figura 2

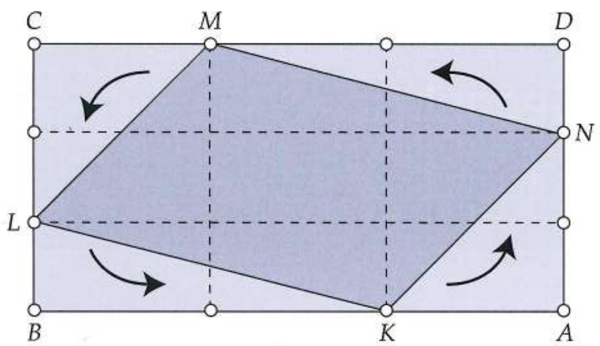


Figura 3

2º Método: Dividir o rectângulo inicial em rectângulos *elementares* que podemos admitir que têm área 1. Foi a estratégia seguida pelo Edgar Martins (figura 3).

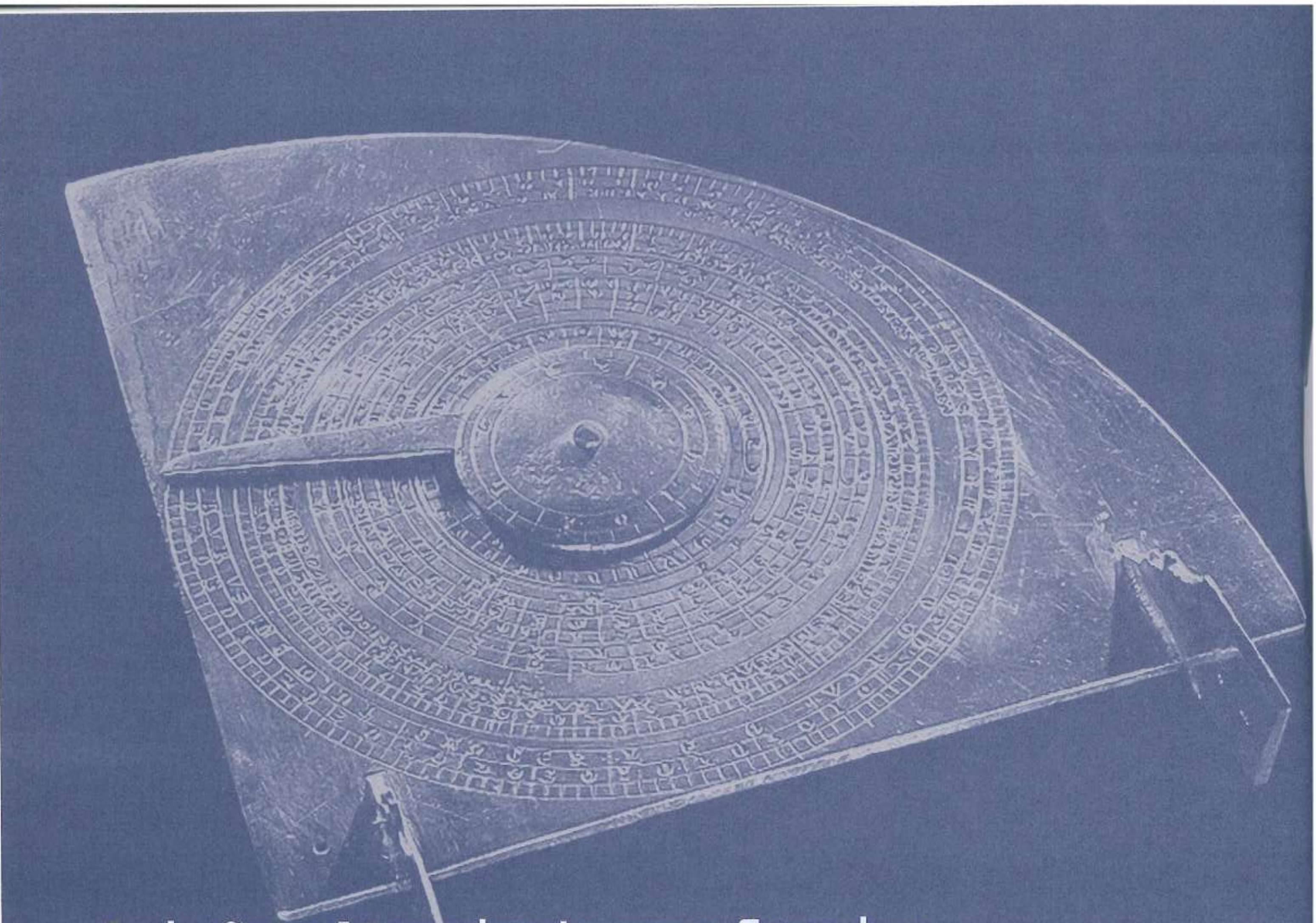
No primeiro caso, o rectângulo $ABCD$ tem área 9.

O paralelogramo é formado pelo rectângulo central no interior e as partes dos 8 rectângulos pequenos que o rodeiam podem ser rearrumadas como se mostra na figura, dando uma área total de 5. A relação das duas áreas é de 5/9.

No caso geral, o paralelogramo tem, no seu interior, $(n-2)^2$ rectângulos elementares completos. Os restantes $4n-4$ rectângulos elementares podem ser rearrumados, verificando-se que metade deles corresponde ao interior do paralelogramo. A área do palelogramo é então $(n-2)^2+2n-2=n^2-2n+2$.

A fórmula da razão entre as áreas é, evidentemente, igual à que encontrámos pelo método anterior.

O Alberto Canelas foi mais longe. Verificou primeiro que o limite da razão entre as áreas é 1 quando n tende para infinito. Além disso, encontrou as fórmulas para os diferentes casos em que o paralelogramo se obtem unindo outros pontos dos lados que não os que considerámos neste problema.



Redução ao 1.º quadrante com o Geogebra

Paulo Ferreira Correia José António Fernandes

O desenvolvimento das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e o aprofundamento da sua utilização na sociedade têm-se repercutido na escola. No caso da disciplina de Matemática, são particularmente representativas as calculadoras científicas, mais utilizadas no ensino básico, as calculadoras gráficas, mais utilizadas no ensino secundário, os computadores, o *software* educativo e a Internet.

Com a publicação do programa ajustado de Matemática, em 1997, é dada uma grande relevância ao uso das TIC no ensino e aprendizagem da Matemática, incluindo-se mesmo um tema transversal intitulado «Tecnologia e Matemática» e instituindo-se a permissão de os alunos utilizarem calculadoras gráficas nos exames. Com a subsequente reformulação dos programas (não só de Matemática A mas também de Matemática B e de Matemática Aplicada às Ciências Sociais) verifica-se «que o número de referências à tecnologia aumenta, de forma consistente, com os novos programas que vão substituindo os anteriores, (...) salientando-se que as TIC são referidas ao nível dos objectivos, dos recursos e dos vários tópicos dos programas» (Fernandes, Alves, Viseu & Lacaz, 2006, pp. 321–322).

Em geral, encontram-se na literatura variadas razões para usar as novas tecnologias nas aulas de Matemática, salientando-se a promoção de uma aprendizagem mais profunda e significativa, o favorecimento de uma abordagem mais indutiva e experimental da matemática e o desenvolvimento de aplicações intrínsecas e extrínsecas à matemática (Fernandes & Vaz, 1998).

Com o uso das novas tecnologias, a menor ênfase no cálculo e sua simplificação liberta mais tempo para explorar actividades matemáticas mais profundas e significativas através da abordagem na sala de aula de situações extrínsecas à matemática, enfatizando múltiplas abordagens e diferentes formas de representação matemática; a rapidez com que permite gerar exemplos ou simular situações várias fornece-nos evidência para estabelecer conjecturas ou formular hipóteses, que devem ser confirmadas, sempre que possível, através de uma demonstração lógico-dedutiva, e destaca o papel distinto dos exemplos e dos contra-exemplos no estabelecimento da validade em matemática; e nas aplicações intrínsecas à matemática destacam-se as várias abordagens e as diferentes representações de um problema, enquanto nas aplicações extrínsecas à matemática se destaca a diminuição do papel do cálculo.

Também ao nível afectivo são reconhecidas vantagens no uso das novas tecnologias, designadamente calculadoras e computadores. No caso das calculadoras, são vários os estudos que fornecem evidência empírica acerca do efeito positivo da sua utilização sobre as atitudes em relação à matemática (e.g., Ellington, 2003; Fernandes, Almeida, Viseu & Rodrigues, 1999).

Em termos de recomendações do uso de tecnologia nos temas dos programas de Matemática do ensino secundário, salienta-se a questão do cálculo, a representação gráfica, a simulação e modelação e, por fim, a representação geométrica. Para além de ser reafirmada a necessidade de acompanhar o uso da tecnologia de algum tipo de verificação analítica, a importância dada à representação gráfica está bem expressa nos programas de 1997 e 2002, afirmando-se neste último:

> Não é possível atingir os objectivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). (Ministério da Educação, 2002, p. 15)

As tecnologias proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas sob perspectivas variadas, que permitem diferentes representações e a exploração e análise de muitos exemplos (NCTM, 2007). Na opinião de Ferrara, Pratt e Robutti (2006), a investigação tem reconhecido que a tecnologia facilita abordagens dinâmicas aos principais conceitos da álgebra e do cálculo, chamando mais a atenção para a construção de significados do que para os aspectos manipulativos.

Neste contexto, o GeoGebra como *software* de matemática dinâmica que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo revela-se uma ferramenta que permite ao professor realizar actividades, projéctos de exploração e investigação na sala de aula, recorrendo apenas a uma aplicação, que tem ainda a vantagem de ser de acesso livre. Esta aplicação combina a manipulação gráfica e a respectiva representação algébrica, aspecto que o caracteriza e distingue de outros ambientes de geometria dinâmica.

Oliveira e Fernandes (2010), tendo conduzido um estudo com alunos do ensino secundário, envolvendo as relações entre as razões trigonométricas e a construção dos gráficos das funções trigonométricas seno e co-seno, destacam o interesse da utilização do programa GeoGebra pelos alunos, quer ao nível cognitivo quer afectivo.

> Dos resultados obtidos na experiência realizada na sala de aula e da opinião dos alunos, parece legítimo afirmar que o *software* educacional, e aqui especificamente o GeoGebra, foi utilmente utilizado e representou uma mais-valia tanto na aprendizagem com compreensão como na motivação para a aprendizagem da Matemática. (p. 575)

Neste texto faz-se a descrição de uma actividade enquadrada no tema Geometria no Plano e no Espaço II, do programa de Matemática A do 11.° ano de escolaridade, mais especificamente no estabelecimento das relações entre as razões trigonométricas *seno* e *co-seno* de α e $90°\pm\alpha$, $180\pm\alpha$, $270°\pm\alpha$, $-\alpha$, em que α representa a amplitude de um ângulo pertencente ao primeiro quadrante. Apresentam-se também as opiniões dos alunos sobre a intervenção de ensino, recolhidas através de um questionário.

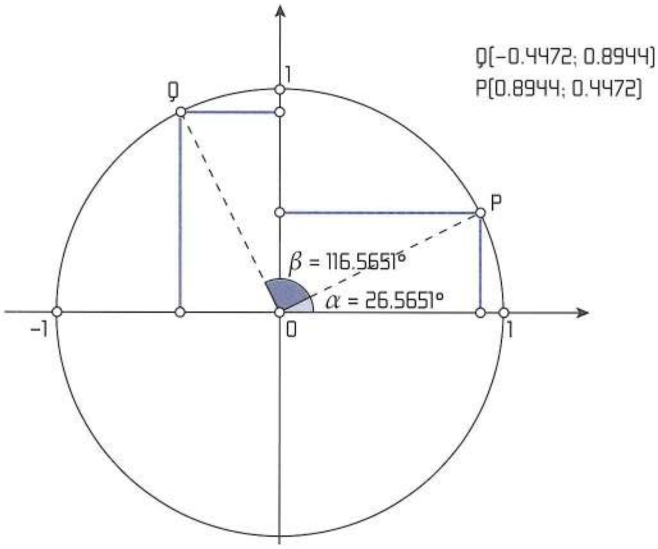


Figura 1. Construção 2 de apoio às etapas 4 e 5 da ficha de trabalho

Exploração da redução ao 1° quadrante com o GeoGebra

Reconhecendo o potencial educativo do GeoGebra no ensino e na aprendizagem da *Redução ao primeiro quadrante*, do tópico *Trigonometria*, implementou-se uma actividade de descoberta guiada, apoiada neste *software*.

A implementação da actividade decorreu no primeiro período do ano lectivo 2009/2010, no âmbito de uma acção de formação, e foi desenvolvida em três turmas do 11° ano de escolaridade de uma escola secundária do distrito de Braga. Os alunos distribuídos em grupos de 3 ou 4 elementos realizaram, numa aula de 90 minutos, a actividade num ambiente de sala de aula favorável à formulação e teste de conjecturas, à experimentação e à partilha de ideias.

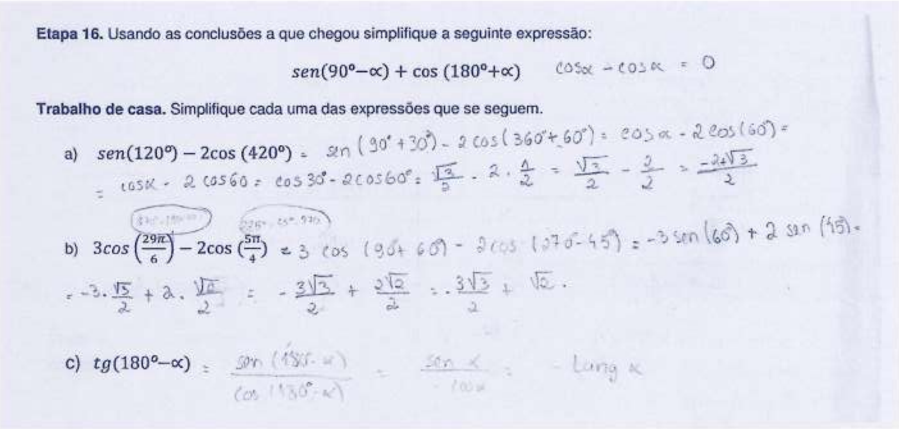
Realizaram a actividade 47 alunos, 17 rapazes e 30 raparigas, cuja média das idades era de 16 anos. Relativamente ao desempenho em Matemática, a média das classificações (de 0 a 20 valores) obtidas pelos alunos no 10.° ano de escolaridade foi de 11,5 valores.

Quanto ao grau de dificuldade na disciplina de Matemática, 17% dos alunos afirmaram sentir *muitas dificuldades*, 68,1% *algumas dificuldades*, 12,8% *poucas dificuldades* e 2,1% *não ter dificuldades*.

Apoiados nas construções em GeoGebra (num total de 7), previamente elaboradas, os alunos resolveram uma ficha de trabalho organizada por etapas, orientada para a descoberta das relações entre as razões trigonométricas *seno* e *co-seno* de α e $90°\pm\alpha$, $180°\pm\alpha$, $270°\pm\alpha$, $-\alpha$.

Na manipulação da construção em GeoGebra pedia-se aos alunos para prestarem atenção aos segmentos assinalados a vermelho e a azul e às coordenadas dos pontos P e Q assinalados no círculo trigonométrico (figura 1).

No sentido de facilitar a descoberta de regularidades entre as razões trigonométricas *seno* e *co-seno* de α e β, as construções permitiam a obtenção de um número elevado de coordenadas para os pontos P e Q, favoreciam o estabelecimento de rela-



Etapa 16. Usando as conclusões a que chegou simplifique a seguinte expressão:

$$sen(90^o-\alpha) + \cos(180^o+\alpha) \quad \cos\alpha - \cos\alpha = 0$$

Trabalho de casa. Simplifique cada uma das expressões que se seguem.

a) $sen(120^o) - 2\cos(420^o) = sen(90^\circ+30^\circ) - 2\cos(360^\circ+60^\circ) = \cos\alpha - 2\cos(60^\circ) =$
$= \cos\alpha - 2\cos 60 = \cos 30^\circ - 2\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

b) $3cos\left(\frac{29\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 3\cos(90^\circ+60^\circ) - 2\cos(270^\circ-45^\circ) = -3\,sen(60^\circ) + 2\,sen(45^\circ) =$
$= -3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}.$

c) $tg(180^o-\alpha) = \frac{sen(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)} = \frac{sen\,\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\,\alpha$

Figura 2. Etapa 16 e tarefas adicionais da ficha de trabalho

ções entre os segmentos verticais e horizontais, importantes na construção de uma regra, desafiavam os alunos a formular conjecturas e a procurar justificações e apoiavam o processo de generalização.

No início da actividade, a maioria dos grupos dedicou algum tempo à análise da primeira construção em GeoGebra — relações entre as razões trigonométricas de α e $90^\circ-\alpha$. Foi sentida nos alunos a preocupação em determinar a relação entre as coordenadas dos pontos P e Q e entre os comprimentos dos segmentos assinalados a vermelho e a azul. Quando se perguntava a um dos grupos: *Então não resolvem a actividade?*, um dos elementos respondeu de imediato *Estamos a analisar o desenho. Este tracinho [segmento colorido] e este [apontando na construção] são sempre iguais*.

Durante a exploração da actividade em sala de aula prestou-se atenção às dificuldades que iam emergindo para serem fornecidas pistas e ao conteúdo das discussões que iam surgindo nos grupos para se compreender os raciocínios dos alunos e orientar as suas discussões de forma a não se desviarem do essencial. A dificuldade mais frequente nos vários grupos ocorreu perante a necessidade de, pela primeira vez, escrever uma relação em que as razões trigonométricas tinham sinais contrários, isto é, na situação $\cos(90^\circ + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$.

À medida que os alunos iam progredindo nas etapas da ficha de trabalho, nos vários grupos eram proferidos comentários do tipo: *Agora isto é fácil!*; *O seno é positivo nos dois [quadrantes] e o co-seno é negativo no segundo [quadrante]*; *Agora até já nem precisamos de preencher a tabela toda.*

Terminada a realização da actividade, sob a moderação do professor, os alunos efectuaram uma síntese das conclusões obtidas (figura 2), reveladora da compreensão do tópico leccionado.

Os noventa minutos da aula revelaram-se suficientes para a realização da actividade, incluindo as tarefas adicionais destinadas à consolidação das aprendizagens e inicialmente perspectivadas para trabalho de casa.

Os alunos também foram capazes de transferir as aprendizagens adquiridas para o caso da tangente, partindo das conclusões obtidas para o seno e para o co-seno, tendo ocorrido como estratégia predominante a utilização da relação $\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha/\cos\alpha$.

Na aula seguinte à da implementação da actividade foi ministrado um questionário para conhecer a opinião dos alunos sobre a tarefa e a forma de a explorar, cujos resultados se apresentam na Tabela 1.

Opiniões dos alunos sobre a tarefa e a forma de a explorar

Na Tabela 1 estão registadas as reacções dos alunos, em percentagem, a cada um dos itens do questionário, considerando as categorias de respostas DT/D (Discordo Totalmente/Discordo), I (Indiferente) e C/CT (Concordo/Concordo Totalmente).

Por observação da tabela, verifica-se que a grande maioria dos alunos avaliou de forma muito positiva e tarefa e a forma como foi implementada na sala de aula. Considerando a média das percentagens da categoria de respostas C/CT, depois de inverter os itens centrados nas dificuldades sentidas pelos alunos (1° e antepenúltimo itens), em cada uma das dimensões consideradas, conclui-se que Concordaram ou Concordaram Totalmente cerca de 85% na dimensão *Metodologia de ensino e aprendizagem*, 91% na dimensão *Actividade aplicada na sala de aula* e 92% na dimensão *Metodologia de trabalho de grupo*. Estes resultados exprimem de forma clara a perspectiva positiva dos alunos face à intervenção de ensino realizada.

Considerações finais

Com a actividade desenvolvida, tirou-se proveito do software para a descoberta das relações entre as razões trigonométricas, tendo as construções permitido aos alunos obter um grande número de coordenadas dos pontos P e Q em pouco tempo e, simultaneamente, visualizar os vários segmentos de recta considerados nas figuras.

Opiniões dos alunos (em %) sobre a tarefa e a forma de a explorar

Dimensões/Itens	DT/D	I	C/CT
Metodologia de ensino e aprendizagem			
A Trigonometria é um tema mais difícil do que os outros temas de Matemática.	82	6	12
Globalmente, gostei da forma como a redução ao 1° quadrante foi apresentada na aula.	0	19	81
A actividade proposta despertou o meu interesse pela Trigonometria.	0	31	69
Foi interessante descobrir por nós mesmos as relações entre as razões trigonométricas apresentadas na ficha de trabalho.	0	0	100
No futuro gostaria de aprender outros assuntos de Matemática do mesmo modo que aprendi a redução ao primeiro quadrante.	0	6	94
Actividade aplicada na sala de aula			
As construções em GeoGebra facilitaram a compreensão da redução ao primeiro quadrante.	0	6	94
As etapas consideradas na ficha de trabalho facilitaram a compreensão da redução ao primeiro quadrante.	0	13	87
Foi fácil obter as relações entre as razões trigonométricas apresentadas na ficha de trabalho.	0	0	100
Nas primeiras etapas da ficha de trabalho senti necessidade de preencher as tabelas, mas depois as construções em GeoGebra eram suficientes para concluir sobre as relações entre as razões trigonométricas apresentadas.	5	13	82
Metodologia de trabalho de grupo			
Gostei de trabalhar em grupo na resolução da actividade.	0	6	94
Tive dificuldades em trabalhar em grupo.	100	0	0
O trabalho em grupo foi importante para aprender melhor.	0	25	75
Participei activamente na resolução da actividade.	0	0	100

DT/D — Discordo Totalmente/Discordo; I — Indiferente; C/CT — Concordo/Concordo Totalmente.

Tabela 1. Resultados do questionário aplicado aos alunos

A conjunção da metodologia de trabalho de grupo, da utilização das construções em GeoGebra e da actividade orientada revelou-se eficaz na motivação dos alunos para a aprendizagem do tópico em estudo, provocou a formulação de conjecturas entre os alunos, promoveu a discussão e a partilha de ideias e permitiu conduzir à generalização.

A compreensão dos conteúdos envolvidos na actividade foi validada pela correcção com que os alunos resolveram as questões propostas na etapa 16 e transferiram as aprendizagens para a resolução de uma nova situação (no caso da tangente).

Referências

Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(5), 433–463.

Fernandes, J. A. & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, n° 39, 43–55.

Fernandes, J. A., Almeida, C., Viseu, F., & Rodrigues, A. M. (1999). Um estudo exploratório sobre atitudes e práticas de professores de matemática na utilização de calculadoras. In C. Almeida, J. A. Fernandes, A. M. Rodrigues, A. P. Mourão, F. Viseu e H. Martinho (Orgs.), *Calculadoras gráficas no ensino da matemática* (pp.1–28). Braga: Departamento de Metodologias da Educação da Universidade do Minho.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Viseu, F. & Lacaz, T. M. (2006). Tecnologias de informação e comunicação no currículo de Matemática do ensino secundário após a reforma curricular de 1986. *Revista de Estudos Curriculares*, 4(2), 291–329.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role and uses of Technologies for the teaching of algebra and calculus. In Gutiérrez & P. Boero (Orgs.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 237–273). Roterdão: Sense Publishers.

Ministério da Educação (1997). *Matemática — Programa do 10°, 11° e 12° anos*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A (10°, 11° e 12° anos)*. Lisboa: Autor.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar. Lisboa: Associação de Professores de Matemática*. (Tradução portuguesa do original de 2000)

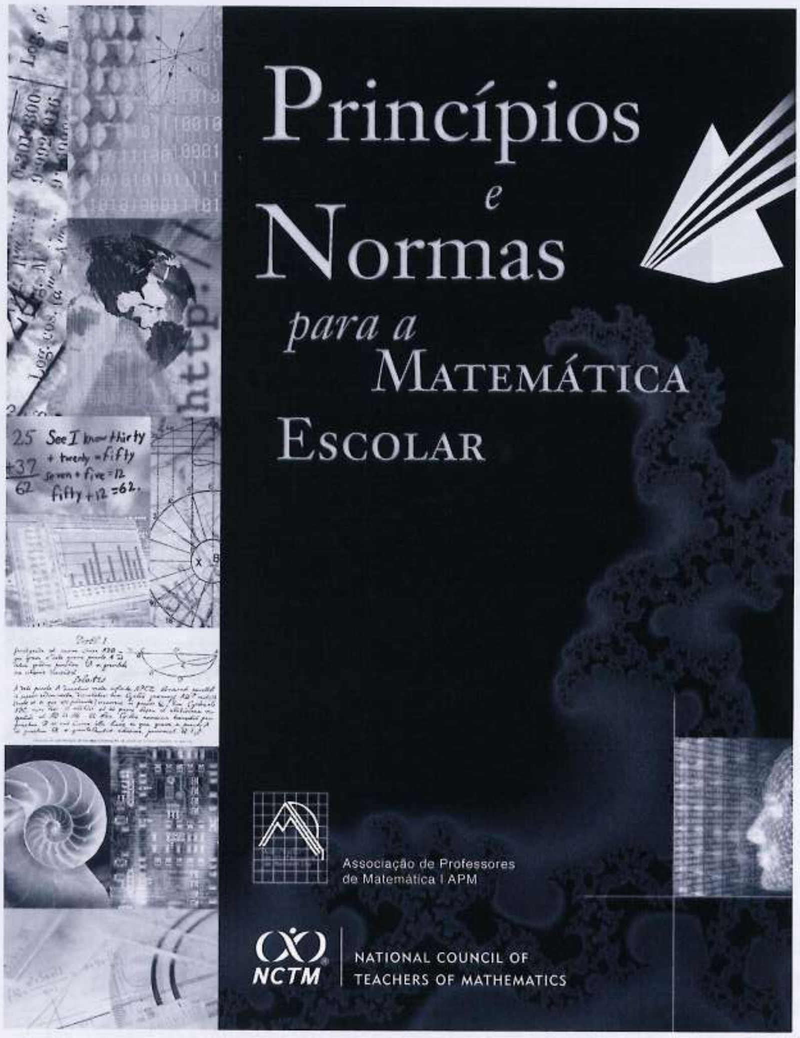
Oliveira, G. P. & Fernandes, R. U. (2010). O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 548–577.

Paulo Ferreira Correia

Escola Secundária/3 de Barcelos

José António Fernandes

Universidade do Minho



Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2ª edição)

Edição APM, 2008
Sócio 18,00€ | *PVP* 27,00€

Na continuidade das orientações e propostas curriculares para o ensino da Matemática que tem vindo a elaborar nas décadas recentes, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicam os *Principles and Standards for School Mathematics*, agora editados pela APM. Os Princípios descrevem características de uma educação matemática de elevada qualidade; as Normas descrevem os conteúdos e processos matemáticos que os alunos deverão aprender. Em conjunto, os Princípios e Normas constituem uma perspectiva orientadora dos educadores que lutam pelo contínuo desenvolvimento da educação matemática nas salas de aula, escolas e sistemas educativos.

Educação e Matemática: vinte anos de temas, vinte anos de pessoas

Edição APM, 2008 | PVP: 16,50€ Sócio: 11,00€

A *Educação e Matemática* celebrou vinte anos de existência em 2007. Ao longo deste tempo, foram vários os temas que mereceram atenção na revista. Este livro reúne assim um conjunto de artigos originais que discutem e problematizam aspectos diversos da educação matemática no presente contexto educativo e curricular português, constituindo uma oportunidade para rever o passado recente e perspectivar os desafios do futuro próximo.

A República ordena-te que resolvas a equação:

$$\frac{x-\dfrac{2(x-18)}{9}}{8}-\frac{x-18}{6}=x+9-\frac{5x-\dfrac{2(x-10)}{23}}{4}$$

António Moura

Em Outubro, motivado pelas comemorações do centenário da Revolução Republicana, fui à procura de algum livro de Matemática destinado ao ensino liceal do tempo da I República. Ver quais os conteúdos, os questionários, o estilo de exposição. Espreitar para dentro das aulas através de páginas amarelecidas por muitos Outonos. Sempre, claro, com o objectivo de falar sobre alguma coisa aos meus alunos dos 10.º e 12.º anos de *Matemática* A. Um velho livro conta sempre tanta coisa, como Jorge Luís Borges, poeta argentino, gostava de dizer e eu ansiava por lhes mostrar.

Veio-me parar às mãos um belo livro: *Elementos de Álgebra*, da autoria de Eduardo Ismael dos Santos Andrea, editado pela Imprensa Nacional em 1914. Trata-se da 3.ª edição, avisando «conforme à ortografia oficial» (que actualidade!) e destinando-se aos alunos da 3.ª Classe dos Liceus.

O volume não contém apenas este livro: cuidadosas mãos juntaram todos os livros de Álgebra[1], do mesmo autor (e casa editora), desde a 3.ª Classe até à 7.ª Classe dos Liceus. Assim, encontramos, docemente amorenados pelo tempo, *Complementos de Álgebra* (para a 4.ª e 5.ª Classes, que constituíam, com a anterior, o Curso Geral dos Liceus), *Compêndio de Álgebra* (para a 6.ª e 7.ª Classes, que constituíam o Curso Complementar — um de Ciências e outro de Letras[2]). Curiosamente, este último livro, datado já de 1929. O mais interessante é que o volume tem o tamanho de um livro de bolso e um total de 356 páginas (98 + 85 + 173). Suspeito de que os livros eram vendidos em fascículos.

Várias *vozes* perpassam naquelas páginas (Dias (2010) : 4). A institucional, a do autor, a dos proprietários. Descortinei a do professor também.

Para livros de destino escolar, estes foram invulgarmente bem tratados. Isso já nos mostra algo sobre os seus possuidores. Certamente, um ensino de elite e para uma elite. Livros e programas que tiveram longa vida.

As capas, de concepção gráfica bem diferente das de hoje, têm um marcado carácter institucional. A palavra «oficial» aparece três vezes: *Ensino Secundário Oficial*, *Aprovado Oficialmente* e outro *oficial* a propósito da ortografia. Os livros de 1914 ainda «em harmonia com os programas dos Liceus». O de 1929 tem um mais sério «Conforme os novos programas liceais». O último, o de 1929, exibe o escudo da República Portuguesa onde os outros têm a vinheta da editora: marca deliberada de uma fronteira dentro da própria República? A *Ordem* tornada visível a todos?

E o autor? Só um nome, ainda que completo? Não. Também se apresenta numa postura intitucional. Avisa-se, abaixo do nome, numa linha, que é «Professor da Faculdade de Sciências da Universidade de Lisboa» e, na linha seguinte, qual degrau, «e do Liceu de Pedro Nunes». Ao contrário, seria bizarro!

Deveria ter uma vida cheia: acumular esses cargos e ainda escrever livros para o ensino (escreveu para todos os graus de ensino!). Diga-se, em abono da verdade, livros bem escritos. Actualizando-os nas sucessivas edições. Nos livros de Aritmética, procura exemplificar conceitos com aspectos da vida social e dos fenómenos naturais. Por vezes, em livros escolares daquele tempo, declara-se como falso um exemplar que não esteja rubricado pelo autor. Mas estes não foram rubricados pelo autor. Mais tarde, no tempo do livro único, os exemplares seriam «devidamente rubricados»: pelo autor e por um alto funcionário do Minitério da Educação. A voz do autor é a voz maior do livro. Por ela percebemos o seu conhecimento, a sua segurança. O cuidado na execução dos gráficos. Alguns exemplos originais. A imaginação em certos problemas do primeiro e do segundo graus. E nos dos sistemas.

Aberto o livro, que vozes se seguem? As dos proprietários. Contrapondo-se ao carácter institucional, seguem os nomes manuscritos de vários possuidores sucessivos. A caligrafia que denota cuidado. Por vezes, uma imagem afirmativa de adulto mostrada na assinatura e não na escrita do nome: o poder da posse de um sinal, num país de analfabetos. O individual a contrastar com o impessoal. Nome e número. Só uma turma, por classe! Entre quatro nomes masculinos, escritos a tinta, aparece uma *Adozinda do Céu*, eternizada a lápis. Mais à frente, também a tinta. Talvez a proporção de género correcta, mas apenas para as elites do tempo. (Ou, simplesmente, o nome da namorada de algum deles, escrito em alguma tarde de sobressalto ou de enfado?!).

Só um local (e no fim do livro): Bragança.. Várias vezes escrita. Para vincar bem o carácter bragançano? Ainda mais minuciosamente: Liceu Central de Bragança. Só uma data: 31–1–918. Provavelmente, um feriado. Também no fim. Quase no fim da Guerra!

Agora, no livro da 4.ª Classe, no fim, talvez no fim de tudo, escrito a lápis: *Há momentos na vida que valem por séculos de tormenta*. Dois nomes: *Adozinda do Céu* e *Maria da Graça*. Um local: Bragança. Uma data: 7–6–919. Duas alunas de um Liceu de Bragança! Hoje, isto é banal: naquele tempo, era excepcional! De facto, só em 17 de Novembro de 1914 (Carvalho (1986):683) foi permitido às raparigas entrarem num Liceu de rapazes. Mais tarde, haveria por todo o país, Liceus para raparigas e Liceus para rapazes.

A que tormenta se refeririam? Tormentas da alma? Dos tempos? Da Guerra absurda e desumana? Que momentos da vida? Ou eram apenas resultado do característico gosto dos adolescentes pelo excesso? *Momentos que valem por séculos de tormenta*! Entre aquelas duas datas, num momento do tempo, acabou a Guerra. Ela saberia, certamente, que a Guerra tinha acabado. Mas saberia ela que a Guerra tinha acabado às 11:00 do dia 11 de Novembro de 1918? Os negociadores do Armistício concordaram, às cinco e dez da manhã, em acabar a Guerra às onze horas. Exactamente! *Um momento no tempo*. «Um soldado canadiano, George Price, esperava, como milhões de outros soldados, pelo fim da guerra. Faltavam dois minutos para as onze. Nesse momento, um franco-atirador alemão disparou, e Price foi morto» (Gilbert (2007):737). Há momentos na vida que são séculos de tormenta!

E a voz do professor? Seguramente, nos exercícios indicados para resolver (ou seriam resolvidos todos?). Nada mais? Sim. Nas notas escritas à volta do texto. Como naquela sobre progressões aritméticas, na 5.ª Classe: *Progressão aritmética é uma dada sucessão de números que goza da propriedade de ser constante a diferença entre cada um e o precedente*. Porque não escrever isto no caderno? Porquê no livro? Para contrastar? Para sobrepor a definição do professor à do livro? E qual a definição referida no texto? «Quando numa dada sucessão de números é constante a diferença entre cada um e o precedente, diz-se que os números (*termos*) formam uma progressão *aritmética* (ou por *diferença*), e essa diferença constante toma o nome de *razão* da progressão.» Entrevemos a vontade de fazer as coisas passo a passo. «Uma coisa de cada vez» seria esse o preceito dele? Mas, para nós, há um pormenor intrigante: o texto não define sucessão.

A seguir: o texto. A *matéria*. Pois bem: o assunto começa com «Generalidades — Números negativos» e acaba, espantem-se, com «Primeira noção de integral». Isto, diz a voz oficial, monótona, sem modulação, cega. Desprendida da Grande Guerra que começaria com o ano lectivo: 4 de Agosto de 1914. O «Programa Oficial» é seco na pretensão de ser objectivo, claro, técnico. Eis o da «IV CLASSE»: Álgebra. — Revisões de álgebra. Potências de expoente inteiro. Cálculo dos radicais. Equação do 2.º grau a uma incógnita. Dedução da expressão das raízes; problemas correspondentes».

Que parte do programa se deu? A Guerra, que perturbação trouxe? Que ânsia? Um programa concebido em Lisboa, organizado por um «Conselho Superior da Instrução Pública» situado em Lisboa, estudado por um livro editado em Lisboa, escrito por um autor vivendo em Lisboa (tinha passado por Bragança, como professor!), como seria leccionado em Bragança, naqueles anos terríveis? Talvez os lápis nos digam: os lápis estão ausentes do final do livro da 7.ª Classe! Os integrais não tiveram o primeiro olhar! Mas em que páginas o livro estaria mais tempo aberto? Quais as mais marcadas pelo sol, pelas mãos, pelos lápis? As das equações dos primeiro e segundo graus, as dos casos notáveis (que eram cinco — com o cubo da soma e o da diferença), os sistemas. Por sobre todos: os radicais, os logaritmos, as progressões, os limites e as derivadas. E as páginas quase intocadas? As relativas a funções. Deveria ter custado algum esforço ao autor a reprodução dos gráficos: são as únicas figuras daqueles livros. Gráficos com dados reais colhidos em anuários «obsequiosamente fornecidos» por vários organismos estatais.

Exercícios. Quarenta e três só sobre radicais. Rotinar as regras. Curiosamente, o quadragésimo terceiro destina-se à criatividade do aluno, porque não são dadas regras para aquele «caso». Ei-lo: .

$$\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

Deveria chegar a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Algum bom gosto, convenhamos.

Uma densidade de exercícios sobre logaritmos. *Já estou farta disto* ainda sobrevive na margem da página.

Muitas equações para resolver. Todas de um aspecto assustador para os nossos alunos de hoje. Pois teimei em colocar a equação que figura no título aos meus alunos! Imagino Adozinda recintando em voz baixa, comandante da sua guerra: Primeiro, desembaraçar de parêntesis; Segundo, igualar alguns denominadores; Terceiro, resolver as fracções de fracções; Quarto, igualar denominadores; Quinto, eliminar os denominadores; Sexto, colocar no primeiro membro os termos contendo a incógnita; Sétimo, simplificar; Oitavo, isolar a incógita; Nono, reduzir a fracção; Décimo, verificar a solução. São dez, os mandamentos, mesmo que a República seja laica.

Pois os meus alunos não foram capazes de a resolver. Dei comigo a matutar na razão do insucesso. Impossível não vencer esta guerra! Haverá outra forma de resolver a equação? De forma mais próxima dos meus alunos? Uma forma quase obrigatória? Outros mandamentos?

O que é

$$\frac{x-\frac{2(x-18)}{9}}{8}-\frac{x-18}{6}=x+9-\frac{5x-\frac{2(x+10)}{23}}{4}$$

senão uma equação do primeiro grau? E o que é uma equação do primeiro grau? Uma equação do primeiro grau em $\boldsymbol{R}$, em x, é uma equação que é equivalente a uma equação da forma $ax+b=0$ em que $a,b\in R$ (em bom rigor, com $a\neq 0$). Mas no 10.º Ano estudamos a função afim! Então uma função afim serve para resolver qualquer equação do primeiro grau e de uma forma simples: o zero da função afim é a solução da equação e para se conhecer uma função afim basta saber-se apenas o valor que ela assume em dois pontos! Não são precisos dez mandamentos!

Então, para resolvermos uma equação do primeiro grau podemos optar por outro caminho: Primeiro, colocamos *tudo* no primeiro membro; Segundo, identificamos a expressão do primeiro membro como a que define uma função afim, f; Terceiro, calculamos a imagem da função afim em dois objectos quaisquer, x_0 e x_1; Quarto, calculamos

$$x=-\frac{x_1f(x_0)-x_0f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)},$$

que é a solução.

Fiquei contente: as funções foram úteis para a própria Matemática, apareceu uma demonstração («demonstrámos uma fórmula!»). Julgo que a Adozinda teria gostado desta forma de resolver. E Eduardo Andrea também!

Notas

[1] Além de Álgebra, no Liceu estudava-se Aritmética e Geometria.

[2] Estou a seguir Carvalho (1986)

Referências

Carvalho, Rómulo de. (1986). *História do Ensino em Portugal*. Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa.

Dias, Isabel Cristina.(2010). Um Caderno Diário de Matemática: Heteroglossia nas Disciplinas escolares e na Análise de Objectos de Ensino. In CD-Rom de *A História das Disciplinas Escolares de Matemática e de Ciências*. (Org. Joaquim Pintassilgo, *et al.*). Escolar Editora. Lisboa.

Gilbert, Martin. (2007). A *Primeira Guerra Mundial*. A Esfera dos Livros. Lisboa.

António Moura

Escola Secundária da Cidadela, Cascais

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A tarefa que se apresenta foi desenvolvida pelo professor António Moura, na sequência do trabalho de pesquisa que fez à volta dos livros de Matemática destinados ao ensino liceal do tempo da I República. Antes da utilização em sala de aula recomendamos a leitura prévia do artigo «A República ordena-te que resolvas a equação» publicado nesta revista.

A República ordena-te que resolvas a equação

$$\frac{x - \frac{2(x-18)}{9}}{8} - \frac{x-18}{6} = x + 9 - \frac{5x - \frac{2(x+10)}{23}}{4}$$

Em ano de comemorações do centenário da Revolução Republicana, recordemos um belo livro: *Elementos de Álgebra*, da autoria de Eduardo Ismael dos Santos Andrea, editado pela Imprensa Nacional em 1914.

A equação que serve de título a esta proposta é retirada desse livro e o objectivo desta ficha é resolver a equação através das propriedades que conhecemos das funções afins.

Uma função afim f é uma função real de variável real com domínio $\mathscr{R}$ e definida por $f(x) = ax + b$, em que a e b são constantes. Sabemos que para conhecermos uma função afim, basta conhecermos o seu valor em dois *objectos*.

1. Considera a equação $5x - 3 = 2x - 1$ e resolve-a pelos procedimentos habituais.

2. Agora vamos resolver a equação $5x - 3 = 2x - 1$ através de uma função afim:
   - Coloca todos os termos no primeiro membro;
   - define uma função f com a expressão que se encontra nesse membro;
   - calcula o zero da função afim.

3. Mostra que numa função afim $f(x) = ax + b$ se tem:
   $b = f(0)$ e $a = f(-1) - f(0)$ e portanto, se $a \neq 0$, o zero de f é dado por $x = \frac{-f(0)}{f(1) - f(0)}$.

4. Usando o resultado obtido em 2 resolve a equação $\frac{x-6}{5} - \frac{3(x+13)}{7} = \frac{x+24}{3} - 35$

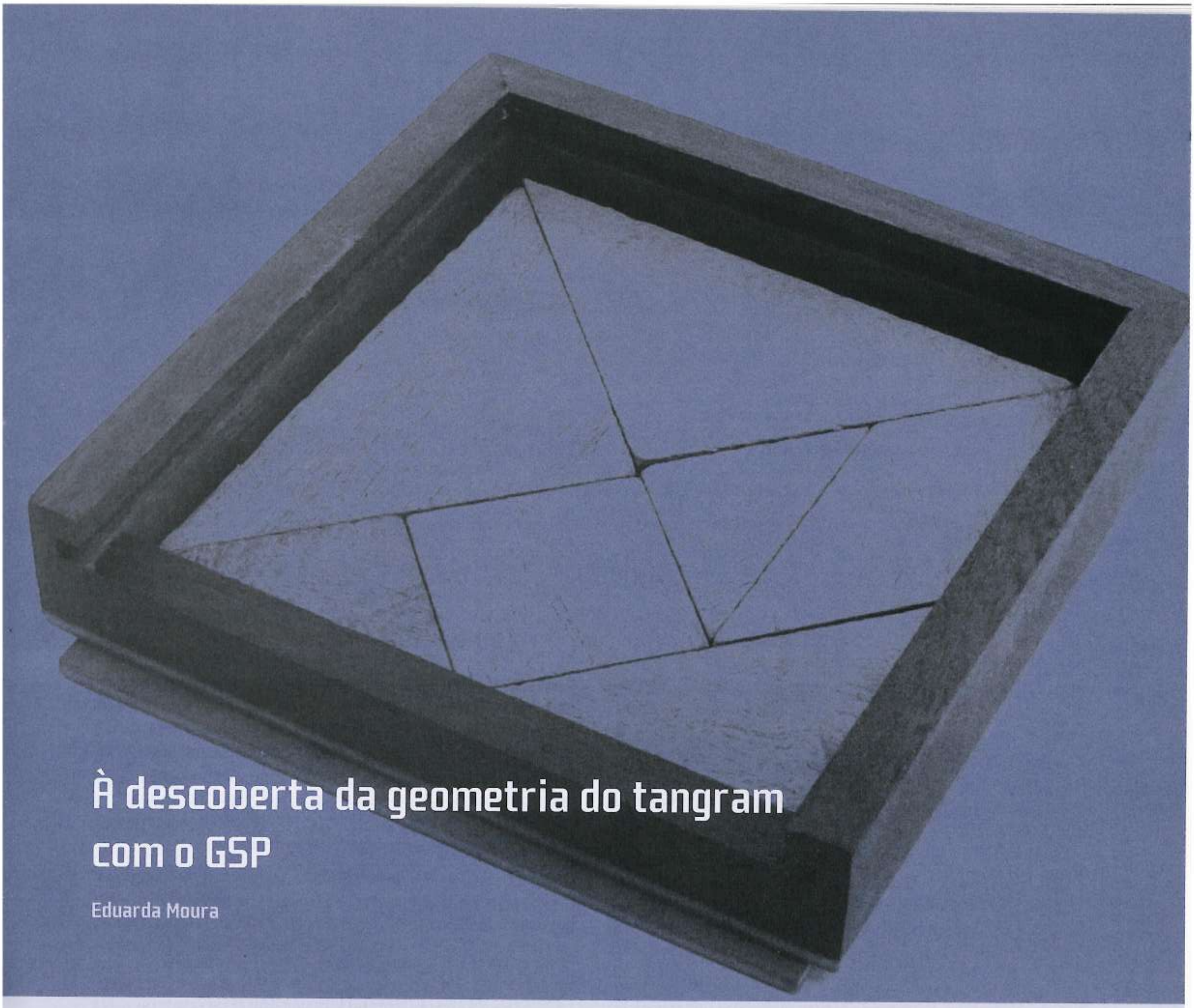
5. Relaciona a classificação de uma equação linear com a função afim:
   - Quando a equação é impossível o que se poderá concluir sobre a função afim?
   - E quando a equação é indeterminada?
   - E quando a equação é possível?

6. Mostra que numa função afim $f(x) = ax + b$ se tem:
   $b = f(0)$ e
   $a = \frac{f(2) - f(0)}{2}$ e portanto, se $a \neq 0$, o zero de f é $\frac{-2f(0)}{f(2) - f(0)}$.

7. Generaliza o estudo para dois objectos quaisquer x_0 e x_1, mostrando que o zero de f é $x = -\frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}$.

8. Resolve a equação de *Eduardo Ismael dos Santos Andrea*.

$$\frac{x - \frac{2(x-18)}{9}}{8} - \frac{x-18}{6} = x + 9 - \frac{5x - \frac{2(x+10)}{23}}{4}.$$



À descoberta da geometria do tangram com o GSP

Eduarda Moura

Micromundos

A noção de micro-mundo é uma das mais significativas para a educação da matemática. Numa perspectiva realista um micro--mundo é um domínio limitado e coerente de objectos e actividades implementadas na forma de um programa de computador e que correspondem a uma parte interessante do mundo real (Hoyles, 1993, p. 1). Por exemplo, qualquer programa em que uma criança com acções sobre objectos pode investigar a acção da gravidade. Através da ideia de micro-mundo as crianças podem ter acesso a ideias profundas e estas ideias aparecem naturalmente da interpretação guiada de fenómenos que surgem simulados através de um programa.

Seymour Papert, um matemático e cientista do campo da inteligência artificial, fez uma pequena mudança na noção de micro-mundo que se revelou de um enorme significado para a educação da matemática. O domínio restrito que um *software* simula pode começar a fazer parte de um domínio de conhecimento e logo ter significado epistemológico. A partir desta modificação e nela construída estava a ideia de planear domínios de acção com objectos que levassem em conta os conceitos matemáticos e as maneiras das crianças os construírem (Hoyles, 1993, p. 2). Uma ideia que tem origem na perspectiva construtivista da inteligência de Jean Piaget. Assim, o micro-mundo é uma forma de proporcionar concretizações às crianças que poderão permitir que façam diferentes tipos de abstracção. Toda a actividade que possa levar à abstracção é indispensável para a aprendizagem da matemática.

Muitos ambientes computacionais para a aprendizagem da geometria foram desenvolvidos, de que são só exemplo, o *SuperLogo* (NIED/UNICAMP, 2000), o *Geometer's Sketchpad* (Jackiw, 1995) e o *Cabri-Géomètre* (Laborde, Bellernain, &

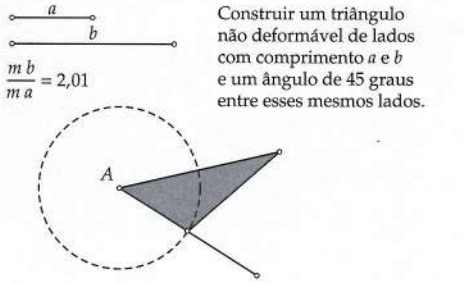


Figura 1

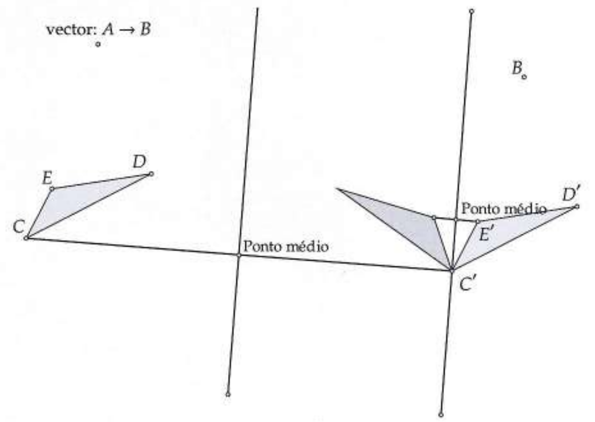


Figura 2

Baulac, 1983). Em todos estes programas a mesma ideia é concretizada: um conjunto fundamental de objectos e de acções permite às crianças desenvolver um domínio complexo de acções que poderão transformar-se em esquemas conceptuais e operações mentais matemáticas. Outros programas, começam a incluir no seu desenho operações sobre os objectos, compatíveis com as formas como as crianças aprendem conceitos matemáticos. TIMA:Sticks (Olive & Steffe, 1994), por exemplo, desenhado em simultâneo com uma experiência de ensino sobre fracções (Olive, 2000), torna disponível acções e operações que podem concretizar possíveis caminhos conceptuais na construção de fracções como números e a partir de um modelo geométrico. O programa pode então tornar-se num programa pedagogicamente e metodologicamente adequado para a aprendizagem de frações e correspondentes operações que permitem ao aluno construí-las como objetos matemáticos

No *Geometer's Sketchpad*, o conjunto elementar de objectos são o ponto, a linha, o segmento de recta, o raio e o círculo. As acções elementares possíveis que podem interessar ao ensino da geometria no 5.º e 6.º anos incluem a construção geométrica da régua e do compasso, transformações isométricas, homotetias, medição e animações no que diz respeito a acções que podem ser utilizadas directamente pelas crianças. Um leque muito extenso de acções e construção de macros que o professor pode construir para o planeamento de experiências de aprendizagem para os seus alunos é outra forma de utilização deste *software* didáctico.

Parte I: Problemas geométricos para professores

Começamos por apresentar um conjunto de problemas que pensamos ser motivadores para o professor explorar o GSP. Estes problemas foram inspirados na investigação matemática sobre isometrias proposta em Veloso (1998, p. 68). A ideia por detrás dos problemas de construção que apresentamos foi a de que o professor poderá pôr em acção os seus conhecimentos de geometria para aprender a explorar o programa. Por sua vez, o programa vai de encontro a esse conhecimento realizando naturalmente o que o professor quer fazer quando pensa numa certa construção. Além disso, é possível variar comprimentos e amplitudes em construções feitas permitindo que o professor pense matematicamente a partir de construções que faz.

Problema 1. *Construir um triângulo de tal forma que se seleccionar um qualquer lado, ou um qualquer vértice, e o triângulo for arrastado não se deforma.*

Note-se que no fim da construção se um qualquer ponto ou um qualquer lado for selecionado com a seta é possível arrastar o triângulo na folha de desenho sem que este se deforme, ou seja a sua métrica não se altera. O problema pode ser resolvido usando qualquer um dos teoremas que permitem estabelecer quando dois triângulos são geometricamente iguais. Por exemplo, dados dois lados e o ângulo por eles formado é possível construir o triângulo começando num vértice (figura 1).

Problema 2. *Desenhe um triângulo não deformável CDE e defina através de dois pontos diferentes, A e B um vector. Faça uma translação do triângulo com o vector que escolheu. Pense como pode fazer coincidir o triângulo inicial com o triângulo imagem usando só reflexões.*

Para descobrir qual é a imagem do triângulo *CDE* basta variar o vector *AB*. Para começar a exploração pode desenhar uma recta livre, defini-la como eixo de reflexão, e reflectir o triângulo *CDE*. Depois pode variar a posição e inclinação da recta com a seta e observar a imagem do triângulo.

A construção está representada na Figura 2 e a construção final deverá ser tal que os elementos que definem o triângulo *CDE* podem ser arrastados sem que a construção se desfaça.

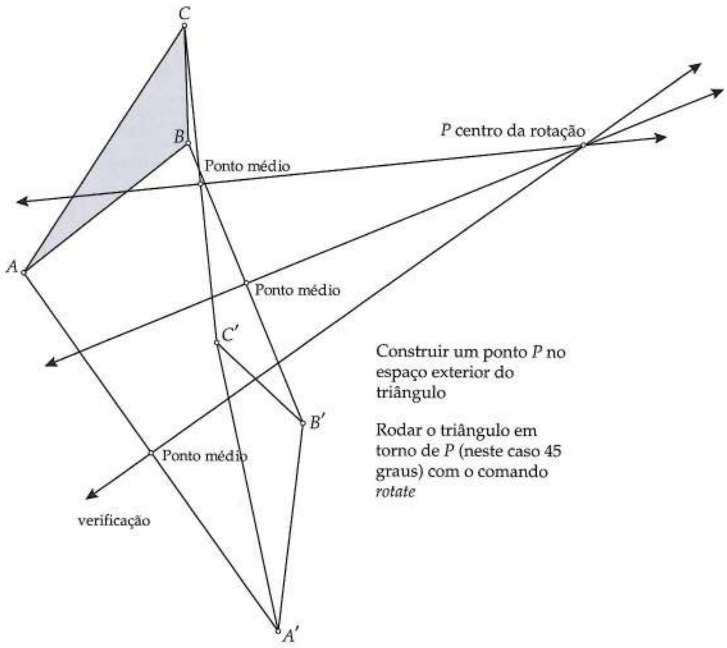


Figura 3

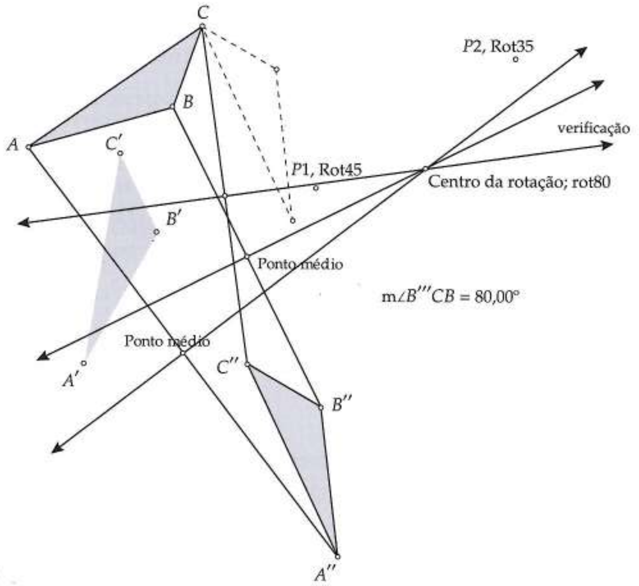


Figura 4

Problema 3. *Construa um triângulo não deformável ABC. Depois de construir um ponto P no espaço exterior do triângulo rode o triângulo 45 graus. Como pode fazer coincidir o triângulo inicial com o transformado usando só reflexões?*

Para começar a explorar este problema pode seguir a estratégia de desenhar duas rectas livres, construindo dois eixos de reflexão. Depois pode construir duas imagens do triângulo, a imagem por rotação e a imagem pelas duas reflexões. Quando as rectas espelho são transladadas ou rodadas haverá alguma posição que leva a que as imagens do triângulo coincidam? Estude depois a localização das rectas em relação ao centro de rotação para fazer a construção das rectas espelhos a partir do triângulo inicial e da sua imagem pela rotação. A construção representada na Figura 3 deverá ser tal que arrastando qualquer elemento do triângulo inicial a construção não se desfaz.

Problema 4. *Construa um triângulo não deformável ABC e construa dois pontos diferentes P1 e P2 no espaço exterior ao triângulo ABC. Rode o triângulo 45 graus em torno de P1 e depois rode a imagem 35 graus em torno de P2. Como pode fazer coincidir o triângulo inicial com o último triângulo obtido através de uma só rotação? É sempre possível fazê-lo? Experimente mudar a posição relativa dos pontos P1 e P2 e observe o que acontece à construção.*

Para descobrir o ângulo da rotação composta, α, pode transladar o triângulo imagem, $A''B''C''$, através do vector $C'' \rightarrow C$ para o comparar com o triângulo objecto da translação. Depois construa um ponto livre e rode o triângulo dado de um ângulo α, para investigar sobre o centro da rotação. Construa então o centro de rotação a partir dos triângulos inicial ABC e imagem final $A''B''C''$ (figura 4).

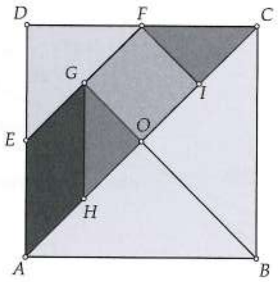
Note que os ângulos de rotação não podem ser simétricos. A construção para ângulos não simétricos está representada na Figura 4. Novamente se qualquer um dos elementos do triângulo for deslizado a construção não deverá se deformar.

Parte II: A construção de um tangram com alunos do 5° ano

O GSP permite que as crianças tenham acesso à manipulação dos desenhos geométricos que fazem. Estas construções que as crianças fazem, e podem agir sobre e com, proporcionam o estudo de invariantes geométricos. Segundo Balacheff e Kaput (1996) este desenho de *software* geométrico permite que a conceptualização em geometria que as crianças poderão fazer se torne no estudo dos invariantes das construções que as próprias crianças fazem (p. 475). Por exemplo, construir duas circunferências e poder manipulá-las relativamente à sua posição relativa, ou relativamente ao tamanho do raio pode levar as crianças a uma conceptualização da circunferência mais elaborada que linha curva fechada que podem distinguir através do seu raio. Manipular as circunferências relativamente à sua posição relativa e modificar o seu raio são acções que variam a situação estática da construção inicial e cujo resultado pode ser visualizado levando à descoberta por parte da criança das possibilidades para as maneiras como duas circunferências se podem intersectar. Para mais detalhe sobre a elaboração das construções geométricas que este *software* facilita aos alunos o leitor pode consultar Laborde (2006) e, em particular, os estudos citados sobre as utilizações que os alunos fazem do *software* bem como as classificações feitas das construções dos alunos. Num dos trabalhos citados é feita a diferenciação entre construções sem demonstração de invariantes e construções robustas em que a construção demonstra alguma invariabilidade, ambas feitas por crianças. O estudo destas construções revela como as crianças interpretam situações geométricas e como pode o professor dar seguimento a essas construções na sala de aula para que sejam os alunos a estabelecer relações geométricas invariantes.

A tarefa aqui proposta é uma entre muitos dos exemplos que poderiam ser aqui explorados para ilustrar como as crianças podem iniciar construções geométricas no GSP. Descrevemos

Tangram projectado na tela



Possíveis observações da turma a partir da dobragem

— *ABCD* é um quadrado

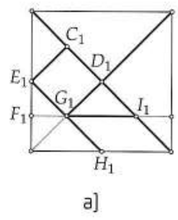
— *O* é o centro do quadrado

— As diagonais intersectam-se no ponto médio *O*

— Os triângulos *ABO* e *BCO* são congruentes

— Os triângulos *GHO* e *CFI* são congruentes

Figura 5



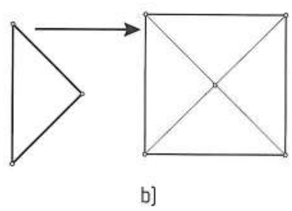


Figura 6

de seguida alguns dos passos que podem servir para orientar a construção de um tangram no GSP começando com uma dobragem em papel.

As tarefas de dobragens em papel podem ser utilizadas na unidade de geometria em tarefas desenhadas para descobrir a geometria de algo que as crianças já conhecem parcialmente, por exemplo, os polígonos, ao mesmo tempo que os conceitos geométricos podem ser definidos a partir das suas descobertas. Assim, propomos que a dobragem do tangram seja feita antes da construção no GSP para as crianças terem a oportunidade de interpretarem o que fizeram na dobragem para descobrir a geometria do tangram.

A figura de um tangram é projectada e é proposto às crianças que a partir de uma folha de papel quadrada dobrem um tangram, desenhando depois as linhas que se formam pela dobragem. Uma discussão da dobragem é feita pelas crianças em conjunto e o professor pode escrever no ficheiro GSP as conclusões a que as crianças chegam, sendo estas conclusões escritas no computador e projectadas em simultâneo (figura 5).

Sugerimos que as crianças construam intuitivamente o tangram no GSP antes de resolverem o problema da construção do tangram com restrições. Exemplos das restrições que podem ser impostas são as seguintes:

— A partir da construção de um quadrado, dado um lado, a partir de perpendicularidade e paralelismo e, transferência de segmentos com circunferências;

— A construção das peças do tangram a partir de um quadrado através dos pontos médios de linhas traçadas no interior do quadrado dado;

— A construção do quadrado maior a partir de um segmento e utilizando transformações isométricas.

O problema da construção no GSP pode ser orientado de forma a proporcionar oportunidades para a crianças descobrirem propriedades geométricas dos elementos que constituem o tangram, como por exemplo, propriedades do quadrado que vão além de «polígono com os lados todos iguais» e permitem que as crianças foquem a sua atenção, por exemplo, nas medidas dos ângulos do quadrado, como esses ângulos podem ser construídos, como podem transferir segmentos de um local da folha do caderno GSP para outro local predeterminado e porquê.

Discutir a dobragem do tangram antes de as crianças o construírem no GSP contribui para que as crianças depois de desenhar um quadrado no GSP localizem os pontos e as linhas que constituem o tangram e façam uma primeira construção do tangram. Esta construção intuitiva pode ser deformável e a localização dos pontos é feita por aproximação.

Em relação à construção com restrições, ter discutido a dobragem vai também permitir que as crianças relacionem as dobragens com a geometria do tangram. Por exemplo:

— ao dobrar o quadrado por uma das suas diagonais obtemos dois triângulos congruentes;

— ao dobrar o quadrado pelas duas diagonais formam-se quatro triângulos congruentes;

— as diagonais intersectam-se no centro do quadrado;

— ao dobrar ao meio um vinco o resultado é um ponto médio, por exemplo, na figura 6a) todos os pontos que estão marcados nas linhas que os vincos formam são resultado de dobragens ao meio.

Assim, a conclusão de que quando um vinco é dobrado ao meio se obtém o ponto médio do segmento que o vinco define é uma conclusão a que as crianças podem chegar a partir das suas próprias acções. Sem uma discussão explícita das dobragens com a turma o professor não pode tomar como garantido que todas as crianças entenderam a geometria do tangram. Por exemplo, as crianças podem não concluir que a dobragem de um quadrado de papel em quatro partes iguais, como representado na figura 6b), origina quatro triângulos congruentes mesmo sendo aparente que os quatro triângulos se sobrepõem.

É crucial deixar que as crianças façam as dobragens e observem os resultados dos vincos que fazem. É normal que quando têm a intenção de fazer um determinado vinco tentem localizá-lo colocando a beira do papel — na figura 7, *AB* no sítio em que querem que o vinco apareça, opostamente a imaginarem a linha do vinco intencionado e vincarem essa linha. No caso da figura 7 o vinco aparece num lugar diferente do que tinha sido intencionado pela criança e é necessário que a criança entenda a inviabilidade do seu método.

Tal entendimento só é possível se as crianças passarem tempo a descobrir como uma dada dobragem dá origem a um vinco, imaginando o vinco, e planeando a dobragem para que o vinco se possa formar.

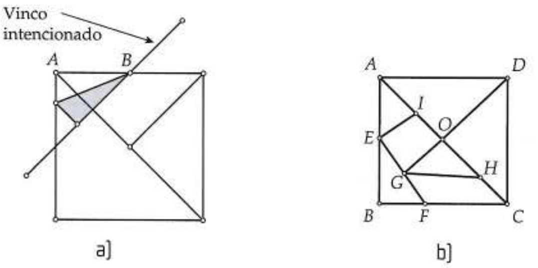


Figura 7

Figura 8

As construções intuitivas usam a simetria das linhas horizontais e verticais que o ecrã facilita. Que os lados são iguais pode não ser uma preocupação da criança quando em actividade de construção livre, embora a criança possa localizar os pontos e linhas que definem o tangram de imediato; a dobragem do tangram como já referido pode contribuir para que as crianças localizem as linhas e os pontos no quadrado resultando uma construção similar à da figura 7b).

O uso do comando *measure* para construir os lados do quadrado iguais pode ser difícil de usar. No entanto, as crianças podem aprender a coordenar a direcção que precisam de tomar para coordenar o resultado de medir o comprimento do segmento, ou a medida da amplitude do ângulo, com o respectivo comprimento ou amplitude geométricas, as quais podem fazer variar deslizando as extremidades do segmento ou os lados dos ângulos.

A partir de uma construção intuitiva o professor pode começar por exigir rigor até que uma construção exacta seja construída como por exemplo a da figura 7a). A partir da dobragem que as crianças fizeram o professor pode problematizar a construção no GSP de tal forma a que um quadrado e triângulos isósceles se formem. Questões como as seguintes podem ser levantadas: na dobragem que fizeste como aparece o ponto *I*? Em que sítio está localizado I no segmento *AO*? Compara a distância entre *A* e *O* com a distância entre *I* e *O*.

As crianças do 5.° ano podem não entender a questão *Constrói um quadrado com lado AB (sendo desenhado o lado AB)*. No entanto, para as crianças do 6° ano a questão já poderá ser entendida se trabalharam relações entre rectas no 5.° ano. A proposta é um problema de geometria porque apesar de o professor poder esperar que tenham aprendido durante o 1.° Ciclo que os ângulos do quadrado medem 90 graus, as crianças não sabem necessariamente como construir ângulos de 90 graus. Construir rectas perpendiculares que passam pelos extremos do segmento dado pode ser uma estratégia e pode levar a criança a confrontar-se com outro problema: como marcar a medida dos outros dois lados do quadrado nas rectas perpendiculares?

Marcar o ponto *B* como na figura 8 escolhendo a sua localização através de uma estimativa visual é uma das estratégias das crianças. O professor pode sugerir às crianças que pensem como fazem para marcar o comprimento de um dado segmento numa linha, ou qual é o instrumento que usam quando desenham um dado segmento de um local para outro local. Novamente estamos a propor um problema geométrico em que as propriedades da circunferência são as que vão garantir que o segmento transferido é geometricamente igual ao dado. O professor não pode esperar que este problema seja interpretado pela criança como um simples problema de aplicação das propriedades da circunferência. Mesmo depois de sugerido o uso da circunferência, a criança precisa de pensar porque é que resultará usá-la para transferir segmentos e como está relacionado com o que é uma circunferência.

A construção do quadrado poderá ser feita no GSP através de quatro rotações sucessivas ou, através da rotação de um ponto construído numa circunferência os vértices podem ser construídos. As rotações eram introduzidas informalmente no 1.° Ciclo no contexto do desenho de rosáceas e frisos (ME, 2004, p. 182) e «construir frisos e identificar simetrias» é também um dos objectivos específicos do novo programa de matemática do Ensino Básico (Ponte e outros, 2008) bem como a reflexão e rotação fazem agora parte do programa do 2.° Ciclo. Se o professor optar por deixar as crianças fazer uso destas transformações não deve deixar de problematizar depois as acções de rotação usadas para construir o quadrado em termos de perpendicularidade entre os lados do quadrado. Em geometria a perpendicularidade dá origem a ângulos rectos.

Comentário Final

Nos níveis pré-escolar a 6.° ano a utilização de *software* para o ensino da Matemática não é de forma alguma generalizado. Nenhuma das escolas do 2.° Ciclo em que a formação decorreu salas de aula de matemática com um computador por cada duas crianças para tarefas com programas desenhados para o ensino da matemática não estão sempre disponíveis. Em consequência os professores têm sempre de depender da sala das TIC que precisa de ser reservada com antecedência e pode mesmo não estar disponível em ocasiões em que o professor poderia utilizar o computador para ensinar matemática nas suas aulas. Como as salas de aula não estão equipadas com vídeo-projetor o professor fica mesmo impedido de fazer uma simples demonstração, ou levantar uma questão projetando um ficheiro desenhado para o efeito com o objetivo de dar resposta a uma situação que surja na sala de aula. Deste modo há crianças que ficam isoladas de experiências de aprendizagem como as que propusemos neste artigo e que o Programa de Formação Contínua para Professores do 2.° Ciclo (Serrazina e outros, 2006) tentou concretizar na sala de aula ficando assim sujeitas ao sub-desenvolvimento que a ausência destas experiências proporciona. Também em outros países diferenças entre as escolas produzem efeitos na qualidade das aprendizagens que são acentuados pelo uso de computadores (Kilpatrik & Davis, 1993). Ou seja, escolas que não estão empenhadas em acompanhar ativamente as contribuições do progresso tecnológico para a melhoria da aprendizagem da matemática contribuem para que a qualidade das aprendizagens dos seus alunos seja significativamente menor relativamente a outras escolas em que o ensino da matemática evoluiu para metodologias que englobam *softwares* didácticos, como constitui um só exemplo o GSP.

Em todo o artigo foi utilizada a forma masculina para referir ambos os géneros. A autora agradece a todos os formandos e formandas e seus alunos e alunas que trabalharam com a autora durante todo o ano fazendo comentários pertinentes às propostas da formadora, confrontado a formadora com diversos problemas de situações de ensino e aprendizagem durante as sessões de formação em sala e em sala de aula que inspiraram a construção deste artigo. Os ficheiros GSP que deram origem às figuras na primeira parte do artigo podem ser solicitados à autora através da morada electrónica.

Referências

Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer based learning environments in mathematics. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 468–501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Antunes & Amílcar, Lda.

DEB. (2004). *Organização Curricular e Programas/Ensino Básico — 1.° Ciclo*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.

DGEB. (1991). *Programa de Matemática 2.° Ciclo do Ensino Básico: plano de organização do ensino e aprendizagem*. (Vol. II). Lisboa: Departamento da Educação Básica.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 1–17). Berlin: Springer-Verlag.

Jackiw, N. (1995). The geometer's sketchpad (Version 3). Berkeley: Key Curriculum Press.

Kilpatrick, J., & Davis, R. B. (1993). Computers and curriculum change in mathematics. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 203–221). Berlin: Sringer-Verlag.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). *Teaching and learning geometry with techology*. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), Handbook on research on the psychology of mathematics education (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.

Laborde, J. M., Bellernain, F., & Baulac, I. (1983). Cabri Géomètre. França.

Nied/UNICAMP. (2000). SuperLogo. Brasil: UNICAMP.

Olive, J. (2000). Computer tools for interactive mathematical activity in the elementary school. *International journal of Computers for mathematical Learning*, 5, 241–262.

Olive, J., & Steffe, L. (1994). Tools for interactive mathematical activity, TIMA: Bars. Acton: William K. Bradford.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira , P. A. (2008). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. ME — Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Available: http://www.portugal.gov.pt/Portal/PT/Governos/Governos_Constitucionais/GC17/Ministerios/ME/Comunicacao/Outros_Documentos/20080104_ME_Doc_Programa_Matematica_Basico.htm [2008, 26 de Fevereiro].

Serrazina, L., Canavarro, A., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Gouveia, M. J. (2006). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 2.° Ciclo*. Available: www.min-edu.pt/np3content/?newsId=307&fileName=programa_mat_2ciclo.pdf [2007, 30 de Dezembro].

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais*. (1st ed.). (Vol. 11). Lisboa: Grafis, CRL.

Eduarda Moura
emoura@ie.uminho.pt

A calculadora gráfica e a utilização que dela fazemos

Helena Rocha

A calculadora gráfica é uma tecnologia muito especial pois, até hoje, é a única que foi não só considerada de uso obrigatório nas aulas do ensino secundário, como também permitida nos exames nacionais.

Esta inclusão da calculadora gráfica entre o material de uso obrigatório no ensino da Matemática teve naturalmente por base o reconhecimento de um amplo conjunto de potencialidades. Falava-se na forma como esta tecnologia ia permitir o envolvimento dos alunos em situações reais, trabalhando com dados concretos, e sem que o peso dos cálculos tornasse o trabalho incomportável. As actividades de modelação passariam a ser efectivamente possíveis de uma forma como até então ainda não o tinham sido, pois o acesso a computadores nas escolas continuava a mostrar-se uma tarefa algo complexa. Também a resolução de problemas ia receber um novo fôlego e a facilidade com que passava a ser possível aceder a grande quantidade de gráficos possibilitava ainda abordagens exploratórias e de carácter intuitivo.

A consequência óbvia seria uma valorização da compreensão. Mas os reflexos da integração desta tecnologia não ficariam por aqui. O trabalho mais experimental e exploratório teria reflexos não só sobre a compreensão, mas também sobre a profundidade com que os alunos passariam a dominar os conceitos. Com efeito, as abordagens gráficas, ao serem mais gerais que as analíticas, permitiriam aos alunos ir mais longe, explorando conceitos que de outra forma só poderiam abordar anos mais tarde. A abrangência que tal abordagem lhes proporcionaria originaria então um conhecimento mais profundo e relevante para o próprio. A este nível não seria estranha a possibilidade que a calculadora gráfica permitia de trabalhar em simultâneo com diferentes representações, articulando o numérico, o gráfico e o analítico, na construção de um conhecimento global que se apoiaria em cada uma destas representações para construir a compreensão sobre aspectos que o recurso apenas a determinada representação não permitiria.

Mais de uma década depois da entrada efectiva da calculadora gráfica na sala de aula, a realidade nas escolas parece contudo bem diversa do que se antecipava e não apenas no nosso país. Estudos entretanto realizados continuam a identificar as inúmeras potencialidades destas máquinas para o ensino da Matemática, mas sugerem também que a utilização que está a ser feita dela fica aquém das potencialidades (ver, por exemplo, Andrade, 2007; Goos e Bennison, 2008; Thomas e Hong, 2005). Como dizem Angeli e Valanides (2009), a questão já não é se esta tecnologia deve ser integrada no ensino, mas antes como é que essa integração deve ocorrer.

Nestas circunstâncias torna-se então inevitável questionar o que está a ser feito com a calculadora gráfica nas aulas de Matemática. E embora este não seja dos aspectos que mais tem sido alvo de atenção em investigação, já existem alguns estudos que lhe procuraram dar atenção.

Simmt (1997) foi talvez a primeira autora que considerou esta uma questão importante. Acompanhou então o trabalho de seis professores e procurou identificar as diferentes formas como estes utilizavam a máquina. Apercebeu-se de seis utilizações diferentes:

- para confirmar resultados (gráficos ou cálculos),
- para traçar gráficos de funções,
- para encontrar soluções gráficas para problemas de maximização,
- para compreender problemas de palavras,
- para explorar para além do conceito em estudo,
- para mostrar.

Destas, as duas primeiras são claramente as utilizações mais comuns, uma vez que todas as restantes apenas foram observadas num máximo de dois dos participantes no estudo. Importa ainda referir que foi identificada uma utilização para investigar o efeito da variação de determinado parâmetro da função sobre o seu gráfico, mas como esta tem sempre por base a possibilidade de traçar muitos gráficos, a autora acaba por não a considerar separadamente e inclui-a na utilização para traçar gráficos.

Mais recentemente, Cavanagh e Mitchelmore (2003) estudaram igualmente a utilização que um grupo de professores fazia da calculadora gráfica. As conclusões a que chegaram apontam apenas para três tipos de utilizações:

- para confirmar gráficos traçados sem tecnologia,
- para obter rapidamente inúmeros gráficos,
- para desenvolver a capacidade de prever o aspecto de um gráfico antes de o traçar.

Analisemos estas utilizações.
O que se destaca mais? Para que é a calculadora gráfica mais utilizada? Para confirmar? Para ver gráficos? Para resolver equações? E o trabalho exploratório? A resolução de problemas? A modelação? O trabalho com dados relevantes para os alunos? A utilização da máquina para aprofundar conceitos inter-relacionando-os e valorizando acima de tudo a compreensão? O recurso a diferentes representações para promover precisamente a compreensão e alcançar a visão global a partir do contributo que cada uma pode dar?

Estão presentes? Sentimos o destaque que lhes era apontado quando falávamos das potencialidades destas máquinas?

Doerr e Zangor (2000) estudaram detalhadamente a utilização que uma professora faz da calculadora gráfica. Trata-se de uma professora de algum modo especial, pois não só nutre um particular interesse pela calculadora gráfica, como lecciona com base num currículo sustentado em problemas de modelação e onde a tecnologia é parte importante. Ao seu dispor, para além da calculadora gráfica, esta professora tem computadores e diversos sensores. Os autores identificam então diferentes utilizações da calculadora gráfica, que procuram caracterizar como ferramenta:

- de cálculo,
- transformativa – transformando tarefas de cálculo em tarefas interpretativas,
- de recolha e análise de dados,
- de visualização
  - para resolver equações,
  - para associar a representação ao fenómeno físico,
  - para determinar as principais características da função,
  - para desenvolver estratégias para encontrar a equação que melhor se adequa a um conjunto de dados,
- de confirmação de conjecturas.

As diversas utilizações que esta professora faz da calculadora gráfica parecem diferentes das descritas nos outros estudos, não parecem?

A utilização que fazemos da calculadora gráfica decorre naturalmente das suas potencialidades, mas, dentro destas, é mais fruto das tarefas que escolhemos trabalhar com ela do que da tecnologia propriamente dita. Se apenas a utilizarmos para confirmar resultados, resolver inequações e traçar gráficos para deles extrairmos determinadas informações, então não deve surpreender-nos que os prognósticos de termos alunos envolvidos na resolução de problemas, em actividades de modelação e habituados a encarar a Matemática com uma perspectiva inquiridora e reflexiva não se estejam a concretizar. A grande questão é então perceber como se caracteriza o trabalho em que estamos a envolver os nossos alunos e, mais importante ainda, o que determina a nossa opção por esse tipo de trabalho. Já alguma vez pensou no que caracteriza a utilização que faz da calculadora gráfica? E nas razões porque opta por essa utilização?

Referências

Andrade, M. (2007). *A calculadora gráfica na prática profissional de professores do ensino secundário: três estudos de caso.* Tese de mestrado. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Angeli, C. & Valanides, N. (2009). Epistemological and methodological issues for the conceptualization, development, and assessment of ICT-TPCK: advances in technological pedagogical content knowledge. *Computers & Education*, 52, 154–168.

Cavanagh, M. & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, 5, 3–18.

Doer, H. & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 143–163.

Goos, M. & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 20 (3), pp. 102–130.

Simmt, E. (1997). Graphing calculators in high school mathematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 16 (2/3), 269–289.

Thomas, M. & Hong, Y. (2005). Teacher factors in integration of graphic calculators into mathematics learning. In H. Chick & J. Vincent (eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, pp. 257–264. Melbourne: PME.

Helena Rocha
Bolseira da FCT / ME

Uma aventura no Texas ou a última evolução de uma tecnologia portátil

Armando Severino, Celina Pereira, Eduardo Cunha, João Cavaleiro

No âmbito do projecto T3 – Teacher Teaching with Tecnology realiza-se anualmente a sua conferência internacional, «2011 T3 – International Conference» (T3IC). Este ano aconteceu nos dias 25 a 27 de Fevereiro, em San Antonio – Texas.

O Grupo de Trabalho T3 da APM, que promove a formação e discussão pedagógica desta tecnologia, na aprendizagem da Matemática e da Física e Química, foi representado, nesta conferência, por quatro dos seus elementos: Celina Pereira e Armando Severino (Leiria); João Cavaleiro (Viseu); Eduardo Cunha (Minho).

Neste T3IC, foram apresentadas as mais recentes evoluções ao nível da família NSPIRE, quer unidade portátil quer *software*. Neste artigo, pretendemos mostrar um pouco daquilo que vimos, trabalhámos e explorámos, em três dias intensos, um dia na Conferência de Desenvolvimento Profissional dos Formadores T3 e dois dias na Conferência Internacional do T3, onde fomos agradavelmente surpreendidos. Quase que nos apetece dizer «Está tudo ali ... na Nspire».

A nossa aventura

Foi longa a travessia aérea do Atlântico...

Os primeiros passos em terras do Tio Sam foram para cumprimento de formalidades – desde um cão devidamente treinado a cheirar as malas, ao registo fotográfico e das impressões digitais, foi cumprido todo um ritual de procedimentos de segurança.

Um intervalo de tempo entre dois voos, o que nos levou até Dallas e o que nos levaria ao destino final, San Antonio, deu-nos a oportunidade para os contactos com os familiares. Mas eis que a tecnologia começou a falhar! O telemóvel da Celina, apesar do roaming previamente activo, recusou-se a «apanhar rede», o que permitiria a desejada ligação a Portugal... e assim se manteve durante toda a estadia!

Chegados ao hotel e após uma ligeira refeição, passadas mais de 24 horas consecutivas sem ir à cama, procedeu-se à instalação nos nossos PC's das mais recentes versões dos diversos *softwares* relativos à TI-Nspire. E eis que ocorre a primeira desilusão para o João Cavaleiro (sim, porque os desaires não aconteceram sempre ao mesmo!): um problema no seu PC não permitiu a actualização dessas aplicações... e o PC regressou a Tondela tal como de lá saiu!

O primeiro dia de trabalhos, o PD-day (*professional development day*), começou com um pequeno-almoço simultâneo com todos os formadores do T3, americanos e estrangeiros, que foi acompanhado de informações diversas relativas ao T3. E eis que, para nossa surpresa, verificámos que um dos slides era integralmente dedicado ao T3 Portugal, com destaque para os Dias T3 (figura 1), o que traduz o reconhecimento do trabalho dos portugueses. O PD-day foi, de facto, o ponto alto dos trabalhos. Em cinco sessões distribuídas ao longo da manhã e da tarde,

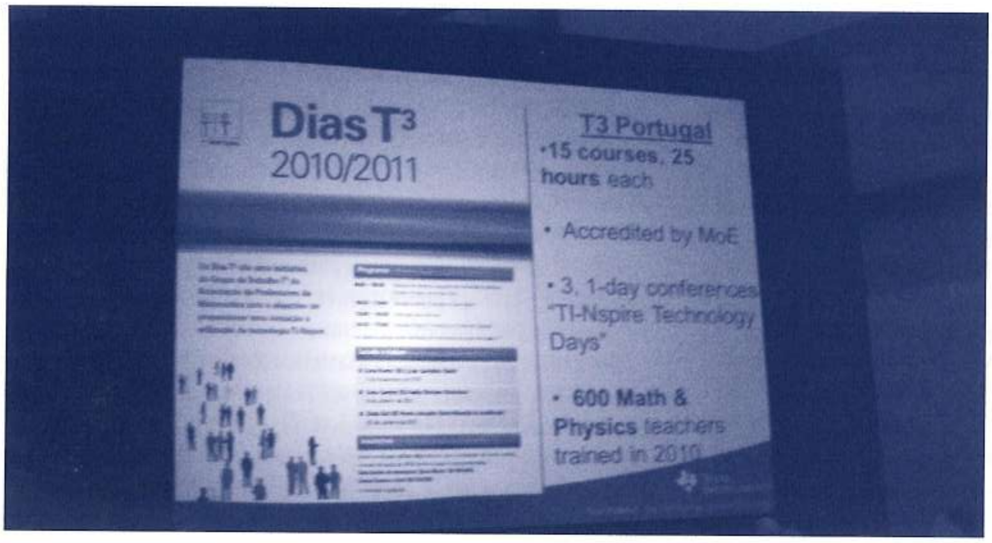


Figura 1

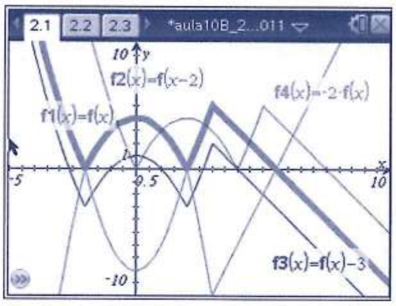


Figura 2

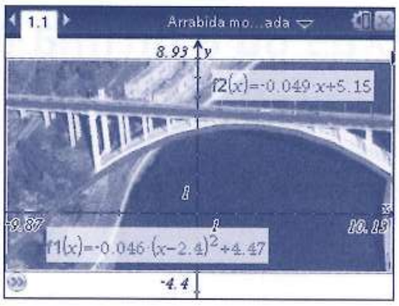


Figura 3

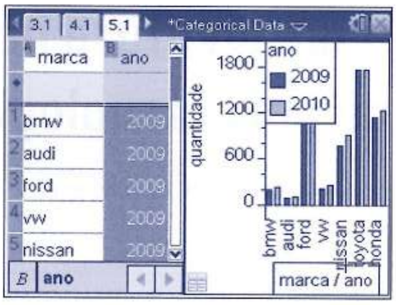


Figura 4

Figura 5

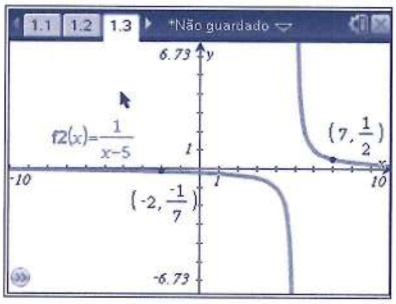


Figura 6

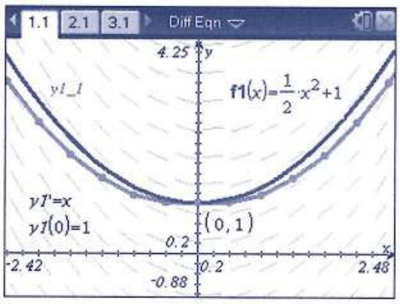
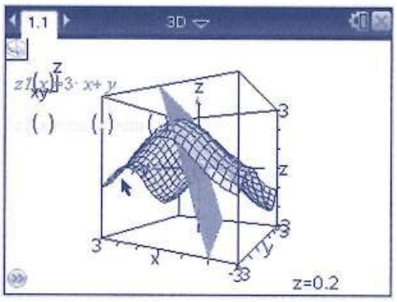


Figura 7



pudemos tomar contacto com as novas versões 3.0 do sistema operativo da unidade portátil TI-Nspire, do TI-Nspire Teacher Software, do TI-Nspire™ Navigator™ Teacher Software e, ainda, com a novíssima TI-Nspire CX.

Nspire CX 3.0

A nova calculadora, ou, melhor dizendo, a nova unidade portátil (pois que a funcionalidade calculadora é apenas uma entre várias) tem ecrã LCD (melhor definição) a cores e retroiluminado – essas são as novidades com mais impacto e que a faz diferir do anterior modelo.

Com a cor é muito mais fácil distinguir os gráficos de várias funções representadas no mesmo referencial, pois a cor do traçado é a mesma cor da respectiva etiqueta, o que assume particular importância quando se trabalha com transformações de funções, por exemplo (figura 2). Por outro lado, quando, no mesmo problema, se usam várias páginas diferentes, é possível manter a cor relativa a determinado objecto em estudo, nas diferentes páginas. Isto é, tendo dois conjuntos de dados na aplicação Listas e Folha de Cálculo, ao representarmos esses dados na aplicação Dados e Estatística, podemos atribuir as cores correspondentes.

Nspire 3.0

O sistema operativo 3.0 para a TI-Nspire, quer unidade portátil quer *software*, já está disponível para upgrade gratuito, à data desta publicação, através dos vários sites da Texas Instruments.

Neste novo sistema operativo, destacam-se algumas novas *funcionalidade*: inserção de imagens em qualquer das aplicações; representação de dados por categorias na aplicação Dados e Estatística; apresentação de valores racionais exactos na aplicação de Gráficos; resolução e representação gráfica de equações diferenciais; representação gráfica de funções de duas variáveis – gráficos 3D; uma aplicação para a recolha e tratamento de dados recolhidos experimentalmente por sensores.

Inserção de imagens

A partir do *software* TI-Nspire, é possível inserir uma imagem com formato .jpg, .jpeg, .bmp ou .png em qualquer uma das aplicações: Gráficos, Geometria, Dados e Estatística, Notas e Perguntas. Na unidade portátil, após descarregar o ficheiro .tns pode-se alterar o tamanho da imagem e movê-la. Na TI-Nspire 3.0, a imagem ficará em tons de cinza mas, na TI-Nspire CX 3.0, a imagem manterá as suas cores originais. Esta nova funcionalidade permitirá realizar actividades de modelação com imagens que traduzam situações reais, como mostra a figura 3, onde o tabuleiro e o arco da ponte da Arrábida são modelados por duas funções, uma afim e uma quadrática.

Na aplicação de **Dados e Estatística** é agora possível representar *dados por categorias*. Por exemplo, a mesma variável, marca de carro, mas por anos civis (figura 4).

Na aplicação de **Gráficos** é possível representar de *forma natural os números racionais*, por exemplo as coordenadas de um ponto sobre o gráfico de uma dada função (figura 5).

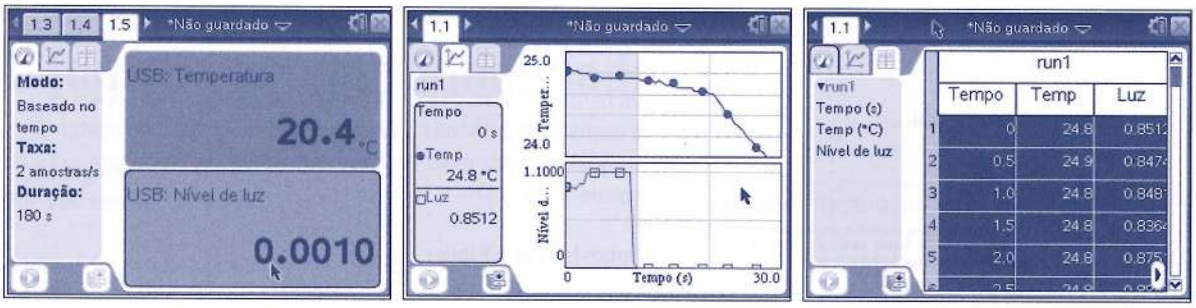
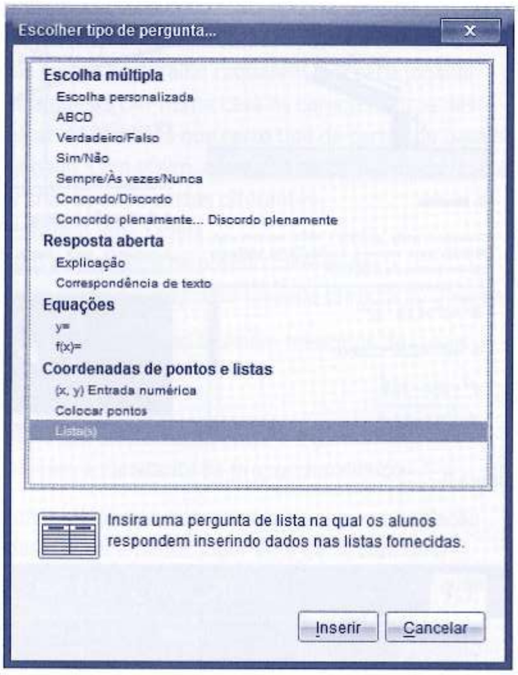


Figura 8

Figura 9

Figura 10



Outras duas ferramentas criadas na versão 3.0 da TI-Nspire prendem-se com as equações diferenciais (Campo de vectores, Equações diferenciais de 1º ordem, Uma ou várias soluções, Condição inicial interactiva, Método de cálculo: Euler & Runge-Kutta) (figura 6), e com a representação gráfica em 3D (Representação de funções de duas variáveis (*x,y*), Animações e rotação à volta dos eixos *x*, *y* e z, Visualização de acordo com os planos (*x,y*) (*x,z*) e (*y,z*), Ferramenta Traçar) (figura 7).

DataQuest™ da Vernier

Voltando à modelação, mas agora com recolha de dados através da utilização de sensores, pudemos experimentar as novas soluções, realizando actividades já amplamente conhecidas, com os sensores de temperatura, de pressão ou o CBR, mas, desta vez, com a nova CX. É tão simples! Através do EasyLink ou do novíssimo Lab Cradle (interface com três portas analógicas e duas digitais, que é acoplada à unidade portátil), ao ligarmos o sensor à Nspire, surge, de imediato, a nova aplicação DataQuest (similar ao Labquest), devidamente adaptada para o registo dos dados. São apresentados, por defeito, alguns valores ajustados à realização da experiência, os quais podem, no entanto, ser alterados. E, depois de guardados os dados, é só trabalhá-los da forma mais conveniente. Desta nova aplicação, DataQuest, salientamos as características: 3 vistas (Medidor, Gráfico e Tabela – figura 8)); Seleção de zona de análise «Easy Data»; Reprodução (Playback); Ligação entre dados e objecto geométrico. Destacamos ainda as novas ferramentas de análise: Tangente e integral; Regressão proporcional e Regressão exponencial.

TI-Navigator

O TI-Nspire Navigator (figura 9), sistema de comunicação sem fios entre as unidades portáteis dos alunos e o computador do professor, incorpora agora todo o *software* da família TI-Nspire. Neste *software*, encontram-se cinco separadores: Conteúdo e Documentos que constituem as funcionalidade do TI-Nspire Teacher Edition; Turma, Revisão e Portfólio. Nesta nova versão, 3.0, do TI-Nspire Navigator é também possível criar um documento em que algumas das suas páginas sejam perguntas a enviar através de uma questão rápida para a turma (figura 10). Existem agora outros tipos de questões, Equações e Coordenadas

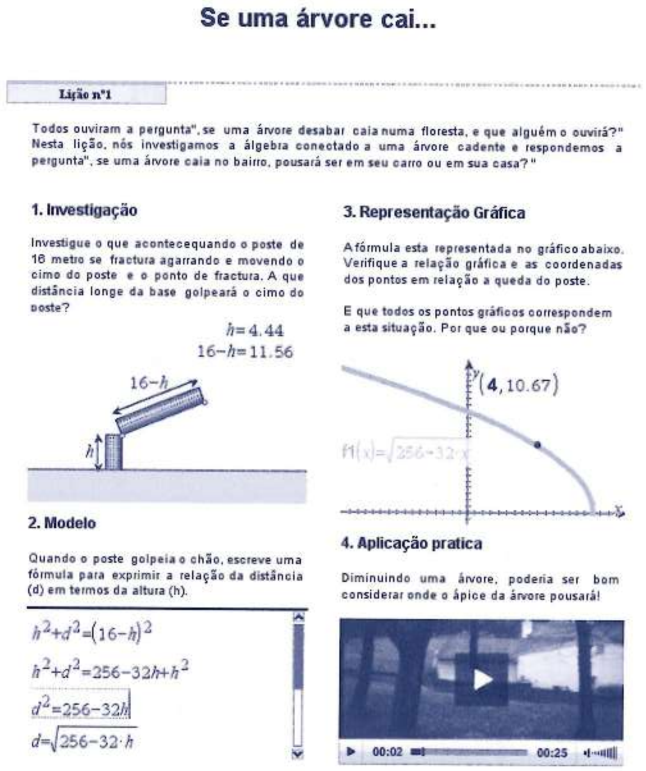


Figura 11

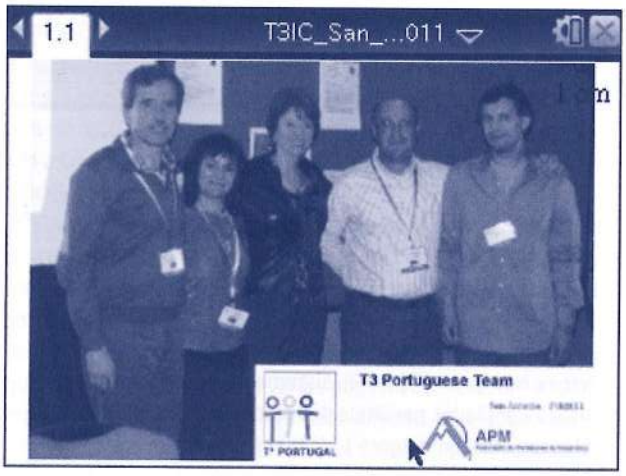


Figura 12

de pontos e listas, que permitem recolher dados dos alunos e analisá-los com toda a turma em várias vistas. O Navigator tornou-se, ainda mais, uma ferramenta de aprendizagem colaborativa.

PublishView e Player

Com a versão 3.0 do Teacher Software podemos criar documentos interactivos (na nova opção PublishView, que permitem integrar e explorar diferentes aplicações, podendo incluir e de forma interactiva uma ou várias páginas com uma qualquer das oito aplicações da TI-Nspire 3.0, texto, imagens, hiperligações e vídeos (figura 11). Melhor ainda, estes documentos poderão ser lidos/explorados através da internet, com recurso a um «Player» específico, que a TI entretanto irá disponibilizar. O professor poderá, desta forma, preparar tarefas, que disponibilizará aos seus alunos, para que eles possam experimentar, de modo interactivo, também fora da aula, mesmo que não disponham da unidade portátil ou do software do aluno.

Em síntese, podemos dizer que o PD-Day foi pródigo em novidades, que consideramos pedagogicamente bastante interessantes.

Nos restantes dois dias e meio, as sessões decorreram continuamente entre as 8:15 e as 17:30, em seis blocos por dia, com 50 sessões em simultâneo. Cada um de nós procurou aquelas que mais correspondiam aos seus interesses. Entre sessões práticas e outras mais expositivas, focando temas diversos, foi notória, nas sessões a que assistimos, a utilização pelos dinamizadores das novas tecnologias da Texas, com particular incidência no TI Navigator. No final da tarde do dia 26 decorreu uma mostra do trabalho desenvolvido pelas equipas T3 de vários países, na qual participámos, usando uma apresentação preparada para o efeito e mostrando materiais usados na formação. (figura 12).

Quanto a outros aspectos laterais, registe-se a gastronomia local, com uma forte influência mexicana, mas que nos proporcionou apreciáveis refeições (apesar do Armando ter confundido uma generosa malagueta com um delicioso pimento...).

Por último, registe-se a existência de um Santo António português, em plena zona turística da cidade de San Antonio, com uma inscrição referindo ter sido essa estátua uma oferta de Portugal.

Armando Severino, Escola Secundária Calazans Duarte
Celina Pereira, Escola Secundária Calazans Duarte
Eduardo Cunha, Escola Secundária de Barcelos
João Cavaleiro, Escola Secundária de Tondela

O jogo da proporcionalidade

Nº de jogadores 2 a 4
Nível de ensino 3.º ciclo

Conteúdos Proporcionalidade directa e proporcionalidade inversa.

Material necessário Tabuleiro do jogo, um dado, uma marca para cada jogador, baralho com 32 cartas.

Objectivo do jogo Aprofundar o conhecimento sobre proporcionalidade directa e inversa.

Preparação do jogo Cada jogador coloca a sua marca na casa da partida. Distribuem-se cinco cartas a cada jogador e coloca-se o baralho com as cartas sobrantes sobre o tabuleiro, virado para baixo, no local adequado para o efeito.

Modo de jogar Na sua vez cada jogador lança o dado e avança a sua marca sobre o tabuleiro o número de casas correspondentes. Se ficar sobre um dos vértices do tabuleiro, deverá retirar uma carta do baralho ou entregar uma das suas cartas e retirar uma nova (conforme indicado na casa onde se encontra) e a sua jogada está terminada. Em todos os outros casos deverá procurar entre as suas cartas uma que se adeqúe à casa em que se encontra (ver *Aspectos a ter em conta ao jogar*). Se o conseguir joga a carta (colocando-a no local adequado no tabuleiro) e avança a sua marca duas casas. Se não tiver nenhuma carta que se adeqúe, ou não se aperceber que tem, recua duas casas. Chegado à nova casa a jogada está terminada e é a vez do jogador seguinte.

As casas nos vértices do tabuleiro são especiais. Como já foi referido, um jogador que na sequência do lançamento do dado chegue a estas casas é obrigado a trocar ou a receber uma nova carta, no entanto, todos os jogadores que passem por lá podem beneficiar delas. Ou seja, um jogador que passe por uma destas casas na sequência do lançamento do dado pode, se quiser, trocar ou receber uma nova carta. O mesmo acontece se o jogador chegar lá porque avançou duas casas ou foi obrigado a recuar.

Fim do jogo Ganha o primeiro jogador que concluir duas voltas no tabuleiro.

O baralho de cartas O baralho é constituído por 32 cartas com tabelas ou diferentes dizeres distribuídos como se mostra na tabela 1.

Aspectos a ter em conta ao jogar
As diferenças existentes entre as diversas casas do tabuleiro e entre as várias cartas do baralho requerem que cada jogador tome consciência que ao cair numa casa as características desta podem determinar de imediato que certo tipo de cartas do baralho não possa ser jogado. Com efeito, o baralho de cartas deste jogo é constituído por três tipos de cartas diferentes:

- as que apresentam uma tabela,
- as que exibem a constante de proporcionalidade,
- as que referem o tipo de proporcionalidade (directa ou inversa).

Por seu turno no tabuleiro temos também três tipos de casas diferentes:

- as que contêm uma tabela,
- as que determinam uma relação entre x e y,
- as que se referem à constante de proporcionalidade.

Assim sendo, um jogador que caia numa casa com uma relação entre x e y poderá, teoricamente, jogar uma carta com uma tabela adequada, uma carta que refira o tipo de proporcionalidade expresso pela relação ou uma carta com a constante de proporcionalidade. Mas um jogador que caia numa casa com uma tabela, já não terá que analisar todas as suas cartas como no caso anterior. Com efeito, neste caso não será possível jogar uma carta com uma tabela, pelo que o jogador deverá analisar apenas as suas cartas que apresentam a constante de proporcionalidade ou o tipo de proporcionalidade em causa. Quanto às casas do tabuleiro que se referem à constante de proporcionalidade, são as mais exigentes, pois apenas permitem que seja jogada uma carta com uma tabela. Ou de uma forma esquemática (figura 1).

Helena Rocha

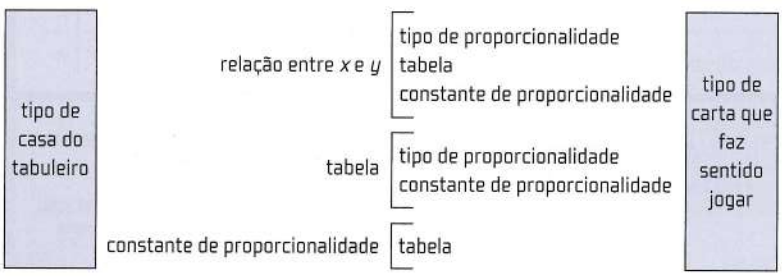
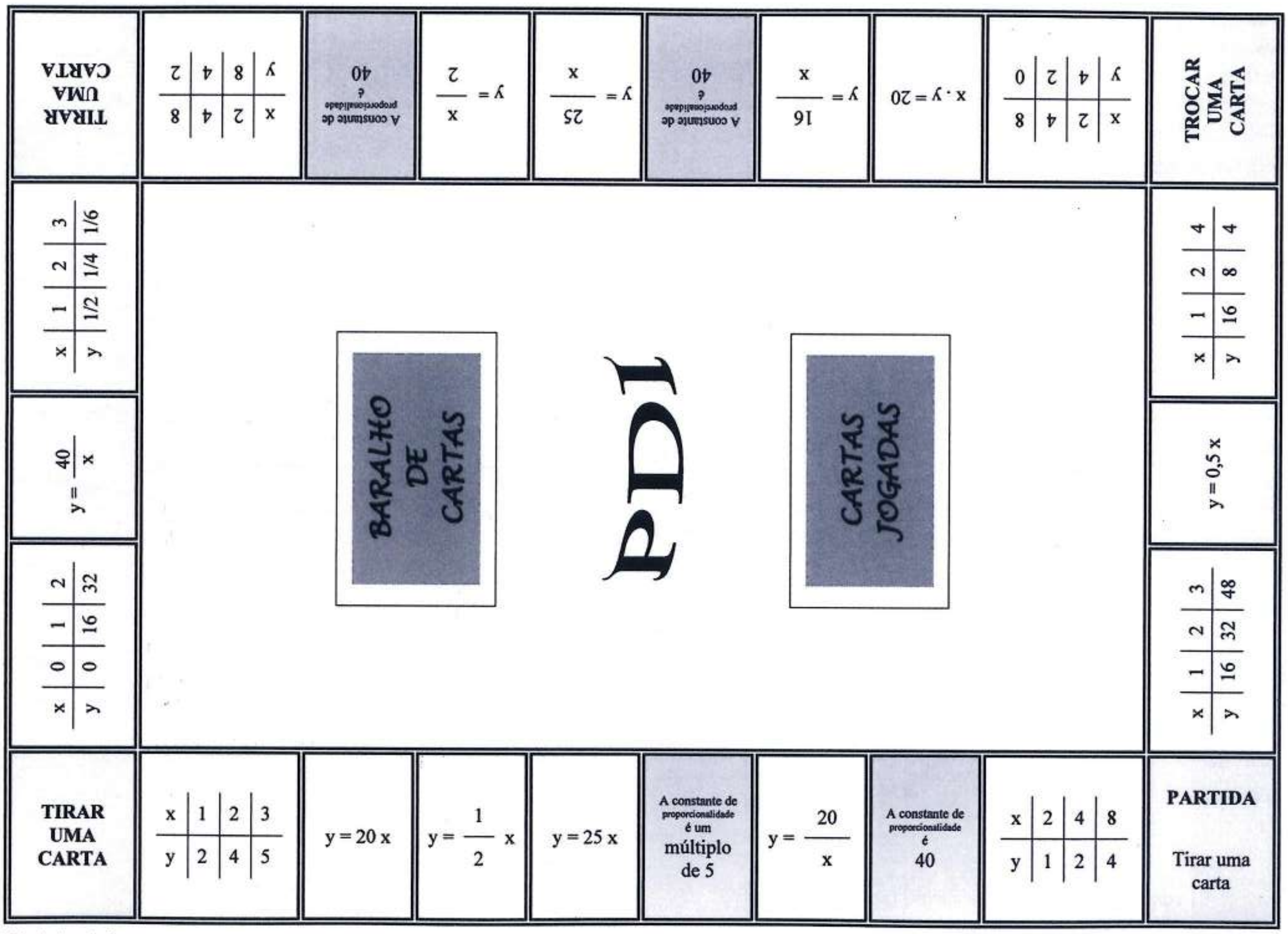


Figura 1

Quantidade	Descrição			
4 cartas	Proporcionalidade directa			
4 cartas	Proporcionalidade inversa			
5 cartas	A constante de proporcionalidade é 1/2			
5 cartas	A constante de proporcionalidade é 16			
2 cartas	A constante de proporcionalidade é 25			
3 cartas	*x*: 1, 2, 4 *y*: 40, 20, 10	*x*: 2, 4, 5 *y*: 20, 10, 8	*x*: 2, 5, 10 *y*: 20, 8, 4	
1 carta	*x*: 1, 2, 3 *y*: 40, 80, 120			
1 carta	*x*: 0, 1, 2 *y*: 0, 20, 40			
2 cartas	*x*: 1, 2, 4 *y*: 20, 10, 5	*x*: 2, 5, 10 *y*: 10, 4, 2		
1 carta	*x*: -1, 1, 2 *y*: -5, 5, 2,5			
4 cartas	*x*: 1, 2, 3 *y*: 2, 4, 7	*x*: 0, 3, 5 *y*: 0, 5, 3	*x*: 1, 5, 10 *y*: 2, 15, 30	*x*: 1, 2, 3 *y*: 16, 8, 6

Tabela 1



Tabuleiro de jogo

APM - 2011

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2011

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2011

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

01 **O Currículo de Matemática e o Tempo**
Isabel Rocha

Artigos

03 **Entrevista a João Filipe Matos**

05 **As peripécias de três resolvedoras**
Cláudia Carvalho, Cristina Leiria, Guida Dias

10 **Descobrir um exemplo gera oportunidades diversas de raciocínio**
Cristina Loureiro

11 **A proporcionalidade com a TI'nspire**
António José Mendes, Luís Reis, Manuel Teles Lagido

19 **O Ensino da Teoria de Grafos em Portugal**
Rui Feiteira, Marília Peres

26 **Redução ao 1.º quadrante com o Geogebra**
Paulo Ferreira Correia, José António Fernandes

31 **A República ordena-te que resolvas a equação:** $\dfrac{x-\dfrac{2(x-18)}{9}}{8}-\dfrac{x-18}{6}=x+9-\dfrac{5x-\dfrac{2(x-10)}{23}}{4}$
António Moura

35 **À descoberta da geometria do tangram com o GSP**
Eduarda Moura

Secções

24 **O problema deste número** *José Paulo Viana*
Circunferências em rectângulos

41 **Tecnologias na educação matemática**
A calculadora gráfica e a utilização que dela fazemos, *Helena Rocha*
Uma aventura no Texas ou a última evolução de uma tecnologia portátil, *Armando Severino, Celina Pereira, Eduardo Cunha, João Cavaleiro*

34 **Materiais para a aula de Matemática**
A República ordena-te que resolvas a equação $\dfrac{x-\dfrac{2(x-18)}{9}}{8}-\dfrac{x-18}{6}=x+9-\dfrac{5x-\dfrac{2(x-10)}{23}}{4}$

16 **Pontos de vista, reacções e ideias...**
Alterações curriculares, para quê?

47 **Vamos Jogar**
O jogo da proporcionalidade, *Helena Rocha*