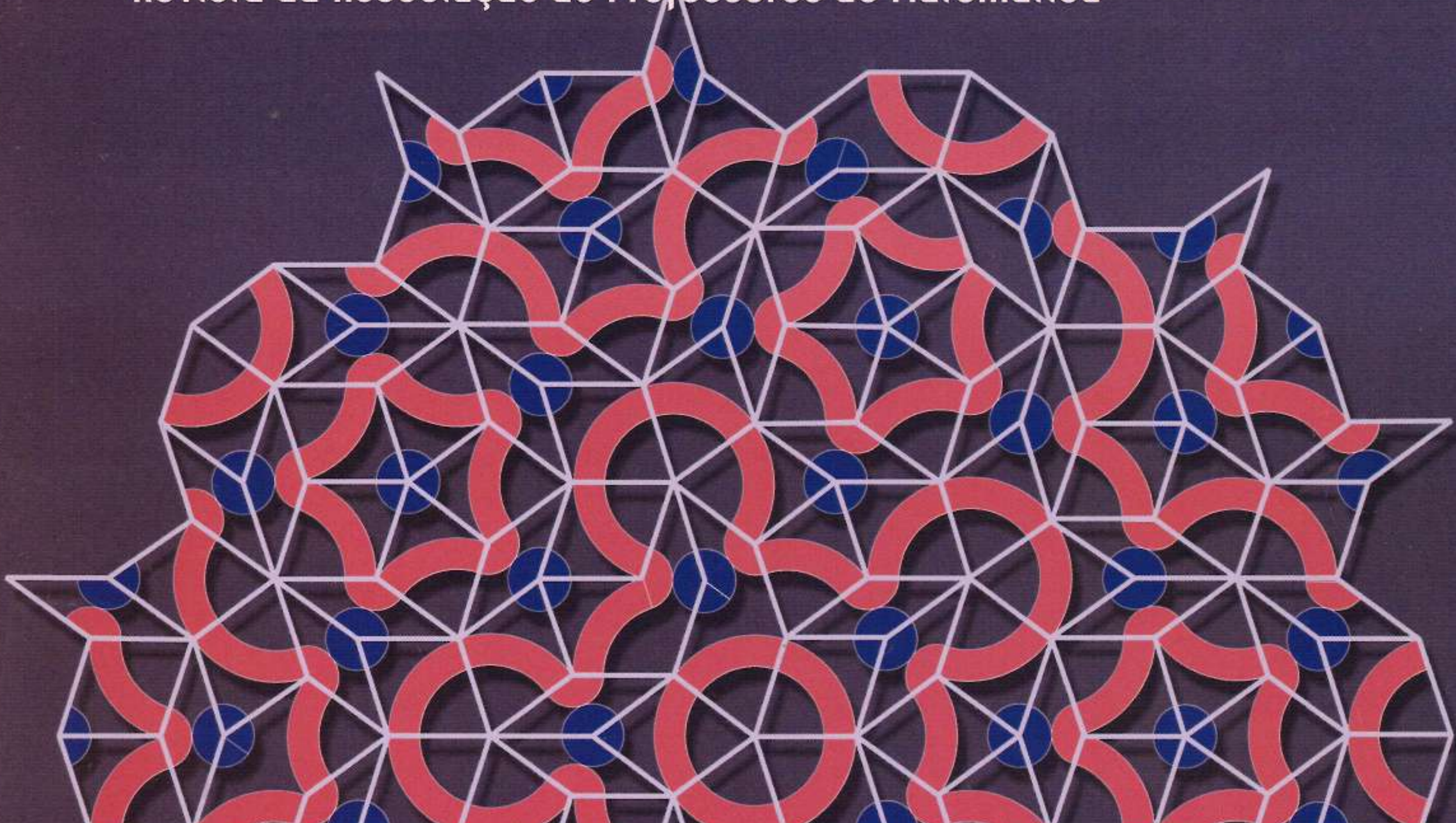
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2011

111

Janeiro ∞ Fevereiro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Isabel Rocha
Subdirectora Manuela Pires
Redacção Adelina Precatado
Ana Luísa Paiva
Ana Paula Canavarro
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes

A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa
Data da publicação Fevereiro 2011
Tiragem 3000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530-250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Agradecimento

Ana Paula Canavarro iniciou as funções de directora da revista em Janeiro de 2004 e Adelina Precatado as funções de subdirectora no início de 2002. Cumpriram mais do que o mandato que lhes foi solicitado, a pedido da própria Redacção, que agradece a imensa disponibilidade e empenho colocados na coordenação dos trabalhos da redacção. Isabel Rocha e Manuela Pires assumem as funções de directora e subdirectora, respectivamente.

Sobre a capa

A capa deste número exibe um fragmento finito de uma pavimentação aperiódica do plano. Ao contrário de uma pavimentação periódica onde um fragmento finito pode conter toda a informação necessária para o descrever na totalidade (por translações), no caso aperiódico isso não sucede e o fragmento reproduzido na capa representa-se apenas a si mesmo, ou seja, nenhuma translação própria de si mesmo coincide exactamente com a «verdadeira pavimentação».

Não obstante a sua natureza caótica, estes objectos possuem uma «estrutura geométrica» porém, a geometria que a descreve, só seria inventada na segunda metade do século XX.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Alberto Pimenta, Ana Caseiro, Andreia Carvalho, Branca Silveira, Bruno Magina, Elisabete Mariano, Elsa Barbosa, Guida Lourenço, João Grácio, José Filipa, Luciano Veia, Sandra Nobre.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27-A, 1500-236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

25 Anos depois

Há vinte e quatro anos atrás o Paulo Abrantes assumia no editorial da primeira *Educação e Matemática* que o Ensino da Matemática há muito que estava em crise, segundo ele: «um número crescente de alunos não gosta de Matemática, não entende para que serve estudar Matemática, não compreende verdadeiramente a sua relevância. Mesmo muitos daqueles que conseguem notas positivas, procuram sobretudo dominar técnicas úteis para resolverem exercícios tipo».

Apesar de estarmos longe de termos resolvido a maioria dos problemas da Educação Matemática, muito foi feito ao longo destes anos, mas muitos outros problemas a que precisamos de dar resposta foram surgindo. As características dos alunos de uma sala de aula de hoje são substancialmente distintos dos de há vinte e cinco anos atrás e os desafios que se colocam aos professores foram acrescidos exponencialmente.

A evolução da vida moderna e o consequente crescimento da importância da tecnologia, levou à globalização da Matemática, ou seja, o domínio da Matemática tornou-se essencial para o sucesso pessoal, no emprego e até na participação activa na sociedade moderna. Em consequência, a Educação Matemática assume hoje um papel preponderante para os nossos governantes, para os políticos, para a comunicação social e para a sociedade civil em geral. Quando há uns dias atrás saíram os resultados do PISA pudemos sentir o impacto que estes tiveram nos meios de comunicação social, todos queriam perceber a quê ou a quem se devia a melhoria dos resultados, nestes testes internacionais, na disciplina de Matemática. Por estes dias foi clara a importância que a opinião da APM tem para os órgãos de comunicação social, visto a opinião da nossa Associação ser uma referência quando se trata de abordar assuntos ligados à Educação Matemática.

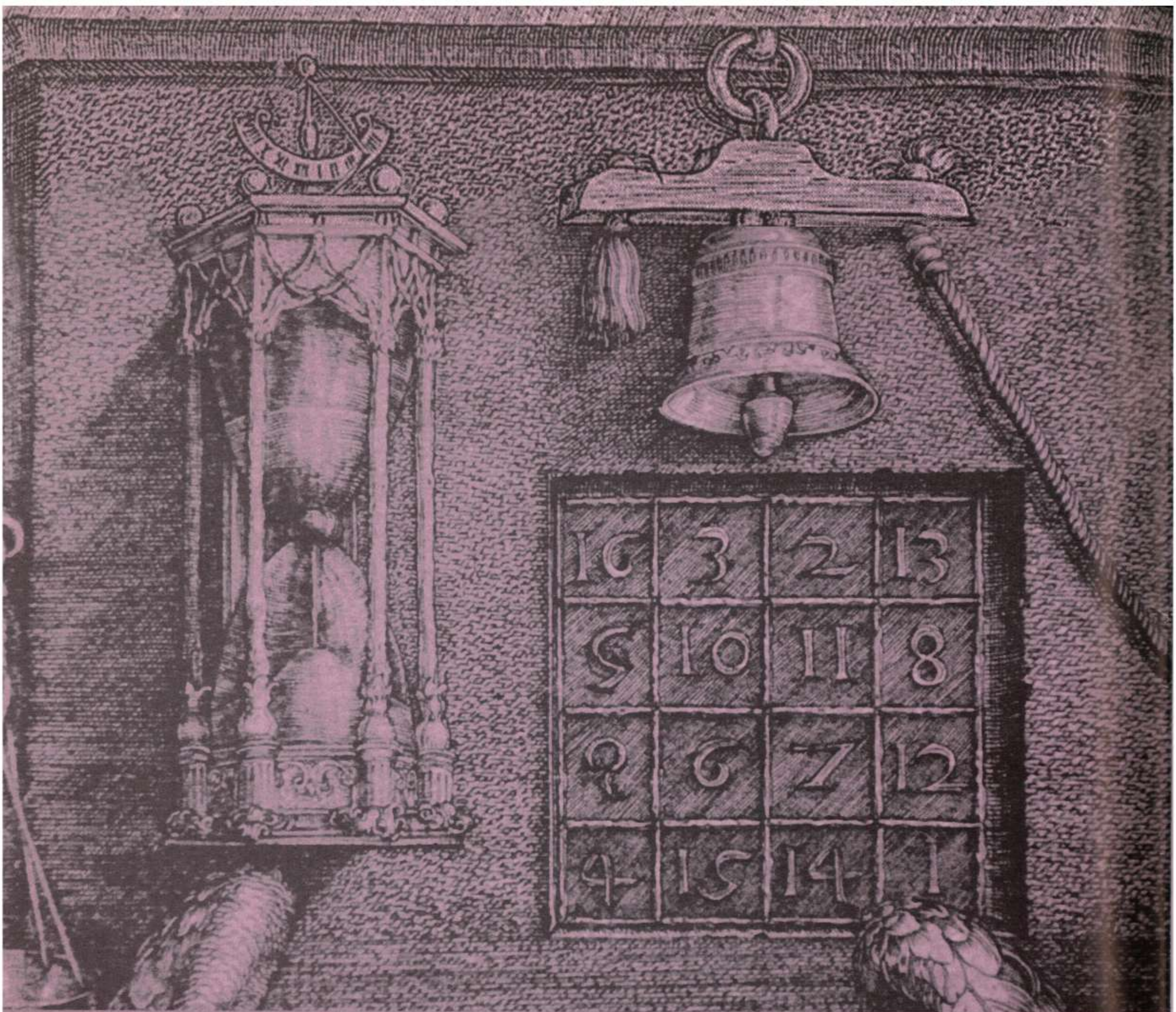
Vinte cinco anos depois da criação o seu valor é indiscutível, a APM é garantidamente uma aposta ganha. Ao longo destes anos os professores de Matemática contribuíram de forma decisiva para a melhoria da Educação Matemática em Portugal e a APM é disso reflexo.

Portugal evoluiu de forma significativa ao longo dos últimos vinte cinco anos. Actualmente são muitas as instituições dedicadas à Educação Matemática, existem educadores matemáticos e centros de investigação em educação espalhados pelo país fora, há uma produção considerável de investigação nesta área, são publicados materiais curriculares e de apoio ao professor, promovem-se encontros de professores e para professores, organizam-se actividades para alunos, tudo com o objectivo de melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática. Neste «novo» contexto, tal como a Rita Bastos já referiu, no editorial da nonagésima sexta *Educação e Matemática*, somos obrigados a reflectir sobre o papel da APM na actualidade. «O que é que a APM tem de especial?» O que é que actualmente distingue a APM de outras instituições? Que caminho queremos percorrer no futuro? É verdade que a realidade mudou, mas será que os objectivos para os quais a APM foi criada se esgotaram? A participação activa dos professores de Matemática na discussão e implementação de novas orientações curriculares já não é importante? Promover uma estreita colaboração entre professores e investigadores por forma a elaborarmos projectos de investigação de qualidade não é um objectivo actual? Responder às necessidades de formação dos professores, criar materiais de qualidade e diversificados para os professores, para as aulas e para os alunos, não é uma necessidade presente quando estamos perante uma renovação curricular? Não nos podemos esquecer que o actual ano lectivo é o ano da generalização do novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Poderá a APM, enquanto associação, ficar à margem desta implementação?

A APM é uma associação cheia de energia, ainda com muito para fazer pela Educação Matemática em Portugal. No entanto, só se conseguirá manter a vitalidade que nos tem caracterizado nestes vinte cinco anos se conseguirmos fazer uma reflexão interna. É necessário definir: Que rumo queremos para a APM? Como se deverá organizar, a APM, face à realidade? Como poderemos contribuir para (re)valorizar o papel do professor de Matemática? Que futuro quer, a APM, para a Educação Matemática? Qual será a agenda futura da APM? A APM é uma associação com sócios regulares de várias gerações. Como poderemos gerir os interesses desta diversidade de gerações? Como integrar a opinião dos sócios mais novos, que procuram identificar-se com uma linha de pensamento e com uma actuação que respondam às realidades e adversidades com que se deparam na sua prática profissional, com a dos sócios mais experientes, que acompanharam a evolução da Associação ao longo do tempo e cuja acção assenta nos pilares fundadores deste movimento associativo?

Só é possível melhorarmos a Educação Matemática se conseguirmos que todos os interessados se envolvam empenhadamente e de forma crítica no processo. É neste ponto que a APM, enquanto associação de professores de Matemática, se deve centrar, mantendo-se, como até aqui, na linha da frente.

Elsa Barbosa
Presidente da APM



Magia em Matemática

Ana Caseiro

No 1° encontro, em 2005–2006, para professores do 1° ciclo do ensino básico, desenvolvido pelo Programa de Formação Contínua em Matemática, PFCM, da Escola Superior de Educação de Lisboa, foi facultado um panfleto aos professores do 1° ciclo que participaram no encontro onde era proposto que os mesmos resolvessem um desafio denominado «22 Mágico».

Passado uns anos, tive acesso ao enunciado e pareceu-me mesmo desafiante tentar resolvê-lo, pois para ter proposto pelos formadores do programa de Formação Contínua da Matemática no decorrer do 1° encontro entre formandos, de certo seria um desafio a quem o tentasse solucionar.

O desafio era:

Escreva um número natural com três algarismos todos diferentes, isto é, não pode ter nenhum algarismo repetido nem o zero, por exemplo, 342. Forme todos os números de 2 algarismos com os algarismos desse número: 34,43,23,32,24,42. Adicione esses seis números e divida essa soma pela soma dos três algarismos do número que escolheu. Que número obteve?
Repita com outro número. Que número obteve?
Parece-lhe que o resultado será sempre o mesmo? Porque será?

Para tentar dar resposta ao desafio apresentado resolvi a tarefa utilizando o exemplo proposto.

Deste modo cheguei a:

$$34 + 43 + 23 + 32 + 24 + 42 = 198$$

Soma dos algarismos do número inicial: $3 + 4 + 2 = 9$

$$198 : 9 = 22$$

Como seria de esperar, devido ao nome do desafio, o resultado obtido foi 22. De seguida pensei que com qualquer número que eu escolha, segundo as condições fornecidas, o resultado iria ser sempre 22, mas decidi confirmar com mais um exemplo:

Ex 1:

321

$32 + 31 + 23 + 21 + 13 + 12 = 132$

$3 + 2 + 1 = 6$

$132 : 6 = 22$

Depois de fazer com mais este exemplo, questionei-me devido ao porquê de ser frisado que o número não possa ser constituído por nenhum zero. Para tentar perceber resolvi escolher um número com um zero e outro com dois zeros e ver o que obteria como resultado:

Ex 2:

302

$30 + 32 + 03 + 02 + 23 + 20 = 110$

$3 + 0 + 2 = 5$

$110 : 5 = 22$

Ex 3:

400

$40 + 40 + 04 + 00 + 04 + 00 = 88$

$4 + 0 + 0 = 4$

$88 : 4 = 22$

Sem dúvida que ao resolver o desafio tendo os números formados com zeros é preciso ter mais atenção aos números que se formam, uma vez que alguns são simplesmente zero e outros compostos por apenas um algarismo (no qual eu coloquei o zero à esquerda, como se de outro qualquer algarismo se tratasse), tendo sido, talvez, por este motivo que no enunciado é frisado que não se formem números com zeros.

Depois de dar resposta à questão que me surgiu, apareceu-me outra que me pareceu pertinente: mas não funcionará com números constituídos por algarismos iguais ou será pelo mesmo motivo do zero, somente porque cria um pouco mais confusão na construção dos números? Foi para dar resposta a esta questão que escolhi mais um número com o qual experimentar:

Ex 4:

222

$22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 = 132$

$2 + 2 + 2 = 6$

$132 : 6 = 22$

Com o 222 também obtemos o mesmo resultado, mas ainda se torna mais complicado de colocarmos todas as combinações de dois algarismos possíveis de fazer uma vez que são todas iguais e podemos perder a noção de quantas vezes o número se repetirá.

Mas porque será que o resultado obtido é sempre o mesmo e porque será que é sempre 22? Foram estas as questões que me levaram a utilizar variáveis para simbolizar o valor de cada algarismo (figura 1).

Deste modo se comprova que utilizando qualquer número de três algarismos na resolução deste desafio o resultado obtido será sempre o mesmo: 22.

A curiosidade falou mais alto e depois de dar resposta às questões do desafio resolvi investigar um pouco mais e compreender o que se passava fazendo o mesmo desafio com um número natural composto por diferente número de algarismos (com 2, 4, 5, ...). Será que o número total de algarismos do número influencia o resultado final? Como? E será que o número de algarismos com que se têm de formar os restantes números também influencia o resultado final? De que modo?

Para dar resposta a estas questões comecei por utilizar alguns exemplos de números compostos apenas por 2 algarismos, tendo chegado a:

Ex 1:	Ex 2:	Ex 3:
12	36	30
$12 + 21 = 33$	$36 + 63 = 99$	$30 + 03 = 33$
$1 + 2 = 3$	$3 + 6 = 9$	$3 + 0 = 3$
$33 : 3 = 11$	$99 : 9 = 11$	$33 : 3 = 11$

O resultado obtido parece ser sempre 11. Mas porque será que o resultado obtido é sempre 11? Novamente com o raciocínio realizado anteriormente, temos que:

$$ab \rightarrow 10a + b$$

$$\frac{(10a + b) + (10b + a)}{a + b} = \frac{11a + 11b}{a + b} = \frac{11\,(a + b)}{a + b} = 11$$

Deste modo se comprova que utilizando qualquer número de dois algarismos na resolução deste desafio o resultado obtido será sempre o mesmo: 11.

E se for com um número de 4 algarismos? Será 33?

Ex 1:

4321

$43 + 42 + 41 + 34 + 32 + 31 + 24 + 23 + 21 + 14 + 13 + 12 = 330$

$4 + 3 + 2 + 1 = 10$

$330 : 10 = 33$

Ex 2:

1029

$10 + 12 + 19 + 01 + 02 + 09 + 21 + 20 + 29 + 91 + 90 + 92 = 396$

$1 + 0 + 2 + 9 = 12$

$396 : 12 = 33$

$$abc \rightarrow 100a + 10\,b + c$$

$$\frac{(10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b)}{a + b + c} = \frac{22a + 22b + 22\,c}{a + b + c} = \frac{22\,(a + b + c)}{a + b + c} = 22$$

Figura 1.

Número de algarismos do número escolhido	Número obtido
2	11
3	22
4	33
5	44
6	55
7	66
8	77
9	88
10	99

Tabela 1. Número obtido consoante o número de algarismos do número escolhido

Nº total de algarismos do nº (n)	Nº de algarismos de cada parcela	Resultado obtido	Expressão
2	2	11	$11 \times (n-1)$
3	2	22	$11 \times (n-1)$
3	3	222	$111 \times (n-1) \times (n-2)$
4	2	33	$11 \times (n-1)$
4	3	666	$111 \times (n-1) \times (n-2)$
4	4	6666	$1111 \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)$
5	2	44	$11 \times (n-1)$
5	3	1332	$111 \times (n-1) \times (n-2)$
5	4	26664	$1111 \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)$
5	5	266664	$11111 \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4)$

Tabela 2. Expressões algébricas consoante o número de algarismos do número escolhido e do número de algarismos de cada parcela a formar

Deste modo se comprova que utilizando qualquer número de quatro algarismos na resolução deste desafio o resultado obtido será sempre o mesmo: 33 (figura 2).

Com números compostos por até 10 algarismos, a regularidade mantém-se (ver Tabela 1).

Ao analisar a tabela percebe-se que o número obtido é múltiplo de 11. Além disto também é possível conjecturar que este múltiplo se obtém multiplicando 11 pelo número de algarismos do número menos um, ou seja:

$$\text{Número obtido} = 11 \times (n-1),\ n \geq 2,$$

sendo n o número de algarismos que constituem o número escolhido

Depois deste desafio outra questão se colocava: e se as parcelas que se têm de constituir com os números não tiverem apenas dois algarismos? Se for constituída cada uma por três algarismos? E por 4?

Depois de explorar alguns exemplos, como nos casos anteriores, percebi que existe uma relação entre o número total de algarismos que compõem o número escolhido, o número de algarismos com que se formam as parcelas e o resultado obtido, tendo, deste modo, chegado às expressões algébricas que nos indicam, tendo apenas conhecimento dessas duas características (número de algarismos do número e número de algarismos das parcelas a formar) qual o resultado final que iremos obter (ver Tabela 2).

Como é possível verificar, a expressão obtida está estritamente dependente do número de algarismos com que se pretende formar cada parcela, existindo para cada caso uma expressão distinta. Deste modo se percebe que a expressão anteriormente demonstrada apenas funciona quando se trabalha com parcelas constituídas por apenas 2 algarismos (os únicos casos estudados anteriormente), sendo essa a expressão apresentada nas linhas assim sombreadas a roxo claro.

Os exemplos, na tabela, com o sombreado roxo escuro referem-se aos casos em que as parcelas a formar são constituídas por 3 algarismos, sendo que a expressão dos números nesta situação difere da fórmula descoberta anteriormente no facto de um dos factores ser o número 111, em vez do 11, e ter sido acrescido de mais um factor $(n-2)$.

Para o caso das parcelas a formar com 4 algarismos, o factor 11 do primeiro caso, passa a 1111, e para além do acréscimo do factor $(n-2)$ como no exemplo anterior, também é acrescentado o factor $(n-3)$.

Ao analisarmos estas regularidades percebe-se que existe uma maneira de descobrir qual o resultado final sabendo apenas o número de algarismos do número com o qual queremos trabalhar, e o número de algarismos de cada parcela, uma vez que, independentemente da situação, seguem as mesmas regras. Para a obtenção da expressão geradora basta apenas saber qual o número de algarismos de cada parcela que se vai formar, sendo que o número de algarismos do número com o qual se quer trabalhar apenas serve para resolver a fórmula e chegar ao resultado final:

1.º Para saber qual o primeiro factor da expressão, basta saber que o número de algarismos das parcelas a formar é igual ao número de vezes que o algarismo 1 se repete, formando deste modo o primeiro factor da fórmula;

$$abcd \rightarrow 1000a + 100b + 10c + d$$

$$\frac{(10a+b)+(10a+c)+(10a+d)+(10b+a)+(10b+c)+(10b+d)+(10c+a)+(10c+b)}{a+b+c+d}+$$

$$+\frac{(10c+d)+(10d+a)+(10d+b)+(10d+c)}{a+b+c+d}=\frac{33a+33b+33c+33d}{a+b+c+d}=\frac{33(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=33$$

Figura 2.

2.° De seguida, tem que se multiplicar o número obtido no ponto anterior por $(n - x)$, sendo que o n representa o número total de algarismos do número inicial e x representa todos os números naturais de 1 até $n - 1$, inclusive.

3.° Por fim, basta substituir os valores e resolver a operação.

Por exemplo, para o caso de se querer formar parcelas com 3 algarismos:

1.° O primeiro factor será 111, uma vez que o algarismo 1 escreve-se 3 vezes (número de algarismos de cada parcela a formar);

2.° Multiplica-se o 111 por $(n - 1)$ e $(n - 2)$, já que se se formam parcelas com 3 algarismos os restantes factores terão de ser n menos os números naturais inferiores a 3, ou seja, 1 e 2;

3.° Neste caso chegou-se à fórmula $111 \times (n - 1) \times (n - 2)$. Agora sabendo o número de algarismos do número com o qual pretendemos resolver o desafio, basta substituir o n por esse valor e resolver a operação.

Deste modo parece que o desafio proposto inicialmente, e que foi um grande desafio aquando da sua resolução, se encontra resolvido para qualquer situação que seja proposta.

Este é um exemplo de um desafio que pode ser realizado com alunos, desde os mais pequenos, para os quais será um desafio interessante e provavelmente diferente dos que costumam realizar, até aos alunos da formação inicial com os quais já é possível chegar a várias generalizações.

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

O 22 Mágico

Envolver os alunos em descobertas matemáticas pode ter como ponto de partida qualquer motivo. O conhecimento deste desafio tornava-o interessante para ser explorado num dia 22. Mesmo tendo consciência de que realizar trabalho repetitivo pode ser importante para sistematizar aprendizagens, nem sempre se encontram situações em que este seja realizado com gosto já que a finalidade é descobrir outra matemática interessante.

Este desafio constitui um exemplo de como é possível envolver os alunos em trabalho repetitivo, mas mantendo o seu interesse já que o gosto da descoberta e a confirmação de conjecturas induz a um trabalho organizado e o envolvimento dos alunos em sustentar as descobertas e argumentar a favor das suas conclusões, cria ambientes de entusiasmo, em que o trabalho repetitivo é realizado sem esforço.

O desafio foi apresentado aos alunos em dois dias consecutivos, prevendo um tempo de trabalho de cerca de 45 m em cada um dos dias. No primeiro dia foi apresentado o desafio e permitiu-se que fossem realizadas explorações de forma livre e em grupo. Dentro do tempo previsto, reservou-se um período para que todos os grupos pudessem apresentar as suas conclusões e as conjecturas que começavam a surgir.

No segundo dia solicitou-se a elaboração de um relatório, também em grupo, que pudesse ser lido por qualquer pessoa e fosse suficientemente explícito para se perceber o que tinham descoberto com o trabalho realizado. O relatórios foram lidos e revistos em conjunto, assinalando-se o que era menos perceptível. Este trabalho revelou-se muito profícuo e importante no que respeita aspectos da comunicação matemática sempre difíceis de conseguir e tanto mais complicados quanto o trabalho solicitado teria de ser elaborado em grupo. Não se procedeu à reescrita dos relatórios uma vez que já havia sido muito absorvente o processo desenvolvido.

A exploração realizada no primeiro dia seguiu caminhos diferentes nos vários grupos de alunos. Enquanto uns tentaram encontrar números que se diferenciassem em alguns aspectos, por exemplo, cuja soma dos dígitos originasse valores bastante diferenciados, outros, na tentativa de «ganhar», e ganhar significava experimentar mais números, escolheram um conjunto de números cuja soma dos dígitos fosse sempre igual. Os grupos que escolheram esta opção verificaram que em números cuja soma dos dígitos fosse igual, a soma dos números formados pelos algarismos que o compunham era também igual, pelo que evitavam fazer a divisão final, abreviavam a adição e poderiam afirmar que tinham experimentado muitos números (ver figura 1 na página seguinte)

Nos grupos que seguiram opções diferentes a grande preocupação era encontrar estratégias que garantissem que as operações efectuadas estavam correctas e não havia lugar a erros.

Seguiram-se estratégias interessantes. Os diferentes alunos do grupo realizavam as operações separadamente e verificavam as operações uns dos outros. Encontraram formas de, utilizando as propriedades das operações, verificar a sua correcção (ver figura 2 na página 6) ou ainda escolheram números cujos dígitos somassem 10 de forma a facilitar a operação de divisão (ver figura 3 na página 6).

Saliente-se o trabalho esforçado dos grupos de alunos que propositadamente experimentaram números cuja soma dos dígitos originavam valores muito diferenciados por forma a comprovar ou negar que o resultado era sempre idêntico — o 22 era mágico. Assim foram testados os números 123, 456, 789 sistematicamente, ou ainda o 425, 987, 321.

Logo no primeiro dia, alguns alunos não resistiram à tentação de experimentar números com dígitos repetidos quando o enunciado afirmava que o não deveriam fazer. A atitude de desafio, talvez na procura de casos que não confirmassem o resultado, não deixou de ser interessante, tanto mais que não se enganaram na composição de números repetidos dos seis números com dois dígitos que deveriam adicionar. Testaram o 262 e depois o 333 e 444 (ver figura 4 na página seguinte).

Há ainda a referir que um grupo não resistiu e experimentou com quatro algarismos — 1423 — e um número com cinco algarismos — 2453, tendo concluído»Se for com cinco e com

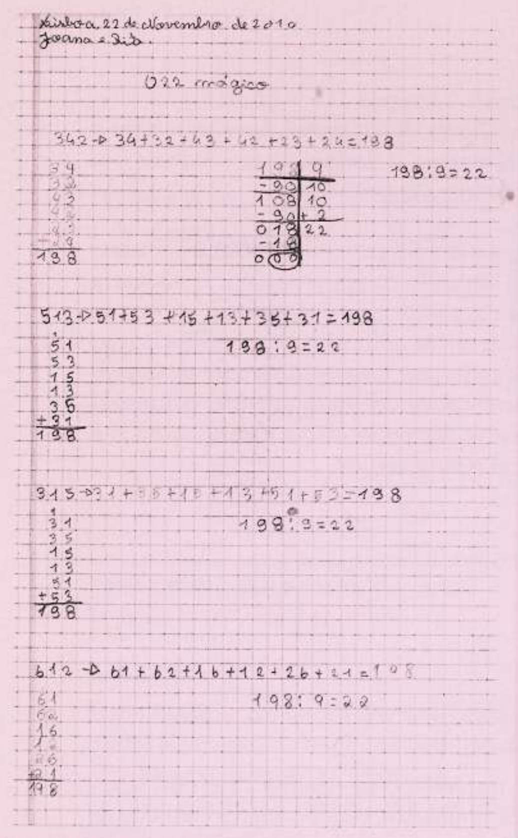


Figura 1

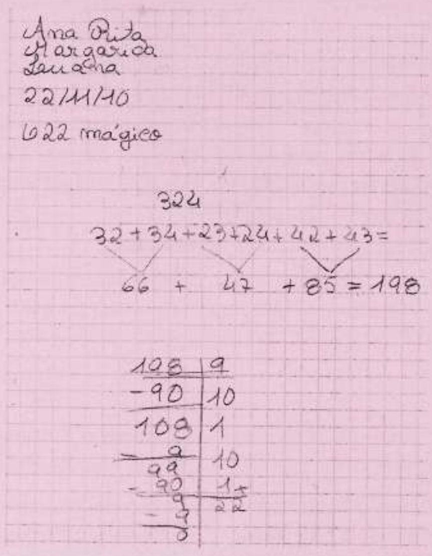


Figura 2

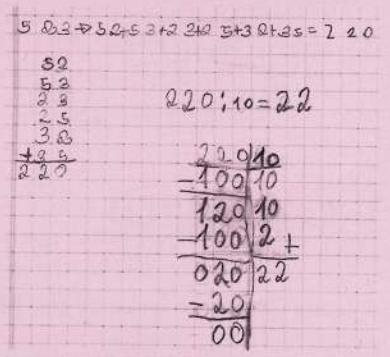
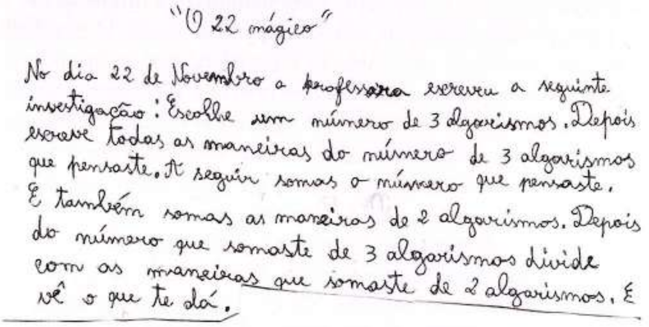


Figura 3

seis e por aí fora dá sempre capicua. Por exemplo 44, 55, 66, 77, 88…

Na aula seguinte verificou-se que tinha havido troca de informações, outras explorações e o trabalho tinha continuado fora da sala de aula. Os alunos estavam intrigados e continuaram a experimentar mas sem grande sistematização. Iniciou-se a aula tentando organizar todas as descobertas que já tinham sido efectivamente realizadas. Insistiram no registo de todos os números experimentados, com dígitos diferentes e iguais, com três dígitos ou mais. Conclui-se que não tinha havido tentativas com números de dois dígitos. As conjecturas iniciadas desafiavam a tentar números com 4, 5 ou mais dígitos, mas descobrir todas as combinações exigia um processo organizado e realizar a adição de todas as parcelas nem sempre era fácil. Enquanto ponderava a disponibilização ou não de calculadoras ou sugeria o recurso ao Magalhães, alguns grupos de alunos organizavam os números em colunas a fim de sistematizar a composição de todas as possibilidades com dois algarismos, o que permitia realizar adições parcelares resolvendo o problema. De seguida os alunos empenharam-se em redigir um relatório que explicitasse as suas ideias.

Redigir um relatório em grupo não é ainda tarefa fácil para alunos de 4° ano de escolaridade. Num dos grupos foi muito conflituoso a forma como se deveria explicitar o problema e acabaram por realmente fazer trabalho separado não conseguindo chegar a acordo. Um dos alunos pretendia explicitar o problema da seguinte forma:


"O 22 mágico"

No dia 22 de Novembro a professora escreveu a seguinte investigação: Escolhe um número de 3 algarismos. Depois escreve todas as maneiras do número de 3 algarismos que pensaste. A seguir somas o número que pensaste. E também somas as maneiras de 2 algarismos. Depois do número que somaste de 3 algarismos divide com as maneiras que somaste de 2 algarismos. E vê o que te dá.

O aluno pretendeu reproduzir a forma como entendeu o problema, não se apercebendo que a sua forma de comunicar as questões, não era perceptível pelos restantes membros do grupo.

Uma vez que não lhe conseguiram fazer perceber, porque é que esta redacção não poderia ser aceite pela maioria das outras pessoas, outro elemento do grupo fez uma proposta alternativa (figura 5) e o terceiro elemento elaborou o exemplo. O relatório final foi resultado do recorte e colagem das diferentes partes elaboradas. Sentiram ainda necessidade de juntar os exemplos que tão arduamente exploraram, muitos deles em casa, e um aviso (figura 6).

Nem todos os relatórios elaborados foram conseguidos a ponto de sistematizar as informações principais e muitos registavam conclusões pouco aceites na discussão pelo grande grupo, pelo que, os elementos desses grupos admitiram haver necessidade de reformulações e alguns admitiram mesmo ter registado conclusões pouco correctas. Seleccionar as informa-

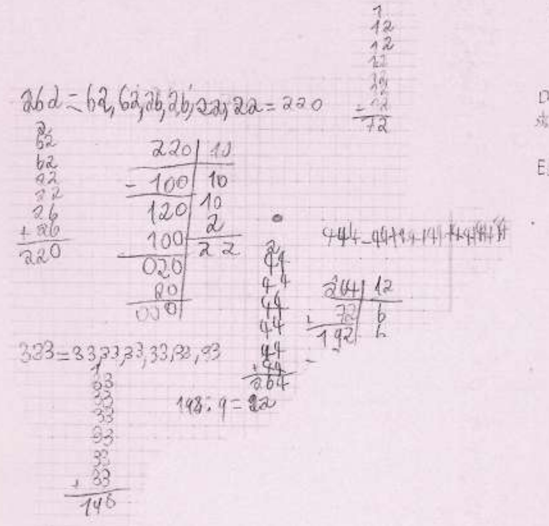


Figura 4

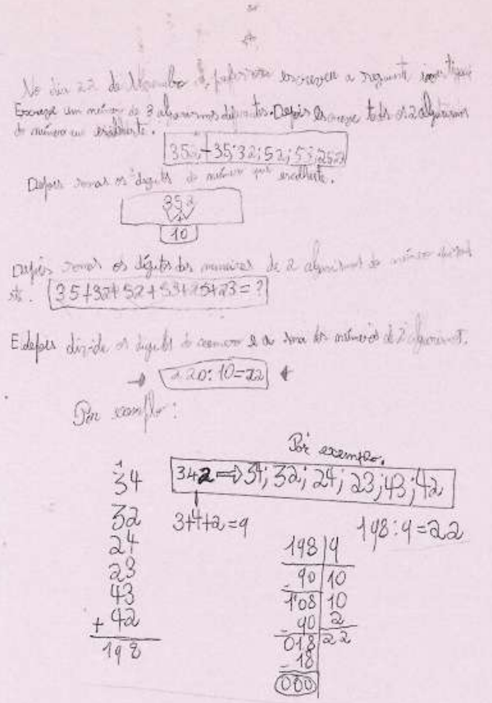


Figura 5

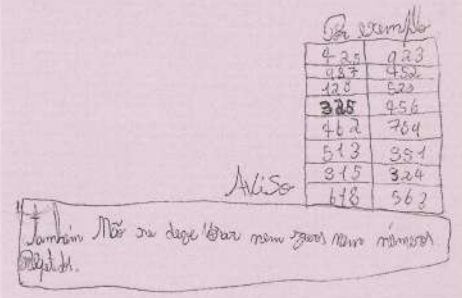
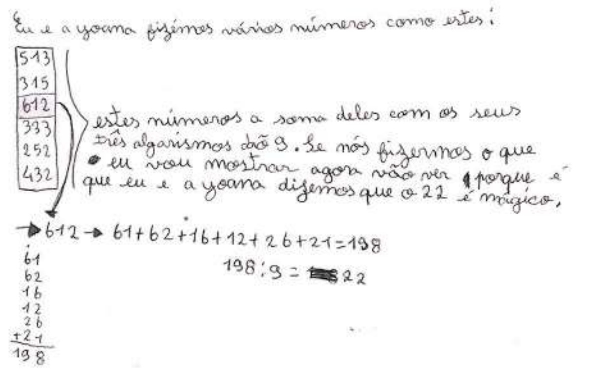


Figura 6

ções relevantes, escolher apenas um exemplo e não referir todos os números explorados, dar sentido ao relatório sem pretender colocar toda a informação revelou-se um processo muito pouco simples. A redacção de relatórios apela à utilização de um modo de escrito informativo não completamente dominado por todos os alunos. Não é de estranhar que um dos relatórios seja bastante similar às histórias e narrativas mais comuns à escrita realizada pelos alunos. Assim, com o título «A magia da matemática» um grupo relatava:



«Era uma vez um menino chamado Pedro que tentou fazer um truque que estava num livro. Fez o seguinte. escolheu um número que tinha três algarismos todos diferentes e sem zeros, por exemplo, 972, depois tentou fazer todos os números com dois algarismos todos diferentes com os algarismos do número que tinha escolhido, e foram estes: 97, 92, 72, 79, 27, 29, depois somou todos e deu esta conta: 97+92+72+79+27+29=396. Dividiu por 18, a soma dos dígitos do número que tinha escolhido, e deu esta conta: 396:18=22, depois tentou com outro número. A divisão resultou 22, logo descobriu que o 22 é mágico.»

Ainda o mesmo grupo continuou com «O encanto da Matemática»

«O Pedro ficou tão encantado que resolveu experimentar com dois dígitos e fez esta conta:

$$92 \rightarrow 29+92=121$$
$$121:11=11$$

Experimentou com outro número e a divisão resultou 11 e descobriu que o 11 também era mágico. Resolveu experimentar com 4 dígitos e deu esta conta:

$$1243 \rightarrow 12+14+13+21+24+23+41+42+43+34+32+31=330$$
$$330:10=33$$

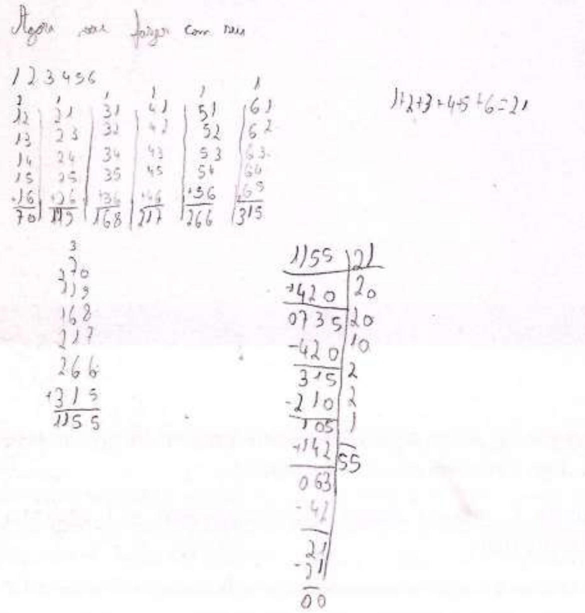
Experimentou com outro número e a divisão resultou 33 e descobriu que o 33 também era mágico. Resolveu experimentar com 5 dígitos e deu esta conta:

$$12345 \rightarrow 12+13+14+15+21+23+24+25+31+32+34+$$
$$+35+41+42+43+45+51+52+53+54=660$$
$$660:15=55$$

experimentou com outro número e a divisão também resultou 55. Descobriu que o 55 também era mágico. O Pedro descobriu a sequência que a partir do 33 era sempre mais 22 números. E o Pedro resolveu mostrar estas magias à mãe.»

O empenho em tentar encontrar uma regularidade não deu para perceber que havia erro nas operações efectuadas e de certa forma força-se o resultado para satisfazer uma conjectura. Na discussão final percebeu-se o erro, mas o contentamento por ter levantado uma hipótese, que mais ninguém tinha conseguido elaborar, não foi menor. Ficou o cuidado de rever com mais atenção.

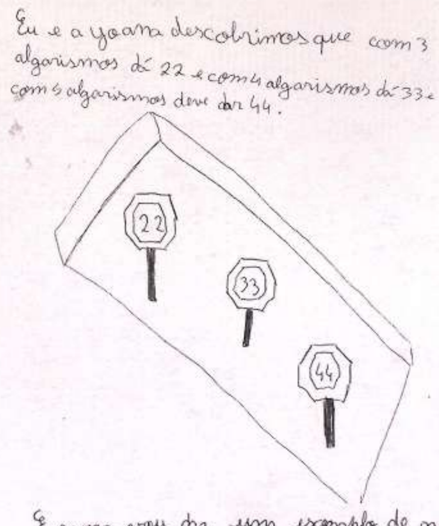
Outros grupos privilegiaram nos seus relatórios a descrição da maior quantidade de números encontrados e depois de exporem o problema inicial, explicaram:

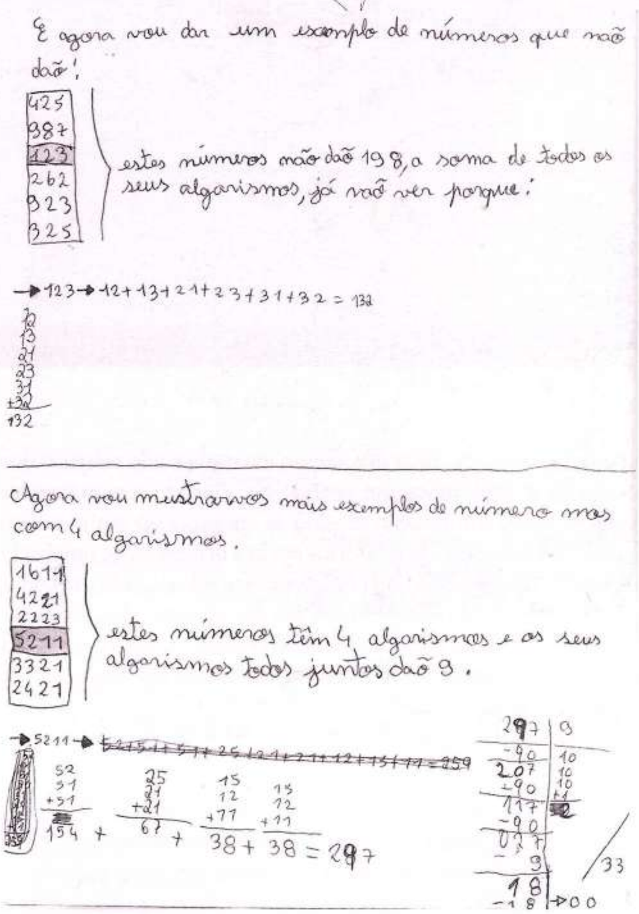


Um dos relatórios destacou-se pela descrição extensiva e pelo pormenor referido. uma vez que foi redigido a lápis não permitindo a digitalização com qualidade de leitura, fica a transcrição, já que permite, apesar da escrita pouco apurada, perceber o processo de trabalho:

«A professora escreveu para cada grupo pensar num número de três algarismos todos diferentes e explicou o que eram algarismos diferentes, eram números de zero a nove mas não se podia meter o zero nesse número por exemplo 327. E depois para formar todos os números de dois algarismos desse número por exemplo: 32, 37, 23, 27, 72, 73. A seguir adicionar esses números e dividir pela soma dos dígitos desse número. Primeiro vimos que quase todos os números quando se dividiam davam 22. E depois viu-se se fosse o número 315 a soma dos dígitos era 9 a soma dos números era 198, e vimos se fizéssemos números seguidos era o número com os mesmos algarismos. E depois houve pessoas que experimentaram com zero e houve outros que experimentaram com quatro que foi eu e a Carmo e agora vamos experimentar com 2 algarismos e agora penso que com dois é 11 e a sequência deve ser 11, 22, 33, 44, 55, 66 e por aí fora sempre a seguir a sequência. Com 2 é 11, com 3 é 22, com 4 é 33, com 5 é 44, com 6 é 55, com 7 é 66 e por aí fora.»

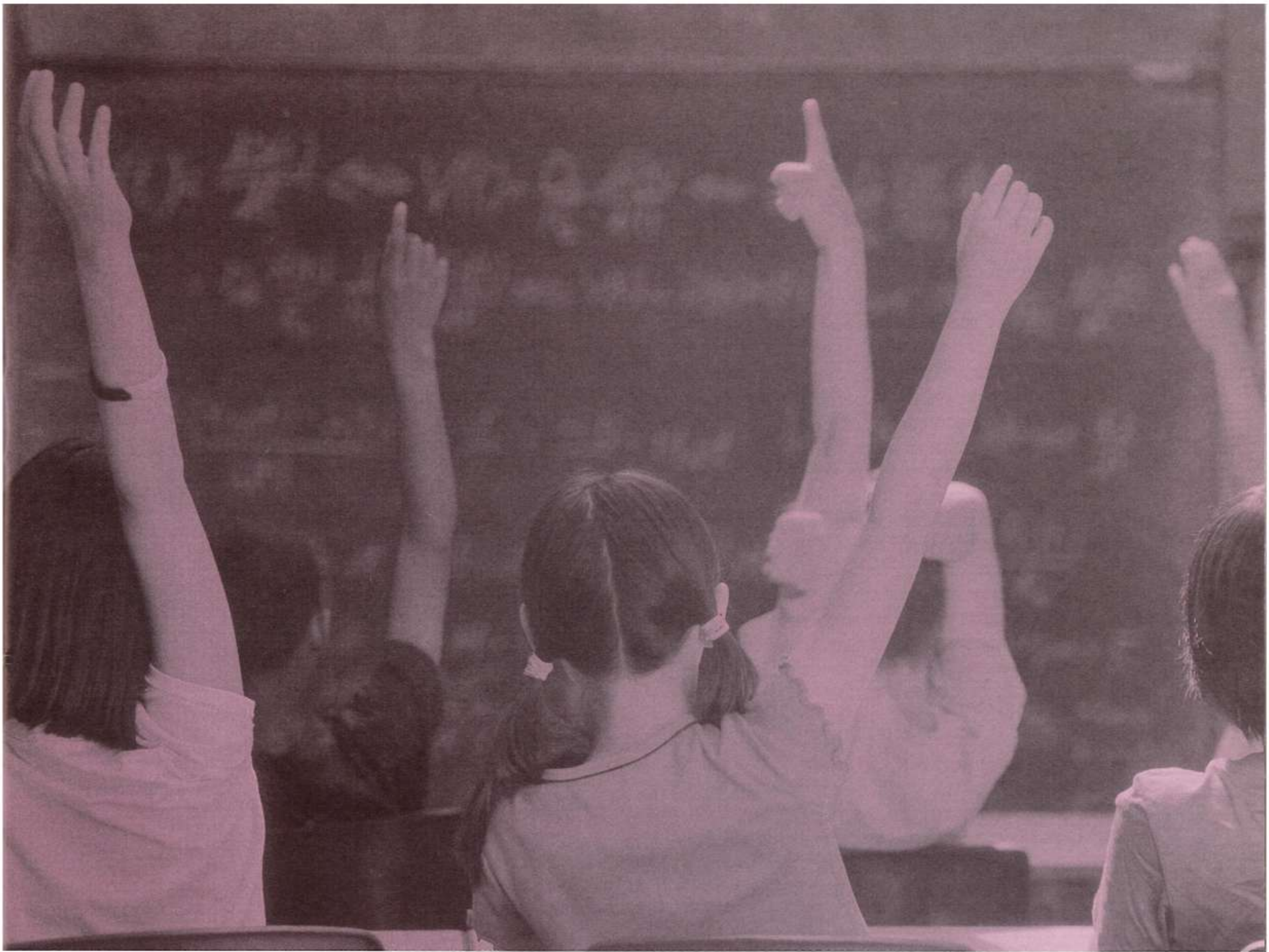
O relatório continua com exemplos de números de 3 dígitos, dois dígitos, apresentando as contas e termina:





Durante dois dias os alunos empenharam-se em realizar descobertas, e apesar de se terem envolvido em contas, muitas contas, esse trabalho, não foi desmotivante e até constituiu um desafio acrescido. Empenharam-se em organizar os dados e apresentar as conclusões de forma perceptível. Discutiram, reformularam, identificaram relações entre números, fizeram conjecturas, testaram na medida do possível, comunicaram as conclusões e deixaram-nos a informações do desejo de comunicar estas descobertas a outros. O desafio do 22 mágico revelou-se um trabalho estimulante para o processo de aprendizagem da turma.

Helena Maria Amaral
EB1 Parque Silva Porto
Agrupamento de Escolas Quinta de Marrocos



Uma solução matemática para a Educação

Alberto Pimenta

Se um problema existe cuja resolução, para além de supostamente complexa, é também muitíssimo ingrata é com certeza a Educação. De facto, na soma dos seus aspectos técnicos e cívicos o problema da Educação (ou melhor dizendo da sua falta) está na base de todos os restantes problemas sociais. No entanto, a sua solução, mesmo que projectada com a maior destreza e perfeccionismo, só poderá em princípio produzir efeitos uma geração após o início do processo de mudança.

Entenda-se Educação, não apenas como um conjunto de habilidades específicas ensinadas dentro de aulas e avaliadas em exames, mas também como uma série de competências, sensibilidades e aspirações sociais que certamente fazem parte de qualquer projecto de desenvolvimento humano.

O Homem, reconhecido animal de hábitos, não só se opõe à mudança de forma crescente ao longo da vida, como orgulhosamente o reconhece em ilustrativas pérolas da sabedoria popular (pau que nasce torto tarde ou nunca se endireita, burro velho não aprende línguas, ...). Para além da oposição individual à mudança própria verifica-se também a oposição colectiva à mudança de cada um, igualmente ilustrada na sabedoria do povo (se não podes vencê-los junta-te a eles, diz-me com quem andas, dir-te-ei quem és, em Roma sê romano, ...). Daí que, em grande medida, a correcção de aspectos estruturais de educação só se afigure possível via renovação de gerações.

Este desfasamento, juntamente com o espinhoso caminho que é a alteração em massa de qualquer processo (os agentes da educação[1], como seres humanos que felizmente são, também oferecem resistência — ainda que mais educada), prefigura um imponente desincentivo político por via das mais do que certas dificuldades e garantida ausência de resultados, à escala de tempo de um mandato.

No entanto, é bom que se note que nenhuma patologia de origem social poderá alguma vez ser curada na ausência de uma educação eficaz. O desemprego, a criminalidade, o défice de empreendedorismo, a falta de empenho, a ausência de brio e, enfim, a apatia, indiferença e falta de iniciativa que caracterizam a sociedade portuguesa (salvo para questões isoladas que não são as de fundo) permanecerão de pedra e cal até que o problema desapareça a montante... e a solução lentamente se propague. Há quem defenda que a indiferença se deve à falta de incentivos e se justifica por não haver perspectivas de justa recompensa para quem efectivamente se empenhe em melhorar. Por outro lado, tal justa recompensa jamais aparecerá se a sociedade no seu global estiver alinhada num patamar inferior de desenvolvimento, ao qual corresponde baixa produtividade. Estamos pois perante um problema circular que não se resolverá por si só. Mas a solução, com todas as dificuldades existentes, passa seguramente por envolver cada um de nós num processo global de evolução.

Estabelecida a importância de melhorar e reconhecidas as dificuldades envolvidas propomos-nos a estudar rapidamente a vagarosa dinâmica do processo de re-educação que nos permitirá aspirar a um dia sermos diferentes.

Para analisar a evolução de qualquer processo é preciso conseguir medir. Suponhamos pois que o nível médio de educação dos indivíduos em idade de aprendizagem de determinada população se caracteriza por uma variável macroscópica E. O valor individual é definido, para cada elemento da população, por uma hipotética ponderação de variáveis microscópicas — $E_i = f(x_i, y_i, ...)$ — cuja estrutura precisa não nos interessa detalhar. Interessa apenas ter presente que, seja qual for a combinação de variáveis, é possível definir um processo de determinar E_i — um processo de avaliação — e que tomando a média dos valores E_i ao longo da população se obtém o indicador macroscópico E. Ora, é precisamente a evolução no tempo deste indicador, ou seja a função $E(t)$, que nos interessa estudar.

Admitamos para tal que o Estado gasta anualmente na Educação um valor fixo, proveniente da boa cobrança de impostos, prazerosamente pagos pelos elementos adultos da população. Admitamos também que esta quantia (Q) se subdivide em duas componentes: manutenção (M) e investimento (V). Se supusermos que a verba de manutenção é a necessária e suficiente para garantir condições de funcionamento constante concluiremos que, do gasto total, o factor favorável à variação positiva de $E(t)$ será a verba de investimento V. Naturalmente, não será V directamente a participar na variação mas sim este valor ponderado pela eficácia associada aos objectos finais de tal investimento. Define-se portanto a relação

$$V_{ef} = \rho(Q - M) = \rho V, \qquad (1)$$

cujo significado não é mais do que afirmar que existem formas mais eficazes do que outras de investir a quantia V, sendo essa eficácia medida pelo parâmetro ρ[2].

Assim, parece natural assumir que a variação de $E(t)$, representada pela derivada em ordem ao tempo, seja de alguma forma proporcional a V_{ef}:

$$\dot{E} \propto \rho V. \qquad (2)$$

Por outro lado, pelo que já foi referido acima, é imperativo que qualquer descrição da educacional variação que procuramos tenha em conta a resistência humana ao processo de melhoria.

Para esta resistência contribui a já referida influência do meio, a qual está relacionada com o estado educacional médio da sociedade (professores, pais, familiares e outros elementos adultos da população). Ora este estado educacional é reflectido também pela função E, mas num momento anterior. Por outras palavras, o patamar educacional da sociedade adulta, o qual se reflecte nos elementos em fase aprendizagem, está relacionado com o indicador E medido no seu tempo próprio de educação:

$$E_m \propto E(t - \Delta) \qquad (3)$$

Na equação (3) Δ corresponde evidentemente ao intervalo geracional. Deste modo avança-se com a seguinte hipótese para a resistência imposta pelo meio:

$$R_m = \beta(E - E_m) = \beta(E(t) - E(t - \Delta)) \qquad (4)$$

em que o parâmetro β reflecte a intensidade desta resistência.

O leitor poderá objectar a esta hipótese afirmando que raramente alguém tenta exercer resistência directa em relação à educação dos mais jovens. Sobre este ponto importa esclarecer que a resistência não é forçosamente explícita. Pelo contrário, é maioritariamente implícita pela ausência de condições criadas, pela falta de incentivos, pelos exemplos dados ou simplesmente pelas baixas aspirações em relação ao progresso do educando, consequência de uma fasquia educativa menos elevada. Como exemplo imediato podemos relembrar as dificuldades educativas das crianças habitantes de bairros sociais que mesmo que não sofram acções directas prejudiciais à sua educação são diariamente penalizadas pelas condições que as envolvem. Interessa igualmente esclarecer que a resistência do meio representa um valor médio. Pode até haver casos em que o meio incentive em vez de resistir, mas tal será certamente uma excepção e não a regra. Voltando ao exemplo anterior: um determinado conjunto de estudantes pode ter excelentes professores mas o péssimo enquadramento social dificultar gravemente o avanço. O impacto efectivo destas dificuldades constitui precisamente o parâmetro β.

Feitos os esclarecimentos continuemos a trabalhar o modelo evolutivo. De acordo com o que foi dito a equação (4) sugere:

$$\dot{E} \propto \rho V - \beta[E(t) - E(t - \Delta)] \qquad (5)$$

No entanto, devemos ter em mente que a escalada da montanha do desenvolvimento não é composta por degraus de igual dificuldade. Pelo contrário, a evolução é incrementalmente trabalhosa: quanto mais alto o nível atingido mais difícil será aceder ao seguinte. A forma mais simples de modelar este fenómeno é admitir que a variação é simultâneamente afectada na razão inversa da própria função:

$$\dot{E} \propto \frac{F(\rho, V, \beta, E)}{E} \qquad (6)$$

complementando a expressão (5). Introduza-se então, o conceito de resistência intrínseca por via de uma constante de proporcionalidade interna à população.

$$R_i = \gamma E(t). \tag{7}$$

A constante γ traduz a maior ou menor oposição genética à aprendizagem. Assim, o modelo simplificado para a evolução educativa, compatível com as hipóteses (5) e (6), é descrito pela seguinte equação:

$$\dot{E} = \frac{V_{ef} - R_m}{R_i} \tag{8}$$

que na sua forma explícita se escreve:

$$\dot{E} = \frac{\rho V - \beta[E(t) - E(t-\Delta)]}{\gamma E(t)} \qquad \rho, V, \beta, \gamma > 0 \tag{9}$$

A equação anterior pertence a uma classe de equações designadas por Equações Diferenciais com Atraso (*Delay Differential Equations* ou DDEs) e depende dos parâmetros aqui sucessivamente introduzidos. O parâmetro γ não se considera sensível a intervenções externas por representar uma característica intrínseca à população: a sua dificuldade natural de aprendizagem. Interessa pois analisar a dinâmica desta equação, sabendo de antemão que a evolução será potenciada maximizando V_{ef} e minimizando β[3]. Convém no entanto ter em mente que há um limite físico para V_{ef}. O processo educativo vive essencialmente da interacção entre pessoas pelo que o investimento em infra-estruturas e materiais de apoio V tem um ponto óptimo acima do qual já não produz resultados e o dinheiro se torna mal gasto. Ou seja a eficiência desce quando V ultrapassa determinado valor de tal modo que V_{ef} não ultrapassa o valor limite. Fica assim claro que nas condições ideais de investimento o parâmetro β é determinante na evolução.

Na sua forma mais simples, $\beta = 0$, a expressão (9) transforma-se numa Equação Diferencial Ordinária (*Ordinary Differential Equation* ou ODE) separável cuja solução designaremos por E_0 e é dada por:

$$E_0(t) = \left(\frac{2\rho V}{\gamma} t\right)^{1/2} \tag{10}$$

A expressão (10) denota, como se pode ver, um crescimento infra-linear contínuo o qual representa a evolução no melhor dos cenários. No caso geral há que empreender uma análise mais complexa para chegar a conclusões.

Para a resolução de uma DDE simples é necessária não só a condição inicial mas também uma função inicial cuja forma se conheça num intervalo igual ou maior ao *delay* presente na equação. Suponhamos então que

$$E(t) = 0 \qquad t \leq 0 \tag{11}$$

ou seja que a educação começa do zero. Uns poucos professores, ardósia, giz e uma população nos mínimos da literacia. Da condição (11) segue que para o intervalo I_1, $t \in]0, \Delta]$ temos $E(t-\Delta) = 0$, de onde se obtém:

$$\dot{E} = \frac{\rho V - \beta E(t)}{\gamma E(t)} \tag{12}$$

A expressão (12) é uma ODE da qual se obtém a solução para o intervalo referido. Tal solução servirá para determinar $E(t-\Delta)$ no intervalo I_2. Analogamente, a solução no intervalo I_2 permitirá determinar a do intervalo I_3. A repetição deste processo permite determinar a evolução de $E(t)$ em qualquer intervalo I_k. Temos pois que a solução $E(t)$ é uma função contínua definida por troços.

Dado não ser possível obter expressões simples para cada troço da função interessa pelo menos enunciar as suas propriedades fundamentais:

$$E(t) \leq E_0 8t) \qquad t \geq 0 \tag{13}$$

$$\lim_{t \to +\infty} E(t) = +\infty \tag{14}$$

Uma vez que (13) é trivial vejamos como se pode demonstrar (14). Para começar verificaremos que nos pontos interiores aos intervalos I_k, $\dot{E}$ nunca se anula. Para tal utilizaremos o método de redução ao absurdo, o qual goza da nossa maior simpatia pela clara afinidade com o país em que vivemos.

No intervalo I_1 a função $E(t)$ é monótona crescente. Tal conclui-se da análise de (12), que pode ser escrita na forma de uma equação de Abel, cuja solução é conhecida [1]. Suponhamos então que $\dot{E}$ se anula num primeiro ponto t_0 pertencente a I_2.

Aplicando o operador derivada em ambos os lados de (9) obtém-se:

$$\ddot{E} = \frac{-\beta\gamma(\dot{E}(t) - \dot{E}(t-\Delta))E(t) - (\rho V - \beta(E(t) - E(t-\Delta))\gamma\dot{E}(t))}{\gamma^2 E(t)^2} \tag{15}$$

expressão esta que avaliada em t_0 se reduz a

$$\ddot{E}(t_0) = \frac{\beta\dot{E}(t_0 - \Delta)}{\gamma E(t_0)} \tag{16}$$

Mas sendo a expressão (16) positiva (por E ser monótona crescente em I_1) o instante t_0 teria que representar um mínimo. Ora isto contraria o facto de $E(t)$ ser monótona crescente em I_1, excepto se a derivada mudar de sinal de forma descontínua na fronteira dos intervalos I_1 e I_2, ou seja em $t = \Delta$. No entanto, por cálculo directo das derivadas laterais com recurso a (9) verifica-se que a derivada existe e é contínua[4]. Desta forma, conclui-se que $E(t)$ é monótona crescente em I_2.

A aplicação repetida deste mesmo processo permite estender esta conclusão a qualquer intervalo I_k de onde segue que $E(t)$ é monótona crescente para qualquer t.

Para verificar (14) resta apenas demonstrar que $E(t)$, que já vimos ser monótona crescente, não tende para um valor constante. Voltemos para tal ao absurdo. Suponhamos que E tende de facto para um valor constante. Nesse caso:

$$\dot{E} = \frac{\rho V - \beta[E(t) - E(t-\Delta)]}{\gamma E(t)} \to 0 \tag{17}$$

e portanto

$$E(t) - E(t-\Delta) \to \frac{\rho V}{\beta} \tag{18}$$

o que implica

$$E(t) \to \frac{\rho V}{\beta\Delta} t + CTE \tag{19}$$

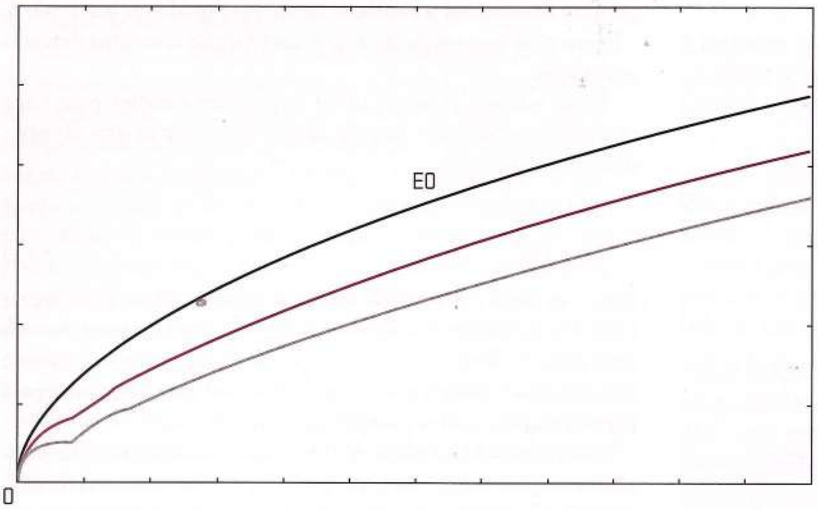


Figura 1. Soluções para diferentes valores de β

facto este que contradiz a premissa inicial e permite concluir (14).

Temos pois que a evolução educativa se dá por via de crescimento contínuo, não limitado, mais ou menos célere em função de um conjunto de parâmetros. Esta conclusão, sustentada pelo modelo desenvolvido, materializa aquilo de que se suspeitava. É preciso acelerar. É necessário investir, com eficácia. Mas principalmente é preciso atenuar a resistência educativa da sociedade. E como se faz isso?

A resposta, que todos procuramos, é muito mais simples do que qualquer modelo matemático. E representa investimento, sim, mas indirecto.

Se nos interrogarmos, «qual é coisa qual é ela que nos faz decidir algo, ignorando quaisquer pressões e opiniões da geração mais informada?» a que conclusão chegaremos? A resposta é o *marketing*. Aí se deve investir. É o *coolness factor*, que determina as acções de quem é jovem, que nos leva a fumar ou a ir ao ginásio, a frequentar o sítio X, a almoçar no sítio Y ou a adquirir determinado *gadget*. Assim se anula β e se evolui na direcção certa. Não sofremos nós, desde 1143, do mal da ostentação? Quando ser bom for *cool*, os portugueses serão os melhores.

Agora implemente-se. Promova-se. O meu trabalho, que era explicar, está feito.

Notas

[1] Entenda-se agente de educação no sentido lato, i.e., como todo e qualquer adulto que pretenda influenciar ou servir de referência aos elementos mais jovens.

[2] Este parâmetro encarrega-se igualmente de quaisquer conversões de unidades necessárias.

[3] A existência deste parâmetro não é em todos os casos prejudicial: num cenário de desinvestimento em que $V = Q - M < 0$ a existência deste parâmetro permite travar um eventual retrocesso educativo. Esse não é no entanto o processo em estudo.

[4] As descontinuidades das derivadas podem existir no pontos entre intervalos devido à variação abrupta da contribuição da componente retardada. Esta é uma característica conhecida das DDE. No caso presente a primeira derivada é descontínua em $t = 0$ sendo a segunda descontínua em $t = \Delta$.

Referências

[1] Plolyanin, Andrei D.; Zaitsev, Valentin F. — *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall/ CRC Press, Boca Raton, 2003 (2nd edition).

Este texto constitui uma humilde homenagem ao estilo interventivo de Fernando Pessoa, cuja incomparável expressão em textos como «O caso mental Português» ou «Ou banqueiro anarquista» evidencia a rigorosíssima veia analítica de um dos maiores autores da Literatura Portuguesa.

Alberto Pimenta

O GTI – Grupo de Trabalho de Investigação

O GTI é um dos grupos de trabalho da Associação de Professores de Matemática (http://www.apm.pt/portal/index.php?id=20891). Este grupo tem como objectivo criar um espaço de expressão da comunidade de investigação no campo da Educação Matemática, para divulgação, comunicação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados. Promove, ainda, a articulação entre a investigação nesta área e o ensino da Matemática. O núcleo central da actividade do grupo é o Seminário de Investigação em Educação Matemática, o Grupo de Estudos «O professor como investigador», a revista *Quadrante* e a publicação de teses no âmbito da Educação Matemática.

O Seminário de Investigação em Educação Matemática

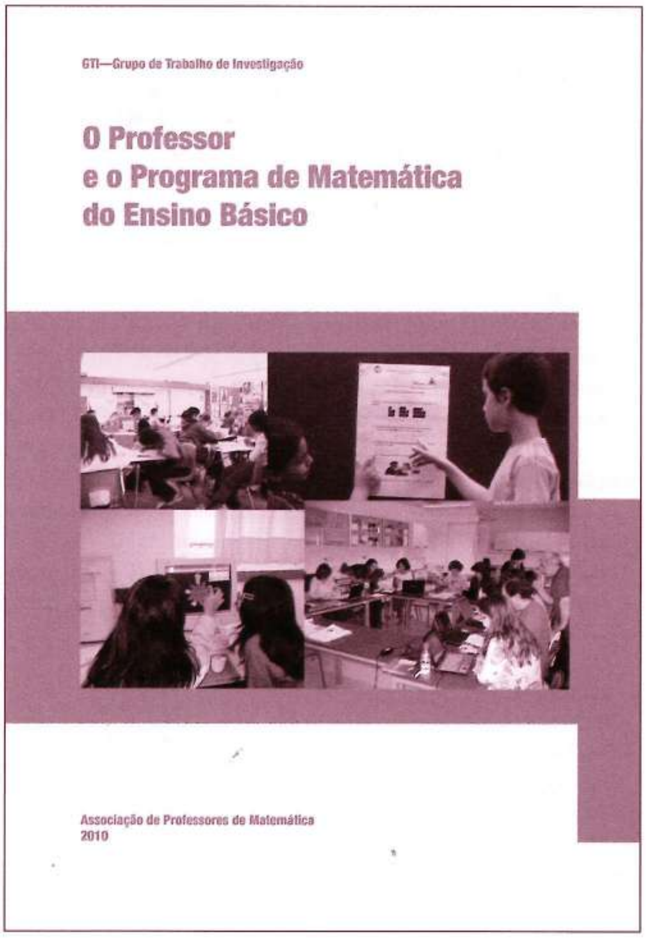
O XXI SIEM decorreu nos dias 4 e 5 de Setembro de 2010, na Universidade de Aveiro. Esta iniciativa contou com a participação de 146 professores e investigadores de 4 nacionalidades, 60 dos quais estiveram envolvidos na apresentação de comunicações, posters e/ou outras actividades.

O Espaço GTI foi dedicado ao lançamento do último livro do Grupo de trabalho de Investigação, *O professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (GTI, 2010). Este espaço foi dinamizado pela actual coordenadora do GTI, Cláudia Canha Nunes, e contou com a participação das colegas Sandra Nobre e Anabela Gaio.

Grupo de estudos O professor como investigador

Este livro, representa o trabalho do 4.° ciclo de estudos do grupo *O professor como investigador*, inclui uma colecção de experiências realizadas por professores e formadores dos diferentes níveis de ensino (do 1.° ciclo do ensino básico ao ensino superior). Mais importante do que cada experiência em si mesma é perceber de que forma ela pode contribuir em termos do conhecimento para a profissão, e que mais valia traz para a vida das escolas, em particular para o grupo de professores de Matemática. Ao divulgar estas experiências, procuramos contribuir para uma melhor compreensão das questões associadas às mudanças curriculares preconizadas pelo PMEB, nomeadamente como interpretar e concretizar na prática as indicações desse programa, como delinear e percorrer os percursos necessários, como caracterizar os papéis que o professor pode assumir e como conceber estratégias para concretizar ao longo do ano uma grande variedade de objectivos curriculares.

As experiências que aqui reunimos mostram que é possível concretizar as inovações introduzidas pelo PMEB, mudar práticas profissionais e gerar dinâmicas que, se efectivamente concretizadas, contribuirão certamente para uma mudança de grande alcance no ensino da Matemática em Portugal. Todo este processo passa pela capacidade de todos os que estão directa e indirectamente envolvidos no processo de ensino-aprendizagem, se mobilizarem e liderarem dinâmicas de trabalho colaborativo centradas no desenvolvimento curricular visando um ensino de qualidade e o sucesso da aprendizagem dos nossos alunos em Matemática.



No conjunto dos dez textos incluídos no livro, sete narram experiências vividas pelos autores na gestão, concretização e desenvolvimento de tópicos do PMEB com alunos, sendo os outros três de natureza mais geral. Destes três textos, um centra-se na análise da oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico que representa o PMEB, outro discute o conceito de trajectória de aprendizagem, as suas componentes e o seu possível contributo para um ensino da Matemática com compreensão, e um terceiro foca o conhecimento profissional do professor de Matemática e a gestão e as práticas do professor no desenvolvimento curricular.

O trabalho deste livro tem por base o conhecimento desenvolvido pelo grupo na última década. Assim, está presente o produto do primeiro ciclo de trabalho desenvolvido pelo grupo, do qual resultou a publicação do livro *Reflectir e Investigar sobre a Prática profissional*, publicado pela APM em 2002, e que incluía uma colectânea de textos que testemunham experiências profissionais dos elementos do grupo enquanto investigam a sua prática profissional para melhor compreender as suas acções e as suas necessidades, e em consequência, melhorá-las.

Igualmente presente está o produto do segundo ciclo de trabalho que deu origem à publicação do livro *O Professor e o Desenvolvimento Curricular*, também publicado pela APM em 2005, que inclui um conjunto de textos que, de algum modo, mostram que as questões do desenvolvimento curricular são particularmente difíceis e que a gestão do currículo torna-se cada vez mais complexa, dado que o professor hoje trabalha com alunos provenientes de múltiplas culturas. No entanto, é possível perceber, no colectivo de artigos, que estas questões são possíveis de equacionar quando estão envolvidos os diferentes actores do processo educativo e nele participam activamente. O livro apresenta experiências vividas pelos autores dos textos centradas na gestão, concretização e desenvolvimento do currículo, procurando dar contributos para uma melhor compreensão das questões curriculares. Em particular, debruça-se sobre o papel das tarefas e das diferentes estratégias de realização do currículo de Matemática, mas também sobre o desenvolvimento curricular.

Igualmente presente está o trabalho desenvolvido no terceiro ciclo do grupo, cujo foco é o professor que investiga a sua prática no âmbito de projectos de escola e que deu origem à publicação do livro *O Professor de Matemática e os Projectos de Escola*, em 2008 pela APM. O livro inclui uma colecção de experiências realizadas por professores e formadores dos diferentes níveis de ensino. Em particular, procurámos contribuir para uma melhor compreensão das questões associadas às dinâmicas do trabalho desenvolvido no seio de projectos de escola, os percursos que são necessários percorrer e os factores que facilitam e sustentam as dinâmicas de trabalho colaborativo.

A revista Quadrante

A Revista *Quadrante* está especialmente vocacionada para estimular o intercâmbio de ideias e experiências, divulgando trabalhos relacionados com a investigação em ensino e aprendizagem da Matemática. Pretende contribuir para debates entre pluralidade de linhas de pensamento que atravessam a educação matemática. Como revista de investigação a sua coordenação é da responsabilidade da Comissão Coordenadora do Grupo de Trabalho sobre Investigação da APM e as responsabilidades de edição cabem ao Director e Conselho Editorial. Neste momento, encontra-se em fase de elaboração o segundo número de 2010 e o número temático de 2011 subordinado ao tem *Desenvolvimento curricular em Matemática*.

A colecção de teses

Com a Colecção de Teses, a APM pretende contribuir para a divulgação de trabalhos de investigação em Educação Matemática realizados ao nível de provas de mestrado e doutoramento por autores de língua portuguesa. A colecção foi iniciada em 1992 e conta presentemente com uma vasta colectânea de títulos que se encontram disponíveis na *loja virtual* e na sede da APM, publicados em livro.

O Testemunho da professora e formadora Sandra Nobre

As publicações do GTI são de fácil leitura para professores e ajudam-nos a clarificar determinados conceitos. São importantes recursos para a ampliação do conhecimento profissional e ajudam os professores a reflectir sobre a sua prática.

No ano lectivo 2009/2010 iniciei funções de professora acompanhante do Plano da Matemática II e do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Nas sessões promovidas nos diferentes grupos de trabalho houve sempre um espaço para partilha de experiências, eram feitas sugestões de leitura e analisados alguns textos, na maior parte das vezes a propósito do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. As escolas que estavam a implementar o novo programa eram um número reduzido. Ao longo do ano lectivo verifiquei um crescente interesse por parte dos professores em perceber como eram feitas as abordagens aos diferentes tópicos e nos diferentes ciclos de ensino. Os professores demonstraram bastante curiosidade acerca da forma como estava a decorrer a implementação, como é que os alunos encaravam a nova metodologia de trabalho e o modo como decorria a realização das tarefas nas suas diferentes fases.

Este livro pode vir saciar essa curiosidade dos professores. Estou convicta que é um excelente recurso para o acompanhamento dos professores, nesta fase de generalização do programa, uma vez que exemplifica experiências em diferentes tópicos e em diferentes ciclos de ensino.

O factos deste e de outros livros do GTI promoverem a reflexão dos professores sobre as suas práticas é um factor decisivo para a mudança e consequente melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Cláudia Canha Nunes
Escola EB 2/3 Fernando Pessoa, Lisboa

Sandra Nobre
Escola EB 2/3 Professor Paula Nogueira, Olhão

Uma boa notícia

O facto de, pela primeira vez na história dos estudos internacionais de avaliação dos conhecimentos específicos e competências dos alunos em três domínios fundamentais (leitura, matemática e ciências), Portugal se situar na média dos países da OCDE é, para mim, uma boa notícia com certeza partilhada por muitos de vós. Mas porque não tenho sentido a partilha e divulgação desse sentimento entre nós e com os outros (comunicação social, ...)?

E não será a secção da nossa revista «Pontos de vista, reacções e ideias ...», um bom espaço para essa partilha? Assim, aqui está a minha reacção ao estudo PISA 2009 a partir dos dados que constam da página do GAVE, sem poder deixar de olhar para trás e de ficar muito atenta ao futuro.

Em 2004, aquando da divulgação dos resultados do estudo PISA 2003, muitos dos títulos da imprensa eram devastadores essencialmente para os alunos, para as escolas e para nós, professores. Recordei-me de alguns: «Alunos portugueses são dos piores na matemática» (*Público*, ultima hora, 07-12-2004); Alunos portugueses muito abaixo da média da OCDE em matemática (*Agência Lusa*, 06-12-2004); Matemática – uma docência calamitosa (*Jornal de Letras*, 2005, n.º 897)».

Também lembro que a direcção da APM foi muito solicitada, questionada pela comunicação social sobre os porquês destes resultados e, sem nunca excluir os professores e o funcionamento das escolas da sua parte de responsabilidade, destacou sempre outros factores e apontou factos que podiam justificar a ausência de melhorias entre o estudo PISA 2000 e o estudo PISA 2003, nomeadamente ao *Jornal de Letras*, 2005, n.º 899 onde é referida a ausência de políticas, projectos de intervenção que fossem ao encontro de «propostas apresentadas em estudos nacionais produzidos em anos anteriores como o *Diagnóstico e propostas para a Matemática escolar* produzido em 1997 por um grupo de trabalho a solicitação do próprio *Ministério da Educação e a Matemática 2001 – Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*, de 1998 e da responsabilidade da APM, que identificavam os problemas e propunham soluções». Estudos que não se limitaram a analisar apenas o binómio professor/aluno, mas tiveram também em conta os currículos e as organizações e comunidades escolares. Desses estudos, é ainda destacado no referido artigo «o reconhecimento da necessidade de um investimento nos professores de Matemática (incluindo os do 1.º ciclo) com apresentação de propostas concretas para a formação inicial e contínua». Noutro artigo do jornal *Público* de 8 de Fevereiro de 2005 também são identificados, pela direcção da APM mais dois problemas relativamente aos quais, nos últimos anos, foram procuradas e testadas respostas «o problema da selecção e colocação dos professores em que todos os anos mais de 50 mil candidatos mudam de escola é outro dos pontos críticos do sistema» bem como o funcionamento do sistema de apoios educativos que «não têm funcionado, faltando proporcionar uma maior articulação entre quem dá apoio e o professor da turma, alargando a coadjuvação do ensino no 1.º ciclo».

Foi com este *flashback* que eu mais desfrutei dos indicadores do estudo como o de que «em matemática, entre 2003 e 2009, diminui 7,5 pontos a percentagem de alunos com desempenhos de nível 1 e inferior a 1 e aumenta 8,4 pontos a percentagem de alunos com desempenhos de nível 3, 4, 5 e 6» e com a mensagem do secretário geral da OCDE (página do GAVE), que destaca, entre outros aspectos, que «a qualidade de um sistema educativo nunca é superior à qualidade dos seus professores e dos seus directores escolares. Os bons sistemas educativos têm de dar atenção a todos os aspectos do recrutamento de profissionais. Portugal melhorou significativamente a formação de professores».

E porque o aspecto essencial do PISA é o de assentar numa avaliação que incide nas competências que evidenciem o que os jovens de 15 anos sabem, valorizam e são capazes de fazer em contextos pessoais, sociais e globais, só podemos estar todos orgulhosos: professores, alunos, escolas, formadores de professores, responsáveis pelos estudos que apontam soluções, os decisores e responsáveis pelas medidas de intervenção dos últimos anos e a APM, como Associação independente, pela persistência na tomada de decisões estratégicas sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

M. Isabel Rocha
ESECS/Instituto Politécnico de Leiria

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

Conexões matemáticas e tecnologias

Introdução

Os três artigos que se seguem, que são apresentados mais pormenorizadamente no início de cada um deles, ilustram um conjunto de ideias que passo a resumir:

- As tecnologias podem servir diferentes objectivos de aprendizagem, em qualquer ano de escolaridade, quando devidamente integradas curricularmente;
- As tecnologias podem <entrar> na sala de aula com objectivos específicos de modelação ou de análise de variação, com alunos mais velhos, ou serem ferramentas ao serviço da organização, tratamento e divulgação de informação, valorizando uma história que envolve alunos dos primeiros anos de escolaridade;
- Nas descrições das experiências estão presentes o entusiasmo dos alunos pela descoberta e novas ideias que emergem das diferentes representações proporcionadas pela tecnologia, que surpreendem o professor;
- O papel do professor é decisivo para desenvolver processos de comunicação e de interacção estimulantes na sala de aula que desenvolvam o raciocínio, alimentar os desafios em cada momento para não os <deixar morrer> e estabelecer <pontes> entre a tecnologia e o currículo.

A Elisabete Mariano, o João Grácio e a Sandra Nobre, em conjunto com os seus alunos, fornecem evidência sobre estes e outros aspectos, que pretendemos que constitua material de reflexão, quer para o leitor, quer para eles próprios, enquanto autores de uma narrativa vivida, que representa mais um elemento de desenvolvimento pessoal e profissional.

José Duarte

As representações da tecnologia na modelação e na análise da variação

Apresentação

Este artigo, da responsabilidade da Elisabete Mariano, professora do 3° ciclo da EB 2,3 de Aranguez, em Setúbal, incide sobre uma experiência realizada numa sala de aula do 7° ano de escolaridade, em 2009–2010, num trabalho sobre variáveis, funções e equações. Os alunos são envolvidos numa situação de modelação matemática em torno de um tarefa aberta para a qual se mobilizam várias representações da folha de cálculo e a tradução de umas nas outras, permitindo estabelecer conexões entre diferentes domínios da Matemática, como as equações e as funções.

Descrição da experiência

A experiência de resolução do problema que será descrita neste artigo, ocorreu em turmas de 7.° ano integradas no Plano da Matemática II. O ponto de partida foi a exploração de diferentes relações numéricas recorrendo a *applets* e à folha de cálculo (FC).

Com as tarefas que começaram por ser propostas, o recurso à FC foi uma constante: primeiro, a escrita da sequência de números naturais (*Em A1 escrevia-se 1 e os alunos rapidamente diziam que em A2 se devia escrever «=A1+1», mesmo aqueles que revelavam mais dificuldades*); segundo, a escrita de outras sequências que dependiam da primeira; terceiro, a representação gráfica dessas sequências. Neste momento, os alunos estavam perante três representações distintas de uma sequência sem que fosse essencial dominar bem a FC. Tantas ideias matemáticas que aqui estavam relacionadas: noção de variável e o seu tipo (independente e dependente), escrita de expressões algébricas e identificação de expressões equivalentes, representações em tabela e gráfica, noção de referencial cartesiano, representação de pontos no plano, indicação das suas coordenadas, interpretação gráfica e a relação entre as diferentes representações ... e mais tarde, dando continuidade a este trabalho, o estudo das situações de proporcionalidade directa, a comparação de diferentes funções e até a resolução de equações.

Foi preparada uma ficha de trabalho com o enunciado de um problema e questões orientadas para a sua resolução: «O Miguel tem 8 € na sua mão e o resto do seu dinheiro na carteira. O Rodrigo tem exactamente 3 vezes mais dinheiro do que o Miguel tem na sua carteira. O que se pode dizer da quantidade de dinheiro que o Miguel e o Rodrigo têm?»

Num primeiro momento, constatou-se que a generalidade dos alunos é capaz de interpretar o que se sabe e o que não se sabe, utilizando a linguagem natural e fazendo representações icónicas da situação (Figura 1).

Foi efectuado o registo no quadro. Quase em uníssono, os alunos representaram a quantia existente na carteira do Miguel por uma letra, que diziam ser a variável (alguns ainda se confundem e referem *incógnita*) e ditaram a expressão algébrica que representava a quantia total do Rodrigo. *Mas afinal sabem quanto dinheiro tem o Miguel?* — questionei. Ao que responderam atribuindo diferentes valores (não nulos) à variável já definida com o registo no quadro (Figura 2).

A partir daqui, definiu-se que na nossa tabela, iríamos trabalhar com a sequência de valores iniciados em zero. Identificaram-se as variáveis independente e dependentes no contexto do problema e a sua representação em cada um dos eixos cartesianos. Em seguida, a turma prosseguiu com o trabalho autónomo, auxiliado pela professora apenas quando solicitado.

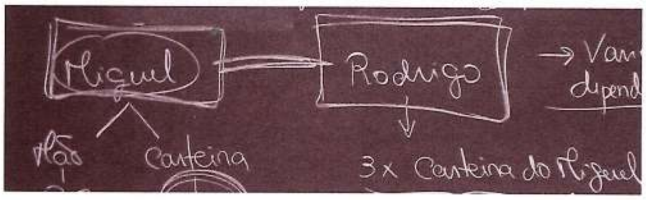


Figura 1

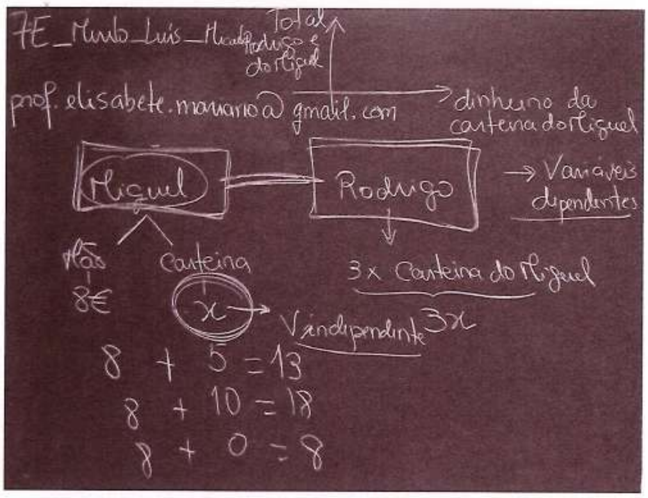


Figura 2

Verificou-se que, mediante um problema aberto, considerando a diversidade de respostas e no sentido de ser possível uma visão abrangente da situação em estudo, houve necessidade de organizar os dados utilizando a FC (Figura 3). Sem este recurso, seria bem mais difícil ajudar os alunos a aperceberem-se dos diferentes cenários da situação, uma vez que esta ferramenta permite, por alteração dos valores numa célula, observar as implicações noutras células na tabela e nos gráficos (Figura 4). Deste modo, acrescenta-se outra mais-valia: estudar o comportamento das funções associadas à tabela e, a partir daqui, conjecturar sobre a importância e influência na representação gráfica dos parâmetros envolvidos (no caso das funções afins, o declive e a ordenada na origem).

Após esta experiência, tornou-se muito claro para os alunos darem resposta às diferentes questões colocadas, o que se pode constatar através de alguns exemplos de diálogos:

Professora (P): Com base na observação do gráfico e da tabela, quem gostarias de ser? O Miguel ou o Rodrigo? Explica a razão da tua opção.

Aluno 1 (A1): O Rodrigo, porque quando o Miguel tem 4 euros na carteira o Rodrigo, a partir daí, fica sempre com mais dinheiro que o Miguel.

A2: Queria ser o Rodrigo porque ele no total fica sempre com mais dinheiro que o Miguel, excepto quando tem 4 euros ou menos.

A3: O Rodrigo, porque ele consegue atingir uma quantia mais elevada de dinheiro, enquanto o Miguel só consegue ter 1 euro de cada vez, o Rodrigo consegue 3 euros de cada vez, ou seja o triplo, logo tem uma quantia maior, e mais depressa.

A4: O Rodrigo talvez seja a melhor escolha visto que, se o Miguel tiver 10 € na carteira; o Rodrigo tem 30 €, mas o Miguel também não seria má escolha, porque até certa altura tem mais dinheiro que o Rodrigo.

Carteira	Mão	Miguel	Rodrigo
0	8	8	0
1	8	9	3
2	8	10	6
3	8	11	9
4	8	12	12
5	8	13	15
6	8	14	18
7	8	15	21
8	8	16	24
9	8	17	27
10	8	18	30

Figura 3

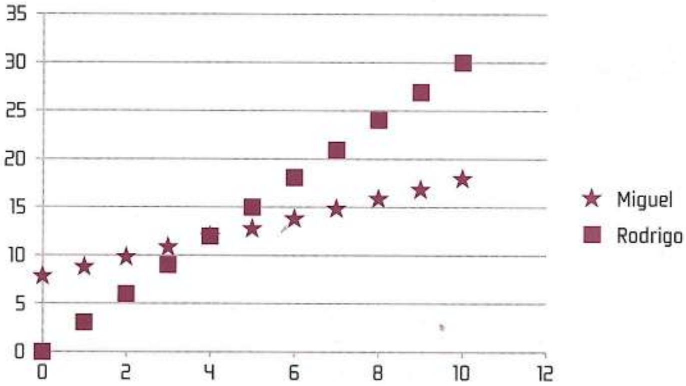


Figura 4

4 + 8 = 12 ⟶ 4 x 3 = 12

8	8	11	9
4	8	12	12
5	8	13	15

Figura 5

Foi lançada outra questão: *Por observação da tabela e do gráfico, quando é que os dois amigos têm a mesma quantia?*

A1: Por observação da tabela e do gráfico, os dois amigos têm a mesma quantia, quando o Miguel tem quatro euros na carteira e o Rodrigo tem o triplo, pois a soma dos quatro euros da carteira do Miguel com o dinheiro que ele tem na mão, que são oito euros, é igual ao dinheiro do Rodrigo, pois, o triplo de quatro é doze, assim como a soma de quatro com oito é doze:

A2: Quando o Miguel tem 4 euros na carteira, porque observando o gráfico é quando as duas linhas se cruzam, ou seja, quando o dinheiro dos dois rapazes se encontram, têm a mesma quantidade.

P: Traduz esta situação por uma equação. Resolve-a e verifica a solução, comparando-a com os valores da tabela e com os do gráfico.

Os alunos escrevem a equação $x + 8 = 3x$, concluindo que a solução da equação corresponde à solução já encontrada por observação da tabela e do gráfico.

Muitas outras características das funções podiam ser estudadas com este problema: o crescimento das funções, a inclinação das rectas associado ao declive, a ordenada na origem e a sua representação gráfica ou a função de proporcionalidade directa.

Sendo esta tarefa aberta, ela permite a exploração de diferentes caminhos e o estabelecimento de várias conexões, que dependem das questões que o professor coloca, o que é ainda potenciado pela utilização da FC na modelação da situação e através do uso e articulação entre as diferentes representações.

Elisabete Mariano
EB 2,3 de Aranguez

Aprender por projectos: a tecnologia ao serviço da comunicação e das conexões

Apresentação

João Grácio, professor do 1º ciclo (3.º e 4.º anos de escolaridade) na EB1/JI do Afonsoeiro, no Montijo, descreve no artigo seguinte um projecto que se iniciou na construção de uma história colectiva partilhada e que evoluiu para a construção de um instrumento de recolha de dados de avaliação do trabalho, seguida de organização, análise e interpretação dos resultados obtidos, utilizando diversas tecnologias (processador de texto, programa de produção de filmes, questionários *on-line* e folha de cálculo).

Os alunos, após a construção de uma história colectiva, são envolvidos pelo professor num processo de comunicação e negociação como vista a definir a melhor forma de a partilhar, divulgar e avaliar. A tecnologia, numa primeira fase, serve os processos de escrita e de comunicação e, numa segunda fase, apoia a construção partilhada de um questionário (*on-line*) e de recolha, organização e tratamento de dados, tendo como suporte a folha de cálculo e as suas diferentes representações numéricas e gráficas.

Na discussão que o professor conduz estão presentes importantes aspectos que passam pela identificação das variáveis em jogo, a contagem que conduz à construção de tabelas de frequências nas diferentes categorias identificadas, a escolha dos gráficos apropriados, a discussão das escalas dos eixos e o sentido crítico na discussão do processo e na interpretação dos resultados.

Descrição da experiência

Quando no início do ano lancei a ideia da construção de um livro realizado pela turma, nem sabia no que me estava a meter. O que é certo é que o livro cresceu, capítulo a capítulo, com a contribuição de todos os alunos e só parou quando chegámos ao 19.º.

E que tal editarmos o livro? Era giro, podíamos mandar para uma editora? Claro que eu sabia que era demasiado. Mas o livro ficaria dentro das quatro paredes da sala? Não, era necessário divulgá-lo.

Em meados de Maio, surgiu a possibilidade de realizarmos a hora do conto com a Turma 5A1, no âmbito da semana da cultura, promovida pela escola. Foi a oportunidade perfeita para colocar em marcha um plano. *Será que vamos só apresentar a história ou podemos fazer algo mais com ela?* Disse eu um dia. *Mas o que podemos fazer? Apresentamos um filme. Eles vão gostar de certeza* – disseram alguns alunos. *Será que gostam mesmo? Se calhar era importante saber até que ponto eles gostam da história, se está bem escrita, se não há alterações a fazer – disse eu. E como é que podemos fazer isso?* – perguntaram alguns. *Em primeiro lugar, poderíamos construir uns formulários usando o Google Docs*[1]*. Cada grupo apresentava uma série de questões para colocar à turma 5A1 e depois em conjunto, faríamos um único* – expliquei eu, não sabendo ainda muito bem como poderia isso ser feito. *Sim mas e depois, como vamos saber as respostas que os colegas vão dar?* Depois de pensar, introduzi a actividade: *Isso é simples, depois trabalhamos esses dados e construímos gráficos com o Excel. Vocês sabem ler os gráficos mas está na altura de vermos como eles se constroem. Ficaremos a saber a quantidade de respostas dadas, quantos grupos responderam acertadamente* *a cada pergunta e podemos fazer uma análise das respostas dadas para ver o que acham da nossa história.*

Depois de apresentarmos a história aos colegas, estava na hora da verdade. Será que tinham gostado? Que críticas nos iriam fazer?

Começou então o trabalho dos vários grupos. *Como vamos agora saber as respostas de cada grupo? Como os agrupamos? Temos de contar as respostas?*

A primeira parte do trabalho é verem as respostas que cada grupo deu, sabendo que responderam ao nosso questionário 11 grupos. Terão de analisar pergunta a pergunta, resposta a resposta, saber quantas pessoas deram cada resposta e irem contabilizando no documento que vos dei. Este documento servia para organizar as categorias de dados a incluir no gráfico e para efectuar as contagens em cada uma delas. As categorias iriam ser colocadas no eixo do *xx'* e as quantidades, no eixo vertical, representadas por barras. No caso da opção por gráficos circulares, cada categoria iria representar uma das fatias.

Só depois de terem todo esse tratamento realizado é que poderão começar a construir os gráficos. Os gráficos precisam de dados e sem esses dados, não poderemos construí-los.

Depois de organizados os dados, avançaram para a construção de gráficos. No Excel, construíram, com os dados obtidos, gráficos relativamente a cada questão, explorando assim os vários tipos que o programa possibilita e visualizando os vários tipos de representação dos dados que obtiveram. Chegaram então as dúvidas:

A: Professor, temos aqui vários grupos que não respondem. Então, temos de criar mais uma categoria «Não responde» não é?

P: Então, se vocês têm a necessidade de criar uma categoria «Não responde», o que é que isso nos diz? Será que foi por falta de tempo ou porque não entenderam alguns detalhes da história e isso está relacionado com a qualidade do trabalho feito pela turma? Temos de reflectir sobre isso. Isso são indicadores que nos poderão ser úteis para compreender se aquilo que apresentámos estava correcto ou não.

A: Professor, nós também temos alguns grupos que não responderam...

Figura 1

A: Professor, nós temos aqui 11 respostas e quando fazemos os gráficos, o eixo do *yy* (valores) tem mais do que era necessário. Como fazemos?

P: Em relação a essa pergunta, nós só temos necessidade de colocar os valores que realmente nos interessam. Se o número máximo de respostas que temos são 5, não faz sentido ter um eixo dos *yy'* com 20, porque pode dificultar a leitura.

A: Outra coisa, professor. Porque é que naquela linha está 0, 0,5, 1, 1,5...?

P: Porque o próprio gráfico escolhe logo aqueles valores que coloca naquele eixo, mas depois dá para alterar. Podíamos ter só 1, 2, 3, 4. Nós temos que adaptar aquela linha aos valores que nós temos. O *Excel* constrói a escala do eixo de acordo com os dados que lá colocamos. Neste caso o valor máximo é 5 e ele depois divide o espaço e neste caso deu de meio em meio. Os próprios valores que tu queres representar podem não ser inteiros, podes querer representar 4,5 e nesse caso é bom ter uma escala deste tipo. Mas no nosso caso, como são contagens de números inteiros, não é necessária uma escala destas.

A: Professor, criámos um gráfico em 3D, mas nós temos um valor de 8 e quando fazemos o gráfico, aparece representado 7. O que fazemos? Tem a ver com a forma como nós estamos a fazer a representação?

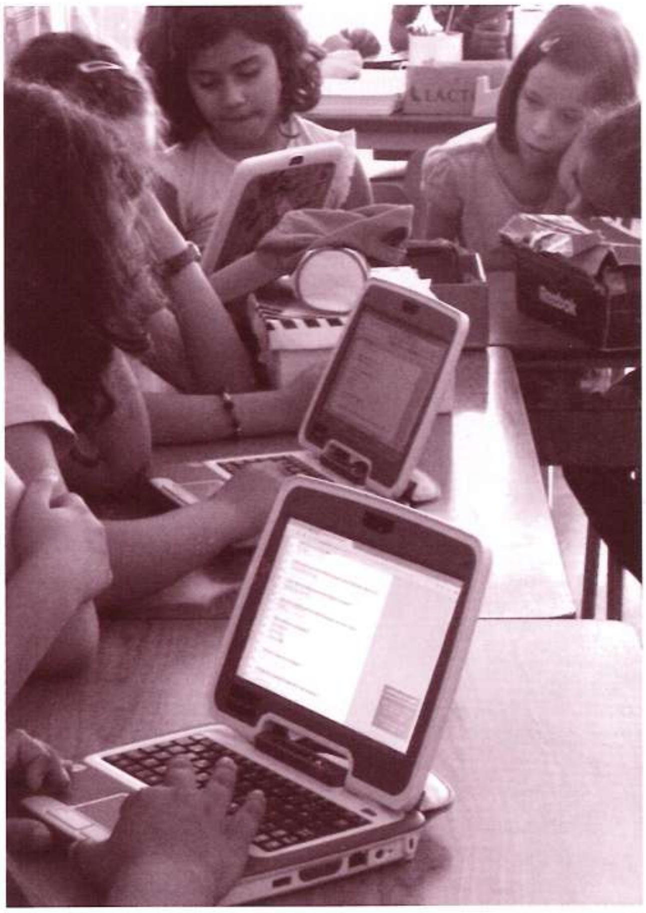


Figura 2

P: Estiveram a experimentar os diferentes tipos de gráficos? Deixem-me ver para vos responder a essa pergunta… É verdade, a leitura pode ser enganadora. Se calhar, esse tipo de gráfico não é o mais adequado para aquilo que estamos a tentar desenvolver.

Havia algumas perguntas onde as categorias estavam já definidas «Como se chama a história», outras onde se poderia responder a mais do que uma opção, fazendo com que houvesse mais do que 11 respostas e outras perguntas de resposta aberta «Qual é o teu animal favorito?», onde as categorias foram decididas a partir das respostas. Isso levou a alguns comentários por parte dos alunos que não compreendiam qual o motivo porque alguns grupos tinham mais de 11 respostas.

P: É normal isso acontecer. Não se esqueçam que estamos a tratar respostas diferentes. Todos estamos a tentar encontrar os dados mas eles são encontrados de modos diferentes, dependendo da pergunta que estamos a trabalhar.

A: Professor, há grupos que estão a apresentar os trabalhos mas estão a colocar 100% nos gráficos. Se já reparámos que há mais de 11 respostas, como é que sabemos quantas respostas são o 100%? Não seria melhor colocar os valores?

P: Se é 100% significa que todos os grupos deram a resposta, mas olhando só para aí também não sei quantos grupos deram a resposta. Nós sabemos que foram 11 porque nós fizemos o trabalho, mas quem for ler os gráficos não sabe quantas respostas há. No documento para apresentação dos resultados devemos começar por fazer uma introdução, onde podemos dizer o número de grupos que responderam.

Fez-se então nova apresentação dos mesmos e desta vez, quase todos os grupos fizeram a interpretação dos dados obtidos.

Em resumo, ao mesmo tempo que analisaram a sua apresentação de língua portuguesa, aprenderam a construir e compreender os gráficos como sistematização dos resultados de pesquisas. Este trabalho surgiu da necessidade de perceber o que os colegas pensavam da história que eles tinham construído e conduziu-os à necessidade de interpretação dos dados dos questionários e à construção e interpretação dos respectivos gráficos. Por outro lado, visualizaram o comportamento das grandezas envolvidas de uma maneira fácil e rápida, utilizando um sistema de eixos cartesianos, com dois eixos perpendiculares entre si, com um ponto de intersecção (origem). Finalmente, trataram as escalas nos eixos que, sem esta actividade, nunca teriam sido focadas e as variações de categorias, uma vez que existiam perguntas de vários tipos. E tudo isto a partir de uma história construída, adaptada e apresentada pelos alunos da turma 6A1, da EB1/JI do Afonsoeiro, do 3.º e 4.º anos de escolaridade.

Nota

(1) Uma ferramenta que permite criar e partilhar ficheiros, nomeadamente formulários *on-line* (ver Revista EM anterior).

João Grácio
EB1/JI do Afonseiro, Montijo

Para além dos números: tecnologia, relações e modelação

Apresentação

O último artigo que apresento é da responsabilidade da Sandra Nobre, professora do 3º ciclo da EB 2,3 Paula Nogueira, de Olhão e descreve uma experiência de modelação de uma situação da realidade, na sequência de uma tarefa de resolução de problemas proposta a alunos do 8º ano, no âmbito do Estudo Acompanhado.

Os alunos, com alguma experiência anterior no uso da folha de cálculo, optam pelo uso desta ferramenta por facilitar o processo de modelação e mostrar as relações entre os números e os passos e modelos intermédios que intervêm na resolução do problema que envolve os conceitos de fracção, múltiplo, variáveis e expressões com variáveis.

A descrição da resolução de uma aluna mostra a importância da identificação das variáveis e das duas condições do problema e a sua tradução que é facilitada pelas relações numéricas e algébricas que estão presentes no trabalho com a folha de cálculo e que permite validar a equivalência de expressões e determinar experimentalmente soluções de equações.

Descrição da experiência

A inauguração do restaurante «Sombrero Style»[1]. *O Restaurante Sombrero Style foi ontem inaugurado e eu estive lá a jantar com três amigos. A capacidade máxima de clientes – disse o gerente – é de 100 pessoas. Por sorte tinha reservado uma mesa para 4, pois quando cheguei já estavam várias mesas completas com quatro pessoas e uma mesa com apenas três pessoas. Enquanto esperava pelo empregado para nos levar à mesa, contei as mulheres e os homens que estavam no restaurante e o número de mulheres era exactamente igual ao dobro do número de homens.*

Qual poderia ser o máximo número de pessoas que já estavam no restaurante quando eu entrei?

Este problema foi proposto, a alunos do 8º ano, numa aula de Estudo Acompanhado. Perante o enunciado, os alunos manifestaram algumas dificuldades logo na sua compreensão, nomeadamente em entender qual era o número máximo de pessoas no restaurante antes do grupo de 4 pessoas entrar. Ultrapassada esta dificuldade, surgiram outros obstáculos que se relacionam com o facto de ser pedido um número máximo, bem como o cumprimento simultâneo da condição que diz respeito à distribuição das pessoas por mesas de 4 e de 3 e a outra que se refere à divisão dos clientes por sexo. Talvez por estes alunos já terem realizado experiências com a folha de cálculo e conhecerem algumas das suas potencialidades, grande parte recorreu ao Excel, para a resolução do problema, em detrimento de outros processos.

Na produção de uma aluna (Figura 1), com o Excel, podemos observar a organização das duas condições de forma isolada.

TOTAL	Homens	Mulheres	Mesas 4	Mesas 3	Total
98	32,66667	65,33333	4	3	7
97	32,33333	64,66667	8	3	11
96	32	64	12	3	15
95	31,66667	63,33333	16	3	19
94	31,33333	62,66667	20	3	23
93	31	62	24	3	27
92	30,66667	61,33333	28	3	31
91	30,33333	60,66667	32	3	35
90	30	60	36	3	39
89	29,66667	59,33333	40	3	43
88	29,33333	58,66667	44	3	47
87	29	58	48	3	51
86	28,66667	57,33333	52	3	55
85	28,33333	56,66667	56	3	59
84	28	56	60	3	63
83	27,66667	55,33333	64	3	67
82	27,33333	54,66667	68	3	71
81	27	54	72	3	75
80	26,66667	53,33333	76	3	79
79	26,33333	52,66667	80	3	83
78	26	52	84	3	87
77	25,66667	51,33333	88	3	91
76	25,33333	50,66667	92	3	95
75	25	50	96	3	99
74	24,66667	49,33333			

Figura 1

Mesas 4	Total Pessoas	Mult. de 3?	Total aceite	Homens	Mulheres
1	7	NÃO	0	0	0
2	11	NÃO	0	0	0
3	15	SIM	15	5	10
4	19	NÃO	0	0	0
5	23	NÃO	0	0	0
6	27	SIM	27	9	18
7	31	NÃO	0	0	0
8	35	NÃO	0	0	0
9	39	SIM	39	13	26
10	43	NÃO	0	0	0
11	47	NÃO	0	0	0
12	51	SIM	51	17	34
13	55	NÃO	0	0	0
14	59	NÃO	0	0	0
15	63	SIM	63	21	42
16	67	NÃO	0	0	0
17	71	NÃO	0	0	0
18	75	SIM	75	25	50
19	79	NÃO	0	0	0
20	83	NÃO	0	0	0
21	87	SIM	87	29	58
22	91	NÃO	0	0	0
23	95	NÃO	0	0	0
24	99	SIM	99	33	66

Figura 2

Começa por apresentar o trabalho efectuado para a separação dos clientes por sexo. Na primeira coluna representa os valores inteiros do número total de pessoas no restaurante, por ordem decrescente, na segunda faz a divisão por 3, para o cálculo de um terço e na terceira calcula o dobro da anterior. Nas últimas 3 colunas é representada a outra condição do problema, ou seja, a distribuição dos clientes por mesas de 3 e 4. Os múltiplos de 4 sucessivos representam as várias mesas com 4 pessoas e, como só havia uma mesa com 3 pessoas, o número 3 repete-se na coluna relativa às mesas de 3. Comparando as duas colunas com o total é obtido o máximo de pessoas que estavam no restaurante, isto é, 87.

Na resolução do problema, a aluna recorre à noção de fracção para «separar» os clientes do restaurante por sexos, quando refere na resposta «...uma vez que o número de mulheres é exactamente o dobro do número de homens, pode-se concluir que o número está representado em 3 terços, sendo 1 terço os homens e 2 terços as mulheres ...». Utiliza também a noção de múltiplo para o número de pessoas que estão sentadas em mesas de 4. Quando recorre a fórmulas na folha de cálculo, utiliza os conceitos de variável e expressão com variável para encontrar o número de homens e de mulheres, bem como para calcular o número total de pessoas no restaurante (na última coluna).

É visível que, na resolução deste problema pela aluna, a utilização da folha de cálculo acentuou a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes e estimulou a procura de relações de dependência. Além do mais, levou a uma estratégia de resolução que permitiu tratar as duas condições envolvidas no problema de forma separada, fazendo a sua ligação através da busca de resultados iguais nas duas análises.

Outras possibilidades de exploração do problema na folha de cálculo podem ser, ainda, discutidas. Por exemplo, seguindo uma lógica funcional, pode decidir-se qual das variáveis envolvidas no problema é usada como independente. Eis uma hipótese: o número de mesas de 4 pessoas ocupadas. Neste caso, o total de pessoas é dado pelo número de mesas de 4 multiplicado por 4 e somado com 3. Depois, faz-se um teste aos totais resultantes, dado que o valor procurado tem de ser um múltiplo de 3 (1/3 de homens e 2/3 de mulheres). Obtêm-se assim as possíveis soluções para o número de homens e de mulheres no restaurante (Figura 2).

Uma análise das duas colunas leva-nos a encontrar as expressões: e, para o número de homens e o número de mulheres, respectivamente. Portanto, o total de pessoas do restaurante pode ser descrito pela expressão . Em termos de representação algébrica simbólica, esta conclusão pode ser facilmente confirmada.

Designando por k o número de mesas de 4 pessoas ocupadas e por h o número de homens no restaurante, chegamos à equação. Portanto, k tem de ser um múltiplo de 3. De facto, se o total de pessoas no restaurante é também um múltiplo de 3 e se há 3 pessoas numa mesa e as restantes estão todas em grupos de 4,

Número de mesa de 4 = k										k é da forma 3n			
k tem de ser maior que 1 e menor que 25													
Número de homens = h										h é da forma 4n+1			
h tem de ser maior que 1 menor que 34													
	k												
h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	-1	-5	-9	-13	-17	-21	-25	-29	-33	-37	-41	-45	-49
2	2	-2	-6	-10	-14	-18	-22	-26	-30	-34	-38	-42	-46
3	5	1	-3	-7	-11	-15	-19	-23	-27	-31	-35	-39	-43
4	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20	-24	-28	-32	-36	-40
5	11	7	3	-1	-5	-9	-13	-17	-21	-25	-29	-33	-37
6	14	10	6	2	-2	-6	-10	-14	-18	-22	-26	-30	-34
7	17	13	9	5	1	-3	-7	-11	-15	-19	-23	-27	-31
8	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20	-24	-28
9	23	19	15	11	7	3	-1	-5	-9	-13	-17	-21	-25
10	26	22	18	14	10	6	2	-2	-6	-10	-14	-18	-22
11	29	25	21	17	13	9	5	1	-3	-7	-11	-15	-19
12	32	28	24	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16
13	35	31	27	24	19	15	11	7	3	-1	-5	-9	-13
14	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2	-2	-6	-10
15	41	37	33	29	25	21	17	13	9	5	1	-3	-7
16	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0	-4
17	47	43	39	35	31	27	23	19	15	11	7	3	-1
18	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2

Figura 3

o número de grupos de 4 tem de ser múltiplo de 3. Por outro lado, $h-1$ tem de ser um múltiplo de 4, ou seja, o número de homens será um múltiplo de 4, mais 1. Com estas novas deduções, o Excel permite construir uma tabela de dupla entrada (Figura 3), usando as variáveis k e h, que permite fazer um teste para verificar em que situações. A exploração deste problema, com a folha de cálculo, demonstra apenas algumas das potencialidades pedagógicas que esta ferramenta possui, apesar de não ter sido concebida para fins educativos.

O recurso à folha de cálculo, na resolução de problemas, proporciona o estabelecimento de conexões entre a Aritmética e a Álgebra. Este facto vem cimentar a compreensão das relações de dependência envolvidas, bem como a forma como se conjugam.

Como é sabido, a transição da Aritmética para a Álgebra pode acarretar muitas dificuldades. No entanto, a folha de cálculo na medida em que é híbrida e coabita num mundo de alternância entre estes dois campos é uma opção didáctica para ajudar os alunos nesse trajecto.

Nota

1 Problema lançado na fase de apuramento do Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática – Sub 14, promovido pela FCT da Universidade do Algarve.

Sandra Nobre

Escola E.B. 2, 3 Professor Paula Nogueira, Olhão

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A exploração que se propõe foi inspirada numa tarefa sugerida na brochura «A experiência Matemática no Ensino Básico», Ana Maria Boavida et al., DGIDC. Num dia 11, identificado como capicua, propôs-se aos alunos que descobrissem: «Sou um número de dois algarismos. A soma dos algarismos é 9. Adicionando-me ao número que resulta escrevendo os algarismos ao contrário dá 99. Que número sou?» Dos diferentes grupos resultaram diferentes números que satisfaziam a proposta: 18 e 81, 27 e 72, 36 e 63, 45 e 54. Alguns alunos continuaram a explorar o número para descobrir se todos os números somados com o número resultante das escrita dos dígitos ao contrário resultavam em capicua. Alguns resultavam, outros nem tanto numa primeira abordagem. Combinou-se continuar a exploração num outro dia e haveria de encontrar forma de o fazer de forma organizada.

Na aula seguinte propôs-se o Truque do Tó, (Pág. 117 da referida brochura):

O truque do Tó

O Tó quis fazer um truque numérico ao Zé:
Tó: Pensa num número de dois algarismos.
Zé: Já pensei.
Tó: Troca os algarismos para obter um outro número. Já está?
Agora adiciona os dois e diz-me quanto te deu.
Zé: Deu-me 132.
Tó: E eu já sei qual foi o número em que pensaste!
Saberá o Tó em que número pensou o Zé? Procura descobrir.

Discutiram-se os resultados encontrados, percebeu-se que havia muitos números que poderiam ser solução pelo que o Tó nunca poderia adivinhar o número em que o Zé pensou, a não ser «por sorte». Combinou-se que estes números apenas resultavam em capicuas após efectuar 2 operações, pelo que eram capicuas em dois passos. Partindo desta combinação: não é necessário nenhuma operação – 0 passos; é necessário 1 operação – 1 passo; são necessárias 2 operações – 2 passos e assim sucessivamente, pode então passar-se à exploração da tabela de todos os números registando em tabela e colorindo de forma diferente os números consoante o número de passos necessários até encontrar uma capicua. O padrão encontrado foi satisfação para todo o trabalho desenvolvido com grande entusiasmo.

Helena Maria Amaral

EB1 Parque Silva Porto, Agrupamento de Escolas Quinta de Marrocos

Um padrão de capicuas

Podemos obter números capicuas partindo de um número e efectuando alguns passos.

Exemplo 1	Exemplo 2
29	67
+92	+76
121	143
	+341
	484
capicua – 1 passo	capicua – 2 passos

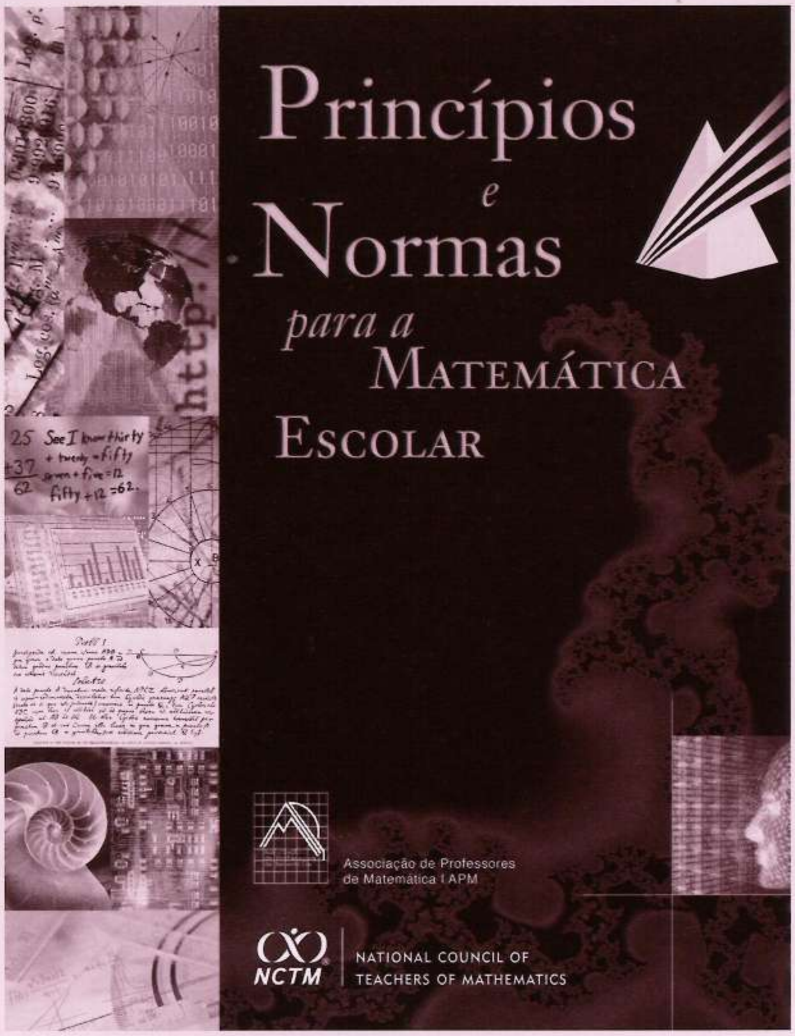
Os passos indicam o número de operações necessárias para chegar a uma capicua. Faz algumas experiências, procurando classificar os números em capicuas de 1, 2, 3, ... passos. Regista as tuas descobertas.

0 passos	1 passo	2 passos	3 passos	4 passos	5 passos	6 passos	+ de 6 passos
11	18						
22	27						
33							
44							
55							

Pinta de cores distintas os números que originam capicuas em 0 passos, 1 passo, 2 passos, 3 passos, 4 passos, 5 passos, 6 passos ou mais de 6 passos.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

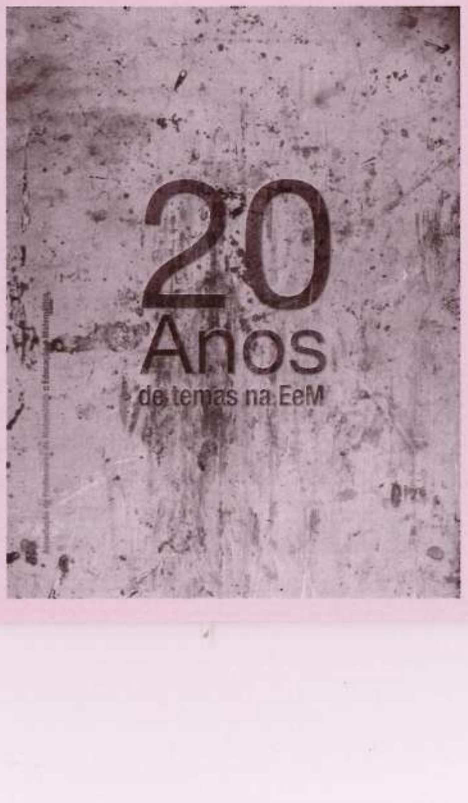
Nos casos em que sejam necessárias muitas operações podes recorrer a uma calculadora ou a uma folha de cálculo (p. e. excel) para te facilitar os registos e as operações.



Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2ª edição)

Edição APM, 2008
Sócio 18,00€ | *PVP* 27,00€

Na continuidade das orientações e propostas curriculares para o ensino da Matemática que tem vindo a elaborar nas décadas recentes, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicam os *Principles and Standards for School Mathematics*, agora editados pela APM. Os Princípios descrevem características de uma educação matemática de elevada qualidade; as Normas descrevem os conteúdos e processos matemáticos que os alunos deverão aprender. Em conjunto, os Princípios e Normas constituem uma perspectiva orientadora dos educadores que lutam pelo contínuo desenvolvimento da educação matemática nas salas de aula, escolas e sistemas educativos.



Educação e Matemática: vinte anos de temas, vinte anos de pessoas

Edição APM, 2008 | PVP: 16,50€ Sócio: 11,00€

A *Educação e Matemática* celebrou vinte anos de existência em 2007. Ao longo deste tempo, foram vários os temas que mereceram atenção na revista. Este livro reúne assim um conjunto de artigos originais que discutem e problematizam aspectos diversos da educação matemática no presente contexto educativo e curricular português, constituindo uma oportunidade para rever o passado recente e perspectivar os desafios do futuro próximo.

O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas, da autoria de Paulo Afonso

José Filipe

Pela ideia da magia provir no seio desta ciência, o sugestivo título cria uma expectativa sobre a leitura deste livro que, por certo, não decepcionará o leitor. Tenho a certeza de que este livro trás algo que ajuda o próprio leitor a descobrir conexões e a reconhecer a articulação entre conhecimentos matemáticos que lhe pareciam ser isolados, e alguns até sem significado. Mesmo para aqueles que têm como função promover a matemática, e contrariando aqui a opinião do autor, podem ver neste livro um manual de estímulo à produção de novas ideias, nomeadamente como esta ciência pode ser vista, interrogada, analisada e experimentada.

Um exemplo poderá ser a forma como vimos os números. Afinal, há os que são figurados, quais? «A sequência dos números triangulares apresenta inúmeras propriedades interessantes»(p. 71), o autor dá-nos conta, de uma forma muito simples, de como a sequência destes números se transforma rapidamente noutros que são quadrados. Neste contexto de números figurados, o autor propõe ainda para que se questione: «quais teriam de ser os dois números triangulares consecutivos cuja soma originasse, por exemplo, o oitavo número quadrado» (pág. 72). Este é apenas um exemplo de um desafio para o leitor, que poderá confirmar e comparar com a análise exposta pelo autor. Mas também é uma dica para o professor, que pode ser vista como uma orientação pedagógica que, adaptada ou alterada pode ser levada à sala de aula de quase todos os níveis de ensino.

A descoberta da magia desta ciência não se confina apenas à apresentação dos factos. O leitor é levado a questionar-se frequentemente, apropriando-se de uma atitude inquiridora sobre a dinâmica dos números. É levado a sentir a necessidade de procurar novas relações entre os números e as imagens geométricas que lhes dão significado. É também levado o querer descobrir generalizações que põem a olho nu os fenómenos que antes não eram reconhecidos. Desde a geometria do plano à espacial, triângulos e quadrados mágicos, as orientações sobre as explorações propostas levam-nos à aquisição dos mais variadíssimos conceitos matemáticos que se consideram básicos para que qualquer cidadão seja matematicamente competente.

A forma simples como é explicada com recurso a materiais, como o ponteado de um geoplano, visualiza-se a compreensão de corolários através de raciocínios indutivos que antes eram vistos como sendo fórmulas encriptadas. Apenas o exemplo do triângulo de Pascal – sendo um item habitual na exploração do cálculo combinatório no ensino secundário, grande parte dos alunos, só nesta altura, tomam pela primeira vez conhecimento deste esplendor matemático. Neste livro, interpreta-se e descobre-se as potencialidades deste triângulo mágico e como se conecta aos vários temas matemáticos, dando a possibilidade de entrar na sala de aula dos alunos do 1º ciclo até aos alunos no final do secundário.

O livro dá-nos conta de várias propostas de actividade de investigação matemática que podem ser levadas à sala de aula com o cuidado de serem acompanhadas por orientações sugeridas pelo autor, visando o estabelecimento de conexões, sejam numéricas, geométricas ou de nível operatório com outras áreas do conhecimento matemático.

Para além do pensamento geométrico a que obriga o estudo de várias actividades, todas elas dão a conhecer a beleza da matemática convencendo o leitor mais desprendido destes assuntos a descobrir regularidades e padrões que acabam, por ser, para alguns, uma forma de reencontrar a matemática.

O facto de não recorrer a conhecimentos mais refinados nesta área do saber, faz deste livro uma leitura agradável onde o gosto pela matemática vai evoluindo. Por isso, não é possível resistir à leitura sem ter por perto um lápis que nos vá dando a certeza dos factos, testando as nossas próprias conjecturas e acabando imbuídos em pensamentos de elevado nível algébrico na procura de um fim com uma generalização.

A leitura do livro consegue contagiar o leitor pelo interesse da matemática insistindo em variadíssimos desafios como sendo bons problemas para alguns ou a base de uma tarefa de investigação para outros. Esta obra é uma mais-valia ou uma referência obrigatória de apoio à actividade pedagógica do professor. Sobretudo porque ensina a desmascarar esta ciência como sendo qualquer coisa de assombroso, como aliás, ainda é vista por muitos. Aproveitando o prefácio de João Ruivo, é um livro que nos marca «porque nos ensina a ensinar… e aprendemos a aprender».

Paulo Afonso aborda de forma muito prática e concreta um assunto que é cada vez mais actual. A certeza com que o digo é a implementação, em 2010, do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico nas escolas portuguesas. Este documento dá-nos conta de uma filosofia de ensino que assenta no estabelecimento de conexões entre a Geometria, os Números e as Operações. Dentro dos objectivos gerais desta disciplina, este Programa pretende que a aprendizagem dos alunos seja valorizada numa base de aprendizagens «relacionadas com a representação, comunicação e raciocínio em Matemática, a resolução de problemas e as conexões matemáticas, e a compreensão e disposição para usar e apreciar a Matemática em contextos diversos» (PMEB, 2007).

No meu entendimento, este novo programa é muito ambicioso no sentido de que exige da parte dos alunos maturidade matemática e, da parte dos professores, uma boa gestão do currículo. A maturidade matemática advém de muitas experiências matemáticas e neste livro encontram-se algumas boas «receitas». A boa gestão do currículo só é possível com um bom conhecimento curricular e científico de forma que as conexões possam ser uma metodologia privilegiada no sentido de fortalecer as aprendizagens como sendo significativas, tendo em conta a sua aplicabilidade.

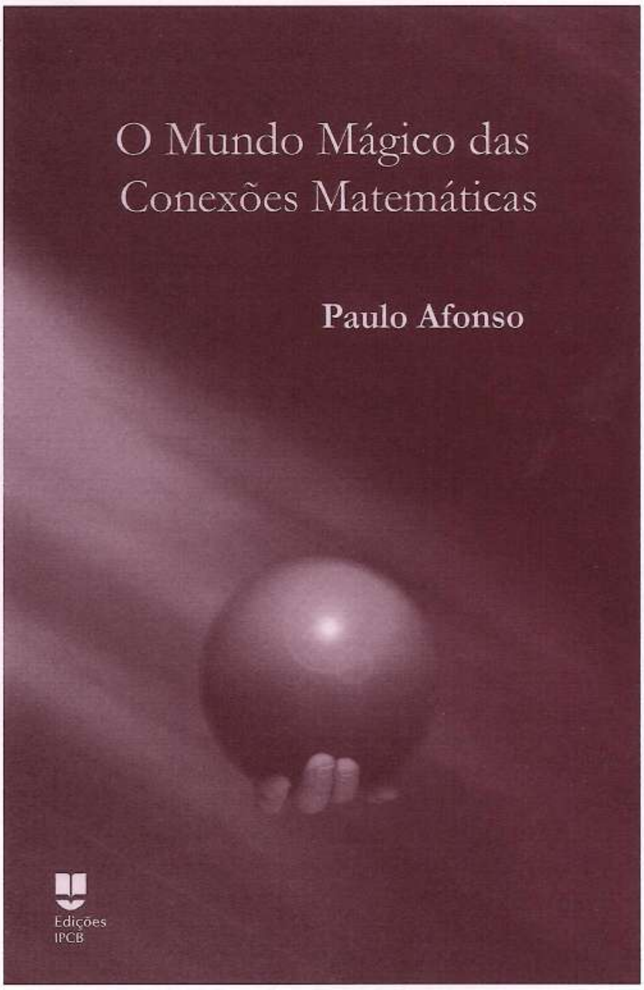
É neste sentido que «O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas» se torna numa obra singular, sobre conexões matemáticas, sendo uma ferramenta de apoio e indispensável para o desenvolvimento de boas práticas em sala de aula. Não sendo direccionada a nenhum nível de ensino, ela vale pela complementaridade científica e pela indução de novo conhecimento matemático que provoca no leitor.

O índice do livro é bem sugestivo quanto ao tipo de assuntos que são explorados nesta obra:

1. Introdução
2. Conexões matemáticas a partir do Binómio de Newton
3. Conexão algébrica e geométrica relacionando outros casos notáveis da multiplicação
4. Conexão entre a diferença de quadrados e o teorema de Pitágoras
5. Ternos pitagóricos – várias perspectivas conectadas
6. O triângulo de Pascal e sua conexão com o cálculo combinatório, com os números de Fibonacci e com outros temas matemáticos
7. Conexão entre o triângulo de Pascal, os números triangulares e os números tetraédricos
8. Conexão entre os números triangulares e outros números figurados
9. Outras conexões matemáticas envolvendo os números triangulares
10. Composição e decomposição de números através da utilização de triângulos mágicos
11. Composição e decomposição de números através da utilização de quadrados mágicos
12. As potências e sua conexão a vários temas matemáticos
13. Conexões finais
14. Bibliografia

Este livro constitui, pois, uma referência obrigatória ao nível da Educação Matemática no nosso país, enfatizando de forma simples, mas cientificamente rigorosa e abrangente, o tema das conexões matemáticas!

José Filipe
Escola Básica Pêro da Covilhã



O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas

Autor	**Paulo Afonso**
Ano	**2008**
Editora	**Edições IPCB** (Instituto Politécnico de Castelo Branco)

Na revista temática nº 110 sobre conexões foram lançados vários desafios, entre eles a discussão sobre a pedagogia do trabalho de projecto. Neste número, pretendemos continuar a problematizar o trabalho de projecto desenvolvido nas aulas de Matemática e para isso seleccionámos um artigo de Paulo Abrantes intitulado *The role of applications in a curriculum project for school mathematics*, publicado num dos livros que resultou de uma *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA 5), onde o autor descreve um conjunto de projectos desenvolvidos no âmbito do projecto Mat_{789}. Apesar de existirem vários artigos publicados em português, escritos por membros da equipa desse projecto, optámos por fazer uma tradução, pois o autor, neste artigo, para além de descrever de forma sucinta os projectos realizados, refere a sua potencialidade como um ambiente de aprendizagem para desenvolver actividades que relacionam a matemática com situações do mundo real e argumenta a favor da ideia de que o trabalho de projecto não é substituível por outro tipo de actividades «menos perturbadoras» e «mais eficientes». Desafiamos o leitor a revisitar esses projectos nas páginas das EM, as «gerações» na EM nº 9, os «campos» na EM nº 12 ou o concurso Matemática & Realidade na EM nº 23.

Trabalho de Projecto em Matemática Escolar

Paulo Abrantes

O trabalho de projecto é uma das formas possíveis de organizar experiências de aprendizagem, relacionando a matemática com a realidade. Este artigo descreve os projectos desenvolvidos por alunos de idades entre os 12 e 15 anos, no contexto de um currículo experimental, e aponta as suas principais características segundo vários pontos de vista. Por fim, sugere que o trabalho de projecto, em determinadas circunstâncias, pode dar contribuições únicas para a educação matemática dos alunos.

1. Introdução

Há boas razões para insistir que as aplicações e a modelação matemática devem ter uma presença significativa nos currículos de matemática em todos os níveis de ensino. Na literatura recente, têm sido cada vez mais elaborados e convincentes os fundamentos, argumentos e exemplos em torno deste tema (como referência principal, veja-se Niss, 1989).

As situações que relacionam a matemática com a realidade podem ser, de diversas formas, incluídas num currículo de matemática e organizadas como experiências de aprendizagem. O trabalho de projecto é uma das maneiras possíveis. De modo nenhum, a única, nem necessariamente a melhor em todos os casos. No entanto, gostaria de argumentar a favor da ideia de que o trabalho de projecto não é substituível por outro tipo de actividades «menos perturbadoras» e «mais eficientes». Este artigo pretende discutir as potencialidades do trabalho de projecto como um ambiente de aprendizagem para desenvolver actividades que relacionam a matemática com situações do mundo real. A discussão será baseada na experiência do Projecto MAT789 que vem desenvolvendo, desde 1988, um currículo experimental de matemática para alunos do 7.° ao 9.° ano (idades entre 12 e 15), envolvendo quatro turmas de duas escolas da região de Lisboa (Abrantes, 1991). A equipa do projecto MAT789 inclui o autor deste artigo e ainda Eduardo Veloso, Leonor Cunha Leal, Margarida Oliveira e Paula Teixeira. O Projecto é financiado pela Fundação Calouste Gulbenkian. As relações entre a Matemática e a realidade desempenham um papel importante neste currículo, sendo as actividades de aplicação incluídas de acordo com a «estratégia da integração» (Blum e Niss, 1991). Uma das características deste currículo é a diversidade de situações de aprendizagem. No entanto, a maioria das actividades com os alunos podem ser agrupadas em três tipos principais:

a) Sequências temáticas – questões, problemas e situações sobre um tópico ou tópicos relacionados, geralmente sob a forma de tarefas (mais ou menos) estruturadas.
b) Situações ou problemas abertos para investigar e/ou para discutir.
c) Trabalho de projecto.

Muitas actividades dos tipos (a) e (b) e *todos* os projectos eram focados em situações que relacionavam a matemática com a realidade. Isto decorreu, dos objectivos deste currículo específico, concebido para um determinado nível etário e não significa que se exclua as potencialidades do trabalho de projecto em problemas puramente matemáticos noutras situações educacionais.

Ano	Nível	Principal objectivo do Projecto	Produtos
A 88-89	7 a	Estudar a evolução do número de filhos nascidos nas três últimas gerações.	Trabalho de grupo em dados e relatórios individuais.
89-90	b		
B 88-89	7 a	Propor a criação de uma zona desportiva multi-usos na escola.	Proposta da turma (relatórios e plantas à escala).
C 89-90	7 b	Projectar a «sala de aula ideal».	Relatórios e plantas de cada grupo.
D 89-90	8 a	Investigar o que os alunos pensam sobre o funcionamento do bar da escola	Exposição da turma (conjunto de cartazes) na escola.
E 90-91	8 b	Construir um painel de azulejos com base nas transformações geométricas.	Propostas individuais e um painel da turma.
F 90-91	8 b	Investigar o consumo de água mineral pelos alunos e suas famílias.	Relatórios dos grupos (cartazes ou folhetos).
G 90-91	8 b	Construir o modelo de um estádio.	Modelos e relatórios de grupo.
H 90-91	9 a	Construir e usar instrumentos de navegação marítima.	Relatórios individuais e instrumentos feitos pelos grupos.

Tabela 1

2. Breve Descrição dos Projectos

Os principais aspectos dos projectos desenvolvidos pelas turmas experimentais entre 1988-1991 são resumidos a seguir, onde «a» se refere a turmas de 7.° ano em 1988-89 e «b» a turmas de 7.° ano em 1989-90 (tabela 1).

A. Número de filhos nascidos nas três últimas gerações

Este estudo foi baseado em dados recolhidos pelos alunos relativos às suas próprias famílias. Os primeiros problemas surgiram a propósito da forma de organização dos dados e sobre o que fazer quando faltava alguma informação. Na etapa seguinte, os alunos trabalharam sobre os dados em pequenos grupos, utilizando os seus conhecimentos sobre frequências, médias e, assim por diante, pedindo ajuda quando queriam fazer coisas novas (por exemplo, desenhar um gráfico circular correctamente). Alguns deles usaram o computador para fazer cálculos e para desenhar gráficos visualmente agradáveis.

A escrita de um relatório final foi, então, uma tarefa individual a ser realizada em casa durante um período de duas semanas; a forma de organizar tal relatório foi discutida em sala de aula. Ao longo dessas duas semanas, alguns alunos solicitaram a ajuda do professor para esclarecer determinados pontos da versão preliminar do relatório — tal como os adultos fazem antes de publicar relatórios ou artigos.

Foram fornecidos aos alunos dados oficiais sobre a evolução demográfica e teve lugar uma discussão final, na sala de aula, sobre o que não era possível concluir a partir de um estudo tão limitado. Por exemplo, apenas se poderia conjecturar sobre as razões para o decréscimo do número de filhos, sendo este um possível tópico para futuras discussões com o professor de Geografia.

B. Proposta para a criação de uma zona desportiva multi-usos na escola

A ideia de transformar um «espaço vazio» que existia no terreno da escola numa zona utilizável para a prática de diversos desportos levou a um projecto de quatro semanas. Os conhecimentos matemáticos necessários pareciam ser bastante elementares, mas surgiram problemas inesperados. Como medir correctamente um terreno muito grande? Qual deveria ser o grau de aproximação aceitável? Como ter a certeza de que as medidas eram tiradas segundo linhas perpendiculares?

A colaboração de dois professores de Educação Física foi importante para obter as informações necessárias sobre as dimensões oficiais de campos de diferentes desportos e também para dar alguns conselhos. Por exemplo, após uma reunião com estes professores, um grupo de alunos decidiu alterar a sua proposta de inclusão de um campo de badmington, porque perceberam que era «geometricamente correcto» mas «desportivamente inadequado» uma vez que o badmington é um desporto para um espaço fechado.

Os alunos decidiram quais os desportos a incluir e as escalas a adoptar, prepararam as plantas finais e apresentaram uma proposta por escrito. Esta última tarefa foi discutida com o professor de Língua Portuguesa na sala de aula. O projecto terminou com uma reunião entre os alunos e a direcção da escola. Posteriormente, a proposta foi aprovada e alguns alunos vieram juntar-se ao grupo de pessoas que fizeram a pintura do chão com base na proposta por eles apresentada.

C. Um plano para a «sala de aula ideal»

Projectar a «sala de aula ideal» foi a actividade que substituiu o projecto B em 1989-90. Este projecto foi desenvolvido em colaboração com outra disciplina. O professor de Educação Visual ensinou aos alunos como produzir diferentes peças de mobiliário e iniciou-os no uso de um programa de computador utilizado na arquitectura. Desta forma, os alunos tiveram a sua primeira experiência de trabalho com as coordenadas rectangulares.

D. Investigar a opinião dos alunos sobre o bar da escola
Descobrir o que os alunos do 8.° e do 11.° ano pensavam sobre o modo de funcionamento do bar da escola, deu origem a uma nova experiência – como lidar com questionários e como escolher uma amostra adequada.

Foram utilizados métodos elementares de estatística, bem como uma folha de cálculo. No final, os alunos prepararam cartazes com os principais resultados do seu trabalho, incluindo uma descrição dos métodos utilizados. Os cartazes foram afixados num átrio grande junto ao bar.

E. Construir um painel de azulejos
A propósito do estudo da geometria, foi organizada uma visita ao Palácio de Sintra, com a participação dos professores de História e Educação Visual. Este antigo palácio contém vários tipos de mosaicos, particularmente, do período árabe. A partir de anotações pessoais e desenhos, os alunos produziram relatórios, focando aspectos históricos e geométricos do que tinham visto e ouvido. As interpretações geométricas dos mosaicos – em termos de translações, rotações e simetrias – foram o ponto de partida para a construção de padrões que deram origem a painéis de azulejos. A turma votou a melhor proposta de todos os grupos; por fim, os alunos construíram o painel com a ajuda dos professores de educação visual e trabalhos oficinais.

F. Estudar os hábitos dos consumidores de água
Este estudo correspondeu ao projecto D para os alunos do 8.° ano de 1990-91 e envolveu questionários, amostragens e o recurso à folha de cálculo, contudo, a componente matemática foi integrada num estudo mais geral, em colaboração com a química e a geografia. Compararam-se vários tipos de água mineral, segundo as preferências dos consumidores, a sua composição e qualidade e os seus circuitos de produção e distribuição. Os alunos trabalharam em pequenos grupos, ao longo de um período de mais de dois meses e os relatórios finais assumiram a forma de cartazes ou folhetos.

G. Construir o modelo de um estádio
A construção de um modelo de estádio de futebol e atletismo foi o objectivo de outro projecto desenvolvido por alunos do 8.° ano de 1990-91. À primeira vista, o uso de escalas e proporções tornava este projecto matematicamente parecido com os projectos B e C, mas isto aconteceu apenas em relação aos aspectos mais simples do campo de futebol. Na verdade, quer os novos conhecimentos de matemática (raio e perímetro do círculo e outros) quer a concepção das pistas de atletismo fizeram surgir vários problemas diferentes. Por exemplo, se as dimensões exteriores do campo de futebol são variáveis, que ponto deve ser o centro dos semicírculos que formam a curva das pistas, de modo que a pista interna tenha um perímetro de, exactamente, 400 metros?

Com alguns grupos, foi ainda possível propor problemas mais desafiadores. Onde devemos colocar a marca para o início da corrida de 400 metros (uma volta) para compensar o facto de alguns atletas correrem mais perto do exterior do que outros? Se uma diferença constante entre os raios produz uma diferença constante entre os perímetros, porque é que as marcas das pistas 7 e 8 parecem mais próximas do que as marcas das pistas 1 e 2 – ou é isto simplesmente, uma ilusão?

No final, cada grupo produziu um relatório e um modelo do estádio em madeira. Os modelos de madeira também foram adaptados para criar jogos de simulação de futebol, em que os jogadores eram representados por pregos, de forma semelhante aos brinquedos tradicionais muito populares há algumas décadas atrás.

H. Construir instrumentos para a navegação
No século XV, os instrumentos para medir a altura de estrelas e planetas foram adaptados e usados pelos portugueses para a navegação marítima. Este projecto consistiu no estudo de alguns destes instrumentos e incluiu, ainda, construí-los e testá-los. Para se familiarizarem com aspectos essenciais da astronomia e verem cópias de instrumentos, foram organizadas duas visitas de estudo. Foram também fornecidas algumas referências históricas. O projecto durou cerca de três meses, evoluindo em paralelo com outros temas. Foi necessário estudar alguma astronomia elementar e alguns tópicos matemáticos, principalmente de geometria do espaço e trigonometria, antes de se poder desenvolver o trabalho prático com uma base sólida.

Os alunos produziram relatórios individuais sobre as visitas e cada grupo construiu um dos instrumentos. Uma pequena exposição foi organizada na escola no final do ano lectivo.

3. Uma visão geral dos projectos

Os projectos desenvolvidos podem ser analisados a partir de vários pontos de vista.

Natureza e objectivos
Mais do que as suas potencialidades para desenvolver capacidades específicas, a razão para a escolha dos projectos, foi dar aos alunos a oportunidade de experimentar o uso da matemática para lidar com situações da vida real em contextos realistas. Esta escolha foi condicionada por três factores:

- Os projectos deveriam conter problemas autênticos e actividades que fossem, ou pudessem tornar-se, interessantes para os alunos.
- A matemática emergente deveria ser acessível (isto é, já conhecida ou podendo ser aprendida pelos alunos quando necessário).

- Deveria ser possível ao professor dar atenção tanto ao contexto extra-matemático como aos métodos matemáticos envolvidos, por vezes, com uma ajuda externa pré-combinada.

Uma característica comum dos projectos foi a atmosfera de trabalho livre e a possibilidade de utilização de todo o material disponível. Muitas vezes, os alunos mudaram a forma prevista de trabalho, sendo o recurso aos computadores o exemplo mais óbvio. O seu uso foi muito além daquilo que os professores tinham imaginado mas, também aqui, foram observadas diferenças muito claras – por exemplo, no projecto G o relatório final de alguns grupos foi inteiramente feito com base no computador, enquanto outros nem sequer utilizaram o computador. Cada projecto tinha um (ou uma combinação de alguns) dos seguintes objectivos:

- Interpretar e descrever uma situação da vida real, usando a matemática;
- Produzir ideias ou apresentar propostas, a fim de participar activamente na vida escolar;
- Comunicar os resultados ou produzir materiais ou modelos resultantes do estudo.

Tópicos de Matemática e áreas da realidade

Embora muitas competências aritméticas e também algébricas tenham sido necessárias e postas em prática, não é de surpreender que os principais aspectos matemáticos tenham provindo de estatística e gráficos, proporções e escalas, geometria e trigonometria. Recolher e organizar informações ou desenhar e construir modelos são actividades essenciais quando se estudam situações da vida real. Perante problemas simples e com um nível de conhecimento matemático elementar, é muito mais difícil imaginar o uso explícito de funções ou equações, por exemplo. Note-se que isto se refere a projectos e não a outras actividades de aplicação (mais curtas, mais estruturadas) em que a maior parte dos tópicos curriculares estão presentes.

Uma grande variedade de domínios esteve presente na realidade considerada – demografia, desportos, design, serviços, arte, história, hábitos dos consumidores, astronomia. No entanto, um tema emergiu como o mais frequente – a escola. Descobrir, criticar ou melhorar os aspectos da sua própria escola mostrou-se motivador para os alunos. Além de tudo o mais, foi essencial em vários projectos levar a cabo acções que seriam difíceis de realizar em qualquer outro contexto, pelo menos de uma forma realista. Por exemplo, relacionar amostras com populações ou recolher dados de forma sistemática ou medir espaços físicos reais. Isso não significa que o trabalho de projecto, focando as relações entre a Matemática e a realidade, deva ser desenvolvido sem sair da escola. Pelo contrário, em muitos projectos, os dados foram recolhidos no exterior ou foram organizadas visitas para ampliar a compreensão das situações pelos alunos. De facto, para estes alunos, nenhuma outra disciplina escolar promoveu tantas visitas de estudo como a matemática.

Cooperação entre a Matemática e as outras disciplinas

É animador constatar que os projectos iniciados pela Matemática deram origem a uma série de experiências de colaboração com professores de Geografia, de Educação Física, de Língua Portuguesa, de Educação Visual, de História, de Trabalhos Oficinas e de Química – todas as disciplinas neste nível de escolaridade, à excepção da Biologia e Línguas Estrangeiras. Esta colaboração assumiu diferentes modos, podendo ser identificados, pelo menos, os seguintes:

- *Discussão sobre os resultados.* No exemplo A, os métodos estatísticos determinaram uma tendência numérica, mas os alunos não foram capazes de explicar o fenómeno. Seguiu-se uma discussão sobre as causas da evolução demográfica numa aula de Geografia.
- *Informação.* O acesso aos dados essenciais ou informações úteis, para aumentar a percepção do problema em questão, foi disponibilizado por professores de outras disciplinas. Este foi o caso dos exemplos B, E e H, com os professores de Educação Física, Educação Visual e História.
- *Aconselhamento ou apoio técnico.* Conhecimentos específicos sobre os aspectos extra-matemáticos foram muitas vezes necessários e, em algumas ocasiões, os alunos precisaram de ajuda externa. Isso aconteceu nos casos B, C e E, com os professores de Educação Física, Língua Portuguesa, Educação Visual e Trabalhos Oficinais.
- *Cooperação Bilateral.* Certos aspectos do trabalho, ou mesmo a totalidade do projecto, tornaram-se relevantes para outra disciplina além da Matemática e foram orientados e avaliados por dois professores. No exemplo E, uma visita de estudo e o correspondente relatório foram actividades de Matemática e História, enquanto no exemplo C todo o trabalho de projecto foi desenvolvido como uma actividade de Matemática e de Educação Visual.
- *Abordagem interdisciplinar.* Num dos casos (exemplo F), o projecto não teve início como uma actividade matemática, em vez disso, foi uma iniciativa de três professores (Matemática, Química e Geografia) que decidiram escolher um tema comum (água mineral), para ser estudada a partir de várias perspectivas.

Organização e extensão

O trabalho em pequenos grupos foi a forma mais frequente de organização das actividades do projecto – uma extensão do contexto habitual das aulas de Matemática. No entanto, o trabalho individual (relatórios, propostas) ocorreu em várias circunstâncias e o trabalho no grupo-turma também aconteceu em diferentes situações (discussões, apresentações).

Quando não faz sentido haver um ou mais produtos finais (uma proposta, uma exposição) torna-se difícil conduzir projectos genuínos em sala de aula. Na vida real, estaria uma pequena equipa a trabalhar num projecto como estes e não uma turma de 25 alunos. Assim, uma de duas estratégias foi adoptada: ou ter diferentes grupos de trabalho em tarefas distintas, com a condição de que cada grupo comunicasse à turma o que tinha feito e como, ou cada grupo devia elaborar uma proposta para ser discutida numa reunião geral.

A maioria dos projectos durou cerca de quatro semanas. Algumas aulas foram inteiramente dedicadas ao projecto – para definir os objectivos e métodos, para ajudar os alunos nas dificuldades surgidas e para discutir os produtos finais. No entanto, outros tipos de actividades e temas foram desenvolvidos em paralelo com as fases do trabalho de projecto, sempre que o mesmo podia prosseguir de forma independente, fora da sala de aula. Nestes casos, os alunos que terminavam o seu trabalho mais rapidamente continuavam a trabalhar em aspectos do projecto durante o tempo restante, por exemplo, em tarefas que exigiam o uso do computador.

Produtos e avaliação

Os produtos dos projectos foram relatórios escritos, apresentações orais, cartazes ou folhetos, materiais práticos e modelos. Deve ser destacado que:

- Havia sempre um produto final a ser realizado e, por vezes, aspectos parciais constituíam também actividades significativas por si só (os relatórios sobre as visitas, por exemplo);
- Interpretações ou métodos matemáticos estiveram sempre explicitamente presentes no produto final, qualquer que ele fosse;
- O professor sempre reviu versões preliminares do produto final;
- A comunicação com os outros – com a turma, com a comunidade escolar ou com os pais – foi uma preocupação constante.

De acordo com os princípios e as práticas adoptadas por este currículo, coexistiram modos de avaliação adequados à natureza do trabalho de projecto e outros relativos a diferentes actividades e tarefas. Com respeito ao trabalho do projecto, a avaliação:

- Foi baseada em critérios especificamente dirigidos à forma pela qual um aluno, em particular, ou um grupo desenvolveu o seu trabalho – cada parte do trabalho foi apreciada *per se* e na maioria das situações era dificilmente comparável com o que outros alunos tinham produzido no mesmo projecto;
- Centrou-se na qualidade global e na evolução do trabalho e não foi reduzido a uma soma de capacidades distintas – este princípio foi seguido para apreciar tanto os aspectos matemáticos como extra-matemáticos do trabalho (em alguns casos, exigindo a colaboração de professores de diferentes disciplinas);
- Incluiu uma nota qualitativa sempre que isso tinha sentido relativamente a um produto específico – por exemplo, um relatório individual ou um modelo feito por grupo passava por um sistema de classificação no final, ao passo que uma exposição da turma ou o painel de azulejos foram avaliados, mas não tiveram uma classificação.

4. Características relevantes do trabalho de projecto

A partir de observações e entrevistas, há evidências de que os projectos constituíram as actividades preferidas dos alunos e aquelas em que o seu empenhamento pessoal foi maior. A atmosfera livre e não rotineira e a possibilidade de investigar problemas interessantes e criar coisas novas, foram as principais razões invocadas. Há também evidências de que os projectos foram mais lembrados pelos alunos, a longo prazo, do que outras actividades e foram o tema mais frequente das conversas entre eles e os seus pais sobre o que acontecia na aula de Matemática.

Quando comparado com outras práticas de ensino, o trabalho de projecto pode ter algumas características exclusivas (ou qualitativamente diferentes). Embora não haja uma distinção bem clara entre o que é e o que não é um «projecto», as seguintes características correspondem a uma definição possível para o significado atribuído ao trabalho de projecto neste artigo.

- *É um trabalho prolongado* – a atenção do aluno e o interesse está focado num problema durante um longo período de tempo. Este facto promove a reflexão pessoal e é também mais amplo e mais profundo o trabalho cooperativo entre os alunos do que em actividades de grupo mais curtas na sala de aula.
- *Envolve uma variedade de actividades* – formular e resolver problemas, cálculos, trabalhos práticos, debates, visitas, relatórios, uso de computadores, ... – individualmente, em grupo ou com toda a turma. Isto contribui para um ambiente não rotineiro e deixa espaço para uma grande diversidade de interesses, preferências e estilos dos alunos.
- *Permite aos alunos trabalhar num problema «desde o princípio até ao fim»* – o que pode ajudar a aumentar a sua visão sobre todos os passos dessa actividade e ampliar a sua experiência de estabelecer conexões dentro e fora da Matemática.
- *Permite que os alunos tenham mais iniciativa e autonomia* e criem produtos com uma dimensão diferente, quando comparados com actividades mais curtas e estruturadas.
- *Geralmente tem um impacto muito maior fora da sala de aula*, proveniente da extensão do trabalho, dos vários contactos e da natureza dos produtos. Isso aumenta a possibilidade de comunicação matemática com outros alunos e professores, com os pais e outros.

As actividades organizadas pelo projecto constituíram a principal oportunidade para os alunos lidarem, de uma forma realista (e em alguns aspectos única) com problemas que são frequentes quando a Matemática está relacionada com a realidade. Exemplos disso são a imprecisão da formulação do problema em algumas fases do trabalho, a necessidade de adaptar os métodos matemáticos a situações inesperadas, a tomada de decisões, tendo em conta uma grande diversidade de aspectos, e a prática real de colaboração entre diferentes disciplinas. Esta colaboração foi possível graças à combinação da forma como as actividades foram orientadas (pelo problema) e da maneira como ele foi organizado (o projecto).

O trabalho de projecto pode ser concebido e orientado de vários modos. Segundo a experiência descrita neste artigo, gostaria de salientar os seguintes pontos.

- Propor problemas reais e com significado para os alunos e não exercícios disfarçados (que podem sempre ser feitos noutras ocasiões).
- Não saltar nenhuma fase importante no desenvolvimento de um projecto. Não inventar dados em falta, desencorajar partes inacabadas do trabalho, não substituir o trabalho real por «uma ideia dos métodos que poderiam ser utilizados» ou «dos resultados que poderiam ser obtidos».
- Ser honesto com todos os aspectos importantes do projecto. Não subestimar factores não-matemáticos que poderiam ser decisivos nas situações da vida real (fontes de informação externa, ajuda ou cooperação pode ser essencial). Não usar métodos matemáticos "interessantes" que não sejam essenciais para o problema em questão (eles podem ser desenvolvidos noutras ocasiões).
- Enfatizar o papel que a Matemática desempenha na situação que está a ser estudada, mas fazendo-o tanto em relação ao seu potencial como às suas limitações. Discutir o que pode e o que não pode ser concluído através de um processo matemático, em particular.
- Manter uma visão holística do trabalho. Ter em mente que um projecto pode ser concebido e desenvolvido de várias maneiras e incentivar o uso de estratégias e estilos pessoais.
- Tentar criar um ambiente de trabalho livre, mas ao mesmo tempo, tentar desenvolver nos alunos o sentido da responsabilidade. Estar atento à evolução do trabalho dos alunos e ajudá-los a revê-lo e a melhorá-lo seriamente (por exemplo, cópias de livros não são desejáveis como relatórios).
- Incentivar a comunicação dos métodos, das descobertas e dos resultados do projecto de diversas formas possíveis, dentro e fora da sala de aula.

5. Observações finais

Várias dificuldades ocorrem quando os professores se comprometem a desenvolver um trabalho de projecto nas suas aulas de matemática, nem todas da mesma natureza. As dificuldades resultantes da organização da escola (turmas muito grandes e horários inadequados) ou do currículo (demasiado centrado nos conteúdos e com demasiados tópicos a serem tratados) parecem ser obstáculos a superar e não razões para desistir. Há vários exemplos que oferecem ideias e sugestões de como o trabalho de projecto pode ser desenvolvido com turmas regulares em escolas normais, que deixam ainda espaço suficiente para outros tipos de actividades matemáticas.

Os obstáculos relacionados com os professores parecem ser mais problemáticos. Lentamente, cada vez mais professores serão persuadidos de que não precisam de «saber tudo» para poderem desenvolver projectos que relacionem a matemática com uma variedade de assuntos cada vez maior. No entanto, isso não significa que as suas crenças e atitudes – nomeadamente, sobre o que significa aprender Matemática – consiga mudar rapidamente de uma forma compatível com este tipo de trabalho. Ao procurarmos estratégias para combater todas estas dificuldades, será importante acreditarmos que o trabalho de projecto traz uma contribuição única para aspectos fundamentais da educação matemática dos alunos, nomeadamente quando se trabalha com situações que relacionam a Matemática com problemas da vida real. Embora reconhecendo que é necessário mais conhecimento, mais experiência e mais discussão, acredito fortemente que este é o caminho correcto a seguir.

Referências

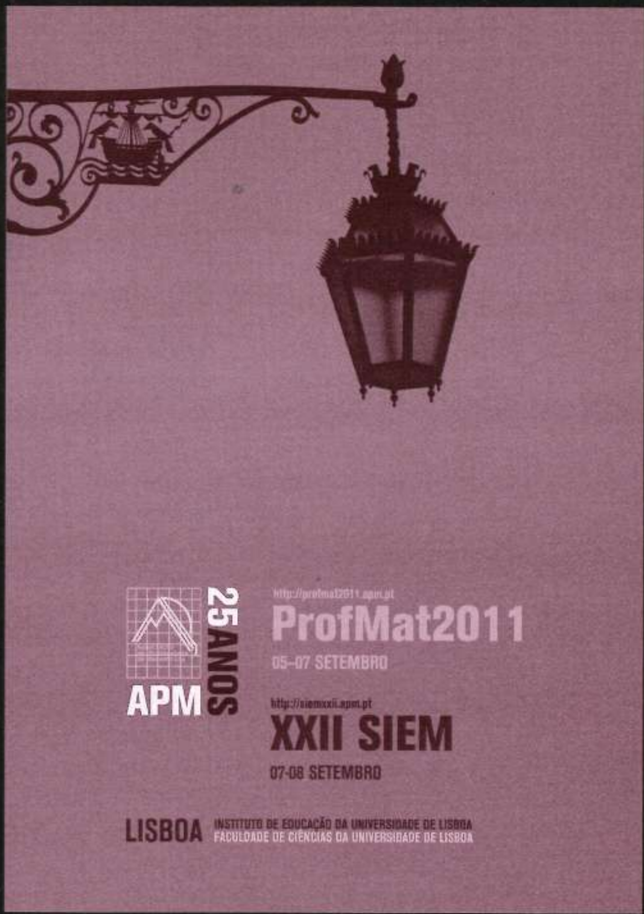
Abrantes, P. (1991). The role of applications in a curriculum project for school mathematics. In M. Niss *et al.* (Eds), *Teaching of mathematical modeling and applications*. Chichester: Ellis Horwood.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22* (1), 37–68.

Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modeling in mathematics curricula. In W. Blum *et al.* (Eds). *Applications and modeling in learning and teaching mathematics*. Chichester: Ellis Horwood.

Paulo Abrantes
Universidade de Lisboa, Portugal

Traduzido de: Abrantes, P. (1993). Project Work in School Mathematics. In J. Lange, C. Keitel, I. Huntley & M. Niss (Eds.) Innovation in Maths Educatios by Modelling and Applications, (pp. 355–364). Chichester: Ellis Horwood.
Tradução de Ricardo Amado Correia
Revisão de Nélia Amado e Susana Carreira



XXII SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática

O XXII SIEM – *Seminário de Investigação em Educação Matemática* realiza-se a 7 e 8 de Setembro de 2011, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Este Seminário tem como objectivo criar um espaço de expressão da comunidade de investigação no campo da educação Matemática, para divulgação, comunicação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados. Promove, ainda, a articulação entre a investigação nesta área e o ensino da Matemática. O Seminário terá três conferências plenárias, uma delas a cargo de um convidado estrangeiro, um painel temático, simpósios de comunicações e *posters*.

Prazos

Para inscrição, sem agravamento de preço, até 30 de Maio de 2011.

Para submissão de comunicação:

- Envio de texto até 30 de Maio de 2011, texto Word com o máximo de 25000 caracteres com espaços (ver *template*)
- Resposta da Comissão Científica sobre aceitação até 29 de Junho de 2011

Para submissão de *Poster*:

- Envio de resumo alargado até 30 de Maio de 2011, texto Word com o máximo de 5000 caracteres com espaços (ver *template*)

Comissão Organizadora

Cláudia Canha Nunes
Ana Cláudia Henriques
Ana Isabel Silvestre
Ana Caseiro
Hélia Pinto
Hélia Jacinto
João Pedro da Ponte

Contactos

XXII SIEM – Seminário de Investigação
da Associação de Professores de Matemática
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade
1649-013 Lisboa
Portugal

E-mail: siemxxii@apm.pt
Mais informações disponíveis em http://siemxxii.apm.pt

ProfMat 2011

O ProfMat volta a Lisboa 26 anos depois

Já está em andamento a organização do ProfMat 2011, que vai realizar-se no Instituto de Educação e Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, nos dias 5, 6 e 7 de Setembro. Este ano haverá novidades na estrutura do programa, que incluirá uma parte comum com o XXII SIEM, com o objectivo de aproximar professores e investigadores na APM. A informação detalhada sobre este evento está disponível em http://profmat2011.apm.pt.

Helena Rocha

Sólidos e mais sólidos

Nº de jogadores 3 a 4
Nível de escolaridade 2º ciclo

Conteúdos envolvidos
sólidos e suas arestas, faces e vértices

Material necessário
dois baralhos de 30 cartas cada. Um baralho azul com sólidos e um baralho amarelo com indicações relativas a características do sólido, tal como se descreve de seguida.

Baralho azul (30 cartas)

Pirâmide	triangular	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	quadrangular	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	pentagonal	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	hexagonal	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	heptagonal	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	octogonal	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
Prisma	triangular	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	quadrangular	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	pentagonal	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	hexagonal	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	heptagonal	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
	octogonal	1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
Cubo		1 carta com representação do sólido 1 carta com o nome do sólido
Sólido com quatro faces triangulares		1 carta
Sólido com cinco faces triangulares		1 carta
Joker		2 cartas

Baralho amarelo (30 cartas)

O maior nº de vértices	3 cartas
O menor nº de vértices	3 cartas
O maior nº de arestas	3 cartas
O menor nº de arestas	3 cartas
O maior nº de faces	3 cartas
O menor nº de faces	3 cartas
O maior nº par de vértices	1 carta
O menor nº par de vértices	1 carta
O maior nº par de arestas	1 carta
O menor nº par de arestas	1 carta
O maior nº par de faces	1 carta
O menor nº par de faces	1 carta
O maior nº ímpar de vértices	1 carta
O menor nº ímpar de vértices	1 carta
O maior nº ímpar de arestas	1 carta
O menor nº ímpar de arestas	1 carta
O maior nº ímpar de faces	1 carta
O menor nº ímpar de faces	1 carta
Joker	2 cartas

O jogo
Este jogo centra-se em torno de sólidos, das suas designações e de características destes (como o número de arestas, de faces e de vértices).

Preparação do jogo
Baralham-se separadamente as cartas de cada um dos baralhos e distribuem-se três de cada baralho a cada jogador. As restantes são colocadas no centro da mesa de jogo, viradas para baixo. Determina-se quem começa o jogo.

Modo de jogar
O primeiro a jogar escolhe uma das suas cartas azuis e coloca-a sobre a mesa. O jogador à direita deste escolhe uma das suas cartas amarelas que lhe pareça adequar-se à carta azul jogada e coloca-a sobre a mesa. Cada um dos restantes jogadores pode decidir se quer ou não jogar uma carta azul que se adeqúe melhor à carta amarela em jogo. Ganha a jogada o último jogador que colocar sobre a mesa uma carta adequada. Esse jogador recolhe todas as cartas jogadas que coloca junto de si viradas para baixo. Cada um dos jogadores que foi a jogo retira dos baralhos sobre a mesa uma carta da mesma cor da que jogou. O próximo a jogar será o jogador que acabou de ganhar a jogada.

As cartas Joker são cartas especiais que deixam ao critério do jogador a escolha do que devem representar. Quem joga um Joker azul tem que dizer o nome do sólido que quer que este represente, quem joga um Joker amarelo tem que dizer uma característica de um sólido que quer que este represente. Repare-se, no entanto, que nem o sólido tem que ser um dos constantes do baralho azul, nem a característica escolhida tem que ser idêntica às descritas no baralho amarelo.

Fim do jogo
O jogo termina quando acabarem as cartas de algum dos baralhos.

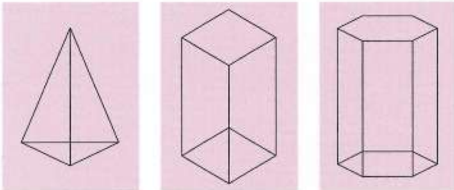
Pontuação
Cada jogador ganha um ponto por cada uma das cartas recolhidas durante o jogo. O vencedor será quem alcançar o maior número de pontos.

Exemplos de possíveis jogadas
Exemplo 1
O jogador 1 coloca sobre a mesa uma carta azul com uma pirâmide triangular. O jogador 2, sentado à sua direita, tem em seu poder as três cartas amarelas da fig.1. Se jogar a carta da esquerda, o jogador 1 ganha de imediato a jogada porque esta carta não se aplica a este sólido uma vez que a pirâmide triangular não tem um número ímpar de vértices. Se jogar a carta do meio vai perder a jogada, pois a pirâmide triangular é o sólido em jogo com menor número de faces e portanto o jogador 3 terá em seu poder uma carta com um sólido com mais faces. Se jogar a carta da direita poderá conseguir ganhar a jogada, uma vez que a pirâmide triangular tem apenas seis arestas e só o Joker poderá eventualmente fazer surgir um sólido com menos arestas.

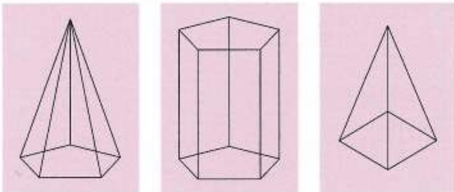
O menor número ímpar de vértices	O maior número de faces	O menos número de arestas

Figura 1

Exemplo 2
O jogador 1 coloca sobre a mesa uma carta azul com um prisma triangular. O jogador 2, sentado à sua direita, joga uma carta amarela com a indicação «o maior número de faces». O jogador 3 e o jogador 4 têm que decidir se vão a jogo. As cartas azuis de que dispõem são as apresentadas na figura 2.



Jogador 3



Jogador 4
Figura 2

Vejamos alguns casos possíveis:
1) Se o jogador 3 decidir jogar a pirâmide triangular, a jogada termina e é ganha pelo jogador 2, pois foi o último a colocar sobre a mesa uma carta admissível, uma vez que a pirâmide triangular não tem maior número de faces do que o prisma triangular.
2) Se o jogador 3 optar por jogar o prisma quadrangular, a jogada é ganha por ele no caso do jogador 4 decidir não ir a jogo e também nos casos em que este opta por jogar a pirâmide pentagonal ou a pirâmide quadrangular, uma vez que nenhuma destas pirâmides tem maior número de faces do que os sólidos que já se encontravam na mesa. No entanto, se o jogador 4 decidir jogar o prisma pentagonal é ele quem ganha a jogada, pois este sólido tem maior número de faces.
3) Se o jogador 3 escolher jogar o prisma hexagonal, será sempre ele a ganhar a jogada, independentemente do jogador 4 decidir ir ou não a jogo, pois este último não possui nenhum sólido com maior número de faces do que o jogado pelo jogador 3.
4) Se o jogador 3 decidir não ir a jogo, o jogador 4 ganha a jogada se jogar a pirâmide pentagonal ou o prisma pentagonal. Contudo, se a opção do jogador 4 recair sobre a pirâmide quadrangular, como esta não tem mais faces que o sólido que já se encontra na mesa, a jogada é ganha pelo jogador 2.
5) Se nem o jogador 3 nem o jogador 4 forem a jogo, a jogada é ganha pelo jogador 2.

Helena Rocha

José Paulo Viana

A colecção de selos

Fui visitar o Hugo, que me mostrou logo a sua bela colecção de selos. Admirado, perguntei-lhe:

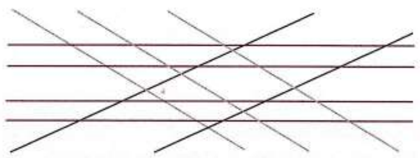
- Quantos selos tens tu?
- Olha, só te posso dizer que é o menor número que é o dobro de um quadrado e o triplo de um cubo.

Quantos selos tem o Hugo?

(Respostas até 25 de Abril para zepaulo@armail.pt)

Paralelas e polígonos

O problema proposto no número 109 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:



Temos duas rectas paralelas segundo uma certa direcção A, mais três rectas segundo outra direcção B e ainda quatro rectas segundo uma terceira direcção C.

No máximo, quantos triângulos se podem obter?

E quantos paralelogramos?

E quantos trapézios que não sejam paralelogramos?

Recebemos 9 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Ana Petrucci (Lisboa), Gonçalo Ayala (Lisboa), Gonçalo Fialho (Lisboa), Hugo Silva (Amadora), Leonel Vieira (Braga), Maria Inês Marreiros (Lisboa), Miguel Santiago (Lisboa) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Primeiro, uma nota prévia, explicitada por Pedrosa Santos e Alberto Canelas: para maximizar o número de figuras pedidas, é necessário que em nenhum ponto concorram três rectas.

Os processos de resolução seguidos pelos nossos leitores foram muito parecidos.

1) Triângulos

Para se obter um triângulo é necessário escolher uma recta de cada direcção. Como temos 2 rectas segundo A, 3 segundo B e 4 segundo C, o número de triângulos que se obtém é: $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Claro que, se usarmos a combinatória, isto pode ser escrito na forma: $C_1^2 \times C_1^3 \times C_1^4 = 2 \times 3 \times 4 = 24$.

2) Paralelogramos

Dois lados de um paralelogramo têm uma certa direcção e os dois restantes têm uma segunda direcção.

Temos então de escolher duas rectas numa direcção e duas noutra diferente.

Paralelogramos com lados segundo A e B: como há apenas uma maneira de escolher duas rectas com a direcção A e 3 possibilidades de ter duas rectas segundo a direcção B, temos $1 \times 3 = 3$.

Paralelogramos com lados segundo A e C: há uma maneira de escolher duas rectas com a direcção A e 6 de ter duas rectas segundo a C, logo temos $1 \times 6 = 6$.

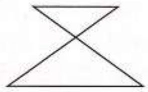
Paralelogramos com lados segundo B e C: há 3 possibilidades de escolher duas rectas com a direcção B e 6 de ter duas rectas segundo a C, logo temos $3 \times 6 = 18$.

O total de paralelogramos é:

$$C_2^2 \times C_2^3 + C_2^2 \times C_2^4 + C_2^3 \times C_2^4 = 1 \times 3 + 1 \times 6 + 3 \times 6$$
$$= 3 + 6 + 18 = 27$$

3) Trapézios não paralelogramos

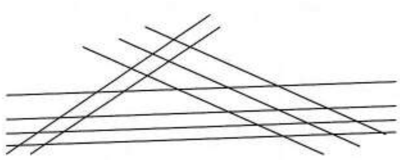
Aqui surge um problema. Será que esta figura é um trapézio?



Trapézio?

Se a aceitarmos como quadrilátero, podemos avançar. Caso contrário, o número de trapézios quando houver rectas que se cruzem entre duas paralelas (como acontecia na figura do enunciado do problema) irá variar de situação para situação.

Mas, como nos é pedido o número máximo de trapézios, podemos passar por cima desta objecção. Assim, admitimos trapézios estrelados ou consideramos apenas o caso em que não há intersecções no intervalo de duas paralelas.



Cada trapézio vai então ter dois lados com uma direcção, um lado com uma segunda direcção e mais um lado com a terceira direcção.

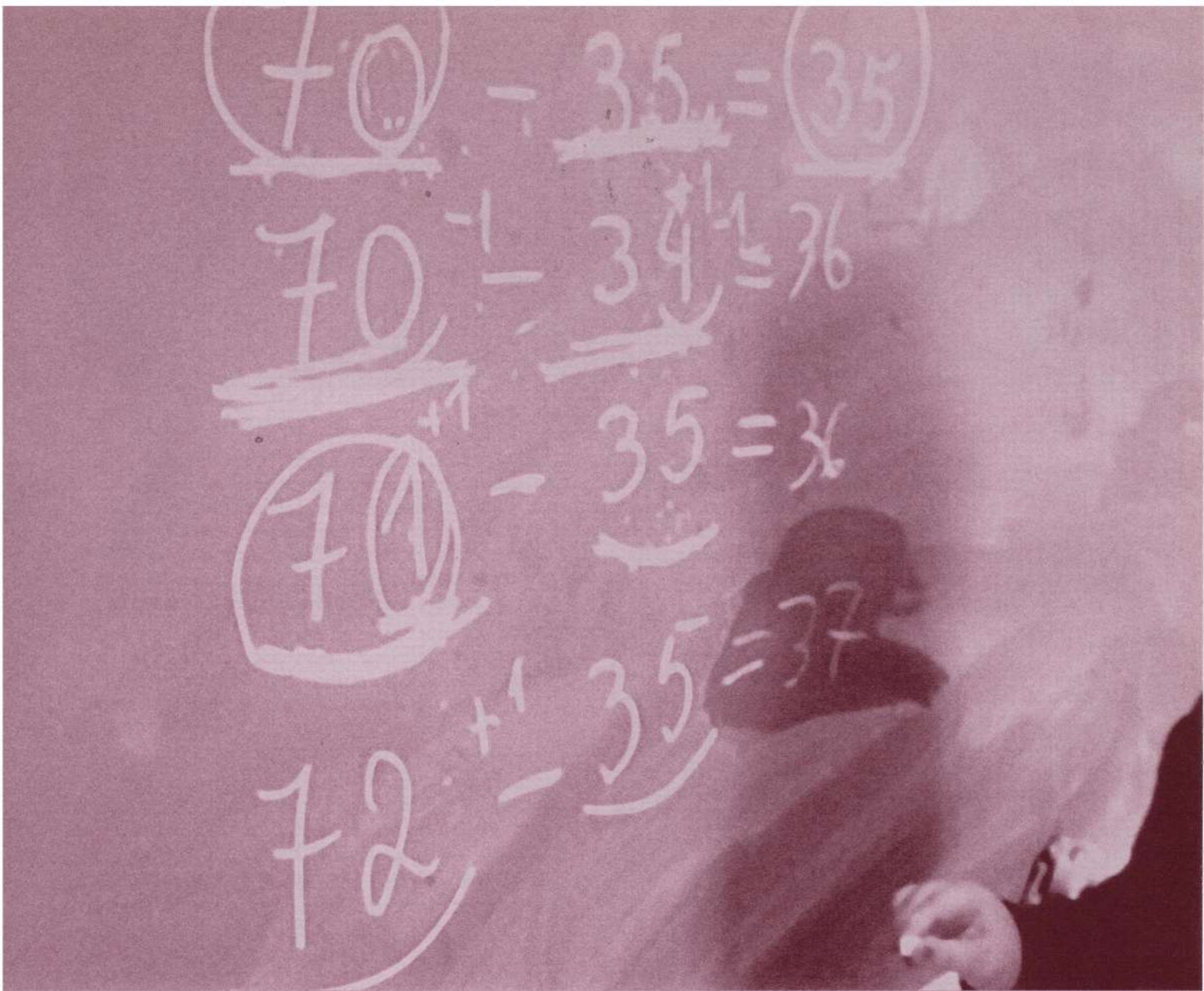
Casos AABC: $1 \times 3 \times 4 = 12$.

Casos ABBC: $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Casos ABCC: $2 \times 3 \times 6 = 36$.

Usando a simbologia da combinatória, o número total de trapézios é:

$$C_2^2 \times C_1^3 \times C_1^4 + C_1^2 \times C_2^3 \times C_1^4 + C_1^2 \times C_1^3 \times C_2^4 =$$
$$= 12 + 24 + 36 = 72.$$



Calculando em cadeia

Guida Lourenço
Luciano Veia

O desenvolvimento do sentido do número constitui um dos propósitos principais de ensino incluídos no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). Nos dois primeiros anos de escolaridade valoriza-se o cálculo numérico na representação horizontal e sugere-se que se proporcionem aos alunos situações diversas que lhes permitam desenvolver o cálculo mental. Recomenda-se a prática de rotinas de cálculo mental, podendo este ser apoiado por registos escritos, possibilitando que os alunos possam utilizar as suas estratégias de modo flexível, seleccionando as mais eficazes em cada situação. Como forma de desenvolver estratégias de cálculo mental Fosnot e Dolk (2001) sugerem a exploração de tarefas que permitam desenvolver um reportório de estratégias de cálculo baseadas numa compreensão profunda das relações numéricas e das operações. Surge assim a ideia de cadeia matemática tendo como principal finalidade desenvolver nos alunos um cálculo mental eficiente. O professor apresenta um conjunto de tarefas de cálculo relacionadas entre si procurando construir um sistema de relações numéricas que assentam no cálculo realizado nas linhas anteriores da cadeia.

No âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática, para Professores dos 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico, os formandos trabalharam várias cadeias matemáticas, discutiram as suas potencialidades e perspectivaram a sua exploração em sala de aula. Colocado o desafio, o mesmo foi aceite por vários professores que decidiram implementar este

Figura 1

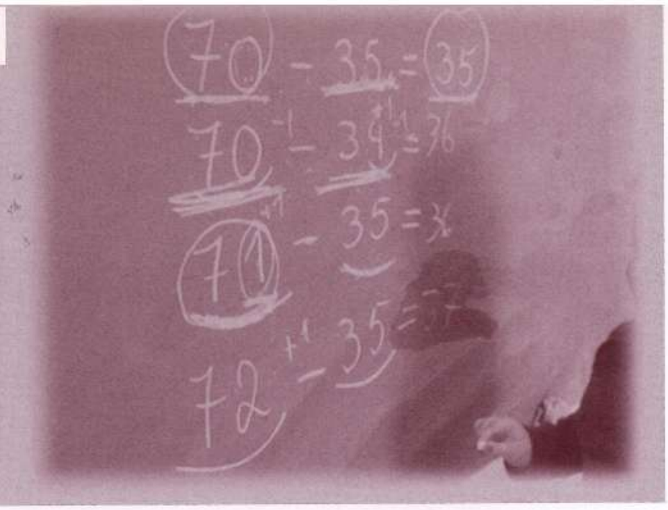


Figura 2

tipo de tarefas nas suas turmas. Numa turma do segundo ano de escolaridade a professora programou uma sequência de tarefas para exploração de cadeias numéricas, tendo indicado alguns objectivos de aprendizagem de onde se salientam «Desenvolver destrezas de cálculo numérico mental e escrito», «Praticar a escrita de cálculos em cadeia (subtrair, utilizando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito)» e «Discutir resultados e ideias matemáticas». Tratava-se de uma estratégia de cálculo mental pouco utilizada na sua sala de aula, originando alguns receios da professora sobre a compreensão da tarefa matemática proposta por parte dos alunos. A turma apenas tinha trabalhado algumas cadeias numéricas, com recurso à adição e com números muito pequenos. As tarefas que iremos analisar neste artigo, para além de envolverem números maiores, pretendiam explorar situações de subtracção.

A aula começou com uma pergunta da professora tentando conhecer o que os alunos entendiam por calcular em cadeia:

P. «O que significa calcular em cadeia?»

A. «Fazemos um cálculo e depois na segunda conta pedimos ajuda à primeira.»

Nesta aula a professora pretende trabalhar as duas cadeiras numéricas seguintes:

70 – 35	163 – 24
70 – 34	163 – 34
71 – 35	169 – 27
72 – 35	169 – 47
71 – 34	169 – 42

No quadro a professora escreve a primeira linha da cadeia numérica onde propõe a resolução da expressão 70 – 35. Foram vários os alunos que pretenderam dar o seu contributo fornecendo indicações sobre a estratégia utilizada:

«Eu fiz 70 – 30 = 40 e 40 – 5 = 35.»

«Fiz 70 – 15 = 55, 55 – 15 = 40 e 40 – 5 = 35»

«O dobro de 35 é 70 porque 35 + 35 = 70, por isso o resultado é 35».

«Também podemos fazer 35 × 2 = 70, logo o resultado é 35».

O primeiro aluno decompõe o 35 em 30 + 5, começando por retirar 30 e completando com a retirada do 5, utilizando uma estratégia decorrente da decomposição numérica de base dez. O segundo aluno parece decompor o 30 em 15 + 15, pelo que retira 15 duas vezes e depois retira 5 chegando a 35. Os alunos seguintes tiram partido do conhecimento do dobro de 35.

Conhecidas (e discutidas) várias estratégias para calcular 70 – 35, a segunda linha da cadeia propõe 70 – 34. Mais uma vez os alunos se envolvem entusiasticamente na explicação das suas estratégias:

«Nesta expressão numérica, o número 35 passou a 34, por isso nós vamos tirar –1 que na conta anterior, logo o resultado é +1, porque se tiramos menos, sobra-nos mais. E... o resultado é 36.» (Figura 1)

«Como o objectivo da tarefa é pedir ajuda à conta anterior, nesta conta o aditivo mantém-se e só muda o subtractivo (–1), logo o resultado é +1. Por exemplo, eu tenho 70 rebuçados e dou 34 a uma amiga, menos um rebuçado que tinha dado na conta anterior, ora se na conta anterior o resultado foi 35, nesta conta dei menos um rebuçado dos 70 que tinha inicialmente, por isso fiquei com mais um, (36)».

É curiosa a argumentação desta aluna sentindo necessidade de se apoiar numa situação concreta como forma de ilustrar o seu raciocínio.

A utilização da operação inversa como forma de prova e o recurso à identidade fundamental da subtracção surgem nas justificações avançadas para responder a uma questão colocada pela professora: «E se nós quisermos confirmar se o resultado está correcto?»

«Calculamos 35 + 36 e se o resultado for 71, logo está correcto»

«Também podemos calcular 71 – 36 e se o resultado for 35, então o resultado está correcto».

Nas linhas seguintes da cadeia os alunos continuam a avançar com argumentos muito convincentes:

«Nesta conta (72 – 35) podemos pedir ajuda à conta anterior porque damos a mesma quantidade (35) mas temos +1 que na anterior, logo o resultado é +1 porque 71 + 1 = 72 e dá-nos no resultado 36 + 1 = 37.»

Este exemplo denota uma segurança de argumentação a propósito do sentido da adição e da ligação com a subtracção como operação inversa.

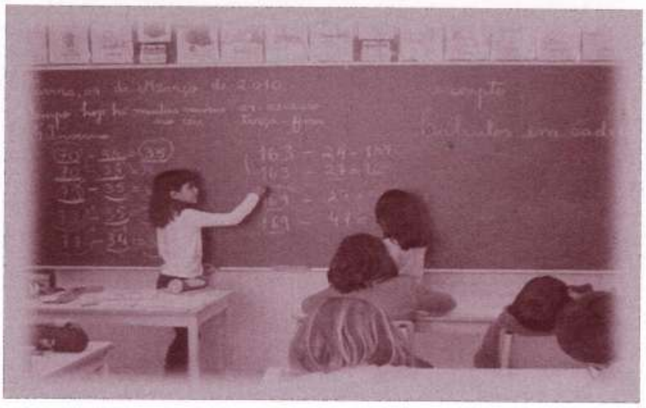


Figura 3

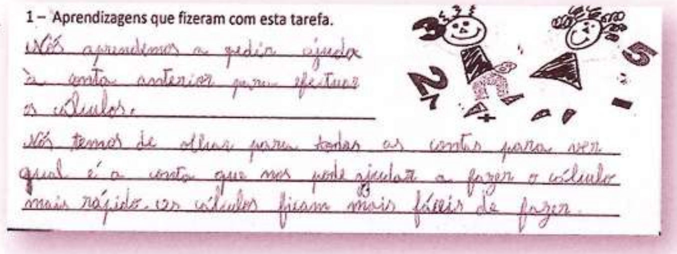


Figura 4

«Os números desta conta (71 – 34) aproximam-se da terceira conta da cadeia. Por isso, podemos pedir-lhe ajuda. A diferença está no subtractivo que é –1. Assim, o resultado aumenta, porque se damos mais, sobra menos e se damos menos, sobra mais. Neste caso, damos menos e sobra mais, logo o resultado é +1, ou seja 37.»

Neste exemplo para além da compreensão do «equilíbrio» entre o adicionar uma unidade e subtrair uma unidade, a aluna generaliza esta regularidade através da apresentação de uma ideia matemática que estrutura todo o seu raciocínio. Revela um bom conhecimento do funcionamento da cadeia, procurando apoiar-se na expressão que mais se «aproxima» da situação que pretende trabalhar.

A Professora também participa no debate, generalizando os resultados: «Ao observar os resultados das expressões numéricas da cadeia, verifico que algumas expressões têm números diferentes e o seu resultado é igual, apesar da operação ser a mesma. Porquê? Quem quer explicar?»

«Porque ao alterarmos a mesma quantidade, em qualquer expressão numérica, tanto no aditivo como no subtractivo, o resultado é igual, por exemplo: 70 – 34 = 36; 71 – 35 = 36 e 72 – 35 = 37; 71 – 34 = 37.» (Figura 2)

A resposta a esta questão revela conhecimentos do modelo compensatório da subtracção, sendo que intervenções anteriores confirmam este conhecimento quando os alunos indicam que «o resultado aumenta, porque se damos mais, sobra menos e se damos menos, sobra mais». Estas ideias revelam um conhecimento matemático que extravasa os procedimentos algorítmicos e origina uma aprendizagem significativa da Matemática.

Depois destas justificações a professora decide explorar uma segunda cadeia numérica colocando no quadro a primeira expressão 163 – 24. Passado algum tempo surgem as primeiras intervenções dos alunos com explicação das suas estratégias:

«Eu fiz 63 – 20 = 43; 43 – 4 = 39 e 100 + 39 = 139». Outro aluno diz: «163 – 10 = 153; 153 – 10 = 143 e 143 – 4 = 139»

O primeiro aluno começa por retirar 20 e depois 4, partindo da decomposição do 24 em 20 + 4 enquanto o segundo aluno vai retirando de 10 em 10, concluindo com 4. Neste caso, ambos os alunos, estruturam as suas estratégias de cálculo em torno da estrutura do sistema de numeração decimal. Explicada a resolução da primeira expressão da cadeia seguem-se as linhas seguintes. A exemplo de situações anteriores, os alunos mostram disponibilidade para avançar com as suas explicações:

«Nesta expressão numérica (163 – 27) vamos dar +3 que na conta anterior, portanto o resultado final é –3 que o resultado da anterior porque, como disse a Inês, se damos mais sobra-nos menos, ou seja, 139 – 3 = 136.»

«Neste cálculo (169 – 27) vou pedir ajuda à conta anterior porque dou a mesma quantidade (27), mas como tenho +6 que 163, ou seja, 169, eu fico com +6 também no resultado final, ora 136 + 6 = 142.» (Figura 3)

«Nesta conta (169 – 47) a diferença que há, em relação à conta anterior, está na quantidade que dou (+20). Por isso, o resultado que fico é de –20 que na anterior, ou seja, 122 porque 122 + 47 = 169.»

«Aqui (169 – 42) nós pedimos ajuda à conta anterior porque a diferença está no subtractivo (–5), por isso o resultado será +5, ou seja, 122 + 5 =127.»

Nestas argumentações os alunos parecem seguir a estratégias já utilizadas por uma colega na resolução de uma expressão anterior com recurso a uma situação concreta (rebuçados) como suporte da sua explicação. Embora continuem a calcular mentalmente, com apoio na representação horizontal, os alunos sentem-se mais seguros em recorrer a situações familiares na resolução das tarefas.

Na primeira justificação o aluno recorre à relação matemática identificada pela colega, decorrente da adopção de estratégias e ideias matemáticas construídas socialmente na sala de aula.

Na reflexão que os alunos fazem sobre o trabalho realizado parece claro a compreensão dos objectivos deste tipo de tarefa, referindo o recurso a resoluções de expressões anteriores para encontrar de forma mais rápida e eficaz a resposta para as expressões seguintes.

«Nós aprendemos a pedir ajuda à conta anterior para efectuar os cálculos. Nós temos de olhar para todas as contas para ver qual é a conta que nos pode ajudar a fazer o cálculo mais rápido. Os cálculos ficam mais fáceis de fazer.» (Figura 4)

Também a professora refere aspectos muito positivos sobre o desempenho dos alunos na resolução destas tarefas:

«Durante a exploração das cadeias, através da comunicação dos alunos, pude constatar formas de raciocínio espontâneas, evidenciando uma certa organização mental, quando, por exemplo, os mesmos pediam ajuda à expressão numérica que lhes poderia facilitar o cálculo de forma mais rápida, ou seja, aquela em que os números envolvidos se aproximavam do cálculo a efectuar e quando contextualizavam as suas argumentações com situações práticas do dia-a-dia, tornando a tarefa mais significativa.»

Para além das capacidades de cálculo são também salientadas as capacidades de comunicação. Na planificação da aula a professora já evidenciava preocupações com a criação de condições para permitir o desenvolvimento desta capacidade quando refere «a necessidade de criar um ambiente de sala de aula propício à comunicação e argumentação, para que a tarefa se torne desafiante e significativa, contribuindo, dessa forma, para uma maior motivação por parte dos alunos.»

As intervenções dos alunos constituem excelentes testemunhos das potencialidades deste tipo de tarefas no desenvolvimento de estratégias flexíveis de cálculo e na procura de formas matemáticas «mais rápidas e eficazes» em consonância com as quantidades numéricas. O desenvolvimento de relações numéricas e uma maior compreensão da operação subtracção merecem particular destaque. A resolução de situações de subtracção com empréstimo surgiu com grande naturalidade, contrariando práticas lectivas anteriores que não permitiam a resolução de vários problemas sem um bom conhecimento deste algoritmo. O recurso ao modelo compensatório e à identidade fundamental constituem excelentes exemplos de como explorar estes conceitos num contexto de resolução de problemas. A exploração deste tipo de tarefas permite também evidenciar a naturalidade com que os alunos aderem a estas situações e a sua disponibilidade para encontrar processos significativos, constituindo excelentes exemplos da possibilidade dos alunos do segundo ano de escolaridade se sentirem confortáveis em trabalhar com números «maiores» e da recompensa que a professora recebeu pela ousadia de experimentar situações «novas».

Referências

Fosnot, C & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação (DGIDC).

Projecto DSN. (2005). *Desenvolvendo o sentido de número. Materiais para o educador e para o professor do 1.º ciclo*. Lisboa: APM.

Guida Lourenço
EB1 D. Manuel I, Tavira

Luciano Veia
Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve

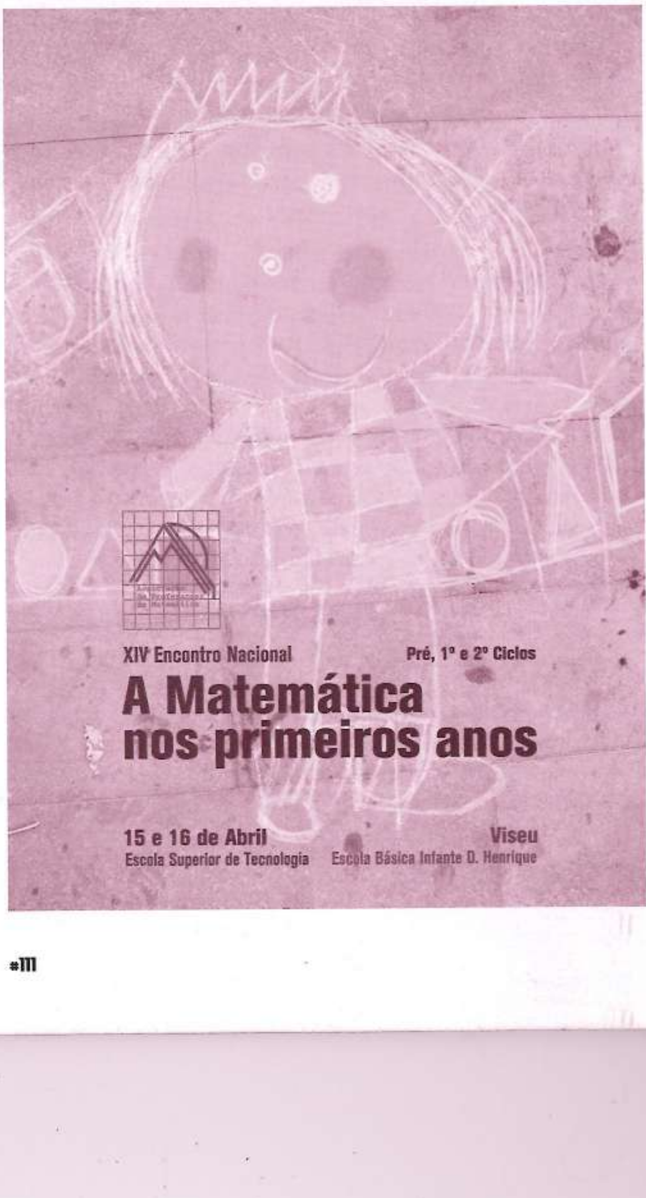
ENCONTROS

Encontro «A Matemática nos primeiros anos»

Pela 14ª ocasião, especificamente dedicado ao ensino e aprendizagem da Matemática na parte inicial da história pré-escolar e escolar, volta a realizar-se este encontro, nos dias 15 e 16 de Abril, regressando a Viseu onde já tinha estado em 1998, depois de passar por todo o país, de Viana do Castelo a Faro.

Assumindo sempre, mas com mais veemência neste encontro os primeiros anos como aqueles que se estendem do pré-escolar até ao fim do 2° ciclo do ensino básico, o encontro reflete as preocupações decorrentes do início da generalização de um novo programa de Matemática, dedicando várias sessões de natureza diversa aos temas associados a esse programa.

A conferência de abertura, da responsabilidade de uma equipa de investigadores que avaliaram as diversas etapas de passagem ao terreno do novo programa de Matemática, vai permitir a partilha de recomendações, reflexões e inferências avaliativas, de interesse evidente para todos os que estão já a lidar com a generalização do programa. No seguimento dos dois dias do encontro, serão realizadas outras conferências sobre vários assuntos que incluem «temas matemáticos» e «capacidades transversais» do programa, sessões práticas que permitirão a participação ativa na realização e discussão de propostas concretas, alem de outras realizações com formatos diversos. Para todos os participantes, deseja-se uma experiência enriquecedora, num ambiente de cooperação solidária.



PENSE NISTO

Rever o passado recente e perspectivar o futuro

Falar sobre o passado é fácil, já todos lá estivemos, falar do presente... estamos cá mas, é mais complicado e perspectivar o futuro... é quase impossível. Estou a referir-me a tecnologias.

A velocidade com que os materiais se tornam obsoletos faz com que todos os dias os professores sejam bombardeados com novas tecnologias, novos produtos, novas versões e tenham de algum modo que se proteger contra tudo o que lhes cai em cima e que os obriga a tomar opções, o que nem sempre é fácil.

Ainda num passado recente, a falta de computadores nas escolas era um facto e de repente vêm os portáteis, os quadros interactivos, os projectores, as plataformas, etc.

A cereja em cima do bolo foi o Plano Tecnológico e lá vêm mais quadros interactivos, mais computadores, mais projectores, chegando ao ridículo de, em algumas escolas, os professores não terem mais sítio onde os colocar.

Que as escolas tenham fartura de materiais... óptimo! As minhas dúvidas prendem-se com a lógica com que eles foram distribuídos.

Qual é a atitude dos professores perante todas as inovações? Optimismo ou pessimismo?

Ao pensar nisso encontrei esta imagem muito simples que me fez fazer numa certa analogia com o que estou a dizer.

A senhora está a caminhar alegremente, desafiando a chuva, ou está simplesmente a virar as costas e ir embora zangada por estar a chover?

E você? Apesar de todos os obstáculos continua confiante a enfrentar os desafios da tecnologia, ou simplesmente vira as costas e não quer saber? Pense nisto.

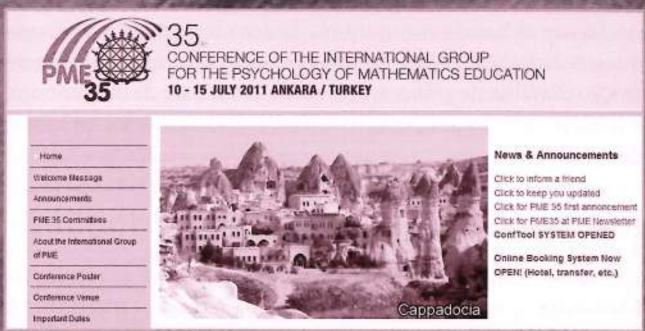
Branca Silveira

ENCONTROS

PME 35

O PME 35 realiza-se em Ankara entre os dias 10 e 15 de Julho de 2011. Toda a informação do encontro está disponível no sítio http://www.arber.tr/pme35.org/index.php/home

Este ano o tema é o *Desenvolvimento do pensamento matemático*. O programa científico inclui sessões plenárias, apresentações individuais, em formato de comunicação de relatório de investigação, pequena comunicação e poster, e apresentações em grupo, no formato de grupos de discussão, fóruns de investigação e sessões de trabalho.



Volta a Portugal com a Matemática

Andreia Carvalho
Bruno Magina

Por norma, em cada ano lectivo, um Professor não trabalha com mais do que algumas dezenas de alunos. Em 2009, Andreia Carvalho e Bruno Magina foram, talvez, a única excepção. Por eles terão passado perto de 20 mil estudantes de todo o País. Algo que permitiu-lhes compreender em que estado se encontra a Matemática nas nossas escolas.

Entre Janeiro e Junho de 2009, dentro de um camião TIR, percorremos Portugal de Norte a Sul. Estacionámos em escolas, câmaras, feiras e exposições. Objectivo? Incentivar e desmistificar, junto de alunos e professores, o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Tratou-se da última edição do CAIXAmat, uma parceria entre a Universidade de Aveiro e a Caixa Geral de Depósitos, com actividades e conteúdos concebidos e pensados pelo PmatE (Projecto Matemática Ensino) propositadamente para o efeito.

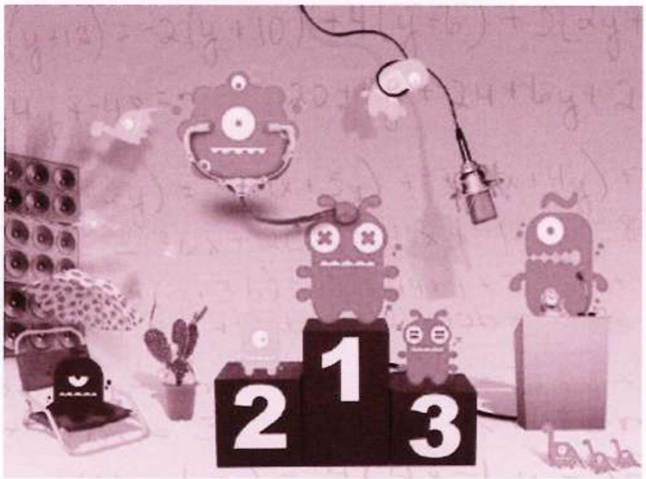
Fazer uma *tournée* pelo País, apesar de ser um sonho antigo, era algo em que, até há muito pouco tempo, não nos atreveríamos sequer a pensar. Contudo, quando surgiu a oportunidade, não hesitámos em agarrá-la. Dada a nossa profissão, esta foi e será sempre uma experiência singular e enriquecedora.

Aliada à Matemática, o *roadshow* apostou fortemente numa outra vertente: actividades experimentais e tecnológicas. Agradou-nos muito a ideia de proporcionar aos alunos um contacto com este tipo de tarefas e dispositivos. Sabemos que na sala de aula nem sempre isso é possível.

O camião era visitado diariamente, no mínimo, por cerca de 200 alunos. Os mais novos (1.° e 2.° ciclos) geralmente chegavam com grande entusiasmo. Os mais velhos (3.° ciclo e secundário) confessavam, muitos deles, não gostar de Matemática, rindo-se e achando isso natural. Todos eles, embora de forma diferenciada, realizavam o mesmo tipo de actividades: 1) construção e análise de gráficos, através de um sensor de movimento, e 2) realização de competições *online*, usando modelos geradores de questões.

Construção e análise de gráficos

De modo a motivar os nossos passageiros para o estudo da Matemática e, neste caso específico, para a construção e



análise de gráficos, decidimos utilizar vários tipos de sensores, nomeadamente sensores de movimento, bem como quadros interactivos.

Começávamos normalmente as nossas sessões seleccionando o aluno mais rápido da turma. Este teria de fazer um pequeno percurso pelo camião, do sensor à janela e da janela de volta ao sensor, andando e correndo à sua vontade. Eram assim construídos, separadamente ou em simultâneo, os gráficos posição-tempo, velocidade-tempo e aceleração-tempo.

Desta forma, tentávamos com os mais novos associar a Matemática ao desporto, às portas automáticas, aos radares, etc., mostrando aos alunos alguns dos muitos exemplos da aplicação desta ciência na vida real. No 3.° ciclo, analisávamos o gráfico posição-tempo e a definição de função, enquanto no secundário já olhávamos os gráficos com outro rigor, falando de limites, derivadas, continuidade, monotonia e extremos.

Vários alunos questionavam-nos sobre se os gráficos apresentados eram reais, pois não compreendiam por que razão a aceleração ou a velocidade eram negativas, em alguns instantes.

Também ocorriam alguns erros de medição sempre que o aluno se afastava da zona de alcance do próprio sensor, fazendo assim disparar o valor da velocidade.

Modelos geradores de questões

É graças a esta filosofia única no País — os modelos geradores de questões — e quiçá no mundo que se tornaram possíveis as Competições Nacionais, que se realizam há já mais de vinte anos no Campus da Universidade de Aveiro.

Elaborados por professores da disciplina, os modelos são a peça fundamental do *software* que o PmatE produz. Sempre que se inicia uma prova, seja para diagnosticar, treinar, avaliar ou simplesmente jogar, surgem quatro questões de verdadeiro ou falso que, embora relacionados com os mesmos temas e objectivos, são formuladas sempre de diferentes formas, impossibilitando assim a memorização ou a cópia de respostas.

Observando os alunos a realizar estas competições nos computadores, alegre e insistentemente, apercebemo-nos de uma série de dificuldades.

Muitos deles não reconheciam, de forma imediata, que na sequência 1... 4... 7... 10 estão quatro números de 3 em 3, pois estavam, na sua maioria, à espera de encontrar simplesmente múltiplos de 3. Sentiam dificuldade em compreender que a negação de uma negação (ex: «a soma de quatro com quatro não é diferente de 8»), é uma afirmação. Não entendiam que um quadrado também é um rectângulo e, por vezes, até consideravam que o programa estava errado, o que era caricato, pois o software do PmatE é, obviamente, analisado e testado antes da sua implementação.

Para além disso, notámos a falta de cuidado e vontade por parte da grande maioria dos alunos em ler os enunciados de forma atenta, na ânsia de responder o mais depressa possível.

Balanço final

O CAIXAmat 2009, iniciado a 27 de Janeiro na Amadora e concluído em Portalegre, a 19 de Junho, no último dia do ano lectivo, foi um projecto muito positivo para todos, tanto visitantes como monitores. Esta foi uma experiência muito importante para nós, enquanto novos Professores, pois possibilitou-nos ter uma percepção da realidade da Educação no nosso País.

Encontrámos escolas bem equipadas e com bons resultados e outras com grande falta de meios, indisciplina e até mesmo violência. Infelizmente, nos tempos de hoje, ainda existem escolas públicas com dificuldades de acesso à Internet. Podemos dizer, com muito pesar nosso, que apesar do Plano Tecnológico da Educação (PTE), ainda há alunos info-excluídos quando se trata da utilização de novas tecnologias.

Nesta nossa exposição itinerante participaram alunos de todas as idades, desde o pré-escolar, passando pelo ensino básico e secundário, até a alunos do ensino nocturno.

Os alunos de Escolas Profissionais e de Cursos de Educação e Formação de Jovens (CEF) aderiam muito mais à actividade de construção e análise de gráficos. Achamos isso natural, pois com a utilização de sensores descobrem-se muitas aplicações da Matemática à realidade, e é isso que estes estudantes procuram. Os alunos de ensino regular, por contraste, gostavam do desafio que os modelos geradores de questões lhes proporcionavam. Repetiam as provas, autonomamente, tentando sempre ir mais além em cada competição.

Apesar de todas as dificuldades e do cansaço natural no final do projecto, podemos assumir que iniciativas deste género deveriam ser mais frequentes. As vantagens são muitas, já que permitem aos alunos envolvidos olhar para a Matemática de uma outra forma e tirar partido de recursos que, infelizmente, não estão ao alcance de todos. Para os professores, por seu lado, constituem uma autêntica lufada de ar fresco e um estímulo para continuarem a trabalhar.

Gostaríamos de aproveitar para agradecer uma vez mais à equipa do PmatE a oportunidade que nos deu de participar neste tipo de projecto que esperamos não ser o último.

Projecto Matemática Ensino: http://pmate.ua.pt

Andreia Carvalho, Agrupamento de Escolas da Alapraia

Bruno Magina, Agrupamento de Escolas da Damaia

Encontro de Investigação em Educação Matemática

Ensino e Aprendizagem da Álgebra

7 e 8 de Maio de 2011
Póvoa de Varzim

O Encontro de Investigação em Educação Matemática 2011 realiza-se a 7 e 8 de Maio de 2011, no *Áxis Vermar Conference & Beach Hotel*, na Póvoa de Varzim, tendo como tema o «Ensino e Aprendizagem da Álgebra». Este encontro tem como propósito principal reflectir sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra, desde o Ensino Básico ao Ensino Superior, partilhar resultados de investigação, perspectivar e promover futuras investigações, encontrar desafios e novos rumos.

Durante o encontro, serão discutidos e analisados trabalhos de investigação, concluídos ou em curso, prevendo-se a constituição de vários grupos de discussão, cujas temáticas dependerão das diferentes propostas de comunicação a submeter pelos participantes.

O EIEM 2011 destina-se a todos os investigadores, formadores ou professores que se interessem pela investigação sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

Datas importantes:

Prazo limite para submissão de comunicações:

- Envio do texto integral da proposta de comunicação: 16 de Março de 2011
- Resposta da Comissão Científica: 10 de Abril de 2011
- Envio do texto final (versão corrigida): 20 de Abril de 2011

Prazo limite para inscrições:

- Normal: 16 de Março de 2011
- Com agravamento do preço em 50.00€: 10 de Abril de 2011

Opções de inscrição

Opção A: Duas noites
A inscrição inclui 2 dormidas, 6 e 7 de Maio de 2011, 2 refeições (as indicadas no programa), 3 *coffeebreaks*, pasta e actas do encontro em formato digital.

Quarto Individual	250 €
Quarto Duplo	200 €/pessoa

Opção B: Uma noite
A inscrição inclui a dormida de 7 de Maio de 2011, 2 refeições (as indicadas no programa), 3 *coffeebreaks*, pasta e actas do encontro em formato digital.

Quarto Individual	220 €
Quarto Duplo	170 €/pessoa

A inscrição e pagamento são feitos *on-line*, em formulário próprio, no site respectivo (em construção).

Sessões plenárias e Comunicações orais

No EIEM2011 haverá sessões plenárias e comunicações orais. As sessões plenárias estarão a cargo de oradores convidados.

As comunicações orais serão organizadas e apresentadas em Grupos de Discussão. Estes Grupos de Discussão serão constituídos com base nas contribuições recebidas. A organização e funcionamento dos Grupos de Discussão ficarão a cargo dos respectivos dinamizadores e serão oportunamente comunicados aos oradores. Nas salas onde decorrerão os Grupos de Discussão, haverá à disposição um projector multimédia e um computador com o *Office* 2003. No caso de ser necessário *software* adicional, este terá de ficar a cargo do respectivo orador e de ser comunicado à Comissão Organizadora.

Submissão de comunicações

O texto integral das comunicações deve seguir as normas para edição abaixo indicadas, não deve ultrapassar os 35000 caracteres e deve ser enviado até 16 de Março de 2011 2011.eiem@gmail.com. A resposta da Comissão Científica sobre a aceitação ou não da comunicação será enviada até dia 10 de Abril de 2011.

Comissão Organizadora

Rosa Antónia Ferreira, Isabel Vale, Maria Helena Martinho, João Pedro da Ponte.

Contactos

Encontro de Investigação em Educação Matemática 2011
Apoio: CMUP – Centro de Matemática da Universidade do Porto, Portugal
Email: 2011.eiem@gmail.com
Site: http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/index.html

APM – 2011

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2011

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço http://www.apm.pt

Assinaturas das revistas para 2011

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções